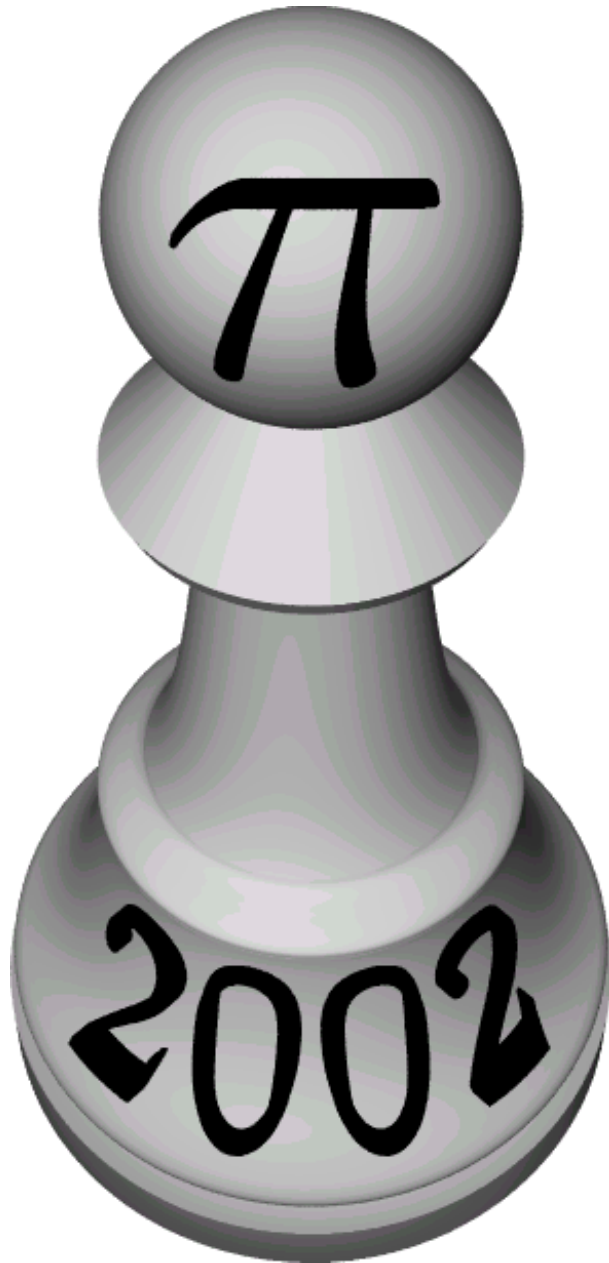


PION 2002



Uitwerkingen

Voorwoord

Hierbij de uitwerkingen van de opgaven van PION 2002. PION 2002 is dit jaar gehouden op 3 april aan de TU Delft.

Via deze weg willen we nogmaals alle deelnemers bedanken voor hun inzet. Daarnaast ook een woord van dank aan de sponsors, zonder hen was deze dag niet mogelijk geweest.

De juryleden, die de geproduceerde antwoorden hebben beoordeeld op deze dag waren:

- prof.dr.ir. H.E.A. van den Akker
- prof.dr. W.J. Caspers
- drs. H. Jordens
- dr. J.M. Thijssen
- dhr. B. El Marhfoul
- dhr. M.A.G. Zevenbergen

Allen bedankt voor uw medewerking

Namens de organisatie,

Douwe Bonthuis
Christo Butcher
Arthur Corstanje
Leander Noordijk

Inhoudsopgave

1 – Josephson Junkie	1
2 – Kernfusie	2
3 – Arch of the West	5
4 – De zingende zaag	10
5 – Vliegen	11
6 – Leeglopende fles	12
7 – Deuk	15
8 – The Piano	18
9 – Tesla's antenne	22
10 – Kernsplijting	25
11 – Weerstandsnetwerken	27
12 – Wet van Ohm	29
13 – Kristalgroei	33
14 – Old Faithful	35

Meneer Josephson drukt zodanig de zuiger van een spuit omhoog dat de vloeistof gelijkmatig naar buiten komt. Het kost 10 seconden om het reservoir van 3 ml volledig leeg te spuiten.

De naald van de spuit is 3 cm lang en heeft een cirkelvormige doorsnede met straal 0.2 mm.

Welke hoogte bereikt de naar buiten spuitende vloeistof?

Uitwerking:

De vloeistof komt gelijkmatig naar buiten dus de volumestroom per tijdseenheid is constant en gelijk aan het volume gedeeld door de tijd:

$$\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Deze volumestroom is ook gelijk aan de oppervlakte keer de snelheid.

$$\Phi = Av$$

zodat $v = \frac{V}{At}$ met $A = \pi r^2$

Nu is dus de snelheid bekend, waarna uit de mechanische energiebalans volgt

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

waaruit volgt:

$$h = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{A^2 t^2 g} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{\pi^2 r^4 t^2 g}$$

Invullen levert (let op de juiste eenheden): $h = 29 \text{ cm}$

2 - Kernfusie

prof.dr. N.J. Lopes Cardozo

In een kernfusiereactor wordt de brandstof vastgehouden met behulp van magneetvelden. Die brandstof is een mengsel van Deuterium en Tritium, zo gekozen dat de reactie $D+T \longrightarrow He+n+17,6MeV$ het makkelijkst verloopt. Nochtans moeten de reagerende kernen - die elkaar afstoten vanwege hun gelijke lading - een energie hebben in de orde van 10 keV om door de afstotende Coulombpotentiaalberg heen te tunnelen. Als zij elkaar dicht genoeg genaderd zijn begint de aantrekkende sterke kernkracht zijn werk te doen.

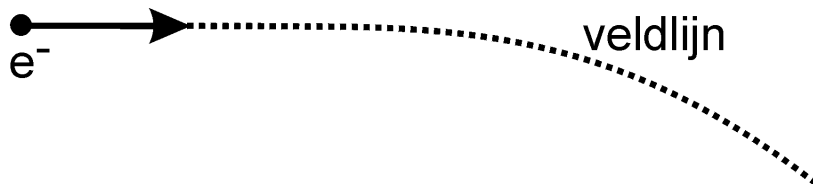
De brandstof moet dus op een temperatuur zijn corresponderend met een thermische (bewegings)energie van zo'n 10 keV: ca 100 miljoen Kelvin. Bij die temperatuur zijn uiteraard alle atomen volledig geïoniseerd, zodat het gas nu een plasma is.

Om te voorkomen dat het hete plasma de wand raakt en daardoor afkoelt, worden magneetvelden gebruikt. Het leidende principe is hier: geladen deeltjes volgen magnetische veldlijnen. Dit lijkt goed te werken: in de grote testreactoren worden plasma's gemaakt met temperaturen van honderden miljoenen Kelvin, die stabiel worden vastgehouden gedurende minuten.

Toch zijn er twee probleempjes met het principe:

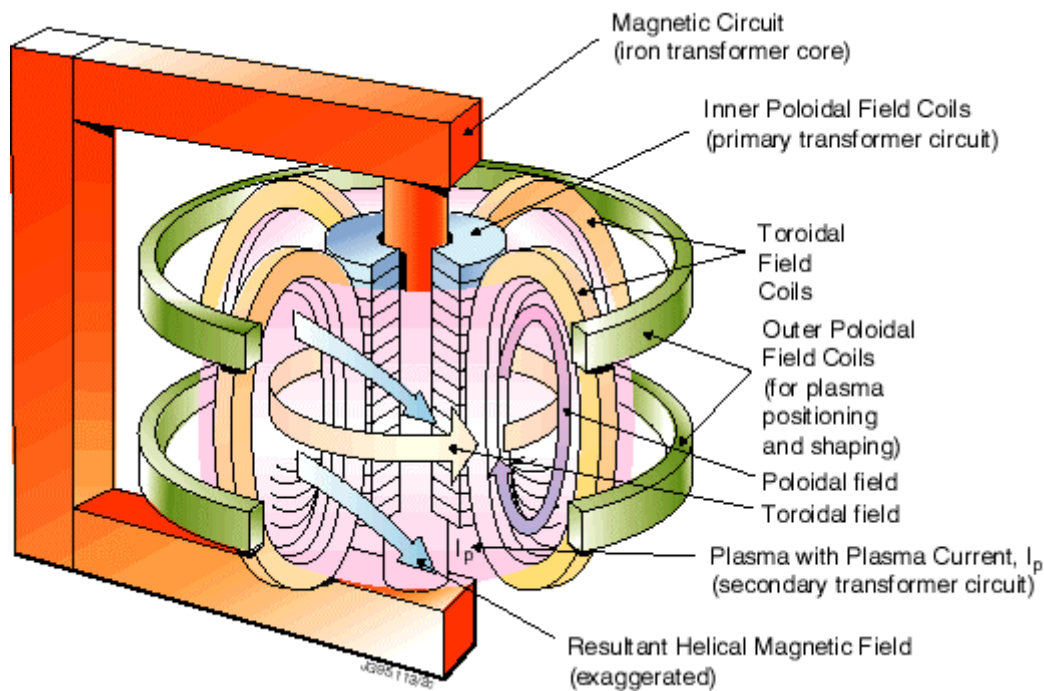
1. magnetische veldlijnen bestaan niet
2. zij worden niet gevolgd door geladen deeltjes!

Het eerste probleem laten we even rusten, maar aan het tweede gaan we rekenen.



Bekijk een elektron dat op een rechte veldlijn zit en slechts een snelheid parallel (v_{para}) aan die veldlijn bezit. De Lorentzkracht $F = e(E + v \times B)$ werkt niet op dit deeltje.

