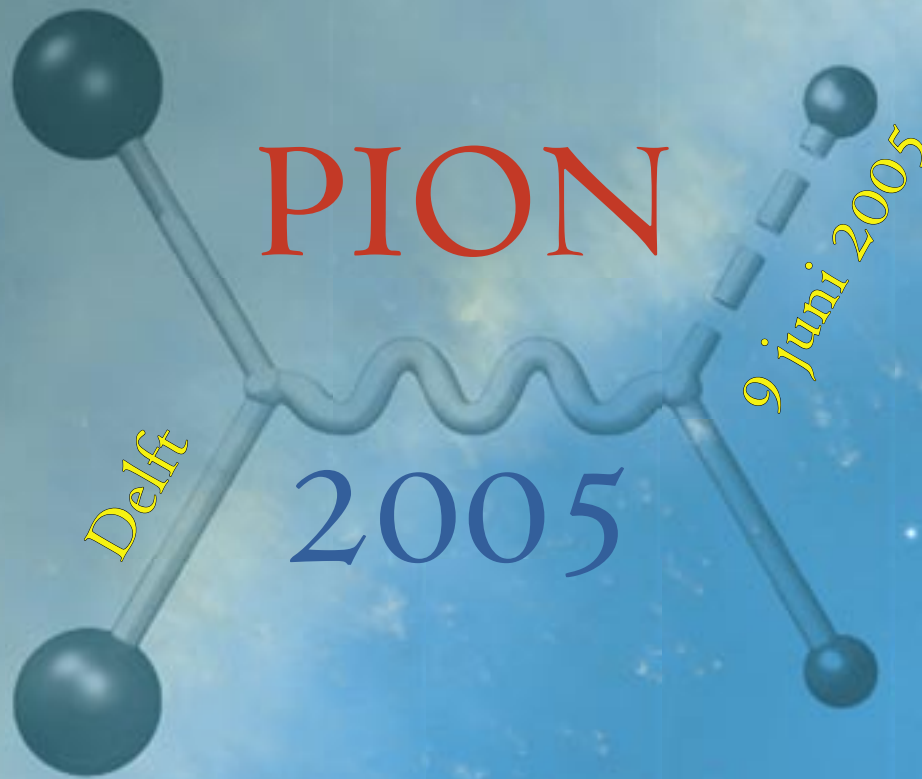


11^e Natuurkunde Olympiade voor 1^e, 2^e en 3^e jaars studenten

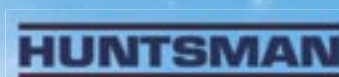


Uitwerkingen




hoofdsponsors:

PHILIPS



Stichting Physica





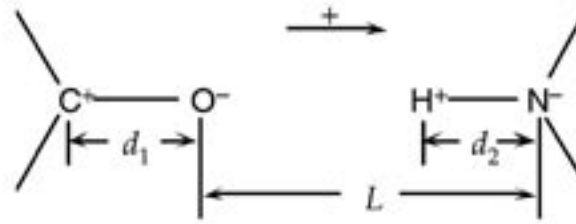
you'll help her share the latest news

touch lives every day

Elke dag weer komen miljoenen mensen over de hele wereld in aanraking met Philips producten. Of het nu gaat om de imposante verlichting in een vol voetbalstadion, de echo waarmee een moeder kennismaakt met haar nog ongeboren kindje, of de mobiele telefoon voor uitwisseling van de laatste nieuwtjes. Philips biedt alle kansen aan studenten die ook de drive hebben om het dagelijks leven van mensen positief te beïnvloeden.

Check daarom voor informatie over stages en banen www.philips.nl/werken

PHILIPS
sense and simplicity



We vinden de onderlinge kracht door de kracht te berekenen die de HN groep op de CO groep uitoefent. Een praktische numerieke factor is:

$$\frac{ke^2}{10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{nm}}^2} = \frac{9,0 \cdot 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{C}^2}{10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{nm}}^2} = 2,30 \cdot 10^{-10} \text{N nm}^2$$

$$\begin{aligned} F_o &= kQ_o \left[\left[\frac{Q_H}{(L-d_2)^2} \right]^2 - \frac{Q_N}{L^2} \right] = ke^2 f_{oH} \left[\left[\frac{1}{(L-d_2)^2} \right] - \frac{1}{L^2} \right] \\ &= 2,30 \cdot 10^{-10} \text{N nm}^2 (0,40)(0,20) \left[\left[\frac{1}{(0,28 \text{ nm} - 0,10 \text{ nm})^2} \right] - \frac{1}{(0,28 \text{ nm})^2} \right] = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{N} \\ F_c &= kQ_c \left[\left[\frac{Q_N}{(L-d_1)^2} \right]^2 - \frac{Q_H}{(L+d_1-d_2)^2} \right] = ke^2 f_{cN} \left[\left[\frac{1}{(L+d_1)^2} \right] - \frac{1}{(L+d_1-d_2)^2} \right] \\ &= 2,30 \cdot 10^{-10} \text{N nm}^2 (0,40)(0,20) \left[\frac{1}{(0,28 \text{ nm} + 0,12 \text{ nm})^2} - \frac{1}{(0,28 \text{ nm} + 0,12 \text{ nm} - 0,10 \text{ nm})^2} \right] = -8,94 \cdot 10^{-11} \text{N} \end{aligned}$$

Voor de netto kracht op de CO groep volgt nu:

$$F = F_o + F_c = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{N} - 8,94 \cdot 10^{-11} \text{N} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{N (aantrekkend)}$$

Het gedrag van de kracht kan als volgt worden bepaald.

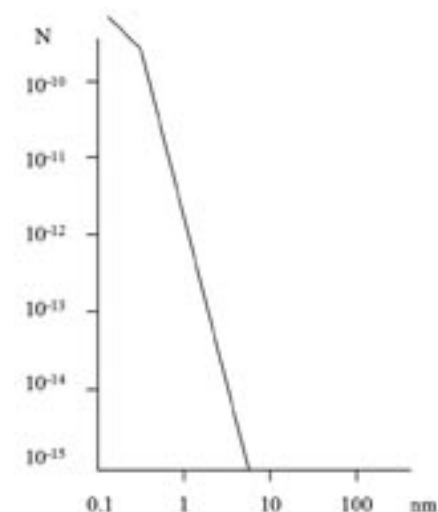
Het veld E van een dipool neemt af met $1/L^3$.

