Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 30 de abril de 2021.

Práctica calificada 1

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Variación de una función*
   Dada la función $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ para $x \in]0, 1]$ y $f(0) = 0$.

   a) Determine $V(f)$.

   b) Verifique si f es continua y derivable.

   [5 puntos]

2. *Convergencia de series*
   Dada la función $f(x) = x^{-x} = e^{-x\log(x)}$ considerando $f(0) = e$.

   a) Demostrar que f es continua.

   b) Considerando el desarrollo límite $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\log(x))^n}{n!}$. Demuestre que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x\log(x))^n}{n!}$ converge normalmente.

   c) Finalmente, muestre:
   $$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$$

   [5 puntos]

3. *Teorema de convergencia dominada*
   Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Determine el limite siguiente en los casos mencionados abajo:
   $$\lim_{n\to+\infty} n \int_\Omega \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) \mathrm{d}\mu$$

   a) Suponiendo $f \in \mathcal{L}^1$.

   b) Suponiendo $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = +\infty$.

   [5 puntos]

4. *Teorema de Fubini*
   Determine:
   $$\int \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[} \mathrm{d}x$$
   .

   [5 puntos]