Pion 2007

Opgaven

PION 2007 wordt mogelijk gemaakt door:

PHILIPS
sense and simplicity

Hoofdsponsor:

Hewitt

Universiteit van Amsterdam

Universiteit Utrecht

FOM

Colofon

datum: 1 juni 2007
oplage: 120 exemplaren
typesetting: LaTeX2e
reproductie: Document Diensten Centrum Utrecht

correspondentieadres:
A-Eskwadraat
t.a.v. Organisatie PION 2007
Princetonplein 5
3584 CC Utrecht

e-mail: pion@a-eskwadraat.nl

Organisatie PION 2007:
Elke Ballemans
Pieter Bons
Thessa Fokkema
Sander Kupers
Wilke van der Schee

Voorwoord

Voor je ligt het boekje met de opgaven van PION 2007. Als organisatie hebben wij de afgelopen maanden hard gewerkt aan het realiseren van de dertiende editie van het Project Interuniversitaire Olympiade Natuurkunde. Deze wedstrijd is daar het resultaat van.

Wij wensen jullie veel plezier en succes bij het maken van de opgaven. Naast een spannende wedstrijd hopen wij dat vandaag een gezellige dag zal zijn waarop natuurkundestudenten uit heel Nederland met elkaar in contact komen.

Dit boekje had niet tot stand kunnen komen zonder de bijdrage van de opgavenmakers. Wij willen dan ook alle opgavenmakers zeer hartelijk bedanken voor hun bijdrage, zij hebben flink hun best gedaan om jullie stevig aan het denken te zetten. Ook willen wij de sponsoren, in het bijzonder onze hoofdsponsor Hewitt, bedanken voor het financieel mogelijk maken van deze dag.

Namens de organisatie van PION 2007,

Thessa Fokkema
Voorzitter PION 2007

Lees dit eerst!

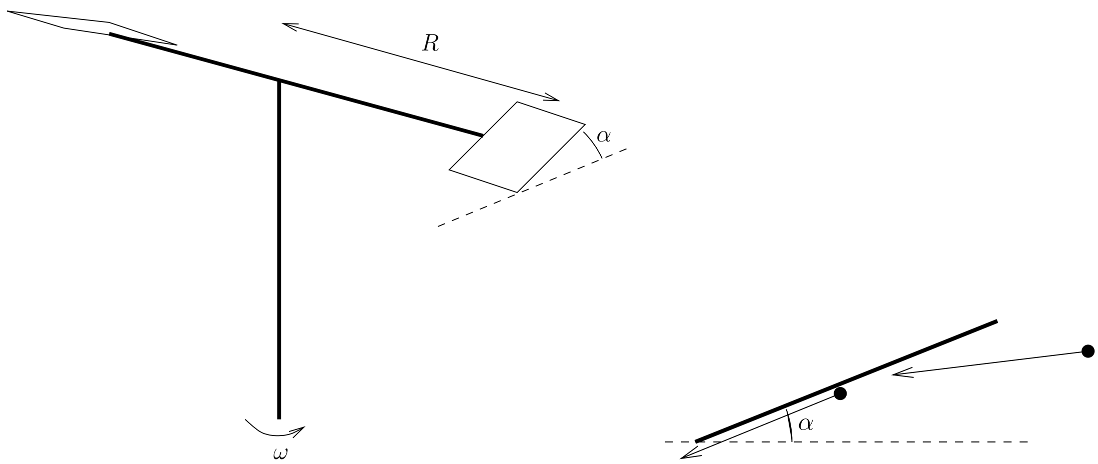
Het maken van de opgaven

- Jullie hebben precies 3 uur de tijd om de opgaven te maken
- Schrijf duidelijk en geef bij de antwoorden een duidelijke toelichting en/of berekening
- Maak iedere opgave op een apart vel
- Schrijf bovenaan ieder ingeleverd vel de teamnaam en het nummer van de opgave
- Achterin het boekje is een formuleblad opgenomen

Regels

- Het is niet toegestaan gebruik te maken van boeken, aantekeningen, etc. anders dan een BINAS.
- Tijdens de wedstrijd is het niet toegestaan over de opgaven te communiceren (spreken, internet, mobiel, etc.) met anderen dan teamgenoten.
- Het is niet toegestaan een rekenmachine te gebruiken met meer functies dan een TI-83 of equivalent.

Inhoud



We beschouwen een simpel model voor een helicopter, zoals getekend staat in het plaatje. Het bestaat uit een verticale draaias met daaraan een horizontale staaf. Aan beide uiteinden daarvan bevindt zich een rotorblad. Dit zijn twee vlakke bladen met oppervlakte A, waarvan verondersteld mag worden dat die zich geheel op afstand R bevinden. Beide bladen maken een hoek α met het horizontale vlak. Het geheel heeft een massa M en we gaan er vanuit dat alle massa in de rotorbladen zit, zodat voor het traagheidsmoment geldt $I = MR^2$.

We zijn geïnteresseerd in de (verticale) beweging van de helicopter als we hem een initiële hoeksnelheid ω_0 geven. De helicopter zal dan opstijgen om vervolgens onder de invloed van de zwaartekracht weer neer te dalen. Als model voor de lift van de rotorbladen gebruiken we het volgende: de luchtdeeltjes (met dichtheid ρ) die tegen de rotorbladen aanbotsen, buigen af zodat ze langs het vlak van het rotorblad wegstromen en de krachten hierbij werken alleen loodrecht op dat vlak.

(a) Laat zien dat de beweging van de helicopter beschreven wordt door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= +\frac{2\rho A}{MR}(-\omega R\sin\alpha + v_y\cos\alpha)\,|-\omega R\sin\alpha + v_y\cos\alpha|\,\sin\alpha,\\
\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{2\rho A}{M}(-\omega R\sin\alpha + v_y\cos\alpha)\,|-\omega R\sin\alpha + v_y\cos\alpha|\,\cos\alpha - g.
\end{aligned}$$

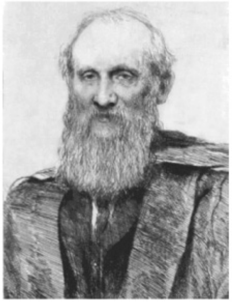
(b) Beschrijf hoe de helicopter na lange tijd onder invloed van de zwaartekracht naar beneden daalt en beschouw apart het geval $\alpha = 0$.

