

1 Waterkracht

J.W.M. Frenken

- a. De kracht op de bodem is gelijk aan de impulsoverdracht door het water per tijdseenheid. In deze opgave wordt de volledige, verticaal gerichte impuls van het water aan de wasbak overgedragen. Het feit dat de diameter van de waterkolom overal even groot is, impliceert dat de stroomsnelheid van het water constant is; dus bij aankomst op de bodem van de wasbak is deze even groot als bij het uitstromen uit de kraan. Deze snelheid rekenen we als volgt uit:

$$v = \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\pi d^2} \frac{dV}{dt} = 63.7 \text{ cm/s}$$

waarbij $\frac{dV}{dt} = 50 \text{ ml/s}$ ($= 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$) de hoeveelheid water is die per seconde uitstroomt, A de doorsnede van de waterkolom en $d = 1.0 \text{ cm}$ de diameter. De impulsoverdracht per tijdseenheid is dan

$$F = \frac{dp}{dt} = v \frac{\rho dV}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi d^2} \rho \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 = 0.032 \text{ N.}$$

- b. Het antwoord verandert zeker als de waterstraal bij de bodem van de wasbak een kleinere diameter heeft van 0.5 cm . Uiteraard bereikt nog steeds dezelfde hoeveelheid water per seconde de bodem van de wasbak (stationaire situatie), maar de afname van de diameter met een factor 2 komt overeen met een toename van de stroomsnelheid van het water met een factor 4 onderweg van de kraan naar de wasbak; dus bij de wasbak vinden we $v = 2.55 \text{ m/s}$. De impulsoverdracht per tijdseenheid en daarmee de door het water op de wasbak uitgeoefende kracht wordt dus verviervoudigd tot $F = 0.127 \text{ N}$.
- c. Op de halve hoogte (9.8 cm) heeft het water nu al een snelheid van $v = 2.55 \text{ m/s}$ (zie b). Over het resterende traject valt het in druppeltjes uiteengevallen water met valversnelling $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, waardoor de aankomstsnelheid nu nog groter is:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gx} = 2.90 \text{ m/s}$$

De hiermee overeenkomende kracht op de wasbak bedraagt $F = 0.145 \text{ N}$.

2 Zwart gat

P.J. van Baal

- a. Voor $\underline{w}(\tau) = d\underline{x}/d\tau$ kunnen we simpel componentsgewijs differentiëren. We vinden

$$\underline{w}(\tau) = c(\cosh(a\tau/c), \sinh(a\tau/c), 0, 0), \quad (1)$$

$$\underline{w} \cdot \underline{w} = c^2(\cosh^2(a\tau/c) - \sinh^2(a\tau/c)) = c^2. \quad (2)$$

Omdat \underline{w} voldoet aan de eigenschap waar een viersnelheid aan moet voldoen en de viersnelheid wordt verkregen door \underline{x} te differentiëren naar de eigentijd, correspondeert dus τ met die eigentijd.

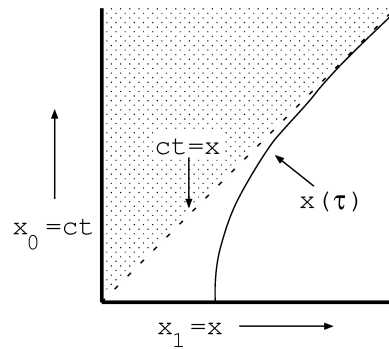
- b. De componenten van de vgl. $m d\underline{w}/d\tau = \underline{K}$ worden $ma \sinh(a\tau/c) = \gamma(v)vF/c$, en $ma \cosh(a\tau/c) = \gamma F$. Door deze vergelijkingen op elkaar te delen zien we simpel dat $v/c = \tanh(a\tau/c)$, en hieruit leiden we eenvoudig af $\gamma(v) = \cosh(a\tau/c)$. Dit teruginvullen geeft $F = ma$, het produkt van twee constanten en dus zelf constant. De versnelling F/m is dus gelijk aan a , zoals de notatie al suggereert.
- c. Voor $v = -c \tanh(a\tau/c)$ vinden we wederom $\gamma(v) = \cosh(a\tau/c)$. De Lorentztransformatie geeft dan ($t = 0, x = c^2/a$)

$$x_0 = ct' = \gamma(v)(ct - vx/c) = \sinh(a\tau/c)c^2/a, \quad (3)$$

$$x_1 = x' = \gamma(v)(x - vt) = \cosh(a\tau/c)c^2/a. \quad (4)$$

(Het extra minteken in de snelheid voor de Lorentz transformatie is eenvoudig te begrijpen: Als men een inertiaalstelsel transformeert, hebben voorwerpen die in rust waren t.o.v de oude coördinaten t.o.v de nieuwe coördinaten een snelheid die tegengesteld is aan de boost)

