Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 23 de julio de 2021.

Práctica calificada 6

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Tiempo medio*
   Si P es la matriz de transición sobre $\{1,2,3,4\}$ definida por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   donde $a \in]0,1[$. Determine:

   a) Determine $g_0(k) = \mathbb{P}(T_0 < \infty | X_0 = k)$ cuando $k = 1,2,3,4$.

   b) Determine el tiempo medio de llegar al estado 1, $h_1(k) = \mathbb{E}(T_1 | X_0 = k)$ cuando $k = 1,2,3,4$.

[5 puntos]

2. *Tiempo medio*
   Sea $\alpha > 0$ y consideramos la cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$ y matriz de transición dada por:

$$P(i,i-1) = \frac{1}{\alpha+1}, \quad P(i,i+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \text{cuando } i \geq 1$$

   además con $P(0,1) = 1$.

   a) Determine el tiempo medio de retorno $\mathbb{E}(T_k | X_0 = k)$ para $k \in \mathbb{N}$

   b) Demuestre que la cadena de Markov es recurrente positiva si y solamente si $\alpha < 1$.

. [5 puntos]

3. *Medida estacionaria - continuación*
   Sea $\alpha > 0$ y consideramos la cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{N} = \{0,1,\dots\}$ y matriz de transición dada por:

$$P(i,i-1) = \frac{1}{\alpha+1}, \quad P(i,i+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \text{cuando } i \geq 1$$

   además con $P(0,1) = 1$.

   a) Demuestre que si $\alpha < 1$ entonces π dada por

$$\pi(k) = \alpha^{k-1}(1-\alpha^2)/2, \quad k \geq 1$$

   es una medida de probabilidad invariante y el valor de $\pi(0)$ se debe de determinar.

   b) Determine si existe una medida de probabilidad invariante cuando $\alpha \geq 1$.

[5 puntos]

4. *Tiempo medio*

Una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\{1, 2\}$ tiene como matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Donde $p, q \in]0, 1[$.

a) Demuestre que $\mathbb{P}_1(T_1 \geq n) = p(1-q)^{n-2}$ para $n \geq 2$.

b) Determine $\mathbb{E}_1(T_1)$ y verifique que $\mathbb{E}_1(T_1) = 1/\pi(1)$ donde π es la medida de probabilidad invariante de la cadena de Markov.

[5 puntos]