

# PION 2001

19 februari 2001

## Opgave A: Wet van Archimedes (prof.dr. H.van Beijeren)

We beschouwen een ideaal gas in een homogeen zwaartekrachtveld. In het gas is een bol geplaatst.

- a) Bewijs dat de opwaartse kracht gelijk is aan het gewicht van het gas in het volume van de bol.
- b) De bol is een ballon gevuld met een ander (ideaal) gas. Als de ballon niet uitgerekt is heeft hij een straal  $\bar{r}$ . Het materiaal van de ballon voldoet aan de wet van Hooke (de kracht is evenredig met de uitwijking). Leidt het verband af tussen de druk die door de ballon wordt uitgeoefend en de straal.
- c) Vertel (kwalitatief) wat er gebeurt als het gas in de ballon lichter is dan lucht en de ballon wordt losgelaten (aan de hand van de gevonden formules).

## Uitwerking: Wet van Archimedes (prof.dr. H.van Beijeren)

- a) De algemene gaswet luidt ( $V$  het volume,  $T$  de temperatuur,  $k$  de Boltzman constante en  $p$  de druk):

$$\begin{aligned} pV &= nkT & (n \text{ is het aantal deeltjes}) \\ p &= \rho kT & (\rho \text{ de deeltjesdichtheid}) \end{aligned}$$

Volgens de Boltzman statistiek is het verband tussen de dichtheid op verschillende hoogtes

$$\rho(h) = \rho(0)e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = \rho(0)e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Hierin is  $m$  de massa van de deeltjes in het ideale gas en  $g$  de zwaartekrachtsconstante.

De kracht die de druk uitoefent op de ballon in de opwaartse richting is:

$$\begin{aligned} F_{op} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\phi d\theta \, r^2 \sin\theta p(h_m + r \cos\theta)(-\cos\theta) \\ &= -p(h_m)2\pi r^2 \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) e^{-\frac{mgr \cos\theta}{kT}} \cos\theta \\ &= -p(h_m)2\pi r^2 \int_{-1}^1 du \, u e^{-\frac{mgr}{kT}u} \\ &\approx -p(h_m)2\pi r^2 \int_{-1}^1 du \left(u - \frac{mgr}{kT}u^2\right) \\ &= p(h_m)\frac{4}{3}\pi r^2 \frac{mgr}{kT} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho(h_m)mg \\ &= Mg \end{aligned}$$

- b) Bij een kleine hoek  $\delta\theta$  hoort een cirkel op het oppervlak met straal  $r\delta\theta$ . Als de straal van de ballon groter wordt, dan zal door de elasticiteit van de ballon een druk worden opgebouwd. De wet van Hooke geeft (voor een infinitesimaal elementje aan de rand van de cirkel):

$$\begin{aligned} dF &= Cd\phi\bar{r}\delta\theta\frac{\delta\theta(r-\bar{r})}{\delta\theta\bar{r}} & (\text{Wet van Hooke}) \\ &= Cd\phi\delta\theta(r-\bar{r}) \end{aligned}$$

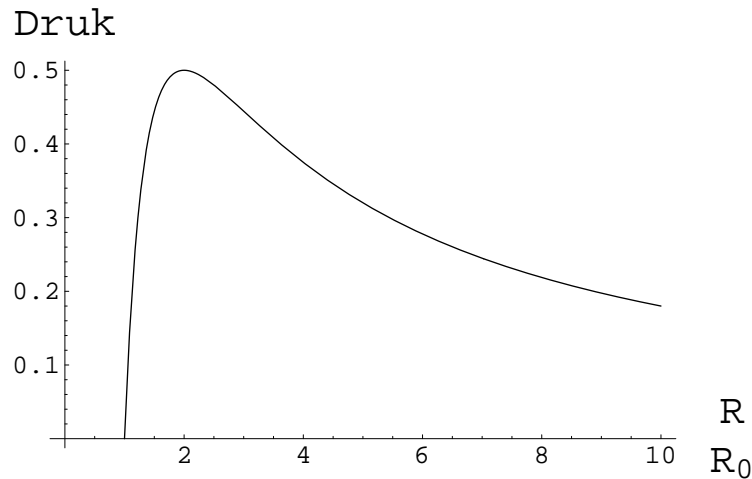
Van deze kracht moeten we de component in de richting van de straal van de bol berekenen (dit levert immers de druk) en integreren rond de cirkel.

$$\begin{aligned} dF_n &= dF\delta\theta \\ F_n &= 2\pi C(\delta\theta)^2(r-\bar{r}) \end{aligned}$$

De druk die wordt uitgeoefend is gelijk aan  $p = F_n/O$  waarbij de oppervlakte is van het infinitesimale elementje behorende bij  $F_n$

$$\begin{aligned} O &= \pi(r\delta\theta)^2 \\ p &= \frac{F_n}{O} = 2C\frac{r-\bar{r}}{r^2} \end{aligned}$$

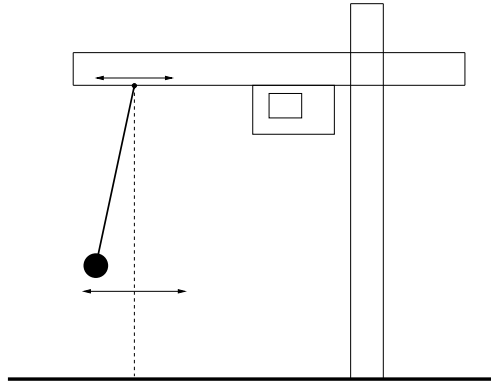
Een plaatje van de druk als functie van de straal van de ballon (voor  $C = 1$ ,  $R_0 = 1$ ) staat in de volgende figuur



- c) In het begin gaat alles normaal zoals je zou verwachten, maar op een gegeven hoogte heeft de ballon zijn maximale druk en daarna neemt de druk van de ballon alleen maar af waardoor de ballon steeds sneller groter wordt en dan klappt.

