

Pion 2007

Oplossingen

PHILIPS
sense and simplicity

Universiteit Utrecht



PION 2007 wordt mogelijk gemaakt door:

Hoofdsponsor:

Hewitt

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



FOM

N

Inhoud

1. Helicopter	3
2. De transatlantische telefoonkabel	5
3. Een merkwaardige cirkelbaan	7
4. Ken uw klassieken	10
5. Verklaar het uitdijend heelal aan een achtjarige	15
6. Verval van deeltjes in de relativiteitstheorie	18
7. Diepvrieskist	22
8. Hodograaf	24
9. Opgave over wisselspanning	27
10. Een virtueel deeltje	29
11. Zeepbellen	30
12. Lagrange's evenwichtige driehoeken	32

- (a) Als de helicopter beweegt met hoeksnelheid ω en verticale snelheid v_y , dan is de invallende snelheid van de luchtdeeltjes $\mathbf{v} = (-\omega R, -v_y)$. De normaalvector van een rotorblad is $\hat{\mathbf{n}} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$. De snelheidsverandering van een luchtdeeltje is $\Delta \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$; de loodrechte component verandert van $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ naar nul. Het volume van de lucht die in een tijd Δt tegen de twee rotorbladen botst, is $V = 2 |(A\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\Delta t|$. Als we ook de zwaartekracht meenemen, levert dit voor de totale impulsverandering per tijdseenheid

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{heli}}}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_{\text{lucht}}}{dt} - Mg\hat{\mathbf{y}} = -\frac{\rho V \Delta \mathbf{v}}{\Delta t} - Mg\hat{\mathbf{y}}.$$

Voor de impulsverandering van de helicopter geldt tevens $\dot{\mathbf{p}}_{\text{heli}} = (MR\dot{\omega}, M\dot{v}_y)$ en dit levert het gewenste antwoord.

- (b) Eerst beschouwen we het geval $\alpha > 0$. De helicopter zal dan steeds sneller naar beneden vallen in een schroefbeweging, omdat de zwaartekracht een component langs de schroefbeweging heeft. De verhouding $v_y/\omega R$ convergeert naar $\tan \alpha$, omdat de luchtweerstand alleen loodrecht op het rotorblad werkt.

Voor $\alpha = 0$ heeft de zwaartekracht geen component langs de schroefbeweging en zal de helicopter door een krachtbalans tussen zwaartekracht en luchtwrijving naar een eindige snelheid convergeren. Dit is ook in te zien door $\alpha = 0$ in de bewegingsvergelijkingen in te vullen.

- (c) Om de bewegingsvergelijkingen op te lossen, doen we een variabelensubstitutie naar coördinaten langs en loodrecht op de schroefbeweging met hoek α :

$$\begin{aligned} a &= \omega R \sin \alpha - v_y \cos \alpha, \\ b &= \omega R \cos \alpha + v_y \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dit levert als nieuwe bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{2\rho A}{M} a |a| + g \cos \alpha, \\ \dot{b} &= -g \sin \alpha. \end{aligned}$$

De nieuwe, ontkoppelde vergelijkingen zijn makkelijker op te lossen. Voor $b(t)$ levert dit

$$b(t) = \omega_0 R \cos \alpha - gt \sin \alpha.$$

Voor het oplossen van de vergelijking voor $a(t)$ merken we op dat $a(0) = \omega_0 R \sin \alpha > 0$ en $\dot{a}(0) > 0$, dus $a(t) \geq a(0) > 0$ voor alle t . Daarom kunnen we $|a|$ vervangen door a . Scheiden van variabelen levert dan:

$$-\frac{2\rho A}{M} t = \int_{a(0)}^{a(t)} \frac{da}{a^2 - a_\infty^2} = \frac{1}{2a_\infty} \log \left(\frac{a - a_\infty}{a + a_\infty} \right) \Big|_{a(0)}^{a(t)}$$

waarbij $a_\infty = \sqrt{Mg \cos \alpha / 2\rho A}$. Dit oplossen voor $a(t)$ geeft:

$$a(t) = a_\infty \frac{1 + Ce^{-\lambda t}}{1 - Ce^{-\lambda t}},$$

met $\lambda = 4a_\infty \rho A / M = \sqrt{8\rho g A \cos \alpha / M}$ en $C = \frac{a(0) - a_\infty}{a(0) + a_\infty}$.

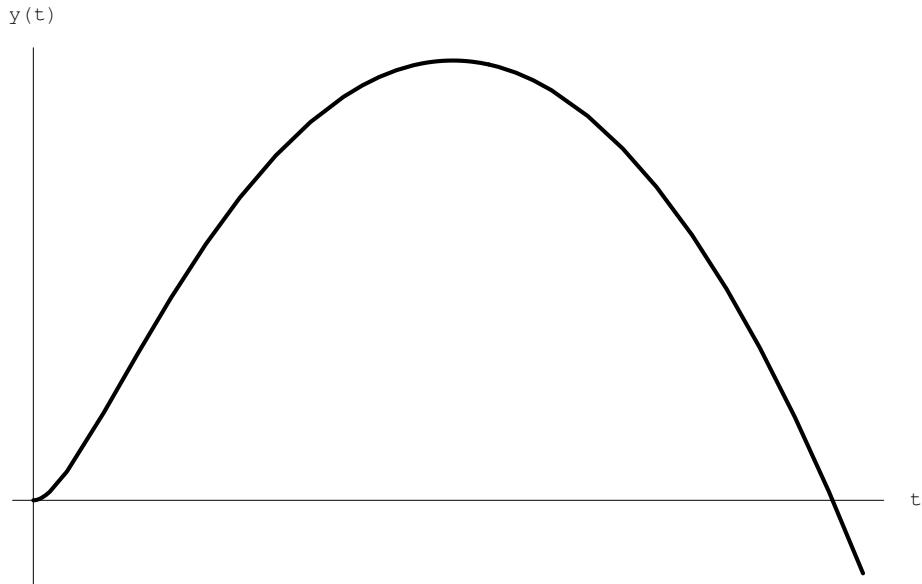
Om nu de uiteindelijke baan $y(t)$ te krijgen, gebruiken we

$$\begin{aligned} v_y(t) &= -\cos \alpha a(t) + \sin \alpha b(t) \\ &= -\cos \alpha a_\infty \frac{1 + Ce^{-\lambda t}}{1 - Ce^{-\lambda t}} + \sin \alpha (\omega_0 R \cos \alpha - gt \sin \alpha), \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t v_y(t') dt' \\ &= -\cos \alpha a_\infty \left[-t + \frac{2}{\lambda} \log \left(\frac{-C + e^{\lambda t}}{-C + 1} \right) \right] + \sin \alpha (\omega_0 R t \cos \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha). \end{aligned}$$

Merk op dat voor $\alpha = 0$ de valsgeschwindigheid van de helikopter naar de waarde a_∞ convergeert en dat voor $\alpha > 0$ het gedrag gedomineerd wordt door de paraboolbaan $-\frac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha$. Een typische baan ziet er als volgt uit:



(a) Invullen levert:

$$Ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx) \cdot [k^2 - \gamma^2] + Ae^{-\gamma x} \sin(\omega t - kx) \cdot [2k\gamma - \omega RC] = 0$$

Hieraan is alleen voldaan als de uitdrukkingen tussen de haken [...] identiek 0 zijn. Dus: $k = \gamma$ en $2k\gamma = 2k^2 = \omega RC$, dus $k = \gamma = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$.

(b) Problemen kunnen ontstaan door:

1. Demping.
2. Dispersie, waardoor signalen van verschillende frequentie een verschillende voortplantingsnelheid hebben. Dardoor wordt het signaal over enige afstand volstrekt onverstaanbaar.

1. is het gevolg van de dempingsfactor $e^{-\gamma x}$ met $\gamma = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$ (frequentie-afhankelijk).
2. volgt uit de fasesnelheid $v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$. De fasesnelheid is dus afhankelijk van de frequentie: hogere frequenties planten zich sneller voort dan lagere frequenties.

(c) Als de tweede term in de Heaviside-vergelijking domineert, dan krijgen we de golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Oplossingen hiervan zijn: $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ met $\frac{k^2}{\omega^2} = LC$. Dit zijn ongedempte golven met fasesnelheid $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; dus onafhankelijk van de frequentie: geen dispersie.

Invullen van de golfoplossing $u(x, t) = Ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$ in de Heaviside-vergelijking levert voor de rechterkant:

$$RC \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega RC e^{-\gamma x} \sin(\omega t - kx)$$

en

$$LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 LC e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$$

De eerste term is te verwaarlozen t.o.v. de tweede term als: $\omega RC \ll \omega^2 LC$, dus als $\frac{R}{L} \ll \omega$.



You'll move him

Bij Philips zijn we ervan overtuigd dat technologie zowel geavanceerd als eenvoudig kan zijn. Technologie die zinvol is en gemakkelijk te ervaren. Zoals de imposante en energiezuinige verlichting van voetbalstadions of een audiosysteem waarmee je ontspannen naar muziek kunt luisteren. Philips biedt ook jou alle kansen om je gedachten en ideeën in te zetten voor het verbeteren van het leven van mensen overal ter wereld. Kijk daarom voor informatie over stages en banen op onze website.

www.philips.com/careers

PHILIPS
sense and simplicity

Een cirkelvormige baan is een heel gebruikelijke oplossing voor de baan van een deeltje in een centraal krachtenveld, maar dan valt het centrum van de baan samen met dat van het krachtenveld. Hier moeten we dus te maken hebben met een heel bijzondere potentiaal.

De uitgangspunten die we gebruiken bij het oplossen van dit probleem zijn:

1. De baan is (in elk geval deels) cirkelvormig.
2. De potentiaal $V(r)$ hangt slechts af van de afstand r tot de oorsprong.
3. Behoud van energie E .
4. Behoud van impulsmoment \vec{L} .
5. Symmetrie.

