

# 1 Waterkracht

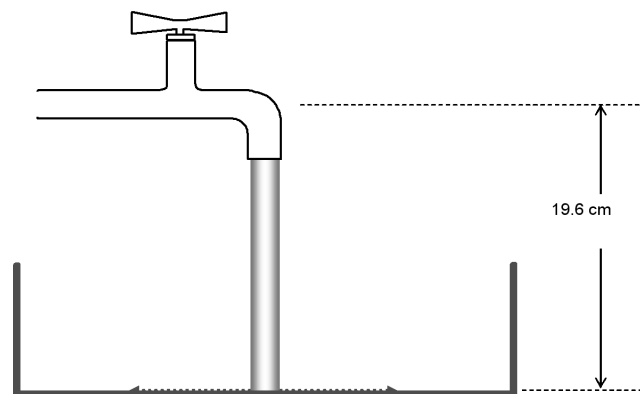
*J.W.M. Frenken*

We beschouwen een continue waterstraal, die verticaal uit een kraan stroomt en op de bodem van de wasbak eronder zijn verticale snelheid verliest. Aan de straal meten we de volgende eigenschappen:

- De hoogte van de waterkolom, inclusief het verticale gedeelte binnen de kraan, bedraagt 19.6 cm.
- De diameter van de waterkolom, op alle hoogten even groot (ook binnen de kraan), bedraagt 1.0 cm.
- De hoeveelheid water die per tijdseenheid uit de kraan stroomt bedraagt 50 ml/s.

Verder is gegeven dat de dichtheid van water  $1 \text{ kg/dm}^3$  is, dat de zwaartekrachtsversnelling  $9.8 \text{ m/s}^2$  bedraagt en dat de luchtwrijving in alle onderdelen van deze opgave mag worden verwaarloosd.

- Hoe groot is de kracht van de waterstraal op de bodem van de wasbak?
- Verandert het antwoord als de waterstraal bij de bodem van de wasbak een kleinere diameter heeft van 0.5 cm? Zo nee, waarom niet; zo ja, naar welke nieuwe waarde?
- Ga er tenslotte vanuit dat de straal halverwege (hoogte 9.8 cm) een gereduceerde diameter van 0.5 cm heeft en op die hoogte uiteenbreekt in afzonderlijke druppeltjes. Wat is nu de kracht op de bodem van de wasbak?



## 2 Zwart gat

*P.J. van Baal*

Een deeltje met constante versnelling werd door W. Unruh gebruikt als eenvoudig model om het principe van een horizon bij zwarte gaten te illustreren (en om de quantum effecten, zoals de Hawking straling, beter te begrijpen). We beschouwen de volgende wereldlijn van een deeltje:  $\underline{x}(\tau) = (\sinh(a\tau/c), \cosh(a\tau/c), 0, 0)c^2/a$ .

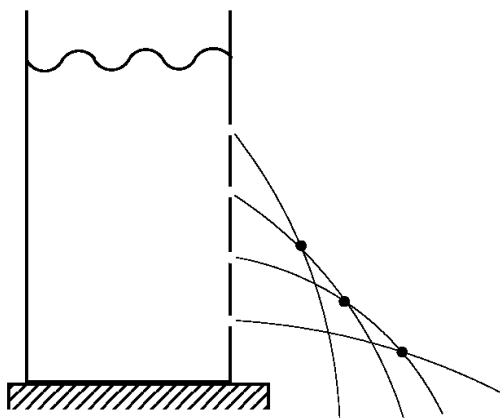
- a. Bepaal  $\underline{w}(\tau) = d\underline{x}/d\tau$  en laat zien dat  $\underline{w} \cdot \underline{w} = c^2$ . Beredeneer hiermee dat de parameter  $\tau$  de eigentijd is voor de wereldlijn van het deeltje.
- b. Voor de relativistische kracht geldt  $\underline{K} = m d\underline{w}/d\tau$ . Gebruik nu  $\underline{K} = \gamma(v)(vF/c, F, 0, 0)$  om aan te tonen dat de kracht  $F$ , en daarmee de versnelling  $a = F/m$ , constant is.
- c. Laat zien dat  $\underline{x}(\tau)$  verkregen kan worden uit de Lorentz transformatie met snelheid  $v = -c \tanh(a\tau/c)$ , werkende op het ruimte-tijd punt  $(0, c^2/a, 0, 0)$ , oftewel  $x = c^2/a$ ,  $y = z = t = 0$ .
- d. Teken in een ruimte-tijd diagram (horizontaal  $x_1 = x$ , verticaal  $x_0 = ct$ ) de wereldlijn  $\underline{x}(\tau)$ . Wees zorgvuldig voor  $\tau \rightarrow \infty$ . Laat zien dat een signaal uitgezonden op  $\vec{x} = (x, 0, 0)$  het versnellende deeltje **niet** meer kan bereiken als  $t > x/c$ , maar dat het versnellende deeltje **wel** informatie naar dit deel van de ruimte-tijd kan versturen.