- d. Voor het ruimte-tijd diagram merken we op dat voor $\tau \rightarrow \infty$, $\cosh(a\tau/c) \approx \sinh(a\tau/c) \approx \exp(a\tau/c)/2$. Dus voor $\tau \rightarrow \infty$ nadert de wereldlijn $\underline{x}(\tau)$ steeds dichterbij de lijn $x_0 = x_1$.

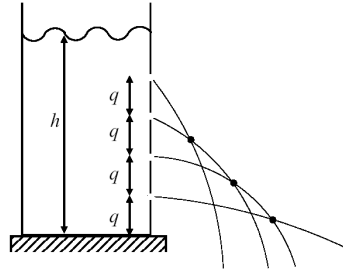


De laatste twee vragen zijn het eenvoudigst grafisch op te lossen. Een voorwaartse lichtkegel vanuit een punt in het gearceerde gebied in het diagram snijdt in het geheel niet met de wereldlijn $\underline{x}(\tau)$ van het deeltje. Informatie vanuit het gearceerde gebied kan dus het deeltje niet bereiken. Vice versa is duidelijk te zien dat een lichtkegel vanuit een punt op de wereldlijn $\underline{x}(\tau)$ in het gearceerde gebied reikt, en dat er dus informatie naar het gearceerde gebied gestuurd kan worden.

3 De lekkе Flesch

R.J. Wijngaarden

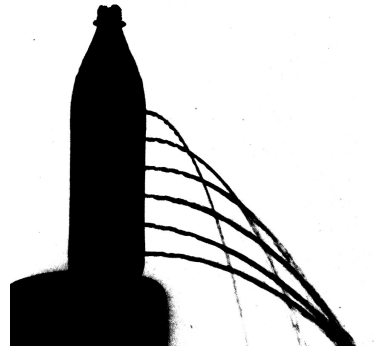
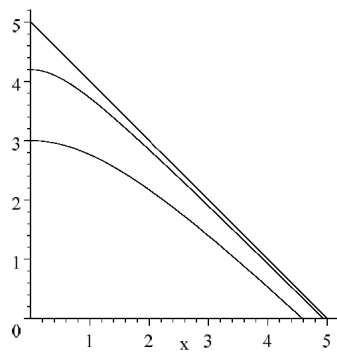
Aan beide zijden van de stroomlijn heerst atmosferische druk. Omdat de druk aan het wateroppervlak gelijk is aan de druk aan de gaatjes (beiden atmosferische druk) bestaat de energie van een ‘stukje’ water dat langs de stroomlijn beweegt alleen uit kinetische energie ($\frac{1}{2}mv^2$) en potentiële energie (gravitatieveld van de aarde) (mgy). Behoudt van energie geeft: $\frac{1}{2}mv_{surf}^2 + gmy_{surf} = \frac{1}{2}mv_{hole}^2 + gmy_{hole}$ waaruit men, met $v_{surf}^2 = 0$, vindt dat $\frac{1}{2}v_{hole}^2 = g(y_{surf} - y_{hole})$.



We berekenen de kruising die hoort bij de gaatjes n en $n+1$. Het onderste gaatje heeft nummer 1 en zijn afstand tot de bodem is q . Dan geldt voor gaatje n : $\frac{1}{2}v_{hole}^2 = g(h - nq)$ dus $v_n = \sqrt{2g(h - nq)}$ en analoog voor gaatje $n+1$: $v_{n+1} = \sqrt{2g(h - (n+1)q)}$. Dit zijn de horizontale snelheden; de verticale snelheden bij de gaatjes zijn nul.

