Kantenkonsistenz und AC-3

Carsten Gips (FH Bielefeld)

Problem bei BT-Suche

Zuweisung eines Wertes an Variable X:

- Passt zu aktueller Belegung
- Berücksichtigt aber nicht **restliche** Constraints
  $=>$ macht weitere Suche u.U. unmöglich/schwerer

Lösung: Nach Zuweisung alle *nicht zugewiesenen Nachbarvariablen* prüfen

INFERENCE: Vorab-Prüfung (Forward Checking)

```
def BT_Search(assignment, csp):
    if complete(assignment): return assignment

    var = VARIABLES(csp, assignment)

    for value in VALUES(csp, var):
        if consistent(value, var, assignment, csp):
            assignment += {var = value}

            if INFERENCE(csp, assignment, var) != failure:
                result = BT_Search(assignment, csp)
                if result != failure: return result

            assignment -= {var = value}

    return failure
```

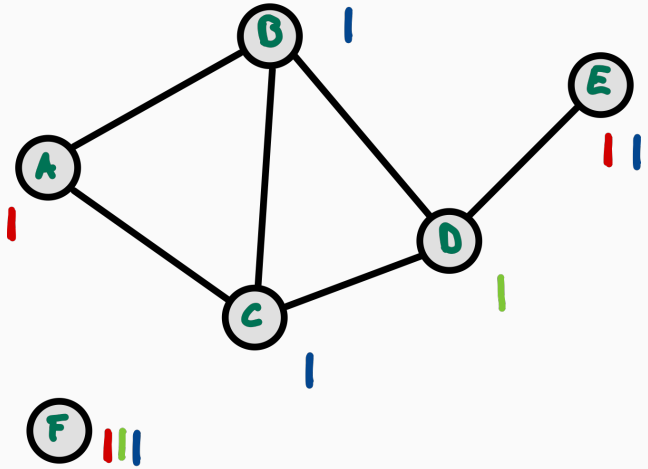
Quelle: Eigener Code basierend auf einer Idee nach (Russell und Norvig 2020, S. 176, Fig. 5.5)

Nach Zuweisung eines Wertes an Variable X:

- Betrachte alle nicht zugewiesenen Variablen Y:
  - Falls Constraints zw. X und Y, dann ...
  - ... entferne alle inkonsistenten Werte aus dem Wertebereich von Y.

Tafelbeispiel: Forward Checking (A=red, D=green)

Forward Checking findet nicht alle Inkonsistenzen!



- Nach $\{A = red, D = green\}$ bleibt für B und C nur noch blue
- B und C sind aber benachbart

Übergang von Forward Checking zu Kantenkonsistenz

- Forward Checking erzeugt Konsistenz für alle Constraints der **gerade betrachteten (belegten) Variablen**.
- Idee: Ausdehnen auf alle Kanten ... => Einschränken der Wertemengen

Definition Kantenkonsistenz (Arc Consistency)

Eine Kante von X nach Y ist "konsistent", wenn für jeden Wert $x \in D_X$ und für alle Constraints zwischen X und Y jeweils ein Wert $y \in D_Y$ existiert, so dass der betrachtete Constraint durch (x, y) erfüllt ist.

Ein CSP ist kanten-konsistent, wenn für alle Kanten des CSP Konsistenz herrscht.

Beispiel Kantenkonsistenz

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$\mathrm{C} = \{((a, b), \neq), ((b, c), \neq), ((a, c), \neq), ((c, d), =), ((b, e), <)\}$

$D_a = D_b = D_c = \{1, 2, 3\},\ D_d = \{1, 2\},\ D_e = \{1, 2, 3\}$

Tafelbeispiel Kantenkonsistenz

Beispiel Kantenkonsistenz

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$\mathrm{C} = \{((a, b), \neq), ((b, c), \neq), ((a, c), \neq), ((c, d), =), ((b, e), <)\}$

$D_a = D_b = D_c = \{1, 2, 3\},\ D_d = \{1, 2\},\ D_e = \{1, 2, 3\}$

Tafelbeispiel Kantenkonsistenz

Einschränkung der Ausgangswertemengen (kanten-konsistent)

$D_a = \{1, 2, 3\},\ D_b = \{1, 2\},\ D_c = \{1, 2\},\ D_d = \{1, 2\},\ D_e = \{2, 3\}$

=> Kantenkonsistenz ist nur **lokale** Konsistenz!

Beispiel Kantenkonsistenz

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$\mathrm{C} = \{((a, b), \neq), ((b, c), \neq), ((a, c), \neq), ((c, d), =), ((b, e), <)\}$

$D_a = D_b = D_c = \{1, 2, 3\},\ D_d = \{1, 2\},\ D_e = \{1, 2, 3\}$

Tafelbeispiel Kantenkonsistenz

Einschränkung der Ausgangswertemengen (kanten-konsistent)

$D_a = \{1, 2, 3\},\ D_b = \{1, 2\},\ D_c = \{1, 2\},\ D_d = \{1, 2\},\ D_e = \{2, 3\}$

=> Kantenkonsistenz ist nur **lokale** Konsistenz!

Anmerkung: $((a, b), \neq)$ ist Kurzform für $((a, b), \{(x, y) \in D_a \times D_b | x \neq y\})$

AC-3 Algorithmus: Herstellen von Kantenkonsistenz

```
def AC3(csp):
    queue = Queue(csp.arcs)
    while not queue.isEmpty():
        (x,y) = queue.dequeue()
        if ARC_Reduce(csp,x,y):
            if D_x.isEmpty(): return false
            for z in x.neighbors(): queue.enqueue(z,x)
    return true

def ARC_Reduce(csp, x, y):
    change = false
    for v in D_x:
        if not (any w in D_y and csp.C_xy(v,w)):
            D_x.remove(v);  change = true
    return change
```

Quelle: Eigener Code basierend auf einer Idee nach (Russell und Norvig 2020, p. 171, fig. 5.3)

Einsatz des AC-3 Algorithmus

1. Vorverarbeitung: Reduktion der Wertemengen *vor* BT-Suche
   - Nach AC-3 evtl. bereits Lösung gefunden (oder ausgeschlossen)

2. Propagation: Einbetten von AC-3 als Inferenzschritt in BT-Suche (**MAC** – Maintaining Arc Consistency)
   - Nach jeder Zuweisung an X_i Aufruf von AC-3-Variante:
     - Initial nur Kanten von X_i zu allen noch nicht zugewiesenen Nachbarvariablen
   - Anschließend rekursiver Aufruf von BT-Suche

Wrap-Up

- Anwendung von Forward Checking und ...
- ... die Erweiterung auf alle Kanten: AC-3, Kantenkonsistenz

LICENSE