Raicu Hori-Bogdan
Algebră și Geometrie

Temă

(1) $S = \{ \vec{v_1} = (1,2,m) ; \vec{v_2} = (0,1,1) ; \vec{v_3} = (1,-1,1) \} \subset \mathbb{R}^3$

a) Arătați că vectorii v_2 și v_3 sunt liniar independenți.

$a_2 \vec{v_2} + a_3 \vec{v_3} = 0.$

$$a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + a_3 = 0. & \Rightarrow a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 & \Rightarrow a_2 = 0. \\ a_2 + a_3 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{v_2}, \vec{v_3}$ sunt liniari independenți

b) $m = ?$; S este liniar independent.

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Pt. rang $A_S = 3 \Rightarrow$ sistem liniar dependent.
Pt. rang $A_S < 3 \Rightarrow$ sistem liniar independent.
deci $\det A_S = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow 1 + 2 + 0 - m + 1 - 0 = 4 - m = 0.$$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow m = 4.$

c) Stabiliți relație de dependență dintre cei 3 vectori:

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0.$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -a_3} \\ 2a_1 + a_2 - a_3 = 0. \\ 4a_1 + a_2 + a_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_3 + a_2 - a_3 = 0. \\ -4a_3 + a_2 + a_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a_3 + a_2 = 0. \\ -3a_3 + a_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = 3a_3}$

$-a_3 V_1 + 3a_3 V_2 + a_3 V_3 = 0 \quad | : a_3.$

$-V_1 + 3V_2 + V_3 = 0.$

(2) $\vec{v_1} = (1,3)$

$\vec{v_2} = (-2,3)$

$\vec{v_3} = (0,1)$

a) $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ este liniar independent.

$A_S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; rang $A_S < 3 \Rightarrow$ Sistem liniar independent,

b) $B = \{\vec{v_1}; \vec{v_2}\}$ bază a spațiului vectorial R^2

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_B = 3 + 6 = 9 \Rightarrow \det A_B \neq 0 \rightarrow B$ este bază a spațiului R^2

c) $\vec{x} = (4,5)$ în baza B.

$a_1 V_1 + a_2 V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a_1 - 2a_2 = 4 & \Rightarrow a_1 = 4 + 2a_2 \\ 3a_1 + 3a_2 = 5 & \Rightarrow 3(4 + 2a_2) + 3a_2 = 5. \end{cases}$

$12 + 6a_2 + 3a_2 = 5.$

$a_2 = -\frac{7}{9}$

$a_1 = 4 + \frac{14}{9} = \frac{36 - 14}{9} = \frac{22}{9}.$

$\vec{x} = \frac{22}{9} v_1 + \left(-\frac{7}{3}\right) v_2.$

③ $U = \{(x, x+y, -x+2y) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

a) U = subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(x, x+y, -x+2y) = (x, x, -x) + (0, y, 2y) =$

$= x(1,1,-1) + y(0,1,2)$

$\Rightarrow U = \text{span}\, S$; $S = \{\vec{v_1} = (1,1,-1), \vec{v_2} = (0,1,2)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow U \leq$ subspațiu al lui $\mathbb{R}^3$

b) $A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \Rightarrow d_2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}\, A_S = 2 =$

= nr de vectori

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} S = \text{liniar independent} \\ S = \text{generatoare pe } U \end{array}\right\} \Rightarrow S$ = bază pentru U

c) $\vec{v} = (2,3,5)$ aparține subspațiului U.

$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2}$

$\vec{v} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2}$

$(2,3,5) = x(1,1,-1) + y(0,1,2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2} \\ x + y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 1} \\ -x + 2y = 5 \Rightarrow -2 + 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \notin U$

⑬.