Dus $x_n = t_n \sqrt{2g(h - nq)}$ en $y_n = nq - \frac{1}{2}gt_n^2$. Eliminatie van t_n geeft $y_n = nq - \frac{x_n^2}{4(h - nq)}$ en analoog verkrijgt men $y_{n+1} = (n+1)q - \frac{x_{n+1}^2}{4(h - (n+1)q)}$. Op de kruising van deze parabolen $y_n = y_{n+1} =: y$ en $x_n = x_{n+1} =: x$. Uit de eerste vergelijking volgt $nq - \frac{x^2}{4(h - nq)} = (n+1)q - \frac{x^2}{4(h - (n+1)q)}$ dus $x = 2\sqrt{(h - nq)(h - (n+1)q)}$ en $y = y_n = nq - \frac{x_n^2}{4(h - nq)} = nq - \frac{4(h - nq)(h - (n+1)q)}{4(h - nq)} = (2n+1)q - h$. Dus de kruising is op $(x, y) = (2\sqrt{(h - nq)(h - (n+1)q)}, (2n+1)q - h)$

Om een vergelijking te krijgen voor de curve waarop deze kruisingen liggen drukken we n uit als een functie van x en substitueren die n in y . Uit $x = 2\sqrt{(h - nq)(h - (n+1)q)}$ vinden we $n = -\frac{1}{2} + \frac{h}{q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{q}\right)^2}$ en substitutie in $y = (2n+1)q - h$ heeft maar een fysisch realistische oplossing: $y = h - \sqrt{q^2 + x^2}$. (Voor $q \rightarrow 0$ benadert dit de rechte lijn $y = h - x$.)



Links: Plots van $y = h - \sqrt{q^2 + x^2}$ voor $h = 5$ en $q = 0.001, 0.8$ en 2
 Rechts: Negatief van een foto van de werkelijke situatie.

4 Warmtetransport

L.J.F. Hermans

- a. Vlak bij een vast voorwerp (kleding, huid, raam etc.) is de convectieve stroming parallel aan dat voorwerp; het is immers niet permeabel voor de luchtstroom. In die laag (van ca. 3 mm dik) is er dus geen convectief warmtetransport in de richting van het voorwerp, en moet de geleiding het overnemen.
- b. ‘Wit’ slaat op het zichtbare deel van het spectrum. De relevante straling is echter thermisch infrarood (met een golflengte rond $10\text{ }\mu\text{m}$), en in dat golflengtegebied blijken de meeste oppervlakken een emissiviteit van bijna 100% te hebben.
- c. $I_g = \lambda A \Delta T / d$; $I_s = 4A\sigma T^3 \Delta T$;
Verhouding $I_g/I_s = \lambda/4d\sigma T^3 \approx 1,35$ bij $T \approx 300\text{ K}$. De in de inleiding genoemde bewering is dus zo gek nog niet.

5 Zwaartekracht

G. Nienhuis

Vraag 1: Cabine aan satelliet

- a. In de cirkelbaan met straal R om een planeet met massa M_p geldt dat de zwaartekracht op het schip de vereiste centripetale kracht levert. De (naar beneden gerichte) versnelling van de zwaartekracht op het schip is GM_p/R^2 , en is dus gelijk aan de centripetale versnelling $\Omega^2 R$ van het schip. Dat geeft het verband

$$R^3 = \frac{GM_p}{\Omega^2}$$

tussen de straal R van de baan van het schip en de hoeksnelheid Ω . Als de cabine een afstand A onder het schip hangt beschrijft die een cirkelbaan met dezelfde hoeksnelheid Ω en de kleinere straal $R - A$. De centripetale versnelling van de cabine heeft dan de kleinere waarde $\Omega^2(R - A)$, terwijl de versnelling van de zwaartekracht de grotere waarde $GM_p/(R - A)^2$ heeft. De kracht die het touw op de cabine uitoefent is dan omhoog gericht, en heeft de grootte

$$F = \frac{GmM_p}{(R - A)^2} - m\Omega^2(R - A) = \frac{m\Omega^2 R^3}{(R - A)^2} - m\Omega^2(R - A).$$

In eerste orde in A bedraagt de kracht $F = 3m\Omega^2 A$. Een ruimte reiziger ondervindt dus een zwaartekrachtsversnelling gelijk aan $g = 3\Omega^2 A$.