## Opgave B: Kraandrijversprobleem (prof.dr. J.J. Duistermaat)

We kijken in dit probleem naar een hijskraan die een last met massa  $m$  moet verplaatsen. We beschouwen een puntmassa die in een verticaal vlak  $V$  kan bewegen. Hierbij hangt de puntmassa aan een (massaloze) kabel die op zijn beurt van boven bevestigd is aan de kraan die de kabel heen en weer kan bewegen langs een horizontale baan, ook in het vlak  $V$ . Verwaarloos bij dit probleem de wrijving.



- a) We beginnen in rust, met de last in positie  $A$ , recht onder de kraan. Kan je de kraan zo bewegen dat na een zekere tijd de last opnieuw precies in rust is, maar in een punt  $B$  op een voorgeschreven afstand van  $A$  aangekomen is?

Als het mogelijk is, geef dan een voorbeeld hoe dit gedaan zou kunnen worden.

We laten nu toe dat de kraan ook rond kan draaien en de last ook buiten het vlak  $V$  kan bewegen.

- b) Is het nu mogelijk om de last van een willekeurig punt naar een willekeurig ander punt te verplaatsen waarbij de last bij het begin- en eindpunt in rust is? Als het mogelijk is, geef dan weer aan op wat voor manier dit gedaan zou kunnen worden.

## Uitwerking: Kraandrijversprobleem (prof.dr. J.J. Duistermaat)

We voeren de volgende coördinaten voor het system in:  $k(t)$  is de positie van de kraan,  $h(t)$  de hoek die de kabel maakt met de verticaal en  $\theta(t)$  de rotatie van de kraan. Zij  $m$  de massa van de last,  $l$  de lengte van de kabel en  $g$  de zwaartekrachtsconstante.

We beschouwen het system nu eerst voor vaste  $\theta$ . De kinetische en potentiële energie worden gegeven door

$$T = \frac{1}{2}m((\cos(h)l\dot{h} + \dot{k})^2 + l^2 \sin^2(h)\dot{h}^2)$$

$$V = -mg \cos(h)l$$

De Lagrangiaan is  $L = T - V$ . Uit de Euler-Lagrange vergelijkingen (voor de variabele  $h$ ) volgt direct dat

$$l\ddot{h} + g \sin h + \ddot{k} \cos h = 0$$

Voor  $\dot{k}(t) = \text{constant}$  hebben we te maken met een gewone slinger.

- a) Aan het eind van de beweging moet gelden  $h = \dot{h} = \ddot{h} = 0$ . Hieruit volgt dat meteen dat  $\ddot{k} = 0$ , ofwel  $\dot{k}$  is constant aan het eind van de beweging. De vraag blijft dan over het zo in te richten dat de eindsnelheid  $\dot{k}$  gelijk is aan 0, en  $k$  gelijk is aan de waarde voorgeschreven door de afstand tussen  $A$  en  $B$ .

We kunnen een oplossing van de volgende vorm proberen. Begin met een constante  $\ddot{k}(t) = K_1$  in de richting waar de last heen moet. Schakel onderweg om naar een constante  $\ddot{k}(t) = -K_2$  in de tegengestelde richting en ga daar mee door tot het karretje weer stil staat. Kan dit zo ingericht worden dat aan het eind dan  $h = h' = 0$ ?

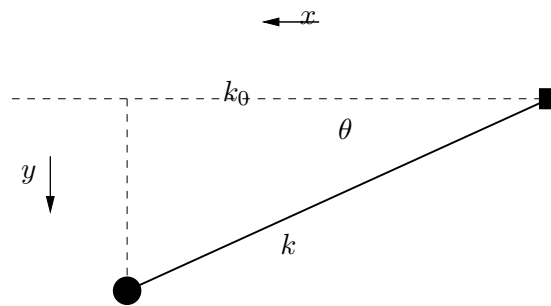
Met constante  $k'' = K_1$  voert  $h(t)$  een periodieke beweging uit. Wacht tot opnieuw  $h = h' = 0$  en schakel dan om naar een beweging waarbij de kraan niet versnelt ( $\ddot{k} = 0$ ). De massa en de kraan bewegen nu met constante snelheid, waarbij de massa geen slingeren uitvoert ( $\dot{h} = 0$ ). Schakel na enige tijd om naar  $\ddot{k} = -K_1$  en ga precies zo lang door als de tijd waarmee het systeem versneld werd met versnelling  $K_1$ .

Door nu de tijd te variëren tussen de periode van versnelling en de periode van vertraging kan elke gewenste afstand overbrugd worden.

- b) De truc bij het vorige onderdeel werkt hier niet direct. Het probleem is dat na een verandering van enkel de hoeksnelheid  $\dot{\theta}$  het systeem zich niet meer in een inertiaalstelsel bevindt. Het systeem kan dan bekeken worden in een meedraaiend stelsel, maar hierbij treden allerlei schijnkrachten op.

Een betere manier is de volgende: door  $k$  en  $\theta$  op een goede manier te variëren is het mogelijk een rechte beweging in een willekeurige richting te maken (niet alleen naar de kraan gericht zoals in onderdeel a). Op dezelfde wijze als bij onderdeel a) volgt dat dat het mogelijk is de last over een willekeurige afstand in die richting te verplaatsen.

Stel bijvoorbeeld dat we de last loodrecht op de richting van onderdeel a) willen verplaatsen. Er geldt  $x = k \cos \theta$  en  $y = k \sin \theta$  (zie de figuur hieronder). Voor vaste  $x = k_0$  moet gelden  $k = k_0 / (\cos \theta)$  en  $y = k_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = k_0 \tan \theta$ . Door nu  $\theta$  te laten voldoen aan de differentiaalvergelijking  $\ddot{y} = \text{constant} = k_0 \frac{d^2 \tan \theta}{dt^2}$  krijgen we een uniforme versnelling in de  $y$  richting.



## Opgave C: Vliegende mens (drs. H.Jordens)

Maak een beredeneerde schatting van het minimale vleugeloppervlak van een eenpersoons-, door menskracht aangedreven, vliegtuig. Zowel voor de liftkracht als voor de luchtweerstand geldt bij niet te hoge snelheden:

$$F = \frac{1}{2} C \rho v^2 A$$

waarin  $C$  een karakteristieke dimensieloze constante van orde 1 is,  $v$  de snelheid,  $\rho$  de dichtheid van de lucht en  $A$  het oppervlak waarop de kracht wordt uitgeoefend.

