Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2021-I

[**Introducción a los procesos estocásticos**]
[**J. Ugarte**] UNI, 31 de mayo de 2021.

Práctica calificada 3

Solucionario

1. *Gestión de stock*
Una tienda de aparatos electrónicos vende un sistema de juegos de video y opera bajo el siguiente esquema: Si al final del día el número de unidades disponibles es 1 ó 0, se ordenan nuevas unidades para llevar el total a 5. Para simplificar supondremos que la nueva mercancía llega antes de que la tienda abra al día siguiente. Sea X_n el número de unidades disponibles al final del n-ésimo día y supongamos que el número de clientes que quieren comprar un juego en un día es 0, 1, 2, ó 3 con probabilidades 0.4; 0.3; 0.1 y 0.2 respectivamente. Denotamos la demanda diaria por D_n.

    a) Determine la recurrencia generada para X_n con D_n,
    Solución:
    De forma general, teniendo en cuenta política de control de inventario (s, S) tenemos

    $$X_n = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & , \text{ si } X_n > s \\ (S - D_{n+1})^+ & , \text{ si } X_n \leq s \end{cases}$$

    En nuestro caso $s = 1$ y $S = 5$.

    b) Realice las suposiciones necesarias y verifique que es una cadena de Markov.
    Solución:
    Necesitamos modelar nuestro problema como v.a donde D_n son independientes, e independientes de X_0 y por lo realizado en clase tenemos que de acuerdo a la recurrencia es una cadena de Markov.

    c) Determine su grafo de transición.
    Solución:
    Del grafo de transición obtenemos el grafo de transición teniendo en cuenta que los nodos son 6 y la ponderación se obtiene entre el nodo i con j esta dado por el elemento $P(i, j)$ de la matriz de transición.

    d) Determine la matriz de transición.
    Solución:

    $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

    [5 puntos]

2. *Filas de espera*
Nos ubicamos en un banco, donde el cajero atiende a toda persona en una unidad de tiempo, suponiendo que en el tiempo 0 hay cero clientes tenemos que $X_0 = 0$, luego en el intervalo $]n-1, n]$ llega una cierta cantidad de clientes Y_n para el tiempo n. Teniendo en cuenta que $\mathbb{P}(Y_n = i) = q(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

a) Determine la recurrencia generada para X_n con Y_n, [1 punto]

Solución:

Hecho en clase.

b) Realice las suposiciones necesarias y verifique que es una cadena de Markov. [1 punto]

Solución:

Similar a la pregunta anterior, con el resultado hecho en clase.

c) Determine la matriz de transición. [2 punto]

Solución:

Ver PD3 prob1.

Denotamos por $T_0 = \text{mín}\{n \geq 1 : X_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

d) Demuestre la inclusión de eventos:

$$\{T_0 = \infty\} \subset \{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n + X_0 \geq 1, \forall n \geq 1\}$$

[2 puntos]

Solución:

Si $T_0 = +\infty$ tenemos que $X_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$ entonces $X_n \geq 1$ de esta forma de la recurrencia realizamos la suma y tenemos que $\sum_{i=1}^{n} Y_i - n + X_0 \geq 1$, de donde tenemos la inclusión de eventos.

e) Finalmente, considerando que $\mathbb{E}(Y_1) < 1$ demuestre que:

$$T_0 < \infty \text{ con probabilidad } 1$$

[2 puntos]

Solución:

Para esto veamos que:

$$\{\sum_{i=1}^{n} Y_i - n + X_0 \geq 1, \forall n \geq 1\} = \{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - 1 + \frac{X_0}{n} \geq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1\}$$

Luego por la ley de grandes números tenemos que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{c.s} \mathbb{E}(Y_1) < 1$ de esta forma $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - 1 + \frac{X_0}{n} < 0$ de forma c.s. para n suficientemente grande por lo tanto el evento:

$$\mathbb{P}(\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - 1 + \frac{X_0}{n} \geq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1\}) = 0$$

por lo tanto tenemos que $\mathbb{P}(T_0 = +\infty) = 0$ con lo cual tenemos el resultado.

f) Concluya interpretando este último resultado. [1 punto]

Solución:

Que en nuestro problema en un tiempo finito, en el caso anterior, vamos a tener que la fila va tener 0 clientes.

3. *Convergencia*

Determine:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $p \in [0,1]$. [3 puntos]

Solución:

Dados $X_i \sim Ber(p)$ v.a.i.i.d. entonces tenemos que:

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

luego por la ley de grande números tenemos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{c.s.} \mathbb{E}(X_i) = p$$

finalmente, podemos concluir el resultado por las relaciones entre las convergencias.

4. *Función característica*
Si $X_n \sim \mathcal{B}(m, p_n)$, $X \sim \mathcal{B}(m, p)$ con $p_n \to p$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, [3 puntos]
Solución:
Una aplicación rápida del teorema de Lévy de las funciones características, sea $X_n \sim \mathcal{B}(m, p_n)$ tenemos que su función característica es y considerando la convergencia puntual tenemos:

$$\Phi_n(t) = (1 - p_n + p_n e^{it})^m \to \Phi(t) = (1 - p + pe^{it})^m$$

Siendo $\Phi(t)$ la distribución de una Binomial de parámetros p y m tenemos la convergencia en distribución.