

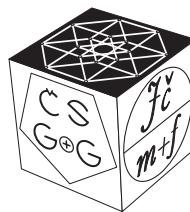
SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

**24<sup>th</sup> Symposium on  
Computer Geometry SCG'2015**



**PROCEEDINGS OF THE  
SLOVAK-CZECH CONFERENCE  
ON GEOMETRY AND GRAPHICS**

Terchová, Žilina  
September 14–18, 2015



**35<sup>th</sup> Conference on  
Geometry and Graphics**

CZECH SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS  
OF THE UNION OF CZECH MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS

Language correction of the publication was not performed, language accuracy is the sole responsibility of the contributing authors.

Contributions included in the proceedings were selected by the scientific committee members based on reviews.

All rights reserved. No part of this work may be used or reproduced in any manner whatsoever or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without written permission from the publisher and copyright owner.



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ  
UNIVERZITA V BRATISLAVE

Nakladateľstvo STU  
Mýtna 30, 811 07 Bratislava

Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics  
First edition

© Daniela Velichová, Miroslav Lávička, 2015

© Nakladateľstvo STU, 2015

ISBN 978-80-227-4479-9

# Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics

Organized by:  
Slovak Society for Geometry and Graphics

## Organizing Committee:

Daniela Velichová – STU Bratislava  
Daniela Richtáriková – STU Bratislava  
Dagmar Szarková – STU Bratislava  
Viera Čmelková – University of Žilina  
Roman Hašek – JU České Budějovice

## Scientific Committee:

Roman Hašek – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)  
Miklós Hoffmann – Eszterházy Károly Főiskola, Eger (HU)  
Pavel Chalmovianský – Univerzita Komenského v Bratislavе (SK)  
Mária Kmeťová – Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra (SK)  
Miroslav Lávička – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)  
Pavel Pech – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)  
Monika Sroka-Bizoń – Politechnika Ślaska, Gliwice (PL)  
Maria Horvath-Šimić – Sveučilište u Zagrebu (HR)  
Daniela Velichová – Slovenská technická univerzita v Bratislavе (SK)  
Gunter Weiss – Technische Universität Dresden & TU Wien (DE & AT)



# Table of Contents

FOREWORDS . . . . .	9
PLENARY TALKS . . . . .	11
BÁLINT VOJTECH, ADAMKO PETER <i>Minimization of the Container for Packing of Three Cubes in Dimension 4</i> . . . . .	13
ČIŽMÁR JÁN <i>Biracionálne korešpondencie; istý špeciálny prípad</i> . . . . .	25
STACHEL HELLMUT <i>Strophoids – cubic curves with remarkable properties</i> . . . . .	41
WEISS GUNTER <i>Bodenmiller, Gauss, Wallace-Simson and more</i> . . . . .	45
WILDBERGER NORMAN <i>Rational trigonometry as a tool for geometrical calculations</i> . . . . .	61
CONTRIBUTED TALKS . . . . .	63
BÁTOROVÁ MARTINA <i>On certain invariants of a knot associated with a plane curve singularity</i> . . . . .	65
BLAŽKOVÁ EVA, ŠÍR Zbyněk <i>Local Properties of Algebraic Curves Using Rational Puiseux Series</i> . . . . .	73
ČERVENKA FRANTIŠEK <i>GeoGebra ve výuce Deskriptivní a Konstruktivní geometrie</i> . . . . .	85
ČMELKOVÁ VIERA <i>GeoGebra – vybrané funkcie a ich aplikácia vo výučbe</i> . . . . .	89
DLOUHÁ DAGMAR, HAMŘÍKOVÁ RADKA, DOLEŽAL JIŘÍ <i>Multimediální materiály pro předmět Deskriptivní geometrie</i> . . . . .	93
DUDZIK PIOTR <i>Analysis of span of roof over the building of rectangle polygon projection</i> . . . . .	99

GEMERANOVÁ MÁRIA, CHALMOVIANSKÝ PAVEL <i>Data Approximation Using Lemniscates Adding One Focus Method</i>	105
GERGELITSOVÁ ŠÁRKA, HOLAN TOMÁŠ <i>Objevování konstrukcí při dělení úsečky</i>	113
HAŠEK ROMAN <i>Množiny bodů dané vlastnosti v GeoGebře</i>	119
HOLEŠOVÁ MICHAELA <i>Monomial curves as set-theoretic complete intersections</i>	127
HÝROŠOVÁ TATIANA <i>Vizualizácia blossomov v GeoGebre</i>	133
CHALMOVIANSKÝ PAVEL <i>Möbius group and some of its substructures</i>	139
KMETOVÁ MÁRIA <i>Geometry in education and anaglyph as an intermediary of geometric information.</i>	145
KOLÁŘOVÁ DANA <i>Gotická rozetová okna</i>	153
KOLCUN ALEXEJ <i>Triangulácia parametrických plôch so zachovaním stupňa diagonálnych krieviek</i>	155
KOREŇOVÁ BOŽENA, HÝROŠOVÁ TATIANA <i>Variabilita geometrických tvarov</i>	161
MIHALOVIČ LADISLAV <i>Technické školky v ČR a v SR</i>	167
MICHÁLKOVÁ KRISTÝNA, BASTL BOHUMÍR <i>B-spline/NURBS objemové parametrizace Kaplanovy turbíny</i>	171
MOLNÁR EMIL, SCHULTZ BENEDEK <i>Geodesic lines and spheres, densest(?) geodesic ball packing in the new linear model of Nil geometry</i>	177
NÉMETH LÁSZLÓ <i>Pascal triangles and pyramid in the hyperbolic space</i>	187

---

PECH PAVEL	
<i>Properties of the cubic surface related to Simson-Wallace theorem . . . . .</i>	193
POKORNÁ BARBORA, CHALMOVIANSKÝ PAVEL	
<i>Avoiding Quadratic Obstacles in the Euclidean Plane Using Cubic Bézier Paths. . . . .</i>	205
POLINCEUSZ PIOTR	
<i>Tensegrity in parametric modeling . . . . .</i>	211
RICHTÁRIKOVÁ DANIELA	
<i>Základné geometrické útvary a ich význam . . . . .</i>	215
SROKA-BIZOŇ MONIKA, BOMBÍK DANUTA	
<i>Condition for construction of an image of a line in the degenerated projection. . . . .</i>	221
SURYNKOVÁ PETRA	
<i>Inkrementální konstrukce polygonální sítě reprezentující povrch daný mračnem bodů . . . . .</i>	227
TERCZYŃSKA EWA, TYTKOWSKI KRZYSZTOF	
<i>E-learning – descriptive geometry &amp; engineering graphics . . . . .</i>	235
TOMÁNEK ĽUDOVÍT	
<i>Geometrické priestory. . . . .</i>	241
TOMICZKOVÁ SVĚTLANA	
<i>Pětiúhelníkové dlaždice . . . . .</i>	247
VAJSÁBLOVÁ MARGITA	
<i>Konformné zobrazenia bodov elipsoidu a sféry do roviny a ich parametre . . . . .</i>	253
VELICOVÁ DANIELA	
<i>Krivky stuhy . . . . .</i>	261
ZACHARIÁŠ SVATOPLUK	
<i>Průmět rovnoběžných řezů na kulové ploše . . . . .</i>	267
LIST OF PARTICIPANTS . . . . .	275



## Forewords

*Slovak–Czech Conference on Geometry and Graphics* that took place in hotel Diery, Terchová–Biely potok, Slovakia on September 15–18, 2015, was a joint event of two annual conferences held before separately in Slovakia and in Czech republic, 24<sup>th</sup> SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY CSG '2015 organized by the Slovak Society for Geometry and Graphics and 35<sup>th</sup> CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS by the Czech Society for Geometry and Graphics of the Union of Czech Mathematicians and Physicists. Conference has been supported by awarded Visegrad fund ID: 11520208.

Among 48 conference participants from 4 Visegrad countries – Czech republic, Hungary, Poland and Slovakia, there were present also foreign participants from Austria, Germany and Australia. In addition to 26 contributed talks and 3 posters from applied and pure geometry, graphics and education of geometry, participants enjoyed 5 plenary lectures on various topics. Vojtech Bálint from University of Žilina, Slovakia presented the latest results in the field of dense packing of cubes with memories on colleague Pavel Novotný *Minimalisation of volume of container for packing of three cubes in dimension 4, remembering Pavel Novotný*. Gunter Weiss from Dresden Technical University, Germany gave a talk on basic sets of remarkable points and lines in the projectively extended Euclidean plane entitled *Bodenmiller, Gauss, Wallace-Simson and more*. Norman Wildberger from School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales in Sydney, Australia presented backgrounds of rational geometry in his talk *Rational trigonometry as a tool for geometrical calculations*. Hellmuth Stachel from Technical University in Vienna, Austria spoke about unknown properties of a well-known cubic curve, *Strophoids - cubic curves with remarkable properties*. Ján Čižmár from Trnava University in Slovakia introduced a special type of an irrational correspondence in presentation entitled *Irrational correspondencies in  $P^n(k)$ ; one special example*.

Workshop on usage of dynamic mathematical software GeoGebra was also a part of the conference.

Conference was organized by the committee of the Slovak Society for Geometry and Graphics. Social programme included tourist walks in the National park Malá Fatra with possibilities to enjoy discussions among participants in the beautiful open nature, not to forget about conference dinner with Slovak traditional homemade food and folk music performed by the famous group of musicians from Terchová, whom all participants joined with singing.

We would like to invite You to the next joint event of *36<sup>th</sup> Conference on Geometry and Graphics* and *25<sup>th</sup> Symposium on Computer Geometry SCG'2016* that will be held again together by representatives of both societies for geometry and graphics as *Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics* in Rožnov po Radhoštěm, Czech republic, September 15–19, 2016, in order to keep the good tradition of our common meetings deeply rooted in the history.

Bratislava & Plzeň, November 30, 2015

Daniela Velichová  
*chair of SSGG*

Miroslav Lávička  
*chair of ČSGG*

## PLENARY TALKS



# Minimization of the Container for Packing of Three Cubes in Dimension 4

**Vojtech Bálint, Peter Adamko**

*FPEDAS ŽU, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovak Republic*  
*email: balint@fpedas.uniza.sk, adamko@fpedas.uniza.sk*

**Abstract.** This contribution links on the results of Pavel Novotný on the problems of the densest packing of cubes into some box. Besides short historical overview this paper gives also two new results: minimal volume of box into which is possible to pack any two or three 4-dimensional cubes with total volume 1.

*Key words:* extremum, packing of cubes

**In memory of Pavel Novotný.** The older from authors of this paper brought intuitive geometry problems into Žilina in 1989. Originally, Paľko Novotný devoted to differential geometry, but he accedes to solution of nice problems of intuitive geometry immediately and reached quite a lot remarkable results. He has many genuine ideas that have emerged not only in his scientific papers, but also in the exercises which he created for the Mathematical Olympiad. Probably the best general characteristic of Paľko Novotný is correctness, which gave dominated throughout his professional and private life. Unfortunately, Paľko passed away on 2.2.2015. His work, however, remained and within our possibilities we will do everything we can to follow up on its results.

## 1 A little history

**Potato sack theorem** (Auerbach, Banach, Mazur and Ulam, *Lvov, Poland*, see *The Scottish Book* [10]): For every positive integer  $d$  and for every positive number  $V$  there is the number  $f_d(V)$  such that every system of  $d$  dimensional convex sets  $M_i$ ,  $i \in J$  with diameter at most 1 and with total volume at most  $V$  can be packed into the  $d$ -dimensional cube with edge length  $f_d(V)$ .

In connection with the previous theorem arises the following very natural but extremely difficult problem.

### Problem 1. What is the least possible value of the number $f_d(V)$ ?

The first upper estimate of the number  $f_d(V)$  for *parallel* packing of *rectangles* was found by Kosiński [9], improvements can be found e. g. in Groemer [4], Moon and L. Moser [12], Meir and L. Moser [11].

Creative urge for the research in this area add Leo Moser's collection of problems [13]. This collection later extended Leo's younger brother W. O. J. Moser [14]. In the same time arises also the very interesting problem book [3]. Extraordinarily valuable is the many times (in extended form) republished collection of problems [15], which was finally published as the

book [2] with the foreword of Pál Erdős – one of the greatest propagator of the intuitive geometry problems.

## 2 Dimension 2

One of the original Leo Moser's problems is the following:

**Problem 2.** Determine the least number  $A$  such that every system of squares with total area 1 can be parallelly packed into some rectangle of the area  $A$ .

Kleitman and Krieger [7] proved that every such finite system can be packed into the rectangle with sides of lengths 1 and  $\sqrt{3}$ . They later ([8], 1975) proved that rectangle with sides of lengths  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  and  $\sqrt{2}$  is sufficient, so

$A \leq \frac{4}{\sqrt{6}} \doteq 1.632\ 993\ 162$ . The lower bound  $A \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \doteq 1.207\ 106\ 781$  is trivial.

Denote  $A_n$  the least number such that every system of  $n$  squares with total area 1 can be packed into some rectangle with area  $A_n$ . The sequence  $(A_n)$  is obviously non-decreasing and  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . Trivially,  $A \geq A_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \doteq 1.207\ 106\ 781$ .

After twenty years Pavel Novotný (in [16], 1995) proved that  $A_3 \doteq 1.227\ 758\ 9$  and showed also a non-trivial lower bound  $A \geq \frac{2+\sqrt{3}}{3} > 1.244$ . This area is necessary for three squares with area 1/6 and one square with area 1/2. Later (in [18], 1999) he proved  $A_4 = A_5 = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ , and (in [19], 2002)  $A_6 = A_7 = A_8 = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ . On the basis of these results is maybe true the following

**Conjecture 1.**  $A = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ .

Kleitman's and Krieger's upper bound  $A \leq \frac{4}{\sqrt{6}} \doteq 1.632\ 993\ 162$  improved Novotný ([17], 1996) to  $A < 1.53$ . Novotný's upper bound was improved recently by Hougardy ([5], 2011) to  $A \leq \frac{2867}{2048} < 1.4$  using a computer. Also,

this upper bound is still far from hypothetically the best  $A = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \doteq 1.244\ 016\ 936$ .

So, problem 2 is still open with the exception of two cases (see [1]):

Given system of squares with sides of lengths  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  and total area 1. If  $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$  or  $x_1 \geq \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{3}} \doteq 0.869\ 472\ 865$  then this system can be packed into the rectangle of area  $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ .

### 3 Dimension 3

**Problem 3. What is the least number  $V_n(3)$  such that every system of  $n$  cubes with total volume 1 can be packed into some rectangular parallelepiped with volume  $V_n(3)$ ?**

Given a system of  $n$  cubes with sides of lengths  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  and total volume 1. Meir and L. Moser ([11], 1968) proved that  $V_n(3) \leq 4$ . After 43 years Pavel Novotný ([22], 2011) improved this estimate to  $V_n(3) \leq 2.26$ . In ([20], 2006) Novotný proved that  $V_2(3) = \frac{4}{3}$  (for  $x_1 = \sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ ,  $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ ) and  $V_3(3) \doteq 1.440\ 099\ 51$ . This value is the best, because this volume is necessary for cubes with edge lengths  $x_1 \doteq 0.850\ 849\ 56$ ,  $x_2 \doteq 0.635\ 937\ 94$ ,  $x_3 \doteq 0.502\ 451\ 41$ . Later ([21], 2007) Novotný proved that  $V_4(3) \doteq 1.519\ 630\ 3266$  and this is also the best, because this value is required for  $x_1 \doteq 0.820\ 068\ 594$ ,  $x_2 \doteq 0.584\ 631\ 1102$ ,  $x_3 = x_4 \doteq 0.499\ 112\ 082$ . In ([22], 2011) Novotný showed also the equality  $V_5(3) = V_4(3)$ . On the basis of these results is probably true the following

**Conjecture 2.**  $V_n(3) \doteq 1.519\ 630\ 3266$  for every positive integer  $n \geq 4$ .

### 4 Dimension 4

Denote  $V_n(d)$  the least number such that every system of  $n$  cubes with total volume 1 in  $d$ -dimensional (Euclidean) space can be packed into some rectangular parallelepiped with volume  $V_n(d)$ .

**Theorem 1.**  $V_2(4) \doteq 1.420\,319\,245$ .

**Proof.** Some considerations of compactness give the existence of the asked extremum. Two 4-dimensional cubes with edge lengths  $x, y$  such that  $1 \geq x \geq y \geq 0$  and with total volume  $x^4 + y^4 = 1$  can be packed into some rectangle of volume  $f(x, y) = x^3(x + y)$ . So, we are looking for the constrained maximum of the function  $f(x, y) = x^3(x + y)$  under the condition  $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ . Maximum is in the point which fulfills the system of equations

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{and} \quad g(x, y) = 0.$$

From the first equation we get  $0 = 4xy^3 + 3y^4 - x^4$ . Using the second equation and  $x^4 = t$  we get  $512t^4 - 1536t^3 + 1632t^2 - 688t + 81 = 0$ .

In consequence of  $\frac{1}{2} \leq x^4 = t$  we have  $t \doteq 0.910\,212\,695$ ,  $x \doteq 0.976\,755\,178$ ,  $y \doteq 0.547\,398\,666$ . Hence,  $V_2(4) \doteq 1.420\,319\,245$ . The proof is complete.

**Theorem 2.**  $V_3(4) \doteq 1.633\,696\,62$ .

**Sketch of the proof.** Let us take three 4-dimensional cubes with edge lengths  $1 \geq x \geq y \geq z \geq 0$  and total volume  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ . It is sufficient to consider two packings only:

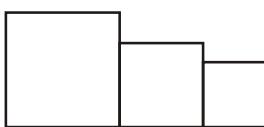


Fig. 1

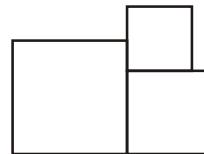


Fig. 2

Volume  $W_1 = x^3(x + y + z)$  is sufficient for the packing by Fig. 1, volume  $W_2 = x^2(x + y)(y + z)$  is sufficient for the packing by Fig. 2. We ask for  $\max \min \{W_1, W_2\}$ .

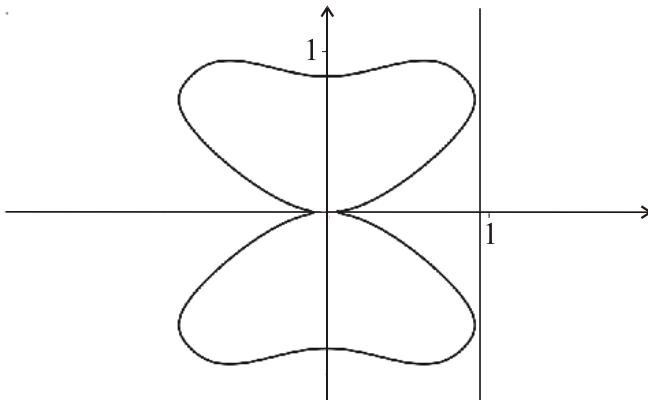
Observe that for three 4-dimensional cubes with edge lengths  $x \doteq 0.912\,366\,488$ ,  $y \doteq 0.671\,979\,213$  and  $z \doteq 0.566\,768\,345$  the equality  $W_1 = W_2 \doteq 1.633\,696\,62$  holds. So,  $V_3(4) \geq 1.633\,696\,62$ .

If  $x \geq \sqrt[4]{\frac{8}{9}}$ , then  $y + z \leq 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{y^4 + z^4}{2}} = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1-x^4}{2}} \leq 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{18}} = \sqrt[4]{\frac{8}{9}} \leq x$ . In the case  $y + z \leq x$  we pack the cubes by Fig. 2 and volume  $V_2(4) \doteq 1.42 < 1.6$  is sufficient. Trivially,  $x^4 \geq \frac{1}{3}$ , so  $x \geq \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \doteq 0.759\,835\,685$ . We have shown that maximum is possible only for

$$0.759\,835\,685 \doteq \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \leq x \leq \sqrt[4]{\frac{8}{9}} \doteq 0.970\,983\,543 \text{ and } y + z > x.$$

Equality  $W_1 = W_2$  holds if and only if  $x^2 = y(y+z)$ ; from this  $z = \frac{x^2 - y^2}{y}$  and  $W_1 = W_2 = \frac{x^5}{y} + x^4$ . Substitute  $z = \frac{x^2 - y^2}{y}$  into  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ , we get

$$C: 0 = x^4 y^4 + y^8 - y^4 + (x^2 - y^2)^4. \text{ (The curve } C \text{ is on the Fig. 3)}$$



**Fig. 3. The curve  $C$ .**

We strengthen the estimates  $x \in \langle 0.759; 0.971 \rangle$ . Choose  $x \in \langle a; b \rangle$  arbitrarily; then the function  $W_1 = x^3(x+y+z)$  has the greatest value if  $y = z$ . In this case the equation  $1 - x^4 = y^4 + z^4 = 2y^4$  holds and hence,  $W_1$

will be maximal if  $y = \sqrt[4]{\frac{1-x^4}{2}}$ . From the inequality  $2y^4 \leq 1-a^4$  then we get

$$W_1 \leq x^3(x+2y) \leq b^3 \left( b + 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1-a^4}{2}} \right).$$

$$\text{Let us denote } W1(\langle a; b \rangle) = b^3 \left( b + 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1-a^4}{2}} \right).$$

We easily verify the inequality  $W1(\langle a; b \rangle) < 1.633\ 6966$  for  $x \in \langle 0.759835; 0.879742 \rangle$ ,  $x \in \langle 0.879742; 0.900312 \rangle$ ,  $x \in \langle 0.900312; 0.906452 \rangle$ ,  $x \in \langle 0.906452; 0.90855 \rangle$ ,  $x \in \langle 0.90855; 0.9093 \rangle$ . So, for the asked maximum we have  $x \geq 0.9093$ .

Now, we define algorithm ALW2, which for given interval  $\langle a; b \rangle$  assigns successively the numbers  $y_0 = \sqrt[4]{1-a^4}$ ,  $z_0 = \frac{1.633\ 6966}{b^2(b+y_0)} - y_0$ , and if  $z_i \leq y_i$  then  $y_{i+1} = \sqrt[4]{1-a^4 - z_i^4}$ ,  $z_{i+1} = \frac{1.633\ 6966}{b^2(b+y_{i+1})} - y_{i+1}$ . The meaning of algorithm ALW2 is the following.

For every  $x \in \langle a; b \rangle$  the inequality  $y \leq \sqrt[4]{1-a^4} = y_0$  holds, and therefore,  $W_2 = x^2(x+y)(y+z) \leq b^2 \cdot (b+y_0) \cdot (y_0+z)$ . Now, for every  $z \geq 0$  such that  $z \leq \frac{1.633\ 6966}{b^2(b+y_0)} - y_0 = z_0$  we have  $W_2 \leq b^2 \cdot (b+y_0) \cdot (y_0+z) \leq 1.633\ 6966$ . So, the maximum cannot be achieved for  $z < z_0$ .

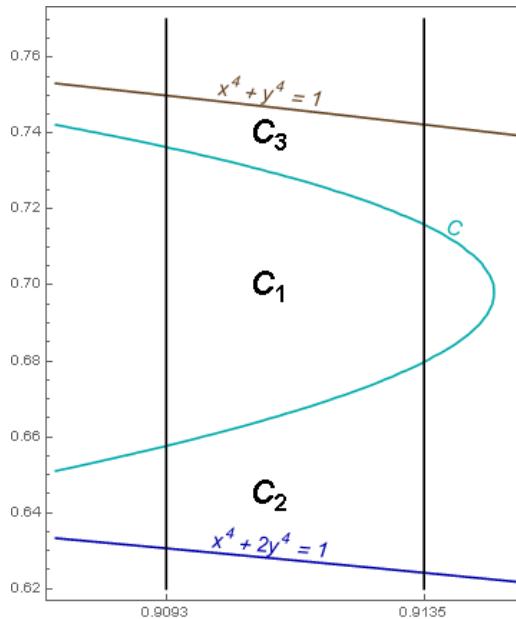
Further, let  $z \geq z_0$ . Now  $y^4 = 1-x^4-z^4 \leq 1-a^4-z_0^4$ , hence  $y \leq \sqrt[4]{1-a^4-z_0^4} = y_1$ . From this  $W_2 \leq b^2 \cdot (b+y_1) \cdot (y_1+z) < 1.633\ 6966$  for every  $z \leq \frac{1.633\ 6966}{b^2(b+y_1)} - y_1 = z_1$ . So, the maximum cannot be achieved for  $z < z_1$ .

If we take  $x \in \langle 0.956; 0.971 \rangle$  the ALW2 determines the sequence  $y_0 = 0.637\ 070\ 117$ ,  $z_0 = 0.440\ 456\ 392$ ;  $y_1 = 0.597\ 066\ 844$ ,  $z_1 = 0.507\ 948\ 664$ ;  $y_2 = 0.559\ 723\ 504$ ,  $z_2 = 0.572$ . Because  $z_2 > y_2$ , the maximum can not be achieved for  $x \in \langle 0.956; 0.971 \rangle$ .

Using ALW2 e. g. for intervals  $\langle 0.947; 0.956 \rangle$ ;  $\langle 0.94; 0.947 \rangle$ ;  $\langle 0.932; 0.94 \rangle$ ;  $\langle 0.9268; 0.932 \rangle$ ; ... ;  $\langle 0.91382; 0.91411 \rangle$ ;  $\langle 0.91359; 0.91382 \rangle$ ;  $\langle 0.91341; 0.91359 \rangle$  we get that the maximum cannot be achieved for  $x \geq 0.9135$ .

So, the maximum will be reached for  $x \in \langle 0.9093; 0.9135 \rangle$ .

Consider the closed region  $M$  determined by inequalities  $0.9093 \leq x \leq 0.912\ 85$ ,  $x^4 + y^4 \leq 1$ ,  $x^4 + 2y^4 \geq 1$ . The curve  $C$  divides the region  $M$  on three open regions  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , (see Fig. 4).



**Fig. 4. Regions  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .**

Denote by  $\bar{C}_i$  the closure of the set  $C_i$ . Functions  $W_1$ ,  $W_2$  are continuous on  $M$ , the equality  $W_1 = W_2$  holds just in the points of curve  $C$ .

Since  $W_1(0.91; 0.67) < W_2(0.91; 0.67)$ , the inequality  $W_1(X) < W_2(X)$  holds in every point  $X \in C_1$ . Analogously,  $W_1(X) > W_2(X)$  holds in every point  $X \in C_2$  and  $W_1(X) > W_2(X)$  in every point  $X \in C_3$ .

So, the asked maximum is one of the numbers

$$\max_{X \in \bar{C}_1} \min\{W_1(X), W_2(X)\} = \max_{X \in \bar{C}_1} W_1(X),$$

$$\max_{X \in \bar{C}_2} \min\{W_1(X), W_2(X)\} = \max_{X \in \bar{C}_2} W_2(X),$$

$$\max_{X \in \bar{C}_3} \min\{W_1(X), W_2(X)\} = \max_{X \in \bar{C}_3} W_2(X).$$

On the compact set  $\bar{C}_1 \cup \bar{C}_3$  the function  $W_1 = x^3(x + y + \sqrt[4]{1 - x^4 - y^4})$  must achieve his maximum in some point  $B$ . Obviously,

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1 - x^4 - y^4)^3}} \left( \sqrt[4]{(1 - x^4 - y^4)^3} - y^3 \right).$$

Equality  $2y^4 = 1 - x^4$  holds if and only if  $y = z$ . Points of the curve  $2y^4 = 1 - x^4$  do not belong to the region  $\bar{C}_1 \cup \bar{C}_3$ . So,  $y^4 > 1 - x^4 - y^4$ , and therefore  $y > \sqrt[4]{1 - x^4 - y^4}$ . Hence,  $\frac{\partial W_1}{\partial y} < 0$  in every inner point of the region  $\bar{C}_1 \cup \bar{C}_3$ . So, the point  $B$  must lie on the curve  $C$ .

Obviously, for all  $[x, y] \in \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle$  the inequality  $z \leq \sqrt[4]{1 - a^4 - c^4}$  holds, and so

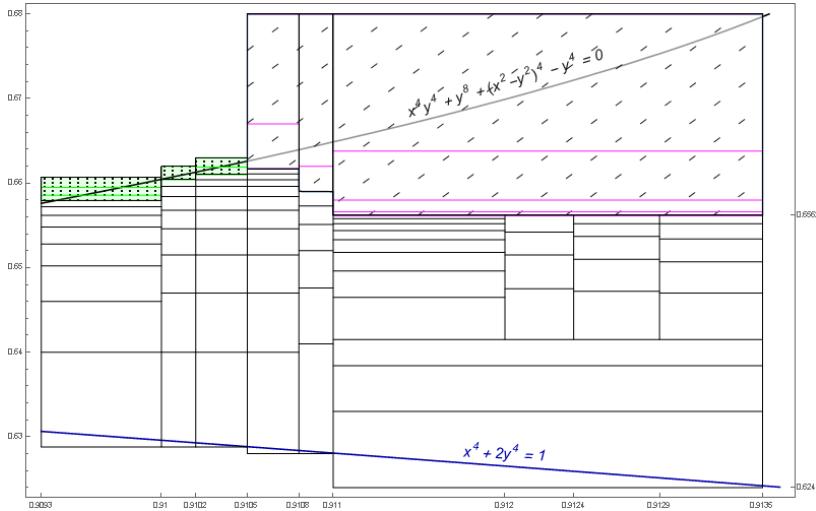
$$W_1 = x^3(x + y + z) \leq b^3(b + d + \sqrt[4]{1 - a^4 - c^4}),$$

$$W_2 = x^2(x + y)(y + z) \leq b^2(b + d)(d + \sqrt[4]{1 - a^4 - c^4}).$$

Let us denote

$$W11(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle) = b^3(b + d + \sqrt[4]{1 - a^4 - c^4}),$$

$$W22(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle) = b^2(b + d)(d + \sqrt[4]{1 - a^4 - c^4}).$$



**Fig. 5. Deleted regions: clear using W22, dotted using W11.**

We easily check the inequality  $W22(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle) < 1.633\ 6966$  for  $x \in \langle 0.9093; 0.91 \rangle$  and (successively) for  $y \in \langle 0.6288; 0.64 \rangle, \langle 0.64; 0.646 \rangle, \dots, \langle 0.6572; 0.65795 \rangle$ .

Analogously, we verify the inequality  $W11(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle) < 1.633\ 6966$  for  $x \in \langle 0.9093; 0.91 \rangle$  and successively for  $y \in \langle 0.65795; 0.65856 \rangle, \dots, \langle 0.65948; 0.6607 \rangle$ .

Hence, the maximum cannot be achieved on  $\langle 0.9093; 0.91 \rangle \times \langle 0.6288; 0.6607 \rangle$ . (Fig. 5, 1.column from the left).

Analogously for other columns – see Fig. 5.

$$W_2 = x^2(x+y)\left(y + \sqrt[4]{1-x^4-y^4}\right),$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt[4]{(1-x^4-y^4)^3}} \left( (3x+2y)[y\sqrt[4]{(1-x^4-y^4)^3} + 1 - y^4] - 4x^5 - 3x^4y \right).$$

If  $(3x+2y)[y\sqrt[4]{(1-x^4-y^4)^3} + 1 - y^4] - 4x^5 - 3x^4y$  is negative, then  $\frac{\partial W_2}{\partial x} < 0$ .

Define the number

$$AL\delta(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle) = (3b + 2d)[d^4 \sqrt[4]{(1 - a^4 - c^4)^3} + 1 - c^4] - a^4(4a + 3c).$$

Obviously, for all  $[x, y] \in \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle$  the inequality

$$(3x + 2y)[y^4 \sqrt[4]{(1 - x^4 - y^4)^3} + 1 - y^4] - 4x^5 - 3x^4y \leq AL\delta(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle)$$

holds.

We easily certify the inequality  $AL\delta(\langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle) < 0$  for  $x \in \langle 0.9105; 0.9108 \rangle$  and successively for  $y \in \langle 0.6617; 0.667 \rangle$ ,  $y \in \langle 0.667; 0.68 \rangle$ . Hence,  $\frac{\partial W_2}{\partial x} < 0$  for all interior points of  $\langle 0.9105; 0.9108 \rangle \times \langle 0.6617; 0.68 \rangle$ . (Hatched regions on the Fig. 5, 4<sup>th</sup> column from the left.)

Analogously for other hatched regions on the Fig. 5. So we have  $\frac{\partial W_2}{\partial x} < 0$  for all interior points of stairs area on Fig. 5. Maximum cannot be achieved in any point  $U$  of the (open) region  $C_2$ , because on the left from  $U$  there are larger values. So, function  $W_2$  on the compact set  $\bar{C}_2$  must achieve its maximum in some point of the curve  $C$ . Obviously, it is the same point  $B$ . We ask constrained maximum of the function

$$W(x, y) = \frac{x^5}{y} + x^4, \quad x \in \langle 0.9105; 0.9135 \rangle$$

on the curve

$$C(x, y) \equiv x^4 y^4 + y^8 - y^4 + (x^2 - y^2)^4 = 0.$$

System of equations

$$\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad C(x, y) = 0$$

has the form

$$8y^9 + 10xy^8 + 4x^4y^5 + 6x^5y^4 - 5xy^4 - 4y^5 + 2(x^2 - y^2)^3[x^3 - 5xy^2 - 4y^3] = 0,$$

$$x^4y^4 + y^8 - y^4 + (x^2 - y^2)^4 = 0$$

and solution

$$x \doteq 0,912\,366\,488, \quad y \doteq 0,671\,979\,213. \quad \text{Sketch of the proof is complete.}$$

Note that in Januszewski's work [6] from February 2015 some papers of Novotný were cited. This shows that these packing problems are still trendy.

## References

- [1] BÁLINT, V. Dva typy najlepších uložení systému štvorcov v obdĺžniku. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2011, ISBN 978-80-227-3580-3, p. 13 – 16.
- [2] BRASS, P., MOSER, W. O. J., PACH, J. *Research Problems in Discrete Geometry*. New York: Springer, 2005. ISBN-10: 0-387-23815-8. ISBN-13: 978-0387-23815-8.
- [3] CROFT, H. T., FALCONER, K. J., GUY, R. K. *Unsolved Problems in Geometry*. New York: Springer, 1991.
- [4] GROEMER, H. Covering and packing properties of bounded sequences of convex sets. In *Mathematica* 29 (1982), p. 18 – 31.
- [5] HOUGARDY, S. On Packing Squares into a Rectangle. *Report No 101007*, Research Institute for Discrete Mathematics, Univ. of Bonn, March 2010. Also in *Computational Geometry* 44 (8) (2011), p. 456 – 463.
- [6] JANUSZEWSKI, J. Packing rectangles into a large square. In *Periodica Math. Hung.* (2015) DOI 10.1007/s10998-015-0083-2.
- [7] KLEITMAN, D. J., KRIEGER, M. M. Packing squares into a rectangle. In *Ann. New York Acad. Sci.* 175 (1970), p. 253 – 262.
- [8] KLEITMAN, D. J., KRIEGER, M. M. An optimal bound for two dimensional bin packing. In *Proceedings FOCS 1075, IEEE Computer Soc.*, 1975, p. 163 – 168.
- [9] KOSIŃSKI, A. A proof of the Auerbach-Banach-Mazur-Ulam theorem on convex bodies. *Colloquium Mathematicum* 4 (1957), 216 – 218.
- [10] MAULDIN, R. D., The Scottish Book. Birkhäuser 1981.
- [11] MEIR, A., MOSER, L. On packing of squares and cubes. In *J. Comb. Theory* 5 (1968), p. 126 - 134.
- [12] MOON, J., MOSER, L. Some packing and covering theorems. In *Colloquium Mathematicum*, 17 (1) (1967), pp. 103-110.
- [13] MOSER, L. Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry. *Mimeographed*, 1966. Reprinted in [19] and also in [20].
- [14] MOSER, W. Problems, problems, problems. In *Discrete Applied Mathematics* 31 (1991), p. 201 – 225.
- [15] MOSER, W. O. J., PACH, J. *Research Problems in Discrete Geometry*. Privately published collection of problems. Montreal: McGill University, 1994.
- [16] NOVOTNÝ, P. A note on packing of squares. In Studies of University of Transport and Communications in Žilina, Math-Phys. series 10 (1995), p. 35 – 39.
- [17] NOVOTNÝ, P. On packing of squares into a rectangle. In *Archivum Mathematicum (Brno)* 32 (2) (1996), p. 75 – 83.

- [18] NOVOTNÝ, P. On packing of four and five squares into a rectangle. In *Note di Matematica* 19 (1999), p. 199 – 206.
- [19] NOVOTNÝ, P. Využitie počítača pri riešení ukladacieho problému. In *Proceedings of Symposium on Computational Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2002, ISBN 80-227-1773-8, p. 60 – 62.
- [20] NOVOTNÝ, P. Pakovanie troch kociek. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2006, ISBN 80-227-2489-0, p. 117 – 119.
- [21] NOVOTNÝ, P. Najhoršie pakovateľné štyri kocky. In: *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2007, ISBN 978-80-227-2734-1, p. 78 – 81.
- [22] NOVOTNÝ, P. Ukladanie kociek do kvádra. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2011, ISBN 978-80-227-3580-3, p. 100 – 103.

# Biracionálne korešpondencie; istý špeciálny prípad

## Birational correspondences; a particular case

Ján Čižmár

*Astrová 16, 821 01 Bratislava 2, Slovak Republic  
email: Jan.Cizmar@hotmail.com*

**Abstract.** This paper brings basic concepts of the theory of birational correspondences in a projective space: definition of a correspondence, a rational map associated with the correspondence, an inverse map, fundamental variety, the set of irregular points, the set of biregular points, the homaloid system. The theory is applied to the following case: In a  $n$ -dimensional projective space  $P^n(k)$  ( $n \geq 2$ ) over an algebraically closed field  $k$  these objects are given: a regular hyperquadric  $Q$ , a point  $O$  outside  $Q$  and a quantity  $\lambda$ ,  $\lambda \neq 0, 1, -1$ . Points  $(u), (u')$  of the space  $P^n(k)$  are in a correspondence  $\mathcal{T}$  if the points  $O, (u), (u')$  are collinear and the cross-ratio  $((^1r)(^2r)(u)(u')) = \lambda$ ,  $(^1r), (^2r)$  being intersection points of the straight line  $O(u)$  with  $Q$ . The standard objects of the correspondence are found.

**Keywords:** Birational correspondence, fundamental variety, the set of irregular points, the set of biregular points, rational map, inverse map, hyperquadric, cross-ratio, system of homaloids

**Kľúčové slová:** Biracionálna korešpondencia, fundamentálna varieta, množina iregulárnych bodov, množina biregulárnych, racionálne zobrazenie, inverzné zobrazenie, nadkvadrika, dvojpomer, homaloidný systém

### 1 Úvod

Nelineárne zobrazenia v geometrických priestoroch nepatria k často frekventovaným tématom vysokoškolského matematického vzdelávania matematikov-odborníkov ani učiteľov matematiky. Kružnicová inverzia podstatou známa už Apollonovi (3. st. p. n. l.) začala byť zaradovaná do štandardu elementárneho geometrického vzdelávania na vysokých školách od druhej štvrtiny 19. storočia a bola po niekoľko desaťročí fakticky jediným príkladom na metriku založenej ekviformnej transformácii v möbiuskej rovine, resp. v möbiuskom priestore.

V 60. rokoch 19. storočia sa začala hlavne zásluhou Luigiho Cremonu (1830 – 1903) formovať teória biracionálnych zobrazení (korešpondencií) najmä s cieľom redukovať pomocou týchto zobrazení počet a zložitosť singularít rovinných algebrických kriviek v reálnej, resp. v komplexnej projektívnej rovine, resp. singularity algebrických plôch v reálnom alebo komplexnom projektívnom trojrozmernom priestore.

Základné pojmy biracionálnych zobrazení (korešpondencií) si najprv osvetlíme na jednoduchom príklade kvadratickej biracionálnej korešpondencie projektívnych rovín.

Nech  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^2(C)$ ,  $\mathbf{P}'^2 = \mathbf{P}'^2(C)$  sú dve projektívne roviny (nemusia byť rôzne) nad poľom komplexných čísel s pevnými sústavami súradníc  $S^2$ ,  $S'^2$ .

*Racionálnym zobrazením* druhého stupňa (*kvadratickým racionálnym zobrazením*) z roviny  $\mathbf{P}^2$  do roviny  $\mathbf{P}'^2$  sa nazýva zobrazenie  $\varphi: \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}'^2$ , ktoré *temer každému* bodu  $(x) \in \mathbf{P}^2$  pripráduje bod  $(x') \in \mathbf{P}'^2$  tak, že

$$x'_0 = x_1 x_2, x'_1 = x_0 x_2, x'_2 = x_0 x_1. \quad (1)$$

Obraz bodu  $(x) \in \mathbf{P}^2$  existuje práve vtedy, keď aspoň dve súradnice bodu  $(x)$  sa nerovnajú 0, t. j. keď bod  $(x)$  je rôzny od všetkých vrcholov  $O_0 = (1, 0, 0)$ ,  $O_1 = (0, 1, 0)$ ,  $O_2 = (0, 0, 1)$  sústavy súradníc  $S^2$ . V bodoch  $O_0$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  zobrazenie  $\varphi$  nie je definované, lebo dosadenie súradníc každého z bodov  $O_0$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  do rovníc (1) dáva v každom z týchto prípadov výsledok  $x'_0 = 0$ ,  $x'_1 = 0$ ,  $x'_2 = 0$ , čo nedáva bod, lebo v projektívnej rovine aspoň jedna z homogénnych súradníc každého bodu je rôzna od nuly.

Body  $O_0$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ , v ktorých zobrazenie  $\varphi$  nie je definované, sa nazývajú *fundamentálnymi bodmi* zobrazenia  $\varphi$ .

Prečo sa zobrazenie  $\varphi$  nazýva *racionálnym zobrazením*? Pri prechode od homogénnych súradníc  $x_0, x_1, x_2$  k nehomogénnym súradniciam  $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$

rovnice (1) nadobúdajú tvar

$$x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}, \quad (1')$$

čo odôvodňuje prílastok *racionálne*.

K racionálnemu zobrazeniu  $\varphi$  existuje inverzné racionálne zobrazenie  $\varphi^{-1}: \mathbf{P}'^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$  určené rovnicami

$$x_0 = x'_1 x'_2, x_1 = x'_0 x'_2, x_2 = x'_0 x'_1 \quad (2)$$

Lahko sa možno presvedčiť, že a) zobrazenie  $\varphi^{-1}$  je racionálne a b) jeho fundamentálnymi bodmi sú vrcholy  $O'_0, O'_1, O'_2$  sústavy súradníc  $S'^2$  v rovine  $\mathbf{P}'^2$ .

Čo je vzorom  $\varphi^{-1}(O'_i)$  fundamentálneho bodu  $O'_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , v zobrazení  $\varphi$ ? Je to množina všetkých bodov  $(y) = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{P}^2$ , pre ktoré  $\varphi(y) = O'_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Je zrejmé, že je to množina všetkých bodov súradnicovej osi  $o_i = O_j O_k$  ( $i \neq j \neq k \neq i$ ) s výnimkou fundamentálnych bodov  $O_j, O_k$  (pre ktoré neexistujú obrazy v zobrazení  $\varphi$ ), t. j. množina všetkých bodov tvaru  $(y) = t_0 O_j + t_1 O_k$ ;  $t_0, t_1 \in \mathbf{C}$ ,  $t_0 \neq 0, t_1 \neq 0$ . Vo všetkých týchto bodoch je zobrazenie  $\varphi$  definované (inými slovami – *regulárne*), v obrazoch  $\varphi(y)$  všetkých týchto bodov inverzné zobrazenie  $\varphi^{-1}$  nie je definované. Všetky tieto body množiny

$\bigcup_{i=0}^2 o_i \setminus \bigcup_{i=0}^2 O_i$  sa nazývajú *iregulárnymi bodmi* racionálneho zobrazenia  $\varphi$ .

Množina bodov  $U = \mathbf{P}^2 \setminus \bigcup_{i=0}^2 o_i$  má túto vlastnosť: V každom bode  $(y) \in U$  zobrazenie  $\varphi$  je definované a v každom bode  $\varphi(y) \in \mathbf{P}^{*2}$  je definované inverzné zobrazenie  $\varphi^{-1}$ ; platí  $\varphi^{-1}(\varphi(y)) = (y)$ . Každý bod s takouto vlastnosťou, t. j. že je v ňom definované zobrazenie  $\varphi$  a v jeho obraze je definované zobrazenie  $\varphi^{-1}$ , sa nazýva *biregulárnym bodom* biracionálnej korešpondencie  $(\varphi, \varphi^{-1})$ . (Biregulárnym bodom korešpondencie sa nazýva aj každý bod  $(y') \in \mathbf{P}^{*2}$ , pre ktorý existuje obraz  $\varphi^{-1}(y')$  a  $\varphi(\varphi^{-1}(y')) = (y')$ .)

Teda vzhľadom na racionálne zobrazenie  $\varphi$  sú všetky body roviny  $\mathbf{P}^2$  rozdelené do troch tried:

1. Množina všetkých fundamentálnych bodov  $F = \{O_0, O_1, O_2\}$ ;
2. Množina všetkých iregulárnych bodov  $J = \bigcup_{i=0}^2 o_i \setminus F$ ;
3. Množina všetkých biregulárnych bodov  $U = \mathbf{P}^2 \setminus J$ .

Analogický je aj rozklad všetkých bodov roviny  $\mathbf{P}^{*2}$  vzhľadom na inverzné racionálne zobrazenie  $\varphi^{-1}$ .

Každá priamka  $p$  roviny  $\mathbf{P}^2$  rôzna od každej osi sústavy súradníc  $S^2$  má rovnici

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0; a_i \in \mathbf{C}, i = 0, 1, 2, \quad (3)$$

v ktorej aspoň dva z koeficientov  $a_0, a_1, a_2$  sú rôzne od nuly. Obrazom priamky  $m$  v zobrazení  $\varphi$  je množina všetkých bodov v  $\mathbf{P}^{*2}$ , ktorých súradnice vyhovujú rovnici

$$a_0x'_1x'_2 + a_1x'_0x'_2 + a_2x'_0x'_1 = 0. \quad (4)$$

(4) je rovnica kužeľosečky obsahujúcej množinu fundamentálnych bodov  $F' \subset \mathbf{P}^{*2}$ .

Ak napr.  $a_0 = 0$ , t. j. priamka  $m$  incideje s bodom  $O$ , obrazom priamky  $m$  je kužeľosečka v  $\mathbf{P}^{*2}$  vyjadrená rovnicou

$$x'_0(a_1x'_2 + a_2x'_1) = 0, \quad (5)$$

čo je singulárna kužeľosečka zložená zo súradnicovej osi  $o'_0$  a z priamky incidujúcej s bodom  $O'_0$ . Obraz každej priamky  $m \subset \mathbf{P}^2$  v zobrazení  $\varphi$  sa nazýva *homaloidom* roviny  $\mathbf{P}^{*2}$ ; množina všetkých homaloidov roviny  $\mathbf{P}^{*2}$  sa nazýva systémom homaloidov alebo homaloidným systémom. Analogicky existuje systém homaloidov v rovine  $\mathbf{P}^2$  vzhľadom na zobrazenie  $\varphi^{-1}$ .

## 2 Biracionálne zobrazenie $n$ -rozmerného projektívneho priestoru $P^n(k)$

Nech  $P^n = P^n(k)$ ,  $P'' = P''(k)$  sú  $n$ -rozmerné projektívne priestory ( $n \geq 2$ ) nad algebrickým uzavretým poľom  $k$  charakteristiky 0, nech  $S^n$ , resp.  $S''$  je pevná projektívna sústava súradníc v  $P^n$ , resp. v  $P''$  a nech  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  sú homogénne polynómy (formy) stupňa  $m$  ( $m \geq 2$ ) v  $n + 1$  neurčitých  $T_0, T_1, \dots, T_n$  bez spoločného homogénneho činiteľa stupňa  $r \geq 1$ .

Zobrazenie  $\varphi$ :

$P^n \rightarrow P''$  definované pre temer všetky body  $(x) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in P^n$  priradením  $(x) \rightarrow (x') = \varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in P''$  sa nazýva *racionálnym zobrazením* z priestoru  $P^n$  do priestoru  $P''$ . (Formulácia „pre temer všetky body priestoru  $P^n$  platí ...“ znamená, že existuje podmnožina  $M \subset P^n$ , uzavretá v Zariského topológiu priestoru  $P^n$ , pre body ktorej *neplatí* ...). Odôvodnenie názvu *racionálne* zobrazenie je obdobné ako v prípade (1) pre kvadratické zobrazenie.

Ak existujú homogénne polynómy  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$  toho istého stupňa  $r$  ( $r \geq 2$ ) v  $n + 1$  neurčitých  $T_0, T_1, \dots, T_n$  bez spoločného homogénneho činiteľa stupňa  $h$  ( $h \geq 1$ ) s vlastnosťou, že zobrazenie  $\psi : P'' \rightarrow P^n$  priraďujúce temer každému bodu  $(x') = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \in P''$  bod  $\psi(x') = (\psi_0(x'), \psi_1(x'), \dots, \psi_n(x')) \in P^n$  a  $\psi(\varphi(x)) = (x)$  pre každý bod  $(x) \in P^n$ , pre ktorý je definovaný obraz  $\varphi(x)$  aj obraz  $\psi(\varphi(x))$  bodu  $\varphi(x)$ , nazýva sa zobrazenie  $\psi$  zobrazením *inverzným* k zobrazeniu  $\varphi$ ; píšeme:  $\psi = \varphi^{-1}$ . Platí:  $\psi \circ \varphi = I_U$ ,  $\varphi \circ \psi = I_{U'}$ , kde  $I$  označuje identické zobrazenie,  $U \subset P^n$ , resp.  $U' \subset P''$  – istú podmnožinu otvorenú v Zariského topológiu priestoru  $P^n$ , resp.  $P''$ . To teda znamená, že  $\psi^{-1} = \varphi$  na podmnožine, na ktorej sú definované obe zobrazenia súčasne. – Ďalší text sa zaobráva len prípadmi, ked' existuje zobrazenie inverzné k danému.

Uzavretá množina  $V(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  priestoru  $P''$  tvorená všetkými koreňmi  $(y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$  homogénneho ideálu  $(\varphi_0(T), \varphi_1(T), \dots, \varphi_n(T)) \subset \subset k[T_0, T_1, \dots, T_n]$  je práve množinou všetkých bodov priestoru  $P^n$ , v ktorých zobrazenie  $\varphi$  nie je definované. Táto množina sa nazýva *fundamentálnou varietou* zobrazenia  $\varphi$  a každý jej bod sa nazýva *fundamentálnym bodom* zobrazenia  $\varphi$ . Táto varietu je vzorom  $\varphi^{-1}(\emptyset)$  práznej podmnožiny  $\emptyset$  priestoru  $P^n$  v zobrazení  $\varphi$ . Fundamentálnou varietou  $F' \subset P''$  zobrazenia  $\psi$  je uzavretá množina všetkých koreňov  $V(\psi_0(T), \psi_1(T), \dots, \psi_n(T))$  homogénneho ideálu  $(\psi_0(T), \psi_1(T), \dots, \psi_n(T)) \subset k[T_0, T_1, \dots, T_n]$ . Vzor  $\varphi^{-1}(F')$  fundamentálnej varietu  $F' \subset P''$  zobrazenia  $\psi$  je množina  $J \subset P^n$  všetkých tých bodov, v ktorých zobrazenie  $\varphi$  je definované a ich obrazy zobrazením  $\varphi$  tvoria fundamentálnu varietu  $F'$ . Množina  $J$  má názov *množina iregulárnych bodov* zobrazenia  $\varphi$ . Analogicky  $\psi^{-1}(F)$  je množina všetkých tých bodov  $J' \subset P''$ , v ktorých zobrazenie  $\psi$  je definované a obrazy všetkých týchto bodov v zobrazení  $\psi$  tvoria varietu  $F$ . Množina  $J'$  sa nazýva *množinou iregulárnych bodov* zobrazenia  $\psi$ .

V každom bode množiny  $U = \mathbf{P}^n \setminus (F \cup J)$  je zobrazenie  $\varphi$  definované a množina  $U' = \varphi(U) \subset \mathbf{P}^m$  je množinou všetkých tých bodov, ktoré nie sú ani fundamentálnymi, ani iregulárnymi bodmi zobrazenia  $\psi$ . Pre každý bod  $(x) \in U$  je dvojica  $((x), \varphi(x))$  zároveň dvojicou  $(\psi(y), (y))$  s vlastnosťou  $(y) \in U'$ . Medzi množinami  $U, U'$  existuje teda *bijekcia*  $\varphi|U$  s vlastnosťou  $\psi|U' = \varphi^{-1}|U'$  a  $\psi^{-1}|U = \varphi|U$ . Dvojica  $(\varphi, \psi)$  sa nazýva *biracionálnym zobrazením* priestoru  $\mathbf{P}^n$  do priestoru  $\mathbf{P}^m$  a obrátene, alebo *biracionálnou korešpondenciou* medzi priestormi  $\mathbf{P}^n$  a  $\mathbf{P}^m$ . V tejto korešpondencii si korešpondujú dvojice množín  $(F, J')$  a  $(J, F')$ . V každom bode  $(x)$  množiny  $U$  je definované zobrazenie  $\varphi$  aj zobrazenie  $\psi^{-1}$  a  $\varphi(x) = \psi^{-1}(x)$ , a takisto v každom bode  $(y) \in U'$  je definované zobrazenie  $\psi$  aj zobrazenie  $\varphi^{-1}$  a  $\psi(y) = \varphi^{-1}(y)$ . Hovorí sa, že medzi bodmi  $(x), \varphi(x)$  a taktiež medzi bodmi  $(y), \psi(y)$  existuje vzájomne jednoznačná korešpondencia. Všetky body tohto druhu sa nazývajú *biregulárnymi bodmi* v biracionálnej korešpondencii  $(\varphi, \psi)$ .

Korešpondenciou (v biracionálnej korešpondencii medzi priestormi  $\mathbf{P}^n$  a  $\mathbf{P}^m$ ) sa nazýva aj vzťah medzi každým bodom  $(x)$  fundamentálnej variety  $F$  a všetkými bodmi  $(y)$  množiny iregulárnych bodov  $J' \subset \mathbf{P}^m$ , pre ktoré  $\psi(y) = (x)$ , a taktiež aj vzťah medzi každým fundamentálnym bodom  $(y) \in F'$  a všetkými bodmi  $(x) \in J \subset \mathbf{P}^n$ , pre ktoré  $\varphi(x) = (y)$ . V prvom prípade sa aj hovorí, že bod  $(x)$  korešponduje s každým bodom množiny  $\psi^{-1}(x)$ , v druhom prípade bod  $(y)$  korešponduje s každým bodom množiny  $\varphi^{-1}(y)$ .

Nech

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n = 0 \quad (6)$$

je všeobecná rovnica nadroviny, v ktorej všetky koeficienty  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sú algebrický nezávislý neurčité nad poľom  $k$ . Rovnica každej nadroviny priestoru  $\mathbf{P}^n$  sa dostane špecializáciou  $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ , kde  $a_i \in k$ . Nech  $\alpha \subset \mathbf{P}^n$  je nadrovina s rovnicou

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0. \quad (6')$$

Nadrovina  $\alpha$  je určená  $n$  lineárne nezávislými bodmi priestoru  $\mathbf{P}^n$ , ktoré možno vybrať tak, aby boli biregulárnymi bodmi zobrazenia  $\varphi$ . Korešpondujúcim útvaram nadroviny  $\alpha$  v korešpondencii  $\varphi$  je nadplocha  $H^\alpha \subset \mathbf{P}^m$  stupňa  $r$  s rovnicou

$$a_0 \psi_0(x') + a_1 \psi_1(x') + \dots + a_n \psi_n(x') = 0. \quad (7)$$

Nadplocha  $H^\alpha$  je určená  $n$  biregulárnymi bodmi, ktoré sú obrazmi  $n$  lineárne nezávislých biregulárnych bodov generujúcich v priestore  $\mathbf{P}^n$  nadrovinu  $\alpha$ .

Pretože nadplocha stupňa  $r$  je v priestore  $\mathbf{P}^m$  jednoznačne určená  $\left[ \binom{n+r}{r} - 1 \right]$

bodmi nezávislými pre určenie nadplochy, musí  $\left[ \binom{n+r}{r} - n - 1 \right]$  týchto bodov byť zastúpených fundamentálou varietou  $F'$ , ktorá je podmnožinou bodov všetkých nadplôch stupňa  $r$  korešpondujúcich so všetkými nadrovinami

priestoru  $\mathbf{P}^n$ . Každá takáto nadplocha stupňa  $r$  s rovnicou tvaru (7) sa nazýva *homaloidom* priestoru  $\mathbf{P}^n$  alebo prvkom *homaloidného systému* tohto priestoru. Homaloidný systém je  $n$ -rozmerný lineárny systém nadplôch, ktorého základnými (generujúcimi) nadplochami je  $(n + 1)$  nadplôch definovaných rovnicami  $\psi_i(x') = 0, i = 0, 1, \dots, n$ .

Analogicky vzniká homaloidný systém v priestore  $\mathbf{P}^n$ ; jeho základnými prvkami sú nadplochy stupňa  $m$  určené rovnicami  $\phi_i(x) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ .

V prípade, keď  $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^n$ , hovoríme o biracionálnej korešpondencii, resp. o biracionálnom zobrazení alebo biracionálnej transformácii priestoru  $\mathbf{P}^n$  (alebo v priestore  $\mathbf{P}^n$ ). Je zrejmé, že v tomto prípade vznikajú vo všeobecnosti dve fundamentálne variety  $F, F'$ , dve množiny iregulárnych bodov  $J, J'$  a jedna množina biregulárnych bodov. Aktuálny je v tomto prípade aj problém invariantných (samodružných) bodov, t. j. bodov, ktoré korešpondujú samy so sebou.

### 3 O istej kvadratickej biracionálnej korešpondencii v projektívnom priestore $\mathbf{P}^n(k)$

Biracionálna kvadratická korešpondencia, ktorá bude opísaná, je v  $n$ -rozmernom projektívnom priestore  $\mathbf{P}^n(k)$  nad algebrickým uzavretým poľom  $k$  charakteristiky 0 určená pomocou regulárnej nadkvadriky  $Q$ , bodu  $O$ , ktorý s nadkvadrikou neinciduje, a konštantnej hodnoty dvojpomeru určitého spôsobom vytváraných usporiadaných štvoric bodov. Je uvedená definícia korešpondencie, v pevnej sústave súradníc sú vyjadrené rovnice racionálneho zobrazenia asociovaného s korešpondenciou a sú vyriešené štandardné úlohy týkajúce sa korešpondencie: zistenie fundamentálnej variety, množiny iregulárnych bodov a množiny biregulárnych bodov.

#### 3.1 Definícia korešpondencie, rovnice asociovaného racionálneho zobrazenia, vlastnosti korešpondencie a zobrazenia

A.  $n$ -rozmerný projektívny priestor  $\mathbf{P}^n(k)$  ( $n \geq 2$ ) nad algebrickým uzavretým poľom  $k$  charakteristiky 0 má v ďalšom texte skrátené označenie  $\mathbf{P}^n$ . Nech je v tomto priestore daná pevná homogénna projektívna sústava súradníc  $S^n$ . Nech  $Q$  je regulárna nadkvadrika priestoru  $\mathbf{P}^n$ , ktorej rovnica v sústave súradníc  $S^n$  má tvar

$$Q: \quad Q(y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} y_i y_j = 0, \quad (8)$$

kde  $a_{ij} = a_{ji}$  pre všetky  $i, j = 0, 1, \dots, n, i \neq j; a_{ij} \in k; A = |a_{ij}| \neq 0; y_i, i = 0, 1, \dots, n$ , sú homogénne neznáme.

Nech vrchol  $O_0 = (z_0, 0, \dots, 0)$ ,  $z_0 \neq 0$ , sústavy súradníc  $S^n$  neinciduje s nadkvadrikou  $Q$ ; to je ekvivalentné s vlastnosťou  $Q(O_0) = a_{00} z_0^2 \neq 0$ , z čoho

vyplýva  $a_{00} \neq 0$ . Označme:  $O_0 = O$ . Regulárnu kvadratickú formu s  $(n+1)$  algebrickými nezávislými neurčitými  $T_0, T_1, \dots, T_n$  príslušnú k ľavej strane rovnice (1) označme  $Q(T_0, T_1, \dots, T_n)$ . Ďalej označme

$$q_i(T) = \frac{1}{2} \frac{\partial Q(T)}{\partial T_i} = \sum_{j=0}^n a_{ij} T_j, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (9)$$

Polárna nadrovina  $\omega$  bodu  $O$  vzhľadom na nadkvadriku  $Q$  má rovnicu

$$q_0(y) = 0. \quad (10)$$

V biracionálnej korešpondencii, ktorá bude skúmaná, budú hrať významné úlohy priamky trsu priamok, ktorého stredom (vrcholom) je bod  $O$ .

Ak  $p^u = O(u)$ ,  $(u) = (u_0, u_1, \dots, u_n) \neq O$ , je priamka trsu a  $(x) = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  je ľubovoľný bod priamky  $p^u$ , parametrické vyjadrenie všetkých bodov  $(x) \in p^u$  pomocou základných bodov  $O$ ,  $(u)$  má tvar

$$(x) = t_0 O + t_1 (u), \quad (11)$$

$(t_0, t_1) \neq (0, 0)$ ;  $t_0, t_1 \in k$ ; vyjadrenie pomocou súradníc má tvar

$$x_0 = t_0 z_0 + t_1 u_0 \quad (11')$$

$$x_i = t_1 u_i, \quad$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

B. Nech  $\mathcal{T}$  je korešpondencia v priestore  $P^n$ , ktorá je definovaná nasledovne.

**Definícia 3.1.** Horovíme, že body  $(u) = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ ,  $(u') = (u'_0, u'_1, \dots, u'_n)$  sú zodpovedajú (korešpondujú) v korešpondencii  $\mathcal{T}$  práve vtedy, keď

- a) body  $O$ ,  $(u)$ ,  $(u')$  sú kolineárne;
- b) 1) body  $(u)$ ,  $(u')$  sú rôzne a s usporiadanou dvojicou priesčníkov  $(^1r), (^2r)$  priamky  $p^u = O(u)$  s nadkvadrikou  $Q$  tvoria dvojpomer  $((^1r)(^2r)(u)(u')) = \lambda$ , kde  $\lambda \in k$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq 1$ ,  $\lambda \neq -1$ , alebo  
2) bod  $(u) = (u')$  je dotykový bod nadkvadriky  $Q$  s dotyčnicou incidujúcou s bodom  $O$ .

**Poznámka 3.1.** Zdanlivo problematické je stanovenie poradia priesčníkov priamky  $p^u$  s nadkvadrikou  $Q$  v prípade, keď priamka  $p^u$  je sečnicou nadkvadriky. Ako sa ukáže výpočtom dvojíc parametrov v tvare (11) pre tieto priesčníky, analyticke vyjadrenie parametrov rozhoduje o poradí bodov v dvojici jednoznačne.

Definícia 3.1 dáva konštrukčný návod na nájdenie všetkých bodov  $(u')$  korešpondujúcich s bodom  $(u)$ :

1. Zistia sa všetky priamky  $p^u$  incidujúce s bodmi  $O$  a  $(u)$ .
2. a) Vyhľadajú sa dvojice priesčníkov nadkvadriky  $Q$  so všetkými priamkami  $p^u$  z bodu 1, ktoré sú sečnicami nadkvadriky, alebo

b) nájdu sa dotykové body nadkvadriky  $Q$  so všetkými priamkami z bodu  $1$ , ktoré sú dotyčnicami nadkvadriky  $Q$ .

3. V prípade 2.a sa vyhľadá bod  $(u')$ , ktorý s dvojicou priesčníkov  $p^u \cap Q = \{({}^1r), ({}^2r)\}$  a s bodom  $(u)$  dáva štvoricu s dvojpomerom  $(({}^1r)({}^2r)(u)(u')) = \lambda$ . (Táto konštrukcia je jednoznačná.)

Bodmi korešpondujúcimi v korešpondencii  $\mathcal{T}$  s bodom  $(u)$  sú v prípade 2.a všetky body opísané v bode 3, v prípade 2.b bod  $(u') = (u)$  a – ako sa ukáže – všetky ďalšie body dotyčnice  $O(u)$  okrem bodu  $O$ .

**Veta 3.1.** Korešpondenciou  $\mathcal{T}$  je určené racionálne zobrazenie  $f: \mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^m$ .

**Poznámka 3.2.** Racionálne zobrazenie  $f$  sa nazýva zobrazením *asociovaným* s korešpondenciou  $\mathcal{T}$ .

**Dôkaz** vety 3.1. Nech  $(u) \in \mathbf{P}^n$  je bod, ktorý

- a) je rôzny od bodu  $O$ ,
- b) nie je bodom nadkvadriky  $Q$ ,
- c) nie je bodom polárnej nadroviny  $\omega$  bodu  $O$  vzhľadom na nadkvadriku  $Q$ .

Platí: a)  $Q(u) \neq a_{00}z_0^2$ ; b)  $Q(u) \neq 0$ ; c)  $q_0(u) \neq 0$ .

Priamka  $p^u = O(u)$  je určená jednoznačne a všetky jej body sú vyjadrené parametrickými rovnicami (11'). Podmienky b) a c) znamenajú, že bod  $(u)$  nie je dotykovým bodom dotyčnice nadkvadriky  $Q$ . (Toto tvrdenie vyplýva už z faktu, že bod  $(u)$  nie je bodom nadkvadriky  $Q$ . Ak by aj bol bodom nadkvadriky  $Q$ , aby bol dotykovým bodom dotyčnice nadkvadriky s dotyčnicou incidujúcou s bodom  $O$ , musel by spĺňať negáciu podmienky c). – Pozri lemu 3.1.)

Spoločné body priamky  $p^u$  s nadkvadrikou  $Q$  označme  $({}^1r)$ , resp.  $({}^2r)$ . Dvojice parametrov  $(t_0^I, t_1^I)$ , resp.  $(t_0^{II}, t_1^{II})$  príslušné k bodom  $({}^1r)$ , resp.  $({}^2r)$  v parametrickom vyjadrení (11) sú koreňmi homogénnej kvadratickej rovnice

$$Q(x) = Q(t_0O + t_1(u)) = 0, \quad (12)$$

po výpočte

$$t_0^2 Q(O) + 2t_0 t_1 z_0 q_0(u) + t_1^2 Q(u) = 0. \quad (12')$$

Z predpokladov a) až c) vyplýva:

$$Q(O) = a_{00}z_0^2 \neq 0; q_0(u) \neq 0; Q(u) \neq 0.$$

Teda (12') je úplná kvadratická rovnica s dvoma rôznymi koreňmi

$$(t_0^I, t_1^I) = \left( -z_0 q_0(u) + \sqrt{[z_0 q_0(u)]^2 - Q(O)Q(u)}, Q(O) \right) \quad (13)$$

$$(t_0^{II}, t_1^{II}) = \left( -z_0 q_0(u) - \sqrt{[z_0 q_0(u)]^2 - Q(O)Q(u)}, Q(O) \right).$$

Označme:  $A = -z_0 q_0(u)$ ,  $B = \sqrt{[z_0 q_0(u)]^2 - Q(O)Q(u)}$ ,  $C = Q(O)$ .

Rovnosti (13) majú potom tvar

$$\left( t_0^I, t_1^I \right) = (A + B, C), \left( t_0^{II}, t_1^{II} \right) = (A - B, C) \quad (13')$$

Body

$$\left( {}^1 r \right) = t_0^I O + t_1^I (u) = (A + B)O + C(u), \left( {}^2 r \right) = t_0^{II} O + t_1^{II} (u) = (A - B)O + C(u)$$

sú spoločné body priamky  $p^u$  a nadkvadriky  $Q$ . Podľa definície 3.1 korešpondencie  $T$  s bodom  $(u)$  korešponduje každý bod  $(u')$ , pre ktorý dvojpomer  $(({}^1 r)({}^2 r))(u)(u') = \lambda$ .

Nech hľadaný bod  $(u')$  korešpondujúci s bodom  $(u)$  má parametrické vyjadrenie  $(u') = s_0 O + s_1 (u)$  s dvojicou neznámych parametrov v lokálnej sústave súradníc na priamke  $p^u$  so základnými bodmi  $O$ ,  $(u)$ . Bod  $(u)$  má v tejto sústave vyjadrenie  $(u) = 0.O + 1.(u)$ . Platí:

$$\begin{aligned} \lambda &= \left( {}^1 r \right) \left( {}^2 r \right) (u)(u') = \begin{vmatrix} t_0^I & t_1^I \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_0^{II} & t_1^{II} \\ t_0^I & t_1^I \end{vmatrix}^{-1} = \frac{t_0^I}{t_0^{II}} \cdot \frac{t_0^I s_1 - t_1^I s_0}{t_0^{II} s_1 - t_1^{II} s_0} = \frac{A + B}{A - B} \cdot \frac{(A + B)s_1 - Cs_0}{(A - B)s_1 - Cs_0} = \\ &\frac{A + B}{A - B} \cdot \frac{(A - B)s_1 - Cs_0}{(A + B)s_1 - Cs_0} = \frac{(A + B)(A - B)s_1 - C(A + B)s_0}{(A - B)(A + B)s_1 - C(A - B)s_0} = \frac{(A^2 - B^2)s_1 - C(A + B)s_0}{(A^2 - B^2)s_1 - C(A - B)s_0} \quad (14) \end{aligned}$$

z toho

$$\lambda \left[ (A^2 - B^2)s_1 - C(A - B)s_0 \right] = (A^2 - B^2)s_1 - C(A + B)s_0, \quad (14')$$

ďalej

$$(\lambda - 1)(A^2 - B^2)s_1 = [\lambda C(A - B) - C(A + B)]s_0, \quad (14'')$$

$$(\lambda - 1)(A^2 - B^2)s_1 = [(\lambda - 1)AC - (\lambda + 1)BC]s_0. \quad (14''')$$

Odtiaľ

$$(s_0, s_1) = ((\lambda - 1)(A^2 - B^2), (\lambda - 1)AC - (\lambda + 1)BC) \quad (15)$$

$$A^2 = z_0^2 [q_0(u)]^2, B^2 = [z_0 q_0(u)]^2 - a_{00} z_0^2 Q(u), A^2 - B^2 = a_{00} z_0^2 Q(u)$$

$$AC = -z_0 q_0(u) Q(O) = -a_{00} z_0^3 q_0(u)$$

$$BC = \sqrt{[z_0 q_0(u)]^2 - a_{00} z_0^2 Q(u)} a_{00} z_0^2 = \sqrt{z_0^2 \{ [q_0(u)]^2 - a_{00} Q(u) \}} a_{00} z_0^2 =$$

$$a_{00} z_0^3 \sqrt{[q_0(u)]^2 - a_{00} Q(u)}$$

$\text{Bod } (u') = s_0 \cdot O + s_1 \cdot (u)$  má teda parametrické vyjadrenie

$$\begin{aligned} (u') &= [(\lambda - 1)a_{00}z_0^2 Q(u)] \cdot O + \left\{ (\lambda - 1) [-a_{00}z_0^3 q_0(u)] - (\lambda + 1)a_{00}z_0^3 \sqrt{[q_0(u)]^2 - a_{00}Q(u)} \right\} u = \\ &= [(\lambda - 1)a_{00}z_0^2 Q(u)] \cdot O - a_{00}z_0^3 \left\{ (\lambda - 1)q_0(u) + (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(u)]^2 - a_{00}Q(u)} \right\} (u) = \\ &= a_{00}z_0^2 \left\{ [(\lambda - 1)Q(u)] \cdot O - z_0 \left[ (\lambda - 1)q_0(u) + (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(u)]^2 - a_{00}Q(u)} \right] (u) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

čo v súradnicovom vyjadrení má tvar

$$\begin{aligned} \rho u'_0 &= a_{00}z_0^3 \left( (\lambda - 1)Q(u) + \left[ [(1 - \lambda)q_0(u)] - \left[ (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(u)]^2 - a_{00}Q(u)} \right] u_0 \right] \right) \\ \rho u'_i &= a_{00}z_0^3 \left[ [(1 - \lambda)q_0(u)] - \left[ (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(u)]^2 - a_{00}Q(u)} \right] u_i, \quad i = 1, \dots, n, \rho \in k, \rho \neq 0. \right. \end{aligned} \quad (16')$$

Rovnice (16') ukazujú, že všetky súradnice bodu  $(u')$  korešpondujúceho v korešpondencii  $T$ 's bodom  $(u)$  – pokial' bod  $(u')$  vôbec existuje – sú algebrické kvadratické výrazy súradníc bodu  $(u)$ . Tento vzťah odôvodňuje nasledovnú vetu.

**Veta 3.2.** Zobrazenie  $f$  je racionálne zobrazenie stupňa 2.

Priekom nadroviny  $\omega$  s nadkvadrikou  $Q$  je  $(n - 2)$ -rozmerná nadkvadrika  $Q^{(n-2)}$  definovaná sústavou rovníc

$$\begin{aligned} Q(y) &= 0 \\ q_0(y) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Analýza rovníc (16') zobrazenia  $f$  rozširuje definičnú oblasť zobrazenia; vyjadruje to nasledovný dôsledok vety 3.2.

**Dôsledok 3.1.** Racionálne zobrazenie  $f$  je definované aj vo všetkých bodech množiny  $\omega \setminus Q^{(n-2)}$ .

### Inverzné zobrazenie

Zo všeobecných vlastností dvojpomeru je známy nasledovný fakt:

Ak  $(a) = (a_0, a_1), (b) = (b_0, b_1), (c) = (c_0, c_1), (d) = (d_0, d_1)$  je parametrické vyjadrenie štyroch po dvojiciach rôznych kolineárnych bodov v lokálnej sústave súradníc na priamke a dvojpomer štvorice týchto bodov je  $((a)(b)(c)(d)) = \lambda$ , tak dvojpomer  $((a)(b)(d)(c)) = 1/\lambda$ . (Čitateľ si pravdivosť tohto tvrdenia overí elementárnym výpočtom.)

Z tejto vlastnosti dvojpomeru vyplýva nasledovná veta.

**Veta 3.3.** K racionálnemu zobrazeniu  $f$  existuje inverzné racionálne zobrazenie  $f^{-1}$ .

**Dôkaz** vety sa zakladá na použití predchádzajúcej vlastnosti štvorice po dvojiciach rôznych kolineárnych bodov zviazaných daným dvojpomerom hodnoty  $\lambda$ . Ak  $(u) \in P'$  je bod, v ktorom je racionálne zobrazenie  $f$  definované

$a f(u) = (u')$ , platí  $((^1r)(^2r)(u)(u')) = \lambda$ , kde  $\{(^1r), (^2r)\} = P^u \cap Q$ . Zobrazenie  $g: P^n \rightarrow P^n$  priraďujúce k bodu  $(u)$  bod  $(u')$  tak, že  $((^1r)(^2r)(u)(u')) = 1/\lambda$ , je definované vo všetkých bodoch  $(u) = f(u)$  a má v dôsledku jednoznačnosti štvrtého bodu s danou hodnotou dvojpomeru k danej trojici bodov vlastnosť  $(u') = g(u') = g(f(u)) = (g \circ f)(u) = (u)$ . (Elementárnym výpočtom sa overí, že

$$1 = \lambda \cdot (1/\lambda) = ((^1r)(^2r)(u)(u')) \cdot ((^1r)(^2r)(u')(u'')) = ((^1r)(^2r)(u)(u')), \quad (18)$$

z čoho vyplýva  $(u) = (u'')$ .

Pre všetky body  $(u) \in U \subset P^n$ , v ktorých je zobrazenie  $f$  definované, je každý bod  $f(u) \in f(U)$  bodom, v ktorom je definované zobrazenie  $g$ ; teda  $f(U) \subset U'$ , kde  $U' \subset P^n$  je množina všetkých bodov priestoru  $P^n$ , v ktorých je definované zobrazenie  $g$ . Rovnice zobrazenia  $g$  sú obmenou rovníc (16') zobrazenia  $f$  s nasledovnými spresneniami a zmenami:  $u_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , sú súradnice bodu  $f(u)$  – obrazu pôvodného bodu  $(u)$ ,  $u'_i, i = 0, 1, \dots, n$ , sú súradnice bodu  $g(f(u))$ , všetky hodnoty  $\lambda$  sú nahradené hodnotami  $1/\lambda$ . Takto upravené rovnice s označením (18) zúžené na oblasť  $U \cap U'$  sú rovnicami racionálneho zobrazenia inverzného k racionálnemu zobrazeniu  $f$ . Dvojice  $((u), f(u))$  a  $(g(u'), u'')$  pre  $(u), (u') \in U \cap U'$  sú dvojicami korešpondujúcich bodov v dvojici  $(f, g)$  navzájom inverzných racionálnych zobrazení asociovaných s korešpondenciou  $T$ . Tento fakt je dôvodom na pomenovanie korešpondencie  $T$  názvom *biracionálna korešpondencia*.

Pri biracionálnej korešpondencii je dôležité mať stále na pamäti, že ak je dvojica bodov  $((u), (u'))$  dvojicou bodov korešpondujúcich si navzájom v korešpondencii  $T$ , nemusí byť bod  $(u')$  jediným bodom korešpondujúcim s bodom  $(u)$ .

### 3.2 Fundamentálna varieta; množina iregulárnych bodov; množina biregulárnych bodov

Podľa základnej definície *fundamentálnym bodom* korešpondencie  $T$  sa nazýva každý bod priestoru  $P^n$ , v ktorom racionálne zobrazenie  $f$  asociované s korešpondenciou  $T$  nie je regulárne, čo znamená, že hodnoty všetkých foriem z pravých strán sústavy rovníc (16') sa v tomto bode rovnajú 0. Každý takýto bod je koreňom (nulovým bodom) homogénneho ideálu v okruhu  $k[T_0, T_1, \dots, T_n]$  generovaného všetkými formami z pravých strán sústavy rovníc (16') po zámene neznámych z týchto rovníc neurčitými  $T_0, T_1, \dots, T_n$ , z ktorých  $n$  je algebrický nezávislých. Množina všetkých koreňov tohto ideálu je projektívna varieta, ktorá je uzavretou množinou v Zariského topológií priestoru  $P^n$ .

**Veta 3.4.** Fundamentálou varietou korešpondencie  $T$  je reducibilná zmiešaná  $(n - 2)$ -rozmerná varieta  $F$ , ktorej komponentmi sú

- 1) bod  $O$ ;

- 2) kvadratická  $(n - 2)$ -rozmerná varieta  $Q^{(n-2)}$ , ktorá je prienikom nadkvadriky  $Q$  s polárnou nadrovinou  $\omega$  bodu  $O$  vzhľadom na nadkvadriku  $Q$ .

**Dôkaz.** Súradnice všetkých fundamentálnych bodov korešpondencie  $\mathcal{T}$  spĺňajú rovnice

$$\left( (\lambda - 1)Q(y) + \left\{ [(1-\lambda)q_0(y)] - \left[ (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(y)]^2 - a_{00}Q(y)} \right] \right\} y_0 \right) = 0 \quad (19)$$

$$\left\{ [(1-\lambda)q_0(y)] - \left[ (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(y)]^2 - a_{00}Q(y)} \right] \right\} y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

1) Ľavé strany posledných  $n$  rovníc sústavy (19) nadobúdajú v bode  $O$  hodnotu 0, pretože v bode  $O$  všetky súradnice  $y_i, i = 1, \dots, n$ , majú hodnotu 0. Ľavá strana prvej rovnice sústavy (19) nadobúda v bode  $O$  hodnotu

$$(\lambda - 1)a_{00}z_0^2 - \left\{ (\lambda - 1)a_{00}z_0 + (\lambda + 1)\sqrt{a_{00}^2 z_0^2 - a_{00}a_{00}z_0^2} \right\} \cdot z_0 = (\lambda - 1)(a_{00}z_0^2 - a_{00}z_0^2) = 0.$$

Tieto výsledky znamenajú, že bod  $O$  je fundamentálnym bodom korešpondencie  $\mathcal{T}$ .

2) Pre každý fundamentálny bod  $(y) \in P^n$  rôzny od bodu  $O$  je aspoň jedna z jeho súradníc  $y_i, i = 1, \dots, n$ , rôzna od nuly. Aby boli súradnicami bodu  $(y)$  splnené všetky rovnice (19), musí platiť

$$(\lambda - 1)q_0(y) + (\lambda + 1)\sqrt{[q_0(y)]^2 - a_{00}Q[y]} = 0 \quad (20)$$

Ak  $q_0(y) = 0$  a  $Q(y) \neq 0$ , má ľavá strana prvej rovnice zo sústavy (19) hodnotu

$$(\lambda + 1)\sqrt{-a_{00}Q(y)} \neq 0;$$

bod  $(y)$  tejto vlastnosti nemôže byť fundamentálny.

Ak  $q_0(y) \neq 0$  a  $Q(y) = 0$ , má ľavá strana prvej rovnice sústavy (19) hodnotu

$$(\lambda - 1)q_0(y) \pm (\lambda + 1)q_0(y).$$

V prípade kladného znamienka má tento súčet hodnotu  $2\lambda q_0(y) \neq 0$ , v prípade záporného znamienka má hodnotu  $-2q_0(y) \neq 0$ , teda v oboch prípadoch súradnica  $y'_0$  korešpondujúceho bodu sa nerovná 0, čo znamená, že bod  $(y)$  nie je fundamentálnym bodom korešpondencie  $\mathcal{T}$ .

V prípade  $(y) \neq O$  je  $q_0(y) \neq 0$  aj  $Q(y) \neq 0$ ; bod  $(y)$  spĺňa podmienky vety 3.1, jeho obraz  $f(y)$  v racionálnom zobrazení  $f$  asociovanom s korešpondenciou  $\mathcal{T}$  je podľa dôkazu vety 3.1 definovaný, je teda bod  $(y)$  v zobrazení  $f$  regulárny a nie fundamentálny.

Uvedené argumenty potvrdzujú, že množina všetkých fundamentálnych bodov korešpondencie  $\mathcal{T}$  rôznych od bodu  $O$  je uzavretá množina bodov  $(y)$

určená sústavou dvoch rovníc (17), čo je  $(n - 2)$ -rozmerná kvadratická varieta  $Q^{(n-2)}$ .

Teda:  $F = O \cup Q^{(n-2)}$ .

**Poznámka 3.3.** Každý bod fundamentálnej variety  $F$  je jednoduchým bodom tejto variety.

Pre izolovaný bod  $O \in F$  je toto tvrdenie zrejmé. Každý bod  $(y) \in Q^{(n-2)}$  je regulárny (=jednoduchý) bodom nadkvadriky  $Q$  (lebo nadkvadrika je regulárna), je jednoduchým bodom nadroviny  $\omega$  (lebo všetky body nadroviny sú jednoduché) a nie je násobným priesečníkom nadroviny  $\omega$  s nadkvadrikou  $Q$  (lebo nadrovina  $\omega$  nie je dotykovou nadrovinou nadkvadriky  $Q$  v žiadnom jej bode).