De kracht op een dipool is evenredig met dE/dL , dus in dit geval is F evenredig met $1/L^4$

Wanneer de O en H atomen erg dicht bij elkaar zijn, kan de invloed van de C en de N atomen nog steeds verwaarloosd worden, dus begint het als eenvoudige Coulomb aantrekking tussen de twee ladingen van O en H, dus is F evenredig met $1/(L - 0,1 \text{ nm})^2$.

We hebben een punt om de schaal te bepalen:

$$(L, F) = (0,28 \text{ nm}, 2,4 \cdot 10^{-10} \text{N})$$



De vergelijking voor een ideaal gas $PV = nRT$ betekent dat de kracht op het binnenoppervlak van de zuiger (met oppervlakte A) gegeven wordt door:

$$F = PA = \frac{nRT}{V}A = \frac{nRT}{AL(x)}A = \frac{nRT}{L(x)} = \frac{nRT}{L_0 + x}$$

Omdat de uitwijking x klein is, kunnen we de gegeven benadering gebruiken:

$$F = \frac{nRT}{L_0 + x} \approx \frac{nRT}{L_0} \left(1 - \frac{x}{L_0} \right) = \frac{nRT}{L_0} - \frac{nRT}{L_0^2} x$$

De eerste term geeft de eenvoudige evenwichtssituatie voor het geval $x = 0$. De tweede term is

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{nRT}{mL_0^2}} = \frac{1}{L_0} \sqrt{\frac{nRT}{m}}$$

daarentegen een terugnrijvende veer kracht $F = -kx$ met $k = nRT/L_0^2$. De hoekfrequentie van een massa-veer systeem wordt gegeven door de bekende formule:

Invullen van de gegeven waarden levert het antwoord op:

$$\omega = \frac{1}{L_0} \sqrt{\frac{nRT}{m}} = \frac{1}{0,1} \sqrt{\frac{10,8,31 \cdot (273+16)}{3,324}} = 850 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3 Licht

In onderstaande zal ik kwalitatieve antwoorden geven op de vragen en voornamelijk de gedachtegang achter de vragen proberen duidelijk te maken.

- a. Bij een Gaussische vorm van een puls moeten we nog afspraken wat we bedoelen met de lengte van de puls. Hiervoor zijn verschillende definities in omloop, gebruikelijk zijn de volledige breedte op halve hoogte, soms de halve breedte op halve hoogte of de bijbehorende grootheden bij waar de intensiteit van de puls is afgenomen tot $1/e$ van het maximum.

In alle gevallen geldt dat het genereren van een korte puls gepaard moet gaan met het toenemen van de spectrale inhoud, waarmee bedoeld wordt dat er steeds meer frequenties mee gaan doen. Wanneer twee frequenties meedoen (opgeteld worden) krijgen we een nieuwe golf, waarbij de verschilfrequentie zichtbaar wordt als een oscillatie (zweving) in de amplitude. Twee frequenties zijn duidelijk niet genoeg om een korte puls te maken. Om een Gaussische korte puls te maken, moet je een continuüm aan frequenties beschikbaar hebben rondom de centrale frequentie en wel zodanig dat de frequenties een verdeling kennen die uitgedrukt worden als een Gauss kromme. Deze combinatie biedt de kleinst mogelijke bandbreedte bij de kortst mogelijke puls.

Numeriek antwoord: 9,38 nm (Bij Gaussische puls geldt dat lengte in tijd (s) maal breedte in Hz (bandbreedte) = 0,44. Bandbreedte = 4,4 THz . De frequentie van de straling is $c/\lambda = 375 \text{ THz}$. Onzekerheid golflengte: $\lambda^* (4,4 / 375) \Rightarrow 9,38 \text{ nm}$

- b. De werking van een traliespectrometer berust op interferentie. De puls wordt na de ingangsspleet afgebeeld over zo veel mogelijk lijnen van de traliespectrometer. Bij een reflectiehoek die niet gelijk is aan de hoek van inval treden weglengte verschillen bij reflecties op de opeenvolgende lijnen van het tralie. De puls wordt als het ware bij zichzelf opgeteld met steeds een kleine vertraging. Afhankelijk van de hoek van reflectie (of beter de combinatie van de hoeken van inval en reflectie) geldt dat het weglengte verschil steeds

constructief is (van de geselecteerde golflengte) of niet perfect constructief, waardoor deze golflengtes veel minder intens zijn. Het rekken van de puls om optimale constructieve interferentie te krijgen is essentieel in het proces en verklaart meteen dat bij golflengte selectie ook een veel langere puls gemeten zal worden dan de inkomende 100 fs puls.

- c./d. Deze vraag is zeer moeilijk te beantwoorden. Er is een discussie mogelijk of het beste beeld is dat een femtoseconde puls bestaat uit fotonen waarvan de energie inhoud nog niet vastligt of dat een beter beeld is om diezelfde puls te zien als een verzameling fotonen met verschillende fotonenergieën $h\nu$ statistisch verdeeld over de bandbreedte. Kortom het antwoord op deze vraag is niet heel gemakkelijk. In het geval van golflengte selectie op een tralie geldt dat de energie die gemeten wordt aan de uitgangsspleet overeenkomt met de spectrale inhoud van de puls in dat golflengte gebied voor de spectrometer. Dat wil zeggen, het beeld waarin de spectrometer fotonen selecteert leidt niet tot tegenspraken. Het beeld van een foton dat interactie moet hebben met een macroscopisch tralie maakt verklaringen waarbij het golfkarakter domineert aantrekkelijker.
- e. Deze vraag is niet zo heel gemakkelijk te beantwoorden. Als we aannemen dat een korte puls bestaat uit een continuüm aan golflengtes (verdeeld met een Gaussische distributie), dan levert het absorberen van een golflengte het volgende beeld op:
We krijgen de originele korte puls terug door die ene golflengte met de goede amplitude erbij op te tellen. Met andere woorden, hieruit zou volgen dat de puls er als volgt uitziet: In het midden staat de bijna niet vervormde snelle 100 fs puls, maar ervoor en erna herkennen we een zwakke oscillatie van een elektrisch veld (een lichtgolf dus) met precies de frequentie en de vorm van de uitgefilterde straling, alleen vermenigvuldigd met -1.
Door nu bij deze puls met zogenoemde transients voor en na de geabsorbeerde monochromatische golf op te tellen verdwijnen de transients en houden we de snelle puls over. Het ongemakkelijke aan dit beeld is het feit dat absorptie van één frequentie uit een korte puls in een gas een pulsvorm oplevert met een vorm van straling die aan de puls vooraf gaat. Dit lijkt een aanslag te doen op het causaliteitsprincipe. En inderdaad, dit is niet wat gebeurt bij absorptie in een gas. De natuur moet een manier vinden om niet te botsen met het causaliteitsprincipe. De fysische beschrijving is de volgende:
Absorptie impliceert dat moleculen/atomen in het gas een foton opnemen. Vanwege de snelle puls gebeurt dit simultaan door alle moleculen/atomen. Door de bijna gelijktijdigheid vormen de aangeslagen atomen een bron van nieuwe straling (die niet verward moet worden met de spontane emissie ‘achteraf’). Afhankelijk van de exacte golflengte, net korter of net langer dan de centrale golflengte, trillen de oscillatoren in fase of net in tegen-fase met de drijvende kracht. Hierdoor door deze ‘fase’sprong in de respons blijft alleen een transient over die volgt op de snelle puls en is er geen transient die voorafgaat aan de snelle puls. De namen Kramer-Kronig zijn in dit opzicht belangrijk of in woorden dat naast absorptie ook altijd een vorm van dispersie optreedt.
- f. De draad moet precies in het focusvlak op de uitgangsspleet liggen in de figuur want daar zijn de verschillende golflengten maximaal gescheiden en kan je selectief een golflengte weghalen.
- g. De uitgebreide beschrijving bij vraag e. vertelt al het verschil tussen een gas als absorber en een draad in een spectrometer. Bij een draad worden alleen frequenties weggenomen, maar vindt er geen ‘dispersie’ plaats. Bij analyse van de puls zal je zien dat uit een traliespectrometer zowel een transient vooraf als achteraf gevonden wordt en bij absorptie in een gas alleen een transient achteraf. Causaliteit wordt niet geschonden in de spectrometer omdat de korte puls weer gegeneert wordt door het optellen van heel veel monochromatische golven waarbij de korte puls in het midden gevonde wordt.