Nu maken we een bocht in de veldlijn. (zie plaatje. Veronderstel dat de tekening invariant is voor verschuiving in de richting loodrecht op het papier)



Vragen:

1. Wat doet het elektron? Volgt het de veldlijn? Zo niet, welke kant beweegt het op? Met welke snelheid?
2. Wat zou een ion doen?
3. Een fusiereactor heeft doorgaans de vorm van een torus, met een sterke magneetveldcomponent in de toroidale richting. In deze geometrie is het noodzakelijk dat het opsluitende veld helisch is. Waarom?

Aanwijzingen bij vraag 3:

Helisch = schroefvormig.

Het magnetisch veld in een fusiereactor heeft twee componenten: sterk in de richting langs de as van de torus, minder sterk in het vlak loodrecht daarop. samen: helisch. (zie bovenstaand plaatje)

Als je een cylinder buigt tot het een torus is, is wat eerst de 'axiale' richting was de 'toroidale' geworden.

Uitwerking

1.

- Het elektron volgt de veldlijn niet, want als het dat zou doen zou de Lorentzkracht steeds nul zijn, en dan was er geen reden voor het elektron om een bocht te maken.
- Het elektron zal dus aanvankelijk rechtdoor gaan waar de veldlijn afbuigt. Het verschil in richting geeft dan wel aanleiding tot een Lorentzkracht, die het deeltje versnelt in de richting loodrecht op het papier.
- Deze snelheid loodrecht op het papier geeft dan weer een Lorentzkracht die het elektron afbuigt in dezelfde richting als de veldlijn. Het elektron volgt de veldlijn dus de bocht om, maar met een kleine verschuiving terwijl het ondertussen beweegt loodrecht op het papier
- Er wordt een evenwicht bereikt als de snelheid loodrecht op het papier (v_{perp}) zo groot is dat de centripetale Lorentzkracht het elektron een bocht laat maken met dezelfde kromtestraal als de bocht van de veldlijn. Bij kromtestraal R geldt dan

$$F = e \cdot v_{\text{perp}} \cdot B = m_e v_{\text{para}}^2 / R$$

$$\text{Dus } v_{\text{perp}} = m_e v_{\text{para}}^2 R / eB$$

$$\text{Vul in: } m_e v_{\text{para}}^2 = 10 \text{ keV, schat } B=5\text{T, } R=5\text{m}$$

$$v_{\text{para}} = 10^4 \text{ m/s}$$

2. Ionen bewegen de andere kant op, maar bij gelijke temperatuur (mv^2) even hard.

3. In een torus zijn veldlijnen per definitie gebogen. De verschillende driftbeweging van de ionen en elektronen leidt dan tot ladingsscheiding en tot verlies van het plasma. In een helisch veld worden deze bezwaren ondervangen: de deeltjes driften daar net zo lang naar de veldlijn toe als er vanaf.

3 - 'Arch of the West'

dr. J.M. Thijssen

Op het bijgaande plaatje zie de 'Arch of the West' in St Louis (US). Het is een zeer grote, hoge boog, die de meest stabiele vorm heeft die een boog kan hebben. We gaan deze vorm nu analyseren. We gaan uit van een homogene massadichtheid van de boog, die we benaderen door een (kromme) lijn, beschreven door een functie $y = f(x)$. Als we nu een punt ergens op de boog kiezen, dan werkt op dit punt een kracht ten gevolge van het gewicht van de boog die erboven zit. Deze kracht wordt gecompenseerd door een reactiekracht van het onderste stuk van de boog.

Bedenk een voorwaarde waaraan deze twee krachten moeten voldoen wil de boog zo stabiel mogelijk zijn.

Vind op grond hiervan een vergelijking waaraan de boog moet voldoen.

Los deze vergelijking op. De vorm die je vindt is dezelfde als wordt aangenomen door een ketting die met de twee uiteinden aan het plafond wordt opgehangen.





Deeltjes, natuurkrachten, donkere materie, anti-materie, de Big Bang. Het onderzoeksterrein van de deeltjesfysici van NIKHEF. Dat gebeurt met high-tech apparaten in gigantische opstellingen onder de grond, op de bodem van de (Middellandse) zee of met satellieten in de ruimte. Het ontwerpen en fabriceren van deze geavanceerde apparatuur gebeurt in Amsterdam. Het onderzoek bij de grote versnellercentra in Genève, Hamburg en Chicago en het onderzee (neutrino) onderzoek bij Toulon. Met een mastergraad deeltjesfysica kun je meedoen aan dit fascinerende onderzoek.

Master opleiding Deeltjesfysica

Studenten van alle universiteiten met een bachelordiploma (technische) natuurkunde kunnen zich inschrijven voor de nieuwe master opleiding Deeltjesfysica. Gedurende de opleiding bestaat de mogelijkheid om de zomermaanden bij één van de grote versnellercentra in het buitenland door te brengen. Na de Master opleiding is het mogelijk om bij NIKHEF promotie onderzoek te doen op het gebied van de deeltjesfysica, waarbij men veelal één of twee jaar bij een groot versnellerinstituut doorbrengt.

Contactpersoon

Prof. Dr Frank Linde, telefoon: 020 - 592 5134, e-mail: f.linde@nikhef.nl

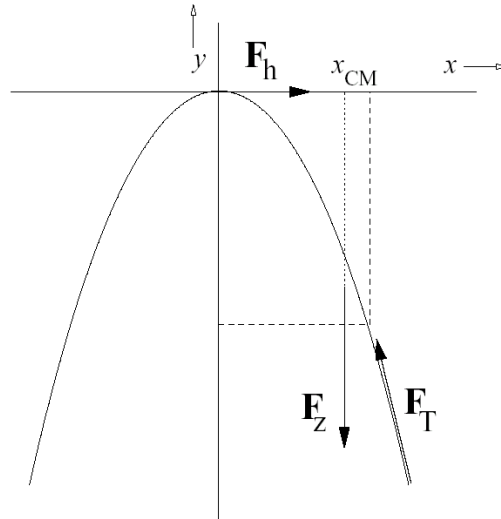
Voor meer informatie zie ook de website van het NIKHEF

<http://www.nikhef.nl/>

NIKHEF, het Nationaal Instituut voor Kernfysica en Hoge Energie Fysica, is een samenwerkingsverband tussen de stichting FOM en de Universiteit van Amsterdam, de Vrije Universiteit Amsterdam, de Universiteit Utrecht en de Universiteit van Nijmegen. De primaire doelstelling van het instituut is onderzoek te verrichten naar elementaire deeltjes en hun wisselwerkingen. Een groot deel van het onderzoek wordt bij grote versnellercentra in het buitenland uitgevoerd, met name CERN (Genève), DESY (Hamburg) en FNAL (Chicago). Het NIKHEF neemt voorts deel aan diverse projecten bij de nieuwe grote hadronbotser LHC (CERN). De bouw van detectoronderdelen voor de grote experimentele faciliteiten bij deze centra en de analyse van de meetresultaten met deze faciliteiten vinden plaats op het laboratorium in Amsterdam en bij de vier universiteiten. Het NIKHEF bundelt alle inspanningen op dit gebied in Nederland

Uitwerking

De oplossing van het eerste probleem is eenvoudig: de actie- en de reactiekracht moeten langs de raaklijn aan de curve $y = f(x)$ liggen, zodat er geen schuifspanningen optreden op dit punt.



Er zijn drie krachten werkzaam. Allereerst de zwaartekracht. Deze is verticaal naar beneden gericht (negatieve y -richting) en is qua grootte gelijk aan de massa van het segment, dat is de dichtheid maal de lengte van het segment:

$$F_z = -g\rho \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x')} dx'.$$

Hierbij is ρ de massa per lengte-eenheid en is g de zwaartekrachtsversnelling.

Daarnaast hebben we de kracht \mathbf{F}_h die in de $+x$ -richting werkt, en ten slotte \mathbf{F}_T die langs de raaklijn aan de curve moet liggen, dus:

$$\begin{aligned} F_h &= |F_h| \hat{\mathbf{x}}; \\ \frac{F_{T,y}}{F_{T,x}} &= y'(x). \end{aligned}$$

Verder geldt in verband met de krachtenbalans:

$$F_h = F_{T,x} \text{ en } F_{T,y} = -F_z.$$

Nu liggen alle krachten vast als $y(x)$ bekend is. Dit is het eenvoudige deel van de opgave.

Om nu deze voorwaarden verder uit te werken kun je twee wegen bewandelen, een eenvoudige en een moeilijke. We beginnen met de eenvoudige.

We merken op dat F_h niet mag afhangen van waar we x gekozen hebben. Dus

$$F_h = g\rho \frac{\int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x')} dx'}{y'(x)} = \text{Const.}$$

waarbij de constante niet van x afhangt. Hieruit volgt, na differentiatie naar x :

$$Ay'' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Door nu te stellen $y' = u$, krijgen we

$$A \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = x + B.$$

Substitueer: $u = \sinh qv$, dan vinden we

$$qAv = x + B,$$

dus

$$u = y' = A' \sinh(qx + B')$$

met A' en B' andere constanten dan A en B . Dus:

$$y = A'' \cosh(qx + B'').$$

Deze curve staat bekend als de *kettinglijn*.

Intermezzo: De kettinglijn wordt gewoonlijk afgeleid door te eisen dat de potentiële energy van de ketting minimaal moet zijn bij een nevenvoorwaarde dat de lengte van de ketting vastligt. De Lagrangiaan voor dit probleem is gegeven door

$$L = \int_{-L}^L (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx - \lambda \int_{-L}^L y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Uitwerking van de Euler-Lagrange vergelijking leidt dan tot een cosh-oplossing.