Op grond van 4. kunnen we vaststellen dat de beweging zich afspeelt in een vlak. Kies dit vlak als het vlak van het coördinatenstelsel. Op grond van 5. kunnen we aannemen dat het stuk cirkelboog zal liggen rond de as die de oorsprong met het centrum van de beweging verbindt. Kies deze as als de x -as. We kunnen dan twee gevallen onderscheiden:

Uit 1. vinden we:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + V(r) = E \quad (3.1)$$

waarin E een constante is. Dit is ons startpunt, omdat dit een uitdrukking voor de potentiaal kan opleveren, maar we moeten de tijdsafgeleiden in de coördinaten kwijt. Uit de vorm van de baan rond $y = 0$ volgt:

$$(R - x)^2 + y^2 = \rho^2$$

We differentiëren deze uitdrukking naar de tijd, waaruit volgt

$$-2(R - x)\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

ofwel

$$\dot{x} = \frac{y}{R - x}\dot{y} \quad (3.2)$$

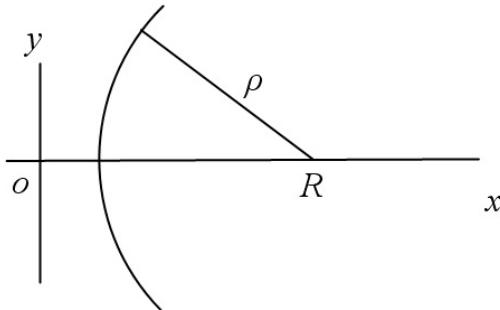
Uit 4. volgt een tweede relatie tussen \dot{x} en \dot{y} :

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L$$

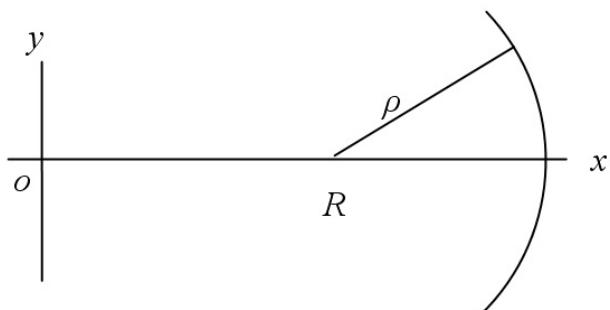
met L een constante. Gebruik 3.2

$$m\left(x - y\frac{y}{R - x}\right)\dot{y} = L$$

waarin we \dot{y} kunnen herleiden tot een functie van de coördinaten,



(a) $V(r)$ is repulsief



(b) $V(r)$ is attractief

$$\dot{y} = \frac{L}{m} \frac{R-x}{x(R-x)-y^2}$$

Op dezelfde wijze volgt voor \dot{x}

$$\dot{x} = \frac{L}{m} \frac{y}{x(R-x)-y^2}$$

Dit subsitueren we in 3.1 om een uitdrukking voor de potentiaal te verkrijgen in termen van uitsluitend de coördinaten:

$$\begin{aligned} V(r) &= E - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \\ &= E - \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\frac{(R-x)^2 + y^2}{(x(R-x) - y^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Met Pythagoras $(R-x)^2 + y^2 = \rho^2$ en dus $R^2 - 2xR + x^2 + y^2 = R^2 - 2xR + r^2 = \rho^2$, zodat

$$xR = \frac{1}{2} (R^2 + r^2 - \rho^2)$$

waarmee 3.3 geschreven kan worden als

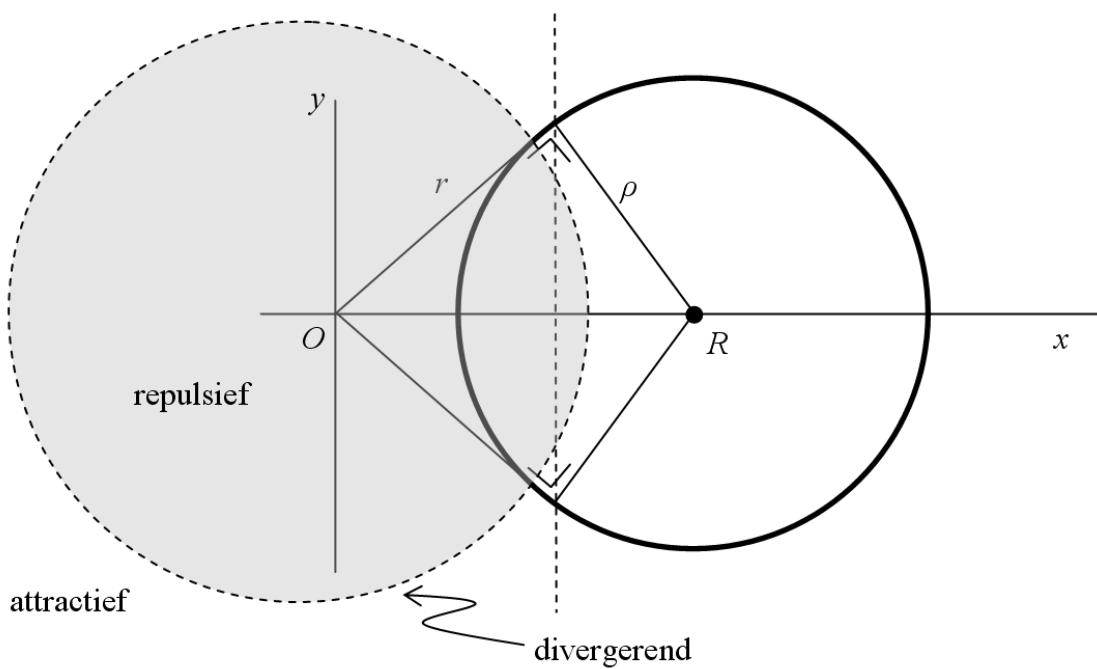
$$V(r) = E - \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\frac{\rho^2}{\left(\frac{1}{2}(R^2 + r^2 - \rho^2) - r^2 \right)^2} \right)$$

ofwel

$$V(r) = E - 2 \frac{L^2}{m} \frac{\rho^2}{(R^2 - \rho^2 - r^2)^2} \quad (3.4)$$

Dit is inderdaad een centrale potentiaal. De potentiaal divergeert voor $r = \sqrt{R^2 - \rho^2}$. Voor grotere afstanden is de potentiaal aantrekgend, voor kleinere afstanden afstotend.

De kracht \vec{F} moet voor een attractieve potentiaal altijd naar de het centrum van de potentiaal wijzen (dat wil zeggen naar de oorsprong van ons assenstelsel), of in de tegenovergestelde richting voor een repulsieve potentiaal. Voor het gebruikelijke probleem van een cirkelvormige baan in de centraal



krachtenveld zijn we gewend dat de kracht loodrecht op de baan staat, en dit geeft ook de richting van de versnelling weer. De cirkelbaan wordt dan ook met constante hoeksnelheid doorlopen. In dit geval is de kracht *niet* naar het centrum van de baan gericht en is ook de hoeksnelheid ten opzichte van het centrum van de baan niet constant.

- (a) **De zuiger van Callen:** De inwendige energie van compartiment 1 is E_1 , die van het andere compartiment E_2 . Omdat alle processen reversibel verlopen en de wanden van de kamers adiabatisch zijn is de som van deze energien constant: $E_1 + E_2 = E = \text{constant}$. Ook de som van de twee deelvolumina is constant: $V_1 + V_2 = V$. De totale entropie hangt dus af van de twee variabelen E_1 en V_1

$$S(V_1, E_1) = S_1(V_1, E_1) + S_2(V_2, E_2) = S_1(V_1, E_1) + S_2(V - V_1, E - E_1)$$

en

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial S}{\partial V_1} dV_1 = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \frac{\partial E_2}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial S_1}{\partial V_1} dV_1 + \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial V_1} dV_1 \\ &= \left(\frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \right) dE_1 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1} - \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right) dV_1 = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dE_1 + \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) dV_1 \end{aligned}$$

Maar omdat ook de zuiger adiabatisch is kan de inwendige energie van elk van de gassen slechts veranderen door de arbeid die de zuiger er op verricht, dus $dE_1 = -P_1 dV_1$. Substitutie in bovenstaande vergelijking geeft dan

$$dS = - \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) P_1 dV_1 + \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) dV_1 = \frac{P_1 - P_2}{T_2} dV_1$$

Omdat in evenwicht dS moet dan $P_1 = P_2$ in evenwicht moeten de drukken dus gelijk zijn, maar over de temperaturen kunnen we in dit geval niets zeggen. Hiervoor moet men de fluctuaties van de zuiger en de energiedissipatie in de gassen gedetailleerd bestuderen.

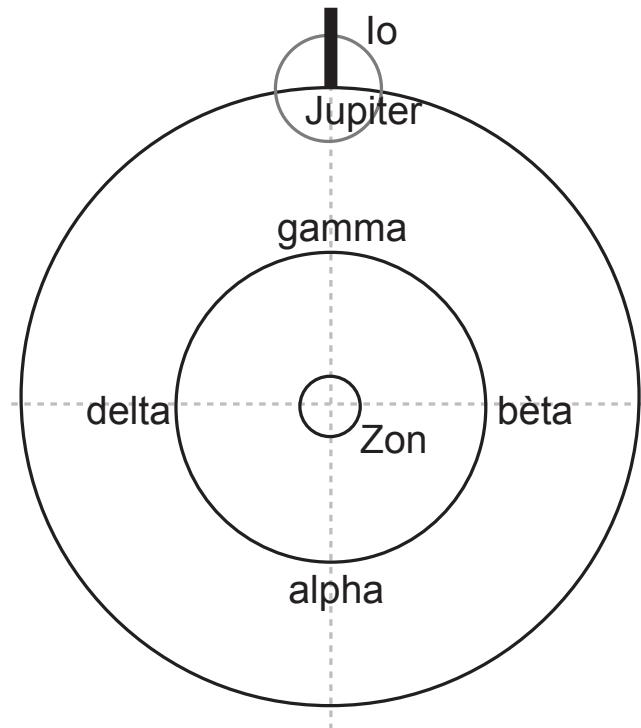
Bonus: De ervaring leert dat twee systemen in contact met elkaar op den duur dezelfde temperatuur aannemen; dat noemen we dan evenwicht. De crux in deze uitspraak zit natuurlijk in het woord "contact"; daarvan is geen sprake als de systemen gescheiden zijn door een vaste adiabatische wand. Het verrassende van het gedachtenexperiment van Callen is nu, dat, als we de vaste adiabatische wand vervangen door een adiabatische zuiger, er nog steeds geen evenwicht optreedt binnen de context van de thermodynamica. Het feit dat dit pas opgemerkt is in 1960, zo'n anderhalve eeuw na het begin van de thermodynamica, is een aanwijzing dat dit gedrag tegen de intutie ingaat. Iedere fysicus is ervan overtuigd dat er in werkelijkheid wel degelijk evenwicht optreedt, ook al zou de zuiger ideaal adiabatisch zijn. Op de internationale conferentie over statistische mechanica in 1998 heeft de voornaamste spreker, E.Lieb, tien problemen opgesomd die hij graag opgelost zou zien en deze zuiger van Callen was het eerste. In de jaren hierna heeft de literatuur dan ook een stroom aan publicaties over dit onderwerp laten zien, waaruit wel duidelijk is geworden in welke richting de oplossing moet worden gezocht, maar die de definitieve verlossing nog niet heeft gebracht.

Het punt is dat er weliswaar geen warmtegeleiding optreedt, maar dat betekent nog niet dat er geen energietransport is. De zuiger kan namelijk kinetische energie overdragen aan de gassen. Als je dissipatie verwaarloost blijf je met een eeuwigdurende oscillatie zitten (dit is al eens eerder gevraagd bij PION: zie opgave 2 uit 2005 en staat bekend als het experiment van Ruchardt (1929)).

Dus de dissipatie is essentieel, maar dat valt buiten het kader van de thermodynamica: om deze reden (toepassing van thermodynamische principes) moeten alle veranderingen reversibel zijn en dat sluit dissipatie per definitie uit. De kinetische energie van de zuiger speelt dus in werkelijkheid een belangrijke rol, maar mag eigenlijk in de thermodynamica niet gebruikt worden. Overigens treedt die kinetische energie pas in een laat stadium op: we kunnen door uitwendige manipulatie de zuiger willekeurig langzaam (dus reversibel!) laten bewegen totdat de situatie met gelijke drukken is bereikt; zoals de uitwerking laat zien kan dat binnen de thermodynamica. Dan laten we de zuiger verder aan zijn lot over en de fluctuaties doen de rest, overigens op een onvoorstelbaar lange tijdschaal. Dat dit nog niet in detail is opgelost, laat zien hoe delicate de thermodynamica eigenlijk is.

Voor meer informatie zie: http://www.algarcia.org/Pubs/Adiabatic_Piston.pdf.

Dit vraagstuk is als bonus opgenomen. De beoordeling is erop gebaseerd in welke mate het commentaar overeenkomt met bovenstaand commentaar.



Figuur 4.1: De beweging van Io door het zonnestelsel.

