Matematika 4 – Logika pre informatikov: Sada úloh 6

⚠ Riešenie teoretickej časti tejto sady úloh **odovzdajte najneskôr vo štvrtok 5. apríla 2018 o 13:00** v kancelárii **I-7 alebo I-16**.

Z tejto sady **budeme hodnotiť**: úlohu 5, praktickú úlohu 7 a jednu ďalšiu úlohu, ktorú vyžrebujeme 5. 4. 2018 o 13:00 v kancelárii I-7.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Ohodnotené riešenia poskytneme k nahliadnutiu, ale **nevrátime** vám ich, uchovajte si kópiu. Na riešenia všetkých sád úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá** zverejnené na adrese `https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh`.

Čísla úloh v zátvorkách pochádzajú zo zbierky, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia: `https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/ulohy/zbierka.pdf`.

Svoje tablá môžete skontrolovať pomocou editora `https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/tableauEditor/`. Vyhradzujeme si právo vrátiť na prepracovanie riešenia s tablami, ktoré majú neprimeraný rozsah alebo sú zostrojené bezhlavo, mechanicky.

Úloha 1 (2.6.12). Nech α, α_1, α_2 sú označené formuly podľa niektorého α pravidla. Nech β, β_1, β_2 sú označené formuly podľa niektorého β pravidla. Nech π je niektorá vetva tabla $\mathcal{T}$. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Ak $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi$ a π je úplná vetva, tak aj $\alpha \in \pi$.

b) Ak $\beta \in \pi$ a π je uzavretá vetva, tak aj $\beta_1, \beta_2 \in \pi$.

c) Ak $\alpha, \beta \in \pi$ a π je úplná uzavretá vetva, tak aspoň jedna z α_1, β_1 je tiež v π.

Úloha 2 (2.6.13). Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y} \ \text{(MP)} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X} \ \text{(MT)}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{T}\,X} \ (\text{DS}_2) \qquad \frac{}{\mathbf{T}\,X \;\big|\; \mathbf{F}\,X} \ \text{(cut)}$$

Tieto pravidlá sa nazývajú: (MP) modus ponens, (MT) modus tolens, (cut) rez, (DS_2) disjunktívny sylogizmus.

Úloha 3 (2.6.14). Prechádzate sa v labyrinte a zrazu sa ocitnete na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

Strážnik zlatej cesty: „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

Strážnik mramorovej cesty: „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

Strážnik kamienkovej cesty: „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

i. Môžete si byť istí, že niektoré z ciest vedú do stredu labyrintu? Ak áno, ktorú cestu si vyberiete?

ii. Viete o niektorých cestách s určitosťou povedať, že do stredu labyrintu nevedú? Ak áno, ktoré to sú?

iii. Je o niektorých cestách nemožné povedať, či do stredu labyrintu vedú alebo nevedú? Ak áno, o ktorých?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovú teóriu nad vhodnou množinou výrokových premenných, ktorých význam stručne vysvetlíte.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky i–iii.

c) Zodpovedať otázky i–iii a odpovede dokázať *v rozšírenom tablovom kalkule* s pravidlami z predchádzajúcej úlohy a pravidlom (DS_1) z prednášky.

Úloha 4 (2.7.1). V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(a \lor b \lor c), (b \lor \neg c), \neg a, \neg b\}$,

b) $T = \{(a \lor b), (\neg b \lor \neg a), (c \lor \neg d), (\neg c \lor d)\}$,

c) $T = \{(p \lor q), (\neg p \lor r), (\neg p \lor \neg r), (p \lor \neg q)\}$.

Úloha 5 (2.7.3, hodnotená). Dokážte, že z nasledujúcich tvrdení:

(A_1) Keď mám dáždnik, nikdy neprší.

(A_2) Cesta je mokrá, iba ak prší alebo prešlo umývacie auto.

(A_3) Umývacie auto nejazdí cez víkend.

vyplýva

(X) Ak mám dáždnik a je mokrá cesta, nie je víkend.

Tvrdenia sformalizujte a využite rezolvenčný kalkul.

Úloha 6 (2.6.15). Štyria spolužiaci sa dohadujú, kedy pôjdu na pivo do krčmy Pod Machnáčom:

- Do úvahy pripadajú tri večery, utorok až štvrtok.
- Fero povedal, že v utorok aj v stredu určite príde.
- Zuzka povedala, že vo štvrtok príde.
- Jožo povedal, že pôjde, len ak pôjde aspoň jedno dievča.
- Katka nepôjde, ak pôjde Fero.
- Zuzka pôjde, len ak pôjde Katka.
- Všetci vedia, že Fero chodí do krčmy len v utorok, lebo v stredu je v telke futbal a vo štvrtok má tréning.

Pomocou prostriedkov výrokovej logiky zistite, v ktoré večery a v akom zložení môžu spolužiaci ísť na pivo.

Tablo využívajúce iba základné pravidlá α a β by malo mať okolo 15 vetiev a **najviac** 60 uzlov. Konštrukciu tabla na papieri uľahčia pravidlá MP, MT, DS_1, DS_2, ktorými ušetríte aspoň 5 uzlov aj vetiev. Tablo môžete zostrojiť aj pomocou nášho editora tabiel, ktorý pozná iba základné pravidlá.

Úloha 7 (praktická, odovzdávaná a hodnotená osobitne). Vyriešte a odovzdajte podľa pokynov praktické cvičenie `cv06`

`https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/tree/master/cvicenia/cv06`.