

第一章: 金属材料的塑性性质

一、金属材料的塑性性质	1、简单拉伸试验	①弹性与塑性的本质区别不在于应力—应变关系是否线性，而在于卸载后变形是否可恢复 ②低碳钢屈服阶段很长，铝、铜、某些高强度合金钢没有明显的屈服阶段（此时取 0.2%塑性应变对应的应力为条件屈服应力 $\sigma_{0.2}$ ）； ③塑性变形量 $\varepsilon^p = \varepsilon - \sigma / E$ （ E —弹性模量； E_t —切线模量） ④简单拉伸件塑性时 $d\sigma = E_t d\varepsilon$ （拉伸 $\sigma d\sigma > 0$ ）； $d\sigma = E d\varepsilon$ （压缩 $\sigma d\sigma < 0$ ） ⑤塑性变形后反向加载（单晶体：反向也对称强化；多晶体：反向弱化—包辛格效应） ⑥高温蠕变：应力不变时应变仍随时间增长的现象		
	2 静水压力试验	①静水压力与材料体积改变之间近似服从线弹性规律		塑性变形不引起体积变化 金属材料发生大塑性变形时可忽略弹性体积变化
		②材料的塑性变形与静水压力无关		
二、塑性变形的物理基础	1、滑移面：晶体各层原子间发生的相对滑移总是平行于这种原子密排的平面，这种大密度平面称为滑移面。 2、滑移方向：滑移面内，原子排列最密的方向是最容易发生滑移的，称为滑移方向； 3、滑移系：每个滑移面和滑移方向构成一滑移系。（体心立方—12；面心立方—48；密排六方—3）			
	1、为使晶体发生塑性变形，外加应力至少在一个滑移方向上的剪应力分量达到剪切屈服应力 τ_Y ；			
	位错	刃形位错：位错运动方向与 F 平行； 螺形位错：位错运动方向与 F 垂直。		位错在晶体内的运动是塑性变形的根源； 塑性变形时位错型聚集、杂质原则阻碍滑移造成强化。
三、轴向拉伸时的塑性失稳	应力 $\left\{ \begin{array}{l} \text{名义应力：} \sigma = F / A_0 \\ \text{真应力：} \sigma = F / A \end{array} \right.$ 应变 $\left\{ \begin{array}{l} \text{工程应变：} \varepsilon = (l - l_0) / l_0 \\ \text{自然应变/对数应变：} \varepsilon = \ln(1 + \varepsilon) = \ln(l / l_0) \end{array} \right.$		采用应变的对数定义的优点： 1、可以对应变使用加法： 2、体积不可压缩条件： $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$	
			拉伸失稳条件： $d\sigma / d\varepsilon = \sigma$ (此时 $d\sigma / d\varepsilon = 0$)	
四、材料塑性行为的理想化	1、材料塑性行为基本假设	1、材料的塑性行为与时间、温度无关——研究常温静载下的材料； 2、材料具有无限的韧性； 3、变形前材料是初始各向同性的，且拉伸、压缩的真应力—自然应变曲线一致 4、重新加载后的屈服应力（后继屈服应力）=卸载前的应力 5、应变可分解为弹性和塑性两部分： $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ 6、塑性变形是在体积不变的情况下产生的，静水压力不产生塑性变形； 7、应力单调变化时有： $E(\text{弹性模量}) > E_s(\text{割线模量}) \geq E_t(\text{切线模量}) \geq 0$		
	2、应力、应变曲线的理想化模型	简化模型	①理想弹性②理想刚塑性③刚线性强化④理想弹塑性⑤弹—线性强化	
		经验公式	鲁得维克表达式： $\sigma = \sigma_Y + H\varepsilon^n \quad (0 \leq n \leq 1)$	
			修正的鲁得维克式： $\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & (\text{当} \varepsilon \leq \sigma_Y / E) \\ \sigma_Y (E\varepsilon / \sigma_Y)^n & (\text{当} \varepsilon \geq \sigma_Y / E) \end{cases}$	
			普拉格表达式： $\sigma = \sigma_Y \tanh(E\varepsilon / \sigma_Y)$	
	3、强化模型	①等向强化：不考虑包辛格效应；		
②随动强化：考虑包辛格效应且总的弹性范围大小不变（卸载时正负弹性与正常正负弹性）；				
③组合强化模型：介于上述两者之间				

第二章: 结构塑性性态的基本特征

1、理想弹塑性材料的三杆桁架	①弹性阶段	方程: 平衡方程、物理方程、变形协调方程 $\Rightarrow F_e$ - 弹性极限载荷
	②约束塑性阶段	部分结构的塑性变形要受到其余部分的限制
	③塑性流动阶段	结构将产生无限制的塑性变形 $\Rightarrow F_y$ - 塑性极限荷载 (表征了结构的极限承载能力)
	④卸载	服从弹性规律, 静不定系统残余应变中可以含有弹性应变
	⑤重复加载	挖掘出来的是结构承载潜力, 而不是材料承载潜力
2、线性强化弹塑性材料的三杆桁架	$\frac{F_1}{F_y} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{E_p}{E}$ $E_p/E = 0.1$ 时, $F_1/F_y = 1.041$ 考虑材料强化与理想塑性极限载荷差别不大 F_1 并不是桁架承载能力的极限, 由强化材料制成的结构不会发生塑性流动, 也不存在塑性极限载荷。 强化材料制成的桁架也有三个变形阶段: 弹性阶段、约束塑性阶段、自由塑性变形阶段	
3、几何大变形对桁架承载能力的影响	几何大变形对结构承载能力可能产生重大影响, 一旦结构进入塑性流动阶段 (对理想塑性材料) 或自由塑性塑性变形阶段 (对强化材料制成的结构), 几何大变形对于结构的弹塑性性态来说, 一般是一个不可忽略的因素, 甚至是一个起决定性作用的因素。	
4、加载路径对桁架内的应力和应变的影响	$\begin{cases} \text{非比例加载} \\ \text{比例加载} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1. \text{ 极限载荷值不因加载路径的不同而改变;} \\ 2. \text{ 达到塑性极限载荷时, 所得杆件中} \begin{cases} \text{应力相同} \\ \text{应变、位移不同} \end{cases} \\ 3. \text{ 塑性变形的加载历史很重要} \end{cases}$	
5、载荷平面内的屈服曲线和极限曲线	载荷空间	以结构上作用的各独立外载作为坐标轴形成的空间称作载荷空间。
	①屈服曲线	初始弹性极限曲线, 由 $ \sigma_1 \leq \sigma_Y; \sigma_2 \leq \sigma_Y; \sigma_3 \leq \sigma_Y$ 确定
	②极限曲线	发生无限制的塑性流动: 形成塑性极限曲线—极限曲线
	③后继屈服曲线	后继弹性极限曲线: 塑性变形后重新加载得到的屈服曲线, 残余应力与新载荷的叠加; 特点 \Rightarrow $\begin{cases} 1. \text{ 材料的后继屈服曲线与先前的变形历史有关;} \\ 2. \text{ 塑性变形后的屈服曲线在受载方向变尖, 屈服载荷提高,} \\ \quad \text{与此相反, 在加载方向相反的一侧变钝, 且屈服载荷降低;} \\ \quad \text{包辛格效应来源类似: 晶粒的不同方向上产生不同的滑移;} \\ 3. \text{ 初始、后继屈服极限均不能超出极限曲线之外 (极限曲线是所有后继屈服曲线的外包络线);} \\ 4. \text{ 三种屈服曲线都是外凸的曲线。} \end{cases}$

第三章-1:应力分析

一、应力分析	1、应力张量及其分解	柯西定理: 法线为 N 的斜面上受力—— $S_{Nl} = \sigma_{ij} l_j$ (张量)	
		应力分解: $\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij}$ = 应力球张量+应力偏张量	
		塑性状态后: 体积变形是弹性的, 只与 应力球张量 有关, 形状改变只与 应力偏张量 有关	
	2、主应力和应力不变量	主平面: S_N (力) 与 N (法线) 重合 $\Rightarrow S_{Ni} = \lambda l_i$ (λ —主应力)	
		方程: $ \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda - J_3 = 0$ 其中 $\begin{cases} J_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 = -\frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}\sigma_{ki}) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ J_3 = \sigma_{ij} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases}$	
		应力偏张量: $s_j = \sigma_j - \sigma_m$ 不变量 $J_2' = \begin{cases} s_{ij}s_{ij} / 2 \\ -(s_1s_2 + s_2s_3 + s_3s_1) = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) / 2 \\ [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 6 \end{cases}$	
	3、等斜面上的应力	等斜面(八面体面): 此平面的法线与三个应力主轴夹角相等, 任一点共有 8 个此面;	
		八面体面受力: $ F_8 ^2 = (\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$	
		法线 N 方向受力: $ \sigma_8 ^2 = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = \sigma_m = J_1$	
		八面体上的剪应力: $\tau_8 = \sqrt{ F_8 ^2 - \sigma_8^2} = \sqrt{2J_2' / 3} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} / 3$	
	4、等效应力	金属材料的屈服条件主要取决于应力偏张量的第二不变量 J_2' (应力平方的量纲)	
		应力强度=等效应力: $J_2' = \sigma^2 / 3 \Rightarrow \bar{\sigma} = \sqrt{3J_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	
		剪应力强度=等效剪应力 (由纯剪切 $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ 得出): $\bar{\tau} = \sqrt{J_2'} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	
	5、三向莫尔圆和洛德参数	莫尔圆	① 定义: 在 σ - τ 平面上以 $(\sigma_i, 0)$ 三点中任意两点为直径端点, 可做三个莫尔圆 ② 主剪应力: 三个圆的三个半径, 最大者为最大剪应力; ③ 移轴后的三向莫尔圆正是描述应力偏张量的三向 Mohr 圆.
		洛德参数	圆心到 σ_2 之间的距离 $MP_2 = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / 2 \Rightarrow$ 由 MP_2 与 MP_1 之比确定 σ_2 在 σ_1 与 σ_3 之间的相对位置: Lode 参数: $\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2s_2 - s_1 - s_3}{s_1 - s_3}$ (与球张量无关) $\begin{cases} \mu_\sigma = -1: \text{单向拉伸} \\ \mu_\sigma = 0: \text{纯剪切} \\ \mu_\sigma = 1: \text{单向压缩} \end{cases}$
	6、应力空间和主应力空间	① 应力空间: 一点的应力状态可以用 9 维或 6 维应力空间中的一点来表示;	
		② 主应力空间: 塑性理论 \rightarrow 各项同性 \rightarrow 只考虑应力大小 (忽略方向) \rightarrow 主应力空间	
		L 直线 : 主应力空间中过原点并与坐标轴成等角的直线 (静水压力状态——不产生塑性变形); π 平面 : 主应力空间中过原点而与直线 L 相垂直的平面 (只有应力偏张量、不引起体积改变)。	
		1) 主应力空间中任一点 P 向量可表示为: $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \vec{OP}_3 = \mu$ 平面分量 + L 直线分量	
		2) π 平面投影 \vec{OP}_1 大小: 与 $\sqrt{J_2'}$ 成正比 方向: 与 μ_σ 有关	