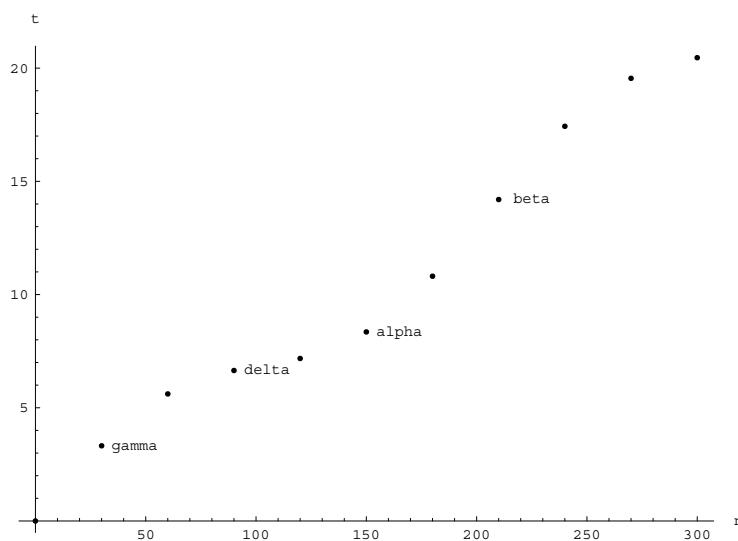
- (b) **Lichtsnelheid volgens Rømer:** Figuur 4.1 geeft de loop van de aarde (A) en Jupiter (J) om de zon (Z) en die van Io (I) om Jupiter (alle tegen de wijzers van de klok in). Vanaf het punt α via β tot het punt γ beweegt de aarde in de richting van Jupiter zodat de afstand die de laatste lichtstraal van Io (net voor de eclips) moet afleggen bij opeenvolgende eclipsen steeds kleiner wordt. De periode tussen twee opeenvolgende eclipsen wordt dus vanaf de aarde gezien steeds korter.

Bij de beweging van γ via δ naar α wordt de afstand steeds groter en neemt de schijnbare periode tussen (het einde van) de eclipsen toe. Zetten we bij de waarneming van een lange reeks van eclipsen de begintijden van deze eclipsen uit tegen het volgnummer van de eclips, dan krijgen we iets dat lijkt op figuur 4.2. De berekening die Huygens uit Rømer's gegevens deed kwam neer op het vergelijken van de intervallen tussen eclipsen bij δ en β . Dit verschil is vrij klein:

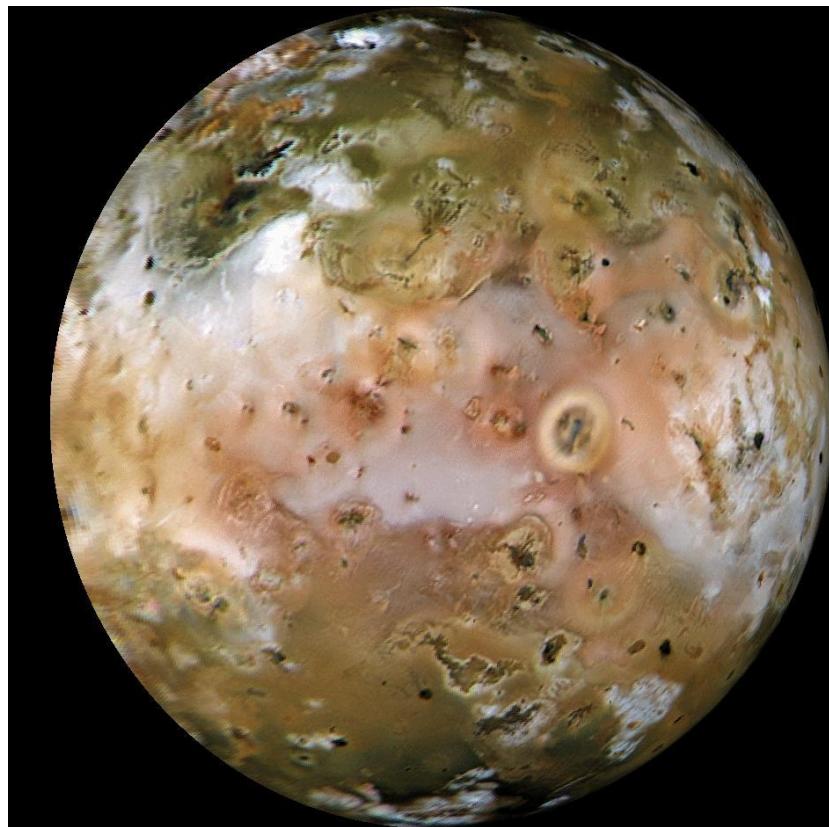
$$\Delta t \approx \frac{v_{aarde}}{c} t \approx \frac{30}{300000} 42.5 \cdot 60 \approx 0.25 \text{ min}$$

Om de meetfout kleiner te maken gebruikte Huygens daarom het verschil tussen 40 opeenvolgende eclipsen en dit verschil telt dan op circa 11 minuten. Dit is goed meetbaar en daarom is op deze manier de lichtsnelheid redelijk in te schatten. Het is goed om te vermelden dat de benadering tot cirkelbanen slechts kleine invloed zal hebben op de snelheid van de aarde t.o.v. Jupiter. Het is ook belangrijk de afstand van de Aarde tot Jupiter constant te houden. De ellipsbeweging van Jupiter is hier dan belangrijk, maar omdat de omlooptijd van Jupiter veel groter is dan die van de aarde is dit verschil over een half jaar (de duur van de meting) relatief klein.

Literatuur: F.Tuinstra, Ken uw klassieken, Ned.Tijdsch. Natuurk. 70 (2004) 61.



Figuur 4.2: Tijden van opeenvolgende eclipsen.



In de Griekse mythologie was Io de dochter van Inachus, een riviergod. Op een dag merkte Zeus haar op en ze werd al snel een van zijn vele liefhebbers. Hun relatie duurde voort totdat Hera hen bijna ontdekte. Dat werd echter ontweken door Zeus door Io in een prachtige zilveren koe te veranderen. Hera, echter, was niet gek en vroeg Zeus om haar de koe als geschenk te geven.

Toen Hera Io had gekregen, plaatste ze haar onder toeziende ogen van Argus, het honderdogige monster dat zijn ogen om de beurt kon laten slapen, en zo altijd een oog op Io te kunnen houden zodat ze niet zou wegvluchten, om haar bij Zeus weg te houden. Zeus beval Hermes Argus te doden. Dat lukte hem door alle honderd ogen in slaap te zingen. Hera stuurde een horzel om Io te steken wanneer ze op aarde liep. Uiteindelijk kwam ze Prometheus tegen, na het pad tussen de Propontis en de Zwarte Zee over te steken, dat toen de naam Bosporus (ossenpassage, dus hetzelfde als Coevorden of Oxford) kreeg. Prometheus maakte haar toen bovenop de Caucasusberg vast en zei haar dat ze uiteindelijk weer mens zou worden en ze een van de voorvaderen zou worden van een grote held (Herakles). Io vluchtte over de Ionische Zee naar Egypte, waar ze uiteindelijk terug werd veranderd in een mens door Zeus. In Egypte schonk ze het leven aan haar zoon Epaphus. Later trouwde ze met Telegonus, een Egyptische koning. Het woord Iovlieg (Io fly) is afkomstig van de horzel die Hera stuurde om Io te treiteren en haar naar Egypte te laten vluchten, nadat Argus was omgebracht. Bron: Wikipedia

Aan het front van de natuurkunde

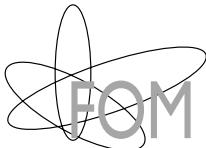


De komende vier jaar onderzoek doen? Aan een onderwerp waar ook in de fysica dat je leuk lijkt? Zuiver wetenschappelijk of gericht op een technologisch probleem? In een Nederlandse topgroep? Of zelfs voor een tijdje in een buitenlands laboratorium? En een paar keer naar een congres in het buitenland?

Het kan allemaal, als onderzoeker in opleiding (oio) bij FOM.

Oio-plaatsen bij FOM zijn meestal gekoppeld aan onderzoekprojecten waarvoor universitaire hoogleraren bij FOM geld hebben weten te krijgen. Die hoogleraar gaat op zoek naar kandidaten voor zijn oio-plaats of plaatsen. Het is dan handig dat hij weet dat jij belangstelling hebt voor zijn project. Zorg dus dat je contacten hebt met die hoogleraren in je eigen instelling of ergens anders, die dát onderzoek doen dat jou interesseert.

Kijk voor meer informatie over ons werkterrein, vacatures en arbeidsvoorraarden op onze website (<http://www.fom.nl>) of bel met onze personeelsdienst, telefoon (030) 600 12 62.

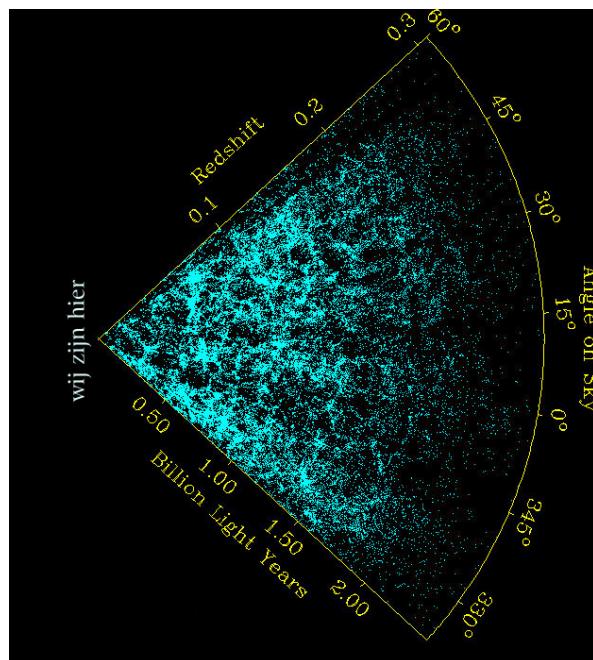


5. Verklaar het uitdijend heelal aan een achtjarige.

V. Icke, Universiteit Leiden

Het spreekt voor zich dat op deze opgave geen eenduidig antwoord te geven is. Bij de beoordeling wordt bekeken of het verhaal fysisch correct is en met name of het verhaal logisch en makkelijk te volgen is.

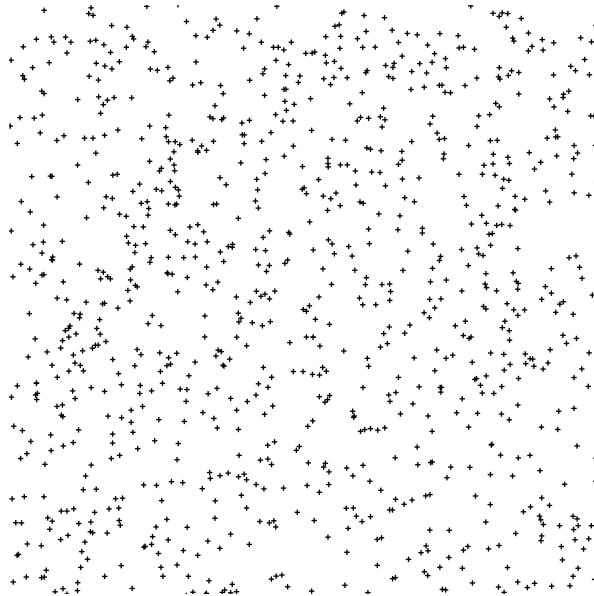
- (a) Aangezien er in het heelal veel sterren zijn die allemaal in meer of mindere mate op elkaar lijken zou het niet logisch zijn dat onze ster (de zon) een heel speciale ster is. Daarom nemen we meestal aan dat onze aarde gewoon een punt is als ieder ander punt. Omdat we bovendien met telescopen in elke richting ongeveer dezelfde sterren en sterrenstelsels *waarnemen* (!), of we nu ver weg of dichtbij kijken, betekent dit dat waarschijnlijk het heelal ongeveer *homogeen* is: het heelal is op elk punt ongeveer hetzelfde. Bijgevoegd plaatje hoe het nabije heelal eruit ziet, maakt dat aannemelijker.