## Uitwerking: Vliegende mens (drs. H.Jordens)

In dit probleem zijn de onbekende parameters  $F_{\text{lucht}}$ ,  $F_{\text{lift}}$ ,  $A$  en  $v$ . We zullen een aantal vergelijkingen afleiden waaruit de waarde van  $A$  bepaald kan worden.

- Om de verhouding  $F_{\text{lucht}}$  en  $F_{\text{lift}}$  te bepalen, moeten de hoek van de vleugels weten. Stel deze hoek is  $\theta = 3^\circ$ . Dan is de verhouding tussen het oppervlak dat zorgt voor de luchtweerstand en de lift gelijk aan:  $A_{\text{lucht}} : A_{\text{lift}} = \tan(\theta) \approx 1 : 30$ . Bovendien geldt  $A_{\text{lucht}} = \sin(\theta)A$ .
- Welke lift is nodig om het vliegtuig in de lucht te houden? Voor een toestel met persoon van 100 kg, is de benodigde lift gelijk aan de zwaartekracht en dus  $F_{\text{lift}} = 1000 \text{ N}$ . De luchtweerstand is dan  $F_{\text{lucht}} = 1000/30 = 33 \text{ N}$ .
- Het benodigde vleugeloppervlak wordt nu bepaald door het totale vermogen dat de persoon die het vliegtuig aandrijft kan leveren. Een grove schatting : een goed getraind persoon kan gedurende enige tijd een vermogen van circa 200W leveren. (volgt bijvoorbeeld uit 10 km schaatsen;  $v$  is ongeveer 10 m/s, met  $A$  en  $C_w$  in de orde van 1 geeft een vermogen  $P \approx 200 \text{ W}$ ).
- Het vermogen  $P$  wordt gebruikt om de luchtweerstand te compenseren, dus  $P = F_{\text{lucht}}v$ . Er volgt voor de snelheid  $v = 200/33 = 6 \text{ m/s}$
- Met  $F_{\text{lucht}} = \frac{1}{2}C_p v^2 (A_{\text{lucht}}) = 33 \text{ N}$  volgt nu dat het oppervlak  $A$  gelijk is aan  $A = 45 \text{ m}^2$ .

## Opgave D: Geladen bol (drs. H.Jordens)

In een lineaire versneller worden elektronen versneld en op een geïsoleerd opgestelde metalen bol met straal  $R$  afgeschoten. De impactparameter is  $b/R = 0.5$  (hier is  $b$  de loodrechte afstand tussen de elektronenbundel en het midden van de bol).

Bereken de maximale spanning op de bol als de versnelspanning:

- 1 kV is.
- 1 MV is.

## Uitwerking: Geladen bol (drs. H.Jordens)

Op een gegeven moment is de bol zover opgeladen dat vanwege de afstotende kracht de elektronen langs de bol scheren; de bol heeft dan een lading  $Q$ . Stel de snelheid na de versnelling is  $v_0$  en op een afstand  $R$  van de bol  $v$ . We nemen  $m$  voor de (rust)massa van het electron en schrijven  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ . We kunnen nu de berekening van de maximale spanning op de bol op relativistische of niet relativistische wijze doen.

Als we de snelheid van de electronen op niet-relativistische wijze uitrekenen dan vinden we ( $T = mv^2/2$ ) dat in geval a) de snelheid  $1.9 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  is en in geval b) een snelheid boven de lichtsnelheid. Geval b) moet dus zeker relativistisch behandeld worden, en geval a) eigenlijk ook. Omdat het relativistische geval een stuk moeilijker is, doen we de berekening voor onderdeel a) toch in het niet-relativistische geval.

Niet-relativistisch Behoud van energie:  $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{eQ}{R}$ .

Behoud van impulsmoment:  $mv_0b = mvR$ .

Hieruit volgt  $Q = \frac{1}{2}mv_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2\right] \frac{R}{ke}$ . Voor een geladen bol geldt:

$$\begin{aligned}
 V = Q/C &= kQ/R = \frac{1}{2} \frac{m}{e} v_0^2 \left[1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2\right] \\
 &= 1 \text{ kV} \cdot \frac{3}{4} = 0.75 \text{ kV}
 \end{aligned}$$

Relativistisch Behoud van energie:  $\gamma_0 mc^2 = \gamma mc^2 + k \frac{eQ}{R}$ .

Behoud van impulsmoment:  $\gamma_0 \beta_0 mcb = \gamma \beta mcR$ .

Uit behoud van energie volgt dat  $\gamma_0 - \gamma = \frac{keQ}{mc^2 R} = \alpha$  dus  $\gamma = \gamma_0 - \alpha$ . Uit behoud van impulsmoment volgt  $\gamma^2 - 1 = (\gamma\beta)^2 = \gamma_0^2 \beta_0^2 (\frac{b}{R})^2$  zodat  $\alpha^2 - 2\gamma_0 \alpha + \gamma_0^2 - 1 = \gamma_0^2 \beta_0^2 (\frac{b}{R})^2$ .

Met  $\gamma_0^2 = \gamma_0^2 \beta_0^2 + 1$  volgt  $\alpha^2 - 2\gamma_0 \alpha + \gamma_0^2 \beta_0^2 (1 - (\frac{b}{R})^2) = 0$  met  $a = \alpha mc^2$ ;  $E_0 = \gamma_0 mc^2 = p_0^2 c^2 + m^2 c^4$  en  $p_0 = \gamma_0 \beta_0 mc$  volgt

$$a^2 - 2E_0 a + p_0^2 c^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{R} \right)^2 \right] = 0$$

Oplossing:  $a = E_0 - \sqrt{E_0^2 - p_0^2 c^2 (1 - (\frac{b}{R})^2)} = E_0 - \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2 (\frac{b}{R})^2}$  (alleen het min-teken). Met  $mc^2 = 0.51$  MeV volgt voor een kinetische energie van 1 MeV:  $E_0 = 1.51$  MeV;  $p_0^2 c^2 = E_0^2 - m^2 c^4 = 2.02$  (MeV)<sup>2</sup>. Dan is  $a = 0.64$  MeV. De maximale spanning op de bol wordt dan 0.64 MV.

