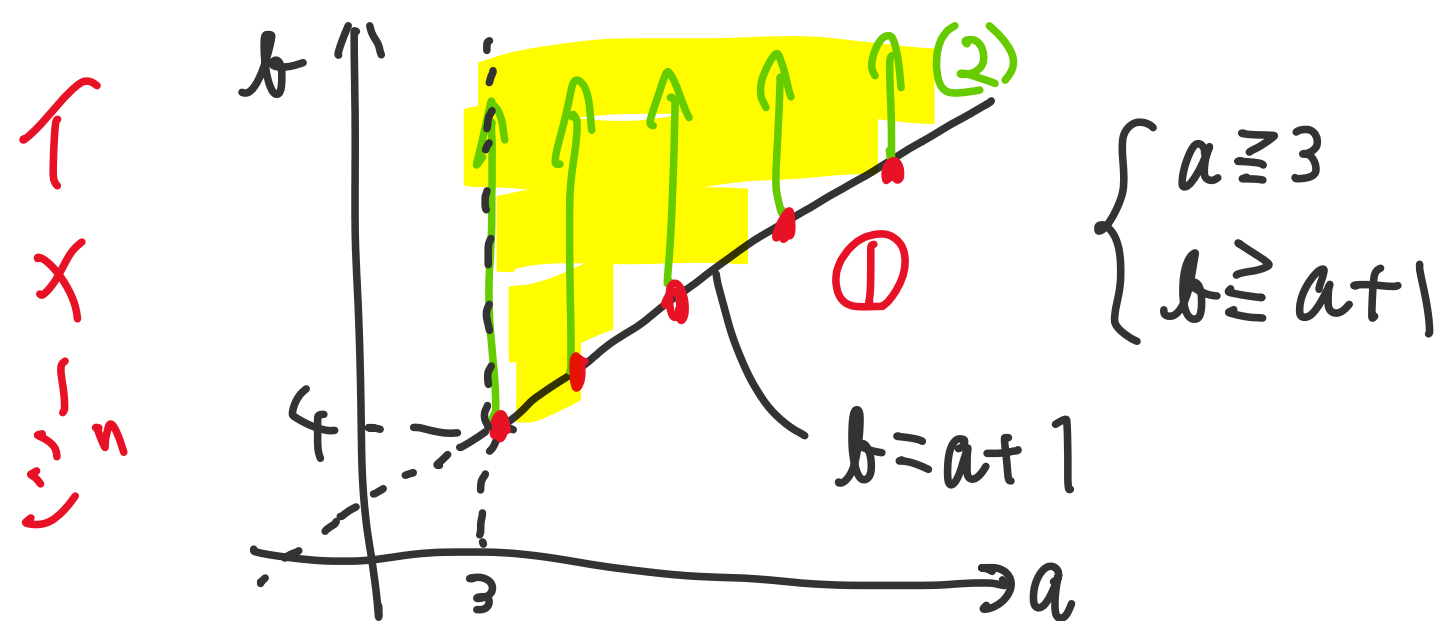


命題X $a < b$ を満たす任意の正の整数 a, b について $a \geq 3 \Rightarrow a^b > b^a$

数学的帰納法による。

命題Xが真 \Leftrightarrow $\begin{cases} \text{任意の3以上の整数 } k \text{ について } a=k, b=k+1 \text{ で成立する} \dots ① \\ a=k, b=l (3 \leq k < l, k, l \in \mathbb{N}) \text{ が成立すれば仮定より } a=k, b=l+1 \text{ も成立する} \dots ② \end{cases}$
 数学的帰納法の仮定



① 仮定から $k \geq 3$

$k^{k+1} > (k+1)^k$ を示す。

$$k^{k+1} = k \cdot k^k$$

$$(k+1)^k = \sum_{p=0}^{k-2} {}^k C_p k^{k-p} + k^2 + 1$$

$$= \sum_{p=0}^{k-2} \frac{{}^k C_p}{k^p} k^k + k^2 + 1$$

$$< \sum_{p=0}^{k-2} \frac{k^p}{k^p} k^k + k^2 + 1$$

$$= (k-1)k^k + k^2 + 1$$

\therefore $k \geq 3$ から

$$k^2 + 1 < k^2 + k + 1 < (k-1)(k^2 + k + 1) = k^3 - 1 < k^3 \leq k^k$$

$$\therefore (k+1)^k < k \cdot k^k$$

$$\text{したがって } k^{k+1} > (k+1)^k$$

② 仮定から $3 \leq k < l$

$k^{l+1} > (l+1)^k$ を示す。

数学的帰納法の仮定から $k^l > l^k$

$$k^{l+1} = k \cdot k^l$$

$$> k \cdot l^k \dots \textcircled{A}$$

$$(l+1)^k = \sum_{p=0}^{k-2} {}^k C_p l^{k-p} + kl + 1$$

$$= \sum_{p=0}^{k-2} \frac{{}^k C_p}{l^p} \times l^k + kl + 1$$

$$\leq \sum_{p=0}^{k-2} \frac{k^p}{l^p} \times l^k + kl + 1$$

$$\leq \sum_{p=0}^{k-2} \frac{k^p}{l^p} \times l^k + kl + 1$$

$$= \sum_{p=0}^{k-2} \left(\frac{k}{l}\right)^p \times l^k + kl + 1$$

$$< (k-1)l^k + kl + 1 \quad \left(\because 0 < \frac{k}{l} < 1\right)$$

\therefore $3 \leq k < l$ より

$$kl + 1 < l^2 + 1 < l^2 + l + 1 < (l-1)(l^2 + l + 1) = l^3 - 1 < l^3 \leq l^l$$

$$\therefore (l+1)^k < k \cdot l^k \dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ より } k^{l+1} > (l+1)^k$$