



Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]

[J. Ugarte]

UNI, 17 de junio de 2021.

Práctica calificada 4

Tiempo: 2h

Tolerancia 15min

1. ¿El presente y el futuro son independientes ?

Determine una cadena de Markov homogénea sobre el espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tal que:

a) $\mathbb{P}(X_2 = 6 | X_1 \in \{3, 4\}, X_0 = 2) \neq \mathbb{P}(X_2 = 6 | X_1 \in \{3, 4\})$

[5 puntos]

2. *Matrices circulantes en cadenas de Markov*

Consideramos una cadena de Markov homogénea sobre $E = \{1, 2, 3\}$ tal que su matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ con $a + b + c = 1$.

- a) Determine si es irreducible utilizando el grafo de transición. [1 punto]
b) Determine los estados recurrentes positivos, nulos y los estados transitorios. [1 punto]
c) Determine su medida de probabilidad invariante si existe. [1 punto]
d) Determine $\mathbb{E}_x(T_x^+ < +\infty)$ para $x \in E$. [1 punto]
e) Determine si es posible aplicar el teorema ergódico. [1 punto]

3. *Cálculo de probabilidades en una cadena de Markov*

Determine utilizando la definición las siguientes probabilidades en una cadena de Markov homogénea en función de los elementos de la matriz de transición.

- a) $\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_0 = x_0)$ [1 punto]
b) $\mathbb{P}(X_5 = x_5 | X_0 = x_0, X_4 = x_4)$ [2 puntos]
c) $\mathbb{P}(X_{n+5} = x_5 | X_0 = x_0, X_n = x_{n+4})$ [2 puntos]

4. *Funciones de una cadena de Markov no son siempre cadenas de Markov.*

Sea X_0, \dots, X_n es una cadena de Markov homogénea sobre el espacio de estados $E = \{1, 2, 3\}$ con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

para $p \in]0, 1[$. Luego, definimos $g : E \rightarrow E$ por $g(1) = 0$ y $g(2) = g(3) = 1$, y sobre E construimos una cadena de Markov $Y_n = g(X_n)$ para $n \geq 0$.

Demuestre que Y_n no es una cadena de Markov.

[5 puntos]