De moeilijke, zij het meer voor de hand liggende weg gaat uit van stabiliteit van het segment tussen 0 en x , door naast de krachtenbalans te eisen dat het totale krachtmoment nul is. Daartoe hebben we de x -component van het aangrijpingspunt van de zwaartekracht nodig. Deze wordt gegeven door

$$x_{CM} = \frac{\int_0^x x' \sqrt{1 + y'^2(x')} dx'}{\int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x')} dx'}.$$

Dan krijgen we voor het krachtmoment ten opzichte van het punt $(x, y(x))$ de vergelijking:

$$(x - x_{CM})F_z - F_h y = 0.$$

Uitwerken leidt tot

$$y' \int_0^x (x - x') \sqrt{1 + y'^2(x')} dx' - y \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x')} dx' = 0.$$

Differentieren naar x levert, na enig rekenwerk:

$$y'' \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(x')} dx' - y \sqrt{1 + y'^2(x)} = 0.$$

Nogmaals differentieren naar x (toe maar), leidt dan tot

$$\sqrt{1 + y'^2} \left[\frac{y''' y'}{y'^2} - \frac{y'^2}{1 + y'^2} \right] = 0,$$

alweer na enig rekenwerk.

Nu merken we op dat het feit dat term in de vierkante haken nul moet zijn leidt tot

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y'y''}{1+y'^2}$$

waaruit volgt:

$$\frac{d}{dx} \ln y'' = \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln(1+y'^2).$$

zodat

$$y'' = A\sqrt{1+y'^2}.$$

Verder als de eenvoudige oplossing.

4 - De zingende zaag

drs. H. Jordens

Er zijn personen die viool kunnen spelen op een handzaag. Zowel de plaats waar de zaag wordt aangestreeken als de spanning in de zaag die men met buigen kan variëren, bepalen de toonhoogte.

Als de zaag trilt en men strooit er zand op, dan ontstaat een zgn. Chladny-figuur die een patroon van knooppunten laat zien. Het verschijnsel is dus een tweedimensionale staande golf.

Beperken we ons tot een dimensie (bijv de lengte van de zaag) dan is de bewegingsvergelijking voor eenzijdig ingeklemde, dunne platen:

$$u_{tt} + \gamma^2 u_{xxxx} = 0$$

waarin u_{tt} de 2e afgeleide naar de tijd is en u_{xxxx} de 4e afgeleide naar de plaats.

γ is een constante die afhangt van de massa per lengte μ [kg/m], de lengte van de plaat L [m], de oppervlakte van de doorsnede van de plaat A [m²] en de constante van Young E [N/m²].

a) leidt af hoe gamma afhangt van μ , L , A en E .

b) bereken de frequentie van grondtoon als $L = 1\text{m}$, $A = 0,00005\text{m}^2$ en $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. De evenredigheidsconstante in de uitdrukking voor γ is 3,5.

Uitwerking:

a) de gevraagde betrekking kan via een dimensie beschouwing gevonden worden.

b) eerst moet je een staande golf als oplossing invullen in de gegeven vergelijking: $u(x,t) = Y(x)H(t)$, dan krijg je via separatie van variabelen twee

onafhankelijke diff.vgl'n. Er volgt dan $\omega^2 = \frac{k^4}{\gamma^2}$

De vergelijking in x geeft de vorm van de staande golf. Vanwege de 4e graads diff.vgl zijn er oplossingen mogelijk van de vorm: e^{kx} en e^{ikx} . De oplossing wordt bepaald door 4 randvoorwaarden: twee aan elke kant van de zaag (dus voor een los uiteinde en een vast uiteinde). De randvoorwaarden zijn: $Y(0)=0$; $Y_x(0)=0$; $Y_{xx}(L)=0$ en $Y_{xxx}(L)=0$

De 4 randvoorwaarden geven 4 vergelijkingen die oplosbaar zijn onder de voorwaarde $\cos(kL)\cosh(kL) = -1$

Numeriek zijn voor kL oplossingen te vinden. Voor de laagste waarde van kL vindt men: $kL = 1,8751$

Omdat $\omega = \frac{k^2}{\gamma}$, is de frequentie nu te berekenen.

Een arend heeft in verhouding veel grotere vleugels dan een kolibrie. Grote vogels zijn niet gelijkvormig aan kleine vogels. Dit komt omdat bij een zelfde vliegsnelheid de draagkracht van een vleugel evenredig moet zijn met het gewicht. De draagkracht of 'lift' is de kracht die de vleugel naar boven duwt wanneer die door de lucht beweegt. Draagkracht wordt ontwikkeld wanneer een oppervlak in licht hellende stand (zoals bij een vleugel) doorheen een gas of vloeistof beweegt.

Laat zien dat de draagkracht per vleugeloppervlakte evenredig is met de vliegsnelheid in het kwadraat.

Antwoord:

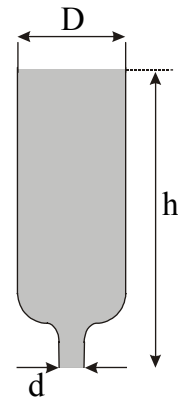
De oplossing kan vrij eenvoudig worden gevonden door de toepassing van de wetten van Newton. Beschouwen we een gebogen plaat (dit is onze vleugel). De lucht die langs de plaat stroomt, heeft een horizontale snelheid V . De vleugel buigt de lucht af: voor de vleugel zal de verticale snelheidscomponente met een opwaartse hoek van ongeveer 5 graden gelijk zijn aan $V/10$ terwijl achter de vleugel dit dan $V/10$ naar beneden is. Dit geeft een verandering in snelheid van $V/5$ naar beneden voor de lucht. De tijd voor deze omstroming is evenredig met $1/V$ en dus is de versnelling evenredig met V gedeeld door $1/V$, wat V in het kwadraat geeft. De massa lucht die op deze wijze wordt omgebogen hangt af van de kromtestraal van de vleugel maar is zeker evenredig met het oppervlak A van de vleugel. De draagkracht is de reactiekracht en is dus evenredig met V in het kwadraat. Dit is net als de afhankelijkheid van de middelpuntvliedende kracht, en om dezelfde reden. Juist zoals een steen die rondgeslingerd wordt aan een touwtje aan dit touwtje trekt, zo zuigt de lucht die over het gekromde vleugeloppervlak stroomt aan deze vleugel.

Een arend heeft grotere vleugels dan een kolibrie omdat bij het verdubbelen van de lineaire schaal van de vogel het volume en dus ook het gewicht toeneemt met een factor 8 terwijl het vleugeloppervlak slechts met een factor 4.

6 - Leeglopende fles

dr. R.F. Mudde

Een frisdrankfles is gevuld met water. De fles hangt onderste boven in de lucht. De bodem is geheel van de fles verwijderd, zodat de fles nu aan de bovenkant open is (zie figuur). Op tijdstip $t=0$ wordt plotseling de dop aan de onderzijde van de fles afgehaald. Uiteraard stroomt het water meteen uit de flessenopening. De stationaire uitstroomsnelheid van het water is ongeveer $v_{\infty} = \sqrt{2gh}$. Uiteraard duurt het enige tijd voordat deze snelheid is bereikt, aangezien het water voor $t=0$ in rust was.



Geef een gefundeerde schatting van de karakteristieke tijd τ , die het duurt voordat de stationaire uitstroomsnelheid v_{∞} bereikt wordt. Wat is de versnelling van het water dat de fles door de opening verlaat direct nadat de dop aan de onderzijde verwijderd is en er water uit de fles stroomt? Viskeuze effecten alsmede interactie van het uitstromende water met de omringende lucht dienen buiten beschouwing te worden gelaten.

Uitwerking

Gedurende een klein tijdsinterval Δt direct na opening van de onderkant, heeft het vrije oppervlak boven in de fles een in goede benadering constante versnelling a . Daar het water geen beginsnelheid heeft, verandert de hoogte van het vrije oppervlak met $\Delta h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$. Uiteraard verlaat in dit

interval een massa $\Delta m = \frac{\pi}{4}D^2\rho\Delta h$ de fles via de opening aan de onderzijde. De potentiële energie van de fles met inhoud is daardoor gedaald met Δmgh .

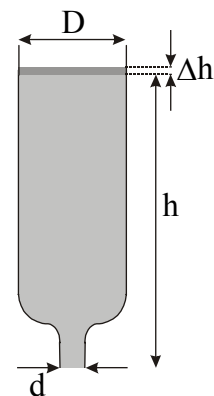
Vrijwel de gehele inhoud van de fles heeft tengevolge van de versnelling a een snelheid $v = a\Delta t$ gekregen. De toename van kinetische energie is dan ook: $\frac{\pi}{4}D^2h\rho\frac{1}{2}v^2$. We verwaarlozen hierbij de geringe

hoeveelheid vloeistof in de uitstroomopening (die een veel hogere snelheid heeft, zoals eenvoudig is in te zien uit behoud van massa).

Uit behoud van energie volgt nu dat de toename in kinetische energie gelijk moet zijn aan de afname in potentiële energie:

$$\frac{\pi}{4}D^2h\rho\frac{1}{2}(a\Delta t)^2 = \frac{\pi}{4}D^2\rho\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 gh$$

Hieruit volgt direct: $a = g$!



Dus gedurende de eerste momenten is de bulk van het water in vrije val. Uit behoud van massa volgt, dat het water in de opening van de fles een snelheid moet hebben, die een factor $\left(\frac{D}{d}\right)^2$ groter is dan de snelheid van het water in de bulk van de fles. Aangezien al het water start met een beginsnelheid gelijk aan nul, is ook de versnelling van het water in de uitstroomopening gedurende de eerste momenten een factor $\left(\frac{D}{d}\right)^2$ hoger. Voor een frisdrankfles is de verhouding van flesdiameter en flesopening van de orde 3. Derhalve versnelt het water in de opening met orde 10g!

