

Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Klúka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2017/2018

5. prednáška

Korektnosť a úplnosť tablového kalkulu

19. marca 2018

Obsah 5. prednášky

2 Výroková logika

Tablový kalkul

- Korektnosť

- Tablový dôkaz splniteľnosti

- Hintikkova lema

- Úplnosť

Organizačné rozhodnutia a oznamy

Zrušenie stredajších praktických cvičení


Súhlasia študenti, ktorí prišli naposledy?

✓ **odsúhlasené**

Midterm

 **utorok 10. apríla o 18:10 v A**

Náhrada cvičení 1. a 8. mája

1. možnosť:  **prijatá**

stredy 2. a 9. mája

14:50 2AIN1 M-I

16:30 2AIN2 M-IX, 2AIN3 M-XI

2. možnosť:  **zamietnutá**

piatky 4. a 11. mája

Niekedy dopoludnia (8:10 – 12:20),

ideálne 9:50–11:30

2.8

Tablový kalkul

Opakovanie

Označené formuly a ich sémantika

Definícia 2.57

Nech X je formula výrokovej logiky.

Postupnosti symbolov $\mathbf{T} X$ a $\mathbf{F} X$ nazývame *označené formuly*.

Definícia 2.58

Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula. Potom

- v *spĺňa* $\mathbf{T} X$ vtt v spĺňa X ;
- v *spĺňa* $\mathbf{F} X$ vtt v nespĺňa X .

Dohoda

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+ , X_7^+ .

Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S , T s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+ , T_3^+ .

Jednotný zápis označených formúl — α

Definícia 2.59 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je **typu α** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y .

Takéto formuly budeme označovať písmenom α ;

α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
 α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$T(X \wedge Y)$	TX	TY
$F(X \vee Y)$	FX	FY
$F(X \rightarrow Y)$	TX	FY
$T \neg X$	FX	FX
$F \neg X$	TX	TX

Pozorovanie 2.60 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.

Potom v spĺňa α vtt v spĺňa α_1 a v spĺňa α_2 .

Jednotný zápis označených formúl – β

Definícia 2.61 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je **typu β** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y .

Takéto formuly budeme označovať písmenom β ;

β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
 β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \wedge Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{F}Y$
$\mathbf{T}(X \vee Y)$	$\mathbf{T}X$	$\mathbf{T}Y$
$\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$	$\mathbf{F}X$	$\mathbf{T}Y$

Pozorovanie 2.62 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

*Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
 Potom v spĺňa β vtt v spĺňa β_1 **alebo** v spĺňa β_2 .*

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 2.63

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene **tablo pre S^+**) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných rekurzívnych pravidiel:

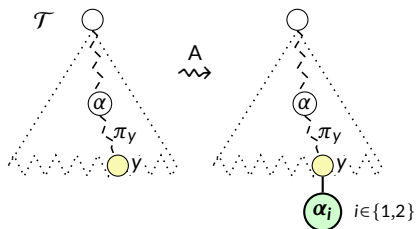
- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé **priame rozšírenie** \mathcal{T} ktoroukoľvek z operácií:
 - A:** Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - B:** Ak sa na vetve π_y vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .
- S^+ :** Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+ .

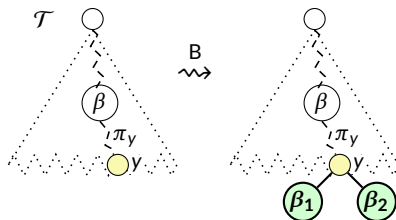
Tablá, tablové pravidlá, operácie rozšírenia

Operácia priameho rozšírenia

Pravidlá a označené formuly v nich



α	α	α	α_1	α_2
α_1	α_2	$T(X \wedge Y)$	TX	TY
		$F(X \vee Y)$	FX	FY
		$F(X \rightarrow Y)$	TX	FY
		$T \neg X$	FX	FX
		$F \neg X$	TX	TX



β	β	β_1	β_2
$\beta_1 \mid \beta_2$			
	$F(X \wedge Y)$	FX	FY
	$T(X \vee Y)$	TX	TY
	$T(X \rightarrow Y)$	FX	TY

Legenda: y je list v table \mathcal{T} , π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 2.64

Vetvou tabla \mathcal{T} je každá cesta od koreňa \mathcal{T} k niektorému listu \mathcal{T} .

Označená formula X^+ sa **vyskytuje na vetve** π v \mathcal{T} vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π . Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Definícia 2.65

Vetva π tabla \mathcal{T} **je uzavretá** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly **F** X a **T** X pre nejakú formulu X . Inak je π **otvorená**.