Figuur 5.1: Beeld van de grote structuren in het heelal.

- (b) Met telescopen zien we dat het heelal uitdijt. Dit ziet men uit de *roodverschuiving*: hoe verder een sterrenstelsel weg staat, hoe roder het licht dat wij ervan ontvangen. Dat komt doordat met de uitdijing van de ruimte, de lichtgolven mee uitrekken. Omdat het heelal echter homogeen is (van dezelfde aard in elke punt), moet het heelal dus overal op dezelfde manier bewegen! Het is niet moeilijk te bewijzen dat dat maar op een manier mogelijk is: door verandering van de schaal van het heelal. Stel je een bouwtekening voor waarop staat: "Heelal, stuks 1, schaal 1:100." Dan is na (laten we zeggen) een half miljard jaar die tekening nog precies hetzelfde, alleen staat er "schaal 1:105". Weer later staat er 1:110, daarna 1:115, enzovoorts.

- (c) Je kunt dat leuk demonstreren door het bijgaande plaatje op transparant te kopiëren, 4% vergroot, en dat over het origineel heen te leggen. Dan zie je ook meteen dat sterrenstelsels die ver weg zijn, sneller van elkaar moeten af bewegen. In formule: $v = H * r$, de zogenaamde Hubble-relatie, waarin r de afstand tot een stelsel en H het "getal van Hubble".

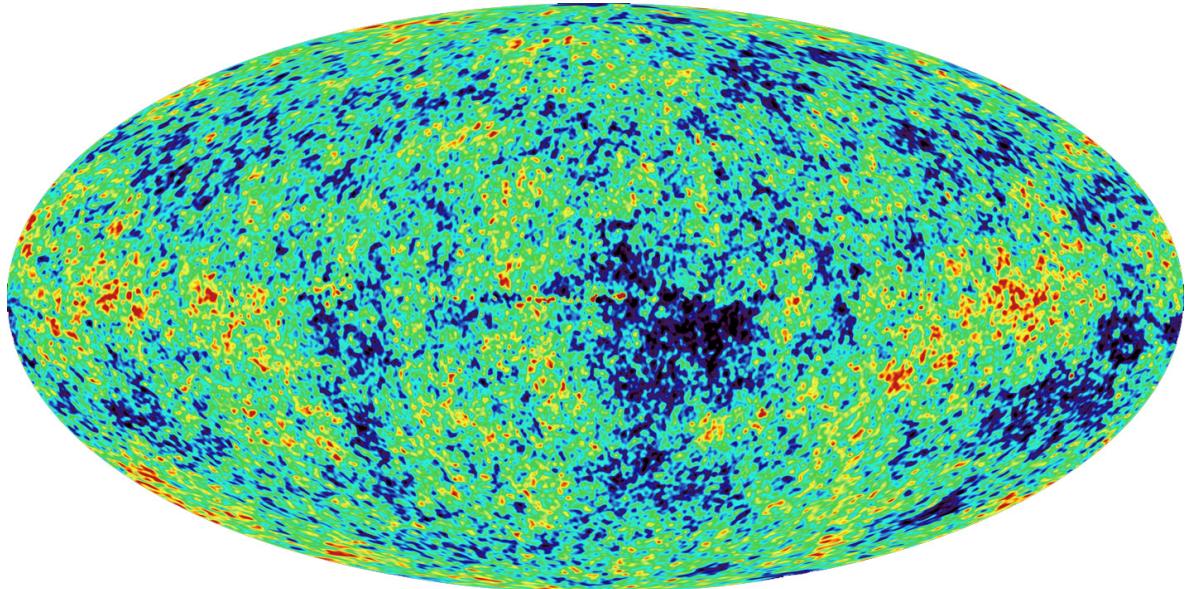


Figuur 5.2: De analogie van expansie aan de hand van rijzend brood.

- (d) Omdat het heelal groter wordt, zoals blijkt uit de Hubble-relatie, moet het heelal vroeger kleiner geweest zijn. Als we nu erg ver weg in de ruimte kijken, kijken we terug in de tijd. Maar vroeger was de schaal van het heelal kleiner: 1:90 als je (laten we zeggen) een miljard jaar terugkijkt, daarvoor was het 1:80, enzovoorts; ooit stond er "schaal 1:0" op de bouwtekening van het heelal. *Er was dus ooit een tijd voor welke er geen tijd en geen ruimte waren.* Dat "puntijdstip nul" noemt men "de oerknal".
- (e) Een interessante vraag is of wij dit allemaal nog kunnen zien. Omdat licht ook een bepaalde snelheid heeft, volgt dat licht wat van heel ver weg komt, ook heel oud is. Op die manier kunnen we dus door naar sterrenstelsels te kijken die heel ver weg zijn in het verleden kijken. Misschien zelfs helemaal tot aan de oerknal. Doordat in een heel klein heelal heel veel deeltjes om elkaar heen bewegen is het ook heel heet. Met zo'n hete temperatuur laat dit heelal geen licht door. Pas bij een temperatuur van ongeveer 6000°C wordt het heelal gasvormig en alle gassen, zoals lucht, laten wel licht door. Dit gebeurde zo'n 380.000 jaar na de oerknal. Omdat het heelal toen als het ware een grote zon was, werd er erg veel licht uitgezonden van ongeveer 6000°C .

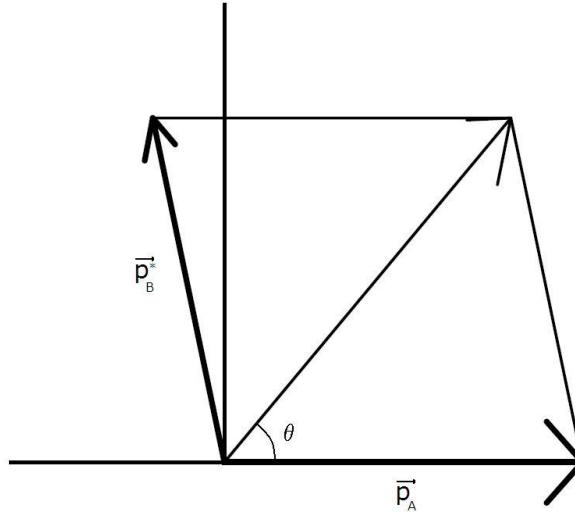
De oerknal is 13,7 miljard jaar geleden en als we naar de oerknal kijken moeten we dus erg ver weg kijken. Via Hubble's relatie beweegt dit dan snel van ons af en door de uitrekking van het licht is dit veel kouder geworden. Dit licht, de gloed van de oerknal, heeft nu daardoor een temperatuur van ongeveer -270°C graden en kunnen we niet met onze ogen zien. Satellieten kunnen dit wel en onderstaand plaatje laat deze gloed dan ook zien.

- (f) Er is hier één ding opvallend. Onderstaand figuur laat het hele universum zien en overal wordt *bijna* precies dezelfde temperatuur gevonden. De fluctuaties (hobbels) zijn van orde 1 op 100.000. Dit wordt daarom weer als belangrijkste bewijs gezien van de homogeniteit van het heelal. (zie het eerste punt) Omdat verder alleen de oerknal zo precies deze gloed van de oerknal voorspelt, wordt deze straling ook gezien als het belangrijkste bewijs voor de oerknaltheorie.



Figuur 5.3: De WMAP data laat de fluctuaties van de temperatuur van de achtergrondstraling zien.

- (g) Er zijn hierbij nog wel wat onopgeloste problemen. We noemen er een paar:
- 1) Het Horizon probleem: Als we nu naar twee sterren kijken op het moment dat het heelal doorzichtig wordt, blijken de meeste sterren zo ver van elkaar te staan dat ze zelfs met de lichtsnelheid gedurende de leeftijd van het heelal op dat moment (380.000 jaar) geen informatie hebben kunnen uitwisselen. Daarom is het erg raar dat het heelal overal zo op elkaar lijkt. Dit probleem wordt nog enigszins controversieel verklaard door inflatietheorie: gedurende een korte periode expandeerde het heelal veel sneller dan het licht.
 - 2) Het Vlakheids probleem: de dichtheid van massa in ons universum is heel dicht bij de 'kritische massa'. Dit is de massa waarbij de ruimte van het heelal niet gekromd is. Bij een iets grotere dichtheid zou het universum in elkaar storten, bij een iets grotere dichtheid zou het heelal zo snel expanderen dat het heel koud zou worden. Hoe kan dit zo toevallig uitkomen? Ook hier biedt inflatietheorie de oplossing doordat de inflatie de dichtheid precies bij de kritische dichtheid bracht.
 - 3) Donkere materie en donkere energie: Door te kijken naar hoe sterrenstelsels bewegen en hoe snel het heelal expandeert weet men dat er veel meer massa en energie is dan we kunnen zien in zichtbare straling. Deze massa en energie heet daarom donker. Het probleem is dus dat we geen goed idee hebben wat deze massa en energie precies inhouden; wel zijn er kandidaten voor.



Figuur 6.1: Het transformeren van de impuls van B in het ruststelsel van A met de snelheid van A.

- (a) We kiezen een coördinatenstelsel met de x -richting als richting van de bundel (dus de richting van de impuls van het deeltje A in het laboratorium-stelsel) en y loodrecht daarop zodat de verval binnen het x - y -vlak ligt. Verder wordt $c = 1$ gesteld. Wegens impulsbehoud moet uiteraard in het ruststelsel van A de impulsen van beide B deeltjes tegengesteld zijn. Dit impliceert ook dat beide deeltjes evenveel energie hebben in het ruststelsel van A. In formule:

$$\vec{p}_A^* = \vec{0} = \vec{p}_{B1}^* + \vec{p}_{B2}^* \Rightarrow \vec{p}_{B1}^* = -\vec{p}_{B2}^* \equiv \vec{p}_B^* \quad (6.1)$$

$$\Rightarrow E_{B1}^* = E_{B2}^* \equiv E_B^* \quad (6.2)$$

$$E_A^* = M = E_{B1}^* + E_{B2}^* = 2E_B^* \Rightarrow E_B^* = \frac{1}{2}M \quad (6.3)$$

Bovendien geldt wegens $E^2 = m^2 + p^2$:

$$p_B^* \equiv |\vec{p}_B^*| = \sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - m^2} \quad (6.4)$$

Om de richting van de impuls te bepalen moeten we een Lorentz-transformatie maken. We stellen dat θ^* de hoek tussen \vec{p}_{B1}^* en de richting van de bundel is.

Wij kijken naar een van de twee deeltjes. Wij hebben:

$$p_{B1,x}^* = p_B^* \cdot \cos \theta^* \quad (6.5)$$

en

$$p_{B1,y}^* = p_B^* \cdot \sin \theta^*. \quad (6.6)$$

Omdat de deeltjes op de cirkelstraal belanden willen we de hoek van de deeltjes met de deeltjesbundel in het laboratoriumstelsel maximaliseren. De impuls van B in het laboratoriumstelsel wordt na de Lorentztransformatie:

$$p_{B1,x} = \gamma(p_B^* \cdot \cos \theta^* + \beta E_B^*) \quad (6.7)$$

en

$$p_{B1,y} = p_B^* \cdot \sin \theta^*. \quad (6.8)$$

Hierbij is $\beta = V/c$ de snelheid van de A deeltjes en $\gamma = (1 - \beta^2)^{-(1/2)}$.

