Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 24 de junio de 2021.

Práctica calificada 4

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *¿ El presente y el futuro son independientes ?*
   Determine una cadena de Markov homogénea sobre el espacio de estados $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ tal que:

   a) $\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2) \neq \mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\})$

   [5 puntos]

   Solución:
   En este caso consideramos una cadena de Markov con matriz de transición dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ahora determinamos $\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2)$

$$\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 6, X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2)}{\mathbb{P}(X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2)} = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 6, X_1 = 4, X_0 = 2)}{\mathbb{P}(X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2)}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}, X_0 = 2) = \frac{\mu_0(2)P(2,4)P(4,6)}{\mu_0(2)P(2,3) + \mu_0(2)P(2,4)} = 1$$

   De forma similar,

$$\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 6, X_1 \in \{3,4\})}{\mathbb{P}(X_1 \in \{3,4\})}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}) = \frac{0{,}5\mathbb{P}(X_1 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 4)}{\mathbb{P}(X_1 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 4)}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 6|X_1 \in \{3,4\}) \neq 1$$

2. *Matrices circulantes en cadenas de Markov*
   Consideramos una cadena de Markov homogénea sobre $E = \{1,2,3\}$ tal que su matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

   donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ con $a + b + c = 1$.

   a) Determine si es irreductible utilizando el grafo de transición. [1 punto]
   Solución:
   Cuando $b = c = 0$ entonces la cadena de Markov no es irreducible, en cualquier otro caso la cadena de Markov es irreducible.

b) Determine los estados recurrentes positivos, nulos y los estados transitorios. [1 punto]

Solución:

Cuando $b = c = 0$ tenemos que la probabilidad de quedarnos en el estado de partida es 1, para cualquier estado. De esta forma, $T_x^+ = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\} = 1$ de esta forma $\mathbb{P}(T_x^+ < +\infty) = 1$ por lo tanto es recurrente, y como $\mathbb{E}(T_x^+) = \mathbb{E}(1) = 1 < +\infty$ entonces los estados son recurrentes nulos.

En el otro caso, cuando $b \neq 0$ o $c \neq 0$ entonces la cadena de Markov es irreducible y además es finita por lo tanto existe una medida de probabilidad invariante por lo tanto todos sus estados son recurrente positivos.

c) Determine su medida de probabilidad invariante si existe. [1 punto]

Solución:

Para esto nos enfocamos en el segundo caso, dado que en el primero hay infinitas medidas de probabilidades invariantes. En el segudo caso, resolvemos:

$$\pi = (\alpha\ \beta\ \gamma) \Rightarrow (\alpha\ \beta\ \gamma) = (\alpha\ \beta\ \gamma)P$$

Tenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{(a+c)(b+c)}{a(b-c)}, \quad \gamma = \frac{(a+b)(b+c)}{a(c-b)}$$

d) Determine $\mathbb{E}_x(T_x^+ < +\infty)$ para $x \in E$. [1 punto]

Solución:

En el caso $b = c = 0$ tenemos que $\mathbb{E}(T_x^+) = \mathbb{E}(1) = 1$,

En el otro caso $b \neq 0$ o $c \neq 0$ tenemos que:

$$\mathbb{E}(T_x^+) = \frac{1}{\pi(x)}$$

e) Determine si es posible aplicar el teorema ergódico. [1 punto]

Solución:

En el caso $b = c = 0$ tenemos que los estados son recurrentes nulos por lo tanto no se puede aplicar el teorema ergódico,

En el otro caso $b \neq 0$ o $c \neq 0$ tenemos que: Siendo irreducible y recurrente positiva entonces podemos aplicar el teorema ergódico.

3. *Cálculo de probabilidades en una cadena de Markov*

Determine utilizando la definición las siguientes probabilidades en una cadena de Markov homogénea en función de los elementos de la matriz de transición.

a) $\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_0 = x_0)$ [1 punto]

Solución:

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_0 = x_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_2 = x_2, X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)} \\
&= \frac{\sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}(X_2 = x_2, X_1 = x_1, X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)} \\
&= \frac{\sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1, X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0)} \\
&= \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1, X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\
&= \sum_{x_1 \in E} \mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \\
&= \sum_{x_1 \in E} P(x_1, x_2)P(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

b) $\mathbb{P}(X_5 = x_5 | X_0 = x_0, X_4 = x_4)$ [2 puntos]

Solución:

De forma similar al caso anterior,

$$\mathbb{P}(X_5 = x_5 | X_0 = x_0, X_4 = x_4) = \frac{\mathbb{P}(X_5 = x_5, X_0 = x_0, X_4 = x_4)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_4 = x_4)}$$

$$= \frac{\sum_{x_1,x_2,x_3\in E} \mathbb{P}(X_5 = x_5, X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_0 = x_0, X_4 = x_4)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_4 = x_4)}$$

$$= \frac{\sum_{x_1,x_2,x_3\in E} \mathbb{P}(X_5 = x_5 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_0 = x_0, X_4 = x_4)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_0}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_4 = x_4)}$$

$$= \frac{\sum_{x_1,x_2,x_3\in E} \mathbb{P}(X_5 = x_5 | X_4 = x_4)\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_0 = x_0, X_4 = x_4)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_4 = x_4)}$$

$$= \mathbb{P}(X_5 = x_5 | X_4 = x_4)$$

c) $\mathbb{P}(X_{n+5} = x_5 | X_0 = x_0, X_n = x_{n+4})$ [2 puntos]

Solución:

De forma similar al caso anterior, tenemos para $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_{n+5} = x_5 | X_0 = x_0, X_n = x_{n+4}) = \mathbb{P}(X_{n+5} = x_5 | X_n = x_{n+4})$$

4. *Funciones de una cadena de Markov no son siempre cadenas de Markov.*

Sea $X_0, \ldots, X_n$ es una cadena de Markov homogénea sobre el espacio de estados $E = \{1, 2, 3\}$con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

para $p \in]0, 1[$. Luego, definimos $g : E \to \{0, 1\}$ por $g(1) = 0$ y $g(2) = g(3) = 1$, y sobre $\{0, 1\}$ construimos una cadena de Markov $Y_n = g(X_n)$ para $n \geq 0$.

Demuestre que Y_n no es una cadena de Markov. [5 puntos]

Solución:

Denotamos por $\mathbb{P}(X_0 = 1) = a$, $\mathbb{P}(X_0 = 2) = b$ y $\mathbb{P}(X_0 = 3) = c$. Enseguida determinamos:

a) $\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 1, Y_0 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 \in \{2, 3\}, X_0 = 1)$ luego

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 \in \{2, 3\}, X_0 = 1) = 0$$

b) $\mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 \in \{2, 3\})$ luego

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 \in \{2, 3\}) = \frac{pb}{1 - cp}$$

Siendo p un número fijo distinto de cero, si la distribución inicial de X_0 arbitraria tenemos que no se puede dar la igualdad.