- b. Als de cabine boven het schip hangt gelden dezelfde uitdrukkingen met A door $-A$ vervangen. Dan is de zwaartekracht te klein om de grotere centripetale versnelling te leveren, en het touw trekt de cabine naar beneden met een kracht $F = 3m\Omega^2 A$.
- c. De effectieve zwaartekrachtsversnelling bedraagt $3(2\pi/3600)^2 \times 5000 \text{ ms}^{-2} = 4,6 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$.

Vraag 2: De toekomst van Maan en Aarde

- a. Voor een cirkelbaan geldt dat de aantrekkingskracht van de aarde de centripetale kracht levert, zodat (bij m de massa van de Maan, M de massa van de Aarde, G de gravitatieconstante)

$$m\Omega^2 R = mMG/R^2 .$$

Dit geeft een verband tussen Ω en R . Omdat tevens geldt dat $L = mR^2\Omega$ is R uit te drukken in L , met als resultaat

$$m^2 MGR = L^2 .$$

Eliminatie van R levert een relatie tussen Ω en L , in de vorm

$$\Omega L^3 = m^3 M^2 G^2 .$$

Bij toenemende straal R neemt dus het baanimpulsmoment L toe ($\propto \sqrt{R}$), en de hoeksnelheid Ω af ($\propto L^{-3}$ ofwel $\propto R^{-3/2}$). De energie van de Maan is uit te drukken in L , door te schrijven

$$E_M = \frac{m\Omega^2 R^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R} = -\frac{m^3 M^2 G^2}{2L^2} .$$

De energie van de aardrotatie is

$$E_A = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{S^2}{2I} = \frac{(J - L)^2}{2I} ,$$

met I het traagheidsmoment van de Aarde, waarbij tevens geldt dat $S = I\omega$. Het minimum van de energie bij variërende L (of R , of Ω) vinden we door te stellen dat $dE/dL = 0$, met $E = E_M + E_A$. Dat geeft als resultaat

$$\frac{J - L}{I} = \frac{m^3 M^2 G^2}{L^3} ,$$

ofwel $\omega = \Omega$

- b. Behoud van impulsmoment $J_{nu} = J_{eind}$ met verwaarlozing van S_{eind} geeft $L_{nu} + S_{nu} = 1,20L_{nu} = L_{eind}$. Dus de verhouding van de baanstralen straks en nu is $R_{eind}/R_{nu} = L_{eind}^2/L_{nu}^2 = (1.20)^2 = 1,44$.
- c. De verhouding van de lengte van de maand straks en nu is $\Omega_{nu}/\Omega_{eind} = (R_{eind}/R_{nu})^{3/2} = 1,2^3 = 1,7$. In de eindsituatie duurt een dag dus evenlang als een maand, te weten $1,7 \times 27,3$ dagen, dus iets minder dan 50 huidige dagen.

6 De proef van Tolman & Stewart

C.W.J. Beenakker

Antwoord: $m/e = \frac{\text{oppervlak onder grafiek}}{2\pi f R L}$.

Afleiding: Elke ladingsdrager wordt door de elektrische kracht $F(t) = eV(t)/L$ afgeremd, van een beginsnelheid $2\pi f R$ op $t = 0$ tot een eindsnelheid 0 als $t \rightarrow \infty$. Volgens de wet van Newton is de totale verandering van de impuls gelijk aan de tijdsintegraal van de kracht, dus

$$m \times 2\pi f R = \int_0^\infty F(t) dt = \frac{e}{L} \int_0^\infty V(t) dt.$$

De integraal is gelijk aan het oppervlak onder de grafiek.

7 Kogelvering

C.J.M. Schoutens

In vogelvlucht:

- na de n -e botsing zijn de snelheden

$$(V_n, v_n) = (V_0 \cos n\alpha, \frac{V_0}{\sqrt{\epsilon}} \sin n\alpha)$$

met $\alpha = \arccos \frac{(1-\epsilon)}{(1+\epsilon)}$. Tussenstap

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{1+\epsilon} V_n + \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} v_n \\ V_{n+1} &= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} V_n - \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} v_n . \end{aligned}$$

- de positie x_n van de n -e botsing

$$x_n = x_1 \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\sin(n - \frac{1}{2})\alpha} .$$