### ***Množina iregulárnych bodov korešpondencie***

Ako je známe, *iregulárnym bodom* korešpondencie  $\mathcal{T}$  sa nazýva každý bod priestoru  $\mathbf{P}^n$ , ktorý je regulárny v racionálnom zobrazení  $f$  asociovanom s korešpondenciou  $\mathcal{T}$  a ktorého obrazom v zobrazení  $f$  je fundamentálny bod. Ak  $J$  je označenie množiny všetkých iregulárnych bodov, znamená to, že  $J = f^{-1}(F)$ . Množina  $J$  nemusí byť uzavretá v Zariského topológiu priestoru  $\mathbf{P}^n$ , pretože racionálne zobrazenie nie je vo všeobecnosti uzavreté.

**Lema 3.1.** Pre každý bod  $(m) \in Q^{(n-2)}$  je priamka  $p^m = O(m)$  dotyčnicou nadkvadriky  $Q$ .

Dôkaz pozri v [G 22, str. 21].

*Invariantným bodom* korešpondencie  $\mathcal{T}$  sa nazýva každý bod  $(h) \in \mathbf{P}^n$ , ktorý je prvkom množiny všetkých prvkov korešpondujúcich s bodom  $(h)$  v korešpondencii  $\mathcal{T}$ .

Podľa časti b)2 definície 3.1 pre každý bod  $(m)$ , ktorý je dotykovým bodom nadkvadriky  $Q$  s dotyčnicou incidujúcou s bodom  $(m)$ , platí  $(m) = (m')$ , kde  $(m')$  je bod korešpondujúci s bodom  $(m)$  v korešpondencii  $\mathcal{T}$ . (Tento fakt znamená, že bod  $(m)$  si korešponduje sám so sebou v korešpondencii  $\mathcal{T}$ ; nemusí to však znamenať, že je *jediným* bodom, ktorý s ním korešponduje.) Zo všeobecných vlastností polarity vzhľadom na nadkvadriku vyplýva, že množinou dotykových bodov nadkvadriky  $Q$  so všetkými dotyčnicami incidujúcimi s bodom  $O$  je práve varieta  $Q^{(n-2)}$  ako prienik nadkvadriky  $Q$  s polárrou nadrovinou  $\omega$  bodu  $O$  vzhľadom na nadvadriku  $Q$ . To odôvodňuje nasledovný dôsledok.

**Dôsledok 3.2.** Množinou všetkých invariantných bodov korešpondencie  $\mathcal{T}$  je varieta  $Q^{(n-2)}$ .

Triviálny je nasledujúci dôsledok.

**Dôsledok 3.3.** Dotyčnica  $d^m = O(m)$  ( $(m) \in Q^{(n-2)}$ ) je priamou dotykovej nadroviny  $\tau^m$  nadkvadriky  $Q$  v bode  $(m)$ .

Dotyková nadrovina  $\tau^m$  nadkvadriky  $Q$  v bode  $(m) \in Q^{(n-2)}$  má rovnicu

$$\sum_{i=1}^n q_i(m) y_i = 0 \quad (21)$$

s neznámymi  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

(Incidenciu každého bodu dotyčnice  $d^m$  s dotykovou nadrovinou  $\tau^m$  možno overiť elementárnym výpočtom.)

**Dôsledok 3.4.** Množina všetkých bodov všetkých dotyčníc nadkvadriky  $Q$  incidujúcich s bodom  $O$  je kvadratická kužeľová nadplocha  $K^{(n-1)}$ , ktorej vrcholom je bod  $O$  a určujúcou varietou  $Q^{(n-2)}$ .

Kužeľová nadplocha  $K^{(n-1)}$  má rovnicu

$$\sum_{i=1}^n q_i(y) y_i = 0 \quad (22)$$

s neznámymi  $y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Lema 3.2.** Každý bod  $(w)$  dotyčnice  $d^m$  rôzny od bodov  $O$  a  $(m)$  je iregulárnym bodom korešpondencie  $T$ ; jeho obrazom  $f(w)$  v racionálnom zobrazení  $f$  je bod  $(m)$ .

**Dôkaz.** V parametrickom vyjadrení bodov priamky  $d^m$  so základnými bodmi  $O$ ,  $(m)$  má každý bod  $(w)$  vyjadrenie

$$(w) = t_0 O + t_1 (m), (t_0, t_1) \neq (0, 0),$$

t. j.

$$w_0 = t_0 z_0 + t_1 m_0 \quad (23)$$

$$w_i = t_1 m_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Bodu  $O$  zodpovedá trieda dvojíc s reprezentantom  $(1, 0)$ , bodu  $(m)$  trieda dvojíc s reprezentantom  $(0, 1)$ .

Rovnice (16') zobrazenia  $f$  aplikované na bod  $(w)$  dávajú výsledok

$$\begin{aligned} \rho w'_0 &= \\ a_{00} z_0^3 \left\{ (\lambda - 1) Q[t_0 O + t_1 (m)] + \frac{(1-\lambda) q_0 [t_0 O + t_1 (m)] - }{(\lambda + 1) \sqrt{[q_0(t_0 O + t_1 (m))]^2 - a_{00} Q[t_0 O + t_1 (m)]}} \right\} (t_0 z_0 + t_1 m_0) \\ \rho w'_i &= a_{00} z_0^3 \left\{ (1-\lambda) q_0 [t_0 O + t_1 (m)] - (\lambda + 1) \sqrt{[q_0(t_0 O + t_1 (m))]^2 - a_{00} Q[t_0 O + t_1 (m)]} \right\} t_1 m_i ; \\ i &= 1, \dots, n; \rho \neq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$Q[t_0 O + t_1 (m)] = t_0^2 Q(O) + 2t_0 t_1 z_0 q_0(m) + t_1^2 Q(m) = t_0^2 a_{00} z_0^2,$$

lebo  $Q(m) = 0$ ,  $q_0(m) = 0$ ;

$$q_0 \left[ t_0 O + t_1 (m) \right] = t_0 q_0(O) + t_1 q_0(m) = t_0 a_{00} z_0^2, \text{ lebo } q_0(m) = 0.$$

Pre každý bod  $(w) \neq O, (w) \neq (m)$  je  $t_0 \neq 0, t_1 \neq 0$ ; ďalej  $a_{00} \neq 0, z_0 \neq 0$ . Z toho vyplýva:

$$(w') = \left( (1-\lambda) t_0 t_1 a_{00}^2 z_0^4 v_i \right)_{i=0}^n \sim (m)$$

**Poznámka 3.4.** Ak označíme množinu všetkých iregulárnych bodov priestoru  $P^n$  korešpondujúcich so všetkými bodmi variety  $Q^{(n-2)}$  (t. j. zobrazujúcich sa v zobrazení  $f$  na  $Q^{(n-2)}$ ) znakom  $J_2$ , možno obsah lemy 3.2 sformulovať takto:

$$J_2 = f^{-1}(Q^{(n-2)}) = K^{(n-1)} \setminus F.$$

Nech  $S = \{s\}$  označuje trs priamok priestoru  $P^n$  so stredom (vrcholom) v bode  $O$  a nech  $B = \{p\} = S \setminus K^{(n-1)}$  je podmnožina všetkých priamok trsu  $S$ , ktoré nie sú priamkami kužeľovej nadplochy  $K^{(n-1)}$ . Všetky priamky podmnožiny  $B$  sú sečnicami nadkvadriky  $Q$ . Fundamentálny bod  $O$  korešpondencie  $\mathcal{T}$  je bodom každej priamky z  $B$ .

Množinou  $J_1 = f^{-1}(O)$  všetkých iregulárnych bodov priestoru  $P^n$  zobrazujúcich sa v zobrazení  $f$  na bod  $O$  je množina všetkých tých bodov  $(u)$  priamok  $p \in B$ , v ktorých je zobrazenie  $f$  definované a  $f(u) = O$ .

**Veta 3.5.** Množinou iregulárnych bodov  $J_1$  korešpondencie  $\mathcal{T}$  korešpondujúcich s fundamentálnym bodom  $O$  je nadkvadrika  $Q^O$  s rovnicou

$$Q^O : (\lambda+1)^2 a_{00} Q(y) - 4\lambda [q_0(y)]^2 = 0, \quad (25)$$

kde  $y_i, i = 0, 1, \dots, n$ , sú neznáme.

**Dôkaz.** Ak  $(y) \in P^n$  je ľubovoľný bod, v ktorom zobrazenie  $f$  je definované,  $f(y) = O$  a priamka  $p^y = O(y)$  nie je dotyčnicou nadkvadriky  $Q$ , je priamka  $p^y$  sečnicou nadkvadriky  $Q$  a priesenčníky  $\{{}^1r, {}^2r\}$  priamky  $p^y$  s nadkvadrikou  $Q$  majú v lokálnej sústave súradníc na priamke  $p^y$  so základnými bodmi  $O, (y)$  parametrické vyjadrenie s parametrami  $(t_0^I, t_1^I)$ , resp.  $(t_0^{II}, t_1^{II})$  v tvare (13), príp. (13'). Pretože  $(y)$  je iregulárny bod korešpondencie  $\mathcal{T}$  korešpondujúci s bodom  $O$ , platí podľa definície 3.1  $(({}^1r)({}^2r)(y)O) = \lambda$ . Použitím vzťahov (13') na parametrické vyjadrenie bodov  $({}^1r), ({}^2r), (y), O$  v tvare  $(t_0^I, t_1^I), (t_0^{II}, t_1^{II}), (0, 1), (1, 0)$  dostaneme

$$\lambda = \begin{vmatrix} t_0^I & t_1^I \\ 0 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_0^I & t_1^I \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{t_0^I}{t_0^{II}} : \frac{-t_1^I}{-t_1^{II}} = \frac{A+B}{A-B} : \frac{-C}{-C} = \frac{A+B}{A-B}$$

Odtiaľ

$$\lambda(A - B) - (A + B) = 0.$$

Po elementárnych výpočtoch a návrate k pôvodnému základnému označeniu dostaneme

$$(\lambda+1)^2 a_{00} Q(y) - 4\lambda [q_0(y)]^2 = 0,$$

čo je výsledok (25) uvedený v tvrdení vety.

Množinu všetkých iregulárnych bodov  $J$  súhrnnne charakterizuje nasledujúca veta.

**Veta 3.6.** Množinou všetkých iregulárnych bodov  $J$  korešpondencie  $\mathcal{T}$  je množina

$$J = J_1 \cup J_2 = (Q^O \cup K^{(n-1)}) \setminus F.$$

**Dôsledok 3.5.** Množinou všetkých biregulárnych bodov korešpondencie  $\mathcal{T}$  je množina

$$R = P^n \setminus (J \cup F).$$

## 4 Záver

Časť 3 tohto príspevku uvádza istú biracionálnu korešpondenciu v priestore  $P^n(k)$  a riešenie jej štandardných základných úloh. Širšia tematika spojená s kompletnejším opisom vlastností korešpondencie obsahuje minimálne ešte podrobný výskum homaloidného systému, výpočet postulačných čísel zložiek fundamentálnej variety, prípadne skúmanie singulárnych homaloidov a obrazov nadplôch. Tieto témy, ako aj algebrickoštrukturálne aspekty asociovanych zobrazení, neznáme v klasickej ére teórie biracionálnych korešpondencií, budú predmetom spracovania v rozsiahlejšom článku venovanom nastolenej problematike.

## Literatúra

- [1] BYDŽOVSKÝ, B. *Úvod do algebraické geometrie*. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1948. 668 s.
- [2] HUDSON, H. P. *Cremona transformations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
- [3] ŠAFAREVIČ, I. R. *Osnovy algebráickej geometrii*. Moskva: Nauka, 1972. 568 s.
- [4] ČIŽMÁR, J. O istej kubickej involúcii v  $P^n(k)$ . In: *G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, ročník 10 (2013), s. 5 – 23.

# Strophoids – cubic curves with remarkable properties

Hellmuth Stacheler

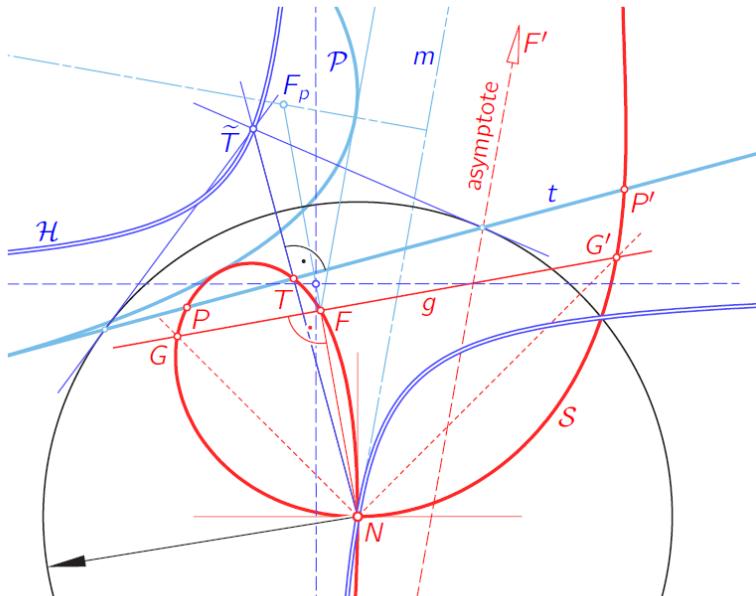
*Vienna Institute of Technology*

**Abstract.** Strophoids are defined as circular cubic curves with a node and orthogonal node tangents. These rational curves are characterized by a series of properties. The aim of the paper is to present some of these properties; a few of them are new.

*Keywords:* Strophoid

*Strophoids* are defined as circular cubic curves with a node and orthogonal node tangents. These rational curves are characterized by a series of properties. The aim of the paper is to present some of them.

- On each cubic with a node  $N$ , there is a symmetric relation of points: pairs  $(P, P')$  of corresponding points are characterized by the condition that the connecting lines with the node separate the tangent lines at the node harmonically. For any two pairs  $(P, P')$  and  $(Q, Q')$ , the point of intersection between the lines  $PQ$  and  $P'Q'$  as well as that between  $PQ'$  and  $P'Q$  are again points of the strophoid and even associated. The tangents at associated points intersect at a point which again lies on the cubic.
- On a strophoid  $\mathcal{S}$ , these pairs of ‘*associated*’ points have additional properties:
  1. For each pair  $(P, P')$  the midpoint lies on a fixed line  $m$  parallel to the asymptote.
  2. For each point  $X \in \mathcal{S} \setminus \{N\}$ , the lines  $XP$  and  $XP'$  are symmetric with respect to the line connecting  $X$  with the node  $N$ .
- Strophoids can also be characterized as circular cubics where the absolute circle-points are associated. The tangents at the absolute circle-points intersect at a point  $F \in \mathcal{S}$ , the *focal point* of the strophoid  $\mathcal{S}$ . The focal point  $F$  is associated to the real point  $F'$  at infinity.
- Strophoids show up as locus of points at various geometric problems [2]:
  - (a) Strophoids are *pedal curves* of a parabola  $\mathcal{P}$  where the corresponding pole lies on the parabola’s directrix [1]. The focal point  $F$  of  $\mathcal{S}$  is the midpoint between the node  $N$  and the focal point  $F_p$  of the parabola  $\mathcal{P}$  (see figure). The lines connecting associated points are tangent to this negative pedal curve  $\mathcal{P}$ .
  - (b) Strophoids are inverse to equilateral hyperbolas  $\mathcal{H}$  when the center  $N$  of inversion lies on the hyperbola.



- (c) Strophoids are generalized Apollonian circles: For any three non-collinear points  $A, A'$  and  $N$ , the locus of points  $X$ , where the connection  $XN$  bisects an angle between the lines  $XA$  and  $XA'$ , is a strophoid  $\mathcal{S}$  with node  $N$  and associated points  $A, A'$ . The strophoid  $\mathcal{S}$  has this ‘bisecting property’ with respect to all its pairs of associated points, even when one of the involved points lies at infinity.
- (d) The strophoids are *focal curves* of all conics with two common line elements. The base points of such a pencil of conics are associated points of  $\mathcal{S}$ ; the common tangents intersect at the node  $N$  of  $\mathcal{S}$ .
- (e) The tangents drawn from a fixed point  $N$  to the conics of a confocal family have their points of contact on a strophoid  $\mathcal{S}$ . The same strophoid is also the locus of pedal points of normals drawn from  $N$  to the confocal conics. The given point  $N$  is the node, the common focal points are associated points of  $\mathcal{S}$ .
- (f) Strophoids are perspective views of *Viviani's window*  $\mathcal{V}$ , which is the curve of intersection between a right cylinder  $\mathcal{C}$  and a contacting sphere  $\mathcal{S}$  with the center on  $\mathcal{C}$ . The center of the perspective is a regular point of  $\mathcal{V}$ , and the image plane is orthogonal to the generators of the cylinder  $\mathcal{C}$ .
- (g) For any given triangle  $ABC$ , strophoids are the locus of points  $P$

for which two of the three cevians  $AP_A$ ,  $BP_B$ , and  $CP_C$  have the same lengths.

- (h) In plane Euclidean kinematics, the strophoids are the *circle-point curves*, i.e., the locus of points whose trajectories have instantaneously a stationary curvature. The corresponding curvature centers lie also on another strophoid, the *center-point curve*. Both strophoids share the node, the two node tangents and the curvature center of one of the branches passing through the node. Also in spherical and hyperbolic kinematics, the circle-point curves and center-point curves are closely related to strophoids.

## References

- [1] E. Schmidt: *Strophoiden*. <http://eckartschmidt.de/Stroid.pdf>, accessed Oct. 2015.
- [2] H. Stachel: *Strophoids, a Family of Cubic Curves with Remarkable Properties*. J. of Industrial Design and Engineering Graphics (ISSN 1843-3766), **10**/1, 65–72 (2015).



# Bodenmiller, Gauss, Wallace-Simson and more

Gunter Weiss

*University of Technology in Dresden, Germany, and TU Vienna, Austria  
email: weissgunter@hotmail.com*

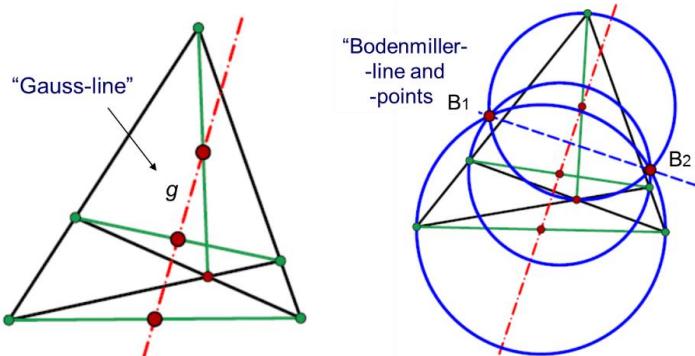
**Abstract.** A quadrilateral  $\mathbf{Q}$  in the projectively extended Euclidean plane gives rise to sets of “remarkable points and lines” connected to well-known theorems of Bodenmiller, Gauss, Wallace-Simson and Miquel. For example, the mid-points of the three diagonal segments are collinear with the Gauss-line  $g$ . Bodenmiller’s theorem states that the Thales-circles over the three diagonal segments belong to a pencil of circles. Some of these theorems allow a wide range of generalisations either to higher dimensions or to non-Euclidean geometries. It turns out that the mentioned theorems are interlinked, if we consider  $\mathbf{Q}$  as a common tangents of a (dual) pencil of conics. The article focusses on the fact that a quadrilateral  $\mathbf{Q}$  defines a (dual) pencil of conic sections  $c$  and discusses the meaning of the points of the “remarkable lines” for the conics  $c$  belonging to  $\mathbf{Q}$ . For example, it is well-known that the points of the Gauss-line  $g$  are the centres of the conics  $c$ . The circles of the “Bodenmiller pencil” are the orthoptic circles of the conics  $c$ . The set of focal points of the conics  $c$  fulfils a circular cubic curve  $c^3$  through the six points of  $\mathbf{Q}$  and the Miquel-point  $F$  (the focus of the unique parabola among the conics  $c$ ) of  $\mathbf{Q}$ . The article gives a summary of a lecture presented at the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2015 at Terchová, Slovakia.

**Key words:** Elementary geometry, quadrilateral, theorem of Gauss and Bodenmiller, theorem of Miquel, theorem of Wallace-Simson

## 1 Introduction

For triangles and quadrilaterals there exists a confusing and unmanageable set of elementary geometric theorems and many of them are interlinked or arise from modifications of other theorems. Dealing with “remarkable” points, lines and circles of triangles and quadri-laterals one runs the risk of putting old wine in supposed new skin. For historic references see e.g. [1], actual reference for now more than 7000 remarkable objects to a triangle see [4], a book in print dealing with conics is [2], but also [5] collects many results concerning quadrilaterals.

We pick out the theorem of Gauss and the theorem of Bodenmiller, see Fig. 1: The theorem of Gauss states that the midpoints of the diagonals of a quadrilateral  $\mathbf{Q}$  are collinear. The line through this midpoints is called the Gauss-line  $g$ . From the projective geometric point of view this statement is trivial, as  $g$  is the “double conjugate line” to the ideal line with respect to the conics touching  $\mathbf{Q}$ . We call this set of conics a “dual pencil of conics”. Bodenmiller’s theorem states that that the Thales-circles over the three diagonal segments of  $\mathbf{Q}$  belong to a pencil of circles. Obviously the common cord  $b$  of these Thales-circles must be orthogonal to Gauss-line  $g$ .

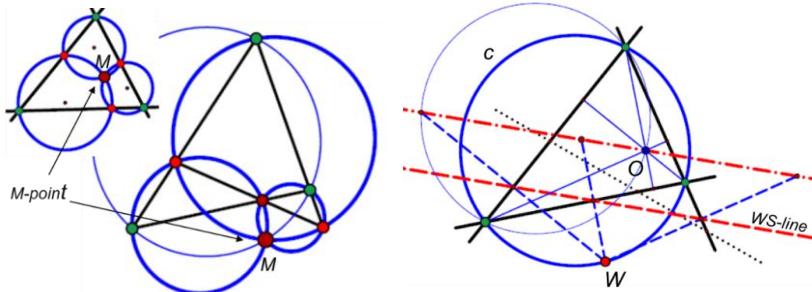


**Fig. 1: Visualisations of the Theorem of Gauss and the Theorem of Bodenmiller.**

It is also well-known that the common cord of Bodenmiller's Thales-circles contains the orthocentres of the four partial triangles of  $Q$ , such that it, together with the (in algebraic sense) two Bodenmiller-points common to the Thales-circles, carries 6 remarkable points of  $Q$ .

Next we pick up the theorem of Miquel and the theorem of Wallace-Simson, Fig. 2: Miquel's theorem states that if we choose a point on each side of a triangle arbitrarily, then the three circumcircles through each vertex and the chosen points on the adjacent sides of this vertex pass through one point, the Miquel-point of the figure. If we choose the points such that they become collinear we receive a quadrilateral  $Q$  and all four circumcircles pass through the Miquel-point  $M$  of  $Q$ .

The theorem of Wallace-Simson states that given a triangle  $T$ , the three reflections of a point  $W$  at the sides of  $T$  are collinear, iff  $W$  is a point of the circumcircle of  $T$ . Furthermore the line connecting the reflection points passes through the orthocentre  $O$  of  $T$ . (It is also usual to the then collinear pedal points of  $W$  at the sides of  $T$  and we call this line the Wallace-Simson line of  $W$  with respect to  $T$ , see Fig. 2 (right). We use this concept WS-line for both of the mentioned lines.)

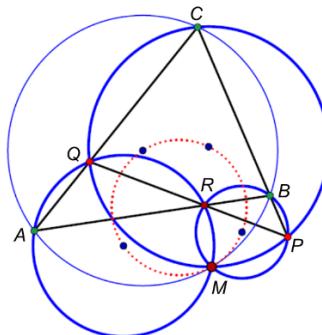


**Fig. 2: Visualisations of the Theorem of Miquel and the Theorem of Wallace-Simson.**

In the following we discuss connections between these four theorems and their generalisations.

## 2 Extensions of Miquel's theorem

J. Steiner and Morley noticed that the four circumcircles of the partial triangles of a quadrilateral  $Q$  have concyclic centres (c.f. e.g. [6]) and the circle through these four centres also pass through the Miquel-point of  $Q$ , see Fig. 3. This circle is called “Steiner-circle” and its centre “Steiner-point” of  $Q$ .



**Fig. 3: The Morley-circle passes through the centres of the circumcircles of the partial triangles of a quadrilateral  $Q$  and through its Miquel-point.**

An extension of Kantor states that given a “5-linel”, i. e. five lines in general position, then the 5 Steiner-points of the 5-linel’s partial quadrilaterals are concyclic (c.f. [6]). This circle is “Kantor-circle” and its centre “Kantor-point” of the 5-line. Looking at the 5 Miquel-points of a 5-line one would notice that they also lie on a circle, the “Clifford-circle”. All these statements were the starting point for a chain of similar statements due to Kantor, Clifford, Morley, Hirano and Hsu concerning  $n$ -lines in general positions. For example, the six Clifford-circles of a 6-line intersect at a point, the “Clifford-point” of the 6-line. The seven Clifford-points of a 7-line lie on “Clifford’s 7-circle”, a.s.o. ad infinitum. Such a configuration is called a “Clifford chain” to an  $n$ -line.

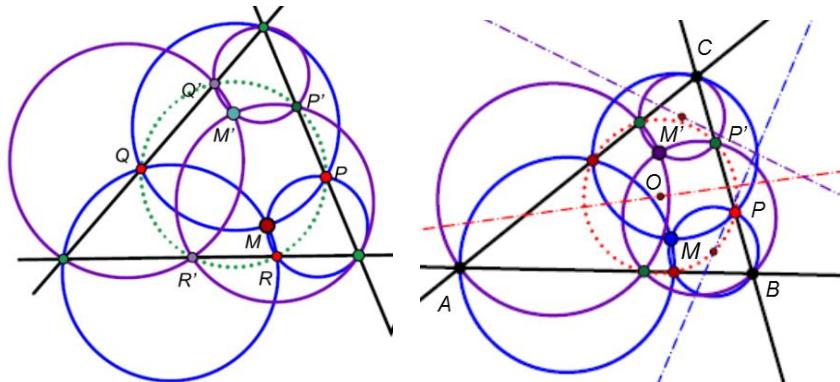
Another idea to extend the original theorem of Miquel is the definition of a “Miquel-mapping”, Fig. 4:

**Definition 1:** In the Euclidean plane  $\pi$  let be given a triangle  $T$  and the arbitrarily chosen points  $P, Q, R$  on each side of  $T$  and let  $M$  be the corresponding Miquel-point. Let  $P, Q, R$  be not collinear and have the circumcircle  $c$ . Then  $c$  intersects the sides of  $T$  in a second point triplet  $(P', Q', R')$  which defines the Miquel-point  $M'$  as the “Miquel-image” of  $M$  under the “Miquel-mapping”  $\mu: \pi \rightarrow \pi$  to  $T$ .

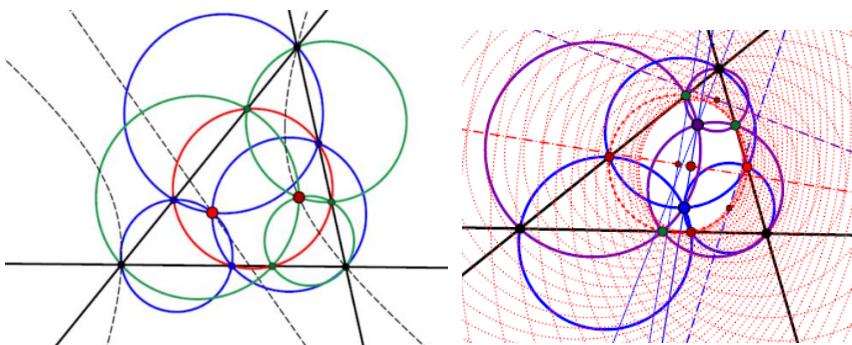
First of all one has to show that Definition 1 makes sense, what means that  $\mu: \pi \rightarrow \pi$  depends on  $M$  and not on the point triplet  $P, Q, R$  defining  $M$ . It is easy

to prove that this is indeed the case, as to  $M$  and e.g.  $P$  the other points  $Q$  and  $R$  are already defined. Variation of  $P$  lets all the circumcircles of triangle vertex  $B$ ,  $M$  and  $P$  run through a pencil of circles, see Fig. 4 (right). The circumcircles of the variating triplets  $P, Q, R$  have again collinear centres and envelop a conic touching the sides of  $T$  and having  $M$  as one focus. It turns out that the image point  $M'$  is the other focus, see Fig. 5 (right). Obviously the mapping  $\mu$  is involutoric. Fig. 5 (left) shows that it is quadratic with the base triangle  $T$  as exception set. We collect these results in

**Theorem 1:** The Miquel-mapping to a triangle  $T$  is an involutoric and a quadratic mapping. It maps one focus of a conic touching  $T$  to the second focus.



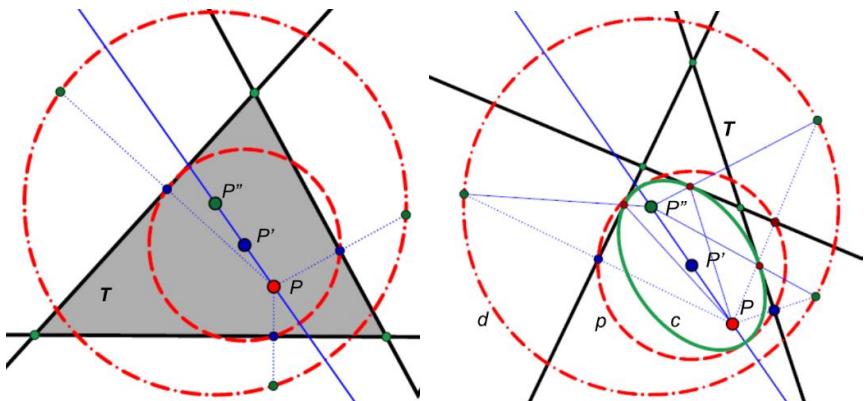
**Fig. 4:** The Miquel-mapping uses the circumcircle of the chosen triplet on the sides of a triangle  $T$  to get a second triplet, which defines the Miquel-image point of the first Miquel-point.



**Fig. 5:** The Miquel-mapping to a triangle  $T$  is an involutoric and a quadratic mapping, it maps one focus of a conic touching  $T$  to the second focus

### 3 Combining Miquel's and Wallace-Simson's theorems for a triangle $T$

Given three tangents of a conic  $c$  and one of its foci  $F_1$  one can construct the second focus by applying theorem 1. Therewith it is possible to find the contact points of  $c$  with the tangents by reflecting one focus at the tangents. This in mind we might connect this construction with Wallace-Simson's method to reflect a given point  $P$  at the sides of a triangle  $T$ . The reflection points are collinear, iff  $P$  is a point of the circumcircle of  $T$ . If  $P$  does not lie on the circumcircle, the reflection points define a circle  $d$  with centre  $P''$ . Equally the pedal points on the sides of  $T$  define another circle  $p$ , the centre  $P'$  of which is the midpoint of the segment  $[P, P'']$ , see Fig. 6. Circle  $d$  of the reflection point triangle is a directrix circle of the conic  $c$  touching  $T$  and having  $P, P''$  as foci. The circumcircle  $p$  of pedal point triangle is the main vertex circle of  $c$ .



**Fig. 6:** Wallace-Simson mappings  $\omega_1: P \mapsto P'$  and  $\omega_2: P \mapsto P''$  with respect to a triangle  $T$ ;  $P, P''$  are foci of a conic touching  $T$  and  $P'$  is its midpoint.

Therewith we have defined two “Wallace-Simson mappings”  $\omega_1: P \mapsto P'$ ,  $\omega_2: P \mapsto P''$  with respect to triangle  $T$ . From the coincidence of properties of  $\omega_2$  and the Miquel-mapping  $\mu$  we conclude that these two mappings are the same even they are defined in different ways. It turns out the mapping  $\omega_1$  is a cubic mapping, see Fig. 7. We collect these statements in following theorems:

**Theorem 2:** The Wallace-Simson mapping  $\omega_1$  with respect to a triangle  $T$  in a projective extended Euclidean plane  $\pi$  maps points  $P$  of  $\pi$  to the centre  $P'$  of the circumcircle  $p$  of the pedal point triangle of point  $P$  on  $T$ . Thereby  $P$  is a focus and  $P'$  the midpoint of a conic  $c$  touching  $T$  and  $p$  is the main vertex circle of  $c$ . The mapping  $\omega_1$  is a rational cubic mapping.

**Theorem 3:** The Wallace-Simson mapping  $\omega_2$  with respect to a triangle  $T$  in a projective extended Euclidean plane  $\pi$  maps points  $P$  of  $\pi$  to the centre  $P''$  of the circumcircle  $d$  of the reflection point triangle of point  $P$  at  $T$ . Thereby  $P$  is one focus and  $P''$  the other of a conic  $c$  touching  $T$  and  $d$  is a directrix circle of  $c$ . The mapping  $\omega_2$  is an involutoric and quadratic mapping and acts the same way as the Miquel-mapping  $\mu$  with respect to  $T$ .

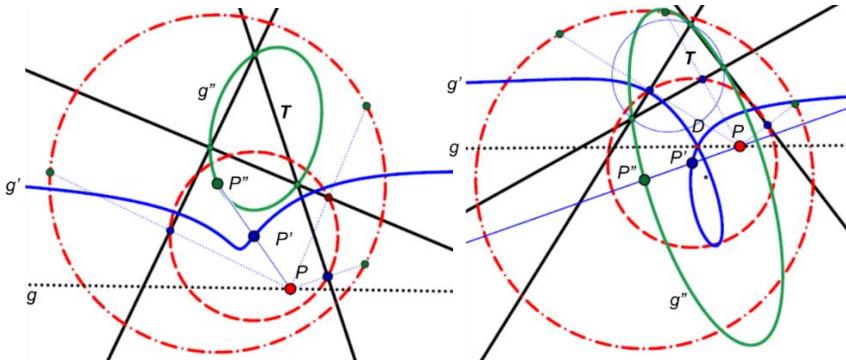


Fig. 7: Wallace-Simson mappings  $\omega_1: P \rightarrow P'$  and  $\omega_2: P \rightarrow P''$  with respect to a triangle  $T$ ;  $\omega_1$  is a cubic mapping,  $\omega_2$  is quadratic and identically with the Miquel-mapping  $\mu$ .

#### 4 Combining the theorems of Miquel, Wallace-Simson and Bodenmiller for a quadrilateral $Q$

It is well-known that the Miquel-point  $M$  of a quadrilateral  $Q$  is the focus  $F$  of the single parabola  $p$  touching  $Q$ . Applying the theorem of Wallace-Simson to this point  $W = F$  we get the Wallace-Simson line as connection of the four collinear reflection points  $W_i$  of  $W$  at  $Q$ . This line must pass through the orthocentres  $O_i$  of the four partial triangles of  $Q$  and it acts as the directrix line of parabola  $p$  and as the Bodenmiller-line of  $Q$ , see Fig. 8. The Gauss-line  $g$  of  $Q$  is parallel to the axis of  $p$  and its ideal point is the  $\omega_2$ -image of  $F = M = W$ .

Now we consider the dual pencil of conics  $c$  which touch  $Q$ . We have already mentioned that the locus of centres  $P'$  of these conics is the Gauss-line  $g$  of  $Q$ . We add now that the pencil of “Bodenmiller-circles”  $b$  to  $Q$  consists of the *orthoptic circles* to the conics  $c$ , see Fig. 9. (If  $a, b$  are the lengths of the semi-axes of  $c$ , then the radius of  $b$  is  $r = \sqrt{a^2 \pm b^2}$ .)

Now the question arises: What is the locus of the focal points  $P, P''$  of all the conics  $c$  to  $Q$ ? From the Wallace-Simson mappings  $\omega_1, \omega_2 = \mu$  follows that

–  $P, P''$  must be symmetric to  $P' \in g$  and

– the four reflection points of  $P$  at  $Q$  must be concyclic, the circle being a directrix circle  $d$  to conic  $c$  with foci  $P, P''$  and centre  $P'$ .

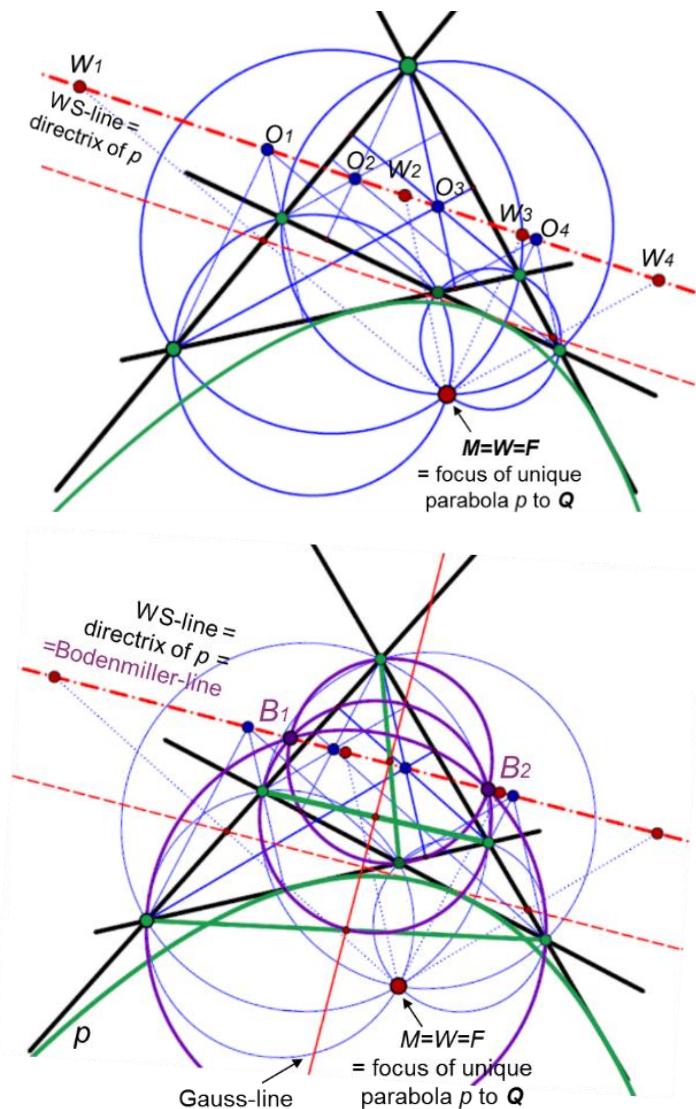
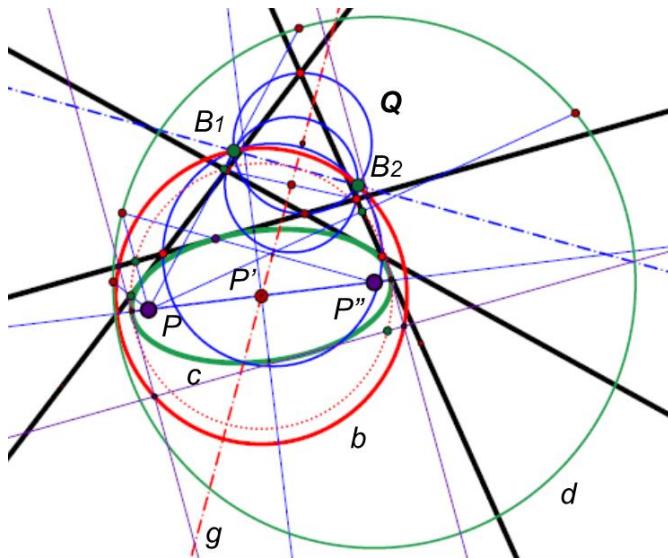


Fig. 8: Theorems of Wallace-Simson, Miquel, and Bodenmiller to a quadrilateral  $Q$  and the single parabola to  $Q$ .



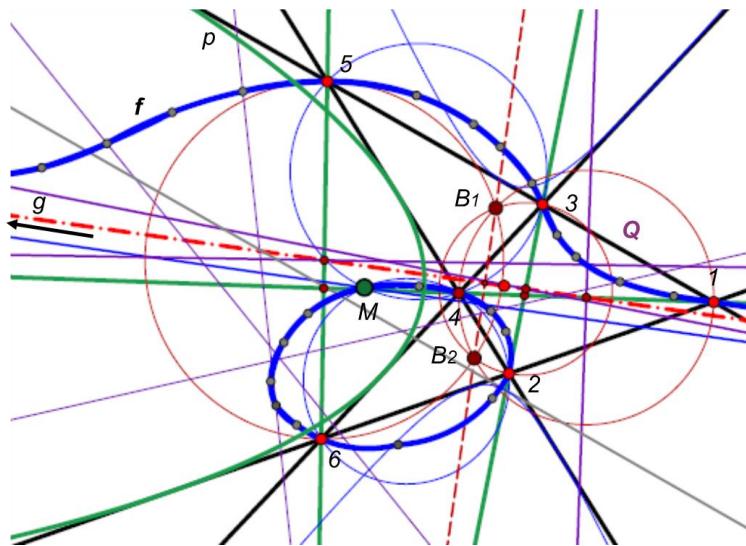
**Fig. 9:** The Bodenmiller-circles  $b$  are the orthoptic curves to the conics  $c$  touching  $Q$ .

These Wallace conditions will give rise to a “focal curve”  $f$  to  $Q$ . As the diagonal segments of  $Q$  belong to the pencil of touching conics as singular conics, the three pairs of vertices of  $Q$  are already known focal points. The Miquel-point  $M = F$  of  $Q$  and the ideal point of the Gauss-line  $g$  are additional focal points, such that  $f$  must pass through these 8 points. It turns out that  $f$  is a circular cubic, i.e.  $f$  passes through the pair of conjugate imaginary absolute points on the ideal line of the projective extended Euclidean plane  $\pi$ . We collect these statements in

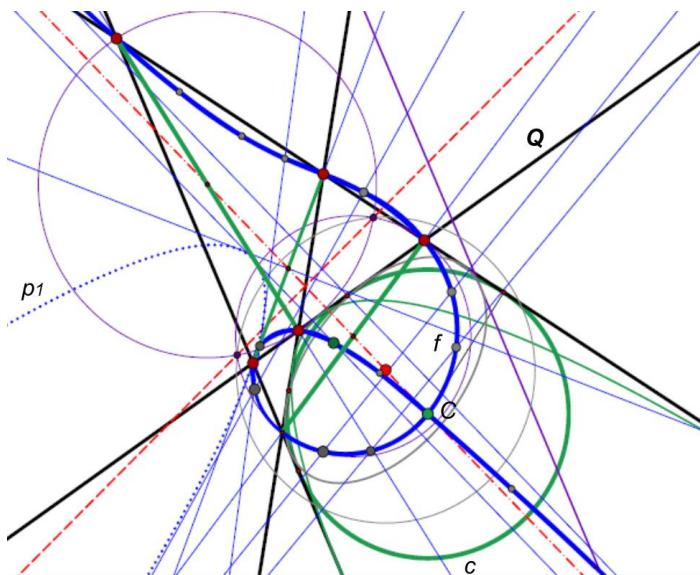
**Theorem 4:** The focal curve  $f$  of a generic quadrilateral  $Q$  in the projective extended Euclidean plane  $\pi$  is a circular cubic of genus 1. It passes through the 6 vertices of  $Q$  and the Focus of the single parabola  $p$  to  $Q$  and its real ideal point is the ideal point of the Gauss-line  $g$  of  $Q$ . The focal cubic  $f$  contains all real and complex focal points of conics touching  $Q$ .

If especially  $Q$  is a tangent quadrilateral of a circle  $c$ , but still general, then  $f$  is a rational circular cubic with its double point at the centre  $C$  of  $c$ . In this special case the axes of the conics to  $Q$  envelop a parabola  $p_1$  and the Gauss-line is its (orthoptic) directrix.

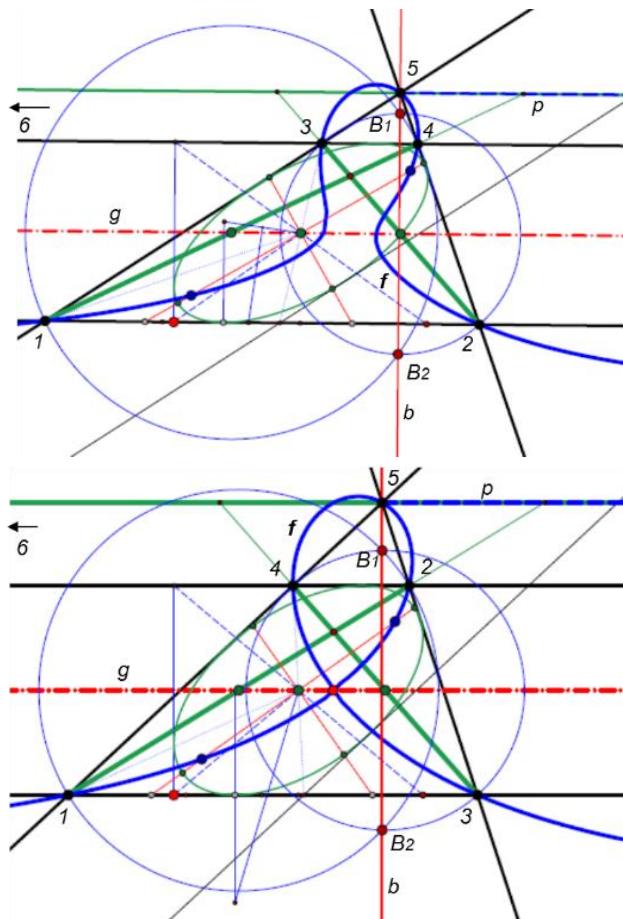
We visualize Theorem 4 in Fig. 10 and 11.



**Fig. 10:** The focal curve  $f$  to a general quadrilateral  $Q$  is a circular cubic of genus 1.

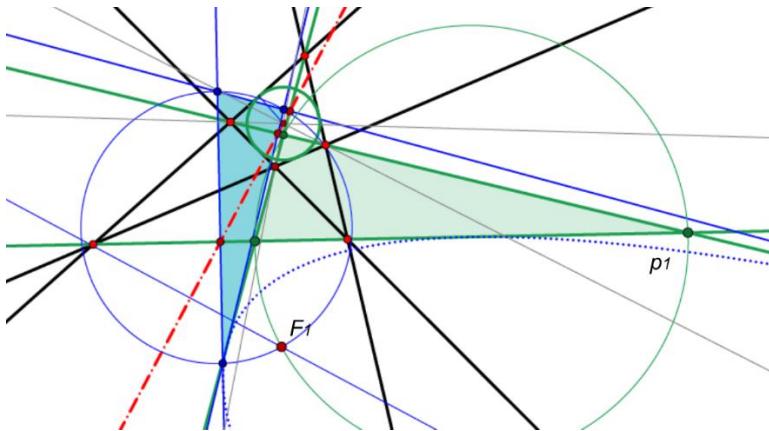


**Fig. 11:** The focal curve  $f$  to a quadrilateral  $Q$ , which touches a circle  $c$  is a rational circular cubic. The axes of the conics touching  $Q$  envelop a parabola  $p_1$  with the Gauss-line of  $Q$  as directrix.



**Fig. 12:** The focal curve  $f$  to a general trapezium  $Q$  (left) and to one touching a circle (right). The focal curve  $f$  is circular cubic of genus 1 (left) resp. a rational circular cubic (right). The unique parabola  $p$  is degenerated.

Let us consider the diagonals of  $Q$ : They are axes of singular conics and so are their normals at the diagonal midpoints. These 6 lines plus the axis of the unique parabola  $p$  envelop the “axis-curve” of  $Q$ . For the special case of a quadrilateral  $Q$  touching a circle (but not being symmetric) this axis-curve is a parabola  $p_1$ . As the diagonal triangle of  $Q$  is a tangent triangle of  $p_1$ , its circumcircle passes through the focus  $F_1$  of  $p_1$ . The normal at the midpoints of the diagonal segments are a second tangent triangle of  $p_1$  such that it becomes obvious how to get the axis parabola  $p_1$ , see Fig. 13. The tangents of  $p_1$  define the “focal involution” in the rational focal cubic  $f$ .

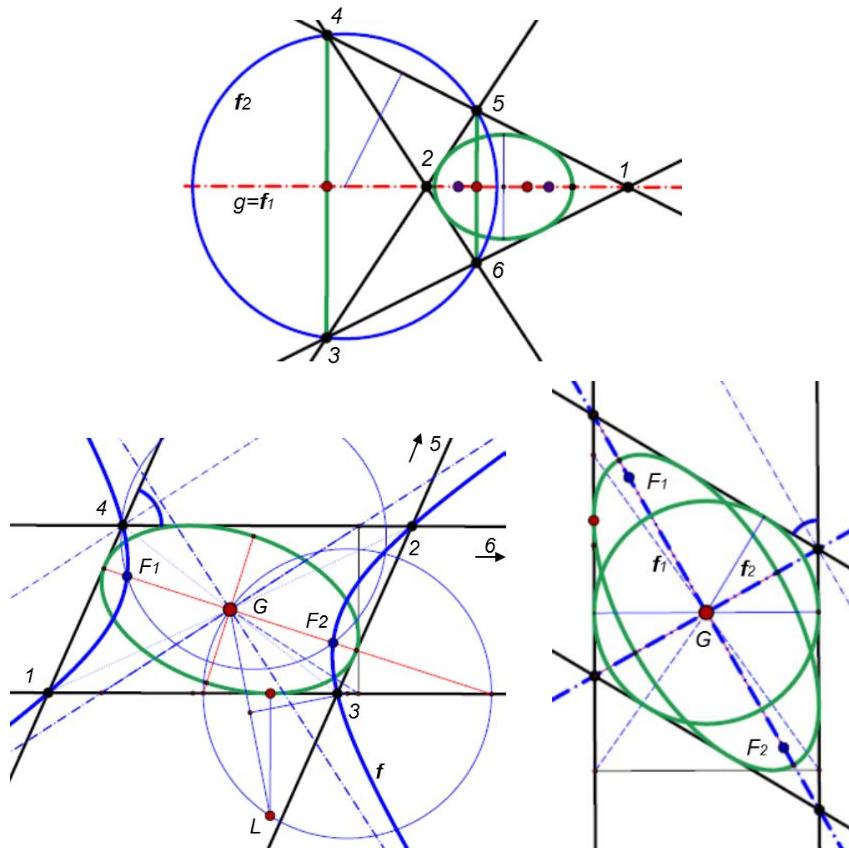


**Fig. 13: The curve enveloped by the axes of the conics to a quadrilateral  $Q$ , which touches a circle  $c$  is a parabola  $p_1$ . The circumcircle of the diagonal triangle of  $Q$  passes through the focus of  $p_1$ .**

The results to Fig. 10, 11 and 12 give rise to sort of a *classification scheme* of quadrilaterals:

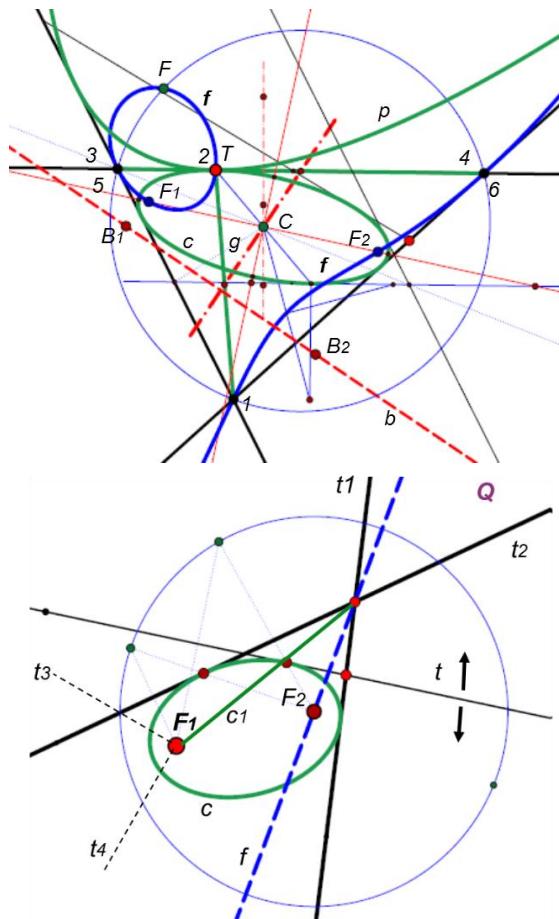
- The general case of  $Q$  and a general trapezium has a circular focal cubic  $f$  of genus 1.
- The focal curve  $f$  to  $Q$  is a rational circular cubic, if (and only if)  $Q$  touches a circle  $c$  but is not symmetric.
- The focal cubic  $f$  to a proper  $Q$  is reducible (with real components), if  $Q$  is a parallelogram or  $Q$  is symmetric:
  - $f$  consists of a circle and the symmetry axis  $g$  of  $Q$ , if  $Q$  is a deltoid.
  - $f$  is an equilateral hyperbola plus the ideal line, if  $Q$  is a not symmetric parallelogram,
  - $f$  consists of two orthogonal lines plus the ideal line, if  $Q$  is a rhombus.

We see that classifying quadrilaterals on the basis of their focal curve  $f$  leads to the usual elementary geometric classification of quadrangles. The degenerate cases of  $f$  are visualized in Fig. 14.



**Fig. 14:** Focal curves  $f$  to special cases of quadrilaterals  $Q$ .

For  $Q$  with imaginary lines and for “collapsed” quadrangles there are additional cases to discuss. For example, H. Stachel stated in a lecture given at the same occasion that if  $Q$  contains 1 or even 2 line elements, then the focal curve  $f$  is a rational circular cubic. For conics having a common focus  $F_1$  and touching two tangents  $t_1, t_2$  the other real focus  $F_2$  belongs to a real line through  $t_1 \cap t_2$ , while the imaginary foci are incident with the isotropic lines through  $F_1$ , see Fig. 15.

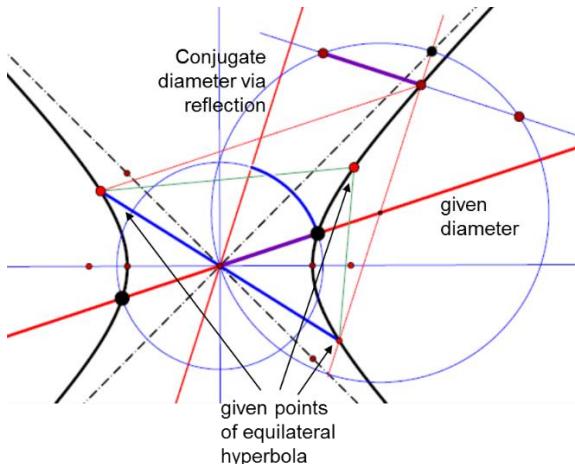


**Fig. 15:** The focal curve  $f$  to a degenerate quadrilateral  $Q$  which consists of a line element and two lines is a circular cubic of genus 1 (left). The focal curve  $f$  of  $Q$  consisting of two real lines and two isotropic lines is reducible with these isotropic lines and a proper real line as components (right).

## 5 Concluding remarks

The results described in Chapt. 4 can be used to construct a conic  $c$  given by 5 tangents. Usually one applies the theorem of Brianchon (dual to Pascal's theorem) to find line elements of  $c$  or one interprets  $c$  as the perspective collinear image of a circle, a method widely usual in Descriptive geometry. We propose to apply the theorem of Gauss to at least two of the partial quadrilaterals of the 5-line to get the midpoint  $C$  of  $c$ . By reflecting given tangents at  $C$  it is possible to find tangent parallelograms of  $c$ . The diagonals of tangent parallelograms are conjugate diameter lines of  $c$  and two such diagonal pairs define the involution

of conjugate diameters of  $c$ . The focal points of  $c$  are intersections of the equilateral focal hyperbola  $f$  to one of the tangent parallelograms with an axis of  $c$ . As  $f$  and  $c$  are concentric, one has to intersect an equilateral hyperbola with a diameter line of it, see Fig. 16.

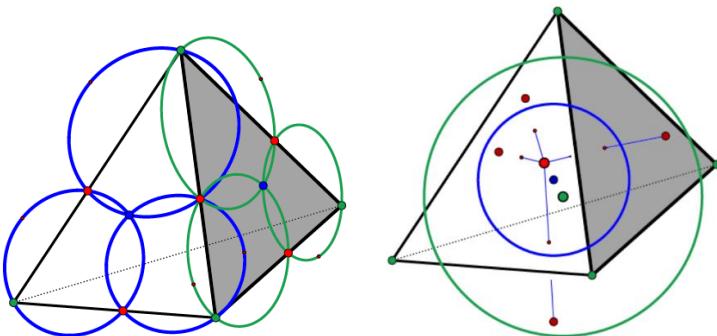


**Fig. 16: Intersection of an equilateral hyperbola with a diameter line.**

Both, Miquel's elementary geometric construction as well as the two Wallace-Simson-mappings have  $n$ -dimensional counterparts:

For example, given a tetrahedron  $T$  one can start with arbitrarily chosen spheres  $\sigma_i$  through the vertices of  $T$  such that they intersect the faces of  $T$  in planar Miquel figures, see Fig. 17 (left). As three of the spheres already define the fourth one, the four spheres must be dependent. It seems to be an open question to describe this dependency. To the Miquel-figures in the four faces of  $T$  one could apply the planar Miquel-mappings receiving another set of four dependent spheres  $\sigma'_i$ .

Similarly one can formulate Wallace-Simson mappings for tetrahedral  $T$ : Given a point  $P$ , then its reflection points at the four faces of  $T$  define a sphere, the centre of which is the Wallace-Simson image  $P''$  of  $P$  with respect to  $T$ . The pedal points of  $P$  in the faces of  $T$  define another sphere and its centre  $P'$  is the image of  $P$  under the second Wallace-Simson mapping, see Fig. 17 (right). Also here the geometric meaning of these mappings seems not to be known. In [7] the locus of  $P$  with coplanar reflection points is discussed and determined as a cubic surface.



**Fig. 17: Three-dimensional extensions of Miquel's and Wallace-Simson's mappings.**

An obvious way to generalize the quadrilateral version of Miquel's theorem is to study the circumspheres of the 5 partial tetrahedra of a “5-plane”, i.e. 5 planes forming the 3D-configuration of Desargues. As two partial tetrahedra define the remaining three, the five circumspheres must be surely dependent. The description of the dependency is an open problem, too. This construction can easily be adapted to an “ $(n+2)$ -hyperplane” in an Euclidean  $n$ -space.

An affine generalisation would be to consider the Steiner-conics to the four partial triangles of a quadrilateral. Also here there must be a dependency, which seems to be not yet treated. A projective geometric object connected with a quadrilateral  $Q$  is the set of 6 Cevians of a point  $P$  with respect to the partial triangles of  $Q$ .

Concluding one might see from the presented examples that there are still many open problems arising from the simple figure  $Q$  and its higher dimensional counterparts and one can surely still will find deeper interrelations between elementary geometric theorems, which usually are treated for their own. Also a treatment in non-Euclidean geometries, especially in hyperbolic or elliptic geometry, is of interest. Because of valid duality in these geometries one receives results for quadrangles, too.

## References

- [1] *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, B.G. Teubner Verlag, Leipzig 1904-1935, Vol. 3 „Geometrie“: Vol. 3-1-2: M. Zacharias: Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung (1913); G. Berkhan, W. F. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie (1914); Vol. 3-2-1: F. Dingeldey: Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme (1903).

- [2] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: The Universe of Conics: From the ancient Greeks to 21st century developments. Springer Spektrum 2016, ISBN 978-3-662-45450-3.
- [3] R. A. Johnson: Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle. Boston, MA: Houghton Mifflin, pp. 131-144, 1929.
- [4] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers – ETC.  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [5] P. Pech: On Simson-Wallace Theorem and Its Generalizations. In Journal for Geometry and Graphics 9 (2005), 141-156.
- [6] C. van Tienhoven:  
<http://www.chrisvantienhoven.nl/index.php/quadrilateral-objects/17-mathematics/encyclopedia-of-quadri-figures/quadrilateral-objects/artikelen-ql/105-ql-p3>
- [7] G. Weiss: Die Viewseiteigenschaften von Bodenmiller und Steiner, math.-stat. Section Forschungszentrum Graz, Austria, Bericht 167 (1981), pp.1-20.

# An Introduction to Rational Trigonometry and Chromogeometry

Norman J. Wildberger

*School of Mathematics and Statistics, UNSW Sydney 2052 Australia*

**Abstract.** Rational trigonometry is a powerful algebraic approach to computational geometry that has significant conceptual and practical advantages. We will look at some interesting applications that bring out the power and generality of this new way of looking at an old subject.

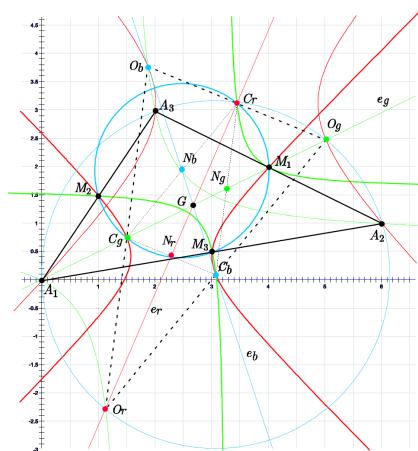
*Keywords:* Rational Trigonometry, chromogeometry

*Rational trigonometry* was developed in 2005 in the book *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry* by N J Wildberger, and gives a much simpler, more powerful and accurate theory of trigonometry. Computations run much faster, and can often be full precision or algebraic. The theory allows us to extend Euclidean geometry to *universal geometry*: this is metrical geometry with a general bilinear form. In particular *relativistic geometry* is in this way brought together with Euclidean geometry. Rational trigonometry works over arbitrary fields, not of characteristic two, and in particular it has a rich combinatorial aspect in the case of finite fields.

Universal geometry also leads to *chromogeometry*: a remarkably intertwined triple of planar geometries which transcends Klein's Erlangen program. There are three natural metrical geometries in the plane, determined by the natural basis of two by two symmetric matrices given by

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

The first is the usual quadratic form, called *blue*, which is associated to Euclidean geometry, while the latter two, called respectively *red* and *green*, give naturally relativistic geometries. The relation between these three is particularly fascinating, as it turns out that they interact in a highly non-trivial way. Here for example is an illustration of the three different coloured Euler lines of a triangle, namely  $e_b$ ,  $e_r$  and  $e_g$ , showing how they are the median lines of the Omega triangle of the original triangle formed by the respective orthocenters  $O_b$ ,  $O_r$  and  $O_g$ .



Rational trigonometry gives new views on triangle geometry and conic sections, a simpler and more general approach to *hyperbolic geometry as well as spherical/elliptic geometry*, and opens the possibility of dramatically *simplifying high school maths education*. In this presentation we will give an overview of this exciting new approach to planar geometry and some of the applications to chromogeometry, special functions, and even the geometry of the ZOME construction system.

## CONTRIBUTED TALKS



# On certain invariants of a knot associated with a plane curve singularity

Martina Bátorová

*Department of Algebra, Geometry and Didactics of Mathematics*

*Faculty of Mathematics, Physics and Informatics*

*Comenius University in Bratislava, Slovakia*

*[martina.batorova@fmph.uniba.sk](mailto:martina.batorova@fmph.uniba.sk)*

**Abstract.** Basic notions of the theory of knots associated with singular points of algebraic curves defined over the field of complex numbers are presented. Their properties and construction are summarized. Some of their topological invariants – linking number and tricolorability – are presented and chosen polynomial invariants (e.g. Alexander and Alexander-Conway polynomial) are mentioned. Their construction or computation details with notes on their interconnection and possible mutual conversions are given. Notions are demonstrated using suitable examples and pictures.

*Keywords:* knot invariant, linking number, tricolorability, Alexander polynomial, Alexander-Conway polynomial

## 1 Introduction

This paper gives basic information about certain invariants of knots associated with a affine plane curve singularity.

We recall basic notions of the theory of plane curve singularities (see section 1.1) and summarize necessary properties and information on knots associated with them (in section 2). Then we proceed to certain invariants of these knots, giving some details of their construction resp. computation, with notes on their interconnection and possible mutual conversions. We illustrate presented notions using suitable examples and figures. All the used sources are referenced at the end of the paper.

### 1.1 Basic notions and definitions

Let  $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  be an affine plane over the field of complex numbers  $\mathbb{C}$  and let  $f \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $\deg(f) > 0$  be a non-constant square-free polynomial in 2 indeterminates  $x, y$ . An *affine plane algebraic curve* is the set

$$\mathcal{V}(f) := \{(p_1, p_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \mid f(p_1, p_2) = 0\}.$$

The polynomial  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  is called the *defining polynomial* of the curve  $\mathcal{V}(f)$ . We define the *degree of the curve*  $\mathcal{V}(f)$  to be the degree of its defining polynomial  $f$ , i.e.  $\deg(\mathcal{V}(f)) := \deg(f)$ .

The affine plane algebraic curve  $\mathcal{V}(f)$  is said to be *irreducible* iff  $f$  is irreducible, otherwise it is called *reducible*. Any reducible curve can be uniquely decomposed into a set of irreducible curves, an irreducible part of the curve is called an *(irreducible) component* of the curve. Each

of the components  $\mathcal{V}(f_i)$  is a zero set of an irreducible factor  $f_i$  of the defining polynomial  $f$  of the curve  $\mathcal{V}(f)$ , i.e. if  $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_s$ , then  $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}(f_s)$ .

The affine plane algebraic curve  $\mathcal{V}(f) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  consists of two types of points. The point  $P \in \mathcal{V}(f)$  is called a *singular point* of  $\mathcal{V}(f)$ , if both partial derivatives  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  vanish at  $P$ . A point which is not singular is called *regular*. Its *multiplicity* is given by the order  $m$  of the first non-vanishing partial derivative of  $f$  at  $P$ ; here,  $P$  is called an  *$m$ -fold point* of  $\mathcal{V}(f)$ .

We say that the curve  $\mathcal{V}(f)$  is *regular* if all its points are regular, otherwise it is called *singular*.

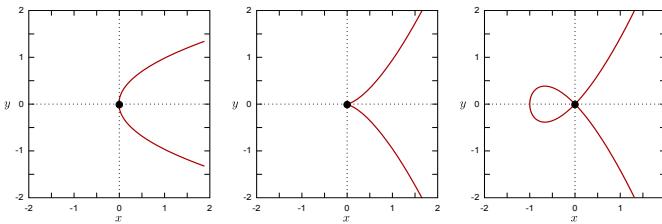


Figure 1: Regular parabola (left), singular semicubical parabola  $\mathcal{V}(y^2 - x^3)$  (middle), singular node curve  $\mathcal{V}(y^2 - x^3 - x^2)$  (right).

## 2 Knot associated with a plane curve singularity

A complex curve  $\mathcal{V}(f) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$  can be considered as a real surface in  $\mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ . If  $\mathcal{V}(f)$  is irreducible, its intersection  $\mathcal{K}$  with a small sphere  $\mathbb{S}_\varepsilon^3$  around the singularity is called a *knot* associated to a singularity of  $\mathcal{V}(f)$ , i.e.  $\mathcal{K} := \mathcal{V}(f) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^3$ . The knot is independent of the sphere radius  $\varepsilon$  for sufficiently small  $\varepsilon > 0$ . If  $\mathcal{V}(f)$  is reducible, the construction  $\mathcal{V}(f) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^3$  results in a *link*  $\mathcal{L}$ , which is a union of linked knots:  $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{K}_i$ . Here, each component  $\mathcal{K}_i$  corresponds to one of the  $s$  irreducible components of  $\mathcal{V}(f)$ .

Figure 2 depicts the *unknot (trivial knot)* corresponding to a regular point of given curve (left), e.g. a parabola (figure 1.1 left). The *trefoil* (middle) is the knot associated to the singularity of the semicubical parabola  $\mathcal{V}(y^2 - x^3)$  (figure 1.1 middle); this is also the simplest non-trivial knot. The *Hopf link* (right) is the link associated to the singularity of the node curve  $\mathcal{V}(y^2 - x^3 - x^2)$  (figure 1.1 right); this is also the simplest possible link.

Each singular point of an (ir)reducible curve is associated with a link (knot) which is unique up to an isomorphism. The equivalence class is independent of the choice of coordinates. Thus, the topology of given

singularity is determined uniquely by the topology of its associated knots, and to classify singularities of curves topologically, we need to classify only their associated knots (links).



Figure 2: Basic knots and links: unknot (left), trefoil (middle), Hopf link (right).

The knot itself can be defined as a topological object (i.e. independently of the curve  $\mathcal{V}(f)$ ) as a set  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  homeomorphic to  $\mathbb{S}^1$  and provided with an orientation. Link is just a finite set of knots, not necessarily linked together (see figure 3). This definition encompasses a broader set of knots than only those associated with singularities of algebraic curves – these are a proper subset of the set of all possible knots. To study either type, we use the tools of knot theory.

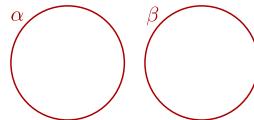


Figure 3: Link composed of two unknots not linked together – the *2-unlink* – is not associated with any plane curve singularity.

## 2.1 Knot diagram. Reidemeister moves.

Both knots and links may be represented using *knot diagrams*. Here, the initial regular projection of given knot (link) to plane is transformed to a 4-valent graphs, where vertices are decorated with over- and undercrossings, optionally with orientation depicted, see figure 4.

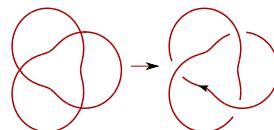


Figure 4: Construction of an oriented diagram of a trefoil knot.

A knot  $\mathcal{K}$  may be represented by many knot diagrams. These can be acquired using either different projection of  $\mathcal{K}$  to plane, or by a proper change of any available diagram of  $\mathcal{K}$ ; by a proper change we mean a succession of local modification of given diagram that does not change the topology of  $\mathcal{K}$ .

These steps are known as *Reidemeister moves* (see figure 5) and it can be shown that they indeed allow construction of various diagrams of the same knot, resp. transition from one knot diagram to any other diagram of the same knot.

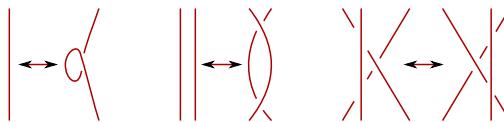


Figure 5: The three Reidemeister moves, from left to right: (un)twist (R1), (un)poke (R2) and slide (R3).

Two knots (links)  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{K}'$  are *equivalent* when there is a orientation preserving homeomorphism which maps  $\mathcal{K}$  to  $\mathcal{K}'$  – the knots (links) are thus studied up to equivalence. It can be shown that equivalent knots yield diagrams that are equivalent under the three Reidemeister moves, i.e. a knot diagram of the knot  $\mathcal{K}$  can be transformed to a knot diagram of  $\mathcal{K}'$  using only R1, R2 and R3.

### 3 Invariants of given knot

To study knots (links), e.g. to describe their complexity, topology and properties, we may use the so called *knot invariants*. These are intrinsic (fixed) values (qualities) invariant under certain group of transforms. They characterize the structure and topology of given knot (link) either completely or (to some) extent.

Some invariants are e.g. an algebraic structure (the fundamental group), a number (the linking number), a boolean (the tricolorability), a polynomial (the Alexander-Conway polynomial) etc. They are mainly used to distinguish two knots, i.e. to decide whether two knots are equivalent:

$$\mathcal{K}, \mathcal{K}' \text{ are equivalent} \iff \text{given invariant is the same for both } \mathcal{K}, \mathcal{K}'.$$

The "  $\implies$  " part distinguishes two knots that are *not* equivalent, the opposite one is true for *complete* invariants, but these are in most cases computationally inaccessible.

### 3.1 Linking number

The *linking number* is a numerical invariant of two intertwined (linked) knots. It can be calculated as follows. At first, we assign to each crossing  $c$  of the two knots  $\alpha, \beta$  (not self-intersections) the number  $\varepsilon(c) = \pm 1$  using the rule from figure 6 (left and middle). After that, the linking number is computed as

$$\text{lk}(\alpha, \beta) := \frac{1}{2} \sum_{c \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(c).$$

As an example, we can use the *Whitehead link* (figure 6 right). Here,  $\varepsilon(c_2) = \varepsilon(c_4) = +1$ ,  $\varepsilon(c_1) = \varepsilon(c_3) = -1$ , thus  $\text{lk}(\alpha, \beta) = 0$ . The linking number of the 2-unlink (figure 3) is also 0. We see that the linking number of two unlinked knots is 0, but two knots with linking number 0 can be linked.

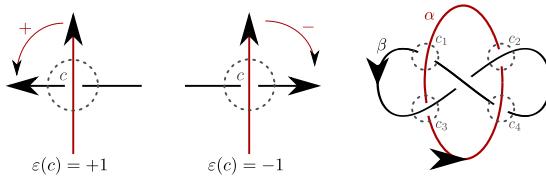


Figure 6: To each crossing of the two strands, we assign  $+1$  when the orientation of the strands is positive (left) and  $-1$  when negative (middle). The four crossings of the Whitehead link (right).

Reversing the orientation of one of the strands reverses the linking number, reversing both does not change the linking number.

### 3.2 Tricolorability

*Tricolorability* is a boolean invariant of the knots – any knot either is or is not tricolorable. To determine the tricolorability of the knot, two rules are used:

1. at least two colors are used (otherwise any knot would be trivially tricolorable),
2. at each crossing, the three strands are either all the same or all different colors.

We see that the 2-unlink (figure 3), Reidemeister moves and the trefoil (figure 7) are tricolorable, the unknot is not tricolorable (thus any tricolorable knot is non-trivial). Also, any composition of a tricolorable knot with another knot is always tricolorable.

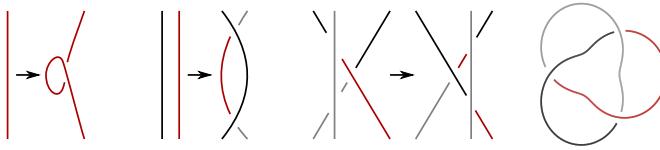


Figure 7: Reidemeister moves and the trefoil (right) are tricolorable.

### 3.3 Alexander polynomial $\Delta(t)$

The *Alexander polynomial*  $\Delta(t)$  is a polynomial invariant of knots. It can be constructed via multiple techniques, we shall use any oriented diagram of given knot.

Below on the left is the general algorithm. On the right is the computation of  $\Delta(t)$  for the trefoil – it has  $n = 3$  crossings and 5 regions (denoted by Roman numerals I – V, taking into consideration also the area surrounding the diagram). Elements of the matrix  $\mathbb{M}_K$  are determined using the crossing diagram (values  $\pm t, \pm 1$ ), value 0 is entered whenever the region is not adjacent to given crossing.

1.  $n := \# \text{ of crossings} \rightsquigarrow n + 2 \text{ regions}$
2. construct incidence matrix  $\mathbb{M}_K$ :  

rows	$\rightsquigarrow$	crossings
columns	$\rightsquigarrow$	regions
regions	$\rightsquigarrow$	$0, 1, -1, t, -t$

 (see crossing diagram on the right)
3. remove any two columns corresponding to two adjacent regions  $\rightsquigarrow n \times n$  submatrix  $\mathbb{M}_K^n$
4.  $\Delta_K := \text{determinant of } \mathbb{M}_K^3$
5. normalize the polynomial: divide by  $\pm t^{\pm k}$  so that the absolute term is positive and the polynomial is symmetric in  $\{t, t^{-1}\}$ .

+t		-1
-t	↑	+1

The trefoil knot diagram is shown with five regions labeled I through V. Region I is the top-right region, II is the middle-right, IV is the bottom-right, III is the bottom-left, and V is the top-left. Arrows indicate orientation: from I to II, from II to IV, from IV to III, from III to I, and from I back to II.

	I	II	III	IV	V
1	$-t$	1	0	-1	$t$
2	0	1	-1	$-t$	$t$
3	-1	1	$-t$	0	$t$

$\underbrace{|\mathbb{M}_K^3|}_{= t^2 - t + 1} \rightsquigarrow \Delta_K = -\frac{1}{t} \cdot |\mathbb{M}_K^3| = 1 - t - \frac{1}{t}$

### 3.4 Alexander-Conway polynomial $\nabla(t)$

To construct the *Alexander-Conway polynomial*  $\nabla(t)$  of given knot  $K$ , we again need any oriented diagram of  $K$ . We prescribe the *skein relations* – recursive formulae used to construct the polynomial:

$$\begin{aligned} \nabla_K(\odot) &= 1 \\ \nabla_K(L^+) - \nabla_K(L^-) &= t \cdot \nabla_K(L^0), \end{aligned}$$

where  $L^+, L^0, L^-$  are three possible positions of two strands (see figure 8) and  $\odot$  denotes any diagram of the unknot.

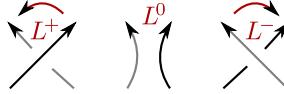


Figure 8: Three possible positions of two strands.

The Alexander-Conway polynomial of the 2-unlink  $\mathcal{U}$ , Hopf link  $\mathcal{H}$  and trefoil  $\mathcal{T}$  can be computed directly as follows:

$$\begin{aligned} t \cdot \nabla_{\mathcal{U}} \left( \text{unknot}_{L^0} \right) &= \nabla_{\mathcal{U}} \left( \text{unknot}_{L^+} \right) - \nabla_{\mathcal{U}} \left( \text{unknot}_{L^-} \right) = \\ &= \nabla_{\mathcal{U}}(\odot) - \nabla_{\mathcal{U}}(\odot) = \\ &= 1 - 1 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{H}} \left( \text{unknot}_{L^+} \right) &= t \cdot \nabla_{\mathcal{H}} \left( \text{unknot}_{L^0} \right) + 1 \cdot \nabla_{\mathcal{H}} \left( \text{unknot}_{L^-} \right) = \\ &= t \cdot \nabla_{\mathcal{H}}(\odot) + 1 \cdot \nabla_{\mathcal{U}}(L^0) = \\ &= t \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \mathbf{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{T}} \left( \text{unknot}_{L^+} \right) &= t \cdot \nabla_{\mathcal{T}} \left( \text{unknot}_{L^0} \right) + 1 \cdot \nabla_{\mathcal{T}} \left( \text{unknot}_{L^-} \right) = \\ &= t \cdot \nabla_{\mathcal{H}}(L^+) + 1 \cdot \nabla_{\mathcal{T}}(\odot) = \\ &= t \cdot \mathbf{t} + 1 \cdot 1 = t^2 + 1 \end{aligned}$$

The Alexander-Conway polynomial  $\nabla_{\mathcal{K}}(t)$  is related to the Alexander polynomial  $\Delta_{\mathcal{K}}(t)$  of the same knot  $\mathcal{K}$  via reparameterization

$$\nabla_{\mathcal{K}}(t - 1/t) = \Delta_{\mathcal{K}}(t^2),$$

where this equality holds up to multiplication by a constant. In case of the trefoil, we see that truly

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{T}}(t - t^{-1}) &= (t - t^{-1})^2 + 1 = t^2 - 2 \cdot t \cdot t^{-1} + t^{-2} + 1 = \\ &= t^2 - 1 + t^{-2} = (-1) \cdot \Delta_{\mathcal{T}}(t^2). \end{aligned}$$

## 4 Conclusion

We shortly summarized basic notions regarding knots and links associated with singularities of complex plane algebraic curves, along with several of their topological invariants. Their construction or computation details were given, using suitable examples and pictures.

## Acknowledgements

The author has been supported by the project VEGA 1/0330/13.

## References

- [1] E. Brieskorn, H. Knörrer: *Plane Algebraic Curves*. Springer-Verlag New York Inc, New York, 1986.
- [2] V. O. Manturov: *Knot Theory*.  
[available online:] <http://varf.ru/rudn/manturov/book.pdf>.
- [3] C. C. Adams: *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. W. H. Freeman and Company, New York, 2001.
- [4] R. H. Crowell, R. H. Fox: *Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Volume LVII. Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
- [5] C. Livingston: *Knot Theory*. The Carus Mathematical Monographs, Volume XXIV. The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1993.

# Local Properties of Algebraic Curves Using Rational Puiseux Series

Eva Blažková, Zbyněk Šír

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague*

*Sokolovská 83, Praha 8, 186 75, ČR*

*eblazkova@karlin.mff.cuni.cz*

*sir@karlin.mff.cuni.cz*

**Abstract.** In this paper we apply the rational Puiseux series to study the local properties of algebraic curves at their singular points. In particular we exploit the existence of a bijection between the curve real branches and set of rational Puiseux series at a given point of the curve. We determine the quadrant which contains any curve half-branch and find the mutual position of all the branches. All this information is extracted from a certain tree representation without the necessity of computing the Puiseux series explicitly. This study is meant as an element for our new method for a topologically accurate approximation of algebraic curves.

*Keywords:* rational Puiseux series, local topology, algebraic curve, singularity, branch

## 1 Introduction

In [2, 3] we proposed a novel approach to study the topology of algebraic curves. It is based on three fundamental steps. In the first we identify the singular (and some other critical) points and all the branches at these points. Then we study the connectivity of these branches. Eventually we approximate all the connecting segments.

For the seek of completeness let us recall that there exist also a completely different approach which is based on subdivision. The only certified algorithm (i.e. one which gives the correct output for every input) based on subdivision is [1]. This algorithm subdivides the studied region into *regular regions* (the curve is smooth inside) and *regions with singular points*, which can be made sufficiently small. The topology inside the regions containing a singular point is recovered from the information on the boundary using the topological degree.

In this paper we present some results which improves the first step of our algorithm, more precisely the identification of all the branches at a singular point. First we describe the system of rational Puiseux series introduced in [5]. These are certain generalizations of the standard Puiseux series [6, chapter IV] which are in bijection with real branches (through the origin) of a given algebraic curve. We also shortly recall the algorithm to find rational Puiseux series. In the second section we improve the ideas given in [4]. We deduce the local position of the branches. The singular part of Puiseux series determines in which quadrant(s) the given

branch lies. Also, the singular part implies the clockwise order of the curve branches.

## 2 Rational Puiseux Series

Through this paper we suppose that the polynomial  $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$  is a monic and irreducible in  $\mathbb{C}[x, y]$ . We denote by  $\mathcal{C}_f$  the set of corresponding affine points

$$\mathcal{C}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

**Definition 1.** Let  $C_f$  be a curve,  $t$  be a variable and  $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in (\mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{Q})^2$ .  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$  is called a *parametrization* of  $C_f$  if  $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ .

Parametrization  $[\tilde{x}_1, \tilde{y}_1]$  and  $[\tilde{x}_2, \tilde{y}_2]$  are *equivalent* if there exists  $z \in \mathbb{R}[[t]]$  linear in  $t$  such that  $\tilde{x}_1(z) = \tilde{x}_2$  and  $\tilde{y}_1(z) = \tilde{y}_2$ .

The equivalence classes of irreducible parametrizations of  $\mathcal{C}_f$  are called *branches*.

**Definition 2.** The field of *Puiseux series* is

$$\mathbb{Q}\langle\langle t \rangle\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}((t^{1/k})),$$

where  $\mathbb{Q}((t^{1/k}))$  denotes formal Laurent series in  $t^{1/k}$ .

In [6, IV.3] it is shown that  $\mathbb{Q}\langle\langle x \rangle\rangle$  is algebraically closed. It means that the roots of  $f$  as a polynomial in  $y$  are Puiseux series in  $x$ . We will call these roots *Puiseux series of  $f$* .

**Definition 3.** To each Puiseux series  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^{i/n}$  corresponds the *parametrization*  $[\tilde{x}, \tilde{y}]$  defined as follows:

$$\tilde{x}(t) = t^n \quad \tilde{y}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i. \quad (1)$$

For applications, the disadvantage of Puiseux series is that more parametrizations corresponding to Puiseux series can be equivalent, i.e. that more Puiseux series can describe the same branch of the curve. Duval in [5] introduced the system of rational Puiseux series, where each parametrization corresponds to precisely one branch.