(c) Los de bewegingsvergelijkingen op met beginvoorwaarden $\omega(0) = \omega_0 > 0$ en $v_y(0) = 0$ en schets de baan $y(t)$. Hint: doe een handige variabelensubstitutie, gebaseerd op het gedrag na lange tijd.

Toen in 1858 de eerste transatlantische kabel gelegd werd, maakt de fysicus William Thomson (de latere Lord Kelvin) daar een model van. Hij kwam tot de conclusie dat een golf $u(x,t)$ door deze kabel zou moeten voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RC\frac{\partial u}{\partial t}$$

waarin R en C resp. de weerstand per meter en de capaciteit per meter zijn.



Figuur 2.1: W. Thomson (Lord Kelvin).

(a) Laat zien dat $u(x,t) = Ae^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$ voldoet aan deze vergelijking.

(b) Op grond van zijn model concludeerde Thomson dat de transatlantische kabel ongeschikt zou zijn voor telefonie. Daarvoor had hij een aantal redenen.

Welke twee redenen zou Thomson hiervoor gehad kunnen hebben?

Een tijdgenoot van Thomson, Oliver Heaviside, liet echter zien dat Thomson in zijn model een ongeoorloofde benadering had gemaakt en vond een betere vergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RC\frac{\partial u}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Hierin is L de coëfficiënt van zelfinductie per meter. Ook aan deze vergelijking voldoet een golf van de vorm $u(x,t) = Ae^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$.

Figuur 2.2: O. Heaviside.

(c) Geef, met behulp van de Heaviside-vergelijking, de voorwaarden aan (in termen van de kenmerkende grootheden R, L, C en ω) waaronder de transatlantische kabel wel degelijk geschikt kan zijn voor telefonie.

You'll move him

Bij Philips zijn we ervan overtuigd dat technologie zowel geavanceerd als eenvoudig kan zijn. Technologie die zinvol is en gemakkelijk te ervaren. Zoals de imposante en energiezuinige verlichting van voetbalstadions of een audiosysteem waarmee je ontspannen naar muziek kunt luisteren. Philips biedt ook jou alle kansen om je gedachten en ideeën in te zetten voor het verbeteren van het leven van mensen overal ter wereld. Kijk daarom voor informatie over stages en banen op onze website.

www.philips.com/careers

PHILIPS

sense and simplicity

3. Een merkwaardige cirkelbaan

J.M. Ruitenbeek, Universiteit Leiden

Een puntvormig deeltje beweegt onder invloed van een centraal krachtenveld beschreven door de potentiaal $V(r)$. Terwijl we de beweging van het deeltje enige tijd volgen komen we tot onze verbazing tot de ontdekking dat het over een cirkelboog beweegt waarvan het centrum *niet* samenvalt met het centrum van de potentiaal. Wanneer de oorsprong van ons cordinatenstelsel wordt gegeven door het centrum van de potentiaal $V(r)$ dan beweegt het deeltje over een cirkelboog met straal ρ waarvan het centrum op een afstand $R > \rho$ ligt.

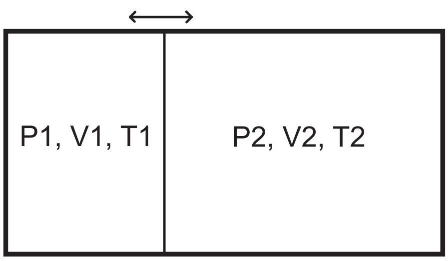
Bepaal de potentiaal. Aanwijzing: werk in een Cartesisch coördinatenstelsel en denk met name aan bekende behoudswetten.

Opmerking: Deze opgave bestaat uit twee onafhankelijk van elkaar te maken deelopgaven.

De zuiger van Callen

In de thermodynamica worden uit een klein aantal aannames op microscopisch niveau macroscopische wetten afgeleid. Een voorbeeld hiervan is de ideale gaswet ($pV = NkT$). Deze wetten zijn zogenoemd van statistische aard: bij een beperkt aantal deeltjes is er een (kleine) kans dat het systeem uit de toestand gaat die de thermodynamica haar voorschrijft. Twee systemen zijn in thermodynamisch evenwicht als hun eigenschappen niet veranderen, wanneer de systemen met elkaar in contact gebracht worden. Contact betekent hier o.a. dat de systemen energie met elkaar kunnen uitwisselen. Thermodynamisch evenwicht betekent hier o.a. dat de temperaturen gelijk zijn. In deze opgave wordt een bijzonder geval van 'contact' bekeken.

(a) In een vat met adiabatische (perfect warmte isolerende) wanden bevinden zich twee gassen die gescheiden worden door een vrij beweegbare adiabatische zuiger met massa. Op tijdstip t_0 wordt de zuiger in een willekeurige stand losgelaten; in evenwicht zouden de drukken in de twee compartimenten gelijk moeten zijn, evenals de temperaturen. Neem aan dat alle veranderingen reversibel verlopen en toon aan dat de regels van de thermodynamica slechts toelaten de gelijkheid van de drukken te voorspellen, maar niet die van de temperaturen.



Bonus: Voor veel fysici is dit zeer tegenintutief aangezien een belangrijk resultaat in de thermodynamica is dat systemen in contact in evenwicht dezelfde temperatuur hebben. Hoe denk je dat na erg lange tijd de toestand eruit ziet? En waarom?

Lichtsnelheid volgens Rømer

(b) In 1676 publiceerde de deense astronoom Ole Rømer, werkzaam op de sterrenwacht van Parijs, een artikel in de JOURNAL DES SÇAVANS waarin hij betoogde dat het licht zich met een grote, maar eindige snelheid voortplant. Hij baseerde zich hierbij op metingen van de perioden tussen eclipsen door Jupiter van de Jupitermaan Io, zoals die vanaf de aarde werden waargenomen.