Uiteraard kan deze situatie niet lang bestaan. Immers op grond van de wet van Bernoulli stroomt het water in de stationaire situatie met een snelheid

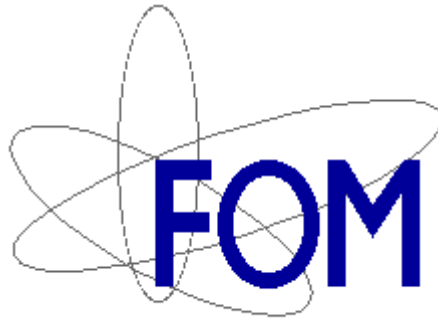
$v_\infty = \sqrt{2gh}$ uit de fles, het vrije oppervlak daalt dan met een snelheid

$v_s = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$. Deze snelheid bereikt de vloeistof na een klein interval τ . Een schatting voor τ kan nu verkregen worden door het vrije oppervlak met g te laten

versnellen totdat de snelheid v_s bereikt is:
$$g\tau \approx \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}.$$

Hiermee ligt de orde van τ vast. Voor een standaard frisdrankfles van 1,5 liter is $h \approx 32\text{cm}$, $D \approx 8.5\text{cm}$, $d \approx 2\text{cm}$. Dit geeft voor het interval: $\tau \approx 0.01\text{ s}$ (verwaarloosbaar voor praktische doeleinden).

PION 2002 wordt mede mogelijk gemaakt door:



Stichting Fundamenteel Onderzoek der Materie

De Stichting FOM - opgericht in 1946 - heeft als centrale doelstelling het bevorderen in Nederland van fundamenteel natuurkundig onderzoek. Activiteiten van FOM komen het algemeen belang ten goede, in het bijzonder dat van het hoger onderwijs en het bedrijfsleven.

Kijk ook eens op de website:

<http://www.fom.nl>

7 - Deuk

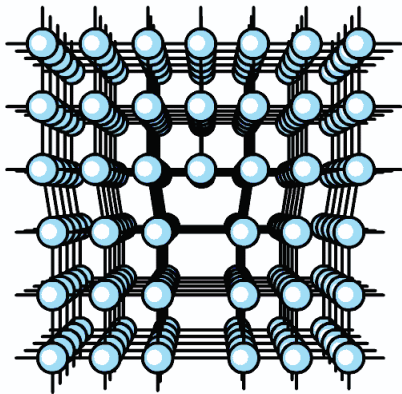
dr. P.F.A. Alkemade

Twee kogels van 10 gram vallen van 30 cm hoogte op twee metalen platen; op elke plaat één kogel.

Een kogel stuitert terug tot 25 cm hoogte, de ander tot 15 cm.

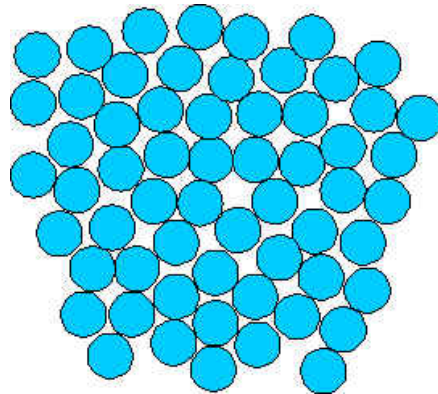
In de ene plaat is een deuk ontstaan van ~1 mm doorsnede en in het midden ~0,1 mm diep. De andere plaat vertoont geen beschadiging. Ook de twee kogels bleven onbeschadigd.

De atomen zijn in een plaat gerangschikt in een regelmatig kristalrooster, in de ander in een amorse structuur (zie de figuren).



Atomen in een kristal.

*De enige onregelmatigheid is een atoomvlak dat halverwege stopt.
(In werkelijkheid zit >99,99% van alle atomen op een regelmatige roosterplaats.)*



Atomen in een amorse structuur.

De enige regelmatigheid is de bijna constante afstand tussen buuratomen.

Vragen

- Schat de maximale kracht per oppervlakte-eenheid (=druk) op de platen tijdens de botsing (halve orde van grootte is voldoende).
- Schat de maximale kracht op elk atoom in de plaat op de plek waar de kogel valt (halve orde van grootte).
- Schat de kracht die nodig is om twee atomen los van elkaar te trekken (halve orde van grootte).
- Is de amorfe of is de kristallijne plaat beschadigd?
Verklaar waarom in slechts die ene plaat een deuk ontstaat. (Gebruik ook kwantitatieve argumenten, maar wel in ordes van grootte.)

Mogelijk bruikbare constanten en gegevens:

$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $1 \text{ amu} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$; $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; $k = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

typische afstand tussen buuratomen in een materiaal of chemische verbinding: 3 \AA

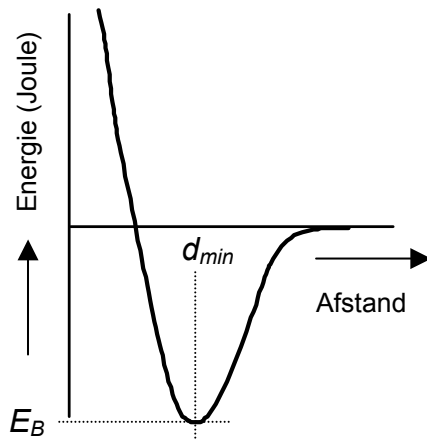
typische bindingsenergie van een twee-atomig molecuul: 200 kJ mol^{-1}

typisch atoomgewicht van een metaal: $\sim 100 \text{ amu}$.

Uitwerking:

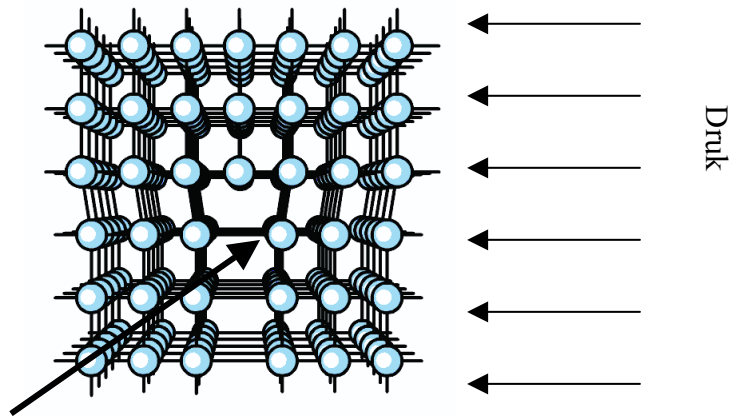
In deze opgave moet elementaire kennis van macroscopische fysische verschijnselen (vallen en botsen van objecten in het zwaartekrachtsveld) gekoppeld worden aan eenvoudige kennis over de interactie tussen atomen in een vaste stof of verbinding. Noodzakelijk is in ieder geval dat het team vertrouwd is met de potentiaalkromme (of potentiaalput) tussen twee atomen. Verder is een symmetrie-overweging van belang en moet het team microscopische (of atomaire) effecten kunnen omzetten naar macroscopisch effecten. Handigheid in het schatten en eenvoudig rekenen zijn ook vereist.

- a) Snelheid, v , van de kogels vlak voor de botsing: $v^2 = 2 \cdot g \cdot h$
($g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $h = 0,3 \text{ m}$ = hoogte). Ingevuld: $v^2 = 7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.
De indeuking in een plaat is maximaal 0,1 mm; de kogel is dus minimaal 0,1 mm in het materiaal gedrongen, maar omdat het materiaal gedeeltelijk is teruggeveerd (en de kogel heeft teruggeworpen tot 20 cm hoogte), is de indringing, d , groter geweest. Zeg $d = 0,2 \text{ mm}$.
Veronderstel de vertraging, a , constant: $a = v^2 / 2d$. Ingevuld: $7 / 0,4 \times 10^{-3} \approx 2 \times 10^4 \text{ m s}^{-2}$.
- b) De kracht: $F = m \cdot a$ ($m = 0,01 \text{ kg}$) = 200 N.
De druk $P = F / O = 200 \text{ N} / 10^{-6} \text{ m}^2 = 2 \times 10^8 \text{ Pa}$.
De afstand tussen nabuuratomen is $3 \times 10^{-10} \text{ m}$. Dus er zijn 10^{19} atomen/ m^2 ($\equiv N$).
Kracht, F_A , per atoom: $P / N = 2 \times 10^{-11} \text{ N}$ ($= 2 \times 10^{-11} \text{ J/m}$).
- c) Onderstaande plaatje toont de typische potentiaalkromme voor twee atomen. Het minimum, d_{\min} , ligt bij $3 \times 10^{-10} \text{ m}$.
Het minimum is $E_B = 200 \text{ kJoule} / N_A = 2 \times 10^5 / 6 \times 10^{23} = 3 \times 10^{-19} \text{ Joule}$ ($= 2 \text{ eV}$).
De maximale kracht om de twee atomen uiteen te trekken is het maximum van de helling.
Dit is ongeveer $E_B / d_{\min} = 10^{-9} \text{ N}$.



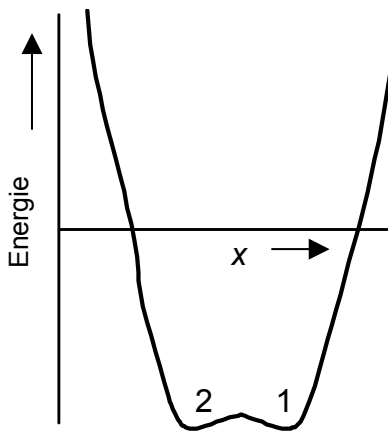
- d) Omdat de maximale kracht op een enkel atoom (bijna) twee ordes van grootte onder de kracht die nodig is om twee atomen van elkaar te trekken, zou men verwachten dat geen enkel atoom van beide materialen van zijn plek wordt geduwd tijdens de botsing met de kogel.
De werkelijkheid is anders.

Het atoom waarnaar de dikke pijl wijst is sterk gebonden aan zijn rechterbuur, maar minder sterk aan zijn linkerbuur. Onderstaande figuur geeft de potentiaalkromme voor dit atoom als functie van de horizontale plaats, x . De kromme is de som van zijn linker- en rechterbuurinteractie (alle andere interacties kunnen nu buiten beschouwen gelaten worden).



Er zijn twee minima met een kleine barrière ertussen. De kracht die nodig is om het atoom van minimum 1 naar minimum te verplaatsen is vele malen kleiner dan nodig om een binding te verbreken. Vanwege de lage barrière (of lage helling of kracht) zal het atoom als gevolg van de externe kracht (tijdens de botsing) gemakkelijk naar links (positie 2) kunnen springen.

Na deze sprong bevindt zich een ander atoom nabij de onregelmatigheid. Vanwege de aanwezige translatie-symmetrie is er niets wezenlijks veranderd! Dit andere atoom – de rechterbuur van het al gesprongen atoom – kan op zijn beurt makkelijk naar links springen. Doordat steeds $\sim 0,01\%$ van alle atomen deze beweging kan maken, zal het materiaal onder druk continu van vorm veranderen. In het kristallijne materiaal ontstaat dus een deuk.



In het amorf materiaal kunnen atomen wel naar links worden geduwd (bij een externe druk van rechts), maar zullen zelden over een lage potentiaalbarrière kunnen springen. En als dat al lukt, dan is het allerm minst zeker dat een nabijgelegen atoom in het achtergebleven gat kan springen. Waarschijnlijker is dat alle nabijgelegen atomen zich ietsjes naar het gat verplaatsen. Nadat de externe kracht is gestopt, zullen de meeste atomen terugveren naar hun oorspronkelijke plaats. Het materiaal is uiteindelijk (nauwelijks) van vorm veranderd.

De onregelmatigheid in het kristallijne materiaal noemt men een dislocatie.

Meer info:

<http://www-mse.stanford.edu/people/faculty/dauskardt/kathy/BMG/bmg.html>

8 - The piano

prof.dr. I.T. Young

The musical notes middle A and middle A^\sharp are known to have the frequencies:

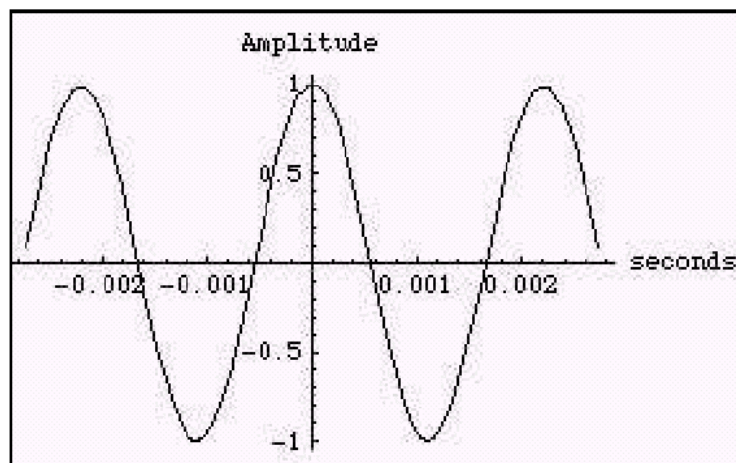
$$A: 440 \text{ Hz} = f_0$$

$$A^\sharp: 440 \cdot 2^{1/12} \text{ Hz} \approx 440 \cdot 1.0595 \text{ Hz} \approx 466.2 \text{ Hz} = f_1$$

The positions of these notes on a piano keyboard are shown in Figure 1



A single sound has been recorded which consists of either A , A^\sharp , or the sum of A and A^\sharp . The recorded signal is shown in Figure 2.



Question: What is the minimum length of time T in seconds that is required to distinguish between the three alternatives: A , A^\sharp , or $A + A^\sharp$? Explain your choice of measurement technique and what the consequences are for the accuracy of your determination.

Three different ways of analyzing the problem are:

- 1) Using Fourier spectral analysis
- 2) Counting the zero crossings of the signals.
- 3) Heisenberg's Uncertainty Principle

Fourier analysis

If the first signal is $A(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ and the second signal is $As(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, then we can look for the answer in the Fourier transform of the recorded data. The transform of a signal $x(t)$ is given by:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

For data observed through a symmetric window of length T seconds this becomes:

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

And $w(t)$ being a unit-amplitude, symmetric window of T seconds duration, this can be rewritten as:

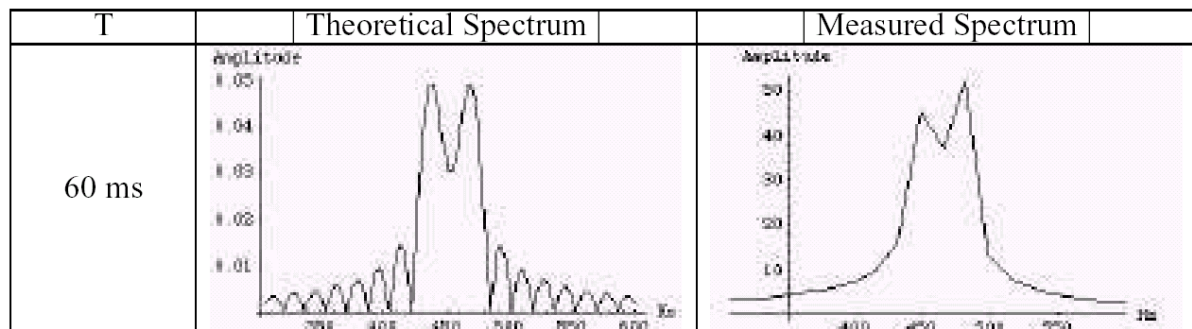
$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)x(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes W(\omega)$$

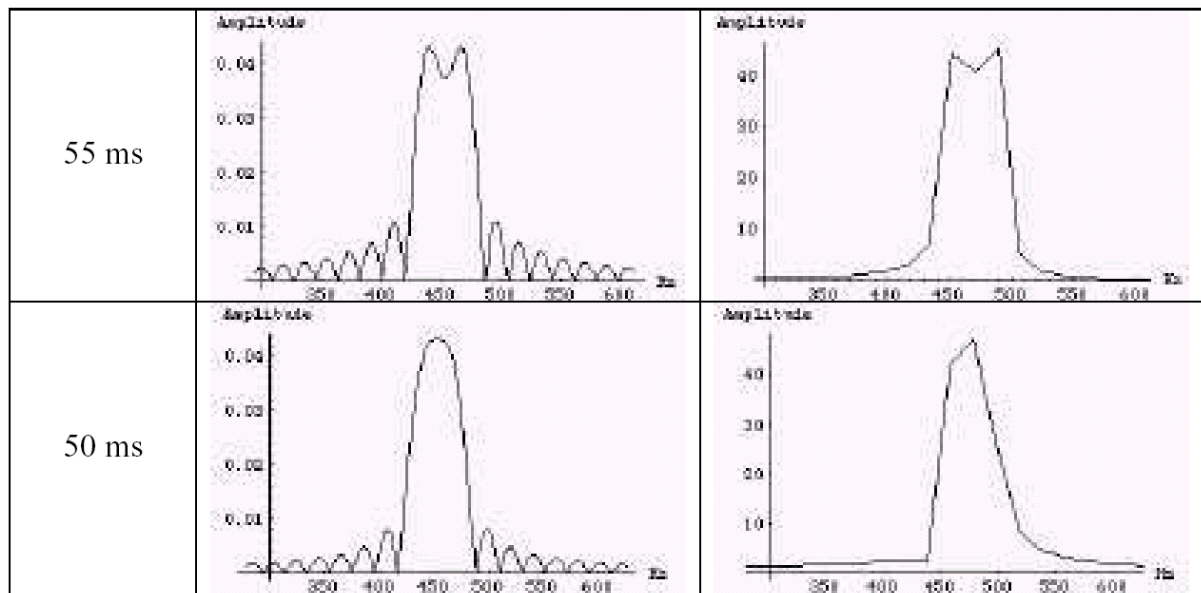
where $W(\omega)$ is the Fourier transform of $w(t)$ and \otimes is the convolution operator. For $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ and the $w(t)$ described above, $X(\omega)$ and $W(\omega)$ are known:

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$W(\omega) = \frac{2\sin(\omega T / 2)}{\omega}$$

If we consider the sum of the musical notes, then the spectrum predicted by this analysis will be the sum of the two spectra as shown below:





Thus, for measurement times shorter than 55 ms, it is virtually impossible to tell the difference between one peak and two. Our prior knowledge that there are only two allowed frequencies, 440 Hz and 466.2 Hz, could help us but which frequency assignment would you use for the 50 ms case?

Zero crossings

Knowing that we are dealing with pure sinusoidal signals, we might decide to count zero crossings. There are two for every period. The number of zero crossings associated with a window of length T and a sinusoid of frequency f_0 is given by:

$$N_0 = \lfloor 2f_0T \rfloor = \text{floor}(2f_0T)$$

To distinguish between two frequencies f_0 and f_1 , there must be at least one more zero crossing in one frequency than in the other within the T seconds:

$$\Delta N = N_1 - N_0 = \lfloor 2f_1T \rfloor - \lfloor 2f_0T \rfloor = 1$$

Given the relationship between f_1 and f_0 , we can estimate T as:

$$T \approx \frac{1}{2(f_1 - f_0)} = \frac{1}{2f_0(2^{1/12} - 1)} = \frac{1}{2 \cdot 440(2^{1/12} - 1)}$$

$$T \approx 19.1 \text{ ms}$$

If we would like the certainty associated with a *difference* of 3 zero crossings between one possible note (frequency) and the other, then we will need 57.3 ms. The certainty factor may be required due to noise that can enter any measurement process. The longer the measurement interval T , the more certainty our measurement will have. Further, if there is a mix of the two frequencies then the number of zero crossings will be between N_0 and N_1 .

Uncertainty Principle

Finally we can appeal to the Heisenberg Uncertainty Principle which applies to transform pairs:

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar / 2 \Rightarrow \Delta t \cdot h \Delta f \geq \hbar / 2 \Rightarrow$$

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

Typical measures of the width of a signal and its spectrum are based upon the standard deviations σ_t and σ_f where σ_t for a unit window of width T is given by $\sigma_t = T / \sqrt{12}$. This means the spectral width is given by:

$$\sigma_f \geq \frac{\sqrt{12}}{4\pi T} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi T}$$

If each spectrum has this width and we do not want overlap between the *measured* spectra of frequencies f_1 and f_0 , then they should be separated by a certain number of σ 's, say 3. This implies:

$$\frac{(f_1 - f_0)}{\sigma_f} > 3 \Rightarrow \frac{440 \cdot (2^{1/12} - 1)}{\frac{\sqrt{3}}{2\pi T}} > 3$$

$$T > \frac{3\sqrt{3}}{2\pi \cdot 440 \cdot (2^{1/12} - 1)} = 31.6 \text{ ms}$$

This optimum value of 31.6 ms is only reached with a Gaussian window, not the rectangular one that we are using. Thus we must expect a value of T longer than 31.6. Something on the order of 55 ms perhaps?

9 - Tesla's antenne

A.C.W. Corstanje

In onze leerboeken wordt beschreven dat elektromagnetische golven 'transversaal' zijn. Dat wil zeggen, dat altijd het elektrische en/of het magnetische veld loodrecht op de voortplantingsrichting staat.

In een tijdschrift vond ik echter een artikel waarin beweerd wordt dat dit "onzin" is: er bestaan immers ook longitudinale golven.

Er wordt een experiment van Nikola Tesla beschreven:

op een niet te kleine, bolvormige 'antenne', wordt via een verbonden staaf een grote wisselspanning gezet (orde 1 kV, 1 MHz).

a) Ga na, met behulp van de Maxwell-vergelijkingen, wat voor veld er ontstaat. Verwaarloos effecten van de staaf. Is er ook een magnetische component? Bedenk dat fotonen, die elektromagnetische energie overdragen, een elektrische en een magnetische component bezitten.

b) Wordt door deze antenne daadwerkelijk energie uitgezonden?

In het artikel wordt beweerd dat deze straling een om de bol aangebrachte Faraday-kooi kan passeren. Dit terwijl een Faraday-kooi juist bedoeld is om elektromagnetische velden af te schermen, en algemeen bekend is dat dit ook gebeurt.

c) Laat zien dat deze bewering klopt, en geef er een verklaring voor.

Maxwell-vergelijkingen

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{omvat}}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3)$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8)$$

Uitwerking:

Het elektrische veld is altijd en overal radieel gericht (wet van Coulomb). Dit betekent, met vgl. 6, dat het magneetveld constant is. Met behulp van vgl. 4, toegepast op een (concentrische) cirkel rond de bol vindt men dat het magneetveld nul is voor wat betreft de component loodrecht op E (de tijdafgeleide van E staat overal loodrecht op het oppervlakte-element dS). Uit vgl. 7 volgt nu dat het magneetveld geen radiële component heeft.
Conclusie: magneetveld $B=0$.

b) Geen magneetveld. Men kan eenvoudig inzien dat er wel degelijk energie wordt overgedragen. Denk maar aan een geleidertje op een punt P in het veld. Door potentiaalverschillen zal er een wisselstroompje gaan lopen dat energie dissipeert.

Dat deze energie toch door fotonen wordt overgedragen kan verklaard worden met een 'quantummechanische' redenering: méét je een foton, dan heeft die altijd een magnetische component. Middel je echter over al deze B-vectoren (zeer veel fotonen \rightarrow klassieke limiet), dan vind je nul (verwachtingswaarde).

Je zou ook kunnen zeggen: het wisselend E-veld wekt een bijbehorend B-veld op (vgl. 8), loodrecht op E (nu is het veld meteen niet meer longitudinaal - er is ook de 'verplichte' transversale component). Maar door de sferische symmetrie is het niet duidelijk in welke richting de B-vector staat! Hij kan op een hele cirkel liggen \rightarrow verwachtingswaarde nul.

c) Stel je een geleidende bol S voor (of een gesloten oppervlak van een andere vorm) rond de antenne + Faraday-kooi. Met Maxwell-vgl (1) is te zien dat het E-veld de Faraday-kooi passeert.

De truc is dat er lading in en uit de antenne wordt gestuurd (die gaat via de staaf ook door de Faraday-kooi!). Daarom wordt het veld niet tegengehouden.

10 - Kernsplijting

prof.dr.ir. H. van Dam

De onderzoekreactor in Delft heeft een vermogen van 2 MW. Het splijtstofgebruik wordt gecontroleerd door twee internationale organisaties. Daarbij worden onder meer de splijtstofelementen zeer nauwkeurig gewogen.

Onlangs kreeg men van een nieuwe inspecteur een boze brief: het gewicht van een stel elementen, overeenkomend met een gebruik van twee jaren, was een gram lager dan toen zij nieuw waren. De inspecteur eiste een verklaring.

(a) Kunt u die verklaring geven en wat kunt u voor kwantitatieve conclusies trekken over het bedrijven van de reactor?

Een uranium-235 kern kan na vangst van een neutron op vele manieren splijten. In zeldzame gevallen splijt de kern in twee identieke brokstukken en worden 2 neutronen uitgezonden.

(b) Geef de reactievergelijking met het volledige symbool van de gevormde kernsoort en beargumenteer welk type radioactief verval deze kernen zullen vertonen.

Na viermaal radioactief verval ontstaat een stabiele kern met een relatieve atoommassa van 116,9031 u.

(c) Welk element is uiteindelijk gevormd en hoeveel energie is totaal als gevolg van de splijting vrijgekomen? Druk deze energie in de gebruikelijke eenheden (MeV) uit!

Uitwerking

- a) Bij de kernreacties in de reactor is een aanzienlijke hoeveelheid energie vrijgekomen. Volgens Einsteins beroemde relatie $E=mc^2$ is hierdoor massa verloren gegaan – de genoemde 1 gram. Dit komt overeen met 9×10^{13} J geleverde energie in 2 jaar. Als de reactor in bedrijf 2 MW levert, dan volgt hieruit dat de reactor 71 % van de tijd in bedrijf is geweest (of gemiddeld op 71 % van zijn vermogen heeft gedraaid).
- b) ${}^{92}_{235}\text{U} + n \rightarrow {}^{46}_{117}\text{Pd} + 2n$.
De kernen bevatten naar verhouding veel te veel neutronen (zie ook BINAS, tabel 25 met isotopen). Ze zijn niet zwaar (instabiel) genoeg voor α -verval. Er zullen daarom neutronen in protonen worden omgezet (β^- -verval):
 $n \rightarrow p + e^- (+ \nu)$
- c) 4 maal β^- -verval levert een kern op met 50 protonen en 113 neutronen (behoud van kerndeeltjes). Dit is ${}^{50}_{117}\text{Sn}$. De vrijgekomen hoeveelheid energie per reagerende uranium-kern volgt uit het massadefect in een ${}^{92}_{235}\text{U}$ -kern (92 elektron-massa's aftrekken van de atoommassa in BINAS!) minus het massadefect in twee ${}^{50}_{117}\text{Sn}$ -kernen.
Massadefect = kernmassa – (# protonen x protonmassa) – (# neutronen x neutronmassa). Met behulp van $E=mc^2$ en de lading van het elektron komt men op 208 MeV per reagerende U-kern.

De elektrische weerstand tussen twee overstaande hoekpunten van een vierkant waarvan de zijden gelijke weerstanden zijn van bijv. 1 Ohm kan op eenvoudige wijze worden berekend met de bekende wetten voor elektrische circuits. Op analoge wijze kan de substitutieweerstand voor een kubus met ribben van 1 Ohm worden berekend, d.w.z. de totale weerstand tussen twee tegenover elkaar liggende hoekpunten, op de beide einden van een lichaamsdiagonaal.

- Bereken de substitutieweerstand tussen twee tegenoverliggende hoekpunten van de kubus (dus op de beide einden van een lichaamsdiagonaal)
- Wat is het vierdimensionale analogon van deze circuits en wat is de substitutieweerstand hiervan? Kan dit op eenvoudige wijze worden gerealiseerd in een natuurkundig laboratorium?
- Breidt dit uit naar hogere dimensies en formuleer een algemene oplossing voor de substitutieweerstand.

Antwoord:

Substitutie-weerstand van een hyperkubus van dimensie n

Geometrische beschrijving van de hyperkubus

De hoekpunten worden gevormd door de verzameling vektoren:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{e}_i = (m_1, m_2, \dots, m_n), \quad \#$$

waarin de \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) een verzameling onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn en de componenten m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) de waarde 0 of 1 hebben. Er zijn dus 2^n hoekpunten. Gevraagd wordt de substitutie-weerstand tussen de punten $(0, 0, \dots, 0)$ en $(1, 1, \dots, 1)$, als verder gegeven is dat elke ribbe een weerstand van 1Ω heeft.

