# 第一章 应力状态（与应变状态）

## 塑性力学基本假设：

**1.** 材料连续、均匀。
**2.** 静水应力只引起弹性的体积变形、不影响塑性剪切变形（岩土、软金属不适用）。
**3.** 温度不高时忽略流变（蠕变、松弛…）效应，应变率不高时忽略应变率效应。

## 一点的应力状态：

**1.** 指一点附近的受力情况，即过该点的所有微截面上的应力大小和方向（应力矢量）。
**2.** 注意到任意截面的应力矢量可以用三个特殊微分面上的9个应力分量(6个独立)来表征。

## 应力张量：

• 将一点的三个特殊微分面上的 9 个应力分量按一定顺序排成 3×3 的矩阵，即为应力张量，每个元素的第一个下标表示应力作用面、第二个下标表示应力作用方向、值表示应力大小。

## 应力张量的不变量：

**1.** 主应力三次方程的二次项、一次项、常数项的系数 $I_1$、$I_2$、$I_3$ 只取决于点的应力状态，而与坐标系的选择无关，称这三个系数为应力张量的三个不变量。

## 主应力、主方向、主平面：

**1.** 过一点的所有微截面中，一定存在三个正交的微截面，它们所对的应力矢量与截面法向重合（截面的剪应力为零、只剩正应力），这样三个正交的应力矢量称为**主应力**。
**2.** 这样三个正交的微截面的法向称为**主方向**。
**3.** 这样三个正交的微截面称为**主平面**。

## (主)应力空间：

**1.** 以 6 个独立的应力分量为基建立一个六维超空间，此空间中的一点对应于物体内某点的应力状态，该空间称为应力空间。
**2.** 以 3 个应力主方向为基建立坐标系，则该三维空间中的一点对应于物体内某点的应力状态，该空间称为（主）应力空间。
**3.** 注意到（主）应力空间既非几何空间、又非物理空间，只是为描述各点的应力状态而引入的一个三维空间。
**4.** 注意到在主应力空间中，应力张量退化成应力矢量（**应力状态矢**）。

## L 直线、π 平面：

**1.** 在主应力空间中，一条通过原点及第 I 象限、且与三个应力主轴夹角相等的直线称为 **L 直线**，该直线上各点代表应力状态的**球量**部分（应力球张量、静水应力、均匀应力状态），与弹性体积变形有关。
**2.** 在主应力空间中，一个通过原点、且与静水轴（L 直线）垂直的平面即为 **π 平面**，该平面上各点代表应力状态的**偏量**部分（应力偏张量、纯剪应力状态），与塑性剪切变形有关。

## 八面体应力：

**1.** 在主应力空间内，过任一点（代表某物理点的应力状态）作一个特殊的微截面，该微截面的法向与三个应力主轴夹角相等；每个象限作一个，则形成一个封闭的正八面体，这 8 个微截面上的应力称**八面体应力**。

**2.** 八面体（8 个微截面上的）正应力 $\sigma_{oct} = \sigma_m$，表征应力状态的球量部分，与弹性体积变形有关。

**3.** 八面体（8 个微截面上的）剪应力 $\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)}$，表征应力状态的偏量部分，与弹性及塑性剪切变形有关。

## 应力强度：

**1.** 在传统塑性力学中，塑性变形（及屈服）只与应力状态的偏量部分有关，于是可以用一个八面体剪应力 $\tau_{oct}$ 代替 6 个应力分量作为塑性参数，为便于计算，将 $\tau_{oct}$ 乘上 $3/\sqrt{2}$，即为**应力强度 $\sigma_i$**.

**2.** 应力强度 $\sigma_i$ 将 6 个应力分量（5 个独立的应力偏量）化作只有一个参数的“等效”单轴应力状态，故又称相当应力、广义应力、有效应力。

### $\sigma_i - \tau_{oct} - \rho - J_2$ 的关系

| | |
|---|---|
| 应力强度 | $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)}$ |
| 八面体剪应力 | $\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)}$ |
| π 平面应力偏矢半径 | $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)}$ |
| 应力偏量第二不变量 | $\sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)}$ |

## Lode 参数、Lode 角

**1.** 背景：Tresca 屈服准则（最大剪应力判据）未考虑中间主应力 $\sigma_2$ 对剪切屈服的影响，于是，Lode 便在 $\sigma_1$、$\sigma_3$ 一定的情况下，改变 $\sigma_2$ 的取值，以研究中间主应力对屈服的影响：

$$\sigma_2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cdot\mu_\sigma\right],\quad -1 \le \mu_\sigma \le 1$$

**2. Lode 参数：** 由上式反推，$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}$，或 $\mu_\sigma = \sqrt{3}\cdot\tan(\theta_\sigma)$.

