Suken Math Contest 022

[問題内容]
今回は、さまざまな問題について深く思考し効率的に解いて欲しいという意図が主である問題構成です。数学オリンピックの対策ではありません。

[注意]
問題3以降は記述式です。答えに至る過程を記述し、高校までの数学の範囲でない定理や公式を使うときは証明をしてください。
問題1,2は答えのみを採点しますが、記述を提出しても構いません。

[配点]
<全5題>
問題1：60点(20点×3)
問題2：100点(50点×2)
問題3：110点
問題4：160点
問題5：150点(50点×3)
計600点

問題1

次の7つの出来事を古い順に並べ替えたとき、2番目、4番目、6番目に当てはまるものをそれぞれ答えよ。

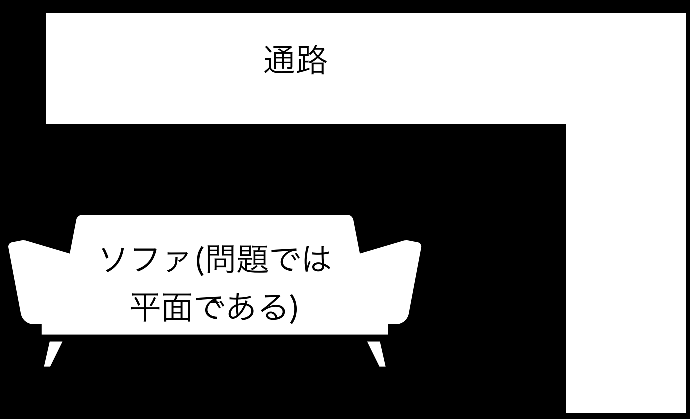
A. ジョン・ネイピアが対数表を発表する
B. フェルマーの最終定理が証明される(査読完了)
C. 四色定理の証明が発表される
D. ポアンカレ予想(ミレニアム懸賞問題の一つ)が証明される
E. 三角比が使われ始める
F. シュリニヴァーサ・ラマヌジャンが円周率の公式$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$を発見する
G. ソファ問題を解決したとする論文が投稿される

<フェルマーの最終定理とは?>
「x, y, zが正の整数のとき、$x^n + y^n = z^n$を満たす3以上の整数nは存在しない。」

<四色定理とは?>
「線で分割されたどんな平面図形も4色でとなり合う領域の色が同じにならないように塗り分けることができる。」
すなわち、「単純なグラフの隣り合う2頂点の色が異なるように塗り分けるには4色で十分である。」

<ポアンカレ予想とは?>
3次元の一般的な立体の形状に関する命題

<ソファ問題とは?>
L字型の通路を通ることのできる平面のソファの面積の最大値を求める問題

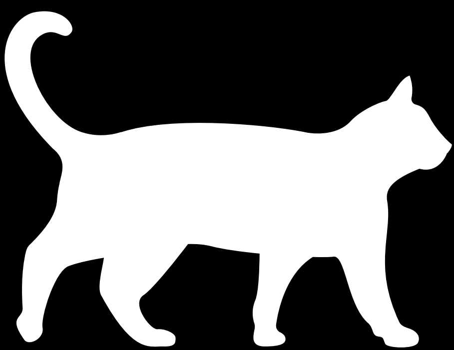


問題2

CPP猫が国内旅行をしている。この国には1,2,3,...,Nと番号の振られたN個のスポットがある。
スポット間を移動するには直通バスに乗らなければならない。それぞれの直通バスは、1以上N以下の整数i, jが$|i-j| \geq 2$かつiとjが互いに素であるとき、地点i, j間を走っており、双方向に行き来できる。
例えば、N=6のとき、スポット2からはスポット5のみにバスが出ており、スポット5からはスポット1,2,3にバスが出ている。
CPP猫は今スポット1にいて、予算に余裕があるので、スポット1,N以外のなるべく多くのスポットを廻ってスポットNに行きたい。ただし、CPP猫は同じスポットに2回以上は行きたくない。以下の小問の条件下で、CPP猫が最も多くのスポットを重複なく回ることができるような旅行プランをそれぞれ1つ求めよ。
以下の形式で解答すること。すべてのスポットを廻ることができないこともある点に注意せよ。
1 → () → () → ... → () → N ※()には適切な数字を入れること

