## Universidad Nacional de Ingeniería
## Escuela Profesional de Matemática
## Ciclo 2021-I

[ **C2MH2 : Introducción a los procesos estocásticos** ]
[ **Tema: Variación de una función, teoremas con respecto a integrales de Riemann y Lebesgue** ]

---

# Práctica dirigida 2

1. $$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - 1) + Y_{n+1} & , X_n \geq 1 \\ X_{n+1} = Y_{n+1} & , X_n = 0 \end{cases}$$

   Consideramos que las v.a. $(Y_n)_{n\geq 1}$ son i.i.d con distribución $\mathbb{P}(Y_n = i) = q(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y $X_0$ independiente de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demuestre que:

   (a) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} q(j) & \text{, si } i = 0, \\ q(j - i + 1) & \text{, si } i \geq 1 \end{cases}$

   (b) Denotamos por $T_0 = \text{mín}\{n \geq 1 : X_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Demuestre que:
   $$\mathbb{P}(T_0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}(T_0 | X_0 = 1)$$

   (c) Muestre:
   $$\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - 1 + \frac{X_0}{n}$$

   (d) Deducir que si $\mathbb{E}(Y_1) > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ con probabilidad 1.

   (e) Demuestre la inclusión de eventos:
   $$\{T_0 = \infty\} \subset \{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n + X_0 \geq 1, \forall n \geq 1\}$$

   (f) Finalmente, considerando que $\mathbb{E}(Y_1) < 1$ demuestre que:
   $$T_0 < \infty \text{ con probabilidad } 1$$

2. Sean $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ con $|\text{Det}(A)| \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^p$ y $Y$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^p$ de densidad $f_Y$. Demostrar que para $X = AY + b$ su función de densidad $f_X$ esta dada por:
   $$f_X(u) = f_Y(A^{-1}(u - b))|\text{Det}(A^{-1})|$$

3. Dados dos vectores aleatorios $X \in \mathbb{R}^p$, $Y \in \mathbb{R}^q$, demuestre:

   (a) $C(X, Y) = C(Y, X)^T$

   (b) $C(X_1 + X_2, Y) = C(X_1, Y) + C(X_2, Y)$

   (c) Si $A$ es una matriz de $m \times p$ y $B$ es una matriz de $k \times q$, entonces $C(AX, BY) = AC(X, Y)B^T$,

   (d) Si $X, Y$ tienen la misma dimensión entonce
   $$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + C(X, Y) + C(Y, X)$$

4. Sea $\Sigma$ una matriz simétrica definida positiva de orden $p$, $\Sigma > 0$ y $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I)$, Demuestre que $X = \Sigma^{1/2}Y + \mu$ tiene por función de densidad:
   $$f_X(u) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{\text{Det}(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u - \mu)^T\Sigma^{-1}(u - \mu)\right)$$

5. Dado $X$ vector aleatorio en $\mathbb{R}^p$. Demuestre que si para todo $a \in \mathbb{R}^p$ se tiene que $a^T X$ tiene distribución normal entonces $X$ es un vector aleatorio.

