Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 1 de julio de 2021.

Práctica calificada 5

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Tiempo medio*
Si P es la matriz de transición sobre $\{1,2,3,4,5\}$ definida por:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
La cadena de Markov asociada la denotamos por $\{X_n\}_{n\geq 0}$, y $T = \min\{T_3, T_5\}$ donde $T_3 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ y $T_5 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 5\}$.
    a) Determinar $\mathbb{E}_1(T)$ que es el tiempo mínimo para llegar al estado 3 o 5.

[5 puntos]

2. *Irreducible*
Consideramos una cadena de Markov homogénea sobre $E = \{1,2,3\}$ tal que su matriz de transición es:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$
Determine los valores de p tales que la cadena de Markov es irreducible. [5 puntos]

3. *Medida estacionaria*
Consideramos la una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0,\dots,N\}$ y matriz de transición dada por:
$$P(i,i+1) = p, \quad P(i,i-1) = q, \quad \text{para } i \in \{1,\dots,N-1\}$$
donde $p+q=1$ y $0<p<1$. Asumimos $P(0,1)=1$ y $P(N,N-1)=1$.
    a) Obtener el grafo de transición.
    b) Determine si es irreducible.
    c) Determine la distribución estacionaria si existe.

[5 puntos]

4. *Tiempo medio*
Una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\{1,2,3\}$ tiene como matriz de transición:
$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Determine el tiempo medio de llegar al estado 3. [5 puntos]