命題

$3 \leq a < b$を満たす任意の整数a, bについて,$a^{b} > b^{a}$が成り立つ。

証明

以下の2つを示す。(数学的帰納法の拡張)

A. 任意の3以上の整数nについて,$n^{n+1} > (n+1)^{n}$が成り立つ。
B. $3 \leq k < l$を満たすについて,$k^{l} > l^{k}$と仮定すると,$k^{l+1} > (l+1)^{k}$が成り立つ。

Aの証明

$$(n+1)^{n} = \left(\sum_{p=0}^{n-2} {}_{n}C_{p}\, n^{n-p}\right) + n^{2} + 1 = \left(\sum_{p=0}^{n-2} \frac{{}_{n}C_{p}}{n^{p}} n^{n}\right) + n^{2} + 1$$

$$\leq \left(\sum_{p=0}^{n-2} \frac{{}_{n}P_{p}}{n^{p}} n^{n}\right) + n^{2} + 1$$

$$\leq \left(\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n^{p}}{n^{p}} n^{n}\right) + n^{2} + 1 = \left(\sum_{p=0}^{n-2} n^{n}\right) + n^{2} + 1 = (n-1)n^{n} + n^{2} + 1$$

$n \geq 3$より$n^{3} - n^{2} = (n-1)n(n+1) > 1$であるため$n^{2} + 1 < n^{3} \leq n^{n}$

よって,$(n-1)n^{n} + n^{2} + 1 < (n-1)n^{n} + n^{n} = n \times n^{n} = n^{n+1}$

したがって,任意の3以上の整数nについて,$n^{n+1} > (n+1)^{n}$が成り立つ。

Bの証明

数学的帰納法の仮定から$k^{l} > l^{k}$

$k^{l+1} = k \times k^{l} > kl^{k}$・・・①

$$(l+1)^{k} = \left(\sum_{p=0}^{k-2} {}_{k}C_{p}\, l^{k-p}\right) + kl + 1 = \left(\sum_{p=0}^{k-2} \frac{{}_{k}C_{p}}{l^{p}} l^{k}\right) + kl + 1$$

$$\leq \left(\sum_{p=0}^{k-2} \frac{{}_{k}P_{p}}{l^{p}} l^{k}\right) + kl + 1 \quad (\because\ {}_{k}C_{p} \leq {}_{k}P_{p})$$

$$\leq \left(\sum_{p=0}^{k-2} \frac{k^{p}}{l^{p}} l^{k}\right) + kl + 1 = \left\{\sum_{p=0}^{k-2} \left(\frac{k}{l}\right)^{p} l^{k}\right\} + kl + 1 \quad (\because\ {}_{k}P_{p} \leq k^{p})$$

$$\leq \left(\sum_{p=0}^{k-2} l^{k}\right) + kl + 1 \ (0 < k < l, p > 0\text{から})$$

$$= (k-1)l^{k} + kl + 1$$

ここで,$k \geq 3, l > 3$から,
$kl + 1 < l^2 + 1 < l^2 + l + 1 < (l - 1)\left(l^2 + l + 1\right) = l^3 - 1 < l^3 \leq l^k$
であるので,
$(k - 1)l^k + kl + 1 < (k - 1)l^k + l^k = kl^k$・・・②
①,②から,$k^{l+1} > (l + 1)^k$が成り立つ。

A,Bから,$3 \leq a < b$を満たす任意の整数a, bについて,$a^b > b^a$が成り立つ。

派生(累乗根)

a, bは整数で$3 \leq a < b$のとき,$a^b > b^a$であることから,以下のことがいえる。

$a^b > b^a > 1$より,$a^b > b^a \Leftrightarrow a^{\frac{b}{ab}} > b^{\frac{a}{ab}} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}} \Leftrightarrow \sqrt[a]{a} > \sqrt[b]{b}$

拡張

上の命題で$a = 2$の場合,$b \geq 5$であれば$a^b > b^a$が成り立つ。

証明

任意の5以上の整数bについて$2^b > b^2$が成り立つことを数学的帰納法により示す。
$b = 5$のとき$2^5 > 5^2$から成り立つ。
$b = k$(kは5以上の整数)のとき成り立つと仮定すると$b = k + 1$のときにも成り立つことを示す。
数学的帰納法の仮定から$2^k > k^2$
$k \geq 5$から$1 \leq \frac{k}{5}$だから$(k + 1)^2 \leq \left(k + \frac{k}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}k^2 < 2k^2 < 2 \times 2^k = 2^{k+1}$
よって $2^{k+1} > (k + 1)^2$
したがって,任意の5以上の整数bについて$2^b > b^2$が成り立つ。

まとめ

境界付近での$a^b - b^a$の符号は以下の表のようになる。$a = b$のとき明らかに($a^b - b^a = 0$)

a\b	1	2	3	4	5	6
1	0	-	-	-	-	-
2	未定義	0	-	0	+	+
3	未定義	未定義	0	+	+	+
4	未定義	未定義	未定義	0	+	+