Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[C2MH2 : Introducción a los procesos estocásticos]
[Tema: Variación de una función, teoremas con respecto a integrales de Riemann y Lebesgue]

Práctica dirigida 1

1. Dada una variable aleatoria continua X. Verifique que $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ es una función càdlàg.

2. Utilizando la definición determinar $V(f)$

   1. $f(x) = x^2$ sobre $[-1, 1]$.
   2. $f(x) = [\![x]\!]$ sobre $[0, 10]$
   3. $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ sobre $[0, 1]$

3. Denotamos $V_{[a,b]}(f)$ la variación de f sobre $[a, b]$. Demostrar la relación siguiente:

$$V_{[x,y]}(f) + V_{[y,z]}(f) = V_{[x,z]}(f)$$

4. Dada la función $f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$ con $f(0) = 0$ definida sobre $[0, 1]$.

   1. Verificar que es continua.
   2. Demostrar que su variación no es finita.

5. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Determine $V(f)$, de manera similar si es decreciente.

6. Dada la función $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ para $x \in]0, 1]$ y $f(0) = 0$.

   1. Determine $V(f)$.
   2. Verifique si f es continua y derivable.

7. De acuerdo al teorema de Jordan, una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a variación creciente se puede expresar como una diferencia de dos funciones crecientes. Determine dichas funciones en términos de g.

8. Demostrar que si f y g son variación finita entonces la suma y el producto es también a variación finita.

9. *Variación cuadrática* Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\sigma = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, donde $x_0 < x_1 < ... < x_n$ una partición de $[a, b]$, donde $|\sigma| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_{i-1}|$. Definimos la *variación cuadrática* de f con respecto a σ :

$$QV(f) = \lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^2$$

   donde Π es el conjunto de particiones sobre $[a, b]$.

   1. Demuestre, si $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ entonces $QV(f) = 0$.
   2. Demuestre, si $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ con variación finita entonces $QV(f) = 0$.

   De manera similar, dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos la covariación cuadrática por:

$$[f, g] = \lim_{|\sigma|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(g(x_i) - g(x_{i-1})$$

   1. Demuestre que si $f, g \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ entonces $[f, g] = 0$.
   2. Demuestre, si $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ con variación finita entonces $[f, g] = 0$.

10. Denotamos por $BV([a, b])$ el conjunto de funciones a variación acotada sobre $[a, b]$.

   1. Demostrar que $BV([a, b])$ es un espacio vectorial.

2. Demostrar que $||g||_{BV} = V(g)$ es una norma.
3. Demostrar que $BV([a,b])$ es un espacio de Banach.

11. Dada la función $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ sobre $[0,1]$.

    1. Mostrar que converge simplemente hacia 0.
    2. Mostrar que no converge uniformemente hacia 0.
    3. Determine $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$,
    4. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

12. Dada $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ para $x \in [0,1]$.

    1. Determine si converge simplemente.
    2. Determina si converge uniformemente.
    3. Determine si f_n', y si este converge.

13. Demostrar que si una serie converge normalmente entonces converge simplemente.

14. Demostrar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x e^{-nx}$, definida sobre $[0,1]$, converge uniformemente, pero no converge normalmente.

15. Dada la función $f(x) = x^{-x} = e^{-x\log(x)}$ considerando $f(0) = e$.

    1. Demostrar que f es continua.
    2. Considerando el desarrollo límite $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\log(x))^n}{n!}$. Demuestre que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x\log(x))^n}{n!}$ converge normalmente.
    3. Finalmente, muestre:

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$$

16. En construcción!

J.UGARTE .
UNI, 15 de abril de 2021.