Io voltooit haar omloop om Jupiter in 42,5 uur, maar in de waarneming van deze periode treden systematische afwijkingen op, afhankelijk van de positie van de aarde ten opzichte van die van Jupiter. Op grond van de gegevens van Rømer berekende Christiaan Huygens een lichtsnelheid van $212 \cdot 10^3\,\mathrm{km/sec}$.

Geef in een of twee figuren en een korte toelichting aan wat voor metingen Rømer gebruikt zou kunnen hebben (een uitgebreider verslag van zijn hand is verloren gegaan) en hoe daaruit de lichtsnelheid kan worden bepaald. Neem voor het gemak aan dat alle banen cirkelvormig zijn. Laat door berekening zien dat je op deze manier ook daadwerkelijk een redelijke schatting van de lichtsnelheid kan maken en beargumenteer hierbij ook dat de fout door de benadering van de cirkelbaan niet al te groot is.

Gegevens:

- Straal aardbaan: $1,50 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$.
- Straal Jupiterbaan: $7,78 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$.
- Straal Iobaan om Jupiter: $4,22 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.
- Omlooptijd Jupiter: $11,9\,\mathrm{jaar}$.

Rare Hubble Portrait of Io and Jupiter

This image shows Jupiter's volcanic moon Io passing above the turbulent clouds of the giant planet. The conspicuous black spot on Jupiter is Io's shadow. This shadow is about the size of Io (2,262 miles or 3,640 kilometers across) and sweeps across the face of Jupiter at 38,000 mph (17 kilometers per second). The smallest details seen on Io and Jupiter are about 100 miles across. Bright patches visible on Io are regions of sulfur dioxide frost. Io is roughly the size of Earth's moon but 2,000 times farther away.

5. Verklaar het uitdijend heelal aan een achtjarige

V. Icke, Sterrewacht Leiden

Je kunt iemands begrip van de natuurkunde toetsen met tentamens en soortgelijke opgaven, maar er zijn ook andere manieren. Een interessante mogelijkheid werd gegeven door de grote fysicus Richard Feynman: *If you cannot explain it to an eight-year-old, you havent understood it yourself* (mijn parafrase). Vandaar deze opgave:

Verklaar het uitdijend heelal aan een achtjarige.

Laat achtereenvolgens zien:
(a) Welke waarnemingen erop wijzen dat ons Heelal homogeen en isotroop is; (b) Hoe men waarneemt dat het heelal uitdijt; (c) Waarom een dergelijk heelal moet bewegen volgens de Hubble-relatie $v = Hr$; (d) Dat dit leidt tot het verschijnsel oerknal; (e) Hoe daaruit volgt dat er een gloed van de oerknal te zien moet zijn, en hoe die is waargenomen; (f) Hoe die waarnemingen het oerknal-beeld bevestigen; (g) Een schets van de onopgeloste problemen.

Het gebruik van alle textuele, grafische, beeldende en audiovisuele middelen is toegestaan.

Opmerking: In de deeltjesfysica geven we energie aan in [eV] – dus de energie die een deeltje met een lading e na het doorlopen van van 1 V spanningsverschil heeft gewonnen. Impuls wordt gegeven in [eV/c] – waarbij c de lichtsnelheid is – en massa in [eV/c^2]. Je hoeft energieën hier niet in [J] of vergelijkbare eenheden om te rekenen.

Een deeltje A met massa $M = 1\,\mathrm{GeV}/c^2$ vervalt in twee deeltjes B met massa $m = 0.3\,\mathrm{GeV}/c^2$. Als het deeltje A in rust is vindt het verval na een karakteristieke tijd τ plaats, die onbekend is. Om het rekenwerk in deze opgave te vereenvoudigen nemen we aan dat deeltje A in het ruststelsel ook precies na een tijd τ vervalt.

We sturen nu een bundel van deeltjes van soort A met energie E door een gat in een scherm in de richting van een fotografische plaat. De richting van de deeltjesbundel staat loodrecht op de plaat. De deeltjes vliegen een afstand l, die van de vervaltijd τ maar ook van de snelheid van de deeltjes A afhangt, voor ze in deeltjes B vervallen. De vervalsproducten B vallen hierna op de fotografische plaat. De afstand tussen het scherm en de fotografische plaat is gelijk aan d. Uiteraard geldt dat $l < d$. Na de meting vinden we op de plaat de sporen van de deeltjes B verdeelt binnen een cirkel met straal r. Merk op dat l in een experiment erg lastig is te detecteren.

Zie het formuleblad achterin dit boekje voor enkele handige formules.

(a) Wat zal de hoek zijn tussen de impuls van de deeltjes B die op de cirkelstraal vallen en de deeltjesbundel? Uiteraard is deze hoek in het laboratoriumstelsel. Geef je antwoord in termen van p_B^*, E_B^* en V die resp. de impuls van B in het ruststelsel van A, de energie van B in het ruststelsel van A en de snelheid van de deeltjesbundel voorstellen. Bedenk hierbij dat in het ruststelsel het onduidelijk is onder welke hoek de deeltjes zullen vervallen. Deze onduidelijkheid zorgt ervoor dat de deeltjes B binnen een cirkel met straal r vallen.

(b) Wat is de vervaltijd τ van het deeltje A? Geef je antwoord in termen van de M, m, E, d en r. (NB: als je het antwoord bij a niet gevonden hebt, mag je de hoek ook in je antwoord laten staan)

(c) In bovenstaand experiment zijn de volgende waardes gebruikt en gevonden:
$E = 2\,\mathrm{GeV}$
$d = 1$ m
$r = 16$ cm.
Wat is de numerieke waarde van τ? (NB: als je het antwoord bij b niet gevonden hebt, mag je ook een goed onderbouwde schatting doen)

7. Diepvrieskist *E.P.T.M. Suurmeijer*

Een goede diepvrieskist is, na te zijn geopend en weer gesloten, moeilijk direct daarop weer open te krijgen.