- a. De beweging van de klos kan worden beschreven als een superpositie van een cirkel beweging rond het massamiddelpunt van de klos en een lineaire beweging van het massamiddelpunt.
- Wanneer er geen slip is, zijn de lineaire snelheid en de hoeksnelheid afhankelijk van elkaar volgens de volgende relatie: $v = \omega R_1$, en dezelfde afhankelijkheid voor de versnelling als functie van de hoekversnelling: $a = \alpha R_1$.
- De tweede wet van Newton kan nu als volgt geschreven worden voor de horizontale lineaire en de draai bewegingen:

$$\begin{aligned}\sum F &= Ma \quad \rightarrow \quad Ma = T \cos \theta - f \\ \sum \tau &= I\alpha \quad \rightarrow \quad I\alpha = fR_1 - TR_2\end{aligned}$$

waarin a de horizontale versnelling is (die naar rechts positief wordt genomen), α is de hoekversnelling (waarbij met de klok mee positief wordt genomen) en f is de wrijvingskracht die wordt uitgeoefend door de plaat.

Door f uit de vorige vergelijkingen op te lossen en te substitueren in de eerste, ontstaat de volgende uitdrukking:

$$Ma = T \cos \theta - \frac{1}{R_1}(I\alpha + TR_2)$$

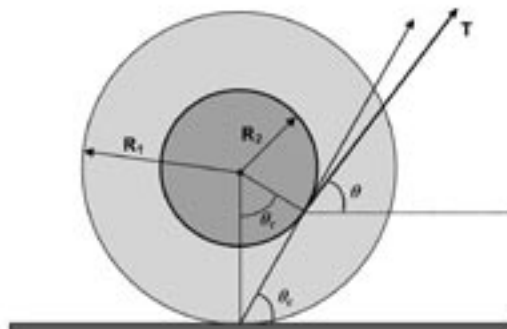
Substitutie van α uit de tweede vergelijking, de gegeven I en oplossen naar a , ontstaat:

$$a = \frac{T}{M} \frac{2}{3} \left[\cos \theta - \frac{R_2}{R_1} \right]$$

- b. De klos zal naar rechts rollen wanneer $\theta = 0^\circ$ en naar links wanneer $\theta = 90^\circ$.
- c. We kunnen uit de eindoplossing van vraag a. zien dat de versnelling van teken verandert wanneer het teken tussen de haken verandert. Wanneer dit gelijk is aan nul, zal er geen versnelling zijn en dus geen hoekversnelling. De klos zal dan eenvoudigweg over het oppervlak glijden met een constante snelheid. Dit gebeurt wanneer

$$\cos \theta_c = \frac{R_2}{R_1} \rightarrow \theta_c = \arccos \frac{R_2}{R_1}$$

- d. Zoals kan worden gezien aan de driehoek met hoek θ_c , snijdt de lijn langs T onder onder een hoek θ_c het vlak op het raakpunt van de klos met het vlak.
- e. Een impuls en rotatie analyse hangt niet af van het roterende referentie centrum, we mogen dit kiezen in het raakpunt. Het moment dat T uitoefent op het raakpunt is nul als de arm nul is.



Ook in de zwerm geldt voor een deeltje

$$\mathbf{F}_z + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_w = 0$$

Beschouw nu van bovenstaande vectorvergelijking de verticale component, met de positieve richting omhoog (is tegen de richting van de valversnelling in); de bolletjes hebben diameter d :

$$F_z = -\rho \frac{\pi}{6} d^3 \rho_g, F_o = g \frac{\pi}{6} d^3 \rho_m, F_w = \beta(v_v - v_{sed})$$

hierin is ρ_m de dichtheid van het “vloeistof-deeltjes-mengsel”: $\rho_m = \varphi \rho_g + (1-\varphi)\rho_w$.

Er is een omhooggerichte vloeistofstroming omdat de vallende deeltjes water verplaatsen:

$$v_v = -\frac{\varphi}{1-\varphi} v_{sed}$$

Als we de som van de drie krachten nemen en gelijk aan nul stellen, en de uitdrukkingen voor ρ_m en v_v invullen dan vinden we

$$-g \frac{\pi}{6} d^3 (1-\varphi)(\rho_g - \rho_w) + \beta \frac{-\varphi}{1-\varphi} - 1 v_{sed} = 0$$

waarin β een functie van φ is / zou kunnen zijn.