In de hyperkubus kunnen we verschillende "schillen" onderscheiden:

1ste schil: Alle hoekpunten: \mathbf{e}_i ($1 \leq i \leq n$, totale aantal: n),

2de schil: Alle hoekpunten: $\mathbf{e}_{n_1} + \mathbf{e}_{n_2}$ ($1 \leq n_1 < n_2 \leq n$, totale aantal: $\frac{n!}{2(n-1)!}$),

.....

rde schil: Alle hoekpunten: $\mathbf{e}_{n_1} + \mathbf{e}_{n_2} + \dots + \mathbf{e}_{n_r}$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r \leq n$, totale aantal: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$),

.....

nde schil: Het hoepunt: $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_n$ (aantal: 1)

Stroomverdeling

Voor het gemak nemen we aan dat de totale stroom die tussen de twee punten $(0, 0, \dots, 0)$ en $(1, 1, \dots, 1)$ loopt I is.

In het punt $(0, 0, \dots, 0)$ wordt deze stroom verdeeld in n gelijke delen, die door de ribben lopen die het punt $(0, 0, \dots, 0)$ met elk van de punten van de eerste schil verbinden. Zo vindt men dat:

de stroom door de ribben die $(0, 0, \dots, 0)$ met de punten van de eerste schil verbinden gelijk is aan: $\frac{I}{n}$.

Om de totale stroomverdeling in de hyperkubus te bepalen moeten we gebruik maken van de volgende gegevens:

- elk hoekpunt ligt op n ribben, de totale stroom naar elk hoekpunt toe is 0
- er lopen n ribben vanuit $(0, 0, \dots, 0)$ naar elk van de hoekpunten van de 1ste schil, er lopen $n - 1$ ribben vanuit elk hoekpunt van de eerste schil naar die van de tweede schil en 2 ribben vanuit elk hoekpunt van de tweede schil naar die van de eerste schil, d.w.z. het totaal aantal ribben tussen eerste en tweede schil is $n(n - 1)$, er lopen $n - r$ ribben vanuit elk hoekpunt van de r de schil naar die van de $r + 1$ ste schil en $r + 1$ ribben vanuit elk hoekpunt van de $r + 1$ ste schil naar die van de r de schil, en het totaal aantal ribben tussen r de en $r + 1$ ste schil is $\frac{n!}{r!(n-r-1)!}$, etc. etc.

Uit het voorgaande volgt nu dat in elke ribbe die een punt van de eerste schil verbindt met een van de tweede schil een stroom loopt gelijk aan:

$$\frac{I}{n(n-1)}, \quad \#$$

omdat de verhouding tussen het aantal verbindingen tussen $(0, 0, \dots, 0)$ en punten van de eerste schil tot het aantal tussen punten van de eerste en van de tweede schil gelijk is

$$n : n(n-1). \quad \#$$

Op analoge wijze vinden we voor de stroom in de verbindingen tussen tweede en derde schil:

$$\frac{2I}{n(n-1)(n-2)}, \quad \#$$

en voor de stroom in de verbindingen tussen de $(r - 1)$ ste en de r de schil:

$$\frac{(r-1)!(n-r)!I}{n!} \quad \#$$

Om het totale potentiaalverschil tussen de punten $(0, 0, \dots, 0)$ en $(1, 1, \dots, 1)$ te bepalen maken we een "wandeling" van punt $(0, 0, \dots, 0)$ naar een willekeurig punt van de eerste schil en vervolgens naar een daarmee verbonden punt van de tweede schil, etc. etc. en vinden op deze wijze voor dit totale potentiaalverschil:

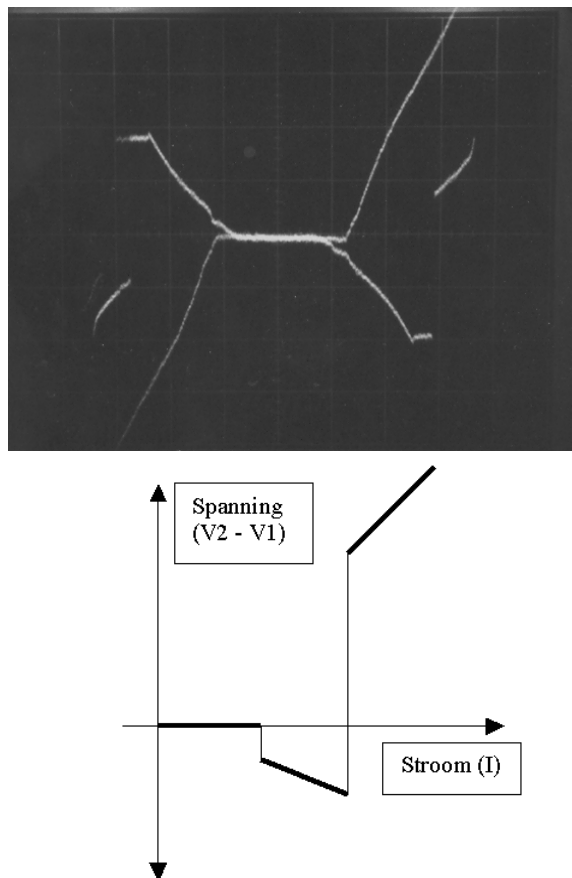
$$\sum_{r=1}^n \frac{(r-1)!(n-r)!I}{n!}, \quad \#$$

wat resulteert in de volgende waarden voor de weerstand voor verschillende dimensie n :

$$\begin{array}{cccccc} n & 2 & 3 & 4 & 5 & \infty \\ R & 1 & 5/6 & 2/3 & 8/15 & 0 \end{array} \quad \#$$

De wet van Ohm stelt dat er een lineair verband is tussen het spanningsverschil dat over een weerstand staat en de stroom die er doorheen loopt. Nu gaat dat in veel gevallen niet op, denk maar aan simpele diode. Bij een meting van de stroom-spanningskarakteristiek van een supergeleidende tunneljunctie kreeg een student een wel heel merkwaardig resultaat (de stroom staat uit op de horizontale as en de spanning op de verticale as - het nulpunt van zowel stroom als spanning ligt in het centrum van de foto):

Ontdaan van effecten die er in dit verband niet toe doen, komt de I-V curve in essentie op het volgende neer:



Om deze merkwaardige I-V curve te verklaren, hoef je niet meer te weten van supergeleiding en van tunneljuncties dan in deze opgave gegeven wordt - het gaat in essentie om de wet van Ohm.

Supergeleiding:

Bij lage temperatuur worden metalen supergeleidend: ze geleiden een elektrische stroom zonder dat er een spanningsverschil aanwezig is. Echter als de stroom te groot wordt gemaakt, verdwijnt de supergeleidende toestand en krijgt het preparaat een normale weerstand. Om de supergeleidende toestand goed te meten is het belangrijk om een vierpuntsmeting te doen: je moet de

Deze Olympiade is mede mogelijk gemaakt door:

Stichting Physica

nederlandse



natuurkundige vereniging

Bezoek ook eens de website

<http://www.nnv.nl>

spanning meten over twee andere draden dan waardoor de stroom toe- en afgevoerd wordt.

Tunneljunctie:

Een tunneljunctie is een dunne isolator tussen twee geleiders die zo dun is dat er toch een stroom doorheen kan lopen (quantummechanisch tunnelen). Bij een supergeleidende tunneljunctie tussen twee supergeleiders is het zelfs mogelijk dat er een stroom loopt zonder dat er een spanningsverschil aanwezig is. Dit is hetzelfde als voor een supergeleidend draadje, alleen zal de kritische stroom van de junctie kleiner zijn dan de kritische stroom van de supergeleiders aan weerszijden van de junctie.

Opgaven:

De supergeleidende tunneljunctie van de verraste afstudeerder zag er als volgt uit:

(N.B. in werkelijkheid is de dikte van alle drie lagen veel kleiner dan de breedte en de lengte van het preparaat)



- Verklaar in kwalitatieve zin de vorm van de I-V curve.
Is de weerstand werkelijk (even) negatief? Zowel ja als nee kan goed zijn, het gaat om de beredenering van het antwoord.
- Stel de soortelijke weerstand van de geleidende lagen gelijk aan ρ en het geleidingsvermogen van de tunneljunctie gelijk aan σ (beide in de niet-supergeleidende toestand). Wat is de weerstand $R=(V_2-V_1)/I$ in het limietgeval dat ρ zeer klein is en in het limietgeval dat σ zeer groot is?
- Welke dimensieloze verhouding van ρ en σ (en andere grootheden) bepaalt welke van die twee het meest bepalend is voor de weerstand?
- Geef de algemene uitdrukking voor $R=(V_2-V_1)/I$. Neem de soortelijke weerstand van de geleidende lagen gelijk aan elkaar, maar de dikte van de lagen verschillend.
Hint: stel een differentiaalvergelijking op voor $V_2(x)-V_1(x)$. Verwaarloos de spanningsval in de dikterichting binnen de films zelf.
- Wat is de precieze voorwaarde voor de ene of de andere limiet als bedoeld in b)?
Werk het antwoord van d) uit tot en met de eerste correctie term.
Controle: het antwoord moet symmetrisch zijn ten aanzien van d_1 en d_2 .