### 3 De lekke Flesch

*R.J. Wijngaarden*

Een grote fles (zonder dop) is tot een hoogte  $h$  gevuld met water. In de zijkant van het cilindervormige deel van de fles zit een rij gaatjes, waar horizontaal water uitstroomt. De gaatjes hebben onderlinge afstand  $q$ , en het onderste gaatje bevindt zich op afstand  $q$  van de bodem. De plaatsen waar de naastliggende stralen elkaar kruisen zijn in de figuur aangegeven met zwarte punten. Geef een formule voor een kromme die door al deze punten gaat.

Aanwijzingen: De snelheid van het uitstromende water kan berekend worden met behulp van energiebehoud langs een stroomlijn van het wateroppervlak naar het gaatje. Neem aan dat de stralen elkaar niet beïnvloeden en verwaarloos de snelheid waarmee het wateroppervlak daalt.



## 4 Warmtetransport

*L.J.F. Hermans*

Onder normale omstandigheden (zittend achter ons bureau, bijvoorbeeld) zijn geleiding en straling de belangrijkste mechanismen waardoor ons lichaam warmte verliest. We willen het relatieve belang van deze twee nagaan; dat is bijvoorbeeld van belang als de muren van de kamer veel kouder zijn dan de lucht in de kamer. We kunnen daarmee ook de bewering verifiëren dat we ons prettig voelen zolang het *gemiddelde* van luchttemperatuur en muurtemperatuur rond 20° C ligt.

- a. Voor de geleidingsverliezen kunnen we uitgaan van een isolerend luchtlaagje van ca. 3 mm dik, direct buiten onze kleding (c.q. rond ons gezicht of onze handen). Verderop is de temperatuur zo goed als homogeen, doordat convectie de lucht goed mengt. Waarom is de dikte van dat luchtlaagje niet nul? (Er is immers best nog convectieve stroming *binnen* die 3 mm, tot vlak bij de kleding c.q. huid!)
- b. Voor de stralingsverliezen mogen we uitgaan van de formule voor een zwarte straler. Waarom kan dat best goed zijn, ook al dragen we witte kleding en zijn de muren wit geschilderd?
- c. Bepaal nu het *relatieve* belang van geleidings- en stralingsverliezen,  $I_g/I_s$  bij gelijke temperatuurverschillen, uitgaande van de bovengenoemde aannamen. Gegeven: warmtegeleidingscoëfficiënt van lucht  $\lambda = 0,025 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ; constante van Stefan-Boltzmann  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ;  $\Delta T \ll T$ , met  $\Delta T$  het temperatuurverschil tussen onszelf en de lucht, muren etc.

## 5 Zwaartekracht

*G. Nienhuis*

### ***Vraag 1: Cabine aan satelliet***

Een ruimteschip beweegt in een cirkelvormige baan rond een planeet. De hoeksnelheid van het schip is  $\Omega = 2\pi/T$ , met  $T$  de omlooptijd. Een ruimtecabine aan een koord wordt vanuit het schip uitgelaten in verticale richting naar beneden. De lengte van het koord is  $A$ , en de massa van de cabine is  $m$ . Vergeleken met de massa  $M$  van het schip is  $m$  verwaarloosbaar, zodat de baan van het schip niet door de cabine wordt beïnvloed.

- a. Bepaal in eerste orde in  $A$  de kracht waarmee de cabine aan de kabel trekt. Bepaal tevens de versnelling van de effectieve zwaartekracht die een ruimtereiziger in de cabine ondervindt.
- b. Wat is de spanning in de kabel als de cabine niet onder, maar boven het ruimteschip hangt?
- c. Geef de getalswaarde van de effectieve zwaartekrachtsversnelling die een ruimtereiziger in de cabine ondervindt in het geval van een baan met een omlooptijd van een uur, en een koord met een lengte van  $A = 5$  km.