(a) Beredeneer de oorzaak van dit verschijnsel.

We beschouwen een lege diepvrieskist met een inhoud van 200 liter en een wandtemperatuur van $-20\,^{\circ}$C. Tijdens het openen vermengt de lucht in de kist zich met warmere omgevingslucht. Neem aan dat de gemiddelde temperatuur van de lucht in de kist hierdoor stijgt naar $-5\,^{\circ}$C. Na het sluiten daalt deze temperatuur in ca. 1 minuut weer naar $-20\,^{\circ}$C. Op het moment van sluiten (bij $-5\,^{\circ}$C) bedraagt de druk in de diepvrieskist 105 Pa ($=$ 1000 mbar $\approx$ 1 atm) en bezit een relatieve vochtigheid van 50%. De dampdruk van verzadigde waterdamp bij $-5\,^{\circ}$C is 420 Pa en bij $-20\,^{\circ}$C 100 Pa.

(b) Hoeveel Pa onderdruk heerst er 1 minuut na het sluiten in de kist? Verwaarloos hierbij de lekkage via het dekselrubber.

(c) Heeft de aanwezigheid van waterdamp in de omgevingslucht significante invloed op de uitkomst onder punt b?

Het deksel van de vrieskist meet 40 bij 80 cm.

(d) Bereken de netto kracht die 1 minuut na het sluiten op het deksel wordt uitgeoefend.

De grootte van de onder punt d) berekende kracht zou het onmogelijk maken om het deksel te openen. Waarschijnlijk zou de vrieskist zelfs in het geheel niet bestand zijn tegen zo'n naar binnen gerichte kracht en in elkaar klappen. In de praktijk blijkt echter dat een volwassenen persoon het deksel, zij het met enige moeite, na de tijdsduur van 1 minuut gewoon kan openen.

(e) Beredeneer deze waarneming.

(f) Bedenk een voorziening op de kist waarmee het onderdrukprobleem kan worden opgelost.

In het eerste deel van de opgave wordt gevraagd te bewijzen dat de aarde een ellipsvormige baan beschrijft rond (het gemeenschappelijke zwaartepunt met) de zon.

In het tweede deel moet aangetoond worden dat het eindpunt van de snelheidsvector van de aarde, de hodograaf, een cirkelbaan beschrijft.

De beweging van de aarde rond de zon wordt beschreven door

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{r^3}\vec{r},$$

waarbij $\vec{r}$ de voerstraal van de zon naar de aarde is en $\vec{p} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ de impulsvector van de aarde voorstelt.

(a) Bewijs dat het impulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ een constante vector is.

(b) Bewijs dat ook de zgn. Laplace-Runge-Lenz-vector

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{r} \quad \text{met} \quad r = |\vec{r}| \tag{8.1}$$

een behouden grootheid is. (Hint: gebruik de identiteit $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$.)

(c) Bewijs dat $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$, zodat $\vec{A}$ in het baanvlak ligt.

(d) Laat zien dat $\vec{A} \cdot \vec{r} = L^2 - mkr$. Als θ de hoek is tussen $\vec{A}$ en $\vec{r}$, volgt hier uit dat

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}, \tag{8.2}$$

waarbij als afkortingen zijn ingevoerd

$$\varepsilon = \frac{A}{mk} \quad \text{en} \quad a = \frac{L^2}{mk(1-\varepsilon^2)}.$$

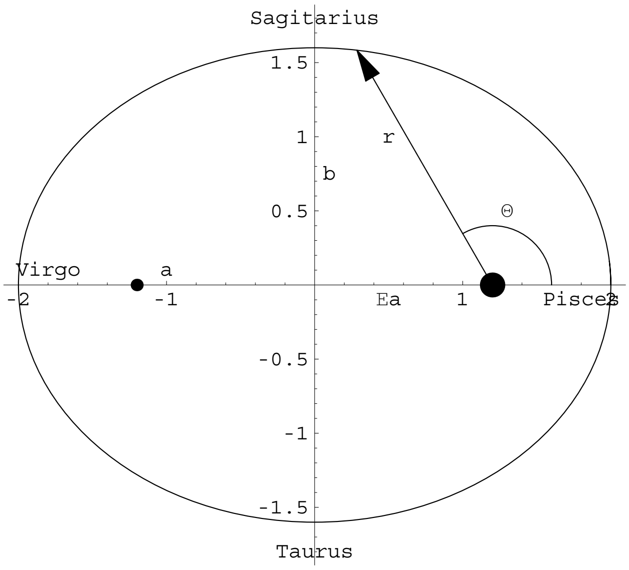
(e) Bewijs dat vergelijking 8.2 een ellips beschrijft met een halve lange as gelijk aan a en eccentriciteit ε. Ga hierbij uit van de voorstelling van een ellips door

$$\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

waarin b gelijk is aan de halve lange as en

$$\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \quad \text{en dus} \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Voor notaties zie figuur 8.1.



Figuur 8.1: Figuur met notaties bij deelopgave (e).