## Opgave E: Glas kijken (dr. J. Kuperus)

Bij deze opgave bekijken we de lichtpatronen, zoals we die zien wanneer we door een glazen buis met een lengte van enkele decimeters en een diameter van ongeveer 1 cm naar een helder oppervlak kijken.

Zet een zwarte stip op een stuk wit papier en plaats een dergelijke buis daar verticaal boven, en wel zodanig dat het centrum van de onderkant van de buis zich circa 5 cm boven de stip bevindt. Wanneer je boven in de buis kijkt zie je dan twee concentrische ringenpatronen.

Geef een verklaring van het ontstaan van die patronen en stel door het doen van metingen kwantitatief vast dat theorie en experiment kloppen.

Aanwijzingen:

- Metingen worden gedaan door beide ogen te gebruiken.
- Analyse kan bijvoorbeeld gebeuren met behulp van een kleinste kwadratenaanpassing van een lijn door de oorsprong, eventueel na een te kiezen x-translatie.

Voor een serie van  $n$  meetpunten  $x_i, y_i$  en een theorie  $y = ax$  geldt

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$(\sigma_a)^2 = \frac{\sum (ax_i - y_i)^2}{(n-1) \sum x_i^2}$$

## Uitwerking: Glas kijken (dr. J. Kuperus)

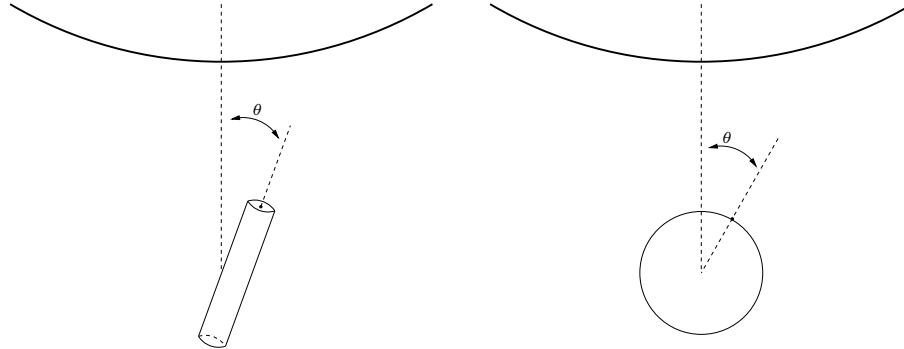
Hier komt de oplossing.

## Opgave F: Satelliet (dr.ir. A.F.M.Arts)

De NASA (Nederlandse Associatie voor Satelliet Alignment) wil een satelliet in de ruimte sturen die gedurende één jaar met 1 kant naar de aarde is gericht. Twee teams van wetenschappers kwamen met twee ontwerpen: een staafvormige satelliet met een lengte  $2L$  en een bolvormige satelliet met straal  $L$ . De middelpunten van de staaf en de bol komen in beide gevallen op een afstand  $\bar{R}$  van het middelpunt

van de aarde te liggen. We verwaarlozen de invloed van zwaartekracht van de zon en de maan, evenals andere storende effecten.

In de figuur hieronder staat de situatie getekend. Hoek  $\theta$  is de hoek tussen de lijn door het middelpunt van de staaf en het punt dat naar de aarde gericht moet zijn en de verbindingslijn door het middelpunt van de aarde en het middelpunt van de satelliet, zoals te zien in de figuur. De staaf ligt in het vlak van de baan van de satelliet.



Leid de bewegingsvergelijking voor de hoek  $\theta$  af. Wat kun je zeggen over de beweging van de staaf als  $\theta$  klein is?

Welk ontwerp is volgens jou het beste? Wat voor eigenschappen van de vorm van de satelliet bepalen of de satelliet geschikt is voor deze taak?

## Uitwerking: Satelliet (dr.ir. A.F.M. Arts)

Waarom zijn deze twee gevallen anders ondanks dat ze dezelfde massa hebben? Het antwoord is dat het aangrijpingspunt van de zwaartekracht niet op het zwaartepunt hoeft te liggen.

Ten gevolge van de zwaartekracht werkt er een koppel (ten opzichte van het zwaartepunt) op beide satellieten.

**Bol** Vanwege de symmetrie van het probleem volgt direct dat het aangrijpingspunt van de zwaartekracht ligt om de verbindingslijn tussen de zwaartepunten van de satelliet en de aarde. Er volgt dat direct dat het koppel gelijk is aan nul.

**Cilinder** Het totale krachtmoment wordt gegeven door  $K = \int_V d\vec{r} F_z(\vec{r}) r_{\perp} = \int d\vec{r} G \frac{\rho M}{r^2} r_{\perp}$ . Hier is  $G$  de zwaartekrachtsconstante,  $\rho$  de massadichtheid van de satelliet,  $M$  de massa van de aarde,  $r$  de afstand tot het middelpunt van de aarde en  $r_{\perp}$  de loodrechte afstand tot het middelpunt van de satelliet.

$$\begin{aligned} K &= \int_{-L}^L du \frac{GMm}{2L} \frac{u \sin(\theta)}{(\bar{R} + u \cos(\theta))^2} \\ &= \frac{GMm}{2L} \int_{-L}^L du \frac{u \sin(\theta)}{(\bar{R} + u \cos(\theta))^2} \end{aligned}$$

We benaderen deze integraal voor kleine  $\theta$  (dus  $\sin(\theta) \approx \theta$  en  $\cos(\theta) \approx 1$ ).

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{GMm}{2L} \int_{-L}^L du \frac{u\theta}{(\bar{R}+u)^2} = \theta \frac{GMm}{2L} \int_{-L}^L du \frac{u}{(\bar{R}+u)^2} \\
 &= \theta \frac{GMm}{2L} \int_{-L}^L du \frac{u}{(\bar{R}+u)^2} = \theta \frac{GMm}{2L} \int_{-L/R}^{L/R} dv \frac{v}{(1+v)^2} \\
 &\approx \theta \frac{GMm}{2L} \int_{-L/R}^{L/R} dv v(1 - (2v + v^2) + (2v + v^2)^2) \\
 &\approx \theta \frac{GMm}{2L} \int_{-L/R}^{L/R} dv (v - 2v^2) \\
 &= -\theta \frac{GMm}{2L} \frac{4}{3} \left(\frac{L}{R}\right)^3
 \end{aligned}$$

We zien dus dat er een koppel is zodra  $\theta \neq 0$ !

