Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 30 de julio de 2021.

Examen Final

Tiempo: 2h

Tolerancia 15min

1. *Medidas invariantes*
Sea X una cadena de Markov irreducible sobre el espacio de estados E que posee una medida invariante de probabilidad π. Para μ una medida positiva sobre E, y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ esctrictamente convexa y acotada, definimos:

$$\mathrm{Ent}(\mu|\pi) = \sum_{x\in E} f\left(\frac{\mu(x)}{\pi(x)}\right)\pi(x)$$

   a) Muestre que $\mathrm{Ent}(\mu P|\pi) \leq \mathrm{Ent}(\mu|\pi)$.

   b) Identifique cuando existe igualdad en la desigualdad anterior. Enseguida, deduzca que toda medida invariante de X es múltiplo de π.

[5 puntos]

2. *Tiempo de mezcla*
Sea $p, q \in [0, 1]$, consideramos la cadena X con dos estados $\{1, 2\}$, con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

   a) Determine los valores de p, q para que la cadena sea irreducible y aperiódica.

   b) Determine el conjunto de probabilidades invariantes en función de p, q.

   c) Determine P^n para $n \in \mathbb{N}$.

   d) Cuando X es irreducible, calcule:

$$d_1(t) = \frac{1}{2}(|\mathbb{P}_1(X_t = 1) - \pi(1)| + |\mathbb{P}_1(X_t = 2) - \pi(2)|)$$

   y

$$d_2(t) = \frac{1}{2}(|\mathbb{P}_2(X_t = 1) - \pi(1)| + |\mathbb{P}_2(X_t = 2) - \pi(2)|)$$

[5 puntos]

3. *Tiempo de mezcla*
Sea X una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y matriz de transición P tal que:

$$P(0,k) = \frac{1}{2^{k+1}}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \quad P(0,n) = \frac{1}{2^n}$$

$$P(k, k-1) = 1, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad P(n,n) = P(n, n-1) = \frac{1}{2}$$

   a) Muestre que la cadena posee una unica medida de probabilidad invariante π y calcule dicha medida.

b) Muestre que para $x_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $P^{(x_0+1)}(x_0, z) = \pi(z)$ para todo z.

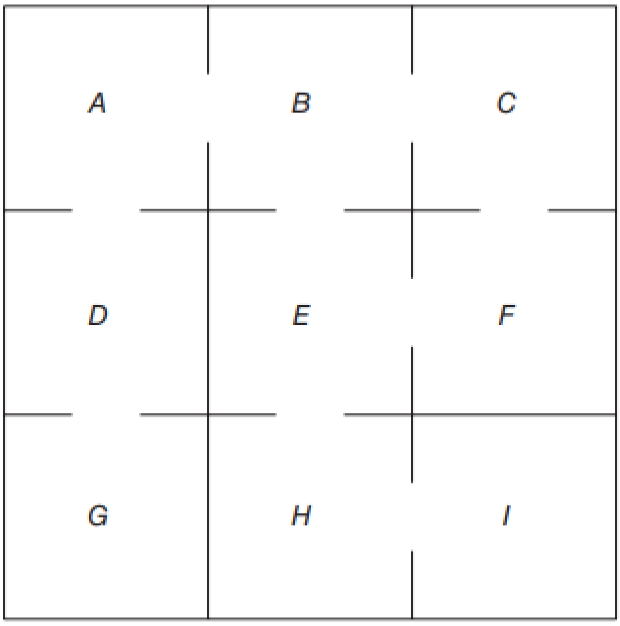
c) Muestre que para todo $x_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $P^{(n)}(x_0, z) = \pi(z)$.

d) Para $t \geq 0$ calcule

$$d(t) = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{n} \left| P^{(t)}(n, x) - \pi(x) \right|$$

[5 puntos]

4. *Tiempo medio de alcance*
A mouse is placed in the maze in figure starting in box A. A piece of cheese is put in box I. From each room the mouse moves to an adjacent room through an open door, choosing from the available doors with equal probability.



a) How many rooms, on average, will the mouse visit before it inds the cheese?

b) How many times, on average, will the mouse visit room A before it inds the cheese?

[5 puntos]