6. Sea $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma$ simétrica y positiva. Demuestre:
   (a) Las combinaciones lineales $a^T X$ para $a \in \mathbb{R}^p$ tenemos que:
   $$a^T X \sim \mathcal{N}_p(a^T \mu, a^T \Sigma a)$$
   (b) Si $Y = BX + c$ donde $B$ es una matriz de orden $q \times p$ y $c \in \mathbb{R}^q$ entonces:
   $$Y \sim \mathcal{N}_q(B\mu + c, B\Sigma B^T)$$
   (c) Si $X \sim \mathcal{N}_p(0, \sigma^2 I)$ y $\Gamma$ una matriz ortogonal entonces $\Gamma X \sim \mathcal{N}_p(0, \sigma^2 I)$
   (d) Sea $X = (X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ entonces $X_1$ un vector cuyas componentes pertenecen a $X$ tiene distribución normal.
   (e) Dos vectores aleatorios $X$ y $Y$ con distribución conjunta $(X, Y)$ normal. Entonces:
   $$X \text{ es independiente de } Y \Leftrightarrow C(X, Y) = 0$$
   (f) Lo anterior se puede generalizar para una cantidad finita de vectores aleatorios.
7. Sean $U \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ y $V \sim \Gamma(\beta, \theta)$ v.a. independientes. Determine la función de densidad de $Y = \frac{U}{U+V}$.
8. Sean $U \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ y $V \sim \Gamma(\beta, \theta)$ v.a. independientes. Determine la función de densidad de $Y = U + V$.
9. Sea $X \geq 0$ una v.a. continua, y $g$ una función continua creciente de clase $C^1$, tal que $g(0) = 0$. Mostrar que:
   $$\mathbb{E}(g(X)) = \int_0^{+\infty} g'(t)\mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$$
10. Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi}|x|e^{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}}$.
   (a) Determine la función de densidad de $X$,
   (b) Determine la función de densidad de $Y$,
   (c) Determine la función de densidad de $XY$,
   (d) Verifique si $X$ es independiente de $XY$.
11. Sea $X, Y$ dos v.a. reales. Suponemos que la densidad condicional de $X$ dado $Y = y$ es la densidad $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)y^2xe^{-xy}$ y que la función de densidad de $Y$ es $\frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(y)$. Dentamos por $T = XY$.
   (a) Determine la función de densidad conjunta $(T, Y)$.
   (b) Determine la función de densidad condicional de $Y$ dado $X = x$.
   (c) Determine $\mathbb{E}(Y|X)$
12. Sea $Y$ una v.a. uniforme en $[0, 1]$ y $X$ con valores en $\mathbb{N}$, con $X$ y $Y$ independientes. Considere $Z = XY$ y determine su distribución.
13. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independientes de distribucion uniforme sobre $[0, 1]$. Denotamos por:
   $$U_1 = X_1, U_n = X_n U_{n-1} \quad \text{para } n \geq 1$$
   Determine:
   (a) La distribución de $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.
   (b) La función de densidad de $U_n$ dado $U_{n-1} = u$.
14. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a normales independientes. Demuestre que $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio normal en $\mathbb{R}^n$
15. Sea $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y definimos:
   $$X_2 = \begin{cases} X_1 & , \text{ si } |X_1| \leq 1 \\ -X_1 & , \text{ si } |X_1| > 1 \end{cases}$$
   Demuestre:
   (a) $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
   (b) $X = (X_1, X_2)$ no sigue una distribución normal en $\mathbb{R}^2$. Concluya.

16. Sean $X$ y $Y$ dos v.a. independientes de cuadrado integrable, que tienen la misma distribución y con media 0. Sea $\Phi$ su función característica común. Suponiendo que la v.a. $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ tiene la misma distribución que $X$ y $Y$. Muestre que estas v.a. son necesariamente normales.

17. Sea $X$ una v.a. de Cauchy.
    (a) Determine la función característica de $X$.
    (b) Muestre que $\Phi_{2X} = (\Phi_X)^2$.

18. Sea $X$ un vector normal con media $0 \in \mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^d$. Sea $F$ un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^d$. Deseamos demostrar que:

$$\mathbb{P}(X \in F) = 0 \ \text{ o } \ 1$$

    (a) Consideramos $X_1$ y $X_2$ dos vectores independientes de misma distribución que $X$. Muestre que los conjuntos $A(\theta)$ definidos para todo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ por:

$$A(\theta) = \{\omega : X_1(\omega)\cos(\theta) + X_2(\omega)\sin(\theta) \in F \ , \ X_1(\omega)\sin(\theta) - X_2(\omega)\cos(\theta) \notin F\}$$

    son disjuntos para los distintos valores de $\theta$.
    (b) Muestre que $\mathbb{P}(A(\theta)) = \mathbb{P}(A(0))$, para todo $\theta$. Muestre que para todo $\theta$ el vector:

$$\begin{pmatrix} X_1\cos(\theta) + X_2\sin(\theta) \\ X_1\sin(\theta) - X_2\cos(\theta) \end{pmatrix} \ \text{tiene la misma distribución que} \ \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \end{pmatrix}$$

    (c) Muestre que $\mathbb{P}(A(0)) = 0$. Deducir el resultado del inicio.

19. En distintos modelos aplicados es frecuente considerar sumas de variables aleatorias, con un número aleatorio de términos. Por ejemplo, si deseamos estudiar el número de hijas en una familia.

$$N = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{1}_{F_i}$$

    De otro lado, tenemos que una forma de caracterizar las v.a es mediante su función generatriz por ejemplos de una v.a. $Z$ tenemos que su función generatriz es $\mathbb{E}(x^Z)$ con $x \in [0, 1]$. De esta forma, consideramos una sucesión de v.a. i.i.d positivas $(X_n)_{n\geq 1}$ con función generatriz dada por:

$$g(x) = \mathbb{E}(x^{X_n})$$

    y $\nu$ una v.a. positiva independiente de la sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ cuya función generatriz esta dada por:

$$G(x) = \mathbb{E}(x^{\nu})$$

    Entonces demuestre que la suma $S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ con $S_0 = 0$ tiene por función generatriz:

$$\mathbb{E}(x^{S_\nu}) = G \circ g(x)$$

20. Del ejercicio anterior determine la función generatriz de $S_\nu$ para $X_m \sim Ber(p)$ y $\nu$ tiene una distribución de Poisson de media $\theta$.