De bewegingsvergelijking voor  $\theta$  wordt nu  $K = I\ddot{\theta}$ , er volgt

$$\ddot{\theta} = 0 \quad (\text{bol})$$

$$\ddot{\theta} = -\theta \frac{GMm}{2LI} \frac{4}{3} \left(\frac{L}{R}\right)^3 \quad (\text{cilinder})$$

De oplossing voor de bol is natuurlijk  $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ . Voor de cilinder geldt dat voor kleine  $\theta$  het systeem een harmonische trilling rond het evenwichtspunt  $\theta = 0$  gaat uitvoeren

De beste keuze is natuurlijk de cilinder. De bol is asymptotisch instabiel en daarom niet geschikt. De cilinder is wel stabiel. Wat voor vormen zijn geschikt? Het is belangrijk dat de satelliet een zekere mate van asymmetrie bevat die er voor zorgt dat er een stabiel rustpunt ontstaat.

## Opgave G: Zand (dr. G. Barkema)

Beschouw een oneindig grote vierkante plank, met daarin willekeurig verdeeld gaatjes van een bepaalde grootte. Op deze plank ligt heel dun een laagje zand. Er wordt constant zachtjes geschud met de plank waardoor het zand steeds een beetje verspringt. Het verspringen van het zand vindt plaats volgens een diffusieconstante  $D$ . Het zand verdwijnt van de plank als het over de rand van een van de gaten springt.

We willen een ondergrens bepalen voor de hoeveelheid zand die op de plank ligt als functie van de tijd. Het zal blijken dat de verdeling van de gaten over de plank een grote rol speelt voor de afname van de hoeveelheid zand.

Allereerst stellen we een vierkante plank voor zonder gaten erin en met afmetingen  $L \times L$ .

- Wat is de differentiaalvergelijking voor de dichtheid van het zand op de plank?
- De functie voor de dichtheid van het zand op de plank, die het langzaamste leeg loopt is:  $\rho(x, y, t) = C(t) \cos(\frac{\pi x}{L}) \cos(\frac{\pi y}{L})$  (dit is de laagste mode). Bereken de vervalsconstante van deze dichtheidsverdeling.

We beschouwen nu de oneindig grote plank met gaatjes. We nemen aan dat de gaten (zowel de grootte als positie) willekeurig verdeeld zijn. De kans dat een vierkant van  $1 \times 1$  een gat bevat is  $\eta$ . (Met oneindig groot wordt hier bedoeld groot ten opzichte van de vervalstijd van het zand, maar dit is hier niet van belang).



- c) Wat is de kans dat er een vierkant met afmeting  $L \times L$  zonder gaatjes op een bepaalde plek op de plank gevonden kan worden?
- d) Welke afmeting  $L$  van het vierkant levert op een tijdstip  $t$  de grootste bijdrage tot de totale hoeveelheid zand?
- e) Wat is het verband tussen de ondergrens van de hoeveelheid zand en de tijd? Is er iets vreemds aan de hand, en zo ja kun je dit verklaren?
- f) Kijk naar vraag c), d) en e) voor het geval dat de gaten in de plank regelmatig verdeeld zijn (kies zelf een regelmatige verdeling). Vergelijk dit met het resultaat voor de willekeurige verdeling.

## Uitwerking: Zand (dr. G. Barkema)

- a) Tijdens het schudden zal zand van het ene oppervlakte elementje naar het andere gaan en vice versa. De differentiaal vergelijking zal dus zijn:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho$$

Hierin is  $D$  een karakteristieke diffusieconstante die te maken heeft met het schudden en de eigenschappen van het zand.

- b) Invullen van de functie in de differentiaal vergelijking levert:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{2D\pi^2}{L^2}C$$

De vervalsconstante is dus  $\lambda = \frac{2D\pi^2}{L^2} = \frac{\alpha}{L^2}$ ;  $C(t) = e^{-\lambda t}C(0)$ .

- c) We verdelen het vierkant in  $L^2$  stukjes met oppervlakte 1. De kans dat alle  $L^2$  vierkantjes geen gat bevatten is  $(1 - \eta)^{L^2} = e^{\log(1-\eta)L^2} = e^{-\beta L^2}$  met  $\beta = -\log(1 - \eta)$ .
- d) De bijdrage van een vierkant met lengte  $L$  aan de afname van het zand is:

$$\exp(-\beta L^2) \exp(-\frac{\alpha}{L^2}) = \exp(-\beta L^2 - \frac{\alpha}{L^2})$$

Dus deze bijdrage moet maximaal zijn. Als  $\beta L^2 + \frac{\alpha}{L^2}$  minimaal is, is de afgeleide nul en dus

$$\begin{aligned} 2\beta L - 2\frac{\alpha t}{L^3} &= 0 \\ L^4 &= \alpha t / \beta \\ L^2 &= \sqrt{\alpha / \beta} \sqrt{t} \end{aligned}$$

met  $\beta = \sqrt{\alpha}$

- e) Voor de totale hoeveelheid zand  $R(t)$  geldt

$$R(t) \geq R(0) \exp(-\gamma \sqrt{t})$$

Het verrassende is natuurlijk de wortel in de tijd. De fysische reden is dat de zandkorrels die na lange tijd overblijven in een gebied zitten met heel weinig gaten en daarom heel langzaam verdwijnen.

- f) Voor een regelmatige verdeling zal de hoeveelheid zand als functie van de tijd exponentiaal afnemen. Dit is erg verrassend omdat voor een onregelmatige verdeling er een veel trager verval is (of beter gezegd: een tragere ondergrens!). De fysische verklaring is dat er voor zandkorrels in het regelmatige geval altijd wel een gat 'in de buurt' is, terwijl dat in het onregelmatige geval niet zo is.

Bedenk wel dat bij deze afleiding een aantal aannamen gedaan zijn, waardoor de resultaten in de praktijk alleen voor erg korte tijdschalen en zeer grote vlakken van toepassing zijn.

Er zijn behalve een plaat met zand ook andere fysische voorbeelden waar deze afname met een wortel in de exponent (een zogenaamde "delayed exponential") voorkomt. Denk bijvoorbeeld aan een chemische reactie met een (ongelijk verdeelde) katalysator op een metalen plaat.

## Opgave H: Relativistische foton-aandrijving (prof.dr. V.Icke)

Gegeven een oneindig plat vlak dat thermische straling uitzendt met temperatuur  $T$ . Een zwart deeltje bevindt zich op het punt  $(0, 0, h, \tau)$  in een coördinatenstelsel  $K \rightarrow (x, y, z, t)$  waarin het stralende vlak het  $(x, y)$ -vlak opspant. Het deeltje is in rust in de oorsprong van het coördinatenstelsel  $K'$  dat met snelheid  $v$  langs de  $z$ -as beweegt. Beschouw de invloed van de stralingsdruk die het  $(x, y)$ -vlak op het deeltje uitoefent, en bereken de eindsnelheid tot welke het deeltje door de opgevangen fotonen wordt versneld. De naieve verwachting is  $v = c$ , maar dat zal niet zo blijken te zijn.

- a) Beschouw een foton dat door het deeltje op hoogte  $h$  wordt ingevangen. Het foton is vertrokken op  $z = 0$  op een afstand  $R$  van de  $z$ -as onder een hoek  $\theta$  met die as, zodanig dat

$$\tan \theta = \frac{R}{h}$$

Laat zien dat, ten gevolge van de relativistische aberratie, het foton door het absorberende deeltje wordt ingevangen onder een hoek  $\theta'$  met de  $z$ -as, waarbij

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)}$$

waarin  $\beta = v/c$  en  $\gamma$  de Lorentz-factor. Laat  $\theta'_{\max}$  de maximale waarde van  $\theta'$  zijn; bereken die waarde als functie van  $\beta$ .

- b) Laat zien dat de temperatuur  $T'$  die het deeltje in de richting  $\theta'$  waarneemt, is af te leiden uit de temperatuur  $T$  van het stralende vlak door

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')}$$

Het deeltje ziet dus een anisotroop en niet-isotherm stralingsveld.

- c) De verticale component  $dA'$  van de versnelling die het deeltje ondervindt door de straling die met een hoek  $\theta'$  binnenkomt, is

$$dA' = H T'^4 \cos \theta' \sin \theta' d\theta'$$

met zekere constante  $H$  die evenredig is met de effectieve doorsnede van het deeltje en omgekeerd evenredig met de rustmassa. Bereken de totale versnelling  $A'(\beta)$  door integratie, en bewijs dat het deeltje niet verder versneld wordt bij de waarde

$$\beta^* = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7})$$

*Conclusie:* het deeltje bereikt een terminale snelheid die ruim onder de lichtsnelheid valt, namelijk  $v^* = 0.451 c$ .

## Uitwerking: Relativistische foton-aandrijving (prof.dr. V.Icke)

a) Opgaven a) en b) volgen uit een (eenvoudige) Lorentz-transformatie.

Analoog aan de Lorentz-transformatie voor de positie  $(ct, \mathbf{x})$

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta \cdot \mathbf{x})$$

$$x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x_0)$$

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}$$

gebruiken wij de  $(k_0, \mathbf{k})$  transformatie voor golfgetallen (hier is  $k_0 = \omega/c$ ). Ik merk op dat we van het meebewegende stelsel transformeren naar het stelsel van de straler. Bovendien is  $v$  negatief.

$$\omega/c = \gamma(\omega'/c + \beta \cdot \mathbf{k}')$$

$$k_{\parallel} = \gamma(k'_{\parallel} + \beta \omega'/c)$$

$$\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}'_{\perp}$$

$$\tan \theta = \frac{R}{h} = \frac{|\mathbf{k}_{\perp}|}{|k_{\parallel}|} = \frac{|\mathbf{k}'| \sin \theta'}{\gamma(|\mathbf{k}'| \cos \theta' + \beta \omega')}$$

Omdat het hier gaat om lichtstralen is  $|\mathbf{k}'| = \omega'/c$  dus

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)}$$

en  $\tan \theta$  gaat naar oneindig als  $\theta' = \theta'_{\max} = \arccos(-\beta)$ .

b) Verder is

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma(\omega' + (1/c)\beta \cdot \mathbf{k}') \\ &= \gamma\omega'(1 + \beta \cos \theta') \end{aligned}$$

en met de relatie  $kT = E = h\nu = \hbar\omega$  is  $T$  lineair gerelateerd aan  $\omega$ .

$$\begin{aligned} T' &= (\hbar/k)\omega' \\ &= \frac{(\hbar/k)\omega}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')} \\ &= \frac{T}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')} \end{aligned}$$

c) De totale versnelling in de  $z$ -richting is gelijk aan

$$\begin{aligned}
 A'(\beta) &= \int dA' = \int_0^{\theta'_{\max}} HT'^4 \cos \theta' \sin \theta' d\theta' \\
 &= HT^4 \int_{-\beta}^1 \frac{u du}{(1 + \beta u)^4} \\
 &= HT^4 \left( -\frac{1}{3\beta} \right) \left[ \frac{u}{(1 + \beta u)^3} \right]_{-\beta}^1 - \int_{-\beta}^1 \frac{du}{(1 + \beta u)^3} \\
 &= HT^4 \left( -\frac{1}{3\beta} \right) \left[ \frac{u}{(1 + \beta u)^3} + \left( \frac{1}{2\beta} \right) \frac{1}{(1 + \beta u)^2} \right]_{-\beta}^1 \\
 &= -HT^4 \left[ \frac{1 + 3\beta u}{6\beta^2(1 + \beta u)^3} \right]_{-\beta}^1 \\
 &= -HT^4 \left( \frac{1 + 3\beta}{(1 + \beta)^3} - \frac{1 - 3\beta^2}{(1 - \beta^2)^3} \right) \\
 &= HT^4 \left( \frac{-3 + 8\beta - 3\beta^2}{6(\beta^2 - 1)^3} \right)
 \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat  $A' = 0$  als  $3\beta^2 - 8\beta + 3 = 0$ , dus het deeltje kan niet versneld worden voorbij  $\beta_* = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7})$  (de andere oplossing is niet fysisch).