**Definition 4.** Let  $y_1, y_2, \dots, y_s$  be Puiseux series of  $f$  and  $\{[\tilde{x}_j, \tilde{y}_j]\}_{j=1}^s$  be corresponding parametrization. Let  $r$  denote the maximal number of non-equivalent parametrization (branches) between  $\{[\tilde{x}_j, \tilde{y}_j]\}_{j=1}^s$ . *System of rational Puiseux series of  $f$  over  $\mathbb{Q}$*  is the set

$$\{[\tilde{x}'_j, \tilde{y}'_j]\}_{j=1}^r$$

of pairwise non-equivalent irreducible parametrization of  $\mathcal{C}_f$ , which is invariant under the action of the Galois group  $\mathcal{G}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$  and for each  $j$ ,  $\tilde{x}'_j = \lambda_j t^{n_j}$ , where  $n_j > 0$  and  $\lambda_j \neq 0$ .

In the following text we will use *rational Puiseux series* to refer to a parametrization from the system of rational parametrizations.

The key property of rational Puiseux series, proved in [5], is summarized here:

**Theorem 1.** *Let  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  and  $\{[\tilde{x}_k, \tilde{y}_k]\}_k$  be a rational Puiseux series of  $f$  over  $\mathbb{R}$ . Then the branch  $[\tilde{x}_k, \tilde{y}_k]$  is real if and only if the coefficient of  $\tilde{x}_k$  and every coefficient of  $\tilde{y}_k$  are real numbers.*

### Algorithm for finding a system of rational Puiseux series

The algorithm describes how to find the local parametrization of all branches above the origin. If we are interested in the branches above an another point, we can translate the coordinate system. The structure above the point  $[a, b]$  is obtained by examination  $\tilde{f} = f(x + a, y + b)$  at the origin.

The algorithm is recursive and very similar to the algorithm to find the standard Puiseux series (see [6, IV.3]). It is usually described using the recursion, but we find more transparent use the terminology of trees. We can say that the algorithm is based on the tree traversal.

Let describe how to compute the tree of the given polynomial  $f$ . The tree is generally infinite and has nodes of three types

- the root of the tree – a given polynomial,
- nodes of type  $N$  (shortly  $N$ -nodes) – “Newton polygon edge” and
- nodes of type  $C$  (shortly  $C$ -nodes) – “coefficients of Puiseux series.”

$N$ -nodes and  $C$ -nodes periodically alternate.

The number of tree branches is same as the number of curve branches. The Puiseux series of a given curve branch is fully determined by the information attached to the nodes on the tree branch.

At the root and in  $C$ -nodes we compute Newton polygon of  $f$ . It consists of several edges (children of type  $N$ ). Every edge is fully described by its equation  $pi + qj = l$  and certain characteristic equation  $h(z)$ . To the node we attach the quadruple  $(q, p, l, h)$ .

In  $N$ -nodes we search for coefficients of Puiseux series ( $\gamma$  and  $\delta$ ). They depends on  $p$ ,  $q$  and root  $\varrho$  of  $h(z)$ , so for every  $\varrho$  we have one child of type  $C$ . More precisely  $\gamma = \varrho^{-v}$  and  $\delta = \varrho^u$ , where  $uq + vp = 1$ . We also compute new polynomial  $g$ . To the node we attach the quadruple  $(\varrho, \gamma, \delta, g)$ .

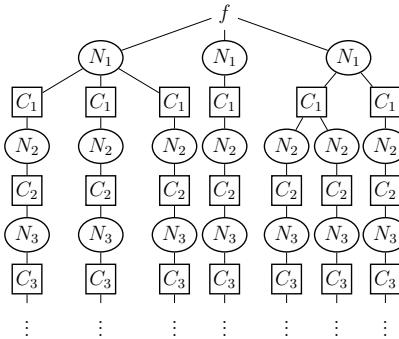


Figure 1: Example of the tree corresponding to some polynomial  $f$ .

Usually we are interested in finite number of terms of rational Puiseux series, i.e. in finite sub-tree. The natural choice is singular sub-tree defined in the following definition. The reason why it is so important is in Proposition 1.

**Definition 5** (with proposition). Let the tree branch be the sequence of nodes  $B = (f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots)$ . There exists  $j_0$  such that for every  $k > k_0$  it holds

$$\gamma_k = q_k = 1 \quad \text{and} \quad \delta_k \in \mathbb{Q}(\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \dots, \gamma_{k_0}, \delta_{k_0}).$$

The part of the tree branch  $(f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots, N_{k_0}, C_{k_0})$  is called *singular*. The rest of the branch  $(N_{k_0+1}, C_{k_0+1}, N_{k_0+2}, C_{k_0+2}, \dots)$  is called *regular* part of the branch. The sub-tree consisting of singular part of each branch is called *singular sub-tree* of  $T$ .

*Proof.* The existence can be proven using observation in [6, page 102] and direct computations.  $\square$

**Proposition 1.** Let  $B_1, B_2 \dots B_r$  be the branches of the tree of  $f$ . The local topology at the origin is influenced only by singular parts of  $B_k$ , where  $k = 1, 2, \dots, r$ .

*Proof.* See [5].  $\square$

Directly from the recursive equations, we can deduce the parametrizations of Puiseux series:

**Theorem 2.** Let  $B = (f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots, N_w, C_w)$  be a part of a branch of the tree of  $f$ . Let the length of singular part of  $B$  be  $k_0$ . The

Puiseux series of the curve branch is

$$P(B) = [x, y] = \left[ \lambda t^n, \sum_{j=1}^{k_0} \xi_j t^{c_j} + \sum_{j=k_0+1}^w \chi_j t^{d_j} + \dots \right] \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \lambda &= \prod_{k=1}^{k_0} \gamma_k^{\prod_{i=1}^{k-1} q_i}, & n &= \prod_{k=1}^{k_0} q_k, \\ \xi_k &= \delta_k \prod_{l=1}^k \left( \prod_{i=l+1}^{k_0} \gamma_i^{\prod_{k=l+1}^{i-1} q_k} \right)^{p_l}, & c_k &= \sum_{i=1}^k \left( p_i \prod_{k=i+1}^{k_0} q_k \right), \\ \chi_k &= \delta_k \prod_{l=1}^{k_0} \left( \prod_{i=l+1}^{k_0} \gamma_i^{\prod_{k=l+1}^{i-1} q_k} \right)^{p_l}, & d_k &= c_{k_0} + \sum_{i=k_0+1}^k p_i. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3 Local geometry over given point

In this part we describe the local topology over a given point. In the first part we choose two quadrants, where the given branch can lie. In the second part we determine in which of possible quadrants the branch really lies. And in the last section we determine the mutual position of the branches. Any such information easily follows from the first terms of Puiseux series of the curve branch. Here, we describe how to extract these characteristics from the singular part of the tree branch.

#### 3.1 Branch position - possible quadrants

In this subsection we describe in which quadrants a given branch can lie. We can obtain this information very fast from the first two tree nodes. The disadvantage is that the found quadrants are only possible ones, i.e. the branch can lie in only one or in both of them.

Assume that the quadrants are numbered as usual (the quadrant number 1 is  $x > 0$  &  $y > 0$  and then counterclockwise).

**Definition 6.** The point  $[x_0, y_0]$  is called *regular* point of  $f$  if at least one derivative  $f_x(x_0, y_0)$  or  $f_y(x_0, y_0)$  is nonzero. Otherwise it is called *singular*.

The topology in regular point is always clear. We are interested in local topology in singular points, where should be more branches.

**Proposition 2.** Let  $B$  be a real branch through a singular point determined by the tree branch. The first  $N$ -node (namely  $p, q$ ) and first  $C$ -node (namely the sign of  $\varrho$ ) restricts the local position of  $B$  as stated in Table 1.

$q$	$p$	$\text{sign}(\varrho)$	possible quadrants
odd	odd	+	1 & 3
odd	odd	-	2 & 4
even	odd	+	1 & 4
even	odd	-	2 & 3
odd	even	+	1 & 2
odd	even	-	3 & 4

Table 1: Local position of a given curve branch using only first two inner nodes of the tree branch.

*Proof.* Let  $(f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots)$  be the tree branch corresponding to  $B$ . The Puiseux series using only the first  $N$  and  $C$ -node is

$$[\gamma_1 t^{q_1}, \delta_1 t^{p_1}].$$

The local parametrization of  $B$  using the whole singular part of the tree branch has the form

$$[\gamma_1 x_1^{q_1}, \delta_1 x_1^{p_1} + x_1^{p_1} y_1],$$

with  $x_1 = \lambda t^n$  and  $y_1 = \sum_{j=2}^{k_0} \xi_j t^{c_j}$  where  $\lambda = \prod_{k=2}^{k_0} \gamma_k^{\prod_{i=1}^{k-1} q_i}$ ,  $n = \prod_{k=2}^{k_0} q_k$ ,

$\xi_k = \delta_k \prod_{l=2}^k \left( \prod_{i=l+1}^{k_0} \gamma_i^{\prod_{k=l+1}^{i-1} q_k} \right)^{p_l}$  and  $c_k = \sum_{i=2}^k \left( p_i \prod_{k=i+1}^{k_0} q_k \right)$ . Note that

the regular part of the tree branch has no effect on topology (see Prop. 1). The position in quadrants is given by the sign of  $x$ -coordinate ( $\gamma_1 x_1^{q_1}$ ) and the sign of  $y$ -coordinate, which is near zero influenced only by the first term  $\delta_1 x_1^{p_1}$ .

From the previous paragraphs it is clear that the Puiseux series corresponding to first two nodes really approximate the position of the branch. When the signs of  $x_1$  for  $t = \pm\epsilon$  (suppose  $\epsilon$  positive infinitesimal) are different the branch lies in both quadrants, when the signs are equal, the branch  $B$  lies only in one of given quadrants.

Denote  $B = [B_x, B_y] = [\gamma t^q, \delta t^p]$ . Recall that  $\gamma = \varrho^{-v}$  and  $\delta = \varrho^u$ . We can distinguish 3 cases according to parities of  $q$  and  $p$ . In every case we treat only the case  $\varrho < 0$ , the case  $\varrho > 0$  is similar. Denote  $s = \text{sign}(\varrho) = -1$ .

### Case $p$ and $q$ odd

We need to find the sign of  $\gamma$  and  $\delta$ .

$$\text{sign}(\gamma) = \text{sign}(\varrho^{-v}) = \text{sign}(\varrho^{-vp})$$

$$\text{sign}(\delta) = \text{sign}(\varrho^u) = \text{sign}(\varrho^{uq})$$

Using the fact that  $uq + vp = 1$  we have

$$\text{sign}(\gamma) \text{sign}(\delta) = \text{sign}(\varrho^{-vp}) \text{sign}(\varrho^{uq}) = \text{sign}(\varrho^{-vp}) \text{sign}(\varrho^{1-vp}) = -1$$

The last equation is because the difference between  $-vp$  and  $1 - vp$  is 1 and therefore one term is odd and one even.

So we have to distinguish two cases:

If  $\text{sign}(\varrho^{-v}) = -1$  and  $\text{sign}(\varrho^u) = 1$  then for  $t = \epsilon$  we have  $B_x < 0, B_y > 0$  and  $B$  lies in second quadrant and for  $t = -\epsilon$  we have  $B_x > 0, B_y < 0$  and  $B$  lies in quadrant 4.

If  $\text{sign}(\varrho^{-v}) = 1$  and  $\text{sign}(\varrho^u) = -1$  then for  $t = \epsilon$  we have  $B_x > 0, B_y < 0$  and  $B$  lies in quadrant 4 and for  $t = -\epsilon$  we have  $B_x < 0, B_y > 0$  and  $B$  lies in quadrant 2.

### Case $q$ even and $p$ odd

As in the previous case  $\text{sign}(\gamma) = \text{sign}(\varrho^{-v}) = \text{sign}(\varrho^{-vp})$  and because  $q$  is even, we have  $\text{sign}(\varrho^{uq}) = 1$  therefore

$$\text{sign}(\gamma) = \text{sign}(\varrho^{-vp}) \text{sign}(\varrho^{uq}) = \text{sign}(\varrho^{-vp}) \text{sign}(\varrho^{1-vp}) = -1$$

So, we have two possibilities:

If  $u$  is even, then  $\text{sign}(\varrho^u) = 1$  and for  $t = \epsilon$ :  $B_x < 0, B_y > 0$  and  $B$  lies in second quadrant and for  $t = -\epsilon$  we have  $B_x < 0, B_y < 0$  and  $B$  lies in quadrant 3.

If  $u$  is odd, then  $\text{sign}(\varrho^u) = 1$  and for  $t = \epsilon$ :  $B_x < 0, B_y < 0$  and  $B$  lies in third quadrant and for  $t = -\epsilon$  we have  $B_x < 0, B_y > 0$  and  $B$  lies in quadrant 2.

**Case  $q$  odd and  $p$  even** is analogous to the previous one.

**Case  $q$  and  $p$  even** can not arise, because it will be in contradiction with the irreducibility of Puiseux series.  $\square$

*Example 1.* To demonstrate the proposition we use the curve defined by equation  $f = 2y^5 - xy^3 + 3x^2y^3 + 2x^2y^2 - x^5y^2 - x^3y + 2x^5$ . We know that  $\mathcal{C}_f$  has three real branches through the origin, see Fig. 2. First branch is solid, second is dashed and third is dotted.

First branch has first two nodes  $N_1 = (1, 2, 5, -z+2)$ ,  $C_1 = (2, 1, 2, f_1)$ , more explicitly  $q = 1$  is odd,  $p = 2$  is even,  $\varrho = 2$  is positive and therefore the branch can lie in quadrants 1 and 2.

Similarly second branch has nodes  $(1, 1, 4, -(z - 1)^2)$ ,  $(1, 1, 1, f_1)$ , i.e.  $q = 1$  is odd,  $p = 1$  is odd,  $\varrho = 1$  is positive and the branch has position 1 & 3.

And third branch has nodes  $N_1 = (2, 1, 5, 2z - 2)$ ,  $C_1 = (1/2, 2, 1, f_1)$ , i.e.  $q = 2$  is even,  $p = 1$  is odd,  $\varrho = 1/2$  is positive and the branch has position 1 & 4.

### 3.2 Branch position - exact quadrants

The branch can lie in both possible quadrants but does not have to. In this section we describe how to decide in which of possible quadrants the branch really lies. Again, this information is contained in the first terms of Puiseux series. We extract the information from the singular part of the tree branch, so we do not need to compute the Puiseux series explicitly.

The following observation is corollary of proof of Proposition 2.

**Corollary 1.** *Let  $B$  be a real curve branch through the singular point determined by the tree branch. Let the singular part of the branch has height 2. Then the branch  $B$  lies in both quadrants given in Prop. 2.*

*Example 1* (continuous). The singular part of first and third tree branch has height 2. Due to Corollary 2 the first branch pass through both quadrants 1 and 2 and the third branch pass through quadrants 1 and 4.

If the singular part of the tree branch is higher than two, it is possible that the curve branch lies only in one of quadrants given in Prop. 2.

**Proposition 3.** *Let  $B$  be a real curve branch going through a singular point and the corresponding singular part of the tree branch have nodes  $(f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots, N_{k_0}, C_{k_0})$ . Let  $i$  &  $j$  are possible quadrants of position of  $B$  given by Prop. 2.*

*If  $q_1$  is odd and  $q_2 q_3 \cdots q_{k_0}$*

- *is odd then  $B$  lies in both quadrants  $i$  and  $j$ .*
- *is even then  $B$  lies in only one quadrant  $i$  or  $j$ . Which one can be recognized by determining the sign of  $B_x = \lambda t^n$  (see (2)).*

*If  $q_1$  is even and  $p_1 q_2 q_3 \cdots q_{k_0}$ ,*

- *is odd then  $B$  lies in both quadrants  $i$  and  $j$ .*
- *is even then  $B$  lies in only one quadrant  $i$  or  $j$ . The quadrant is given by the sign of first term of  $B_y$ , i.e.  $\xi_1 t^{c_1}$ .*

*Proof.* In the first case ( $q_1$  odd) the possible quadrants are given by  $\gamma_1 x_1^{q_1}$ .

Because  $x_1 = \lambda t^n$ , the signs of  $x_1$  for  $t = \pm\epsilon$  are different when  $n = \prod_{i=2}^{k_0} q_i$  is odd. If  $n$  is even, the sign of  $x_1$  is the same for  $t = \pm\epsilon$ . The sign of  $B_x$  is dependent also on  $\lambda$ , i.e. the parities of  $q_i$  and the signs of  $\gamma_i$  ( $i = 2, 3, \dots, k_0$ ). The sign of  $B_x$  determines the quadrant, where  $B$  lies.

In the second case ( $q_1$  even) the sign of  $B_x$  is same for possible quadrants and the question is whether  $B_y$  has same sign for  $t = \pm\epsilon$ . The  $y$ -coordinate is near zero influenced only by the first term  $\xi_1 t^{c_1}$ . If  $c_1 = p_1 q_2 q_3 \cdots q_{k_0}$  is odd, the signs of  $B_y$  are different for  $t = \pm\epsilon$  and  $B$  lies in both quadrants. If  $c_1$  is even, the signs of  $B_y$  are same and  $B$  lies only in one quadrant which is fully determined by the signs of  $\delta_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{k_0}$  and the parities of  $q_2, q_3, \dots, q_{k_0}$ .  $\square$

*Example 2* (continuation). The singular part of the second branch  $B_2$  is  $(f, N_1 = (1, 1, 4, -(z-1)^2), C_1 = (1, 1, 1, f_1), N_2 = (2, 1, 2, -z+7), C_2 = (7, 1/7, 1, f_2))$   $q_1 = 1$  is odd and  $q_2 = 2$  is even therefore  $B_2$  lies only in one quadrant.  $\lambda > 0$  because  $\gamma_1 = 1 > 0$  and  $\gamma_2 = 1/7 > 0$ .  $n$  is odd, because  $q_2 = 2$  is odd. We conclude that  $B_x > 0$  for  $t = \pm\epsilon$  and  $B_2$  lies in second quadrant.

### 3.3 Mutual position of branches

Every curve branch has two natural half-branches, one for  $t > 0$  and the second for  $t < 0$ . Using singular parts of tree branches it is possible to resolve the order of half-branches of the curve through a given singular point. We are interested in the order of half-branches on the right side (quadrants 1, 4) and left side (quadrants 2, 3) of the point separately. In this section (without loss of generality) we assume that all the half-branches are in quadrants 1 and 4. The case of quadrants 2, 3 is analogous.

To compare the half-branches we need to number them. One natural numbering follows from previous section - let the branch  $i$  (numbered in the tree from the left) consists of half-branches  $\pi_{2i-1}$  and  $\pi_{2i}$ . It will be useful to define for every branch  $\pi_j$  associated functions  $q_j$  which gives the number of quadrant of branch  $\pi_j$ .

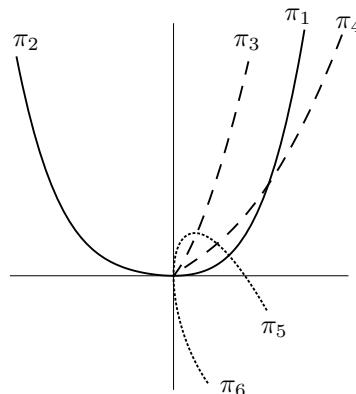


Figure 2: Numbering of branches

**Definition 7.** Assume that branches  $q_i = q_{i'}$ . Due to the implicit function theorem, we can consider the branches as the functions of  $x$  coordinate, i.e.  $y = \pi_i(x)$  resp.  $y = \pi_{i'}(x)$ . We say that  $\pi_i < \pi_{i'}$  if there exists a neighborhood of the origin, where for every  $x$  is  $\pi_i(x) < \pi_{i'}(x)$ .

Suppose that  $q_i = 4$  and  $q_{i'} = 1$ . It is clear that  $\pi_i < \pi_{i'}$ .

Otherwise both compared curve branches are in the same quadrant. Assume that  $B = [B_x, B_y] = [\lambda t^n, \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k t^{c_k}]$  and  $B' = [B'_x, B'_y] = [\lambda' t'^{n'}, \sum_{k=1}^{k'_0} \xi'_k t'^{c'_k}]$  are the parametrizations of the branches using theirs singular parts of tree branches. We consider same (infinitesimal) values of  $B_x$  and  $B'_x$  and we ask whether  $B_y$  is greater than  $B'_y$  or vice versa.

Without loss of generality assume that  $c_1 \leq c'_1$ . To simplify the notation denote  $w = (\lambda/\lambda')^{1/n'}$ . From  $B_x = B'_x$ , we can deduce that  $t' = (\lambda/\lambda')^{1/n'} t^{n/n'} = w t^{n/n'}$ . We denote  $\tilde{c}_1 := (n/n')c'_1$ .

The reciprocal position of branches follows from the following scheme

- $c_1 = \tilde{c}_1$ 
  - $\xi_1 = w^{c'_1} \xi'_1$ . Repeat this decision procedure with  $c_2, c'_2$  (resp.  $c_{i+1}, c'_{i+1}$ ). As the branches are different, they have different singular parts of tree branches and the process terminates.
  - $\xi_1 < w^{c'_1} \xi'_1$  then  $B < B'$ .
  - $\xi_1 > w^{c'_1} \xi'_1$  then  $B > B'$ .
- $c_1 < \tilde{c}_1$ 
  - $\xi_1 > 0$  then  $B > B'$
  - $\xi_1 < 0$  then  $B < B'$
- $c_1 > \tilde{c}_1$ 
  - $\xi'_1 w^{c'_1} > 0$  then  $B < B'$
  - $\xi'_1 w^{c'_1} < 0$  then  $B > B'$

If the half-branch corresponds to  $t < 0$  we substitute  $\tilde{t} = -t$  and compare the modified local parametrization.

*Proof.*  $B < B'$  if and only if  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{sign}(B_y - B'_y) = 1$ . We have

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{sign}(B_y - B'_y) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{sign} \left( \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k t^{c_k} - \sum_{k=1}^{k'_0} \xi'_k t'^{c'_k} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \text{sign} \left( \sum_{k=1}^{k_0} \xi_k \frac{1}{y^{c_k}} - \sum_{k=1}^{k'_0} \xi'_k \frac{1}{y^{c'_k}} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \text{sign} \left( \sum_{i=m}^{m'} \frac{1}{y^i} (\xi_{(i)} - \xi'_{(i)}) \right), \end{aligned}$$

where  $m = \min_{i'=1,\dots,k_0}^{i=1,\dots,k_0} (c_i, c'_{i'})$ ,  $m' = \max_{i'=1,\dots,k_0}^{i=1,\dots,k_0} (c_i, c'_{i'})$  and  $\xi_{(i)}, \xi'_{(i)}$  are the coefficients of  $t^i$  in  $B_y$  resp.  $B'_y$ .

Let  $o$  be the smallest number for which  $\xi_{(o)} \neq \xi'_{(o)}$ . Then

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{sign}(B_y - B'_y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \text{sign} \left( \frac{1}{y^o} (\xi_{(o)} - \xi'_{(o)}) \right),$$

which implies the proposition.  $\square$

*Example 1* (continuation). We can number the half-branches of first branch  $\pi_1, \pi_2$  with  $q_1 = 1, q_2 = 2$ . Denote the half-branches of second branch  $\pi_2, \pi_3$  with  $q_2 = 1, q_3 = 1$ . Third branch half-branches are  $\pi_5, \pi_6$  with  $q_5 = 1, q_6 = 4$ . Everything is marked in Figure 2.

On the left side of the origin is only one branch  $\pi_2$ . On the right side, we have five half-branches. In the quadrant 4 is only one branch  $\pi_6$ . The rest of branches is in the first quadrant. Their position is following:

- $\pi_5 > \pi_3$  because  $n = n' = 2$  and  $c_1 = 1 < 2 = c'_1$  and  $\xi_1 = 1 > 0$ .
- $\pi_3 > \pi_4$  because  $n = n' = 2, c_1 = c'_1 = 2, w = 1$  and  $\xi_1 = \xi'_1$ , but  $c_2 = c'_2 = 3$  and  $\xi_2 = 1/7 > -1/7 = \xi'_2$ .
- $\pi_4 > \pi_1$  because  $n = 2 \neq 1 = n', t' = t^2/7$  and  $c_1 = 2 < 4 = \tilde{c}_1$  and  $\xi_1 = 1/7 > 0$ .

## 4 Conclusion

We have presented an improvement on the existing algorithm for finding the rational Puiseux series and the corresponding curve branches. We used the formalism of trees instead of the terminology of recursion. The output we use to find the position of branches in quadrants and the mutual position of branches without the necessity of computing whole Puiseux series.

These information are very important to deduce the correct topology of the given algebraic curve. We plan to exploit it to improve the global topology results in [2].

## 5 Acknowledgment

Eva Blažková was supported by grant of Charles University Grant Agency SVV-2015-260227.

## References

- [1] Alberti, L., Mourrain, B., Wintz, J.: Topology and arrangements computation of semi-algebraic planar curves. Computer Aided Geometric Design 25, 631–651, (2008).
- [2] Blažková E., Šír Z.: Exploiting the Implicit Support Function for a Topologically Accurate Approximation of Algebraic Curves. In: M. Floater et al. (Eds.): MMCS 2012, LNCS 8177, 49 – 67 (2014).

- [3] Blažková E., Šír Z.: Identifying and approximating monotonous segments of algebraic curves using support function representation. In Computer Aided Geometric Design, 31 (78): 358-372, 2014.
- [4] Cucker, F., Pardo, L.M., Rainmondo M.: Computation of the local and global analytic structure of a real curve. In: Recio, T., Roy M.-F.: AAECC-5, LNCS, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag (1988).
- [5] Duval, D.: Rational Puiseaux expansions. Compositio Mathematica 70, 119–154 (1989).
- [6] Walker, R.J.: Algebraic Curves. Springer-Verlag (1978).

# GeoGebra ve výuce Deskriptivní a Konstruktivní geometrie

## The use GeoGebra in Teaching the Descriptive Geometry

František Červenka

*KMDG VŠB-TU Ostrava*

*17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava-Poruba*

*frantisek.cervenka@vsb.cz*

**Abstrakt.** Several problems I have encountered when using GeoGebra in Teaching the Descriptive Geometry.

**Keywords:** GeoGebra, teaching, problems with the use of GeoGebra.

**Klíčová slova:** GeoGebra, výuka, problémy s využitím GeoGebry.

## 1 Úvod

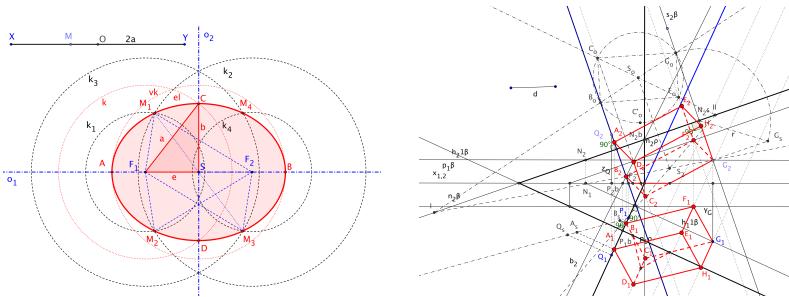
V článku se pokusím shrnout své zkušenosti s využitím ukázkových příkladů vytvořených v GeoGebře jako hlavních, případně doplňkových materiálů, při vyučování deskriptivní a konstruktivní geometrie na stavební a strojní fakultě VŠB - TU Ostrava.

## 2 GeoGebra ve výuce a s tím spojené komplikace

GeoGebra je díky své jednoduchosti ovládání, rozsáhlým možnostem modifikací a podporou i pokročilejších matematických funkcí ideální nástroj pro použití ve výuce nejen matematiky a geometrie na základních a středních školách, ale i třeba deskriptivní geometrie na technické vysoké škole. Za pět let použití GeoGebrovských appletů jsem se kromě pozitivních reakcí a přijetí studenty setkal také s menšími či většími problémy, a právě těm bych se chtěl dál věnovat.

### 2.1 Motivace

K použití GeoGebry jako hlavního zobrazovacího nástroje na cvičeních deskriptivní geometrie mě přinutilo instalování keramických tabulí, které jsou na rychlé a kvalitní rýsování naprostě nevhodné, na všechny učebny fakulty stavební. Tato pohroma byla vyvážena instalací počítačů a dataprojektorů. Při výběru kreslícího softwaru jsem zohledňoval jednoduchost ovládání, možnost krokování a skrývání konstrukcí, rozšířenosť a podporu komunity uživatelů a v neposlední řadě volnou dostupnost pro studenty. Všechny tyto požadavky splnila pouze GeoGebra.



Obrázek 1: Konstrukci elipsy na základě definice lze provést v reálném čase se studenty, hranol ze zadaných prvků také, ale na úkor přehlednosti

## 2.2 Začátky

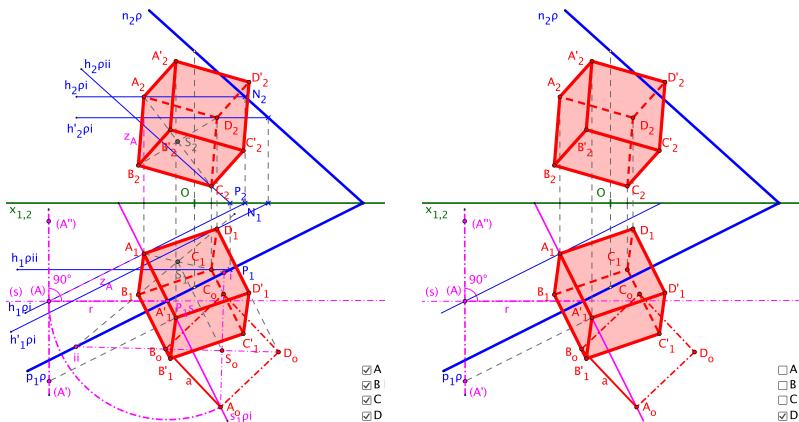
Původní myšlenka nasazení GeoGebry byla jednoduchá: budeme se studenty řešit příklady společně, oni tužkou na papír a já v GeoGebře na dataprojektoru. Na začátku semestru, když řešíme úlohy o kuželosečkách a zakladní konstrukce v Mongeově projekci, to realizovatelné bylo, s nástupem komplexních konstrukcí těles ze zadaných prvků už ne. Byl jsem nucen si příklady předem připravit a na seminářích jenom krokovat a komentovat. Jelikož má většina úloh několik řešení, studenti přišli o možnost výběru a pocit řízení práce. Výhodou připravených apletů je větší přehlednost a celkově lepší estetický dojem. Například studentům velmi vadí přímky od jednoho okraje po druhý, problémem může být i umístění popisu, formátovací dialog překrývající celou pracovní plochu, což vyřešil rychlý editovací panel v levém horním rohu.

## 2.3 Skrývání dílčích konstrukcí

Velmi užitečným nástrojem GeoGebry jsou zatrhávací tlačítka na skrývání/zobrazování objektů nebo jejich skupin. Při skrývání dílčích konstrukčních celků se pracovní plocha zpřehlední, ale to může způsobit problémy jak studentům rýsujičím pomalu, tak i ostatním, protože přijdou o orientační body ve výkresu. K přehlednosti nepřispívají ani konstrukční prvky z předchozích kroků, které ale budou ještě použity později. Bylo by je možné skrýt a následně znova vytvořit, ale to přidává další konstrukční kroky, kterých je i bez toho v náročnějších konstrukcích přes 400.

## 2.4 Modifikovatelnost zadání

S využitím posuvníků nebo odečítáním souřadnic volně pohyblivých bodů lze v GeoGebře vytvořit volně modifikovatelné řešení příklady doplněné případně i animacemi například pohybu bodů dotyku tečných rovin. Tuto možnost rychlého generování dalších verzí příkladu používám při tvorbě



Obrázek 2: Na obrázku vlevo jsou zobrazeny všechny konstrukční kroky, vlevo pouze závěrečná fáze nalezení vrcholu horní podstavy a viditelnost

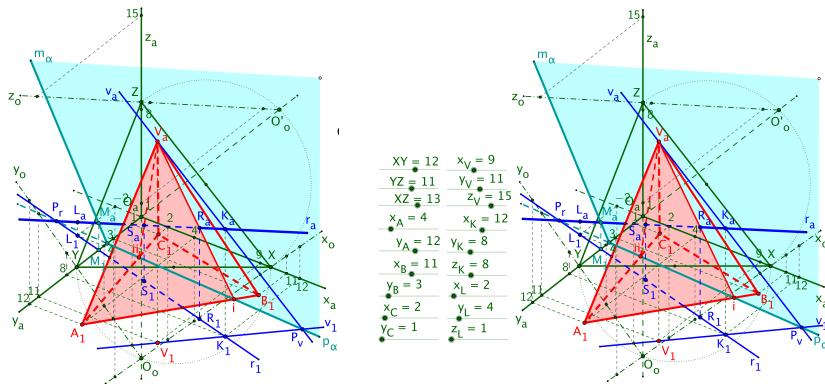
zadání rysů a domácích úkolů. Upravovatelné příklady kromě vyšší náročnosti na vytvoření přinášejí riziko nesprávně určené viditelnosti, což je v deskriptivní geometrii zásadní problém. Elegantní řešení této situace přinesla GeoGebra5 s 3D modelovacím modulem. Bohužel modely doplněné o alespoň základní konstrukční prvky byly studenty nekomprimovatelné pro údajně naprostou nepřehlednost.

### 3 Závěr

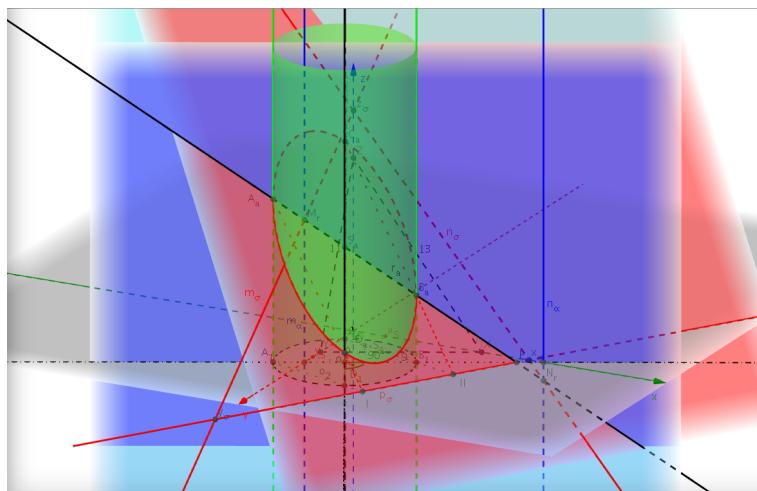
Zde uvedené problémy ale nepřeváží pozitivní přínos použití GeoGebry na cvičeních i přednáškách. Možnost kdykoliv se vrátit o několik konstrukčních kroků zpět, přiblížit a zvětšit konkrétní nepřehlednou oblast, případně skrýt nepotřebné prvky klasické rýsování křídou na tabuli nabízí. Pro studenty podle jejich komentářů je ideální kombinace obojího - rýsování na tabuli doplněné krokováním konstrukce v GeoGebře a 3D modelem s tím, že mají všechny soubory volně k dispozici ke stažení pro domácí přípravu.

### Reference

- [1] F. Červenka: <http://mdg.vsb.cz/wiki/index.php/Uživatel:Cer0007>



Obrázek 3: Souřadnicové posuvníky znepřehledňují plochu a jejich využití studenty je otázkou



Obrázek 4: Prostorový model s krokováním po jednotlivých konstrukčních prvcích

# GeoGebra - vybrané funkcie a ich aplikácia vo výučbe

## GeoGebra - selected functions and their application in teaching process

Viera Čmelková

*Department of Quantitative Methods and Economic Informatics,  
The Faculty of Operation and Economics of Transport and Communications,  
University of Žilina  
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovak Republic  
email: viera.cmelkova@fpedas.uniza.sk*

**Abstract.** This paper focuses on selected features and commands of software GeoGebra and their application in the teaching of mathematical analysis.

**Keywords:** GeoGebra, teaching mathematics, educational software

**Kľúčové slová:** GeoGebra, výučba matematiky, vzdelávací softvér

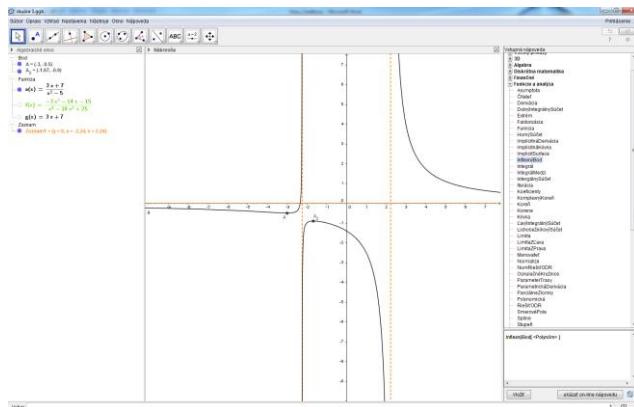
### 1 Softvér GeoGebra

Výučbový softvér GeoGebra začal vznikať na prelome tisícročí pod vedením Markusa Hohenwartera, teraz už profesora, na univerzite v Linzi. Ako je zrejmé už z názvu, pôvodný zámer bol vybudovať softvér podporujúci výučbu geometrie v nadväznosti na algebru, teda priblížiť žiakom prepojenie medzi algebrickým vyjadrením a geometrickou reprezentáciou, spočiatku rovinných, objektov.

Do súčasnej doby sa tím tvorcov GeoGebry rozšíril na 40 ľudí priamo pracujúcich na GeoGebre a viac než 160 ľudí sa venuje prekladu, či už priamo programu, nápovedy alebo web stránky Medzinárodného GeoGebra Inštitútu do viac než 60 svetových jazykov.

K obľúbenosti GeoGebry medzi učiteľmi a žiakmi prispelo viaceré faktorov. GeoGebra je veľmi jednoduchý a intuitívne ovládateľný softvér. Má jednoduchú a v každej chvíli ľahko dostupnú nápovedu k jednotlivým funkciám a príkazom. GeoGebra má možnosť vytvoriť výstup vo viacerých formátoch, napr. ako animovaný GIF obrázok, obyčajný obrázok vo formáte .png, .eps alebo aj ako html stránku na úložisku <http://tube.geogebra.org/>. Applety vytvorené pomocou GeoGebry sú na tomto úložisku dostupné podľa autorovho nastavenia, avšak väčšinou verejne pre všetkých používateľov a študentov. GeoGebra je na nekomerčné účely voľne šíriteľný program, čo tiež prispieva k jeho masívnemu rozšíreniu. V neposlednom rade zaváži aj skutočnosť, že tvorcovia GeoGebry nestagnujú na jednom mieste a stále kráčajú dopredú s novými technológiami. Od tohto roku je dostupná aj verzia pre i-phony,

pracuje sa na skvalitnení zobrazovania 3D objektov a práce s nimi, tiež je možná práca s ručne písanými rovnicami na dotykovom displeji.



Obr. 1: GeoGebra – priebeh funkcie

## 2 Vybrané funkcie a príkazy

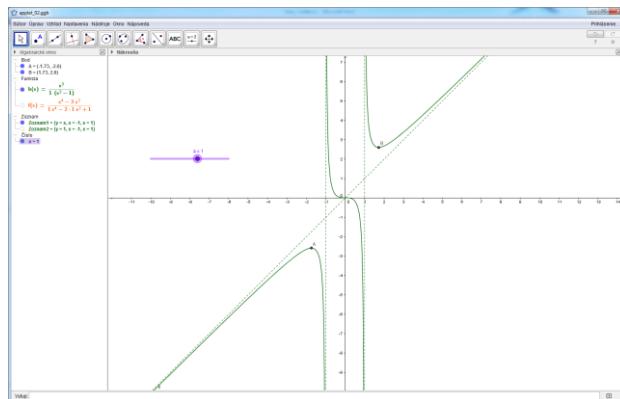
GeoGebra ako výučbový program bola primárne zameraná na výučbu matematiky na stredných a základných školách, ale vzhľadom na jej rozšírenie do viacerých oblastí matematiky je využiteľná aj na výučbu matematiky na univerzitách, ako aj na výučbu deskriptívnej geometrie, resp. iných príbuzných technických, či ekonomických predmetov.

V súčasnosti je možné pomocou GeoGebra vyučovať (aj riešiť) široké spektrum tém. Jednotlivé príkazy sú prehľadne usporiadané do nasledovných oblastí:

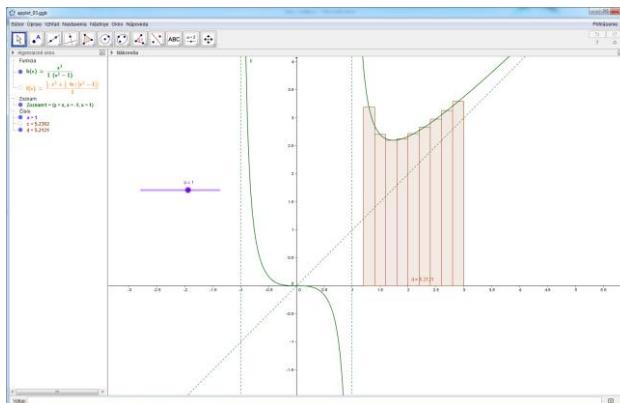
- 3D
- Algebra
- Diskrétna matematika
- Finančné
- Funkcie a analýza
- GeoGebra
- Geometria
- Grafy, diagramy
- Kužeľosečky
- Logika
- Optimalizačné príkazy
- Pravdepodobnosť
- Skriptovanie
- Špeciálne príkazy pre CAS
- Štatistika
- Tabuľky
- Text
- Transformácie
- Vektory a matice
- Zoznamy

V príspievku približujeme niektoré príkazy zo skupiny Funkcie a analýza využiteľné pri výučbe matematiky ako na stredných školách gymnaziálneho typu, tak aj na univerzitách.

Napríklad pri výučbe témy priebeh funkcie sú veľmi užitočné príkazy Koreň, Extrém, Inflexný bod, Asymptota, ktoré v spojení s posuvníkom (Obr. 1 a 2) pomôžu študentovi lepšie porozumieť danej téme.



Obr. 2: GeoGebra – priebeh funkcie



Obr. 3: GeoGebra – dolný integrálny súčet

Ďalšie užitočné príkazy pri výučbe tém matematickej analýzy sú napr.:

- Derivácia
- Parametrická derivácia
- Limita sprava
- Limita zľava
- Limita
- Integrál
- Dolný integrálny súčet
- Horný integrálny súčet
- Ľavý integrálny súčet
- Pravý integrálny súčet
- Určitý integrál
- Parciálne zlomky
- Taylorov polynom

Jednotlivé príkazy je možné zadávať viacerými spôsobmi, napr. pre príkaz Derivácia sú možnosti zadania nasledovné:

Derivácia[ <Funkcia> ]  
 Derivácia[ <Krivka> ]  
 Derivácia[ <Funkcia>, <Číslo> ]  
 Derivácia[ <Funkcia>, <Premenná> ]  
 Derivácia[ <Krivka>, <Číslo> ]  
 Derivácia[ <Funkcia>, <Premenná>, <Číslo> ]

V závislosti na zadaní potom bude výsledkom funkcia jednej alebo viac premenných. Vezmíme napr. funkciu  $a(x) = \frac{3x+7}{x^2-5}$ , pri priamom derivovaní dostávame ako výsledok funkciu  $b(x) = \frac{-3x^2-14x-15}{x^4-10x^2+25}$ , pri zadaní funkcie  $a(x)$  a čísla napr. 3 dostaneme ako výsledok tretíu deriváciu funkcie  $a(x)$ , funkciu  $c(x) = \frac{-18x^4-168x^3-540x^2-840x-450}{x^8-20x^6+150x^4-500x^2+625}$ . Obdobne môžeme derivovať aj funkciu viac premenných a vyšších rádov.

Alebo si priblížme príkaz Integrál, pre ktorý sú možnosti zadania nasledovné:

Integrál[ <Funkcia> ]  
 Integrál[ <Funkcia>, <Premenná> ]  
 Integrál[ <Funkcia>, <x od>, <x do> ]  
 Integrál[ <Funkcia>, <x od>, <x do>, <Logická hodnota> ]

Pri jednoduchom integrovaní napr. funkcie  $a(x) = \frac{3x+7}{x^2-5}$  dostaneme ako výsledok funkciu  $d(x) = \frac{1}{10}(7\sqrt{5}+15)\ln(|x-\sqrt{5}|)+\frac{1}{10}(-7\sqrt{5}+15)\ln(|x+\sqrt{5}|)$ . Pri zadaní funkcie a intervalu, napr.  $\langle 4,6 \rangle$  dostaneme ako výsledok hodnotu určitého integrálu číslo 2,305 s možnosťou zaokruhlenia až na 15 desatinných miest.

### 3 Záver

Záverom mi zostáva len opäťovne poukázať na jednoduché a intuitívne používanie GeoGebry, širokospektrálnej paletu príkazov a funkcií využiteľnú na všetkých stupňoch a vo všetkých oblastiach vzdelávania v matematike a ďalších príbuzných technických a ekonomických predmetoch.

### Pod'akovanie

Tento článok vznikol v nadväznosti na riešený projekt spolufinancovaný zo zdrojov EÚ s názvom „Kvalita vzdelávania a rozvoj ľudských zdrojov ako piliere vedomostnej spoločnosti na Fakulte PEDAS Žilinskej univerzity v Žiline, ITMS 26110230083.“

### Literatúra

- [1] *GeoGebra* [online]. International GeoGebra Institute 2015 [Cit. 2015-31-10]. Dostupné na internete: <<http://www.geogebra.org/>>

# Multimediální materiály pro předmět Deskriptivní geometrie

## Multimedia materials on the subject Descriptive Geometry

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková, Jiří Doležal

*Dept. of Mathematics and Descriptive Geometry, VŠB-Technical University of Ostrava  
17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava - Poruba, Czech Republic  
email: Dagmar.Dlouha@vsb.cz, Radka.Hamrikova@vsb.cz, Jiri.Dolezal@vsb.cz*

**Abstract.** From our experience we know that students expect to study materials that are interactive, move and ideally they are talking about. A series of similar materials already available to students, but materials in the form of annotated video yet for the subjects Descriptive Geometry still not created. Students such materials familiar subject Bachelor of Mathematics I, II, and was very popular with them. Therefore, we plan to create a website with virtual models step by step problems of solution and annotated videos.

Keywords: Descriptive Geometry, video, virtual model

*Klíčová slova:* Descriptive Geometry, video, virtual model

### 1 Způsob řešení projektu

Při tvorbě studijních materiálů budou využity zkušenosti z výuky deskriptivní geometrie na VŠB-TU Ostrava a dále zkušenosti z předchozích projektů, jejichž součástí byla tvorba multimediálních studijních materiálů.

Výuka deskriptivní geometrie, až na výjimky, probíhá v učebnách, které nejsou vybaveny projektem s možností připojení notebooku. Proto ve výuce můžeme užívat pouze klasických prostředků – křída, tabule, sešit, rýsovací pomůcky. Studenti jsou tak ochuzeni o možnost naučit se rýsovat s využitím výpočetní techniky. I přes tyto nepříznivé podmínky chceme studenty seznámit nejen s klasickým rýsováním, ale i s možností nahradit ho prací s výpočetní technikou. Student si bude moci zvolit pro něj výhodnější způsob práce.

Při řešení projektu chceme využít dobrých zkušeností s možností nahrávat videa pomocí interaktivní tabule, stříhat je a zvučit pomocí programu Camtasia Studio, které máme již k dispozici. Dále budeme pracovat ve volně dostupných programech GeoGebra, SketchUp, Metapost a prostředí VRML.

Vytvořené materiály budou umístěny na webových stránkách katedry, které jsou volně přístupné.

## 2 Cíle řešení

Aktuální cílovou skupinu tvoří studenti Stavební fakulty (pracoviště Ostrava), Fakulty metalurgie a materiálového inženýrství (pracoviště Ostrava), Hornicko-geologické fakulty (pracoviště Ostrava, Most), Fakulty strojní (pracoviště Ostrava, Šumperk, Uherský Brod). Hlavním cílem je vytvoření komentovaných videí a webových stránek s interaktivními materiály, které budeme aktivně používat ve výuce.

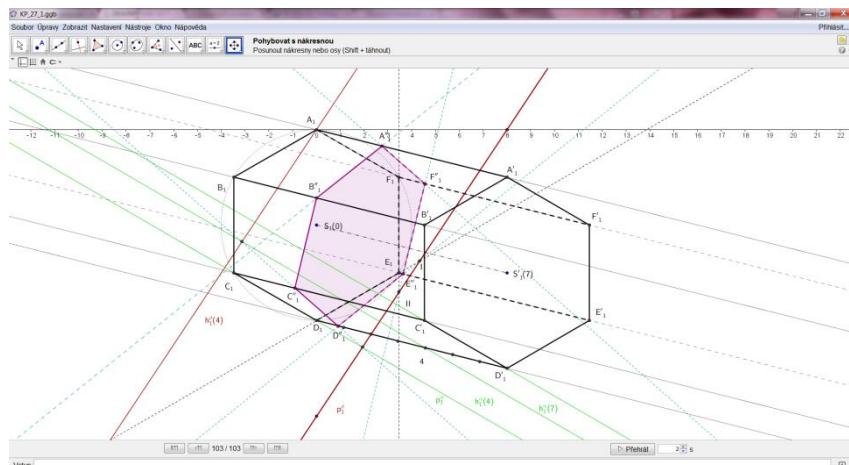
Pro všechny studenty i pedagogy chceme zajistit lepší dostupnost multimediálních studijních materiálů. Vzhledem ke své povaze, jsou materiály dostupné i studentům se zdravotním handicapem.

## 3 Výstupy

Pro potřeby studentů vznikají řešené úlohy v GeoGebře s komentovanými videi těchto úloh a interaktivní webové stránky.

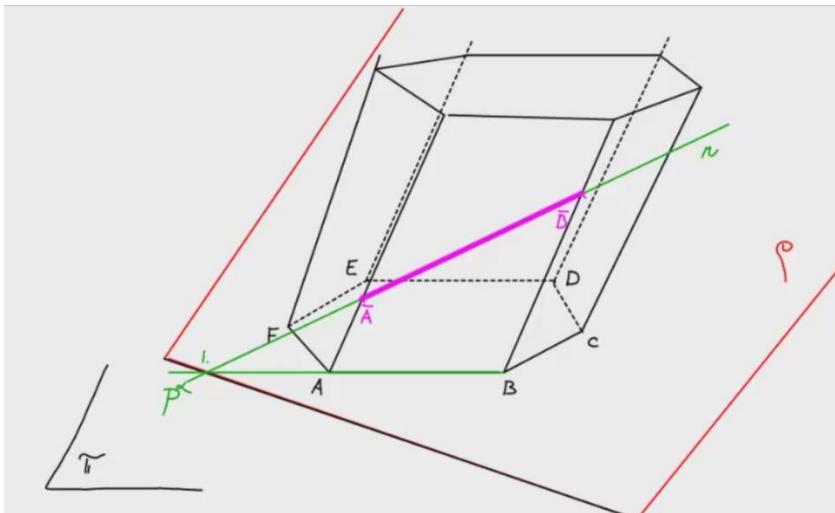
### 3.1 První výstup

Úloha vyřešená v programu GeoGebra umožňuje studentům procházet krokované řešení a využít ho k nácviku konstrukce na papíře. Student si volí vlastní rychlosť postupu, může se libovolně vracet zpět.



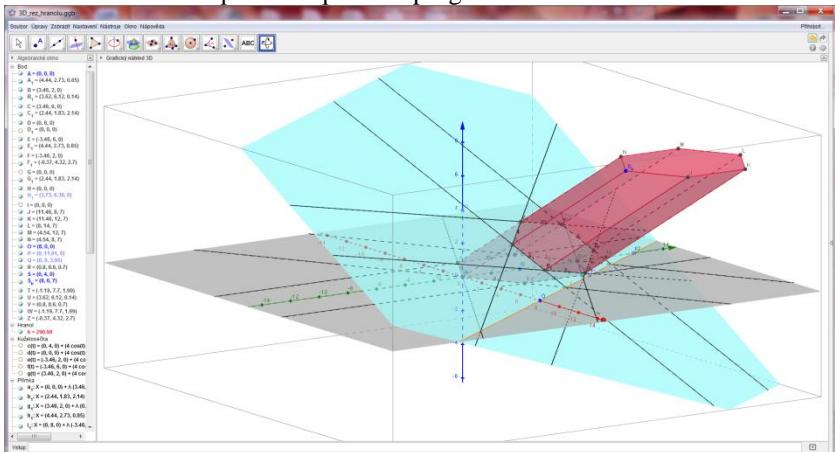
Obr. 1: Konstrukce ve 2D GeoGebře

Pokud to úloha vyžaduje, používáme interaktivní tabuli k nákresu od ruky.



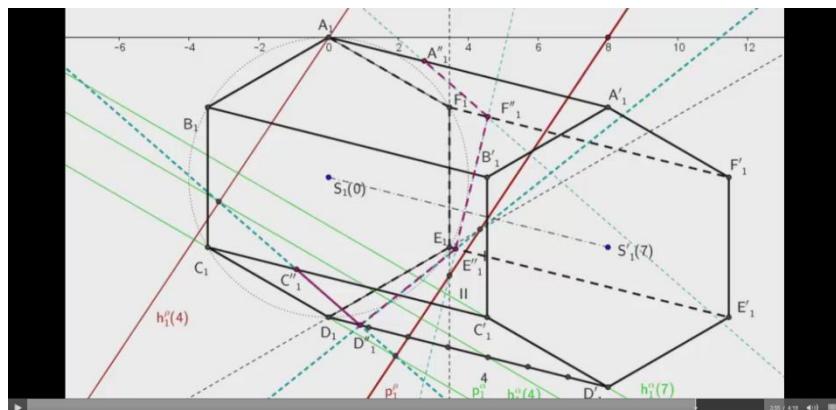
Obr. 2: Nákres na interaktivní tabuli

Dále máme možnost využít 3D nákresy v GeoGebře a ukázat studentům, jak vypadá úloha vyřešená v prostoru. I tento obrázek se objeví ve videu nebo si ho mohou studenti prohlížet přímo v programu GeoGebra.



Obr. 3: Náhled na úlohu ve 3D GeoGebře

Video vzniká dle náročnosti úlohy. Jednodušší konstrukce vyžadují pouze postup ve 2D GeoGebře a hlasový komentář. Složitější úloha je složena z nákresu na interaktivní tabuli, nákresu ve 3D GeoGebře a nakonec krokované konstrukce ve 2D GeoGebře.



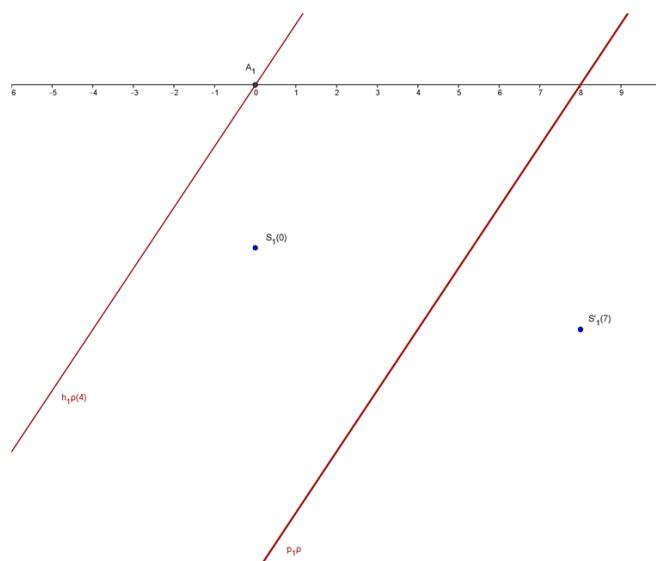
Obr. 4: Ukázka videa

Sbírka příkladů bude doplněna o pracovní listy, na kterých bude zadáni úloh. Pro studenty budou tyto pracovní listy dostupné ve formě, která jim dovolí měnit vzhled stránek.

Sestrojte řez kosého šestibokého hranolu rovinou  $p$ .

Dolní podstava hranolu - pravidelný šestiúhelník - je dáná středem  $S[0,4,0]$  a vrcholem  $A[0,0,0]$ ; podstava leží v průmětně. Střed horní podstavy je  $S'[8,6,7]$ .

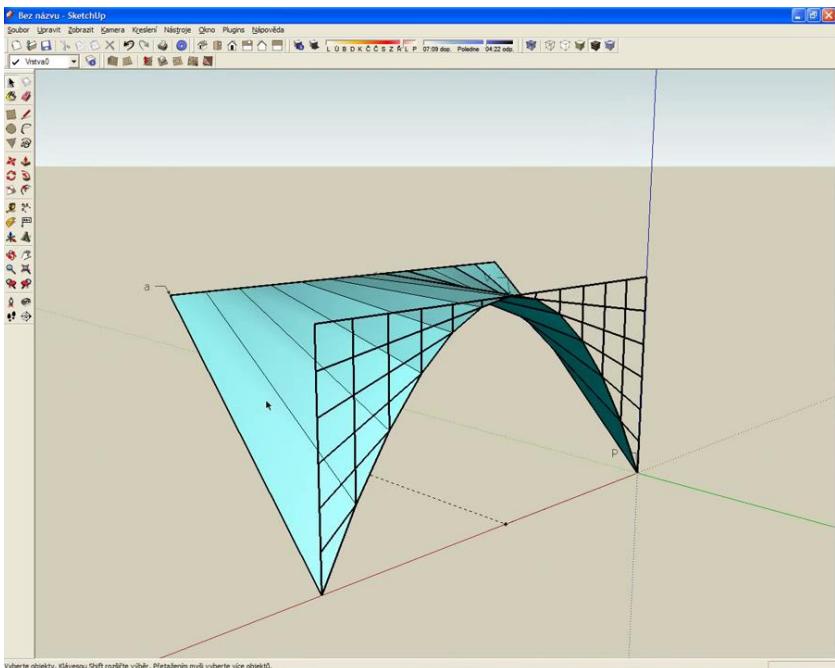
Rovina řezu má souřadnice  $p(8,12,4)$ . ¶



Obr. 5: Ukázka pracovního listu

## 3.2 Druhý výstup

Druhým výstupem budou interaktivní webové stránky, které budou obsahovat krokovaný postup úlohy, virtuální model a video s návodem, jak si model vytvořit v programu SketchUp.



Obr. 6: Ukázka práce ve SketchUpu

## 4 Závěr

Vzniklé materiály mají sloužit nejenom k aktivnímu využití při výuce, ale i samostatnému procvičování probrané látky.

Zejména studenti kombinovaného studia z detašovaných pracovišť, kteří nemají možnost okamžitých konzultací, velmi vyžadují podrobnější studijní materiály, na které jsou už zvyklí z předmětů matematika I., II.

Od projektu si slibujeme snížení studijní neúspěšnosti studentů kombinovaného studia z důvodů nízké časové dotace. Předpokládáme, že také dojde k rozšíření a zkvalitnění výuky deskriptivní geometrie prostřednictvím vytvořených interaktivních pomůcek.

Snížení neúspěšnosti studentů a zejména zvýšení kvality studia je v souladu s dlouhodobým záměrem VŠB-TU Ostrava.

## Poděkování

Problematika je řešena v projektu FRVŠ 13/2015 Vytvoření multimediálních materiálů pro předmět Deskriptivní geometrie.

## Literatura

- [1] *Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia* [online]. c2008 [cit. 2015-10-30]. Dostupný na World Wide Web: <<http://www.studopory.vsb.cz>>.
- [2] Č. Restl, J. Doležal: *Kótované promítání a topografické plochy*, Ostrava, VŠB - TU 2004. ISBN 80-248-0651-7
- [3] K. Dudková, R. Hamříková: *Kuželosečky, kolínace*. Ostrava, VŠB-TU 2005. ISBN 80-248-0766-1
- [4] I. Cholevová, B. Lubojacký, Č. Restl: *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní a konstruktivní geometrie, díl 2, Kótované promítání*. Ostrava, VŠB-TU 1998. ISBN 80-7078-276-5

# Analysis of span of roof over the building of rectangle polygon projection

Piotr Dudzik

*Geometry and Engineering Graphics Centre, Silesian University of Technology  
Krzywoustego 7, 44-100 Gliwice, Poland  
email: piotr.dudzik@polsl.pl*

**Abstract.** In many (not to say in the vast majority) designs for detached with multi-slope roofs, as the base of the object is assumed a rectangular polygon. Such an assumption brings various problems: among others, the designer can obtain sophisticated roof sculpture; but also reduce the span of the building about the quite extensive outline. The last feature is important as far as the structural mechanics and the building construction technology. In particular, it refers to determining the possible application within carpenters constructions types. From the viewpoint of many criteria, creating an optimal, geometrical design solutions requires, among others, algorithms to calculate span of the buildings and analysis of the carpenters constructions types based of the projection of a rectangular polygon. The paper proposes an appropriate algorithm, whose implementation has been made in the programming language VBA.

*Key words:* Roof, span of roof, span of building, carpenter construction, rafter

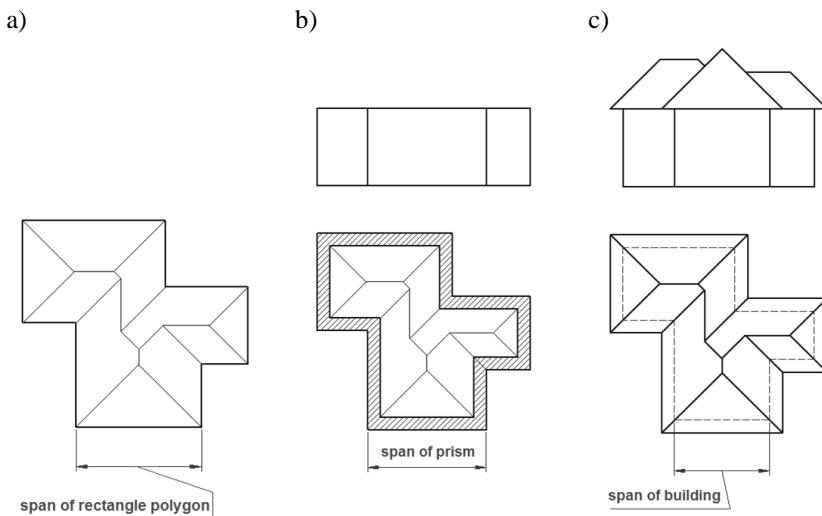
## 1 Basic information

By asking the question about the optimal shape of the solid of building, author noticed that it may also be determined by the type of carpentry construction of roof. When designing the roof can be distinguished several cases resulting from the way of use: non-habitable attic space, non-habitable attic space with the possibility of later adaptation and habitable attic space. The last two cases can be reduced to the case habitable attic space. Assuming span of the roof construction introducing an additional condition to optimize the shape of the building. These issues can be solved using one of many computer programs, but there is the need to transfer large amounts of data. In the first place this causes problems with the transmission (various formats) and consequently prolongs the cycle of calculations. In addition, each change of program requires user intervention, which further adversely affect the time calculation. Hence the need to develop an algorithm that allows to perform calculations in one application (MS Excel) [14, 15], in which introduces the initial data, boundary conditions as well as the optimization criteria.

## 2 Span

The aforementioned requirement as span of carpentry construction of roof as a result of technological constraints (limited length of components) seems to be an effective limitation of the size of the building structure. The main

question is: how to determine this size? Assuming a rectangular polygon [7, 8] as the basis of the roof, can be determine the location of the roof vertices. On this basis, it is possible to obtain span of a rectangular polygon (Fig. 1a). Similarly, for a model that is a simplification of the building, with a projection of rectangular polygon, it is possible to repeat the previous considerations and receive span of a prism (Fig. 1b). Ultimately looking for a span of the building, it is possible to conclude that the earlier considerations in this case allow for unambiguous determination of the desired size. This span in comparing to the model in Figure 1b is smaller for the double size of the overhang (Fig. 1c).



**Fig. 1: Illustration of span: a) plane figure (rectangular polygon [7]); b) prism; c) building**

### 3 Carpenters constructions

For complex use of the algorithm besides the span is needed a data to determine the suitability of geometric solutions. For this purpose, based on the research of literature [1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 13, 16] done summary of carpenters constructions of roof. Prepared according to the formula set out in the Table 1, the database has the following structure. The first column contains index number, the second name of carpenter construction. The third and fourth column stores data related to a minimum and maximum span of the construction type. The last column provided data about the source of the information.

**Table 1. Format of the table used to create a database of carpenters constructions of roof**

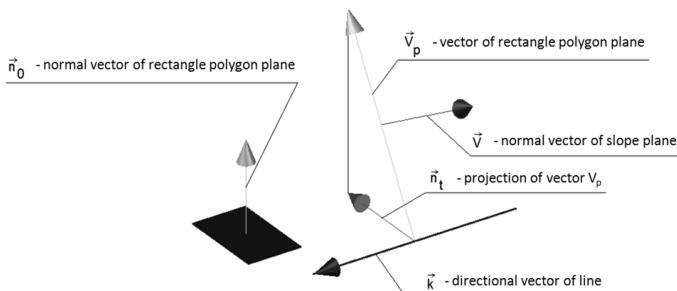
index	name of construction	span		literature
		minimum	maximum	
1.				

## 4 Algorithm

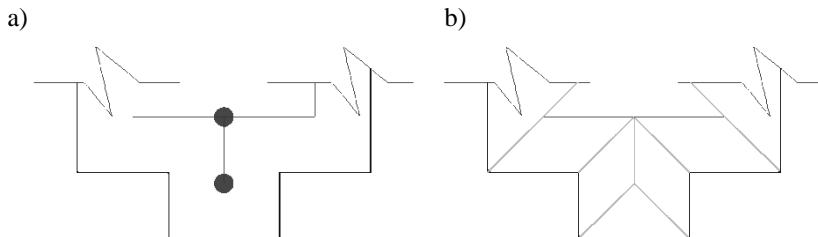
Knowing the basics of descriptive geometry [3] and knowing what shapes take the slope of the multi-slope roof [6, 11] could be developed algorithm allows to determine the vertices of roof. The first step of the algorithm, developed by the author, consists in determining the coordinates of vertices of the polygon of eaves and creating direction vectors containing different eaves edges  $\vec{k}$  (Fig. 2). The second step (the description for one edge) contains a calculation of the normal vector of rectangle polygon plane  $\vec{n}_0$ . In designating vector product of vector  $\vec{k}$  and  $\vec{n}_0$  obtain vector  $\vec{n}_t$ . Then, based on an assumed angle of the slope  $\alpha$  we define the vector  $\vec{V}_p = (x_{n_t}, y_{n_t}, |\vec{n}_t| \operatorname{tg} \alpha)$  belonging to the slope plane, where  $|\vec{n}_t| = \sqrt{n_{tx}^2 + n_{ty}^2 + n_{tz}^2}$ . Using the vector product again, this time for vectors  $\vec{V}_p$  and  $\vec{k}$  we receive vector

$$\vec{V} = [A, B, C] = \vec{V}_p \times \vec{k} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ k_x & k_y & k_z \\ x_{n_t} & y_{n_t} & |\vec{n}_t| \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}, \text{ normal vector of slope plane.}$$

Substituting into the general equation of plane coordinates of one vertex edge of eaves and the vector  $\vec{V}$  we obtain general equation  $Ax + By + Cz + (-Ax_n - By_n - Cz_n) = 0$  of plane which is a lope of the roof.

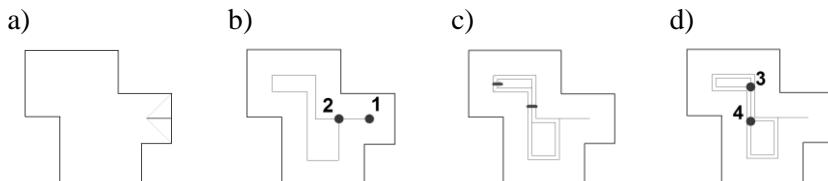
**Fig. 2: Designation of an equation of a slope plane**

Knowing the equation of the slope of a roof takes the third step of the algorithm - determination of vertices. Searching starts from the identification of the eaves edge forming a triangular slope (Fig. 4a)[6]. The resulting of projection of slope is a triangle with angles  $45^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ , height routed from the vertex containing the right angle is equal to half the length of the edge of the eaves. Obtained value is the size by which to thinning output polygon (move all edges inside a polygon). New smaller polygon is built (Fig. 4b) [10]. By searching the resulting set of coordinates of the smaller polygon, we find the vertices that occur two times, these are the searched vertices (Fig. 4b, point 1). Successively we make the next search of set to find the point of the same coordinate  $x$  or  $y$  such as found double point and we receive second vertex of the ridge (Fig. 4b, point 2). However, where in the set are two double points, we have traced two vertices of the ridge. Such a situation may occur on the last thinning (four walls) or in the situation shown in Figure 3.

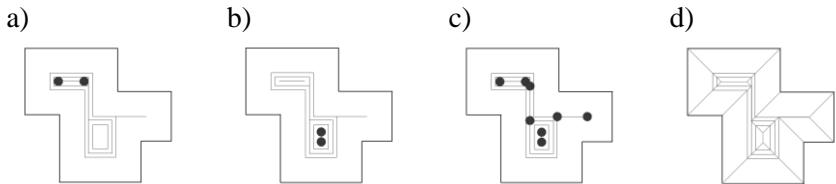


**Fig. 3: Occurrence of two double points a) thinning b) slope view**

Another operation of thinning a polygon begins, as before, from the search for the eave line generating a triangular slope, i.e. giving the size of thinning. This condition is not sufficient, and should check distance between the parallel edges of the polygon eaves (Fig. 4c). The smaller of obtained values is used to generate the next polygon and the designation of further vertices (Fig. 4d, points 3 and 4). This procedure is repeated until it is impossible to create a new polygon (Fig. 5b). Then we obtain all the vertices of the roof (Fig. 5c, d).



**Fig. 4: The steps in determining the vertices of the roof**



**Fig. 5: Further steps in determining the vertices of the roof**

The fourth step of the algorithm consists of assigning vertices to each planes. This assignment consists in determining the distance between the points and planes.

$$d(P, \alpha) = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

A value of zero means that the condition of belonging to the plane is fulfilled.

As a result we get a set of vertices determine each slope.

The last step is associated with determination of capabilities of construction. From the prepared database containing span of carpentry construction of roof are printed those that can be apply in a given solid. Verification of this condition consists, in the first place, on the determination of the distance of vertices projections belonging to particular slope from the edge of the eaves. With all the calculation is taken the maximum value. This size we double and then subtract from it double size of the overhang and get the search span. The second step of that calculation consists in searching the prepared database of carpentry construction of roof and writing appropriate types of construction.

## 5 Conclusion

The proposed algorithm allows for multiple, and according to the author fast enough, find the vertices of the roof, with a simultaneous specifying the type of construction suitable for the use. The obtained parameters are used in further work related to an attempt to optimize the shape of the building.

## References

- [1] C. Byrdy: *Dachy ciesielskie – ramownice*, <http://www.dachy.info.pl/przeglad/dachy-ciesielskie-ramownice/>, access 26.08.2015
- [2] Z. Gęsiński: *Konstrukcje więźb dachowych z drewna*, <http://www.abc-dachy.pl/index2.php?site=art&id=510>, access 26.08.2015
- [3] B. Grochowski: *Geometria wykreslona*, PWN, Warszawa 1977
- [4] A. Kaczkowska: *Dekarz*, KaBe, Krosno 2007
- [5] J. Kotwica: *Konstrukcje drewniane w budownictwie tradycyjnym*, Arkady, Warszawa 2005

- [6] E. Koźniewski: *Geometria dachów. Teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok, 2007
- [7] E. Koźniewski: *Rectangular Polygons and its Shape Parameters*. Submitted to The Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics, Vol. 27 (2015), Gliwice, 2015
- [8] E. Koźniewski: *Wielokąty prostokątne*. Manuskrypt 2010
- [9] L. Lichołaj: *Budownictwo ogólne*, Arkady, Warszawa 2008
- [10] F.,P. Preparata, Shamos M.,I.: *Geometria obliczeniowa. Wprowadzenie*. Żmijewski, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2005
- [11] A. Repelewicz: *Dachy geometria i konstrukcja*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2004.
- [12] Silny kręgosłup dachu, <http://www.monier.pl/katalog-braas/dla-klientow-indywidualnych/silny-kregoslup-dachu.html>, access 26.08.2015
- [13] K. Szulc: *Konstrukcja wieżby*, <http://www.e-dach.pl/a/2711,konstrukcja-wiezby/2>, access 26.08.2015.
- [14] J. Walkenbach: *Excel 2010 PL*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2011
- [15] J. Walkenbach: *Excel 2010 PL. Programowanie w VBA. Vademecum*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2011
- [16] A. Wysocka: *Jaki dach, jaka konstrukcja dachu?*, <http://www.e-dach.pl/a/2202,jaki-dach-jaka-konstrukcja-dachu>, access 26.08.2015

# Data Approximation Using Lemniscates

## – Adding One Focus Method

Mária Gemeranová, Pavel Chalmovianský

*Department of algebra, geometry and didactic of maths, Faculty of mathematics,  
physics and informatics, Comenius University, Bratislava  
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovakia*

*Maria.Gemeranova@fmph.uniba.sk*

*Pavel.Chalmoviansky@fmph.uniba.sk*

**Abstract.** Multifocal lemniscate is a set of points in  $\mathbb{E}^2$ , whose product of distances to a finite set of fixed points is a constant. In our work, we look for a set of foci and a corresponding radius value, so that the resulting lemniscate approximates the input data set sufficiently accurate. Our algorithm searches for approximating lemniscate by adding exactly one focus per cycle, appropriately changing the radius value and optimizing parameters of the achieved lemniscate. We also adapt our algorithm to approximate points in  $\mathbb{R}^3$  by use of 3D lemniscates, which are the space analogues of the classical multifocal lemniscates in  $\mathbb{E}^2$ .

**Keywords:** Multipolar coordinates, multifocal lemniscates, 3D lemniscates, approximation, reconstruction, quasi-Newton's method in optimization.

## 1 Introduction

In Euclidean plane, an approximation of a given input data set can be performed by polygons or by splines for example. Another possibility is to use algebraic curves. We pick curves called multifocal lemniscates, which are algebraic curves defined by use of multipolar coordinates. Similarly, surface reconstruction of a given input set of points in  $\mathbb{R}^3$  can be performed by 3D lemniscates – space analogues of the multifocal lemniscates.

In our present work, we are focused on approximating the input data set in  $\mathbb{E}^2$  using multifocal lemniscates and also points in  $\mathbb{R}^3$  using 3D lemniscates. We try to find an appropriate lemniscate approximation for the input data set, i.e. we try to find a collection of suitably located foci and a radius value so that the resulting lemniscate minimizes an approximation error. We examine an iterative algorithm of adding one focus per cycle, which was inspired by our previous methods of doubling and removing lemniscate foci.

## 2 Brief overview of lemniscates

### 2.1 Polar coordinates in Euclidean plane

Polar coordinates determine point in Euclidean plane  $\mathbb{E}^2$  by a coordinate pair  $(r, \theta)$ , where  $r \in \mathbb{R}_0^+$  represents a distance of the point from a fixed pole and  $\theta \in (0, 2\pi)$  represents a polar angle measured with respect to an axis passing through the pole.

A special case of polar coordinates, where the polar angle is substituted by a distance to another fixed pole are bipolar coordinates, which determine a point in  $\mathbb{E}^2$  by a bipolar coordinate pair  $(r_1, r_2)$ , where  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0^+$  represent distances of the point from two different fixed poles.

Dimensional inhomogeneous generalization of bipolar coordinates are multipolar coordinates, which determine a point in  $\mathbb{E}^2$  by a redundant system of multipolar coordinates  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $r_i \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ , where  $r_i$  are distances of the point from  $n$  fixed poles. [2]

## 2.2 Multifocal lemniscates

A set of points  $\{z \in \mathbb{E}^2 | r_1 r_2 \dots r_n = R\}$ , where  $z = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  is the point defined by its multipolar coordinates,  $r_i = |z - z_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$  are distances of the point  $z$  from  $n$  fixed poles  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{E}^2$  and  $R \in \mathbb{R}^+$  is a selected constant, is called multifocal lemniscate in  $\mathbb{E}^2$  with the foci  $z_1, z_2, \dots, z_n$  and the radius  $R$ .

It is a compact algebraic curve of degree  $2n$ . Such a curve consists of one or more connected components and each component contains inside at least one focus. The number of lemniscate components changes according to the position of the foci and the value of the radius but there are no more components than is the number of lemniscate foci.

If we consider a lemniscate with a large radius and only one component, which encloses all the foci, by decreasing the radius, the lemniscate tends to split into several components. On the other hand, if we consider a lemniscate with a several components and small enough radius, by increasing the radius, the lemniscate components tend to merge into less components till the lemniscate consists of only one component limiting in a circular shape. When the radius value changes, the relevant lemniscate may contain a singular point, in which its components split or merge. [3]

## 2.3 3D lemniscates

The spatial analogues of the classical multifocal lemniscates in  $\mathbb{E}^2$  are 3D lemniscates. It is the set of points in  $\mathbb{R}^3$ , whose product of squared distances, to a finite set of fixed points is equal to a constant.

They are bounded algebraic surfaces, whose degree is twice the number of their foci. 3D lemniscate may consist of one or more connected components of a surface. Each of lemniscate focus is enclosed in some of these connected components but there might be a component enclosing inside no lemniscate focus.

If the lemniscate radius is decreasing, 3D lemniscate tends to split into more small spherical components. On the other hand, if the radius increases, components of 3D lemniscate merge together to one component with spherical shape. The points of 3D lemniscate, in which components split or merge, are called singular points. [1]

### 3 Data approximation using lemniscates

Our research is focused on the searching for a suitable approximation of an input set of points. For this purpose we have chosen above mentioned objects, curves called multifocal lemniscates. Motivation for this choice was fact, that with these curves, we are able to achieve a good approximation using a small amount of data, what is stated in Hilbert's lemniscate approximation theorem [8] which says, that an arbitrary curve in plane, smooth enough, can be approximated by a multifocal lemniscate with a desired accuracy.

In our work we are looking for a collection of optimally located foci and a suitable radius value, so that the resulting lemniscate approximates the input data set sufficiently accurate in Euclidean metric. Our aim is to minimize the number of used foci and an error of achieved lemniscate approximation.

We have already examined a few iterative algorithms of adding and removing lemniscate foci and a suitable estimation function for location of new foci. The methods use Sampson's distance [9] as an approximation criterion and quasi-Newton's method L-BFGS [7] for optimizing parameters of an approximation lemniscate.

The main difficulty in our process of gaining a suitable lemniscate approximation is the question: where to place new lemniscate foci and how to suitably adjust the radius value. In our previous work [4, 5], we have proposed *Algorithm of doubling lemniscate's foci* and *Algorithm of doubling and removing lemniscate's foci* in [6]. With these methods we have achieved quite good results, but by doubling the foci there are occasionally lemniscates with certain redundant foci although the lemniscate topology does not change and combination of doubling the foci and removing one focus, if it is necessary, still does not allow us to add only one new focus.

So in our present work we have proposed an iterative approximation method, inspired by removing one focus process from mentioned previous algorithm, where only one new lemniscate focus is added in each iteration, even at the cost of possible change of lemniscate topology. Steps of this *Adding one focus method* can be described as follows (for an illustration of its behaviour see fig. 1):

1. Determination of parameters for a starting circle.

The center  $z_1$  of the starting circle  $k(z_1, R)$ , which is also first focus of an approximating lemniscate, is computed as a center of gravity of an input set of points. An appropriate radius  $R$ , for the starting circle, has to minimize the product of distances of the input set of points from  $z_1$ . The radius is computed from the equation

$\frac{d}{dR} F(R) = 0$ , where

$$F(R) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{k(z_1, R)(p_i)}{\|\nabla k(z_1, R)(p_i)\|} \right)^2, \quad (1)$$

the number of points in the input data set is  $n$  and the points  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  are from the input data set.

## 2. Optimization of the starting circle parameters.

Parameters are optimized using the L-BFGS method.

## 3. Adding one focus.

Now, the algorithm adds to current approximating lemniscate one new focus and is searching for its suitable location. Positions of the foci we already have are one by one tested and the lemniscate radius is appropriately modified. The algorithm finally chooses the position for location of new focus, so that the approximation error improves the most. The error is computed as

$$F(z_1, z_2, \dots, z_N, R) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{L(z_1, z_2, \dots, z_N; R)(p_i)}{\|\nabla L(z_1, z_2, \dots, z_N; R)(p_i)\|} \right)^2, \quad (2)$$

where  $L(z_1, \dots, z_N; R) = 0$  stands for the lemniscate equation with the foci  $z_1, \dots, z_N$  and the radius  $R$ , the points  $p_i$  are from the input data set.

## 4. Foci motion step.

The algorithm is passing through an actual set of foci and choosing one of them. The chosen focus is moved in a direction of the axes  $x$  and  $y$  about a specific constant. A focus motion is realized in one of eight possible directions or a focus can remain in the initial position. The algorithm finally chooses the direction for the focus motion, in which the error value is smallest. When the algorithm has completely modified the positions of all foci, a new radius value is computed similarly as it was done for the starting circle above.

## 5. Optimization of the approximation lemniscate parameters.

Parameters are optimized using the L-BFGS method.

## 6. Iterating from adding one focus step.

If the total error is too high, the algorithm jumps to the step three and increases the number of the lemniscate foci.

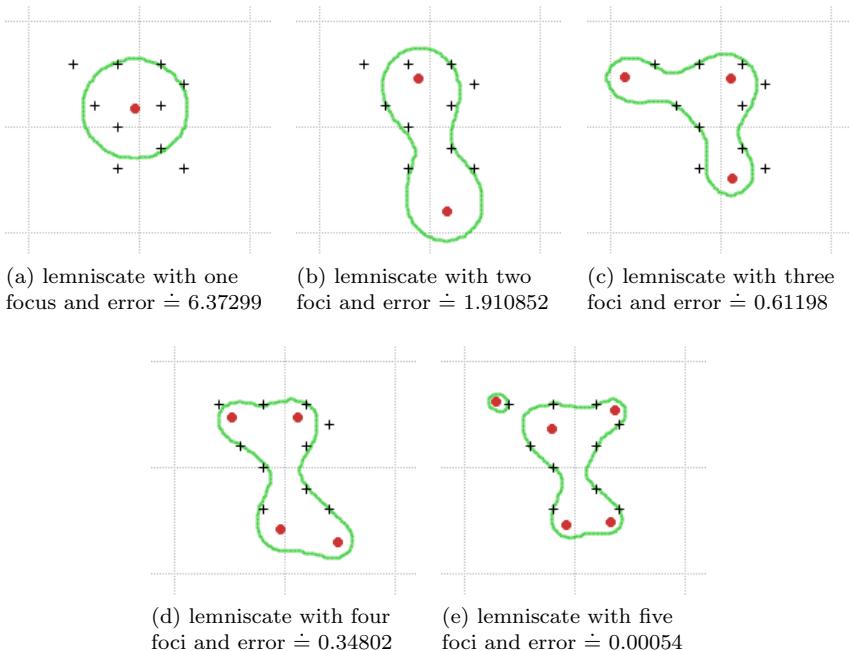


Figure 1: An illustration of adding one focus method approximating input set of points in  $E^2$  by appropriate multifocal lemniscate: black crosses – input set of points, red points – lemniscate foci, green curve – approximation lemniscate. (The approximation error is rounded to five decimal points.)

