

SMC021 - 問題

注意

- 特に指示のない限り10進法を用いる。
- 最終的な答えは0以上 10^6 未満の整数([4]以外)または有限小数([4]のみ)になることが保証される。
- XYで線分XYの長さを表すものとする。
- [9/18追加]「さいころ」を振ると1,2,3,4,5,6のいずれか一つが出て、どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

[800点満点]

[1]

x を実数とする。 $\frac{x}{x^2+21}$ の最大値(a とする)を求めよ。

ただし、 a^2 は互いに素である正の整数 p, q を用いて $\frac{p}{q}$ と表されるので、 $p + q$ を解答せよ。

[100点]

[2]

2025!は2で何回割り切れるか。

[100点]

[3]

大、中、小3つのさいころを同時に1回振り、出た目を順に x, y, z とする。

このとき、 $x+y$ と yz が互いに素(最大公約数が1)になる目の出方は何通りか。

[100点]

[4]

半径1の円に四角形ABCDが内接しており、 $\angle D=60^\circ$ である。

$AB + BC \geq \sqrt[4]{12}$ のとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値と最小値をそれぞれ求め、それらの和の小数第3位を四捨五入した値を解答せよ。

ただし、 $\sqrt[4]{12}$ は4乗すると12になる正の実数である。

[200点]

次ページに問5があります。

[5]

e をネイピア数(自然対数の底)とする。

0以上の実数 x について定義される関数 xe^x の逆関数を $W(x)$ とする。

(すなわち、 $W(x)$ は x の関数で $W(x)e^{W(x)} = x$ を満たす。ただし $x \geq 0, W(x) \geq 0$)

1. $W^{(5)}(0)$ の値(すなわち、 $W(x)$ を x で5回微分した関数に0を代入した値)を求めよ。答えは整数である。
2. $e^5 W^{(5)}(e)$ の値は、互いに素である正の整数 p, q を用いて $\frac{p}{q}$ と表される。 $p + q$ を解答せよ。

[各150点]

以上