**3. Lode 角**：应力状态矢在 π 平面的投影 **ρ** 与 x 轴的夹角，$\theta_\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan(\mu_\sigma)$ .

## 主坐标系的旋转、x-y-L 坐标系

**1.** 将应力主轴 $\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$ 向 π 平面投影，得线性相关的三个偏应力轴 $S_1$、$S_2$、$S_3$；在 π 平面上，取 $S_2$ 为 y 轴，其垂直方向为 x 轴；在 π 平面外，取静水轴 L 为第三轴，则得正交坐标系 x-y-L（由 $\sigma_1$-$\sigma_2$-$\sigma_3$ 坐标系旋转而得）。

**2.** 传统塑性力学只关心应力偏量（π 平面上的应力状态），即只需要用到 x-y 坐标系，比如 Lode 角正是应力偏矢与 x 轴的夹角。

## 应力路径、加载历史：

**1.** 随着荷载的改变，物体内各点的应力状态不断变化，在应力空间中，相应的应力点也在不断改变其位置，在这个过程中，应力点在应力空间中描绘出的轨迹即为**应力路径**。

**2.** 以往的应力路径中，凡引起塑性变形的（加载的）部分，称为**加载历史**。

## 应变 / 应变增量、应变强度 / 应变增量强度

**1. 应变的微分≠应变增量：**

$$\mathrm{d}\left(\varepsilon_{ij}\right) \neq \mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}u_{i,j} + \mathrm{d}u_{j,i}\right)$$

前者从初始位置算起、后者从瞬时位置算起，应变增量的积分 $\int \mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ **无物理意义**，除非应变主轴方向保持不变。

**2. 应变强度的全微分≠应变增量强度：**

$$\mathrm{d}\left(\varepsilon_i\right) = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_{kn}} d\varepsilon_{kn}, \quad \mathrm{d}\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\mathrm{d}\varepsilon_{kn}\mathrm{d}\varepsilon_{kn}}$$

**3. 塑性应变增量强度：**

$$\mathrm{d}\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\mathrm{d}\varepsilon_{kn}^p \mathrm{d}\varepsilon_{kn}^p}$$

塑性应变增量强度 $\mathrm{d}\varepsilon_i^p$ 沿应变路径的积分 $\int \mathrm{d}\varepsilon_i^p$ **无物理意义**，只是一个畸变参数，可以度量畸变程度、反映硬化程度。

# 第二章 屈服条件（初始屈服面、加载面、加卸载准则）

## 屈服：

• 材料点产生新的不可恢复（塑性）变形。

## 初始屈服条件、初始屈服函数、初始屈服面、初始屈服曲线：

**1.** 材料点开始出现塑性变形时其应力状态应满足的条件，称为**初始屈服条件**（简称屈服条件）。

**2.** 材料点的屈服与 6 个独立的应力分量有关，故可将初始屈服条件表示成这 6 个应力分量的函数，即**初始屈服函数**：

$$f\left(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}\right)=0,\quad \text{或}\quad f\left(\sigma_{\mathrm{ij}}\right)=0$$

忽略各向异性时，初始屈服函数与坐标轴方向无关，可简化为 3 个主应力分量、或 3 个应力张量不变量的函数：

$$f\left(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3\right)=0,\qquad \text{或}\quad f\left(I_1,\ I_2,\ I_3\right)=0$$

忽略静水应力对屈服的影响时，可简化为 2 个应力偏量不变量的函数：

$$f\left(J_2,\ J_3\right)=0,\qquad \text{since}\ \ J_1=0$$

**3.** 初始屈服函数在由 6 个应力分量组成的应力空间内为一个六维超曲面，称为**初始屈服面**；忽略各向异性时，初始屈服函数在主应力空间内成为一个三维曲面，即**初始屈服面**，它是弹性阶段的界限，应力点落在面内则为初始弹性状态、落在面上则为塑性状态；

(或定义为，在应力空间中，从原点出发的所有应力路径上的屈服应力状态点连成的曲面)