Voor de hoek tussen de impuls van deeltje één en de x -as geldt dan na de transformatie:

$$\tan \theta = \frac{p_{B1,y}}{p_{B1,x}} = \frac{\sin \theta^*}{\gamma \left(\cos \theta^* + \frac{\beta E_B^*}{p_B^*} \right)}. \quad (6.9)$$

We moeten nu het maximum van deze hoek bepalen:

$$\frac{d\theta}{d\theta^*} = 0 = \frac{\cos \theta^* \left(\cos \theta^* + \frac{\beta E_B^*}{p_B^*} \right) + \sin^2 \theta^*}{\gamma \left(\cos \theta^* + \frac{\beta E_B^*}{p_B^*} \right)^2}. \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow \cos \theta_{max}^* = -\frac{p_B^*}{\beta E_B^*}. \quad (6.11)$$

Invullen in vergelijking 6.9 levert:

$$\tan \theta_{max} = \frac{1}{\gamma \sqrt{\left(\frac{\beta E_B^*}{p_B^*} \right)^2 - 1}}. \quad (6.12)$$

Alle vervalssproducten komen op de fotoplaat binnen een ruimtehoek die bepaalt wordt door deze maximale hoek θ_{max} , dus de hoek bepaalt de straal van een cirkel waarin je alle deeltjes op de fotoplaat zal vinden.

- (b) Nu kijken we naar de vervaltijd. In het ruststelsel (dus in de *eigentijd*) was de vervaltijd τ . Tijddilatatie verandert de tijd in het laboratorium-stelsel naar:

$$t = \gamma \tau. \quad (6.13)$$

Binnen deze tijd legt het deeltje A een lengte l af (weer $c = 1$):

$$l = \beta c \tau = \beta \gamma c \tau = \beta \gamma \tau, \quad (6.14)$$

dus de afstand naar de fotoplaat is tijdens het verval:

$$a = d - l = d - \beta \gamma \tau. \quad (6.15)$$

De straal van de cirkel op de fotoplaat is dan:

$$r = a \tan \theta_{max} = (d - \beta \gamma \tau) \tan \theta_{max} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta \gamma} \left(d - \frac{r}{\tan \theta_{max}} \right) \quad (6.17)$$

Hierbij weten we uit de standaardformules natuurlijk dat $\gamma = E/M$ en $\beta = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{E^2}}$. Alles invullen levert nu:

$$\Rightarrow \tau = d \left[\frac{1}{\beta \gamma} - \frac{r}{d} \sqrt{\left(\frac{E_B^*}{p_B^*} \right)^2 - \frac{1}{\beta^2}} \right]. \quad (6.18)$$

Voor we iets uitrekenen moeten we natuurlijk nog door c delen:

$$\Rightarrow \tau = \frac{d}{c} \left[\frac{1}{\beta \gamma} - \frac{r}{d} \sqrt{\left(\frac{E_B^*}{p_B^*} \right)^2 - \frac{1}{\beta^2}} \right]. \quad (6.19)$$

- (c) Met de waarden van boven vinden we na nauwkeurig rekenwerk: (merk op dat het niet nodig is de lichtsnelheid te gebruiken om de massas en energieën om te rekenen)

$$\tau \approx 1.7 \text{ ns.} \quad (6.20)$$



De Nederlandse Natuurkundige Vereniging komt op voor de positie van de natuurkunde en behartigt de belangen van natuurkundigen en natuurkundestudenten. De NNV steunt activiteiten van studenten, zoals buitenlandse reizen en symposia, maar ook PION.

In deze tijd waarin bijvoorbeeld het natuurkunde-onderwijs op de middelbare school onder druk staat, is een sterke vereniging van natuurkundigen geen overbodige luxe.

Word daarom lid!

Studenten betalen slechts 10 euro per jaar en als je tweedejaars student bent, is het lidmaatschap zelfs 1 jaar gratis. Als lid van de NNV ontvang je elke maand het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN) en krijg je korting op het jaarlijkse FYSICA-congres. Zo blijf je dus op de hoogte van ontwikkelingen binnen de wereld van de natuurkunde en krijg je een beeld van wat jouw mogelijkheden als natuurkundige later zullen zijn.

Kijk voor meer informatie op www.nnv.nl.

Opsturen naar: Bureau NNV, Postbus 41882, 1009 DB Amsterdam



Aanmeldingsformulier Nederlandse Natuurkundige Vereniging

Achternaam: Voorvoegsels:

Voorletters: Voornaam: Titels: M / V

Adres:

Postcode + Plaats: Geboortedatum: / / 19

Telefoon privé / mobiel: / 06 -

Emailadres:

Begindatum studie: / / Opleidingsinstelling:

lid van de Vereniging voor Biofysica / KIVI / KNCV:

Ja / Nee*

lid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap:

Ja / Nee*

lid van de Nederlandse Astronomenclub:

Ja / Nee*

lid van de Belgische Natuurkundige Vereniging:

Ja / Nee*

lid van de Ned. Ver. voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen:

Ja / Nee*

* Voor gecombineerd lidmaatschap met bovengenoemde verenigingen geldt voor niet-studenten een reductieregeling.

meldt zich aan als lid van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging en meldt zich tevens aan als lid van de volgende secties¹ (maximaal vier):

Datum: Handtekening:

¹ Secties: Astrofysica (AF), Atomaire, Moleculaire en Optische Fysica (AMO), Biofysica (BF), Grondslagen der Natuurkunde (GN), Hoge-energiefysica (HF), Halfgeleiders (HG), Kernfysica (KF), Ned. Ver. voor Kristalgroei (NVKG), Ned. Keramische Ver. (NKV), Natuurkunde en Maatschappij (NM), Ned. Ver. voor Neutronenverstrooiing (NVNV), Ned. Ver. voor Massaspectroscopie (MS), Onderwijs & Communicatie (OC), Oppervlakken en Dunne lagen (OD), Optica en Fotonica (OF), Plasma- en Gasontladingsfysica (PG), Ned. Ver. voor Kristallografie (VK)

(a) Dit is het gevolg van een drukdaling in de kist gedurende een bepaalde periode na het sluiten.

(b) Stel de totaaldruck, permanente gasdruk en waterdampdruk in de vrieskist op het moment van sluiten voor door respectievelijk p_1 , $p_{1;perm}$ en $p_{1;H_2O}$. Dan is de permanente gasdruk op moment van sluiten: $p_{1;perm} = p_1 - p_{1;H_2O} = 105 - 210 = 9,98 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

Voor permanente gassen geldt de ideale gaswet formule $pV = n_mRT$ waarin p = druk van het gas (Pa), V = volume van het gas (m^3), n_m = aantal beschouwde mol gas, R = universele gasconstante ($= 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$) en T = heersende temperatuur in het gas (K). Bij constant volume V levert dit: $p/T = \text{constant}$.

Hieruit volgt $p_{1;perm}/T_1 = p_{2;perm}/T_2$, dus $9,98 \cdot 10^4 / 268 = p_{2;perm} / 253$ waaruit we concluderen $p_{2;perm} = 9,42 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. De dampdruk waterdamp bij -20°C is $p_{2;H_2O} = 100 \text{ Pa}$. Dus de totaaldruck bij -20°C is: $p_2 = 9,42 \cdot 10^4 + 100 = 9,43 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. Onderdruk 1 minuut na sluiten van de kist is dus $10^5 - 9,43 \cdot 10^4 = 5,7 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ ($= 57 \text{ mbar}$).

(c) Indien géén rekening wordt gehouden met de aanwezigheid van waterdamp: $p_1/T_1 = p_2/T_2$, dus $105/268 = p_2/253$ waaruit we concluderen $p_2 = 9,44 \cdot 10^4 \text{ Pa}$. De onderdruk is dus $5,6 \cdot 10^3 \text{ Pa}$.

Conclusie: Aanwezigheid van waterdamp in de omgeingslucht heeft geen significante invloed op uitkomst onder punt b.

(d) Uit (b) en (c) volgt: Onderdruk in kist 1 minuut na sluiten ca. $5700 \text{ Pa} = 5700 \text{ N/m}^2$. Oppervlak deksel $40 \cdot 80 = 3200 \text{ cm}^2 = 0,32 \text{ m}^2$. Dus de kracht op deksel 1 minuut na sluiten is $0,32 \cdot 5700 = 1824 \text{ N}$ ($\approx 186 \text{ kgf!}$).

(e) Na het sluiten van het deksel duurt het enige tijd (ca. 1 minuut) voordat de lucht daadwerkelijk afgekoeld is. In die periode daalt de druk in de vrieskist al wel, maar is er een relatief grote inlek langs het dekselrubber mogelijk die de drukdaling voor een belangrijk deel compenseert. Naarmate de druk verder daalt en de kracht op het deksel groter wordt, zal het dekselrubber beter gaan afdichten en de druk sneller dalen.

(f) Mogelijke voorziening: Breng op de kist een ventiel aan dat bij onderdruk lucht inlaat. Het ventiel mag niet dichtvriezen, de ingelaten lucht moet dus droog zijn en derhalve op de een of andere manier worden gefilterd.

De oplossing die bij het antwoord op (f) gegeven wordt, is in de praktijk goed toepasbaar. Er zijn commerciële diepvrieskisten die van deze techniek gebruik maken. Zie hiervoor het volgende voorbeeld:

StopFrost is een typische Liebherr innovatie en standaard op Liebherr diepvrieskisten.

Wanneer het deksel van de vrieskist wordt gesloten ontstaat in eerste instantie overdruk in de vrieskist. Direct daarna wordt de warme lucht die de vrieskist is binnengestroomd sterk afgekoeld, waardoor deze lucht minder plaats inneemt. Er ontstaat onderdruk. Dit merkt u doordat u het deksel na sluiting niet direct kunt openen.

Met StopFrost is dit probleem verholpen. De warme lucht die in de vrieskist is gekomen wordt op het moment dat in de kist overdruk is ontstaan, door een ventiel in het deksel naar buiten geblazen. Als daarna onderdruk ontstaat wordt door hetzelfde ventiel weer lucht naar binnen gezogen. Deze lucht wordt echter via een droogpatroon geleid zodat er geen vocht in de vrieskist komt.

Bron: <http://www.liebherr-koelen-vriezen.nl/>

(a) We bewijzen dat de tijdsafgeleide 0 is d.m.v. de zwaartekrachtswet. Bovendien is het $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \frac{\vec{p} \times \vec{p}}{m} + \frac{k}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0 \quad (8.1)$$

(b) Hetzelfde schema, nu gebruikmakend van de hint.

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \frac{mk}{r^2} \vec{r} \vec{r} - \frac{mk}{r} \dot{\vec{r}} = -\frac{k}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p}) + \frac{mk}{r^3} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - \frac{k}{r} \vec{p} \quad (8.2)$$

$$= -\frac{k}{r^3} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} + \frac{k}{r} \vec{p} + \frac{k}{r^3} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{k}{r} \vec{p} = 0 \quad (8.3)$$

(c) Let hierbij op het feit dat het uitproduct tussen twee evenwijdige vectoren nul is, alsmede het inproduct tussen twee vectoren die loodrecht op elkaar staan. Bovendien geeft een uitproduct een vector die loodrecht staat op beide invoervectoren. $\vec{p} \times \vec{L}$ staat dus loodrecht op \vec{L} en daarom is $(\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{L}$ gelijk aan nul. Analoog:

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{L} - \frac{mk}{r} \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad (8.4)$$

(d) Hierbij dien je eerst de vectoridentiteit $(\vec{r} \times \vec{p})^2 = p^2 r^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2$ af te leiden; hetgeen niet moeilijk is door ofwel indexnotatie te gebruiken of te gebruiken dat $\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \alpha$ en $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$ met α de hoek tussen de vectoren.