## Opgave I: Schrijvende tol (PION 2001)

Bij deze opgave is een tol geleverd met een viltstift aan de onderkant. Zoals je misschien al weet valt een tol snel om als je hem gewoon neerzet. Als je er echter voor zorgt dat een tol snel draait, blijft hij lang in evenwicht.

- Waarom blijft een tol in evenwicht?
- Je kan de tol uit zijn evenwicht verstoren door hem een zet te geven. Hierna zal de tol bepaalde banen op het oppervlak waarover de tol beweegt afleggen.  
Is er enig patroon in de baan van de tol? Zo ja, verklaar dit. Zo nee, verklaar dit.

## Uitwerking: Schrijvende tol (PION 2001)

- Wat in elk geval bedacht moet worden is dat een tol blijft staan doordat zijn impulsmoment zo goed als behouden is.
- De baan van de tol wordt in ieder geval bepaald door de beweging van het zwaartepunt van de tol. Dit geeft een rechte lijnige beweging over het vlak (dit is voor sommige tollen goed waar te nemen).

Daarnaast vinden er ook vaak draaiende bewegingen plaats. Deze worden veroorzaakt doordat een tol probeert zijn evenwicht te herstellen. De draaiende bewegingen vinden altijd plaats in dezelfde richting als waarin de tol draait.

## Opgave J: Algemene Relativiteitstheorie (Gerben Stavenga)

Einstein heeft niet alleen de speciale relativiteitstheorie bedacht, maar ook de algemene relativiteitstheorie. Deze theorie beschrijft de zwaartekracht door middel van een kromming van de ruimte-tijd.

Een gevolg hiervan is bijvoorbeeld dat klokken sneller of langzamer lopen afhankelijk van hun plaats in de ruimte. Een van Einsteins belangrijkste postulaten is dat een versnellende waarnemer equivalent is met een waarnemer in rust in een zwaartekrachtsveld. Met behulp van dit postulaat is het mogelijk de algemene relativiteitstheorie te bekijken zonder gebruik te maken van de kromming van ruimte-tijd (die wiskundig goed te beschrijven is, maar nogal bewerkelijk is).

- a) Beschouw, geheel klassiek, een uniform roterende waarnemer. Einstein zegt dat deze waarnemer zichzelf als een ruststelsel kan zien. Bereken de (schijn) krachten die de waarnemer moet introduceren om zijn bewegingsvergelijking kloppend te krijgen (middelpuntvliegende kracht en corioliskracht).

Einstein postuleert dat deze krachten als gravitatiekrachten geïnterpreteerd kunnen worden.

- b) Kun je deze krachten volgens Newton's gravitatiewet creëren? En waar doet de corioliskracht aan denken?
- c) Vind een potentiaal die de middelpuntvliegende kracht beschrijft.
- d) Wat is tijdsdilatatie tussen een klok op een afstand  $r$  van de oorsprong en in rust in het draaiende stelsel en een klok in de oorsprong (geef de factor). Druk deze factor uit in termen van de potentiaal.

Als Einstein gelijk heeft moet dezelfde uitdrukking ook gelden voor een zwaartekrachtsveld.

- e) Bereken de tijdsdilatatie tussen een klok in het oneindige en een klok op het oppervlak van de aarde en bereken de frequentieverschuiving (Doppler-effect) voor een foton dat van af het aardoppervlak naar het oneindige gaat.
- f) Kun je aan de hand van een gedachten-experiment verklaren waarom deze frequentieverschuiving moet optreden? (Hint: wet van behoud van energie)

## Uitwerking: Algemene relativiteitstheorie (Gerben Stavenga)

- a) Er zijn verschillende antwoorden mogelijk. Een manier wordt hieronder uitgewerkt. Grootheden ten opzichte van van een inertiaal systeem worden zonder accent geschreven en grootheden ten opzichte van het draaiende systeem met accent. Vectors zijn altijd ten opzichte van het inertiaal systeem. We werken met een rotatie in het  $xy$ -vlak (dus  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T$ ) en vergeten even de  $z$ -component. Er geldt  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{F}$$

$$m \frac{d}{dt} (v'_x \hat{x}' + v'_y \hat{y}' + \omega x' \hat{y}' - \omega y' \hat{x}') = \vec{F}$$

$$m \left( \left( \frac{d}{dt} v'_x \right) \hat{x}' + \left( \frac{d}{dt} v'_y \right) \hat{y}' \right) = \vec{F} - m \left( v'_x \left( \frac{d}{dt} \hat{x}' \right) + v'_y \left( \frac{d}{dt} \hat{y}' \right) + \omega v'_x \hat{y}' - \omega v'_y \hat{x}' + \omega x' \frac{d}{dt} \hat{y}' - \omega y' \frac{d}{dt} \hat{x}' \right)$$

Wat in het linkerlid van de vergelijking staat, is de versnelling  $\vec{a}'$  zoals gemeten door het ronddraaiende stelsel rechts staat dus de kracht zoals die door een waarnemer in het ronddraaiende stelsel moet worden ingevoerd om Newton's wetten kloppend te maken. Van af nu zijn de vectoren ten opzichte van het draaiende stelsel.

$$m(a'_x \hat{x}' + a'_y \hat{y}') = \vec{F} - m(2\omega v'_x \hat{y}' - 2\omega v'_y \hat{x}' - \omega^2(x' \hat{x}' + y' \hat{y}'))$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m(\vec{\omega}' \times \vec{v}') + m\omega^2 \vec{r}'$$

De middelste term in het rechterlid is de corioliskracht de laatste is de middelpuntvliegende kracht.