Whereas the 3D lemniscates are the space analogues of the multifocal lemniscates and so they have very similar characteristics, we decided to adapt mentioned approximation method from the planar case to the spatial case. This adapted adding one focus method, which looks for a suitable 3D lemniscate approximation for an input set of points in  $R^3$ , brings quite good results as we were expected (see fig. 2).

## 4 Future work

In the future, we plan to explore another possible ways to get good lemniscate approximation by an appropriate foci displacement and modification of the radius.

We want to try another approach for handling points from the input data set by our iterative approximation methods. Instead of dealing

with all points at once, we find suitable approximation for only two points at first. Then, we add one more point and find again good approximation. In this way, we will add points till the appropriate lemniscate approximation of the whole input point set will be achieved.

Also interesting idea is to glue segments of some lemniscates together by suitable blending functions.

## Acknowledgements

This work was supported by Grant of Comenius University number UK/298/2015 and operational program ASFEU project "COMENIANA – metódy a prostriedky digitalizácie a prezentácie 3D objektov kultúrneho dedičstva", ITMS: 26240220077, which was co-financed by the European regional development fund.

## References

- [1] G. Arcos, G. Montilla, J. Ortega, and M. Paluszny. Shape control of 3D lemniscates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 73(1-4):21–27, 2006.
- [2] R. Farouki and H. P. Moon. Bipolar and multipolar coordinates. In *The Mathematics of Surfaces IX*, pages 348–371. Springer, London, 2000.
- [3] R. T. Farouki and C. Y. Han. Robust plotting of generalized lemniscates. *Applied Numerical Mathematics*, 51(2-3):257–272, 2004.
- [4] M. Gemeranová and P. Chalmovianský. Approximation of points in Euclidean plane using multifocal lemniscate. In *Proceedings on Spring Conference on Computer Graphics*, volume 29, Bratislava, 2013. Comenius University, Bratisla, Slovakia.
- [5] M. Gemeranová and P. Chalmovianský. Planar reconstruction using multifocal lemniscates. In *Proceedings on Symposium on Computer Geometry*, volume 22, Bratislava, 2013. Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing House of STU.
- [6] M. Gemeranová and P. Chalmovianský. Data approximation using multifocal lemniscates - algorithm of doubling and removing lemniscate's foci. In *Proceedings on Conference on Applied Mathematics*, Bratislava, 2015. Slovak University of Technology in Bratislava, Publishing House of STU.
- [7] D. Liu and J. Nocedal. On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Mathematical Programming* 45, pages 503–528, 1989.
- [8] A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*. PrenticeHall, 1965.
- [9] P. D. Sampson. Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm. *Computer Graphic and Image Processing* 18, pages 97–108, 1982.

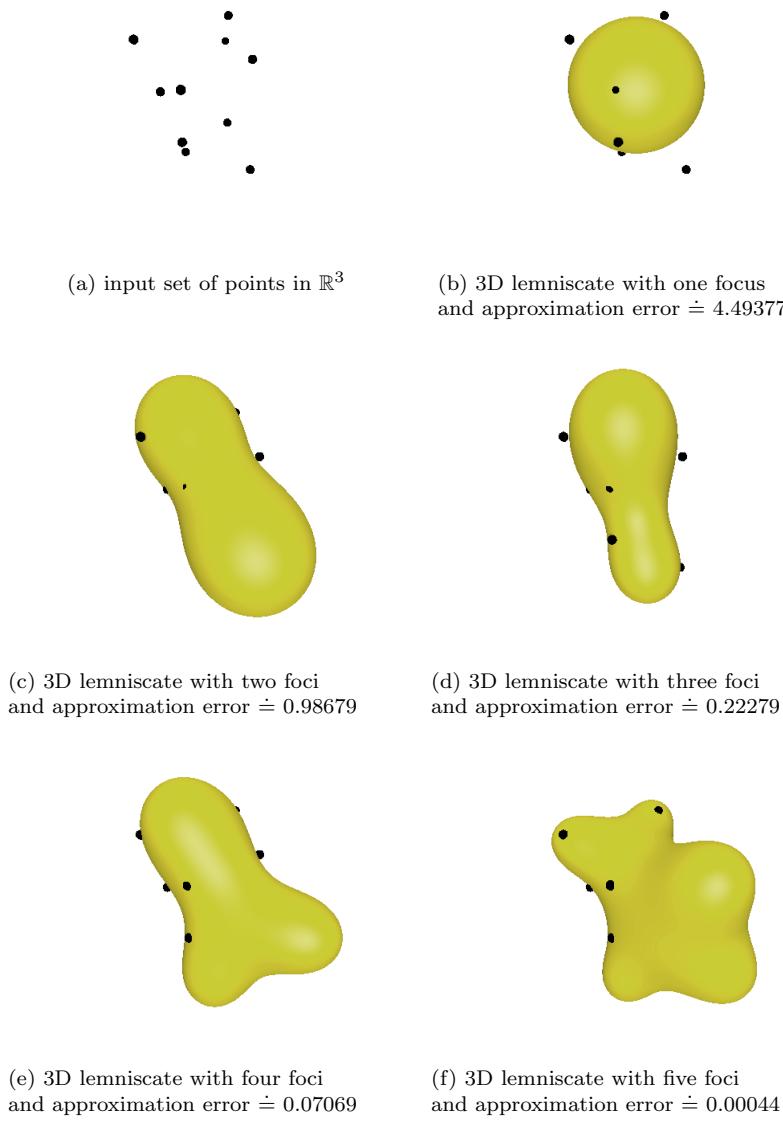


Figure 2: An illustration of adding one focus method adapted to approximate input set of points in  $\mathbb{R}^3$  by appropriate 3D lemniscate: black points – input set of points, yellow surface – 3D approximation lemniscate. (The approximation error is rounded to five decimal points.)



# Objevování konstrukcí při dělení úsečky

## Searching constructions for segment division

Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan

*Katedra softwaru a výuky informatiky Matematicko-fyzikální fakulty*

*Univerzity Karlovy v Praze*

*Malostranské náměstí 25, Praha*

*sarka@gbn.cz*

*Tomas.Holan@mff.cuni.cz*

**Abstract.** An Interactive Geometry Software (e.g., the GeoGebra system) can stimulate and encourage students to reveal new constructions. Features of such systems are very helpful as they are able to suggest possible answers and also reject wrong ideas. Despite advances in the CAS (symbolic calculations) development, the geometric proofs of correctness of such constructions must be usually performed. The paper brings a lot of examples of construction of a point which divides a given segment at a ratio of  $1 : (k - 1)$ , for positive integer  $k < 20$ . Presented constructions can serve as task resource for practicing proofs in plane geometry. Proofs of the correctness of those constructions need knowledge of elementary geometry rules and theorems, especially the similarity of triangles and the power of a point to a circle theorem.

**Keywords:** Plane geometry, segment division, Euclidean constructions

**Klíčová slova:** Planimetrie, dělení úsečky, eukleidovské konstrukce.

## 1 Úvod – hledání co nejkratší konstrukce dělicího bodu

Témátu elementárních eukleidovských konstrukcí jsme se věnovali již v [1], kdy jsme se zabývali dokazováním správnosti těchto konstrukcí využitím znalostí dostupných středoškolákům. Protože jde o užitečné cvičení základních planimetrických vztahů a schopnosti provádět důkazy na tvrzeních, která nejsou abstraktní, ale jejichž obsah je studentům srozumitelný a je dobře zobrazitelný, uvedeme několik dalších konstrukcí spolu s inspirací, jak takové konstrukce hledat s pomocí programů dynamické geometrie. Speciálnímu případu, kdy lze důkaz správnosti provést s využitím mocnosti bodu ke kružnici, jsme se věnovali v článku [2].

Připomeňme, že cílem bude nalézt (a posléze dokázat správnost nalezeného postupu) nějakou co nejkratší eukleidovskou konstrukci (měřeno počtem jejích kroků), která sestrojí bod v jedné  $k$ -tině úsečky  $AB$ , máme-li při začátku konstrukce sestrojeny pouze dané body  $A, B$  (a  $k$  je přirozené číslo). V článku [1] jsme ukázali jakési „univerzální“ konstrukce, které jsou známé a někdy mylně vydávané za nejkratší, a také to, že bod v jedné  $k$ -tině úsečky  $AB$  dokážeme pro  $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  sestrojit pomocí nejvýše pěti kroků. Krokem konstrukce nazveme sestrojení jedné přímky nebo kružnice a všech jejích průsečíků s dříve sestrojenými přímkami a kružnicemi. Smíme však sestrojit (narýsovat) pouze:

- kružnici s daným (již sestrojeným) středem procházející daným (již sestrojeným) bodem,
- kružnici s daným (již sestrojeným) středem a s poloměrem, který se rovná délce nějaké úsečky ohraničené dvěma danými (dříve sestrojenými) body,
- přímku danou dvěma body.

Nemáme tedy nástroj pro sestrojení rovnoběžky či kolmice k jiné přímce.

Nadále tedy budeme hledat šestikrokové konstrukce pro další přirozená  $k$ . V [1] jsme čtenáře vyzvali k jejich hledání pro  $k < 20$ . Nyní několik takových konstrukcí předvedeme. Provedení důkazů jejich správnosti však přenecháme čtenáři.

## 2 Hledání konstrukcí

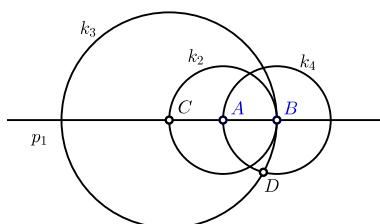
Prvými kroky každé konstrukce musí být dvojice z čar:

- kružnice se středem v bodě A o poloměru  $|AB|$ ,
- kružnice se středem v bodě B o poloměru  $|AB|$ ,
- přímka  $AB$ .

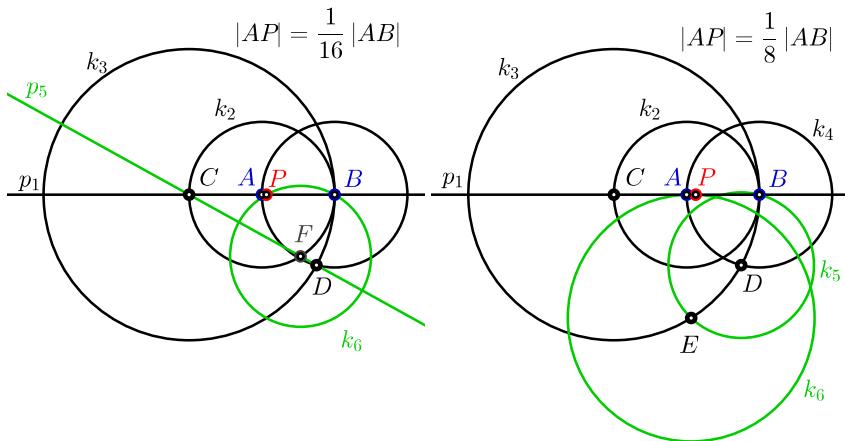
Možnosti pro třetí krok konstrukce ještě dokážeme vyjmenovat, ale výčet možných čtvrtých kroků už je dlouhý. Pro ilustraci hledání konstrukcí si v další textu vybereme několik variant z možných počátečních čtveřic kroků a pro každou z nich ukážeme několik možných pokračování ke konstrukci nějakého dělicího bodu výše uvedených vlastností.

Ve všech ukázkových konstrukcích v celém textu bude každá sestrojená přímka a kružnice v každé konstrukci označena názvem  $p$  nebo  $k$  s dolním indexem – číslem kroku, v němž byla sestrojena. Hledaný bod, který leží v jedné  $k$ -tině úsečky  $AB$ , budeme všude označovat  $P$ .

### 2.1 Varianta I



Obrázek 1: Výchozí čtveřice kroků pro konstrukci dělicích bodů úsečky

Obrázek 2: Konstrukce bodu v  $1/16$  úsečky  $AB$  a v  $1/8$  úsečky  $AB$ 

V ukázkách této sady vyjdeme ze čtverice na obr. 1, kde jsme kromě středů sestrojených kružnic vyznačili i bod-průsečík  $D$ , který ve vybraných konstrukcích využijeme.

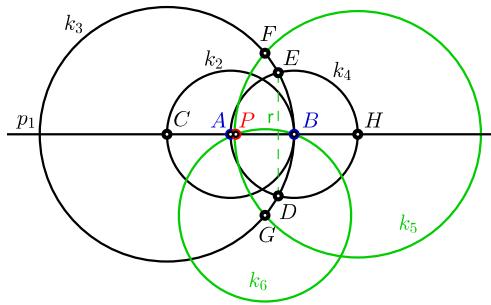
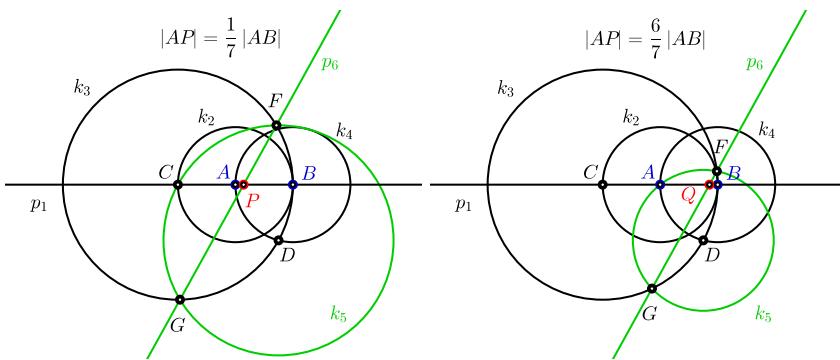
Z uvedené výchozí konfigurace sestrojíme například bod  $P$  v  $1/16$  a v  $1/8$  úsečky  $AB$  (obr. 2). Na obr. 2 vlevo je sestrojena přímka  $p_5 = CD$  a její průsečík  $F$  s kružnicí  $k_2$ . Hledaný bod  $P$  v  $1/16$  úsečky  $AB$  je průsečíkem přímky  $AB$  a kružnice  $k_6$  se středem v bodě  $F$ , která prochází bodem  $B$ .

V podobné konstrukci na obr. 2 vpravo je kružnice  $k_5$  určena středem  $D$  a bodem  $B$  a protíná kružnici  $k_3$  v dalším bodě  $E$ . Bod  $E$  je středem kružnice  $k_6$ , která prochází bodem  $A$  a protíná úsečku  $AB$  v bodě  $P$  v její osmině.

Na obrázku 3 sestrojíme bod v  $1/12$  úsečky  $AB$ . Střed kružnice  $k_5$  leží ve druhém průsečíku kružnice  $k_4$  s přímkou  $AB$  (bod  $H$ ). Kružnice  $k_5$  s poloměrem  $r = |ED|$  protíná kružnici  $k_4$  v bodech  $F, G$ . Kružnice  $k_6$ , která má střed v bodě  $G$  (nebo v bodě  $F$ ) a prochází bodem  $B$ , protíná přímku  $AB$  v hledaném bodě  $P$ .

Na obr. 4 vlevo vidíme konstrukci bodu v  $1/7$  úsečky  $AB$ . Pátým krokem konstrukce je kružnice  $k_5$  se středem v bodě  $D$ , která prochází bodem  $C$ . Ta protíná kružnici  $k_4$  v bodech  $G, F$ , které určují přímku  $p_6$ , která protíná přímku  $AB$  v hledaném bodě  $P$ . Pokud bychom vedli kružnici  $k_5$  se středem v bodě  $D$  bodem  $A$ , protnula by výše sestrojená přímka  $p_6$  přímku  $AB$  v bodě  $Q$ , který leží v  $6/7$  úsečky  $AB$ . Bod  $P$  bychom tedy získali také „pravo-levým převrácením“ konstrukce na obr. 4 vpravo.

$$|AP| = \frac{1}{12} |AB|$$

Obrázek 3: Konstrukce bodu v 1/12 úsečky  $AB$ Obrázek 4: Konstrukce bodu v 1/7 úsečky  $AB$  a v 6/7 úsečky  $AB$ 

## 2.2 Další varianty

Pro uvedenou čtverici prvých kroků konstrukce můžeme najít ještě jiné dělicí body. Při dalším objevování pak můžeme například nahradit ve zvolené základní čtverici kroků čtvrtý krok – kružnicí  $k_4(B, |AB|)$  – jinou kružnicí. Několik takových variant konstrukcí včetně obrázků jsme uvedli v úplné verzi článku na adrese

[http://ksvi.mff.cuni.cz/~holan/24scg\\_35cgg\\_2015/](http://ksvi.mff.cuni.cz/~holan/24scg_35cgg_2015/).

### 3 Další příklady konstrukcí

Výše uvedené konstrukce jsme doprovodili obrázky. Další ukázky již uvedeme pouze zápisem konstrukce. V jejich zápisu se budeme držet úmluvy, kterou jsme uvedli výše a která je ve shodě s výše uvedenými příklady a obrázky. Krok konstrukce je sestrojení jedné přímky nebo kružnice a všech jejích průsečíků s dříve sestrojenými přímkami a kružnicemi. Z těchto průsečíků však vždy vyznačíme (popíšeme) pouze ty, které použijeme v další konstrukci (a výsledný dělicí bod, který budeme všude pro srozumitelnost označovat  $P$ ). Příklady:

Zápis  $p_1 = AB$  označuje sestrojení přímky  $AB$  v prvním kroku konstrukce.

Zápis  $k_2 = k(A, B)$  označuje sestrojení kružnice se středem  $A$ , která prochází bodem  $B$ , ve druhém kroku konstrukce.

Zápis  $k_4 = k(C, |AB|)$  označuje sestrojení kružnice se středem  $C$  s poloměrem  $|AB|$  ve čtvrtém kroku konstrukce.

Průsečík označíme symbolem  $\cap$ , existují-li průsečíky dva, označíme novým názvem ten, který dosud označený nebyl, nebo je očíslujeme podle jejich orientovaného pořadí na kružnici (tj. pro bod  $Q$  podle velikosti orientovaného úhlu  $XSQ$ , kde  $SX$  je polopřímka orientovaná „na východ“). Například  $Q = p_1 \cap k_3$  (2).

Protože prvým krokem všech vybraných konstrukcí bude sestrojení přímky  $p_1 = AB$ , nebudeme tento krok v konstrukcích zapisovat.

#### **$k = 5$**

$$\begin{aligned} k_2 &= (A, B), C = k_2 \cap p_1 \\ k_3 &= (B, A), D = k_3 \cap p_1, \\ &\quad k_2 \cap k_3 = \{E, F\} \\ k_4 &= (E, |CD|) \\ p_5 &= EB, H = k_4 \cap p_5 \text{ (2)} \\ p_6 &= HF, P = p_1 \cap p_6 \end{aligned}$$

#### **$k = 7$**

$$\begin{aligned} k_2 &= (A, B), C = k_2 \cap p_1 \\ k_3 &= (B, A), k_2 \cap k_3 = \{E, F\} \\ p_4 &= EB, G = p_4 \cap k_3 \\ p_5 &= CG, H = k_3 \cap p_5 \text{ (1)} \\ p_6 &= (H, A), P = p_1 \cap k_6 \end{aligned}$$

#### **$k = 8$**

$$\begin{aligned} k_2 &= (A, B), C = k_2 \cap p_1 \\ k_3 &= (B, A) \\ k_4 &= (C, B), D = k_4 \cap k_3 \text{ (2)} \\ k_5 &= (C, |AD|), k_3 \cap k_5 = \{G, H\} \\ p_6 &= GH, P = p_1 \cap p_6 \end{aligned}$$

#### **$k = 9$**

$$\begin{aligned} k_2 &= (A, B), C = k_2 \cap p_1 \\ k_3 &= (B, C), D = k_3 \cap p_1 \\ k_4 &= (D, A), E = k_4 \cap k_2 \text{ (2)} \\ p_5 &= DE, G = k_2 \cap p_5, H = k_3 \cap p_5 \\ k_6 &= (C, |GH|), P = p_1 \cap k_6 \text{ (1)} \end{aligned}$$

#### **$k = 10$**

$$\begin{aligned} k_2 &= (B, A), C = k_2 \cap p_1 \\ k_3 &= (B, |AC|), k_3 \cap p_1 = \{E, D\} \\ k_4 &= (D, C), F = k_4 \cap p_1, \\ &\quad G = k_4 \cap k_3 \text{ (2)} \\ k_5 &= (F, G), H = k_2 \cap k_5 \\ k_6 &= (H, E), P = p_1 \cap k_6 \end{aligned}$$

#### **$k = 11$**

$$\begin{aligned} k_2 &= (B, A), C = k_2 \cap p_1 \\ k_3 &= (B, |AC|), D = k_3 \cap p_1 \text{ (2)} \\ k_4 &= (D, C), E = k_4 \cap k_3 \text{ (2)} \\ k_5 &= (E, C), G = k_4 \cap k_5, H = k_2 \cap k_5 \\ p_6 &= GH, P = p_1 \cap p_6 \end{aligned}$$

<b><math>k = 12</math></b>	<b><math>k = 13</math></b>
$k_2 = (A, B), C = k_2 \cap p_1$	$k_2 = (B, A), C = k_2 \cap p_1$
$k_3 = (B, C), D = k_3 \cap p_1$	$k_3 = (C, B), D = k_3 \cap p_1, F = k_2 \cap k_3 \text{ (2)}$
$k_4 = (D, A), E = k_4 \cap k_2 \text{ (2)}$	$k_4 = (B,  AD ), k_4 \cap p_1 = \{H, G\}$
$k_5 = (C,  EB ), k_5 \cap k_4 = \{G, H\}$	$p_5 = FG, J = p_5 \cap k_3 \text{ (2)}$
$p_6 = GH, P = p_1 \cap p_6$	$k_6 = (J, H), P = p_1 \cap k_6$
<b><math>k = 14</math></b>	<b><math>k = 15</math></b>
$k_2 = (A, B), C = k_2 \cap p_1$	$k_2 = (A, B), C = k_2 \cap p_1$
$k_3 = (B, C), D = k_3 \cap p_1$	$k_3 = (C, B), D = k_3 \cap p_1$
$k_4 = (D, C), E = k_4 \cap p_1$	$k_4 = (D, A), k_4 \cap k_2 = \{E, F\}$
$k_5 = (E, A), k_2 \cap k_5 = \{G, H\}$	$k_5 = (E, F), k_5 \cap k_3 = \{G, H\}$
$p_6 = GH, P = p_1 \cap p_6$	$p_6 = GH, P = p_1 \cap p_6$
<b><math>k = 16</math></b>	<b><math>k = 17</math></b>
$k_2 = (A, B), C = k_2 \cap p_1$	$k_2 = (B, A), C = k_2 \cap p_1$
$k_3 = (A,  BC ), D = k_3 \cap p_1 \text{ (2)}$	$k_3 = (B,  AC ), D = k_3 \cap p_1 \text{ (1)}$
$k_4 = (D, C), E = k_4 \cap k_3 \text{ (2)}$	$k_4 = (D, C), E = k_4 \cap k_3 \text{ (2)}$
$k_5 = (E, B), F = k_2 \cap k_5$	$p_5 = AE, H = k_2 \cap p_5, G = k_4 \cap p_5$
$k_6 = (F, B), P = p_1 \cap k_6$	$k_6 = (H,  BG ), P = p_1 \cap k_6 \text{ (1)}$
<b><math>k = 18</math></b>	<b><math>k = 19</math></b>
$k_2 = (B, A), C = k_2 \cap p_1$	$k_2 = (A, B), C = k_2 \cap p_1$
$k_3 = (A, C), D = k_3 \cap p_1$	$k_3 = (C, B), D = k_3 \cap p_1$
$k_4 = (D, B), k_4 \cap k_2 = \{E, F\}$	$k_4 = (D, C), k_4 \cap k_3 = \{F, E\}$
$k_5 = (C,  EF ), k_5 \cap k_2 = \{G, H\}$	$k_5 = (E,  AD ), G = k_2 \cap k_5 \text{ (2)}$
$p_6 = GH, P = p_1 \cap p_6$	$p_6 = FG, P = p_1 \cap p_6$

## 4 Závěr

V článku jsme ukázali konstrukce, jejichž důkazy můžeme snadno provést v hodinách planimetrie a které jsou svou náročností dostupné pro většinu studentů i pro samostatné zkoumání. Mohou také sloužit jako inspirace k hledání podobných konstrukcí. Pro důkaz správnosti uvedených konstrukcí využijí studenti známé planimetrické věty a vztahy, zejména podobnost trojúhelníků a mocnost bodu ke kružnici.

## Literatura

- [1] Gergelitsová, Š., Holan, T.: Důkazy v planimetrii a dělení úsečky. *Sborník příspěvků 33. konference o geometrii a grafice*, Vlachovice : 2014 s. 105–114.
- [2] Gergelitsová, Š., Holan, T.: Mocnost bodu ke kružnici v důkazech. *Matematika-fyzika-informatika 24 (2015)*, č. 3 Prometheus, Praha : 2015 s. 252–263.

# Množiny bodů daných vlastností v GeoGebře

## Loci investigation in GeoGebra

Roman Hašek

*Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta  
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice  
hasek@pf.jcu.cz*

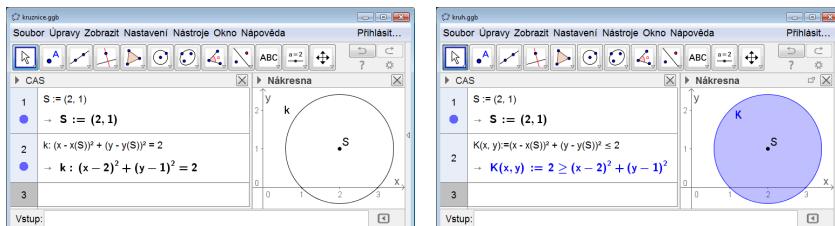
**Abstrakt.** Through particular examples of different complexity possible ways of the use of GeoGebra dynamic mathematics software to investigate loci are presented in this paper. The features of dynamic geometry and computer algebra, which the software offers, allow a user to carry out a procedure of investigation from the dynamic geometry sketch through numerical verification to symbolic solution.

*Keywords:* loci, dynamic geometry software, curve, equation of a curve.

*Klíčová slova:* množiny bodů daných vlastností, program dynamické geometrie, křivka, rovnice křivky.

## 1 Úvod

Množinou bodů dané vlastnosti rozumíme v tomto článku množinu všech bodů v rovině, které splňují nějakou stanovenou podmínu. Například, kružnice se středem  $S$  a poloměrem  $r$  je množinou všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu  $S$  je rovna  $r$ . Kruhem určeným stejnými prvky  $S$  a  $r$  pak rozumíme množinu všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od bodu  $S$  je menší nebo rovna  $r$ . Na množinách bodů daných vlastností nás zajímá jejich podoba a jejich matematické vyjádření. Pro podporu zkoumání těchto množin jsou svým prostředím a nástroji předurčeny programy dynamické geometrie. My se v článku zaměříme na využití zdarma



$$k : (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$$

$$K : (x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 \leq r^2$$

Obrázek 1: Zadání a zobrazení kružnice  $k$  a kruhu  $K$  v GeoGebře

dostupného programu GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)), který patří mezi světově nejrozšířenější programy pro podporu výuky matematiky.

## 2 Vyšetřování množin bodů v programu GeoGebra

Možnosti využití tohoto programu při vyšetřování množin bodů daných vlastností jsou opravdu široké. Množinu, která je dána rovnicí či nerovnicí, případně jejich soustavami, můžeme zadat v prostředí *CAS* a bezprostředně zobrazit v *Nákresně*, jak pro výše uvedené příklady kružnice a kruhu ilustruje Obr. 1. Neznáme-li rovnici množiny, můžeme ji popsat vhodnou soustavou algebraických rovnic a potom využít prostředí *CAS* k nalezení rovnice řešením této soustavy eliminací proměnných.

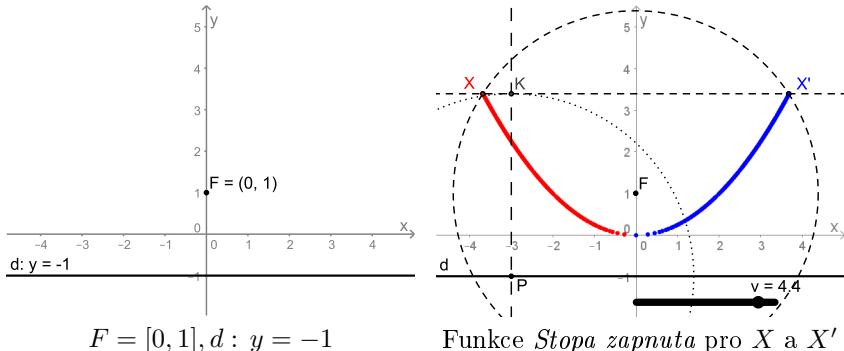
Nadále se zaměříme na množiny bodů daných vlastností, které mají povahu křivek. Kromě uvedených „standardních“ postupů dovoluje propojení prostředí dynamické geometrie a počítačové algebry, které je v GeoGebře realizováno, kombinovat geometrické a algebraické nástroje k vyšetření takovýchto množin prostřednictvím geometrického modelu. V dynamickém prostředí *Nákresny* lze na modelu simulovat vznik zkoumané množiny a prostřednictvím funkce *Stopa objektu* a nástroje *Množina bodů* (případně funkce *MnožinaBodu*) získat informace o její podobě. Při dodržení určitých podmínek konstrukce geometrického modelu je navíc možné v řadě případů určit rovnici zkoumané množiny. K automatickému výpočtu rovnice množiny v takovém případě slouží funkce *RovniceMnožinyBodu*, za kterou se skrývají postupy automatického odvozování a dokazování geometrických vlastností. Funkce počítačové algebry programu GeoGebra jsou založeny na jádru volně šířitelného systému počítačové algebry *Giac* ([www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html)), které je součástí instalace stávající verze GeoGebry 5.0. Pro externí výpočty je v případě připojení k internetu využíván robustnější systém *Singular* ([www.singular.uni-kl.de](http://www.singular.uni-kl.de)) [4].

Pro všechny množiny, které můžeme v programu dynamické geometrie zkoumat popsaným postupem je charakteristické, že vznikají jako trajektorie bodu  $T$  (v angličtině *tracer*), jehož poloha je prostřednictvím příslušné vlastnosti závislá na poloze jiného bodu  $M$  ( *mover*), který je volně pohyblivý po nějaké přímce či křivce. Syntaxe výše uvedených funkcí je potom *MnožinaBodu*[ $T, M$ ], resp. *RovniceMnožinyBodu*[ $T, M$ ]. Uvedené postupy si nyní budeme ilustrovat prostřednictvím úlohy vycházející z definice paraboly pomocí ohniska a řídící přímky.

Hledáme množinu všech bodů  $X$  v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu  $F$  a od dané přímky  $d$ , která tímto bodem neprochází. Zadání modelujeme v GeoGebře pro konkrétní  $F$  a  $d$ , např.  $F = [0, 1]$  a  $d : y = -1$ , viz Obr. 2, vlevo.

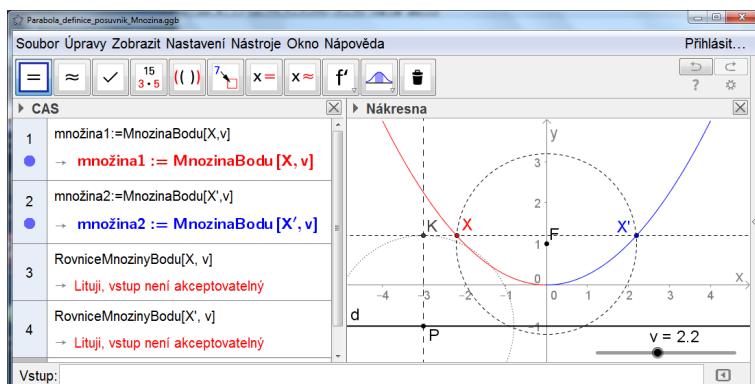
Nejprve budeme hledanou množinu zkoumat pomocí nástroje *Stopa objektu*. Vzdálenost bodu  $X$  množiny od daných prvků  $F$  a  $d$  nazveme  $v$  a pro její hodnotu založíme v *Nákresně* posuvník, viz Obr. 2, vpravo. Na přímku  $d$  umístíme libovolně bod  $P$  a v něm sestrojíme kolmici na  $d$  a kružnici s poloměrem  $v$ . Jejich průsečíkem (uvažujeme jenom ten nad

osou  $x$ ), který nazveme  $K$ , vedeme rovnoběžku s  $d$ . Potom sestrojíme kružnici se středem  $F$  a poloměrem  $v$ . Její průsečíky  $X, X'$  s uvedenou rovnoběžkou jsou body, které splňují požadovanou vlastnost, jsou stejně vzdáleny od přímky  $d$  i od bodu  $F$ . Nakonec u bodů  $X, X'$  aktivujeme funkci *Stopa zapnuta*. Pohybujeme-li posuvníkem, pohybují se i tyto body a svými stopami vykreslují tvar zkoumané množiny, tj. paraboly.



Obrázek 2: Množina bodů stejně vzdálených od bodu  $F$  a od přímky  $d$

Nyní použijeme funkci *MnožinaBodu*. Jejím výsledkem je numericky vypočítaná množina bodů v *Nákresně*, která odpovídá všem možným položkám příslušného bodu geometrického modelu. Pro větší přehlednost funkci



Obrázek 3: Použití funkce *MnožinaBodu*

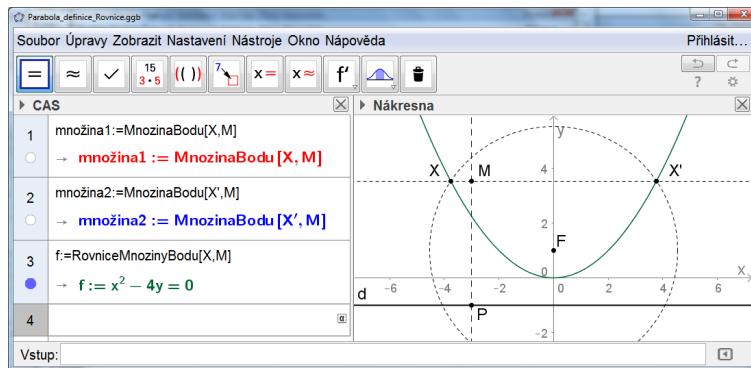
zadáme v prostředí *CAS*, stejnou službu by však vykonalo její zadání na vstupním rádku, případně použití nástroje *Množina bodů* v *Nákresně*. Výsledek je zaznamenán na Obr. 3. Vidíme, že funkce vykreslí jenom tu

část množiny (paraboly), která odpovídá trajektorii konkrétního bodu geometrického modelu patřícího do množiny. Pro zobrazení kompletní paraboly tak musíme zadat funkci **MnozinaBodu** pro oba body  $X$  a  $X'$ . Jako druhý parametr použijeme posuvníkem ovládanou hodnotu  $v$ , jak je patrné na řádcích 1 a 2 okna CAS na Obr. 3.

### 3 Rovnice množiny bodů

Na řádcích 3 a 4 na Obr. 3 je použita funkce **RovniceMnozinyBodu** pro výpočet rovnice zkoumané množiny. Bohužel však, bez náležitého výsledku. Důvodem je skutečnost, že automatický výpočet rovnice množiny bodů dané vlastnosti je založen na řešení soustav algebraických rovnic. Geometrický model řešené úlohy tak musí být převoditelný na soustavu algebraických rovnic. Při použití posuvníku je tato algebraická reprezentace problematická. Ideální je realizovat geometrický model pomocí Eukleidovských konstrukcí, tj. konstrukcí podle prvních tří Eukleidových postulátů, [2].

Pro efektivní využití funkce **RovniceMnozinyBodu** tak modifikujeme naš geometrický model tak, aby nepracoval s posuvníkem, viz Obr. 4. Na



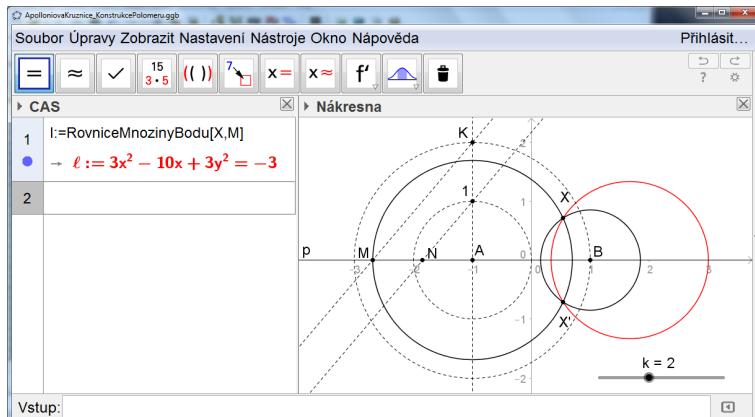
Obrázek 4: Použití funkce **RovniceMnozinyBodu**

kolmici na přímku  $d$  v bodě  $P$  umístíme pohyblivý bod  $M$ , kterým vede me rovnoběžku s  $d$ . Poté sestrojíme kružnici se středem  $F$  a poloměrem  $\text{Usecka}[P, M]$  a určíme její průsečíky  $X$ ,  $X'$  s onou rovnoběžkou jdoucí bodem  $M$ . Jak vidíme na Obr. 4, nyní již je výsledkem zadání funkce **RovniceMnozinyBodu**[ $X, M$ ] rovnice  $x^2 - 4y = 0$  příslušející parabole určené ohniskem  $F$  a řídící přímkou  $d$ .

Jako další příklad ilustrující použití funkce **RovniceMnozinyBodu** pro automatický výpočet rovnice množiny bodů dané vlastnosti si uvedeme úlohu na Apolloniovou kružnici.

Hledáme množinu všech bodů  $X$  v rovině, pro které je poměr jejich vzdáleností od dvou daných bodů  $A, B$  roven kladné reálné konstantě  $k$ , tj.  $|AX|/|BX| = k$ .

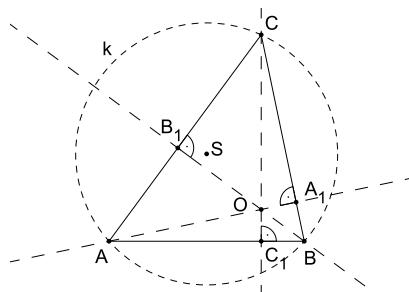
Možný způsob řešení této úlohy v GeoGebře je zaznamenán na Obr. 5. Pro větší variabilitu konstrukce je hodnota konstanty  $k$  volitelná posu-



Obrázek 5: Apolloniova kružnice

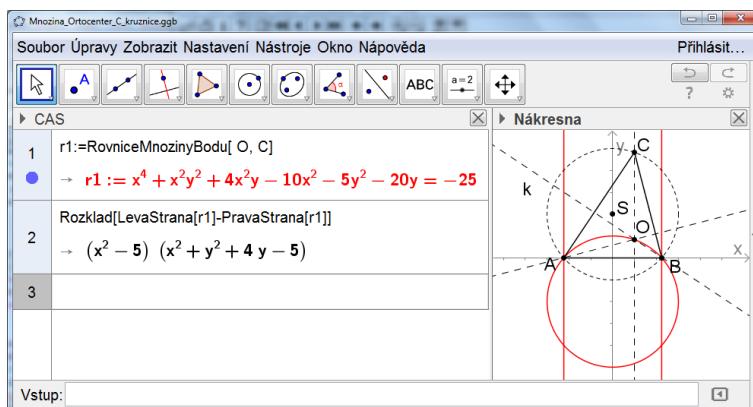
vníkem. Body  $A, B$  jsme umístili na osu  $x$  se souřadnicemi  $A = [-1, 0], B = [1, 0]$ . Body  $X$ , které vyhovují zadání, budou potom průsečíky kružnic se středy v  $A$  a  $B$ , pro jejichž poloměry  $|AM|$ , resp.  $|BN|$  platí výše uvedený poměr. Kružnici se středem v  $A$  sestrojíme pomocí nástroje *Kružnice daná středem a bodem*, kde jako určující bod volíme bod  $M$ , volně umístěný na osu  $x$ . Potom v bodě  $A$  sestrojíme kolmici na  $x$ , na kterou naneseeme body  $1$  a  $K$  tak, že  $|A1| = 1$  a  $|AK| = k$ , a určíme polohu bodu  $N$  tak, aby platila podobnost  $\triangle MAK \sim \triangle NA1$ . Nakonec sestrojíme kružnici se středem  $B$  a s poloměrem *Usecka[A,N]* a určíme její průsečíky  $X, X'$  s kružnicí se středem v  $A$ . Po zadání příkazu *RovniceMnozinyBodu[X,M]* v *CAS* dostaneme rovnici hledané množiny – Apolloniovu kružnici, viz Obr. 5, červená kružnice. Za povšimnutí stojí skutečnost, že na rozdíl od numerického výpočtu množiny bodů příkazem *MnozinaBodu*, který bylo nutné aplikovat na oba průsečíky  $X, X'$ , pro automatický výpočet rovnice stačí zadat příkaz *RovniceMnozinyBodu* jenom pro jeden z nich, viz Obr. 5, řádek 1 prostředí *CAS*. Je to dáno tím, že při algebraické reprezentaci geometrické úlohy není rozdílu mezi průsečíky dvou kružnic, počítá se tedy s oběma. Stejně by to bylo i v případě průsečíků přímky a kružnice. Tato nejednoznačnost algebraické reprezentace geometrické úlohy v některých případech vede k tomu, že výsledkem příkazu *RovniceMnozinyBodu*

je rovnice popisující množinu rozsáhlejší, než je skutečné řešení dané úlohy. Tento jev ilustruje následující úloha převzatá z [5], str. 139: Je dána kružnice  $k$  a její tětiva  $AB$ . Vyšetřete množinu všech průsečíků výšek trojúhelníku  $ABC$ , probíhá-li bod  $C$  kružnici  $k$ , viz Obr. 6.



Obrázek 6: Určete množinu bodů  $O$

Je zřejmé, že úhel  $ACB$  je obvodový úhel příslušející oblouku  $AB$ . Jestliže jeho velikost označíme  $\varphi$ , je úhel  $AOB$  pro  $O$  uvnitř trojúhelníku  $ABC$  roven  $\pi - \varphi$ , pro  $O$  vně trojúhelníku  $ABC$  je pak roven  $\varphi$ . Množinu všech poloh bodu  $O$  tak můžeme chápat jako množinu všech vrcholů úhlu velikosti  $\pi - \varphi$ , resp.  $\varphi$ , jehož ramena procházejí body  $A, B$ . Touto množinou je kružnice osově souměrná s kružnicí  $k$  podle přímky  $AB$ .



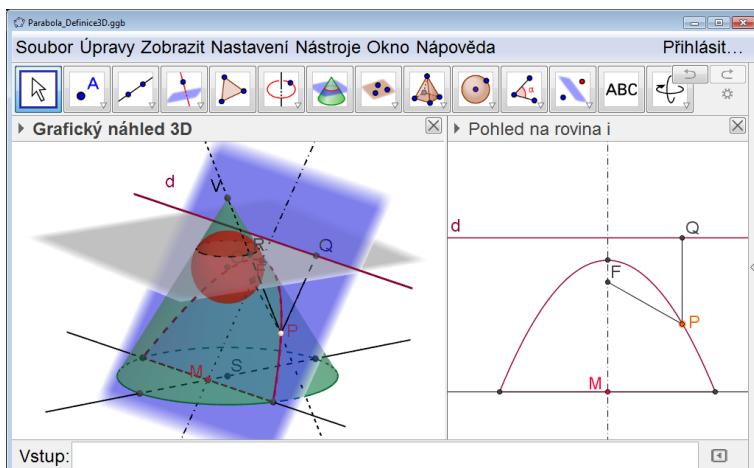
Obrázek 7: Množina ortocenter určená v GeoGebře

Jak to dopadne, když se na rovnici zkoumané množiny bodů zeptáme GeoGebry, vidíme na Obr. 7. Střed kružnice  $k$  po poloměru  $r = 3$  jsme volili

v bodě  $S = [0, 2]$ . Body  $A, B$  jsou průsečíky kružnice  $k$  s osou  $x$ . Výsledkem příkazu **RovniceMnozinyBodu[0,C]** jsou kromě očekávané kružnice ještě dvě přímky procházející body  $A$  a  $B$  kolmo na osu  $x$ . Tyto přímky očividně nejsou součástí vyšetřované množiny. Příčinou jejich přítomnosti v *Nákresně* je nemožnost rozlišit mezi dvěma průsečíky kružnice  $k$  s osou  $x$ . Program potom vyhodnotil i takové konfigurace, v nichž místo dvou různých průsečíků figuroval vždycky stejný průsečík dvakrát.

## 4 GeoGebra 3D

Vraťme se ještě k úvodní úloze, která vycházela z definice paraboly jako množiny všech bodů v rovině stejně vzdálených od daného bodu a dané přímky. Program GeoGebra nám poskytuje unikátní prostředí pro objasnění souvislosti této definice s definicí jinou, která parabolu charakterizuje jako průnik rotační kuželové plochy s rovinou, která je rovnoběžná s právě jednou její povrchovou přímkou. Příslušný materiál vytvořený v prostředí *Grafický náhled 3D* je zachycen na Obr. 8. Místo rotační kuželové plochy



Obrázek 8: Parabola jako řez rotačního kužele rovinou

si v případě paraboly vystačíme s rotačním kuželem, jehož podstava leží v rovině  $xy$ . Rovinu řezu  $\rho$ , která musí být rovnoběžná s právě jednou povrchovou přímkou kuželetu, je vhodné sestrojit pohyblivou (rovina na Obr. 8 se posouvá spolu s bodem  $M$ ). Křivku řezu kuželetu touto rovinou zobrazíme prostřednictvím nástroje *Průnik dvou ploch*. Víme, že touto křivkou je parabola. Její ohnisko a řídící přímku sestrojíme uplatněním Queteletovy–Dandelinovy věty pro parabolický řez rotační kuželové plochy. Plyne z ní,

že ohniskem paraboly, která je řezem kuželové plochy rovinou, je bod dotyku  $F$  této roviny s kulovou plochou, která je vepsána rotační kuželové ploše a dotýká se roviny řezu, [6]. Řídící přímku  $d$  potom dostaneme jako průsečnici roviny řezu s rovinou kružnice, v níž se vepsaná kulová plocha dotýká kuželové plochy, viz Obr. 8, přímka  $d$ . Nyní zbývá zvolit na parabole libovolný bod  $P$  a ukázat, že je stejně vzdálen od  $F$  i od  $d$ . Při argumentaci nám podstatně pomůže možnost manipulovat s 3D modellem. Bezprostřední souvislost s definicí paraboly jako množiny bodů dané vlastnosti v rovině pak prokážeme použitím funkce *Vytvořit 2D náhled* z  $\rho$ , kterou aktivujeme výběrem z kontextové nabídky po pravém kliknutí na rovinu řezu. Výsledkem je otevření nové nákresny v okně GeoGebry, v níž je zobrazena situace ve vybrané rovině, v našem případě v rovině řezu, viz Obr. 8.

## 5 Závěr

V článku jsme se na konkrétních příkladech seznámili s možnostmi, které program GeoGebra nabízí uživateli pro vyšetřování množin bodů daných vlastností. Viděli jsme, že kromě grafických a numerických funkcí nabízí GeoGebra také funkce pro automatický výpočet rovnice zkoumané množiny. Implementace algoritmů počítáčové algebry do programu GeoGebra je jedním z úkolů, na kterých jeho tvůrci v současnosti intenzivně pracují, viz např. [1]. Další příklady využití GeoGebry při vyšetřování množin bodů daných vlastností lze najít například v [3].

## Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu GA JU 017/2013/S.

## Reference

- [1] M. A. Abánades, F. Botana, A. Montes, T. Recio: Software Using the Gröbner Cover for Geometrical Loci Computation and Classification. *ICMS 2014. Lecture Notes in Computer Science*. Volume 8592, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. pp. 492–499.
- [2] Eukleides: *Základy, Knihy I–IV*. komentované P. Vopěnkou, OPS, Nymburk, 2008.
- [3] R. Hašek, J. Zahradník: Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. Research Information Ltd., Burnham, UK, Volume 22, Number 2, 2015. pp. 53–58.
- [4] Z. Kovács: *Computer Based Conjectures and Proofs in Teaching Euclidean Geometry*. Dissertation, JKU Linz, 2015. Dostupné z <http://test.geogebra.org/~kovzol/data/diss/diss-20150708.pdf>
- [5] F. Kuřina: *Deset pohledů na geometrii*. MÚ AV ČR, Praha, 1996.
- [6] Š. Voráčová (ed.): *Atlas geometrie*. Academia, Praha, 2012.

# Monomial curves as set-theoretic complete intersections

Michaela Holešová

*Department of Mathematics, Faculty of Humanities, University of Žilina,  
Univerzitná 8215/1, 01026, Žilina, Slovak Republic  
email: michaela.holesova@fhv.uniza.sk*

**Abstract.** Monomial curves are studied in the connection with the search for solution of known problem: Find the least number of surfaces of which the intersection is given affine algebraic variety in  $n$ -dimensional affine space. We deal especially monomial curves in 4-dimensional affine space and their associated ideals. We showed for classes monomial curves which associated prime ideals have five or six generators that are the intersection of three hypersurfaces and are hence set-theoretic complete intersections.

*Key words:* a monomial curve, an associated prime ideal, a set-theoretic complete intersection

## 1 Introduction

The open problem of the classical algebraic geometry is: What is the minimal number of surfaces of which the intersection is an algebraic affine variety in  $n$ -dimensional affine space?

When we have  $d$ -dimensional variety in  $n$ -dimensional affine space, we know that this number is not less than  $n-d$ . For centuries the aim is to show that this number is equal to  $n-d$ . In connection with this open problem it is studied a special class of affine varieties - monomial curves.

Let  $K$  be an arbitrary field,  $R = K[x_1, \dots, x_l]$  the polynomial ring in  $l$  variables over  $K$ .  $C = C(n_1, \dots, n_l)$  a monomial curve in affine space  $A_l$  over  $K$  having parameterization  $x_i = t^{n_i}, i = 1, \dots, l$ , where  $n_1, \dots, n_l$  be positive integers with g.c.d. equal 1 and  $n_1, \dots, n_l$  is a minimal set of generators for the numerical semigroup  $H = \langle n_1, \dots, n_l \rangle$ .

The ideal  $P$  of all polynomials  $f(x_1, \dots, x_l) \in R$  such that  $f(t^{n_1}, \dots, t^{n_l}) = 0$ ,  $t$  transcendental over  $K$ , is the associated prime ideal of local ring  $R_{(x_1, \dots, x_l)}$  of the monomial curve  $C$ . When the associated ideal  $P$  of this monomial curve has  $l-1$  generators, the monomial curve  $C$  and ideal  $P$  called ideal-theoretic complete intersection. When the ideal  $P$  is radical of an ideal  $a$ ,  $a \subseteq P$  and the ideal  $a$  has  $l-1$  generators, the monomial curve  $C$  and ideal  $P$  called set-theoretic complete intersection. The number  $l-1$  is also height of the ideal  $P$ . In general, the ideal  $I$  in  $R$  is called set-theoretic complete intersection (s.t.c.i., for short), if there are  $s = \text{ht}(I)$  (height of the ideal  $I$ ) elements  $g_1, g_2, g_3, \dots, g_s$ , such that  $\text{rad}(I) = \text{rad}(g_1, g_2, g_3, \dots, g_s)$ .

We can divide the directions of interest into three basic groups:

- *Associated ideal P*  
J. Herzog, W. Gastinger, E. Kunz.
- *Properties of numerical semigroup H*  
H. Bresinsky, W. Gastinger, D. Patil.
- *Coresponding with projective curves*  
J. Stückrad, B. Renschuch, A. Thoma.

We also mentioned some of the authors who have dealt with these directions. It is not possible these particular line of research completely separate.

E. Kunz [6] showed that every monomial curve in 3-dimensional affine space is s.t.c.i. In 4-dimensional affine space  $A_4$  W. Gastinger in [5] proved that monomial curves and their associated prime ideals are s.t.c.i. if  $P$  has four generators.

In [2] H. Bresinsky dealt with Gorenstein curves where numerical semigroup  $H = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$  is symmetric. Numerical semigroup  $H$  called symmetric if exists  $m \in \mathbb{Z} - H$  that for each  $j \in N$  is  $m + j \in H$  and for each  $c \in H$ ,  $m - c \notin H$ . He showed that Gorenstein curves are s.t.c.i. and their associated prime ideals have three or five generators. For all associated ideals of monomial curves in  $A_4$  which have five generators we proved that they are s.t.c.i. (see [8]).

## 2.1 Set of generators for ideal $P$ in $A_4$

Let a binomial term  $\prod_{i=1}^4 x_i^{\gamma_i} - \prod_{i=1}^4 x_i^{\vartheta_i} \in P$ , where  $\gamma_i \vartheta_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . It is clear that  $\sum_{i=1}^4 \gamma_i n_i = \sum_{i=1}^4 \vartheta_i n_i$ . We have basically two types of binomial terms of  $P$ :

$$x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_k} x_l^{\gamma_l}, \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}, \gamma_i \gamma_j \gamma_k \gamma_l \neq 0 \quad \text{or}$$

$$x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}, \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}, r_i \neq 0.$$

We denote the binomial term  $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$  by  $(x_i^{r_i})$  if  $r_i$  is minimal and by  $(x_i^{r_i}, x_j^{r_j})$  if  $x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}} \in P$  with  $r_j$  minimal and  $\alpha_{ji} = r_i, \alpha_{jk} = \alpha_{jl} = 0$ . Every generating set for  $P$  contains for each  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) at least one polynomial  $x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$  with  $r_i$  minimal. We also denote polynomial  $x_i^{r'_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$  by  $(x_i^{r'_i}(k, l))$  if  $r'_i$  is minimal with respect to the condition either  $\alpha_{ik} \neq 0$  or  $\alpha_{il} \neq 0$ . We define as H.Bresinsky a set  $B$  in three cases as follows:

- For binomials  $(x_s^{r_s}), s = i, j, k, l, \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , with at least two exponents  $\alpha_{sh}$  not zero,  $h \in \{i, j, k, l\} - \{s\}$  let  $B = \{(x_i^{r_i}), (x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l})\}$

- Let  $(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}) \in P$ , but  $(x_k^{r_k}, x_l^{r_l}) \notin P$ . Then either

$$B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l})\} \text{ or } B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}), (x_l^{r_l}), (x_j^{r'_j}(k, l))\},$$

- $B = \{(x_i^{r_i}, x_j^{r_j}), (x_k^{r_k}, x_l^{r_l})\} \cup C, C \subseteq \{(x_j^{r'_j}(k, l)), (x_l^{r'_l}(i, j))\}$ .

We write  $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} \prec x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}}$  if either  $\gamma_{i1} > \gamma_{i2}$  and  $\gamma_{j1} < \gamma_{j2}$  or the inequalities are reversed.

For binomials we write  $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} - x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}} \prec x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}} - x_k^{\gamma_{k2}} x_l^{\gamma_{l2}}$  if  $\prec$  holds between the first and second monomials of this binomials, i.e. if  $x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} \prec x_i^{\gamma_{i2}} x_j^{\gamma_{j2}}$  and  $x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}} \prec x_k^{\gamma_{k2}} x_l^{\gamma_{l2}}$ .

We next define a set  $D_{ij}, i \neq j, \{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$D_{ij} = \{f = x_i^{\gamma_i} x_j^{\gamma_j} - x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}}, \quad \{k, l\} \subset \{1, 2, 3, 4\} - \{i, j\}, \gamma_h < r'_h$$

for the polynomials  $(x_h^{r'_h}(k, l))$  if  $h \in \{i, j\}$ , for the polynomials  $(x_h^{r'_h}(i, j))$  if  $h \in \{k, l\}$  and for each binomial term  $f' = x_i^{\gamma_{i1}} x_j^{\gamma_{j1}} - x_k^{\gamma_{k1}} x_l^{\gamma_{l1}} \in P, f' \neq f$  is  $f' \prec f$ .

In [1], H.Bresinsky gives the following theorem.

**Theorem 1.**  $M = B \cup D_{ij} \cup D_{ik} \cup D_{il}, \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  is a minimal generating set for the associated prime ideal  $P = P(n_1, n_2, n_3, n_4)$  of the monomial curve in  $A_4$ .

## 2.2 Prime ideal $P$ with 5 generators

As we mentioned, H. Bresinsky dealt with Gorenstein curves in  $A_4$  and their associated prime ideals have three or five generators. We succeeded in [8] generalize of his results for all associated prime ideals of monomial curves in  $A_4$  with five generators.

These prime ideals have the minimal generating set

$$M = \{x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}, x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}, x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}},$$

$x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}} x_k^{\omega_k} - x_j^{\omega_j} x_l^{\omega_l}\},$  where  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  and the only one of the following cases occurs :

- only  $\alpha_{il}$  or  $\alpha_{lj}$  can be zero and all exponents must satisfy next equations:

$$r_i = \alpha_{ji} + \alpha_{ki} + \alpha_{li}, r_j = \alpha_{ij} + \alpha_{lj}, r_k = \alpha_{ik} + \alpha_{jk}, \omega_j = \alpha_{ij},$$

$$r_l = \omega_l + \alpha_{jl}, \omega_i = \alpha_{li} + \alpha_{ji}, \omega_k = \alpha_{jk}, \omega_l = \alpha_{il} + \alpha_{kl}$$

- $\alpha_{jl} = 0$ , only  $\alpha_{il}$  can be zero and it is  $u \in N$ , that all exponents must satisfy next equations:

$$r_i = \alpha_{ji} + (u + 1)\alpha_{ki} + \alpha_{li}, r_j = \alpha_{ij} + \alpha_{lj}, r_k = \alpha_{ik} + \omega_k,$$

$$\begin{aligned} r_l &= \alpha_{il} + (u+1)\alpha_{kl}, \quad (u+1)r_k = \alpha_{ik} + \alpha_{jk}, \quad \omega_i = \alpha_{li} + \alpha_{ji} + u\alpha_{ki}, \\ \omega_j &= \alpha_{ij}, \quad \omega_k = r_k - \alpha_{ik} = \alpha_{jk} - ur_k, \quad \omega_l = \alpha_{il} + \alpha_{kl} \end{aligned}$$

We found expression of polynomials  $g_s \in P, s = 1, 2, 3$  such that  $P = \text{Rad}(g_1, g_2, g_3)$  and so we proved that these ideals are s.t.c.i. as well as the corresponding monomial curves in  $A_4$ .

Binomials  $g_2, g_3$  are  $g_2 = x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{kl}}, \quad g_3 = x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}}$ ,  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Let  $f_1 = x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}}, \quad f_2 = x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$  then we have for case I)

$$f_1^{r_j r_k} \equiv x_l^{\alpha_{lj}(\alpha_{jl} r_j + \alpha_{jk} \alpha_{kl})} g_1 \pmod{(g_2, g_3)},$$

$$f_2^{r_j r_k} \equiv (-1)^{r_j r_k} x_i^{\alpha_{ij} \alpha_{ji} r_k + \alpha_{ki} r_j r_k - \alpha_{jk} \alpha_{ki} \alpha_{lj}} g_1 \pmod{(g_2, g_3)},$$

for case II)

$$f_1^{r_j r_k} \equiv x_l^{\alpha_{lj} \alpha_{jk} \alpha_{kl}} g_1 \pmod{(g_2, g_3)},$$

$$f_2^{r_j r_k} \equiv (-1)^{r_j r_k} x_i^{\alpha_{ij} \alpha_{ji} r_k + u \alpha_{ki} \alpha_{ij} r_k + \alpha_{ki} (r_j r_k - \omega_k \alpha_{lj})} g_1 \pmod{(g_2, g_3)}.$$

We present associated prime ideals  $P$  of monomial curves in  $A_4$  with five generators which are s.t.c.i. We know that the associated prime ideal  $P$  of monomial Gorenstein curve (non ideal-theoretic intersection) in  $A_4$  belongs to case I) and  $\alpha_{il} = \alpha_{ji} = 0$  (see [2], [3]).

## 2.3 Prime ideal $P$ with 6 generators

When we take necessary conditions on a minimal set of generators for an associated prime ideal  $P$  of a monomial curve in  $A_4$  and we also suppose that a minimal generating set  $M$  has six generators

$$M = \{x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}, x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}, x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}}, \\ x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}}, x_i^{\omega_i} x_k^{\omega_k} - x_j^{\omega_j} x_l^{\omega_l}, x_i^{\gamma_i} x_l^{\gamma_l} - x_j^{\gamma_j} x_k^{\gamma_k}\},$$

where  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\alpha_{ik}$  and  $\alpha_{jk}$  can not be zero, we get that it is  $u \in N_0$  and all exponents must satisfy next equations:

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha_{ji} + \alpha_{ki} + (u+1)\alpha_{li}, \quad r_j = \alpha_{ij} + \alpha_{kj} + (u+1)\alpha_{lj}, \\ r_k &= \alpha_{ik} + \alpha_{jk}, \quad r_l = \omega_l + \alpha_{jl} = \gamma_l + \alpha_{il}, \\ (u+1)r_l &= \alpha_{il} + \alpha_{jl} + \alpha_{kl}, \quad \omega_j = \alpha_{ij} + \alpha_{kj} + u\alpha_{lj}, \\ \omega_i &= \alpha_{li} + \alpha_{ji}, \quad \omega_k = \alpha_{jk}, \quad \omega_l = \alpha_{il} + \alpha_{kl} - ur_l, \\ \gamma_i &= \alpha_{ji} + \alpha_{ki} + u\alpha_{li}, \quad \gamma_j = \alpha_{ij} + \alpha_{lj}, \\ \gamma_k &= \alpha_{ik}, \quad \gamma_l = \alpha_{jl} + \alpha_{kl} - ur_l. \end{aligned} \tag{1}$$

In [9] we proved next theorem.

**Theorem 2.** Let  $P$  be the associated prime ideal of the monomial curve  $C$  in  $A_4$ . If  $M = \{x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}, x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}, x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}}, x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}}, x_i^{\omega_i} x_k^{\omega_k} - x_j^{\omega_j} x_l^{\omega_l}, x_i^{\gamma_i} x_l^{\gamma_l} - x_j^{\gamma_j} x_k^{\gamma_k}\}$  is a minimal generating set for the prime ideal  $P$ , where  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\alpha_{ik}$  and  $\alpha_{jk}$  are not equal to zero and exponents satisfy equations (1) for some  $u \in N_0$ , then this prime ideal  $P$  (monomial curve  $C$ ) is a set-theoretic complete intersection.

We found expression of polynomials  $g_s$ ,  $s = 1, 2, 3$  that  $P = \text{Rad}(g_1, g_2, g_3)$ . Binomials  $g_2, g_3 \in M$  are  $g_2 = x_k^{r_k} - x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}} x_l^{\alpha_{kl}}$ ,  $g_3 = x_l^{r_l} - x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}}$  and  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Let  $F_1 = x_j^{r_j} - x_i^{\alpha_{ji}} x_k^{\alpha_{jk}} x_l^{\alpha_{jl}}$ ,  $F_2 = x_i^{r_i} - x_j^{\alpha_{ij}} x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}}$  then we have

$$F_1^{r_k r_l} \equiv x_j^{\alpha_{lj} \alpha_{jk} \alpha_{kl} + \alpha_{kj} \alpha_{jk} r_l + \alpha_{lj} \alpha_{jl} r_k} g_1 \pmod{(g_2, g_3)},$$

$$x_j^{(u+1)\alpha_{lj} + \alpha_{kj}} F_2 \equiv -x_k^{\alpha_{ik}} x_l^{\alpha_{il}} F_1 \pmod{(g_2, g_3)} \text{ and it is easy to see that}$$

$$x_j^{((u+1)\alpha_{lj} + \alpha_{kj}) r_k r_l} F_2^{r_k r_l}$$

$$\equiv (-1)^{r_k r_l} (x_i^{\alpha_{ki}} x_j^{\alpha_{kj}})^{\alpha_{ik} r_l} (x_i^{\alpha_{li}} x_j^{\alpha_{lj}})^{\alpha_{il} r_k} F_1^{r_k r_l} \pmod{(g_2, g_3)}$$

We know that  $R/(g_2, g_3)$  is a module over  $K[x_i, x_j]$  and  $\{g_2, g_3\}$  is a Gröbner basis for  $(g_2, g_3)$  with respect to the lexicographic order, taking  $x_l > x_k > x_j > x_i$ ,  $R/(g_2, g_3)$  is free module over  $K[x_i, x_j]$  and its rank is  $r_k r_l$  (by [4], Chapter 1, §3, Exercise 4). Therefore

$$F_2^{r_k r_l} \equiv (-1)^{r_k r_l} x_i^{\alpha_{ki} \alpha_{ik} r_l + \alpha_{li} (\alpha_{il} r_k + \alpha_{ik} \alpha_{kl})} g_1 \pmod{(g_2, g_3)} \text{ and}$$

When we use same properties as above, we have consequences

$$(x_i^{\omega_i} x_k^{\omega_k} - x_j^{\omega_j} x_l^{\omega_l})^{r_k r_l} \equiv (-1)^{r_k r_l} x_i^{\alpha_{li} r_k (\alpha_{il} + \gamma_l - \alpha_{jl})} x_j^{\alpha_{jk} (\alpha_{kj} r_l + \alpha_{lj} \alpha_{kl})} g_1 \pmod{(g_2, g_3)},$$

$$(x_i^{\gamma_i} x_l^{\gamma_l} - x_j^{\gamma_j} x_k^{\gamma_k})^{r_k r_l} \equiv (-1)^{r_k r_l} x_i^{\alpha_{ki} \alpha_{ik} r_l + \alpha_{li} \alpha_{kl} \alpha_{ik}} x_j^{\alpha_{lj} \gamma_l r_k} g_1 \pmod{(g_2, g_3)}.$$

Hence  $P = \text{Rad}(g_1, g_2, g_3)$  and the proof is completed.

### 3 Conclusion

We can on the basis of the above pronounce the following hypothesis: *If an associated prime ideal  $P$  of a monomial curve  $C$  in  $A_4$  is  $P = \text{Rad}(f_1, f_2, f_3, f_4)$  where  $f_s \in M = B \cup D_{ij} \cup D_{ik} \cup D_{il}$ ,  $s = 1, 2, 3, 4$  and  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , then the ideal  $P$  is s.t.c.i.*

We believe that our particular results may help solve the said open problem of the classical algebraic geometry.

## References

- [1] H.Bresinsky: *Binomial generating sets for monomial curves, with applications in  $A^4$ .* Rend.Sem.Mat., Univers. Politecn. Torino, 46, 1988, pp. 353-370.
- [2] H.Bresinsky: *Monomial Gorenstein curves in  $A^4$  as set-theoretic complete intersections.* Manuscripta Math, 27, 1979, pp. 353-358.
- [3] H.Bresinsky: *Symmetric semigroup of integers generated by 4 elements.* Manuscripta Math, 17, 1975, pp. 205-219.
- [4] D. Cox, J. Little, D. O'Shea: *Using Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, Volume 185, Springer - Verlag, 1998.
- [5] W.Gastinger: *Über die Verschwindungsgrade monomialer Kurven.* Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften, Landshut, 1989.
- [6] E.Kunz: *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie.* Vieweg, Braunschweig, 1980.
- [7] Š.Solčan: *Monomial curves and set complete intersections.* Slovak journal for geometry and graphics, volume 8, number 15, 2011, pp. 29 - 40.
- [8] M.Holešová: *Asociated prime ideals of monomial curves with five generators as set-theoretic complete intersections.* Studies of the University of Žilina, Mathematical Series Vol. 25, 2011, pp. 1-8.
- [9] M.Holešová: *Monomial curves in afinne space and their associated prime ideals with six generators as set-theoretic complete intersections.* Communications: scientific letters of the University of Žilina, Vol. 16, no. 3, 2014, pp. 65-68.

# Vizualizácia blossomov v GeoGebre

## Visualization of blossom in GeoGebra

Tatiana Hýrošová

Technická univerzita  
T.G. Masaryka 24, 960 53 Zvolen  
tatiana.hyrosova@tuzvo.sk

**Abstract.** Blossoming is a process which turns a degree n polynomial into a symmetric n-affine function. Two difficult representations of the same object are concerned. The article deals with terms in inner structure of these two representations and task of visualization in GeoGebra3D analyzed through the theory of quadratic and cubic Bézier curves.

**Keywords:** blossoming, Bézier curve, modified de Casteljau algorithm, envelope of one-parametric system curves and surfaces, interactive software.

**Kľúčové slová:** blossoming, Bézierova krivka, modifikovaný de Casteljauov algoritmus, obalové krivky a plochy, interaktívny softvér.

### 1 Úvod

V geometrickom modelovaní má blossoming veľmi dôležité uplatnenie. Ide o proces, ktorým sa polynomická funkcia  $n$ -tého stupňa transformuje na symetrickú  $n$ -afinnú (multiaffinnú) funkciu. Podľa Ramshawa je princíp blossomingu nasledovný:

Teoréma. Nech  $F : R \rightarrow R^d; u \rightarrow F(u)$  je polynomická funkcia stupňa  $n$ ,  $n \in N$ ,  $n \geq 1$ ,  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Potom existuje práve jedna symetrická  $n$ -afinná funkcia  $f : R^n \rightarrow R^d; (u_1, \dots, u_n) \rightarrow f(u_1, \dots, u_n)$ , spĺňajúca podmienku  $f(u, \dots, u) = F(u)$ .

Funkcia  $f$  sa nazýva *multiaffinný blossom* (polárna forma) funkcie  $F$ .

Blossom polynomickej funkcie 2. stupňa  $F(u) = u^2 + 1$  je funkcia dvoch premenných

$$f(u_1, u_2) = u_1 u_2 + 1,$$

t.j. hyperbolický paraboloid.

Ak  $F(u) = u^3 + 2u^2 - u + 1$  je polynomická funkcia 3. stupňa, tak jej blossom je funkcia troch premenných

$$f(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3 + \frac{2}{3}(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) - \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3) + 1.$$

Kedže polynomické funkcie sú rovinné krivky, ich tvarové možnosti sú pomerne obmedzené. V súčasnosti však existujú možnosti pre generovanie kriviek založené na takej reprezentácii, v ktorej je bod krivky reprezentovaný ako lineárna kombinácia vopred zadaných riadiacich bodov. Pomocou nich vieme vytvoriť konkrétny tvar výslednej krivky. Taká

reprezentácia nepredstavuje žiadny problém pri prechode z 2D do 3D a s výhodou sa dá použiť pri modelovaní blossomov polynomických funkcií. Jednou z takýchto reprezentácií je reprezentácia polynomickej funkcie Bézierovou krivkou.

Bézierovu krivku stupňa  $n$  danú  $n + 1$  riadiacimi vrcholmi  $V_0, \dots, V_n$  môžeme generovať pomocou známeho de Casteljauovho algoritmu. Modifikáciou de Casteljauovho algoritmu spočívajúcou v tom, že v jeho  $i$ -tom kroku ( $i > 0$ ) realizujeme príslušnú lineárnu interpoláciu parametrom  $u_i$  (miesto  $u$ ), je možné získať jej blossom  $f(u_1, \dots, u_n)$ .

Na vizualizáciu blossomov polynomických funkcií reprezentovaných Bézierovými krivkami 2. a 3. stupňa sme použili interaktívny softvérový systém GeoGebra5. Vďaka 3Dgrafike tak máme možnosť ľubovoľne si zvolať riadiace vrcholy Bézierovej krivky, meniť ich polohu a tým tvarovať nielen výslednú krivku, ale aj jej blossom.

## 2 Geometrický význam a vizualizácia blossomov Bézierových kriviek

### 2.1 Blossom Bézierovej krivky 2. stupňa

Kvadratická funkcia (jej segment) sa dá reprezentovať Bézierovou krivkou 2. stupňa s riadiacimi vrcholmi  $V_0, V_1, V_2$  v tvare

$$BK^2(u) = (1-u)^2V_0 + 2u(1-u)V_1 + u^2V_2,$$

kde  $u \in \langle 0, 1 \rangle$ . Blossom takejto krivky bude funkcia  $bk(u, v)$  dvoch premenných  $u, v$  a môže byť definovaná modifikovaným de Casteljauovým algoritmom nasledovne:

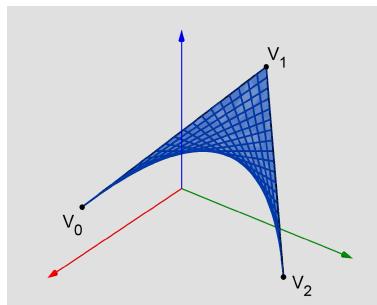
$$\begin{aligned} Vstup : \quad & V_i = [x_i, y_i, z_i], \quad i = 0, 1, 2; \quad (u, v) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ Algoritmus : \quad & 1. krok : \quad V_i^0() = V_i; \quad i = 0, 1, 2 \\ & 2. krok : \quad V_i^1(u) = (1-u)V_i^0() + uV_{i+1}^0(); \quad i = 0, 1 \\ & 3. krok : \quad V_0^2(u, v) = (1-v)V_0^1(u) + vV_1^1(u) \\ Výstup : \quad & bk(u, v) = V_0^2(u, v). \end{aligned}$$

Výstupný vzťah po rozpísaní dáva funkciu  $bk(u, v)$  dvoch premenných  $u, v$

$$bk(u, v) = (1-u)(1-v)V_0 + [u(1-v) + v(1-u)]V_1 + uvV_2,$$

pre  $u, v \in \langle 0, 1 \rangle$ . Koeficienty pri riadiacich vrcholoch v tejto rovnosti sú symetrické vzhľadom na zámenu  $u, v$ , ich súčet sa rovná 1 a pre  $v = u$  dostaneme  $BK^2(u)$ . Splňa teda vlastnosti blossomu. Keďže  $bk(u, v)$  je afinná kombinácia riadiacich vrcholov  $V_0, V_1, V_2$ , leží v rovine nimi určenej. Blossom  $bk(u, v)$  je teda *rovinná plocha* v  $E_3$ .

Vzhľadom na vizualizáciu tejto rovinnej plochy je vhodné popísat jej vnútornú štruktúru. Ak sa pozrieme na izoparametrické krivky plochy,



Obr. 1: Izoparametrické krivky a blossom  $bk(u, v)$

tak pre konštantný parameter  $v = v_0$  a premenný parameter  $u$  dostávame  $u$ -krivku plochy s vyjadrením

$$\begin{aligned} bk(u, v_0) &= (1-u)(1-v_0)V_0 + [u(1-v_0) + v_0(1-u)]V_1 + uv_0V_2 \\ &= (1-u)V_0^1(v_0) + uV_1^1(v_0) \end{aligned}$$

z ktorého vyplýva, že ide o úsečku s krajnými bodmi  $V_0^1, V_1^1$  ležiacimi na ramenach  $V_0V_1, V_1V_2$ . Keďže sú to zároveň body v predposlednom kroku de Casteljauovho algoritmu, je zrejmé, že ide o dotyčnicu Bézierovej krivky 2. stupňa v bode  $v_0$ .

Vzhľadom na symetrickosť sa podobné úvahy dajú previesť aj pre  $v$ -krivku plochy (s konštantným parametrom  $u = u_0$  a premenným parametrom  $v$ ). Izoparametrické  $u$ -krivky a  $v$ -krivky sú teda dotyčnice Bézierovej krivky 2. stupňa a ležia v konvexnom obale jej vrcholov.

Opísané dva systémy, ktoré sa líisia len označením premenných z toho istého definičného oboru, tvoria jednoparametrické systémy rovinných kriviek. Nie je ľahké ukázať, že obálkou systému izoparametrických kriviek je daná Bézierova krivka 2. stupňa.

Blossom  $bk(u, v)$  potom možno charakterizovať ako priamkovú plochu dotyčníc Bézierovej krivky 2. stupňa, ktorá je naviac obálkou systému týchto dotyčníc.

Voľbou riadiacich vrcholov Bézierovej krivky 2. stupňa a animáciou jedného z jej systémov izoparametrických kriviek pomocou nástrojov implementovaných v GeoGebra3D dostaneme krivočiary trojuholník  $V_0V_1V_2$  ako blossom danej Bézierovej krivky 2. stupňa (obr. 1).

## 2.2 Blossom Bézierovej krivky 3. stupňa

Segment kubickej funkcie možno reprezentovať Bézierovou krivkou 3. stupňa s riadiacimi vrcholmi  $V_0, V_1, V_2, V_3$  a vyjadrením

$$BK^3(u) = (1-u)^3V_0 + 3(1-u)^2uV_1 + 3(1-u)u^2V_2 + u^3V_3,$$

kde  $u \in \langle 0, 1 \rangle$ . Jej blossom je funkcia troch premenných  $bk(u, v, w)$ , ktorú možno definovať modifikovaným de Casteljauovým algoritmom v tvare

$$bk(u, v, w) = (1-w)V_0^2(u, v) + wV_1^2(u, v), \quad u, v, w \in \langle 0, 1 \rangle,$$

pričom  $V_0^2(u, v)$  a  $V_1^2(u, v)$  sú blossomy Bézierovej krivky 2. stupňa určené riadiacimi vrcholmi  $V_0, V_1, V_2$  a  $V_1, V_2, V_3$ . Vzhľadom na to, že ide o krivočiare trojuholníky  $V_0V_1V_2$ ,  $V_1V_2V_3$  ležiace v dvoch rovinách a majúce spoločnú stranu  $V_1V_2$ , môžeme blossom považovať za *priestorový objekt*. Rozpísaním tohto vzťahu dostávame blossom

$$\begin{aligned} bk(u, v, w) = & (1-u)(1-v)(1-w)V_0 + \\ & [u(1-v)(1-w) + (1-u)v(1-w) + (1-u)(1-v)w]V_1 + \\ & [uv(1-w) + u(1-v)w + (1-u)vw]V_2 + \\ & +uvwV_3 \end{aligned}$$

ako afinnú kombináciu vrcholov  $V_0, V_1, V_2, V_3$ , pričom koeficienty pri nich splňajú vlastnosti blossomu (symetrickosť, affinnosť, diagonálnosť).

Pre reálnejšiu predstavu o výslednom priestorovom objekte je potrebné popísať jeho vnútornú štruktúru pomocou izoparametrických podobjektov. Dvom konštantným parametrom  $v_0, w_0$  a premennému parametru  $u$  prislúcha  $u$ -krivka

$$bk(u, v_0, w_0) = (1-u)V_0^2(v_0, w_0) + uV_1^2(v_0, w_0),$$

čo je úsečka spájajúca prostredníctvom parametra  $u$  body  $V_0^2, V_1^2$ .

Pre rovnaké konštantné parametre  $v_0 = w_0$  dostaneme špeciálny prípad  $u$ -krivky

$$bk(u, v_0, v_0) = (1-u)V_0^2(v_0) + uV_1^2(v_0),$$

kde

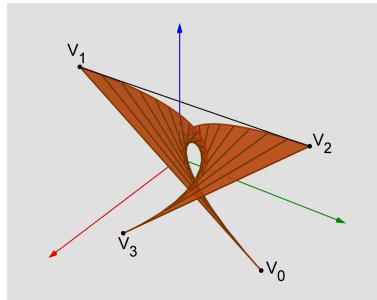
$$V_0^2(v_0) = (1-v_0)^2V_0 + 2v_0(1-v_0)V_1 + v_0^2V_2,$$

$$V_1^2(v_0) = (1-v_0)^2V_1 + 2v_0(1-v_0)V_2 + v_0^2V_3,$$

t.j. úsečku spájajúcu body parabolických oblúkov  $V_0V_2$  a  $V_1V_3$  (body z predposledného kroku de Casteljauovho algoritmu). Množina špeciálnych  $u$ -kriviek je teda plocha dotyčníc priestorovej Bézierovej krivky

$$\begin{aligned} X(u, v) = & (1-u)(1-v)^2V_0 + [2(1-u)(1-v)v + u(1-v)^2]V_1 + \\ & [(1-u)v^2 + 2u(1-v)v]V_2 + uv^2V_3. \end{aligned}$$

Analogické úvahy (vzhľadom k symetrickosti) platia aj pre  $v$ -krivky a  $w$ -krivky objektu.



Obr. 2: Plocha dotyčníc  $BK^3(u)$  ako obálka izoparametrických plôch  $bk(u, v, w)$

Izoparametrická  $uv$ -plocha pre premenné parametre  $u, v$  a konštantný parameter  $w = w_0$  je plocha

$$bk(u, v, w_0) = (1 - w_0)V_0^2(u, v) + w_0V_1^2(u, v).$$

Jednoduchou úpravou tohto vzťahu dostaneme vyjadrenie

$$bk(u, v, w_0) = (1 - u)(1 - v)\bar{V}_0 + [u(1 - v) + (1 - u)v]\bar{V}_1 + uv\bar{V}_2,$$

t.j. blossom Bézierovej krivky 2. stupňa s riadiacimi vrcholmi

$$\bar{V}_0 = (1 - w_0)V_0 + w_0V_1,$$

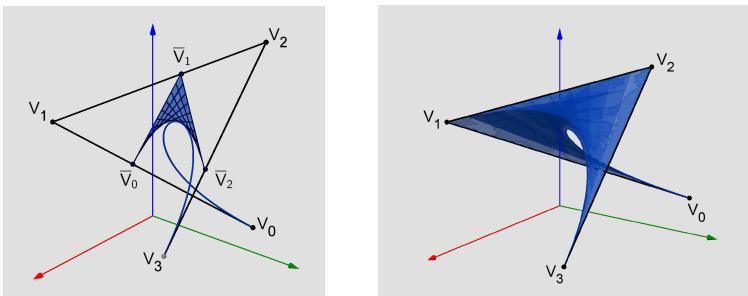
$$\bar{V}_1 = (1 - w_0)V_1 + w_0V_2,$$

$$\bar{V}_2 = (1 - w_0)V_2 + w_0V_3,$$

z vyjadrenia ktorých vyplýva, že ležia na ramenách riadiaceho polygónu Bézierovej krivky 3. stupňa. Samotnú Bézierovu krivku 2. stupňa s riadiacimi vrcholmi  $\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2$  dostaneme pre  $u = v$  a dá sa ukázať, že tátu  $BK^2(u)$  a daná  $BK^3(u)$  majú v spoločnom bode  $w_0$  rovnaký smerový vektor dotyčnice. Izoparametrická  $uv$ -plocha je teda blossom  $BK^2(u)$  s riadiacimi vrcholmi  $\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ , ktorá sa dotýka danej  $BK^3(u)$ .

Vzhľadom na symetrickosť podobné úvahy platia aj o izoparametrických  $uw$ -plochách a  $vw$ -plochách.

Máme teda tri systémy izoparametrických plôch, ktoré sa líšia len označením premenných z toho istého definičného oboru. Dá sa ukázať, že tieto izoparametrické plochy ležia v oskulačných rovinách danej Bézierovej krivky 3. stupňa. Je známe, že obálkou systému oskulačných rovín priestorovej krivky je plocha jej dotyčníc. Z toho plynie, že plocha dotyčníc Bézierovej krivky 3. stupňa je obalovou plochou systému izoparametrických plôch blossomu krivky  $BK^3(u)$ , ktorá je zároveň hranou vratu tohto systému (obr. 2).