(f) Definiëer de constante vector $\vec{p}_0 = \frac{\vec{L}\times\vec{A}}{L^2}$ en laat zien dat

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \frac{mk}{L^2 r}\vec{L} \times \vec{r}.$$

(g) Bewijs dat

$$|\vec{p} - \vec{p}_0|^2 = \left(\frac{mk}{L}\right)^2.$$

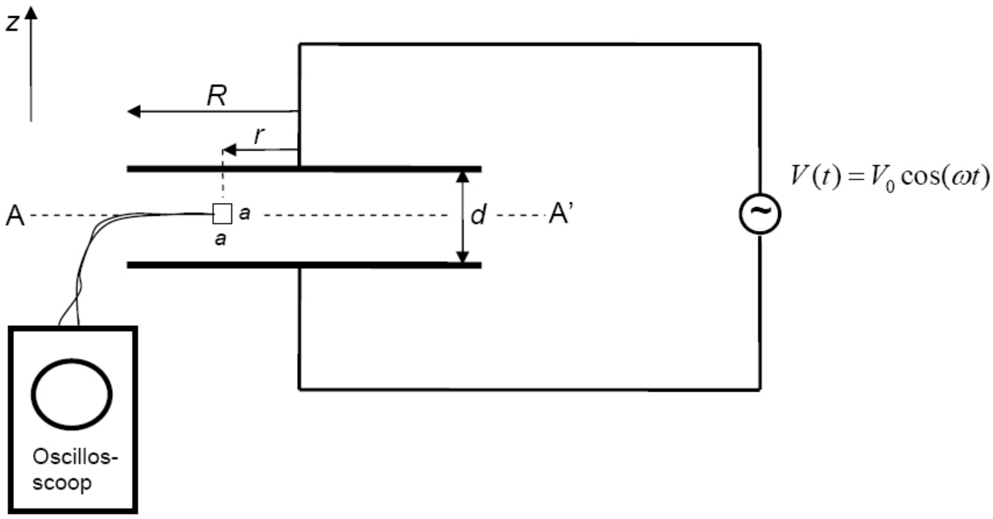
Hiermee is bewezen dat de "hodograaf"van de Keplerbeweging een cirkel is met middelpunt in $\vec{p}_0$ en met een straal gelijk aan $\frac{mk}{L}$.

(h) Neem in de definitie 8.1 van de Runge-Lenz vector $\vec{r}$ in het perihelium van de baan en laat zien dat $\vec{A}$ evenwijdig is aan de lange as van de ellips. Het perihelium is hierbij het punt waarbij de aarde zich het dichtst bij de zon bevindt.

(i) De energie $E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \frac{k}{r}$ is ook een behouden grootheid. Deze is echter niet onafhankelijk van A en L. Bewijs dit.

Een vlakke-plaat condensator met cirkelvormige platen met straal R en afstand d ($d << R$) staat opgesteld in vacum (voor een dwarsdoorsnede van de condensator, zie figuur). Het potentiaalverschil tussen de platen is tijdsafhankelijk en wordt gegeven door $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

Neem aan dat het elektrische veld $\vec{E}$ tussen de platen uniform is en gericht is in de $\hat{z}$-richting. De potentiaal V_{ind} gegenereerd in een kleine stroomkring opgesteld tussen de platen (een vierkant met zijden a, liggend in het vlak van tekening) wordt gemeten m.b.v. een oscilloscoop (met hoge ingangsimpedantie). Het centrum van de stroomkring bevindt zich op afstand r van het centrum van de condensator (zie figuur 9.1). De bedrading van de stroomkring is zeer goed ineengevlochten.



Figuur 9.1: De opstelling van deze opgave.

(a) Bereken de velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ overal tussen de platen.

(b) Bereken het signaal V_{ind} dat op de oscilloscoop te zien is.

(c) Laat door berekening zien wat er met het signaal op de oscilloscoop gebeurt wanneer de stroomkring met hoeksnelheid ω om de as AA'wordt rondgedraaid. Op tijdstip $t = 0$ ligt de stroomkring in het vlak van tekening, zoals aangegeven in de figuur. Geef expliciet aan wat er met de amplitude en frequentie van de potentiaal gebeurt. Schets het signaal op de oscilloscoop.

Beantwoord dezelfde vraag ook in het geval dat de stroomkring niet op $t = 0$ in het vlak ligt.

(d) Zelfde vragen als onderdeel (c) maar nu wanneer de stroomkring met hoeksnelheid 2ω om de as AA'wordt rondgedraaid.

De Nederlandse Natuurkundige Vereniging komt op voor de positie van de natuurkunde en behartigt de belangen van natuurkundigen en natuurkunde-studenten. De NNV steunt activiteiten van studenten, zoals buitenlandse reizen en symposia, maar ook PION.

In deze tijd waarin bijvoorbeeld het natuurkunde-onderwijs op de middelbare school onder druk staat, is een sterke vereniging van natuurkundigen geen overbodige luxe.

Word daarom lid!

Studenten betalen slechts 10 euro per jaar en als je tweedejaars student bent, is het lidmaatschap zelfs 1 jaar gratis. Als lid van de NNV ontvang je elke maand het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde (NTvN) en krijg je korting op het jaarlijkse FYSICA-congres. Zo blijf je dus op de hoogte van ontwikkelingen binnen de wereld van de natuurkunde en krijg je een beeld van wat jouw mogelijkheden als natuurkundige later zullen zijn.

Kijk voor meer informatie op www.nnv.nl .

Opsturen naar: Bureau NNV, Postbus 41882, 1009 DB Amsterdam

Aanmeldingsformulier Nederlandse Natuurkundige Vereniging

Achternaam: .... Voorvoegsels:........................

Voorletters: ....   Voornaam: .... Titels: ....   M / V

Adres: ....

Postcode + Plaats: .... Geboortedatum: ..../..../19..........

Telefoon privé / mobiel:.................................... / 06-..

Emailadres: ....

Begindatum studie: ..../..../........ Opleidingsinstelling: ....

lid van de Vereniging voor Biofysica / KIVI / KNCV: Ja / Nee*
lid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap: Ja / Nee*
lid van de Nederlandse Astronomenclub: Ja / Nee*
lid van de Belgische Natuurkundige Vereniging: Ja / Nee*
lid van de Ned. Ver. voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen: Ja / Nee*

* Voor gecombineerd lidmaatschap met bovengenoemde verenigingen geldt voor niet-studenten een reductieregeling.

meldt zich aan als lid van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging en meldt zich tevens aan als lid van de volgende secties[1] (maximaal vier): ....