- b) De middelpuntvliegendekracht kun je niet volgens de gravitatiewet van Newton creëren aangezien hij naar buiten toe steeds sterker wordt. De corioliskracht kun je al helemaal niet toeschrijven aan Newton gravitatie aangezien deze van de snelheid afhangt, de corioliskracht doet echter sterk denken aan de Lorentzkracht door een magnetisch veld.

- c) Dit is niet moeilijk er moet gelden:

$$\omega^2 \vec{r} = \nabla U$$

$$U = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$$

- d) Als de klok in de oorsprong 1 sec. heeft getikt dan heeft de klok op een afstand  $r$  nog geen seconde getikt (door z'n snelheid tikt de klok langzamer).  $t_r$  tijdsduur gemeten door klok op afstand  $r$ ,  $t_0$  tijdsduur gemeten door de klok in de oorsprong.

$$t_r = \frac{1}{\gamma} t_0$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De dilatatie factor is dus  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Uitgedrukt in de potentiaal levert:  $\sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}$

- e) De potentiaal van de aarde in het oneindige is 0, net zo als de potentiaal in de oorsprong. De potentiaal op de rand van de aarde is  $U = -\frac{GM}{r}$ . Dus de dilatatie factor is  $\sqrt{1 + \frac{2GM}{c^2 r}}$ . dit betekend dat een foton die van de aarde verzonden word, een redshift krijgt gelijk aan de inverse van deze factor.

- f) We kunnen een systeem beschouwen waar een foton van de aarde naar het oneindige (in elk geval ver weg) wordt verzonden. Daar wordt het foton omgezet wordt in een elektron en een anti-elektron. Deze vallen naar de aarde toe en krijgen energie (vanwege de zwaartekrachts-potentiaal). Op het aardoppervlak worden ze weer geannihileerd en het zo ontstane foton wordt weer naar boven verzonden. Uiteraard kan dit geen energie opleveren en dus moet het foton een frequentieverschuiving (redshift) ondervinden. Grootheden met een accent zijn in het oneindige en zonder accent op het aardoppervlak.

$$\Delta E = \hbar(\omega - \omega')$$

$$\Delta E = \frac{\hbar\omega'}{c^2} \left( \frac{GM}{r} \right)$$

Hierbij volgt de totale massa van de deeltjes na de omzetting uit  $\hbar\omega' = mc^2$ . Deze 2 energieverschillen moeten volgens de wet van behoud van energie gelijk zijn.

$$\hbar(\omega - \omega') = \frac{\hbar\omega'}{c^2} \left( \frac{GM}{r} \right)$$

$$\omega = \omega' \left( 1 + \frac{GM}{c^2 r} \right) \approx \omega' \sqrt{1 + \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Dit is precies wat we bij onderdeel e) gevonden hebben.

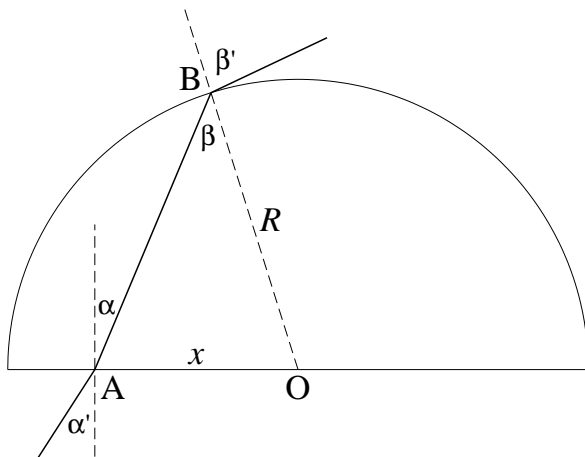
## Opgave K: Halfcilindrische loep (prof.dr. H.W. de Wijn)

Er zijn loepen in de handel bestaande uit een staaf doorzichtig materiaal met halfcirkelvormige doorsnede. Deze loepen worden met de platte kant losjes op bijvoorbeeld regels tekst in een boek gelegd

en vergroten dan alleen in de verticale richting. Echter, in het algemeen kan men het door de loep bedekte deel van de tekst niet volledig zien, hoe men het oog ook boven de loep positioneert.

Vraag: Welk deel van de bedekte tekst is zichtbaar? In het antwoord is de brekingsindex uiteraard een parameter.

## Uitwerking: Halfcilindrische loep (prof.dr. H.W. de Wijn)



De loep ligt losjes op het papier, zodat zich tussen het papier en de loep een luchtspleet van vele golflengtes dikte bevindt. Een lichtstraal die invalt bij A en de loep verlaat bij B (zie figuur) zal dus zowel bij A als B moeten voldoen aan de brekingswet van Snellius. In formule,

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = n, \quad \frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = n,$$

waarin  $n$  de brekingsindex voorstelt. Verder mag verondersteld worden dat op punt A licht in alle richtingen invalt, en dat het bij B uittrekkende licht niet beperkt wordt door verdere optiek, zoals het oog van de waarnemer.

Het is duidelijk dat voor kleine waarden van  $x$  invallend licht de loep altijd weer kan verlaten. De vraag is dus hoe groot  $x$  gemaakt kan worden zonder vast te lopen tegen totale reflectie bij B. Hiervoor geldt  $\beta' = 90^\circ$ , ofwel  $\sin \beta = 1/n$ . Het antwoord hierop zal nog afhangen van  $\alpha'$ , maar ook deze is aan een maximum van  $90^\circ$  onderworpen.

Maken we gebruik van de sinus-regel in driehoek OAB,

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)},$$

dan vinden we dat

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta'}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha'}}.$$

Het maximum hiervan wordt bereikt voor zowel  $\alpha'$  als  $\beta'$  gelijk aan  $90^\circ$ , ofwel het zichtbare deel wordt gegeven door

$$\frac{x}{R} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

maar  $x$  kan uiteraard niet groter zijn dan  $R$ . Het door de loep bestreken veld zal dus beperkt zijn zodra  $n > \sqrt{2}$ . Voor glas geldt dat  $n \approx 1.6$ , dit geeft dan  $x/R \approx 0.8$ . Hetzelfde resultaat wordt overigens verkregen voor  $\alpha'$  aan de andere zijde van de normaal.