Voor een enkel vallend deeltje geldt

$$-g \frac{\pi}{6} d^3 (\rho_g - \rho_w) + \beta_\infty v_{sed,\infty} = 0$$

Combineren van de laatste twee vergelijkingen levert:

$$\beta_\infty v_{sed,\infty} (1-\varphi) = \beta v_{sed} \frac{1}{1-\varphi}$$

Het experimentele resultaat leert dat

$$\frac{v_{sed}}{v_{sed,\infty}} = (1-\varphi)^N$$

en dus

$$\beta = \beta_\infty (1-\varphi)^{-N} (1-\varphi)^2 = \beta_\infty (1-\varphi)^{2-N} = \beta_\infty (1-\varphi)^{-1,4}$$

De verwarring ontstaat doordat vrijwel iedereen aanneemt dat de potentiaal éénduidig bepaald is. Dan kom je in heel gekke problemen.

Maar een inductieveld is geen conservatief veld, dus er is niet éénduidig een potentiaal te definiëren (de kringintegraal van de elektrische veldsterkte is niet nul als de kring de cilinder omsluit).

Toepassen van $V = I R$ (in wezen: potentiaalverschil is de lijnintegraal van de elektrische veldsterkte) mag wel op R_1 in situatie 1, en op R_2 in situatie 2.

Antwoord c. is dus het goede antwoord.

(advertentie)



De Nederlandse Natuurkundige Vereniging komt op voor de positie van de natuurkunde en behartigt de belangen van natuurkundigen en natuurkunde-studenten. De NNV steunt activiteiten van studenten, zoals buitenlandse reizen en symposia, maar ook PION. In deze tijd waarin bijvoorbeeld het natuurkunde-onderwijs op de middelbare school onder druk staat, is een sterke vereniging van natuurkundigen geen overbodige luxe. Wordt daarom lid!!!

Meld je aan via het webformulier op www.nnv.nl.

Studenten betalen slechts 10 euro per jaar en als je tweedejaars student bent, is het lidmaatschap 1 jaar gratis. Als lid van de NNV ontvang je elke maand het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN). Zo blijf je dus op de hoogte van ontwikkelingen binnen de wereld van de natuurkunde en natuurlijk ook van alle activiteiten tijdens het World Year of Physics 2005.

Kijk voor meer informatie op:

www.nnv.nl
www.ntvn.nl
www.wyp2005.nl



- a. De faseverandering van het elektron dat linksom (l) gaat is

$$\phi_l = \int_l \vec{k} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\hbar} \int_l (m\vec{v} - e\vec{A}) \cdot d\vec{l}$$

en voor het elektron dat rechtsom (r) gaat

$$\phi_r = \int_r \vec{k} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\hbar} \int_r (m\vec{v} - e\vec{A}) \cdot d\vec{l}$$

zodat het verschil is:

$$\Delta\phi = |\phi_l - \phi_r| = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{\hbar} \int \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{A} = \frac{e}{\hbar} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{e\Phi}{\hbar}$$

Aangezien de faseverschillen geïntroduceerd door de mv -impuls gelijk zijn, vallen deze weg in het verschil. Deze bijdragen zijn gelijk omdat voor beide wegen de snelheid parallel is aan de afgelegde weg die voor beide paden even lang is.

- b. De stroom is evenredig met de modulus in het kwadraat van de golffunctie zoals die aan het andere uiteinde van de ring wordt waargenomen. Deze golffunctie ontstaat door het optellen van de afzonderlijke sinusvormige golffuncties van het linksom en rechtsom gaande deel ter plekke van het uiteinde van de ring. De fase van deze gerecombineerde golffunctie is uitgerekend bij a. en een grafiek van de functie $I(\Phi) = I_0 \sin^2(e\Phi/\hbar)$ met $I_0 = -e$ is het resultaat. Een eventuele asymmetrie bij het splitsen heeft tot gevolg dat de twee golven verschillende amplitude hebben en daarmee elkaar niet volledig kunnen uitdoven bij het recombineren, Het gevolg is dan ook een ophoging van de minimale stroom: $I(\Phi) = I_{\min} + I_1 \sin^2(e\Phi/\hbar)$.

- c. Het magnetisch veld is

$$\vec{B} = B_z \hat{z} = \nabla \times \vec{A}$$

Waaruit m.b.v. de rotatie in cilindercoördinaten volgt:

$$B_z = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \quad ; \quad \rho \leq r$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \quad ; \quad \rho > r$$

De Coulomb ijking geeft een derde vergelijking voor A:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

Met $\vec{A} = A_\phi \hat{\phi}$ worden deze vergelijkingen:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \quad ; \quad \rho \leq r \\ 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \quad ; \quad \rho > r \end{aligned} \quad \text{en} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Deze laatste vergelijking geeft aan dat A_ϕ niet van ϕ afhangt. Vanwege symmetrie kan A_ϕ ook niet van z afhangen en dus geeft de tweede vergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) = A_\phi + \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} = 0 \rightarrow \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} = -\frac{A_\phi}{\rho} \rightarrow A_\phi = \frac{C}{\rho} \quad ; \quad \rho > r$$

Integreren van de eerste vergelijking levert:

$$\Phi = \int_0^r B_z 2\pi \rho d\rho = \int_0^r \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) d\rho = 2\pi [\rho A_\phi]_0^r = 2\pi r A_\phi(r)$$

Waaruit m.b.v de eerder gevonden oplossing voor $\rho > r$ volgt dat $C = \Phi/2\pi$, zodat:

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \quad ; \quad \rho > r$$

- d. $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left| -i\hbar \nabla + e\vec{A} \right|^2 = \frac{1}{2m} (-\hbar^2 \nabla^2 + e^2 |A|^2 - 2i\hbar e \vec{A} \cdot \nabla)$. Aangezien ψ slechts een functie is van Φ geldt met $\rho = r$ $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{d\phi^2}$ en $\vec{A} \cdot \nabla = \frac{A_\phi(r)}{r} \frac{d}{d\phi}$ zodat:

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m} \left[\frac{-\hbar^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \left(\frac{\Phi e}{2\pi r} \right)^2 - \frac{i\hbar e \Phi}{\pi r^2} \frac{d}{d\phi} \right] \psi(\phi) = E\psi(\phi)$$

Dit is een gewone lineaire tweede orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten met oplossingen van de vorm

$$\psi = A e^{i\lambda\phi}$$

met $\lambda = -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \pm \frac{r}{\hbar} \sqrt{2mE}$. De eis $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ levert op dat λ een geheel getal n is, zodat:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(n + \frac{e\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2 \quad ; \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



- a. In de roterende vloeistof heerst het volgende krachterevenwicht:

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

met $v_\theta = \Omega r$. Door integratie van deze vergelijkingen naar r resp. z vinden we:

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + f(z)$$

$$p = -\rho g z + g(r)$$

Omdat deze vergelijkingen aan elkaar gelijk dienen te zijn, leiden we voor de integratiefuncties f en g af:

$$f = -\rho g z + \text{constante}$$

$$g = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + \text{constante}$$

en daarmee:

$$p(r, z) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + \text{constante}$$

Aan het vrije vloeistofoppervlak geldt de randvoorwaarde

$$p(z = h) = p_a$$

met $h(r)$ de hoogte van het oppervlak t.o.v. de bodem $z = 0$. Toepassing van de randvoorwaarde op de daaraan voorafgaande vergelijking levert

$$h(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \text{constante}$$

Als we de waterdiepte op de rotatieas $h(r = 0) = h_0$ noemen, kan de vergelijking worden geschreven als

$$h(r) = h_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

Het vrije oppervlak bezit dus een paraboloidvorm. Merk op dat de dichtheid ρ in deze uitdrukking **niet** voorkomt.

- b. We geven de hoogte van een isobaar vlak aan met $z = z_1(r)$. Met $p(r, z)$ uit a. kunnen we de druk in dat vlak dan schrijven als

$$p(z = z_1) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z_1(r) + \text{constante} = \text{constant}$$

Blijkbaar is dus

$$z_1(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \text{constante}$$

Conclusie: isobare vlakken hebben allemaal dezelfde parabolische vorm. De diepteverdeling $h_2(r)$ van de onderste vloeistof in het twee-lagen systeem is dan

$$h_2(r) = h_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

met $h_0 = h_2(r = 0)$. Aangezien het grensvlak en het vrije oppervlak dezelfde vorm hebben bezit de bovenste vloeistoflaag een uniforme diepte:

$$h_1 = \text{constant}$$

- c. Als de rotatiesnelheid van de cilinder afneemt zal de vloeistof aan de bodem worden afgeremd, en zal dus een azimutale snelheid $v_\theta < \Omega r$ krijgen, terwijl de 'bulk' nog steeds roteert met de oorspronkelijke snelheid $v_\theta = \Omega r$. In de 'bulk' heerst dan nog steeds het radiale krachtenevenwicht, waarin de centrifugale kracht (per eenheid van massa en volume) v_θ^2/r in balans is met de radiale drukgradiënt. Bij de bodem roteert de vloeistof minder snel, waardoor de radiale drukgradiënt (welke gelijk is aan die in de 'bulk') niet meer in balans is met de centrifugale kracht: de vloeistof wordt daardoor radiaal naar binnen gedrukt.
- d. Als het ijs smelt zakt het koude smeltwater (met grotere dichtheid dan het omringende water) langzaam naar de bodem van de tank. Hierdoor wordt er in het omringende water nabij het vrije oppervlak een zwakke radiale beweging naar binnen toe opgewekt (te begrijpen vanwege massabehoud). Die vloeistof bezit hoekimpuls ($\sim r v_\theta$). Behoud van hoekimpuls impliceert dat de radiaal naar binnengaande vloeistof een grotere snelheid v_θ krijgt: de vloeistof in het centrum van de cilinder gaat dus sneller roteren dan de cilinder. Het ijsblokje roteert dus ook sneller dan de cilinder.





De wil om beter
te zijn, geeft al een
voorsprong

HUNTSMAN

Bel voor meer informatie met de afdeling P & O, telefoon: (0181) 29 2118
of kijk op www.huntsman.nl

- a. Als we de klok sneller laten lopen (bijvoorbeeld een film van deze groei sneller afdraaien) met een factor λ dan gaat de snelheid omhoog met deze schaalfactor ($v \rightarrow \lambda v$) en de tijd gaat terug met ($t \rightarrow t/\lambda$). Hieruit volgt dat de structuur uitsluitend van het product vt afhangt. Je kunt ook zeggen dat het uiteindelijke patroon bepaald wordt door hoever de kristallen hebben kunnen groeien vanaf hun kern.
- b. Als we het systeem bekijken door een vergrootglas dat alles met een factor λ vergroot, dan zien we:
- $$\begin{aligned} v &\rightarrow \lambda v; \\ \rho &\rightarrow \rho/\lambda; \\ \alpha &\rightarrow \alpha. \end{aligned}$$

Hieruit volgt, op dezelfde manier als bij het vorige onderdeel dat de kans afhangt van het product ρvt .

- c. Nu gaan we alleen in de x -richting schalen, met een factor λ . We moeten nu gebruiken dat de kristallen allen bijna verticaal staan, zodat de hoeken α klein zijn. Dit betekent dat onder deze schaling geldt:
- $$\begin{aligned} v &\rightarrow v; \\ \rho &\rightarrow \rho/\lambda^2; \\ \alpha &\rightarrow \lambda\alpha. \end{aligned}$$

Toelichting: v alle kristallen groeien vrijwel verticaal, en voor de evolutie van het patroon is het enige dat telt op welke hoogte de kristalpunten zitten. Dit wordt bepaald door vt en dit verandert dus niet. De hoeken α schalen volgens $\tan \alpha(\lambda) = x/y$ waarbij y de verticale en x de horizontale as is. Aangezien x lineair schaalt met λ en α klein is, schaalt α ook lineair met λ . De schaling voor ρ ten slotte volgt uit die van dx en $d\alpha$ en de definitie van ρ .

Alweer een argument als in de vorige onderdelen leert ons dat

$$P(\rho vt, \alpha) = P(\rho vt \alpha^2)$$

Integreren over α kan geschieden van $-\infty$ tot ∞ omdat P als functie van α voor grote t scherp gepiekt is rond 0. Door over te gaan op de variabele $x = \rho vt \alpha^2$, vinden we

$$P(\rho, vt) = \frac{1}{\sqrt{\rho vt}} \int_{-\infty}^{\infty} P(x^2) dx$$

Aangezien P alleen van α afhangt via x , is het resultaat van de integraal gewoon een vast getal. Daarmee is het gevraagde bewezen.