### ***Vraag 2: De toekomst van Maan en Aarde***

De dagelijkse rotatie van de Aarde om haar as, en de maandelijksse omwenteling van de Maan om de Aarde vertegenwoordigen een (potentiële plus kinetische) energie. Voor het gemak beschouwen we de Maan als een punt-massa, en we verwaarlozen dus de energie van de rotatie van de Maan om zijn as. Ook nemen we aan dat de poolas van de Aarde loodrecht staat op het baanvlak van de Maan, en dat de maanbaan een cirkel is. Door de getijdewerking die de Maan op de Aarde uitoefent ontstaat wrijving, en neemt de energie van het systeem af. Omdat alle krachten centraal zijn, gaat bij dit proces geen impulsmoment verloren, en vanwege de symmetrie van het systeem blijft de maanbaan cirkelvormig bij het proces, maar met een (langzaam) veranderende straal  $R$ . Het totale impulsmoment van het systeem is  $J = L + S$ , met  $L$  het baanimpulsmoment van de Maan in zijn baan, en  $S$  het spinimpulsmoment van de Aarde om haar as. Gegeven is dat in de huidige situatie de verhouding van  $S$  en  $L$  gelijk is aan  $S/L = 0,20$ . In de eindsituatie mag u de spin van de Aarde verwaarlozen vergeleken met het baanimpulsmoment van de Maan.

- a. Geef een uitdrukking voor de energie van de maan, en de energie van de aardrotatie, beide in termen van het baanimpulsmoment  $L$ . Laat zien dat de totale energie (bij vaste  $J$ ) een minimum aanneemt als de hoeksnelheid  $\Omega$  van de maanbaan gelijk is aan de hoeksnelheid  $\omega$  van de aardrotatie. Dat moet dus de eindsituatie bepalen van het systeem van Aarde en Maan, waarbij de getijdenkrachten verdwenen zijn, en waarbij een dag even lang duurt als een maand.
- b. Bereken de verhouding van de afstand Aarde-Maan in de eindsituatie en nu.
- c. Bereken de verhouding van de lengte van de maand in de eindsituatie en nu. Nu duurt een maand 27,3 dagen. Hoeveel huidige dagen duurt een dag in de eindsituatie?

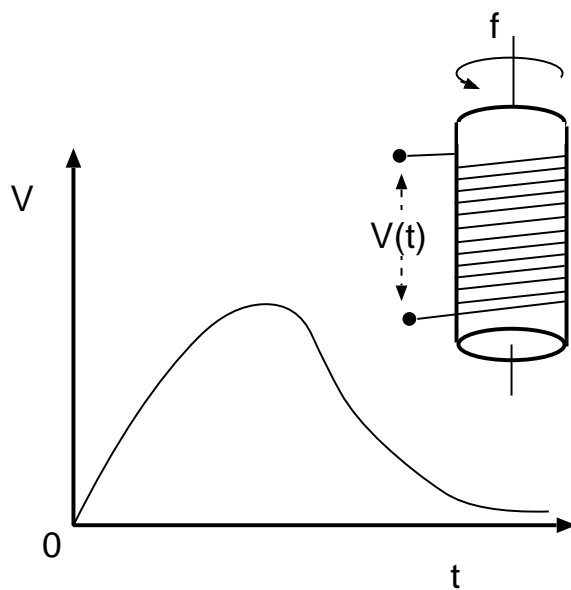
## 6 De proef van Tolman & Stewart

*C.W.J. Beenakker*

In 1916 deden de Amerikaanse fysici Tolman en Stewart verslag van een ingenieuze proef waarmee ze de verhouding  $m/e$  van massa en lading van ladingsdragers in een koperdraad konden meten. De waarde bleek heel goed overeen te komen met de bekende waarde voor vrije elektronen.

Hun proef werkt als volgt. De draad (lengte  $L$ ) wordt om een isolerende cilinder (straal  $R$ ) gewikkeld (zie figuur). De cilinder draait met  $f$  omwentelingen per seconde om zijn as. Plotsklaps (op tijd  $t = 0$ ) wordt de cilinder tot stilstand gebracht. De spanning  $V$  tussen de uiteinden van de draad verloopt dan als functie van  $t$  zoals schematisch in de figuur is aangegeven.

*Vraag:* Hoe kun je uit deze grafiek de verhouding  $m/e$  vinden?

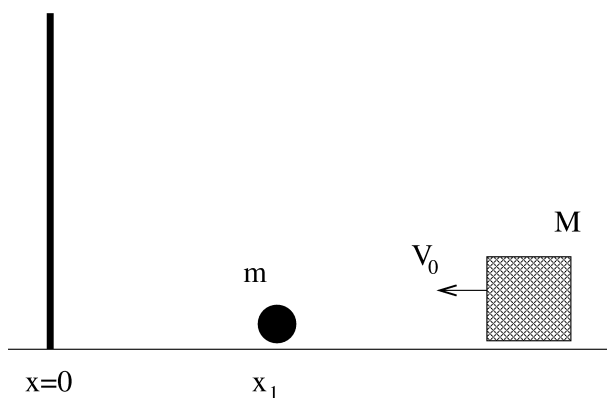


## 7 Kogelvering

*C.J.M. Schoutens*

We onderzoeken een mechanisch systeem waarin m.b.v. een wand en een kogeltje een inkomend voorwerp op een geleidelijke manier wordt teruggekaatst.

Het voorwerp, met massa  $M$ , kan bewegen langs een lijn (coördinaat  $x$ ). Bij  $x = 0$  bevindt zich een harde wand en bij  $x = x_1 > 0$  ligt een kogeltje met massa  $m = \epsilon M$ . Voor  $t < 0$  bevindt het voorwerp zich rechts van het kogeltje ( $x > x_1$ ) en beweegt het naar links met snelheid  $V_0$ .



Op tijdstip  $t = t_1 = 0$  botst het voorwerp op positie  $x = x_1$  voor de eerste keer tegen het kogeltje. We veronderstellen dat de botsingen tussen het voorwerp en het kogeltje, en tussen het kogeltje en de wand, elastisch zijn.

**Opdracht.** Beschrijf de beweging van het voorwerp. Bepaal in het bijzonder het aantal botsingen dat zal optreden, de kortste afstand  $x_{\min}$  tussen voorwerp en wand, en de eindsnelheid van het voorwerp. Doe dit voor  $\epsilon = 1$ ,  $\epsilon = 1/3$  en  $\epsilon \ll 1$ . Laat vervolgens zien dat de punten  $(x_n, t_n)$  (met  $x_n, t_n$  de positie en het tijdstip van de  $n$ -e botsing tussen het voorwerp en het kogeltje), in het  $x - t$  vlak op een hyperbool liggen, d.w.z. een curve van de vorm  $x^2 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$  met  $a_2 > 0$ . Bepaal de constanten  $a_0, a_1, a_2$ .

**Hint.** Overweeg een parametrisatie van de snelheden  $V$  en  $v$  van resp. het voorwerp en het kogeltje als  $(V, v) \propto (V_0 \cos \varphi, \pm \frac{V_0}{\sqrt{\epsilon}} \sin \varphi)$ .



## 8 Quantum Fase-Overgang

*P.J.H. Denteneer*

Met behulp van lasers waarvan de bundels elkaar kruisen kunnen atomen zodanig ingevangen worden dat ze zich op een regelmatig rooster bevinden. Maken we nu de temperatuur zeer laag dan kunnen bosonische atomen in een superfluïde (SF) toestand komen via het fenomeen van *Bose-Einstein condensatie*. Door de intensiteit van de laser-bundel op te schroeven kunnen de atomen ook in een *Mott isolator* (MI) toestand komen, waarin zich precies hetzelfde, gehele aantal atomen op elke roosterpositie bevindt. De overgang tussen de SF en MI toestand, wanneer beschouwd bij temperatuur  $T = 0$ , wordt een *quantum fase-overgang* genoemd. Een fase-overgang wordt vaak beschreven in termen van een *orde parameter*  $\psi$ , die gelijk aan nul is in de ene (ongeordeerde) fase en ongelijk aan nul in de andere (geordeerde) fase. Omdat in de buurt van de fase-overgang  $\psi$  klein zal zijn, kan voor de quantum fase-overgang de energie van de grondtoestand geschreven worden als:

$$E_{\text{gr}}(\psi) = E_0 + E_2 \psi^2 + \mathcal{O}(\psi^4) .$$

- a. Nemen we  $\psi$  als de orde parameter voor superfluïde orde (dus  $\psi \neq 0$  in de superfluïde fase), dan kan in zekere (gemiddelde-veld-) benadering voor de MI toestand de Hamiltonfunctie geschreven worden als:

$$H = \frac{1}{2} U n(n-1) - \mu n ,$$

waarin  $n$  het gemiddeld aantal bosonen op een roosterpositie,  $\mu$  de chemische potentiaal en  $U$  een positieve energieconstante, die aangeeft dat het energie kost om meerdere bosonen op een roosterpositie te hebben. Bepaal nu  $E_0$ , die afhangt van  $U, \mu$  en een geheel positief getal  $g$ , dat het aantal bosonen op een roosterpositie aangeeft voor de betreffende MI toestand.

- b. In de SF toestand kan  $E_2$  berekend worden via (tweede-orde) storingsrekening met behulp van de Hamiltoniaan die geldt voor die toestand. Het resultaat van die berekening is:

$$E_2(g, U, \mu) = \frac{g}{U(g-1) - \mu} + \frac{g+1}{\mu - Ug} + 1 .$$

Bereken de curve  $\mu(U)$  in het  $(\mu, U)$ -vlak (het *fase-diagram*) waarop de overgang tussen de SF fase en de MI fase met aantal bosonen  $g$  plaatsvindt.

- c. Wat is de kleinste waarde van  $U$  waarvoor een SF/MI overgang optreedt in deze theorie?

## 9 Rivier afdalen met een boot

*A. Hirschberg*

Beschouw een boot die op een rustig stromende rivier drijft. De stroming in de rivier impliceert dat het wateroppervlak een kleine helling (verval) heeft in de stromingsrichting. De boot heeft geen enkele vorm van aandrijving, dus geen motor en geen zeil. We verwaarlozen de luchtweerstand. We vragen ons af of de boot langzamer gaat of sneller gaat dan het water.

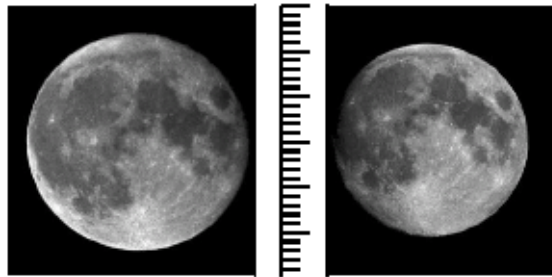
Maak een keuze tussen de vier volgende antwoorden en beargumenteer je keuze:

- De boot gaat langzamer dan het water.
- De boot gaat even snel als het water.
- De boot gaat sneller dan het water.
- Het is onbepaald.

## 10 De Maan

*H. Jordens*

Hieronder zie je twee foto's van de Maan. Ze zijn met dezelfde telescoop gemaakt. Links staat de Maan in het *perigeum* en rechts in het *apogeum*. Uit het verschil in grootte blijkt dat de baan van de Maan om de Aarde een beetje elliptisch is.



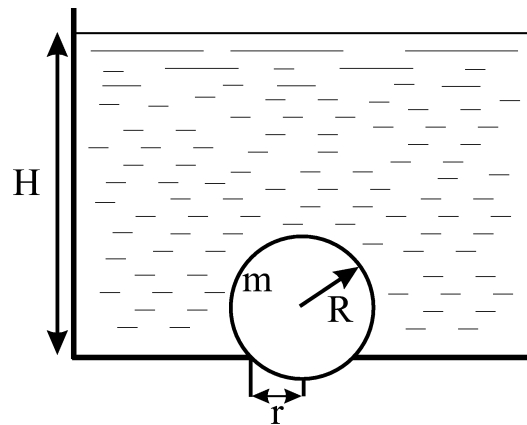
Massa van de Aarde	$5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Massa van de Maan	$0,074 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Gravitatieconstante $G$	$6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Eén maand	27,32 dagen

- Bereken de lengte  $2a$  van de lange as van de ellipsvormige baan.
- Bereken de excentriciteit van de ellips.
- Bereken het impulsmoment van de Maan.
- Bereken de snelheid van de Maan in het perigeum.

## 11 Badafvoer

*R.F. Mudde*

In de bodem van een vat gevuld met water bevindt zich een rond gat met straal  $r$ . Het gat wordt afgesloten door een bal (dichtheid  $\rho_{bol}$ ) met straal  $R$  ( $> r$ ). Het vat is gevuld tot een hoogte  $H$  met water. De situatie is zo, dat het water stil staat en de bal de opening geheel afsluit. Vervolgens laten we het waterniveau langzaam zakken. Bepaal bij welk waterniveau  $h$  de bal opstijgt uit het gat. Er is gegeven dat  $h > R$ . Bepaal tevens wat deze laatste toevoeging voor restrictie oplegt aan de dichtheid van de bol.



## 12 Meting van de gravitatieconstante $G$

*M.P. van Exter*

Het klassieke experiment van Cavendish om de gravitatieconstante  $G$  te meten is tegenwoordig te koop (via [www.pasco.com](http://www.pasco.com)): kosten 2500 euro, opgegeven nauwkeurigheid 5%. Bij deze opgave analyseren we dit experiment, dat als volgt verloopt (zie figuur 1):

Twee kleine loden bolletjes vormen de uiteinden van een vaste staaf die gebalanseerd, dus in het midden, aan een lang metalen lint hangt. Een spiegeltje in het midden van de staaf stelt ons in staat om, via een gereflecteerde laserbundel, een mogelijke verdraaiing van het lint te meten. Wanneer twee grote bollen in de buurt van de kleine bolletjes worden gebracht zal de zwaartekracht de bollen naar elkaar toe willen trekken. Door de resulterende verdraaiing van het torsielint te meten kan nu de zwaartekrachtsconstante worden bepaald.

### **Vragen:**

- a. Mag je de bollen als puntmassa's beschouwen? En zo ja, toon dit dan (wiskundig) aan.
- b. Hoe groot is de verwachte kracht tussen elk paar bollen als het oppervlak van elke grote loden bol (massa 1.56 kg, straal 32 mm) op een afstand van 5.5 mm van dat van de bijbehorende kleine loden bol (massa 20 g, straal 7.5 mm) wordt gebracht? (Zwaartekrachtconstante volgens de literatuur  $G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ )
- c. Zulke kleine krachten kunnen met wat kunst en vliegwerk gemeten worden met een gevoelige torsiebalans. Hiervoor moet de torsieconstante  $K$ , die het verband beschrijft tussen een opgelegd krachtmoment  $M$  en de daardoor veroorzaakte draaihoek  $\Theta$ , wel klein genoeg zijn. In principe kan de torsieconstante worden berekend m.b.v. de afmetingen en materiaaleigenschappen van het torsielint. Hij kan echter ook worden berekend op basis van de gegeven oscillatieperiode van 8 minuten, als we aannemen dat het traagheidsmoment wordt gedomineerd door de kleine bollen, waarvan de middelpunten zich op 5 cm van de centrale as bevinden.
  - Bereken de torsieconstante  $K$  uit deze gegevens.
  - Bereken de verwachte draaihoek bij de plaatsing van de 2 grote bollen.
- d. Toen ik dit apparaat zag was mijn eerste indruk: "Waarom hebben ze die draaibare bolletjes niet groter en zwaarder gemaakt?" Beredeneer



Figuur 1: De zwaartekrachtsconstante  $G$  kan worden bepaald door de verdraaiing te meten van een torsielint met daaraan een halter met twee kleine loden bollen onder invloed van de aantrekkingskracht van twee grote verplaatsbare bollen. Reflectie van een laserbundel aan een klein spiegeltje, zichtbaar op de as boven de halter, zorgt voor de benodigde nauwkeurigheid in de hoekbepaling (zie detailplaatje).

op grond van formules en evenredigheden waarom kleine lichte bolletjes toch handig zijn.

- e. De uiteindelijke hoekverdraaiing wordt gemeten m.b.v. een laserbundel die reflecteert aan een spiegeltje dat aan de torsiebalans vastzit. Hoe groot moet de laserbundel minimaal zijn om de berekende hoekverdraaiing te kunnen meten? Als criterium kun je aanhouden dat de gereflecteerde bundel *in het verre veld* minimaal een “bundeldiameter” moet verplaatsen.
- f. Hoeveel storende invloed zouden we ondervinden van de “lichtdruk” als de 1 mW laserbundel het spiegeltje 5 mm naast de hoofdas zou raken?

- g. Zonder voorzorgsmaatregelen zouden mogelijke elektrische krachten al snel domineren over de zwaartekracht die we proberen te meten. Het is daarom belangrijk om alle bollen te aarden. Geef een ruwe (orde van grootte) schatting van het maximaal toelaatbare voltage op de bollen opdat statische elektriciteit niet domineert over de zwaartekracht.
- h. Als we goed ons best doen en alle storende invloeden van buiten uitsluiten lopen we uiteindelijk aan tegen de fundamentele limiet van de thermische ruis in het systeem, die het torsielint willekeurige verdraaiingen laat ondergaan. Hoe groot is de standaarddeviatie van deze thermisch geïnduceerde verdraaiingen?