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p})) \cdot \vec{r} - mkr = p^2 r^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2 - mkr = L^2 - mkr \quad (8.5)$$

Hierna is de afleiding een kwestie van slim invullen, om aan het gevraagde formaat te doen:

$$r = \frac{L^2 - \vec{A} \cdot \vec{r}}{mk} = a(1 - \varepsilon^2) - r\varepsilon \cos \theta, \quad (8.6)$$

Hieruit volgt direct de gevraagde vergelijking: $r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta}$

(e) Dit is wat schrijfwerk. We beginnen uiteraard met $r^2 = x^2 + y^2$ en $\cos \theta = \frac{x}{r}$. Dan is het makkelijker met vergelijking 8.6 te starten:

$$r = a(1 - \varepsilon^2) - \varepsilon x \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2 x^2 - 2a(1 - \varepsilon^2)\varepsilon x \quad (8.7)$$

$$(x + \varepsilon a)^2 - a^2 \varepsilon^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = a^2(1 - \varepsilon^2) \quad (8.8)$$

Door de definitie van $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ te gebruiken zijn we dan direct bij het gevraagde resultaat: $\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(f) Als tussenresultaat merken we op dat

$$\vec{L} \times \vec{A} = L^2 \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{L}) \vec{L} + \frac{mk}{r} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} - mkr \vec{p} \quad (8.9)$$

Nu kunnen we dit direct gebruiken om $\vec{p} - \vec{p}_0$ te berekenen:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{p} - \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{L}}{L^2} \vec{L} + \frac{mk}{L^2 r} (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{r} - \frac{mkr}{L^2} \vec{p} \quad (8.10)$$

We kunnen nu de identiteit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ de andere kant op gebruiken en zien daarom de gevraagde vergelijking in:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \frac{mk}{L^2 r} \vec{L} \times \vec{r}. \quad (8.11)$$

- (g) Nogmaals gebruikmakend van $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ en bovendien opmerkend dat \vec{L} loodrecht op \vec{r} staat geeft dit direct de vergelijking:

$$|\vec{p} - \vec{p}_0|^2 = \left(\frac{mk}{L}\right)^2. \quad (8.12)$$

- (h) Het punt het dichtste bij de zon ligt uiteraard op de lange as. Daarom wordt hier gevraagd te bewijzen dat op dit punt \vec{A} parallel aan \vec{r} ligt. Verder staat op het perihelium wegens symmetrie ook nog $\dot{\vec{r}} = \vec{p}/m$ loodrecht op \vec{r} . Dit opmerkend volgt, weer gebruikmakend van de als hint gegeven identiteit bij b:

$$\vec{A} \times \vec{r} = (\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p})) \times \vec{r} = 0 \quad (8.13)$$

- (i) Het doel is een relatie te vinden tussen E , \vec{A} en \vec{L} . Aangezien we met scalairen werken is het een goed idee \vec{A}^2 en \vec{L}^2 uit te rekenen:

$$\vec{A}^2 = \left[(p^2 - \frac{mk}{r}) \vec{r} - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{p} \right] \cdot \left[(p^2 - \frac{mk}{r}) \vec{r} - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{p} \right] = \quad (8.14)$$

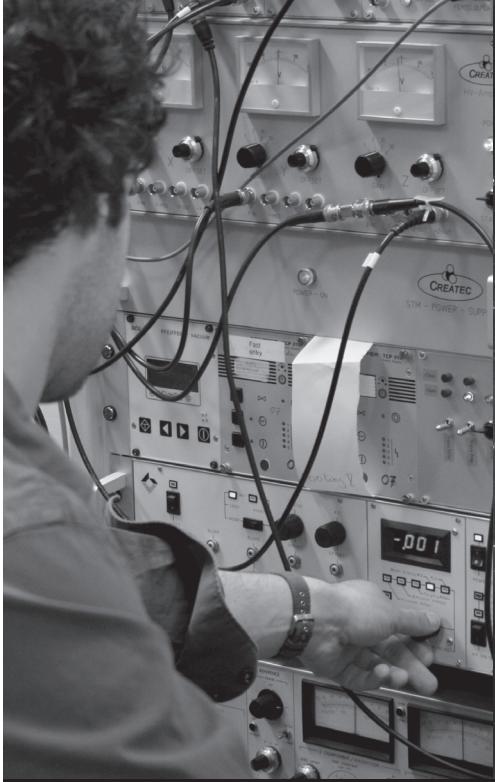
$$(p^2 r - mk)^2 + (\vec{p} \cdot \vec{r})^2 p^2 - 2(p^2 - \frac{mk}{r})(\vec{p} \cdot \vec{r}) \quad (8.15)$$

$$\vec{L}^2 = p^2 r^2 - (\vec{p} \cdot \vec{r})^2 \quad (8.16)$$

We kunnen kijken naar het speciale geval waar \vec{p} en \vec{r} loodrecht op elkaar staan. Dit kan ons een goed idee geven waar de oplossing gezocht moet worden. We hebben nu 3 vergelijkingen om r en p te elimineren. Dit kan handig met de volgende observatie.

$$A^2 = p^4 r^2 + m^2 k^2 - 2p^2 mkr = m^2 k^2 + p^2 r^2 (p^2 - \frac{2mk}{r}) = m^2 k^2 + 2mEL^2 \quad (8.17)$$

Hierna zien we bovendien ook direct in dat als $\vec{p} \cdot \vec{r} \neq 0$ bovenstaande relatie ook geldt en daarom is dus E niet afhankelijk van A en L .



BIJ DE UVA MAAK JE WERK VAN JE MASTER

Kiezen voor een bètamaster aan de Universiteit van Amsterdam betekent kiezen voor een inspirerende master. Want wat de UvA-wetenschappers vandaag over hemel en aarde ontdekken, daarover geven zij morgen college.

Natuur- en sterrenkundig onderzoek aan de UvA

Het natuur- en sterrenkundig onderzoek aan de UvA vindt plaats binnen vier onderzoeksinstituten gespecialiseerd in experimentele natuurkunde, theoretische natuurkunde en sterrenkunde. De instituten hebben een sterke reputatie op het gebied van onder meer: astrofysica, elementaire deeltjesfysica, kosmische neutrino's, snaartheorie, gecondenseerde materie, quantumgassen en atoomoptica.

Onderwijs door toponderzoekers

Als je instroomt in een master binnen natuur- en sterrenkunde aan de UvA dan kun je college krijgen van toponderzoekers als Descartesprijs-winnaar Ed van den Heuvel (sterrenkunde), Spinozapremie-winnaars Michiel

van der Klis (sterrenkunde) en Robbert Dijkgraaf (mathematische fysica). Bovendien zal internationaal toponderzoeker Nicolai Reshetikhin van de University of California in Berkeley vanaf voorjaar 2008 een college verzorgen binnen de master Mathematical Physics.

Masters in Physics

De masters binnen natuur- en sterrenkunde aan de UvA duren twee jaar en zijn Engelstalig. Een aantal masters wordt verzorgd in samenwerking met de Vrije Universiteit Amsterdam.

- Astronomy and Astrophysics
- Mathematical Physics
- Particle and Astroparticle Physics
- Physical Sciences
 - Condensed Matter Science
 - Quantum Atom Optics
 - Biophysics
 - Biomedical Physics
 - Molecular Photoscience
 - Computational Physics and Chemistry
- Theoretical Physics

Prof. dr. Robbert Dijkgraaf
Hoogleraar Mathematische
fysica aan de UvA



'Onze bètafaculteit is the place to be. Je krijgt geen duffe logaritmesommetjes, maar leert al snel om na te denken over de lekkere hapjes in de wis- en natuurkunde en komt in aanraking met het nieuwste onderzoek. Het zijn immers de twintigers die in de bètawetenschappen voor de grote doorbraken zorgen.'

Voor meer informatie:
www.studeren.uva.nl/science-masters



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

- (a) Het \vec{E} -veld wordt gegeven door $-\frac{V_0}{d} \cos(\omega t) \hat{z}$. Uit symmetrie volgt dat $\vec{B} \propto \hat{\phi}$. Integratie over cirkel, parallel aan platen, met straal r geeft de volgende uitdrukking voor de lijnintegraal van het \vec{B} -veld:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Beide kanten uitwerkend volgt hieruit:

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 \epsilon_0 \pi r^2 \frac{V_0 \omega}{d} \sin(\omega t)$$

Hieruit concluderen we dat $\vec{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega}{2d} r \sin(\omega t) \hat{\phi}$.

- (b) $V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ met $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega}{2d} a^2 r \sin(\omega t)$ (integratie over stroomkring). Dit geeft:
 $V_{ind} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{2d} a^2 r \cos(\omega t)$

- (c) In dit geval hebben we door de rotatie van de stroomkring: $\Phi = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega}{2d} a^2 r \sin(\omega t) \cos(\omega t)$. Hieruit volgt dat:

$$V_{ind} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{2d} a^2 r (\cos(\omega t)^2 - \sin(\omega t)^2) = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{2d} a^2 r \cos(2\omega t)$$

De frequentie verdubbeld dus, maar de amplitude, d.w.z. de maximale waarde, blijft gelijk.

In het geval de stroomkring niet in fase ronddraait met de oscilloscoop, wordt de flux uiteraard gegeven door $\Phi = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega}{2d} a^2 r \sin(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$. Via standaard geometrische formules is dit te herleiden tot $\Phi = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega}{4d} a^2 r (\sin(2\omega t + \varphi) - \sin(\varphi))$. De translatie van Φ valt weg door het differentiëren en we zien dat V_{ind} slechts met dezelfde fasefactor verschuift en dat de amplitude en frequentie niet verandert.

- (d) In dit geval hebben we door de snellere rotatie van de stroomkring: $\Phi = \frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega}{2d} a^2 r \sin(\omega t) \cos(2\omega t)$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} V_{ind} &= -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{2d} a^2 r (\cos(\omega t) \cos(2\omega t) - 2 \sin(\omega t) \sin(2\omega t)) \\ &= -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{2d} a^2 r \cos(\omega t) (\cos(\omega t)^2 - \sin(\omega t)^2 - 4 \sin(\omega t)^2) \\ &= -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{2d} a^2 r \cos(\omega t) (1 - 6 \sin(\omega t)^2) \end{aligned}$$

Het antwoord $V_{ind} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{4d} a^2 r (3 \cos(3\omega t) - \cos(\omega t))$ is ook goed.

Hieruit concluderen we dat de frequentie gelijk is aan die bij onderdeel (b) (geen verdubbeling!).