Obr. 3: Izoparametrická plocha (vľavo) a blossom  $bk(u, v, w)$  (vpravo)

Blossom  $bk(u, v, w)$  je teda objekt, ktorý možno charakterizať ako priestorový krivočiary štvoruholník, ktorého tri ramená tvorí riadiaci polylgón Bézierovej krivky 3. stupňa, štvrtým je  $BK^3(u)$  a ktorý možno vytvoriť spojitým pohybom krivočiareho trojuholníka (blossomu  $BK^2(u)$ ) tak, že jeho riadiace vrcholy sa budú pohybovať po ramenách riadiaceho polygónu Bézierovej krivky 3. stupňa, pričom zakrivenou stranou sa jej bude dotýkať.

Ked'že  $bk(u, v, w)$  je funkcia troch premenných, jej vykreslenie nám GeoGebra3D neumožňuje. Vzhľadom na to, že izoparametrické plochy sú krivočiare trojuholníky (blossomy  $BK^2(u)$ ), ich animáciu dostaneme celkom reálnu predstavu o blossome Bézierovej krivky 3. stupňa (obr. 3).

### 3 Záver

Nová verzia softvéru GeoGebra5 je schopná modelovať 3D grafické reprezentácie objektov, obsahuje preddefinované nástroje, ktoré dovoľujú vytvoriť ich dynamické konštrukcie. Ked'že blossoming je vo všeobecnosti spôsob reprezentácie kriviek, ktorý viedie k novým možnostiam určovania plôch, je tento softvér vhodným nástrojom na ich modelovanie.

### Literatúra

- [1] L. Ramshaw: *Blossoms are Polar Forms*, Computer Aided Geometric Design, 1989
- [2] H.P. Seidel: *An Introduction to Polar Forms*, Computer Graphics and Applications, 1993
- [3] T. Hýrošová: *Blossom Bézierovej krivky v E<sub>3</sub>*, 29. Conference on geometry and graphics, 2009
- [4] GeoGebra 5.0.170.0-3D - A Dynamic Mathematics System, 2014, <https://www.geogebra.org/download>

# Möbius group and some of its substructures

Pavel Chalmovianský

*Department of algebra, geometry and math education  
Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Slovakia  
pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk*

**Abstract.** We consider Möbius group of plane. A brief survey of the types of its elements and properties is provided and certain subgroups generated by well chosen elements such as Schottky groups are considered. The limit behaviour of certain compositions of maps is interesting. The obtained sets are visualized.

*Keywords:* Möbius group, iterated group, fractals, limit

## 1 Introduction

Möbius group is an important group of transformation in geometry of a sphere or Euclidean space. Its importance cannot be overestimated since it serves as a container of isometries for both Euclidean and hyperbolic geometry.

There is an extensive literature written on the topic and one can find many aspects in [4, 3], history can be found in [6], deeper studies are in [5], [2], [1] and popular version is [7].

## 2 Elementary Facts

### 2.1 Homographies of projective line

Having a complex projective line  $P^1(\mathbb{C})$ , one considers all its projective transformations. In an affine subspace  $\mathbb{C} \subset P^1(\mathbb{C})$ , it is locally given as  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , where

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

The extension at  $\infty$  has to be played with since  $P^1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{S}^2$  (see fig.1).

Clearly, the matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

represents the map  $f$  up to a non-zero complex multiple in the underlying vector space  $V^2(\mathbb{C})$  of  $P^1(\mathbb{C})$ .

All the maps above are called *homographies*, form a group and they preserving orientation of the sphere. We denote the group  $\text{Möb}^+(2) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

In order to find Möbius group of  $\mathbb{S}^2$  (or sometimes of  $\mathbb{R}^2$ ), we add orientation reversing maps given by complex conjugation  $\bar{z}$  of the variable  $z$  in local coordinates. A composition of a homography with complex

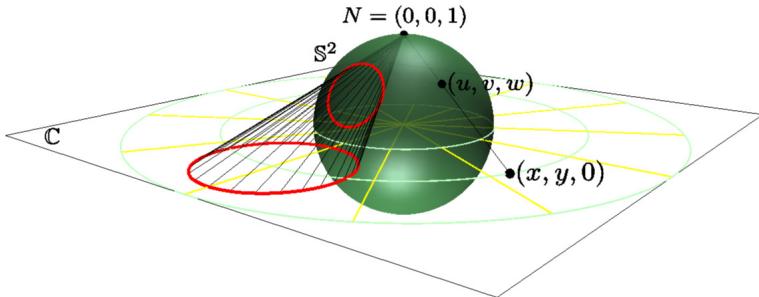


Figure 1: Stereographic projection of a Gaussian plane on the sphere serves as a mapping of two-dimensional sphere via real plane. Analogous mapping in all real spaces with positive dimensions is available.

conjugation (or reflection of  $\mathbb{R}^2$ ) is sometimes called *antihomography* and it has form  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

and again the extension at  $\infty$  either in the domain or codomain has to be defined. The resulting group is called Möbius group and denoted by  $\text{Möb}(2)$ .

In this group, one can find very special maps such as inversion with respect to the unit circle given as  $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  and reflection via line of reals  $f(z) = \bar{z}$ . In fact, all reflections and all inversions can be found inside.

It is not difficult to prove that any three distinct points of  $\mathbb{S}^2$  can be mapped on any three distinct points of  $\mathbb{S}^2$ . Moreover, cross-ratio of any four points is an invariant of such an automorphism. The image of a circle on  $\mathbb{S}^2$  is a circle.

## 2.2 Classification of Elements of two-dimensional Möbius group

The trace of the map  $\text{Tr } f = a + d$  classifies the elements of the  $\text{Möb}(2)$ . Geometrically, the position of the two invariant (fixed) points is considered. The map is

**parabolic:**  $(\text{Tr } f)^2 = 4$  (translation, fixed points coincides)

**elliptic:**  $0 \leq (\text{Tr } f)^2 < 4$  (rotation, see fig. 2(a))

**hyperbolic:**  $(\text{Tr } f)^2 > 4$  (special case of loxodromic element)

**loxodromic:**  $(\text{Tr } f)^2 \in \mathbb{C} - [0, 4]$  (complex or non-real phenomenon, see fig. 2(b))

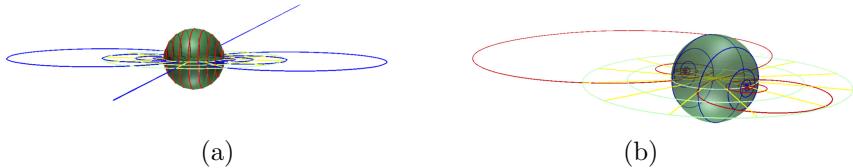


Figure 2: The movement of the points using a Möbius map of the sphere.  
 (a) Elliptic map of the sphere. (b) Loxodromic map of the sphere.

### 2.3 Higher dimensional spheres

The group generated by inversions with respect to any sphere of dimension  $d$  and reflection of  $\mathbb{R}^{d+1}$  fixing  $\mathbb{S}^d$  is called  $\text{Möb}(d)$ .

Clearly,  $\text{Is}(\mathbb{S}^d) \subset \text{Möb}(d)$ , due to generating by reflection. Also,  $\text{Sim}(\mathbb{R}^d) \subset \text{Möb}(d)$  using stereographic projection. It is the group of all anti/conformal maps of  $\mathbb{S}^d$ . The dimension of  $\text{Möb}(d)$  is  $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ . Any element of the group can be composed of at most  $d+2$  inversions or reflection. Cross-ratio is an invariant. Subspheres of  $\mathbb{S}^d$  are mapped to subspheres.

## 3 Connections with hyperbolic geometry

An upper half-plane model of hyperbolic geometry has group of isometries given by  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Möb}^+(2)$ . By stereographic projection, the halfplane maps to a halfsphere.

Using Cayley map  $K(z) = \frac{z-i}{z+i}$ , one transforms the halfplane to a unit disk, which is mapped to a lower halfsphere after the stereographic projection. This is a well known Poincaré conformal disk model of hyperbolic geometry.

Any map of the halfplane model can be conjugated to a map of the Poincaré model by  $T' = KTK^{-1}$ . Any such a map has matrix of the form

$$\begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \quad (1)$$

with  $|u|^2 - |v|^2 = 1$ ,  $u, v \in \mathbb{C}$ .

There are all three types of maps, but the loxodromic ones are always hyperbolic, since the trace is always real.

### 4 Schottky subgroups

Unlike orthogonal group of Euclidean space, we can find a very special subgroups of  $\text{Möb}(2)$  generated by two loxodromic elements.

Let  $C, C'$  be two circles in  $\mathbb{R}^2$ . Using a Möbius transformation, one can map the outside of  $C$  to inside of  $C'$ . The choice is not unique and we

pick a loxodromic mapping. A more detailed computation can be done as follows. First, shift the circle  $C$  so that its center  $S_c$  is in origin and scale it to a unit circle by  $r_C^{-1}$ , where  $r_c$  is a radius of  $C$ . Then, an inversion is with respect to the unit circle is performed by  $\frac{1}{z}$ . Then, the scaling by  $r_{C'}$  and shifting by  $S_{C'}$  is done. Before the inversion, one can do a free Möbius mapping which is invariant on  $\mathbb{D}^2$  – e.g. taken as Poincaré disk model of hyperbolic geometry. Hence such a map is given by the matrix in (1).

Taking two pairs of such circles (see fig. 3), we get a basic setup for constructing Schottky group and its visual presentation. In order to provide some algebraic background, we formulate it briefly in terms of generators of the group.

Let  $a, b$  be two elements of  $\text{Möb}(2)$  and  $A, B$  be its inverse elements. The group generated by  $a, b, A, B$  contains elements represented as words generated by symbols  $a, b, A, B$ , free of consecutive pairs of  $aA, Aa$  and  $bB, Bb$ , provided  $a, b$  are not related otherwise.

Let us take for  $a, b$  previously mentioned loxodromic mappings. Find the images of circles under every word composed of  $a, b, A, B$  in the group. Special positions of circles, such as tangent circles, makes the construction more interesting though restricts the set of available loxodromic maps.

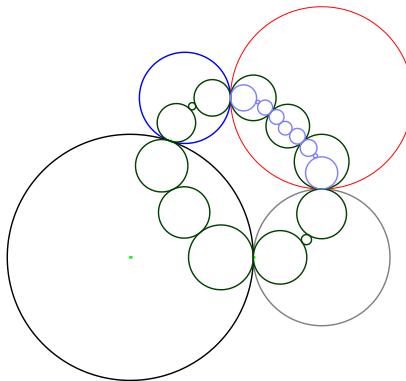


Figure 3: Basic setup for construction of limit of the Schottky group. The two pairs of circles (blue and red, black and grey) and picked Möbius transforms. The transforms are applied, which is demonstrated by the images of the four circles each within them.

Using a tool for rendering (such as POVRay), one gets a special type of visualization using constructed spheres over the corresponding circles in the limiting sequence (see fig 4).

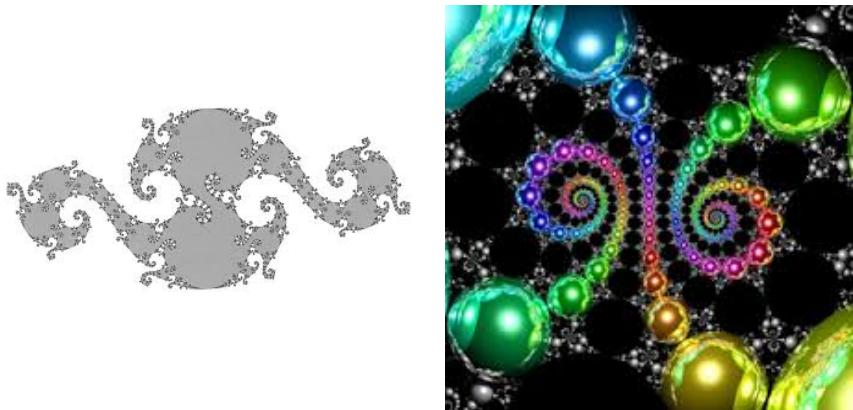


Figure 4: Visualized limits of Schottky groups.

## 5 Conclusions

We described a construction of special subgroup of two-dimensional Möbius group with fractal limit depending on parameters. The structure and algebraic properties have to be studied further.

During the study of the material, I found the topic of Möbius group (especially two-dimensional) educationally very attractive due to several reasons.

1. The notion connects Euclidean geometry, hyperbolic geometry and geometry on a sphere. The connection can be looked at in geometric, algebraic and not so difficult computational way.
2. It introduces non-linear behavior of maps which are still fairly easy to manipulate with.
3. Many asked questions can be formulated in elementary notions.
4. Fractals can be generated by a geometric construction and their properties can be explored exactly as well as experimentally. This provides a lot of topics for exercises.
5. Many maps or relations can be visualized either on plane or on sphere.
6. The generalization to higher-dimensional space is straightforward.

There are several questions arising with the construction. An interesting one deals with the dependence of the structure of a fractal limit on the traces of the used maps. A question of generation of fractals with dimension at least two in higher-dimensional situation is also not clear.

## Acknowledgment

The paper was supported by Grant VEGA 1/1330/13.

## References

- [1] Lars V. Ahlfors. *Möbius transformations in several dimensions*. Ordway Professorship Lectures in Mathematics. University of Minnesota, School of Mathematics, Minneapolis, Minn., 1981.
- [2] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] Marcel Berger. *Geometry. I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- [4] Marcel Berger. *Geometry. II*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- [5] Birger Iversen. *Hyperbolic geometry*, volume 25 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [6] John Milnor. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(1):9–24, 1982.
- [7] David Mumford, Caroline Series, and David Wright. *Indra’s pearls*. Cambridge University Press, New York, 2002. The vision of Felix Klein.

# Geometry in education and anaglyph as an intermediary of geometric information

Mária Kmet'ová

*Dept. of Mathematics, Fac. of Natural Sciences, Constantine the Philosopher Univ. in Nitra  
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia  
email: mkmelova@ukf.sk*

**Abstract.** In this article we highlight the role of geometry in the advancement of science and the need for the development of spatial thinking. Good spatial sense can be supported also by anaglyphs, which are built in the newest version of program GeoGebra. This is the reason, why we deal with history of anaglyph and its application in science, art, and teaching geometry.

*Key words:* spatial geometry, anaglyph, GeoGebra, Monge projection

## 1 Introduction

Geometry is one of the most colourful and most interesting areas of mathematics, mainly in terms of diversity of ideas and methods used to cope with the problems. Geometry has a long history intimately connected with the development of mathematics. Euclid's Elements, considered first axiomatic construction of geometry, captured ancient mathematics usually formulated in the language of geometry. The geometry is therefore an integral part of our culture, being a vital component of numerous aspects of life and science from astronomy to architecture, from biology to physics. What is more, geometry appeals to our visual, aesthetic and intuitive senses [1].

## 2 Geometry and its impact on sciences

We have captured the beginnings of geometry in ancient Egypt and Babylonia in the form of what could be characterised as practical recipes for calculation of specific volumes, surfaces required in preparing various tools, buildings, and other needs for human activities. The first mathematical theory was created according to the many specific tasks of the same type by generalization. The ancient Greeks were the first to introduce an abstract logical method to systemise previously known facts in mathematics. Their aim was to create a logically consistent foundation of mathematics. At that time several Elements of Mathematics were created, the first of them was written by Hippocrates, the other fell into oblivion under the shade of the Euclid's Elements [2]. Euclid's Elements gained widespread recognition as such a systematisation of mathematical knowledge which in terms of logical rigor remained unsurpassable nearly for 2,000 years. The new axiomatic systems fulfilling the growing demand for mathematical strictness were created at the end of the 19th century (Pasch, Peano).

Euclid's Elements remained the only original source of school education geometry for a long time. Hilbert's axiomatic construction of geometry was first published only in 1899.

Geometry was changed and evolved, specialisations arose, which were responsive to the diverse theoretical and practical challenges. Today classification distinguishes more than 50 geometric disciplines. Such development was not an end in itself, geometry provides the basis for the natural sciences.

The Pythagoreans was the first to understand the difference between the real performing and the thought experiment in mathematics. Eudoxus' method of exhaustion allowed getting arbitrarily close to the point in which we know that it can be never achieved. This geometric idea led to the discovery of irrational numbers in mathematics and also to the method that creates the basis of Dedekind's theory and the infinitesimal calculus.

J. von Neumann laid mathematically unshakable foundations of quantum mechanics using operators of linear Hilbert space [3].

One day C.F. Gauss wrote down in his scrapbook "Large geometric discovery". A sentence, which he called "Theorema egregium" (excellent theorem) enabled a new view of space in which we live. Gauss figured out that the main curvature (which is thereafter referred to as Gaussian curvature) is invariant intrinsic property of each area. This discovery (published in 1828) is the germ of the Riemannian geometry and the Einstein's general relativity at the same time [3].

In 1917 A. Einstein published his theory of gravity, which provides a convincing argument that our physical space shall be closed in the sense that when a line is continuously lengthened then finally it gets back to the starting point. Maybe it is contrary to our experience, but our analytical capabilities (thanks to Gauss) allow detailed study of such space.

H. Minkowski in 1907 showed that Einstein's two postulates from 1905, which are demolishing Newton's concept of absolute time and absolute space, have rather geometric than physical characteristics [3]. The unification of space and time into a single four-dimensional (Minkowski) geometry has a large contribution to the successful completion of Einstein's ideas.

Today's physics still struggles to understand the dimensionality (macroscopic and microscopic dimensions) of a space where the physical actions happen. The fact that our space has three macroscopic dimensions was adopted at the time of Ptolemy. Modern science still lacks a deeper theory substantiated evidence of the origin of this number [4]. Moreover, string theory requires at least ten dimensions [5].

Time is even much more mysterious then space. There is a sharp contrast between our perception of time and what the modern physical theories show us [4]. All of these "mysteries" of modern science are closely related to the geometry and its deep understanding.

### 3 Geometry in education and anaglyph

Geometry is often seen only as a part of mathematics helping to solve technical problems. This view neglects a strong influence of geometry on philosophy and art throughout history. Reducing the number of teaching hours in school geometry curriculum in recent decades, it seems, has negative effects not only on technical training but also the training of mathematics teachers themselves. Author of article [6] is convinced by his experience in teaching geometry to mathematics and engineering students that geometry finally helps to save time in education and problem solving processes. “Besides this more or less practical effects geometry helps built a (natural scientific and philosophical) view of the world and allows to get deeper insight into a lot works of fine art. So geometry is of general educational value.”

Spatial geometry is a very important part of geometric knowledge. Many people say that they are not very good in space vision or that they have poor spatial sense. The typical belief is that the child is either born with spatial sense or not. But we know that rich experiences with shape and spatial relationships (consistently provided) can develop the spatial sense to a large extent.

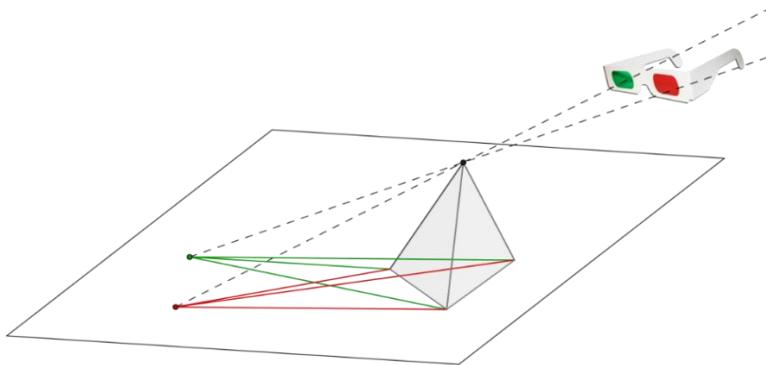
Dynamic geometric program GeoGebra [7] is a very useful helpmate for rigorous visualization of geometric relations in plane and in space. For visualization the shapes in the space we can use two types of outputs. The first one is the widely used parallel projection of the given 3D object (can be changed to central projection, but in this case the parallel lines project into nonparallel lines and the picture could be not suitable for teaching basic geometric properties or relationships). The second and the newest possibility for visualization of spatial objects in GeoGebra is to choose anaglyph. The program creates two central projection images into one picture in red and cyan colour. Using anaglyph filter glasses we can see the spatial object in space partly in front of and partly behind the screen. This is a perfect tool for training spatial geometry abilities, mainly for students with lower spatial sense.

### 4 Anaglyph

Anaglyphic stereogram (anaglyph) is the name given to the spatial effect achieved with encoding each eye's image using chromatically opposite (usually red and cyan, occasionally red and green in Europe) filters. “Anaglyph” is derived from two Greek words meaning “again” and “sculpture”. (So we again find ourselves discovering this technique in the 21st century.)

Anaglyph images contain two differently filtered coloured images, one for each eye. The images are created from two central projection images projected from the centres approximately 6.5 centimetres apart, which is the centre distance typically between human eyes. The central projection of the object projected from the left centre is green coloured, the image projected from the right centre is red coloured. Viewing an anaglyph stereo image is then easy: we need a red filter over the left eye and a green filter over the right eye. The eye

that is covered with the red lens will see only the green image in black. Similarly, the eye that is covered with the green lens will see only the red image in black. If colours on the glasses fit with the colours on the printed or displayed material, we must not see the red image through the red glass with left eye, respective the green image through the green glass with right eye. Each eye will see only the image prepared for it (see Figure 1) and so the perception of depth will be created.



**Fig. 1: The principle of anaglyph**

The first method to produce anaglyph images was developed in 1852 by Wilhelm Rollman in Leipzig, Germany. In 1858, a French gentleman named Joseph D'Almeida used this technique to project anaglyphic stereo lantern slides onto a theatre screen [8]. The audience viewing the exhibition was adorned with red and green goggles to witness the very first 3D slide show ever. William Friese-Green created the first 3D anaglyphic motion pictures in 1889, using a camera with two lenses, which were first shown to the public in 1893. Anaglyphic films called “plastigrams” enjoyed great popularity in the 1920s. These used a single film with a green image emulsion on one side of the film and a red image emulsion on the other. In 1922, an interactive plastigram, entitled “Movies of the Future,” opened at the Rivoli Theater in New York [8].

Anaglyphic images have been used in comic books, newspapers, and magazine ads. In 1953, 3D comic books were invented and distributed with red and green “space goggles.” But anaglyphs were used not only for entertainment. Some descriptive geometry textbooks with anaglyph illustration also arose. One of them is the textbook [9]; its first edition is from the year 1959.

Anaglyphs are used today in science for instance to map the topography and geology of the planets and moons. Stereo images can reveal geologic features of the planet not otherwise visible. Just as the early stereogram images allowed people around the world to experience different places and events, stereo images of the planets help us to experience these different worlds in a more tangible way. Scientists at the Jet Propulsion Laboratory used anaglyphic

images to look at the surface of Mars using pictures sent back by the Pathfinder spacecraft (Figure 2). This allowed the scientists to experience the planet in a more familiar way. The features of the surface and the rocks could be analysed in more detail using these images. The Viking spacecraft that visited Mars in the 1970s also returned some images in stereo, as did the Apollo missions to the Moon in the 1960s and 1970s [8]. Anaglyphs allow us to create and view complicated artificial stereo images and improve our spatial sense this way. (Figure 3, red-green glasses are recommended to view the images correctly).

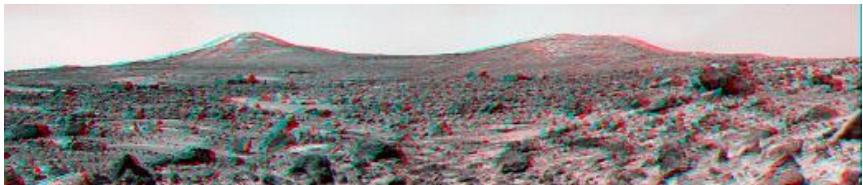


Fig. 2: Anaglyph image of Mars surface

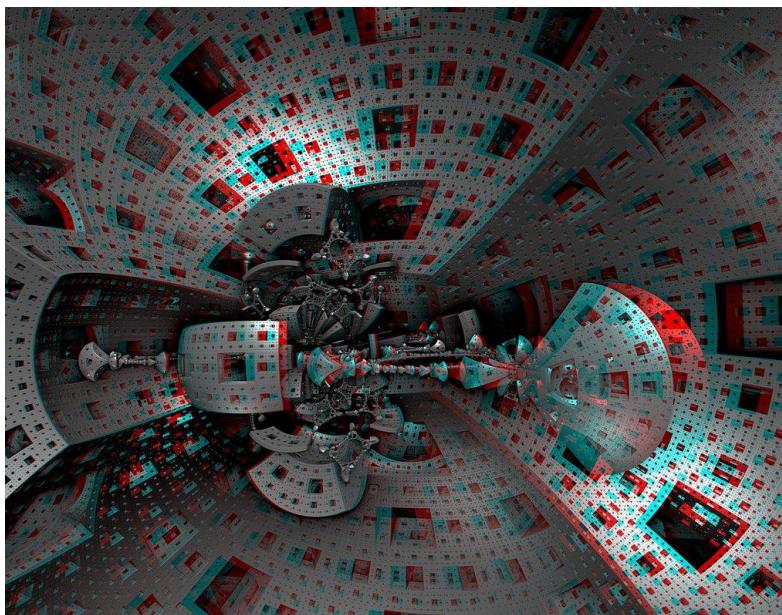
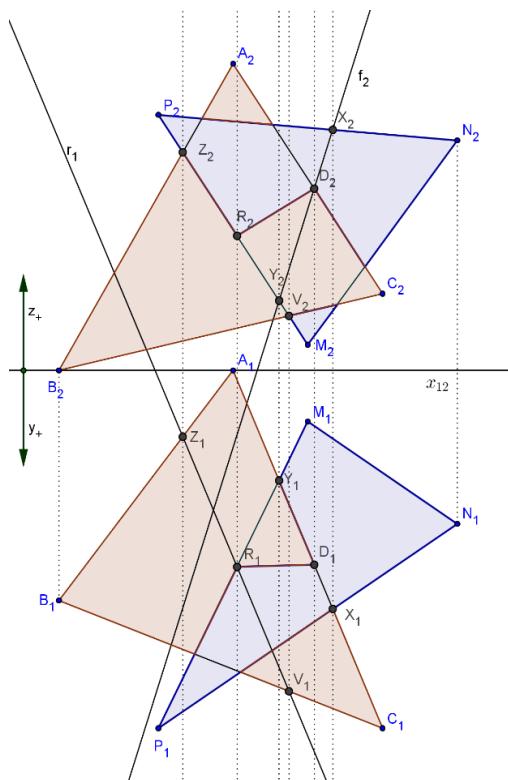


Fig. 3: Anaglyph created by A. Osipenkov [12]

## 5 Using anaglyph in dynamic program GeoGebra

Monge projection is a short name for orthogonal projections to two perpendicular (horizontal and vertical) planes.



**Fig. 4: Monge projection in GeoGebra**

The vertices are given as  $A[-1, 0, 6]$ ,  $B[-4.5, 4.5, 0]$ ,  $C[2, 7, 1.5]$ ,  $M[0.5, 1, 0.5]$ ,  $N[3.5, 3, 4.5]$ ,  $P[-2.5, 7, 5]$ .

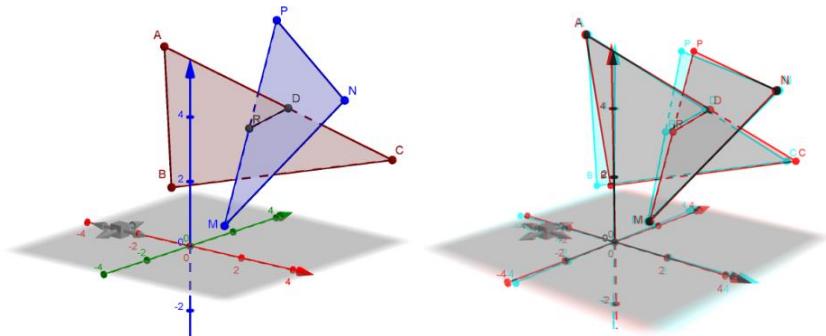
The  $x$  axis of the plane coordinate system in the graphics screen of GeoGebra is used as an  $x_{12}$  axis in Monge-projection. That means that the top view of the triangle  $ABC$  is given by (see Figure 4)  $A_1[-1, 0]$ ,  $B_1[-4.5, -4.5]$ ,  $C_1[2, -7]$ , and the front view is given by  $A_2[-1, 6]$ ,  $B_2[-4.5, 0]$ ,  $C_2[2, 1.5]$ .

The top view and the front view of the triangle  $MNP$  are given similarly. In general, the top view of a space point  $X[a, b, c]$  is a plane point  $X_1[a, -b]$ , and the front view is given by  $X_2[a, c]$ . The further solution of the task is identical with the solution in paper form. The advantage of this dynamical geometry form of solution is that the coordinates of basic points are variable. We can create a new task from the previous one and confront the solutions. This variability has only an assumption that the front view and the top view of each point move on a perpendicular line to the  $x_{12}$  axis.

A problem appears, when some students are not able to imagine these objects in 3D space. Program GeoGebra can be helpful in this case too. We can use the

The double-view orthogonal projection is named after Gaspard Monge, the French mathematician, the inventor of descriptive geometry. Monge projection has a wide range of uses in technical drawing and computer graphics. This is the reason, why Monge projection forms a basic part of the subject Constructive Geometry in teacher training study. Despite the fact that the program GeoGebra does not support Monge projection, it is possible to display a front view and a top view of the objects quite successfully. As an example we show the solution of an intersection problem from the university textbook [10]. The task requires determining the intersection of two triangles  $ABC$  and  $MNP$  in Monge projection.

3D version and display the objects in space. To increase the perception of depth and to have full stereo image, we can use the newest function of the program, which divides the 3D picture into two central projections in green and red colours, i.e. creates anaglyph of the original picture. Figure 5 shows the anaglyph of the left side picture (red-green glasses are recommended to view the image correctly). After using the rotation function of the program and view the image through red-green glasses, we receive a full spatial experience with rotating black-and-white objects in front of and behind the screen.



**Fig. 5: 3D picture and its anaglyph**

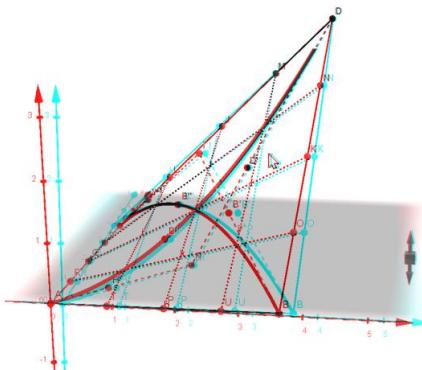
The second ideal usage of anaglyphs in geometry teaching appears in the subject Curves and Surfaces [11] for computer graphics study. Anaglyph is a great support for students with lower level of space vision. As an example we show the bilinear surface with parabola diagonals. Students are able to compute the equation of the curve on the surface but often, they are not able to imagine it in space. Figure 6 shows the situation in space (of course, red-green glasses are recommended to view the image correctly). To increase the spatial experience, we can choose a rotation function of the program.

## 6 Conclusion

In the article we emphasized the role of geometry in the advancement of science and the need for the development of spatial thinking. The aim of the paper was to demonstrate the usefulness of anaglyph in the program GeoGebra for teaching spatial geometry relationships. At first we dealt with the history of anaglyph, than we discussed, how a perfect 3D experience was created. We have showed the usefulness of this feature of the program GeoGebra on the seminars of geometry in subjects Monge Projection and Curves and Surfaces.

## Acknowledgement

The author has been supported by Slovak Grant Agency KEGA, grant No. 010UJS-4/2014.



**Fig. 6: Anaglyph of the bilinear surface with diagonals**

## References

- [1] K. Jones: *Teacher Knowledge and Professional Development in Geometry* In: Rowland, T. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 20(3) November 2000
- [2] K. A. Ribnyikov: *A matematika története*. Tankönyvkiadó Budapest, 1974
- [3] K. Lánczos: *Space through the Ages – Hungarian translation: A geometriai térfogalom fejlődése*, Gondolat Budapest 1976, ISBN 963 280 206 3.
- [4] M. Saniga: *Geometry of Time and Dimensionality of Space*. In: The Nature of Time: Geometry, Physics and Perception. NATO Science Series II. Vol. 95, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [5] J. Polchinski: *String theory*. Cambridge University Press 2005, ISBN-13 978-0-521-63303-1
- [6] G. Weis: *Is geometry a cultural or a technical need?* 25. Conference on Geometry and Computer Graphics 2004, Proceedings, ISBN 80-248-0581-2.
- [7] Dynamic Program GeoGebra, available at <http://www.geogebra.org/>
- [8] Lunar and Planetary Institute, *Stereo Imagery: Anaglyphs and Twin Peaks, Mars*, available at <http://www.lpi.usra.edu/>
- [9] I. Pál: *Térláttatós ábrázoló mértan*, MK Budapest, 1961
- [10] V. Piják, O. Šedivý, M. Grajciar, V. Zatko: *Konštrukčná geometria*, SPN Bratislava, 1985
- [11] G. Farin: *Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide*. Fifth Edition. Morgan Kaufmann, 2002, ISBN 1-55860-737-4
- [12] A. Osipenkov: Gallery, available at [osipenkov.deviantart.com/gallery/](http://osipenkov.deviantart.com/gallery/)

# Gotická rozetová okna

## Gothic Rose Window

Dana Kolářová

*Dept. of loadbearing structures, Fac. of Architecture, CTU in Prague*

*Thákurova 9, 166 34 Praha 6, Czech Republic*

*email: kolarova@fa.cvut.cz*

**Abstract.** The paper shows the development of the teacher's perspective on gothic window tracery. It is a wonderful combination of geometry and architecture; it returns to an initial impulse in the book of Alojz Struhár and continues to present works of students of FA CTU.

**Keywords:** rose window, tracery of gothic window, problém of Apollonius

**Klíčová slova:** rozetová okna, kružba gotických oken, Apollóniový úlohy

## 1 Kružba gotických oken v minulosti

Kružba gotických oken je nádherným příkladem spojení geometrie a architektury. Ve výuce na fakultě architektury ČVUT se tato problematika objevuje již téměř dvacet let. S vývojem technických prostředků se ale mění způsob pojednání. První setkání s problematikou geometrického zkoumání kružeb gotických oken bylo v knize Alojze Struhára Geometrická harmonia historické architektury na Slovensku. Zde jsou první konstrukce provedeny jen za pomoci pravítka a kružítka.

Při hledání geometrických základů gotických oken jsme se obrátily na vyučující dějin architektury a na základě jejich rad jsme společně se studenty začali hledat čtvercové a trojúhelníkové síť gotických oken. Příklady najdete na našich webových stránkách.

## 2 Kružba gotických oken v současnosti

V současné době se zcela změnil přístup k zadávání úloh týkajících se kružby gotických oken. S pomocí výpočetní techniky a grafických programů není obtížné zobrazit správně okno. Na základě existujících oken řešíme teoretické úlohy, například Apollóniový úlohy, dále se věnujeme souvislostem geometrie a historie, jak se mění kružba v závislosti na době vzniku okna, ale i v závislosti na geografickém výskytu.

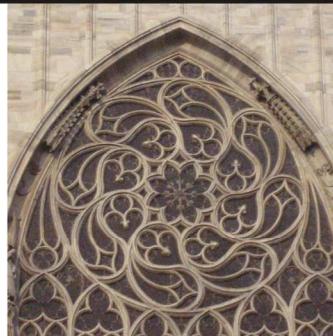
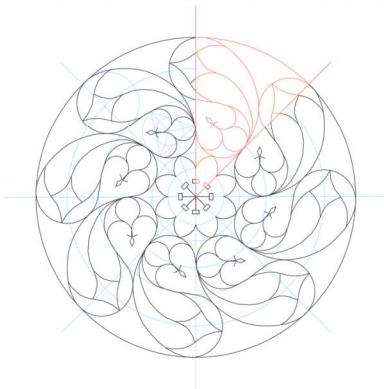
Poslední dva roky zadávám v rámci semestrálních prací jen rozetová okna. Úkolem studentů je určení počtu přímých symetrií a úhlu otočení, dále pak základní třídění rozetových vzorů podle nepřímých symetrií na třídy  $C_n$  a  $D_n$ .

## KATEDRÁLA NAROZENÍ P. MARIE, MILÁN

C8

*Kružba okna apsydy, 14. st.*

Základní kámen milánského dómu byl položen r. 1383. Dóm byl vysvěcen o sto let později a zaklenutí kupole se dočkal až na konci 18. století. Plán vychází z ideálního katedrálního typu, který je přizpůsoben italským zvyklostem. Chór a ochoz jsou uzavřeny třemi stranami osmiúhelníku, kaple v ochozu chybějí.[5]



obr. 4

6

Obr. 1: Ukázka stránky ze semestrální práce slečny Janusové, 2015

### 3 Závěr

Na závěr bych citovala prof. M. Couceira (Faculdade de Arquitectura da Universidade de Lisboa) „Geometry is the hidden soul of architecture.“ (přednáška Deskriptivní geometrie architekta, konaná v Praze na FA ČVUT v dubnu 2015).

### Poděkování

Děkuji všem našim studentům, kteří překračují svým zájmem povinný rámec předmětu deskriptivní geometrie.

### Literatura

- [1] Alojz Struhár: Geometrická harmónia historické architektury na Slovensku, Pallas, n.p. 1977, Bratislava
- [2] Elektronická skripta [online] dostupná z <http://15122.fa.cvut.cz/?page=cz,elektronicka-skripta> [Cit. 31.10.2015]

# Triangulácia parametrických plôch so zachovaním stupňa diagonálnych krviek

Alexej Kolcun

*Oddelení aplikované matematiky a informatiky,  
Ústav geoniky AV ČR, v. v. i.,  
Studentská 1768, 708 00 Ostrava  
email:alexej.kolcun@ugn.cas.cz*

**Abstract.** Mutual conversions between triangular and quadrilateral meshes need the same degree of both diagonal and boundary curves of quadrilateral meshes. New approach to quadrilateral patches, S-Patches, offers such possibility. The Bézier subclass of Smart patches (S-Patch) in the bicubic case is analysed. Biquadratic and bicubic cases of S-Patches are compared.

**Keywords:** Parametric modeling, S-patch, BS-patch, biquadratic patch, bicubic patch

**Kľúčové slová:** Parametrické modelovanie, S-záplata, BS-záplata, bikvadratická záplata, bikubická záplata

## 1 Úvod

Bežne používaným nástrojom geometrického modelovania je parametrické modelovanie. Toto vedie k výslednej aproximácii povrchu štvoruholníkovou sieťou. Z druhej strany, častým nástrojom modelovania plôch sú trojuholníkové siete. Vzhľadom na rôznosť geometrických vlastností oboch prístupov je ich vzájomná konverzia dlhú dobu v oblasti záujmu mnohých autorov. Prehľad skúmaných prístupov nájde záujemca v [3].

Za nový prístup v tejto oblasti možno považovať [6], kde je sformulovaný pojem S-záplata (Smart-Patch). V [3] je spravená určitá revízia: na rozdiel od [6], kde sú záplaty formulované ako fergusonovské, v [3] je použitá bérziovská notácia. Toto dovoľuje jednoduchú a jednotnú formuláciu problému nielen pre bikubické plochy ale pre ľubovoľný stupeň modelovaných plôch. Naviac je tu zavedená podrieda S-záplat – BS-záplaty, ktorá dovoľuje priamu konverziu medzi bérziovských štvoruholníkových sietí na bérziovské triangulácie.

Praktická použiteľnosť bikvadratických BS-záplat je dosť obmedzena faktom, že keď vyžadujeme hladké napojenie susedných záplat, siet' riadiacich bodov musí byť tvorená iba kartézskym súčinom dvojice lineárne lomených čiar [2], [3]. V [5] je ukázané že pre kvadratický prípad sú rozdiely S-záplat a BS-záplat nepodstatné.

V porovnaní s bilineárnym prípadom však vidíme značný posun, čo dáva motiváciu skúmať koncept S a BS-záplat pre vyššie stupne.

Tento príspevok preto priamo nadväzuje na [3] a sú v ňom ukázané základné vzťahy pre bikubické S- a BS-záplaty.

## 2 Základné definície a vzťahy

Uvažujme parametrickú plochu s rovnakým stupňom oboch parametrov  $n$ ,

$$X(u, v) = \mathbf{u} \mathbf{R} \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 1 & u & \dots & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} & \dots & R_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n0} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Je evidentné, že vo všeobecnom prípade sú obe hlavné diagonály

$$D_1(u) = X(u, u) = \mathbf{u} \mathbf{R} \mathbf{u}^T, \quad D_2(u) = X(u, 1-u) = \mathbf{u} \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{u}}^T$$

krivky stupňa  $2n$ ,

kde  $\tilde{\mathbf{u}} = (1 - u \ (1-u)^2 \ \dots \ (1-u)^n)$ .

Cieľom je sformulovať podmienky pre riadiace body plochy (1) tak, aby obe hlavné diagonály  $D_1(u), D_2(u)$  boli krivky stupňa  $n$ . Také plochy nazývame **S-záplaty (S-Patches)** [6].

V [3] bol analyzovaný bikvadratický prípad, tj.  $n=2$ . Užitočnosť a dôležitosť bikvadratických štvoruholníkových sietí a kvadratických triangulácií je demonštrovaná napr. v [4], [1].

Podobne, ako bolo dokázané v [3], možno pre bikubický prípad ukázať, že:

1. bikubická záplata (1) je S-záplata práve vtedy, keď

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R \\ R_{20} & R_{21} & 0 & 0 \\ R_{30} & -R & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

2. Bézierova forma bikubickej S-záplaty

$$X(u, v) = \mathbf{u} \mathbf{R} \mathbf{v}^T = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}^T \quad (3)$$

vedie k určeniu riadiacich bodov vzťahom

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

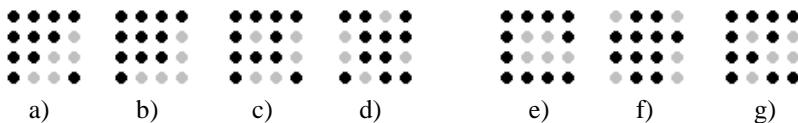
čo po roznásobení dáva sústavu

$$\Pi = \mathbf{A} \mathbf{R}, \quad (4)$$

ktorá detailne vyjadrená má tvar

$$\begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{10} \\ P_{02} \\ P_{11} \\ P_{20} \\ P_{03} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{30} \\ P_{13} \\ P_{22} \\ P_{31} \\ P_{23} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 6 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 9 & 3 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & 6 & 3 & 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 9 & 0 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & -3 \\ 9 & 9 & 6 & 9 & 6 & 3 & 9 & 6 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 6 & 9 & 0 & 3 & 6 & 9 & -6 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} \\ R_{01} \\ R_{10} \\ R_{02} \\ R_{11} \\ R_{20} \\ R_{03} \\ R_{12} \\ R_{21} \\ R_{30} \\ R \end{pmatrix}$$

Vzhľadom na  $\mathfrak{R}$  je sústava (4) preurčená. Pre zistenie toho, či 11-tica bodov  $P_{ij}$  jednoznačne definuje S-záplatu, stačí vygenerovať zo (4) príslušnú podsústavu rovnic a zistiť, či jej matica je regulárna. Obr. 1 a) – d) ukazuje príklady takých 11-tíc riadiacich bodov, ktoré nemôžu definovať S-záplatu. Naopak, konfigurácie bodov e) – g) jednoznačne definujú S-záplatu.



Obr. 1: Základné konfigurácie jedenásťti riadiacich bodov pre bikubickú S-záplatu: a) – d) závislé konfigurácie, e) – g) nezávislé konfigurácie.

Z Obr. 1 vidíme, že napr. nemožno zadáť S-záplatu rohovými riadiacimi bodami a trojuholníkom (obr. 1a)). Taktiež vidíme, že pre definovanie S-záplaty nemožno použiť celú hranicu (obr. 1e)).

Napr. pre situáciu z obr. 1e) dostávame zo (4) podsústavu

$$\Pi_1 = \mathbf{A}_1 \mathfrak{R}, \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{10} \\ P_{02} \\ P_{20} \\ P_{03} \\ P_{30} \\ P_{13} \\ P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 9 & 3 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & 9 & 0 & 3 & 9 & 0 & 0 & 3 & 9 & -3 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 6 & 9 & 0 & 3 & 6 & 9 & -6 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} \\ R_{01} \\ R_{10} \\ R_{02} \\ R_{11} \\ R_{20} \\ R_{03} \\ R_{12} \\ R_{21} \\ R_{30} \\ R \end{pmatrix}$$

Vzhľadom na jej regularitu môžeme vyjadriť

$$\mathfrak{R} = (\mathbf{A}_1)^{-1} \Pi_1$$

a ostatné riadiace body  $\Pi_2 = (P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{23})^T$  dostaneme zo vzťahu

$$\Pi_2 = \mathbf{A}_2 \mathfrak{R} = \mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_1)^{-1} \Pi_1$$

kde  $\mathbf{A}_2$  je príslušná podmatica (riadky 5, 8, 9, 12, 14) matice  $\mathbf{A}$  v (4).

### 3 Kubické BS-záplaty

V [2] je zavedený pojem **BS-záplata**. Je to S-záplata, ktorá naviac splňuje podmienky

$$D_{BS1}(u) = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{11} \\ P_{22} \\ P_{33} \end{pmatrix}, \quad D_{BS2}(u) = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{03} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{30} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

tj. diagonálna krivka je bázierova krivka diagonálnych riadiacich bodov. Keď pre riadiace body v (7) využijeme vzťahy z (4), dostávame vyjadrenie diagonálnej  $D_{BS1}(u)$  na základe  $\mathfrak{R}$ :

$$D_{BS1}(u) = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{R}^T \quad (8)$$

Diagonálna krivka pre S-záplatu vyjadrená pomocou  $\mathfrak{R}$  má tvar

$$D_{S1}(u) = \mathbf{u} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}^T} \quad (9)$$

Porovnaním (8) a (9) vidíme, že keď vyžadujeme, aby S-záplata bola BS-záplatou, musí pre  $\mathbf{R}$  platíť

$$R = R_{11} = R_{12} = R_{21} = 0 \quad (10)$$

Porovnaním diagonál  $D_{BS2}(u)$  a  $D_{S2}(u)$  dôjdeme taktiež k podmienkam (10).

Pre BS- záplaty tak zo (4) dostávame sústavu

$$\begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{10} \\ P_{02} \\ P_{11} \\ P_{20} \\ P_{03} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{30} \\ P_{13} \\ P_{22} \\ P_{31} \\ P_{23} \\ P_{32} \\ P_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 3 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 6 & 9 & 3 & 9 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{00} \\ R_{01} \\ R_{10} \\ R_{02} \\ R_{20} \\ R_{03} \\ R_{30} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Podobne ako v prípade S-záplat, teraz môžeme vytvoriť sedmice riadiacich bodov, definujúcich BS-záplatu – Obr. 2.



Obr. 2: Príklady konfigurácií riadiacich bodov pre bikubickú BS-záplatu.

## 4 Záver

V článku je daný prehľad dôležitých vlastností S- a BS-záplat pre bikubické plochy. Je ukázaný spôsob, ako nájsť vzťahy pre výpočet závislých riadiacich bodov. Vidíme, že (Obr. 2) že tvarová expresivita bikubických BS-záplat zostáva bohužiaľ na úrovni bikvadratických BS-záplat, tj. keď vyžadujeme hladké napojenie susedných záplat, sieť riadiacich bodov musí byť tvorená iba kartézskym súčinom dvojice lineárne lomených čiar [2], [3]. Toto sa dá očakávať i pre BS-záplaty vyšších stupňov. Preto ďalšiu prácu v tejto oblasti je treba smerovať na detailnejšiu analýzu kubických S-záplat.

## Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory projektu RVO 68145535.

## Literatúra

- [1] Bocek, J., Kolcun, A.: Shading of Bézier patches, in: GraVisMa 2009 Workshop Proc., (V. Skala, D. Hildenbrand eds.) UWB, Plzeň, 2009, pp. 126-129.
- [2] Kolcun, A.: Biquadratic S-Patches in Bézier Form, In: WSCG2011, Communications Proceedings, pp. 201-207.
- [3] Kolcun,A.: Bikvadratické S-záplaty a BS-záplaty,in: Sborník příspěvků 31. Konference o geometrii a grafice, (Lávička,M., Němec,M. eds), VŠB-TU 2011. pp.133-138.
- [4] Razdan, A., Bae, M.S.: Curvature Estimation Scheme for Triangle Meshes Using Biquadratic Bézier Patches, Computer-Aided Design 37,14(2005) pp. 1481-1491.
- [5] Sabacký, R.: Uživatelské rozhraní pro modelování S-záplat. Bakalárska práca. PřF OU, Ostrava 2013.
- [6] Skala, V., Ondračka, V.: S-Patch: Modification of the Hermite parametric patch, in Conf.proc. ICGG 2010, Kyoto 2010.

# Variabilita geometrických tvarov

## Variability of geometric shapes

Božena Koreňová, Tatiana Hýrošová

Horná Ves 44, 967 01 Kremnica, Slovak Republic  
email: bobakoren@gmail.com

Technická univerzita  
T.G.Masaryka 24, 960 53 Zvolen  
email: tatiana.hyrosova@tuzvo.sk

**Abstract.** In the first part we present variables in art design, the next part introduces several proposals for use of variables in mathematical, geometrical and creative education, in the last part we deal with modelling of variables in the geometric system GeoGebra.

**Keywords:** variables, variability, variations, composition, structure, geometric shape

*Kľúčové slová:* variabilty, variabilita, variácie, kompozícia, štruktúra, geometrický tvar

## 1 Variabilty vo výtvarnom umení

### 1.1 Dva svety geometrie

Pri hľadaní styčných bodov medzi výtvarným umením a matematikou sa stretávame s pestrou škálou rôznych obsahov pojmu geometria. Veľmi zjednodušene by sme mohli povedať, že na okrajoch tohto významového spektra existujú dva svety:

- a) *geometria sveta* je realita mimo nás a skúma tvarové, metrické a incidenčné vzťahy reálnych objektov,
- b) *svet geometrie* je realita našich predstáv a v každom z nás je tento svet iný a neopakovateľný.

Napätie medzi týmito dvoma svetmi je hybnou silou interakcie medzi vedou a umením už od staroveku. Geometrické tvary a ich vzájomné väzby sú vo výtvarnom umení metaforickým dorozumievacím jazykom, ktorým odovzdávajú umelci svoje posolstvá o prežívaní a precítovaní reálneho sveta.

### 1.2 Variabilty

Variabil je slovo mužského rodu. Vzniklo zlúčením dvoch matematických pojmov:

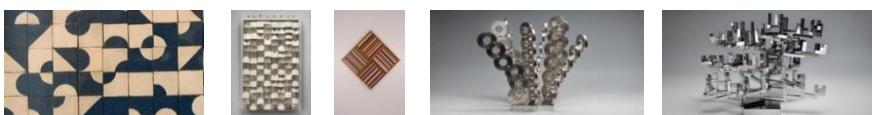
- a) *Variabilita* je slovo latinského pôvodu a znamená schopnosť meniť sa. Používa sa v štatistike.
- b) *Variácia* je pojem, ktorý sa dá v slovenčine nahradiť slovami obmena, zmena, premena, striedanie. Používa sa v kombinatorike.

Vo výtvarnom umení sa s pojmom variabilty stretneme pri popisovaní diela troch predstaviteľov súčasného geometrického umenia: **Radoslava Kratinu** (1928 Brno – 1999 Praha), **Viktora Hulíka** (1949 Bratislava) a **Mariana Drugdu** (1945 Detva). Ich variabilty sú na prvý pohľad odlišné, spája ich však podobná filozofia tvorby, ktorú môžeme zhrnúť do troch základných princípov:

- a) Umelecké dielo (obraz, reliéf, socha,...) nemá statickú podobu, ale predstavuje pohyb, proces a dej.
- b) Kompozícia diela je vytvorená z jednoduchých tvarov, ktoré sú zviazané geometrickými príbuznosťami.
- c) Divák sa môže aktívne zúčastňovať na premenách vnútornej štruktúry diela.

Každý z uvedených autorov používa nielen iné materiály, ale aj iné vyjadrovacie prostriedky a konštrukcie, ktoré sú zaujímavé aj z matematického hľadiska. Ak ich však chceme použiť vo vyučovacom procese, je potrebné urobiť najprv dôsledný rozbor ich myšlienkových postupov a procesov hľadania.

Všetci traja výtvarníci svojou tvorbou reagovali na vedecké a technické objavy 20. storočia, v ktorom vedci skúmali geometrickú podstatu hmoty, podoby chaosu a jeho premeny v čase. Variabilty sú ich posolstvami o vnímaní krásy ukrytej v geometrickom poriadku reálneho sveta.



Obr. 1: Variabilty Radka Kratinu (<http://www.ceskatelevize.cz/ct24/kultura>)



Obr. 2: Variabilty Viktora Hulíka (<http://www.artgallery.sk>)

### 1.3 Variabilty Mariana Drugdu

Variabilty Mariana Drugdu sú závesné objekty zo sololitu zložené z viacerých farebných vrstiev, ktoré majú tvar štvorca, šesťuholníka alebo kruhu. Asymetrická kompozícia výrezov v jednotlivých vrstvách má pevnú štruktúru vytvorenú z rovných alebo zakrivených línii. Pri ich konštrukcii využíva rôzne geometrické transformácie, najčastejšie posunutie a dilatáciu. Premeny vnútornnej štruktúry variabilov pri skladaní vrstiev sú závislé od počtu vrstiev a ich tvaru. Z geometrického hľadiska menlivosť je dosiahnutá rotáciou a osovou súmernosťou. Počet rôznych kompozícii je kombinatorický problém a venovali sme sa mu v článku [6]. Na obr.3 je ukážka jedného variabila pozostávajúceho z troch vrstiev uložených na čiernom podklade – bielej, žltej a červenej. V hornom riadku sú uvedené samostatne dve vrstvy a v dolnom je kompozícia vytvorená zo všetkých troch vrstiev. Zobrazili sme ich v štyroch rôznych polohách získaných otáčaním okolo stredu štvorca. Z hľadiska geometrie je to sice tá istá kompozícia, ale človek ju vníma ako 4 rôzne štruktúry.



Obr. 3: Variabilty Mariana Drugdu (foto Pavel Koreň)

## 2 Variabilty vo vyučovaní

### 2.1 Ciele

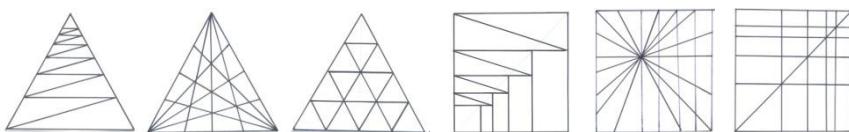
Proces tvorby variabilov u Mariana Drugdu integruje viacero matematických disciplín s umením, čo môžeme využiť na rôznych typoch i stupňoch škôl. Nácvik rysovania a osvojenie si geometrických pojmov na hodinách matematiky môže pokračovať materiálnou realizáciou kompozícii na polytechnickej alebo výtvarnej výchove. Po manuálnom zostrojovaní návrhov môžeme vo vyšších ročníkoch pokračovať ich modelovaním v PC. Výchovné a vzdelávacie ciele tejto témy by sa dali zhrnúť do troch základných bodov:

- Zážitkové osvojovanie geometrických pojmov.
- Rozvíjanie manuálnej zručnosti, vnímanosti a kreativity.
- Nácvik poznávacích procesov.

## 2.2 Hra s variabilitou

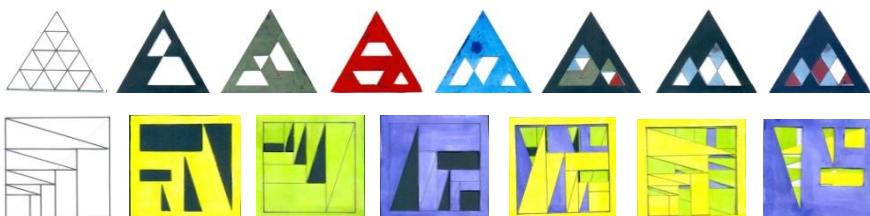
Je veľa spôsobov, ako využiť myšlienku variabilov vo výučbe. Je ľahké motivovať študentov k hľadaniu vlastných kompozícií, pokiaľ si sami nevyskúšame niečo vytvoriť. Dôležité je ponúkať možnosti, nie hotové návody, aby sa mladí ľudia manuálnou cinnosťou sami dopracovali k osvojeniu a k pochopeniu mnohých geometrických javov. Uvádzame niekoľko návrhov, no práca so žiakmi nám určite ponúkne množstvo ďalších námetov.

1. krok: voľba tvaru vrstvy (pravidelný n – uholník alebo kruh) a konštrukcia vnútornej štruktúry



Obr. 4: Návrhy štruktúr v trojuholníku a v štvorci

2. krok: voľba počtu vrstiev a tvorba výrezov



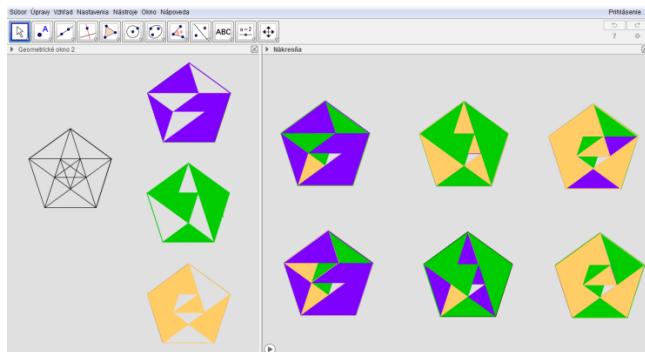
Obr. 5: Návrhy výrezov a ich kompozícia

Aj variabily vytvorené ručne môžeme v počítači ďalej farebne upravovať a vytvárať rôzne zaujímavé efekty.

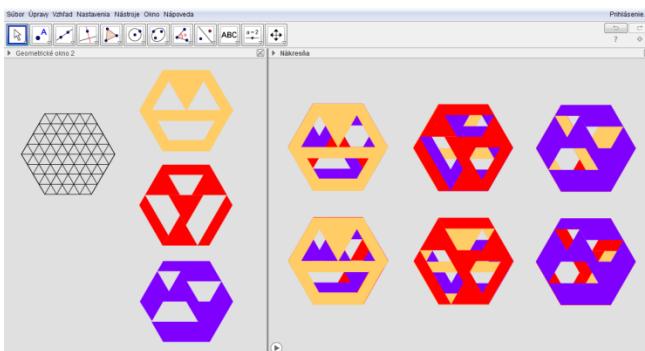
## 2.3 Modelovanie variabilov v GeoGebre

Jednou z alternatív rozvíjania geometrického vnímania je modelovanie tvarov a osvojovanie si geometrických transformácií na hodinách informatiky. V súčasnosti existuje niekoľko softvérových systémov, ktoré sú ľahko dostupné a je vhodné ich použiť pri vizualizácii geometrických a matematických javov v priebehu vyučovania.

Na modelovanie variabilov pomocou IT je použitý softvérový systém GeoGebra. Jeho ľahko ovládateľné grafické rozhranie umožňuje jednoduché vytváranie apletov variabilov s rotáciou jednotlivých vrstiev. V ľavom okne je tvar, konštrukcia vnútornej siete a štruktúra vrstiev vymodelovaná pomocou ovládacích tlačidiel v hornom menu. Po voľbe a usporiadaní vrstiev je potom v pravej nákresni možné spustiť animáciu variabilov pomocou nástrojov a transformácií implementovaných v systéme.



Obr. 6: Aplet modelovania variabilov v päťuholníku



Obr. 7: Aplet modelovania variabilov v šesťuholníku

### 3 Záver

V dnešnej dobe sa geometria vďaka výpočtovej technike matematizuje a stáva sa vysoko abstraktnou vednou disciplínou. V takejto podobe je pre väčšinu ľudskej populácie nezrozumiteľná. V procese vzdelávania by sme však mali rozlišovať medzi vedomosťami a schopnosťami. Vedomosti sa dajú otestovať,

pričom očakávame jednoznačnú odpoveď. Testy však nepodávajú vierohodný obraz o schopnosti učiť sa, tvoriť i objavovať. Sú nielen obrazom intelektu študenta, ale i kvality učiteľa a jeho schopnosti zaujať a vysvetliť. Vo vyučovacom procese by sme sa mali zamerať predovšetkým na rozvoj kreativity a vnímanosti, ktoré sú aj základnými piliermi vedeckého bádania. História i štatistické metódy nám dávajú jasne najavo, že sú to tiažko merateľné schopnosti, ktoré sa u každého z nás prejavujú v inej oblasti. Pri každej tvorivej činnosti je nevyhnutný individuálny prístup k informáciám. V tomto článku sme uviedli niekoľko námetov, ako poznávaním geometrie sveta obohatovať náš vlastný vnútorný svet geometrie.

## Literatúra

- [1] <http://www.geogebra.org/forum>
- [2] <http://artslexikon.cz/index.php/Variabilny>
- [3] <http://www.hulik.sk>
- [4] <http://www.ceskatelevize.cz/ct24/kultura>
- [5] <http://www.artgallery.sk>
- [6] B. KOREŇOVÁ, M. AMBROZ: *Marian Drugda a jeho variabilny*, G-slovenský časopis pre geometriu a grafiku, ročník 11(2014), číslo 21, s. 27 – 38, ISSN 1336-524X
- [7] M. AMBROZ, B. KOREŇOVÁ: *Variabilny vo výučbe geometrie*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'2014, Volume 23, Bratislava, SR, ISBN 978-80-227-4256-6
- [8] D. VELICOVÁ: *Konštrukčná geometria*, SjF STU v Bratislave 2003, ISBN 80-227-1839-4

# Technické školky v ČR a v SR

## Technical Kindergartens in Czech and Slovak Republic

Ladislav Mihalovič

*PREF A KOMPOZITY, a.s. Kulkova 10/4231*

*Kulkova 10/4231, 615 00 Brno, Czech Republic*

*email: mihalovic@prefa.cz*

**Abstract.** At present time we feel technical people shortage, which is responsible of unsatisfactory knowledges of children about engineering and construction machinery. By reason of these situation is system of education in Czech and Slovak Republic. We decided turn back this situation already five years ago, namely in PREF A KOMPOZITY, a.s. Brno and ČMA. We would like excite interest of preschool age children about machinery, math and geometry. It was the reason, why we work out and test system of ‘Technical kindergarten’ in Brno kindergarten ‘PRAMINEK’.

**Keywords:** Technical kindergarten, technical thinking, creativity, manual skill, verbal capability

**Klíčová slova:** Technické školky, technické myšlení, tvorivost, manuální zručnost, verbální schopnosti

Projekt „Technické školky“ souvisí s dlouhodobým programem „Popularizace vědy a techniky pro mládež“. Myšlenka TŠ vznikla v ČMA (Česká manažerská Asociace) a autorem je ing. Miloš Filip, ředitel firmy PREF A Kompozity, a.s. Brno. Tento projekt zvítězil v soutěži Česká inovace v roce 2011 a získal i Hlavní cenu.

Hlavním motivem vzniku tohoto projektu bylo:

- velký nedostatek technických kádrů,
- katastrofální stav učňovského a středního školství,
- chronický nezájem mládeže o technické vědy, matematiku, geometrii, fyziku,
- školy i školky nedávají možnost seznámit mládež se základními technickými znalostmi a neumožňují rozvíjení manuální zručnosti.

Snahou je vzbudit u dětí zájem o techniku, podpořit celkovou technickou a vědeckou gramotnost. Chceme u dětí zlepšit schopnost přijímat s porozuměním základní poznatky vědy a techniky a uvědomovat si, jak prakticky ovlivňují život každého z nás.

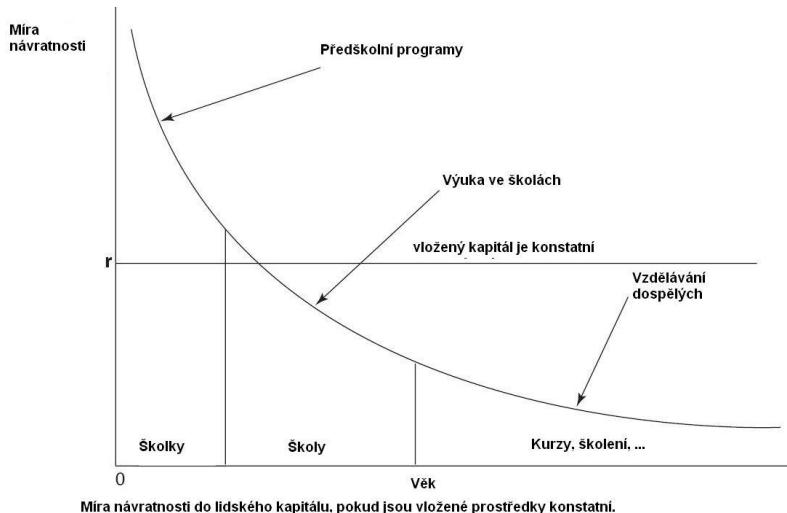
Cílem projektu „Technické školky“ je hravou formou, přiměřenou věkovým možnostem dětí, podporovat a rozvíjet jejich:

- technické myšlení,
- tvořivost,
- manuální zručnost,
- verbální schopnosti

Další zvláštností tohoto projektu je to, že není striktně udáván počet hodin „výuky“. Bude záležet na šikovnosti dětí a na vybavenosti školní dílny nebo pracovní učebny a hlavně na osobním přístupu pedagogů a dalších osob, například z řad rodičů.

Důvody proč je dobré investovat do výchovy dětí:

Tímto fenoménem se zabýval prof. James J. Heckman, jinak nositel Nobelova ceny za ekonomiku za rok 2000. Dokázal, že mimo jiných aspektů je výhodné investovat do výchovy dětí i z hlediska ekonomického. Níže uvedený graf to dokazuje.



Z diagramu jasně vyplývá, že investice do vzdělání mládeže je z hlediska míry návratnosti financí neobyčejně výhodná. Všechny vyspělé státy světa tento fakt již dávno respektují a tím získávají lidský kapitál, který je k „nezaplacení“. Rozvoj všech vědních i praktických odvětví přispívá pak k výraznému pokroku společnosti a je zárukou prosperity státu.

V rámci projektu „Technické školky“ je vytvořeno několik základních úloh se zaměřením na technické objekty a zařízení, které děti každodenně obklopují

a denně je využívají. Jsou to obory strojírenské, stavební i elektrotechnické a jiné. Každá úloha prochází fázemi návrhu, odladění a oponování. Výstupem je podrobný metodický materiál určený pro pedagogy mateřských školek. Obsah těchto manuálů není konečný, ve spolupráci s pedagogy a na základě jejich zkušeností a poznatků se průběžně aktualizují.

Každá hodina „výuky“ projektu TŠ by se měla řídit tímto schématem:

1. **Seznámení se s danou úlohou.** Dětem se podrobně vysvětlí, k čemu daný technický objekt nebo zařízení slouží i jaký je jeho praktický význam, užitečnost, jak vzniká, kdo jej vymýslí a kdo realizuje (výklad, obrázky, modely, výlety a prohlídka objektů, popř. zařízení). Také by mělo být dbáno na správnou technickou terminologii, kterou by se děti měly naučit.
2. **Vytvoření vlastní představy** – děti si nakreslí předmět úlohy podle svých představ a vysvětlí se jim, že podle tohoto výkresu si budou vyrábět model. Korekce návrhů dětí učitelkami je však nutná, aby se nevytratilo základní technické řešení.
3. **Výroba modelu.** Vyrobi se model podle kresby nebo již předem postaveného modelu učitelkami – nejnáročnější část nejen pro děti, ale i pro pedagogy. Modely se vyrábí z materiálu, který se doporučuje v manuálu, ale je i zde možnost experimentovat.
4. **Funkčnost modelu.** Vyroběný model je chápán jako hračka, modelující skutečný technický objekt. Pokud je hotový, podrobí se funkčním zkouškám a ověří se, zda splňuje požadované technické nároky. Pokud ne, je nutné jej opravit, doplnit nebo vyrobit znovu.
5. **Diskuze.** Další fází je diskuse. Zde je dětem dána možnost pro komentování daného technického problému a vlastnoručně vyrobeného modelu nejen mezi sebou, ale i při školních besídkách, doma v rodině, u známých, příbuzných, atd.  
Důraz by se měl klást zejména na odpovědi otázek:  
**proč,**  
**jak,**  
**z jakého důvodu bylo zvoleno toto řešení,**  
**k čemu se to dá použít.**

6. **Použití modelů ke hře.** Paní učitelky vymyslí a navedou děti na hry s vytvořenými modely, které souvisí s použitím právě probíraného technického objektu. Tímto se děti seznámí se správným používáním a možnostmi skutečného stroje nebo zařízení. Správně vymyšlená hra pak usnadňuje uchování získaných vědomostí a je cestou k trvalejšímu zájmu některých dětí o techniku.
7. **Zhodnocení „hodiny“.** Paní učitelka provede zhodnocení „hodiny“, zejména pochválí disciplinované, snaživé a pečlivé děti a dá je příkladem pro ostatní.

Je také známo, že budoucí směřování zájmu dětí o vědění a volbě povolání se formuje již v raném věku. V dnešní době je školství přefeminizované a v drtivé většině paní učitelky o technice a využití matematiky a geometrie v tomto odvětví neví vůbec nic a nejhorší je, že nemají ani zájem. I znalosti rodičů o těchto oborech jsou v dnešní době minimální. Takže děti se nedozví vůbec nic.

Co je tedy možné udělat? Pokusit se změnit názor na matematiku a geometrii. Vždyť je to prostředek pro kreativní využití techniky pro společnost. Jak to udělat? Pokusit se učitelům vysvětlit a naučit je postupnými kroky porozumět dané tematice. Dále je při výuce těchto předmětů důležité vysvětlit dětem k čemu jsou užitečné naučené znalosti v praxi, kde se tyto vědomosti upotřebí. Proto si myslím, že pedagogové na každém stupni školství by měli spolupracovat s odborníky v daném oboru. Tito by pak mohli najít vhodné praktické využití pro právě získané vědomosti a studenti by pak pochopili důvody studia dané látky.

Děti potřebují vzory. V prvé řadě jsou to rodiče, kteří by měli sloužit jako pozitivní příklad v chování, disciplíně a názoru na svět. V dnešní době jsme svědky toho, že děti mají za vzor tzv. celebrity, to jsou zpěváci, herci, fotbalisté apod. My se snažíme dětem poskytnout jiné vzory a to takové, které nám usnadnily život a udělaly jej bohatší o znalosti přírodních dějů a také znalosti o technických objektech, které nás dennodenně obklopují. Také jim vysvětlujeme, že autoři těchto poznatků a věcí museli studovat, najít zákonitosti a porozumět základním principům a až pak byli schopni vytvořit něco lepšího, vynalézt něco nového. Proč tedy neuvádět při každé příležitosti příklady vynikajících matematiků, geometrů, techniků? Snad v některých hlavičkách dětí-studentů se objeví touha se jím vyrovnat a něco nového, užitečného pro lidstvo vynajít, vyrobit!

Na závěr je nutné ještě zmínit, že projekt TECHNICKÉ ŠKOLKY se úspěšně prosazuje nejen v ČR, ale i v poslední době v SR. Už víme, že našim kurzem prošlo cca 600 dětí a zapojilo se asi 120 MŠ. V mnoha školkách je tento program nadšeně realizován a zapojují se do něj i rodiče a prarodiče dětí. Máme dobré reference i z Vídeňské mateřské školky.

## Literatura

- [1] L. Mihalovič: *Technické školky v MŠ Pramínek v Brně*, seminář S-klubu ČMA, Praha 2014.
- [2] L. Mihalovič: *Projekt Technické školky*, krajská konference Uherský Brod 2013.
- [3] *Technické školky-Podpora vzdělávání žáků ZŠ v technických a přírodních vědách*, projekt CZ.1.07/1.1.16/02.0014.

# B-spline/NURBS volume parameterizations of Kaplan turbine

Kristýna Michálková, Bohumír Bastl

*University of West Bohemia, Faculty of Applied Sciences, NTIS*

*Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, Czech Republic*

*kslaba@kma.zcu.cz, bastl@kma.zcu.cz*

**Abstract.** In this paper, we focus on determining B-spline/NURBS volume parameterizations of Kaplan turbines segments. These volumetric parameterizations are consequently used for fluid flow simulation based on isogeometric analysis. We mention two methods to describe volumetric parameterizations and show application of them on several parts of Kaplan turbine.

**Keywords:** NURBS volumes, water turbines, isogeometric analysis

## 1 Introduction

In this paper, we present geometric model of a horizontal Kaplan turbine and especially its volumetric parameterization (see [7]). Different parts of the turbine bounding its inner volume are represented with the help of NURBS surfaces and their corresponding control nets and knot vectors are automatically generated based on given shape parameters. Moreover the method called *isogeometric analysis* (IGA), for more details see [4], which fills the gap between the CAD and FEM, employs this type of objects. Thus, the flow through turbine or the shape of the Kaplan turbine can be further analyzed via IGA. Kaplan turbine consists of several parts (entrance canal, space between guide vanes and runner, draft tube, ...) and thus the suitable segmentation has to be done to obtain topologically hexahedral subdomains.

The paper is divided into two sections. In the first section we show two methods for obtaining B-spline/NURBS volume parameterizations and in the second part of the paper we present segmentation of Kaplan turbine and we describe volumetric parameterizations of particular segments.

## 2 Methods for determining B-spline/NURBS volumes

We present two methods required for the description B-spline/NURBS volumes of Kaplan turbine. The first one is a method of determining the NURBS volume of revolution, which is achieved by rotation of surface around the predetermined axis. The second method is more general and the input are six surfaces forming boundary of the resulting volume.

Before we specify methods for describing B-spline/NURBS volumes we remind their definition (see [1]).

**Definition 1** NURBS volume of degree  $(p, q, r)$  is determined by a control net  $(m+1) \times (n+1) \times (l+1)$  of control points  $\mathbf{P}_{ijk}$ , with weights  $w_{ijk}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,

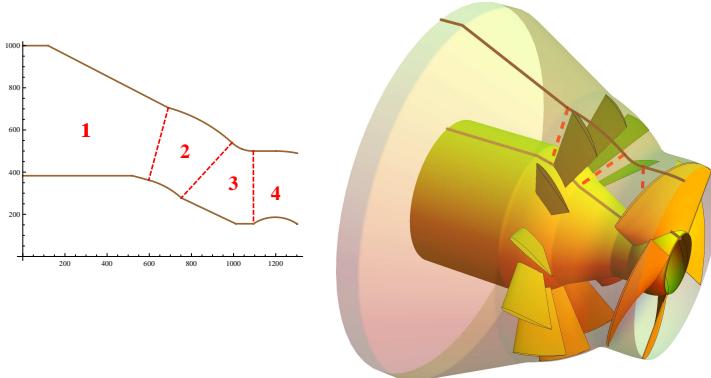


Figure 1: Left: Segmentation of blade canal projected to plane; Right: Segmentation of blade canal (red) together with geometric model of a Kaplan turbine.

$j = 0, \dots, n$ ,  $k = 0, \dots, l$  and three knot vectors  $U = (u_0, \dots, u_{m+p+1})$ ,  $V = (v_0, \dots, v_{n+q+1})$ ,  $W = (w_0, \dots, w_{l+r+1})$ . Parameterization is then

$$\mathbf{v}(u, v, w) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) N_{k,r}(w) w_{ijk} \mathbf{P}_{ijk}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) N_{k,r}(w) w_{ijk}},$$

where  $N_{i,p}(u)$ ,  $N_{j,q}(v)$  a  $N_{k,r}(w)$  are B-spline basis functions  $p$ ,  $q$  and  $r$ .

In the case of B-spline volumes all weights  $w_{ijk}$  of control points  $\mathbf{P}_{ijk}$  are equal to one. NURBS volumes are generalizations of NURBS surfaces and therefore they possess analogous properties as NURBS surfaces, i.e. it is fast and numerically stable to generate points on the NURBS volumes, and computation of these points is invariant with respect to projective transformations (for more information see [6]).

## 2.1 NURBS volume of revolution

Without loss of generality, let us consider two NURBS curves  $\mathbf{c}(t)$  and  $\mathbf{c}'(t)$  lying in the plane  $xz$  with the same degree  $r$  and the same knot vector  $W = (w_0, \dots, w_{l+r+1})$  and determined by control points  $\mathbf{C}_k$  and  $\mathbf{C}'_k$ , where  $k = 0, \dots, l$  and  $l$  is the number of control points. We create control net of NURBS volume of revolution with the rotation axis coincident with the  $x$ -axis, such that we define points of annulus for each pair of points  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{C}'_k$  in  $yz$  plane. Annulus<sup>1</sup> is formed of two circles with radii  $C_{z,k}$  and  $C'_{z,k}$  ( $z$  coordinates of given points),

<sup>1</sup>In this case, we consider not only the planar case of annulus, but also a space one, i.e. it can be a part of the (truncated) cone or cylinder.

and the centers are  $(C_{x,k}, 0, 0)$  and  $(C'_{x,k}, 0, 0)$  ( $x$  coordinates of the points), i.e. for each  $k$  we determine control net

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}[C_{z,k}, (C_{x,k}, 0, 0)] \\ \mathbf{P}[C'_{z,k}, (C'_{x,k}, 0, 0)] \end{pmatrix},$$

where  $\mathbf{P}[R, \mathbf{S}]$  are control points of circle with radius  $R$  and centre  $\mathbf{S}$ . Control net has dimensions  $2 \times 9 \times (l+1)$  and the corresponding knot vectors are  $U = (0, 0, 1, 1)$  and  $V = (0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1)$  and  $W = (w_0 \dots, w_{l+r+1})$ .

## 2.2 B-spline/NURBS volume for given boundary

The second type of volume which occurs in the volumetric parameterization of Kaplan turbine is defined by six boundary surfaces (two surfaces lies on the spheres). The procedure of constructing the volume is divided into several steps:

1. determining surface for given boundary curves

(a) surfaces with boundary curves lying on the sphere:

- projection of boundary curves to the plane using stereographic projection,
- determining the remaining boundary curves (if it is necessary),
- compute internal points for the given boundary curves using 2D discrete Coons patch,
- projection of the patch back to the sphere,
- approximation of the patch on the sphere,

(b) surfaces with boundary curves not lying on the sphere: computation of 2D discrete Coons patch

2. the resulting hexahedron: compute 3D discrete Coons patch.

For more details about discrete Coons patch algorithms see [2, 3].

## 3 Segmentation of Kaplan turbine

In this section we present segmentation of Kaplan turbine and we analyze each part in the terms of B-spline/NURBS volume parameterization.

As it was mentioned in the introduction, Kaplan turbine was divided into several parts because it is not possible to describe the volumetric parameterization in one piece from the geometric point of view (the problem arises especially in parts where blades are situated). The first basic segmentation of Kaplan turbine is into two parts: blade canal and the draft tube. Volumetric parameterization of a draft tube has already been given in [5], but its volume parameterization was changed due to the sensitivity of isogeometric solver. Fig. 1 shows segmentation of a blade canal of a Kaplan turbine divided into four parts: entrance volume, part with guide vanes, the section between blades and part with runner blades.

Segments and their volumetric parameterizations are described in the following paragraphs.

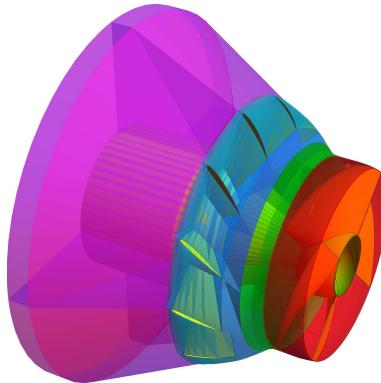


Figure 2: NURBS volumes of Kaplan turbine.

### 3.1 Entrance volume and the section between guide vanes and runner blades

Both segments are parametrized as NURBS volumes of revolution (described in section 2.1). In the first part generatrices are segments of lines and the control net has dimensions  $2 \times 9 \times 3$  and the degrees of NURBS volume are (1,2,1). In the section between guide vanes and runner blades generatrices are segments of lines and segment of circle, the control net has dimensions  $2 \times 9 \times 5$  and the degrees of NURBS volume are (1,2,2). Both segments have two similar knot vectors  $U = (0, 0, 1, 1)$ ,  $V = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1)$  and the third knot vector depends on generatrices of volume. For the entrance volume the last knot vector is  $W = (0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1)$  and for the section between guide vanes and runner blades the last knot vector is  $W = (0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1)$ .

### 3.2 Part with guide vanes (GV)

Since segment number two includes guide vanes (GV), it is necessary to divide it into several parts. Specifically, the part between the guide vanes, section between the end of the entrance volume and the leading edge of blades, volume after the part between the blades and because the blades have non-zero thickness it is required to describe also the segment after trailing edge of blades. All parts are determined as B-spline/NURBS volumes for given boundary, thus we apply algorithm described in section 2.2. Moreover, the situation is simplified to search only two boundary surfaces, because guide vanes are linear in the direction of blade's axis. The two boundary surfaces we are looking for lie on the spheres. For the *part between GV* we know the suction side of one blade and the pressure side of the other one. Remaining boundary curves are determined after projection of blade's curves to plane. Control net of B-spline volume has dimensions  $4 \times 8 \times 2$  and knot vectors are  $U = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ ,

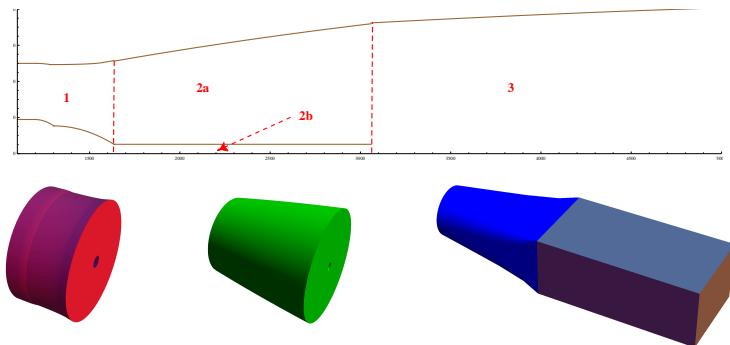


Figure 3: Top: Segmentatation of draft tube; Bottom: Part with hub (left), cone part (middle) and transition to cuboid part (right).

$V = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$ , that depends on parameterization of blade in the direction of flow, and  $W = (0, 0, 1, 1)$ , which is in the direction of blade's axis. The construction of *part in front of GV* and *part behind GV* is the same. For each surface lying on the sphere we know two boundary curves (from the volume between GV and the entrance volume or the volume of segment no. 3). The remaining curves for part in front of GV are determined such that we search intersection point with the boundary of entrance volume in the direction of camber mean-line, for part behind GV we search intersection point with segment no. 3 and the direction of trailing edge. For the *part behind trailing edge of blade* we know all boundary curves. These three volumes have the same knot vectors  $U = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $V = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ ,  $W = (0, 0, 1, 1)$ .

### 3.3 Part with runner blades

Determination of volumetric parameterization of segment no. 4 is analogous to the segment no. 2 described in the previous section 3.2, but there are two differences. The first one is an additional volume formed between the housing of turbine and the upper part of runner blades, since runner blades are truncated by sphere and the housing of turbine is a part of the cylinder. The second difference is caused by the fact that runner blade is cubic in the direction of blade's axis (not linear as in the case of guide vanes), therefore it is necessary to find a parameterization of the six surfaces forming the boundary of the volume.

All NURBS volumes of Kaplan turbine segments are shown in Fig. 2.