Datum: Handtekening:

[1] Secties: Astrofysica (AF),Atomaire, Moleculaire en Optische Fysica (AMO), Biofysica (BF), Grondslagen der Natuurkunde (GN), Hoge-energiefysica (HF), Halfgeleiders (HG), Kernfysica (KF), Ned. Ver. voor Kristalgroei (NVKG), Ned. Keramische Ver. (NKV), Natuurkunde en Maatschappij (NM), Ned. Ver. voor Neutronenverstrooiing (NVNV), Ned. Ver. voor Massaspectroscopie (MS), Onderwijs & Communicatie (OC), Oppervlakken en Dunne lagen (OD), Optica en Fotonica (OF), Plasma- en Gasontladingsfysica (PG), Ned. Ver. voor Kristallografie (VK)

10. Een virtueel deeltje *N. Kalantar-Nayestanaki, Rijksuniversiteit Groningen*

Het bestaan van een zwaar meson was al gesuggereerd door Yukawa in 1935 (Nobelprijs, 1949) om de kernkrachten binnen een atoom te verklaren. Het is bekend dat de sterke kernkracht een korte reikwijdte heeft en dat de kracht eigenlijk alleen binnen de kern bestaat. In Yukawa's theorie kan een zwaar meson uitgewisseld worden tussen twee nucleonen (protonen en neutronen). Dit (virtuele) meson is een boodschapper deeltje van de sterke kernkracht (dit is analoog met de elektromagnetische kracht waarbij het foton het boodschapper deeltje is en de reikwijdte oneindig is). De vraag is nu de reikwijdte van dit deeltje af te schatten door te gebruiken dat het deeltje virtueel is en dus voor een beperkte tijd bestaat.

(a) Maak gebruik van bekende relativistische formules om met het onzekerheidsprincipe een relatie te bepalen tussen de reikwijdte van de kracht en de massa van het meson.

(b) In deeltjesfysica is bekend dat virtuele deeltjes zogenoemd off-shell kunnen zijn. Dat wil zeggen dat de vergelijking $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ niet hoeft te gelden. Beredeneer wat voor effect dit op de reikwijdte heeft en geef weer de relatie tussen de draagkracht en de massa.

(c) In de kern is de afstand tussen nucleonen minder dan 1 fm (dit is $1 \cdot 10^{-15} m$). Gebruik dit om de massa van het zware meson (later pion genoemd) te bepalen. Vergelijk de uitkomst met de werkelijke waarde van ongeveer 140 MeV/c^2.

Opmerking: Om het antwoord snel te berekenen mag je gebruiken dat $\hbar c \approx 200\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$.

11. Zeepbellen

J.M. Ruitenbeek, Universiteit Leiden

Iedereen heeft dit in zijn vroege jeugd gedaan. Wanneer we een ring in een oplossingen dopen ontstaat er een zeepvlies in de ring, en wanneer we daar voorzichtig doorheen blazen maakt zich een zeepbel los van de ring.

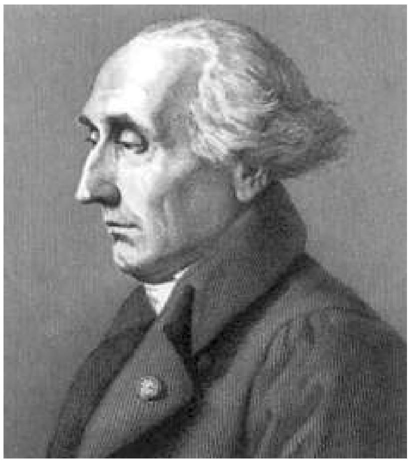
De opdracht is nu: ontwerp een experiment om de massa van een zeepbel te meten.

(a) Maak eerst een onderbouwde schatting van de te meten massa.

(b) Beschrijf vervolgens een methode om tot een meting van de massa te komen. Bespreek de voordelen en de beperkingen van de methode en maak een onderbouwde schatting van de nauwkeurigheid die hiermee bereikt kan worden.

NB: Soms lukt het om een zeepbel ongeschonden te laten landen op het oppervlak van een balans. Hoewel deze benadering niet verkeerd is, willen we deze buiten beschouwing laten.

Achtergrond: Een bekend probleem van de klassieke mechanica is het drielichamenprobleem. Hierbij gaat het om het vinden van de banen van drie puntmassa's die interacties met elkaar hebben volgens Newton's zwaartekrachtwet. Dit blijkt een extreem lastig probleem te zijn omdat de beweging van de massa's chaotisch gedrag vertoont. De grote wiskundige Henri Poincaré schrijft zelfs een tweedelig boek over een beperkte versie van drielichamenprobleem: LES MÉTHODES NOUVELLES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE. In 1912 laat de Finse wiskundige Karl Sundman zien dat er een reeksuitdrukking in machten van $t^{1/3}$ voor de algemene oplossing is mits de beginvoorwaarden een impulsmoment ongelijk aan nul hebben. De convergentie van deze reeks is echter te langzaam om van praktisch nut te zijn. Bij het bestuderen van een realistisch drielichamenprobleem als het zon/aarde/maan systeem worden daarom vaak computersimulaties gebruikt.



Figuur 12.1: Een portret van Joseph Lagrange (1736-1813). Bron: Wikipedia.

Toch is het niet om onmogelijk zonder computers of zware wiskunde iets over dit systeem te zeggen. In deze opgave gaan we namelijk een speciale evenwichtssituatie bekijken en zullen we zelfs zien dat deze situatie ook bij veel algemenere krachtwetten voorkomt.

Opgave: Ons geval betreft een stabiele configuratie in het drielichamenprobleem, voor het eerst door Joseph Lagrange gevonden, in zijn artikel ESSAI SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.[1] Er zijn in dit geval drie puntmassa's in drie dimensies, m_1, m_2, m_3 ongelijk nul, met respectievelijk de positievectoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. We nemen aan dat de massa's niet op één lijn liggen. Als we dus in het vlak van de massa's kijken zien we dat deze een driehoek vormen.

