chapter 3.3, 3.4 homework

1. 求 -1199 的商數 q 和餘數 r

$-1199/24 = 50 \cdots -1$

$q = 50, r = -1$

2. 判斷 2377 與 4369 是否為質數

2333 為質數

4369 非質數，可以被1, 17, 257, 4369整除

3. 列出 566 與 666 的所有因數

566 的因數：1, 2, 283, 566

666 的因數: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 37, 74, 111, 222, 333, 666

4. 設m與n均為質數。證明$m|n$若且唯若$m = n$ 。

$m|n$ 表示 m 是 n 的因數，即 n 可以被 m 整除。

又因 n 為質數，只存在 1 與 n 兩個因數，所以 $m|n$ 若且唯若 $m = n$。

5. 列出大於 100 且小於 200 的所有質數。

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

6. 列出346與668的所有公因數。

346 的因數：1, 2, 173, 346

668 的因數：1, 2, 4, 167, 334, 668

346 與 668 的公因數：1, 2

7. 求以下兩數的最大公因數c，並將c化成該二數的線性組合

(1). 3366, 1288

$c=2$

$3366s+1288t=2(1683s+644t)=2k$

$$3366s+1288t=\begin{cases}\leq 2, k\leq -1\\ =0, k=0\\ =24, k=1\\ >24, k\geq 2\end{cases}$$

(2). 150, 615

$c=15$

$150s+615t=15(10s+41t)=15k$

$$150s+615t=\begin{cases}\leq 15, k\leq -1\\ =0, k=0\\ =15, k=1\\ >15, k\geq 2\end{cases}$$

(3). 337, 771

$c=1$

$337s+771t=1(337s+771t)=1k$

$$337s+771t=\begin{cases}\leq 1, k\leq -1\\ =0, k=0\\ =1, k=1\\ >1, k\geq 2\end{cases}$$

8. 求上一題各小題的最小公倍數

(1). 3366, 1288

$3366 \times 1288 \div 2 = 2172024$

(2). 150, 615

$150 \times 615 \div 15 = 6150$

(3). 337, 771

$l = 337 \times 771 = 259827$

9. 假設 a 與 b 為互質的兩個正整數且 $a > b$。證明 $gcd(a-b, a+b)$不是 1 就是 2。

證明：

1. 設 $d = gcd(a-b, a+b)$
2. 因為 d 是 $(a-b)$ 和 $(a+b)$ 的公因數，所以：

- $d|(a-b)$
- $d|(a+b)$

3. 因此 d 也會整除：

- $(a+b)+(a-b) = 2a$
- $(a+b)-(a-b) = 2b$

4. 所以 $d|2a$ 且 $d|2b$
5. 因為 a 與 b 互質，所以 d 只能整除 2
6. 因此 $d \leq 2$
7. 又因為 d 是最大公因數，且 $(a+b)$ 和 $(a-b)$ 都是偶數，所以 $d \geq 1$
8. 所以 d 只能是 1 或 2

10. 證明 $gcd(a, b) = gcd(a-b, b), a, b \in \mathbb{Z}$

證明：

1. 設 $d = gcd(a, b)$，則：
    - $d|a$
    - $d|b$
2. 因此 d 也會整除：
    - $a - b$（因為如果 d 能整除 a 和 b，也能整除它們的差）
3. 所以 d 是 $(a - b)$ 和 b 的公因數
4. 反過來，設 $c = gcd(a - b, b)$，則：
    - $c|(a - b)$
    - $c|b$
5. 因此 c 也會整除：
    - $(a - b) + b = a$
6. 所以 c 是 a 和 b 的公因數
7. 由於 d 和 c 都是對方的公因數，且都是最大公因數
   所以 $d = c$
8. 因此 $gcd(a, b) = gcd(a - b, b)$