Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[**CM5H1 : Introducción a los procesos estocásticos**]
[**Tema: Modelos discretos, TLC, teoremas de convergencia, cadenas de Markov I.**]

Práctica dirigida 3

1.
$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - 1) + Y_{n+1} & , X_n \geq 1 \\ X_{n+1} = Y_{n+1} & , X_n = 0 \end{cases}$$

Consideramos que las v.a. $(Y_n)_{n\geq 1}$ son i.i.d con distribución $\mathbb{P}(Y_n = i) = q(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y X_0 independiente de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demuestre que:

(a) $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} q(j) & , \text{si } i = 0, \\ q(j - i + 1) & , \text{si } i \geq 1 \end{cases}$

(b) Denotamos por $T_0 = \min\{n \geq 1 : X_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Demuestre que:

$$\mathbb{P}(T_0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}(T_0 | X_0 = 1)$$

(c) Muestre:

$$\frac{X_n}{n} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - 1 + \frac{X_0}{n}$$

(d) Deducir que si $\mathbb{E}(Y_1) > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ con probabilidad 1.

(e) Demuestre la inclusión de eventos:

$$\{T_0 = \infty\} \subset \{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n + X_0 \geq 1, \forall n \geq 1\}$$

(f) Finalmente, considerando que $\mathbb{E}(Y_1) < 1$ demuestre que:

$$T_0 < \infty \text{ con probabilidad } 1$$

(g) Demuestre que es una cadena de Markov.

2. Sea X, Y dos v.a. reales. Suponemos que la densidad condicional de X dado $Y = y$ es la densidad $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)y^2xe^{-xy}$ y que la función de densidad de Y es $\frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(y)$. Dentamos por $T = XY$.

   (a) Determine la función de densidad conjunta (T, Y).

   (b) Determine la función de densidad condicional de Y dado $X = x$.

   (c) Determine $\mathbb{E}(Y|X)$

3. Sea X, Y dos v.a. reales. Suponemos que la densidad condicional de X dado $Y = y$ es la densidad $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)y^2xe^{-xy}$ y que la función de densidad de Y es $\frac{1}{y^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(y)$. Dentamos por $T = XY$.

   (a) Determine la función de densidad conjunta (T, Y).

   (b) Determine la función de densidad condicional de Y dado $X = x$.

   (c) Determine $\mathbb{E}(Y|X)$

4. En distintos modelos aplicados es frecuente considerar sumas de variables aleatorias, con un número aleatorio de términos. Por ejemplo, si deseamos estudiar el número de hijas en una familia.

$$N = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{1}_{F_i}$$

De otro lado, tenemos que una forma de caracterizar las v.a es mediante su función generatriz por ejemplos de una v.a. Z tenemos que su función generatriz es $\mathbb{E}(x^Z)$ con $x \in [0,1]$. De esta forma, consideramos una sucesión de v.a. i.i.d positivas $(X_n)_{n\geq 1}$ con función generatriz dada por:

$$g(x) = \mathbb{E}(x^{X_n})$$

y ν una v.a. positiva independiente de la sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ cuya función generatriz esta dada por:

$$G(x) = \mathbb{E}(x^{\nu})$$

Entonces demuestre que la suma $S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$ con $S_0 = 0$ tiene por función generatriz:

$$\mathbb{E}(x^{S_\nu}) = G \circ g(x)$$

5. Del ejercicio anterior determine la función generatriz de S_ν para $X_m \sim Ber(p)$ y ν tiene una distribución de Poisson de media θ.

6. Siguiendo con el ejercicio. Encuentre $\mathbb{E}(S_\nu)$ y $\mathbb{V}(S_v)$.

7. Demuestre que una sucesión de v.a.i.i.d es una cadena de Markov.

8. *Camino aleatorio*, definido de la siguiente forma:

$$X_0 = 0, \text{ y para } n \geq 0, \quad X_{n+1} = X_n + \xi_{n+1}$$

donde las v.a. ξ_n son i.i.d y dicha sucesión es independiente de X_0 cuya distribucion es:

$$\forall i \geq 1, \quad \mathbb{P}(\xi_i = 1) = p \text{ y } \mathbb{P}(\xi_i = -1) = q = 1 - p$$

   1. Determine su matriz de transición P.
   2. Demuestre que es una cadena de Markov.

9. *Modelo de inventario.* Una tienda de aparatos electrónicos vende un sistema de juegos de video y opera bajo el siguiente esquema: Si al final del día el número de unidades disponibles es 1 ó 0, se ordenan nuevas unidades para llevar el total a 5. Para simplificar supondremos que la nueva mercancía llega antes de que la tienda abra al día siguiente. Sea X_n el número de unidades disponibles al final del n-ésimo día y supongamos que el número de clientes que quieren comprar un juego en un día es 0, 1, 2, ó 3 con probabilidades 0.3; 0.4; 0.2 y 0.1 respectivamente.

   1. Modele el problema como una cadena de Markov, dando el espacio de estados y la matriz de transición. Denotaremos dicha cadena de Markov por $\{X_n\}_n \geq 0$

      En este caso se tiene una política de control de inventario (s, S) lo que nos dice que una vez que tenemos un stock menor o igual a s entonces se ordena tanta mercancía sea necesaria hasta obtener S. Además, denotamos la demanda diaria por D_n.
   2. Determine la recurrencia que se genera con X_n.
   3. Demuestre que X_n es una cadena de Markov, haciendo las suposiciones necesarias para esto.

10. Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d sobre un espacio F. Sea E un espacio de estados numerables y $f : E \times F \to E$. Consideramos X_0 una v.a. con valores en E independiente de la sucesión $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$. La sucesión $\{X_n\}_{n\geq 0}$ definida de forma recurrente por:

$$n \geq 0, \quad X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1})$$

   1. Demuestre que es una cadena de Markov.
   2. Determine su matriz de transición.

11. *Desigualdad de Kolgomorov* Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias reales independientes de media 0 y de varianza finita. Sea $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Deseamos mostrar la desigualdad de Kolgomorov,

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq t) \leq t^{-2} \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{V}(X_i)$$

Para todo $t > 0$.

   1. Considerar $A_k = \bigcap_{j<k}\{|S_j| < t\} \cap \{|S_k| \geq t\}$ para $k \in \{1, 2, ..., n\}$, indicar brevemente que son conjuntos medibles y que son disjuntos.

2. Denotamos por $A = \{\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge t\}$. Mostrar que:

$$A = \bigcup_{1\le k\le n} A_k$$

3. Enseguida, para $k \in \{1, 2, ..., n\}$ mostrar:

$$\mathbb{E}(S_n^2) \ge \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_n^2 d\mathbb{P}$$

4. Luego, mostrar que:

$$\int_{A_k} S_n^2 d\mathbb{P} = \mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) \ge \mathbb{E}(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \ge x^2 \mathbb{P}(A)$$

5. Concluir, utilizando los items anteriores.

12. Completar las siguientes propiedades de la función característica de una v.a. X.

1. $\bar{\phi}_X(t) = ...$
2. $|\phi_X|(t) = ...$
3. $\phi_{a+bX} = ...$
4. Determinar las funciones características de las v.a. de distribución binomial, Poisson, exponencial y uniforme.
5. Verificar que la función característica de una distribucion normal centrada y reducida es $e^{t^2/2}$.
6. Aplicando la propiedad 3, encontrar la la función característica de una v.a. normal de media μ y varianza σ^2.
7. Demostrar que si X con Y son v.a. independientes entonces:

$$\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$$

8. Aplicar este teorema para encontrar las distribuciones de la suma de dos variables aleatorias que tienen la misma densidad en el caso cuando estas sean: Normales, Binomial y Poisson.

13. El teorema demostrado en clase, lo podemos enunciar de otra forma:
Teorema Sean $\{X_n\}_n$ sucesión de v.a. reales.

1. Sea la sucesión X_n converge en ley hacia X entonces ϕ_{X_n} converge simplemente hacia ϕ_X.
2. Si ϕ_{X_n} converge simplemente hacia una función ϕ que es **continua en 0** entonces ϕ es la función característica de una v.a ademas tenemos que X_n converge en ley hacia X.

Esto tiene diversas aplicaciones y consecuencias inmediatas que deben de ser verificadas:

1. Si $X_n \sim \mathcal{B}(m, p_n)$, $X \sim \mathcal{B}(m, p_n)$ con $p_n \to p$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,
2. Si $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ con $m_n \to m$ y $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,
3. Si $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ con $\lambda_n \to \lambda$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

14. Sean X, Y v.a.i.i.d. reales tales que $X+Y$ y $X-Y$ son independientes. Designamos por ϕ la función característica de X.

1. Muestre que para todos $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\phi(s+t)\phi(s-t) = \phi^2(s)|\phi(t)|^2$$

2. Muestre que ϕ no se anula.
3. *Opcional* Mostrar que existe una función continua $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\phi = e^{\psi}$.
4. Resuelva esta ecuación funcional del ítem a. y verificar que la distribución de X es normal.

15. Determine:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $p \in [0, 1]$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Demuestre que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n})\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

17. Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ v.a.i.i.d. de distribución de Poisson de media 1. Denotamos por: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

    1. Muestre que:

    $$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

    2. Determine la distribución de S_n, luego muestre que:

    $$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + ... + \frac{n^n}{n!}) = \frac{1}{2}$$

18. Sea $x \in [0,1]$, $\{X_n^x\}_{n\geq 0}$ sucesión de v.a.i.i.d de Bernoulli de parámetro x.

    $$\mathbb{P}(X_0^x = 1) = x, \quad \mathbb{P}(X_0^x = 0) = 1 - x$$

    Denotamos por $S_n^x = \sum_{k=1}^n X_k^x$.

    1. Determine la distribución de S_n^x. Deduzca:

    $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n^x - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

    2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, definimos $P_n^f(x) \coloneqq \mathbb{E}(f(n^{-1}S_n^x))$. Demuestre que P_n^f es un polinomio de grado n, dar su expresión.
    3. Sea $M \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ y $\epsilon > 0$. Muestre que:

    $$|P_n^f(x) - f(x)| \leq \epsilon + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n} - x\right| > \delta\right)$$

    Sugerencia: Utilice el teorema de Dini

    4. Deduzca que la coanvergencia es de hecho uniforme.Además, que si f es lipschitziana, entonces:

    $$||P_n^f - f||_\infty \leq \frac{c(f)}{n^{1/2}}$$

19. *Proceso de ramificación*
    Denotamos por Z_n el numero de individuos de una poblacion donde n es la generación dada con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Suponemos que cada uno de los individuos en la generacion n, Z_n, engendran un numero aleatorio de individuos denotado por Y_i^n donde $i \in [1, Z_n]$ en el tiempo n. De esta forma tenemos:

    $$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_i^n$$

    Suponemos que las v.a. Y_i^n son independientes entre ellas y de misma distribucion. Demuestre que $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov.

20. En construcción !

J.UGARTE .
UNI, 20 de mayo de 2021.