Tussenstappen

$$(x_n - x_{n+1})/V_n = (x_n + x_{n+1})/v_n ,$$

$$x_{n+1} = \frac{\sin n\alpha - \sqrt{\epsilon} \cos n\alpha}{\sin n\alpha + \sqrt{\epsilon} \cos n\alpha} x_n = \frac{\sin(n - \frac{1}{2})\alpha}{\sin(n + \frac{1}{2})\alpha} x_n .$$

- $\epsilon = 1$: twee botsingen, $x_{\min} = x_0$
 $\epsilon = 1/3$: drie botsingen, $x_{\min} = x_0/3$
 $\epsilon \ll 1$: aantal botsingen $\frac{\pi}{\alpha} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{\epsilon}}$ ('afgerond' op geheel getal); minimale afstand (na $n = \frac{\pi}{2\alpha}$ botsingen) $x_{\min} \sim x_1 \sin \frac{1}{2}\alpha \sim x_1 \sqrt{\epsilon}$.
- curve $x_n(t_n)$

$$x^2 = x_1^2 - 2x_1 V_0 t \cos^2 \frac{1}{2}\alpha + V_0^2 t^2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha .$$

Tussenstap

$$V_0 \cos n\alpha (t_{n+1} - t_n) = x_n - x_{n+1}$$

8 Quantum Fase-Overgang

P.J.H. Denteneer

- a. Voor de MI toestand geldt: $\psi = 0$, dus de gevraagde E_0 is de laagste energie van een MI toestand. Bij gegeven U, g en μ is die energie in principe gelijk aan: $\frac{1}{2}Ug(g-1) - \mu g$. Aangezien voor $g = 0$ deze energie gelijk aan nul is, is het duidelijk dat voor grotere waarden van g , de laagste energie af zal hangen van μ : des te groter μ , des te groter zal g gekozen kunnen worden voor de MI toestand met laagste energie. Beschouwing van de energie voor $g = 0, g = 1, g = 2, g = 3, \dots$, nl. $E = 0, E = -\mu, E = U - 2\mu, E = 3U - 3\mu, \dots$ leert dat opeenvolgende energieën samenvallen voor $\mu = 0, U, 2U, \dots$. Het antwoord is dan:

$$E_0(g, U, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{als } \mu < 0 \\ \frac{1}{2}Ug(g-1) - \mu g & \text{als } U(g-1) < \mu < Ug \end{cases}$$

- b. De oplossing ligt in het inzicht dat een fase-overgang optreedt op het punt dat de uitdrukking voor E_{gr} geminimaliseerd gaat worden door een $\psi \neq 0$, d.w.z. indien $E_2 < 0$, in plaats van door een $\psi = 0$, d.w.z. indien $E_2 > 0$. De gevraagde curve in het (μ, U) -vlak wordt dus bepaald door de conditie: $E_2 = 0$. Dit kan verder uitgewerkt worden door dit op te vatten als een kwadratische vergelijking voor μ als functie van U bij gegeven g ; dit leidt tot twee oplossingen:

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2}U(2g-1) - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{U^2 - 2U(2g+1) + 1}.$$

Deze oplossingen vormen twee curves in het (μ, U) -vlak die samenkomen in een punt; samen bakenen ze een gebied af waarbinnen de MI toestand voor de betreffende g zal optreden.

- c. Bij gegeven g treedt de kleinste waarde van U op de curve op indien de twee oplossingen uit (b) samenvallen, d.w.z. indien de uitdrukking onder de wortel nul is. De oplossing voor U is:

$$U_c = 2g + 1 + \sqrt{(2g+1)^2 - 1}.$$

(De andere wortel leidt tot een negatieve waarde van μ bij samenvallen en is vanwege het resultaat van (a) niet van toepassing)

De oplossing voor U is groter naarmate g groter is, echter $g = 0$ is geen toegestaan geval (aangezien er dan geen atomen aanwezig zijn en er ook geen fase-overgang kan plaatsvinden): de kleinste kritieke waarde voor U treedt dus op voor $g = 1$: $U_c = 3 + 2\sqrt{2} \simeq 5.83..$

9 Rivier afdalen met een boot

A. Hirschberg

De boot vaart sneller dan het water. Dankzij dit snelheidsverschil is het mogelijk om bij een drijvende bak een roer te gebruiken.

