Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas
Metodos Numericos para la Ciencia y Ingenieria

Tarea 5: Ecuación de Poisson en Superficie

Maria Jose Hernandez Pozo

October 28, 2015

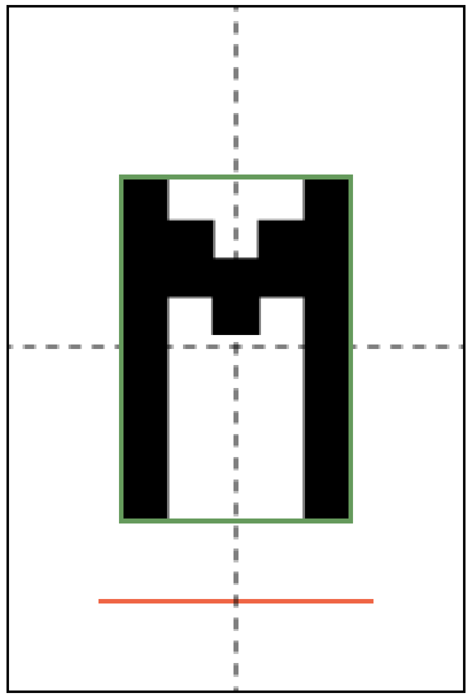
1 Introduccion

En este trabajo analizaremos un área de 10 [cm] por 15 [cm], conectada a tierra. Definiremos el centro de esta como (x, y) = (0, 0). Dentro del área hay una linea y = -5.5; x=[-3: 3], la cual posee un potencial que cumple

$$\frac{dV}{dy} = 1$$

Es decir, la derivada es constante y continua sobre la línea. Además la superficie contiene la letra M la cual se encuentra dentro del rectángulo centrado con lados 5 [cm] x 7 [cm]. La letra tiene un grosor de 1 cm. A continuación un esquema de la figura:

Figure 1: Esquema aproximado del área a analizar



La línea roja es donde se aplica la condición de borde derivativa. El rectángulo verde es el que contiene a la letra. Las lineas punteadas marcan el centro de la caja. Por otra parte, la carga total dentro de la letra es 1 [C] y la densidad de carga es constante dentro de la letra.
Se busca determinar el voltaje de esta área y se hará usando la siguiente fórmula

$$\nabla^2 V(x,y) = -\rho(x,y)$$

La cuál corresponde a la ecuación de poisson

2 Procedimiento

Para analizar esta superficie, una buena idea es trabajarla como una grilla, es decir, dividirla en un reticulado para poder dibujar la letra M y la línea presentada en el problema. Para realizar el análisis de la relación de Poisson, hemos de darnos cuenta que la letra, la condicion de borde derivatica y el resto de la superficie cumplen funciones muy distintas en cuanto a densidad de carga. Por ende se requiere definir subáreas de la superficie, a las cuales podamos atribuirles las condiciones dadas por el problema sin que tenga un costo de tiempo al ejecutar el script.

Tenemos un total de 10 sub áreas, entre las más importantes: la que contiene la letra, un área inmediatamente sobre la línea y un área inmediamente bajo la línea, las demás áreas solo rellenan geometricamente el espacio restante de la superficie. El área que contiene la letra tiene una densidad constante y corresponde a 1/15 según la ley de gauss, es decir, carga total (1 C) dividido en superficie (15 cm). La condición derivativa se explicará junto con el método de integración.

Respecto a la ecuación de Poisson para integrar las densidades de carga se utiliza el método de relajación o de sobrerelajación sucesiva, el cuál se describe a continuación. Sea $V(i,j)$ el potencial dada la densidad electrica en un punto (i,j), $\rho_{i,j}$, donde solo se ve afectado por esta es:

$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h^2\rho_{i,j})$$

Donde w esta entre [0,2]. A los métodos de relajación $con 0 < w < 1$ se los denomina de sub-relajación, mientras que a los que tienen $1 < w$ se los llama de sobre-relajación, los cuales pueden emplearse para acelerar la convergencia de sistemas convergentes por el método de Gauss − Seidel. Nos referiremos a estos últimos como SRS (Sobre-relajación sucesiva). Nótese que el método de Gauss–Seidel es también un método de relajación con w=1.
Es interesante ver la condiciones derivativas impuestas del problemas, ya que al ser la derivada continua transversalmente a la línea, hace que el campo producido sea totalmente distinto a ambos lados, es decir, se espera una solución discontinua. Al integrarlo con el método de sobre relajación da dos soluciones dependiendo si nos encontramos por sobre o bajo la línea, para el primer caso se tiene:

$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{3}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h(1))$$

Esto se aplicará en el área inmediatamente sobre la linea, para el segundo caso:

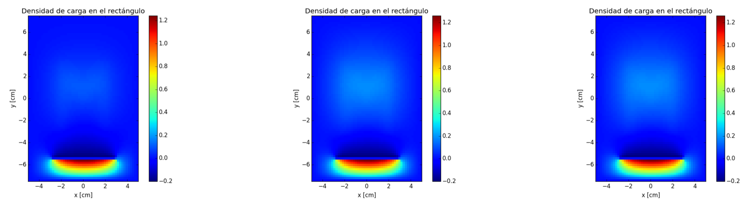
$$V_{i,j} = (1-w)V_{i,j} + \frac{w}{3}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + h(-1))$$

Para casos más simples, es decir que no presenten densidades o condiciones de borde de la fórmula anterior solo quedan los términos referente a V. Para los resultados, se graficaran en 3D y en gráficos con colores para observar de mejor forma como interactuan los campos producidos por ambas anomalías eléctricas.

Se presentaran los casos con distinto numero de iteraciones y con un distinto w para analizar su relación con la convergencia del método.

3 Resultados

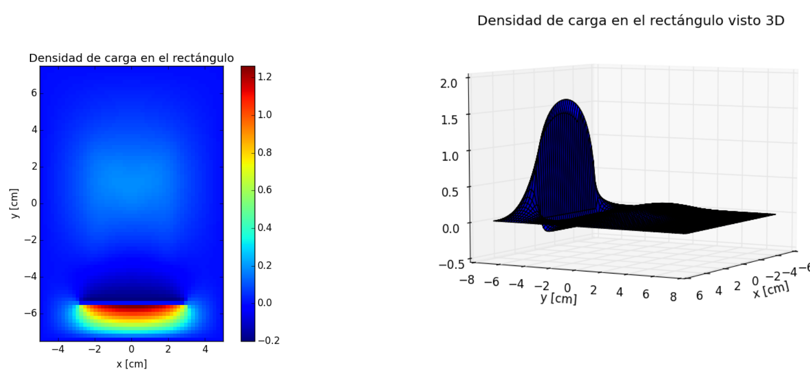
A continuación se muestran los resultados obtenidos con un factor $w = 0.8$ con distintos limites de iteración.



(a) 50 iteraciones (b) 500 iteraciones (c) 1440 iteraciones

Figure 2: Efecto de las iteraciones en el calculo del potencial para un factor w=1.6. La primera imagen corresponde a 50 iteraciones, la segunda 500 y la ultima a 1440, en ningun caso el método convergió antes.

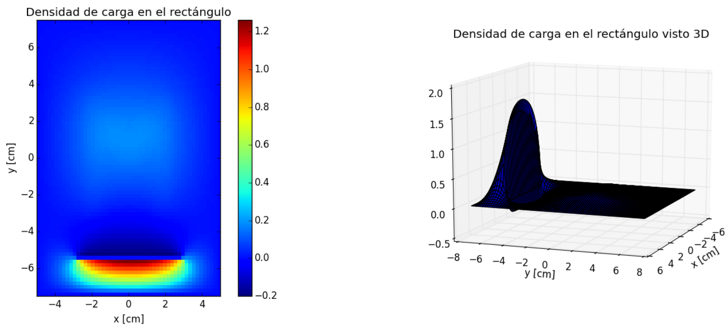
Lo siguiente corresponde a los resultados obtenidos con distintos factores de convergencia.