Tablo \mathcal{T} **je uzavreté** vtt každá jeho vetva je uzavretá. Naopak, \mathcal{T} je **otvorené** vtt aspoň jedna jeho vetva je otvorená.

2.8.1

Korektnosť

Korektnosť tablového kalkulu

Korektnosť (angl. *soundness*) kalkulu neformálne:

Ak v kalkule dokážeme nejaké tvrdenie, tak to tvrdenie je naozaj pravdivé.

Veta 2.66 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ .

Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 2.67

Nech S je množina formúl a X je formula.

Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T} A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F} X\}$ (skr. $S \vdash X$),

tak z S vyplýva X ($S \models X$).

Dôsledok 2.69

Nech X je formula.

Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F} X\}$ (skr. $\vdash X$), tak X je tautológia ($\models X$).

Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Na dôkaz korektnosti potrebujeme pomocnú definíciu a dve lemy.

Definícia 2.70

Nech S^+ je množina označených formúl, nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Potom:

- ***v* spĺňa vetvu π** v table \mathcal{T} vtt
v spĺňa všetky označené formuly vyskytujúce sa na na vetve π .
- ***v* spĺňa tablo \mathcal{T}** vtt v spĺňa niektorú vetvu v table \mathcal{T} .

Lema 2.71 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.

Ak v spĺňa S^+ a v spĺňa \mathcal{T} , tak v spĺňa aj každé priame rozšírenie \mathcal{T} .

Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models S^+$. Nech v spĺňa \mathcal{T} a v ňom vetvu π . Nech \mathcal{T}_1 je rozšírenie \mathcal{T} . Nastáva jeden z prípadov:

- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} operáciou A, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y . Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π a teda je splnené.
Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj α , pretože spĺňa π . Potom v musí spĺňať aj α_1 a α_2 . Spĺňa teda vetvu π_z v table \mathcal{T}_1 , ktorá rozširuje splnenú vetvu π o vrchol z obsahujúci splnenú ozn. formulu α_1 alebo α_2 . Preto v spĺňa tablo \mathcal{T}_1 .
- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} operáciou B, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y . Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π a teda je splnené.
Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj β , pretože spĺňa π . Potom ale v musí spĺňať aj β_1 alebo β_2 . Ak v spĺňa β_1 , tak spĺňa aj vetvu π_{z_1} v table \mathcal{T}_1 , a preto v spĺňa tablo \mathcal{T}_1 . Ak v spĺňa β_2 , spĺňa aj π_{z_2} , a teda aj \mathcal{T}_1 .
- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} operáciou Ax, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z obsahuje formulu $X^+ \in S^+$. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π a teda je splnené.
Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa vetvu π_z v table \mathcal{T}_1 , pretože je rozšírením splnenej vetvy π o vrchol z obsahujúci splnenú formulu X (pretože $v \models S^+$). Preto v spĺňa tablo \mathcal{T}_1 . \square

Korektnosť — splnenie množiny a tabla pre ňu

Lema 2.72 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie.

Ak v spĺňa S^+ , tak v spĺňa \mathcal{T} .

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models S^+$.

Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla \mathcal{T} dokážeme, že v spĺňa každé tablo \mathcal{T} pre S^+ .

Ak má \mathcal{T} jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $X^+ \in S^+$, ktorá je splnená pri v . Preto je splnená jediná vetva v \mathcal{T} , teda aj \mathcal{T} .

Ak \mathcal{T} má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla \mathcal{T}_0 , ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako \mathcal{T} . Podľa indukčného predpokladu teda v spĺňa \mathcal{T}_0 . Podľa predchádzajúcej lemy potom v spĺňa aj \mathcal{T} . \square

Korektnosť — dôkaz

Dôkaz vety o korektnosti.

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ .

Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, ktoré spĺňa S^+ .

Označme ho v .

Potom podľa lemy K2 v spĺňa tablo \mathcal{T} , teda v spĺňa niektorú vetvu π v \mathcal{T} .

Pretože \mathcal{T} je uzavreté, aj vetva π je uzavretá,

teda π obsahuje označené formuly $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ pre nejakú formulu X .

Ale $v \models \mathbf{T}X$ vtt $v \models X$ a $v \models \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models X$, čo je spor.

□

2.8.2

Tablový dôkaz splniteľnosti

Úplná vetva a tablo

Čo ak nevieme nájsť uzavreté tablo pre nejakú množinu ozn. formúl?

Definícia 2.73 (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je tablo pre S^+ .