第三章-2: 应变分析

一、位移与应变的关系	1、Cauchy 关系 (张量式): $\varepsilon_{ij} = (\mu_{i,j} + \mu_{j,i}) / 2$			
	2、 ε_{xy} 、 ε_{yz} 、 ε_{zx} 与工程剪应变 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 相差一半 \Rightarrow 关系式能统一用张量表示			
	3、描述变形的两种方法	Lagrange 法: 在物体变形前的初始坐标中描述	格林 (green) 应变张量: $\varepsilon_{ij} = (\mu_{i,j} + \mu_{j,i} + \mu_{k,i}\mu_{k,j}) / 2$	
		Euler 法: 在物体变形后的瞬时坐标中描述		
二、应变张量的分解和应变张量的不变量	1、分解	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij} + e_{ij} = \text{应变球张量} + \text{应变偏张量} = \text{体积改变} + \text{形状改变}$		
	2、不变量	应变张量不变量: I_1 、 I_2 、 I_3 (类似应力张量不变量)		
		应变偏张量不变量: I_1' 、 I_2' 、 I_3' (类似应力偏张量不变量)		
3、偏张量进一步分解	$I_1' = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & e_{23} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{应变偏张量 } e_{ij} \text{ 只与材料} \\ \text{单元体的剪切变形有关} \end{cases}$			
三、等效应变和洛德应变参数	1、等斜面	$\begin{cases} \text{正应变: } \varepsilon_8 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) / 3 \\ \text{剪应变: } \gamma_8 = 2\varepsilon_8 = 2\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} / 3 = \sqrt{8I_2' / 3} \end{cases}$		
	2、等效应变 (应变强度)	简单拉伸: $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon / 2$ (材料不可压缩) $\Rightarrow I_2' = 3\varepsilon^2 / 4$		
		等效应变: $\bar{\varepsilon} = \sqrt{4I_2' / 3} = \sqrt{2[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]} / 3 = \sqrt{2e_{ij}e_{ij} / 3}$		
	3、等效剪应变 (剪应变强度)	纯剪切: $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \gamma / 2, \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow I_2' = \gamma^2 / 4$		
		等效剪应变: $\bar{\gamma} = 2\sqrt{I_2'} = \sqrt{3}\varepsilon$		
	4、Mohr 应变圆与 Lode 应变参数	应变圆	略~~~~	
Lode 应变参数		$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \begin{cases} \text{单向拉伸: } \mu_\varepsilon = -1, \theta_\sigma = -30^\circ \\ \text{纯剪切: } \mu_\varepsilon = 0, \theta_\sigma = 0 \\ \text{单向压缩: } \mu_\varepsilon = 1, \theta_\sigma = 30^\circ \end{cases}$		
四、应变率张量和应变增量张量	1、应变率张量	$\dot{\varepsilon}_{ij} = v_{j,i} / 2 \Leftarrow d\varepsilon_{ij} = (du_{i,j} + du_{j,i}) / 2 = (v_{i,j} + v_{j,i}) dt / 2$ <p>对每一瞬时状态进行计算, 而不是按初始位置计算; 这样定义的应变率具有普适性。</p>		
	2、应变增量张量	① 按瞬时计算	$d\varepsilon_{ij} = (du_{i,j} + du_{j,i}) / 2$ <p>(正规计算)</p>	1) 关系 $\begin{cases} \text{大变形: } d\varepsilon_{ij} \neq d(\varepsilon_{ij}) \\ \text{小变形: } d\varepsilon_{ij} = d(\varepsilon_{ij}) \\ \text{小变形、各分量比例变化: } d\varepsilon_j = d(\varepsilon_j) - \text{主应变} \end{cases}$ <p>2) $d(\varepsilon_j)$ 一只反映主应力大小的变化</p> <p>3) 当应变张量主方向不变时, 它们的积分才有意义</p>
		② 按初始计算	$d(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ij}(t + \Delta t) - \varepsilon_{ij}(t)$	

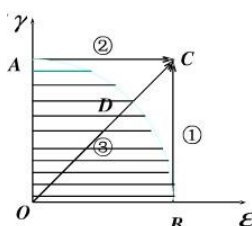
第四章:屈服条件

一、初始屈服条件	1、定义:材料初始弹性状态的界限(又称屈服条件)。——在外载作用下，物体内某一点开始产生塑性变形时，该点处的应力所满足的条件。			
	2、屈服条件	$\Phi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dots) = 0 \rightarrow$ 在常温下且不考虑时间效应 $\Rightarrow F(\sigma_{ij}) = 0$ — (屈服曲面)		
	3、屈服曲线	屈服曲面与 π 平面的交线是一条封闭曲线，称为屈服曲线 C。		
	4、 π 平面参数	$\begin{cases} x_s = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sqrt{2} \\ y_s = (\sqrt{2}\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_\sigma = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} = \sqrt{2J_2'} = \sqrt{2}\tau = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma \\ \theta_\sigma = \arctan(y_s / x_s) = \arctan(\mu_\sigma / \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_\sigma - \text{正比于等效应力} \\ \theta_\sigma - \text{中间主应力影响} \\ z_\sigma - \text{静水压力大小} \end{cases}$		
二、两种常用的屈服条件	1、屈雷斯加(Tresca)屈服条件	定义	当最大剪应力达到一定数值时，材料就开始屈服： $(\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = \tau_{\max} = k$	
		公式	$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm 2k; \sigma_2 - \sigma_3 = \pm 2k; \sigma_3 - \sigma_1 = \pm 2k \Rightarrow \pi$ 平面中的正六边形	
		屈雷斯加条件一般用于主应力方向已知的情形，且此时 $\sigma_Y = 2\tau_Y$		
	2、米塞斯(Mises)屈服条件	$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2$		
		$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_Y^2$		
			$\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y$ (π 平面上的圆)	
	3、两种屈服条件比较	① 假设单向拉伸时，两屈服条件相同	Tresca 六边形内接于 Mises 圆： $\Rightarrow \frac{\tau_M}{\tau_T} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$ (剪切屈服应力的比值)	
		② 假设纯剪切时两屈服条件相同	Tresca 六边形外接于 Mises 圆： $\Rightarrow \frac{\sigma_M}{\sigma_T} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ (拉伸屈服应力的比值)	
	4、Mises 条件的物理解释	① Hencky 提出	1)体现了用物体形状改变的弹性性能来衡量屈服的能率准则： 2)单位体积的形状改变能为： $W_\phi^e = J_2' / 2G$ ——其中 $G = E / 2(1 + \nu)$	
		② Nadai 提出	1)当 $\tau_8 = \sqrt{2J_2'} / 3$ 达到一定数值时材料屈服 2)这一解释只对立方晶格晶体(8 面体滑移面)有意义,对多晶体无意义	
③ Ros 与 Eichinger 提出		1)空间一点任意取向平面上的剪应力的均方值 $\tau_r = \sqrt{2/5}\tau_Y$ 时材料屈服 2) $\tau_r^2 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] / 15 = 2J_2' / 5$		
三、试验验证	1、试验方法:①薄圆管受拉力 F 和内压 p 的作用;②薄圆管受拉力 F 和扭矩 T 的作用			
	2、结果:多数金属(钢、铜、铝、合金钢)的屈服性态接近 Mises 屈服条件			
	3、应用：主应力方向已知时用 Tresca 条件较方便，主应力方向未知时用 Mises 条件方便，二者误差不超过 15.5%			
四、后继屈服条件	用 $f(\sigma_{ij}) = 0$ 表示初始屈服曲面		用 $\Phi(\sigma_{ij}, h_a) = 0$ 表示后继屈服曲面/加载曲面	
	1、等向强化	$\Phi = f(\sigma_{ij}) - K = 0 \rightarrow K = \begin{cases} \text{等效塑性应变的函数: } K = \Psi(\int d\varepsilon^p) \\ \text{塑性比功 } dW^p \text{ 的函数: } K = F(\int dW^p) \end{cases}$	K 是增函数，屈服圆半径由加载过程中最大应力点决定。	
	2、随动强化	$\Phi = f(\sigma_{ij} - \sigma) = 0 \rightarrow \Phi = f(\sigma_{ij} - C\varepsilon_{ij}^p) = 0 \Rightarrow \Phi = \sigma_Y + 3C\varepsilon^p$		
		π 平面上随动强化使 Mises 屈服圆的圆心移动到 $C\varepsilon_{ij}^p$ 、半径不变的圆处		
	3、组合强化	$\Phi = f(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}) - K = 0 \Rightarrow$ 屈服面中心位置与半径均变化 实验结果：随动强化、具有尖端的理论模型等，加载历史越复杂加载面越不规则。		

第五章:塑性本构关系

一、弹性本构关系	1、本构关系	广义胡克定律: $\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3\nu}{E}\sigma_m\delta_{ij} \Rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2G}s_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{I_2'} = \frac{1}{2G}\sqrt{J_2'} \Rightarrow s_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\varepsilon}}e_{ij} \\ \bar{\sigma} = 3G\bar{\varepsilon} \end{cases}$ 体积变化规律: $\sigma_m = 3K\varepsilon_m$		
	2、卸载本构关系 (增量)	$\begin{cases} ds_{ij} = 2Gde_{ij} \\ d\sigma_m = 3Kd\varepsilon_m \end{cases}$	从加载面卸载时, 全量不满足广义胡克定律, 但增量直间是满足的。	
	3、弹性应变比能	$W^e = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m + \frac{1}{2}s_{ij}e_{ij}$	体积变形比能: $W_V^e = 3\sigma_{ij}\varepsilon_m / 2$ 形状变形比能: $W_\phi^e = \frac{1}{2}s_{ij}e_{ij} = \frac{1}{2G}J_2' = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}\bar{\sigma}\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}G\bar{\gamma}^2 = \frac{1}{6G}\bar{\sigma}^2$	
二、德鲁克公设 (Drucker 公设)	定义: 某一材料质点, 借助一个外部作用, 在其原有的应力状态之上慢慢地施加并卸除一组附加应力, 在一个循环内, 外部作用力所作的功是非负的 (本质——塑性功不可逆)。			
	两种情况	$\Phi(\sigma_{ij}^0, h_a) < 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) \text{ 加载面处处外凸} \\ 2) \text{ 正交性法则: } d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \partial\Phi / \partial\sigma_{ij} \text{ (塑性应变增量沿着加载面的外法线)} \end{cases}$ $\Phi(\sigma_{ij}^0, h_a) = 0 \Rightarrow d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \text{ (稳定式)} \rightarrow d\sigma d\varepsilon \geq 0 \Rightarrow$ 满足此情况均为稳定性材料 (岩土不满足)		
三、加载、卸载准则 (塑性的)	1、理想塑性材料	米塞斯加载面	加载: $f(\sigma_{ij}) = 0; \bar{u} \cdot$	卸载: $f(\sigma_{ij}) = 0; \bar{u} \cdot$
	Tresca 屈服面	加载: $\bar{u} \cdot$ 或 \cdot	卸载: $\bar{u} \cdot$ 或 \cdot	
	2、强化材料	加载: $\Phi=0; \bar{u} \cdot$	中性变载: $\Phi=0; \bar{u} \cdot$	卸载: $\Phi=0; \bar{u} \cdot$
四、增量本构理论 (流动理论)	1、概述	$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3\nu}{E}d\sigma_m\delta_{ij}; d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} \Rightarrow d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3\nu}{E}d\sigma_m\delta_{ij} + d\lambda \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}$		
	2、理想塑性材料 $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot s_{ij}$	与 Mises 相关	理想塑性(普朗特—鲁伊斯)关系 (Prandtl-Reuss)	$de_{ij} = ds_{ij} / 2G + d\lambda \cdot s_{ij}; d\varepsilon_{kk} = (1-2\nu)d\sigma_{kk} / E$ $d\lambda = \frac{dW^p}{2J_2'} = \frac{dW_Y}{2\tau_Y^2} = \frac{3s_{ij}de_{ij}}{2\sigma_Y^2} \cdot \begin{cases} \sigma_{ij}, d\varepsilon_{ij} \Rightarrow d\lambda \Rightarrow ds_{ij}, d\sigma_{ij} \\ \sigma_{ij}, d\sigma_{ij} \nRightarrow \nRightarrow \end{cases}$
			理想刚塑性(列文—米塞斯)关系 (Levy—Mises)	$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \cdot s_{ij} \Rightarrow \begin{cases} d\lambda = \frac{d\gamma}{2\tau_Y} = \frac{3d\varepsilon}{2\sigma_Y} \Rightarrow s_{ij} = \frac{2\tau_Y d\varepsilon_{ij}}{d\gamma} = \frac{2\sigma_Y d\varepsilon_{ij}}{3d\varepsilon} \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} \nRightarrow \\ d\varepsilon_{ij} \Rightarrow s_{ij} \end{cases} \end{cases}$ $dW^p = \begin{cases} \tau_Y \cdot d\gamma \\ \sigma_Y \cdot d\varepsilon \end{cases}$
		应变增量张量的主轴与主应力轴重合(用 Lode 参数验证) $\nu=0.5$		
	与 Tresca 相关	特点: ① 塑性应变增量确定不了屈服点 S ; ② Tresca 六角柱棱线不存在单一法线 角点处 $d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 1 : (-u) : (u-1)$ 塑性功增量: $dW^p = \sigma_Y d\varepsilon_j^p _{\max}$		
强化材料	$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2\psi'} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} s_{ij} (\psi' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p})$		等向强化: $s_{ij}, d\bar{\sigma} \Rightarrow d\varepsilon_{ij}^p$ 理想塑性时: ψ' 与 $d\bar{\sigma}$ 同时为0的不定情形	
五、全量理论	1、依留申理论	$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon}} e_{ij} = \frac{2\bar{\tau}}{\gamma} e_{ij}; \sigma_{kk} = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}$		$e_{ij} = \psi s_{ij}; \rightarrow \psi = \frac{1}{2G_s} = \frac{1}{2G} + \Phi \Rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} + \Phi s_{ij} \text{ (塑性分量)}$
	2、简单加载	简单加载: 单元体应力张量各分量比值不变		简单加载时增量理论等价于全量理论
		单一曲线假定: $\bar{\sigma} = E\varepsilon[1 - w(\varepsilon)] = 3G\varepsilon[1 - w(\varepsilon)]$ - 材料不可压时 $\nu=1/2$ ($\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty$ 时 $w=1$; $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ 时 $w=\infty$)		
	3、简单加载定理	必要条件: ① 小变形; ② 载荷按比例单调增长 (有位移时只能是零位移边界条件) 充分非必要: ① 材料不可压缩 $\nu=0.5$; ④ $\bar{\sigma} \sim$ 曲线具有幂函数的形式 $\bar{\sigma} = A\varepsilon^n$		
所有的全量理论都要求简单加载,但在应变空间中的变形路线逐渐趋于某一直线时,两结果相近。				
六、岩土力学	Mohr-Coulomb屈服条件: $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = c \cos \varphi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi$		流动法则: $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} = d\lambda \cdot (\alpha\delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{aJ_2'}})$	