(a) Potencial Electroestático con magnitud en escala color

(b) Potencial electroestático con magnitud en eje z

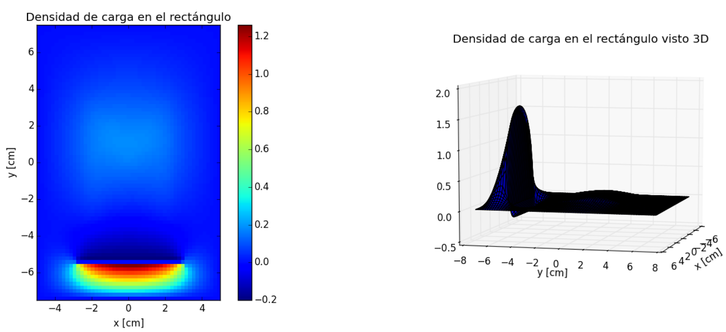
Figure 3: Imagen a color y 3D para graficar el potencial con un w=0.8



(a) Potencial Electroestático con magnitud en escala color

(b) Potencial electroestático con magnitud en eje z

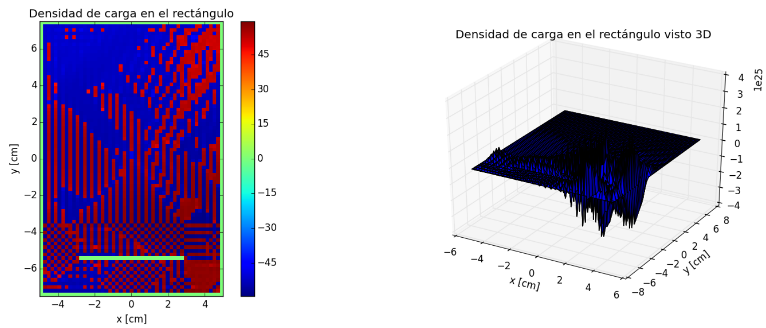
Figure 4: Imagen a color y 3D para graficar el potencial con un w=1.2



(a) Potencial Electroestático con magnitud en escala color

(b) Potencial electroestático con magnitud en eje z

Figure 5: Imagen a color y 3D para graficar el potencial con un w=1.8



(a) Potencial Electroestático con magnitud en escala color

(b) Potencial electroestático con magnitud en eje z

Figure 6: Imagen a color y 3D para graficar el potencial con un w=1.9

Otros datos interesantes dados en los resultados son los numeros de iteraciones según el w que se escoge, w=0.8: más de 8000, w=1.2: 3455, w=1.8: 801, w=1.9: más de 5000.

4 Conclusiones

Dados los resultados podemos concluir que el tanto el método como la modelación de la superficie son satisfactorios, ya que los resultados obtenidos concuerdan con lo esperado y argumentado, es decir, tener una derivada en la línea igual a 1, significa un gradiente de voltaje del orden de [C], lo cuál es altamente significativo al compararlo con el voltaje que tiene la letra, que al tener una carga de 1[C] distribuida en 15 cm, osea su voltaje es del orden de queda altamente influenciada por este efecto como se observó en los resultados; donde no se aprecie su forma claramente.

Con respecto a las iteraciones y al factor de convergencia hay muchas cosas que decir. En primer lugar si se toma un w pequeño tal que dadas 50.000 no converge, se observa dada la cantidad de iteraciones la perdida de exactitud o difusion desde la figura 2.
A medida que se aumenta el w va disminuyendo la cantidad de iteraciones necesarias para que el método converga hasta w=1.8, sin embargo no lo hace sin una perdida de presición. El plus que puede tener esta condición es la ganancia de tiempo humano para poder realizar distintas pruebas. Siendo w=1.8 se necesitan 801 iteraciones. Un caso que llama la atención es el fenómeno dado desde 1.9 en adelante, donde se requieren más iteraciones que en el caso anterior y las gráficas quedan de una forma no coherente. Puede quizás explicarse a un perdida de presición tal que el método no converge nunca y deriva en un error total.