Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 26 de julio de 2021.

Práctica calificada 6

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Tiempo medio*
Si P es la matriz de transición sobre $\{1,2,3,4\}$ definida por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in]0,1[$. Determine:

a) Determine $g_0(k) = \mathbb{P}(T_1 < \infty | X_0 = k)$ cuando $k = 1,2,3,4$.

b) Determine el tiempo medio de llegar al estado 1, $h_1(k) = \mathbb{E}(T_1 | X_0 = k)$ cuando $k = 1,2,3,4$.

[5 puntos]

Solución:

a) Considerando $\mathbb{P}_k(T_1 < \infty) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_k(T_1 = n)$ del grafo de transición y de la propiedad fuerte de Markov, tenemos:

$$\begin{aligned} g_0(1) &= 1 \\ g_0(2) &= \frac{a}{1-a+a^2} \\ g_0(3) &= \frac{a^2}{1-a+a^2} \\ g_0(4) &= 0 \end{aligned}$$

b) Escribimos las ecuaciones y tenemos:

$$\begin{aligned} h_1(1) &= 0 \\ h_1(2) &= 1 + (1-a)h_1(3) \\ h_1(3) &= 1 + ah_1(2) + (1-a)h_1(4) \\ h_1(4) &= +\infty \end{aligned}$$

resolviendo tenemos:

$$\begin{aligned} h_1(1) &= 0 \\ h_1(3) &= h_1(2) = h_1(4) = +\infty \end{aligned}$$

2. *Tiempo medio*
   Sea $\alpha > 0$ y consideramos la cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ y matriz de transición dada por:

$$P(i, i-1) = \frac{1}{\alpha+1}, \quad P(i, i+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \text{cuando } i \geq 1$$

   además con $P(0, 1) = 1$.

   a) Determine el tiempo medio de retorno $\mathbb{E}(T_k | X_0 = k)$ para $k \in \mathbb{N}$

   b) Demuestre que la cadena de Markov es recurrente positiva si y solamente si $\alpha < 1$.

[5 puntos]

   Solución:

   a) Nos piden el tiempo medio de *retorno* $\mathbb{E}_k(T_k^+)$ podemos proceder como en el caso a) de la pregunta 1, o encontrar la medida de probabilidad invariante.

   b) En este caso siendo irreducible la cadena de Markov, el problema se reduce a encontrar una medida invariante de probabilidad. Para esto denotamos $\frac{1}{1+\alpha} = p$ y verificamos que π definida por:

$$\pi(k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{p^k} \pi(0)$$

   es una medida invariante de probabilidad si y solamente si $\sum_{k \geq 0} \pi(k) = 1$ y esto ocurre si y solamente si $|\frac{1-p}{p}| < 1$ para que la suma sea convergente, y esto es equivalente a que $\alpha < 1$.

3. *Medida estacionaria - continuación*
   Sea $\alpha > 0$ y consideramos la cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ y matriz de transición dada por:

$$P(i, i-1) = \frac{1}{\alpha+1}, \quad P(i, i+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \text{cuando } i \geq 1$$

   además con $P(0, 1) = 1$.

   a) Demuestre que si $\alpha < 1$ entonces π dada por

$$\pi(k) = \alpha^{k-1}(1-\alpha^2)/2, \quad k \geq 1$$

   es una medida de probabilidad invariante y el valor de $\pi(0)$ se debe de determinar.

   b) Determine si existe una medida de probabilidad invariante cuando $\alpha \geq 1$.

[5 puntos]

   Solución:

   a) De ejercicio anterior determinamos el valor de $\pi(0) = \frac{2p-1}{2p} = \frac{1-\alpha}{2}$.

   b) No existe dado que en la suma para realizar la normalización no converge.

4. *Tiempo medio*
   Una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\{1, 2\}$ tiene como matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

   Donde $p, q \in]0, 1[$.

   a) Demuestre que $\mathbb{P}_1(T_1^+ \geq n) = p(1-q)^{n-2}$ para $n \geq 2$.

b) Determine $\mathbb{E}_1(T_1^+)$ y verifique que $\mathbb{E}_1(T_1^+) = 1/\pi(1)$ donde π es la medida de probabilidad invariante de la cadena de Markov.

[5 puntos]

Solución:
Procedemos como en el ejercicio 1.a.

a) Como $\mathbb{P}_1(T_1^+ \geq n) = \mathbb{P}_1(T_1^+ = n) + \mathbb{P}_1(T_1^+ = n+1) + \mathbb{P}_1(T_1^+ = n+2) + +...$ del grafo de transición y por la propiedad fuerte de Markov tenemos:

$$\mathbb{P}_1(T_1^+ \geq n) = p(1-q)^{n-2}q + p(1-q)^{n-1}q + p(1-q)^n q + ... = p(1-q)^{n-2}$$

b) De la identidad:

$$\mathbb{E}_1(T_1^+) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(T_1^+ \geq n) = \frac{p+q}{q}$$

Finalmente, resolvemos la ecuación $\pi = \pi P$ para obtener que $\pi(1) = \frac{q}{p+q}$ por lo tanto verificamos la igualdad.