第六章:简单的弹塑性问题

一、弹塑性边值问题的提法	1、全量理论	V 内	平衡方程: $\sigma_{ij,j}+F_i=0$;几何方程: $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$ 全量本构关系: $s_{ij}=\frac{2}{3}\frac{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{\varepsilon}e_{ij};\sigma_{kk}=\frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}$			按位移求得: $(K+\frac{G}{3})u_{k,ki}+Gu_{i,jj}-2G(we_{ij}),j+F_i=0$ 其中: $K=\frac{E}{3(1-2\nu)};u_{k,ki}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$	
		s 上	应力条件: $\sigma_{ij}l_j=T_i$		边界位移条件: $u_i=\bar{u}_i$		
	2、增量理论	V 内	本构关系	塑性材料	弹性区	$f(\sigma_{ij})<0$; $d\varepsilon_{ij}=d\sigma_{ij}/2G-\nu d\sigma_{kk}\delta_{ij}/E$	
					塑性区	$f(\sigma_{ij})=0$; $de_{ij}=ds_{ij}/2G-d\lambda\bullet$ $d\varepsilon_{kk}=(1-2\nu)d\sigma_{kk}/E$ 当 $df=d\sigma_{ij}\cdot\partial f/\partial\sigma_{ij}$ 时: $d\lambda=0$; 当 $df=0$ 时: $d\lambda\geq 0$	
				强化材料	弹性区	$f(\sigma_{ij})<0$; $d\varepsilon_{ij}=d\sigma_{ij}/2G-\nu d\sigma_{kk}\delta_{ij}/E$ (不变)	
					塑性区	$\phi(\sigma_{ij})=0$; $de_{ij}=ds_{ij}/2G-d\lambda\bullet$ $d\varepsilon_{kk}=(1-2\nu)d\sigma_{kk}/E$ 当 $d\phi=d\sigma_{ij}\cdot\partial\phi/\partial\sigma_{ij}\leq 0$ 时: $d\lambda=0$; 当 $d\phi>0$ 时: $d\lambda=h d\phi$	
				边界	应力条件: $d\sigma_{ij}l_j=dT_i$		
		弹塑性交界处	法向位移连续条件	$du_i^{(e)}n_i=du_i^{(p)}n_i$		在交界面 Γ 上切向位移和切向应力是允许有间断的。	
	应力连续条件		$d\sigma_{ij}^{(e)}n_j=du_{ij}^{(p)}n_j$				
	二、薄壁圆筒的拉扭联合变形	1、基本原理	筒内应力: $\sigma_z=p/2\pi Rh;\tau_{\theta z}=T/2\pi R^2h$				无量纲量: $\sigma=\sigma_z/\sigma_Y;\tau=\tau_{\theta z}/\tau_Y$ $\varepsilon=\varepsilon_z/\varepsilon_Y;\gamma=\gamma_{\theta z}/\gamma_Y$ 其中: $\sigma_Y=\sqrt{3}\tau_Y;\varepsilon_Y=\sigma_Y/E;\gamma_Y=\tau_Y/G$; 不可压缩 $\rightarrow \nu=0.5\rightarrow G=E/3\rightarrow \gamma_Y=\sqrt{3}\varepsilon_Y$
弹性阶段胡克定律: $\sigma=\varepsilon;\tau=\gamma$							
塑性阶段 Mises: $J_2'=\sigma_z^2/3+\tau_{\theta z}^2=\tau_Y^2\rightarrow\sigma^2+\tau^2=1$							
2、增量求解		本构关系: $\begin{cases} d\varepsilon_z=\frac{1}{E}d\sigma_z+d\lambda\bullet \\ \frac{1}{2}d\gamma_{\theta z}=\frac{1}{2G}d\tau_{\theta z}+d\lambda\bullet \end{cases}\rightarrow$ 无量纲化 $d\lambda'=2G\lambda\rightarrow\begin{cases} d\varepsilon=d\sigma+\sigma d\lambda' \\ d\gamma=d\tau+\tau d\lambda' \end{cases}\Rightarrow\frac{d\varepsilon-d\sigma}{d\gamma-d\tau}=\frac{\sigma}{\tau}$					
		方程的解: $\sigma^2+\tau^2=1\rightarrow\begin{cases} \tau=\sqrt{1-\sigma^2} \\ \sigma d\sigma+\tau d\tau=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}=\sqrt{1-\sigma^2}(\sqrt{1-\sigma^2}-\sigma\frac{d\gamma}{d\varepsilon}) \\ \frac{d\tau}{d\gamma}=\sqrt{1-\tau^2}(\sqrt{1-\tau^2}-\tau\frac{d\varepsilon}{d\gamma}) \end{cases}$ 如果已知某时刻的初始状态及该时刻变形路径 $\gamma=\gamma(\varepsilon)$ 则得到 $\sigma\sim\varepsilon;\tau\sim\gamma$ 关系					
3、全量理论		$s_{ij}=\frac{2\bar{\sigma}}{3\varepsilon}e_{ij}\Rightarrow\begin{cases} \frac{2}{3}\sigma_z=\frac{2\bar{\sigma}}{3\varepsilon}\varepsilon_z \\ \tau_{\theta z}=\frac{\bar{\sigma}}{3\varepsilon}\gamma_{\theta z} \end{cases}$ 又 $\begin{cases} \bar{\sigma}=\sigma_Y=\sqrt{3}\tau_Y \\ \varepsilon=\sqrt{\varepsilon_z^2+\frac{1}{3}\gamma_{\theta z}^2} \end{cases}$ 无量纲化: $\begin{cases} \sigma=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2}} \\ \tau=\frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2}} \end{cases}$ 求解条件: $\begin{cases} \frac{1-\tau}{\sigma}=\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2}-\gamma}{\varepsilon} \text{ (一定)} \\ \gamma=\gamma(\varepsilon) \text{ 需给出} \end{cases}$					
4、算例		 三种加载路径, 求最后应力	增量理论	路径1: $\sigma=0.65, \tau=0.76$; 路径2: $\sigma=0.76, \tau=0.65$; 路径3: $\sigma=\tau=0.707$			
	全量理论		路径1、2、3: $\sigma=\tau=0.707$				
	结论: ① 加载路径不同, 虽最终变形相同, 但最终应力不同; ② 只有在比例加载下, 两种理论结果才相同。						