De situatie die ons interesseert, is het 'evenwicht' waarbij de driehoek rond het massamiddelpunt draait, maar waarbij de vorm van de driehoek niet verandert. Dit wil zeggen: de onderlinge afstanden tussen de drie massa's blijven gelijk. De driehoek gedraagt zich dus als een star lichaam. Zo'n configuratie noemen we een *evenwichtige driehoeksconfiguratie*. Het zal blijken dat alleen bepaalde driehoeken en bepaalde rotatieperioden een evenwichtige driehoeksconfiguratie opleveren.

Opmerking: de deelopgaven zijn verdeeld in drie groepen die je afzonderlijk kunt maken: de deelopgaven (a) en (b), de deelopgaven (c) t/m (f) en deelopgave (g).

Eerst beschouwen we het geval met zwaartekracht als wisselwerking tussen de massa's. Dat wil zeggen: de kracht van massa j op massa i is gelijk aan:

$$\vec{F}_{ij} = \frac{G m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

[1]Deze specifieke afleiding is echter geïnspireerd door het artikel SIMPLE DERIVATION OF LAGRANGE'S THREE-BODY EQUILIBRIUM van Daniel F. Styer, American Journal of Physics, Volume 58, Issue 10, pp. 917-919.

(a) Stel dat de driehoek van onder zwaartekracht wisselwerkende massa's gelijkzijdig is met zijden van lengte R en dat deze driehoek draait met hoeksnelheid $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{R^3}$ om de as door zijn massamiddelpunt die loodrecht op het vlak van de driehoek staat.

Laat zien dat dit een evenwichtige driehoeksconfiguratie is. Hint: In een goed gekozen coördinatenstelsel vereist deze opgave nauwelijks rekenwerk.

We bekijken nu een algemenere krachtwet, namelijk een aantrekkende centrale kracht. Zij $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Dit wil zeggen dat alleen $x > 0$ in f ingevuld kunnen worden en dat dan ook geldt dat $f(x) > 0$. Laat dan massa j op massa i de volgende kracht uitoefenen:

$$\vec{F}_{ij} = m_i m_j f(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

(b) Stel dat drie massa's onder deze algemene krachtwet wisselwerken. Stel dat deze drie massa's een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte R vormen en dat deze driehoek om de as door zijn massamiddelpunt die loodrecht op het vlak van de driehoek staat draait met hoeksnelheid ω.

Vind de hoeksnelheid ω afhankelijk van m_1, m_2, m_3 en R, zodat deze driehoek een evenwichtige driehoeksconfiguratie vormt. Vergelijk het gevonden antwoord met de bij (a) gegeven hoeksnelheid.

We hebben dus nu een aantal gevallen gevonden van driehoeksconfiguraties die evenwichtig zijn. We zullen nu laten zien dat dit de enige evenwichtige driehoeksconfiguraties zijn. Daarvoor bekijken we eerst wisselwerking via Newton's zwaartekrachwet.

(c) Laat drie onder zwaartekracht wisselwerkende massa's niet op één lijn liggen. Stel dat dit een evenwichtige driehoeksconfiguratie is, die met een constante hoeksnelheid $\vec{\omega}$ ronddraait om een as door het massamiddelpunt.[2]

Laat zien dat deze richting van deze as, dat wil zeggen de richting van $\vec{\omega}$, loodrecht op het vlak van de driehoek staat. Hint: Je kunt hierbij gebruik maken van de vectoridentiteit $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$.

(d) Laat zien dat in deze evenwichtige driehoeksconfiguratie de driehoek gelijkzijdig moet zijn en de hoeksnelheid gegeven moet worden door $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2+m_3)}{R^3}$, als R de lengte van de zijden is.

We vervolgen nu door weer een algemenere krachtwet te bekijken.

(e) Laat drie onder de algemenere krachtwet wisselwerkende massa's niet op één lijn liggen. Stel dat dit een evenwichtige driehoeksconfiguratie is, die met een constante hoeksnelheid $\vec{\omega}$ ronddraait om een as door het massamiddelpunt.

Laat zien dat ook in dit geval deze richting van deze as loodrecht op het vlak van de driehoek staat.

[2] Er wordt hier niets aangenomen over de richting van de as. Volgens de aannamen kan de richting van deze as bijvoorbeeld best in het vlak van de driehoek liggen. Het doel van deze deelopgave is dus te laten zien dat niet al deze richtingen toegestaan zijn.

Voor de laatste stap is er een kleine aanscherping van de eisen op f nodig. We moeten namelijk aannemen dat f injectief is. Een functie f heet *injectief* als $f(x) = f(y)$ impliceert dat $x = y$.

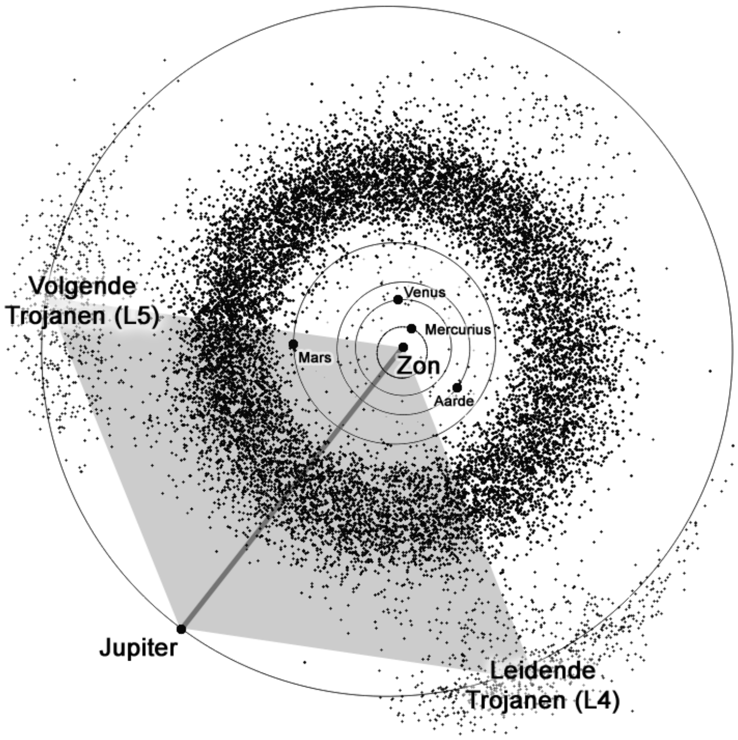
(f) Laat zien dat de driehoeksconfiguratie alleen een evenwichtige driehoeksconfiguratie is als de driehoek gelijkzijdig is en met hoeksnelheid gelijk aan die gevonden in opgave (b).