De Archimedes drukkracht is gericht loodrecht op het wateroppervlak en compenseert dus niet de component van het gewicht langs het wateroppervlak. Het wateroppervlak is in goede benadering een isobaar, heeft een uniforme druk. De isobaren in het water zijn dus parallel aan het wateroppervlak. Hieruit volgt dat als de boot stilstaat ten opzichte van het water de drukkrachten langs het wateroppervlak elkaar compenseren. De resulterende drukkracht van het water is dus loodrecht op het oppervlakte zolang de boot niet beweegt ten opzichte van het water. De component van het gewicht langs het wateroppervlak versnelt de boot totdat de wrijvingskracht voor evenwicht zorgt.

10 De Maan

H. Jordens

- a. $a^3 = \frac{GM_{Aarde}}{4\pi^2} \cdot T^2$ dus $a = 3,83 \cdot 10^8$ m en de lange as is:
 $2a = 7,66 \cdot 10^8$ m
- b. De verhouding van diameters in het perigeum en apogeum is (ongeveer): $\frac{24}{21} \approx 1,14$; dus $\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \approx 1,14$ zodat $\epsilon = \frac{1,14-1}{1,14+1} \approx 0,075$
- c. Het impulsmoment is:
$$L = m\omega r^2 = 2m \frac{dA}{dt} = 2m \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{T} = 2,88 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2/\text{s}$$
- d. In het perigeum is de afstand Aarde-Maan: $r_- = a(1 - 0.075) = 3,5 \cdot 10^8$ m zodat de snelheid daar is: $v_- = \frac{L}{mr_-} = 1.1 \cdot 10^3$ m/s

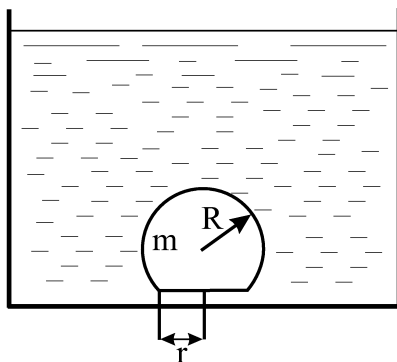
11 Badafvoer

R.F. Mudde

Het volume van de bol is $\frac{4}{3}\pi R^3$, dus de zwaartekracht op de bol is:

$$F_{zw} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{bol} g$$

De bol blijft in het gat liggen zolang de zwaartekracht groter is dan de opwaartse kracht die de bol ondervindt. Deze opwaartse kracht is als volgt te berekenen. Beschouw eerst de situatie dat het gat dicht is en het deel van de bol dat zich nu in het water bevindt geheel onder water is (zie figuur). We noemen dit voorwerp Q.



De opwaartse kracht hiervan is gelijk aan de massa van het verplaatste water. Integratie geeft het volume $V(r, R)$, van deze 'bol zonder kapje':

$$V(r, R) = \frac{2}{3}\pi R^3 + \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \pi (R^2 - s^2) ds = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 + [2R^2 + r^2] \sqrt{R^2 - r^2} \right)$$

De opwaartse kracht op Q is gelijk aan:

$$F = \rho_w V(r, R) g$$

Nu is de echte situatie anders: het onderste deel is niet omringd door water en ervaart dus geen opwaartse kracht. We moeten dus de bovenste kracht verminderen met de kracht die het water op de platte bodem (met straal r) van Q zou hebben uitgeoefend. Deze kracht is een gevolg van de hydrostatische druk, $\rho_w g h$ op het oppervlak πr^2 , waarbij h de hoogte van het water in het vat is. Dus we moeten een kracht $\rho_w g h \cdot \pi r^2$ van de opwaartse kracht aftrekken om de echte opwaartse kracht op de bol te krijgen:

$$F_{opw} = \rho_w g V(r, R) - \rho_w g \pi r^2 h$$

Bedenk dat de luchtdruk geen netto kracht uitoefent op de bol. We hebben hierboven ook enkel de hydrostatische bijdrage van het water beschouwd, de echte druk in het water is uiteraard de som van de luchtdruk en de hydrostatische druk. De luchtdruk zit als ‘dood element’ in de berekeningen en valt er uit als die meegenomen zou worden.