(1) N=11

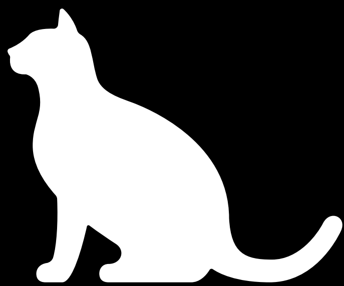
(2) N=13



問題3

ストーリー："CPP猫"は ~XOR漸化式~ を繰り出した

問題↓



次の数列の一般項を求めよ。

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = n \oplus a_{n-1} (n \geq 2) \end{cases}$$

ただし、$x \oplus y$はx, yの排他的論理和を表す。

排他的論理和とは?

x, yの排他的論理和$x \oplus y$とは、x, yを2進法で表したときの各位について、位の数が同じならば0, 異なるならば1をとり、それを2進数とみなしたものである。
例えば、
$5 \oplus 3$は

$$5 = 101_{(2)}$$
$$3 = 011_{(2)}$$
$$5 \oplus 3 = 110_{(2)}$$

から$5 \oplus 3 = 6$である。

同様に$4 \oplus 0 = 100_{(2)} \oplus 000_{(2)} = 100_{(2)} = 4$である。

また、$x \oplus y = y \oplus x$が証明できる。

より厳密には、$f(0,1) = f(1,0) = 1, f(0,0) = f(1,1) = 0$と関数 f を定義すると、

十分に大きい($2^N > x$かつ$2^N > y$を満たす)正整数Nをとると、x, yは2進法の性質から

$$x = \sum_{k=0}^{N} a_k 2^k (a_k \in \{0,1\})$$

$$y = \sum_{k=0}^{N} b_k 2^k (b_k \in \{0,1\})$$

とただ1通りに表されるので、

$$x \oplus y = \sum_{k=0}^{N} f(a_k, b_k) \times 2^k$$

と定義する。

問題4

すべての実数について定義され実数値をとる関数 f, g がある。

以下の条件を満たす関数 f が存在するための関数 g の満たす必要十分条件を求めよ。

$$\begin{cases} f(g(x)) = 1 \\ f(-g(x)) = -1 \end{cases}$$

問題5

[この大問では微分・積分公式を証明なしに用いてよい]

M博士とその仲間たちはボールの発射台を作った。
以下は、ある平面におけるその発射台の断面についての情報である。
$0 \leq x \leq 5$の部分にあり、点$(0,t),(4,1)$を通る(tは正の実数)。

$x \leq 4$の部分は円の弧であり、$x \geq 4$の部分は$y = e^{x-5} + 1 - \dfrac{1}{e}$のグラフ・・・(＊)である。

$x = 4$における接線の傾きはともに等しい。

(1) tとしてありうる最大値を求めよ。[最大であることの証明もすること]

しかし、思うようにボールが飛ばなかったため、彼らは発射台を改良し、断面における$x \leq 4$の部分のみ次のように変更された。

> 点$(0,4),(4,1)$を通り、$x = 4$における接線の傾きが(＊)の接線の傾きと等しい放物線

改良後の発射台を発射台・改と呼ぶ。

(2) 発射台・改の断面のy座標が最も小さい点のx座標を求めよ。ただし、求めた点について、その点で、またその点に限りy座標が最小となることも示すこと。底が1より大きい指数関数が単調増加であることは証明なしに用いてよい。

(3) 発射台・改の断面を構成する曲線と$y = 0$, $x = 0$, $x = 5$に囲まれた部分の面積を求めよ。

ヒント
$(e^x)' = e^x$