第六章:简单的弹塑性问题

三、梁的弹塑性弯曲	1、梁的弹塑性纯弯曲	弹性	$\left. \begin{aligned} \text{曲率 } \kappa = -d^2w/dx^2 \rightarrow \varepsilon = \kappa y \rightarrow \sigma = E\kappa y \\ \Rightarrow \text{积分得到: } M = EI\kappa \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma = My/I \Rightarrow \begin{cases} M_e = \sigma_y b h^2 / 2 \\ \kappa_e = 2\sigma_y / Eh; y_e = \xi h / 2 \end{cases}$		
		塑性时	$\left. \begin{aligned} \text{弯矩: } M = M_e(3 - \xi^2)/2 \\ \text{曲率: } \kappa = \kappa_e / \xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M}{M_e} = \frac{1}{2} [3 - (\frac{\kappa_e}{\kappa})^2] \\ \frac{\kappa_e}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2M/M_e}} \end{cases} \rightarrow \xi = 0 \text{ 时} \Rightarrow \begin{cases} M_p \rightarrow 1.5M_e \\ = \sigma_y b h^2 / 4 \Rightarrow \phi = \frac{m(m \leq 1)}{\sqrt{3 - 2m}} (1 \leq m < \frac{3}{2}) \\ \kappa \rightarrow \infty \end{cases}$ $(m = M/M_e, \phi = \kappa/\kappa_e)$		
		截面形状系数	$\eta = M_p/M_e \rightarrow$ 抗弯潜力 \rightarrow 圆柱: $\eta = 1.7$, 圆筒: $\eta = 1.27$, 长方形: $\eta = 1.5$		
		塑性铰	某截面完全进入塑性, 特点: ① 存在弯矩 $ M = M_p$, ② 单向性		
		塑性后回弹	$\phi^F = \phi - m = 1 - 1.5\phi + 0.5\phi^3 = 4(\sigma_y \rho / Eh)^3 - 3(\sigma_y \rho / Eh) + 1$		
		卸载残余应力	在原理基础上减去: $M\sigma_y/M_e$, 应力间断面 $\xi \rightarrow 0$, 弹性层趋于 0。		
	2、梁在横向载荷作用下的弹塑性弯曲	类比纯弯	$F_e = \frac{M_e}{l} = \frac{\sigma_y b h^2}{6l}$; 截面弹塑性交界线: $\xi = \pm [3 - \frac{2F(l-x)}{F_e l}]$; $F_y = \frac{M_p}{l} = \frac{3}{2} F_e$		
		挠度方程	$\frac{y''}{\kappa_e} \approx \frac{\kappa}{\kappa_e} = \begin{cases} m = p(1-\zeta) & (1-1/p \leq \zeta < 1) \\ 1/\sqrt{3-2p+2p\zeta} & (0 \leq \zeta \leq 1-1/p) \end{cases}$ 其中: $p = F/F_e$ $\zeta = x/l$		
		梁端挠度	$y(l) = \delta_e [5 - (3+p)\sqrt{3-2p}]/p^2$; $\delta_e = \kappa_e l^2/3$; $f = 1.5$ 时; $\delta_p = 20\delta_e/9$; 残余挠度: $\delta^F = 13\kappa_e l^2/54$		大挠度时, 塑性区先增后减至根部, 塑性铰很难形成, 为极限状态。
	3、弯矩与轴力同时作用	$\phi = \frac{\kappa}{\kappa_e} = \begin{cases} m & \text{弹性区: } 0 \leq m \leq 1-n \\ 4(1-n)/[3-m/(1-n)] & \text{单侧塑性: } 1-n \leq m \leq 1+n-2n^2 \\ 1/\sqrt{3(1-n^2)-2m} & \text{双侧塑性: } 1+n-2n^2 \leq m < 1.5(1-n^2) \end{cases}$		塑性极限状态: $\frac{2}{3}m + n^2 = 1$	
		$\frac{\kappa^F}{\kappa_e} = \begin{cases} 0 & \text{弹性区: } 0 \leq m \leq 1-n \\ 1-m[3-m/(1-n)]^2/4(1-n) & \text{单侧塑性: } 1-n \leq m \leq 1+n-2n^2 \\ 1-m/\sqrt{3(1-n^2)-2m} & \text{双侧塑性: } 1+n-2n^2 \leq m < 1.5(1-n^2) \end{cases}$		可见: 拉力使回弹量减小, 最终曲率变大, 单侧塑性状态与双侧塑性状态都是约束塑性状态	
四、平面应变条件下的板塑性弯曲	1、应力分布	$\left. \begin{aligned} \text{平衡方程: } r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r \\ \text{屈服条件: } \sigma_\theta - \sigma_r = \pm \frac{2\sigma_y}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_r = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y \ln \frac{r}{b} & c \leq r \leq b \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y \ln \frac{r}{b} & a \leq r \leq c \end{cases}, \sigma_\theta = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y (1 + \ln \frac{r}{b}) & c \leq r \leq b \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y (1 + \ln \frac{r}{b}) & a \leq r \leq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{ab} \\ M = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma_y t^2 \end{cases}$			
	2、弯曲时的变形	$\left. \begin{aligned} \text{不可压缩: } \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \\ \text{纯弯条件时: } \frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{位移} \begin{cases} u = \frac{1}{2\alpha} (r + \frac{c^2}{r}) \\ v = \frac{r\theta}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \text{应变} \begin{cases} d\varepsilon_\theta = (1 - \frac{c^2}{r^2}) \frac{d\alpha}{2\alpha} \\ d\varepsilon_r = -d\varepsilon_\theta; dr_{r\theta} = 0 \end{cases}$		特点: ① 弯曲时厚度不变; ② M 不变, 考虑强化、弹性时要增加	
	3、板内各层的移动	$r_\xi = \sqrt{0.5(a^2 + b^2) + 0.5(b^2 - a^2)\xi} \Rightarrow r_0 = \sqrt{a^2 + b^2}/2, \xi_c = -(b-a)/(a+b)$ 中性面初始位置			
		受拉区: $\xi \geq 0; r \geq \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$	始终受压区: $\xi \leq \xi_c; \text{ 或 } r \leq \sqrt{ab}$	先受压后受拉区: $\xi_c \leq \xi \leq 0; \text{ 或 } c < r < \sqrt{a^2 + b^2}/2$	
总长未变化层的初始位置: $\xi = \frac{1}{2}$		特点: ① 塑性弯曲中中性层不断移动; ② 中性层不是总长不变的, 板的不同层会经历不同的变化历史			

第六章:简单的弹塑性问题

五、柱体的弹塑性自由扭转 (刚塑性)	1、基本方程	$\left. \begin{aligned} u &= -\alpha yz \\ v &= \alpha yz \\ w &= \alpha \phi(x, y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{xz} &= \alpha(\partial \phi / \partial x - y) \\ \gamma_{yz} &= \alpha(\partial \phi / \partial x + x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{xz} &= G\alpha(\partial \phi / \partial x - y) \\ \tau_{yz} &= G\alpha(\partial \phi / \partial x + y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \\ \sigma_2 &= 0, \mu_\sigma = 0 \\ \sigma_3 &= -\sigma_1 = -\tau \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} J_1 &= 0 \\ J_2 &= \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\ J_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$	
	2、弹性扭转 (薄膜比拟) $T \leq T_e$	应力函数	Φ_e 定义: $\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial y}; \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \Rightarrow$ 平衡方程: $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$; 协调方程: $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\alpha$
	特点	薄膜比拟	将薄膜张于与柱体截面形状相同的边框上,加均匀压力,则应力函数 Φ_e 与薄膜的高度成正比, τ 正比于薄膜的斜率,扭矩 T 与薄膜曲面下的体积成正比。
		特点	合剪应力 $\tau = \text{grad} \Phi_e $; τ 的方向沿 $\Phi_e = \text{const}$ 的切向; $T = 2 \iint_A \Phi_e dx dy$; 柱体截面的周界也是 $\Phi_e = \text{const}$ 曲线族之一
	3、全塑性扭转 (沙堆模拟) $T \geq T_p$	应力函数	Φ_p 定义: $\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial y}; \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \Rightarrow$ 平衡方程: $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$; 屈服条件: $\left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial y}\right)^2 = \tau_y^2$
	特点	沙堆比拟	将一个水平的底面做成截面形状,在其上堆放干沙,由于沙堆的静止摩擦角为常数,则沙将形成一个斜率为常数的表面,表面可用 Φ_p 表示,只相差一个可由屈服应力和沙堆摩擦角觉得的比例因子。(整个截面都进入塑性)
		特点	$T = 2 \iint_A \Phi_p dx dy \Rightarrow$ 圆柱时: $T = 2\pi\tau_y a^3 / 3$; 弹性收缩造成剪应力中断;凸角处剪应力为 0(始终弹性),凹角剪应力无穷大。
六、受内压的厚壁圆筒	4、弹塑性扭转 (玻璃盖比拟) $T_e \leq T \leq T_p$	圆截面	$\Phi = \begin{cases} \Phi_e = -\frac{1}{2} \alpha G(r^2 - \rho^2) + \tau_y(a - \rho) & 0 \leq r \leq \rho \\ \Phi_p = \tau_y(a - r) & \rho \leq r \leq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \tau_y / \alpha G \rightarrow \alpha_e = \tau_y / \alpha G \\ T = \frac{4}{3} T_e [1 - \frac{1}{4} (\frac{\alpha_e}{\alpha})] \rightarrow \frac{T}{T_e} = 1 - \frac{\rho^3}{4a^3} \end{cases}$
	5、卸载、回弹、残余应力	回弹角 $\alpha' = \alpha [1 - \frac{4}{3} \frac{\rho^3}{a^3}]$ 参与扭转角 $\alpha^F: \frac{\alpha^F}{\alpha} = 1 - t \sqrt{4 - 3t} \quad t = T / T_e$	残余应力: $\tau^F = \begin{cases} \tau_y [1 - \frac{4r}{3a} (1 - \frac{\rho^3}{4a^3})] & \rho \leq r \leq a \\ \tau_y [\frac{r}{\rho} - \frac{4r}{3a} (1 - \frac{\rho^3}{4a^3})] & 0 \leq r \leq \rho \end{cases}$
	6、弹塑性强化材料扭转	$\tau = \frac{\bar{\sigma}}{3\varepsilon} \gamma \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^a \bar{\sigma} r^2 dr = \frac{6\pi}{\alpha^3} \int_0^{\bar{\varepsilon}_a} \bar{\varepsilon}^2 f(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}$; 其中强化规律 $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}), \bar{\varepsilon}_a = \alpha a / \sqrt{3}$	
	圆柱截面	并且 $\bar{\sigma} = \sigma_y (\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y})^m, 0 < m < 1 \Rightarrow T = \frac{6\pi\sigma_y \bar{\varepsilon}_a^{m+3}}{(m+3)\alpha^3 \varepsilon_y^m} = \frac{2\pi\tau_y}{m+3} \cdot \bar{\varepsilon}_a^{m+3}$ <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 5px;"> $m=1$: 理想线弹性 $m=0$: 理想塑性材料 </div>	
六、受内压的厚壁圆筒	1、基本方程	平衡: $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$; 几何关系: $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \varepsilon_z = \varepsilon_0 = \text{const}$; 边界条件: $\begin{cases} r=a \text{ 时: } \sigma_r = -p \\ r=b \text{ 时: } \sigma_r = 0 \end{cases}$	
	2、弹性解	$\left. \begin{aligned} \text{Hooke 定律} \\ \text{基本方程} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \bar{p}(1 - b^2/r^2) < 0; \sigma_z = F / \pi(b^2 - a^2) \\ \sigma_\theta &= \bar{p}(1 + b^2/r^2) > 0; \sigma_z = 2\nu\bar{p} + E\varepsilon_0 \\ u &= (1+\nu)\bar{p}[(1-2\nu)r + b^2/r] / E - \nu\varepsilon_0 r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{p} &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \quad \sigma_z \text{ 为中间主应力} \\ \varepsilon_0 &= \frac{F - 2\nu p \pi a^2}{E\pi(b^2 - a^2)} \quad P_e = \sigma_y(1 - a^2/b^2)/2 \end{aligned} \right\}$	
		① 增加壁厚不会明显提高弹性极限压力值;(可通过塑性变形残余应力或装配有预应力的套筒增强)	无限空间内的圆柱形孔洞收到内压的作用时,内表面开始屈服时的压力值只与周围的材料的性质有关,与孔洞的半径无关。

