

每題 4%

1. 某印表機製造廠生產噴墨與雷射兩種印表機，噴墨印表機有 4 種尺寸且依照墨水匣數量分為 3 色、4 色與 6 色三款。雷射印表機則有 5 種尺寸，同時有黑白與彩色兩種。而彩色雷射印表機又有 4 色與 6 色兩款。某甲欲購買 1 台該廠牌之印表機，有幾種選擇？又有多少款 6 色的彩色雷射印表機可供某甲選購？
2. 某線上遊戲有 2 關。第 1 關必須依順序擊敗由電腦從 8 隻魔獸選出的 3 隻方能過關；第 2 關則必須從指定的 20 個機智問答中任挑 10 題回答，且必須答對至少 7 題方能過關。有幾種過關的方法？
3. 第一大學資工系每年級各有 A、B 兩班，全系共 8 個班。今舉辦資工系歌王海選，每班由 6 位唱將出馬，角逐前四名。請問冠、亞軍在同班，而季軍與殿軍在不同班（當然也不可與冠、亞軍同班）的情況有幾種？另外，若冠、亞軍在同班且季軍與殿軍也同班（但不與冠軍同班），則有幾種可能？
4. 考慮由 0, 1, 2, 3 所組成長度為 10 的字串，任給其中一個  $S = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$ ，定義  $S$  的權重 (weight) 為  $W(S) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = \sum_{j=1}^{10} x_j$ 。例如， $S = 0212301123$ ，則  $W(S) = 0 + 2 + 1 + 2 + 3 + 0 + 1 + 1 + 2 + 3 = 15$ 。這些字串中權重為奇數者有幾個？
5.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$  有幾組可能的整數解？其中  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  且  $x_4 \geq 3$ 。
6.  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$  有幾組可能的整數解？其中  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  且  $0 \leq x_4 \leq 3$ 。
7. 以二項式定理證明  $\binom{n}{0}4^n - \binom{n}{1}4^{n-1} + \binom{n}{2}4^{n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 3^n, n \geq 1$ 。
8.  $((-3)x^2 - 4y^3)^6$  展開後  $x^4y^{12}$  的係數為何？
9. 列出 truth 所有的排列。
10. 將 information 的所有字母做排列，假設兩個 i 不能排在相鄰的位置，有幾種排法？
11. 列出以下集合的所有元素。
  - (1) 小於或等於 100 的正整數且不為 5 但卻為 7 的倍數。
  - (2)  $\{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } 5 < x^2 \leq 200\}$ 。
  - (3)  $\{x | x \in \mathbb{Z}^+, x + 25 = 10\}$ 。
  - (4)  $\{x | x \in \mathbb{Z}, x + 25 = 10\}$ 。
12. 令  $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x^2 \leq 100\}$  且  $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } |x| \leq 10\}$ 。A 與 B 是否相等？
13. 若  $A - B = \{1, 3, 7, 9, 11\}$ ,  $B - A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$  且  $A \cap B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ ，求集合 A 與 B？
14. 若  $A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B - A = \{2, 4, 8, 16\}$  且  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 16, 21, 22, 23, 25, 30, 32\}$ ，求集合 A 與 B？
15. 令  $U$  為介於 1 到 1,000 之整數（含 1 與 1,000）。U 當中：
  - (1) 2, 3, 5 的倍數各有幾個？
  - (2) 同時為 2 及 3 的倍數有幾個？
  - (3) 同時為 3 及 5 的倍數有幾個？
  - (4) 只為 2, 3, 5 其中一個的倍數有幾個？
16. 顏教授想從 3 本離散數學的教科書挑選最適合的教材，暑假期間特別找 10 位學生試讀。每本教科書均至少準備了 10 本供他們自由選擇，每人限選一本。

- (1) 任由學生自由選取，有幾種可能？
- (2) 每本書至少要有一位學生選讀，有幾種可能？
17. 證明任兩個不可數集合的聯集也是不可數。
18. 令  $S = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ 且 } 0 < x \leq 0.5\}$ 。  $S$  為可數或不可數？並證明之。
19. 以數學歸納法證明對所有  $n \geq 1$  的整數， $5^n - 4n - 1$  一定是 16 的倍數。
20.  $U = \{1, 11, 121, 131, 141, 151, 161, 181, 191, 202\}$ ,  $A = \{1, 121, 141, 161, 181, 202\}$ ,  $B = \{11, 131, 151, 191\}$ ,  $C = \{1, 131, 191\}$ 。
- (1)  $A, B$  及  $C$  的位元字串各為何？
- (2) 若集合  $D$  的位元字串為 0111111010，則  $D = ?$
- (3) 求  $A \cap B$  及  $B \cup C$  的字元串。
21. 證明  $A = \{x \mid x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$  為可數。
22. 任給一個 32-bit 的二進位字串，有多少個字串以 “110” 為開頭或以 “110” 為結束？
23.  $S(n): n^2 - 1$  為 8 的倍數。以數學歸納法證明對所有  $n \geq 1$  的奇數， $S(n)$  均成立。
24. 計算  $\prod_{j=4}^{10} j$  與  $\prod_{j=1}^5 \left( \sum_{i=1}^j i \right)$ 。
25. 從一副 52 張標準撲克牌中至少要抽多少張出來，才能保證至少有 3 張為同一個花色？