21. Siguiendo con el ejercicio. Encuentre $\mathbb{E}(S_\nu)$ y $\mathbb{V}(S_v)$.

22. Dada $U$ v.a. uniforme sobre $[0, 1]$. Determine la distribución de $X = \frac{-1}{p}\ln(U)$ donde $p > 0$.

23. Sea $X = (X_1, X_2)^T \sim \mathcal{N}_2(0, I)$.
    (a) Recuerde su función de densidad, de $X$.
    (b) Determine la función de densidad de $X^TX$.
    (c) Sea $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$. Demuestre que la v.a. $T$ definida por:

$$T = \begin{cases} \left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2 & \text{si } X \notin D \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    admite una densidad y determine dicha densidad.

24. Dada la matriz de covarianza:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontrar $\Sigma^{1/2}$. Verificar que $\Sigma = UU^T$ y $U \neq \Sigma^{1/2}$donde:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

25. Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio con función de densidad:

$$f(x, y) = C \exp(-x^2 + xy - \frac{y^2}{2})$$

   (a) Muestre que $(X, Y)$ es un vector aleatorio normal en $\mathbb{R}^2$. Determine su media, su matriz de covarianza y su función característica.
   (b) Determine la función de densidad de $X$, de $Y$ y de $2X - Y$.
   (c) Muestre que $X$ y $X - Y$ son variables aleatorias independientes y de misma distribución.

26. Sea $X$ una v.a. real de distribución $\mathcal{N}(0,1)$ y $Z$ una v.a. tomando dos valores 1 o $-1$ con probabilidad 1/2. Supongamos que $X$ y $Z$ son independientes. Denotamos $Y = ZX$.
   (a) Muestre que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   (b) Determine la covarianza entre $X$ con $Y$.
   (c) Determine $\mathbb{P}(X + Y = 0)$.
   (d) El vector $(X, Y)$ es normal en $\mathbb{R}^2$.

27. Sea $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)^T$ un vector aleatorio normal, admitiendo densidad:

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{4(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{6z_1^2 + 6z_2^2 + 8z_3^2 + 4z_1 z_2}{32}\right)$$

   (a) Determine la distribución de $(Z_2, Z_3)$ dado $Z_1 = z_1$.
   (b) Sean $X$ y $Y$ dos vectores aleatorios definidos por:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} Z \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z$$

   (c) Determine si el vector $(X, Y)$ es normal en $\mathbb{R}^6$, y si $X$ tiene una función de densidad de forma similar para $Y$.
   (d) Los vectores $X$ y $Y$ son independientes.
   (e) Determine las distribuciones de las coordenadas de $Z$.

28. Sea $(X, Y, Z)^T$ un vector aleatorio normal de media cero y cuya matriz de covarianza es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Denotamos $U = -X + Y + Z$, $V = X - Y + Z$, y $W = X + Y - Z$. Determine la distribución del vector aleatorio: $(U, V, W)^T$.
   (b) Determine la densidad de $T = U^2 + V^2 + W^2$.

29. Entre las matrices siguientes, encuentre aquellas que pueden ser matrices de covarianza de un vector aleatorio $X$ en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Denotamos por $\Sigma$ dichas matrices, y consideraremos $X \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$.
   (a) Calcule para cada una de las matrices anteriores sus valores propios $\lambda_1, \lambda_2$ y sus vectores propios asociados $v_1, v_2$.

(b) Determine la función de densidad de $v_1^T X$ y $v_2^T X$.

30. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$ y $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reales. Mostrar que las v.a. $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ y $Z = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ son independientes si y solamente si $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

31. Sean $(\epsilon_Y, \epsilon_Z, X)$ un vector aleatorio normal tal que $\epsilon_Y$ , $\epsilon_Z$ y $X$ son independientes de distribuciones $\mathcal{N}(0,1), \mathcal{N}(0,1)$ y $\mathcal{N}(0,2)$. Denotamos por :

$$Z = 2Y - 3X + \epsilon_Z \quad Y = X + \epsilon_Y$$

(a) Determine la distribución del vector $(X, Y, Z)$.

(b) Determine su matriz de covarianza de dicho vector.

32. En construcción !

J.UGARTE .
UNI, 6 de mayo de 2021.