第六章:简单的弹塑性问题

六、受内压的厚壁圆筒	3 弹塑性解	弹性区 $c \leq r \leq b$	解得: $\begin{cases} \sigma_r' = c^2 \sigma_Y (1 - b^2 / r^2) / 2b^2 \\ \sigma_\theta' = c^2 \sigma_Y (1 + b^2 / r^2) / 2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_z' = \nu c^2 \sigma_Y / b^2 + E \varepsilon_0 \\ u' = (1 + \nu) c^2 \sigma_Y [(1 - 2\nu)r / b^2 + 1 / r] / 2E - \nu \varepsilon_0 r \end{cases}$		
		塑性区 $0 \leq r \leq c$	$\begin{cases} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = \sigma_Y \ln(r/a) - p < 0 \\ \sigma_\theta = \sigma_Y [1 + \ln(r/a)] - p > 0 \end{cases}$		塑性区内应力分布只与边界条件有关, 与弹性区的应力场无关。
		弹塑性边界确定	$\sigma_r _{r=c} = \sigma_r _{r=c} \Rightarrow p = \sigma_Y [\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2}(1 - \frac{c^2}{b^2})] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = \sigma_Y [\ln(r/c) - 0.5(1 - c^2/b^2)] \\ \sigma_\theta = \sigma_Y [\ln(r/c) + 0.5(1 + c^2/b^2)] \end{cases}$		
		塑性极限状态	令 $c = b \Rightarrow$ 塑性极限应力: $p_s = \sigma_Y \ln \frac{b}{a} \Rightarrow$ 此时: $\begin{cases} \sigma_r = \sigma_Y \ln(r/b) \downarrow \\ \sigma_\theta = \sigma_Y [1 + \ln(r/b)] \uparrow \end{cases}$		b 增加, 塑性极限应力增加
		塑性区内的 u'' 与 σ_z''	ε_z 为弹性 $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_z'' = -2\nu p + \nu \sigma_Y [1 + 2\ln(r/a)] + E \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 = (F - 2\nu p \pi a^2) / E \pi [b^2 - a^2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{开口圆筒: } F = 0; \varepsilon_0 = -2\nu p a^2 / E(b^2 - a^2) \\ \text{封闭圆筒: } F = \pi a^2 p; \varepsilon_0 = (1 - 2\nu) p a^2 / E(b^2 - a^2) \\ \infty \text{长圆筒 (平面应变): } F = 2\nu p \pi a^2; \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$ 体积弹性公式: $\frac{du''}{dr} + \frac{u''}{r} + \varepsilon_0 = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_r'' + \sigma_\theta'' + \sigma_z'') \Rightarrow u'' = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \sigma_Y [r \ln \frac{r}{c} + \frac{r}{2b^2} - \frac{r}{2}] - \nu \varepsilon_0 r + \frac{(1 - \nu^2) \sigma_Y c^2}{Er}$ \Rightarrow 举例可证: 刚达到 p_s 时, 筒的变形相对于本身尺寸时小的, $u''/a \approx 0.003$		
4 卸载和残余应力	$\left. \begin{matrix} \text{内压 } p^* \\ p_e \leq p^* \leq p_s \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{卸载应力} \begin{cases} \sigma_r^* = \bar{p}^* (1 - b^2 / r^2) \\ \sigma_\theta^* = \bar{p}^* (1 + b^2 / r^2); \bar{p}^* = p^* a^2 / (b^2 - a^2) \\ \sigma_z^* = 2\nu \bar{p}^* + E \varepsilon_0^* = F^* / \pi (b^2 - a^2) \end{cases}$		弹塑性公式减卸载应力得残余应力 $P^* \leq 2p_e$ 时才成立: 否则反向屈服 $c? : p^* / \sigma_Y = \ln(c/a) + 0.5(1 - c^2/b^2)$		
	当 $p_e < p^* \leq 2p_e$ 时, 材料处于“安定状态”, 卸载后材料弹性提高, 称为自增强处理。	b/a > 2.22 时, p 到 $2p_e$ 之上时, 筒仍处于约束塑性状态, 但卸载时会出现反向屈服。出现塑性循环破坏。	b/a < 2.22 时, 到达塑性极限压力时, 圆筒卸载后仍然不会出现反向屈服。		
5、几何变形对承载能力的影响		变形后: $p_Y' = \sigma_Y \ln \frac{b'}{a'};$ 不可压缩: $b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2 = \text{const}$		$\Rightarrow (\frac{b'}{a'})^2 = 1 + \frac{C}{a'^2}$ 由理想塑性材料制成的厚壁圆筒承受内压的塑性极限状态是不稳定的。	
6、强化材料长后壁圆筒的分析		德鲁维克强化理论: $\tau = \tau_0 \gamma_{\max}^m \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = -p(b^{-2m} - r^{-2m}) / (b^{-2m} - r^{-2m}) \\ \sigma_\theta = \sigma_r + 2\tau_0 (2A / r^2)^m \\ \sigma_z = \sigma_r + \tau_0 (2A / r^2)^m \end{cases} \left p = \frac{\tau_0}{m} (\frac{2A}{a^2})^m [1 - (\frac{a}{b})^{2m}] \right.$ $m = 0$: 理想刚塑性 $m = 1$: 线弹性 可以看出: ① σ_r 与弹性解相差不大; ② σ_θ 与弹性解相差较大 (若 $m > 0.5$ 时, $(\sigma_\theta)_{\max}$ 是内壁处的应力, 递减; 若 $m < 0.5$ 时, $(\sigma_\theta)_{\max}$ 是外壁处的应力, 递增)			
七、旋转圆盘	1、弹性解	$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$ $+ \rho \omega^2 r = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = (3 + \nu) \rho \omega^2 (b^2 - r^2) / 8 \\ \sigma_\theta = \frac{(3 + \nu)}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{(1 + 3\nu)}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{cases} \rightarrow \text{屈服条件: } \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega_e^2 b^2 = \sigma_Y$			
	2 弹塑性解	塑性区	$d(r\sigma_r'') / dr = \sigma_Y - \rho \omega^2 r^2 \Rightarrow \sigma_r'' = \sigma_Y - \rho \omega^2 r^2 / 3; \sigma_\theta'' = \sigma_Y$ ($0 \leq r \leq a$)		
		弹性区 $0 \leq r \leq a$	弹性解: $\begin{cases} \sigma_r = \frac{C_1}{r^2} + C_2 - \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta = -\frac{C_1}{r^2} + C_2 - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{cases}$ 其中 $\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{24} \rho \omega^2 a^4 (1 + 3\nu) \\ C_2 = \sigma_Y + \frac{1}{12} \rho \omega^2 a^2 (1 + 3\nu) \end{cases}$; a 确定: $\omega^2 = \frac{24b^2 \sigma_Y / \rho}{(1 + 3\nu)a^4 - 2(1 + 3\nu)a^2 b^2 + 3(3 + \nu)b^4} \Rightarrow \omega_p^2 = 3\sigma_Y / \rho b^2$ $\nu = 1/3$ 时: $\omega_p / \omega_e \approx 1.12 \rightarrow$ 从屈服到完全屈服, 转速增加 12%		
超 速 工 艺: 扩 大 弹性范围					

第七章:理想刚塑性平面应变问题

一、概念	1、平面应变	沿长度方向(z轴)的应变为零,横截面内的造型与z无关。 $\varepsilon_z=r_{xz}=\gamma_{yz}=0; \sigma_z \neq 0$					
	2、极限荷载	如果目的只是确定极限荷载,就无需从弹塑性状态一步步求解而采用刚塑性模型。					
二、平面应变问题的基本方程	1、塑性流动特点	①流动平行于某一固定平面;②流动与垂直于该平面的坐标(如z)无关					
	2、塑性基本方程(σ_z 永远是中间主应力)	平衡方程	$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$	屈服条件: $J_2' = s_{ij}s_{ij}/2 = k^2 \Rightarrow$ $(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2 = k^2$	本构关系 $\varepsilon_{ij} = \lambda s_{ij} \Rightarrow$ $\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$ $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$	体积不可压缩: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$	
	3、边界条件	①应力边界条件;②速度边界条件;③刚、塑性交界 Γ 处条件:应力方面— σ_n 、 τ_{nt} 连续、 σ_t 可间断;速度方面— v_n 连续、 v_t 可间断。					
三、滑移线及其几何性质	1、应力方程和滑移线	基本方程	$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cos 2\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma - k \sin 2\theta \\ \sigma_y = \sigma + k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} = k \cos 2\theta \end{cases}$			平衡方程	$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2k(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}) = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2k(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}) = 0 \end{cases}$
		滑移线(极值剪应力线)	特征方向: $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \tan \theta & \alpha \text{ 方向} \\ -\cot \theta & \beta \text{ 方向} \end{cases}$			x轴逆时针转 θ 角到 α 方向; x轴逆时针转 ϕ 角到 σ_1 方向; $\phi = \theta + 45^\circ \Rightarrow \sigma_1$ 顺转45到最大剪应力方向	
		应力方程	$\begin{cases} \partial(\sigma - 2k\theta)/\partial s_\alpha = 0 \\ \partial(\sigma + 2k\theta)/\partial s_\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{沿}\alpha: \sigma/2k - \theta = \eta = \text{const} \\ \text{沿}\beta: \sigma/2k + \theta = \xi = \text{const} \end{cases}$			增量形式 $\begin{cases} \text{沿}\alpha: \Delta\sigma = 2k\Delta\theta \\ \text{沿}\beta: \Delta\sigma = 2k\Delta\theta \end{cases}$	
	2、速度方程	$\begin{cases} \text{本构关系: } \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tan 2\theta(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}) = 0 \\ \text{不可压缩条件: } \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{沿}\alpha \text{ 线: } dv_\alpha - v_\beta d\theta = 0 \\ \text{沿}\beta \text{ 线: } dv_\beta - v_\alpha d\theta = 0 \end{cases}; \theta=0 \text{ 时: } \begin{cases} \partial v_x/\partial x = 0 \\ \partial v_y/\partial y = 0 \end{cases}$ \Rightarrow 沿特征线的正应变率为零,也就是滑移线没有伸缩					
	3、汉基第一定理	(Hencky)在同族两条滑移线和另一组滑移线的交点上,切线夹角不变。		①一组滑移线有一条为直线,则同族滑移线全为直线; ②在直的滑移线上,应力是常数; ③两族滑移线都直线时为均匀场, σ 、 θ 都不变			
		4、汉基第二定理	定理:沿一组滑移线移动,领一组滑移线在交点处的曲率半径的改变量在数值上等于所移动过的距离: $\partial R_\alpha/\partial s_\beta = -1; \partial R_\beta/\partial s_\alpha = -1$;其中: $1/R_\alpha = \partial\theta/\partial s_\alpha, 1/R_\beta = -\partial\theta/\partial s_\beta$ 推论:同族的滑移线必向同一方向凹,并且曲率半径逐渐变为零。				
	5 间断值定理	①在滑移线两侧,应力不会发生中断;②如果沿某一滑移线,曲率半径跳跃,则对应的应力微商也要跳跃;③沿任何线的法向速度一定连续,而切向速度的间断线一定是滑移线,并且间断值沿滑移线不变。					
	6 总结	应力、速度、曲率半径三组方程: $\begin{cases} \text{沿}\alpha \text{ 线: } d\sigma - 2kd\theta = 0, dv_\alpha - v_\beta d\theta = 0, dR_\beta + R_\alpha d\theta = 0 \\ \text{沿}\beta \text{ 线: } d\sigma + 2kd\theta = 0, dv_\beta + v_\alpha d\theta = 0, dR_\alpha - R_\beta d\theta = 0 \end{cases}$					
		特点:在滑移线两侧,应力不会发生间断,切向速度可以间断;沿滑移线曲率半径发生间断时,应力导数也同时发生间断。					
	四 边界条件 (滑移线坐标)	1、应力边界 s_Γ	s_Γ 上有 σ_n 、 $\tau_n \rightarrow$ Mohr圆($r=k$) $\Rightarrow \sigma$ 、 θ 、垂直截面法向应力 σ_t (均有两个)(需判断)				
Mohr圆 $\Rightarrow \alpha$ 、 β : $\begin{cases} \tau_n = 0 \text{ 时: 两滑移线与边界方向均成 } 45^\circ \text{ 角; (其余情况介于二者之间)} \\ \tau_n = k \text{ : 一滑移线族与边界 } 90^\circ, \text{ 另一族以边界线为包络线} \end{cases}$							
2 刚塑性交界线 Γ 为滑移线或滑移线的包络线,因为 Γ 上必有速度间断。							
3、两塑性区交界线L	若L不是滑移线,则 σ 、 θ 产生间断:法向应力连续、切线正应力间断,此时,L与两边滑移线的夹角必相等。						

第七章:理想刚塑性平面应变问题

五、滑移线理论求解的范例	1、单边受压的楔	钝角楔 $2\gamma > 90^\circ$	角平分线附近为中心场，两边形成简单应力场（等腰直角三角形）		
			塑性极限载荷： $P_Y = 2k(2\gamma + 1 - \pi/2)$		左右应力差 $\sigma_B - \sigma_C = 2k(2\gamma - \pi/2)$
		锐角楔 $2\gamma < 90^\circ$	楔的角平分线上形成应力间断线，左右两半部分为逐步缩小的三角形无线序列		
			塑性极限载荷： $P_Y = 2k(1 - \cos 2\gamma)$		左右应力差 $\Delta\sigma = 2k \cos 2\gamma$
	2、冲头压入半平面（厚材料不挤出）	Prandtl 解 $v_\alpha = v/\sqrt{2}$	$2\gamma = \pi \Rightarrow p_Y = 2k(1 + \pi/2) \Rightarrow F_Y = 2bp_Y$ (压模宽度为 $2b$)		正下方材料铅直向下，粗糙压模情形
			塑性范围：压模左右各 $2b$ ；沿 α 滑移，中心附近 45° 偏向下运动，边部偏向上；向上区域速度为中间一半。		
		Hill 解 $v_\alpha = \sqrt{2}v$	塑性极限载荷、应力情况相同，但速度场有区别，应力区小（压模两侧各 b 范围）		有水平分量，光滑压模情形
		Prager、Hodge 解	Hill 区域在压模边界小范围，先发生塑性变形		部分粗糙、部分光滑
	Prandtl 区域为除去 Hill 区域剩下的区域				
	3、圆孔内均布 p 时的极限载荷	$\frac{rd\varphi}{dr} = \pm \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 \pm \ln \frac{r}{a} \Rightarrow \begin{cases} \varphi - \ln(r/a) = \alpha \\ \varphi + \ln(r/a) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{边界 } r_0 \text{ 处平均应力: } \sigma = -p + k \\ p \text{ 处平均应力: } \sigma_p = -p + k + 2k \ln(r/a) \end{cases}$			
		在 p 处 $\begin{cases} \sigma_p = -p + k + 2k \ln(r/a) = (\sigma_r + \sigma_\varphi) \\ \sigma_\varphi > \sigma_r \Rightarrow \sigma_\varphi - \sigma_r = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = \sigma_p - k = -p + 2k \ln(r/a) & \text{与厚壁筒} \\ \sigma_\varphi = \sigma_p + k = -p + 2k[1 + \ln(r/a)] \end{cases}$ 结果一致			
	4、切口试件的拉伸	中心切口试件	拉伸件宽 $2b$ ，狭缝 $2a$ ，滑移线由切口两端出发各有一个均匀应力场： $\sigma_n = \sigma_x = \sigma_2 = 0, \sigma_t = \sigma_y = \sigma_1 = 2k \Rightarrow F_Y = 2k(2b - 2a)t$ (和简单拉伸类似)		
		切口根部半径为 0 的双边深切口试件	切口根部形成，逐渐向内扩张，取 $1/4$ 转化为钝角楔单边受载问题。		
			$\sigma_Y = 2k(1 + \pi/2 - \gamma) > 2k \Rightarrow$ 深切口中材料承受高于 σ_Y 的应力，不是简单拉伸		
			两侧为理想狭缝： $\gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma_Y = 2k(1 + \pi/2) > k; (b/a > 8.62 \text{ 时，增加宽度不提高 } F_Y)$		
		切口根部具有圆角的双边切口试件	$h/a \leq 3.81$	$r_1 = ae^\gamma \Rightarrow \sigma_y = \sigma_\varphi = 2k(1 + \gamma) \Rightarrow F_Y = 2t \int_h^{a+h} \sigma_y dr_1 = 4kat(1 + h/a) \ln(1 + h/a)$	
	$h/a > 3.81$		$F_Y = 4kht(1 + 0.5\pi) - 4kta(e^{\pi/2} - 1 - 0.5\pi) \Rightarrow$ a 越大， F_Y 越低（两情况都成立）		
七、定常塑性流动问题	1、板条抽拉问题的滑移线场	板条厚度由 H 到 h ，如果楔角 γ 同 h/H 满足一定关系，滑移线场将由均匀应力区和中心扇形取组成。 $h/H = 1/(1 + 2\sin \gamma)$			
		板条轴向无剪应力，轴向方向必为主应力方向，后滑移线与之成 45° 角。			
	2、应力分布与抽拉力	出口处滑移线上：平均应力 $\sigma_0 = -p + k + 2k\gamma; \tau = 2k$			
		$\begin{cases} \text{出口部分平衡: } F = (\sigma_0 + k)h = [-p + 2k(1 + \gamma)]h & p/2k = (1 + \gamma)h/H = (1 + \gamma)/(1 + 2\sin \gamma) \\ \text{整体平衡: } F = 2p \cdot \text{斜边长度} \cdot (-h) \Rightarrow & \downarrow \\ & \frac{F}{2kh} = (1 + \gamma)(1 - \frac{h}{H}) = \frac{2(1 + \gamma)\sin \gamma}{1 + 2\sin \gamma} \end{cases}$			
	3、速度分布	进入交界线 AC 上法线速度连续，切线速度不连续，切线速度差 $\Delta v_t = \sqrt{2}u \sin \gamma$			
		进出口速度： $v_h = Hu$ ——反应了材料的不可压缩性			
	4、刚性区的校核	出口后不屈服 $\Rightarrow \frac{F}{2kh} = (1 + \gamma)(1 - \frac{h}{H}) = \frac{2(1 + \gamma)\sin \gamma}{1 + 2\sin \gamma} < 1 \Rightarrow \gamma \sin \gamma < \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma < 42^\circ 27'$ 否则无法实现连续拉伸			

第八章: 极限分析原理

一、极限状态和极限分析	1、定义	只寻求极限状态和极限载荷的方法就叫 极限分析 。		
		忽略强化，外载不变时理想塑性体发生无限制塑性变形，形成 极限状态 。所对应的载荷为 极限载荷 ；与之相应速度场称为 塑性破损机构 。		
	2、性质	①、在极限状态下，应变率的弹性部分恒为零，也就是说，塑性流动时的应变率是纯塑性应变率。—— 采用理想刚塑性模型与弹塑性模型所得极限状态一致 。	②、极限状态的唯一性： 极限状态与加载历史无关，也与初始状态无关。	
		加载方式确定，极限载荷确定与加载历史、初始状态无关。		极限载荷给定则极限状态唯一， T_i 、 σ_{ij} 、 $\dot{\epsilon}$ 有确定关系
二、虚功率原理	$\begin{cases} \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_T} T_i^* v_i^* dS + \int_V F_i^* v_i^* dV \\ \text{不考虑体力: } \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_T} T_i^* v_i^* dS \end{cases}$ T_i^* —边界载荷； v_i^* —区域内满足 $v_i^*=0$ 的速度分布； σ_{ij}^* —满足平衡方程、边界条件的应力分布。		1、应力间断面	作用在间断面两侧的作用力与反作用力大小相等、方向相反，相互抵消——不影响表达式
			2、速度间断面	法线速度连续但 切线速度可以间断（在滑移面）
			功率消耗 $\int_{S_D} \tau_Y \llbracket \dot{v}_i \rrbracket dS > 0 \Rightarrow \int_{S_T} T_i^* v_i^* dS = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{S_D} \tau^* \llbracket \dot{v}_i \rrbracket dS$	
三、极限分析原理	1、机动场、静力场	机动场：可存在有限切线速度间断； S_v 上满足 $v_i^*=0$ ；外力 T_i 在机动场上做正功。 应力场和机动场的选择是任意的		
		静力场： $\sigma_{ij,j}^* + F_i^* = 0; f(\sigma_{ij}^*) \leq 0; S_T$ 上： $\sigma_{ij}^* \eta_j = T_i^* = \eta^* \bar{T}_i$ ($T_i = \eta \bar{T}_i$) η —极限载荷因子		
	2、极限分析原理	上限定理： $\eta^0 \leq \eta$	下限定理： $\eta^* \geq \eta$ 其中： $\eta^* = \frac{\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV}{\int_{S_T} \bar{T}_i v_i^* dS} = \frac{\int_{S_D} \tau_Y \llbracket \dot{v}_i \rrbracket dS}{\bar{P}_e^*}$	
	3、界限定理的推论	静力场的应变率为机动场或机动场的内应力为静力场时，载荷因子相同 $\eta = \max \{ \eta^0 \} = \min \{ \eta^* \}$ $\eta^0 = \eta^* \Rightarrow \eta = \eta^0 = \eta^*$ $A、B、C$ 三个增大屈服面： $\eta^0 \leq \eta_A \leq \eta_B \leq \eta_C \leq \eta^*$ 在结构任何部分提高材料屈服极限不会降低结构的极限载荷（反之亦然） 在结构的自由边界上增加物质（不考虑自重），不会降低其极限载荷（反之亦然）		
四、界限定理的应用	1、理论	下限求解存在偏微分方程，在实际中应用上限法更简单。		
		上限求解选择分块均匀速度场，此时 $P_i^* = \sum \int_{S_D} \tau_Y \llbracket \dot{v}_i \rrbracket dS$		
	2、举例	①单面切口板两边受M作用	下限：在高度 h 范围内与无切口板纯弯曲应力相同。 $M^0 = kh^2/2$	上限：切口处有圆弧形速度间断线。 $P_i^* = 2krws = 2M^* w \Rightarrow M^* = 0.5kh^2 \alpha \csc^2 \alpha \Rightarrow M_{\min}^* = 0.69kh^2$
		②冲模对半无限刚塑性介质的压入	速度机动场用三个等腰三角形互相错动来表示。 $P_i^* = 2ka \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = p^* \cdot$ $p_{\min}^* = 5.66k$ (滑移线结果 5.14k)	
		③通过对称楔形模的挤压	模子光滑： $p^* \cdot \cdot \cdot$ —— 与模角 α 、C点位置角 θ 有关 适用于中等程度缩减比 $(H-h)/H$ ，大相对缩减比时引入更多刚性匀速区。	
		④钝角楔单边受压	C点 $\begin{cases} \sigma_n = -0.5(1 + \sin 2\varphi) \\ \tau_{nt} = -0.5 \cos 2\varphi \end{cases} \Rightarrow [\sigma] = \sigma_Y \sin 2\varphi \Rightarrow \sigma_n _{AB} = -\sigma_Y(1 + \sin 2\varphi) = -p \Rightarrow$ 下限 $p^0 = \sigma_Y(1 + \sin 2\varphi)$	
		⑤端部承受横向载荷的锥形悬臂梁	不连续的应力场由四个均匀应力区组成；头部区域处于 纯剪应力状态 。 梁的极限载荷 下限 为： $F^0 = k \cdot \cdot$ 一头部垂直长， b —悬臂梁宽度)	

第九章: 梁和刚架的极限分析 (超静定)

