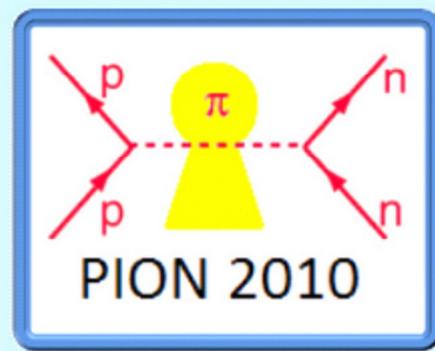


PION 2010



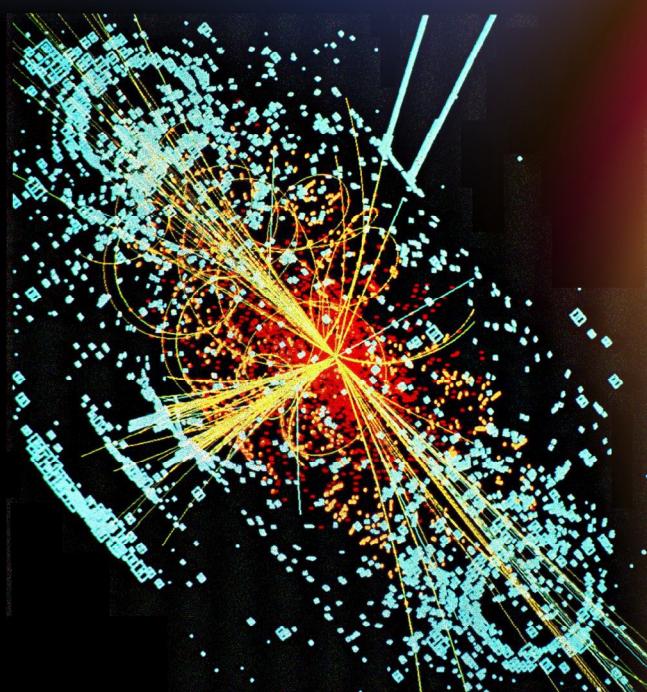
pion.a-eskwadraat.nl



Universiteit Utrecht

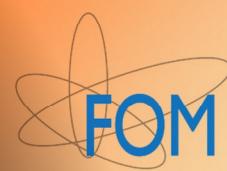
pion.a-eskwadraat.nl

Uitwerkingen



K N A W

Utrechts Universiteitsfonds
Alumnibureau



vrije Universiteit amsterdam



UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



Universiteit Leiden

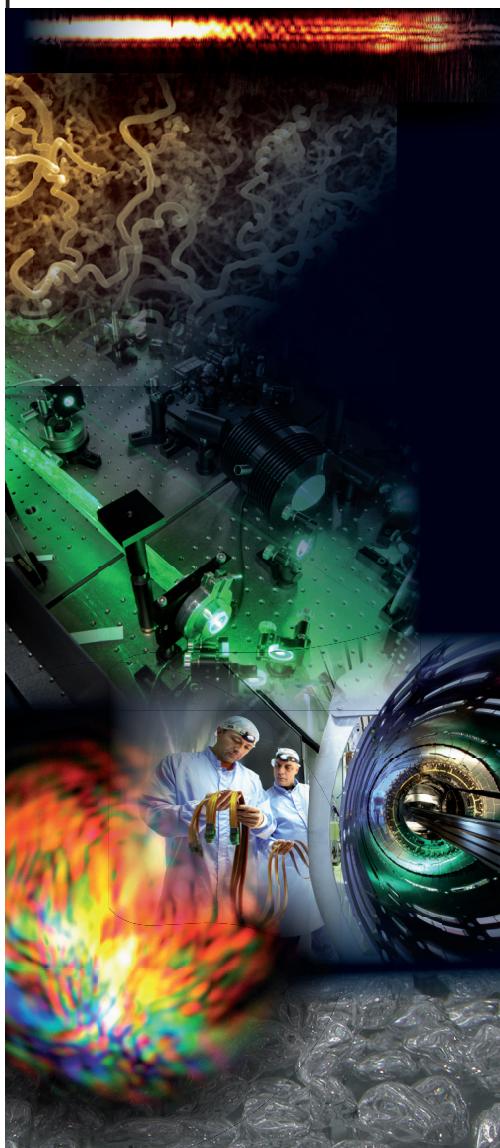


ASML



Leiden Institute of Physics

Aan het front van de natuurkunde

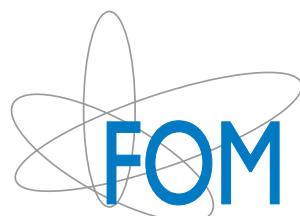


De komende vier jaar onderzoek doen? Aan een onderwerp in de fysica dat je leuk lijkt? Zuiver wetenschappelijk of gericht op een technologisch probleem? In een Nederlandse topgroep? Of zelfs voor een tijdje in een buitenlands laboratorium? En een paar keer naar een congres in het buitenland?

Het kan allemaal, als onderzoeker in opleiding (oio) bij FOM.

Oio-plaatsen bij de Stichting voor Fundamenteel Onderzoek der Materie (FOM) zijn meestal gekoppeld aan onderzoeksprojecten waarvoor universitaire hoogleraren bij FOM geld hebben weten te krijgen. Die hoogleraar gaat op zoek naar kandidaten voor zijn oio-plaats of plaatsen. Het is dan handig dat hij weet dat jij belangstelling hebt voor zijn project. Zorg dus dat je contacten hebt met die hoogleraren in je eigen instelling of ergens anders, die dát onderzoek doen dat jou interesseert.

Kijk voor meer informatie over ons werkterrein, vacatures en arbeidsvooraarden op onze website (www.fom.nl) of bel met onze personeelsdienst, telefoon (030) 600 12 62.



Voorwoord

Voor je ligt het boekje met de antwoorden van PION 2010. Als organisatie hebben wij de afgelopen maanden hard gewerkt aan het realiseren van de zestiende editie van het Project Interuniversitaire Olympiade Natuurkunde. Deze wedstrijd is daar het resultaat van.

Wij hopen dat jullie veel plezier hebben gehad bij het maken van de opgaven. Naast een spannende wedstrijd hopen wij dat vandaag een gezellige dag is geweest waarop natuurkundestudenten uit heel Nederland met elkaar in contact zijn gekomen.

Dit boekje had niet tot stand kunnen komen zonder de bijdrage van de opgavenmakers. Wij willen dan ook alle opgavenmakers zeer hartelijk bedanken voor hun bijdrage, zij hebben flink hun best gedaan om jullie stevig aan het denken te zetten. Ook willen wij de sponsoren bedanken voor het financieel mogelijk maken van deze dag.

Hopelijk hebben jullie het goed gedaan!

Jasper van Abswoude, Nikki Bisschop, Richard Dijk, Jacco Heres, Leslie Molag, Wilke van der Schee (Commissie PION 2010).

Inhoudsopgave

1.	Bowls	3
2.	Veer met Windingen	5
3.	Wat is de lading?	7
4.	IJskapgravitatie	9
5.	Spiegelcoating op een Compact Disk	11
6.	Kwantummechanica in discrete ruimtetijd	14
7.	Zwaartekracht als entropische kracht	17
8.	De Cassini-Huygens ruimtesonde	18
9.	Feynman Opgaven	20
10.	Bepaling van de parasitaire capaciteit van een spoel	22

Colofon

Dit opgavenboekje is een uitgave van de
PION-commissie 2010.
e-mail: pion0910@a-eskwadraat.nl
internet: www.pion.a-eskwadraat.nl

1. Bowls

T.G. Budd, Universiteit Utrecht

- (a) Eerst bepalen we de dichtheid ρ van de bowl,

$$m = \int_{-R}^{R/2} dx \rho \pi (R^2 - x^2) = \frac{9}{8} \pi R^3 \rho, \quad \rho = \frac{8m}{9\pi R^3}. \quad (1.1)$$

Het traagheidsmoment wordt dan

$$I = \int_{-R}^{R/2} dx \rho \frac{\pi}{2} (R^2 - x^2)^2 = \frac{153}{320} \pi R^5 \rho = \frac{17}{40} m R^2. \quad (1.2)$$

- (b) Uit het feit dat de symmetrie-as horizontaal blijft en de bowl niet slipt volgt dat het impulsmoment \vec{L} van de bowl in de richting van de symmetrie as staat en naar het middelpunt van de cirkelbaan wijst. Omdat het massamiddelpunt zich niet in het midden van de bol bevindt is er een koppel $\vec{\tau}$ ongelijk nul in de rolrichting en dus loodrecht op \vec{L} . Uit $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$ volgt dan dat \vec{L} niet van grootte verandert maar wel roteert met hoeksnelheid $\omega_0 = \tau/L$.

Het impulsmoment L rond de symmetrie-as is gelijk aan

$$L = I\omega = \frac{Iv}{R}. \quad (1.3)$$

Het koppel τ ten opzichte van het middelpunt van de bowl wordt geleverd door de zwaartekracht en de wrijvingskracht. Merk op dat de wrijvingskracht F_w precies de middelpuntzoekende kracht levert, dus

$$F_w = -\frac{mv^2}{r}. \quad (1.4)$$

Het zwaartekrachtkoppel berekenen we met een integraal,

$$\tau_z = - \int_{-R}^{R/2} dx \rho g \pi (R^2 - x^2)x = \frac{1}{8} mgR. \quad (1.5)$$

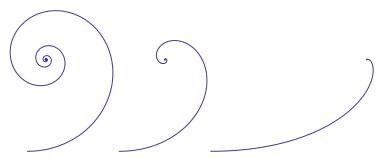
Samenvoegen geeft

$$\frac{v}{r} = \omega_0 = \frac{\tau}{L} = \frac{\tau_z + F_w R}{Iv/R} = \frac{\frac{1}{8} mgR - mv^2 R/r}{\frac{17}{40} mvR} = \frac{5g - 40v^2/r}{17v} \quad (1.6)$$

dus

$$r = \frac{57}{5} \frac{v^2}{g}. \quad (1.7)$$

- (c) Met een constante rolwrijvingskracht zal de snelheid van de bowl lineair afnemen tot hij stil staat. Aangezien de krommingsstraal van zijn pad evenredig is met v^2 zal de bowl steeds sterker afbuigen en een spiraal vormen. Voorbeelden:



Referentie: Rod Cross, The trajectory of a ball in lawn bowls, Am. J. Phys. 66(8), pp 735-738 (1998)

2. Veer met Windingen¹

H. Jordens, Rijksuniversiteit Groningen

Onderdeel I

We noemen de onderste winding 0 en bekijken afstanden vanaf de onderste winding.

1. Elke winding i heeft een veerconstante c en een massa im onder zich, zodat winding i een lengte heeft van $l_i = img/c + L/N$.
2. De positie van winding i wordt gegeven door:

$$x_i = \frac{mg}{c} \sum_{k=0}^i k + \frac{iL}{N} = \frac{mg}{2c} i(i+1) + \frac{iL}{N} \quad (2.1)$$

Waarbij $m = M/N$ en $c = CN$ zodat de positie gegeven wordt door

$$x_i = \frac{Mg}{2CN^2} i(i+1) + \frac{iL}{N} \quad (2.2)$$

3. In de limiet $N \rightarrow \infty$ is de lengte x_N dan uiteraard gegeven door $\frac{Mg}{2C} + L$.

Onderdeel II

We noemen de buitenste winding 0 en bekijken afstanden vanaf de buitenste winding. De kracht wordt nu uiteraard gegeven door $m\omega^2 r$, met r de afstand tot de binnenste winding.

1. Het verschil in kracht tussen winding i en $i+1$ en tussen $i+1$ en $i+2$ is gelijk aan $m\omega^2 x_{i+1}$, zodat het verschil in lengte gelijk is aan $m\omega^2 x_{i+1}/c$.
2. We hebben nu dus de relatie $x_{i+2} = (2 - m\omega^2/c)x_{i+1} - x_i$ welke opgelost wordt door (met $x_0 = 0$)

$$x_n = A \frac{(a - \sqrt{a^2 - 4})^n - (a + \sqrt{a^2 - 4})^n}{2^n} = A \frac{\sqrt{2a^2 - 4}^n}{2^n} (e^{-in\phi} - e^{in\phi}) \quad (2.3)$$

met $a = 2 - m\omega^2/c$, $\tan \phi = \sqrt{4/a^2 - 1}$ de fasefactor en A een constante. We vereenvoudigen dit verder tot

$$x_n = A'b^n \sin(n\phi) \quad (2.4)$$

met $b = \sqrt{a^2/2 - 1}$. Merk op dat bij bepaalde veerconfiguraties geen stabiele oplossing bestaat, dit is het geval als $N\phi \geq \pi/2$. De laatste randvoorwaarde is de lengte van de laatste winding: $x_{N-1} - x_{N-2} = L/N + m\omega^2 x_{N-1}/c$ waarmee we het antwoord uiteindelijk kunnen vinden:

¹Dit is een uitwerking van Wilke van der Schee

$$A' = \frac{L/N}{(1 - m\omega^2/c)b^{N-1} \sin((N-1)\phi) - b^{N-2} \sin((N-2)\phi)} \quad (2.5)$$

3. Als $N \rightarrow \infty$ zien we dat $b \approx 1 - \frac{M\omega^2}{CN^2}$ en $\phi \approx \frac{\omega}{N} \sqrt{\frac{M}{C}}$ zodat

$$x_N \approx A' \sin(\omega \sqrt{\frac{M}{C}}) \quad (2.6)$$

En we hebben ook

$$A' \approx \frac{L/N}{\sin(N\phi - \phi) - \sin(N\phi - 2\phi)} \approx \frac{L/N}{\phi \cos(N\phi)} \approx \frac{L}{\omega \sqrt{\frac{M}{C}} \cos(\omega \sqrt{\frac{M}{C}})} \quad (2.7)$$

Zodat de lengte gegeven wordt door:

$$x_N \approx \frac{L}{\omega \sqrt{\frac{M}{C}} \cos(\omega \sqrt{\frac{M}{C}})} \sin(\omega \sqrt{\frac{M}{C}}) = \frac{L \sqrt{C}}{\omega \sqrt{M} \tan(\omega \sqrt{\frac{M}{C}})} \quad (2.8)$$

3. Wat is de lading?

R.J. Wijngaarden, Vrije Universiteit

Omdat slechts de totale lading na lange tijd wordt gevraagd, is het niet nodig om uit te rekenen wat er in detail in het linker circuit gebeurt! Voor de rechter lus (met de stroommeter) geldt volgens de lusregel van Kichhoff:

$$M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} - I_2 R_2 = 0$$

met I_1 de stroom door L_1 en I_2 de stroom in de rechter lus. Integreren geeft:

$$M \int_{I_1(t=0)}^{I_1(t=\infty)} dI_1 - L_2 \int_{I_2(t=0)}^{I_2(t=\infty)} dI_2 - R_2 \int_{t=0}^{t=\infty} I_2 dt = 0$$

We nemen deze integralen dus van $t = 0$ (moment van sluiten van de schakelaar) tot $t = \infty$. De $\int I_2 dt$ is de gevraagde lading Q . Bedenk verder dat op het moment van het sluiten van de schakelaar de stroom I_1 door L_1 nul is omdat hij dat vlak daarvoor ook was. Derhalve was I_2 op dat moment ook nul. Na lange tijd zijn de stromen constant en is er geen inductie meer, dus $I_2(t = \infty) = 0$. Omdat alle stromen dan constant zijn, loopt er ook geen stroom door de takken die condensatoren bevatten, waardoor het linker circuit effectief alleen uit U , S , R_1 , L_1 en R_3 bestaat. De stroom daarin is dan $I_1(t = \infty) = \frac{U}{R_1 + R_3}$. Invullen van deze grenzen in bovenstaande integraalvergelijking geeft

$$M \int_0^{\frac{U}{R_1 + R_3}} dI_1 = R_2 Q$$

dus de gevraagde lading is:

$$Q = \frac{MU}{R_2(R_1 + R_3)}$$

Masteropleiding Physics



**van Natuurkunde van het leven
tot deeltjesfysica, van energie tot
ultrasnelle lasers**

**Voorbeelden van onderwerpen die je bij ons kunt
bestuderen:**

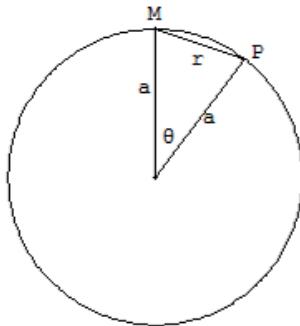
- Toepassingen van schakelbare spiegels in hernieuwbare energie
- Het bepalen van de fysische eigenschappen van DNA, eiwitten en cellen
- Aanpassingen aan het Standaard Model om de massa van neutrinos te verklaren
- Het ontwikkelen van zonnecellen gebaseerd op fotosynthese
- Hoe constant zijn de natuurconstanten
- De eigenschappen van materie vlakbij 0 Kelvin
- Een kaart van het heelal met behulp van zwaartekrachtsgolven
- Het ontwikkelen van nieuwe microscopie technieken voor in het lab en het ziekenhuis

Meer informatie? www.vu.nl/physics



4. IJskapgravitatie

M.J. Renne, Universiteit Utrecht



a.

$$\begin{aligned} r^2 &= 2a^2(1 - \cos \theta) = 4a^2 \sin^2(\theta/2) \implies r = 2a \sin(\theta/2) \\ &\implies \varphi(\theta) = -\frac{GM}{2a \sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

De verandering van de waterstand in P wordt $s(\theta)$, waardoor de gravitatiepotentiaal aan het oppervlak wordt

$$\Phi(\theta) = \Phi_0 + gs(\theta) + \varphi(\theta)$$

Dit moet onafhankelijk zijn van $\theta \implies gs(\theta) + \varphi(\theta) = gs_0 = \text{constant}$

$$\implies s(\theta) = s_0 - \frac{1}{g}\varphi(\theta) = s_0 + \frac{GM}{2ag \sin(\theta/2)}.$$

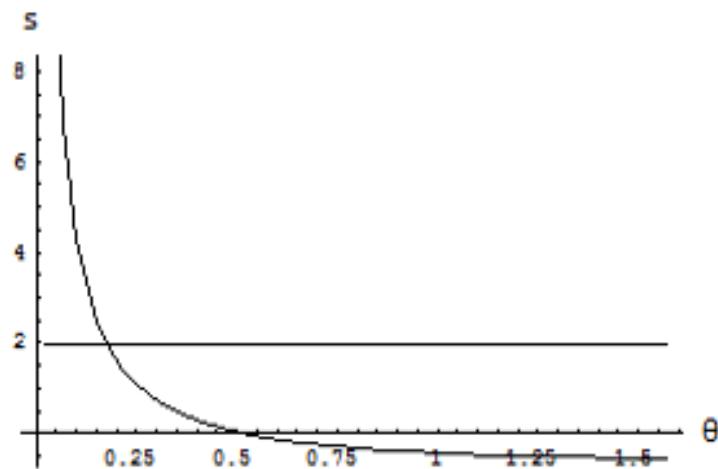
s_0 wordt bepaald door de eis dat de totale hoeveelheid zeewater constant blijft:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\pi a^2 s_0 - \int_0^\pi \frac{\varphi(\theta)}{g} 2\pi a^2 \sin(\theta) d\theta = 4\pi a^2 \left(s_0 + \frac{GM}{ag} \right) \\ &\implies s_0 = -\frac{GM}{ag} \implies s(\theta) = \frac{GM}{ag} \left(\frac{1}{2 \sin(\theta/2)} - 1 \right) \end{aligned}$$

b. Na smelten van het ijs stijgt het zeeniveau ten opzichte van het oorspronkelijke niveau (vóór het plaatsen van het blok ijs) met $\frac{10^{-3}M}{4\pi a^2} \approx 1,94 \cdot 10^{-18} M$ meter. De hoek θ waarbij het voor de waterstand geen verschil maakt of het ijs al dan niet is gesmolten volgt uit

$$s(\theta) = \frac{10^{-3}M}{4\pi a^2} \implies \sin(\theta/2) = 0,1774 \implies \theta \approx 20,5^\circ.$$

c. De ijsmassa op Groenland is $M \cdot 2,79 \cdot 10^{18} \text{ kg} \implies$ het zeewater voor de Nederlandse kust stijgt als gevolg van het gravitatie-effect met $2,98 \cdot \left(\frac{1}{2 \sin(14^\circ)} - 1 \right)$ meter. Als gevolg van het smelten is dit ongeveer 5,4 meter; het verschil van 2,2 meter is de effectieve stijging.



Hieronder zijn de twee verschijnselen per kilogram ijs als functie van de hoek $\theta/2$ (in radialen) uitgezet in eenheden van 10^{-18} meter.

In dit eenvoudige model zijn veel effecten verwaarloosd; de belangrijkste zijn de gravitatieinvloed van het door het ijs aangetrokken water zelf en van de inhomogene massaverdeling (continenten), die ook een dergelijk effect heeft.

Literatuur:

J.A.Clark:Geology, mei 1976.

W.E.Farrell, J.A.Clark: Geoph.J. Roy.Astronomical Soc. 46(1976) 647-667.

Karel Knip: Wetenschapsbijlage NRC Handelsblad, 6 december 2008.

5. Spiegelcoating op een Compact Disk

H. van Zon, Philips Research Laboratories Eindhoven

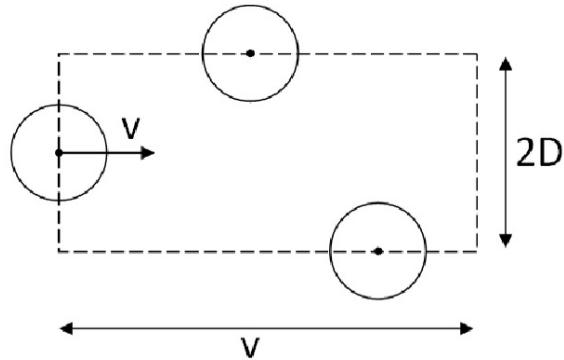
1. Kosmische straling dringt overal doorheen en maakt de eerste elektronen vrij en/of ioniseert Ar-atomen. In principe kunnen ook elektronen worden vrijgemaakt door veldemissie op scherpe randen van het aluminium, alhoewel 500 V hiervoor aan de lage kant is.

2. De geproduceerde elektronen worden door de Lorentz-kracht vastgehouden op de magnetische veldlijnen. Doordat deze veldlijnen aan beide kanten de negatieve kathode doorsnijden, kunnen de elektronen nergens naar toe. Alleen t.g.v. botsingen met Ar-atomen kunnen ze naar een andere veldlijn 'overstappen'. Dit proces benut de elektronen dus heel goed en maakt de ontlading zeer efficiënt ('Penning'-ontlading, genoemd naar de Philips-onderzoeker Penning).

Het vasthouden van de elektronen zorgt er tevens voor dat er geen grote opwarming van het plastic schijfje plaatsvindt.

3. Magnetische materialen zoals Ni, Co en Fe zijn moeilijk te sputteren omdat deze materialen de magnetische veldlijnen kortsluiten. Zeer dunne platen of gegroefde platen bieden soms uitkomst.

4. Stel een aluminiumatoom beweegt met snelheid v . Het zal botsen met alle Ar-atomen waarvan het centrum zich bevindt binnen een cilinder met straal D en als de bewegingsrichting van het aluminiumatoom; zie onderstaande tekening. In 1 seconde doorloopt het aluminiumatoom een botsingsvolume van $\pi v D^2$.



Als het argon een dichtheid n heeft, dan bevinden zich in het botsingsvolume $N = n\pi v D^2$ deeltjes. Dit is gelijk aan het aantal botsingen per seconde van het aluminiumatoom met Ar-atomen, ook wel de botsingsfrequentie genoemd. De gemiddelde vrije weg lengte λ is nu de per seconde afgelegde weg (= snelheid v) gedeeld door de botsingsfrequentie:

$$\lambda = \frac{v}{N} = \frac{v}{n\pi v D^2} = \frac{1}{\pi n D^2}$$

Uit de ideale gaswet $p = nkT$ volgt dat 0,1 Pa overeenkomt met een dichtheid $n = 2,1 \cdot 10^{19}$ deeltjes/ m^3 . De vrije weglengte wordt dan $\lambda = 0,17\text{m}$.

5. We willen het liefste dat de aluminiumatomen zonder botsing het CD-schijfje bereiken. Dan blijft hun kinetisch energie van ca. 5 eV behouden. Dit is gunstig voor de dichtheid van de gedeponeerde aluminiumlaag (grote oppervlaktemobiliteit). Ook worden de aluminiumatomen dan niet verstrooid waardoor er meer op het CD-schijfje terechtkomen. Verder is een loodrechte inval op het substraat gunstig voor de laagstructuur.

6. Een stroom van 5 A komt overeen met $5 \times 6,2 \cdot 10^{18} = 3,1 \cdot 10^{19}$ ionen/ s . Bij een sputteropbrengst van 2 worden dan $6,2 \cdot 10^{19}$ aluminiumatomen/ s vrijgemaakt. Deze komen terecht op het CD-schijfje van 10 cm diameter, corresponderend met een oppervlak $A = 7,85 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$. Een monolaag van harde bollen bestaat bij een rechthoekige stapeling uit ongeveer $(1/(3 \cdot 10^{-10}))^2 \approx 10^{19}$ atomen/ m^2 (je kunt natuurlijk ook een dichtste bolstapeling uitrekenen). De depositiesnelheid is dan $6,2 \cdot 10^{19} / (10^{19} \times 7,85 \cdot 10^{-3}) \approx 800$ monolagen/ s . Een monolaag is 3 Ångstrom dik ($D = 3$ Ångstrom). Er wordt dus $800 \times 3 = 2400\text{\AA}/s = 0,24\mu\text{m}/s$ aluminium gedeponeerd.

7. In de industrie worden excentrisch roterende magneten gebruikt. Je zou ook het CD-schijfje excentrisch kunnen roteren. Verder kun je in plaats van roterende magneten ook elektromagneten gebruiken waarbij je de gasontlading bijv. heen en weer laat springen. Tenslotte is een goede uniformiteit ook te bereiken door de juiste diameter van de (magnetische) ontladingsring in combinatie met de juiste afstand tussen kathode en CD-schijfje te gebruiken.

8. De aluminium deeltjesstroom naar het CD-schijfje is $6,2 \times 10^{19} / (7,85 \cdot 10^{-3}) \approx 8 \cdot 10^{21}$ deeltjes/ $m^2 \cdot s$. De stroom aan zuurstofatomen mag hier maximaal 5% van zijn. Omdat O_2 uit 2 atomen bestaat, mag de stroom aan O_2 moleculen slechts 2,5% oftewel $0,025 \times 8 \cdot 10^{21} = 2 \cdot 10^{20}$ O_2 moleculen/ $m^2 \cdot s$ zijn.

Gegeven: De invalsdichtheid vanuit de gasfase op een vaste stof oppervlak bedraagt $\frac{1}{4}n\bar{v}$ met n = deeltjesdichtheid in de gasfase en \bar{v} = gemiddelde thermische snelheid van de gasdeeltjes. De gemiddelde thermische snelheid voor O_2 volgt uit de gegeven formule en bedraagt 480m/s ($T = 350\text{K}$). Samen met de ideale gaswet $p = nkT$ kunnen we dan een partiële zuurstofdruk van $8 \cdot 10^{-3}\text{Pa}$ ($8 \cdot 10^{-5}\text{mbar}$) berekenen ($T = 350\text{K}$).



Physics MSc programmes

- Mathematical Physics
- Particle and Astroparticle Physics
- Physical Sciences
- Theoretical Physics



6. Kwantummechanica in discrete ruimtetijd

L.D. Molag, Universiteit Utrecht

1. In continue ruimtetijd luidt de Schrödinger vergelijking:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t)$$

In het discrete geval krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{1}{dx} \left(\frac{\Psi(x + 2dx, t) - \Psi(x + dx, t)}{dx} - \frac{\Psi(x + dx, t) - \Psi(x, t)}{dx} \right) \\ &= \frac{\Psi(x + 2dx, t) - 2\Psi(x + dx, t) + \Psi(x, t)}{dx^2} \end{aligned}$$

en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = \frac{\Psi(x, t + dt) - \Psi(x, t)}{dt}$$

Dan wordt de Schroedinger vergelijking in ons model dus:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Psi(x + 2dx, t) - 2\Psi(x + dx, t) + \Psi(x, t)}{dx^2} + V(x)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\Psi(x, t + dt) - \Psi(x, t)}{dt}$$

We nemen nu aan dat $\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t)$. Delen door $\Psi(x, t)$ (en stilzwijgend aannemen dat we niet door 0 delen) geeft dan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{\psi(x + 2dx) - 2\psi(x + dx) + \psi(x)}{dx^2} + V(x) = i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{\phi(t + dt) - \phi(t)}{dt}$$

Aangezien het linkerlid alleen afhankelijk is van x en het rechterlid alleen van t moet er een constante E bestaan zodanig dat

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi(x + 2dx) - 2\psi(x + dx) + \psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) &= E\psi(x) \text{ en} \\ i\hbar \frac{\phi(t + dt) - \phi(t)}{dt} &= E\phi(dt) \end{aligned}$$

2. De eerste vergelijking is om te schrijven naar

$$\psi(x + 2dx) - 2\psi(x + dx) + \psi(x) = -\frac{2mE dx^2}{\hbar^2} \psi(x)$$

We kunnen nu identificeren: $a_k = \psi(kdx)$, $u_1 = 2$ en $u_2 = -(1 + 2mE dx^2/\hbar^2)$. Het polynoom $T^2 - 2T + (1 + 2mE dx^2/\hbar^2)$ heeft nulpunten $1 \pm i\sqrt{2mE dx}/\hbar$. Definieer $\omega = \sqrt{2mE dx}/\hbar$. Het lemma zegt nu dat er constanten A en B bestaan zodanig dat

$$\psi(kdx) = A(1 + i\omega)^k + B(1 - i\omega)^k.$$

Dat $V(x) = \infty$ voor $x \leq 0$ betekent dat $\psi(x) = 0$ daar. Er geldt dus $A + B = \psi(0) = 0$, dus $B = -A$. Aangezien we niet hoeven te normaliseren kunnen we net zo goed $A = 1$ nemen (ψ is niet identiek nul, anders zou scheiding van variabelen niet werken) en we krijgen dus

$$\psi(kdx) = (1 + i\omega)^k - (1 - i\omega)^k.$$

Dat $V(x) = \infty$ voor $x \geq a$ betekent dat $\psi(x) = 0$ daar. Dus geldt er $(1 + i\omega)^N - (1 - i\omega)^N = \psi(a) = 0$. Dit impliceert

$$\left(\frac{1 + i\omega}{1 - i\omega}\right)^N = 1$$

Dit impliceert dat

$$\frac{1 + i\omega}{1 - i\omega} = e^{\frac{2\pi i n}{N}}$$

voor $0 \leq n < N$. Vermenigvuldiging met $1 - i\omega$ en herschikken geeft

$$\omega = \frac{1}{i} \frac{e^{\frac{2\pi i n}{N}} - 1}{e^{\frac{2\pi i n}{N}} + 1} = \tan(\pi n/N).$$

Dus hebben we dat

$$E_n = \frac{\hbar^2 \omega^2}{2m dx^2} = \frac{\hbar^2 N^2 \tan^2(\pi n/N)}{2ma^2}$$

waar gebruik is gemaakt van het feit dat $dx = a/N$.

De tweede vergelijking wordt $\phi(t + dt) = (1 - iEdt/\hbar)\phi(t)$. Deze vergelijking is gemakkelijk op te lossen en geeft $\phi(l dt) = \phi(0)(1 - iEdt/\hbar)^l$. Aangezien we niet hoeven te normaliseren kunnen we net zo goed $\phi(0) = 1$ nemen. We concluderen dus dat

$$\Psi_n(x, t) = \left((1 + i \tan(\pi n/N))^{x/dx} - (1 - i \tan(\pi n/N))^{x/dx} \right) (1 - i E_n dt / \hbar)^{t/dt}$$

waar

$$E_n = \frac{\hbar^2 N^2 \tan^2(\pi n/N)}{2ma^2}$$

Merk op dat we aan $0 < n < N/2$ genoeg hebben want de $n > N/2$ geven geen nieuwe oplossingen (op fasefactor na).

3. We zien dat

$$\begin{aligned} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\hbar^2 N^2 \tan^2(\pi n/N)}{2ma^2} &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\hbar^2 \tan^2(\pi n dx / a)}{2m dx^2} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\sin(\pi n dx / a)}{dx} \right)^2 \frac{1}{\cos^2(\pi n dx / a)} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

Bovendien $N/2 = a/2dx \rightarrow \infty$. Dus het aantal energiën gaat naar oneindig. We concluderen dat we dezelfde energiën krijgen als bij continue ruimtetijd.

“During my master’s in Leiden I developed a broad view of IT.”



Jorge Osorio,
IT management
trainee at KLM,
studied for
his master's in Leiden.



Universiteit Leiden
The Netherlands

Got your bachelor's degree?
Take a Master of Science and
improve your career prospects.

mastersinleiden.nl

Leiden University. The university to discover.

7. Zwaartekracht als entropische kracht

W. van der Schee, Universiteit Utrecht

1. Voor quasistatische processen geldt de eerste wet van de thermodynamica:

$$dQ = TdS - PdV \quad (7.1)$$

Hieruit volgt direct dat als de entropie van het deeltje verandert (door verplaatsing Δx) de energie van het deeltje verandert met $T\Delta S$. Dit levert dan uiteraard een kracht van

$$F = T \frac{\Delta S}{\Delta x} \quad (7.2)$$

Het is duidelijk dat deze vergelijking componentsgewijs geldt, zodat de gevraagde identiteit volgt. Merk op dat als het proces niet quasisatisch is er entropie gegenereerd zou kunnen worden en bovenstaande afleiding niet meer geldig zou zijn.

2. De entropieverandering van het deeltje is $2\pi k_b$ en $\Delta x = \hbar/mc$. Met de aannames in de tekst is het niet moeilijk af te leiden dat $Mc^2 = \frac{c^3}{2G\hbar} Ak_b T = \frac{c^3 2\pi}{G\hbar} R^2 k_b T$ met R de straal van het bolvormig oppervlak. Nu volgt dus:

$$F = \frac{G\hbar Mc^2}{c^3 2\pi R^2 k_b} \frac{2\pi k_b mc}{\hbar} = \frac{GMm}{R^2} \quad (7.3)$$

3. De zwaartekracht is gelijk aan $-m\nabla\Phi$, met Φ de potentiaal. Dit betekent dat de kracht altijd loodrecht op een equipotentiaalvlak staat. Entropieverandering treedt in dit geval ook alleen op als het deeltje door het scherm heen valt, en dus is de kracht ook loodrecht op het scherm gericht. Dit geldt dus automatisch ook voor willekeurige massaverdelingen.
4. Conservatieve krachten verrichten geen netto arbeid over een gesloten pad, wat betekent dat systemen weer in dezelfde toestand kunnen komen. In thermodynamica is dit enkel het geval bij reversibele processen, wegens de tweede wet van de thermodynamica zijn dit enkel processen waarbij geen entropie wordt gegenereerd. Dit is enkel het geval als het systeem continu in thermodynamisch evenwicht is, wat zo is als de beweging (in dit geval het 'vallen') veel langzamer gaat dan de interacties in de microscopische theorie (quasistatisch). Compleet reversibele processen zijn echter niet mogelijk, maar als we naar Einstein's algemene relativiteitstheorie kijken zien we ook dat door zwaartekrachts-golven zwaartekracht een heel klein beetje irreversibel is, wat een mogelijke verklaring zou kunnen zijn.

In het geval van entropische zwaartekracht is de microscopische theorie niet bekend, maar men zou zich kunnen voorstellen dat aan deze reversibiliteit is voldaan. Iets preciezer zou je verwachten dat interacties in de microscopische theorie van dezelfde tijdsduur zijn als de zogenaamde Planck tijd ($\approx 10^{-44}s$), wat via dimensieanalyse de verwachte tijdsduur is waar zowel zwaartekracht en quantummechanica belangrijk zijn. Dit laatste is uiteraard meer een toelichting dan onderdeel van de vraag.

8. De Cassini-Huygens ruimtesonde

J. Eldering en J. Kuipers, Universiteit Utrecht

Onderdeel A

Dit volgt direct uit energiebehoud, aangezien op in het oneindige de totale energie 0 is:

$$E_{tot} = 0 = \frac{1}{2}mv_{ontsnap}^2 - \frac{GM_am}{R_a} \quad (8.1)$$

Met M_a en R_a de massa en straal van de aarde. Dit leidt tot:

$$v_{ontsnap} = \sqrt{\frac{2GM_a}{R_a}} = 11.2 \text{ km/s} \quad (8.2)$$

Onderdeel B

In eerste instantie is snelheid nodig voor het ontsnappen van het zwaartekrachtsveld van de aarde. Daarna moet het zwaartekrachtsveld van de zon worden overbrugd, waarvoor een snelheid nodig is van:

$$v = \sqrt{2GM_z \frac{r_s - r_a}{r_ar_s}} = 39.9 \text{ km/s} \quad (8.3)$$

Met M_z , r_a en r_s de massa van de zon, de afstand van de zon tot de aarde en de afstand van de zon tot Saturnus. Gelukkig krijgt de sonde al een flinke snelheid mee door de snelheid van de aarde om de zon en de rotatie van de aarde om zijn eigen as (lanceer vanaf de evenaar). Deze snelheden worden gegeven door:

$$v_{aarde} = 2\pi r_a/T = 29.8 \text{ km/s} \quad (8.4)$$

Met T 1 jaar, respectievelijk

$$v_{rotatie} = 2\pi R_a/t = 0.5 \text{ km/s} \quad (8.5)$$

Met t 1 dag (eigenlijk moet er nog rekening gehouden worden met de stand van de aardas, maar dat is een klein effect). Relatief t.o.v. de aarde heeft de sonde dus een snelheid naar Saturnus nodig van $39.9 - 29.8 = 10.1 \text{ km/s}$, zodat uiteindelijk een snelheid nodig is van:

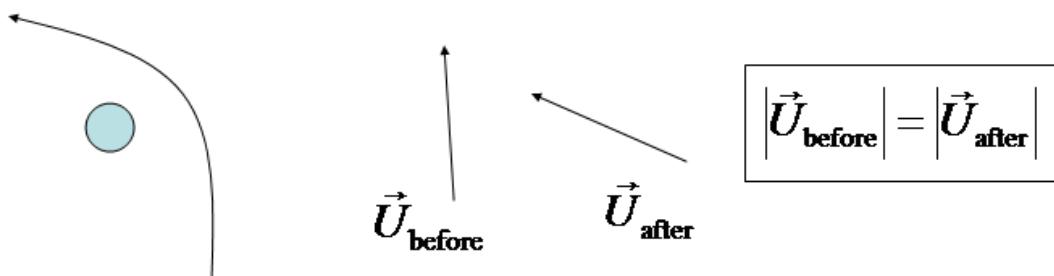
$$v_{tot} = \sqrt{10.1^2 + (11.2 - 0.5)^2} = 14.7 \text{ km/s} \quad (8.6)$$

Deze laatste vergelijking is zo gekozen dat de energie van de sonde 'oneindig' ver van de aarde (dat is in praktijk een stukje verder dan de maan) een snelheid over houdt (t.o.v. de aarde) van de benodigde 10.1 km/s .

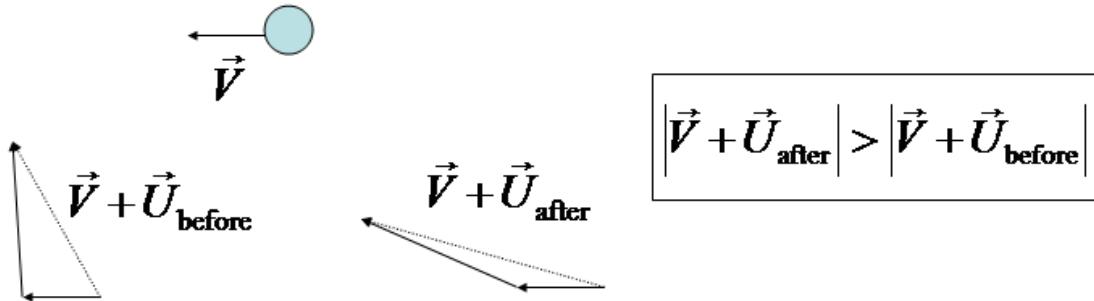
Onderdeel C

In eerste instantie lijkt het raar dat door zo'n slingshot energie kan worden gewonnen, zwaartekracht is immers een conservatieve kracht. Men realiseert zich echter snel dat energiebehoud geldt in het stelsel van Jupiter en dat we geïnteresseerd zijn in het stelsel van de zon. In dit laatste stelsel is het dan ook prima mogelijk dat de sonde energie wint (ten koste van de energie van Jupiter). In het stelsel van Jupiter verandert immers (slechts) de richting van de sonde:

Frame of Reference: Moving with Planet



Frame of Reference: Planet Moving Left



Figuur 8.1: Snelheden in stelsel planeet en zon. Bron: Wikipedia

In theorie is de snelheidswinst dan ook $2|\vec{V}|$, met $|\vec{V}| = 13.1 \text{ km/s}$ de snelheid van Jupiter om de zon. Dit is echter niet realistisch, aangezien de sonde dan 180° zou moeten draaien en aan de figuur in de opgave is duidelijk te zien dat dit niet het geval is. De sonde nadert hier van achter met een hoek van ongeveer 45° , zodat de maximale snelheidswinst ongeveer $\sin 45^\circ |\vec{V}| \approx 9.3 \text{ km/s}$ zou zijn. In werkelijkheid was de snelheidstoename ongeveer 1.5 km/s (bron JPL Horizons On-Line Ephemeris System).

9. Feynman Opgaven

R.P. Feynman, California Institute of Technology

Anker in het water

De wet van Archimedes stelt dat de opwaartse kracht gelijk is aan het gewicht van het verplaatste water. Een boot van gewicht m zorgt dus voor een stijging van het water met een volume m/ρ met ρ de dichtheid van water. Door het anker op de grond te leggen neemt de opwaartse kracht af (er is immers een normaalkracht op het anker) en zal het water dus dalen. Anders gezegd is het volume verplaatste water voor de opwaartse kracht dat nodig is voor het anker groter dan het volume van het anker zelf, omdat het anker een grotere dichtheid heeft dan water (anders is het geen anker).

Pionen en muonen

Dit is op te lossen door energiebehoud en impulsbehoud te eisen, noem de energieën E_π , E_μ en E_ν en de grootte van de impulsen p_π , p_μ en p_ν dan geeft impulsbehoud:

$$p_\pi = 0 = p_\mu - p_\nu \quad (9.1)$$

Waarbij de impulsen van het muon en neutrino uiteraard tegengesteld gericht zijn. Energiebehoud geeft:

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2} + p_\nu c \quad (9.2)$$

Samen geeft dit:

$$m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2 = (p_\mu c - m_\pi c^2)^2 \quad (9.3)$$

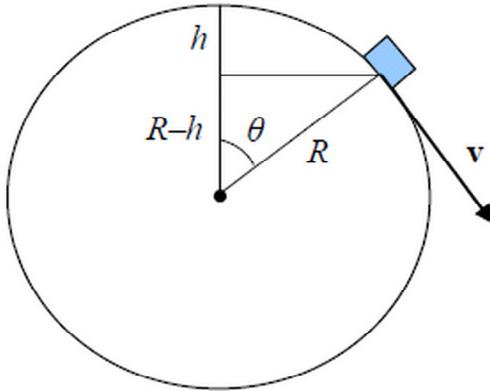
$$p_\nu = p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = 29.56 MeV \quad (9.4)$$

De kinetische energie van het muon is dan de totale energie van het muon min de rustenergie:

$$E_{kin} = m_\pi c^2 - m_\mu c^2 - p_\nu c = 4.08 MeV \quad (9.5)$$

Deeltje op een bol

De situatie is als in de volgende figuur:



Waarbij het deeltje zal loslaten als de zwaartekracht in de richting naar het middelpunt $F_z = mg \cos \theta$ de benodigde middelpuntzoekende kracht $F_{mpz} = mv^2/R$ niet meer kan leveren. Er geldt energiebehoud (geen wrijving) zodat $v^2 = 2mhg = 2mRg(1 - \cos \theta)$, hetgeen de volgende vergelijking oplevert:

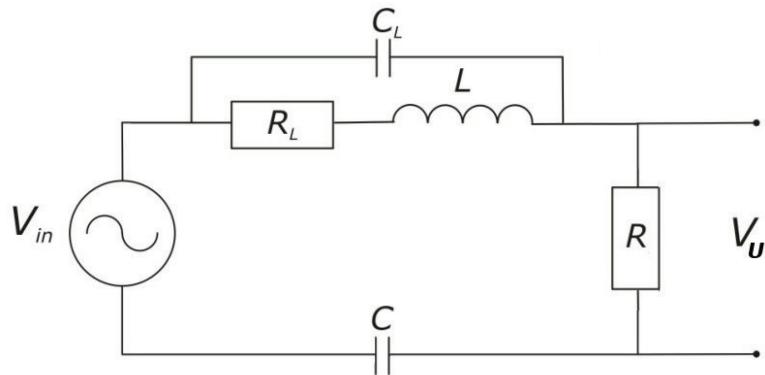
$$\cos \theta = 2(1 - \cos \theta) \quad (9.6)$$

Wat wordt opgelost door $\theta = \arccos \frac{2}{3}$, zodat het balletje een afstand $R/3$ onder zijn beginpunt is.

10. Bepaling van de parasitaire capaciteit van een spoel²

J. van Hoof, Universiteit Utrecht

Om de parasitaire capaciteit te bepalen kan het best de volgende schakeling gebouwd worden:



Figuur 10.1: Het te bouwen circuit, een RCL circuit

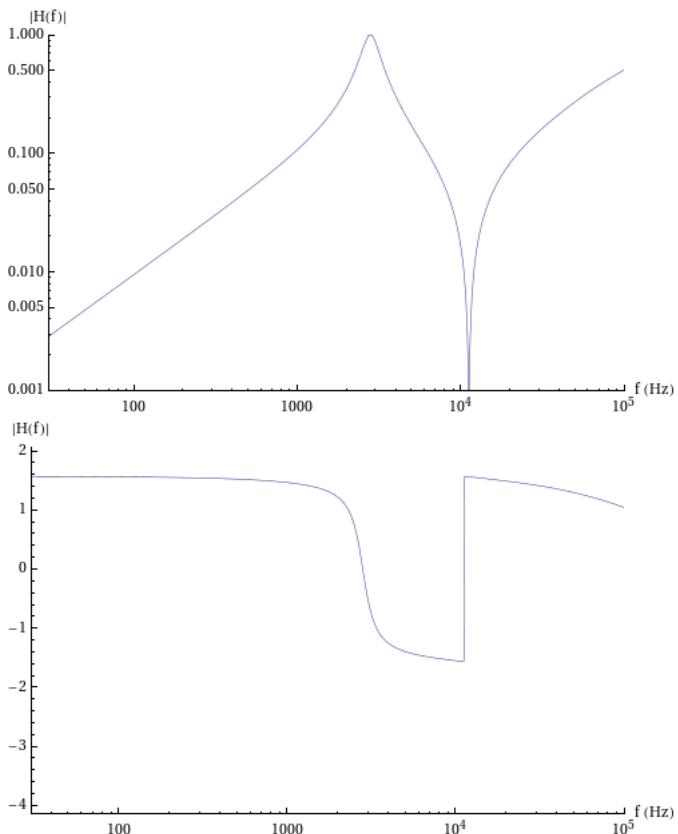
Dit zou zonder de parasitaire capaciteit een gewone LCR-schakeling zijn. De amplitudeoverdracht van deze kring is

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \left| \frac{Z_R}{Z_R + Z_C + \frac{1}{\frac{1}{Z_{R_L}} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_{C_L}}}} \right| \\
 &= \left| \frac{R}{R + \frac{1}{iC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R_L} + iL\omega + iC_L}} \right| \\
 &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2} + \frac{r(2C_Lr+C(r+2R))+L(-2+(C+2C_L)L\omega^2)}{C+CC_L(C_Lr^2-2L)\omega^2+C(C_LL\omega^2)^2}}}
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

En de fase overdracht:

Deze schakeling levert een amplitudeoverdracht met een dubbele piek op. Met de waarden $R = 1.0 \cdot 10^3$ Ohm, $R_L = 1.5$ Ohm, $L = 0.2$ H, $C = 15 \cdot 10^{-9}$ F en een aangenomen waarde voor de parasitaire weerstand $C_L = 1 \cdot 10^{-9}$ F zou dit de plot weergegeven in figuur 10.2 voor het amplitudeoverdracht opleveren, de faseoverdracht staat daaronder. De eerste piek in de

²Dit is een uitwerking van Jacco Heres



Figuur 10.2: De amplitudeoverdracht en de faseoverdracht

amplitudeoverdracht wordt veroorzaakt door de gewone condensator van 15 nF, de tweede, omgekeerde piek door de parasitaire capaciteit van de spoel. In de faseoverdrachtplots wordt de eerste verschuiving over π voornamelijk veroorzaakt door de gewonen condensator, bij hoge frequenties treedt er een verschuiving op door de parasitaire capaciteit.

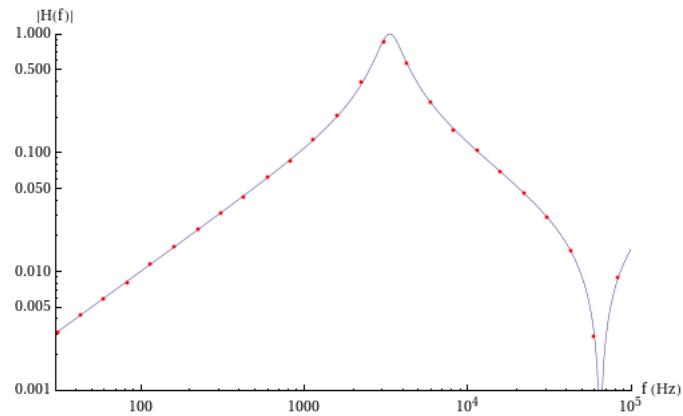
Omdat de benvloeding het best waarneembaar is bij de amplitudeoverdracht, zullen we hiermee het experiment gaan uitvoeren. We hebben gemeten op de volgende waarden van de frequenties (in Hertz):

15.8	22.6	30.9	42.6	59.5	82.5	114.9	159.2	223.2
306.9	429.6	594.6	824	1141	1596	1596	2243	3078
4230	5947	8240	11500	15900	22100	30800	59400	82500
114900	159600	221700	307200	426000	593000	822000	1140000	1590000

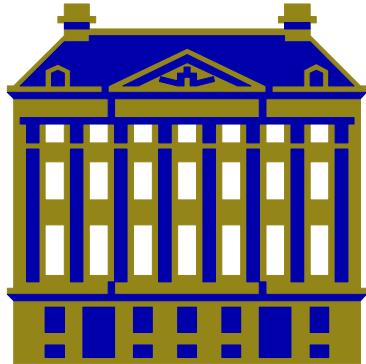
De frequenties zijn ongeveer op gelijke afstand gekozen (op logaritmische schaal) met ω in het interval $[100, 10^7]$. De ingestelde ingangsspanningen waren vrijwel altijd 7.34 V, uitgezonderd rond de eerste piek (daar moet de toongenerator meer vermogen leveren en kan dat niet altijd opbrengen), bij punt 16 t/m 19 waren de waarden respectievelijk 7.260, 7.140, 7.260 en 7.290 V. De gemeten uitgangsspanningen waren:

0.0116	0.0162	0.0227	0.0313	0.0434	0.0597	0.0846	0.118	0.168
0.228	0.314	0.456	0.632	0.952	1.5	2.82	6.16	4.08
1.94	1.14	0.76	0.504	0.332	0.208	0.11	0.0208	0.0652
0.145	0.262	0.396	0.552	0.712	0.944	1.16	1.36	1.5

Wanneer we de resultaten plotten in een grafiek krijgen we de punten in figuur 10.3 variën met de waarde van C_L levert een goede waarde van de parasitaire capaciteit op van ongeveer 40 pF. Op verzoek kan een nog veel uitgebreidere uitwerking verstrekken worden.



Figuur 10.3: De resultaten en de plot van de uiteindelijke amplitudeversterking



K N A W

De Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) is het forum, geweten en de stem van de Nederlandse wetenschap. Zij ontleent haar gezag aan haar op kwaliteit geselecteerde leden. Vanuit een onafhankelijke positie bewaakt zij de kwaliteit en de belangen van de wetenschap en adviseert zij de regering. Bovendien is zij verantwoordelijk voor negentien instituten die met hun onderzoek en collecties tot de voorhoede van de Nederlandse wetenschap behoren en internationale faam genieten. De KNAW geldt daarmee als de autoriteit voor en van de Nederlandse wetenschap.

Jij en de Nederlandse Natuurkundige Vereniging?

De Nederlandse Natuurkundige Vereniging (NNV) is de beroepsvereniging voor fysici in Nederland. Leden zijn werkzaam in onderwijs, onderzoek of bedrijfsleven. Ook veel studenten zijn lid van de NNV. De NNV subsidieert voor leden studentenactiviteiten als reizen, symposia en PION.

Voor slechts € 11 per jaar kun je als student NNV-lid worden. Voor tweedejaars studenten is het lidmaatschap zelfs 1 jaar gratis. Als NNV-lid ontvang je elke maand het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN). Je kunt ook tegen gereduceerd tarief naar het jaarlijkse symposium FYSICA. Zo blijf je op de hoogte van ontwikkelingen in natuurkundig Nederland. Bovendien krijg je, als natuurkundige in spe, een beeld van jouw mogelijkheden in de toekomst.

Kijk voor meer informatie over de NNV en het NTvN op www.nnv.nl op www.ntvn.nl

Meld je aan als lid van de NNV via het webformulier op www.nnv.nl