每題 10%

1. $S(n): 4n < (n^2 - 7)$。證明對所有 $n \geq 6$ 的整數，$S(n)$ 均成立。
2. $S(n): 3^n < n!$。證明對所有 $n \geq 7$ 的整數，$S(n)$ 均成立。
3. 想辦法自行推導一個關於 $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)}$ 的公式 $S(n)$，並證明對所有 $n \geq 1$ 的整數，$S(n)$ 均成立。
4. $S(n): \sum_{j=1}^{n} [j(j+1)(j+2)] = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$。證明對所有 $n \geq 1$ 的整數，$S(n)$ 均成立。
5. $S(n): n! < n^n$。證明對所有 $n \geq 2$ 的整數，$S(n)$ 均成立。
6. $\sum_{j=1}^{9}\left(\sum_{i=1}^{9}(101j + 10i)\right) = ?$
7. 計算 $\sum_{j=10}^{30} j$, $\sum_{j=10}^{30} j^2$ 與 $\sum_{j=10}^{30} j^3$。
8. 某次聚會 32 人參加，證明至少有 3 人的生日會在同一月份。
9. 某正三角形每邊長為 6 公分。證明在此三角形內部（不含周邊）的任 10 個點 (points) 當中必有 2 個點間的距離小於 2 公分。
10. 從 1, 2, 3, ⋯, 33 這 33 個整數中任選 18 個相異的整數，證明一定有 2 個數相加等於 34。

(1) $S(n): 4n < (n^2-7)$，證明 $n \geq 6$ 時均成立

當 $n=6$ $S(6): 24 < 29$，成立

設 $n=k$，$4k < k^2-7$

證明 $4(k+1) < (k+1)^2-7$ 成立

$4k+4 < k^2+2k-6$

$k^2-2k-10 > 0$

$k=6$ 時，$36-12-10=14$

$14>0$ 所以成立

$k^2-2k-10$ 是一個向上的二次函數，所以值會隨著 k 遞增而增加，因此當 $n \geq 6$ 時 $S(n)$ 成立

(2) $S(n): 3^n < n!$，$n \geq 7$

當 $n=7$ 時 $3^7 < 7!$，$2187 < 5040$ 成立

當 $n=k$，$S(n) = 3^k < k!$

證明 $3^{k+1} < (k+1)!$

根據假設 $3^k < k!$，可得 $3^{k+1} = 3^k \cdot 3 < 3 \cdot k!$

由於 $3^{k+1} < 3 \cdot k!$

證明 $3 \cdot k! < (k+1)k!$

$3 < k+1$，$k > 4$ 時成立

所以當 $k \geq 7$ 時，$S(n)$ 成立

3. 想辦法自行推導一個關於 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$ 的公式 $S(n)$，並證明對所有 $n\geq 1$ 的整數，$S(n)$ 均成立。

證明 $S(n)=1-\frac{1}{1+n}$

$S(1)=\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$ 成立

設 $n=k$，$S(k)=1-\frac{1}{1+k}$

證明 $n=k+1$ 時 $S(n)$ 為 $1-\frac{1}{k+2}$

$$S(k+1)=1-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=1+\frac{-k-2+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=1+\frac{\cancel{-k-1}}{\cancel{(k+1)}(k+2)}=1-\frac{1}{k+2}$$

得證當 $n\geq 1$ 時，$S(n)=1-\frac{1}{n+1}$

4. $S(n):\sum_{j=1}^{n}[j(j+1)(j+2)]=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$。證明對所有 $n\geq 1$ 的整數，$S(n)$ 均成立。

$S(1)=1(2)(3)=6$

$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}=6$ 成立

$S(2)=6+2\cdot 3\cdot 4=30$

$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4}=30$ 成立

設 $n=k$，證明當 $n=k+1$ 時，$S(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

$$S(k+1)=S(k)+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{(k+4)(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

得證當 $n\geq 1$ 時，$S(n)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $S(n): n! < n^n$。證明對所有 $n \geq 2$ 的整數，$S(n)$ 均成立。

$S(2) = 2 < 2^2$ 成立

證明當 $n=k+1$ 時 $(k+1)! < (k+1)^{k+1}$

$(k+1)! = k! \cdot (k+1)$，$(k+1)^{k+1} = (k+1)^k \cdot (k+1)$

根據假設，$k! \cdot (k+1) < k^k \cdot (k+1)$

證明 $k^k < (k+1)^k$

$k \ln k < k \ln k+1$

當 $k \geq 1$ 時會成立

得證 當 $n \geq 2$ 時，$S(n)$ 成立

6. $$\sum_{j=1}^{9}\left(\sum_{i=1}^{9}(101j+10i)\right) = ?$$

$(101+10)+(101+20)+(101+30)$

$$\frac{(101+909)\times 9}{2}$$

$$= \frac{9090}{2} = 4545$$

$4545 \times 9 = 40905$

$$\begin{array}{r} 4545 \\ \times \quad 9 \\ \hline 40905 \end{array}$$

$$\frac{(10+90)9}{2} = \frac{900}{2} = 450$$

$450 \times 9 = 4050$

$$\begin{array}{r} 40905 \\ + \ 4050 \\ \hline 44955 \end{array}$$

$40905 + 4050 = 44955$

7. 計算 $\sum_{j=10}^{30} j$，$\sum_{j=10}^{30} j^2$ 與 $\sum_{j=10}^{30} j^3$ 。

$$\sum_{10}^{30} j = \frac{(10+30)\times 21}{2} = 20\times 21 = 420$$

$$\sum_{j=10}^{30} j^2 = \sum_{j=1}^{30} j^2 - \sum_{j=9}^{9} j^2 = \frac{\overset{5}{\cancel{30}}\overset{31}{(30+1)}\overset{61}{(2\cdot 30+1)}}{\underset{1}{\cancel{6}}} - \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{5}{\cancel{(9+1)}}\cdot\overset{19}{(18+1)}}{\underset{2}{\cancel{6}}}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 19 \\ \hline 135 \\ 15 \\ \hline 285 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times\ 61 \\ \hline 31 \\ 186 \\ \hline 1891 \\ \times\ 5 \\ \hline 9455 \end{array}$$

$= 9455 - 285$

$= 9170$

$$\begin{array}{r} 9455 \\ -\ 285 \\ \hline 9170 \end{array}$$

8. 某次聚會 32 人參加，證明至少有 3 人的生日會在同一月份。

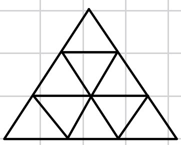
根據鴿籠原理，每一年有12月份，只要至少有25個人，

就會有3個人在同一月份生日，32 > 25，所以會有

3個人的生日在同一月份

8. 某次聚會 32 人參加，證明至少有 3 人的生日會在同一月份

9. 某正三角形每邊長為 6 公分。證明在此三角形內部（不含周邊）的任 10 個點 (points) 當中必有 2 個點間的距離小於 2 公分。



邊長 6 cm 的正三角形可以切出 9個

邊長 2 cm的小三角形，根據鴿籠原理

一定會有一個小三角形中包含 2個點，它們

的距離不會超過 2 cm #

10. 從 1, 2, 3, ⋯, 33 這 33 個整數中任選 18 個相異的整數，證明一定有 2 個數相加等於 34。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18 17

最糟的情況是取17個數，其中的兩個無法使其相加為34，只要選超過17個數就至少有2個數相加為34。