Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 9 de junio de 2021.

Examen Parcial

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Teorema de convergencia dominada*
   Determine el límite siguiente:
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\frac{t^2}{n})^{-n}\mathrm{d}t$$
[4 puntos]

Solución:
Para $t\in\mathbb{R}$ definimos f_n por:
$$f_n(t)=(1+\frac{t^2}{n})^{-n}\to e^{-t^2}$$
Luego, teniendo la convergencia puntual no falta encontrar una función integrable en $\mathbb{R}$ que domine dicha $f_n(t)$, de hecho tenemos que para todo $t\in\mathbb{R}$
$$f_n(t)\leq f_1(t)$$
Finalmente, siendo f_1 integrable tenemos por el teorema de la convergencia dominada que:
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{t^2}{n})^{-n}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$$

2. *Vectores aleatorios*
   Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad:
$$f(x,y)=C\exp(-x^2+xy-\frac{y^2}{2})$$
   a) Muestre que (X,Y) es un vector aleatorio normal en $\mathbb{R}^2$. Determine su media, su matriz de covarianza y su función característica.
   b) Determine la función de densidad de X, de Y y de $2X-Y$.
   c) Muestre que X y $X-Y$ son variables aleatorias independientes y de misma distribución.

[5 puntos]

Solución:

a) Sabemos que la función de densidad de v.a normal en $\mathbb{R}^2$ es de la forma:
$$f(x,y)=C\exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu))$$
identificamos lo términos y tenemos que:
$$\mu=0,\quad \Sigma=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},\quad \text{y}\quad \Phi_{(X,Y)}(a)=\exp(-\frac{1}{2}a^T\Sigma a)$$

b) Aplicamos la propiedad dada en clase para $a = (1,0)$, $a = (0,1)$ y $a = (2,-1)$, y con $Z = (X\ Y)^T$ en:

$$a^T Z \sim \mathcal{N}(a^T\mu, a^T\Sigma a)$$

De esta forma tenemos las funciones de densidad en cada caso, que es de la forma:

$$f_{a^TZ}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^T\Sigma a}} \exp(-\frac{(x-a^T\mu)^2}{2a^T\Sigma a})$$

c) La distribución lo determinamos con el paso *b* aunque para $X - Y$ utilizamos $a = (1,-1)$, y vemos que ambas funciones de densidades son iguales a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

Para verificar que son independientes, consideramos $Z = (X\ X-Y)$ determinamos:

$$\mathbb{E}(g(X, X-Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, x-y) f_Z(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Realizamos la transformación $x = u$, $y = u - v$ y tenemos que:

$$\mathbb{E}(g(X, X-Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) f_X(u) f_{X-Y}(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

De esta forma la función de densidad conjunta de $Z = (X\ X-Y)$ es:

$$f_{(X\ X-Y)}(a,b) = f_X(a) f_{X-Y}(b)$$

Por lo tanto, las v.a. son independientes.

3. *Convergencia*

Sea $x \in [0,1]$, $\{X_n^x\}_{n\geq 0}$ sucesión de v.a.i.i.d de Bernoulli de parámetro x.

$$\mathbb{P}(X_0^x = 1) = x, \quad \mathbb{P}(X_0^x = 0) = 1 - x$$

Denotamos por $S_n^x = \sum_{k=1}^n X_k^x$.

a) Determine la distribución de S_n^x. Deduzca:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n^x - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

b) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, definimos $P_n^f(x) \coloneqq \mathbb{E}(f(n^{-1}S_n^x))$. Demuestre que P_n^f es un polinomio de grado n, dar su expresión.

c) Sea $M \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ y $\epsilon > 0$. Muestre que:

$$|P_n^f(x) - f(x)| \leq \epsilon + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n} - x\right| > \delta\right)$$

Sugerencia: Utilice el teorema de Dini

d) Deduzca que la convergencia es de hecho uniforme.Además, que si f es lipschitziana, entonces:

$$||P_n^f - f||_\infty \leq \frac{c(f)}{n^{1/2}}$$

[6 puntos]

Solución:

a) Consideramos $Z_n = \frac{S_n^x}{n}$ entonces $\mathbb{E}(Z) = x$ de esta forma:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n^x - x\right| \geq \delta\right) = \mathbb{P}(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)|)$$

Utilizando la desigualdad de Chebychev, y teniendo en cuenta que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ entonces podemos concluir.

b) Siendo $S_n^x \sim Bin(n,x)$ tenemos que:

$$P_n^f(x) := \mathbb{E}(f(n^{-1}S_n^x)) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

el cual es un polinomio de grado n.

c) Por la ley de grandes números tenemos que $\frac{S_n^x}{n} \to \mathbb{E}(X_1^x) = x$, por el teorema de continuidad tenemos $f(\frac{S_n^x}{n}) \to f(x)$ luego de verificar que es acotada, tenemos por el teorema de la convergencia dominada la convergencia c.s:

$$P_n^f(x) = \mathbb{E}[f(\frac{S_n^x}{n})] \to f(x)$$

Enseguida, siendo f continua entonces es uniformemente continua sobre dicho compacto, así fijamos $\epsilon > 0$ entonces existe δ tal que para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$|P_n^f(x) - f(x)| = |\mathbb{E}(f(\frac{S_n^x}{n}) - f(x))| \leq \epsilon + 2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n} - x\right| > \delta\right)$$

d) Utilizando el primer item, tenemos la convergencia uniforme. Finalmente, la última desigualdad se da de la definición de ser lipschitziana, enseguida elevar al cuadrado, utilizar el item a), y se concluye utilizando la desigualdad de Holder y tomar la raíz cuadrada.

4. *Cadenas de Markov*

Se lanza una moneda equilibrada de manera consecutiva n veces, nos interesamos en la probabilidad de que aparezca K caras consecutivas. Para esto definimos la v.a. :

$$\{X_n = K\} = \{\text{ Al menos K caras consecutivas observadas durante los n primeros lanzamientos }\}$$

a) Realice su grafo de transición.

b) Determine la matriz de transición.

c) Determine las suposiciones necesarias para que X_n sea una cadena de Markov.

d) Indique como se determina la probabilidad de obtener 5 caras consecutivas en 100 lanzamientos.

[5 puntos]

Solución:

Sustitutorio.