Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 4 de junio de 2021.

Examen Parcial

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Teorema de convergencia dominada*
   Determine el límite siguiente:
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\frac{t^2}{n})^{-n}\mathrm{d}t$$
   [4 puntos]

2. *Vectores aleatorios*
   Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad:
   $$f(x,y) = C\exp(-x^2+xy-\frac{y^2}{2})$$
   a) Muestre que (X,Y) es un vector aleatorio normal en $\mathbb{R}^2$. Determine su media, su matriz de covarianza y su función característica.
   b) Determine la función de densidad de X, de Y y de $2X-Y$.
   c) Muestre que X y $X-Y$ son variables aleatorias independientes y de misma distribución.

   [5 puntos]

3. *Convergencia*
   Sea $x\in[0,1]$, $\{X_n^x\}_{n\geq 0}$ sucesión de v.a.i.i.d de Bernoulli de parámetro x.
   $$\mathbb{P}(X_0^x=1)=x,\quad \mathbb{P}(X_0^x=0)=1-x$$
   Denotamos por $S_n^x=\sum_{k=1}^n X_k^x$.
   a) Determine la distribución de S_n^x. Deduzca:
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n^x-x\right|\geq\delta\right)\leq\frac{1}{4n\delta^2}$$
   b) Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua, definimos $P_n^f(x):=\mathbb{E}(f(n^{-1}S_n^x))$. Demuestre que P_n^f es un polinomio de grado n, dar su expresión.
   c) Sea $M:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ y $\epsilon>0$. Muestre que:
   $$|P_n^f(x)-f(x)|\leq\epsilon+2M\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^x}{n}-x\right|>\delta\right)$$
   Sugerencia: Utilice el teorema de Dini
   d) Deduzca que la coanvergencia es de hecho uniforme.Además, que si f es lipschitziana, entonces:
   $$||P_n^f-f||_\infty\leq\frac{c(f)}{n^{1/2}}$$

[6 puntos]

4. *Cadenas de Markov*

   Se lanza una moneda equilibrada de manera consecutiva n veces, nos interesamos en la probabilidad de que aparezca K caras consecutivas. Para esto definimos la v.a. :

   $$X_n = \{ \text{ Al menos K caras consecutivas observadas durante los n primeros lanzamientos } \}$$

   a) Realice su grafo de transición.

   b) Determine la matriz de transición.

   c) Determine las suposiciones necesarias para que X_n sea una cadena de Markov.

   d) Indique como se determina la probabilidad de obtener 5 caras consecutivas en 100 lanzamientos.

[5 puntos]