Uit bovenstaand volgt, dat de opwaartse kracht groter wordt als h kleiner wordt! Enigszins verrassend?! De bol blijft liggen zolang $F_{opw} + F_{zw} < 0$. De gevraagde h volgt uit:

$$\rho_w g V(r, R) - \rho_w g \pi r^2 h - \rho_{bol} g \frac{4}{3} \pi R^3 = 0$$

Oplossen van h geeft:

$$h = \frac{2R^3}{3r^2} \left(1 - 2 \frac{\rho_{bol}}{\rho_w} \right) + \frac{2R^2 + r^2}{3r^2} \sqrt{R^2 - r^2}$$

De eis $h > R$ geeft als voorwaarde voor ρ_{bol} :

$$\frac{\rho_{bol}}{\rho_w} \geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{4R^2} \right) \sqrt{R^2 - r^2}$$

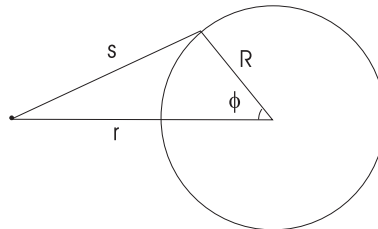
12 Meting van de gravitatieconstante G

M.P. van Exter

a. De bollen gedragen zich inderdaad als puntmassa's. Het bewijs hiervoor kan eenvoudig met de stelling van Gauss (zoals bij electro-magnetisme) of via drie stappen:

- De belangrijkste stap is de eerste, waarbij we wiskundig aantonen dat de zwaartekracht die een bolschil uitoefent op een puntmassa buiten de bol gelijk is aan de kracht die we vinden als we de bolschil vervangen door een even massief punt dat zich in het centrum van de oorspronkelijke bol bevindt. Beschouw een puntmassa op afstand $r > R$ van een bolschil met straal R , en verdeel de bolschil in een set ringen met straal $R \sin \phi$ (zie figuur). De fractionele massa van elk van deze ringen is $dm/m_0 = \sin \phi d\phi/2$ en de bijbehorende gravitatiepotentiaal is $dU = Gdm/s$, waarbij de afstand s volgt uit de cosinus regel (zie figuur). Integratie over de volledige bol geeft als totale potentiaal

$$U = \int dU = Gm_0 \int_0^\pi \frac{\sin \phi}{2\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \phi}} d\phi = \frac{Gm_0}{r} . \quad (5)$$



- Omdat een massieve bol kan worden opgebouwd uit een serie bolschillen is de gravitatiepotentiaal die een massieve bol 1 uitoefent op een puntmassa 2 gelijk aan die van een equivalente puntmassa 1 in het centrum van bol 1.
 - Ook bol 2 kan worden opgebouwd uit bolschillen. Voor de potentiaal van elk van deze bolschillen 2 in het veld van de bol 1 geldt een soortgelijk argument als hierboven.
- b. Invullen in de formule voor de zwaartekracht is simpel. Gebruik als afstand tussen de middelpunten $r = 32 + 5.5 + 7.5 = 45$ mm. Invullen geeft

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = 1.03 \times 10^{-9} \text{ N} \quad (6)$$

- c. Vraag c1 vind ik het eenvoudigst te beantwoorden door de bekende formules voor lineaire verplaatsing om te zetten naar een hoekequivalent. De oscillatieperiode van een massa aan een veer is te berekenen door de wet van Hooke ($F = Cu$) te combineren met de versnellingswet ($F = ma = md^2u/dt^2$), waarna voor de oscillatieperiode T volgt dat $(2\pi/T) = \sqrt{C/m}$. Bij de huidige opgave gebruiken we de hoek-equivalente wetten. We combineren het verband tussen krachtmoment M en hoekverdraaiing $\Delta\Theta$ ($M = K\Delta\Theta$) met het verband tussen krachtmoment en hoekversnelling ($M = Id^2\Theta/dt^2$, met I het traagheidsmoment), tot de vergelijking

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{K}{I} . \quad (7)$$

Het traagheidsmoment $I = 2m_1 \left(\frac{2}{5}r_1^2 + s^2\right)$, met m_1 en r_1 als massa en straal van een kleine bol, en s als afstand tussen middelpunt van zo'n bol en de torsiedraad, bevat nog een (haast verwaarloosbaar) instinkertje in de vorm van het traagheidsmoment van de bol zelf. Invullen van de bekende gegevens geeft

$$K = I \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2 \times 0.02 \times \left(\frac{2}{5}7.75^2 + 50^2\right) \times 10^{-6} \times \left(\frac{2\pi}{480}\right)^2 = 1.73 \times 10^{-8} \text{ Nm/rad} \quad (8)$$

