Úloha 1 - Geometrické vyhledávání bodu

Algoritmy počítačové kartografie

Tomáš Hřebec, Kateřina Obrazová

Praha 2022

1 Zadání úlohy

1.1 Povinná část

Vstup: Souvislá polygonová mapa n polygonů $\{P_1, ..., P_n\}$*, analyzovaný bod q.*

Výstup: P_i*,* $q \in P_i$*.*

Nad polygonovou mapou implementujete Winding Number Algorithm pro geometrické vyhledání incidujícího polygonu obsahující zadaný bod *q*.

Nalezený polygon graficky zvýrazněte vhodným způsobem (např. vyplněním, šrafováním, blikáním). Grafické rozhraní vytvořte s využitím frameworku QT.

Pro generování nekonvexních polygonů můžete navrhnout vlastní algoritmus či použít existující geografická data (např. mapa evropských států).

Polygony budou načítány z textového souboru ve Vámi zvoleném formátu. Pro datovou reprezentaci jednotlivých polygonů použijte špagetový model.

1.2 Volitelná část

Analýza polohy bodu (uvnitř/vně) metodou Ray Algorithm.

Ošetření singulárního případu u Ray Algorithm: bod leží na hraně polygonu.

Ošetření singulárního případu u obou algoritmů: bod je totožný s vrcholem jednoho či více polygonů.

Zvýraznění všech polygonů pro oba výše uvedené singulární případy.

2 Popis problému

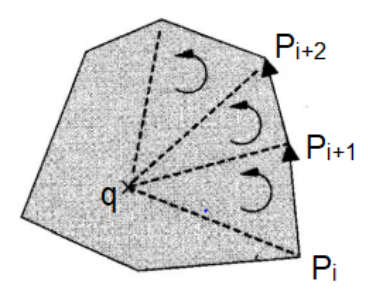
Je dán fixní polygon P s n počtem stran a bod q. Leží bod q v polygonu P? Tento dotaz můžeme přirovnat ke kliknutí myši na obrazovku počítače. Avšak hardware stroje může umožnit řešení, která se vyhýbají geometrii. V našem případě uvažujeme problém z hlediska výpočetní geometrie. (O'Rourke 1998)

2.1 Poloha bodu vůči mnohoúhelníku (polygonu)

Používají se dva přístupy, kdy je možné otestovat, zda bod q je vnitřním bodem rovinného polygonu.

2.1.1 Konvexní polygon

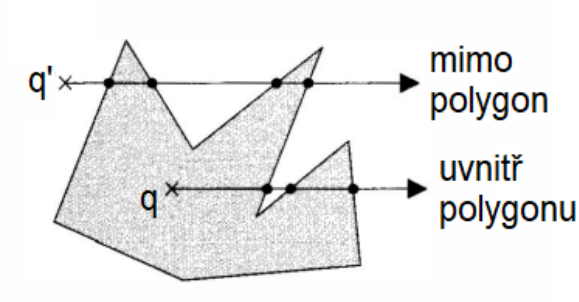
Konvexní polygon vzniká jako průnik polorovin definovaných shodně nalevo (napravo) od jeho orientovaných hran. *„Zvolíme-li shodnou orientaci vlevo, pak vnitřní bod musí pro všechny hrany ležet v levých polorovinách vymezených hranami. (Obr. 1) Použijeme test velikosti orientovaného obsahu trojúhelníka $P_iP_{i+1}q$, který musí být pro všechny vrcholy P_i vždy <= 0." (Žára a kol. 2004, str. 564)*



Obr. 1 - Zjišťování polohy bodu vůči konvexnímu polygonu

2.1.2 Nekonvexní polygon

Z testovaného bodu q libovolným směrem vyšleme polopřímku a počítáme, kolikrát protne hranici mnohoúhelníku. (Obr. 2) Je-li počet protnutí lichý, bod q je uvnitř mnohoúhelníku (polygonu). Je-li počet protnutí sudý, bod q leží vně mnohoúhelníku (polygon). (Žára a kol. 2004)



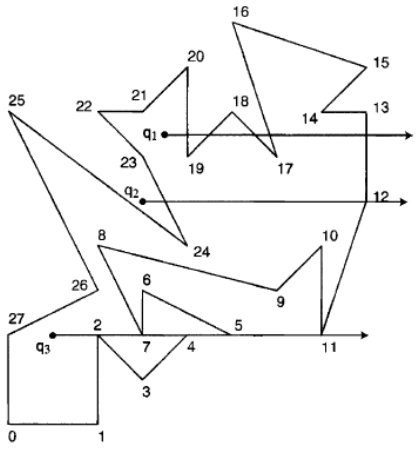
Obr. 2 - Zjišťování polohy bodu vůči nekonvexnímu polygonu

3 Popis algoritmu

Pro řešení konvexního polygonu se používá opakovaný Half-Plane Test a Ray Crossing algoritmus. Pro řešení nekonvexního polygonu se používájí algoritmy Winding Number a Ray Crossing generalizovaný pro nekonvexní polygony.

3.1 Ray Crossing Method

Z bodu q nakreslete polopřímku (paprsek, ray) R v libovolném směru a zjistěte počet průsečíků R s ∂P. Bod q leží uvnitř polygonu P, pokud počet protnutí je lichý. Když je počet protnutí sudý, bod q leží mimo polygon. (Obr. 3)
Implementace této metody je křehká kvůli nutnosti předzpracovat speciální případy průsečíků R s ∂P (q_3 v Obrázku 3). Polopřímka může narazit na vrchol nebo může být kolineární s hranou tj. ležící na stejné přímce. Může nastat i situace, kdy bod q leží přímo v ∂P. V tomto případě chceme dojít k výsledku $q \in P$ (jelikož P je uzavřené). (O'Rourke 1998)



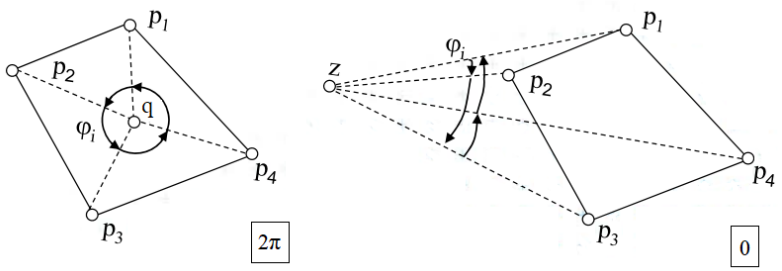
Obr. 3 - Ray Crossing Algoritmus

Abychom zjistili polohu bodu q_3, upravíme paprsek R tak, aby bylo horizontálně doprava. *„Jedním ze způsobů, jak odstranit většinu obtíží, je vyžadovat, aby se hrana mohla počítat jako křížení R, jeden z koncových bodů e musí být přísně nad R a druhý koncový bod na nebo pod. Neformálně se má za to, že e zahrnuje svůj spodní koncový bod, ale vylučuje svůj horní koncový bod. Při použití této konvence pro q3 (Obr. 3) se hrany (1, 2) a (2, 3) nekříží (žádná hrana nemá koncový bod striktně výše). Hrany (6, 7) a (7,8) se počítají jako křížení (v_7 je na nebo pod), (3,4) a (4,5) se nekříží a (5, 6), (10, 11), a (11, 12) se všechny kříží. Celkový počet pěti křížení znamená, že $q \in P$. Všimněte si, že žádná hrana kolineární s paprskem se nepočítá jako křížení, protože nemá žádný bod přísně nahoře." (O'Rourke 1998, s. 240)*

3.2 Winding Number algoritmus

V tomto algoritmu, jak již z názvu vypovídá, hraje roli winding number ω. Definujeme ho jako počet, kolikrát se mnohoúhelník P otočí kolem bodu q. Je-li bod q uvnitř polygonu P, je ω nenulové. To samé platí, pokud je bod q mimo polygon P a polygon se neotáčí kolem bodu. (Obr. 4, Kumar, Bangi 2018)

$$\omega = \begin{cases} 0; & \text{když } q \text{ je mimo } P, \\ n > 0; & \text{když se } P \text{ otáčí } n\text{-krát proti směru hod. ručiček}, \\ n < 0; & \text{když se } P \text{ otáčí } n\text{-krát ve směru hod. ručiček.} \end{cases} \quad (1)$$



Obr. 4 - Winding Number algoritmus

Při porovnání Point-in-location a Winding Number zjišťujeme, že při jednoduchém mnohoúhelníku (tj. nemá žádné vlastní průsečíky) obě metody dávají stejný výsledek pro všechny body. Ovšem pro nejednoduché polygony dávají tyto dvě metody různé výsledky. *„Například, když se mnohoúhelník překrývá sám se sebou, zjistí se, že body v oblasti překrytí jsou vně pomocí crossing number, kde pro Winding Number je znázorněno jako uvnitř." (Kumar, Bangi 2018, s. 550)* V porovnání s algoritmem Ray Crossing, je algoritmus Winding Number 20 krát pomalejší. (Felkel 2016)

4 Data

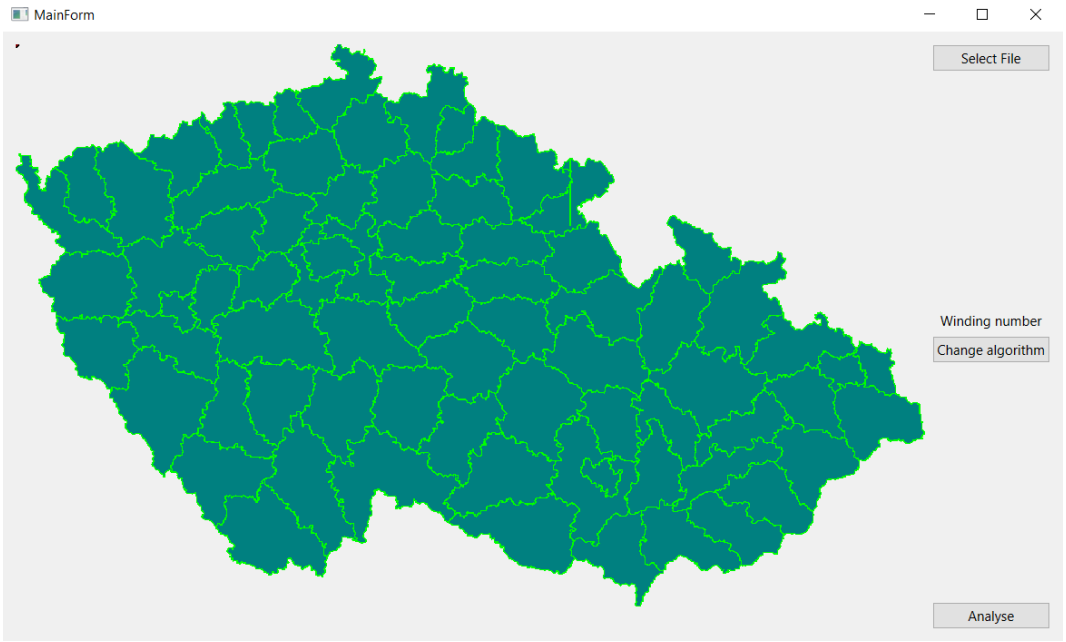
Vstupem jsou polygonové vrstvy ve formátu *.shp* a bod *q*. První polygonová oblast byla náhodně vybraná oblast polygonů obcí a pravidelná síť polygonů. Výstupem je grafické znázornění polygonů, které obsahují analyzovaný bod *q*. Bod *q* je bodem vstupu, který je vybrán na základě uživatele.

5 Dokumentace

Program je rozdělen do tří modulů. Modul *Mainform.py* je převážně vygenerován pomocí softwaru QT Creator a slouží k vytvoření uživatelského rozhraní. Modul *Algorithm.py* obsahuje algoritmy pro analýzu vzájemné polohy bodu a polygonů. Modul *Draw.py* slouží především pro propojení předešlých dvou modulů, k zajištění vizualizace vstupu a výstupu a k volbě algoritmu.

5.1 Modul Mainform.py

Tento modul obsahuje třídu `Ui_Mainform`, která je vytvořena automaticky pomocí QT Creatoru (Obr. 5). Tato třída byla posléze doplněna o tři metody, které se spustí při interakci s uživatelským rozhraním. Metoda *SelectFile*, která při zmáčknutí stejnojmenného tlačítka, vyvolá dialogové okno, kde je možné zvolit formát *shapefile* se vstupními daty. Dále načte aktuální velikost okna, do kterého budou data vykresleny a zavolá funkci z modulu *Draw.py*. Po stisknutí tlačítka *„Analyse"* se spustí stejnojmenná metoda, která rozhodne, který algoritmus pro analýzu polohy bodu a polygonu využije a následně jej spustí. Metoda *Change Algorithm* se zavolá při zmáčknutí tlačítka *„Change Algorithm"* a slouží k výběru a k vizualizaci aktuálně zvoleného algoritmu.



Obr. 5 - Náhled uživatelského rozhraní

5.2 Modul Draw.py

Tento modul obsahuje třídu `Draw`, kterou dědí od třídy `QWidget` z knihovny PyQt6. Na začátku se inicializuje proměnná *q*, jako formát *QPoint*. To umožňuje do *q* ukládat souřadnice *x* a *y*. Do této proměnné se nahraje vstupní analyzovaný bod. Dále se inicializuje list *polygons*, který ponese jednotlivé vstupní polygony. Další proměnná *res* ve formátu *list* bude zaručovat uchování výsledků a proměnná *algorithm* nese informaci o aktuálně zvoleném výpočetním algoritmu.

První metoda v třídě `mousePressEvent` při stisknutí pravého tlačítka v uživatelském rozhraní v rozmezí vykreslovací plochy odečte aktuální souřadnice kurzoru *x* a *y* a uloží je pod *q*. Následně zavolá metodu pro vykreslení. Metoda vykreslení *paintEvent* definuje, jak se budou jednotlivé objekty třídy vykreslovat. Vykreslí všechny polygony v proměnné *polygons*. U těchto polygonů je zvolena barva na základě výsledku, zda je hledaný bod uvnitř, či vně. Když výsledky ještě nejsou k dispozici (při prvním načtení polygonu), jsou všechny polygony stejné barvy. Dále jsou zde parametry pro vykreslení analyzovaného bodu.

V metodě *loadPolygons* je nejprve načtena cesta ke vstupním datům. Když není zvolena žádná cesta, metoda se ukončí. Dále je načten vstupní shapefile. Data z tohoto shapefilu jsou převedeny do formátu *QPolygon*. Následně tyto data musejí být ještě musejí být zobrazena do lokálního souřadnicového systému, který je definován velikostí okna. Takto transformovaná data jsou poté jako jednotlivé polygony vloženy do listu *polygons*. Metoda *switchAlgorithm* zajišťuje přepínání mezi algoritmy. Aktuální algoritmus ukládá do proměnné *algorithm*. Poslední metody v této třídě jsou *gettery*, které vracejí list vstupních polygonů a bod *q*.

5.3 Modul Algorithm.py

Tento modul obsahuje dvě třídy. Každá z nich představuje jeden z výpočetních algoritmů - Winding Number nebo Ray Crossing. Třída `Winding_num` tedy obsahuje metody k analýze vzájemné polohy bodu a polygonů

pomocí metody Winding Number. První metoda této třídy - *getPointAndLinePosition* - zjišťuje, jestli se daný bod q nachází v pravé či levé polorovině od přímky definované dvěma body p_1 a p_2. Když je v levé, metoda vrací 1, v pravé 0 a když je bod kolineární, vrací hodnotu -1. Metoda *get2LinesAngle* má na vstupu 4 body, které definují 2 přímky, u nichž je zjišťován úhel, který spolu svírají.

Hlavní metoda této třídy - *getPositionPointAndPolygon* - zjišťuje vzájemnou polohu daného bodu a polygonu. Metoda vrací 1 pro bod uvnitř polygonu, nebo pro bod na hraně a ve vrcholu. Pro bod vně polygonu vrací 0. Hlubší popis metody je v následujícím pseudokódu:

Zjisti počet vrcholů polygonu n
Inicializuj součet úhlů mezi definovaným bodem a hranou polygonu na 0
***Projdi** jednotlivé vrcholy p_i polygonu:*
    Zjisti polohu bodu q vůči přímce qp_i
    Vypočti úhel mezi přímkami qp_i, qp_{i+1}
    ***Když** je bod v levé polorovině,*
        Přičti úhle k celkovému součtu uhlů
    ***Když** je bod v pravé polorovině,*
        Odečti úhel od celkového součtu úhlů
    Jinak,
        Leží-li bod q mezi body p_i a p_{i+1}, bod se nachází na hraně a ukonči výpočet
***Když** je celkový součet úhlů roven 2π:*
    Bod je uvnitř polygonu
***Jinak** je vně polygonu.*

Druhá třída - `Ray_cross` - využívá k analýze algoritmus Ray Crossing. První metoda - *setLocalCoordinates* - převede souřadnice vrcholu polygonu tak, aby jejich počátek byl v analyzovaném bodu q. Vrátí vrchol v lokálních souřadnicích s počátkem v bodu q.

Metody *getCrossingStatusU* a *getCrossingStatusL* jsou si velice podobné. Obě metody analyzují, zda úsečka definovaná body p_i a p_{i-1} protíná osu y z pohledu z horní poloroviny a dolní poloroviny. Metody vracejí hodnotu *True*, když dochází ke křížení a *False*, když nikoli.

Hlavní metoda této třídy se opět nazývá *getPositionPointAndPolygon* a zjišťuje vzájemnou polohu daného bodu a polygonu. Nyní však využívá postupu algoritmu Ray Crossing, který je rozepsán v následujícím pseudokódu:

Inicializuj počet průsečíků v pravé polorovině na 0
Inicializuj počet průsečíků v levé polorovině na 0
Zjisti počet vrcholů polygonu n
***Projdi** jednotlivé vrcholy p_i polygonu:*
    Souřadnice vrcholů p_i a p_{i-1} transformuj do lokálního systému s počátkem v q
    ***Když** bod p_i leží v počátku:*
        Vrchol p_i je totožný s q a vrať, že q je uvnitř polygonu a ukonči výpočet
    ***Když** úsečka p_i a p_{i-1} protíná osu y z pohledu z horní poloroviny:*
        Vypočítej souřadnici x jejich průsečíku
        ***Je-li** tato souřadnice v pravé polorovině:*
            Přičti k počtu průsečíkům v pravé polorovině 1
***Když** součty průsečíků vpravo a vlevo nejsou oba naráz sudé nebo oba liché:*
    Bod je na hraně polygonu
***Jinak když** je součet průsečíků vpravo lichý:*
    Bod je uvnitř polygonu

Jinak:

Bod je mimo polygon

6 Závěr

Program by měl umět pracovat se singularitami jako je bod na hraně nebo ve vrcholu polygonu. Program by bylo možné vylepšit a zrychlit tím, že při určení vztahu bod-polygon byl bod uvnitř, výpočet tím byl zastaven a následně výsledek vizualizován. Nyní vždy za každé situace program prohlíží všechny vstupní polygony. Dále by mohlo být rozšířeno uživatelské rozhraní o tlačítko *Clear*. Do programu by ještě mohla být přidána funkce, kdy se při zvětšení okna polygony automaticky překreslí na danou velikost. Nyní se polygony vykreslí do velikosti okna odečtené při jejich nahrávání.

7 Seznam literatury

FELKEL, P. (2016): Geometric Searching Part 1: Point Location. Computational Geometry. Praha, 45 s.

KUMAR, G. N., BANGI, M. (2018): An Extension to Winding Number and Point-in-Polygon Algorithm. IFAC, vol. 51, s. 548-553.

O'ROURKE, J. (1998): Computational Geometry in C. Second Edition. Cambridge University Press, 392 s.

ŽÁRA, J., BENEŠ, B., SOCHOR, J., FELKEL, P. (2004): Moderní počítačová grafika. Computer Press, Brno, 609 s.