**4.** 忽略静水应力对屈服的影响时，屈服函数只和应力偏量有关，屈服条件沿静水轴不会发生变化，所以将屈服曲面投影到 π 平面上必然得到唯一的一条曲线，即 π 平面上的**初始屈服曲线**。

## π 平面上的初始屈服曲线 C 的特性：

**1.** 不会通过原点，一定将原点包围在内部；

**2.** 外凸性（材料点只有一次初始屈服，由原点向外做的直线与 C 只能相交一次）；

**3.** 忽略各向异性，则曲线对称于 $S_1$、$S_2$、$S_3$ 轴；

**4.** 忽略包辛格效应，则曲线对称于原点；

→屈服曲线分成相同的 12 部分，试验时可只做 Lode 角 0~30° 范围即可。

## 静水应力对屈服的影响(岩土等颗粒摩擦材料)：

**1.** 随着静水压力的增加，**剪切屈服**越来越难发生，屈服曲面呈锥形、向第一象限放射；

**2.** 静水压力超过一定水平，亦能引起不可恢复（塑性）变形，即发生**体积屈服**，

考虑了体积屈服的屈服条件：帽盖模型、剑桥模型、HS 模型…

## Tresca、Mises 屈服条件——传统(金属)塑性力学

| | **Tresca 条件** | **Mises 条件** |
|---|---|---|
| 判断方法 | **最大剪应力**达到一定数值时，材料开始进入塑性 | **应力强度**达到一定数值时，材料开始进入塑性；<br>物理解释：剪切变形比能达到阈值时… |
| 单轴试验<br>屈服判据 | $\frac{\sigma_1\text{-}\sigma_3}{2}=\frac{\sigma_s\text{-}0}{2}$（内接于 Mises 圆） | $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+\cdots+6(\tau_{xy}^2+\cdots)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\cdot\sigma_s^{\ 2}}$ |
| 纯剪试验<br>屈服判据 | $\frac{\sigma_1\text{-}\sigma_3}{2}=\tau_s$（外切于 Mises 圆） | $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+\cdots+6(\tau_{xy}^2+\cdots)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6\cdot\tau_s^{\ 2}}$ |
| 优点 | 事先知道主应力次序时，计算简单 | 考虑了中间主应力对屈服的影响；<br>屈服曲线光滑、克服奇异性、便于数学处理； |
| 缺点 | 未考虑中间主应力对屈服的影响；<br>三个不等式造成数学上的不便；<br>角点不光滑，具有奇异性； | |
| | 未考虑静水应力对屈服的影响（屈服面开口、未考虑体积屈服），对岩土材料不太适用 | |

## Mohr-Coulomb、Drucker-Prager 屈服条件——岩土塑性力学 1

| | **M-C 条件** | **D-P 条件** |
|---|---|---|
| 判断方法 | 材料点最危险微截面上剪应力 $\tau_n$ 达到阈值时，该点开始进入屈服；<br>剪应力阈值与正应力 $\sigma_n$ 正相关； | 圆锥形屈服面，内切于 M-C 六棱锥； |
| 背景 | **广义 Tresca 的一个特例**<br>（考虑内摩擦的 Tresca） | **广义 Mises 的一个特例（内切 Tresca）**<br>（考虑静水应力对屈服的影响） |
| 屈服判据 1 | $\tau_n=c+\sigma_n\cdot\tan(\varphi)$ | |
| 屈服判据 2 | $f=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\cdot\sin\varphi-c\cdot\cos\varphi=0$ | $f=\alpha\cdot I_1+\sqrt{J_2}+k=0$ |
| 优点 | 考虑了静水应力对剪切屈服的影响 | |
| | | 考虑中间主应力对剪切屈服的影响；<br>屈服曲面光滑、非奇异、便于计算； |
| 缺点 | 未考虑中间主应力对剪切屈服的影响；<br>锥顶和棱线上的导数方向不定、形成奇异性； | |
| | 屈服曲面开口，未能反映岩土材料在高静水压力下的体积屈服 | |

## 广义 Tresca、广义 Mises 屈服条件——岩土塑性力学 1’

**1.** 在 Tresca 条件中加入静水应力的影响，形成各种正六棱锥形屈服面；或采用不同的 Tresca 六边形定义方式，形成非正六棱锥形（比如 M-C）屈服面，即为**广义 Tresca**。

**2.** 将 M-C 六棱锥修圆，比如取 M-C 内切圆锥即得 Drucker-Prager 屈服面，此外还可取 M-C 三棱外接圆锥、交接圆锥、以及其他各种广义 Tresca 六棱锥的拟合圆锥。

## 帽盖模型、剑桥模型、HS 模型——岩土塑性力学 2

**1.** Mohr-Coulomb 等广义 Tresca 模型、及 Drucker-Prager 等广义 Mises 模型，虽考虑了静水压力对剪切屈服的影响，但未能反映岩土材料在高静水压力下的体积屈服。

**2.** 在广义 Tresca 或广义 Mises（常取 M-C 或 D-P）上加一个"帽盖"，形成封闭的屈服曲面，即为**帽盖模型**；它考虑了体积屈服和硬化，亦考虑了剪切屈服，但一般不考虑剪切硬化，注意到，该模型得到了岩土试验的广泛支持。

