

每題 10%

1. $S(n): 4n < (n^2 - 7)$ 。證明對所有 $n \geq 6$ 的整數， $S(n)$ 均成立。
2. $S(n): 3^n < n!$ 。證明對所有 $n \geq 7$ 的整數， $S(n)$ 均成立。
3. 想辦法自行推導一個關於 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}$ 的公式 $S(n)$ ，並證明對所有 $n \geq 1$ 的整數， $S(n)$ 均成立。
4. $S(n): \sum_{j=1}^n [j(j+1)(j+2)] = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ 。證明對所有 $n \geq 1$ 的整數， $S(n)$ 均成立。
5. $S(n): n! < n^n$ 。證明對所有 $n \geq 2$ 的整數， $S(n)$ 均成立。
6. $\sum_{j=1}^9 \left(\sum_{i=1}^9 (101j + 10i) \right) = ?$
7. 計算 $\sum_{j=10}^{30} j$, $\sum_{j=10}^{30} j^2$ 與 $\sum_{j=10}^{30} j^3$ 。
8. 某次聚會 32 人參加，證明至少有 3 人的生日會在同一月份。
9. 某正三角形每邊長為 6 公分。證明在此三角形內部（不含周邊）的任 10 個點 (points) 當中必有 2 個點間的距離小於 2 公分。
10. 從 1, 2, 3, ..., 33 這 33 個整數中任選 18 個相異的整數，證明一定有 2 個數相加等於 34。