Vraag c2 is nu eenvoudig. De hoekverdraaiing wordt

$$\Delta\Theta = \frac{M}{K} = \frac{2 \times 1.03 \times 10^{-9} \times 0.05}{1.73 \times 10^{-8}} = 5.9 \text{ mrad} \quad (9)$$

- d. De draaihoek $\Delta\Theta$ is niet alleen evenredig met de aantrekkingskracht tussen de bollen, maar ook omgekeerd evenredig met de torsieconstante K van de torsiedraad. Als de centrale bollen zwaarder waren gemaakt had ook de torsiedraad steviger moeten zijn en was de torsieconstante K groter geworden. Sterker nog, terwijl de draagkracht van een draad schaalt met het kwadraat van zijn dikte, schaalt de torsieconstante maar liefst met de vierde macht hiervan. Hierdoor is een experiment met kleine bollen en een dunne draad naar verwachting zelfs nauwkeuriger dan een experiment met grote bollen en een dikke draad!
- e. De hoekverdraaiing wordt gemeten in het verre veld, dus op grote afstand van de reflecterende spiegel of na focusering van de laserbundel met een (zwakke) lens. De beperkende factor is hier de diffractiehoek van de laserbundel $\approx \lambda/D$, met λ de golflengte en D de bundeldiameter. Gebruik makend van het (zeer ruim bemeten) criterium dat

de hoekverplaatsing van de gereflecteerde bundel $2\Delta\Theta$ minimaal een bundeldiameter moet zijn vinden we

$$D > \frac{\lambda}{2\Delta\Theta} = \frac{0.633\mu\text{m}}{2 \times 0.0059} = 54\mu\text{m} \quad (10)$$

- f. De kracht die de weerkaatste fotonen uitoefenen is $F = 2P/c$, met P het invallend vermogen. Invullen geeft een kracht van 6.67×10^{-12} N per mW en een moment van 3.3×10^{-14} Nm. Geen enkel probleem dus.
- g. Voor een ruwe schatting van de lading Q op de bollen gebruiken we de formule voor de statische elektrische potentiaal van vrijstaande bollen

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} , \quad (11)$$

Wanneer beide bollen geladen zijn volgt door substitutie de bijbehorende elektrische kracht

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{r^2} U_{\text{el}}^2 , \quad (12)$$

met r als afstand tussen de bollen. Invullen levert een kracht van 1.1×10^{-9} N bij een statische spanning van ongeveer 10 V en een honderd keer zo'n grote kracht bij een statische spanning van 100 V. Aarding is een must voor dit experiment!

- h. De ultieme limiet voor de nauwkeurigheid van een torsiebalans wordt bepaald door de thermische excitatie van de verdraaiing. Volgens het equipartitieprincipe is de bijbehorende gemiddelde potentiele energie $\frac{1}{2}K \langle \Delta\Theta^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$, waardoor

$$\sqrt{\langle \Delta\Theta^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{K}} = \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293}{1.7 \times 10^{-8}}} = 5 \times 10^{-7} \text{ rad} . \quad (13)$$

We zitten in het experiment nog ver van deze limiet af.

Toelichting achteraf:

- Omdat ik geen gegevens van de fabrikant heb gekregen moest ik de grootte van de parameters schatten. Achteraf denk ik dat ik de oscillatie periode te hoog heb ingeschat; een periode van 2 minuten is realistischer dan de genoemde 8 minuten. Met dit nieuwe getal zou bij vraag (c) de torsieconstante K 16x groter worden en de hoekverdraaiing 16x kleiner, tot de beduidend moeilijker te meten $\Delta\Theta = 0.37$ mrad. De bij vraag (e) gevraagde minimale spiegel diameter wordt hiermee 0.9 mm.

- Bij plaatsing van de grote bollen blijkt de kracht van de verre bol niet volledig verwaarloosbaar t.o.v. die van de nabije bol, maar nog steeds ongeveer 7% daarvan te zijn. Iedereen die dit opmerkte kreeg een bonuspunt!
- Excuses voor het eerdere foutieve antwoord bij vraag (d). De fysica van de torsiebalans staat o.a. goed beschreven in de Feynman lectures.