### 后继屈服条件、后继屈服函数、后继屈服面、后继屈服曲线

### (硬化条件) (硬化函数/加载函数) (硬化面/加载面) (硬化曲线/加载曲线)

**1.** 用于判断材料点在发生初始屈服后的某一时刻，是处于后继弹性状态、还是塑性状态的准则，称为**硬化条件、或后继屈服条件**；

**2.** 后继屈服条件可表示为一点的瞬时应力状态及加载路径(塑性变形的大小和历史)的函数，即**硬化函数**、或**加载函数**、或**后继屈服函数**：

$$f\left(\sigma_{ij}, \mathrm{K}\right)=0$$

K 为反映加载路径（塑性变形的大小和历史）的参数，称**硬化参数**。

**3.** 在主应力空间内，后继屈服函数是以 K 为参数的一簇曲面，称为**后继屈服曲面**、或**硬化面**、或**加载面**，每一个受力瞬时所对的后继屈服面代表后继弹性阶段的界限。

**4.** 忽略静水应力对屈服的影响时，对于给定的加载时刻（加载路径已经确定），屈服函数只和应力偏量有关，屈服条件沿静水轴不会发生变化，此时将屈服曲面投影到 π 平面上必然得到唯一的一条曲线。于是，**后继屈服曲面**在 π 平面上的投影称为**后继屈服曲线**。

### 硬化法则

- 确定屈服条件随塑性变形的变化（确定后继屈服面的位置）。

### 单一曲线硬化假设、等向硬化模型、运动硬化模型、组合模型

**1.** 在加载符合依留辛**简单加载**条件（各应力分量按固定比例增加、$\nu=0.5$、$\sigma_i=A*\varepsilon_i^m$）时，硬化函数可以用应力强度 $\sigma_i$ 和应变强度 $\varepsilon_i$ 的确定性函数关系来表示，即**单一曲线硬化假设**：

$$f\left(\sigma_{ij}, \mathrm{K}\right)=0 \ \Rightarrow \ \sigma_i=\Phi(\varepsilon_i)$$

此假设采用了应力强度 $\sigma_i$ 代替 6 个应力分量，有 Mises 屈服条件的影子。

在单一曲线硬化假设下，这种确定性函数关系是材料特性，和应力状态无关，可以通过简单应力状态试验来确定，比如在单轴拉伸试验中：

$$\sigma=\Phi(\varepsilon) \qquad \text{since } \sigma_i=\sigma,\ \varepsilon_i=\varepsilon$$

**优缺点：**单一曲线假设要求应力路径是单调的，适用于全量理论（简单加载），对于复杂加载（非简单加载），部分材料点会发生卸载，单一曲线假设要靠单轴单调加载试验确定硬化函数、显然不能适应弹性卸载的情况。

**2.** 假设经过初始屈服后的屈服面（硬化面）保持形状、中心位置不变，只是随着塑性变形的发展而单调、均匀地向外膨胀（加载历史只会单调地改变 π 平面上屈服曲线到原点的距离，而不会改变初始屈服函数的形式），即**等向硬化模型**：

$$f\left(\sigma_{ij}, \mathrm{K}\right)=0 \ \Rightarrow \ f=f^{*}(\sigma_{ij})-K(k)=0$$

若初始屈服条件选的是 Mises 条件（后继屈服也必为 Mises 表达式），等向硬化模型为：

$$\sigma_{\mathrm{i}} = K(k), \quad \text{since Mises: } f^{*}(\sigma_{\mathrm{ij}}) = \sigma_{\mathrm{i}}$$

随着塑性变形的发展（加载历史的产生），K(k)按照一定函数关系单调递增，两套理论：

**理论 1：** 假设硬化程度 K(k)只是总塑性功 $W_p$ 的函数 ，而与应变路径的形式无关，所以可由简单应力路径（如单拉）确定硬化函数 F：

$$\sigma_{\mathrm{i}} = F(W_p), \qquad \text{单轴: } \sigma = F(\cdots)$$

**理论 2：** 假设硬化程度 K(k)是畸变参数的函数：

$$\sigma_{\mathrm{i}} = H(\int \mathrm{d}\varepsilon_i^p)$$

可以通过单轴试验确定硬化函数 H：

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \mathrm{H}' = \frac{E\Phi'}{E - \Phi'}$$

**优缺点：** 可用于增量理论、可适应复杂加载，容易进行数学处理；但在试验中塑性变形本身表现出一定的各向异性（甚是对初始各向同性材料），且由于包辛格效应，一个方向的硬化会伴随着另一个方向的软化（而不是等量的硬化），所以假设硬化面能保持初始屈服面的对称性、保持中心位置不变是不符合实际的。

