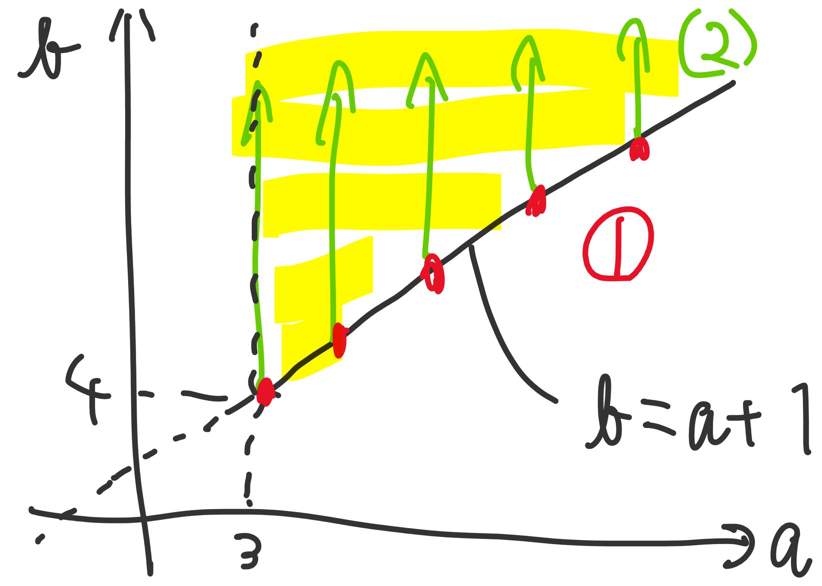
問2(1)簡易解答

2025年6月12日 木曜日　22:58

命題X　$a<b$ を満たす任意の正の整数 a, b について　$a \geqq 3 \Longrightarrow a^b > b^a$

イメージ



$\begin{cases} a \geqq 3 \\ b \geqq a+1 \end{cases}$

数学的帰納法です。

命題Xが真 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{任意の3以上の整数 } k \text{ について } a=k,\ b=k+1 \text{ で成立する} \cdots ① \\ a=k,\ b=l\ (3 \leqq k<l,\ k, l \in \mathbb{N}) \text{ で成立すると仮定すると } a=k,\ b=l+1 \text{ でも成立する} \cdots ② \end{cases}$

数学的帰納法の仮定

① 仮定から $k \geqq 3$

$k^{k+1} > (k+1)^k$ を示す。

$k^{k+1} = k \cdot k^k$

$$(k+1)^k = \sum_{p=2}^{k} {}_kC_p\, k^{k-p} + k^2 + 1$$

$$= \sum_{p=2}^{k} \frac{{}_kC_p}{k^p} k^k + k^2 + 1$$

$$< \sum_{p=2}^{k} \frac{k^p}{k^p} k^k + k^2 + 1$$

$$= (k-1)k^k + k^2 + 1$$

ここで $k \geqq 3$ から

$$k^2+1 < k^2+k+1 < (k-1)(k^2+k+1) = k^3-1 < k^3 \leqq k^k$$

よって $(k+1)^k < k \cdot k^k$

したがって $k^{k+1} > (k+1)^k$

② 仮定から $3 \leqq k < l$

$k^{l+1} > (l+1)^k$ を示す。

数学的帰納法の仮定から $k^l > l^k$

$$k^{l+1} = k \cdot k^l$$

$$> k\ l^k \cdots Ⓐ$$

$$(l+1)^k = \sum_{p=2}^{k} {}_kC_p\, l^{k-p} + kl + 1$$

$$= \sum_{p=2}^{k} \frac{{}_kC_p}{l^p} \times l^k + kl + 1$$

$$\leqq \sum_{p=2}^{k} \frac{{}_kP_p}{l^p} \times l^k + kl + 1$$

$$\leqq \sum_{p=2}^{k} \frac{k^p}{l^p} \times l^k + kl + 1$$

$$= \sum_{p=2}^{k} \left(\frac{k}{l}\right)^p \times l^k + kl + 1$$

$$< (k-1)\,l^k + kl + 1$$

ここで、$3 \leqq k < l$ より

$$kl+1 < l^2+1 < l^2+\underbrace{l}_{>0}+1 < \underbrace{(l-1)}_{>1}(l^2+l+1) = l^3-1 < l^3 \leqq l^k$$

よって $(l+1)^k < k\,l^k \cdots Ⓑ$

Ⓐ, Ⓑより $k^{l+1} > (l+1)^k$