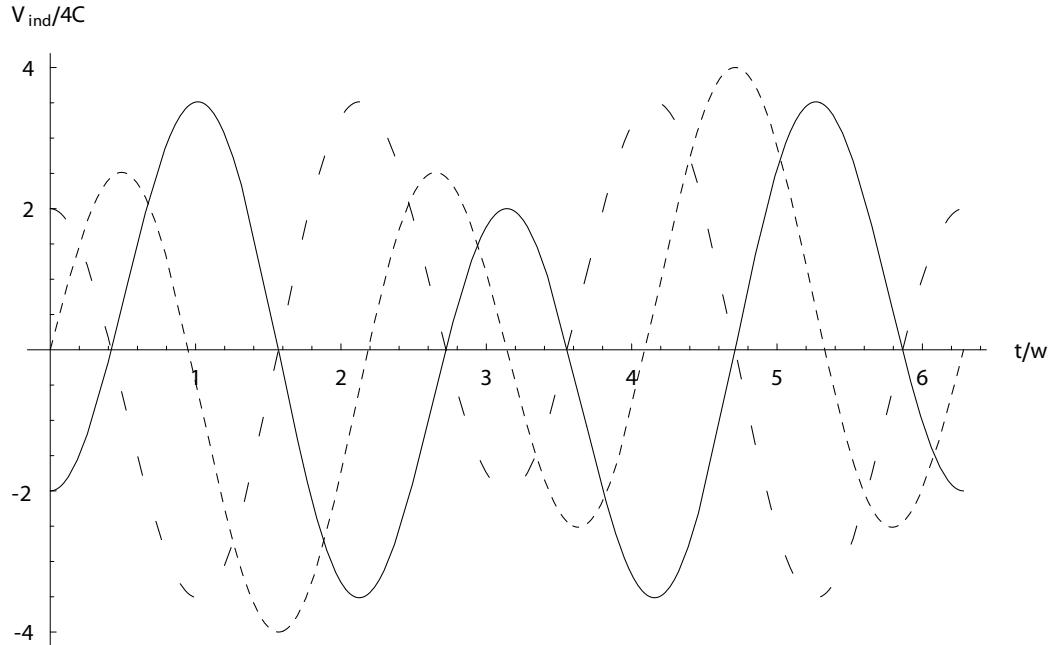
De maximale waarde is bij een punt waar de absolute waarde van $\cos(t)(1 - 6\sin(t)^2)$ maximaal is. Dit is het geval als $-\sin(t)(1 - 6\sin(t)^2) - 12\cos(t)^2\sin(t) = 0$.

Dit is precies het geval als $\sin(t) = 0$ of $6\sin(t)^2 - 12\cos(t)^2 - 1 = 5 - 18\cos(t)^2 = 0$. In het eerste geval hebben we $|\cos(t)(1 - 6\sin(t)^2)| = 1$ en het tweede geval $|\cos(t)(1 - 6\sin(t)^2)| = \sqrt{\frac{5}{18}}|\frac{5}{3} - 5| = \frac{10}{3}\sqrt{10} = \frac{5}{9}\sqrt{10} \approx 1.76$. De amplitude neemt dus met een factor 1.76 toe.

Als we nu de fasefactor weer introduceren zien we dat V_{ind} verandert in

$$V_{ind} = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 V_0 \omega^2}{4d} a^2 r (3\cos(3\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi)) \quad (9.1)$$

De frequentie blijft dus weer gelijk. Interessant is nu, dat als $\varphi = \pi/2$ het maximum gelijk is aan 2 keer de oorspronkelijke amplitude. De amplitude verandert dus door de faseverschuiving. In het algemeen is de amplitude niet algebraïsch op te lossen. In dit geval is de plot interessant. Hieronder is de grafiek geplot voor fases van 0, $\pi/2$ en π .



Figuur 9.1: V_{ind} tegen de tijd uitgezet.

- (a) Volgens het onzekerheidsprincipe is er een relatie tussen de onzekerheid in energie en de onzekerheid in tijd. Aangezien het deeltje virtueel is, moet dus ongeveer gelden dat $\Delta E \approx \frac{\hbar}{2\Delta t}$. Hierbij is ΔE de energie van het deeltje en Δt de tijd dat het deeltje bestaat. Volgens de bekende relativistische formule geldt: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ en uiteraard is de draagkracht gelijk aan $r = v\Delta t$. v zal per deeltje verschillen. De maximale afstand vinden we nu door r te differentiëren naar v om zodoende het maximum van r te bepalen. Dit geeft dan:

$$r \approx \frac{\hbar}{4mc}$$

- (b) Aangezien nu snelheid en impuls niet op de gebruikelijke manier van elkaar afhangen, is het mogelijk dat het deeltje de rustenergie heeft en dan nog met de lichtsnelheid beweegt. Dit levert uiteraard een grotere dracht en men vindt snel dat:

$$r = c\Delta t \approx \frac{\hbar}{2mc}$$

- (c) Gebruikmakend van de cijfers in het probleem vindt men een massa van ongeveer $100 \text{ MeV}/c^2$ wat erg dichtbij de experimentele waarde van $140 \text{ MeV}/c^2$ ligt.

(a) De schatting van de massa.

Een zeepbel heeft vele kleuren in de zon. De kleuren zijn het gevolg van interferentie van licht dat terugkaatst van de buiten-, resp. de binnenwand van de zeepbel. Wanneer het zeepvlies veel dunner is dan de golflengte van het licht dan zou het verschil in weglengte van de twee partiële golven niet kunnen leiden tot een significant verschil in uitdoving voor de verschillende golflengten van het licht. Wanneer het zeepvlies veel dikker zou zijn dan de golflengte van licht dan zouden diktevariatie leiden tot smalle kleurringen. We zien de kleuren echter geleidelijk over de bel veranderen, en hieruit kunnen we afleiden dat de bel een dikte heeft die vergelijkbaar is met de golflengte van zichtbaar licht. Dat wil dus zeggen dat de dikte d ongeveer 500nm bedraagt.

De massa van een zeepbel met een straal r is dan ongeveer gelijk aan $M = \rho 4\pi r^2 d$, waarin ρ de soortelijke massa van water is (103 kg/m^3). Voor een typische zeepbel met een straal van 5 cm is de massa dan ongeveer 16 mg. Dat is de hoeveelheid water in een druppel met een diameter van ongeveer 3 mm, dus dat klinkt redelijk.

(b) De methode. Mogelijke antwoorden voor deze opgave zijn:

- De schatting van de massa geeft direct al een benadering voor een echte meting. Je kunt de zeepbel belichten met een witte lichtbron en het gereflecteerde licht analyseren in een spectrometer. Uit de uitdoving van een band in het spectrum is de dikte van het zeepvlies af te leiden. De massa volgt dan met gebruikmaking van de bekende dichtheid van water. Merk op dat we dan de aanwezigheid van zeep verwaarlozen. De fout zal niet erg groot zijn omdat zeep slechts een enkel-molecuul dikke laag vormt aan binn en buitenzijde en omdat de dichtheid van zeep niet enorm verschilt van die van water.
- Een tweede benadering zou kunnen zijn om de wet van Archimedes te gebruiken. Vul een ruimte met een gas van bekende samenstelling, zeg zuurstof. Blaas de bel in de ruimte met behulp van een pijpje waarin je gas van een andere samenstelling (andere dichtheid) blaast. Varieer dan de samenstelling van het gas totdat de bellen in de ruimte blijven zweven op vaste hoogte, dus totdat de opwaartse kracht van het gas de zwaartekracht compenseert.

Een bel met een straal r heeft een massa van het zeepvlies van $M = \rho 4\pi r^2 d$, en een volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. De massa van het omsloten gas is dan $m_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g$, waarin ρ_g de dichtheid van het gas is. De bel blijft zweven wanneer de massa van het vlies gecompenseerd wordt door het verschil in massa van het omsloten gas met dat van het omgevingsgas van even groot volume, $M = \Delta m_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \Delta \rho_g$.

De dichtheid van een gas kunnen we schatten uit de ideale gaswet, $\frac{N}{V} = \frac{P}{k_b T}$. Bij 1 atmosfeer (10^5 N/m^2) en bij kamertemperatuur (300 K) hebben we met $k_b = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ dus $2.4 \cdot 10^{25}$ deeltjes per kubieke meter. De molecuulmassa van zuurstof, O_2 , bedraagt 32 g/mol. Een mol is ongeveer $6 \cdot 10^{23}$ deeltjes, dus de dichtheid van stikstofgas is ongeveer $(32/(6 \cdot 10^{23})) \cdot 2.4 \cdot 10^{25} \approx 1.28 \text{ kg/m}^3$.

De geschatte massa van de zeepbel is 16 mg. De massa van het stikstofgas binnen het totale volume van de bel is veel groter. Het volume, weer uitgaande van een bel met

een straal van 5cm, is ongeveer 524cm^3 . Het verschil in dichtheid dat dan nodig is voor evenwicht is $\Delta\rho_g = \frac{M}{V}$ ofwel 0.03kg/m^3 . Voor een nauwkeurige meting kun je dus het best een gas kiezen dat maar weinig lichter is dan zuurstof, en stikstof leent zich hier dan prima voor. De massa van stikstof is 28g/mol . Onze bel zou dus zweven bij een concentratie x zuurstof, met $\rho_g = (1-x)\rho_Z + x\rho_S$, waarin het subscript S en Z staan voor stikstof resp. zuurstof, en $\Delta\rho_g = \rho_Z - \rho_g$.

$$x = \frac{\Delta\rho}{\rho_Z} \frac{1}{1 - \frac{28}{32}} = \frac{\Delta\rho}{8}$$

We vinden dan $x = 0.188$, dus ongeveer 19%.

De nauwkeurigheid zal worden beïnvloed door de partile dampdruk van water ten gevolge van verdamping. De nauwkeurigheid zal daarom groter worden door in het gas al een verzadigde dampdruk van water aan te brengen.

Een groot nadeel van de methode is dat de balans sterk zal afhangen van de grootte van de gevormde zeepbel en deze is moeilijk te beheersen.

- Een laatste methode die we hier noemen is de eenvoudigste. Monteer de ring op een statiefje op een gevoelige balans, nadat deze in de zeepoplossing is gedoopt. Weeg het geheel voor en na het blazen van de zeepbel. De belangrijkste onnauwkeurigheid die zou kunnen ontstaan is het ongecontroleerd wegspatten van druppeltjes bij het loslaten van de bel. Een spatschermpje gemonteerd op dezelfde balans zou een deel hiervan kunnen afvangen. Door meting met en zonder spatschermpje kan een schatting van deze fout worden gemaakt.

- (a) We kiezen meedraaiende coördinaten zo dat de driehoek stil staat en het massamiddelpunt in de oorsprong ligt. Dan volgt dat:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = \vec{0} \quad (12.1)$$

De driehoeksconfiguratie is een evenwichtige driehoeksconfiguratie als in deze meedraaiende coördinaten geldt dat $\vec{a}_i := \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = 0$. We laten dit zien voor $i = 1$ en de andere twee gevallen volgen dan uit symmetrie van de berekeningen.

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\omega^2\vec{r}_1 + \frac{Gm_1m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_1m_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

Omdat gegeven is dat de driehoek gelijkzijdig is, geldt $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3 = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3 = R^3$. De m_1 wegdenen en de waarde van ω invullen geeft dan:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{R^3}\vec{r}_1 + \frac{Gm_2}{R^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_3}{R^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ &= \frac{G}{R^3}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 - m_2\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 - m_3\vec{r}_1) \\ &= \frac{G}{R^3}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3) = \vec{0} \end{aligned}$$

- (b) In dezelfde meedraaiende coördinaten als in (a), krijgen we:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= m_1\omega^2\vec{r}_1 + m_1m_2f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_1m_3f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ &= m_1f(R) \left(\frac{\omega^2}{f(R)}\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 - m_2\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 - m_3\vec{r}_1 \right) \end{aligned}$$

Om deze uitdrukking gelijk aan nul te krijgen moet gelden, na gebruik van 12.1:

$$\frac{\omega^2}{f(R)}\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_1 - m_3\vec{r}_1 = \vec{0}$$

In dit geval kan niet $\vec{r}_1 = 0$, omdat uit symmetrie van de formules dan ook moet gelden $\vec{r}_2 = \vec{r}_3 = 0$ en dan liggen de drie massa's op één lijn. Er moet dus gelden dat $\frac{\omega^2}{f(R)} = m_1 + m_2 + m_3$, waaruit het antwoord volgt:

$$\omega = \sqrt{f(R)(m_1 + m_2 + m_3)}$$

Omdat bij zwaartekracht geldt dat $f(R) = \frac{G}{R^3}$, komt hoeksnelheid die bij a1 gegeven was met ons antwoord overeen.