**3.** 假设材料点在塑性变形的方向被硬化时，在相反的方向被等量地软化，这样，在随着塑性变形的发展，屈服面的大小和形状都不变，只是整体在应力空间中作平移，此即**运动硬化模型**，是考虑包辛格效应的简化模型。

**优缺点：** 可以在一定程度上反映包辛格效应。

**4.** 将运动硬化模型与等向硬化模型结合起来，使屈服面的形状、大小、位置均随塑性变形的发展而变化，即**组合硬化模型**。

**优缺点：** 可以更好地反映材料的包辛格效应、更符合试验结果；但太过复杂，不便于应用。

## 加、卸载准则

**1.** 在复杂加载情况下（采用增量法），当材料点在某一瞬时已经处于屈服状态时，对 6 个应力分量施加 6 个微小增量，针对这个应力增量发生的过程，判断材料点是继续发展塑性（硬化）、还是发生弹性卸载的准则，称为**加、卸载准则**。

**2.** 操作方式：

① 判断当前材料点是否处于屈服状态（若没屈服，谈何加卸载 ！）：

$$f\left(\sigma_{\mathrm{ij}}, \mathrm{K}\right) = 0$$

② 若①=YES，判断应力增量（6 个分量增量）是顺着还是逆着屈服面外法向：

$$\text{（加载）} \ \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} > 0: \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\mathrm{ij}}} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \mathrm{d}\sigma_x + \cdots + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \mathrm{d}\tau_{xy} + \cdots > 0$$

卸载，上式<0；中性变载（不继续硬化，还在原本屈服面上），上式=0.

为便于求全微分（涉及偏导），两种常用屈服函数宜采用如下形式：

$$Tresca: \ f = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - k^2] \cdot [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - k^2] \cdot [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - k^2]$$

$$Mises: \ f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2k^2$$

# 第三章 塑性本构关系（全量理论、增量理论/流动法则）

## 塑性理论的基本框架：

| | 全量理论 | 增量理论 |
|---|---|---|
| 平衡方程（3 个） | $\sigma_{ij,j}+F_i=0$ (3) | $\mathrm{d}\sigma_{ij,j}+\mathrm{d}F_i=0$ (3) |
| 几何方程（6 个） | $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$ (6) | $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}u_{i,j}+\mathrm{d}u_{j,i}\right)$ (6) |
| 本构方程（6 个） | $\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ii}&=\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{ii} \quad (1)\\ e_{ij}&=\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\cdot S_{ij} \quad (5)\end{aligned}\right\}$<br>其中 $\sigma_i=\Phi(\varepsilon_i)$，单一曲线**硬化**假设 | $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\mathrm{d}S_{ij}+\mathrm{d}\lambda\cdot S_{ij}+\frac{1-2\nu}{3E}\cdot\mathrm{d}\sigma_{kk}\cdot\delta_{ij}$ (6)<br>其中 $\mathrm{d}\lambda=\frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\varepsilon_i^p}{\sigma_i}=\frac{3}{2H'}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_i}{\sigma_i}$ （**硬化条件**）<br>对初始弹性、卸载、中性变载，$\mathrm{d}\lambda=0$ |
| 边界条件（两类） | $\sigma_{ij}\cdot l_j=\bar{p}_i$ （在$S_\sigma$上）<br>$u_i=\bar{u}_i$ （在$S_u$上） | $\mathrm{d}\sigma_{ij}\cdot l_j=\mathrm{d}\bar{p}_i$ （在$S_\sigma$上）<br>$\mathrm{d}u_i=\mathrm{d}\bar{u}_i$ （在$S_u$上） |

## 塑性本构的内容：

**1. (初始) 屈服条件**：判断材料是否开始进入塑性（确定初始屈服面的位置）。

**2. 硬化法则**：确定屈服条件随塑性变形的变化（确定后继屈服面的位置），即应力应变定量关系（增量理论需将此定量关系代入定性的流动法则，才能得到本构关系）。

**3. 流动法则**：确定塑性流动（塑性变形增量）方向和“大小”——即应力应变定性关系：

① 方向关系：应力应变（或其增量）主轴之间的关系、确定塑性流动方向；

② 分配关系：各塑性应变（增量）分量与相应应力偏量分量成比例。

**4. 加、卸载准则**：判断已经屈服的材料点是继续塑性加载（硬化）还是弹性卸载。

## 简单加载定律、全量型本构理论：

**1.** 依留辛**简单加载定律**（充分性已得证，必要性并不严格）

① 荷载按固定比例增长（保证内部应力分量按固定比例增加）——***必要性强***

注意到，此即要求 Lode 参数为常数。

② 材料不可压缩（塑性原本就不可压缩，这里主要说弹性，即 $\nu=0.5$）——***必要性不强***

③ 应力强度 $\sigma_i$ 和应变强度 $\varepsilon_i$ 之间符合幂函数关系（即 $\sigma_i=A*\varepsilon_i^m$）——***必要性不强***

**2. 全量理论（形变理论）**：

建立在应变全量和应力全量之间的关系之上的本构模型称为**全量理论**。

核心：在小变形、且简单加载情况下，应变偏量全量与应力偏量全量近似成比例。

操作方式（依据三条假设）：

$$\begin{cases}\varepsilon_{ii}=(1-2\nu)/E\cdot\sigma_{ii} & \text{假设1：体积变形为弹性}\\ e_{ij}=\psi\cdot S_{ij}=3\varepsilon_i/2\sigma_i\cdot S_{ij} & \text{假设2：应变偏量与应力偏量成比例，且主轴重合}\\ \sigma_i=\Phi(\varepsilon_i) & \text{假设3：单一曲线硬化假设}\end{cases}$$

## 卸载定律：

**1.** 卸载定律：

对屈服的材料点施加一个荷载改变量 $\Delta P$ 使之（弹性）卸载，则卸载后的应力（应变）等于卸载前的应力（应变）减去 $\Delta P$ 按弹性作用算得的应力（应变）改变量。

**2.** 前提条件：

① 简单卸载，Lode 参数（或 Lode 角）在卸载过程中保持不变，各点应力按比例减少；

② 卸载不引起第二次塑性变形，即不会因应力变号而达到新的屈服、不涉及包辛格；

**3.** 推论：

全部外荷载卸除后，不仅会留下残余变形、还会留下残余应力。

## 全量理论、增量理论的比较

**1.** 在小变形、且简单加载的情况下，两理论等价（简单加载时增量公式积分即得全量公式），可以认为全量理论是增量理论在简单加载情况下的一个特例。

**2.** 全量理论便于手算，增量理论复杂、一般需借助计算机。

**3.** 增量理论考虑了塑性变形对加载路径的依赖性，可用于复杂加载。

**4.** 中性变载不产生塑性应变，增量理论通过强制 $d\lambda=0$ 体现之，增量理论则无法做到。

**5.** 增量理论在中性区（加载区和卸载区之间）自动退化为弹性关系，保证连续性，全量则不行。

## 增量理论（流动理论）、流动法则

**1.** 建立在应变增量和应力全量（及应力增量）之间的关系之上的理论，称为**增量理论**。

**2.** 根据应力确定塑性应变增量的方向和“大小”的规则，称为**流动法则**。

## Levy-Mises 流动法则、P-R 流动法则、由塑性势理论导出的流动法则：

| | **Levy-Mises** | **P-R** | **塑性势流动法则** | **Drucker 公设** |
|---|---|---|---|---|
| 塑性应变增量**方向** | 应变增量主轴与应力全量主轴重合 | **塑性**应变增量主轴与应力全量主轴重合 | **塑性**应变增量方向与塑性势 g 的梯度方向一致 | 同左，取 g=f（塑性势函数=屈服函数） |
| 塑性应变增量**“大小”** | $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}=\mathrm{d}\lambda\cdot S_{\mathrm{ij}}\ (\mathrm{d}\lambda\geq 0)$ | $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\cdot S_{\mathrm{ij}}\ (\mathrm{d}\lambda\geq 0)$ | $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial\sigma_{\mathrm{ij}}}\ (\mathrm{d}\lambda\geq 0)$ | $\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\cdot\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{\mathrm{ij}}}\ (\mathrm{d}\lambda\geq 0)$ |
| 区别与联系 | 不考虑弹性变形，是 P-R 流动法则应用于理想刚塑性体时的**特例**。 | 区分弹、塑性应变增量，是关联流动法则（Drucker 公设）将屈服准则取为 Mises 条件时的**特例**。<br>注意到 Drucker 公设本身是塑性势流动法则的特例。 | 起初由弹性力学中弹性势 U 的概念推广到塑性而得到，塑性势 g 与应力状态及加载历史有关，经过适当的**构造**可以导出任何一种流动法则（太不讲理了!） | 是塑性势流动法则的**特例**（假设稳定材料的塑性势 g 等于屈服函数 f） |
| 历(duan)史(zi) | Levy 提出后无人问津，40 年后 Mises 又提出了一次 | 考虑弹性变形，将只适用于刚塑形体的 Levy-Mises 流动法则推广到弹塑性体 | 由 Mises 提出，但未指出塑性势 g 的确定方法 | 由 Drucker 提出，特别地，采用 Mises 屈服函数时，便导出了 P-R 流动法则 |

## 由流动法则、硬化法则导出塑性本构

• **流动法则**确定了应力应变定性关系（塑性应变增量的方向和“大小”），再通过**硬化法则**确定比例系数 dλ，便可以直接从流动法则导出塑性本构。

**1.** 理想弹塑性材料的塑性本构（$P_{87}$）

**2.** 理想刚塑性材料...（$P_{89}$）

**3.** 弹塑性硬化材料...（$P_{90}$）

$$\text{塑性本构}\begin{cases} \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}} = \dfrac{1}{2G}\mathrm{d}S_{\mathrm{ij}} + \mathrm{d}\lambda \cdot S_{\mathrm{ij}} + \dfrac{1-2\nu}{3E}\cdot \mathrm{d}\sigma_{kk}\cdot\delta_{\mathrm{ij}} & \text{(流动法则)} \\ \mathrm{d}\lambda = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon_i^p}{\sigma_{\mathrm{i}}} = \dfrac{3}{2H'}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{i}}}{\sigma_{\mathrm{i}}} & \text{(硬化法则)} \end{cases}$$

## 稳定材料、Drucker 公设、关联流动法则

**1.** 对材料做单轴拉伸试验，考查任一加载过程（加载意味着已经处于屈服状态），如果都有 $\Delta\sigma_*\Delta\varepsilon>0$，即附加应力在应变增量上总是做正功，则称这种材料为**稳定材料**或**硬化材料**；反之，若存在一个加载过程使 $\Delta\sigma_*\Delta\varepsilon<0$，即附加应力在应变增量上做负功，则说明材料发生软化，称这种材料为**不稳定材料**或**软化材料**（σ-ε 曲线有下降段）。

**2.** Drucker 将单轴单调加载（位移加载）试验推广到复杂的应力路径，提出**稳定材料塑性功不可逆公设**（附加应力所做的塑性功非负），即 **Drucker 公设**：

$$\Delta\sigma_{\mathrm{ij}}\cdot\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}} = (\sigma_{\mathrm{ij}} - \sigma_{\mathrm{ij}}^0)\cdot\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}} > 0$$

**3.** Drucker 公设推论：

① 屈服面的外凸性；

② 塑性应变增量的法向性；

**4.** 根据 Drucker 公设，塑性应变增量方向与屈服面外法向（梯度方向）一致：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial\sigma_{\mathrm{ij}}}\quad(\mathrm{d}\lambda\ge 0)$$

又根据塑性势理论，塑性应变增量方向与塑性势面梯度方向一致：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{p}} = \mathrm{d}\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma_{\mathrm{ij}}}\quad(\mathrm{d}\lambda\ge 0)$$

可见，Drucker 公设对应于在塑性势理论中将塑性势函数 g 取为屈服函数 f 的情况，即 f=g，此时塑性势面与屈服面重合，塑性应变增量方向与屈服面正交，称为与屈服条件相关联的流动法则，简称**关联流动法则**或**正交流动法则**。

一般地，若抛开屈服函数 f 另取塑性势函数 g，即 g≠f，则称**非关联流动法则。**

对于金属等稳定材料，关联流动法则与试验符合的很好。

注意到，当采用 Mises 屈服条件时，得到的关联流动法则就是 P-R 流动法则。

# 第四章 弹塑性弯曲和扭转（计算题）

## 梁的纯弯曲 (理想弹塑性、无硬化)

**1.** 弹塑性截面抗力 $M_{ep}$：

$$M_{ep}=\int_{\mathrm{y_b}}^{\mathrm{y_t}}\sigma(y)\cdot \mathrm{y} b(y)\cdot \mathrm{d}\, y=\frac{\sigma_s}{y_s}\cdot I_e+\sigma_s\cdot S_p, \qquad \text{where } I_e=\int_{Ae}y^2\cdot \mathrm{d}A,\quad S_p=\int_{Ap}y\cdot \mathrm{d}A$$

弹性极限弯矩 $M_e$：取 $y_s=\min\{y_{max1}, y_{max2}\}$

塑性极限弯矩 $M_p$：取 $y_s=0$

**2.** 梁的挠度、曲率：

对理想弹塑性材料，塑性区可以发生无限的塑性流动，故梁的挠度、曲率完全由弹性区决定：

$$\frac{1}{\rho}\approx y'',\quad y''=\frac{M_e}{EI_e}=\frac{\sigma_s}{E\cdot y_s}$$

从塑性状态卸载时，按弹性卸载定理（第三章），应力、应变、挠度等于卸载前的应力、应变、挠度减去将卸载量按弹性作用在梁上时所产生的应力、应变、挠度（类似杆系力学中的弹性叠加原理）。

