0.1 Probleme rezolvate

1. *Se aruncă un zar de două ori. Să se determine probabilităţile evenimentelor: a) Suma celor doua zaruri este 6. b) Ambele zaruri arată acelaşi număr.*

Soluţie. Cazurile posibile în cele două situaţii sunt: $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots(6,6)$, în număr de 36. Pentru punctul a) numai cazurile $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$ sunt favorabile. Probabilitatea este deci

$$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{36}$$

Analog, probabilitatea celui de-al doilea eveniment este p $= dfrac636 = \frac{1}{6}$.

2. *Dintr-un pachet de cărţi de joc se extrag trei la întâmplare. Care este probabilitatea ca cel puţin o carte să fie as ?*

Soluţie. Numărul cazurilor posibile este $C_{36}^3 = 7140$. Numărul cazurilor favorabile este

$$4 \cdot C_{32}^2 + C_4^2 \cdot C_{32}^1 + C_4^3 = 2180$$

Probabilitatea este deci $p = \dfrac{2180}{7140} \approx 0.30532$.

3. *O persoană scrie n scrisori către n persoane distincte, le pune în n plicuri şi apoi scrie adresele la întâmplare. Care este probabilitatea ca cel puţin o scrisoare să ajungă la destinatarul potrivit ?*

Soluţie. Numărul cazurilor posibile pentru a scrie adresele este $n!$. Enumerarea cazurilor favorabile este mai dificilă. Fie A_k evenimentul ce constă în faptul că persoana k primeşte scrisoarea potrivită $p(A_k) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. Există C_n^2 evenimente de tipul $A_i \cap A_j$ şi fiecare are probabilitatea $\dfrac{(n-2)!}{n!}$ (deoarece două persoane primesc scrisorile potrivite iar celelalte $n-2$ persoane primesc scrisorile întâmplător în $(n-2)!$ feluri. Analog, există C_n^3 evenimente de tipul $A_i \cap A_j \cap A_k$ şi fiecare are probabilitatea $\dfrac{(n-3)!}{n!}$, etc. Aplicând formula de mai sus rezultă:

$$\begin{aligned} p &= n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} + \ldots \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \end{aligned}$$

4. Se aruncă un zar de 14 ori. Să se calculeze probabilitatea ca faţa cu 1 punct să apară de 3 ori, faţa cu 2 puncte să apară o dată, faţa cu 3 puncte să apară o dată, faţa cu 4 puncte să apară de 3 ori, faţa cu 5 punct să apară de 4 ori, faţa cu 6 punct să apară de 2 ori.

Soluţie. Se aplică schema multinomială:

$$P(14:3,1,1,3,4,2) = \frac{14!}{3!1!1!3!4!2!} \cdot \frac{1}{6^{14}} \simeq 0.00064.$$

5. Doi arcaşi trag asupra unei ţinte câte o săgeată. Probabilitatea ca primul arcaş să lovească ţinta este de 0.8, iar probabilitatea ca al doilea arcaş să lovească ţinta este de 0.4. După tragere, în ţintă se găseşte o singură săgeată. Să se determine probabilitatea ca săgeata din ţintă să aparţină celui de-al doilea arcaş.

Soluţie. Se consideră evenimentele:

- A - lovirea ţintei de un singur arcaş;
- A_1 - nici unul dintre arcaşi nu loveşte ţinta;
- A_2 - amândoi arcaşi lovesc ţinta;
- A_3 - primul loveşte ţinta, al doilea ratează;
- A_4 - al doilea loveşte ţinta, primul ratează.

Probabilităţile evenimentelor A_i, $i = \overline{1,4}$ sunt:

$$P(A_1) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12, \quad P(A_2) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32,$$

$$P(A_3) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48, \quad P(A_4) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08,$$

deoarece tragerile sunt independente. Probabilităţile evenimentului A condiţionate de evenimentele A_i, $i = \overline{1,4}$ sunt:

$$P_{A_1}(A) = P_{A_2}(A) = 0, P_{A_3}(A) = P_{A_4}(A) = 1.$$

Aplicând formula lui Bayes se obţine

$$P_A(A_3) = \frac{P(A_3) \cdot P_{A_3}(A)}{P(A_3) \cdot P_{A_3}(A) + P(A_4) \cdot P_{A_4}(A)} = \frac{0.48}{0.48 + 0.08} \simeq 0.86,$$

$$P_A(A_4) = \frac{P(A_4) \cdot P_{A_4}(A)}{P(A_3) \cdot P_{A_3}(A) + P(A_4) \cdot P_{A_4}(A)} = \frac{0.08}{0.48 + 0.08} \simeq 0.14.$$

Prin urmare, probabilitatea căutată este $P_A(A_4) = 0.14$.