一、包含塑性铰的破坏机构			较复杂的静不定梁，极限状态下一般会出现包含若干个塑性铰的塑性破坏机构。		
			N 次静不定梁需构造 N+1 个塑性铰，最终结果与梁采用理想弹塑性还是理想刚塑性无关。		
			计算时先由塑性铰确定反力，再由各反力确定弯矩	一端固支、一端简支、中间受力 F: $F_1=\frac{8M_p}{3l}; F_2=\frac{3M_p}{l}$	
二、梁和刚架极限分析中的界限定理			广义应力:截面 M	真实极限状态	上限定理: $F^*\geq F_y$ 其中 $F^*\Delta^*=\sum M_i^*\theta_i^*$
			广义应变:截面转角 Θ	运动许可状态(机动场)	
				静力许可状态(静力场)	下限定理: $F^o\leq F_y$ F^o 是极限载荷的一个下限
三、机动法和静力法	1、机动法	令外载在机构运动过程中所作的功等于在塑性铰上消耗的内功 $F^*=\min\{F^*\}$			
		塑性铰位置	①集中了作用：支座点、两端、集中力处；②均布载荷：列函数求极值 ③铰点数目要适当，刚架需变为单自由度机构； ④结构原有的铰点不消耗塑性功，之后形成的才消耗（对其进行叠加）		
	2、静力法	在弯矩可能达到最大的一些截面处令弯矩达到塑性极限弯矩，之后得到整个结构的弯矩分布图，与此分布图相平衡的载荷就是真实极限载荷的一个下限			
		选取静力场通常比机动场困难（弯矩分布难以求出），求下极限载荷更困难			
	均布载荷梁	机动法	$q^*=\frac{5M_p}{l^2}$		
			静力法：弯矩为二次函数： $\begin{cases} M _{x=0}=-M_p \\ M _{x=0.5l}=M_p \text{ (假定)} \Rightarrow q^o=(\frac{24}{25})\cdot \frac{M_p}{l^2}=11.52\frac{M_p}{l^2} \\ M _{x=l}=0 \end{cases}$		
		3、举例	机动法	形成三个塑性铰，搭配起来有三种可能的机构 $F_B^*=1.67\frac{M_p}{l}; F_c^*=1.2\frac{M_p}{l}; F_D^*=1.5\frac{M_p}{l} \Rightarrow F^*=1.2\frac{M_p}{l}$	
简单刚架	$\begin{cases} M_c=-2lH \\ M_D=-2lH+lV \\ M_B=-2lH+2.5lV-3lF \\ M_A=2.5lV-5lF \end{cases} \rightarrow \text{令} \begin{cases} M_c=-M_p \\ M_D=-M_p \\ M_B=-M_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H=M_p/2l \\ V=2M_p/l \\ F=5M_p/3l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_B^o=\frac{3}{10}\frac{M_p}{2l} \\ \text{其余: } F_c^o=1.2M_p/l \\ F_D^o=0.94M_p/l \end{cases}$ $M_A=-10M_p/3$				
四、极限曲线及其应用	1、概念：若干外载同时作用时，就需要用到载荷空间内的极限曲面的概念				
	2、四杆例子：简单四杆刚架有四种极限载荷估计，四种机构各相应于一条直线。从原点出发的任何射线，表示 F 和 Q 的比例加载，此射线首先遇到的直线，就表示了在这种比例载荷作用下，该直线对应的机构破坏形式。				
	3、应用	判断给定载荷组合是否安全			
		对给定的加载比例，求出极限载荷的大小			
当 F 与 Q 中有一个已知时，可求出对另一个的限制					

第十章:板的极限分析

一、板的基本方程	1、基本假设	①中面不伸长或压缩；②挠度相对于板厚为小值；③直法线假设；④垂直于中面的正应变可以忽略不计。 板的变形完全由中面挠度 w 决定		
		$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; v = -z \frac{\partial w}{\partial y}; w = w(x, y) \Rightarrow \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \gamma_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$		
	2、广义应力	$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz; M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz; M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz;$	广义应变: $\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$	
3、广义屈服条件	$\begin{cases} Mises: m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 = 1 \text{ 流动法则可得} \\ Tresca: \max\{ m_1 , m_2 , m_1 - m_2 \} = 1 \text{ 曲率变化率} \end{cases} \begin{pmatrix} i & -m_y \\ j & -m_x \\ i & \end{pmatrix} \begin{cases} m_x = M_x / M_0 = \sigma_x / \sigma_Y \\ m_y = M_y / M_0 = \sigma_y / \sigma_Y \\ m_{xy} = M_{xy} / M_0 = \tau_{xy} / \sigma_Y \end{cases}$			
二、圆板轴对称弯曲极限分析	1、 σ_r, σ_θ 、(不计 σ_z, τ_{xy}) \Rightarrow 广义应力 $M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz; M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz$; 广义应变率: $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\gamma}_{r\theta}$			
	2、 $\begin{cases} (rM_r)' - M_\theta = rQ \\ (rQ)' + rp(r) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 平衡方程: $(rM_r)' - M_\theta = -\int_0^r rp(r) dr$ Tresca屈服条件 $\begin{cases} M_r = M_0, M_\theta = M_0 \\ M_r - M_\theta = M_0 \end{cases}$			
	3、边界分析	处于极限状态时, 板内可分为若干环形区域, 不同区域状态位于 Tresca 六边形不同线段		
		边界 Γ 上, $M_r, Q, \dot{\gamma}$ 必须连续; $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\gamma}_{r\theta}$ 可间断。		
		$\dot{\gamma}$ 不连续式 塑性铰圆; 时, $\dot{\gamma}$ 一定连续, 非塑性铰圆		
板的边界条件: $\begin{cases} r=0 \text{ 时, } M_r = M_\theta; \text{ 简支边, } \dot{\gamma}_{r\theta} = 0; \\ \text{固支边, } \dot{\gamma}_{r\theta}, \dot{\gamma}_{r\theta} \text{ 固支边塑性铰, } \dot{\gamma}_{r\theta}, \end{cases}$				
三、简支圆板的极限载荷	1、广义应力	$p = \begin{cases} p_1 + p_2 & 0 \leq r \leq b \\ p_1 & b \leq r \leq a \end{cases} \Rightarrow M_\theta = M_0; M_r = \begin{cases} M_0 - \eta(p_1 + p_2)r^2/6 & 0 \leq r \leq b \\ M_0 - \frac{1}{6}\eta p_1 r^2 - \frac{1}{6}\eta p_2(3b^2 - \frac{2b^3}{r}) & b \leq r \leq a \end{cases}; \eta = \frac{6M_0}{ap_1^2 + b^2 p_2(3-2b/a)} > 0 \text{ (下限)}$		
	2、速度场	在Tresca线的BC段 $\Rightarrow \begin{cases} i & \dot{\gamma}_{r\theta} \\ j & \dot{\gamma}_{r\theta} \end{cases}$		
	3、特殊情况	$p_2 = 0$ 时: $\eta p_1 = \frac{6M_0}{a^2} \Rightarrow \begin{cases} M_r = M_0(1-r^2/a^2) \\ M_\theta = M_0 \end{cases}$	$p_1 = 0$ 时: $\eta p_2 = \frac{6M_0}{b^2(3-2b/a)}$	集中力 $F_Y = 2\pi M_0$ (与半径 a 无关)
四、固支圆板的极限载荷	1、性质	极限在BCD上, 靠近固支端: $\dot{\gamma}_{r\theta} = 0 \Rightarrow r=a$ 时, $M_r = -M_0, M_\theta = 0$		
	2、弯矩	$0 \leq r \leq r_1$ 时: $\begin{cases} M_\theta = M_0 \\ M_r = M_0 - \frac{1}{6}pr^2 \end{cases}; r_1 \leq r \leq a$ 时: $\begin{cases} M_\theta - M_r = M_0 \\ M_r = M_0 \ln \frac{r}{r_1} - \frac{1}{4}p(r^2 - r_1^2) \end{cases}; \Rightarrow \begin{cases} r_1/a = 0.730 \\ p = \frac{6M_0}{r_1^2} = 11.26 \frac{M_0}{a^2} \end{cases}$		
	3、速度场	$\begin{cases} i & \dot{\gamma}_{r\theta} \\ j & \dot{\gamma}_{r\theta} \end{cases} \leq r \leq r_1 \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_{r\theta} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} \end{cases} \leq r \leq a \Rightarrow \begin{cases} \dot{\gamma}_{r\theta} \\ \dot{\gamma}_{r\theta} \end{cases} \begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} 0 \leq r \leq r_1 \Rightarrow \text{板中部仍为锥形速度区}$		

第十章:板的极限分析

	Johansen 破裂线理论:混凝土表面出现裂纹时,其内部钢筋的相应部位也出现了塑性铰,破裂线就是塑性铰的连线,破裂线两侧板块绕着这些直线作相对运动。			实质:构造一种有间断的机动场,假定塑性屈服只沿有限条直线发生,被这些直线分割开来的板块则只作刚体运动。		
五、非圆板的机动解	1、正边形板 (外界固支)	均布载荷	$2n$ 条绞线 $\rightarrow pna^2 \tan \frac{\pi}{n}$ (外功率) $= 2naw \tan \frac{\pi}{n}$ (内功率) $\Rightarrow p^* = 12M_0 / a^2$ (圆时11.26)			
		集中载荷	$F^* = 4n \tan \frac{\pi}{n} M_0 \rightarrow$ 圆形时 $F^* = 4\pi M_0$ 简支时结果均减半			
	2、圆环板:外固支内自由	内环加载	$p^* = \frac{M_0}{b}$ 合力 实心时 $= 4\pi M_0$ (与上节结果相同)			
		面均布载荷	$p^* = 6M_0(2a-b)/(a-b)^2(a+2b) \rightarrow$ 实心时 $p^* = 12M_0 / a^2$			
	3、均布载荷简支矩形板	三种情况	对角线塑性铰 $p_1^* = \frac{6M_0}{a^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2b^2}$	45°线塑性铰 $p_2^* = \frac{6M_0}{a^2} \cdot \frac{a+b}{3b-a}$	圆形塑性铰 $p_3^* = \frac{6M_0}{a^2}$	$p_2^* \leq p_1^* \leq p_3^*$
		取极值	斜率为参数 $\Rightarrow p^* = \frac{6M_0}{a^2} \frac{1}{(\sqrt{3+a^2/b^2}-a/b)^2} \Rightarrow$ 正四边形 $p^* = \frac{6M_0}{a^2}$; b 很大时 $p^* = \frac{2M_0}{a^2}$			
此种假定塑性屈服只沿若干条直线塑性铰发生的机动法,适用于任意形状板的极限分析,对于边界和载荷的对称性没有任何限制,是一种有广泛实用价值的方法。						
六、圆板大变形后的承载能力	1、概述	极限载荷后 { 大应变 \rightarrow 应变强化小,可通过增大屈服应力 大变形 \rightarrow 可提高、降低结构承载能力				集中力作用下简支圆板: $F/F_0 = 1 + (\delta/h)^2 / 3$
		挠度达到与板厚同一量级时,板中面膜应变(面内应变)会达到与最大弯曲应变的同一量级,才是中面膜力/膜应变不可忽略。				中等厚度板,极限载荷实际意义明显
	2、Calladine方法	两端瞬心,中间两部分刚体转动,仅有周向应变		能量相等 $\Rightarrow F = \frac{2\pi\sigma_y}{a} \int_A y dA \rightarrow$ 由等面积原则 $\Rightarrow \begin{cases} F/F_0 = 1 + (\delta/h)^2 / 3 & \delta/h \leq 1 \\ F/F_0 = (\delta/h) + (h/\delta) / 3 & \delta/h \geq 1 \end{cases}$ 简支圆板		
	3、广义屈服线方法	在板壳的某些线上,内力的某种组合达到一定值时,沿这些线就形成塑性区即广义屈服线。				
		径向可移时与Calladine结果一致	径向不可移时 $\frac{F}{F_0} = \begin{cases} 1 + 4(\delta/h)^2 & \delta/h \leq 1/2 \\ 2\frac{\delta}{h} + \frac{1}{6}(\frac{h}{\delta}) & \delta/h \geq 1/2 \end{cases}$		1、为径向可移简支圆板两倍 \Rightarrow 2、支撑条件对于大变形后承载能力影响极大	
七、圆板的冲压	1、冲压问题: 已知需要制作壳体几何形状, 确定冲模所需尺寸 (考虑回弹) 以及所需的冲压力。					
	2、模型描述: 板中部为一包住凸模的球面, 外环形区域为一截头圆锥面, 球面与圆锥面在半径为 b 的圆上光滑连接, 冲压过程中 b 值从 0 增加到半径 a					
	3、中心挠度: $\Delta = (a-b)\sin \beta + R(1-\cos \beta) \Rightarrow$ 相对挠度 $\delta = \Delta / h \approx \alpha \rho(1-\rho / 2)$; 其中 $\alpha = a^2 / Rh$, $\rho = b / a$					
	4、所需载荷	$p = \frac{F}{F_0} = k\alpha$; 其中 $k = \begin{cases} \rho(1-2\rho^2 / 3) / (1-\rho) & \rho \leq 0.5 \\ (-0.5\rho^2 + \rho + 1 / 24) / (1-\rho) & \rho \geq 0.5 \end{cases} \begin{cases} \rho = b / a \\ \alpha = a^2 / Rh \end{cases}$				
	5 轴向膜力	$N_\theta(r) = \int_{-h / 2}^{h / 2} \sigma_\theta(r, z) dz$ 在板中心部分为正 在外部环形区为负		$N_\theta(r) \rightarrow \frac{d}{dr}(rN_r) = N_\theta \Rightarrow$ 径向膜力 N_r : 在全板内均为正值 在板中心取最大值		
	外部环形负膜力可使板子产生褶皱					
6、 $\rho \equiv \frac{b}{a} = 1$ 时冲压完成, 设卸载后膜力完全释放, 回弹量 $\frac{\kappa^F}{\kappa^D} = \frac{R}{R^F} \approx 1 - \frac{9\sigma_y(1-\nu^2)}{2E} (\frac{R}{a})^2$						