Uitwerking:

Het ogenschijnlijk vreemde gedrag is het gevolg van het kruiselings geplaatst zijn van de stroom- en spanningsaansluitingen van de vierpuntsmeting.

a) bij de eerste kritische stroom wordt (alleen) de junctie normaal: de stroom loopt van onder naar boven door de tunnelweerstand, vandaar dat $R=(V_2-V_1)/I$ negatief is (puur een kwestie van definitie). Bij de tweede kritische stroom worden ook de metaalfilms normaal - om de stroom (ook) van links naar rechts te laten lopen is dan een positief spanningsverschil (V_2-V_1) nodig.

b) ρ klein: $|R| = 1/(\sigma WL)$; σ groot: $|R| = \rho L/(W(d_1+d_2))$

c) als $\rho L \sigma L/d \gg 1$, dan is ρ bepalend.

d) $dV_1/dx = -(\rho/(Wd_1)) I_1(x)$ $dV_2/dx = -(\rho/(Wd_2)) I_2(x)$
 $I_1+I_2=I$ $V_2(x)-V_1(x)=(1/(\sigma W dx)) (dI_1/dx) dx=(1/(\sigma W)) (dI_1/dx)$
rvw: $I_1(x=0)=I$ $I_1(x=L)=0$
..... $(V_2-V_1)(x) = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$
met $\alpha = \sqrt{(\rho \sigma (d_1+d_2)/d_1 d_2)}$
..... $I^* R = V_2(x=0) - V_1(x=L) = (V_2-V_1)(x=0) + V_1(x=0) - V_1(x=L)$

$$RW(d_1+d_2)/\rho = L + (d_1+d_2 \exp(\alpha L))/(\alpha d_1) * (1 - (2d_1/d_2 + \exp(\alpha L) + \exp(-\alpha L))/(\exp(\alpha L) - \exp(-\alpha L)))$$

e) $\alpha L * \alpha L = \rho L \sigma L (d_1+d_2)/d_1 d_2 \gg 1$:

$$R = \rho L/(W(d_1+d_2)) - 2\rho L/(\alpha L W(d_1+d_2)) + \dots$$

$\alpha L * \alpha L = \rho L \sigma L (d_1+d_2)/d_1 d_2 \ll 1$:

$$R = -1/(\sigma WL) + \alpha L \alpha L/(6\sigma WL) + \dots = -1/(\sigma WL) + \rho L(d_1+d_2)/(6Wd_1 d_2) + \dots$$

Diamant is een hard materiaal dat vaak gebruikt wordt voor coatings. Zo'n coating is vaak polykristallijn, dat wil zeggen dat zij uit veel kristallen bestaat, die allen een andere oriëntatie hebben. Op de ondergrond vormen zich namelijk vele kristalkernen met een willekeurige oriëntatie. Na verloop van tijd raken die kristallen elkaar en spoedig is de hele ondergrond bedekt met kristallen. We bekijken nu de eerste fase van de groei. De kans dat binnen een tijdsinterval Δt een kristalkern ontstaat op het nog vrije oppervlak is evenredig met dat oppervlak en met Δt . We nemen aan dat de kristallen zodra ze ontstaan zijn beginnen te groeien met een constante snelheid, waarbij het kristal zijn vorm behoudt (voorzover het boven het grondvlak uitsteekt) maar het volume neemt evenredig toe met t^3 waarbij t de "leeftijd" van het kristal is.

Bereken de totale onbedekte oppervlakte als functie van de tijd.

Hint: Bekijk een punt op de ondergrond en bereken de kans dat dat punt op tijd t niet bedekt is door een kristal. Dat is het product over alle tijdsintervalletjes $\Delta t'$ van de kansen dat het interval $\Delta t'$ er geen kristal ontstaan is op een oppervlak dA . Bedenk wat de (gemiddelde) grootte van dA is.

Het probleem is universeel: je kunt het ook toepassen op een vijver waar af en toe regendruppels in vallen. We berekenen dan het oppervlak dat nog niet door de ontstane kringgolven bedekt is.

Kies de oorsprong in het punt dat je bekijkt (zonder verlies van algemeenheid). Stel verder dat dit punt bedekt is door een kristal. Dan geldt dat als dit kristal ontstaan is op $t' < t$, het ontstaan moet zijn binnen een oppervlakte ter grootte $\alpha(t-t')^2$. Hierbij is α een constante die te maken heeft met de (gemiddelde) vorm van de (projectie van de) kristallen. Voor zich uitbreidende cirkels (ringgolven) hebben we $\alpha = \pi$.

Neem nu een intervalletje $\Delta t'$. We bekijken nu de kans dat er gedurende dat intervalletje *geen* kristallen zijn ontstaan binnen de oppervlakte $\alpha(t-t')^2$. Deze kans wordt gegeven door

$$P_{\text{geen kristal}}(t') = 1 - \rho \alpha (t-t')^2 \Delta t'.$$

Hierbij is ρ de kans dat er per tijdseenheid en per oppervlakte-eenheid een kristalkern ontstaat. De kans dat er op t nog steeds geen kristal is dat ons punt overdekt, is dus gegeven door de kans dat in het eerste tijdsintervalletje (beginnend op $t = 0$) geen ‘gevaarlijk’ kristal is ontstaan, *maal* de kans dat dit niet in het tweede intervalletje is gebeurd, enzovoorts.

Zo krijgen we dus voor de totale “overlevingskans”:

$$P = \prod_{0 < t' < t} (1 - \rho \alpha (t-t')^2 \Delta t').$$

Nemen we nu de log aan beide kanten dan krijgen we

$$\ln P = -\rho \alpha \int_0^t dt' (t-t')^2 = -\rho \alpha \frac{t^3}{3}.$$

Dus $P = \exp(-\rho \alpha t^3)$. Het vrije oppervlak wordt dus zeer snel bedekt.

Overigens is het aardig om te kijken wat er gebeurt voor kleine t . Dan overlappen de kristalkernen niet, en is het oppervlak als geheel vrijwel onbedekt, zodat het aantal kernen evenredig toeneemt met t . Bovendien groeien ze ongehinderd zodat hun totale oppervlak toeneemt met t^3 . De kans voor een punt om onbedekt te blijven is dus $1 - \text{Const} \times t^3$, hetgeen klopt met een Taylor expansie van de gevonden oplossing.

Je kunt het probleem ook op de computer simuleren om het antwoord te controleren.

14 - Old Faithful

drs. H. Jordens

In het Noord Westen van de Verenigde Staten, in de staat Utah, bevindt zich in de Rocky Mountains het Yellow Stone National Park. Het park is beroemd vanwege de geisers die er voor komen. Overigens is het woord geiser afkomstig van de meest bekende geiser op IJsland: Geisir. In Yellow Stone Park is een geiser die met grote regelmaat stoom spuit; vandaar de naam Old Faithful. Een geiser wordt gevormd door een ondergrondse holte die met water gevuld is en die via een nauwe pijp met het grondoppervlak verbonden is. Het water in de holte wordt tot het kookpunt verhit door het magma dat er vlak onder ligt. Old Faithful spuit in 4 minuten ca. 44 ton stoom omhoog. Na de uitbarsting stroomt het water via ondergrondse kanalen weer toe tot de pijp weer helemaal gevuld is. Dat duurt 20 tot 30 minuten. Elke anderhalf uur herhaalt het proces zich. Uit metingen is gebleken dat de temperatuur in de grond bij Old Faithful 1 graad C per meter toeneemt. Veronderstel dat de temperatuur van de buitenlucht $T_0 = 290\text{K}$ is en dat de luchtdruk $p_0 = 1,0\text{ hPa}$.

Vragen:

1. Bepaal de minimum diepte van de ondergrondse holte bij Old Faithful.
2. Maak een schatting van het volume van de holte als deze precies op de minimum diepte zit.

Oplossing:

1. De druk in de holte (op een diepte h) is $p_0 + \rho \cdot g \cdot h = 10^5 + 10^4 \cdot h$

Voor de verzadigingsdruk van water geldt:

$$p = A \cdot \exp(-C/RT)$$

hierin is C de verdampingswarmte per mol = 40 kJ/mol

$$R = 8,3\text{ J/K.mol}$$

$$\text{bij } p=p_0 \text{ is } T = 373\text{K}; \text{ daaruit volgt } A = 4,1 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$$

Als het water gaat koken in de holte dan geldt:

$$10^5 + 10^4 \cdot h = 4,1 / 10^{10} \cdot \exp[-4,8 \cdot 10^3 / (290 + h)]$$

Dit is een transcendente vergelijking die door verstandig benaderen is op te lossen; er volgt $h = 195\text{ m}$ (zeg 200m)

Uitgaande van de tabel in BINAS voor de verzadigingsdruk kan met ook twee grafieken tekenen: die van de dampdruk en die van de druk op een diepte h (uitgedrukt in de temp. T , nl $p = 10^5 + 10^4 \cdot (T-290)$) en men bepaalt grafisch het snijpunt.

2. Op de diepte van 195 m is de druk $20,5\text{ hPa}$ en de temperatuur $T = 485\text{ K}$. De pijp wordt leeg geblazen waardoor de druk in de holte daalt tot 1 hPa . het water in de holte is dan oververhit en er verdampt dan zoveel water dat de temperatuur

van het resterende water gedaald is tot het kookpunt bij 1 hPa: 373 K.
De warmte die nodig is om de 44 ton stoom te produceren zorgt voor het afkoelen van het water tot 373 K.

Als de massa van het water in de holte m is, dan geldt:

$$c \cdot (m - 44) \cdot (485 - 373) = L \cdot 44$$

hierin is c de soortelijke warmte per ton
 L de verdampingswarmte per ton

Dit levert voor m : ca. 250 ton. Het volume van de holte is dan ca. 250 m³.

Met dank aan de makers van deze vragen:

- dr. P.F.A. Alkemade
- prof.dr. W.J. Caspers
- dhr. A.C.W. Corstanje
- prof.dr.ir. H. van Dam
- dr. P.J.H. Denteneer
- drs. H. Jordens
- prof.dr. N.J. Lopes Cardozo
- prof.dr. C.D.T. Maes
- dr. R.F. Mudde
- dr.ir. P.C. van Son
- dr. J.M. Thijssen
- prof.dr. I.T. Young