Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 28 de mayo de 2021.

Práctica calificada 3

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Gestión de stock*
   Una tienda de aparatos electrónicos vende un sistema de juegos de video y opera bajo el siguiente esquema: Si al final del día el número de unidades disponibles es 1 ó 0, se ordenan nuevas unidades para llevar el total a 5. Para simplificar supondremos que la nueva mercancía llega antes de que la tienda abra al día siguiente. Sea X_n el número de unidades disponibles al final del n-ésimo día y supongamos que el número de clientes que quieren comprar un juego en un día es 0, 1, 2, ó 3 con probabilidades 0.4; 0.3; 0.1 y 0.2 respectivamente. Denotamos la demanda diaria por D_n.

   a) Determine la recurrencia generada para X_n con D_n,
   b) Realice las suposiciones necesarias y verifique que es una cadena de Markov.
   c) Determine su grafo de transición.
   d) Determine la matriz de transición.

   [5 puntos]

2. *Filas de espera*
   Nos ubicamos en un banco, donde el cajero atiende a toda persona en una unidad de tiempo, suponiendo que en el tiempo 0 hay cero clientes tenemos que $X_0 = 0$, luego en el intervalo $]n-1, n]$ llega una cierta cantidad de clientes Y_n para el tiempo n. Teniendo en cuenta que $\mathbb{P}(Y_n = i) = q(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

   a) Determine la recurrencia generada para X_n con Y_n, [1 punto]
   b) Realice las suposiciones necesarias y verifique que es una cadena de Markov. [1 punto]
   c) Determine la matriz de transición. [2 punto]
   Denotamos por $T_0 = \text{mín}\{n \geq 1 : X_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
   d) Demuestre la inclusión de eventos:
   $$\{T_0 = \infty\} \subset \{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n + X_0 \geq 1, \forall n \geq 1\}$$
   [2 puntos]
   e) Finalmente, considerando que $\mathbb{E}(Y_1) < 1$ demuestre que:
   $$T_0 < \infty \text{ con probabilidad } 1$$
   [2 puntos]
   f) Concluya interpretando este último resultado. [1 punto]

3. *Convergencia*
   Determine:
   $$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$
   Donde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $p \in [0, 1]$. [3 puntos]

4. *Función característica*
   Si $X_n \sim \mathcal{B}(m, p_n)$, $X \sim \mathcal{B}(m, p_n)$ con $p_n \to p$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, [3 puntos]