第十一章:塑性动力学简介

一、绪论 (冲击、爆炸、锻造、冲压)	1、 材料的动态行为 : 金属塑性变形的机理是位错运动, 位错在金属晶格中高速通过比缓慢通过时阻力大, 导致高速变形的大屈服应力现象。		研究应变率对材料应力—应变关系的影响。(屈服滞后、屈服极限提高、强化、应变率效应)
	2、固体结构中的 应力波的传播 : 固体或结构的局部位置受到冲击载荷时, 所产生的应力、变形以波的形式传播出去。(受力物体在加载方向尺寸足够大时, 尤为重要)		波的反射、投射、弥散对问题的分析至关重要
	3、结构的 动力响应 : 梁、板、壳等构件受到横向载荷作用时, (此时不再考虑波传播的影响)。理想刚塑性假设——功大部分被塑性变形吸收, 结构惯性力参与承载, 抵抗变形。		必须考虑惯性, 关键: 本构关系。
二、弹塑性应力波的传播	1.一维波动方程	拉力正: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; 其中: $c^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{E}{\rho}$ $= \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ u ——沿受力方向位移 压力负: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; 其中: $c^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{E}{\rho}$ $= \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ c ——波传播速度	
	2、弹性应力波的传播	波动方程通解: $u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \rightarrow \sigma = \rho c_0 v = \sqrt{E\rho} v$ 其中 ρc_0 —— 波阻抗	
	3、弹性波反射、投射	$\begin{cases} \sigma_I + \sigma_R = \sigma_T \\ v_I + v_R = v_T \end{cases}$ I ——入射 T : 透射; R : 反射 波的性质: 加载波or卸载波	
		$\begin{cases} \rho_B c_B > \rho_A c_A \text{ 入射、反射波性质相同—固支端: 应力0, 速度、位移加倍} \\ \rho_B c_B < \rho_A c_A \text{ 入射、反射波性质相反—自由端: 速度0, 应力加倍} \end{cases}$	
4、弹塑性应力波、冲击波	$\begin{cases} E \text{ 减小} \rightarrow \text{弥散波: 波速减小, 波形逐渐变宽} \\ E \text{ 增大} \rightarrow \text{冲击波: 波速增大, 波形变窄, 陡峭的波阵面} \end{cases}$		$\begin{cases} \text{(塑性) 追赶卸载} \\ \text{(塑性) 迎面卸载} \end{cases}$
三、高应变率材料的动态特性	1、应变率	准静态加载: $10^{-4} \sim 10^{-1} s^{-1}$; 子弹打靶 $10^4 s^{-1}$; 核爆 $10^8 \sim 10^9 s^{-1}$	
	2、应变率敏感性	也叫 粘塑性 : 材料本构关系对应变率的敏感程度。(有些敏感、有些不敏感)	
		敏感材料: $\frac{d\varepsilon}{dt} = D(\sigma_Y^d / \sigma_Y - 1)^q \rightarrow$ 梁弯曲时 $\frac{d\kappa}{dt} = D_1(M_p^d / \sigma_p - 1)^q - D, q$ 试验确定 本构关系	
3、Hopkinson杆测试技术	原理: 试件位于输入杆与输出杆之间, 通过撞击杆, 在输入杆中产生一个弹性压力脉冲, 在界面 1、2 上均发生反射、投射, 通过分别测量输入杆和输出杆的应变—时间图像推导出试件在高应变率下的力学性能。		
四、刚塑性直梁的动力响应	1、基本假定	①、平截面假定; ②单向应力假定; ③忽略梁截面尺寸变化、中性轴移动、反挠曲率; ④忽略剪力影响; ⑤卸载相当于叠加反向施加弹塑性弯矩引起的弹性弯曲	
	2、端部承受脉冲载荷的悬臂梁	阶跃载荷	同一悬臂梁可在大于 F_Y 的动载 $F(t)$ 作用下发生运动, 承载范围扩大。
			$F_Y < F \leq F_Y$ 时, 塑性铰在梁根部, 动力响应运动机构与静极限载荷相同
			$F > 3F_Y$ 时, 内部塑性铰代替根部塑性铰, 动载越大, 塑性铰离载荷越近
		只要是均匀直梁, 其线密度的大小就不影响运动机构及剪力、弯矩的分布	
	矩形脉冲	$f = F_0 / F_C > 3$ 时, 梁的响应包含三个相, f 很大时, 第 II 项最为重要, 它的特征是由于外载突然卸载而触发的塑性铰的移动。	
		梁的变形亦由三部分组成, 即①绕驻定铰 H_0 的转动、②移动铰 H_0B 段的曲率连续变化、③绕梁根部 B 的转动。最终形状仅有 H_0B 段具有塑性曲率。	
移行铰到达梁根部的时间与 F_0 值无关, 但第 II 项所耗散的能量却与 F_0 有关, 外载越强则移行铰耗散的能量占的比例越大。			
本章公式基于刚塑性与小变形, 仅为一级近似, 对结果加以一定修正可以看成二级效应。			

第十二章: 塑性变形原理在能量吸收设计中的应用

一、绪论	1、 能量吸收 ：在碰撞中，吸能元件或结构经塑性变形或脆性断裂耗散冲击能量的过程。			
	2、设计原理	①能量转换不可逆，能量通过塑性变形或其他耗散过程转化为非弹性能		
		②反作用力应维持恒定或几乎恒定，以避免过高的减速 速率		
		③反作用力大小必须受到限制，达到“以时间买距离”的概念		
		④结构和材料应具有稳定的、可重复的变形模式，确保结构在复杂工况下可靠性		
		⑤能量吸收装置一般为一次性，因此成本尽量要低些		
3、常见吸能原件		圆环、方管、圆环、蜂窝板、工字钢		
4、如何考虑动力学因素 —(波的效应)—	①应变率：计算平均应变率，之后根据率相关本构关系对动态屈服应力作修改			
	②惯性效应：只对输入能量和结构的塑性大变形所消耗的能量列出总体能量平衡			
二、横向受压的圆环和圆管	1、两刚性平板对压圆环	圆环的塑性大变形机构是一个四铰机构，载荷随挠度的 增加而增加 。试验所得的圆环承载能力比计算结果要高，（因为 塑性铰应为塑性线为一区域 ）		
	2、一对集中力受压圆环	大变形机构仍是四铰机构，但圆环的承载能力随变形的 增长而逐渐降低 ；实际上由于材料强化、几何效应等使得载荷-位移曲线呈现时升时降的现象。		
	3、横向受约束的圆环	V 型受压和 U 型受压 ，在每两个受力点之间的某处形成塑性铰， 塑性铰的增多导致吸收能力增多 ，破坏力需增大。（受载大小与几何约束有无摩擦有很大关系）。		
	4、圆环系统和圆管系统	串联式：高速公路维修车便携式能力吸收装置。	堆垒式：高速公路分叉口防护，可防角度大。	交叠式：仅用于圆管，每层圆管平行，相邻互相垂直
三、轴向受压的圆管和方管	1、压溃模式和力-位移曲线	长圆管先屈曲后大变形，①欧拉失稳②圆环模式屈曲；③钻石模式；（混合模式）		
		力-位移曲线：轴力先达到一个初始峰值，随后急剧下降，然后波动起伏。		
	2、圆管的理论模型	轴对称（ 圆环模式 ）：承载力平均值 $F_m \approx 6\sigma_y t(Dt)^{1/2}$ （哪种模式看模型结构尺寸）		
		非轴对称（ 钻石模式 ）：承载力平均值 $F_m / 2\pi M_0 \approx 1 + n \csc(\pi / 2n) + n \cot(\pi / 2n)$		
	3、轴向受压的方管	在初始峰值后，力急剧下降，然后周期性的波动，对应于一个个的褶皱和弯曲压扁。		
		正方形截面薄管轴向受压时，通常四个侧壁同时发生 Euler 屈曲， $F_m = 32\sqrt{3}M_0$		
锻炼韧性差时，轴压屈曲后承载能力下降，大变形时迅速产生沿棱线的开裂（ 能量吸收低 ） 方法 ：诱导方管在轴压下开裂与卷曲，发生卷曲的方管有可能成为性能良好的能量吸收装置				
四、各类吸能原件的简单比较	1、比耗能	定义：单位自重所能消耗的能量值		
		圆管破碎>方管开裂与卷曲>圆管折屈>圆管扩张>圆管翻转>圆管压扁		
	2、相对行程	定义：有效行程对原件长度的比值		
弯曲原件>方管开裂与卷曲>挤压装置>圆管组压扁>圆管折屈>圆管翻转				
五、加速度对结构能量吸收性能的影响	1、加载速度对变形模式的影响（端部受冲击圆环）	低速：所有圆环的变形都同时均匀的发生，准静态叠加得到整体响应		
		高速：圆环变形是不均匀的，从第一个圆环的四铰变形模式开始，并逐渐向远端传播。（可用 冲击波理论 来解释）		
	2、结构类型对冲击速度的敏感性	I 类结构 （圆环、圆管等）： 载荷-位移曲线在塑性阶段是一个平台；对冲击速度不敏感		
		II 类结构 ：在载荷达到峰值后急剧下降：对冲击速度相当敏感		
	3、第 II 类结构的静态与动态行为	静力平衡：结构的弹性变形使最大轴向载荷 F_{max} 比刚塑性极限载荷 F_y 小很多 动态：①碰撞有动能损失；②损失仅与质量比、初始角有关；③采用等效质量后能量随时等于两物体非弹性碰撞的能量损失；④撞击能量相同时速度越小则能量随时越大，此为造成“速度敏感性”的主要原因		