(g) Laat zien dat f echt injectief moet zijn om de conclusie van (f) te kunnen trekken. Dat wil zeggen: als f niet injectief is, vindt dan een evenwichtige driehoeksconfiguratie waarbij de driehoek niet gelijkzijdig is.

Een vraag die we hier niet behandelen is of deze evenwichtige driehoeksconfiguraties ook stabiel zijn. Een gedeeltelijk, maar praktisch toepasbaar antwoord op de vraag is het volgende resultaat. Neem aan m_1 de grootste massa is en m_3 verwaarloosbaar klein is. In dit geval heet de positie van m_3 een Trojaans punt, aangeduid met L4 of L5, afhankelijk van de positie van het punt ten opzichte van de draaiingsrichting van de driehoek. Dan blijkt het evenwicht van m_3 onder de centrifugaalkracht en zwaartekracht van m_1 en m_2 een stabiel evenwicht te zijn als het volgende geldt:

$$\frac{m_2}{m_1} < 25\left(\frac{1-\sqrt{1-4/625}}{2}\right)$$

Het zon/Jupiter systeem voldoet hieraan en er zijn dan ook asteroïden gevonden, de Trojanen genaamd, die zich rond L4 en L5 bevinden.



Figuur 12.2: Het zonnestelsel met daarop aangegeven de grootste asteroïden. Hierop zijn de Trojanen duidelijk zichtbaar. Bron: Wikipedia.

Bijlage: formules

Relativiteitstheorie

Hieronder geldt $\beta = v/c$ en $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Formules voor impuls en energie van een deeltje met massa m met dat met snelheid $\vec{v}$ beweegt.

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \gamma mc^2 \\ E_{kin} &= (\gamma - 1)mc^2 \\ \vec{p} &= \gamma m\vec{v} = \beta\frac{E}{c} \\ E^2 &= m^2c^4 + p^2c^2 \end{aligned}$$

We hebben de volgende Lorentztransformaties voor een boost met snelheid v in de x-richting:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

En ook analoog:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \beta p_x c) \\ p'_x c &= \gamma(p_x c - \beta E) \\ p'_y c &= p_y c \\ p'_z c &= p_z c \end{aligned}$$

Quantummechanica

De energie van een foton:

$$E = \hbar\omega \tag{12.1}$$

Heisenberg's onzekerheidsprincipe:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &\geq \frac{1}{2}\hbar \\ \Delta E \Delta t &\geq \frac{1}{2}\hbar \end{aligned}$$

Elektrodynamica

Maxwell's vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Mechanica

Rotatie om een vaste as van een star lichaam:

$$\begin{aligned}
I &= \int r^2 dm \\
E_{rot} &= \frac{1}{2} I \omega^2 \\
\sum_i \vec{F}_i \times r &= \vec{\tau} = I \dot{\vec{\omega}} \\
v_i &= (\vec{\omega} \times \vec{r})_i
\end{aligned}$$

Bèta's op zoek naar meer dan boeiend werk, helpen we goed op weg.

Hewitt Associates is een wereldwijd opererende HRM Consulting en Outsourcings-organisatie met zo'n 23.000 mensen in meer dan veertig landen. In Nederland (350 collega's) helpen we onze klanten met actuarieel advies, pensioenuitvoering en complete HRM-consultancy. We doen ons werk met passie, wat bij ons staat voor intellectuele uitdagingen, optimale kwaliteit en interessante klanten. Maar ook voor plezier in je werk, groei en een eigen koers.

We zijn een bedrijf waarvan je mag verwachten dat het weet wat mensen beweegt in hun werk en wat ze in een carrière zoeken. Daarom vind je hier geen verhaal over targets en hoe we telkens weer weten die te bereiken. De weg erheen vinden we veel belangrijker, omdat die het beste in mensen boven brengt. Bij Hewitt is dat een pad dat je in hoge mate zelf uitstippelt. En waar elke bestemming een nieuw begin is.

Ben jij afgestudeerd in een bètarichting? En heb je belangstelling voor pensioen- en actuarieel advies? Zouden jouw adviezen ook miljoenen kunnen besparen? Ambieer je werk op een hoog analytisch niveau, waarin je alle ruimte krijgt om jezelf te ontwikkelen? En ben jij pas tevreden als de klant dat is? Dan is Hewitt voor jou de juiste optie.

We zijn voortdurend op zoek naar mensen die -net als wij- voor de beste kwaliteit gaan. Die persoonlijke en professionele groei belangrijk vinden. Die eigenzinnigheid combineren met teamgeest. En die hun eigen weg kiezen. We helpen jou op het carrièrepad dat aansluit op jouw talenten en ambities en we coachen je op de weg die je zelf uitzet. Bij ons vind je ruimte voor initiatief, continue uitdagingen, een informele cultuur én mogelijkheden om werken en studeren te combineren. Bij ons mag je, sterker nog, móet je jezelf zijn. Want pas dan haal je het beste uit jezelf. Pas dan ben je in staat om je eigen koers uit te zetten.

Meer informatie over de diverse functies bij Hewitt Associates vind je op www.hewitt.nl. Een brief met CV kun je sturen naar Hewitt Associates B.V., ter attentie van Linda Willemsen, afdeling Human Resources, postbus 12079, 1100 AB Amsterdam, of per mail naar nlpz@hewitt.com.

Hewitt

Kies je eigen weg bij Hewitt

Hewitt is gevestigd in Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam.