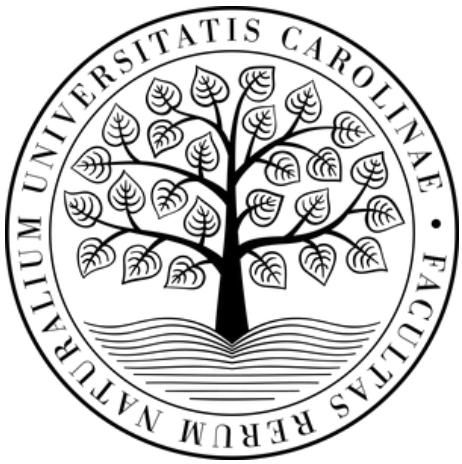
Univerzita Karlova

Přírodovědecká fakulta



Úloha 4 - Množinové operace s polygony

Algoritmy počítačové kartografie

Tomáš Hřebec, Kateřina Obrazová

Praha 2022

1 Zadání úlohy

1.1 Povinná část

Vstup: Nekonvexní polygony P, Q,

Výstup: množina k polygonů $P' = \{P'_1, ..., P'_k\}$.

S využitím algoritmu pro množinové operace s polygony implementujte pro dvojici polygonů P, Q následující množinové operace:

- průnik polygonů,
- sjednocení polygonů,
- rozdíl polygonů.

Jako vstupní data použijte existující kartografická či syntetická data reprezentující množiny P, Q, která budou načítána ze dvou textových souborů ve Vámi zvoleném formátu.

Grafické rozhraní realizujte s využitím frameworku QT, výsledky množinových operací vizualizujte.

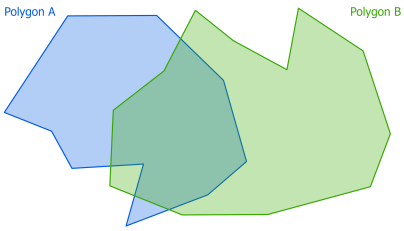
Poznámka: pro výše uvedené kroky je nutné mít řádně odladěny algoritmy z úlohy 1.

1.2 Volitelná část

V této úloze nebyly řešené bonusové úlohy.

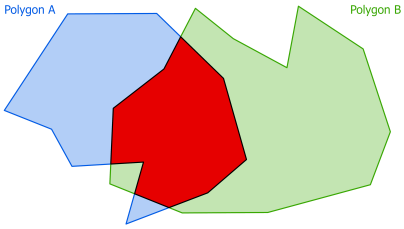
2 Formulace problému

Na vstupu je dvojce množin. Tyto množiny jsou uzavřené a ohraničené polygony (oblasti) A a B. (Obr. 1) Hledáme základní množinové operace mezi nimi - průnik, sjednocení a rozdíl.



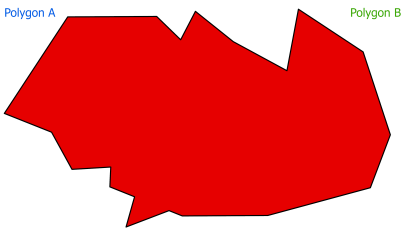
Obr. 1 - Příklad polygonů A a B

Průnik množin A a B (angl. *Intersetion*) je množinou všech prvků obsažených v množině A, a zároveň i v množině B. (Obr. 2) Značí se jako $A \cap B$. (Moravec 2008)



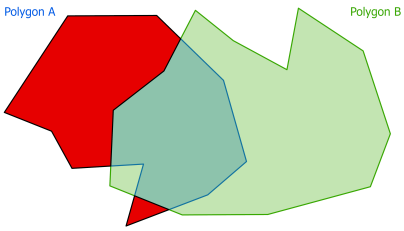
Obr. 2 - Průnik polygonů A a B

Sjednocení množin A a B (angl. *Union*) obsahuje jen a pouze takové prvky, které patří alespoň do jedné z množin A a B. (Obr. 3) Značí se jako $A \cup B$. (Moravec 2008)

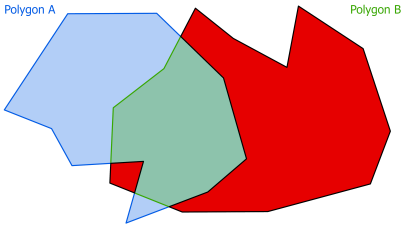


Obr. 3 - Sjednocení polygonů A a B

Rozdíl množin A a B, respektive B a A (angl. *Difference*), je množinou obsahující všechny prvky množiny A (resp. B) s výjimkou těch, které jsou zároveň prvky množiny B (resp. A). Značí se jako $A \cap \overline{B}$ (Obr. 4), respektive $\overline{A} \cap B$(Obr. 5). (Moravec 2008)



Obr. 4 - Rozdíl polygonů A a B



Obr. 5 - Rozdíl polygonů B a A

3 Popis algoritmu

Základem tohoto algoritmu je *QPointFB*, což je nový datový typ nesoucí informaci o parametrech α, β. Tyto parametry charakterizují polohu průsečíků dvou hran uvnitř těchto dvou hran. Datový typ *QPointFB* navíc obsahuje informaci o poloze bodu vůči polygonu. Do algoritmu vstupují polygony $A = \{p_i\}_{i=1}^{n}$ a $B = \{q_j\}_{j=1}^{m}$, jejichž první a poslední bod je totožný a jehož orientace je proti směru hodinových ručiček.
Na začátku je potřeba vypočítat průsečík b_{ij} hran A, B, pokud existuje. Nejprve je potřeba zjistit vzájemnou pozici hran, jelikož chceme pouze ty, které se protínají. Vypočítají se směrové vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pro hrany $e_i = (p_i, p_{i+1}),\ e'_j = (q_j, q_{j+1})$, kde určíme $p_i = [x_i, y_i],\ p_{i+1} = [x_{i+1}, y_{i+1}],\ q_j = [x_j, y_j],\ q_{j+1} = [x_{j+1}, y_{j+1}]$:

$$\vec{u} = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i),$$

$$\vec{v} = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j),$$

$$\vec{w} = (x_i - x_j, y_i - y_j).$$

Poté dopočítáme determinanty k_1, k_2, k_3

$$k_1 = v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x,$$

$$k_2 = u_x \cdot w_y - u_y \cdot w_x,$$

$$k_3 = v_y \cdot u_x - v_x \cdot u_y,$$

z nichž vypočítáme parametry $, \beta$

$$\alpha = \frac{k_1}{k_3},$$

$$\beta = \frac{k_2}{k_3}.$$

V případě $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ jsou hrany e_i, e'_j kolineární.
V případě $k_1 = 0, k_2 = 0$ jsou hrany e_i, e'_j rovnoběžné.
V předchozích případech průsečík neexistuje. V případě, kdy průsečík existuje jako $0 \leq \alpha \leq 1$ a $0 \leq \beta \leq 1$,

je potřeba přepočítat jeho souřadnice X, Y

$$X = p_{1x} + \alpha u_x,$$

$$Y = p_{1y} + \alpha u_y.$$

V každém dalším případě jsou hrany e_i, e'_j mimoběžné.

Může nastat situace, kdy hrana e polygonu A protne hranu e' polygonu B více než jednou (a naopak). Kvůli tomu je nutné testovat hranu A vůči všem hranám polygonu B. Pokud existuje průsečík b_{ij}, bude přidán do polygonu B na pozici $i + 1$. Aby byl průsečík přidaný i do polygonu A, musí být průsečík přidaný do slovníku D. Slovník D je přidaný do polygonu A po nalezení všech průsečíků.

Dále bude probíhat ohodnocení vrcholů A, B, které závisí na určení polohy polygonu vůči druhému polygonu. O poloze $e_i = (p_i, p_{i+1})$ k B rozhoduje poloha vnitřního bodu, která se vypočítá jako

$$\overline{p_i} = 0,5(p_i + p_{i+1}).$$

Analogicky poloha $e'_j = (q_j, q_{j+1})$ k A se vypočítá jako

$$\overline{q_i} = 0,5(q_j + q_{j+1}).$$

Každému $\overline{p_i} \in A$ určíme polohu vzhledem k B a každému $\overline{q_i} \in B$ určíme polohu vzhledem k A. Z ohodnocovací funkce g víme, že

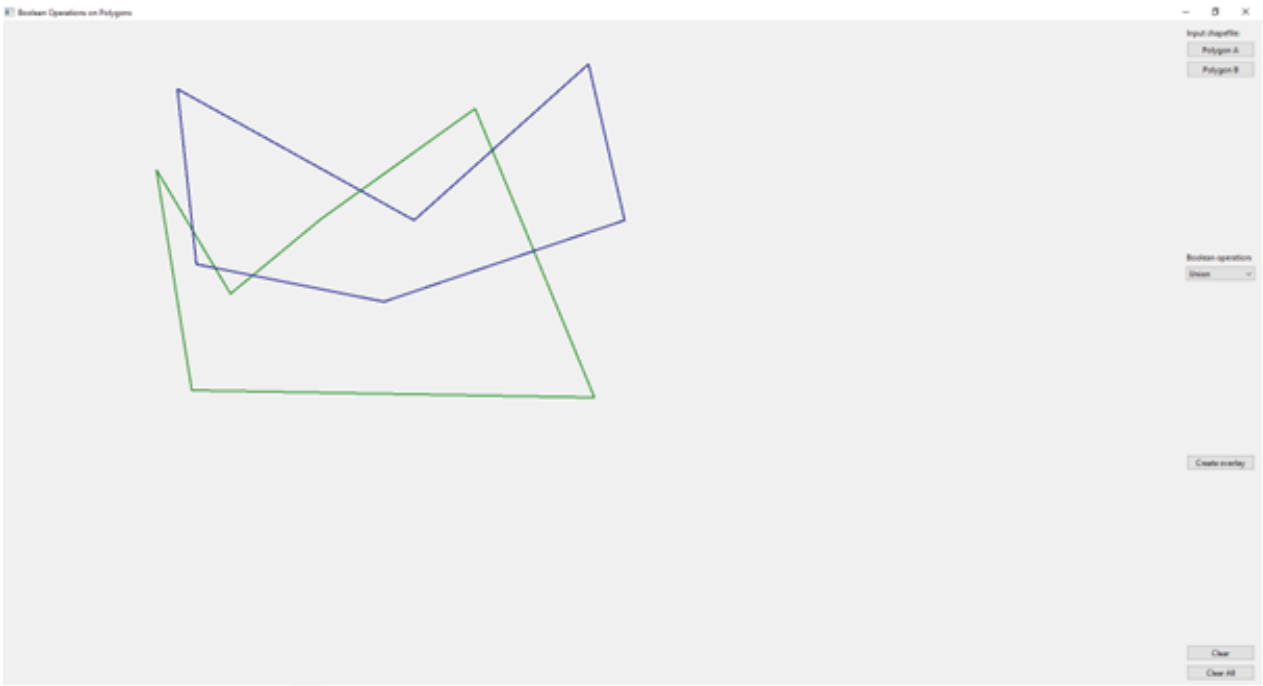
$$g(e_i, B) = g(\overline{p_i}, B) = \begin{cases} vně, \ \overline{p_i} \notin B, \\ na\ hranici\ A/B, \ \overline{p_i} \in \partial B, \\ uvnitř, \ \overline{p_i} \in B. \end{cases} \tag{1}$$

$$g(e'_j, A) = g(\overline{q_j}, A) = \begin{cases} vně, \ \overline{q_j} \notin A, \\ na\ hranici\ A/B, \ \overline{q_j} \in \partial A, \\ uvnitř, \ \overline{q_j} \in A. \end{cases} \tag{2}$$

Následuje výběr hrany podle pozice. Jsou vybrány hrany z obou polygonů, které měly k druhému polygonu konkrétní pozici (určené výše). Bude se procházet přes všechny vrcholy polygonu. Pokud se rovná pozice bodu se zadanou pozicí, tak se z tohoto bodu a jeho následujícího bodu vytvoří hrana. Z polygonu A, respektive B, jsou v případě průniku vybrané ty hrany uvnitř polygonu A, respektive B. V případě sjednocení jsou z polygonu A, respektive B, vybrány ty hrany mimo polygon A, respektive B. V případě rozdílu $B - A$ jsou z polygonu B vybrány hrany mimo polygon A, které jsou zároveň uvnitř polygonu B. Opačně to platí v případě rozdílu $A - B$.

4 Dokumentace

Program je rozdělen do 10 modulů. Modul `mainform.py` je převážně vygenerován pomocí softwaru QT Creator a slouží k vytvoření uživatelského rozhraní a k volání jednotlivých funkcí pomocí tlačítek v UI. (Obr. 1) Modul `algorithm.py` obsahuje algoritmy pro množinové operace s polygony. Modul `draw.py` slouží především pro propojení předešlých dvou modulů a k zajištění vizualizace vstupu a výstupu. Modul `input.py` zajišťuje nahrání vstupních dat v požadovaném formátu. Modul `QPointFB.py` upravuje třídu `QPointF` tak, aby body obsahovaly informaci o poloze vůči druhému polygonu a informace o poloze na hranách polygonů (od počátku hrany). Modul `edge.py` definuje třídu `Edge`, která definuje datový typ hrany. Hrana v sobě nese informaci o počátečním a koncovém bodě. Moduly `booleanoperations.py`, `lineandlineposition.py`, `pointandpolygobposition.py` a `pointlineposition.py` definují třídy odvozené z třídy `Enum`. Mají za úkol přiřadit hodnotám jejich slovní název.



Obr. 1 - Náhled uživatelského rozhraní

4.1 Modul mainform.py

Tento modul obsahuje třídu `Ui_Mainform`, která je vytvořena automaticky pomocí QT Creatoru. Tato třída byla posléze doplněna o metody, které se spustí při interakci s uživatelským rozhraním. Jedná se o metody

inputA, *inputB*, *clickCreateOverlay*, *clickclear* a *clickclearALL*. Metody *inputA* a *inputB* slouží k vyvolání funkce *loadFile* z modulu `input.py`, čímž nahrají vstupní polygony. Metoda *clickCreateOverlay* provede zvolenou množinovou operaci se vstupními polygony. Metoda *clickclear* slouží k odstranění výsledku a metoda *clickclearALL* pro odstranění všeho.

4.2 Modul input.py

Tento modul obsahuje metodu *loadfile*. V této metodě je nejprve načtena cesta ke vstupním datům. Když není zvolena žádná cesta, metoda se ukončí. Dále je načten vstupní textový dokument, z něhož jsou získány vrcholy polygonu.

4.3 Modul draw.py

Tento modul obsahuje třídu `Draw`, kterou dědí od třídy `QWidget` z knihovny PyQt6. Hlavní funkcí tohoto modulu je vykreslit vstupní polygony a následně výsledky množinových operací. Polygony A a B jsou uloženy v proměnných *polA* a *polB* ve formátu listů obsahující jednotlivé vrcholy, které jsou ve formátu *QPointFB*. Výsledek množinové operace je v proměnné *res*, která je opět list, který obsahuje hrany ve formátu *edge*.

4.4 Modul algorithm.py

Zde se nacházejí jednotlivé funkce pro množinové operace s polygony. V modulu se nachází jediná třída *Algorithms*, která obsahuje níže uvedené metody.
Metoda *getPointAndLinePosition* má na vstupu 3 body *QPointFB*, kde 2 body definují přímku a zbylý bod definuje analyzovaný bod. Tato metoda zjistí, ve které polorovině se analyzovaný bod nachází. Výsledek je vracen ve formátu výčtové třídy definované v modulu `pointlineposition.py`. Hodnoty jsou definovány takto:

- Left_HP (1) pro bod v levé polorovině,
- Right_HP (-1) pro bod v pravé polorovině,
- On_Line (0) pro kolineární bod.

Metoda *get2LinesAngle* má na vstupu 4 body QPointFB, které definují 2 přímky, u nichž je zjišťován úhel, který spolu svírají.

Hlavní metoda této třídy - *getPositionPointAndPolygon* - zjišťuje vzájemnou polohu daného bodu ve formátu *QPointFB* a polygonu definovaného jako list *QPointFB*. Výstup je ve formátu výčtové třídy definované v modulu `pointandpolygonposition.py`. Vrácené hodnoty jsou:

- Inside (1) pro bod uvnitř,
- Outside (0) pro bod vně,
- Boundary (-1) pro bod na hraně polygonu.

Tato metoda je založena na algoritmu *Winding Number*.
Metoda *get2LinesIntersection* vrací vzájemnou polohu dvou vstupních úseček, které jsou definovány čtyřmi body *QPointFB*. Výsledek je opět ve formátu výčtové třídy definované v modulu *lineandlineposition.py*, a to jako:

- Parallel (1) pro rovnoběžné úsečky,
- Skew (2) pro mimoběžné úsečky,
- Colinear (3) pro úsečky kolineární,
- Intersect (4) pro úsečky s jedním průsečíkem.

Metoda *updateVertices* přidá body do hran dvou vstupních polygonů v místě, kde se jejich hrany vzájemně kříží. Vstupní polygony jsou list *QPointFB*. Výstup tato funkce nemá, pouze aktualizuje vstupní polygony.
Metoda *setEdgePosition* přiřadí jednotlivým hranám vstupního polygonu polohy vůči polygonu druhému. Vstupem jsou tedy 2 polygony definovány jako list *QPointFB*. Polohy jsou vztaženy ke středu hrany a jsou ukládány do atributu *position* prvního bodu definující hranu. Poloha je získána pomocí metody *getPositionPointAndPolygon*.
Metoda *getEdges* vybere hrany vstupního polygonu, které mají pozici vůči druhému polygonu stejnou, jako je vstupní parametr metody. Na vstupu jsou tedy tři proměnné, polygon list *QPointFB*, žádaná pozice hrany určená pomocí výčtové třídy `PointAndPolygonPosition` a hrany, definované jako list *edges*. Výstupem je aktualizovaný list hran.
Metoda *createOverlay* provede zvolenou množinovou operaci polygonů. Na vstupu jsou 2 polygony jako list *QPointFB* a množinová operace definována výčtovou třídou *BooleanOperation* z modulu `booleanoperation.py`. Výstupem je list hran, které splňují danou množinovou operaci.

4.5 Modul Uživatelské datové typy

V modulech `edge.py` a `qpointfb` jsou definovány uživatelské datové typy. Uživatelský datový typ *QPointFB* je odvozen od třídy `QPointF`. Stejně jako *QPointF* nese informaci o poloze bodu v osách x a y. Následně ještě přidává hodnotu α a β, které určují polohu průsečíku dvou hran. Tyto atributy nabývají hodnoty z intervalu (0, 1) pro body, které jsou průsečíkem hran. Poté je ještě přidán atribut *position*, který reflektuje pozici středu hrany vůči druhému polygonu. Datový typ *Edge* definuje hrany jako začáteční a koncový bod typu *QPointFB*.

Pseudokódy konkrétních metod jsou uvedeny níže.

get2LinesIntersection:

Vypočti směrové vektory $u(p_1p_2), v(p_3p_4), w(p_1p_3)$*, kde* p_i *jsou body definující 2 úsečky*

Vypočti koeficienty k_1, k_2 *a* k_3

Když $k_3 = 0$*:*

Vrať úsečky jsou kolineární, bod průsečíku je None

Vypočti parametry α *a* β

Když $k_1 a k_2 = 0$*:*

Vrať úsečky jsou paralelní, bod průsečíku None

Když $0 \leq \alpha \leq 1$ *a* $0 \leq \beta \leq 1$*:*

Získej hodnotu průsečíku jako:

$X = p_{1x} + \alpha u_x, Y = p_{1y} + \alpha u_y$

Definuj průsečík QPointFB $q(x, y, \alpha, \beta)$

Vrať úsečky mající průsečík q

updateVertices:

Inicializuj index i = 0

Dokud *i < počet vrcholů a polygonu A:*

Inicializuj slovník D

inicializuj index j = 0

Dokud *j ¡ počet vrcholů b polygonu B:*

Získej průsečík dvou hran $h_1(a_i, a_{i+1}), h_2(b_j, b_{j+1})$

Když *mají právě jeden průsečík:*

Získej polohu průsečíku I na obou aktuálních hranách jako α *a* β

Přidej průsečík do D, kde key je hodnota, α *item je I*

Inkrementuj j = j + 1

Přidej průsečík do polygonu B na pozici j

Inkrementuj j = j + 1

Dokud *i ¡ počet vrcholů a polygonu A:*

Když *existuje nějaký průsečík v D:*

Pro *všechny záznamy v seřazených podle hodnoty klíče k ve slovníku:*

Inkrementuj i = i + 1

Vlož do vrchol v do polygony A na pozici i

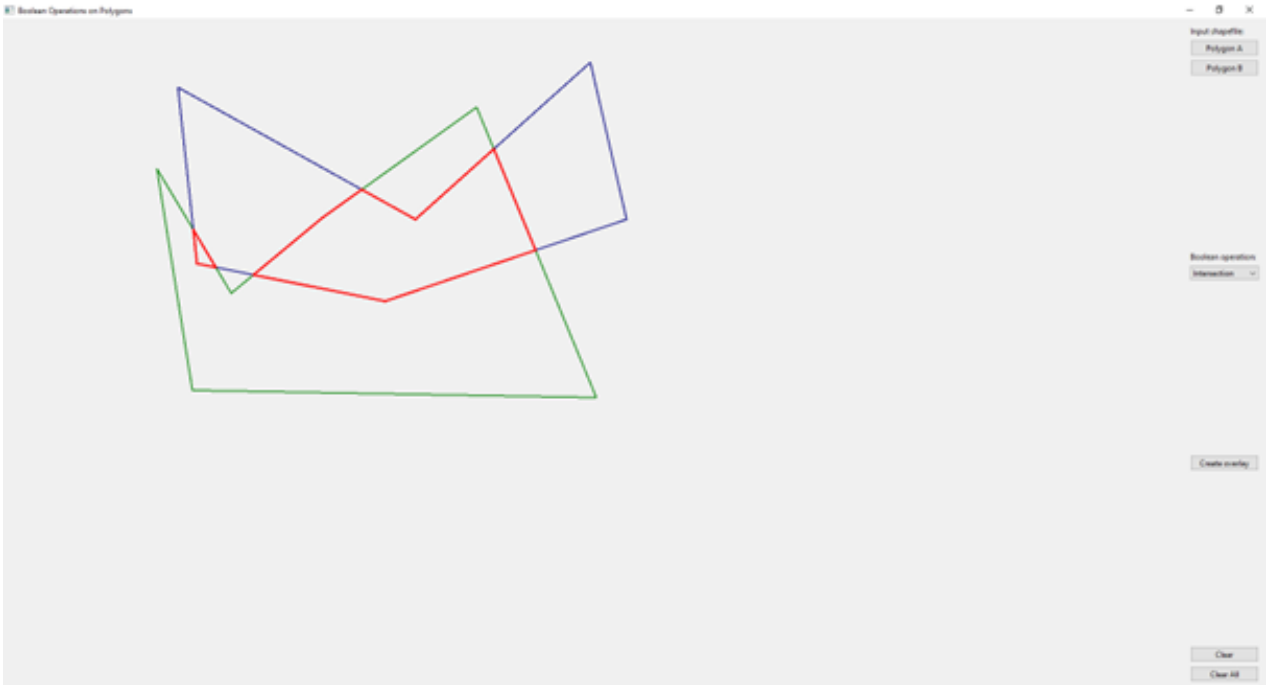
Inkrementuj i = i + 1

4.6 Vstup

Vstupní polygony jsou nahrány do uživatelského rozhraní pomocí tlačítek *Polygon A* a *Polygon B*. Každé tlačítko slouží pro nahrání jednoho polygonu. Data jsou v textovém dokumentu tak, že jsou zde zapsány na každém řádku souřadnice jednotlivých vertexů polygonu. Souřadnice x a y jsou odděleny mezerou. Souřadnice jsou vztaženy k souřadnicím zobrazovacího okna (tzn. od 0, 0 až po maximální rozměry obrazovky).

4.7 Výstup

Výstup je zajištěn graficky tak, že jsou zvýrazněny hrany, které splňují zvolenou množinovou operaci. (Obr. 2)



Obr. 2 - Výstup operace Intersection (červeně)

5 Závěr

Program vyhodnotí zvolenou množinovou operaci dvou vstupních polygonů. U programu by mohl být vylepšen vstupní formát tak, aby mohly být jednotlivé polygony nahrávány například ve formátu *.shp* či aby byly například v JTSK (pro lepší aplikaci na reálná data).

6 Zdroje

MORAVEC, L. (2008) - Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 168 s.

Přednášky z předmětu *Algoritmy počítačové kartografie*