Vetva π v table \mathcal{T} **je úplná** vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α , ktorá sa vyskytuje na π , sa *obidve* označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π ;
- pre každú označenú formulu β , ktorá sa vyskytuje na π , sa *aspoň jedna* z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π ;
- každá $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π .

Tablo \mathcal{T} je úplné vtt každá jeho vetva je buď úplná alebo uzavretá.

Príklad 2.74

Vybudujme úplné tablo pre $\mathbf{F} X$, kde

$$X = (((p \vee q) \wedge (r \vee p)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))).$$

Otvorené tablo a splniteľnosť

Nech tablové pravidlá v príklade použijeme v akomkoľvek,

- **nenájdeme uzavreté** tablo, ale
- **vyrobíme úplné** otvorené tablo.

Z úplného otvoreného tabla pre S^+ vieme vytvoriť ohodnotenie v:

- 1 nájdeme otvorenú vetvu π ,
- 2 pre každú výrokovú premennú p
 - ▶ ak sa v π nachádza $\mathbf{T} p$, definujeme $v(p) = t$;
 - ▶ ak sa v π nachádza $\mathbf{F} p$, definujeme $v(p) = f$;
 - ▶ inak definujeme $v(p)$ ľubovoľne.

Toto v spĺňa π , a preto **v spĺňa S^+** (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π).

Otázka

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť spĺňajúce ohodnotenie?

Existencia úplného tabla

Lema 2.75 (o existencii úplného tabla)

*Nech S^+ je konečná množina označených formúl.
Potom existuje úplné tablo pre S^+ .*

Dôkaz.

Vybudujeme tablo \mathcal{T}_0 pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním operácie Ax postupne doplníme ostatné.

Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla \mathcal{T}_i , ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná. Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α , ale nenachádza sa niektorá z formúl α_1 a α_2 .
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β , ale nenachádza sa ani jedna z formúl β_1 a β_2 .

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme operáciu A. Ak platí druhá možnosť, aplikujeme operáciu B. Získame tablo \mathcal{T}_{i+1} , s ktorým proces opakujeme.

Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo \mathcal{T}_n , v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná. Teda každá vetva v \mathcal{T}_n je buď uzavretá alebo úplná, čiže \mathcal{T}_n je úplné.



2.8.3

Hintikkova lema

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 2.76

Množina označených formúl S^+ sa nazýva **nadol nasýtená** vtt platí:

- H_0 v S^+ sa nevyskytujú naraz $\mathbf{T} p$ a $\mathbf{F} p$ pre žiadnu výrokovú premennú p ;
- H_1 ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;
- H_2 ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 2.77

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla \mathcal{T} .

Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.

Lema 2.78 (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme vytvoriť ohodnotenie v , ktoré splní všetky formuly z S^+ . Definujme v pre každú výrokovú premennú p takto:

- ak $\mathbf{T} p \in S^+$: $v(p) = t$,
- ak $\mathbf{F} p \in S^+$: $v(p) = f$,
- ak ani $\mathbf{T} p$ ani $\mathbf{F} p$ nie sú v S^+ , tak $v(p) = t$.

v je korektne definované vďaka H_0 .

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že v spĺňa všetky formuly z S^+ :

- v očividne spĺňa všetky označené výrokové premenné z S^+ .
- $X^+ \in S^+$ je buď α alebo β :
 - ▶ Ak X^+ je α , potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa X^+ , a teda podľa indukčného predpokladu sú splnené pri v , preto v spĺňa aj α (podľa pozorovania 2.60).
 - ▶ Ak X^+ je β , potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, je nižšieho stupňa ako X^+ , teda podľa IP ju v spĺňa, a preto v spĺňa β (podľa pozorovania 2.62). □

2.8.4

Úplnosť

Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne:

Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 2.79 (o úplnosti)

Nech S^+ je konečná nespĺniteľná množina označených formúl.

Potom existuje uzavreté tablo pre S^+ .

Dôsledok 2.80

Nech S je konečná teória a X je formula.

Ak $S \models X$, tak $S \vdash X$.

Dôsledok 2.81

Nech X je formula. Ak $\models X$, tak $\vdash X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti.

Zoberme ľubovoľnú konečnú nesplniteľnú množinu označených formúl S^+ .

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo \mathcal{T} , teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.

Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+ , bola by aj S^+ splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+ .

Preto musia byť všetky vetvy tabla \mathcal{T} uzavreté.



Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnosť, složitost, nutnosť*. Academia, 2002. Prístupné aj na <http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf>.