(c) In het stilstaande stelsel draaien de deeltjes als een star lichaam, dus er geldt:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (12.2)$$

Dit differentiëren geeft:

$$\vec{a}_i = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \vec{v}_i$$

De hoeksnelheid is constant, dus $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Opnieuw toepassen van formule 12.2 levert ons dan de volgende uitdrukking:

$$\vec{a}_i = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_i \quad (12.3)$$

Hierbij gebruikten we $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$. Merk op dat bij elke andere centrale kracht, in het bijzonder zwaartekracht, \vec{a}_i in het vlak van de drie massa's ligt. We moeten dus hebben dat óf $\vec{\omega}$ in het vlak van de drie massa's ligt óf dat $\vec{\omega}$ loodrecht op het vlak van de driehoek staat.

We laten zien dat de situatie met de as in het vlak van de driehoek onmogelijk is en daarvoor werken we in het meedraaiende stelsel, waarin er een schijnkracht is; de centrifugaalkracht. Als $\vec{\omega}$ in het vlak van de driehoek ligt, dan ligt er geen massa op de as. Stel namelijk dat dit wel zo was. De centrifugaalkracht dan nul voor deze massa. Deze kan duidelijk niet de aantrekende centrale krachten van de twee andere massa's opheffen, dus is dit geen evenwichtige driehoeksconfiguratie.

Omdat het massamiddelpunt binnen de driehoek ligt en de as door het massamiddelpunt gaat, liggen aan één kant van de as twee massa's en andere kant één massa. Voor de twee massa's geldt dat er minstens één is zodat de loodlijn van het massa naar de as niet in de driehoek bevatt is. De centrifugaalkracht ligt op deze lijn en de som van de twee centrale krachten die twee andere deeltjes uitoefenen moet deze centrifugaalkracht opheffen, als de driehoeksconfiguratie evenwichtig is. De som van de krachten op deze massa ligt dus niet naar de binnenkant van de driehoek gericht (zie figuur 12.1).

Echter, een aantrekende centrale kracht zoals zwaartekracht heeft de eigenschap dat de som van de krachten op elke massa naar de binnenkant van de driehoek gericht is. Dit is in tegenspraak met het bovenstaande, dus de as kan niet in het vlak van de driehoek liggen.

De tweede mogelijkheid moet dus gelden: de as staat loodrecht op het vlak van de driehoek.

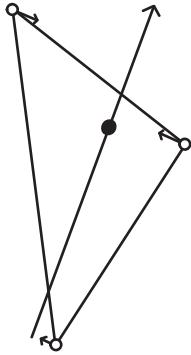
(d) Uit formule 12.3 volgt nu dat in het stilstaande stelsel geldt:

$$\vec{a}_i = -\omega^2 \vec{r}_i$$

Omdat de massa's niet op één lijn liggen, is het niet zo dat \vec{r}_1 , \vec{r}_2 en \vec{r}_3 allemaal veelvouden van elkaar zijn. Er is dus minstens één massa, zeg massa 1, zodat $\vec{r}_1 \neq \alpha \vec{r}_2$ en $\vec{r}_1 \neq \beta \vec{r}_3$ voor constanten α, β . Dit zal later belangrijk worden.

Als we de zwaartekracht invullen volgt hieruit voor massa 1:

$$\frac{Gm_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = -\omega^2 \vec{r}_1$$



Figuur 12.1: Een voorbeeld van een driehoeksconfiguratie met de as in het vlak van de driehoek. Het is duidelijk dat niet alle centrifugaalkrachten naar de binnenkant van de driehoek gericht zijn.

We gebruiken weer onze favoriete formule 12.1 om \vec{r}_3 uit de formule te halen. Hieruit volgt:

$$-\frac{\omega^2}{G} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - \frac{m_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \vec{r}_1 - \frac{m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \vec{r}_2$$

De termen bij \vec{r}_1 en \vec{r}_2 verzamelen levert dan:

$$\left(-\frac{\omega^2}{G} + \frac{m_1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} + \frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{m_3}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \right) \vec{r}_1 = \left(\frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} \right) \vec{r}_2$$

Omdat $\vec{r}_1 \neq \alpha \vec{r}_2$ moeten beide kanten van de uitdrukking gelijk aan nul zijn. Uit de rechterkant volgt dan dat:

$$\frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} = 0$$

Hieruit concluderen we dat $\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\| = R$. Uit het invullen van de versnelling van massa 2 en daar ook \vec{r}_3 vervangende krijgen we uit symmetrie $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\| = R$. De driehoek is dus gelijkzijdig met zijden van lengte R .

Als we dit invullen in de linkerkant krijgen:

$$-\frac{\omega^2}{G} + \frac{m_1}{R^3} + \frac{m_2}{R^3} + \frac{m_3}{R^3} = 0$$

Hieruit concluderen we dat $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{R^3}$.

- (e) Merk op dat we bij opgave (c) alleen gebruik hebben gemaakt van het feit dat zwaartekracht een centrale aantrekkende kracht. Hieronder valt ook onze algemene krachtwet. Deze opgave hebben we dus eigenlijk al bij (c) opgelost.
- (f) Deze opgaven gaan analoog aan (d). Hier geldt weer dat $\vec{a}_i = -\omega^2 \vec{r}_i$ en dat voor minstens één massa, zeg massa 1, geldt dat $\vec{r}_1 \neq \alpha \vec{r}_2$ en $\vec{r}_1 \neq \beta \vec{r}_3$. De krachtenwet invullen geeft:

Als we de zwaartekracht invullen volgt hieruit voor massa 1:

$$m_2 f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m_3 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = -\vec{\omega}^2 \vec{r}_1$$

Formule 12.1 gebruikende krijgen we dan:

$$m_2 f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - m_3 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)\vec{r}_1 - m_2 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)\vec{r}_2 - m_1 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)\vec{r}_1 = -\omega^2 \vec{r}_1$$

De termen bij \vec{r}_1 en \vec{r}_2 verzamelen levert dan:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - m_1 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|) - m_2 f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|) - m_3 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)) \vec{r}_1 = \\ (m_2 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|) - m_2 f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|)) \vec{r}_2 \end{aligned}$$

Omdat $\vec{r}_1 \neq \alpha \vec{r}_2$ moeten beide kanten van deze uitdrukking gelijk aan nul zijn. Uit de rechterkant volgt dan:

$$m_2 f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|) - m_2 f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|) = 0$$

Dus $f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|) = f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|)$ en omdat f injectief is, geldt dat $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = R$. Deze methode toepassen op massa 2 geeft ons verder dat $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| = \|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\| = R$, dus de driehoek is gelijkzijdig met zijden van lengte R .

Dit invullen in de linkerkant geeft ons vervolgens:

$$\omega^2 - m_1 f(R) - m_2 f(R) - m_3 f(R) = 0$$

Dus $\omega^2 = f(R)(m_1 + m_2 + m_3)$, hetgeen overeenkomt met het antwoord bij (b).

- (g) Stel dat f niet injectief. Dan zijn er twee waarden $R_1 \neq R_2 \neq 0$ zodat $f(R_1) = f(R_2) = C$. Deze afstanden R_1 en R_2 zullen we gebruiken om een driehoek te construeren die niet gelijkzijdig is, maar wel een evenwichtige driehoeksconfiguratie is. Kies de zijden $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = R_1$, $\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\| = R_2$. Deze driehoek is niet gelijkzijdig.

Kies ten eerste alle massa's gelijk, dus $m_1 = m_2 = m_3 := m$. Kies $\omega = \sqrt{C(m_1 + m_2 + m_3)} = \sqrt{3C}m$ en de rotatie as loodrecht op de driehoek door het massamiddelpunt. Als we kunnen laten zien dat $\vec{a}_i = -\vec{\omega}^2 \vec{r}_i$ voor elke massa, dan zijn we klaar.

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= m f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + m f(\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ &= mC(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + mC(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ &= mC(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - mC\vec{r}_1 - mC\vec{r}_2 - mC\vec{r}_1 \\ &= -mC\vec{r}_1 - mC\vec{r}_1 - mC\vec{r}_1 \\ &= -3Cm\vec{r}_1 = -\omega^2 \vec{r}_1 \end{aligned}$$

Dezelfde berekening werkt natuurlijk ook voor massa's 2 en 3, precies omdat $f(R_1) = f(R_2) = C$.

”Don’t ask yourself if it’s a long road. Ask yourself if it’s a good journey.”

Sidney Poitier

Bèta's op zoek naar meer dan boeiend werk, helpen we goed op weg.

Hewitt Associates is een wereldwijd opererende HRM Consulting en Outsourcings-organisatie met zo'n 23.000 mensen in meer dan veertig landen. In Nederland (350 collega's) helpen we onze klanten met actuariel advies, pensioenuitvoering en complete HRM-consultancy. We doen ons werk met passie, wat bij ons staat voor intellectuele uitdagingen, optimale kwaliteit en interessante klanten. Maar ook voor plezier in je werk, groei en een eigen koers.

We zijn een bedrijf waarvan je mag verwachten dat het weet wat mensen beweegt in hun werk en wat ze in een carrière zoeken. Daarom vind je hier geen verhaal over targets en hoe we telkens weer weten die te bereiken. De weg erheen vinden we veel belangrijker, omdat die het beste in mensen boven brengt. Bij Hewitt is dat een pad dat je in hoge mate zelf uitstippelt. En waar elke bestemming een nieuw begin is.

Ben jij afgestudeerd in een bétarichting? En heb je belangstelling voor pensioen- en actuariel advies? Zouden jouw adviezen ook miljoenen kunnen besparen? Ambieer je werk op een hoog analytisch niveau, waarin je alle ruimte krijgt om jezelf te ontwikkelen? En ben jij pas tevreden als de klant dat is? Dan is Hewitt voor jou de juiste optie.

We zijn voortdurend op zoek naar mensen die -net als wij- voor de beste kwaliteit gaan. Die persoonlijke en professionele groei belangrijk vinden. Die eigenzinnigheid combineren met teamgeest. En die hun eigen weg kiezen. We helpen jou op het carrièrepad dat aansluit op jouw talenten en ambities en we coachen je op de weg die je zelf uitzet. Bij ons vind je ruimte voor initiatief, continue uitdagingen, een informele cultuur én mogelijkheden om werken en studeren te combineren. Bij ons mag je, sterker nog, móet je jezelf zijn. Want pas dan haal je het beste uit jezelf. Pas dan ben je in staat om je eigen koers uit te zetten.

Meer informatie over de diverse functies bij Hewitt Associates vind je op www.hewitt.nl. Een brief met CV kun je sturen naar Hewitt Associates B.V., ter attentie van Linda Willemsen, afdeling Human Resources, postbus 12079, 1100 AB Amsterdam, of per mail naar nlpz@hewitt.com.

Hewitt

Kies je eigen weg bij Hewitt

Hewitt is gevestigd in Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam.