Úloha: Řešení problému obchodního cestujícího

Zadání:

Vstup: množina uzlů U reprezentujících body.

Výstup: nalezení nejkratší Hamiltonovské kružnice mezi těmito uzly.

Nad množinou *U* nalezněte nejkratší cestu, která vychází z libovolného uzlu, každý z uzlů navštíví pouze jedenkrát, a vrací se do uzlu výchozího. Využijte níže uvedené metody konstrikčních heuristik:

Nearest Neighbor,

Best Insertion

Výsledky porovnejte s výstupem poskytovaným nástrojem Network Analyst v SW ArcMap.

Otestování proveďte nad dvěma zvolenými datasety, které by měly obsahovat alespoň 100 uzlů. Jako vstup použijte existující geografická data (např. města v ČR s více než 10 000 obyvateli, evropská letiště, ...), ohodnocení hran bude představovat vzdálenost mezi uzly (popř. vzdálenost měřenou po silnici); pro tyto účely použijte vhodný GIS.

Výsledky s uvedením hodnot W, k, uspořádejte do přehledné tabulky (metodu Best Insertion nechte proběhnout alespoň 10x), a zhodnoťte je.

Pro implementaci obou konstrukčních heuristik použijte programovací jazyk Python, vizualizaci výstupů proveďte ve vhodné knihovně, např. matplotlib.

Popis a rozbor problému:

Problém obchodního cestujícího, nebo také Travelling Salesman Problem (TSP), je diskrétní kombinatorická úloha, jejímž cílem je nalézt nejkratší cestu mezi všemi zadanými body na mapě. Jinými slovy se jedná o nalezení kružnice v úplném ohodnoceném grafu takové, že prochází všemi uzly a její cena je minimální. Kružnice, jež prochází všemi vrcholy a každý navštíví právě jednou se nazývá Hamiltonovská. Tento problém se řadí mezi takzvané NP-úplné úlohy. To zjednodušeně znamená, že u takových problémů jsem schopni získat v dostatečně krátkém čase jen řešení přiblížené.

<u>Graf</u>

Definice: Graf G (také jednoduchý graf nebo obyčejný graf) je uspořádaná dvojice G = (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran – množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny V. (Kovář 2016)

Jinými graf je tvořen n vrcholy a mezi těmito vrcholy jsou hrany. Tu můžeme chápat jako spojnice či cesty mezi objekty.

<u>Kompletní graf</u>

Graf se nazývá kompletní, jestliže na daném počtu uzlů obsahuje všechny možné hrany. To znamená, že každý uzel je spojený se všemi ostatními uzly hranou.

Definice: Graf na n vrcholech, kde $n \in$ N, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran se nazývá úplný nebo také kompletní graf a značí se K_n. (Kovář 2016)

<u>Ohodnocení hran</u>

Jednotlivé hranu mezi uzly mohou mít svou váhu. Tyto váhy obvykle představují fyzikální veličiny a značí náročnost pro přesun z jednoho uzlu do druhého. V této úloze je váha hrany rovna euklidovské vzdálenosti mezi jednotlivými uzly.

Definice: Ohodnocení grafu G je funkce $w : E(G) \rightarrow$ R, která každé hraně $e \in E(G)$ přiřadí reálné číslo $w(e)$, kterému říkáme váha hrany (značení w pochází z anglického „weight“). Ohodnocený graf je graf G spolu s ohodnocením hran reálnými čísly. Kladně ohodnocený (říkáme také vážený) graf G má takové ohodnocení w, že pro každou hranu $e \in E(G)$ je její váha $w(e)$ kladná. (Kovář 2016)

<u>Cesta grafem</u>

Cestou grafem rozumíme průchod jeho vrcholy tak, že všechny vrcholy obsažené v této cestě byly navštíveny jen jednou. Tato cesta nemusí procházet všemi vrcholy, kterými je graf tvořen.

<u>Kružnice (cyklus)</u>

Jedná se o speciální případ cesty. Opět nesmí být žádný uzel grafu navštíven více než jednou a zároveň musí být cesta složena minimálně ze tří uzlů. Kružnice se od běžné cesty liší tím, že má společný začáteční a koncový bod.

Definice: Graf na n vrcholech (kde n = 3), které jsou spojeny po řadě n hranami tak, že každý vrchol je spojen s následujícím vrcholem a poslední vrchol je navíc spojen s prvním vrcholem, se nazývá cyklus na n vrcholech a značí se C_n. Číslo n je délka cyklu C_n. (Kovář 2016)

<u>Hamiltonovská cesta</u>

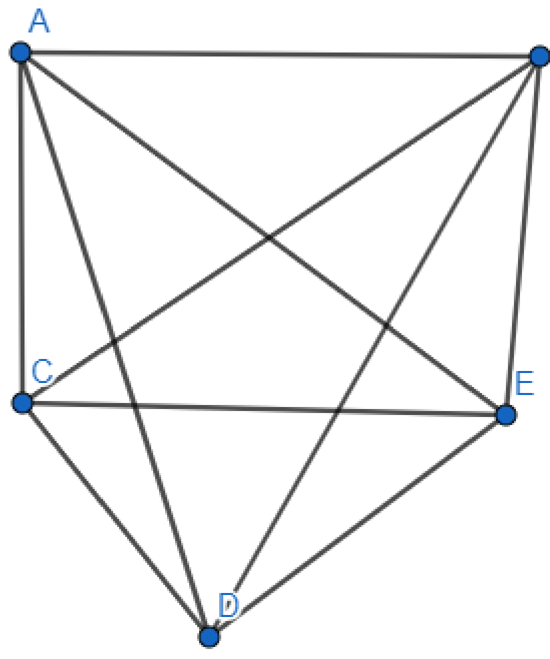
Jedná se o speciální případ cesty, která prochází všemi uzly, kterými je graf tvořen.

Hamiltonovská kružnice (cyklus)

Podobně jako u Hamiltonovské cesty se jedná o speciální případ kružnice. Tato kružnice splňuje stejné podmínky jako běžná kružnice, ale navíc musí procházet všemi uzly grafu.

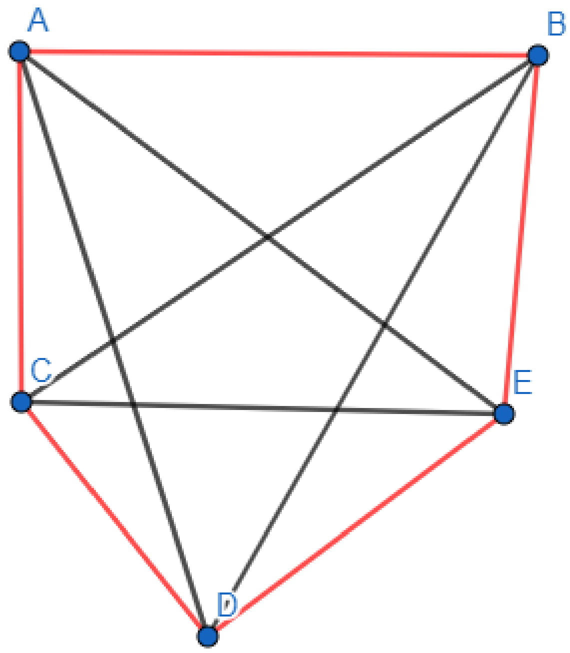
Definice: Hamiltonovský cyklus v grafu je takový cyklus, který prochází všemi vrcholy daného grafu. Graf, ve kterém existuje Hamiltonovský cyklus, se nazývá Hamiltonovský graf. (Kovář 2016)

S těmito definicemi nyní může být detailněji rozebrán řešený problém. Jako vstup je ohodnocený kompletní graf. v tomto případě jsou uzly grafu body reprezentující města. Tyto uzly mají své souřadnice. Jelikož je to kompletní graf, je počítáno s tím, že každé město má přímé spojení se všemi ostatními městy. To znamená, že z každého uzlu existuje přímá hrana do všech ostatních uzlů grafu. Ohodnocení těchto hran odpovídá euklidovské vzdálenosti mezi jednotlivými uzly. Toto ohodnocení je získáno ze souřadnic bodů. Tento graf lze vizualizovat body v prostoru (obr. 1).



Obrázek 1 Vizualizace kompletního grafu

Nyní je za úkol pomocí vybraných algoritmů tento graf projí tak, aby byly navštíveny všechny jeho uzly a zároveň výchozí bod byl i bodem konečným. Vznikne tzv. Hamiltonovská kružnice (obr. 2)



Obrázek 2 Hamiltonovská kružnice (červeně)

Výsledkem těchto algoritmů by měla být Hamiltonovská kružnice a její váha, která odpovídá součtu vah hran, ze kterých je tvořena. Tao Hamiltonovská kružnice by měla splňovat podmínku, že její váha je minimální.

$$W = \sum_{i=1}^{k-1} w(u_i, u_{i+1}) = min$$

V praxi to znamená, že hledáme nejkratší možnou cestu mezi všemi městy. To znamená, že se jedná o optimalizační úlohu.

<u>Optimalizační úloha</u>

Optimalizace se zabývá minimalizací či maximalizací funkcí mnoha proměnných. Do těchto úloh můžeme zařadit velké množství problémů. Optimalizace je část aplikované matematiky, nacházející se na pomezí matematické analýzy, lineární algebry a informatiky. (Weiner, 2011)

Vzhledem k tomu, že se jedná o NP úplný problém, je potřeba hledat jen přibližné řešení. U problému obchodního cestujícího existuje několik řešení. V této úloze je problém řešen pomocí algoritmů Nearest Neighbor a Best Insertion.

Řešení problému

Tato úloha je řešena za pomocí 2 algoritmů. První algoritmus se nazývá Nearest Neighbor.

Nearest Neighbor

Je to nejjednodušší algoritmus pro výpočet problému obchodního cestujícího. Na tomto principu byl zkonstruován skript s názvem *nearest_neighbor.py*.

Tento skript funguje následovně. Začneme v libovolném uzlu *u* grafu a označíme jej jako otevřený. Začáteční uzel *u* je na začátku definován uživatelem. Tento bod je přidán do listu, který tvoří výslednou Hamiltonovskou kružnici. Dále je od tohoto uzlu *u* zjištěna vzdálenost ke všem uzlům *v*, které ještě nebyly navštíveny. Tato vzdálenost je spočtena jako euklidovská vzdálenost. Za pomocí těchto vzdáleností je vybrán ten uzel, který má vzdálenost k uzlu *u* nejmenší. Tato vzdálenost je přičtena k celkové délce Hamiltonovské kružnice. Uzel *u* je poté nahrazen tímto uzlem *v* a celý proces se opakuje. Jakmile jsou všechny uzly označenu jako otevřené, je proces ukončen. Nyní je potřeba jen uzavřít kružnici tím, že do listu Hamiltonovské kružnice je znovu přidán startovní bod a k její délce připočtena tato vzdálenost.

Tento algoritmus je pro zadaný uzel *u* deterministický, což znamená, že při zachování počátečního uzlu vždy dojde ke stejnému výsledku.

Další použitý algoritmu se nazývá Best Insertion.

Best Insertion

Tato strategie je daleko účinnější než strategie Nearest Neighbor. Na jejím principu byl vytvořen následující skript s názvem *best_insertion.py*.

Na začátku tohoto skriptu jsou vybrány 3 náhodné body, které tvoří inicializační kružnici. Je vypočtena její váha a tyto tři inicializační body jsou označeny jako otevřené. Tyto body jsou opět vloženy do listu, který reprezentuje výslednou Hamiltonovskou kružnici. V dalším kroku je vždy vybrán náhodný dosud nenavštívený uzel *u* a do posud vytvořené kružnice je přidán na místo, aby její váhu zvětšil o co nejméně. Toho je docíleno vztahem

$$\Delta \mathrm{w} = \min w(u_i, u) + w(u, u_{i+1}) - w(u_i, u_{i+1}),$$

Který vychází z trojúhelníkové nerovnosti. Poté je tento uzel označen jako otevřený a je vybrán další náhodný uzel z doposud nenavštívených uzlů. Toto se opakuje, dokud nebudou všechny uzly navštívené. Nakonec je opět Hamiltonovská kružnice uzavřena přidáním prvního bodu.

Tento algoritmus není deterministický a pokaždé vyjde nepatrně jinak.

Vstup:

Vstup pro oba skripty je nahráván ze souboru CSV a ukládán do listu, kde je informace o názvech jednotlivých uzlů a do slovníku, kde jsou k jednotlivým uzlům přiřazeny jejich souřadnice. CSV soubor musí vypadat tak, že v prvním sloupci je číslo uzlu a ve druhém a ve třetím sloupci jsou jeho souřadnice. Jednotlivé sloupce jsou odděleny středníkem.

Výstup:

Výstupem obou skriptů je list obsahující názvy uzlů uspořádané tak, jak tvoří Hamiltonovskou kružnici, hodnota této kružnice a její vizualizace.

Výsledky

Pro vstup byly použity 2 bodové datasety. 1. s názvem coord_cernosice.csv, který obsahuj souřadnice obcí spadajících do správního obvodu Černošic a Říčan. 2. datatset s názvem coord_10000.csv obsahuje souřadnice obcí s počtem obyvatel větším než 10 000. Tyto datasety byly exportovány ze shapefilu jako CSV soubor.

Výsledky algoritmu Best Insertion. Porovnání 10 různých opakování a spočítán průměr (tab. 1).

	coord_cernosice.csv	coord_10000.csv
1.	386472,3846	2766303,29
2.	384907,6036	2722416,297
3.	390759,4859	2705840,856
4.	393406,1793	2792202,335
5.	383491,2779	2830534,455
6.	389756,7782	2798348,647
7.	383449,671	2736546,666
8.	372576,8228	2692059,213
9.	369981,6842	2815756,5
10.	385692,6324	2790199,296
průměr	384049,452	2765020,755

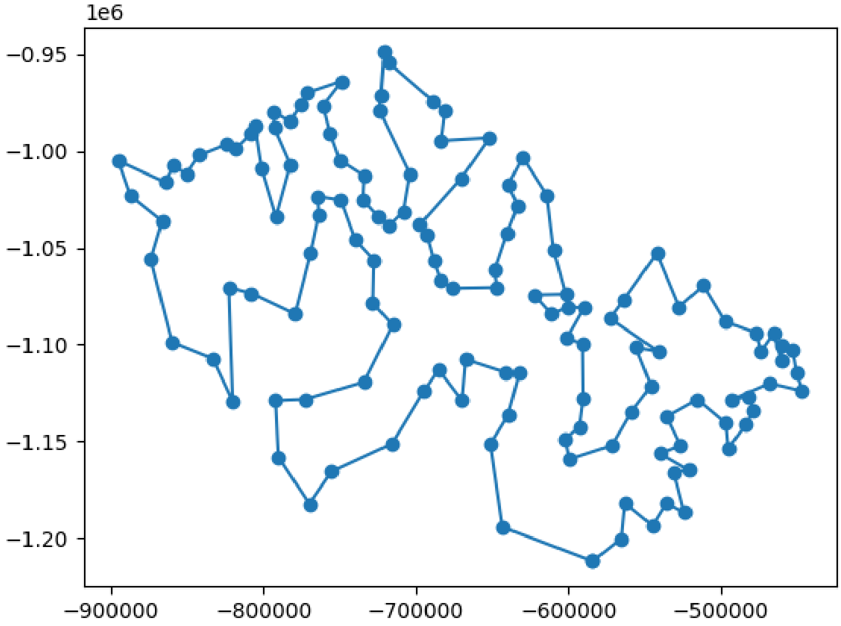
Tabulka 1 výsledky algoritmu Best Insertion

Porovnání výsledků z algoritmu Nearest Neighbor, Best Insertion a výsledků ze softwaru ArcGis Pro (tab. 2). U obou datasetů vyšla nejlépe metoda používaná softwarem ArcGIS Pro. Při porovnání s touto metodou vyšla metoda Best Insertion jako lepší než metoda Nearest Neighbor. Kružnice nalezená metodou Nearest Neighbor je asi o 20 % větší než kružnice spočtená ArcGISem. Při porovnání Best Insertion a ArcGIS Pro vyšla kružnice vetší o necelé 2 % a o 8,5 % delší.

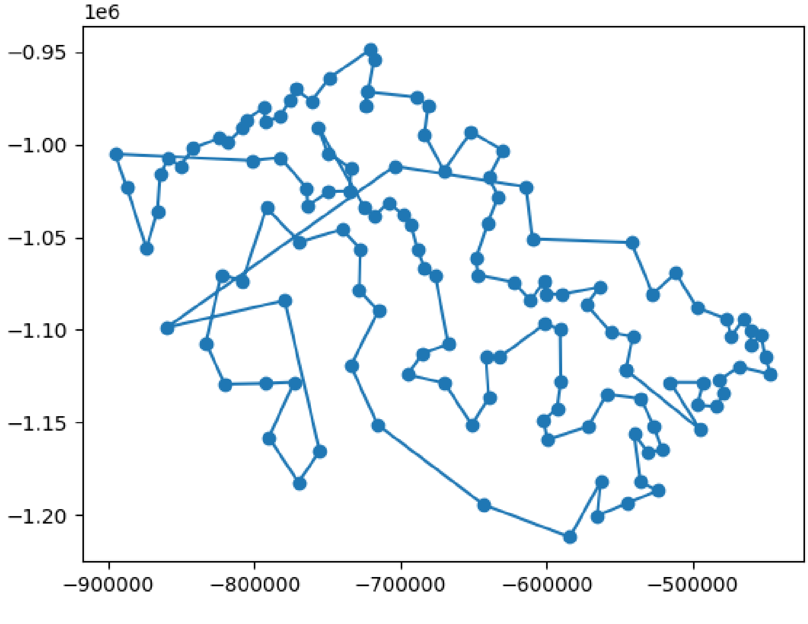
	Nearest Neighor	Best Insertion	ArcGIS Pro	NN/ArcGIS [%]	BI/ArcGIS [%]
coord_cernosice.csv	452255,3206	384049,452	377221,0463	119,89	101,81
coord_10000.csv	3092515,999	2765020,755	2548559,004	121,34	108,49

Tabulka 2 porovnání výsledků

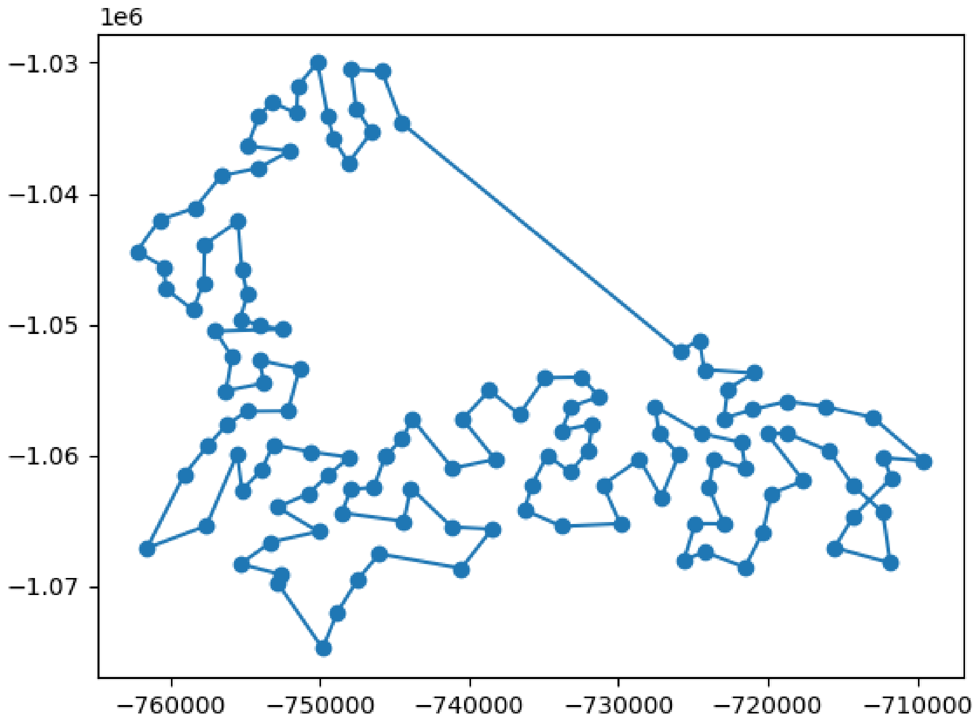
Vizualizace výsledných Hamiltonovských kružnic pomocí knihovny matplotlib jsou na obrázcích 1 až 4.



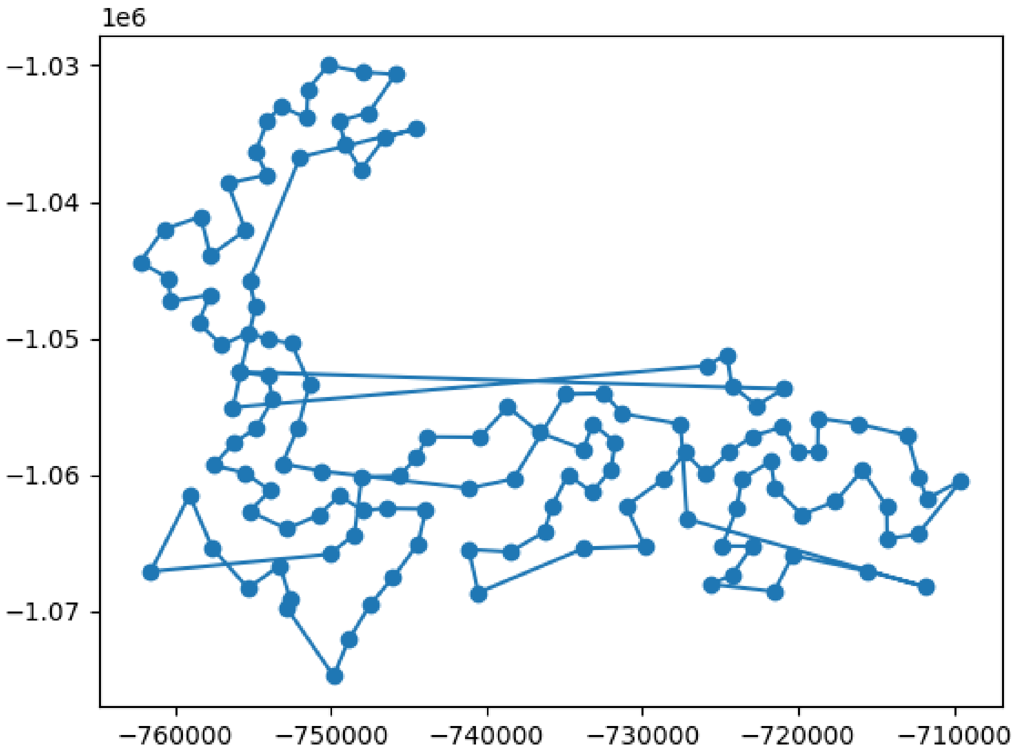
Obrázek 3 Best Insertion, dataset coord_10000.csv



Obrázek 4 Nearest Neighbor, dataset coord_10000.csv



Obrázek 5 Best Insertion, dataset coord_cernosice.csv



Obrázek 6 Nearest Neighbor, dataset coord_cernosice.csv

Závěr

Z výsledků je patrné, že optimální metoda je využívána v softwaru ArcGIS Pro. Zde použitý skript *best_insertion.py* se ale dokáže svými výsledky přiblížit. I z obrazových výstupů je patrné, že metoda Best Insertion pracuje lépe než Nearest Neighbor. Mezi možná vylepšení těchto skriptů bych zařadil možnost vstup načítat rovnou ze shapifilu pomocí knihovny arcpy. Toto by mohlo usnadnit práci se skripty, protože by nebyl takový důraz na korektní podobu vstupu. Na druhou stranu by uživatel potřeboval přístup k této knihovně. Další vylepšení by mohlo být v oblasti výstupů. Výsledné grafy a kružnice by se nemusely jen vizualizovat ale rovnou i automaticky ukládat.

Zdroje:

Kovář, P. Úvod do teorie grafů, Západočeské univerzita v Plzni, skriptum, 2016

Weiner. T. Optimalizace, České vysoké učení technické, Fakulta elektrotechnická, skriptum, 2011