## 梁的横向弯曲：

**1.** 对于细长梁，可**忽略**横向挤压应力 $\boldsymbol{\sigma_y}$、截面剪应力 $\boldsymbol{\tau_{xy}}$，这样，横向弯曲可沿用纯弯曲的公式，只是弯矩会沿梁的轴线变化（弯矩图 ）：

$$M_{ep}(x)=\int_{\mathrm{y_b}}^{\mathrm{y_t}}\sigma(y,x)\cdot \mathrm{y} b(y)\cdot \mathrm{d}\, y=\frac{\sigma_s}{y_s}\cdot I_e+\sigma_s\cdot S_p$$

## 圆杆的弹塑性扭转：

**1.** 应力应变状态：

除 $\gamma_{z\theta}$ 外，其余 5 个应变分量全为零：

$$\gamma_{z\theta}=\frac{z\alpha\cdot r}{z}=\alpha\cdot r, \qquad \text{where } \alpha=\text{单位长度扭转角}$$

除 $\boldsymbol{\tau_{z\theta}}$ 外，其余 5 个应力分量全为零；

**2.** 弹塑性扭矩计算

太复杂了，祈祷不考这个吧。

## 非圆截面杆的塑性极限扭矩

- 斜率 k、体积 V、塑性极限扭矩 $T_p=2V$

## 其他计算题考点（课后习题都有覆盖）

**1.** 写点的应力状态（3×3 矩阵），如薄壁圆管拉、扭、内压（忽略 $\boldsymbol{\sigma_r}$）。
**2.** 判断是否屈服，Tresca、Mises。
**3.** 判断加卸载，先判断是否屈服（否则谈何加卸载）、再判断应力全微分大于等于小于零。
**4.** 增量全量计算...

# 第九章 岩土的屈服条件和本构关系

## 岩土塑性力学的特点：

**1. 体积变形不只是弹性的**。传统塑性力学认为体积变形是弹性的，卸去静水应力后可以完全恢复，而对于岩土材料，不仅静水应力能引起显著的不可恢复（塑性）变形、应考虑静水应力对剪切屈服的而且偏应力也会引起塑性变形（剪胀性）。

**1'. 需考虑体积屈服**。传统塑性力学只考虑剪切屈服，采用开口的单一屈服面；岩土塑性力学需同时考虑剪切屈服和体积屈服，所以是封闭的双屈服面（甚至是多重屈服面）。

**2. 静水应力影响剪切屈服**。随着围压（静水压力）的增加，剪切屈服越来越难发生，屈服曲面呈锥形、向第一象限放射，静水应力对剪切屈服的影响不可忽略。

**3. 需处理不稳定材料的软化段**。传统塑性力学只在 Drucker 公设下处理稳定材料，而岩土材料往往不符合 Drucker 公设、必须处理软化段。

**4. 应考虑非关联流动法**。金属材料（稳定材料）的试验结果与关联流动法则（Drucker 公设）符合的很好；但岩土材料的试验结果则偏离关联流动理论。遗憾的是，目前很难做到有根据地选取塑性势函数 g，且非关联会导致弹塑性矩阵不对称，求解工作量大为增加。

**5. 弹、塑性耦合**。在传统塑性理论中，材料的弹性系数与塑性应变无关，弹塑性不耦合。岩土塑性力学有时需要考虑弹性系数随塑性变形的发展而变化的**弹、塑性耦合**现象。

**6. 拉压单边效应**。岩土材料的抗拉强度远低于抗压强度。

## 岩土的屈服条件：

**1.** 剪切屈服和偏应力、及静水应力有关，屈服面为锥形。

**2.** 体积屈服和偏应力、及静水应力有关，屈服面为帽盖形。

**3.** 屈服曲线的性质：

① 封闭； ② 由原点向外做的射线与屈服曲线只能相交一次（初始屈服只有一次）；

③ 对称性：关于 $S_1$、$S_2$、$S_3$ 对称，但关于原点不对称（拉压单边效应）。

**4.** 软化阶段：

屈服面不断收缩，收缩到最终破坏面时，进入无限的塑性流动状态，此时的破坏面称残余破坏面。

## 典型的岩土屈服条件（第二章已详细述及）：

**1.** Mohr-Coulomb 条件（一种广义的 Tresca 条件）；

Drucker-Prager 条件（一种广义的 Mises 条件，把 M-C 修圆）。

**2.** 广义 Tresca 条件；

广义 Mises 条件（把广义 Tresca 修圆）。

**3.** 帽盖模型、剑桥模型、HS 模型：

考虑体积屈服