每題 10%

1. A 為有限集合且 $|A| = n$。用歸納法證明 A 有 2^n 子集合。

2. 用歸納法證明對所有 $n \ge 1$ 的整數，$\sum_{j=1}^{n} j < \frac{(2n+1)^2}{8}$。

3. 證明對所有 $n \ge 2$ 的整數，$2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$。

4. $S(n): 2n^2 + 3n < 2^n$。找出最小的正整數 n_0，然後證明對所有大於或等於 n_0 的整數 n，$S(n)$ 均成立。

5. 證明以下關於費柏納西數列的性質。

(1) $\sum_{j=0}^{n} F_j + 1 = F_0 + F_1 + \cdots + F_n + 1 = F_{n+2}$, $n \ge 0$。

(2) $\sum_{j=1}^{n} F_{2j} + 1 = F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} + 1 = F_{2n+1}$。

6. 證明以下關於魯卡斯數列的性質。

(1) $\sum_{j=1}^{n} L_j^2 = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2$, $n \ge 1$。

(2) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $n \ge 1$。

7. 證明以下關於調和級數的性質。

(1) $1 + \frac{n}{2} \le H_{2^n}$, $n \ge 0$。例如 $n = 4$ 時 $2^4 = 16$，我們有 $1 + \frac{4}{2} \le H_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{16}$。

(2) $\sum_{j=1}^{n} jH_j = H_1 + 2H_2 + \cdots + nH_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right] H_{n+1} - \left[\frac{n(n+1)}{4}\right]$, $n \ge 1$。

8. 以遞迴方式定義 $Z^+_{\text{even}} = \{x \mid x \in Z^+$ 且 x 為偶數$\}$。

9. 以遞迴方式定義 $N_{\text{even}} = \{x \mid x \in N$ 且 x 為偶數$\}$。

10. 以遞迴方式定義數列 $a_n = n(n+2)$, $n \in Z^+$。