### 3.4 Draft tube

In [5] the first proposal of volume parameterization of draft tube was presented. Since we have changed the parameterization of housing of turbine and we also found out that isogeometric solver is sensitive for singular points we had to re-

move singularity of volumetric parameterization of the draft tube. To avoid singularities we redistributed draft tube into three parts (see Fig. 3): part with hub, cone part, transition to cuboid part. First two parts are volume of revolutions (see subsection 2.1) and the third part remains the same as in the first proposal (see [5]).

## 4 Conclusion

In this paper, we studied parts of Kaplan turbine and especially we analyzed their volumetric parameterizations with the help of B-spline/NURBS volumes. We proposed segmentation of Kaplan turbine and we showed two methods for obtaining volumetric parameterizations. In the future, we plan to determine also a geometric model of Francis turbine together with its volume. These models will be used for fluid flow simulation via isogeometric analysis.

## Acknowledgements

Both authors were supported by Technology agency of the Czech Republic via the project TA03011157.

## References

- [1] P. Anděl, B. Bastl, K. Slabá: *Parameterizations of generalized NURBS volumes of revolution*. Engineering Mechanics, Vol. 19, pp. 293-306, 2012.
- [2] G. Farin, D. Hansford: *Discrete Coons patches*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 16, pp. 691-700, Elsevier, 1999.
- [3] X. Gang, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Analysis-suitable volume parameterization of multi-block computational domain in isogeometric applications*. Computer-Aided Design 45, pp. 395-404, 2012.
- [4] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs: *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
- [5] K. Michálková, B. Bastl: *A note on geometric modelling of water turbine parts*. In Proceedings of the 33rd conference on geometry and graphics, pp. 27-36, 2013, ISBN: 978-80-248-3251-7.
- [6] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communications. Springer, Berlin, 1997.
- [7] G. Xu, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Analysis-aware parameterization of computational domain*. Computer-Aided Design, Vol. 45, pp. 812-821, 2013.

# Geodesic lines and spheres, densest(?) geodesic ball packing in the new linear model of Nil geometry

Emil Molnár, Benedek Schultz

*Budapest University of Technology and Economics, Institute of Mathematics,  
Department of Geometry  
H-1521 Budapest, XI. Egry József street 1, H II. 22  
emolnar@math.bme.hu, schultz.benedek@gmail.com*

**Abstract.** Nil-geometry is derived from the famous Heisenberg matrix group. It is one of the 8 Thurston 3-geometries, having also an affine-projective interpretation, as the first author initiated with his colleagues. J. Szirmai found a top dense geodesic ball packing in Nil (of kissing number 14) with density 0.78... denser than the best Euclidean one with 0,74... with kissing number 12 in the famous Kepler conjecture. If we linearize Nil, i.e. its translation curves, as systematically made by K. Brodacewska in her dissertation, then - as a new result of the authors - the geodesic curve can explicitly be determined from the corresponding second order differential equation system. Geodesic spheres and balls can be attractively visualized using these results.

**Keywords:** Thurston geometries, Nil-space, Linear model, Ball packing problems

## 1 Basic notions of Nil geometry

Nil geometry can be derived from the famous real matrix group  $\mathbf{L}(\mathbf{R})$ , applied by Werner Heisenberg. The left (row-column) multiplication of Heisenberg matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & c+xb+z \\ 0 & 1 & b+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

defines "translations"  $\mathbf{L}(\mathbf{R}) = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$  on the points of  $\text{Nil} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbf{R}\}$ . These translations are not commutative in general.

The matrices  $\mathbf{K}(z) \triangleleft \mathbf{L}(\mathbf{R})$  of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (0, 0, z) \quad (2)$$

constitute the one parametric centre, i.e. each of its elements commutes with all elements of  $\mathbf{L}$ . The elements of  $\mathbf{K}$  are called *fibre translations*.

Nil geometry can be projectively interpreted by the "right translations", as the following matrix formula shows, according to (1)

$$(1; a, b, c) \longrightarrow (1; a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1; x+a, y+b, z+bx+c). \quad (3)$$

The infinitesimal arc-length-square in any point of **Nil** can be obtained by pull-back translation into the origin:

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 + (-xdy + dz)^2 = \\ (dx)^2 + (1+x^2)(dy)^2 - 2x(dy)(dz) + (dz)^2 =: (ds)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

defining the Riemann metric tensor  $g$  and its inverse:

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

The above translation group **L** can be extended to a larger group **G**, preserving the fibering and the Riemann metric. That will be the (orientation preserving) isometry group of **Nil**.

In [3] E. Molnár has shown that a rotation through angle  $\omega$  about the  $z$ -axis at the origin, as isometry of **Nil**, will be a quadratic mapping of  $x, y$  into the  $z$ -image  $\bar{z}$  - in the original model - as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \mathbf{r}(O, \omega) : (1; x, y, z) \rightarrow (1; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \\ \bar{x} = x \cos \omega - y \sin \omega, \quad \bar{y} = x \sin \omega + y \cos \omega, \\ \bar{z} = z - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}(x^2 - y^2)\sin 2\omega + \frac{1}{2}xy \cos 2\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

This rotation formula  $\mathcal{R}$ , however, is conjugate by the quadratic mapping  $\mathcal{M}$  to the linear rotation  $\Omega$  in (7) as follows

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \quad (1; x, y, z) \xrightarrow{\mathcal{M}} (1; x', y', z') = (1; x, y, z - \frac{1}{2}xy) \text{ to} \\ \Omega : \quad (1; x', y', z') \xrightarrow{\Omega} (1; x'', y'', z'') = (1; x', y', z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{with } \mathcal{M}^{-1} : (1; x'', y'', z'') \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} (1; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1; x'', y'', z'' + \frac{1}{2}x''y''). \end{aligned} \quad (7)$$

## 1.1 Geodesic curves and spheres

The geodesic curves of **Nil** geometry are generally defined as having locally minimal arc length between their any two (near enough) points. The equation systems of the parametrized geodesic curves  $g(x(t), y(t), z(t))$  in our model can be determined by the general theory of Riemann geometry: We can assume, that the starting point of a geodesic curve is the origin because we can transform a curve into an arbitrary starting point by translation;

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = z(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = c \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = c \sin \alpha, \\ \dot{z}(0) = w; \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi. \end{aligned}$$

The arc length parameter  $s$  is introduced by

$$s = \sqrt{c^2 + w^2} \cdot t, \text{ where } w = \sin \theta, \quad c = \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

i.e. unit velocity can be assumed.

**Remark 1.1** *Thus we have harmonized the scales along the coordinate axes.*

The equation system of a helix-like geodesic curve  $g(x(t), y(t), z(t))$  with  $0 < |w| < 1$  is complicated enough in our original model:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2c}{w} \sin \frac{wt}{2} \cos \left( \frac{wt}{2} + \alpha \right), \quad y(t) = \frac{2c}{w} \sin \frac{wt}{2} \sin \left( \frac{wt}{2} + \alpha \right), \\ z(t) &= wt \cdot \left\{ 1 + \frac{c^2}{2w^2} \left[ \left( 1 - \frac{\sin(2wt + 2\alpha) - \sin 2\alpha}{2wt} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( 1 - \frac{\sin(2wt)}{wt} \right) - \left( 1 - \frac{\sin(wt + 2\alpha) - \sin 2\alpha}{2wt} \right) \right] \right\} = \\ &= wt \cdot \left\{ 1 + \frac{c^2}{2w^2} \left[ \left( 1 - \frac{\sin(wt)}{wt} \right) + \left( \frac{1 - \cos(2wt)}{wt} \right) \sin(wt + 2\alpha) \right] \right\}. \end{aligned}$$

In the cases  $w = 0$  the geodesic curve is the following:

$$x(t) = c \cdot t \cos \alpha, \quad y(t) = c \cdot t \sin \alpha, \quad z(t) = \frac{1}{2} c^2 \cdot t^2 \cos \alpha \sin \alpha. \quad (8)$$

The cases  $|w| = 1$  are trivial:  $(x, y) = (0, 0)$ ,  $z = w \cdot t$ .

**Definition 1.2** *The distance  $d(P_1, P_2)$  between the points  $P_1$  and  $P_2$  is defined by arc length of the geodesic curve from  $P_1$  to  $P_2$ .*

In the work [10] the following definitions have been introduced:

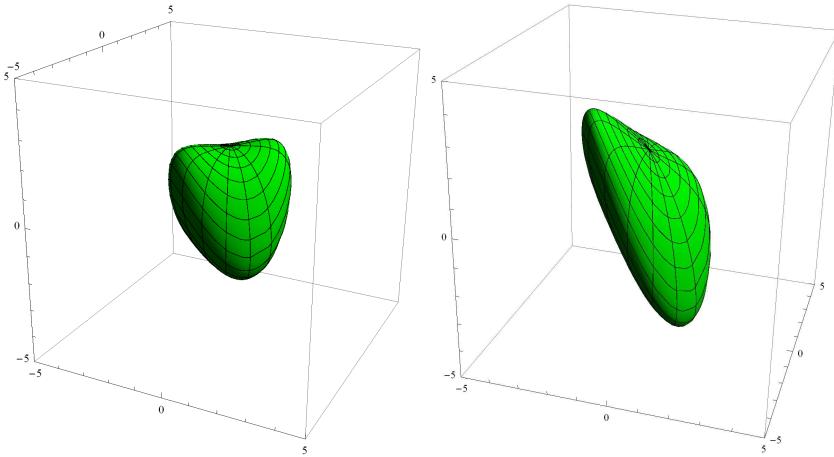


Figure 1: Geodesic sphere in our original model

**Definition 1.3** *The geodesic sphere of radius  $R$  with centre at the point  $P_1$  is defined as the set of all points  $P_2$  in the space with the condition  $d(P_1, P_2) = R$ . Moreover, we require that the geodesic sphere is a simply connected surface without self-intersection. in the Nil space.*

In [10] J. Szirmai has obtained the following theorems:

**Theorem 1.4** *The geodesic sphere and ball of radius  $R$  exists in the Nil space if and only if  $R \in [0, 2\pi]$ .*

**Theorem 1.5** *The geodesic Nil ball  $B(S(R))$  is convex in affine-Euclidean sense in our original model if and only if  $R \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .*

## 2 The new linear model of Nil-geometry

In her thesis [1] K. Brodaczewska proved the following theorem:

**Theorem 2.1** *Let the Nil-geometry be given with the original model. The  $\mathcal{M}$  diffeomorphism (see (7)) gives a new model of Nil with the following metric tensor:*

$$g := \begin{pmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{1}{4}xy & \frac{y}{2} \\ -\frac{1}{4}xy & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

This new model of Nil-space linearizes the so called translation curves of Nil (by a linear differential equation see: [12]). For this reason we will call this model the "linear model" of Nil-geometry.

The old translation formula 3 also changes to:

$$(1; a, b, c) \rightarrow (1; a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

In a similar fashion we can compute the **Nil**-rotation about the  $z$ -axis by a linear way:

$$(1; a, b, c) \rightarrow (1; a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which is a Euclidean rotation about the  $z$ -axis.

## 2.1 Geodesic curves in the linear model

In the following our aim is to determine the geodesic curves of **Nil** in the linear model. These can of course be computed by the  $\mathcal{M}$  quadratic mapping on the curve of the original model, but solving the new geodesic differential equation, we get the same curve.

Let us use cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$  in **Nil**-space:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z$$

The invariant Riemann arc-length-square is by pull-back on the base of (10) now:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + \left[ \frac{1}{2}(dx \cdot y - dy \cdot x) + dz \right]^2 = \\ &= (dr)^2 + (d\theta)^2 r^2 + \left[ dz - \frac{1}{2}r^2 d\theta \right]^2 = \\ &= (dr, d\theta, dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + \frac{1}{4}r^4 & -\frac{1}{2}r^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}r^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ dz \end{pmatrix} = du^i g_{ij} du^j \end{aligned} \quad (11)$$

We know, that the Christoffel symbol is:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right)$$

For the differential equation of geodesics  $\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$  holds:

$$1 = \dot{r}\dot{r} + rr\dot{\theta}\dot{\theta} + \left[ \dot{z} - \frac{1}{2}rr\dot{\theta} \right]^2$$

i.e. unit velocity is assumed. We get the differential equation of the geodesic line:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} - \left( r + \frac{1}{2}r^3 \right) \dot{\theta}\dot{\theta} + r\dot{\theta}\dot{z} \\ 0 &= \ddot{\theta} + \left( \frac{1}{2}r + \frac{2}{r} \right) \dot{r}\dot{\theta} - \frac{2}{r}\dot{r}\dot{z} \\ 0 &= \ddot{z} + \frac{1}{4}r^3\dot{r}\dot{\theta} - \frac{1}{2}r\dot{r}\dot{z} \end{aligned} \quad (12)$$

with initial conditions:

$$\begin{aligned} r(0) &= 0, \theta(0) = u, z(0) = 0 \\ \dot{r}(0) &= \cos v, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{z}(0) = \sin v \end{aligned} \quad (13)$$

By solving this equation with the usual differential equation methods, the result is:

$$\begin{aligned} r(s) &= 2 \cot v \cdot \sin \left( \frac{1}{2}s \cdot \sin v \right) \\ \theta(s) &= \frac{1}{2}s \cdot \sin v + u \\ z(s) &= s \cdot \sin v - \frac{1}{2} \cos^2 v \left[ \frac{s \cdot \sin v - \sin(s \cdot \sin v)}{\sin^2 v} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

where  $-\pi < u \leq \pi$  and  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ . Or, substituting into  $t$  the radius  $R$ , we get the equation of geodesic sphere with longitude  $u$  and altitude  $v$ :

$$\begin{aligned} X(t) &= \cos(u + \frac{1}{2}t \sin v) \cdot 2 \cot v \cdot \sin(\frac{1}{2}t \sin v), \\ Y(t) &= \sin(u + \frac{1}{2}t \sin v) \cdot 2 \cot v \cdot \sin(\frac{1}{2}t \sin v), \\ Z(t) &= t \sin v + \frac{1}{2} \cot^2 v (t \sin v - \sin(t \sin v)), \end{aligned} \quad (15)$$

where  $-\pi < u \leq \pi$  and  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ .

## 2.2 Geodesic ball packings and their Dirichlet-Voronoi cells in the linear model

In this subsection we will visualize the densest lattice-like geodesic ball packing and its Dirichlet-Voronoi cell (see [10]). Let  $\Gamma$  be a crystallo-

graphic group of **Nil**, i.e. with a discrete 3-dimensional group of its translations.

**Definition 2.2** *We say that the point set*

$$\mathcal{D}(K) = \{P \in \mathbf{Nil} : d(K, P) \leq d(K^g, P) \text{ for all } g \in \Gamma\}$$

*is the Dirichlet–Voronoi cell (D-V cell) to  $\Gamma$  around the kernel point  $K \in \mathbf{Nil}$ .*

**Definition 2.3** *We say that*

$$\Gamma_P = \{g \in \Gamma : P^g = P\}$$

*is the stabilizer subgroup of  $P \in \mathbf{Nil}$  in  $\Gamma$ .*

Using these preliminary definitions we can now define the ball packing to a crystallographic group of **Nil**.

**Definition 2.4** *Assume that the stabilizer  $\Gamma_K = \mathbf{I}$  the identity, i.e.  $\Gamma$  acts simply transitively on the  $\Gamma$ -orbit of  $K \in \mathbf{Nil}$ . Then let  $B_K$  denote the greatest ball of centre  $K$  inside the D-V cell  $\mathcal{D}(K)$ , moreover let  $\rho(K)$  denote the radius of  $B_K$ . It is easy to see that*

$$\rho(K) = \min_{g \in \Gamma \setminus \mathbf{I}} \frac{1}{2} d(K, K^g).$$

*If the stabilizer  $\Gamma_K > \mathbf{I}$  then  $\Gamma$  acts multiply transitively on the  $\Gamma$ -orbit of  $K \in X$ . Then the greatest ball radius of  $\mathcal{B}_K$  is*

$$\rho(K) = \min_{g \in \Gamma \setminus \Gamma_K} \frac{1}{2} d(K, K^g)$$

*where  $K$  belongs to a 0-, 1- or 2-dimensional region of  $X$  (vertices, axes, reflection planes).*

**Definition 2.5** *The density of ball packing  $\mathcal{B}_K^\Gamma$  is*

$$\delta(K) = \frac{\text{Vol}(B_K)}{\text{Vol}\mathcal{D}(K)}.$$

In [10] J. Szirmai determined the seemingly densest lattice-like ball packing in **Nil**. Figure 2 shows this ball packing and a Dirichlet–Voronoi cell in the linear model.

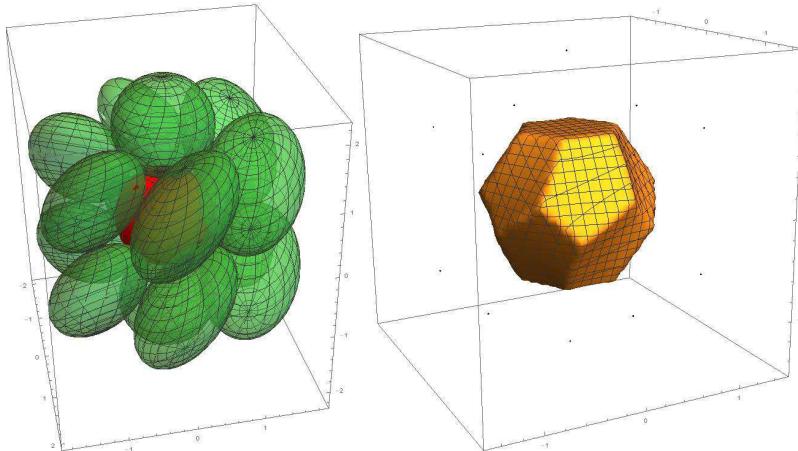


Figure 2: The densest lattice-like geodesic ball packing in Nil and its Dirichlet-Voronoi cell in the linear model (with the new geodesic spheres)

### 3 Conclusion

As a summary we newly formulate the theorem from [3].

**Theorem 3.1 (E. Molnár [3])** (1) Any group of Nil isometries, containing a 3-dimensional translation lattice, is isomorphic in the new model to an affine group of the affine (or Euclidean) space  $\mathbf{A}^3 = \mathbf{E}^3$  whose projection onto the  $(x,y)$  plane is an isometry group of  $\mathbf{E}^2$ . Such an affine group preserves a plane  $\rightarrow$  point null-polarity (see [7]).

(2) Of course, the involutive line reflection about the  $y$  axis

$$(1; x, y, z) \rightarrow (1; -x, y, -z),$$

preserving the Riemann metric, and its conjugates by the above isometries in (1) (those of the identity component) are also Nil-isometries. Orientation reversing Nil-isometry does not exist.

### References

- [1] K. BRODACZEWSKA: Elementargeometrie in Nil, *Dissertation Dr. rer. nat.*, Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden (2014).
- [2] Molnár, E. The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beitr. Algebra Geom.*, **38** (1997) No. 2, 261–288.
- [3] Molnár, E. On projective models of Thurston geometries, some relevant notes on Nil orbifolds and manifolds. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, <http://semr.math.nsc.ru>

- [4] Molnár, E. – Szilágyi, B. Translation curves and their spheres in homogeneous geometries. *Publ. Math. Debrecen.*, **78/2** (2011), 327–346.
- [5] Molnár, E. – Szirmai, J. *On Nil crystallography*, Symmetry: Culture and Science, **17/1-2** (2006), 55–74.
- [6] Molnár, E. – Szirmai, J. Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries. *Symmetry Cult. Sci.*, **21/1-3** (2010), 87-117.
- [7] Molnar, E. - Prok, I. - Szirmai, J. The Euclidean visualization and projective modelling of the 8 Thurston geometries. *Studies of the University of Zilina*, **27/1** (2015) 35–62.
- [8] J. Pallagi, B. Schultz, J. Szirmai *Equidistant surfaces in Nil space*, Studies of the University of Zilina, Mathematical Series, **25** (2011), 31–40.
- [9] Scott, P. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, **15** (1983) 401–487.
- [10] Szirmai, J. *The densest geodesic ball packing by a type of Nil lattices*, Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), **48** No. 2, (2007), 383–398.
- [11] Szirmai, J. The densest translation ball packing by fundamental lattices in **Sol** space. *Beitr. Algebra Geom.* **51** No. 2, (2010), 353–373.
- [12] Szirmai, J. Lattice-like translation ball packings in **Nil** space. *Publ. Math. Debrecen.*, **80/3-4** (2012), 427–440 DOI: 10.5486/PMD.2012.5117.
- [13] Szirmai, J. A candidate for the densest packing with equal balls in Thurston geometries, *Beitr. Algebra Geom.* **55/2**, (2014) 441–452, DOI:10.1007/s13366-013-0158-2.
- [14] Thurston, W. P. (and Levy, S. editor) *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, Vol.1 (1997).



# Pascal triangles and pyramid in the hyperbolic space

László Németh

*University of West Hungary, Institute of Mathematics  
Sopron, 9400, Ady E. u. 5.  
nemeth.laszlo@emk.nyme.hu*

**Abstract.** In this paper, we introduce a new generalization of Pascal's triangle. The new object is called the hyperbolic Pascal triangle since the mathematical background goes back to regular mosaics on the hyperbolic plane. Based on the hyperbolic regular cube mosaic in the hyperbolic space we define the hyperbolic Pascal pyramid. Then we investigate certain quantitative properties such as the number, the sum, and the alternating sum of the elements of a row.

**Keywords:** Pascal triangle, Pascal pyramid, regular mosaics on hyperbolic plane, cube mosaic in hyperbolic space.

## 1 Hyperbolic Pascal triangles

There are several approaches to generalize the Pascal's arithmetic triangle (see, for instance [3, 4]). A new type of variations of it is based on the hyperbolic regular mosaics denoted by Schläfli's symbol  $\{p, q\}$ , where  $(p - 2)(q - 2) > 4$  ([7]). Each regular mosaic induces a so called hyperbolic Pascal triangle (see [2]), following and generalizing the connection between the classical Pascal's triangle and the Euclidean regular square mosaic  $\{4, 4\}$ . For more details see [2], but here we also collect some necessary information.

The hyperbolic Pascal triangles based on the mosaic  $\{p, q\}$  can be figured as a digraph, where the vertices and the edges are the vertices and the edges of a well defined part of the lattice  $\{p, q\}$ , respectively, and the vertices possess a value that give the number of the different shortest paths from the base vertex. Figure 1 illustrates the hyperbolic Pascal triangle when  $\{p, q\} = \{4, 6\}$ . Here the base vertex has two edges, the leftmost and the rightmost vertices have three, the others have five edges. The quadrilateral shape cells surrounded by the appropriate edges correspond to the squares in the mosaic. Apart from the winger elements, certain vertices (called "Type A") have 2 ascendants and 3 descendants, while the others ("Type B") have 1 ascendant and 4 descendants. In the figures we denote the vertices type A by red circles and the vertices type B by cyan diamonds, further the wingers by white diamonds. The vertices which are  $n$ -edge-long far from the base vertex are in row  $n$ . The general method of preparing the graph is the following: we go along the vertices of the  $j^{\text{th}}$  row, according to the type of the elements (winger, A, B), we draw the appropriate number of edges downwards (2, 3, 4, respectively). Neighbour edges of two neighbour vertices of the  $j^{\text{th}}$  row meet in the

$(j+1)^{\text{th}}$  row, constructing a new vertex type  $A$ . The other descendants of row  $j$  have type  $B$  in row  $j+1$ . In the sequel,  $|_k^n$  denotes the  $k^{\text{th}}$  element in row  $n$ , which is either the sum of the values of its two ascendants or the value of its unique descendant. We note, that the hyperbolic Pascal triangles has the property of vertical symmetry.

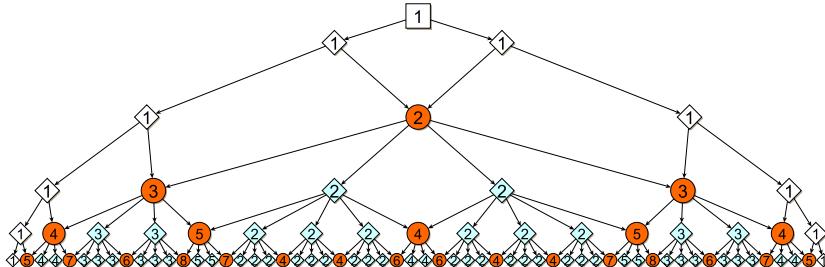


Figure 1: Hyperbolic Pascal triangle linked to  $\{4, 6\}$  up to row 5

In studying the quantitative properties of the hyperbolic Pascal triangle  $\{4, q\}$ , first we determine the number of the elements of the  $n^{\text{th}}$  row of the graph. Denote by  $a_n$  and  $b_n$  the number of vertices of type  $A$  and  $B$ , respectively, further let  $s_n = a_n + b_n + 2$ , which gives the total number of the vertices of row  $n \geq 1$ . Recall, that  $q \geq 5$ .

**Theorem 1.** *The three sequences  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  and  $\{s_n\}$  can be described by the same ternary homogeneous recurrence relation*

$$x_n = (q-1)x_{n-1} - (q-1)x_{n-2} + x_{n-3} \quad (n \geq 4),$$

the initial values are  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = q-4, s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = q$ .

Let  $\hat{a}_n$ ,  $\hat{b}_n$  and  $\hat{s}_n$  denote the sum of type  $A$ , type  $B$  and all elements of the  $n^{\text{th}}$  row, respectively. We will justify the following statements.

**Theorem 2.** *The three sequences  $\{\hat{a}_n\}$ ,  $\{\hat{b}_n\}$  and  $\{\hat{s}_n\}$  can be described by the same ternary homogenous recurrence relation*

$$x_n = qx_{n-1} - (q+1)x_{n-2} + 2x_{n-3} \quad (n \geq 4),$$

the initial values are  $\hat{a}_1 = 0, \hat{a}_2 = 2, \hat{a}_3 = 6, \hat{b}_1 = 0, \hat{b}_2 = 0, \hat{b}_3 = 2(q-4), \hat{s}_1 = 2, \hat{s}_2 = 4, \hat{s}_3 = 2q$ .

Let  $\tilde{s}_n$  be the alternating sum of elements of the hyperbolic Pascal triangles (starting with positive coefficient) in row  $n$ , and we distinguish the even and odd cases (see [6]).

**Theorem 3.** *Let  $q$  be even. Then*

$$\tilde{s}_n = \sum_{i=0}^{s_n-1} (-1)^i \binom{n}{i} = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 2t+1, \\ -2(5-q)^{t-1} + 2, & \text{if } n = 2t, \end{cases} \quad \begin{matrix} n \geq 1, \\ n \geq 2, \end{matrix}$$

hold, further  $\tilde{s}_0 = 1$ .

**Theorem 4.** Let  $q \geq 5$  be odd. Then  $\tilde{s}_0 = 1$ , further

$$\tilde{s}_n = \sum_{i=0}^{s_n-1} (-1)^i \binom{n}{i} = \begin{cases} 0, & \text{if } n = 3t+1, \quad n \geq 1, \\ (-2)^t (q-5)^{t-1} + 2, & \text{if } n = 3t-1, \quad n \geq n_1, \\ 2(-2)^t (q-5)^{t-1} + 2, & \text{if } n = 3t, \quad n \geq n_2, \end{cases}$$

where  $(n_1, n_2) = (2, 3)$  and  $(5, 6)$  if  $n > 5$  and  $n = 5$ , respectively. In the latter case  $\tilde{s}_2 = 0$ ,  $\tilde{s}_3 = -2$ .

Along paths of the hyperbolic Pascal triangle  $\{4, 5\}$  we can find some well-known sequences for example the Fibonacci and the Pell sequence (see Figure 2). Generally, we can prove Theorem 5.

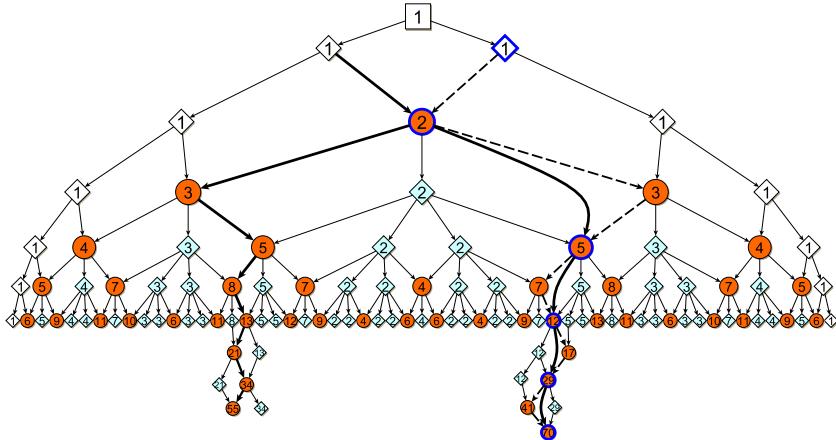


Figure 2: Fibonacci and Pell sequences in the hyperbolic Pascal triangle  $\{4, 5\}$

**Theorem 5.** Let  $\eta$ , and  $f_0 < f_1$  denote positive integers with  $\gcd(f_0, f_1) = 1$ . Further let  $\{f_n\}$  denote a binary recurrence sequence given by

$$f_n = \eta f_{n-1} \pm f_{n-2}, \quad (n \geq 2).$$

The values  $f_0$  and  $f_1$  appear next to each other in a suitable row of the Pascal triangle, such that the type of  $f_1$  is A. Then all elements of the sequence are descendants of the vertex labelled by  $f_1$ , all have type A.

## 2 Hyperbolic Pascal pyramid

The 3-dimensional analogue of the original Pascal's triangle is the well-known Pascal's pyramid or more precisely Pascal's tetrahedron (left part in Figure 3 or [4]). Its layers are triangles and the numbers along the three edges of the  $n^{\text{th}}$  layer are the numbers of the  $n^{\text{th}}$  line of Pascal's triangle. Each number inside in any layers is the sum of the three adjacent numbers in the layer above.

We can defined a hyperbolic Pascal pyramid (right part in Figure 3) in the hyperbolic space based on the hyperbolic regular cube mosaic (cubic honeycomb) with Schläfli's symbol  $\{4, 3, 5\}$  generalised to hyperbolic Pascal triangles and classical Pascal's pyramid which is based on the Euclidean regular cube mosaic  $\{4, 3, 4\}$  (see [5]).

We denote the sums of the vertices  $A, B, C, D$  and  $E$  in level  $i$  by  $a_i, b_i, c_i, d_i$  and  $e_i$ , respectively.

**Theorem 6.** *The growing of the numbers of the different types of the vertices are described by the system of linear inhomogeneous recurrence sequences ( $n \geq 1$ )*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n + 3, \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n, \\ c_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + c_n + \frac{2}{3}d_n, \\ d_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2}c_n + 2d_n + \frac{5}{2}e_n, \\ e_{n+1} &= 3c_n + 4d_n + 6e_n, \end{aligned}$$

with zero initial values.

Denote respectively  $\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n$  and  $\hat{e}_n$  the sums of the values of vertices type  $A, B, C, D$  and  $E$  on level  $n$ , and let  $\hat{s}_n$  be the sum of all the values.

**Theorem 7.** *If  $n \geq 1$ , then*

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n+1} &= 2\hat{a}_n + 2\hat{b}_n + 6, \\ \hat{b}_{n+1} &= \hat{a}_n + 2\hat{b}_n, \\ \hat{c}_{n+1} &= \hat{a}_n + 3\hat{c}_n + 2d_n, \\ \hat{d}_{n+1} &= \hat{b}_n + 3\hat{c}_n + 4\hat{d}_n + 5\hat{e}_n, \\ \hat{e}_{n+1} &= 3\hat{c}_n + 4\hat{d}_n + 6\hat{e}_n \end{aligned}$$

with zero initial values.

Figure 4 show the growing from the level 4 to the level 5 in the hyperbolic Pascal pyramid. The colours and shapes of different types of the

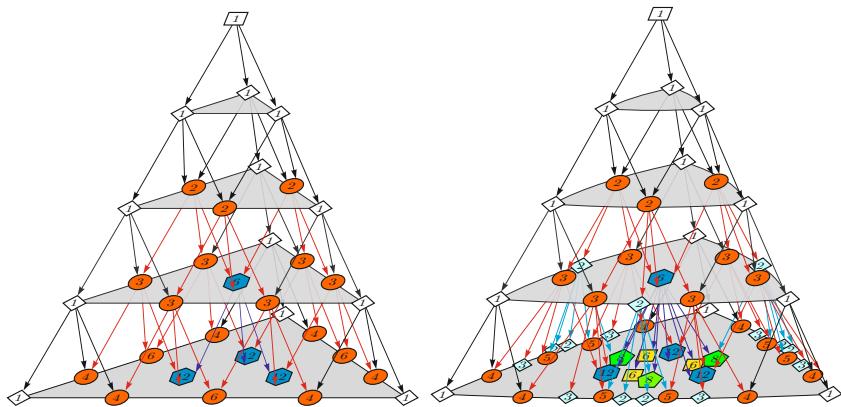


Figure 3: Euclidean and hyperbolic Pascal pyramid

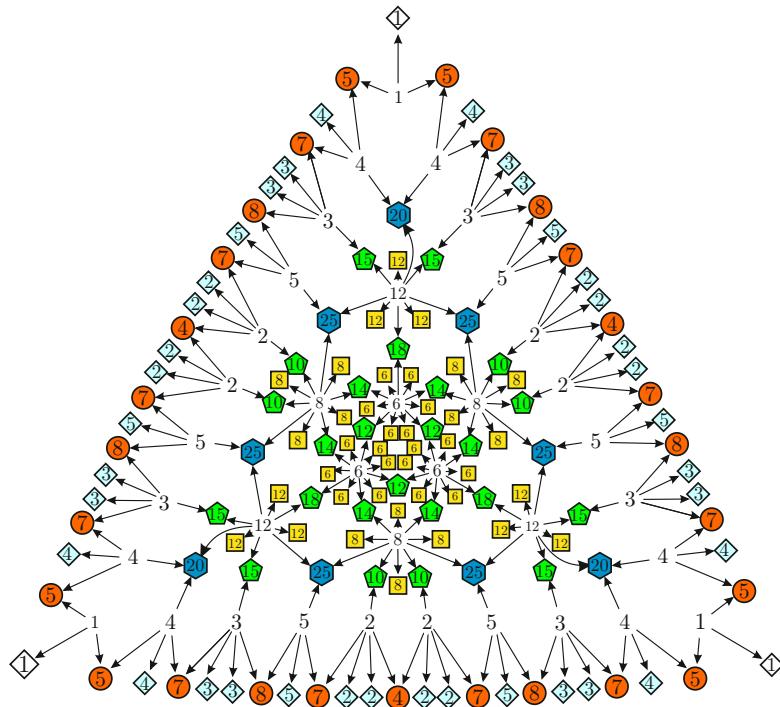


Figure 4: Connection between levels four and five in hyperbolic Pascal pyramid

vertices are different. The numbers without colouring and shapes refer to vertices in the lower level. The graphs growing from a level to the new one contain graph-cycle with six nodes. These graph-cycles figure the convex hulls of the parallel projections of the cubes from the mosaic, where the direction of the projection is not parallel to any edges of the cubes.

## References

- [1] M. Ahmia, L. Szalay: *On the weighted sums associated to rays in generalized Pascal triangle*, submitted.
- [2] H. Belbachir, L. Németh, L. Szalay: *Hyperbolic Pascal triangles*, Applied Mathematics and Computation, to appear (arXiv:1503.02569).
- [3] H. Belbachir, L. Szalay: On the arithmetic triangles, Šiauliai Math. Sem., **9** (17) (2014), 15-26.
- [4] B. A. Bondarenko: *Generalized Pascal triangles and pyramids, their fractals, graphs, and applications*. Translated from the Russian by Bollinger, R. C. (English) Santa Clara, CA: The Fibonacci Association, vii, 253 p. (1993). [www.fq.math.ca/pascal.html](http://www.fq.math.ca/pascal.html).
- [5] L. Németh: *Hyperbolic Pascal pyramid*, submitted.
- [6] L. Németh, L. Szalay: *Alternating sums in hyperbolic Pascal triangles*, submitted.
- [7] H. S. M. Coxeter: *Regular honeycombs in hyperbolic space*, Proc. Int. Congress Math., Amsterdam, Vol. III. (1954), 155-169.

# Properties of the cubic surface related to Simson–Wallace theorem

Pavel Pech

*University of South Bohemia, České Budějovice*

*pech@pf.jcu.cz*

**Abstract.** In the text properties of a cubic surface which is related to the well-known Simson–Wallace theorem are presented. Given a skew quadrilateral then the locus of the point whose orthogonal projections onto the sides of the quadrilateral are coplanar is a cubic surface. Properties of this locus such as decomposability, structure of lines on the surface and the existence of singular cases are investigated using computer aided analytical method.

**Keywords:** Simson–Wallace theorem, skew quadrilateral, cubic surface.

## 1 Introduction

The well-known Simson–Wallace theorem reads:

*If  $P$  is a point in the circumcircle of a triangle  $ABC$  then orthogonal projections of  $P$  onto the sides of  $ABC$  are collinear, Fig. 1.*

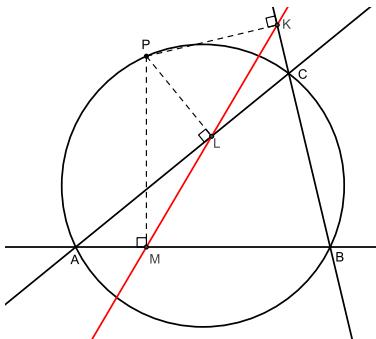


Figure 1: Simson–Wallace theorem — points  $K, L, M$  are collinear

A generalization which is ascribed to J. D. Gergonne is as follows:

*If  $P$  is a point of a circle which is concentric with the circumcircle of a triangle  $ABC$  then orthogonal projections of  $P$  onto the sides of  $ABC$  form a triangle with a constant area.*

If the area is zero we get the classical Simson–Wallace theorem.

There are several generalizations of the SW theorem on a tetrahedron. For the following generalization on a tetrahedron see [6, 1, 3]:

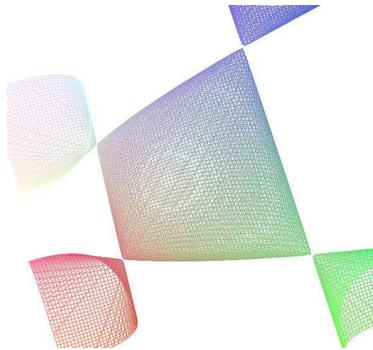


Figure 2: Cayley cubic  $4pqr - (p+q+r-1)^2 = 0$  for a regular tetrahedron

Let  $K, L, M, N$  be orthogonal projections of an arbitrary point  $P$  to the faces  $BCD, ACD, ABD, ABC$  of a tetrahedron  $ABCD$ . Let  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (a, 0, 0)$ ,  $C = (b, c, 0)$  and  $D = (d, e, f)$ . Then the locus of the point  $P = (p, q, r)$  such that the tetrahedron  $KLMN$  has a constant volume  $s$  is the cubic surface

$$F := ac^2f^3G + sQ = 0, \quad (1)$$

where

$$G = c^2f^2p^2q + cf(e^2 + f^2 - ce)p^2r + cf^2(a - 2b)pq^2 + cf^2(a - 2d)pr^2 + 2cef(b - d)pqr + b(b - a)f^2q^3 + f(be(a - b) + cd(d - a) + cf^2)q^2r + f^2(b^2 - ab + c^2 - 2ce)qr^2 + (be(a - b) + cd(d - a) + ce(e - c))fr^3 - ac^2f^2pq + acf(ce - e^2 - f^2)pr + abcfc^2q^2 + (a(c^2d - 2bce + be^2) - (cd - be)^2 + f^2(ab - b^2 - c^2))fqr + (ce^2(ab + ad - 2bd) + c^2de(d - a) + be^3(b - a) + f^2(a(cd - be) + e(b^2 + c^2)))r^2$$

and

$$Q = 6(e^2 + f^2)((cd - be)^2 + f^2(b^2 + c^2))((c(a - d) - e(a - b))^2 + f^2((a - b)^2 + c^2)).$$

For  $s = 0$  we obtain the famous Cayley cubic, with four singular points at the vertices of the corresponding tetrahedron  $ABCD$ , Fig. 2.

## 2 Extension on skew quadrilaterals

The following is a generalization of the Simson–Wallace theorem on skew quadrilaterals [1, 3, 4]:

**Theorem 1:** Let  $K, L, M, N$  be orthogonal projections of a point  $P$  onto the sides  $AB, BC, CD, AD$  of a skew quadrilateral  $ABCD$  respectively. Let  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (a, 0, 0)$ ,  $C = (b, c, 0)$  and  $D = (d, e, f)$ . Then the

locus of  $P = (p, q, r)$  such that the tetrahedron  $KLMN$  has a constant volume  $s$  is a cubic surface  $F$  in (3).

Outline of the proof [4]: Suppose that  $acf \neq 0$  since otherwise the quadrilateral is planar. Denote  $K = (k_1, 0, 0)$ ,  $L = (l_1, l_2, 0)$ ,  $M = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $N = (n_1, n_2, n_3)$  and  $P = (p, q, r)$ . Then

$$PK \perp AB \Leftrightarrow h_1 := a(p - k_1) = 0,$$

$$L \in BC \Leftrightarrow h_2 := l_2(b - a) - c(l_1 - a) = 0,$$

$$PL \perp BC \Leftrightarrow h_3 := (p - l_1)(b - a) + c(q - l_2) = 0,$$

$$M \in CD \Leftrightarrow h_4 := (d - b)(m_2 - c) - (e - c)(m_1 - b) = 0,$$

$$h_5 := (e - c)m_3 - (m_2 - c)f = 0, h_6 := (m_1 - b)f - m_3(d - b) = 0,$$

$$PM \perp CD \Leftrightarrow h_7 := (p - m_1)(d - b) + (q - m_2)(e - c) + (r - m_3)f = 0,$$

$$N \in DA \Leftrightarrow h_8 := dn_2 - en_1 = 0, h_9 := dn_3 - fn_1 = 0,$$

$$h_{10} := fn_2 - en_3 = 0,$$

$$PN \perp DA \Leftrightarrow h_{11} := (p - n_1)d + (q - n_2)e + (r - n_3)f = 0,$$

Volume of  $KLMN = s \Leftrightarrow$

$$h_{12} := \begin{vmatrix} k_1, & 0, & 0, & 1 \\ l_1, & l_2, & 0 & 1 \\ m_1, & m_2, & m_3, & 1 \\ n_1, & n_2, & n_3, & 1 \end{vmatrix} - 6s = 0. \quad (2)$$

Elimination of  $k_1, \dots, n_3$  in the system  $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_{12} = 0$  yields the equation<sup>1</sup>

$$F := cfH + sR, \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} H = & p^3(c^2d(d - a) - (be^2 + bf^2 - 2cde)(a - b)) - p^2qc(ae(c - e) + f^2(a - 2b)) - p^2rcf(ac - 2cd - 2e(a - b)) + pq^2(c^2(d^2 + f^2 - ad) + e(2cd - be)(a - b)) + 2pqrf(cd - be)(a - b) - pr^2f^2(ab - b^2 - c^2) - q^3ace(c - e) - q^2racf(c - 2e) + qr^2acf^2 + p^2(cd(a^2(c - 2e) + e(ab + b^2 + c^2)) + (e^2 + f^2)(ab + b^2 + c^2)(a - b) - c(e^2 + f^2 + d^2)(cd + ae - be)) + pq(cd(d - a)(ab - b^2 - c^2 - ad + bd) - de(a - b)(b^2 + c^2) + a^2ce(c - e) - cf^2(ab + b^2 + c^2 - a^2) + (a - b)((e^2 + f^2)(be - cd) + bd^2e)) - prf((ab - b^2 - c^2)(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2) - ac(2be + ac - 2cd - 2ae)) + q^2ae(c(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2) - (c - e)(ab - b^2 - c^2)) + qra(cf(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2) - f(c - 2e)(ab - b^2 - c^2)) + r^2af^2(ab - \end{aligned}$$

<sup>1</sup>We use software CoCoA which is freely distributed at <http://cocoa.dima.unige.it> and Epsilon library which is freely distributed at <http://www-calfor.lip6.fr/~wang/epsilon/>

$$b^2 - c^2) - pa(cd(c(ad - d^2 + ce) - (be + de)(a - b)) + (e^2 + f^2)((b^2 + c^2 - ce)(a - b) - c^2d)) + (qe + rf)a(bd + ce - d^2 - e^2 - f^2)(ab - b^2 - c^2)$$

and

$$R = 6(d^2 + e^2 + f^2)((b - d)^2 + (c - e)^2 + f^2)((a - b)^2 + c^2).$$

Hence  $P \in F$  is the necessary condition for the feet  $K, L, M, N$  to be coplanar.

Similarly, with the use of program Epsilon we prove that  $P \in F$  is the sufficient condition.  $\square$

We see that  $F = 0$  describes a cubic surface.

We can also proceed in another way to find  $H$ . Expressing  $k_1, \dots, n_3$  from the system above we get:

$$k_1 = p,$$

$$l_1 = (p(a - b)^2 + qc(b - a) + ac^2)/((a - b)^2 + c^2),$$

$$l_2 = (pc(b - a) + c^2q + ac(a - b))/((a - b)^2 + c^2),$$

$$m_1 = (p(b - d)^2 + q(b - d)(c - e) + rf(d - b) + c(cd - be - de) + b(e^2 + f^2))/((b - d)^2 + (c - e)^2 + f^2),$$

$$m_2 = (p(b - d)(c - e) + q(c - e)^2 + fr(e - c) - bcd + cd^2 + b^2e - bde + cf^2)/((b - d)^2 + (c - e)^2 + f^2),$$

$$m_3 = (pf(d - b) + qf(e - c) + f^2r + f(b^2 + c^2 - bd - ce))/((b - d)^2 + (c - e)^2 + f^2),$$

$$n_1 = (d^2p + deq + dfq)/(d^2 + e^2 + f^2),$$

$$n_2 = (dep + e^2q + efr)/(d^2 + e^2 + f^2),$$

$$n_3 = (dfp + efq + f^2r)/(d^2 + e^2 + f^2).$$

Substitution for  $k_1, l_1, l_2, \dots, n_3$  into

$$\begin{vmatrix} l_1 - k_1, & l_2, & 0 \\ m_1 - k_1, & m_2, & m_3 \\ n_1 - k_1, & n_2, & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

gives  $H$  in a shorter form

$$H = c(dp + eq + fr)(p(d - b) + (e - c)q + fr - (d - b)d - (e - c)e - f^2)(cp + q(a - b) - ac) + (p(b - a) + cq + a(a - b))((-p(e^2 + f^2) + qde + rdf)(p(d - b) + q(e - c) + rf + b^2 + c^2 - bd - ce) + (pd + qe + rf)(p((c - e)^2 + f^2) - q(b - d)(c - e) - rf(d - b) - c(cd - be - de) - b(e^2 + f^2))).$$

Later we will express  $H$  even in the more concise form. In the following we will consider the case  $s = 0$ .

**Example 1:** For a skew quadrilateral  $ABCD$  with  $a = 3, b = 2, c = 2, d = 1, e = 1, f = 1$  we get a cubic surface

$$4p^3 + 2p^2q + pq^2 + 3q^3 - pr^2 - 3qr^2 - 19p^2 - 7pq - 6q^2 - pr - 3qr + 3r^2 + 21p + 3q + 3r = 0, \text{ Fig. 3.}$$

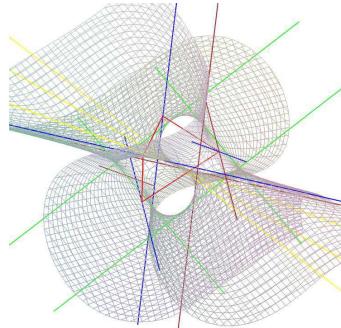


Figure 3: A cubic  $4p^3 + 2p^2q + pq^2 + 3q^3 - pr^2 - 3qr^2 - 19p^2 - 7pq - 6q^2 - pr - 3qr + 3r^2 + 21p + 3q + 3r = 0$

**Example 2:** For  $a = 1, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0, f = 2$  we get a cubic

$$2p^2q - 2pq^2 + p^2r + q^2r - 2pr^2 - 2qr^2 - 2p^2 + 3pr + 3qr + 2r^2 + 2p - 4r = 0,$$

with two nodes at the points  $(0, 1, 0)$  and  $(1, 0, 2)$ , Fig. 4.

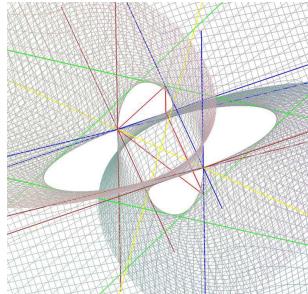


Figure 4: A cubic  $2p^2q - 2pq^2 + p^2r + q^2r - 2pr^2 - 2qr^2 - 2p^2 + 3pr + 3qr + 2r^2 + 2p - 4r = 0$

**Example 3:** For a skew quadrilateral  $ABCD$  with  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0$ ,  $e = 1$ ,  $f = 1$  we get a cubic surface

$$(pq - q^2 - pr - qr + q + r)(p + r - 1) = 0,$$

which decomposes into a plane and hyperboloid, Fig. 5. Note that two

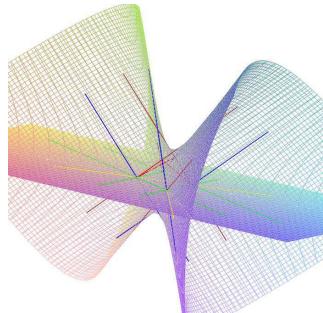


Figure 5: A cubic  $(pq - q^2 - pr - qr + q + r)(p + r - 1) = 0$

pairs of opposite sides of a corresponding quadrilateral  $ABCD$  are of equal lengths.

## 2.1 Properties of the locus

Cubic surfaces have been intensively studied by G. Salmon, A. Cayley, L. Schläfli and others since 1840. Even now new articles on this topic still appear.

In this section some properties of the cubic  $H$  which is associated with a skew quadrilateral  $ABCD$  are investigated.

Particularly the following properties of cubics for  $s = 0$  are studied:

- decomposability of the locus,
- structure of lines which lie on the cubic,
- existence of singular cases.

### 2.1.1 Decomposability

The next theorem is on decomposability of the locus  $H$  [4].

**Theorem 2:** *The cubic surface which is associate with a skew quadrilateral  $ABCD$  is decomposable iff two pairs of sides — either adjacent or opposite — of  $ABCD$  are of equal lengths  $p, q$ .*

*If  $p \neq q$  the cubic decomposes into a plane and a one-sheet hyperboloid, if  $p = q$ , i.e., if  $ABCD$  is equilateral, the cubic decomposes into three mutually orthogonal planes.*

In the next figures you see horizontal views of quadrilaterals  $ABCD$  when the corresponding cubic is decomposable.

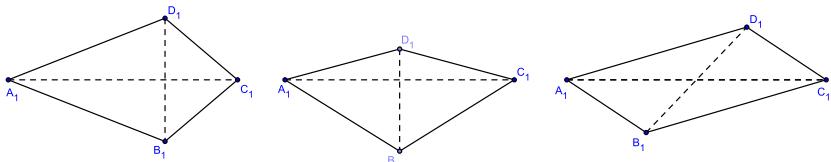


Figure 6: Horizontal views — two deltoids and a parallelogram

Horizontal views of  $ABCD$  onto the plane parallel to diagonals  $AC$  and  $BD$  — two deltoids and a parallelogram if  $p \neq q$ , Fig. 6.

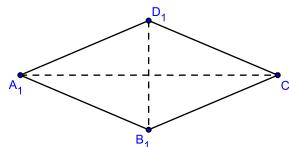


Figure 7: Rhombus — all sides of  $ABCD$  are of equal lengths

If  $p = q$  we get a rhombus, Fig. 7.

If two pairs of sides of  $ABCD$  either adjacent or opposite are of equal lengths then the cubic is decomposable by the theorem.

To prove that these are all the cases when the cubic is decomposable is more difficult. The proof is based on the properties of the cubic and a regulus of a quadric, which leads to the solution of the system of algebraic equations.

### 2.1.2 Structure of lines

The well-known Salmon–Cayley theorem states that a smooth cubic surface over algebraic closed field contains exactly 27 lines. The following issues are investigated:

- How many real lines lie on the cubic  $H$ ?
- What is the structure of lines?
- What is the number and the structure of tritangent planes?

- What are canonical forms of the cubic  $H$ ?<sup>2</sup>

Planes  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$  and  $A_8$  which are perpendicular to the sides of  $ABCD$  and pass through its vertices are crucial for investigation of the structure of lines on the cubic:

$$\begin{array}{ll} A_1 : & A_1 \perp DA, D \in A_1, \\ A_2 : & A_2 \perp DA, A \in A_2, \\ A_3 : & A_3 \perp CD, C \in A_3, \\ A_4 : & A_4 \perp CD, D \in A_4, \end{array} \quad \begin{array}{ll} A_5 : & A_5 \perp BC, B \in A_5, \\ A_6 : & A_6 \perp BC, C \in A_6, \\ A_7 : & A_7 \perp AB, A \in A_7, \\ A_8 : & A_8 \perp AB, B \in A_8. \end{array}$$

We will see later that they belong to the system of tritangent planes which intersect the cubic  $H$  in three lines.

We can easily verify that it (surprisingly) holds

$$H = A_1 A_3 A_5 A_7 - A_2 A_4 A_6 A_8, \quad (4)$$

or

$$H = (dp + eq + fr - d^2 - e^2 - f^2)((d - b)p + (e - c)q + fr - (d - b)b - (e - c)c)((b - a)p + cq - (b - a)a)p - (dp + eq + fr)((d - b)p + (e - c)q + fr - (d - b)d - (e - c)e - f^2)((b - a)p + cq - (b - a)b - c^2)(p - a).$$

Note that this is one of the most concise forms of  $H$ .

The importance of (4) appears by searching for lines lying on the cubic. Namely from  $H = 0$  and (4) we get that the line  $A_i \cap A_j$ ,  $i = 1, 3, 5, 7$ ,  $j = 2, 4, 6, 8$  belongs to  $H$ .

From (4) we obtain the following 12 lines which belong to the cubic surface:

$$\begin{array}{llllll} a & = & A_2 \cap A_7, & b & = & A_8 \cap A_5, & c & = & A_6 \cap A_3, & d & = & A_4 \cap A_1, \\ e & = & A_2 \cap A_5, & f & = & A_8 \cap A_3, & g & = & A_6 \cap A_1, & h & = & A_4 \cap A_7, \\ i & = & A_7 \cap A_6, & j & = & A_2 \cap A_3, & k & = & A_8 \cap A_1, & l & = & A_5 \cap A_4. \end{array}$$

Note that

$$A_1 \parallel A_2, A_3 \parallel A_4, A_5 \parallel A_6, A_7 \parallel A_8$$

which implies

$$a \parallel k, b \parallel i, c \parallel l, d \parallel j, e \parallel g, f \parallel h.$$

Another 6 tritangent planes given by pairs of parallel lines:

$$\begin{array}{llll} A_9 & = & a \cup k, & A_{10} & = & b \cup i, & A_{11} & = & c \cup l, \\ A_{12} & = & d \cup j, & A_{13} & = & e \cup g, & A_{14} & = & f \cup h. \end{array}$$

---

<sup>2</sup>The cubic  $H$  is expressed in a canonical form if  $H = abc + def$ , where  $a, b, c, d, e, f$  are linear factors.

Denote:

$$C_1 = ab - bd - ce,$$

$$C_2 = b^2 + c^2 - ab - bd - ce,$$

$$C_3 = d^2 + e^2 + f^2 - a^2 + ab - bd - ce.$$

Now we add another three lines  $m, n, o$  which belong to the cubic  $H$ :

If  $C_1 \neq 0 \vee C_2 \neq 0$  then  $m = A_{10} \cap A_{12}$ .

Similarly,

if  $C_1 \neq 0 \vee C_3 \neq 0$  then  $n = A_9 \cap A_{11}$ ,

and if  $C_2 \neq 0 \vee C_3 \neq 0$  then  $o = A_{13} \cap A_{14}$ .

If  $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0, C_3 \neq 0$  then the lines  $m, n, o$  are coplanar and we get a tritangent plane

$$A_{15} = m \cup n \cup o.$$

If  $C_1 \neq 0$  then  $A_{15} = m \cup n$ , if  $C_2 \neq 0$  then  $A_{15} = m \cup o$  and if  $C_3 \neq 0$  then  $A_{15} = n \cup o$ . If  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$  then  $A_{15}$  does not exist.

Note that  $A_{15}$  passes through the center  $S$  of the circumsphere of  $ABCD$ .

We get the following 10 canonical forms of the cubic  $H$ :

$$H = A_2 A_4 A_{10} + A_5 A_7 A_{12}, \quad H = A_1 A_3 A_{10} + A_6 A_8 A_{12},$$

$$H = A_4 A_8 A_{13} + A_1 A_5 A_{14}, \quad H = A_3 A_7 A_{13} + A_2 A_6 A_{14}$$

$$H = A_1 A_7 A_{11} + A_4 A_6 A_9, \quad H = A_2 A_8 A_{11} + A_3 A_5 A_9,$$

$$H = A_1 A_2 A_{15} + A_9 A_{12} A_{13}, \quad H = A_3 A_4 A_{15} + A_{11} A_{12} A_{14},$$

$$H = A_5 A_6 A_{15} + A_{10} A_{11} A_{13}, \quad H = A_7 A_8 A_{15} + A_9 A_{10} A_{14}.$$

Together we obtained

- 15 real lines  $a, b, c, \dots, m, n, o$  of the cubic  $H$ , see Fig. 8.
- 15 real tritangent planes  $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ ,
- 10 canonical forms of  $H$ .

### 2.1.3 Singular cases

What is geometric meaning of relations  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  and  $C_3 = 0$ ?

It is easy to verify that it holds:

$$C_1 = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD,$$

$$C_2 = 0 \Leftrightarrow (C - A) \perp (\frac{A+C}{2} - \frac{B+D}{2}),$$

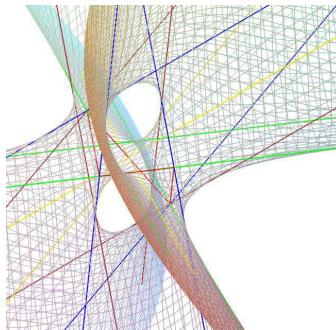


Figure 8: A cubic  $p^2q + pq^2 - p^2r - q^2r + pr^2 + qr^2 - 2pq - r^2 + r = 0$  contains 15 lines

$$C_3 = 0 \Leftrightarrow (D - B) \perp (\frac{A+C}{2} - \frac{B+D}{2}).$$

The last two conditions mean that the line which connects midpoints of  $AC$  and  $BD$  is perpendicular either to  $AC$  or  $BD$ .

Direct computation gives the following theorem:

**Theorem 3:** If  $C_1 = 0$ ,  $C_2 \neq 0$ ,  $C_3 \neq 0$  or  $C_2 = 0$ ,  $C_1 \neq 0$ ,  $C_3 \neq 0$  or  $C_3 = 0$ ,  $C_1 \neq 0$ ,  $C_2 \neq 0$  then  $H$  possesses 2 nodes.

**Example 4:** (Case  $C_3 = 0$ ). For  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ ,  $d = 1$ ,  $e = 1$ ,  $f = 1$  we get a cubic

$$2p^3 - 2p^2q + 4pq^2 - q^3 + 4p^2r + 2pqr + 2pr^2 + qr^2 - p^2 - 6pq + q^2 - 6pr - qr - 2r^2 - p + 2q + 2r = 0,$$

with two nodes at points  $(0, -1/2, 1/2)$  and  $(1, 5/2, -1/2)$ , Fig. 9.

### 3 Conclusion

In the paper a family of cubic surfaces  $H$  which depend on 6 parameters is studied. Some properties of  $H$  are still explored (e.g. Eckhards points). A few questions arise:

Is it possible to decrease the number of parameters?

What is the locus if we take 4 an *arbitrary* lines instead of 4 lines which form a skew quadrilateral?

In the text we demonstrated computer aided analytical approach. Can we use classical methods to find the properties of  $H$ ?

Could the cubic  $H$  serve as a model for demonstration of cubic surfaces which contain 15 real lines?

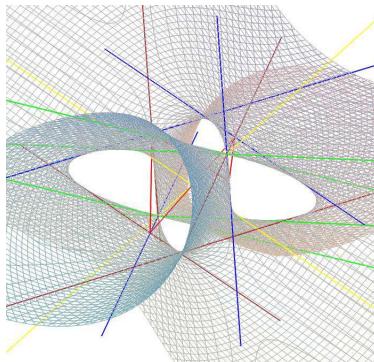


Figure 9: A cubic  $2p^3 - 2p^2q + 4pq^2 - q^3 + 4p^2r + 2pqr + 2pr^2 + qr^2 - p^2 - 6pq + q^2 - 6pr - qr - 2r^2 - p + 2q + 2r = 0$  with two nodes

## References

- [1] Pech, P.: On Simson–Wallace Theorem and Its Generalizations. *J. Geometry and Graphics*, **9** (2005), 141–153.
- [2] Pech, P.: *Selected topics in geometry with classical vs. computer proving*. World Scientific Publishing, New Jersey London Singapore, 2007.
- [3] Pech, P.: On a 3D extension of the Simson–Wallace theorem. *J. Geometry and Graphics*, **18** (2014), 205–215.
- [4] Pech, P.: Extension of Simson–Wallace theorem on skew quadrilaterals and further properties. LNAI **9201**, pp. 108–118, (2015).
- [5] Pech, P.: Decomposability of the Simson–Wallace locus on skew quadrilaterals. Submitted to Comput. in Math., 2015.
- [6] Roanes–Lozano, E. M., Roanes–Lozano, M.: Automatic Determination of Geometric Loci. 3D-Extension of Simson–Steiner Theorem. LNAI **1930**, pp. 157–173, (2000).



# Avoiding Quadratic Obstacles in the Euclidean Plane Using Cubic Bézier Paths

Barbora Pokorná<sup>1</sup>, Pavel Chalmovianský<sup>2</sup>

*Comenius University in Bratislava*

*Faculty of Mathematics, Physics and Informatics*

*Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovak republic*

<sup>1</sup>[barbora.pokorna@fmph.uniba.sk](mailto:barbora.pokorna@fmph.uniba.sk)

<sup>2</sup>[pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk](mailto:pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk)

**Abstract.** Cubic Bézier curves as collision-free paths are widely used in path planning. The essential task for finding all possible collision-free paths is necessary to find those paths, which only touch an obstacle. We solve the planar cases for an obstacle represented by conic section  $K$  as bounding object. The cubic path is represented by a Bézier curve with control points  $A, C, F, B$ , where  $A, B$  are given start and goal positions and the point  $F$  is arbitrary, but fixed. This paper describe the set  $D$  of points at conic section  $K$ , which are admissible points of contact, and the corresponding point  $C$  for  $X \in D$ .

**Keywords:** cubic Bézier curve, collision-free path, conic section.

## 1 Introduction

Motion planning is a fundamental research area in robotics. A motion plan involves determining what motions are appropriate for the robot so that it reaches a goal state without colliding into obstacles [5]. Let  $\mathbb{R}^2$  be the Euclidean plane with obstacle represented by a conic section  $K$  as bounding object. Let the point  $A$  be the start and the point  $B$  be the finish. We find all cubic Bézier paths starting at  $A$  and ending at  $B$  representing collision-free path with respect to an obstacle  $K$ .

## 2 Notation and problem definition

Let  $\mathbb{R}^2$  be an affine Euclidean plane formed by points  $X = [x, y]$ . Let  $\mathbf{Q}_K \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  be a symmetric matrix. The algebraic curve of degree 2 called *conic section* is the set  $K = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0 \text{ for } f(x, y) = (x \ y \ 1)\mathbf{Q}_K(x \ y \ 1)^\top\}$ . More about spaces with quadratic form can be found in [1]. In appropriate cases, we consider the equation of the conic section instead of  $K$  due to the fact that the field  $\mathbb{R}$  is not algebraically closed. The conic section is the set of self-polar points with respect to polar form  $P(X, Y)$  determined by the matrix  $\mathbf{Q}_K$ . We say that the point  $X$  lies out of conic section if  $P(X, X) > 0$ . We denote  $P_A = P(A, X) = A\mathbf{Q}_K X^\top$ , when  $X = (x, y, 1) \in K$  and  $A = (a_x, a_y, 1)$ . For the point  $Y$ , the  $Y^\perp$  is the polar line determined by equation  $(Y, 1)\mathbf{Q}_K(X, 1)^\top = 0$ . More about conic sections can be found in [2, 4].

*Bézier curve* of degree  $n$  in the space  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$  is a polynomial map  $b: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  given by  $b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) V_i$ . The points  $V_i \in \mathbb{R}^d$

for  $i \in \{0, \dots, n\}$  are called *control points*, the functions  $B_i^n(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$  are Bernstein polynomials of degree  $n$ . More about properties of Bézier curves can be found in [6].

### 3 Cubic collision-free path

Let  $\rho$  be a Euclidean plane containing the conic section  $K$ . Let the points  $A, B \in \rho$  lie out of conic section. Let the point  $F$  be arbitrary, but fixed. We need to find the set of admissible solutions  $V_\rho(A, F, B)$  of such points  $C \in \rho$ , that the curve  $b_{ACFB}$  is collision-free with respect to  $K$ . We start by searching the boundary of this set.

By  $V_\rho^v(A, F, B)$ , we denote the set of points  $C \in \rho$  such that  $b_{ACFB} \cap K$  contains only the points of contact of order 2 between the Bézier curve and the conic section. We say that the set  $D \subset K$  is the set of points of contact between  $K$  and the set of all  $b_{ACFB}$  if for any point  $X \in D$ , there is a point  $C$  such that  $C \in V_\rho^v(A, F, B)$  and  $X \in b_{ACB} \cap K$ . The exact shape of the set  $D$  is shown later.

At first, we find the map  $\sigma: D \rightarrow V_\rho^v(A, F, B)$ , which express the correspondence between the points of contact with  $K$  and the middle control points. The boundary of the set  $V_\rho(A, F, B)$  is  $\partial V = V_\rho^v(A, F, B)$ .

**Definition.** Let  $D$  be the set of points of contact for the given points  $A, F, B$  and  $K$  and let  $\mathcal{P}(\rho)$  be the power set of the plane  $\rho$ . The map  $\sigma: D \rightarrow \mathcal{P}(\rho)$  is called *boundary map* if for every  $X \in D$  holds  $\sigma(X) = \{C \in \rho \mid C \in V_\rho^v(A, F, B) \text{ and } X \in b_{ACFB} \cap K \text{ is the point of contact}\}$ .

**Theorem.** Let the point  $X \in D \subset K$  whereas the conic section  $K$  be represented with matrix  $\mathbf{Q}_K$ . Let the real numbers

$$\begin{aligned}\alpha &= (A - 3F + 2B)\mathbf{Q}_K X^\top, \\ \beta &= (F - A)\mathbf{Q}_K X^\top, \\ \gamma &= A\mathbf{Q}_K X^\top, \\ \delta &= -\gamma\end{aligned}$$

be the coefficients of the cubic function

$$R(t) = \alpha t^3 + 3\beta t^2 + 3\gamma t + \delta \quad (1)$$

for  $A = [a_x, a_y, 1]$ ,  $F = [f_x, f_y, 1]$ ,  $B = [b_x, b_y, 1]$ ,  $X = [x_0, y_0, 1]$ . Then, the corresponding boundary map  $\sigma: D \rightarrow \mathcal{P}(\rho)$  has the form

$$\sigma(X) = \left\{ \frac{b(t_0) - B_0^3(t_0)A - B_2^3(t_0)F - B_3^3(t_0)B}{B_1^3(t_0)}, t_0 \in (0, 1) \wedge R(t_0) = 0 \right\}. \quad (2)$$

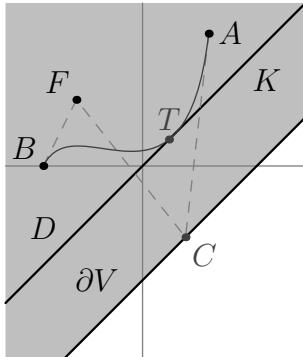


Figure 1: The boundary  $\partial V$  of the set of admissible solutions is a parallel line to the double line  $p$  for  $K = p$ .

We can write the discriminant of the cubic equation  $R(t)$  as  $\Delta = 108P(A, X)(P^3(F, X) - P(A, X)P^2(B, X))$  using the notation of polar lines equation. This discriminant enables to compute the number of real roots of the function given by (1) over an interval. Combining with Budan-Fourier theorem [3] applied on interval  $\langle 0, 1 \rangle$ , we are able to determine the number of roots lying in  $(0, 1)$ . In other words, we know how many points  $C_i$  exist for given  $X \in K$ .

### 3.1 Singular conic sections

At first, we find the set  $D$  for singular conic sections, then we consider regular conic sections.

**Theorem.** If the conic section  $K = p$ , the set of admissible points of the contact  $D = K$ . Moreover, the boundary of the set of admissible solutions  $\partial V$  is a parallel line to the double line  $p$  (see fig. 1).

**Proof.** Without loss of generality, let us consider the conic section  $K: -x + y = 0$ . We obtain  $P(A, X) = \frac{1}{2}(-a_x + a_y)$ , which is the constant independent on the choice of  $X$ . Similarly, the expressions  $P(B, X)$  and  $P(F, X)$  are constants. Hence, the coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  in (2) are constants independent on the point  $X \in D$ . Hence, the solutions  $t_1, t_2, t_3$  of the equation (1) are constants for all  $X \in D \subset K$ .

Now, we need to prove that  $D = p$  and for every  $X \in D$  exists exactly one  $i \in 1, 2, 3$  such that root  $t_i \in (0, 1)$ . Let us count the number of roots of the equation (1) belonging to  $(0, 1)$ . Computing the values derivatives of  $R(t)$  at the end points of the interval  $\langle 0, 1 \rangle$ , we obtain the table 1. In the case of singular conic sections all the values are constants independent

	$t = 0$	$t = 1$
$R(t)$	$-P_A$	$2P_B$
$R'(t)$	$3P_A$	$-3P_F + 6P_B$
$R''(t)$	$-6P_A + 6P_F$	$-12P_F + 12P_B$
$R'''(t)$	$6P_A - 18P_F + 12P_B$	
$\Delta$	$108P_A(P_F^3 - P_A P_B^2)$	

Table 1: The values of derivatives of the function  $R(t)$  at the end points of the interval  $\langle 0, 1 \rangle$  and the value of the discriminant.

on the point  $X \in D$ .

The assumption of the Budan-Fourier theorem reads that the product  $R(0)R(1) \neq 0$ . It holds iff  $P_A \neq 0 \wedge P_B \neq 0$ . This is accomplished, because the points  $A, B \notin K$ . Now, we consider some configurations of the points  $A, F, B$  with respect to  $K$  and check the corresponding number of roots of the equation (1) in the interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . For the obtaining of the collision-free path, the points  $A, B$  must lie in the same half plane with respect to  $K$ , so we assume  $P_A P_B > 0$ .

For  $P_F = 0$ , the number of sign changes is equal to 3 and the discriminant  $\Delta < 0$ . Which means, there is exactly one real root  $t_0$  within the interval  $\langle 0, 1 \rangle$  and the uniquely defined Bézier curve always exists. Let  $P_F \neq 0$  and without loss of generality let  $P_F > 0$ . If  $0 < P_A < P_F$ , we distinguish these two possible positions of the point  $B$  as  $0 < P_F < P_B$  and  $0 < P_B < P_F$ . The corresponding table shows that there is exactly one real root  $t_0$ . If  $0 < P_F < P_A$ , we distinguish two possible positions of the point  $B$  the same way. The number of sign changes is either 3 or 1, but in the case of 3 the discriminant  $\Delta < 0$ . It restricts the number of roots to 1. If  $P_A < 0 < P_F$ , the point  $B$  must be in the same half-plane, so  $P_B < 0$  and there is only one real root within  $\langle 0, 1 \rangle$ . The conclusion of all the cases is, that the set of points of contact  $D = p$  and for every  $X \in D$  exists exactly one Bézier curve  $b_{ACFB}$ , where  $C = \sigma(X)$ .

At the end, we determine the shape of the curve  $\partial V$ . Let  $T_0 \in D$  be an arbitrary fixed point of contact and let  $C_0$  be the corresponding middle control point. Let  $T \in D$  be arbitrary point of contact different from  $T_0$ . We express  $T = T_0 + u\mathbf{s}_p$ , where  $0 \neq u \in \mathbb{R}$  and  $\mathbf{s}_p$  is direction vector of the line  $p$ . The corresponding point  $C$  is obtained from formula (2) and for  $t_0 \in (0, 1)$  is  $B_1^3(t_0) > 0$ . If we substitute  $T$  by  $T_0 + u\mathbf{s}_p$  and  $T_0$  by  $B_0^3(t_0)A + B_1^3(t_0)C_0 + B_2^3(t_0)F + B_3^3(t_0)B$ , we obtain  $C = C_0 + \frac{u}{B_1^3(t_0)}\mathbf{s}_p$ . Hence, the boundary of the set of admissible solutions  $\partial V$  is the line with the same direction vector as the line  $p$ .

**Theorem.** Let  $K = p \cup r$ . The set of points of contact  $D = \overrightarrow{S_p P} \cup \overrightarrow{S_r R}$

	$P_F < P_A$ $P_F < P_B$		$P_F < P_A$ $\frac{1}{2}P_F < P_B < P_F$		$P_F < P_A$ $P_B < \frac{1}{2}P_F$	
	$t = 0$	$t = 1$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 0$	$t = 1$
$R(t)$	—	+	—	+	—	+
$R'(t)$	+	+	+	+	+	—
$R''(t)$	—	+	—	—	—	—
$R'''(t)$	+	+	—	—	—	—
# of sign changes	3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$
sign of $\Delta$	—		no influence		no influence	

Table 2: The sign changes and the sign of discriminant for the arc of regular  $K$  such that  $P_A > 0$ ,  $P_B > 0$  and  $P_F < P_A$ .

(in special case  $S_p = S_r = p \cap r$ ). From the previous lemma, the set  $\partial V$  consists of two half-lines parallel with  $p$ , resp.  $r$ , connected in the point  $C_u$ . If the conic section  $K = \{[0, 0]\}$ , then the set  $D = \{[0, 0]\}$  and the boundary of the set of admissible solutions  $\partial V$  is one continuous curve.

### 3.2 Regular conic sections

Now, we need to find the set  $D \subset K$  for regular conic sections. Let us focus on the necessary algebraic conditions for  $X \in K$  to be  $X \in D$ . In the case of regular conic sections, the coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  of the function  $R(t)$  are linear functions of  $X$  in generic case, because the polar forms  $P_A, P_B, P_F$  depend on the choice of  $X \in D$ .

Similarly, we use the table 1 for determination of sign changes of derivatives of the function  $R(t)$  in the end points of the interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . We must distinguish several cases with respect to the mutual position of the point  $X \in K$  and the polar lines  $A^\perp, B^\perp$ . The polar lines  $A^\perp, B^\perp$  divide the conic section  $K$  into several arcs and we need to find suitable candidates for the set  $D$  between them or their subset. The table 2 shows the sign changes and the determinant for the arc such that  $P_A > 0$ ,  $P_B > 0$  and  $P_F < P_A$ . We create similar tables for each arc of the conic section. We look for all the arcs, where at least one real solution exists within  $\langle 0, 1 \rangle$ . Based on these tables, we can formulate the next theorem.

**Theorem.** The set of admissible points of the contact  $D$  is the subset of the union of the arcs  $K_i \subset K$  for  $i = 1, \dots, 4$ , where

$$K_1 = \{X \in K : P_A \geq 0 \wedge P_B \geq 0\},$$

$$K_2 = \{X \in K : P_A \leq 0 \wedge P_B \leq 0\},$$

$$K_3 = \{X \in K : P_A \geq 0 \wedge P_B \leq 0 \wedge P_F^3 - P_A P_B^2 \geq 0\},$$

$$K_4 = \{X \in K : P_A \leq 0 \wedge P_B \geq 0 \wedge P_F^3 - P_A P_B^2 \leq 0\}. \quad \square$$

The equalities in above theorem may occur, because the end points of the arcs may belong to the set  $D$ . Depending on the positions of the points  $A, B, F$ , some of these sets may be empty. For example, the set  $K_1$  is empty iff the segment  $AB$  is a secant of  $K$ . The necessary condition for the set  $D$  is not the sufficient condition simultaneously. It may happen, that the Bézier curve determined by the point  $X \in \bigcup_{i=1}^4 K_i$  has some transversal intersection with  $K$ . The sufficient conditions are required, because we need to know the exact shape of the set  $D$  for computing the boundary  $\partial V(A, F, B)$ . We plan to find them in the further research.

## 4 Conclusion

We focused on collision-free path finding with respect to quadratic obstacles using cubic Bézier curves. We looked for the set  $V(A, F, B)$  containing the admissible middle control points  $C$  of collision-free paths. We determined this set for singular conic sections as obstacles. We defined the boundary map  $\sigma$  and the necessary conditions for the set of admissible points of contact  $D$  for regular conic sections, while  $\partial V(A, F, B) = \sigma(D)$ . The finding of sufficient conditions for the set  $D$  is the topic for further research.

## Acknowledgements

The first author has been supported by the project KEGA 094UK-4/2013 "Ematik+, Continuing education of mathematics teachers". The second author has been supported by the project VEGA 01/0330/13.

## References

- [1] M. Berger: *Geometry I, II*, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] R. Bix: *Conics and cubics*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2006.
- [3] J.-D. Boissonnat, M. Teillaud: *Effective computational geometry for curves and surfaces*, Mathematics and Visualization. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [4] E. Kunz: *Introduction to plane algebraic curves*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005.
- [5] S. M. LaValle: *Planning Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2006.
- [6] H. Prautzsch and W. Boehm and M. Paluszny: *Bézier and B-spline techniques*, Mathematics and Visualization. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

# Tensegrity in parametric modeling

Piotr Polinceusz

*Geometry and Engineering Graphics Centre, Silesian University of Technology*

*Krzywoustego 7, 44-100 Gliwice, Poland*

*Phone/fax: +48 32 237 26 58 e-mail: piotr.polinceusz@polsl.pl*

**Abstract.** The article presents an original algorithm in Rhino engine and Grasshopper module for creating and simulating tensegrity structures. Presented will be a method for creating the normal prisms and their transformation into structures consisting of string elements (tensioned cable) and rigid (beams, rods), not having a together any common points. Working in this environment gives the ability to quickly modify and validate the connection, thanks to tools applied in the program such as Kangaroo solver live physics engine.

*Key words:* tensegrity, Rhino, Grasshopper, Kangaroo solver.

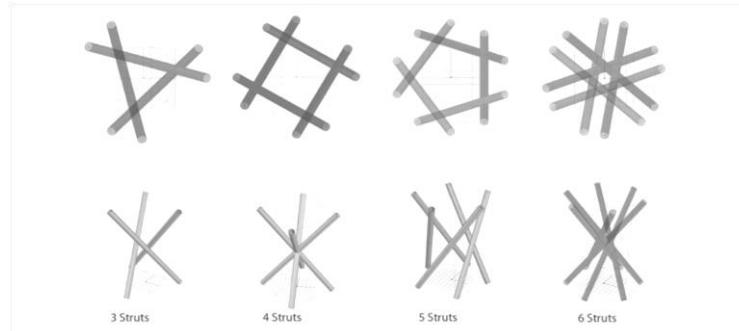
## 1 Historical review and definition

Tensegrity is the system of construction which have been submitted by the American architect and theorist Buckminster Fuller, known for his numerous inventions, architectural and popularizing the geodesic dome, the second was a former student of Fuller, Kenneth Snelson sculptor and photographer, and David G. Emmerich French architect and engineer who independently at the same time as the others worked on the design type.[4] All three forerunners have patents related solutions tensegrity structures.[1][2][3] For the first time the term "tensegrity" was formulated and used in 1955 although the first designs were created as early as 1948. The first structure was install called "X-piece" consisting of a 2 compression elements. The installation was created for artistic activities at Black Mountain College and its create by Kenneth Snelson.[10] The term tensegrity is composed of two part: tension and integrity. The basic components of the components of the structure are elements of compression, i.e. the bars and beam and tensile elements, i.e. the ropes and rods. [6]

## 2 Elements of the system and basic components

The first division structure was developed by Buckminster Fuller, who has divided systems into two categories: prestressed tensegrities and geodesic tensegrities, [5] but each of the inventors developed its own terminology which meant that one of the simplest systems have several terms: "simplex", "T-prism ", "3 struts, 9 tendons, "etc. In 1976. Anthony Phug has developed a catalog of tensegrity systems where structures are assigned the number of layers, the number of rows, the relative position of the tendons and the complexity of compression elements. In the next stage of the work described basic methods of connecting parts up. In 2000 Williamson

and Whitehouse introduced digital recording comprising parameters. N amount of compression elements (e.g. rods), S amount of tension elements (e.g. tendons), and M number of rows of bars. In such a structure defined notation "simplex" is defined as follows: "(3,9, 3)". [10] The basic elements we face are those which arose from twisting prisms on the basis of shapely figures such structures have a number of elements equal to the number of vertices compression. (Fig.1)



**Fig. 1: Basic components of tensegrity structures**

## 2.1 Practical application

Initially the constructions were used only in architecture and construction, but the last few years and technology development gives new possibilities for application:

- construction of bridges - construction of footbridges and spans
- design ceilings,
- dynamic design reacting to atmospheric factors,
- moveable partitions - sliding walls,
- art & design - lighting, furniture, sculpture, mechanics, fashion,
- biology - prosthetics, nano-biology. [7] [8] [9]

## 2.2 Modern technologies

In the initial stage of the research, analysis, design and her work were solely based on physical models. The present development of computer technology, resulting in both the number of applications design and development of scientific research, gives the possibility to create models in a virtual world, check stability and structural behavior before attempting implementation. The program Rhinoceros with plug-in Grasshopper gives us the ability to create mathematical and visual models based on customizable parameters.

## 2.3 About algorithm

The first step in the construction of the algorithm is to define the center point of the base so that it can be moved and rotated in a XYZ. In the developed model, the base figure should be able to easily change the number of sides of the polygon, so the base is based on a circle, which, depending on the variant is divided into the appropriate number of vertices of the base. A similar operation takes place in order to obtain the upper base of the prism. The final stage of construction of the model is to combine the upper base from the bottom which makes it possible to introduce all the tendons needed in the structure and the division of the walls of a prism into triangles allows to enter into the structure of rods, which will be compressed. The next step is to give the physical characteristics of the elements of the structure, so that behaved just like in the real world. In this section it is necessary to supplement the program grasshopper called Kangaroo, which is the physics engine, adding to the program such phenomena as gravity and linear geometry modifiers into the spring. Run a model program allows to analyze labor structure. Figure automatically tightens the tension rods, while maintaining the rigidity of the beams. (Fig. 2) Modifiable parameter tendons tension and gravity gives the opportunity to receive ideal tension parameters of the system. The program rhinoceros has a built-in component Galapagos optimizing geometries based on the set parameters (e.g. the volume of solid), but the algorithm creates the same edges without surface and solid fill areas. In this case, based on previously data obtained, replace them from the edge into points, which are then converted in mesh solid surface. The resulting full body can be introduced to the Galapagos component and check the result of optimization. Once launched, the program executes about one hundred changes of parameter narrowing the range of tension up to ten percent of the best results, which gives data for the next generation of search. At about the fortieth generations we get best possible tension parameter of system setting.

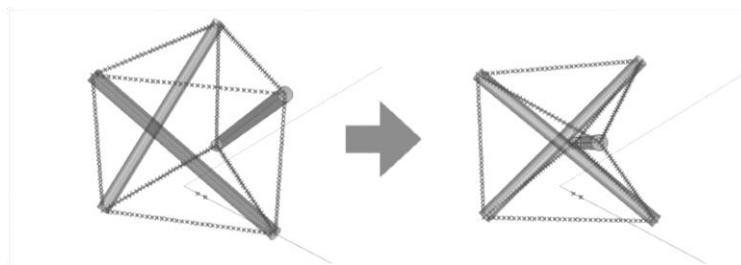


Fig. 2: Example of a working model

### 3 Conclusion

The model built in the program of rhinoceros gives the opportunity for further development and structural analysis of tensegrity. Analysis basic model showed that the program can provide the data necessary for checking the rigidity of the system and the correctness of the generated model. The advantages of the program include: dynamic opportunity to make changes and fast access to data. (Fig. 3) The program has the tools to make their own components, which results in the future expandability of assemblies to verify the strength properties of the system components.

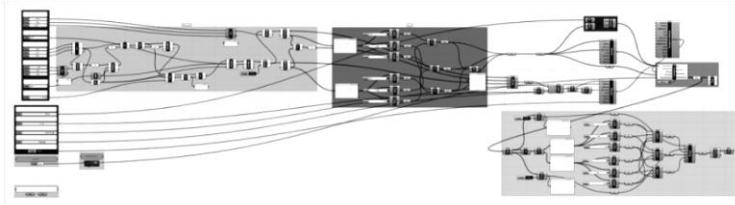


Fig. 3: View of the whole algorithm

### References

- [1] R.B. Fuller: Tensile-integrity structures, U.S.Patent 3,063,521 November 13, 1962
- [2] K. Snelsons: Continous tension discontinuous compression structures, U.S.Patent 3,169,61, February 16, 1965
- [3] D.G.Emmerich: Construction de reseaux autotendants, French Patent No.1,377,291, September 1964
- [4] Z. Bieniek: "Shaping of modular tensegrity structures"
- [5] Z. Bieniek: "Autoreferat"
- [6] [www.en.wikipedia.org](http://www.en.wikipedia.org) (access 28.10.2015r.)
- [7] [www.tensegrity.wikispaces.com](http://www.tensegrity.wikispaces.com) (access 28.10.2015r.)
- [8] [www.bioltensegrity.com](http://www.bioltensegrity.com) (access 28.10.2015r.)
- [9] [www.kennethsnelson.net](http://www.kennethsnelson.net) (access 28.10.2015r.)
- [10] [www.tensegritywiki.blogspot.com](http://www.tensegritywiki.blogspot.com) (access 28.10.2015r.)

# Základné geometrické útvary a ich význam

## Basic Geometrical Patterns and their Significance

Daniela Richtáriková

*Institute of mathematics and physics, Faculty of Mechanical Engineering,*

*Slovak University of Technology in Bratislava*

*Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic*

*email: daniela.richtarikova@stuba.sk*

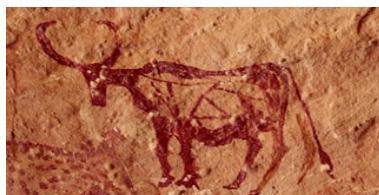
**Abstract.** The paper discusses the significance of basic geometrical patterns within the culture evolution. By means of artefacts and historical findings it points out on the crucial role in the forming of human abstraction ability. It summarises some of published theories on genesis of patterns on paleolithic and neolithic artefacts, outlines the symbolics presented on neolithic pottery and folk costumes found and preserved also on territory in Slovakia. In addition, its acting in modern art and science theory establishment is described.

**Keywords:** mathematics and art, abstraction, the role of basic geometrical patterns in history, prehistoric pottery on the territory of Slovakia, folk wear, modern art, entopic fantoms, invariant

**Kľúčové slová:** matematika a umenie, abstrakcia, elementárne geometrické útvary, keramika na území Slovenska, kroj, moderné umenie, entopické obrazce, invariant

### 1 Artefakty

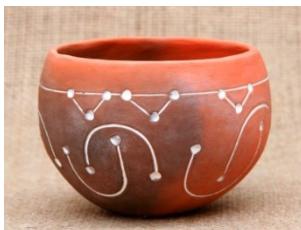
Najstaršie archeologické nálezy geometrických útvarov, ktoré vytvoril človek, pochádzajú z obdobia paleolitu. Z obdobia okolo 20 000 p.n.l. pochádza jaskynná maľba v Afrike, ktorá zobrazuje býka s trojuholníkom na hrudi. Maľba predznačuje, že základné geometrické útvary budú hrať jednu z rozhodujúcich úloh vo vývoji schopnosti abstrakcie človeka.



Obr. 1: Afrika, 20 000 p.n.l. [1]

Hlavný zdroj informácií tvoria nálezy pochádzajúce z obdobia neolitu, aké sa našli tiež na území Slovenska. Neolitická revolúcia priniesla zásadné zmeny do života ľudí. Lovci a zberači sa postupne transformovali na pestovateľov a chovateľov. Polnohospodársky spôsob života pripútal ľudí na jedno miesto a mal významný vplyv na ich duševný život. Pokým nomadické kmene

v predneolitickom období uctievali silu mužských božstiev, poľnohospodárski usadlíci uctievali Veľkú matku, nositeľku života. Zoomorfické sošky, ktoré sa už vtedy pokrývali geometrickými útvarami, boli vystriedané symbolmi plodnosti: mesiacom, vodou, slimákom, sovou a hadom. Obraz božstva postupne strácal konkrétnosť a viac sa sústredoval na vyjadrenie vnútorných vlastností, význam. Umelecké stvárnenie takisto opúšťalo reálnu podobu a postupne naberalo viac a viac abstraktný charakter. Vyjadrovacím prostriedkom sa stali práve elementárne geometrické útvary. Kruhom sa zobrazovalo slnko, špirálou energia a sila. Spojenie dvoch špirálov predstavovalo spojenie materiálneho a duševného sveta a umožňujúce vzájomnú výmenu a spájanie energií oboch svetov. Dvojité a trojité špirály, často prítomné na pohrebiskách sa vzťahujú k reinkarnácii, posmrtnému životu a večne plynúcemu pohybu vesmíru. Vlnovka a lomená „cik-caková“ čiara symbolizovala vodu, vesmír bol hranatý so štyrmi uhlami reprezentujúcimi štyri svetové strany: východ, západ, sever a juh. Trojuholník „triquetrum“ bol symbolom plodnosti [2]. Ľudia začali zdobiť svoje obydlia, pohrebné miesta ako aj ďalšie predmety bežného života, keramiku, nástroje, zbrane, ap. Jednotlivé motívy však neboli len jednoduchou dekoráciou, mali svoj vlastný specifický význam. Mnohé neolitické symboly pretrvali s malou obmenou tvaru a významu do ďalších civilizácií a veľa z nich dnes používame v rôznych odvetviach vedy, priemyslu a kultúry.



Obr. 2 [13]



Obr. 3 [13]

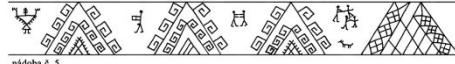
**Obr. 2: Kultúra s mladšou lineárной keramikou, Nitra, 5000 - 4300 p.n.l.,  
Obr. 3: Kalenderberská kultúra, Dunajská Lužná, 750-600/550 p.n.l.**

Pre keramiku neolitickej kultúry na Slovensku a v strednej Európe sú charakteristické trojuholníky, kružnicové oblúky, esovité polkružnicové špirály, rôzne kompozície rovnobežných rovných, lomených alebo oblúkových čiar. (Okrúhle jamky, vyskytujúce sa v lineárnej kultúre (obr. 2) boli vytvárané otlačkami prstov.) Neskôr, v kalenbergskej kultúre (obr. 3 – 5), pozorujeme spájanie lomených a oblúkových motívov do lomených špirálovitých háčikov, niekedy obohatených bodkou. Spolu s nimi sa na nádobách objavujú príbehy stvárnené cez geometricky schématisované figurálne objekty [10] (ústredná postava ženy v adoračnom geste so zdvihnutými rukami (obr.4), trojuholníkové trupy, obdĺžnikové držanie rúk, dvojito trojuholníkové stromy s háčikmi, motív slnka, ap.). Dominujúci trojuholník nadobudol časom silný religiózny kontext

a objavuje sa v obmenách (kosoštvorec, rôzne V –tvary obr. 5, obr. 6, ap.) ako hlavný dekoračný prvok spolu so špirálami a kruhmi. Symbolizuje bielu bohyňu, v slovanskej kultúre Veľkú matku, vznik života, smrť a znovuzrodenie, minulosť, súčasnosť a budúenosť, úrodnosť zeme ako aj plodnosť ženy (často kosoštvorec s bodkou (bez bodky) v strede) a uchovanie rodu.



nádoba č. 1



nádoba č. 5



nádoba č. 11

**Obr. 4: Detail rozvinutej výzdoby [13]****Obr. 5 [13]**

Okrem keramiky, ľudia umiestňovali zdobné motívy tiež na oblečenie a obydlia, ktoré dodnes obdivujeme vo forme výšiviek ľudových krojov a vonkajšej maľby domov pamiatkových rezervácií ľudovej architektúry a skansenov. Hlavnou funkciou bolo nositeľa chrániť pred nebezpečenstvami, poskytovať mu v živote silu a energiu, ale tiež identifikovať ho od ostatných rodov, čo malo veľký význam pri výbere partnera. Jedným z dôležitých prvkov je svastika, ktorá lemuje oblečenie. Orientovaná v smere hodinových ručičiek vytvára svetelný tok energie, opačne orientovaná ochraňuje.



OKRÚHLE KVIETKY



OKRÚHLICE



ZÁHORSKÉ KVIETKY



ŠTEPANÉ KVIETKY



NA PANENKI



NA VIOLÍCKI



REBROVÉ HVEZDÍČKI



HÁDENCE



STROMI



NA ŠTIRI SRCA



BARAÑIE ROŠKI



NA POLOVIČU



ZÁKRUTKI



KĽUČKI



ZÚBKU CESTIČKI



PERÁ



STOĽÍKI



VĒLKÉ RIEČICE



NA ČERVÍKI



NA OKNÁ



MAĽIČKI SÚNEČNIK



MAĽKA - MĀLE



ZÁHORSKÝ KVET



NA POHÁRCE



SŘJKO



NA SRCÁ



KURACIE RITKI

**Obr. 6: Čiémanská výšivka [8] a rôzne svastiky**



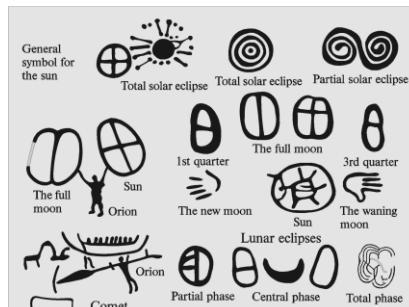
Obr. 7: Mapa slovenskej výšivky [7]

## 2 Pôvod

Je prirodzené, že pri hľadaní pôvodu geometrických útvarov na archeologických nálezoch vychádzame z úsudku, že pravekí ľudia kreslili, ryli do kameňa vzory, ktoré videli okolo seba. Jedna z teórií tvrdí, že geometrické útvary popisujú pozorovania oblohy. Podľa ruského profesora archeológie a antropológie Vitalija Laričeva, bodky v tvare špirál nájdené na mamutej kosti (obr. 9) ukazujú na vysokú úroveň záznamu pohybu hviezd. Poskytujú dostatočne presné pozície na predpovedanie zatmenia Slnka a Mesiaca a museli byť teda výsledkom pomerne presných dlhodobých pozorovaní Slnka, Mesiaca a ďalších viditeľných planét [5].



Obr. 8: Małta, Ukrajina,  
22 000 p.n.l. [11]



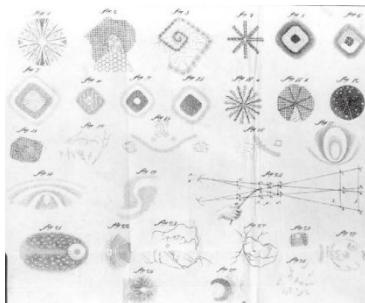
Obr. 9: Skalné rytiny, Švédsko [3]

K obdobnému výsledku prišiel aj G. Henriksson [3], ktorý pomocou počítačového programu analyzoval známe rytiny na skalách vo Švédsku, kde zatmenie slnka je zobrazené pomocou sústredných kružník a čiastočné zatmenie slnka ako dvojité spirály. Okrem toho sa tu nachádza aj niekoľko prirodzených podôb mesiaca v tvare kruhu, ľavého, pravého polkruhu a polmesiaca (obr. 10).

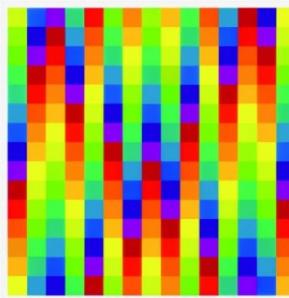
Inou teóriou je teória, ktorú uviedli Lewis Williams a Thomas Dowson v roku 1988 [6], ktorí na základe práce Jána Evangelisty Purkyně vyslovili názor, že väčšina paleolitických artefaktov sú produkтом alternatívneho stavu vedomia, záznamom entopických javov. Entopické obrazce sú imaginárne obrazce, nereflektujúce žiadny reálny objekt, ktoré človek vidí pri zatvorených

alebo otvorených viečkach spôsobené intenzívnym svetlom, tlakom na očnú buľvu alebo užitím látok ovplyvňujúcimi psychiku človeka, prírodných, príp. umelých halucinogénov. Keď porovnáme staroveké geometrické útvary s tabuľkou Purkyňových entopických obrazcov, ich podobnosť je zrejmá obr.10.

Na prelome 19. a 20. storočia práca J. E. Purkyně a skoršia práca J.W. Goetheho o teórii farieb zásadným spôsobom inšpirovala niektorých výtvarných umelcov ako napr. Robert Delaunay, Antonín Procházka, František Kupka, Vasilij Kandinskij, Bohumil Kubišta ai., ktorí vlastným experimentovaním s vnímaním entopických obrazcov a farieb hľadali nové podnety. Im ako aj mnohým ďalším pokračovateľom jednoduché geometrické útvary a práca s farbami poskytli spôsob ako vyjadriť prostú čistotu a krásu. Kazimír Malevič priviedol myšlienku transcendentnu do dokonalosti, keď sa oprostil od predmetnosti sveta a zadefinoval štvorec a kruh ako základné formy suprematizmu, pričom štvorca priradil status primárnej formy, od ktorej sú odvodené ostatné základné formy kruh, trojuholník a kríž. Zrodilo sa abstraktné umenie, ktoré je aj v súčasnosti stále aktuálne a veľakrát predstavuje pre umelca a nielen pre neho, na jednej strane styčnú plochu ako sa postaviť k súdobému dianiu (obr.11) a na druhej možnosť, ako uniknúť realite a ponoriť sa do vlastného sveta.



Obr. 10: Entopické obrazce [4]



Obr. 11: Lohse, 1975.  
Výstava Europe, 2015 Zurich.  
Paralelná existencia rôznych kultúr

### 3 Záver

Vychádzajúc z faktu, že prvé zobrazovanie elementárnych geometrických útvarov vyplynulo z pozorovania prírodných zákonitostí je zrejmé, že tieto útvary sa stali symbolmi – abstrakciou vlastností a pravidelností, neustáleho opakovania javov v prírode. Pomáhali rozvíjať kognitívne schopnosti človeka. Stáli pri zdroe písma [12]. Figurálne čísla, geometrický prístup priniesol do matematiky štruktúry a znamenal začiatok jej teoretizácie [1]. Ukladanie útvarov vedľa seba viedlo od poznania zhodnotných vlastností – súmerností, translácií a rotácií a ich využitia až po súčasné úplné abstrahovanie invariantnosti ako základného organizačného princípu. Pravidelný tvar, vystihujúci zákonitosť, pomohol pri formulácii prírodných zákonov

prostredníctvom matematických formúl, stal sa popisujúcim elementom vo všetkých činnostiach človeka naprieč jeho históriaou, v umení, religiozite, praktických činnostiach i vede.

## Literatúra

- [1] *Art & Music 20 000 BC*, [cit. 10.10.2015] Dost. na: <http://humanpast.net/art/art20k.htm>
- [2] Chronik Verlag GmbH&Co.KG, First Slovak edition, *Kronika ľudstva*, Fortuna Print, spol.s.r.o., Bratislava, 1992, pp 19-23
- [3] Henriksson, G., *Solar Eclipses and Encke's Comet on Swedish Rock Carvings*. In: Current Studies in Archaeoastronomy Conversations Across Time and Space, Selected Papers from the Fifth Oxford Int.l Conf. at Santa Fe, Carolina academic press, Durham, 1996,
- [4] Hubatová-Vacková, L., *Vnitřní zrak. Jan Evangelista Purkyně, laboratoř vizuality a moderní umění*. In: Umění. Časopis Ústavu dějin umění Akademie věd České republiky. Praha: Ústav dějin umění AV ČR 53, č. 6, 2005, p. 566-585. Dost. na: <http://www.cts.cuni.cz/soubory/reporty/CTS-05-05.pdf>
- [5] Larichev, V. E., *Wisdom of the Snake: Ancient Man, Moon and Sun*. Science, Novosibirsk 1989. In: Anoprienko, A., Interpretation of Some Artefacts as Special Simulation Tools and Environments, Dost. na: <http://cs.dgtu.donetsk.ua/~anoprien/Publ/1997/stamb97.htm>
- [6] Lewis-Williams, J. D., Dowson ,T. A., et.al. *The Signs of All Times: Entoptic Phenomena in Upper Palaeolithic Art Current Anthropology*, Vol. 29, No. 2 (Apr., 1988), The University of Chicago Press on behalf of Wenner-Gren Foundation for Anthropological Research, pp. 201-245, Dost. na: <http://www.jstor.org/stable/2743395>
- [7] *Mapa slovenskej ľudovej výšivky*. [cit. 10.10.2015] Dost. na: [http://www.g-base.com/sk/map\\_box/SlovenskaVysivka.html](http://www.g-base.com/sk/map_box/SlovenskaVysivka.html)
- [8] Simová, N. *Abeceda inšpirovaná čičmianskymi ľudovými vzormi*, Diplomová práca, Fakulta informatiky, Masarykova univerzita, Brno, 2013, Dost. na: [http://is.muni.cz/th/324625/fi\\_m/DP.pdf](http://is.muni.cz/th/324625/fi_m/DP.pdf)
- [9] *Slovanská symbolika*, [cit. 10.10.2015] Dost. na: [http://vedy.sk/sk/slovanska\\_symbolika.php](http://vedy.sk/sk/slovanska_symbolika.php)
- [10] Studeníkova, E., *Motív stromu na Halštatskej Keramike*. In: *Studia minora facultatis philosophicae universitatis brunensis*, M 4, 1999. Dost. na: [http://digilib.phil.muni.cz/bitstream/handle/11222.digilib/113864/M\\_Archaeologica\\_04-1999-1\\_18.pdf](http://digilib.phil.muni.cz/bitstream/handle/11222.digilib/113864/M_Archaeologica_04-1999-1_18.pdf)
- [11] *The Hermitage museum*. [cit. 10.10.2015] Dost. na: <http://www.hermitagemuseum.org>
- [12] Vázquez Hoys, A. M., *Old European Script*. [cit. 10.10.2015] Dost. na: [http://www.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/ESCRITURAS\\_ANTIGUA/Escrifuras\\_3\\_antiguas\\_BALKAN\\_DANUBE-SCRIPT.htm](http://www.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/ESCRITURAS_ANTIGUA/Escrifuras_3_antiguas_BALKAN_DANUBE-SCRIPT.htm)
- [13] Vozárik, P., *Atelier P2Pottery*. [cit. 10.10.2015] Dost. na: <http://www.p2pottery.com/slovak/pravek.html> a Súkromné fotografie. Originálne replíky sa nachádzajú v Archeologickom múzeu, Bratislave
- [14] Znám Š.(et.al.), *Pohľad do dejín matematiky*, Bratislava: Alfa Praha, 1986.

# Condition for construction of an image of a line in the degenerated projection

Monika Sroka-Bizoń, Danuta Bombik

*Geometry and Engineering Graphics Centre, Silesian University of Technology  
Krzywoustego 7, 44-100 Gliwice, Poland  
email: monika.sroka-bizon@polsl.pl, d.bombik@gmail.com*

**Abstract.** The initial inspiration for the degenerated projection came from prof. Marian PALEJ [11] when he posed a question regarding ‘degeneration’ of the vertical plane to a straight line, using Monge’s projection method. As a result of further research, a wider framework of this concept has been developed and the practical application have been established. During the early stages of the studies, a straight line was examined and its degenerated image appeared to be a curve of the 4<sup>th</sup> order. Analysis of the features of this curve led to a definition of a condition for the construction of an image of an arbitrary straight line using the degenerated projection. This specific condition, has subsequently proved complementary to already established methods for the construction of the curves of the 4<sup>th</sup> order.

**Key words:** degenerated projection, projective base, curve of the 4<sup>th</sup> order.

## 1 Introduction – base and definition of degenerated projection

**Definition 1.** The projective base of degenerated projection (Fig. 1) comprises four 3-D components of Euclidean space  $\mathcal{E}^{3+}$ , including elements at infinity:

1. an arbitrary plane so-called **projective plane  $\pi$** ,
2. a straight line so-called **axis of the degenerated projection  $p$** , which intersects the projective plane  $\pi$  in a specific point  $X$ ,
3. a specific or at infinity **straight line of source points  $s$** , which is embodied into the projective plane  $\pi$  and does not include the intersecting point  $X$  between the projective plane  $\pi$  and the axis of projection  $p$ ,

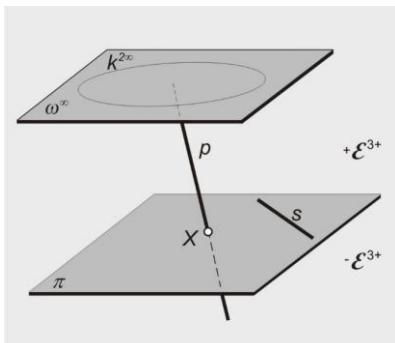


Fig. 1: Components of the projective base for the degenerated projection

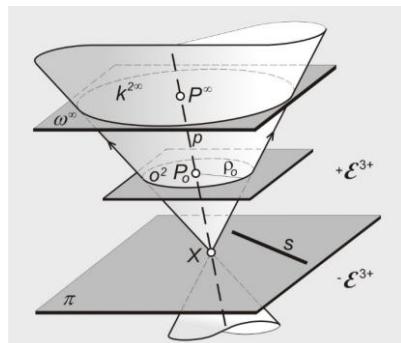


Fig. 2: Construction of the directional conic at infinity

4. a **directional conic at infinity**  $k^{2\infty}$ , which is a common component (Fig. 2) between the plane at infinity  $\omega^\infty$  and the conical surface  $\sigma^2$ , with its axis being the axis of the degenerated projection  $p$ , and its vertex  $X$  positioned in a point where the projective plane  $\pi$  is intersected by the axis of the degenerated projection, and the direction of rotation being a circle positioned on a plane parallel to the projective plane.

**Definition 2.** The degenerated projection is a superposition [3 p.16] of two central projections:

- first, with its centre positioned on the straight line of source points  $s$ ,
- second, with its centre positioned at infinity  $K^\infty$  onto the directional conic at infinity  $k^{2\infty} \subset \omega^\infty$ , equivalent to a parallel projection [10 p.20].

The concept of the degenerated projection can be illustrated with the construction of an image of an arbitrary point  $A$  (Fig. 3), which determines the centres of the central projections. Firstly, within the established projective base, let's introduce an additional plane  $\tau_A$ , which comprises the projected point  $A$  and the axis of the degenerated projection  $p$ . The intersection points between the plane  $\tau_A$  and the projective plane  $\pi$  will form a *reference straight line*  $t_A$ . As this line intersects the straight line of source points  $s$  positioned on the projective plane, it determines the centre  $S_A$  for the first phase of the degenerated projection. The straight line plotted through the centre  $S_A$  and point  $A$  becomes a *primary projective radius*  $r_A^z$ , which is embodied onto the plane  $\tau_A$  and it intersects the axis of the degenerated projection  $p$  in point  $A^p$ . The plane  $\tau_A$  will also intersect the directional conic at infinity  $k^{2\infty}$  in two points at infinity:  $K_{1A}^\infty$  and  $K_{2A}^\infty$ . The straight lines plotted through each of these and point  $A^p$ , will form the *secondary projective radii*:  $r_{A_1}^z$  and  $r_{A_2}^z$ . These will, in the second phase of the degenerated projection, intersect the projective plane  $\pi$  and the reference straight line  $t_A$  in two points:  $A_1^z$ ,  $A_2^z$ , which are effectively the images of the point  $A$ .

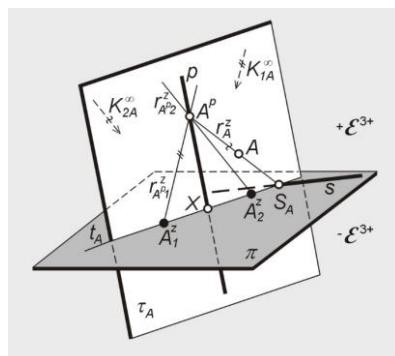


Fig. 3: Construction of the image of a point in the degenerated projection

In conclusion, an explicitly constructed image of the arbitrary point (which does not belong to either components of the projective base nor to the plane that is parallel to the axis  $p$  and comprises the straight line of source points  $s$ ) is a **two-component subset** of the power set [8 p.66] of the projective plane  $\pi$ . These cannot be ranked, due to their geometrical features, and do not, therefore, form a ‘pair’ of a Cartesian product. Their order in a corresponding image does not represent any ranking.

## 2 An image of a straight line in the degenerated projection

The main objective of this article is to examine an image of a straight line achieved through the degenerated projection. An *arbitrary straight line* is such a one which does not intersect any of the straight lines of the projective base, so it has no common points with neither the axis of the degenerated projection  $p$  nor with the straight line of source points  $s$ .

The degenerated projection of an arbitrary object, in accordance with the commonly known methods for construction of an image, can be achieved as a set of projections of its individual points (Fig. 4) or as an intersection between the projective formation of the given object and the projective plane [14 p.19].

The projective formation [6 p.48] of the arbitrary straight line, is a compilation of the primary and secondary projective radii, which were found in the first and the second phase of the degenerated projection respectively.

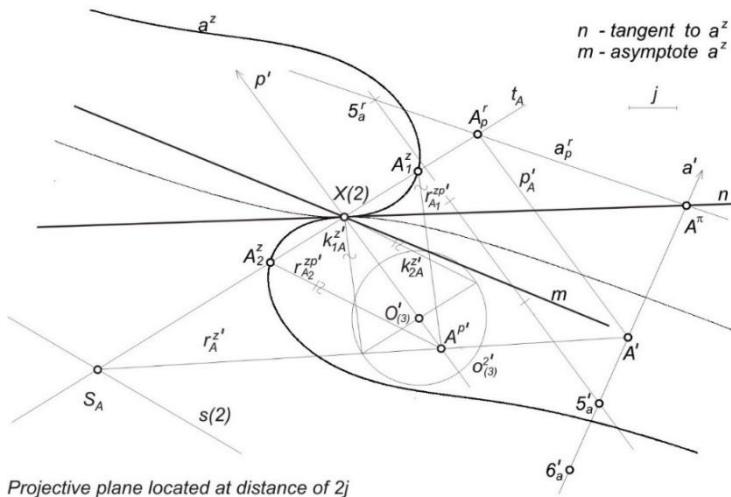


Fig. 4: An image of a straight line as a set of projections of its individual points

Each of the sets of the corresponding primary and secondary radiiuses has a common ‘bond’ point. These ‘bond’ points form a series [14 p.14] which is positioned onto the axis of the degenerated projection  $p$ . The set of the primary radiiuses will form a skew quadric [5 p.151-152], and the set of the secondary ones – a surface classified as of 6th Cremon’s grade and 5th Cayley’s grade [13 p.406].

**Theorem 1.** A degenerated projection of an arbitrary straight line is a plane curve  $a^z$  of 4th order [1 p.124].

Proof:

As already mentioned, an image of a straight line is an intersection of the projective formation and the projective plane; hence  $a^z$  is a plane curve. As the projective formation in the second phase of the degenerated projection becomes a surface of the 4th order, the order of an image of an arbitrary straight line in this projection is a curve of the 4th order.

The analysis of the curves requires establishing the minimum, yet sufficient, number of points that are necessary to explicitly define the curve in question. When examining the image of the arbitrary straight line, being a curve of the 4<sup>th</sup> order, a surprising result has been achieved.

**Theorem 2.** To ensure that the curve  $a^z$  of the 4th order, which is an image of an arbitrary straight line  $a$  in the degenerated projection, is explicitly defined, it is essential and sufficient to establish its three non-collinear points positioned onto a projective plane  $\pi$ , of which none of the two points are collinear with the point  $X$ .

Proof 1:

In general terms, the projective formation of an arbitrary straight line in the degenerated projection is a skew surface of the 2nd power [4 p.30], which is explicitly established by three skew straight lines [2 p.186]. When four arbitrary points of the degenerated image of a straight line are considered, it will lead to the establishment of the fourth skew straight line, which does not belong to the projective quadric.

Proof 2:

The number of points, defining the one only only curve of the n-th order, positioned onto a plane can be calculated as follows [13 p.180] :

$$\frac{1}{2} n(n+3)$$

In this given case, when  $n = 4$ , it will calculate **14** necessary points.

Referring to various features of the image of the straight line will help to define the ‘missing’ points, as follows:

- 1). As the two-component subsets of each image of the arbitrary point are centro-symmetrical against the point  $X$ , it is sufficient to consider an arbitrary 3 points positioned on the given curve in order to immediately determine the subsequent three points which will be centro-symmetrically positioned towards the initial points. Hence, the first 6 points out of the set of 14.
- 2). As the arbitrary straight line intersects the projective plane, these will have one common point. The research proved that an image of this point will be a double counted point  $X$ , hence the further 2 points that can be added to the already established set of 6 points.
- 3). As the image of the straight line has a tangent positioned towards both arms of the considered curve  $a^z$  in the point  $X$ , the additional 2 points positioned onto this curve can be found, making a total number of 10 out of the required 14.
- 4). Referring to the fact that there exists a double-sided asymptote for the image of each straight line, a point at infinity can be considered, and as it will be symmetrical towards itself via point  $X$ , it will enable to determine the further 2 points positioned onto the considered curve  $a^z$ , hence a set of total 12 points out of 14.
- 5). Referring to the two circular points [12 p.14], being the image of the ‘limit point’, which belong to the image of the straight line in the degenerated projection, will help to find the final 2 points of the total set of 14 points.

### Proof 3:

An arbitrary curve of the 4th order, as a common line between two surfaces of the 2nd order, is defined by 8 arbitrary positioned points [9 p.39]. Due to the central symmetry  $a^z$  and to the double counted point  $X$ , considering 3 points will be equivalent to establishing all of the required 8 points.

ALL THREE PROOFS ARE MUTUALLY NON-CONTRADICTORY !

## 3 Conclusion

Based on just three non-collinear points, of which none of any two points are collinear with the point  $X$ , and which belong to the image of an arbitrary straight line  $a$  in the degenerated projection, it is sufficient to construct the whole curve  $a^z$  as an image of the straight line, without referring to the originally given straight line  $a$ .

## Acknowledgements

This article has been dedicated to the memory of Prof. dr hab. inż. Marian PALEJ who initiated the idea of the *Degenerated Projection* and mentored our research.

We would like to extend our gratitude to Prof. nzw. dr hab. Krzysztof WITCZYŃSKI for reviewing our work and his insight from a mathematical prospective.

Our sincere thanks also goes to the Geometry and Engineering Graphics Centre at the Silesian University of Technology for their continuous technical support.

Last but not the least, we would like to thank the organizers and the participants of the SCG & SSGG Conference in Žilina for their interest in the presented concept and for the fine remarks and comments received after the presentation.

## References

- [1] D. Bombik: *Rzut zdegenerowany. Podstawy teoretyczne i zastosowania*, Rozprawa doktorska w druku, Wyd. Pol. Warszaw., Warszawa 2015
- [2] B. Grochowski: *Geometria wykresłna z perspektywą stosowaną*, PWN, wydanie 2, Warszawa 1995
- [3] H. Guściora, M. Sadowski: *Repetytorium z algebry liniowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, wydanie 1, Warszawa 1977
- [4] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Geometria poglądowa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1956
- [5] W. Jankowski: *Geometria wykresłna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, wydanie 1, Warszawa 1971
- [6] B. Januszewski: *Geometria wykresłna. Podstawy rysunku technicznego*, Skrypt Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1994
- [7] J. Kounovsky: *Zborcené plochy*, Wyd. Jednota Československých matematiků a fyziků, Praha, 1947
- [8] K. Kuratowski, A. Mostowski: *Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Monografie Matematyczne, PWN, wyd.3, W-wa 1978
- [9] J. Leś: *Konstrukcja kwadryk w oparciu o korelacyjne wiązki*, praca doktorska, Kraków 1967
- [10] F. Otto, E. Otto: *Podręcznik Geometrii wykresłnej*, wydanie 3, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1979
- [11] M. Palej: *Degeneracja rzutni w metodzie Monge'a*, Biuletyn PTGiGI, zeszyt 2, Gliwice, grudzień 1996, pp. 7- 16
- [12] M. Palej: *Elementarna interpretacja punktów kołowych*, Biuletyn PTGiGI, zeszyt 5, Gliwice, czerwiec 1998, pp.14- 16
- [13] E. Pascal: *Repetytorium matematyki wyższej*, tom II: *Geometria*, Wydawnictwo Redakcji „Wiadomości Matematycznych”, Warszawa 1901
- [14] B. Ślusarczyk: *Geometria rzutowa i wykresłna w zakresie krzywych i powierzchni stopnia drugiego*, PWN, wydanie 1, Warszawa 1976

# Inkrementální konstrukce polygonální sítě reprezentující povrch daný mračnem bodů

## Incremental construction of polygonal mesh approximating the given point cloud

Petra Surynková

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague*

*Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic*

*email: petra.surynkova@mff.cuni.cz*

**Abstract.** The article presents the construction of approximation of the given point cloud using a triangle mesh which can be used in the process of surface reconstruction. Surface representation of reconstructed object is created with incremental construction of triangle mesh based on existing algorithm. This known triangle mesh construction is further improved. The proposed algorithm is applied to computer generated point sets and to real-world data obtained from measurements of real surfaces by optical, laser and contact 3D scanners. The incremental algorithm is implemented in the modern programming language and interactive environment of MATLAB.

Keywords: point clouds, 3D scanning, incremental construction, triangle mesh

*Klíčová slova:* mračno, 3D skenování, inkrementální konstrukce, trojúhelníková síť

### 1 Motivace a praktické aplikace

Cílem digitální rekonstrukce povrchu objektu daného mračnem bodů je vymezení jeho hranice. Tvorba polygonální sítě, která approximuje dané mračno bodů, představuje první hraniční reprezentaci objektu, ze které je možné vycházet při analytické deskripcí povrchu. Hledání metod konstrukcí polygonální reprezentace povrchu je motivováno řadou aplikačních oblastí (počítačové projektování, architektonická tvorba, stavební obory, počítačové hry, reverzní inženýrství, digitalizace reálných objektů 3D skenováním, digitální rekonstrukce povrchů z bodových mračen, replikace tvarů skutečných předmětů pomocí 3D tisku, počítačová grafika...) i výzkumnými výzvami.

Tvorba polygonální sítě reprezentující povrch je tedy součástí rozsáhlějšího problému tzv. digitální rekonstrukce, [3, 9]. Ta spočívá v dokumentaci nějakého fyzického objektu pomocí matematického popisu a v tvorbě jeho počítačového modelu, [1, 2, 3, 5, 7, 9]. Matematická formulace problému je následující. Vstupem úlohy je konečná neorganizovaná množina bodů v prostoru tzv. mračno bodů a výstupem pak systém analytických ploch takových, že body vstupní množiny leží na povrchu nebo v jeho blízkosti. Předpokládá se, že vstupní množina bodů odpovídá v prostoru reálnému povrchu, jinak by úloha nebyla řešitelná.

Existuje celá řada algoritmů řešící rekonstrukce povrchů, viz [1, 6, 7], přičemž jsou tyto metody většinou založeny na rozdělení problému do dílčích podproblémů. V základním pojetí se úloha člení na *bodovou fázi* (získávání bodového mračna a jeho analýza), *polygonální fázi* (aproximace povrchu polygonální sítí) a *tvarovou fázi* (reprezentace povrchu souborem analytických ploch), [4, 9].

V našem výzkumu se věnujeme polygonální fázi, tj. tvorbě trojúhelníkové sítě, která reprezentuje povrch daný mračnem bodů. V článku představíme inkrementální tedy postupnou konstrukci polygonální sítě. Z možných konstrukcí sítě vybíráme existující postup navržený v [8, 11], který se opírá o geometrická pravidla. Tato pravidla dále vylepšujeme, případně je nahrazujeme pravidly vlastními.

V článku je nejdříve představen algoritmus inkrementální konstrukce trojúhelníkové sítě a jsou navržena jeho vylepšení. Dále je ukázáno experimentální vyhodnocení algoritmu na počítačově generovaných a reálných datech. Závěr článku pojednává o dalším možném vývoji navrženého algoritmu a budoucí práci.

## 2 Inkrementální konstrukce polygonální sítě

Metoda postupné tvorby trojúhelníkové sítě z bodového mračna reprezentující povrch je založena na několika geometrických pravidlech. Tato pravidla jsou popsána v pracích [8, 11]. Některá pravidla jsme nahradili vlastními pravidly a uvedené postupy jsme dále vylepšili vlastními technikami, které zde podroběně rozebereme.

Mějme dánu neprázdnou množinu  $\mathcal{X}$   $n$  bodů v eukleidovském prostoru  $E_3$  popisující nějaký prostorový objekt, tradičně značme tuto množinu  $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^n$ . Připouštíme, že body vstupní množiny  $\mathcal{X}$  leží na nebo velmi blízko povrchu, který budeme značit  $\mathcal{P}$ . Hledáme povrchovou triangulaci tak, že vrcholy trojúhelníků jsou všechny body množiny  $\mathcal{X}$  a každá hrana je společná nejvýše dvěma trojúhelníkům.

V prvním kroku algoritmu určujeme tzv. základní trojúhelník, od kterého začíná postupná tvorba polygonální sítě. Nechť se vrcholy tohoto trojúhelníka nazývají  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . První vrchol  $A$  určíme jako nejbližší bod vstupní množiny  $\mathcal{X}$  k jejímu těžišti  $T$ , které spočítáme jako aritmetický průměr bodů  $\{X_i\}_{i=1}^n$ . Dále vrchol  $B$  je nejbližší bod množiny  $\mathcal{X}$  k bodu  $A$ . Tím je stanovena první hrana  $AB$  v triangulaci. Třetí vrchol trojúhelníka, bod  $C$ , vybereme z množiny  $\mathcal{X}$  tak, aby vnitřní úhel v trojúhelníku při vrcholu  $C$  byl největší možný. K tomu použijeme kosinovou větu, která platí pro každý trojúhelník, tj.

$$(1) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou po řadě délky stran  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  trojúhelníka  $ABC$  a  $\gamma$  je vnitřní úhel v trojúhelníku při vrcholu  $C$ .

Při implementaci algoritmu reprezentujeme výsledný polygonální povrch pomocí ukazatelů do seznamu vrcholů, tj. seznamu bodů vstupní bodové množiny  $\mathcal{X}$ . Každý trojúhelník polygonální sítě je tedy definován trojicí indexů, tj. ukazatelů do  $\mathcal{X}$ . Při určení základního trojúhelníka uložíme indexy vrcholů  $A, B, C$  do seznamu trojúhelníků tvořících polygonální síť, a hrany  $AB, BC, AC$  do fronty, neboť budeme dále určovat, které body vstupní množiny  $\mathcal{X}$  budeme k témtoto hranám připojovat. Aktuální seznam trojúhelníků v triangulaci nazveme *triangles*. Fronta hran je opět reprezentována pomocí ukazatelů do seznamu vrcholů, značíme ji jako *edges*.

Vezměme nyní první hranu  $AB$  z fronty *edges* a určeme bod  $D$  ze vstupní bodové množiny  $\mathcal{X}$ , který společně s hranou  $AB$  vytvoří nový trojúhelník  $ABD$  v povrchové triangulaci. Vhodné kandidáty na bod  $D$  vybíráme z poloprostoru určeného rovinou  $\delta$  kolmou k rovině trojúhelníka  $ABC$ , v němž neleží vrchol  $C$ . Dále omezíme tento výběr podmínkou, že možní kandidáti na bod  $D$  leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami  $\alpha$  a  $\beta$ . Rovina  $\alpha$  obsahuje vrchol  $A$  a je kolmá ke hraně  $AB$ , rovina  $\beta$  obsahuje vrchol  $B$  a je rovněž kolmá ke hraně  $AB$ . Tato podmínka zajistí, že výsledné trojúhelníky v triangulaci mají vnitřní úhly při vrcholech ostré. Výslednou množinu bodů ležících v pásu rovin  $\alpha$  a  $\beta$  značme jako *adept\_points*.

Je-li množina *adept\_points* prázdná, hranu, ke které hledáme vhodný bod, vyřídíme z fronty *edges*, jedná se o okrajovou hranu v povrchové triangulaci. Jinak z množiny bodů *adept\_points* budeme dále na základě několika geometrických pravidel postupně odebírat body, které tato pravidla nesplní, dokud nezískáme jeden bod  $D$ . Pravidla uvedená ve jmenovaných zdrojích [8, 11] jsou následující (používáme rovněž stejné pojmenování):

- pravidlo *prahové vzdálenosti*,
- pravidlo *úhlednosti*,
- pravidlo *maximálního úhlu dvou rovin*,
- pravidlo *maximalizace vnitřních úhlů přilehlých ke hraně AB*.

První pravidlo je založeno na výpočtu vzdáleností každého bodu množiny *adept\_points* od středu hrany  $AB$ . Odstraní se ty body množiny *adept\_points*, které neleží od středu hrany  $AB$  ve vzdálenosti menší než je předem daná prahová vzdálenost  $\lambda$ , která je stanovena experimentálně.

Body splňující první pravidlo, postupují k pravidlu druhému. Nejvhodnější body se vybírají na základě úhlu, který svírá normálový vektor roviny trojúhelníka  $ABC$  s normálovým vektorem roviny trojúhelníka, který by mohl být přidán ke hraně  $AB$  (předpokládáme stejnou orientaci normálových vektorů). Je-li tento úhel ostrý, splňuje uvažovaný bod druhé pravidlo a postupuje dále. Množina bodů *adept\_points* je zúžena o body, pro které vychází příslušné úhyly větší než právě.

Třetí pravidlo vybere z množiny *adept\_points* ten bod, pro který vychází úhel roviny trojúhelníka  $ABC$  s rovinou trojúhelníka, který by mohl být přidán ke hraně  $AB$ , největší možný (tj. nejmenší možný) úhel normálového vektoru

roviny trojúhelníka  $ABC$  s normálovým vektorem roviny trojúhelníka, který by mohl být přidán ke hraně  $AB$ ).

Pokud třetím pravidlem nezískáme pouze jeden bod, tj. existují body, které splňují první a druhé pravidlo a uvažované trojúhelníky svírají s rovinou trojúhelníka  $ABC$  shodný úhel, přichází na řadu poslední čtvrté pravidlo. Jako bod  $D$  se vybere ten bod, pro který menší z vnitřních úhlů trojúhelníka  $ABD$  přilehlých ke hraně  $AB$  vychází větší.

V práci [8] se tato pravidla používají i s předchozími dvěma podmínkami omezení výběru bodů. Po bližším zkoumání je však zřejmé, že pravidlo úhlednosti je zbytečné, neboť jsme toto pravidlo nahradili podmínkou výběru bodů z poloprostoru určeného rovinou  $\delta$  kolmou k rovině trojúhelníka  $ABC$ , v němž neleží vrchol  $C$ , a pravidlem výběru bodů z pásu rovin  $\alpha$  a  $\beta$ . Při použití třetího pravidla maximálního úhlu dvou rovin na našich příkladech se ukázalo, že nedostáváme vždy uspokojivé výsledky. Pravidlo úhlednosti a maximálního úhlu dvou rovin proto nahrazujeme vlastním pravidlem *minimalizace úhlu dvou normál*, [10]. Při konstrukci povrchové triangulace tedy používáme podmínky omezení výběru bodů a pravidla:

- pravidlo *prahové vzdálenosti*,
- pravidlo *minimalizace úhlu dvou normál*,
- pravidlo *maximalizace vnitřních úhlů přilehlých ke hraně AB*.

Nově zavedené pravidlo *minimalizace úhlu dvou normál* funguje následovně. Z bodů, které prošli prvním pravidlem a tvoří nyní množinu *adept\_points*, vybereme nevhodnější bod na základě úhlu, který svírá normála roviny trojúhelníka  $ABC$  s normálou roviny trojúhelníka, který by mohl být přidán ke hraně  $AB$ . Vybráme ten bod, pro který tento úhel vychází nejmenší možný.

Předpokládejme nyní, že jsme použitím těchto pravidel nalezli bod  $D$ . Do výsledné triangulace tedy přidáváme nový trojúhelník  $ABD$ . Zaktualizujeme seznam *triangles* trojúhelníků v triangulaci, tj. přidáme indexy vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $D$  a z fronty *edges* odstraníme hranu  $AB$ . Do fronty hran *edges* přidáme nové dvě hrany  $AD$  a  $BD$ .

V dalším kroku algoritmu vybíráme z fronty *edges* další hranu a opakujeme postup výběru vhodného bodu pro vytvoření dalšího trojúhelníka v triangulaci. Tento postup budeme provádět do té doby, dokud není fronta hran *edges* prázdná.

## 2.1 Ošetření speciálních případů

Pokud se užitím prvního a druhého pravidla naleze pouze jeden bod, další pravidlo se neuplatňuje a tento bod je přidán do triangulace. V případě, že se užitím prvního a druhého pravidla nenaleze žádný vhodný bod, zavádíme nové pravidlo, že hranu, ke které hledáme vhodný bod, prozatím vyřadíme z fronty *edges*.

Při použití navržených geometrických pravidel je nutné ošetřit speciální případy, kdy ve výsledné triangulaci vzniká nežádoucí křížení trojúhelníků. K detekci chybných trojúhelníků v síti a jejich vyřazení navrhujeme použít kontrolu, kolikrát se přidávaná hrana nebo hrana ve frontě *edges* objevuje v triangulaci. Nechť  $ABC$  je trojúhelník, k jehož hraně  $AB$  v daném kroku konstrukce polygonální sítě hledáme bod  $D$ . Rozeberme případy, které mohou nastat při přidání trojúhelníka  $ABD$  do triangulace. Označme hranu  $AD$  jako *left*, hranu  $BD$  jako *right*. Nyní zkoumáme, kolikrát jsou hrany *left* a *right* v aktuální povrchové triangulaci. Jelikož máme dvě hrany *left* a *right* a každá z nich v triangulaci budě ještě není, nebo je jednou, nebo dvakrát, dostáváme celkem 16 případů. Některé případy je možné rovnou vyloučit, protože nenastanou.

Ve čtyřech situacích trojúhelník  $ABD$  do triangulace přidáme, ovšem rozlišíme možnosti doplnění nových hran do fronty *edges*. V případě, že ani jedna z hran *left* a *right* v triangulaci není, doplníme do fronty *edges* obě hrany, v případě, že v triangulaci je již hrana *right*, doplníme pouze hranu *left*, v případě, že v triangulaci je již hrana *left*, doplníme pouze hranu *right* a v případě, že v triangulaci jsou obě hrany *left* a *right*, nedoplňme žádnou hranu, neboť se jedná o vyplnění dfry v povrchové triangulaci. Vždy musíme zároveň kontrolovat, zda se přidáním trojúhelníka  $ABD$  ve frontě hran nedostaneme do situace, že je nějaká hrana ve frontě čekající na zpracování sdílena již dvěma trojúhelníky. Po přidání nového trojúhelníka  $ABD$  do triangulace proto odstraňujeme ty hranы z fronty *edges*, které patří dvěma sousedním trojúhelníkům, neboť každá hrana v triangulaci může být společná nejvýše dvěma trojúhelníkům.

Ve zbývajících případech, by po přidání trojúhelníka  $ABD$  do povrchové triangulace došlo k nežádoucímu křížení nově připojovaného trojúhelníka s již existujícími trojúhelníky v triangulaci. V takovém případě použijeme nově zavedené pravidlo, že hranu  $AB$ , ke které hledáme vhodný bod, prozatím vyřadíme z fronty *edges*.

Tím, že během konstrukce trojúhelníkové sítě některé hrany, ke kterým hledáme bod jako vrchol nového trojúhelníka, vynecháváme, je třeba doplnit další vylepšení konstrukce povrchové triangulace. Pokud totiž k hranám z fronty *edges* v daném kroku konstrukce nenalezneme vhodný bod jako třetí vrchol nového trojúhelníka, nemusí to znamenat, že by vhodný bod neexistoval. Proto může po použití všech hran z fronty *edges* docházet k tomu, že se nevytvoří celý povrch.

Pro řešení této situace zavádíme proto nově možnost restartování konstrukce trojúhelníkové sítě. To znamená, že dostaneme-li se nakonec fronty *edges*, již nemáme hranu, ke které bychom hledali vhodný vrchol nového trojúhelníka, spustíme proces tvorby sítě znova pro novou frontu hran. Nová fronta hran, označme ji *new\_edges*, bude tvořena hranami, které již v povrchové triangulaci jsou, ovšem patří pouze jednomu trojúhelníku, tj. jsou to okrajové hrany děr nebo okrajové hrany sítě. Jedná-li se o hrany, které

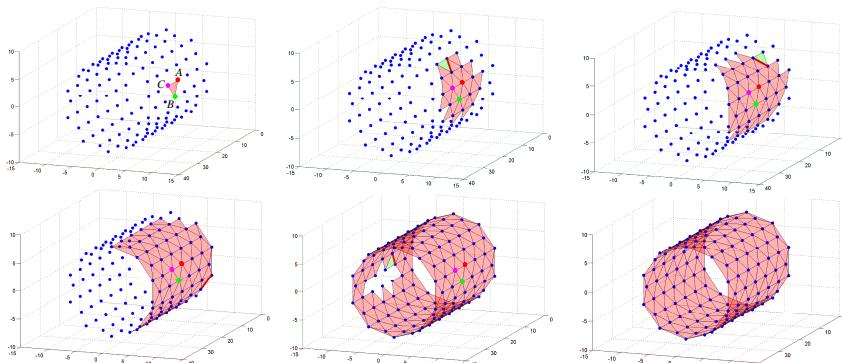
skutečně tvoří okraj výsledného triangulovaného povrchu, další postup konstrukce sítě tyto hrany vyřadí z fronty *new\_edges*. Restartování procesu tvorby povrchové triangulace může být spuštěno vícekrát, počet tzv. restartů je řízen uživatelem na základě vizuálního posouzení dosavadní triangulace. Jsou-li všechny body vstupní množiny zpracovány, tj. naleží alespoň jednomu trojúhelníku, a triangulace neobsahuje díry, proces tvorby je zastaven.

Nutno podotknout, že při použití inkrementální konstrukce sítě můžeme teoreticky narazit na další typy nežádoucího křížení trojúhelníků. Například mohou vznikat trojúhelníky, které mají společný vrchol a jejich roviny svírají velmi malý úhel. Řešení takové situace je již velmi komplikované. Při testování algoritmu na bodových množinách, které jsme měli k dispozici, však k takovému křížení nedocházelo. V budoucí práci plánujeme tyto speciální případy také osetřit.

## 2.2 Experimentální vyhodnocení

Příklady konstrukce povrchové triangulace si nyní ukažme na několika příkladech vstupních bodových množin.

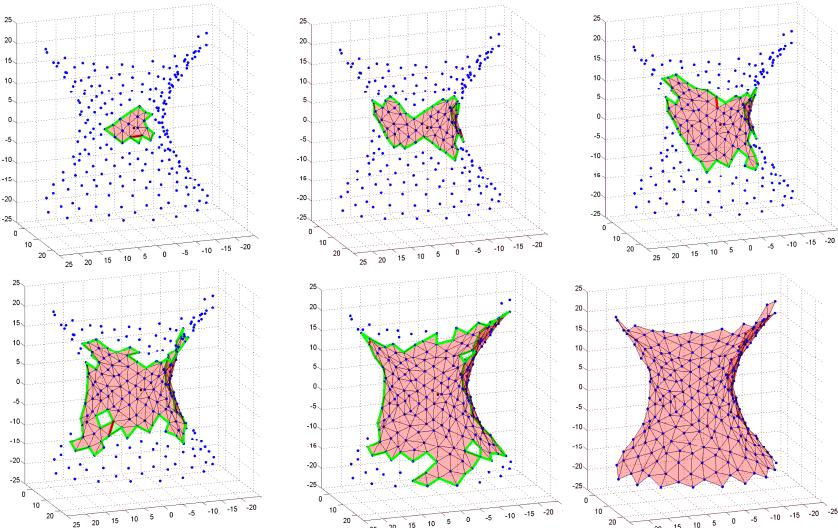
V prvním případě se jedná o body, které jsou rozloženy pravidelně na části rotační válcové plochy, jak vidíme na obrázku 1, kde je rovněž zakreslen základní trojúhelník, od kterého začíná postupná konstrukce sítě. Obrázek znázorňuje postupný výpočet trojúhelníkové sítě, přičemž je vždy zvýrazněna hrana, ke které se v daném kroku hledá vhodný vrchol nového trojúhelníka.



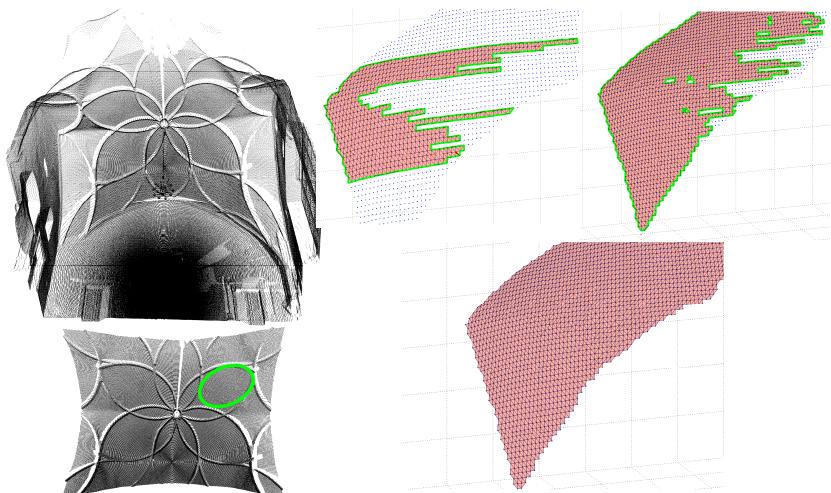
**Obr. 1:** Postupná konstrukce trojúhelníkové sítě pro body pravidelně rozmištěné na části rotační válcové plochy

Další bodová množina je získána z povrchu rotačního jednodílného hyperboloidu. Původní pravidelná síť bodů je ve všech souřadnicových směrech zašuměna. Zde se již jedná o množinu bodů, kdy je nutné použít restartování procesu konstrukce sítě. Na obrázku 2 je vidět postupná konstrukce

trojúhelníkové sítě v několika okamžicích, kdy se konstrukce sítě zastaví a proces tvorby sítě se restartuje, a výsledek povrchové triangulace.



**Obr. 2: Postupná konstrukce trojúhelníkové sítě pro zašuměnou množinu bodů získanou z části povrchu rotačního jednodílného hyperboloidu s nutností restartování procesu tvorby sítě**



**Obr. 3: Část bodové množiny reprezentující interiér Vladislavského sálu na Pražském hradě a inkrementální konstrukce triangulace části bodové množiny**

V posledním případě se již jedná o reálnou množinu bodů, která byla získána skenováním interiéru Vladislavského sálu na Pražském hradě, viz obrázek 3.

### 3 Závěr

V článku jsme prezentovali modifikovaný inkrementální algoritmus tvorby polygonální sítě reprezentující povrch daný mračnem bodů. V další práci hodláme ošetřit speciální případy křížení trojúhelníků v povrchové triangulaci a použít oktantový strom pro reprezentaci vrcholů. Rovněž plánujeme pokračovat v analýze dalších typů vstupních bodových mračen a rozvoji výpočetních postupů, které by bylo možné využít v procesu digitální rekonstrukce povrchů.

### Literatura

- [1] M.-E. Algorri, F. Schmitt: *Surface Reconstruction from Unstructured 3D Data*, Computer Graphics Forum, Volume 15 (1), pp. 47-60, John Wiley & Sons, 1996
- [2] Ch. L. Bajaj, F. Bernardini, G. Xu: *Reconstructing Surfaces and Functions on Surfaces from Unorganized 3d Data*, Algorithmica, Volume 19, pp. 243-261, Springer, 1997
- [3] T. K. Dey: *Curve and Surface Reconstruction*, Cambridge University Press, USA, 2007
- [4] H. Edelsbrunner: *Geometry and Topology for Mesh Generation*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2001
- [5] P. Fua, P. T. Sander: *Reconstructing Surfaces from Unstructured 3D Points*, Proceedings Image Understanding Workshop, San Diego, USA, pp. 615-625, 1992
- [6] A. Iske: *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2004
- [7] A. Jeměljanov: *Surface Reconstruction from Clouds of Points*, Doctoral Thesis, Universiry of West Bohemia in Pilsen, Faculty of Applied Sciences, Czech Republic, 2004
- [8] I. Pešková: *Povrchové triangulace*, bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Česká republika, 2011
- [9] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian: *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, USA, 2007
- [10] P. Surynková: *Analýza bodových množin reprezentujících povrhy technické praxe*, disertační práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Česká republika, 2014
- [11] S. Yu, Y. Wei, K. He, X. Yu: *A New Direct Triangulation Method for Surface Unorganized Points*, Information Technology Journal, Volume 9 (7), pp. 1421-1425, Asian Network for Scientific Information, 2010

# E-learning – descriptive geometry & engineering graphics

Ewa Terczyńska<sup>1</sup>, Krzysztof Tytkowski<sup>2</sup>

*Geometry and Engineering Graphics Centre, SUT, ul. Krzywoustego 7, 44-100 Gliwice,  
Country code (PL), <sup>1</sup>email: ewa.terczynska@polsl.pl <sup>2</sup>email: krzysztof.tytkowski@polsl.pl*

**Abstract.** Thanks to e-learning, modern methods of teaching can be employed. The authors of the article present their reflections on the topic as well as ready elements of the proposed general solution which uses opportunities related to the development of e-learning courses supporting traditional teaching methods. The proposed solution concerns issues connected with descriptive geometry and technical drawing. The article demonstrates two examples related to the subjects of axonometry and multiview orthographic projections: first angle projection (ISO).

*Keywords:* *e-learning, descriptive geometry, engineering graphics, GeoGebra*

## Introduction

E-learning has become popular in the recent years mainly due to the greater access to the Internet and the increased bandwidth, which are the basic conditions enabling the use of educational resources. According to the Regulation of the Minister of Science and Higher Education, nowadays in Poland there is no possibility to complete higher education in a remote mode [9]. The idea of remote learning is not a novel one. It has always been possible to obtain proper handbooks and learn the given material on one's own. The popularity of television has given rise to the realisation of various types of TV courses, e.g. a course by Professor Marian Palej (his geometry classes were a pioneer method when we look at them from today's perspective). His team included Z. Sowiński and M. Bietkowski. Another course was developed by Franciszek Otto [7]. There remain printed materials [1] (Palej, Sowiński) and video tapes from the courses, partly available in a digital form [7]. The issues related to new trends of teaching geometry can be found in a work by multiple authors [6]. Nevertheless, the book does not take into consideration the latest trends connected with teaching methods and technical opportunities.

## 1 Delivery methods

Various methods of delivering technical knowledge are in use currently. The classification presented at [www.koweziu.edu.pl](http://www.koweziu.edu.pl) [8] does not fully correspond to the goals of teaching geometry and technical drawing, therefore, the authors have modified it slightly. Delivery methods can be divided according to the delivery language:

- text – verbal description, in a written form, shaping imagination
- sounds – auditory description, shaping imagination

- image – illustrations aiming to convey a greater amount of information in a shorter time, boosting imagination, e.g. the rule or examples of orthographic projections, perspective projections, elevation projections, etc.
- 3D-imitating images – illustrations aiming to convey information in a geometric form, taking into account three dimensions, e.g. anaglyphs
- physical models and experiments.

Division according to the medium used:

- paper – the learner can always go back to any fragment of the textual or visual message (illustrations), notes, books
- speech – a spoken lecture or an e-book (audiobook)
- presentation – a board, a projector; the lecturer decides which part of information is available at the particular moment and which is dismissed for technical reasons
- physical models' materials – to convey information about geometric features, e.g. metal, glass, plastic, paper, cardboard
- electronic media – their properties resemble the properties of paper, but they require proper software and the ability to use it, e.g. to enlarge the description of a website; the learner decides what remains on the screen and for how long, by viewing or omitting a chosen fragment or by stopping the presentation or film.

Division according to the type of access:

- static – websites, traditional books
- dynamic – videos, flash websites, animated illustrations (GIFs), etc.; the users can go back to a particular fragment but they need to, for example, replay the video or refresh the website
- interactive – websites and programmes whose parameters can be changed or modified; the decision to go to the next part of the material is taken by the learner.

Technological changes allow the increase of the scope of possibilities of various delivery methods. The older methods of teaching various subjects, especially geometry, can be enriched with new technologies.

## 2 KPE Platform

Remote learning platforms are used in a majority of universities in Poland and in the world. The authors have run descriptive geometry and technical drawing courses for many years: at various faculties, in various thematic scopes and time frames. The KPE Platform developed by them completes the courses which are still realised full-time in the traditional mode; moreover, it simplifies the communication between teachers and students. At present, the authors are working on the extension to the platform's functionality, which is the monitoring of learning progress. This work has been a result of the didactic experience gathered by the authors and their frequent discussions about the

adaptation of modern technologies to the needs and requirements of students. The Ministry of Science and Higher Education has introduced the notion of “blended learning” as a method which facilitates learning through an effective blending of various delivery methods, teaching models, and learning styles [3]. The authors have decided to develop a distance learning platform supporting the teaching of geometry and engineering graphics. The works on the project comprise multiple stages and this article presents the latest stage.

The detailed premises of the whole project [3] have been developed by the team consisting of the authors and Piotr Dudzik.

The characteristics which the KPE Platform should contain (their names are conventional and should reflect the nature of a particular module) have been presented in more detail in another paper [3]. The realisation of one of the stages was presented at the 21<sup>st</sup> Conference Geometry Graphics Computer in Sopot in 2014 [4].

The basic assumption of the project is to develop the following modules for each topic:

- lecture – introduction to the given part of material in a verbal form and by means of static images or films illustrating the material as well as 3D models
- basic classes – solving tasks step by step, modification of an assumption and observation of the changes occurring in the solution
- examples – a set of exercises preparing for the test
- test – verification of the learner’s knowledge on the given material [4].

### **3 Lecture and classes**

As the tests related to the topics of axonometric and orthographic projection (six projections) had already been developed, these topics were the first to require the preparation other modules, including the lecture. The KPE Platform will be launched as soon as all the other modules have been prepared. It is assumed that the learner has become acquainted with the issues related to the particular topic during the lecture and the materials prepared will help him or her master the given part of the material. The materials will also have a form of well-organised notes which can be later printed or revisited many times.

#### **3.1 Multiview orthographic projections: first angle projection**

To analyse this topic properly, one needs spatial imagination: the ability to imagine, examine, complete, and describe the shape and position of geometric objects on the basis of a drawing, model, or description [11]. One of the methods enhancing the process of correct associating and the development of spatial thinking is the use of models as means to represent reality. The use of models, initially through watching and constructing, and then through creating

their projections, sections, and axonometric views, enables flexibility in the work on the process of the development of spatial intelligence.

The method of step-by-step solving of tasks introduced by the authors shows the way of constructing spatial forms based on the addition subsequent elements (from the simplest to the most complex ones) so that the learner can observe the modifications in the virtual model. The elements added to the axonometric drawing are automatically saved in the orthographic projections, thanks to which the learner is able to track the alterations directly and to learn by the analysis of the steps with the possibility of going back to the previous position (if the learners do not understand something, they can return to an earlier step).

Adding and removing particular elements of the solid is related to the spatial awareness of the learner and the ability to map shapes in adequate projections. Basing on the number of projections, it is possible to determine the appropriate shape. The proposed set of elements – used in the process of the model construction – illustrates the elimination of the possible solutions depending on the number of the projections which are turned on. When the subsequent projections are turned on, the scope of possible solutions is reduced, which leads to the obtaining of the only correct picture. It is also possible to turn off the invisible edges, which is usually required if PN (Polish Norm) is used. At this stage, the sample drawings are monochromatic, as the solids are relatively simple (they do not have many faces) and situated in several planes only.

In the case of more difficult issues, the illustrations are colourful, to facilitate the identification of various planes of the element. Where axonometry is turned on and the task of the learner is to determine the projections for the solid. The shape of the model depends on the number of elements used. By moving the a-b-c sliders from 0 to 12 one can change the elements to more and more complicated. By turning off the preview of the projections, the learner can think of the solution and then verify the projections he or she has imagined.

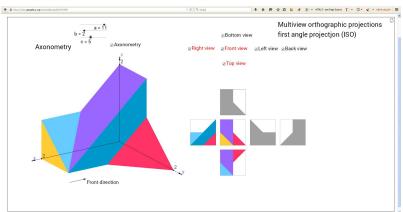
### 3.2 Axonometric projection

When creating and reading axonometric projections, it is necessary to analyse the geometric properties of the represented elements. This process cannot be described in a simple manner with an algorithm. Therefore, a seemingly simple task may cause a big difficulty to someone inexperienced. The only method to understand a given scope of material is to solve at least several tasks.

Undoubtedly, the construction of a model represented by orthographic projections is a difficult task (Fig. 1). To solve the task correctly, one needs to imagine a 3D solid and then combine the flat views into a real spatial image. At an initial stage, the chance to construct a physical or virtual model of the solid may facilitate the process. At this stage, the elements of the 4.1 module may prove helpful, as they present the relation of the 3D shape and the projections. Obviously, the best solution would be to employ one of the techniques which

imitate three dimensions, e.g. anaglyph, polarised sunglasses and an adequately modified image [5].

However, these methods require the use of additional equipment and the 3D effect can be achieved only if some conditions are met (the observer is adequately positioned in relation to the image). For many people unaccustomed to this type of images, watching them for a longer time may have a negative impact on their wellbeing. Therefore, the authors have decided to use the movement of the object in relation to the observer as a factor which intensifies the 3D effect. Such approach was partly tested during traditional lectures involving the use of computers and during consultations in the previous years. Positive learning outcomes were also observed during individual work which made it possible to modify individual assumptions many times and to watch the change of the solution.



**Fig. 4 Axonometry and all the views are turned on.**

that the three projections (in colour) will be chosen each time.

The system employed is based on applying various colours to various planes, which makes the identification easier in comparison to monochromatic drawings. The learner, using the static information obtained during the lecture and studying the subject, can practice the creation of projections. It is assumed

## 4 Conclusions

The progress of technology requires that both the teacher and the learner learn constantly. Numerous topics, understandable for professionals with ample experience, need to be presented in a short, concise, and clear way. Therefore, we continue to search for new solutions which can improve the process of learning. Every new suggestion is verified by the achieved learning outcomes. In the process of education, one of the most important aspects is the time which must be spent on the implementation of a new method [2]. In many cases, the work does not bring the expected effects, which, in turn, may discourage persons preparing new solutions. The appreciation of such activities by authorities and the proper promotion are also of importance.

Based on experience, plenty of advantages of the introduction of remote learning to traditional classes have been observed:

- Constant access to the subject materials regardless of time and place
- Opportunity to analyse mistakes and their instant correction
- Self-control and self-evaluation of learning progress by means of tests
- The recurrence of the course content – once prepared materials can be used multiple times
- Easier contact with students.

The main disadvantage of the preparation of materials for distance learning is the workload. This particularly applies to the materials created for individual learning in the form of tests. Nonetheless, the possibility of the multiple use of once prepared materials compensates for the effort one has to invest in the beginning of the work. The conclusions related to the functioning and use of the platform can be formulated only after it has been fully launched, however, the authors' experience in the employment of such form of control in the teaching of other subjects proves that this is a correct direction of the development of the didactic offer in the dynamically changing times.

## 5 References

- [1] Palej M, Sowiński Z: *Materiały pomocnicze do repetycji telewizyjnych z geometrii wykresłnej* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1978
- [2] Pütz C, Intveen G.: *Facilitating individual learning processes with advanced instructions* Proceedings of 22<sup>nd</sup> CGGC, Cracow 2015 p.72-73
- [3] Dudzik P., Terczyńska E., Tytkowski K.: *KPE Platform as the answer to the changes in the process of educating engineers*, Proceedings of 21<sup>st</sup> CGGC, Sopot 2014, p. 11-12
- [4] Dudzik P., Terczyńska E., Tytkowski K.: *KPE Platform – realization – engineering graphics tests part 1*, Proceedings of 21<sup>st</sup> CGGC, Sopot 2014, p 15-16
- [5] Otto E, Otto F: *Podręcznik geometrii wykresłnej*, PWN Warszawa, 1975
- [6] Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> Century, Springer Science + Business Media, B.V 1998
- [7] <http://www.pg.gda.pl> (28.07.2015)
- [8] [www.koweziu.edu.pl](http://www.koweziu.edu.pl) (28.07.2015)
- [9] Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 25.09.2007r. w sprawie warunków, jakie muszą być spełnione, aby zajęcia dydaktyczne na studiach mogły być prowadzone z wykorzystaniem metod i technik kształcenia na odległość
- [10] Bogacki S., Terczyńska E.: *The LMS Platform as the Tool of Checking progress the Learning Engineering Graphic*, The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics , PTGiGI Volume 22/ June 2011 Gliwice, Poland
- [11] Sroka – Bizoń M., Terczyńska E.: *Percepcja widzenia - jak kształtać wyobraźnię przestrenną?* Proceedings of 19<sup>th</sup> CGGC, Ustroń 2012, Poland

# Geometrické priestory

## Geometric spaces

Ludovít Tománek

*Department of Mathematics, Faculty of Humanities, University of Žilina,  
Univerzitná 8215/1, 01026, Žilina, Slovak Republic  
email: ludovit.tomanek@fhv.uniza.sk*

**Abstract.** We precisely describe affine and projective spaces in this paper, we also state some of the relations between affine and projective spaces. Projective spaces, or more precisely projective extensions of the affine spaces  $A_n$  over  $\mathbf{R}$  or  $\mathbf{C}$  are suitable to be used for the classification of real quadratic forms.

**Keywords:** points, vectors, linear dependence, independence of points, isomorphism vector spaces

**Kľúčové slová:** body, vektory, lineárna závislosť, nezávislosť bodov, izomorfizmus vektorových priestorov

### 1 Afinný a projektívny priestor

Geometrické priestory sú vektorové priestory spĺňajúce ďalšie podmienky, napr. existenciu symetrickej pozitívnej definitnej bilineárnej formy na vektorovom priestore. Taky mi sú unitárne, euklidovské a metrické priestory. Afinné priestory legalizujú základný geometrický pojem bod a projektívne priestory vlastné a nevlastné body.

Nech  $A$  je neprázdna množina,  $V$  je vektorový priestor nad  $T$ ,  
 $+ : A \times V \rightarrow A$  je operácia medzi prvkami množín  $A$ ,  $V$ . Trojicu  $(A, V, +)$  nazývame *afinný priestor nad  $T$* , symbolicky  $A(V)$ , ak platia podmienky:

- (a)  $(a)+\mathbf{0}=(a), ((a)+\mathbf{u})+\mathbf{v}=((a)+(\mathbf{u}+\mathbf{v})), \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  pre  $(a) \in A$ ;
- (b) ku každej dvojici  $(a), (b) \in A$  existuje práve jeden prvak  $\mathbf{u} \in V$  taký, že  $(a)+\mathbf{u}=(b)$ .

Prvky  $(a), (b) \in A$  nazývame body,  $\mathbf{u} \in V$  vektory,  $\dim A(V) = \dim V$ ,

Systém  $P_n = P(V_{n+1})$  nazývame  $n$  - rozmerný projektívny priestor, ak platia podmienky:

- (a)  $P$  je množina bodov;
- (b)  $V_{n+1}$  je vektorový priestor;
- (c) existuje bijectívne zobrazenie  $\varphi : \{[\mathbf{u}] | \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V_{n+1}\} \rightarrow P_n$ .

Prvky množiny  $P_n$  nazývame geometrické body, nenulové vektory vektorového priestoru  $V_{n+1}$  nazývame aritmetické body.

Každý vektor  $\mathbf{0} \neq (x_0, x_1, \dots, x_n) \in V_{n+1}$  je aritmetický reprezentant geometrického bodu  $\varphi([x_0, x_1, x_2, \dots, x_n])$ .

Projektívny priestor  $P_k$  je podpriestorom projektívneho priestoru, ak  $P_k \subseteq P_n$  súčasne  $V_{k+1} \subseteq V_{n+1}$ , zobrazenie  $\psi$  prislúchajúce k  $P_k$  je reštrikcia zobrazenia  $\varphi$  na množinu  $\{[\mathbf{u}]|\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V_{n+1}\}$ .

Geometrické body  $\varphi([\mathbf{u}])$  projektívneho priestoru  $P_n$  nad polom  $T$  označíme  $[\mathbf{u}]$ , aritmetického reprezentanta ( $\mathbf{u}$ ).

Z definície afinného priestoru bezprostredne vyplývajú jednoduché tvrdenia:

- (i) Afinný priestor  $B(W)$  je podpriestor affinného priestoru  $A(V)$ , ak  $B \subseteq A$ ,  $W \subseteq \subseteq V$ .
- (ii)  $B(W)$  je podpriestor affinného priestoru  $A(V)$  vtedy, ak pre každé body  $(a), (b) \in W$ , pre každý vektor  $\mathbf{u} \in B$ ,  $(b)-(a) \in W$ , súčasne  $(a)+\mathbf{u} \in B$ .
- (iii) Trojica  $(A, V_n, +)$  je  $n$ -rozmerný affinný priestor nad  $T$ ,  $A(V_n) = A_n$ .

Z definície projektívného priestoru bezprostredne vyplýva:

- (i) Každému aritmetickému bodu  $(\mathbf{u})$  odpovedá práve jeden geometrický bod  $[\mathbf{u}]$ , ale každý geometrický bod  $[\mathbf{u}]$  má nekonečne veľa aritmetických reprezentantov  $(\mathbf{u})$ .
- (ii) Zobrazenie  $\varphi$  vlastnosti množiny  $\{[\mathbf{u}]|\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V_{n+1}\}$  mechanicky prenáša na množinu  $P_n$ , preto pri štúdiu abstraktných vlastností projektívneho priestoru  $P_n$  sa môžeme obmedziť na množinu  $\{[\mathbf{u}]|\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in V_{n+1}\}$  a považovať zobrazenie  $\varphi$  za identické.

## 2.1 Model $n$ -rozmerného projektívneho priestoru

Nech  $T$  je pole,  $\text{char } T=0$ ,  $F=T^{n+1}-\{(0, 0, \dots, 0)\}$ ,  
 $(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_n) \in F$ . Hovoríme, že body sú v relácii  $R$  na  $F$ ,  
 $(x_0, x_1, x_2 \dots, x_n)R(y_0, y_1, y_2 \dots, y_n)$ , ak  $x_i = ky_i$ ,  $0 \neq k \in T$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, n$ .

Veta 1.

Nech  $\text{char } T=0$ ,  $F=T^{n+1}-\{(0, 0, \dots, 0)\}$ ,  $R$  je binárna relácia na  $F$ , potom:

- (i)  $R$  na  $F$  je ekvivalencia na  $F$ ;
- (ii) systém  $F|R$  je rozklad množiny  $F$ ;
- (iii)  $(F|R)(T^{n+1})$  je  $n$ -rozmerný projektívny priestor  $P_n$ .

Dôkaz.

(i) Nech  $\text{char } T=0$ . Zrejmé, binárna relácia  $R$  na  $F=T^{n+1}-\{(0, 0, \dots, 0)\}$  je reflexívna, pretože

$$(x_0, x_1, x_2 \dots, x_n)R(x_0, x_1, x_2 \dots, x_n) \Leftrightarrow (\exists 0 \neq k=1)(x_i = kx_i, i=0, 1, \dots, n).$$

$$\text{Ak } (x_0, x_1, x_2 \dots, x_n)R(y_0, y_1, y_2 \dots, y_n) \Leftrightarrow (0 \neq k \in T)(x_i = ky_i, i=0, 1, \dots, n) \Rightarrow (y_0, y_1, y_2 \dots, y_n)R(x_0, x_1, x_2 \dots, x_n) \Leftrightarrow (\exists 0 \neq k_1 = \frac{1}{k})(y_i = kx_i, i=0, 1, \dots, n).$$

$\in T)(y_i = k_1 y_i, i=0,1, 2, \dots, n)$ , teda  $R$  je symetrická.

Ak  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)R(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow (\exists 0 \neq k \in T)(x_i = ky_i)$

súčasne  $(y_0, y_1, \dots, y_n)R(z_0, z_1, \dots, z_n) \Leftrightarrow (\exists 0 \neq r \in T, y_i = rz_i) \Rightarrow$

$(x_0, x_1, \dots, x_n)R(z_0, z_1, \dots, z_n) \Leftrightarrow (\exists 0 \neq k \in T)(x_i = krz_i), i=0,1, 2, \dots, n$ ,  
 $R$  je tranzitívna. To dokazuje, že  $R$  je ekvivalencia .

(ii)  $R$  je ekvivalencia, podľa vety 2,3[8]  $F|R$  je rozklad množiny  $F$ .

(iii)  $F|R$  je rozklad množiny  $F$ ,  $(0, 0, \dots, 0) \notin F|R$ , podľa definície projektívneho priestoru  $(F|R)(T^{n+1})$  je  $n$ -rozmerný projektívny priestor  $P_n$ . ■

## 2.2 Projektívne rozšírenie affinného priestoru

V niektorých prípadoch je výhodnejšie pracovať s homogennými projektívnymi súradnicami.

Zložky  $x_i, i=0,1,2,\dots, n$  bodu  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in P_n$  nazývame projektívne homogénne súradnice, zložky  $a_i = \frac{x_i}{x_0}, i=1,2,\dots, n$  bodu  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$  nazývame nehomogénne súradnice, ak  $x_i, i=0,1,2,\dots, n$  sú homogénne súradnice vlastných bodov  $P_n$ .

Reprezentanty  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_0 \neq 0$  odpovedajú vlastnému bodom  $P_n$ ,  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_0 = 0$  nevlastným geometrickým bodom  $P_n$ .

### Príklad 1

Nech  $A_1 = A(V_1)$ ,  $x - 1 = 0$  je rovnica afinnej priamky  $p$ . Uvažujme  $A_2 = A(V_2)$  2-rozmerný affinný priestor. Zvoľme súradnicovú sústavu  $S = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$  so začiatkom  $(0,0)$ , kanonickou bázou  $\{(1,0), (0,1)\}$ , osami:  $x = (0,0) + [(1,0)]$ ,  $y = (0,0) + [(0,1)]$ . Affinná priamka  $p$  o rovnici  $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  je rovnobežná s osou  $y$  a prechádza bodom  $(1,0)$ . Ak zvolíme na priamke  $p$  súradnicovú sústavu  $S' = \{(1,0), (0,1)\}$ , potom priamka  $q = (0,0) + [(r,s)]$  v rovine  $A_2$  pretne priamku  $p$  v bode, pre ktorého súradnice vzhľadom k  $S'$  platí  $\frac{s}{r}$ . Vidíme, že každý bod priamky  $p$  je jednoznačne určený smerom v  $A_2$  a naopak, každému smeru  $[(r,s)]$ ,  $0 \neq r$  je jednoznačne určený bod priamky  $p$ . Smeru  $[(0,1)]$ , ktorého reprezentant je  $(0,1)$ , neodpovedá žiadny bod affinnej priamky  $p$ . Ak rozšírieme množinu  $A$  o smery  $[(0, x_1)]$ , potom projektívny priestor  $P_1 = \tilde{A}(\tilde{V}_2)$  je projektívne rozšírenie affinného priestoru  $A_1$ .

Majme dva body  $a, b$  na priamke  $p$ ,  $\{a\}_{S'} = x$ ,  $\{b\}_{S'} = y$ . Bod  $a$  má smer  $[(1, x)]$ ,  $b$  má smer  $[(1, y)]$ , zistíme, ktorý bod priamky má smer  $[(r, rx) + (s, sy)]$ ,  $r, s \neq 0$ . Ak  $r + s \neq 0$ ,  $(r + s, rx + sy) = (r + s, (r + s)(x + \frac{s}{r+s}(x - y)))$ , potom smerom  $[(r, rx) + (s, sy)]$  je jednoznačne určený bod  $c$  priamky  $p$ , ktorého súradnice  $\{c\}_{S'} = (x + \frac{s}{r+s}(x - y))$ , t.j. bod  $c = (a + \frac{s}{r+s})(a - b)$ . Ak  $r + s = 0$ ,  $(r + s, rx + sy) = (0, r(x - y))$ , potom  $[(r, rx) + (s, sy)]$  je určený nevlastný bod  $[r(x - y)]$ , t.j. smer  $[(a - b)]$ .

Toto použijeme v nasledujúcej konštrukcii.

*K danému afinnému priestoru  $A_n = A(V_n)$  zostrojíme projektívne rozšírenie afinného priestoru  $A_n$ , ktorý je izomorfný s vlastnou podmnožinou priestoru  $P_n$ .*

Nech  $A_n = A(V_n)$  je afinný priestor,  $N$  množina smerov nevlastných bodov vektorového priestoru  $V_n$  a  $\tilde{A} = A \cup N$ .

Na  $V_{n+1} = \tilde{V}_n \cup \{ra \mid a \in A, r \in T\}$  definujme štruktúru vektorového priestoru nasledovne:

$$\begin{aligned} ra + sb &= r(x - y), && \text{pre } r + s = 0, \\ ra + sb &= (r + s, (r + s)(x + \frac{s}{r+s}(y - x))), && \text{pre } r + s \neq 0, \\ ra + u &= r(a + \frac{1}{r}u), \\ s(r \cdot a) &= (sr) \cdot a, \\ 0(r \cdot a) &= \mathbf{0} \in V_n, \text{ pre } a, b \in A, 0 \neq r, s \in T. \end{aligned}$$

Zrejme,  $+$  je binárna operácia na  $V_n$ ,  $\cdot$  je operácia medzi prvkami  $V_n$ ,  $T$ . Prvky  $ra$  nemajú žiadny vlastný význam v afinnom priestore  $A_n = A(V_n)$ , preto je vhodné ich považovať ako dvojicu  $(r, a)$ . Ľahko zistíme, že množina  $V_{n+1}$  je vektorový priestor nad  $T$  a  $\dim V_{n+1} = n + 1$ .

Ak  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  je ľubovoľná báza  $V_n$ ,  $P_n$  je projektívny priestor,  $(a)$  je ľubovoľný prvek  $A_n$ , potom  $r(a) + \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{u}_i = 0$ ,  $0 = r = r_i, i = 1, 2, \dots, n$ , sústava  $(a), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in V_{n+1}$  je lineárne nezávislá. Pre ľubovoľný prvek  $(b) \in A$ ,  $0 \neq r \in T$  je  $(b) - (a) = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{u}_i$ ,  $r_i \in T$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , tiež  $r(b) = r(a) + \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{u}_i$ . To znamená, vektory  $(a), \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  generujú  $V_{n+1}$ , preto  $\dim V_{n+1} = n + 1$ .

Ak zvolíme zobrazenie  $\varphi([\mathbf{u}]) = [\mathbf{u}]$ , pre  $\mathbf{u} \in V_n$ ,  $\varphi([r(a)]) = [a]$ , pre  $(a) \in A$ ,  $0 \neq r \in T$ , zrejme,  $\varphi$  je vzájomne jednoznačné zobrazenie všetkých smerov vektorového priestoru  $V_{n+1}$  na množinu  $\tilde{A}$ .

Uvedené výsledky sformulujeme do definície.

*Projektívny priestor  $\tilde{A}(V_{n+1})$  je projektívnym rozšírením afinného priestoru  $A_n = A(V_n)$ , ak  $\tilde{A} = A \cup N$ ,  $\tilde{A}$  je množina všetkých smerov vektorového priestoru  $V_n$ ,  $V_{n+1} = \tilde{V}_n \cup \{r(a) \mid (a) \in A, r \in T\}$ .*

*Body množiny  $A$  nazývame vlastné body, množiny  $N$  nevlastné body priestoru  $\tilde{A}(V_{n+1})$ .*

Veta 2.

*Množina  $P^v$  vlastných aritmetických bodov projektívneho priestoru  $P_n$  s operáciami;*

$$\oplus: [1, x_1, x_2, \dots, x_n] \oplus [1, y_1, y_2, \dots, y_n] = [1, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

$$\odot: r \odot [1, x_1, x_2, \dots, x_n] = [1, r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n], \quad r \in T, \quad \text{je vektorový priestor nad polom } T \text{ charakteristiky 0.}$$

Dôkaz.

Overíme platnosť podmienok (1) až (7) definície 15.1[8]. Operácia  $\oplus$  je binárna operácia na  $P^v$ , komutatívny a asociatívny zákon binárnej operácie  $\oplus$  je indukovaný komutatívnym a asociatívnym zákon binárnych operácií  $+$ ,  $\cdot$  na  $T$ , trieda  $[1,0,0 \dots, 0]$  je neutrálny prvok, pre ľubovoľnú triedu  $[1, x_1, x_2 \dots, x_n]$ . Podmienky (1) až (3) platia.

Zrejme, trieda  $[1, -x_1, -x_2 \dots, -x_n] = -[1, x_1, x_2 \dots, x_n]$  je opačný prvok k triede  $[1, x_1, x_2 \dots, x_n]$ . Systém  $(P^v, \oplus)$  je komutatívna grupa.

$\odot$  je operácia prvkov množín  $P^v$ ,  $T$ . Rovnosť

$r \odot ([1, x_1, x_2 \dots, x_n] \oplus [1, y_1, y_2 \dots, y_n]) \odot [1, x_1, x_2 \dots, x_n] \oplus r \odot [1, y_1, y_2 \dots, y_n]$  overíme tak, že vypočítané strany porovnáme. Rovnosť implikuje platnosť podmienky (4). Analogicky overíme platnosť podmienok (5) až (7). ■

Veta 3

*Vektorový priestor  $P^v$  a affinný priestor  $A_n$  sú izomorfné nad polom  $T$ .*

Dôkaz.

Zvoľme zobrazenie  $f: P^v \rightarrow A_n$  tak, že  $(1, x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Zrejme,  $f$  je injekcia a surjekcia, teda  $f$  je bijekcia, t.j.  $P^v \cong A_n$ . Ukážeme, že  $f$  je homomorfizmus.

$$f((1, x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus (1, y_1, y_2, \dots, y_n)) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

$f((1, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ . Platnosť pravých strán implikuje, že  $f$  zachováva binárne operácie  $\oplus$ ,  $+$  na priestoroch  $P^v$ ,  $A_n$ . Podobne,

$f(r \odot (1, x_1, x_2, \dots, x_n)) = r \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f((1, r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, x_n)) = (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n)$  implikuje, že  $f$  zachováva operácie  $\odot$ ,  $\cdot$  na priestoroch  $P^v$ ,  $A_n$ . Teda  $f$  je izomorfizmus, t.j.  $P^v \cong A_n$ ,  $\dim P^v = \dim A_n = n$ . ■

### 3 Záver

Množina vlastných a nevlastných aritmetických bodov  $P$  spolu s binárnou operáciou  $\oplus$  a operáciou  $\odot$  nie je vektorový priestor nad polom  $T$ , lebo trieda  $[0, x_1, x_2, \dots, x_n]$  nemá opačný prvok. Zrejme, projektívny priestor  $P_n$  nemá nulový prvok, preto lineárnu závislosť, resp. nezávislosť bodov definujeme pomocou hodnosti matice a nezávisí od výberu reprezentantov.

## Literatúra

- [1] L. Boček: *Analytická geometria kuželosečiek*. SPN, Bratislava, 1983.
- [2] L. Bican: *Lineárni algebra*, Praha, SNTL, 1979.
- [3] G. Birkhoff, S.G. Mac Lane: *Prehľad modernej algebry*, Bratislava, Alfa 1979.
- [4] G. Birkhoff, S.G. Mac Lane: *Algebra*. Bratislava, Alfa 1972.
- [5] J. Čižmár: *Grupy geometrických transformácií*, Bratislava, Alfa 1984.
- [6] K. Svoboda: *Analytická geometria I*, SPN Praha, 1969.
- [7] K. Svoboda: *Analytická geometria II*, SPN Praha, 1969.
- [8] L. Tománek: *Grupy , okruhy a vektorové priestory*, Žilina, EDIS – vyd. ŽU, 2013, pp 152.
- [9] M. Holešová: *Afinská geometria*, Žilinská univerzita, 2012, pp. 105.
- [10] P. Zlatoš: *Lineárna algebra*. Bratislava, MARENČINPT, 2011.

# Pětiúhelníkové dlaždice

## Pentagons tile

Svetlana Tomiczková

KMA FAV ZČU  
Univerzitní 8, Plzeň  
svetlana@kma.zcu.cz

**Abstrakt.** Pentagonal tiling is a tiling of the plane where each piece is a pentagon. We describe history and rules of pentagonal tilings.

*Keywords:* tessellation, pentagons tile

*Klíčová slova:* pokrývání roviny, pětiúhelníkové dlaždice

## 1 Úvod

Pokrývání roviny (teselace) je vyplnění roviny pomocí jednoho nebo více typů geometrických útvarů (dlaždic) tak, aby se tyto geometrické útvary nepřekrývaly a nezůstaly mezi nimi žádné mezery.

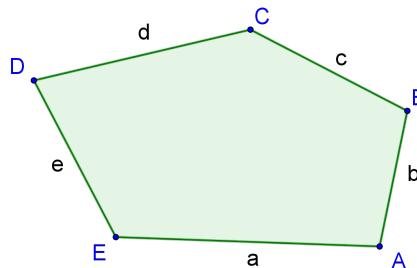
Klasifikace teselací je možná například podle tvaru dlaždic, podle množství použitých typů dlaždic, podle zobrazení, které dané pokrytí charakterizuje apod. Některá pokrytí mají speciální názvy, např. *pravidelné pokrytí* je tvořeno jedním typem pravidelných mnohoúhelníků. Víme, že existují jen tři typy pravidelných pokrytí (rovnostroannými trojúhelníky, čtverci a pravidelnými šestiúhelníky). Dále existují *polopravidelná pokrytí*, která jsou tvořena opět pravidelnými mnohoúhelníky, ale je možné použít více typů dlaždic. Takových polopravidelných pokrytí existuje osm a jsou tvořeny kombinacemi rovnostranných trojúhelníků, čtverců, pravidelných šestiúhelníků, osmiúhelníků a dvanáctiuhelníků. *Periodická pokrytí* jsou charakterizována posunutím, tj. existuje posunutí (určené nenulovým vektorem), které zobrazí pokrytí samo na sebe. Dalšími typy pokrytí jsou např. *aperiodická pokrytí* nebo *Penrosovo pokrytí*.

## 2 Pětiúhelníková pokrytí

Velice zajímavým typem pokrytí jak z hlediska charakterizace dlaždic, tak z pohledu historie, je pokrývání roviny pětiúhelníky. Rovinu nelze pokrýt pravidelnými pětiúhelníky, ale lze ji pokrýt jedním typem shodných pětiúhelníků. Tomuto pokrytí se budeme věnovat v následujícím textu.

### 2.1 Značení a klasifikace

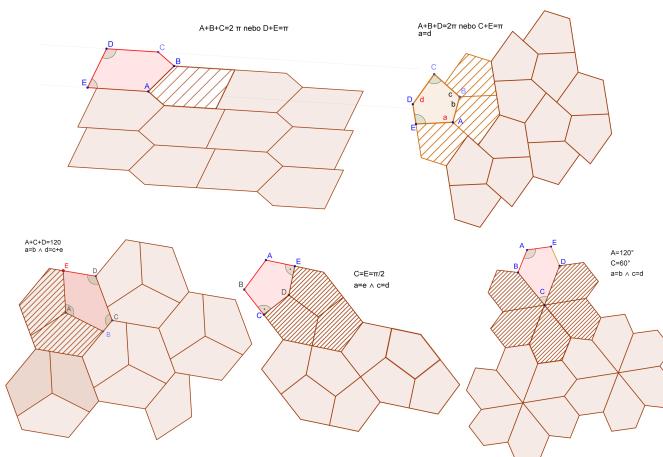
Označíme pětiúhelník podle následujícího obrázku, kde velkými písmeny jsou označeny jak vrcholy pětiúhelníka, tak úhly u příslušných vrcholů a malými písmeny strany pětiúhelníka. Pokrytí budou charakterizována pomocí vztahů mezi úhly a stranami nebo konkrétními hodnotami těchto veličin viz obr. 1.



Obrázek 1: Značení

## 2.2 Historie

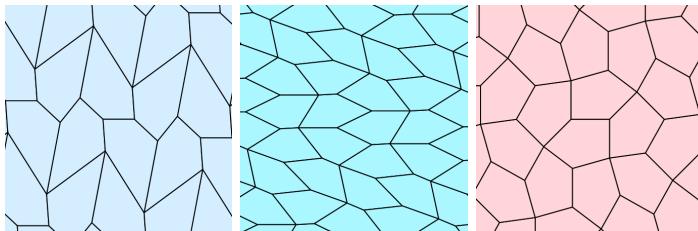
První systematický popis (klasifikaci) pokrývání roviny pětiúhelníky provedl německý matematik Karl August Reinhardt (1895 – 1941) v roce 1918. K. Reinhardt popsal pět různých typů pětiúhelníků, které pokrývají rovinu, přesněji popsal pět tříd charakterizovaných vztahy mezi úhly a stranami takových, že pětiúhelník patřící do jedné třídy (splňující dané podmínky) existuje a existuje alespoň jedno pokrytí roviny tímto typem pětiúhelníka. Těchto pět typů je vidět na obr. 2.



Obrázek 2: Pětiúhelníková pokrytí popsaná K Reinhardtem

Pak následovala padesátiletá přestávka a až v roce 1968 Richard Ker-

shner publikoval článek v American Mathematical Monthly, kde klasifikuje pětiúhelníková pokrytí jiným způsobem, ale jeho seznam obsahoval navíc tři typy pokrytí, které nebyly popsány K. Reinhardtem (obr. 3). Nyní bylo tedy popsáno osm typů pokrytí a přestože se R. Kerschner mylil ve svém předpokladu, že našel všechna pokrytí, jeho práce pomohla odstartovat nové výzkumy v této oblasti.

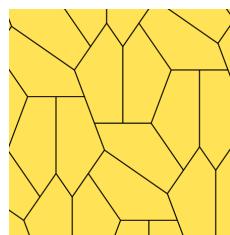


Obrázek 3: Tři nová pětiúhelníková pokrytí popsaná R. Kerschnerem

V letech 1956–1981 vedl známý americký popularizátor matematiky Martin Gardner (1914–2010) v časopise Scientific American sloupek Mathematical Games. V roce 1975 napsal o Kerschnerově článku a vyzval čtenáře k hledání nových způsobů pokrytí roviny pětiúhelníky. Na základě této výzvy byly objeveny další čtyři typy pokrytí. Hned v roce 1975 objevil jeden nový typ počítačový specialist z Kalifornie Richard James III., který se rozhodl najít pokrytí z Kerschnerova článku aniž by článek četl a podařilo se mu najít kromě osmi Kerschnerových pokrytí další, který označujeme jako typ 10 (viz obrázek 4).



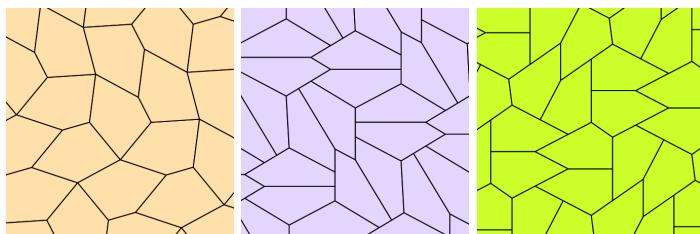
Obrázek 4: Pětiúhelníkové pokrytí popsané Richardem Jamesem III.



Obrázek 5: Pětiúhelníkové pokrytí popsané Rolfem Steinem

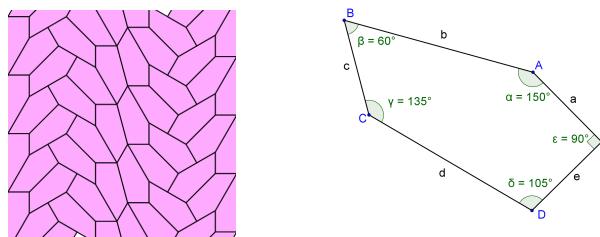
Ještě zajímavější byl objev dalších tří typů pokrytí, který učinila na základě výzvy M. Gardnera Kalifornanka Marjorie Rice (narozena 1923).

Tato dáma, která neměla hlubší matematické základy, byla tak fascinovaná výzvou M. Gardnera, že si vymyslela vlastní systém třídění a během několika dalších let objevila tři další typy pokrytí viz obr. 6. Velkou zásluhu na jejím uvedení do matematické komunity a zveřejnění nových typů dlaždic měla profesorka Doris Schattschneider. Ukázky dlaždic a výtvarně pojatá pokrytí lze nalézt v [2].



Obrázek 6: Tři pětiúhelníková pokrytí popsaná Marjorie Rice

V roce 1985 objevil 14. typ pokrytí německý student Rolf Stein 5, ale patnáctý typ čekal na své objevení dalších 30 let. Letos v červenci byl oznámen posun na tomto poli - Casey Mann, Jennifer McLoud a David Von Derau ohlásili objev 15. typu dlaždic 7, který byl učiněn pomocí počítačového programu.



Obrázek 7: Nově objevený 15. typ pětiúhelníkového pokrytí a pětiúhelníková dlaždice

K ilustraci pokrytí 6-15 byl použit volně použitelný aplet vytvořený autorem Edem Peggem Jr: "Pentagon Tilings" (<http://demonstrations.wolfram.com/PentagonTilings/> Wolfram Demonstrations Project, Published: May 13, 2009)

### 2.3 Přehled 15 typů dlaždic

Následující přehled včetně značení je převzat z článku [4], přidán je ještě nově objevený patnáctý typ pokrytí, který má, na rozdíl od předcházejících, přesně dané úhly u jednotlivých vrcholů.

Ve svém dalším článku [5] stejný autoři klasifikují pokrytí ještě podrobněji a dělí pokrytí podle dalších kritérií, např zda je pokrytí „edge to edge“.

**Typ 1:**  $A + B + C = 2\pi$

**Typ 2:**  $A + B + D = 2\pi$

**Typ 3:**  $A = B = D = 2\pi/3, a = b, d = c + e$

**Typ 4:**  $A = C = \pi/2, a = b, c = d$

**Typ 5:**  $A = \pi/3, C = 2\pi/3, a = b, c = d$

**Typ 6:**  $A + B + D = 2\pi, A = 2C, a = b = e, c = d$

**Typ 7:**  $2B + C = 2\pi, 2D + A = 2\pi, a = b = c = d$

**Typ 8:**  $2A + B = 2\pi, 2D + C = 2\pi, a = b = c = d$

**Typ 9:**  $2E + B = 2\pi, 2D + C = 2\pi, a = b = c = d$

**Typ 10:**  $A = \pi/2, C + D = 3\pi/2, 2D + E = 2C + B = 2\pi, a = b = c + e$

**Typ 11:**  $A = \pi/2, C + E = \pi, 2B + C = 2\pi, d = e = 2a + c$

**Typ 12:**  $A = \pi/2, C + E = \pi, 2B + C = 2\pi, 2a = c + e = d$

**Typ 13:**  $A = C = \pi/2, B = E = \pi - D/2, c = d, 2c = e$

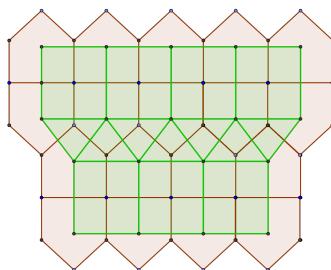
**Typ 14:**  $A = \pi/2, C + E = \pi, 2B + C = 2\pi, d = e = 2a, a = c$

**Typ 15:**  $A = 150^\circ, B = 60^\circ, C = 135^\circ, D = 105^\circ, E = 90^\circ$

### 3 Zajímavé vlastnosti a použití

Některá z pětiúhelníkových pokrytí jsou využívána v architektuře, designu nebo dláždění. Příklady využití pětiúhelníkových pokrytí (a další geometrické zajímavosti) lze nalézt na následujících stránkách:

- <http://www.tess-elation.co.uk/>
- <http://mathtourist.blogspot.cz/>
- <http://jsfiddle.net/jolumij/1qh7zav9/>
- <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fc-2014-04>
- <http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html>



Obrázek 8: Duální pokrytí

## 4 Závěr

Poslední typ pokrytí objevený v letošním roce (2015) byl objeven pomocí počítačového programu. Dosud však není dokázáno, zda existují další typy, nevíme ani, zda je počet pokrytí konečný. Existují ale i další otázky, na které se matematici zaměřují, například isoperimetrické pokrytí (viz [1]) nebo duální pokrytí (viz obrázek 8) pětiúhelníkovým pokrytím (lze nalézt např. v [3]).

## Reference

- [1] P. Chung, M. Fernandez, Y. Li, M. Mara, . Morgan, I. Plata, N. Shah, L. Vieira, E. Wikner: *Isoperimetric Pentagonal Tilings*, Notices Amer. Math. Soc. 59 , 2012
- [2] M. Rice: *Escher-Like Patterns from Pentagonal Tilings*, M. C. Escher's Legacy, Springer, Berlin, 2003
- [3] D. Schattschneider: *Tiling the Plane with Congruent Pentagons* Mathematics Magazine, 51, 1978
- [4] T. Sugimoto, T. Ogawa: *Tiling problems of Convex Pentagon*, Forma 15, 2000
- [5] T. Sugimoto, T. Ogawa: *Properties of Nodes in Pentagonal Tilings*, Forma 24, 2009

# Konformné zobrazenia bodov elipsoidu a sféry do roviny a ich parametre

## Conformal azimuthal projections of the points of ellipsoid and sphere and their parameters

Margita Vajsálová

*Department of mathematics and descriptive geometry, Faculty of Civil Engineering,  
Slovak University of Technology in Bratislava  
Radlinského 11, 810 05 Bratislava, Slovak Republic  
e-mail: margita.vajsablova@stuba.sk*

**Abstract.** Conformal azimuthal projection of the points of sphere is known in geometry like stereographic projection, which is applied in different field. The innovative approach to the evaluation of the parameters of the conformal azimuthal projections of the points of reference sphere and reference ellipsoid (reference surfaces of the Earth) and also derivation of new equations for their calculation is present in this article. Derivation of the equations for the parameters appears from wide variety of criteria on the scale distortion of the projected elements of geographic net.

**Keywords:** reference ellipsoid, reference sphere, azimuthal projection, conformal projection.

**Kľúčové slová:** referenčný elipsoid, referenčná sféra, azimutálne zobrazenie, konformné zobrazenie.

## 1 Úvod

Kartografické zobrazenia bodov referenčnej plochy Zeme do roviny sú v kartografii nazývané azimutálne. Konformné zobrazenie bodov sféry do roviny je v geometrii známe ako stereografické zobrazenie. Z dôvodu zachovávania uhlov stereografické zobrazenie používajú odborníci hlavne v kartografii, a tiež v ďalších oblastiach, napr. v kryštalografii na meranie uhlov medzi stenami kryštálu, v minulosti v astronómii na meranie uhlov medzi hviezdami pomocou rovinného astrolábu, v matematike na vzájomnú transformáciu modelov neeuclidovskej geometrie, v umení na tvorbu ornamentov na guľovej ploche z rovinných návrhov a pod. [4].

V kartografii sú konformné zobrazenia referenčnej plochy do roviny používané ako súčasť Geodetických súradnicových systémov, napr. na mapách Holandska a na zobrazenie pôlových oblastí v systéme UTM zoskupenia NATO (zobrazenie Universal Polar Stereographic) [3].

V príspevku je ukázaný inovatívny prístup k výpočtu parametrov konformných azimutálnych zobrazení bodov elipsoidu a sféry, a to podľa širokej škály požiadaviek na skreslenie obrazu prvkov zemepisnej siete,

odvodenie zobrazovacích rovnic pomocou izometrických súradníc. Hlavný prínos je v odvodení vzťahov na výpočet týchto parametrov pre obraz bodov referenčnej sféry vychádzajúc z daných požiadaviek.

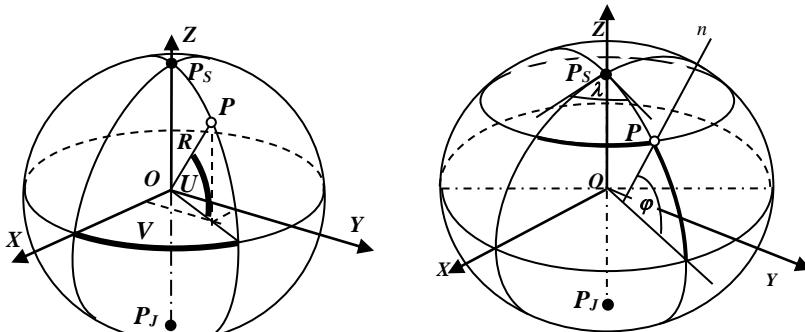
## 2 Konformné azimutálne zobrazenia a ich parametre

Na úvod kapitoly uvedieme základné pojmy matematickej kartografie potrebné v riešení problematiky konformných azimutálnych zobrazení a ich parametrov, ako charakteristika referenčných plôch, súradnice na referenčných plochách.

### 2.1 Charakteristiky referenčných plôch a súradnice bodov na referenčných plochách

V kartografickom zobrazovaní za referenčné plochy Zeme považujeme referenčnú sféru a referenčný elipsoid (rotačný sploštený). Zemepisné súradnice na oboch plochách sú definované rovnako (Obr. 1) [3]:

- Zemepisná šírka (sférická označovaná  $U$ , elipsoidická  $\varphi$ ) je definovaná ako uhol normálnej plochy v danom bode s rovinou rovníka, jej hodnoty sú v intervale  $\langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$ , kladná je na sever od rovníka.
- Zemepisná dĺžka (sférická označovaná  $V$ , elipsoidická  $\lambda$ ) je definovaná ako uhol roviny určenej daným bodom a zemskou osou s rovinou určenou zemskou osou a základným bodom (napr. Greenwich), jej hodnoty sú v intervale  $\langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$ , kladná je na východ.



Obr. 1: Referenčné plochy Zeme: referenčná sféra (vľavo), referenčný elipsoid (vpravo)

Polomer referenčnej sféry označujeme  $R$  a dĺžky polosí elipsoidu  $a, b$ , pomernú excentricitu  $e$ . Hlavné polomery krivosti na referenčnom elipsoide sú meridiánový  $M$  a priečny  $N$  vyjadrené vzťahmi:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (1)$$

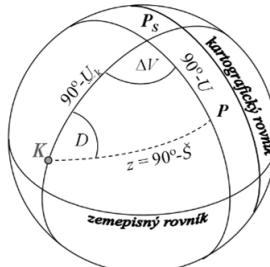
Na vyjadrenie dĺžkového elementu plochy používame izometrické súradnice, kde izometrická dĺžka je totožná so zemepisnou dĺžkou a pre izometrickú šírku  $q$  na rotačnom elipsoide a  $Q$  na sfére platí:

$$\begin{aligned} dq &= \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi \Rightarrow q = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \sqrt{\left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^e} \right], \\ dQ &= \frac{dU}{\cos U} \Rightarrow Q = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{U}{2} + 45^\circ \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Nech bod  $K$ , ktorého zemepisné súradnice na referenčnej sfére sú  $U_k, V_k$ , je kartografickým pólem (bodom s kartografickou šírkou  $90^\circ$ ),  $P_s$  je severný pól. Dvojicami bodov  $P_s, P$  a  $P_s, K$  prechádzajú zemepisné poludníky a body  $K, P$  určujú kartografický poludník. Potom kartografickú šírku  $\check{S}$  a dĺžku  $D$  bodu  $P$  určíme z jeho sférických súradníc  $U, V$  pomocou vzťahov odvodnených z 1. kosínusovej vety a sínusovej vety v sférickom trojuholníku  $P_sKP$  (Obr. 2):

$$\begin{aligned} \sin \check{S} &= \sin U \sin U_k + \cos U \cos U_k \cos \Delta V, \\ \sin D &= \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin \Delta V, \end{aligned} \quad (3)$$

kde  $\Delta V = \pm(V_k - V)$  v závislosti od orientácie sférického trojuholníka  $P_sKP$ .



Obr. 2: Kartografické súradnice na referenčnej sfére

## 2.2 Základné vzťahy pre azimutálne zobrazenia

Azimutálne zobrazenie je vhodné aplikovať pre územie rozložené v okolí geometrického tăžiska (územie „kruhového“ tvaru). Poludníky sa zobrazujú do zväzku priamok, ktoré vychádzajú z obrazu pólu a zvierajú medzi sebou rovnaké uhly ako na referenčnej ploche. Rovnobežkové kružnice (ďalej rovnobežky) sa zobrazujú do sústredných kružník so stredom v obraze pólu.

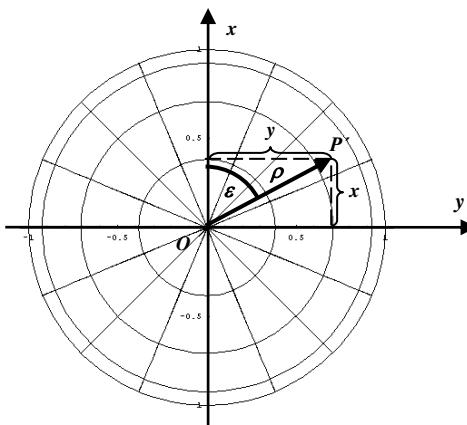
Jednoduché azimutálne zobrazenia rozdeľujeme podľa polohy na:

- pólové – zobrazovacia rovina je kolmá na zemskú os,
- rovníkové – zobrazovacia rovina je rovnobežná so zemskou osou, teda kartografický pól je na rovníku,
- všeobecné – neplatia vlastnosti a) a b), teda kartografický pól nie je totožný so zemepisným póлом, a tiež neleží na rovníku.

V príspevku sú vzťahy a vlastnosti formulované pre azimutálne zobrazenia v normálnej polohe, avšak pri zobrazení referenčnej sféry sú aplikovateľné aj pre rovníkovú a všeobecnú polohu roviny, a to po substitúcii  $U = \tilde{S}$  a  $V = D$ .

Začiatok  $O$  pravouhlej a polárnej súradnicovej sústavy volíme v obraze pólu (Obr. 3). Pri vyjadrení vzťahov pre azimutálne zobrazenie je v klasickej literatúre matematickej kartografie, napr. [1] a [2] používaný zenitový uhol, ktorý je doplnok zemepisnej šírky do  $90^\circ$ . V tomto príspevku ukážeme odvodenie vzťahov s využitím zemepisnej šírky  $U$  a  $\varphi$ , potom všeobecný tvar zobrazovacích rovníc azimutálnych zobrazení bodov sféry a elipsoidu uvádzame v polárnom tvare nasledovne:

$$\begin{aligned} \text{pre sféru: } \rho &= f(U), & \text{pre elipsoid: } \rho &= f(\varphi), \\ \varepsilon &= V, & \varepsilon &= \lambda. \end{aligned} \quad (4)$$



**Obr. 3: Súradnicové sústavy v azimutálnom zobrazení**

Dĺžkové skreslenie v kartografii je vyjadrené modulom dĺžkového skresenia, čo je pomer elementu dĺžky v zobrazení a elementu dĺžky na referenčnej ploche. Pre moduly dĺžkového skresenia  $m_p$  na poludníkoch a  $m_r$  na rovnobežkách v azimutálnom zobrazení platia vzťahy:

$$\text{pre sféru: } m_p = -\frac{d\rho}{R dU}, \quad m_r = \frac{\rho}{R \cos U}, \quad (5)$$

$$\text{pre elipsoid: } m_p = -\frac{d\rho}{M d\varphi}, \quad m_r = \frac{\rho}{N \cos \varphi}. \quad (6)$$

Ďalšie časti príspevku sú venované konformným azimutálnym zobrazeniam, teda zachovávajúcim uhly.

## 2.3 Zobrazovacie rovnice konformných azimutálnych zobrazení

Jedným z dôsledkov zachovávania uhlov v konformnom kartografickom zobrazení je, že dĺžkové skreslenie v danom bode je rovnaké pre všetky azimuty, a teda moduly dĺžkového skreslenia rovnobežky a poludníka sa rovnajú. Z tejto podmienky odvodíme zobrazovacie rovnice konformného azimutálneho zobrazenia bodov referenčnej sféry, aj referenčného elipsoidu.

Nech pre obraz bodov referenčného elipsoidu platí:

$$m_p = m_r \Rightarrow -\frac{d\rho}{M d\varphi} = \frac{\rho}{N \cos \varphi} \quad (7)$$

Po úprave aplikujeme vzťah (2) a integrujeme:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} \Rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} = \int -\frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} \Rightarrow \ln \rho = -q + \ln c \quad (8)$$

Po dosadení (2) za izometrickú šírku  $q$ :

$$\ln \rho = -\ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + 45^\circ \right) \sqrt{\left( \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right)^e} \right] + \ln c. \quad (9)$$

Po odlogaritmovaní sú zobrazovacie rovnice konformného azimutálneho zobrazenia bodov referenčného elipsoidu:

$$\rho = c \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sqrt{\left( \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right)^e}. \quad (10)$$

$$\varepsilon = \lambda.$$

Po dosadení  $\rho$  z (10) do vzťahu (6) pre  $m_r$  dostaneme vyjadrenie modulu dĺžkového skreslenia v obraze bodu referenčného elipsoidu, ktorého elipsoidická šírka je  $\varphi$ :

$$m = \frac{c}{2N \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)} \sqrt{\left( \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right)^e}. \quad (11)$$

Podobne pre konformné azimutálne zobrazenie bodov referenčnej sféry sú zobrazovacie rovnice:

$$\rho = c \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{U}{2} \right), \quad (12)$$

$$\varepsilon = V.$$

Vzťah pre modul dĺžkového skreslenia v obraze bodu referenčnej sféry, ktorého sférická šírka je  $U$ :

$$m = \frac{c}{2R \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U}{2} \right)}. \quad (13)$$

## 2.4 Výpočet parametrov konformných azimutálnych zobrazení bodov referenčnej sféry

Konformné azimutálne zobrazenie má 2 navzájom závislé parametre, a to konštantu  $c$  a zemepisnú šírku neskreslenej rovnobežky  $U_0$ , príp.  $\varphi_0$ . V tejto časti ukážeme inovatívny prístup k určeniu parametrov konformných azimutálnych zobrazení vyplývajúci zo stanovenia kritérií na skreslenie prvkov zemepisnej siete nasledovne:

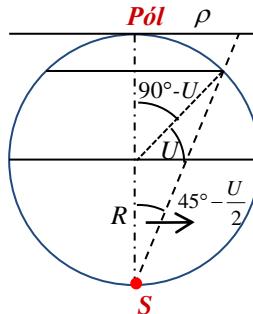
1. Rovina je dotyková, teda  $U_0 = 90^\circ$  (resp.  $\varphi_0 = 90^\circ$ ), potom z podmienky  $m_{Pol} = 1$  počítame hodnotu konštanty  $c$ .
2. Rovina je sečná:
  - a) volíme  $U_0 \neq 90^\circ$  (resp.  $\varphi_0 \neq 90^\circ$ ), potom z podmienky  $m_0 = 1$  počítame hodnotu konštanty  $c$ ,
  - b) volíme dĺžkové skreslenie v póle  $m_{Pol} < 1$ , odkiaľ určíme hodnotu  $U_0$  (resp.  $\varphi_0$ ), potom počítame hodnotu konštanty  $c$ .
  - c) dáme podmienku, že dĺžkové skreslenie v póle a na krajnej rovnobežke  $U_J$  (resp.  $\varphi_J$ ) má rovnakú absolútну hodnotu, potom hodnotu konštanty  $c$  počítame z tejto podmienky, ktorej formulácia je:

$$\begin{aligned} m_{Pol} &= 1 - \nu, \\ m_J &= 1 + \nu. \end{aligned} \tag{14}$$

V nasledujúcej časti budú odvodené vzťahy pre výpočet parametrov konformného azimutálneho zobrazenia bodov referenčnej sféry podľa uvedených kritérií.

1. Nech modul dĺžkového skreslenia v póle je 1, teda rovina, na ktorú zobrazujeme je dotyková, potom:

$$m_{Pol} = \frac{c}{2R \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U_{Pol}}{2} \right)} = 1, \quad \text{ak } U_{Pol} = 90^\circ \Rightarrow c = 2R. \tag{15}$$



Obr. 4: Geometrický princíp stereografického zobrazenia

Po dosadení  $c = 2R$  do (12) dostaneme zobrazovacie rovnice konformného azimutálneho zobrazenia bodov referenčnej sféry na dotykovú rovinu:

$$\rho = 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{U}{2} \right). \quad (16)$$

$$\varepsilon = V.$$

Uvedené zobrazovacie rovnice je možné odvodiť aj z geometrického princípu stereografického zobrazenia na dotykovú rovinu (Obr. 4).

- 2a) Z požiadavky, aby rovnobežka so sférickou zemepisnou šírkou  $U_0$  bola neskreslená, potom konštantu  $c$  určíme:

$$m_0 = \frac{c}{2R \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U_0}{2} \right)} = 1, \quad (17)$$

odkiaľ

$$c = 2R \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U_0}{2} \right). \quad (18)$$

Po dosadení konštanty  $c$  do vzťahu (13) pre modul dĺžkového skresenia v bode, ktorého sférická zemepisná šírka je  $U$ , platí vzťah:

$$m = \frac{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U_0}{2} \right)}{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U}{2} \right)} \quad (19)$$

a pre modul dĺžkového skresenia v póle platí:

$$m_{pol} = \frac{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U_0}{2} \right)}{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{90^\circ}{2} \right)} = \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{U_0}{2} \right). \quad (20)$$

- 2b) Volíme dĺžkové skreslenie v póle, teda nech jeho modul dĺžkového skresenia  $m_{pol} < 1$ , potom z predchádzajúceho vzťahu (20) vyjadrimo hodnotu  $U_0$ :

$$U_0 = 90^\circ - 2 \arccos \sqrt{m_{pol}} \quad (21)$$

a keďže rovnobežka so sférickou šírkou  $U_0$  je neskreslená, z podmienky (17) tiež dostaneme vzťah (18) pre výpočet konštanty  $c$ .

- 2c) Absolútна hodnota dĺžkového skresenia v póle a na krajnej rovnobežke so šírkou  $U_J$  je rovnaká, teda po sčítaní podmienok (14) platí:

$$m_{pol} + m_J = 2.$$

Do tejto podmienky dosadíme za  $m_{pol}$  a  $m_J$  vzťahy (19) a (20) a potom platí:

$$\cos^2\left(45^\circ - \frac{U_0}{2}\right) + \frac{\cos^2\left(45^\circ - \frac{U_0}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{U_j}{2}\right)} = 2. \quad (22)$$

Z predchádzajúceho vzťahu (22) vyjadríme  $U_0$ :

$$\cos^2\left(45^\circ - \frac{U_0}{2}\right) = \frac{2\cos^2\left(45^\circ - \frac{U_j}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{U_j}{2}\right) + 1} \quad (23)$$

a keďže rovnobežka so sférickou šírkou  $U_0$  je neskreslená, platí podmienka (17) a hodnotu konštanty  $c$  počítame z (18).

V pôlových a rovníkových azimutálnych zobrazeniach nie je možné použitie referenčného elipsoidu. Tento je potrebné transformovať na sféru, v prípade konformných zobrazení pomocou Gaussovo konformného zobrazenia elipsoidu na sféru [2]. V ďalšom kroku zo zemepisných súradník  $U$  a  $V$  pomocou vzťahov (3) vypočítať kartografické súradnice  $\check{S}$  a  $D$ , a teda pri aplikácii vzťahov odvedených v tomto článku je pre pôlové a rovníkové azimutálne zobrazenia nutné urobiť substitúciu  $U = \check{S}$  a  $V = D$ .

### 3 Záver

Skreslenie prvkov zobrazovaného územia v kartografickom zobrazení je stále aktuálnou tému v rezorte geodézie a kartografie, a práve matematické a geometrické nástroje dávajú možnosti spresňovania výsledku. Vzťahy pre výpočet parametrov konformných azimutálnych zobrazení odvodene v tomto článku sú aplikovateľné pre akékoľvek územie „kruhového“ charakteru.

### Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory Visegrad Fund: Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics.

### Literatúra

- [1] HOJOVEC, V. – DANIŠ, M. – HÁJEK, M. – VEVERKA, B.: *Kartografie*. Praha: Geodetický a kartografický podnik, 1987. 660 s.
- [2] SRNKA, E.: *Matematická kartografie*. Brno: Vojenská akadémie Antonína Zápotockého, 1986. 302 s.
- [3] VAJSÁLOVÁ, M.: *Matematická kartografia*. 1. vyd. Bratislava: Nakladatel'stvo STU, 2013. 315 s.
- [4] VAJSÁLOVÁ, M.: Interdisciplinárne aspekty stereografickej projekcie. In *Sborník 26. Konference o geometrii a počítačovej grafice*. Nové Město na Moravě: Česká společnost pro geometrii a grafiku a JČMF. 2006. ISBN 80-7040-902-9. s. 283 - 288.

# Krivky stuhy

## Lace curves

Daniela Velichová

*Institute of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering*

*Slovak University of Technology in Bratislava*

*Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic*

*email: daniela.velichova@stuba.sk*

**Abstract.** Paper brings information on a two-parametric class of special curve segments called lace curves, or laces in short, generated by means of partial Minkowski point set operations applied on two equally parameterised curve segments. Some of the basic geometric properties of resulting lace curve segments are presented, with classification of possible singularities that can appear in case of Minkowski summative combinations of basic operand curve segments. Few examples of laces of interesting forms are given for illustration.

**Keywords:** Minkowski partial sum, Minkowski partial product, lace, knot

**Kľúčové slová:** Minkowského čiastočný súčet, Minkowského čiastočný súčin, stuha, uzol

## 1 Minkowského množinové operácie a čiastočné množinové operácie

Minkowského súčet a Minkowského súčin dvoch bodových množín sú operácie definované pomocou operácie súčtu a vonkajšieho súčinu polohových vektorov bodov daných operandov, určujúcich polohu bodov vzhľadom na pevný referenčný bod. V prípade nekonenčných bodových množín, reprezentovaných parametricky, teda vektorovými rovnicami, možno uvažovať o operáciách definovaných na daných vektorových funkciách, v ktorých vystupujú rôzne parametre pre jednotlivé funkcie. Minkowského súčet dvoch kriviek  $k$  a  $l$  priestoru parametricky určených rovnicami

$$\begin{aligned} k : {}^1\mathbf{r}(u) &= ({}^1x(u), {}^1y(u), {}^1z(u)), u \in \langle a, b \rangle \subset \mathbf{R} \\ l : {}^2\mathbf{r}(v) &= ({}^2x(v), {}^2y(v), {}^2z(v)), v \in \langle c, d \rangle \subset \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1)$$

môžeme definovať ako množinu  $k \oplus l$  bodov priestoru, parametricky určenú vektorovou funkciou definovanou na oblasti  $\Omega = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbf{R}^2$ , ktorá je súčtom daných dvoch vektorových funkcií.

Minkowského súčtom je teda plocha priestoru parametricky definovaná na oblasti  $\Omega$  rovnicou

$$k \oplus l : {}^1\mathbf{r}(u) + {}^2\mathbf{r}(v) = ({}^1x(u) + {}^2x(v), {}^1y(u) + {}^2y(v), {}^1z(u) + {}^2z(v)). \quad (2)$$

Obdobne je Minkowského súčin dvoch kriviek  $k$  a  $l$  priestoru parametricky určených rovnicami (1) definovaný ako množina  $k \otimes l$  bodov priestoru, parametricky určená vektorovou funkciou definovanou na dvojrozmernej oblasti  $\Omega = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbf{R}^2$ , ktorá je vonkajším súčinom daných dvoch vektorových funkcií. Minkowského súčinom je plocha priestoru parametricky definovaná na oblasti  $\Omega$  rovnicou

$$k \otimes l : {}^1\mathbf{r}(u) \wedge {}^2\mathbf{r}(v) = \left( \begin{vmatrix} {}^1y(u) & {}^1z(u) \\ {}^2y(v) & {}^2z(v) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} {}^1x(u) & {}^1z(u) \\ {}^2x(v) & {}^2z(v) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} {}^1x(u) & {}^1y(u) \\ {}^2x(v) & {}^2y(v) \end{vmatrix} \right). \quad (3)$$

Pod Minkowského čiastočným súčtom, resp. súčinom budeme rozumieť Minkowského súčet, resp. Minkowského súčin dvoch kriviek  $k$  a  $l$  priestoru parametricky určených rovnicami s rovnakým parametrom (a budeme hovoriť o ich zhodnej parametrizácii)

$$\begin{aligned} k : {}^1\mathbf{r}(u) &= ({}^1x(u), {}^1y(u), {}^1z(u)), \\ l : {}^2\mathbf{r}(u) &= ({}^2x(u), {}^2y(u), {}^2z(u)), u \in \langle a, b \rangle \subset \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (4)$$

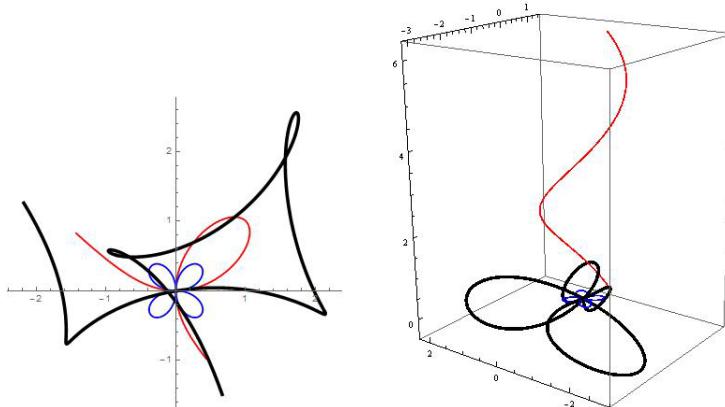
ktoré definujú množinu  $k \oplus_P l$ , resp.  $k \otimes_P l$  bodov priestoru parametricky určenú vektorovou funkciou definovanou na tom istom intervale  $\langle a, b \rangle \subset \mathbf{R}$ , ktorá je súčtom, resp. vonkajším súčinom daných dvoch vektorových funkcií. Minkowského čiastočným súčtom, resp. Minkowského čiastočným súčinom sú krivky priestoru parametricky definované rovnicami

$$k \oplus_P l : {}^1\mathbf{r}(u) + {}^2\mathbf{r}(u) = ({}^1x(u) + {}^2x(u), {}^1y(u) + {}^2y(u), {}^1z(u) + {}^2z(u)), \quad (5)$$

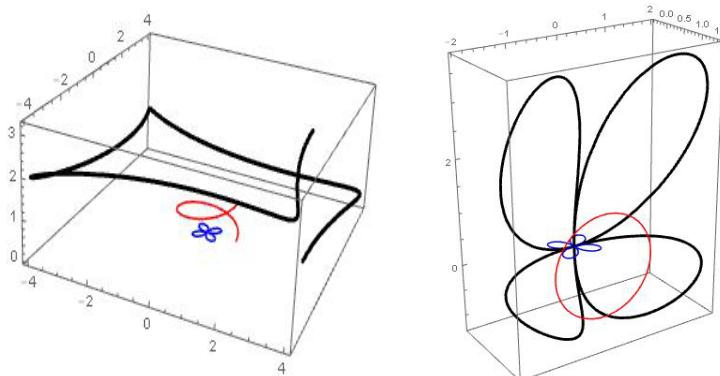
$$k \otimes_P l : {}^1\mathbf{r}(u) \wedge {}^2\mathbf{r}(u) = \left( \begin{vmatrix} {}^1y(u) & {}^1z(u) \\ {}^2y(u) & {}^2z(u) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} {}^1x(u) & {}^1z(u) \\ {}^2x(u) & {}^2z(u) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} {}^1x(u) & {}^1y(u) \\ {}^2x(u) & {}^2y(u) \end{vmatrix} \right). \quad (6)$$

Dané bodové množiny sú podmnožinami množín, ktoré sú Minkowského súčtom, resp. Minkowského súčinom kriviek určených rôznymi parametrami. Krivky  $k \oplus_P l$ , resp.  $k \otimes_P l$  ležia na plochách  $k \oplus l$ , resp.  $k \otimes l$ , a predstavujú množinu tých bodov príslušnej plochy, ktoré majú zhodné parametricke - krivočiare súradnice, teda  $u = v$ , pre všetky  $(u, v) \subset \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbf{R}^2$ .

Na obr. 1 vľavo je zobrazený Minkowského čiastočný súčet dvoch rovinných kriviek, časti Descartovho listu a štvorlístka, vpravo je priemet Minkowského čiastočného súčtu dvoch kriviek v priestore, skrutkovice a štvorlístka. Na obr. 2 vľavo je ilustrovaný Minkowského čiastočný súčin časti Descartovho listu a štvorlístka umiestnených v rovnobežných rovinách, vpravo je zobrazený Minkowského čiastočný súčin štvorlístka a kružnice, ktoré sú umiestnené v kolmých rovinách.



Obr. 1: Minkowského čiastočný súčet krviek



Obr. 2: Minkowského čiastočný súčin krviek

## 2 Modelovanie stúh

Minkowského súčtovou kombináciou krviek  $k$  a  $l$  určených zhodnými parametrizáciami (4) budeme nazývať množinu  $\chi.k \oplus_p \lambda.l$ , kde  $\chi, \lambda \in \mathbf{R}$  sú ľubovoľné reálne čísla, parametricky určenú lineárnej kombináciou vektorových reprezentácií sčítavaných krviek

$$\chi.k \oplus_p \lambda.l : \mathbf{s}(u) = (\chi^1 x(u) + \lambda^1 x(u), \chi^1 y(u) + \lambda^1 y(u), \chi^1 z(u) + \lambda^1 z(u)). \quad (7)$$

Vol'bou konštant  $\chi$  a  $\lambda$  získavame dva modelovacie parametre ovplyvňujúce tvar takto definovaných krviek, a tieto parametre tiež ovplyvňujú vnútorné geometrické vlastnosti získaných krviek a ich prípadné singularity. Vzhľadom na charakter Minkowského operácií súčtu a súčinu možno konštatovať, že uvedené charakteristiky sú ovplyvňované okrem toho aj vzájomnou polohou sčítavaných, resp. násobených krviek, a ich vzájomnou polohou, resp. polohou vzhľadom na referenčný bod.

Dvojparametrickú triedu kriviek definovanú ako Minkowského súčtová kombinácia kriviek  $k$  a  $l$ ,  $\chi.k \oplus_P \lambda.l$ , kde  $\chi, \lambda \in \mathbf{R}$ , nazveme stuhy.

Vyšetrovaním vnútorných geometrických vlastností stúh v závislosti od parametrov  $\chi, \lambda \in \mathbf{R}$ , určíme singularity, resp. funkciu prvej krivostí  $\kappa(u)$  ako kombináciu derivácií vektorových funkcií kriviek,  ${}^1\mathbf{r}(u)$  a  ${}^2\mathbf{r}(u)$  pre  $u \in \langle a, b \rangle$  za predpokladu, že tieto existujú. Obmedzíme sa teda na prípad, že obe vektorové funkcie, ktorých hodografmi sú krivky  $k$  a  $l$  sú aspoň triedy  $C^1$ , resp. nech majú spojité parciálne derivácie až do rádu 2.

Funkcia prvej krivosti je určená výrazom

$$\kappa(u) = \frac{\left| (\chi {}^1\mathbf{r}'(u) + \lambda {}^2\mathbf{r}'(u)) \times (\chi {}^1\mathbf{r}''(u) + \lambda {}^2\mathbf{r}''(u)) \right|}{\left| \chi {}^1\mathbf{r}'(u) + \lambda {}^2\mathbf{r}'(u) \right|^3} \quad (8)$$

pre všetky také  $u \in \langle a, b \rangle$ , pre ktoré platí  $\mathbf{s}'(u) = \chi {}^1\mathbf{r}'(u) + \lambda {}^2\mathbf{r}'(u) \neq \mathbf{0}$ .

Singulárne body stuhy, ktorá je Minkowského súčtovou kombináciou kriviek  $k$  a  $l$  sú teda všetky také body krivky, ktorých parametrická súradnica  $u_0 \in \langle a, b \rangle$  vyhovuje rovnici

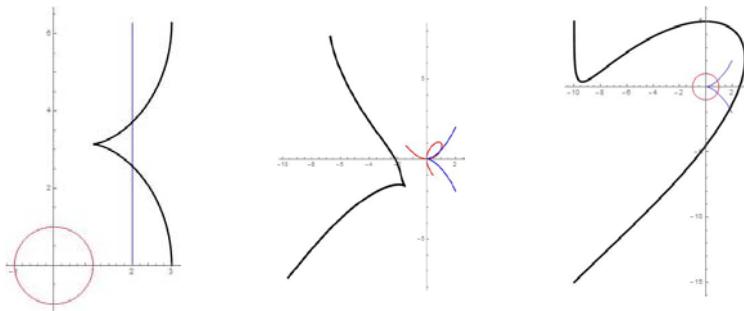
$$\mathbf{s}'(u_0) = \chi {}^1\mathbf{r}'(u_0) + \lambda {}^2\mathbf{r}'(u_0) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Riešením sú všetky tie body stuhy s krivočiarou súradnicou  $u_0$ , v ktorých:

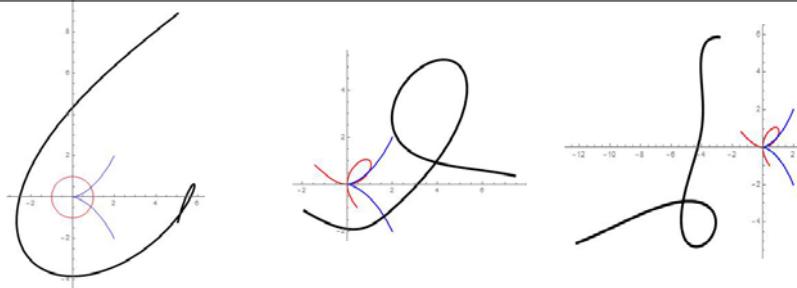
1. nie je definovaný ani jeden nenulový vektor dotyčnice ku krivkám  $k$  a  $l$ ,  ${}^1\mathbf{r}'(u_0) = \mathbf{0}$ ,  ${}^2\mathbf{r}'(u_0) = \mathbf{0}$ ,  ${}^1\mathbf{r}(u_0)$ ,  ${}^2\mathbf{r}(u_0)$  sú ich singulárne body
2. vektoru dotyčník kriviek v daných bodoch sú lineárne závislé,  

$${}^1\mathbf{r}'(u) = -\frac{\lambda}{\chi} {}^2\mathbf{r}'(u), \chi \neq 0.$$

Na obr. 3 je znázornená stuha, ktorá je Minkowského čiastočným súčtom úsečky a kružnice parametrizovaných na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ , ktorej singulárny bod má krivočiaru súradnicu  $u_0 = \frac{1}{2}$  podľa bodu 2, a stuhy, ktoré sú Minkowského kombináciou oblúkov Descartovho listu a kružnice. Pri istej voľbe koeficientov kombinácie výsledná krivka nemusí obsahovať žiadny singulárny bod, pri niektorých iných kombináciách obsahuje singulárny bod podľa bodu 2.



Obr. 3: Singulárny bod stuhy I



Obr. 4: Singulárny bod stuhy II

Krivky so spoločným singulárnym bodom v referenčnom bode  $O$  v začiatku súradnicovej sústavy definujú stuhy so singulárnym bodom pre všetky kombinácie koeficientov  $\chi, \lambda \in \mathbf{R}$ . Na obr. 4 sú znázornené rôzne formy Minkowského súčtových kombinácií oblúkov Descartovho listu a kissoidy.

Dvojnásobné (obdobne viacnásobné) body stúh sú definované podmienkou

$$\mathbf{s}(u_1) = \mathbf{s}(u_2), \quad u_1, u_2 \in \langle a, b \rangle, \quad (10)$$

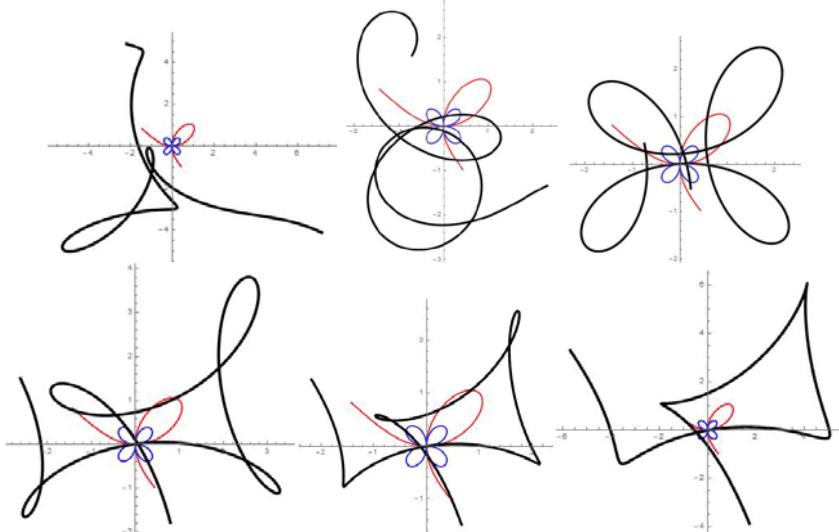
kde  $u_1, u_2$  sú riešením sústavy dvoch, resp. troch rovníc symbolicky zapísaných

$$\chi^1 \mathbf{r}(u_1) + \lambda^2 \mathbf{r}(u_1) = \chi^1 \mathbf{r}(u_2) + \lambda^2 \mathbf{r}(u_2), \quad (11)$$

pričom po úprave získame podmienku kolineárnosti polohových vektorov bodov kriviek  $k$  a  $l$

$$\chi^1 \mathbf{r}(u_1) - \chi^1 \mathbf{r}(u_2) = \lambda^2 (\mathbf{r}(u_2) - \mathbf{r}(u_1)). \quad (12)$$

Ukážky viacnásobných bodov stúh, ktoré sú Minkowského kombináciou oblúku kissoidy a štvorlístka sú na obr. 5.

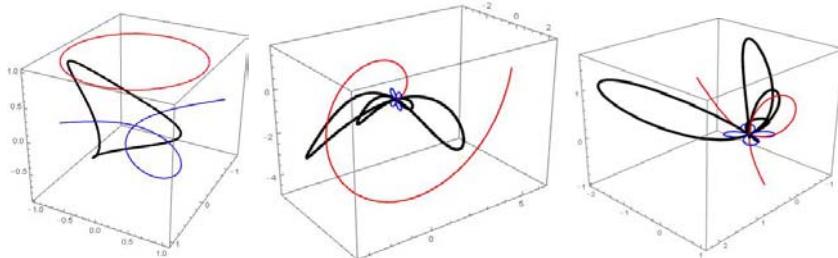


Obr. 5: Viacnásobné body stúh

Minkowského súčinovou kombináciou kriviek  $k$  a  $l$  určených zhodnými parametrizáciami (4) budeme nazývať množinu  $\chi.k \otimes_p \lambda.l$ , kde  $\chi, \lambda \in \mathbb{R}$  sú ľubovoľné reálne čísla, parametricky určenú kombináciou vektorových reprezentácií násobených kriviek

$$\chi.k \otimes_p \lambda.l : \mathbf{p}(u) = \chi\lambda \left( \begin{vmatrix} {}^1y(u) & {}^1z(u) \\ {}^2y(u) & {}^2z(u) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} {}^1x(u) & {}^1z(u) \\ {}^2x(u) & {}^2z(u) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} {}^1x(u) & {}^1y(u) \\ {}^2x(u) & {}^2y(u) \end{vmatrix} \right). \quad (13)$$

Voľbou konštant  $\chi$  a  $\lambda$  získavame iba jeden modelovací parameter ovplyvňujúci podobný tvar definovaných kriviek stúh, vzhladom na rovnočahlosť v začiatku súradnicovej sústavy s koeficientom  $\chi.\lambda$  pre nenulové hodnoty parametrov. Tento parameter tiež ovplyvňuje vnútorné geometrické vlastnosti získaných kriviek a ich prípadné singularity. Na obr. 6 sú ukážky priestorových stúh modelovaných pomocou súčinu známych oblúkov kriviek.



Obr. 6: Viacnásobné body stúh

### 3 Záver

Stuhy sú krivky zaujímavých vlastností, ktorých tvar je možné modelovať zmenou hodnôt dvoch modelovacích parametrov (reálnych čísel) vystupujúcich v Minkowského kombináciách dvoch zhodne parametrizovaných oblúkov kriviek. Tieto parametre, okrem iných podmienok, ovplyvňujú vnútorné geometrické charakteristiky vytváraných stúh, a existenciu a počet ich singulárnych bodov. Minkowského kombinácie kriviek môžu slúžiť ako robustný a pritom jednoduchý modelovací nástroj pri návrhu kriviek rôznych tvarov v dizajne, počítačovej grafike a počítačovom umení a nájdu svoje využitie aj pri návrhu v architektúre.

### Literatúra

- [1] R.T. Farouki., H.T. Moon, B. Ravani: *Minkowski Geometric Algebra of Complex Sets*. Geometriae Dedicata 85: 283-315, 2001.
- [2] R. T. Farouki: *Minkowski Combinations of Complex Sets*. Curve and Surface Fitting, Saint Malo, 2002.
- [3] R. T. Farouki, H. Pottman: *Exact Minkowski Product of N Complex Discs*. Reliable Computing 8, 43-66, 2002.

# Průmět rovnoběžných řezů na kulové ploše

## Views of parallel sections on sphere

Svatopluk Zachariáš

Plzeň, Czech Republic  
email: svataluda@seznam.cz

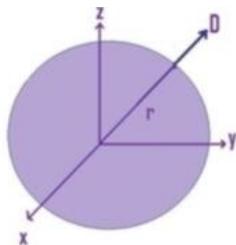
**Abstract.** This paper brings some remarks on the correctness of views of parallel sections on a sphere, circles projected under parallel, oblique and orthographic projection methods, and some of their properties. More general ideas about central views of all conic sections on a quadric surface, which are mapped from the quadric arbitrary point to the plane parallel to the tangent plane to this quadric at this point. Properties of the outlines of central views of quadratic surfaces in the central projections are mentioned.

**Keywords:** Parallel sections on sphere, parallel view, oblique view, orthographic projection, Steiner-Pelz parabola

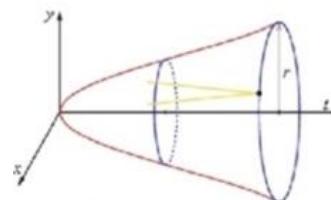
**Klíčová slova:** Řezy na kulové ploše, rovnoběžný průmět, kosoúhlý průmět, pravoúhlé promítání, Steiner-Pelzova parabola

### 1 Úvod

Nejen na internetu, ale i jinde nalezneme nesprávné obrázky popisující kosoúhlý průmět řezů na kulové ploše, na obr. 1a, 1b, 1c, nebo pravoúhlé průměty na obr. 2a, 2b, a obr. 3. Nápravu uvedeme v následujícím textu.



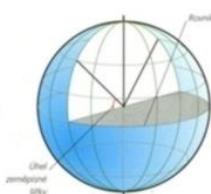
Obr. 1a



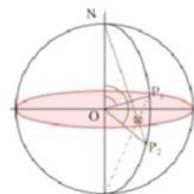
Obr. 1c



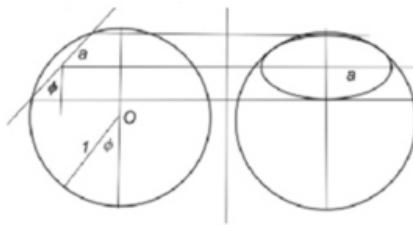
Obr. 1c



Obr. 2a



Obr. 2b



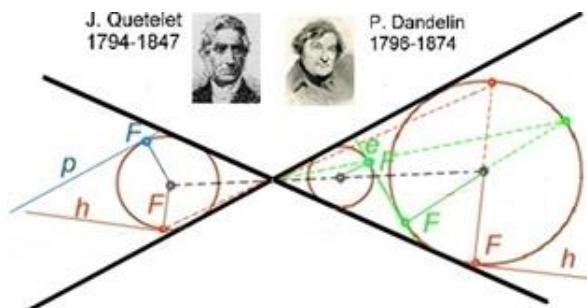
Obr. 3

## 2 Průmět kulové plochy

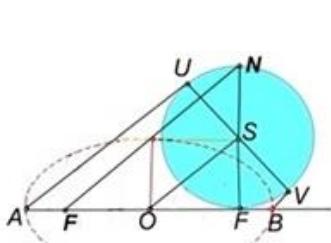
Podle věty Quetelet – Dandelinovy vysvětlíme ohniska ve **středovém** průmětu kulové plochy (viz obr. 4). Nejvzdálenější bod kulové plochy od průmětny se promítne do ohniska kuželosečky, která je průmětem obrysové kružnice. Zaměřme rotační dvojkužel za rotační válec; dostaneme ohniska v **rovnoběžném** průmětu kulové plochy.

Obrysem kulové plochy je hlavní kružnice  $\widetilde{UV}$  (viz obr. 5).

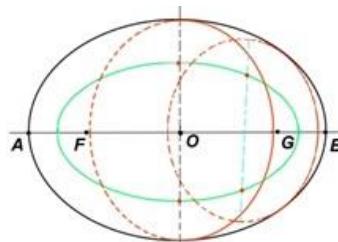
Podle věty 6 v následujícím textu se rovnoběžné řezy na kulové ploše promítají do homotetických elips, jejichž ohniska vyplňují kuželosečku konfokální s průmětem obrysů dané plochy (viz obr. 6). Jiné rovnoběžné řezy povedou k jiné konfokální ellipse. Úsečku považujeme také za elipsu s ohnisky v koncových bodech úsečky.



Obr. 4



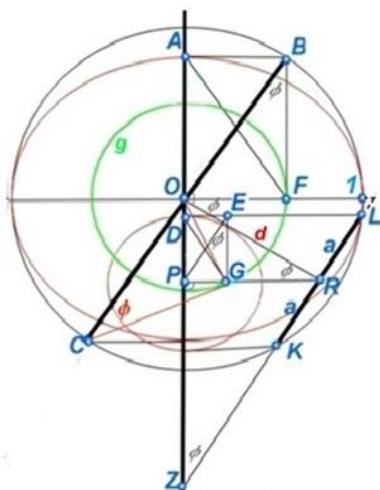
Obr. 5



Obr. 6

### 3 Pravoúhlé promítání

Věta 1: *Soustava rovnoběžných řezů kulové plochy se pravoúhle promítá do roviny jako soustava elips, jejichž ohniska vyplní kružnice soustřednou s obrysem kulové plochy.*



Obr. 7

Důkaz:

Rovníkový řez  $CB$  na kouli o poloměru 1 svírá s průmětnou  $ZO$  ostrý úhel  $\varphi$  a promítne se do průmětny  $ZO$  jako elipsa  $e$  se středem  $O$  a ohniskem  $F$ . Hlavní poloosa má délku 1, vedlejší poloosa  $\overline{OA} = \cos \varphi$  a excentricita  $\overline{OF} = \sin \varphi$ .

Rovnoběžný řez  $LK$  v rovině  $RZ$  je kružnice o poloměru  $a$ . Ta se promítne do průmětny  $ZO$  jako elipsa se středem  $P$  a hlavní poloosou  $a$ .

Z obdélníka  $PDEG$  vyplývá, že  $\overline{PE} = a$ , vedlejší poloosa  $\overline{PD} = a \cos \varphi$ , ohnisko je  $G$  a excentricita  $\overline{PG} = a \sin \varphi$ .

Dále platí  $\overline{OP} = \overline{OR} \sin \varphi = \sqrt{1 - a^2} \sin \varphi$ ,  $\overline{OG} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PG}^2} = \sin \varphi$ . Bod  $G$  tedy leží na výsledné kružnici  $g$ ,  $\angle ORP = \varphi$ , neboť  $PR \perp OZ$  a  $OR \perp LK$ .

Protože  $CG$  je tečna kružnice  $g$ , platí též  $\angle OCG = \varphi$ . Označíme-li  $r$  poloměr kružnice  $g$ , potom  $\varphi = \angle GCO = \arcsin r$ .

Obrazeně:

Každý bod  $G'$  kružnice  $g$  vede k rovnoběžnému řezu se středem  $R'$ . Ten snadno určíme jako průsečík kolmic  $OR'$  a  $P'G'$ .

Pro  $\varphi = \pm \pi/2$  se řezy promítají jako rovnoběžné úsečky.

Pro  $G' \equiv F$  (nebo k němu protilehlý bod na kružnici  $g$ ) je  $Z$  nevlastní bod přímky  $OA$ ,  $\varphi = 0$ ,  $r = 0$  a  $g \equiv O$ . ■

Autorem dalšího důkazu je M. Lávička.

Z této věty vyplývá, že při pravoúhlém průmětu jsou oba póly vzdáleny od středu o excentricitu elipsy, která je průmětem rovníku. Bod může být považován za kružnici o nulovém poloměru.

V nákresku na obr. 7 jsou roviny kolmé k nákresně zakresleny tučnou úsečkou. Výsledná ohnisková kružnice je označena  $g$ . Zde jsou zakresleny i elipsy, které bychom viděli v bokorysu.

Následující dva důkazy jsou provedené metodami odlišnými od důkazů v klasické deskriptivní geometrii.

Zvolme pravoúhlou pravotočivou souřadnicovou soustavu s počátkem  $O$ : Na obr. 7 míří osa  ${}^+x$  dozadu a jeví se zde jako bod  $O$ . Osa  ${}^+y$  je svislá vzhůru a jeví se ve skutečné velikosti. Osa  ${}^+z$  je vodorovná směrem vpravo a jeví se ve skutečné velikosti. Rovnoběžné řezy na kulové ploše  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  svírají s rovinou  $z = 0$  úhel  $\varphi$ . Promítáme je kolmo do roviny  $z = 0$ .

Označíme-li na obr. 7 velikost úsečky  $\overline{OR} = d$ , potom rovina řezu bude mít rovnici

$$z \cos \varphi - y \sin \varphi = d.$$

Průnikovou kružnicí proložme válcovou plochu ve směru osy  $z$ . Rovnice průnikové kružnice musí splňovat rovnici  $z \cos \varphi - y \sin \varphi = d$  i rovnici kulové plochy  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Uvažujme  $0 < d < 1$  a  $0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ .

Do rovnice kulové plochy dosaďme  $z = \frac{y \sin \varphi + d}{\cos \varphi}$ . Dostaneme rovnici válcové plochy

$$x^2 + y^2 + \left( \frac{d + y \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 = 1,$$

která po zjednodušení přejde na klasický tvar rovnice elipsy v rovině  $z = 0$ :

$$\frac{x^2}{1 - d^2} + \frac{(y + d \sin \varphi)^2}{(1 - d^2) \cos^2 \varphi} = 1.$$

Tato elipsa má střed  $P[0, -d \sin \varphi]$ , hlavní poloosu  $\sqrt{1 - d^2}$ , vedlejší poloosu  $\sqrt{1 - d^2} \cos \varphi$

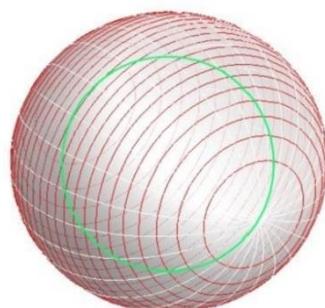
a excentricitu  $e = \sqrt{1 - d^2} \sin \varphi$ .

Protože ohniska této elipsy leží na přímce  $y + d \sin \varphi = 0$ , budou mít souřadnice:

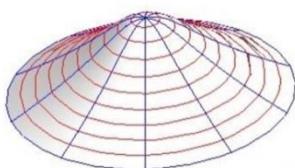
$$[-e, -d \sin \varphi], \quad [e, -d \sin \varphi].$$

Dosazením se přesvědčíme, že obě ohniska leží na kružnici  $x^2 + y^2 = \sin^2 \varphi$ , která je v obr. 6 označena  $g$ . Důsledky při  $\varphi = 0$  nebo  $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$  jsou uvedeny v předchozím důkazu.

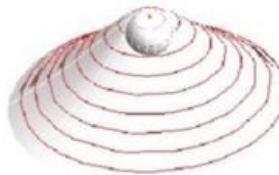
Věta 1 je graficky vyjádřena na obr. 8. Můžeme ji použít v případě, když chceme pravoúhlý průmět (nebo přibližně pravoúhlý průmět) rotační plochy v okolí jejího oblého vrcholu approximovat kulovou plochou (obr. 9 a obr. 10). Společná dotyková kružnice se pravoúhle promítne jako elipsa. Pomoci její excentricity určíme polohu průmětu vrcholu rotační plochy, jenž leží uvnitř jejího obrysu.



Obr. 8



Obr. 9



Obr. 10

## 4 Pokroky v deskriptivní geometrii

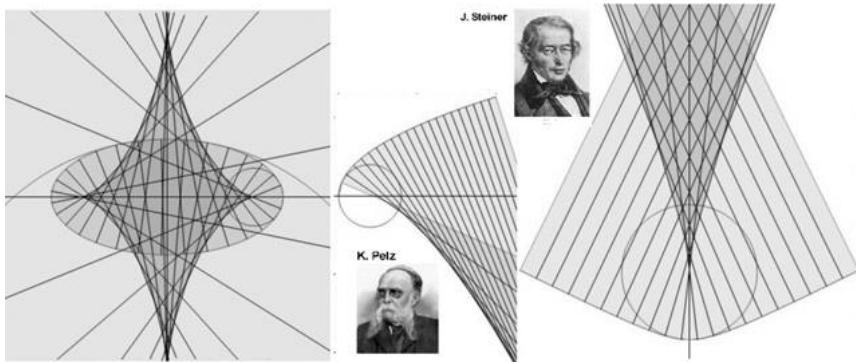
Karel Pelz (1845 – 1908) se zasloužil o modernizaci deskriptivní geometrie. Je autorem více než třiceti vědeckých prací, jejichž seznam nalezneme například v Ottově slovníku naučném. Známá je **Steiner-Pelzova parabola**, která je obálkou normální regulární kuželosečky a slouží k určení středu křivosti regulární kuželosečky. Jakob Steiner byl starší (1796 – 1863).

Oblouky Steiner-Pelzových parabol jsou na obr. 11.

Pro elipsu dostaneme čtyři Steiner-Pelzovy paraboly, osy elipsy jsou jejich tečnami. Poloměry křivosti ve vrcholech elipsy s poloosami  $a, b$  jsou  $\frac{b^2}{a}, \frac{a^2}{b}$ .

Pro oblouk paraboly tvaru  $y = k\sqrt{x}, x \geq 0$  je osa  $x$  je tečnou Steiner-Pelzovy paraboly. Poloměr křivosti ve vrcholu paraboly  $y^2 = 2px$  je  $p$ .

Pro jednu větev hyperboly tvaru  $y = k\sqrt{1+x^2}$  dostaneme dvě Steiner-Pelzovy paraboly, které se dotýkají osy  $y$ . Poloměr křivosti ve vrcholu hyperboly s poloosami  $a, b$  je  $\frac{b^2}{a}$ .

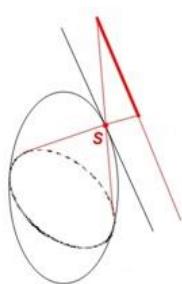


Obr. 11

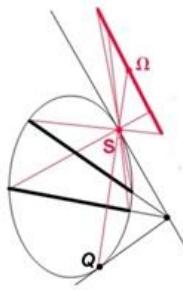
Uvedeme teď bez důkazů věty (jejichž objevitelem je patrně Karel Pelz) z knihy Kadeřávek, Klíma, Kounovský: Deskriptivní geometrie, 2. díl.

Věta 2 (ze str. 438): *Centrální průměty všech kuželoseček plochy druhého stupně z libovolného jejího bodu na rovinu rovnoběžnou s tečnou rovinou v tomto bodě jsou homotetické kuželosečky* (viz obr. 12).

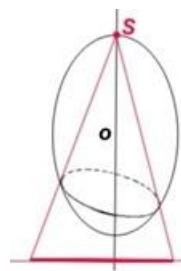
Věta 3 (ze str. 438): *Centrální průměty kuželoseček plochy druhého stupně, jejichž roviny se protínají v tečné rovině, se promítají z bodu dotyku této tečné roviny na rovinu s ní rovnoběžnou jako soustředné homotetické křivky. Střed  $\Omega$  je průmětem dotykového bodu  $Q$*  (viz obr. 13).



Obr. 12



Obr. 13



Obr. 14

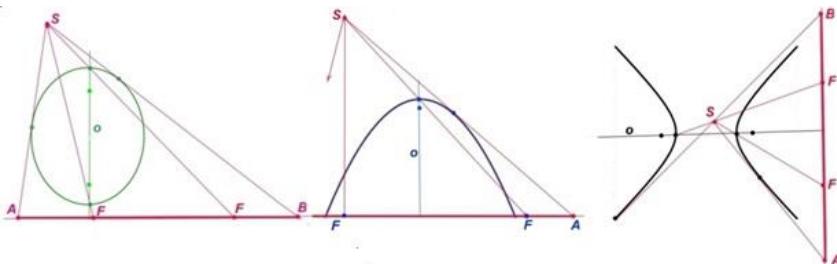
Věta 4 (ze str. 439): *Každá kuželosečka rotační plochy druhého stupně se centrálně promítá z vrcholu plochy na rovinu kolmou k ose rotace do kružnice (nebo do přímky) - viz obr. 14.*

Věta 5 (ze str. 442): *Centrální nebo rovnoběžné průměty vrcholů rotační plochy druhého stupně do roviny kolmé k rotační ose jsou ohniska průmětu jejího obrysu.*

Toto tvrzení je uváděno jako Pelzovo rozšíření věty Quetelet-Dandelinovy platné pro kouli (obr. 4).

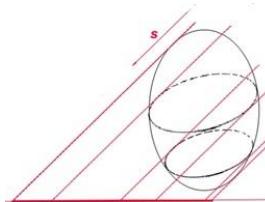
Pokud střed promítání rotační plochy druhého stupně leží vně této plochy, pak nejvýše dva body skutečného obrysu plochy se mohou promítat do nevlastní přímky průmětny.

U rotačního paraboloidu promítáme také jeho nevlastní vrchol. Na obr. 15 je ve všech třech případech průmětem plochy elipsa.

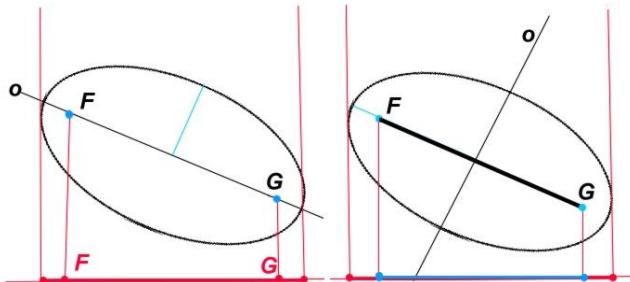


Obr. 15

Věta 6 (ze str. 442): *Rovnoběžné řezy libovolné plochy druhého stupně promítají se v jakémkoli rovnoběžném promítání do homotetických kuželoseček, jejichž ohniska vyplňují kuželosečku (jednu nebo dvě), konfokální s průmětem obrysu dané plochy (viz obr. 16).*



Obr. 16



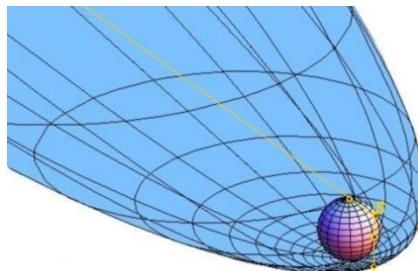
Obr. 17

Poznámka: U dvojdílného hyperboloidu může jít o dvě kuželosečky.

Věta 7 (ze str. 443): *V ortogonálním promítání má obrys rotační plochy druhého stupně, vzniklé otáčením kuželosečky okolo hlavní osy, průměty jejích ohnisek za svá ohniska.*

*V témž promítání je obrys rotační plochy druhého stupně, vzniklé rotací kuželosečky okolo vedlejší osy, konfokální s průmětem kružnice, kterou opisují ohniska rotující kuželosečky (viz obr. 17).*

Přidejme nakonec obr. 18, kde je středový průmět kulové plochy, která se dotýká jedním pólem průmětny a střed promítání  $S$  je ve výšce druhého pólu, od kterého je vzdálen o poloměr kulové plochy. Obrys průmětu plochy je parabola. Pro středové promítání je kulová plocha průhledná.



Obr. 18

**Poznámka:**

František Kadeřávek (1885-1961), 1905 asistent Karla Pelze, 1945 rektor ČVUT

Josef Klíma (1887-1943), 1931 řádný profesor deskriptivní geometrie v Brně

Josef Kounovský (1878-1949), původně zeměměřičský inženýr

Pro obrázky byly použity programy Mathematica 7, Corel Photo-Paint.

**Poděkování**

Velice děkuji doc. M. Lávičkovi z Plzně, prof. M. Křížkovi z Prahy a doc. D. Velichové z Bratislavы za spolupráci na tomto příspěvku.

**Literatura**

- [1] F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský: *Deskriptivní geometrie*, 1. díl, kap. 22 (str. 49), kap. 79 (str. 167), Praha 1950 (prírodovědecké nakladatelství)  
2. díl, kap. 220-222, (str. 437-443), JČMF, Praha 1932
- [2] Karel Pelz: *Die Zentral und Parallel projection der Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschittebene*; Grunertův Archiv für Mathematik und Physik, 1871

# List of Participants

## CONFERENCE

Bastl	Bohumír	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Bálint	Vojtech	KKMAHI PEDAS, Žilinská univerzita v Žiline
Bátorová	Martina	KAGDM FMFI, UK v Bratislavě
Blažková	Eva	MUUK MFF, Univerzita Karlova v Praze
Bombík	Danuta	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Čižmár	Ján	KMI PF, Trnavská univerzita, Trnava
Čmelková	Viera	KKMAHI PEDAS, Žilinská univerzita v Žiline
Dudzik	Piotr	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Gemeranová	Mária	KAGDM FMFI, UK v Bratislavě
Gergelitsová	Šárka	Gymnázium Benešov
Hašek	Roman	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Hýrošová	Tatiana	KMDG, Technická univerzita, Zvolen
Holešová	Michaela	KM FHV, Žilinská univerzita, Žilina
Chalmovianský	Pavel	KAGDM FMFI, UK v Bratislavě
Karger	Adolf	KDM MFF, Univerzita Karlova v Praze
Kargerová	Marie	Praha
Kmeťová	Mária	KM FPV, Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra
Kolářová	Dana	ÚNK FA, České vysoké učení technické, Praha
Kolcun	Alexej	Ústav geoniky AV ČR, v. v. i., Ostrava
Koreňová	Božena	Kremnica
Körtesi	Péter	University of Miskolc
Kupčáková	Marie	KM PrF, Univerzita v Hradci Králové
Lávička	Miroslav	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Michálková	Kristýna	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Mihalovič	Ladislav	Prefa kompozity a.s., Brno
Molnár	Emil	IM, Budapest Univ. of Technology and Economics
Németh	László	IM, University of West Hungary, Sopron
Pech	Pavel	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Pokorná	Barbora	KAGDM FMFI, UK v Bratislavě
Polinceusz	Piotr	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Ralík	Oliver	Nitra
Richtáriková	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Sroka-Bizoň	Monika	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Stachel	Hellmuth	IDMG, Technische Universität Wien
Surynková	Petra	KDM MFF, Univerzita Karlova v Praze
Szarková	Dagmar	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Šír	Zbyněk	MFF, Univerzita Karlova v Praze
Tománek	Ludovít	KM FHV, Žilinská univerzita v Žiline
Tomiczková	Svetlana	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni

Tytkowski	Krzysztof	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Vajsálová	Margita	KMDG SvF, STU v Bratislave
Velich	Ilja	Bratislava
Velichová	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislave
Vojteková	Mária	KKMAHI PEDAS, Žilinská univerzita v Žiline
Vršek	Jan	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Weiss	Gunter	Technical University in Dresden
Wildberger	Norman	School of Mathematics and Statistics, UNSW Sydney
Zachariáš	Svatopluk	Plzeň
Zamboj	Michal	MÚ MFF, Univerzita Karlova v Praze

## GEOGEBRA WORKSHOP

Červenka	František	KMDG VŠB-TU Ostrava
Dikantová	Faustína	CZŠ Narnia, Bratislava
Dlouhá	Dagmar	KMDG VŠB-TU Ostrava
Holecová	Milica	CZŠ Narnia, Bratislava
Huláková	Mária	ZŠ Benkova v Nitre
Koreňová	Lilla	KAGDM FMFI, UK v Bratislave
Štureková	Olga	Súkromné gymnázium Žilina
Švidroňová	Katarína	Spojená škola Ružomberok

Proceedings of the  
SLOVAK-CZECH CONFERENCE  
ON GEOMETRY AND GRAPHICS

Editors:  
Daniela Velichová, Miroslav Lávička, 2015

Published by  
Nakladatelstvo STU  
Mýtna 30, 811 07 Bratislava



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ  
UNIVERZITA V BRATISLAVE

Cover design  
Jaromír Dobrý

First Edition

Bratislava 2015

ISBN 978-80-227-4479-9