- a. De maximale veldsterkte is $E_{\max} = Q/(4\pi\epsilon_0 R_B^2) = 10^8 \text{ Vm}^{-1} = 100 \text{ MV m}^{-1}$. De potentiële energie van een elektron wordt gegeven door $U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, waarbij r de afstand is tot het midden van het bolletje en de potentiële energie nul is gekozen op oneindige afstand. De kinetische energie op afstand r wordt dan gegeven door $\gamma(r)mc^2 = U(r) - U(R_B)$, zodat dan voor de snelheid op afstand r geldt:

$$\frac{v(r)}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left[\frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \left[\frac{1}{R_B} - \frac{1}{r} \right] \right]^2}}.$$

De eindenergie in eenheden mc^2 wordt dan $\gamma(\infty) = \frac{U(\infty)}{mc^2} = 4$, ofwel een eindenergie van 1,5 MeV. De eindsnelheid is $\frac{v(\infty)}{c} = 0,97$.

- b. Aangezien $v = |\vec{v}|$ constant is, is ook γ constant, en dus geldt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right],$$

wat de niet-relativistische bewegingsvergelijking is voor een deeltje met massa γm . De

$$\frac{\gamma m v^2}{r} = e v B,$$

centripetale kracht wordt dus gegeven door

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}.$$

en dus wordt de hoekfrequentie gelijk aan

De omlooptijd is $T = \frac{2\pi}{\omega} = 16 \text{ ns}$ en de straal van de baan $R_c = \frac{\gamma m v}{eB} = 0,75 \text{ m}$. De baan is zo groot vergeleken met de afmeting van het aluminium bolletje, dat het in goede benadering een cirkelbaan is.

- c. De elektronen kunnen het oppervlak alleen bereiken als ze er in bijna zuiver radiale richting op af vliegen. Als de tangentiële snelheidscomponent bij het oppervlak een kinetische energie $\geq 1 \text{ eV}$ heeft, dan zullen de elektronen over het oppervlak heen scheren en er weer vanaf bewegen. In het vlak van de evenaar kunnen ze het oppervlak dus alleen bereiken als de straal van de baan voldoende groot is. Als dit niet het geval is, dan zullen ze van het oppervlak af stuiteren en een nieuwe cirkelbaan inzetten, zodat de volledige baan “8”-vormig wordt. Als ze met een verticale snelheidscomponent starten, dan zullen ze geen gesloten cirkelbaan uitvoeren maar een spiraalbeweging inzetten, die ze steeds verder van de aluminium bol afvoert.
- d. Niet-wisselwerkende deeltjes die met een tijdsverschil Δt zijn gestart op identieke posities en met gelijke snelheid, zullen identieke baanbewegingen uitvoeren, waarbij ze ieder punt van de baan na elkaar zullen passeren met een tijdsverschil Δt . De hoeveelheid lading die per tijdseenheid voorbijkomt is dus overal in de baan gelijk. De hoeveelheid lading per puls is $q=1 \text{ nC}$, zodat de bundelstroom gelijk is aan $1 \text{ nC/ps} = 1 \text{ kA}$.
- e. Uit $\omega = \frac{v}{r} = \frac{eB}{\gamma m}$ volgt dat de omlooptijd korter is voor lagere kinetische energieën. Door onderlinge afstoting worden de achterste deeltjes in een elektronenpuls afgeremd, en de

voorste deeltjes juist wat extra versneld. De achterste deeltjes hebben dus een kortere omlooptijd en halen bij voldoende energieverval de voorste deeltjes “in de binnenbocht” in. Op deze manier kan de elektronenpuls inderdaad korter worden dan de laserpuls! De potentiële energie van een elektron op de buitenkant van het bolvormige wolkje elektronen is $\frac{qe}{4\pi\epsilon_0 R_b} = 1 \text{ keV}$, waarbij $q = 1 \text{ nC}$ de lading van het wolkje is. Het verschil in kinetische energie tussen het voorste en het achterste elektron kan dus maximaal oplopen tot 2 keV, wat overeenkomt met $\Delta\gamma = \frac{2 \text{ keV}}{0.5 \text{ MeV}} = 0,004$. Het verschil in omlooptijd wordt dus $\Delta T = \frac{2\pi m \Delta\gamma}{eB} = 16 \text{ ps}$. Dit impliceert dat op 1/16 deel van de cirkelbaan, d.w.z. op zo’n 30 cm afstand van het aluminium bolletje, de elektronenpuls het kortst duurt en de bundelstroom maximaal is.

(advertentie)

Universiteitsfonds Delft

www.UniversiteitsfondsDelft.nl

Universiteitsfonds
Delft

Subsidies

Het Universiteitsfonds ondersteunt studenten d.m.v. subsidies voor het verrichten van activiteiten buiten het vaste curriculum om.

- subsidies voor activiteiten van studieverenigingen;
- subsidies voor afstudeerstage/-werk in het buitenland;
- subsidies voor symposia, studiereizen, concerten etc.

Prijzen

Verder reikt het Universiteitsfonds Delft jaarlijks prijzen uit:

- UfD-prijs Beste Afstudeerders
- UfD-Leermeesterprijs
- UfD-Ritsema van Eckprijs

Daarnaast wordt ook de UfD-Marina van Damme beurs uitgereikt.

Informatie:

t.a.v. Anja Vink

Aula TU Delft

015-278 6409

ufonds@tudelft.nl

www.universiteitsfondsdelft.nl

Het Universiteitsfonds Delft is een stichting, die zich onafhankelijk van de TU Delft inzet om de studie en het onderzoek aan de TU Delft te bevorderen en te ondersteunen. Kijk voor meer informatie op de website: www.Universiteitsfonds.nl ufonds@tudelft.nl

- a. Het spiegeltje voert onder invloed van botsingen met luchtmoleculen een Brownse beweging uit langs de x-as. Dan is $x_N = x_{N-1} \pm L$, aangezien iedere botsing het spiegeltje òf in de positieve òf in de negatieve x-richting kan duwen. Dus $x_N^2 = x_{N-1}^2 \pm 2x_{N-1}L + L^2$. Omdat de beide mogelijkheden $\pm 2x_{N-1}L$ even waarschijnlijk zijn, geldt voor de verwachtingswaarde $\langle x_N^2 \rangle$ dat $\langle x_N^2 \rangle = \langle x_{N-1}^2 \rangle + L^2$. Via inductie volgt dan met $\langle x_0^2 \rangle = 0$ dat $\langle x_N^2 \rangle = NL^2$.
- b. Omdat het aantal botsingen N evenredig is met de tijd t voor t lang t.o.v. de gemiddelde tijd tussen twee botsingen, kan $\langle x_N^2 \rangle = NL^2$ ook geschreven worden als

$$\langle x^2(t) \rangle = At, \quad (1)$$

met A een constante. Deze kunnen we vinden door de bewegingsvergelijking van de spiegel te beschouwen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} = F_{mol}, \quad (2)$$

waarbij $-\gamma \frac{dx}{dt}$ de dempingskracht is en F_{mol} de kracht die de moleculen op het spiegeltje uitoefenen. Omdat we op zoek zijn naar de verandering van x^2 in de tijd, $\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$, is het handig om vgl. (2) met x te vermenigvuldigen. Nader uitwerken geeft dan

$$m \frac{d \left[x \frac{dx}{dt} \right]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \gamma x \frac{dx}{dt} = x F_{mol}. \quad (3)$$

De term $x F_{mol}$ is gemiddeld nul, omdat de richting waarin de kracht het spiegeltje duwt willekeurig is: voor iedere x duwt de volgende botsing het spiegeltje met even grote kans in de positieve of negatieve x-richting. De verwachtingswaarde van de eerste term aan de linkerkant van vgl. (3) is ook nul, aangezien de spiegel op iedere positie die hij bereikt niet meer weet uit welke richting hij gekomen is en daarmee de verwachtingswaarde van $x \frac{dx}{dt}$ niet van de tijd afhangt. Het gemiddelde van de kinetische energie $\frac{1}{2} m \langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$. Daarmee wordt (3):

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{2k_B T}{\gamma},$$

en vinden we voor (1):

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{2k_B T}{\gamma} t. \quad (4)$$

- c. De verwachtingswaarde van de hoek op het scherm in het kwadraat $\langle \theta^2(t) \rangle$ kunnen we vinden m.b.v. het diagram hieronder. Dat de aangegeven hoek inderdaad gelijk is aan kan geverifieerd worden met wat eenvoudige meetkunde. Stel dat de spiegel op tijdstip $t > 0$ vanaf $x = 0$ een afstand d langs de positieve x-as opgeschoven is. Neem nu eerst de limiet $l \gg d$, en bekijk vervolgens kleine hoeken α ($\cos \alpha \sim 1$). Laat zien dat (5) dan wordt :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{l^2 + s^2 - d^2}{2ls} \\ &= \frac{l - d \cos \alpha}{\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl \cos \alpha}} \end{aligned} \quad (5)$$

Aan het front van de natuurkunde

De komende vier jaar onderzoek doen? Aan een onderwerp waar ook in de fysica dat je leuk lijkt? Zuiver wetenschappelijk of gericht op een technologisch probleem? In een Nederlandse topgroep? Of zelfs voor een tijdje in een buitenlands laboratorium? En een paar keer naar een congres in het buitenland?

Het kan allemaal, als onderzoeker in opleiding (oio) bij FOM.

Oio-plaatsen bij FOM zijn meestal gekoppeld aan onderzoekprojecten waarvoor universitaire hoogleraren bij FOM geld hebben weten te krijgen. Die hoogleraar gaat op zoek naar kandidaten voor zijn oio-plaats of plaatsen. Het is dan handig dat hij weet dat jij belangstelling hebt voor zijn project. Zorg dus dat je contacten hebt met die hoogleraren in je eigen instelling of ergens anders, die dát onderzoek doen dat jou interesseert.

Kijk voor meer informatie over ons werkterrein, vacatures en arbeidsvoorwaarden op onze website (<http://www.fom.nl>) of bel met onze personeelsdienst, telefoon (030) 600 12 62.

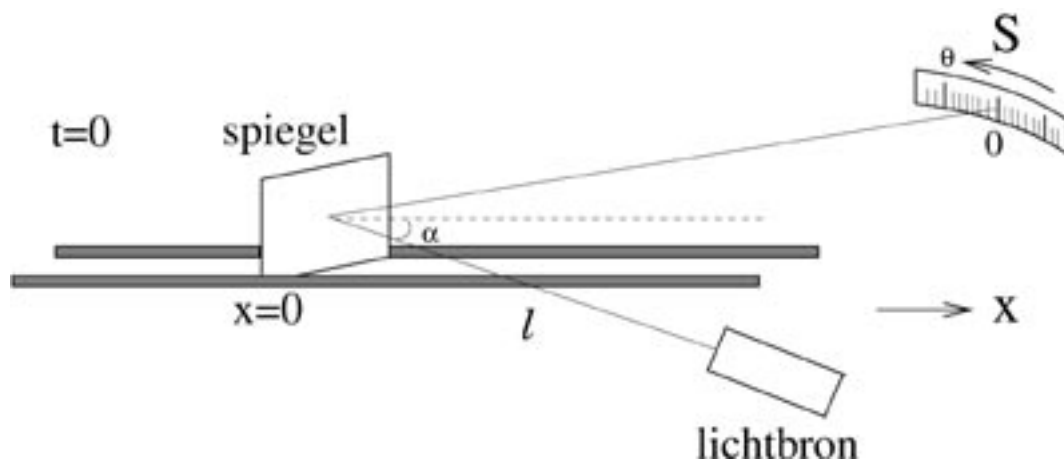


Voor $l \gg d$ en kleine hoek wordt (5)

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{l^2} \rightarrow \theta^2 \approx \frac{3d^2}{l^2}. \quad (6)$$

Dit geldt ook voor een afstand d opgeschoven langs de negatieve x-as. Omdat het gemiddelde van d^2 gegeven wordt door (4) vinden we dan

$$\langle \theta^2(t) \rangle = \frac{6k_B T}{\gamma l^2} t. \quad (7)$$



The image is a black and white advertisement for NEDCON. The top half features the company logo, which consists of a stylized grid icon followed by the word "NEDCON" in a large, bold, sans-serif font, with a registered trademark symbol. Below the logo, the words "advanced storage technology" are written in a smaller, lowercase sans-serif font. The background of the top half is a dark, high-contrast photograph of a warehouse's steel roof structure. The bottom half of the image is a photograph of a long, brightly lit warehouse aisle. On the right side of the aisle, there are tall, industrial shelving units filled with numerous stacked wooden pallets. The floor is polished and reflects the overhead fluorescent lights. The overall composition emphasizes the scale and efficiency of the storage technology.

