Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[Introducción a los procesos estocásticos]
[J. Ugarte] UNI, 5 de julio de 2021.

Práctica calificada 5
Solucionario
Tiempo: 2h
Tolerancia 15min

1. *Tiempo medio*
Si P es la matriz de transición sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ definida por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La cadena de Markov asociada la denotamos por $\{X_n\}_{n\geq 0}$, y $T = \text{mín}\{T_3, T_5\}$ donde $T_3 = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ y $T_5 = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n = 5\}$.

   a) Determinar $\mathbb{E}_1(T)$ que es el tiempo mínimo para llegar al estado 3 o 5.

[5 puntos]

Solución:
Denotamos por $b(i) = \mathbb{E}_i(T)$, entonces tenemos las siguientes ecuaciones:

$$b(1) = 1 + \frac{1}{2}b(2) + \frac{1}{2}b(4), \quad b(2) = 1 + \frac{1}{2}b(1) + \frac{1}{2}b(3), \quad b(3) = 0,$$

$$b(4) = 1 + \frac{1}{3}b(1) + \frac{1}{3}b(3) + \frac{1}{3}b(5), \quad b(5) = 0$$

Resolviendo tenemos $b(1) = 24/7$.

2. *Irreducible*
Consideramos una cadena de Markov homogénea sobre $E = \{1, 2, 3\}$ tal que su matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de p tales que la cadena de Markov es irreducible. [5 puntos]
Solución:
$p \in]0, 1]$ vemos que de un estado podemos ir a otro con probabilidad distinta de cero, por lo tanto, es irreducible.

3. *Medida estacionaria*
Consideramos la una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, \ldots, N\}$ y matriz de transición dada por:

$$P(i, i+1) = p, \quad P(i, i-1) = q, \quad \text{para } i \in \{1, \ldots, N-1\}$$

donde $p + q = 1$ y $0 < p < 1$. Asumimos $P(0, 1) = 1$ y $P(N, N-1) = 1$.

   a) Obtener el grafo de transición.

b) Determine si es irreducible.

c) Determine la distribución estacionaria si existe.

[5 puntos]

Solución:

a) Es el grafo de un camino finito aleatorio con paredes reflectantes.

b) Vemos que es irreducible, dado que podemos ir de un estado a otro con probabilidad distinta de cero.

c) Resolvemos $\pi = \pi P$ con $\pi = (\pi_0, \ , \dots, \ \pi_N)$ tenemos que:

$$\pi_i = \frac{\pi_0 p^{i-1}}{q^i}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N_1$$

Con $\pi_N = p\pi_{N-1}$, luego de resolver debemos de normalizar para obtener una medida de probabilidad.

4. *Tiempo medio*
Una cadena de Markov sobre el espacio de estados $\{1, 2, 3\}$ tiene como matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine el tiempo medio de llegar al estado 3. [5 puntos]

Solución:

Denotamos $b(i) = \mathbb{E}_i(T)$ donde $T = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ entonces:

$$b(1) = 1 + \frac{1}{3}b(1) + \frac{1}{3}b(2) + \frac{1}{3}b(3), \quad b(2) = 1 + \frac{1}{2}b(3) + \frac{1}{2}b(2), \quad b(3) = 0$$

Resolviendo, tenemos los tiempo medios de llegar al estado 3 desde cada uno de los estados.