Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[**Introducción a los procesos estocásticos**]
[**J. Ugarte**] UNI, 4 de mayo de 2021.

Práctica calificada 1

Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Variación de una función*
   Dada la función $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ para $x \in]0,1]$ y $f(0) = 0$.

   a) Determine $V(f)$.

   b) Verifique si f es continua y derivable.

   [5 puntos]

   Solución:

   a) Para $x_k = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ con $k \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_k) = 0$, de forma similar para $y_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(2k-1)}}$ tenemos que $f(y_k) = \frac{2}{\pi(2k-1)}$, siendo estos puntos los mínimos y máximos consecutivos por lo tanto $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(x_k) - f(y_k)| \leq V(f)$ luego como $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(x_k) - f(y_k)| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2}{\pi(2k-1)} = +\infty$ tenemos que $V(f) = +\infty$.

   b) La función es continua como producto de funciones continuas para $x \in]0,1]$, para $x = 0$ aplicamos el lema del Sandwich y tenemos que f es continua en $x = 0$. De forma similar, f es derivable para $x \in]0,1]$ luego para $x = 0$ aplicamos la definición de derivada y el lema de Sandwich y tenemos que f es derivable en $x = 0$.

2. *Convergencia de series*
   Dada la función $f(x) = x^{-x} = e^{-x\log(x)}$ considerando $f(0) = 1$.

   a) Demostrar que f es continua.

   b) Considerando el desarrollo límite $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\log(x))^n}{n!}$. Demuestre que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(-x\log(x))^n}{n!}$ converge normalmente.

   c) Finalmente, muestre:
   $$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$$

   [5 puntos]

   Solución:

   a) Como f es composición de $e^{\cdot}$ con $(.)log(.)$ tenemos que es continua para $x > 0$, para $x = 0$ aplicamos la regla de hopital y tenemos que f es continua en $x = 0$.

   b) Consideramos el desarrollo entre $[0,1]$ luego los términos $x\log(x)$ tienen un mínimo en $x = e^{-1}$ por lo tanto $|x\log(x)|$ tienen un máximo en $x = e^{-1}$ de esta forma acotamos por la derecha por dicho máximo en:
   $$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[0,1]} |\frac{(-x\log(x))^n}{n!}| \leq e^M$$
   así la sucesión de funciones es normalmente convergente y por tanto uniformemente convergente.

c) Finalmente, se pueden permutar el signo de la sumatoria con la integral en la serie e integrando por partes tenemos que :

$$u_n = \int_0^1 \frac{(-x\log(x))^n}{n!} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

De esta forma:

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 \frac{(-x\log(x))^n}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$$

3. *Teorema de convergencia dominada*
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medido y $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. Determine el limite siguiente en los casos mencionados abajo:

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_\Omega \ln\left(1+\frac{f}{n}\right)\mathrm{d}\mu$$

a) Suponiendo $f \in \mathcal{L}^1$.

b) Suponiendo $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = +\infty$.

[5 puntos]

Solución:

a) Definimos $g_n(x) = n\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)$ dicha función converge simplemente para todo valor de $x \in \mathbb{R}$ hacia $f(x)$. Veamos ahora que $|g_n|$ esta dominada por una función integrable, para esto del problema 2.b tenemos que $1+y \leq e^y$ para $y \in \mathbb{R}$ luego para $y = f(x)/n$ tenemos que para $x \in R$ y $n \geq 1$

$$\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n \leq e^{f(x)} \Rightarrow |g_n(x)| \leq f(x)$$

siendo f integrable, por lo tanto esta dominada, finalmente por el teorema de la convergencia dominada tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_\Omega \ln\left(1+\frac{f}{n}\right)\mathrm{d}\mu = \int f\mathrm{d}\mu$$

b) En este caso tenemos por el lema de Fatou que dicho limite es $+\infty$.

4. *Teorema de Fubini*
Determine:

$$\int \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}\mathrm{d}x$$

. [5 puntos]

Solución:
Para esto consideramos la integral:

$$\int\int e^{-yx}\mathbf{1}_{[a,b]}\mathrm{d}y\mathbf{1}_{[0,+\infty[}\mathrm{d}x$$

Siendo los términos positivos y medibles, aplicamos el teorema de Fubini-Tonelli y podemos intercambiar las integrales, luego procedemos por casos cuando a y b son positivos sin perdida de generalidad podemos considerar que $0 < a < b$ entonces:

$$\int\left(\int e^{-yx}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}\mathrm{d}x\right)\mathbf{1}_{a,b}\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_0^{+\infty} e^{-yx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \ln(b/a)$$

Cuando a y b son negativos se procede de la misma forma, sin embargo cuando $a < 0 < b$ tenemos que la función $e^{-ax} - e^{-bx}$ es estrictamente creciente dado que su derivada es mayor a cero, por lo tanto si integramos $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ desde $[0, +\infty[$ tendremos que la integral es $+\infty$, el otro caso se procede de forma similar cuando $b < 0 < a$ y en ese caso tenemos que la integral es $-\infty$.