NEDCON®
advanced storage technology

Nedcon Magazijninrichting B.V.
Nijverheidsweg 26
7000 AA Doetinchem

T +31 314 33 44 55
F +31 314 37 94 44
E info@nedcon.com

- a. De positieve ionen die *binnen* het rooster zijn gevormd, worden versneld naar de collector en veroorzaken zo een elektrische stroom in de collectorleiding. De *buiten* het rooster gevormde ionen kunnen vanwege het heersende potentiaalveld het rooster niet passeren en dragen dus niet bij aan de collectorstroom.
- b. Gegeven: $i^+ = C_0 n i^-$
 Substitueer hierin de ideale gaswet $p = nkT \rightarrow n = \frac{p}{kT}$
 Dit geeft $i^+ = \frac{C_0}{kT} p i^- = C p i^-$ met $C = \frac{C_0}{kT}$ = buisfactor
- c. Isochore relatie: $\frac{p}{T} = \frac{p_{afl}}{T} \rightarrow p' = \frac{T'}{T} p_{afl}$
- d. $p_{gas} = g_{gas} p_{afl}$
- e. $\frac{dN}{dt} = i^+ \cdot 6 \cdot 10^{18} = C p i^- \cdot 6 \cdot 10^{18} = 10^{-1} \cdot p \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{18} = 6 \cdot 10^{15} p$
- f. Ideale gaswet $\rightarrow \frac{d(pV)}{dt} = \frac{dN}{dt} kT = 6 \cdot 10^{15} p kT = 6 \cdot 10^{15} \cdot p \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 2,5 \cdot 10^{-5} p \text{ Pa m}^3 \text{ s}^{-1}$
- g. $S_{ion} = \frac{2 \cdot 10^{-5} p}{p} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
- h. $S_{ion} = \frac{\frac{d(pV)}{dt}}{p} = \frac{\frac{dN}{dt} kT}{p} = C \cdot i^- \cdot 6 \cdot 10^{18} kT$ Hierin is C ($:$) $T^{-1} \rightarrow S_{ion}$ onafhankelijk van T .
- i. Gegeven: $p_{H_2} = 3p_{N_2}$ en $\frac{p_{H_2}}{2,5} + p_{N_2} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$
 Substitutie van de eerste vergelijking in de tweede levert:
 $\frac{3p_{N_2}}{2,5} + p_{N_2} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \rightarrow p_{N_2} = 10^{-3} \text{ Pa}$ en $p_{H_2} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$
- j. Gegeven: $i^+ = C_0 n i^-$ (C_0 = evenredigheidsconstante). B&A is dus eigenlijk een dichtheidsmeter. Dichtheid in de ovenruimte blijft bij temperatuurverhoging ongewijzigd \rightarrow B&A aanwijzing verandert niet door de temperatuurverhoging en blijft $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$
- k. M.b.v. de onder c. afgeleide relatie $p' = \frac{T'}{T} p_{afl} = 2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$
 Of: Uit de algemene gaswet $p = nkT$ volgt dat bij constante dichtheid n de druk p evenredig is met de temperatuur T . Dus: als bij constante n T een factor 2 stijgt (van 300 naar 600 K) dan stijgt ook p een factor 2 en wordt $4,4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$.

Colofon

Na de uitwerkingen uit deze bundel doorgenomen te hebben, is het wedstrijdelement van PION 2005 afgesloten. Samen met de vragenset in de opgavenbundel vormt dit de kern van de dag. Voor de opgaven waaruit deze olympiade bestaat willen we de betreffende docenten hartelijk bedanken voor het bedenken van de inspirerende en uitdagende opgaven, het formuleren van de bijbehorende antwoorden en al hun inspanningen en hulp bij het verhelpen van onduidelikheden in de opgaven.

Verder was ook de jury een onmisbare schakel om deze dag mogelijk te maken, het nakijken van alle vragen in zo'n beperkt tijdsbestek vergt ook een grote inspanning, die deze ervaren docenten enthousiast oppakten.

PION is echter meer dan alleen de wedstrijd, voor het verzorgen van de complete dag zijn we nog dank verschuldigd aan Rob Mudde, voor zijn lezing, de leden van de dagcommissie voor het in goede banen leiden van de dag zelf, het bestuur van de VvTP voor al hun wijze raad en daad. PION was ook niet mogelijk zonder de financiële bijdrage van al onze sponsors.

Tenslotte waren de deelnemers ook onmisbaar om de dag tot een succes te maken, door hun aanwezigheid en enthousiasme bij het maken van de opgaven.

Op naar PION 2006!

Namens de commissie PION 2005,

Laurens van Campen
President PION 2005

Comité van aanbeveling

Prof. ir. L.A.A.M. Coolen, Algemeen Directeur NWO [†]

Prof. dr. ir. J.T. Fokkema, Rector Magnificus TU Delft

Dr. Ir. G.J. Kleisterlee, President en voorzitter van de raad van bestuur Philips

Prof. ir. K.Ch.A.M. Luyben, Decaan faculteit TNW TU Delft

Hoofdsponsors

Philips
Shell

Sponsors

Stichting Fundamenteel Onderzoek der Materie
Nederlandse Natuurkundige Vereniging
Stichting Physica
Nedcon
Huntsman
Universiteitsfonds Delft
NEVAC

Adverteerder

Masteropleidingen Applied Sciences, TU Delft

Oplage

Opgavenboekjes	130
Antwoordenboekjes	130



NanoScience
Life Science and Technology
Applied Physics
Chemical Engineering
Biochemical Engineering
Industrial Ecology
Science Education and Communication

MSc Programmes in Engineering Sciences

**2 year MSc taught/research degree
programmes, conducted in English**

**TU Delft, a first class university of Engineering Science,
is located in the picturesque city of Delft,
The Netherlands.**

For more information visit our faculty website: <http://www.tnw.tudelft.nl/msc>

Or Contact Mrs. Bryony Blinman, International Graduate Admissions Officer, Faculty of Applied Sciences,
Delft University of Technology, Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, Netherlands
E-mail b.e.blinman@tnw.tudelft.nl, Phone +31 15 27 88180, Fax +31 15 27 82655



EXPAND

Graduate Opportunities

Engineering (Chemical/Mechanical/Petroleum/Process/Earth Science), Technology Consultancy & Research, Finance, Sales & Marketing, IT and HR

If you think you know Shell, think again. We may be well known for our petrochemicals business, but to become one of the world's leading energy companies takes a wide range of talented individuals. We are constantly changing and truly global – the opportunities are outstanding. Join us as a graduate and you will have the chance to diversify, specialise, develop your career internationally – even change direction completely. Whichever route you choose, you will start a real job with real responsibility. You can expect full on-the-job and structured training, possibly leading to professional

qualifications. Interested? If you have graduated in science or engineering, looking for a career with an international context, then please apply online or send an email to graduates@shell.com for an application form.

Shell is an Equal Opportunity Employer.

www.shell.com/careers

