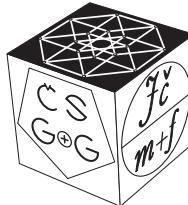


CZECH SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS  
OF THE UNION OF CZECH MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS

**36<sup>th</sup> Conference on  
Geometry and Graphics**



**PROCEEDINGS OF THE  
CZECH-SLOVAK CONFERENCE ON  
GEOMETRY AND GRAPHICS 2016**

Rožnov pod Radhoštěm  
September 12–15, 2016



**25<sup>th</sup> Symposium on  
Computer Geometry SCG'2016**

SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

Language correction of the publication was not performed, language accuracy is the sole responsibility of the contributing authors.

Contributions included in the proceedings were selected by the scientific committee members based on reviews.

All rights reserved. No part of this work may be used or reproduced in any manner whatsoever or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without written permission from the publisher and copyright owner.



Ostravská univerzita  
Dvořákova 7, 701 03 Ostrava 1

Proceedings of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2016  
First edition

© Alexej Kolcun, Miroslav Lávička, Martin Žáček, 2016

© Ostravská univerzita, 2016

ISBN 978-80-7464-874-8 (online)

ISBN 978-80-7464-873-1 (CD)

# Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2016

Organized by:  
Czech Society for Geometry and Graphics  
in cooperation with  
The Union of Czech Mathematicians and Physicists  
Faculty of Science, University of Ostrava  
Institute of Geonics of the Czech Academy of Sciences

## Organizing Committee:

Alexej **Kolcun** – University of Ostrava & CSGG  
Věra **Ferdianová** – University of Ostrava  
Martin **Žáček** – University of Ostrava

## Scientific Committee:

Roman **Hašek** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)  
Pavel **Chalmovianský** – Univerzita Komenského v Bratislavie (SK)  
Mária **Kmeťová** – Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra (SK)  
Miroslav **Lávička** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)  
Emil **Molnár** – Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (HU)  
Pavel **Pech** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)  
Monika **Sroka-Bizoń** – Politechnika Ślaska, Gliwice (PL)  
Maria **Horvath-Šimić** – Sveučilište u Zagrebu (HR)  
Daniela **Velichová** – Slovenská technická univerzita v Bratislavie (SK)  
Gunter **Weiss** – Technische Universität Wien (AT)



## Table of Contents

FOREWORDS . . . . .	7
PLENARY TALKS . . . . .	9
SROKA-BIZOŇ MONIKA <i>Architectural geometry</i> . . . . .	11
ŠÍR ZBYNĚK <i>Křivky v diferenciální geometrii a geometrickém modelování</i> . . . . .	17
VELICOVÁ DANIELA <i>Minkowski point set operations</i> . . . . .	27
CONTRIBUTED TALKS . . . . .	41
BÁLINT VOJTECH, ADAMKO PETER <i>Packing problems</i> . . . . .	43
BIZZARRI MICHAL, LÁVIČKA MIROSLAV <i>On interpolations with medial axis/surface transforms providing rational envelopes</i> . . . . .	53
HAMŘÍKOVÁ RADKA, DLOUHÁ DAGMAR <i>3D GeoGebra v deskriptivní geometrii</i> . . . . .	61
GÜTTNEROVÁ PAVLA <i>Hrátky s 3D GeoGebrou</i> . . . . .	65
HAŠEK ROMAN <i>Kreslení a vyšetřování křivek v GeoGebře.</i> . . . . .	71
HOLEŠOVÁ MICHAELA <i>Geometrical Constructions and the Digital Information Space</i> . . . . .	81
HÝROŠOVÁ TATIANA <i>Konštrukcia kužel'osečiek v Bézierovom tvare</i> . . . . .	89
CHALMOVIANSKÝ PAVEL <i>Intersection of curves – facts, computations, applications in blowup</i> . . . . .	95
KOLCUN ALEXEJ <i>Kružnica ako racionálna krivka do stupňa štyri</i> . . . . .	103

KRÁLOVÁ ALICE	
<i>Zobrazení koule v kosouhlém promítání – co není napsáno v učebnicích deskriptivní geometrie . . . . .</i>	111
MOLNÁR EMIL, PECH PAVEL, SZIRMAI JENO	
<i>On visualization of homogeneous 3-geometries and their Simson-Wallace locus for simplices via exterior calculus . . . . .</i>	129
MORÁVKOVÁ ZUZANA	
<i>Publikování a sdílení materiálů na webu geogebra.org . . . . .</i>	145
PALÁČEK RADOMÍR	
<i>Tipy a triky pro tvorbu úloh v GeoGebře . . . . .</i>	151
RICHTÁRIKOVÁ DANIELA	
<i>Vizualizácia 4-rozmerných experimentálnych dát a ich aproximácia funkciou troch premenných . . . . .</i>	157
ADAM RUŽYCZKA	
<i>Perceptual illusion in spatial perception . . . . .</i>	163
SKALA VÁCLAV	
<i>Fractions, Projective Representation, Duality, Linear Algebra and Geometry . . . . .</i>	171
SURYNKOVÁ PETRA	
<i>Construction of All Topologically Unique Quadrilateral Meshes: A Survey . . . . .</i>	181
VAJSÁBLOVÁ MARGITA, KLIMEKOVÁ ZUZANA	
<i>Kvantifikácia tvaru územia s využitím v kartografii . . . . .</i>	185
VOLNÁ JANA, VOLNÝ PETR	
<i>Síť válce v GeoGebře . . . . .</i>	193
ŽÁČEK JAROSLAV, AŞKIN MEHMET	
<i>How precise is the Kinect? . . . . .</i>	199
ZAMBOJ MICHAL	
<i>Braids of Juggling Patterns . . . . .</i>	207
LIST OF PARTICIPANTS . . . . .	217

## Forewords

*Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics* that took place in hotel Relax, Rožnov pod Radhoštěm, Czech Republic on September 12–15, 2016, was a joint event of two traditional annual conferences held till 2014 separately in the Czech republic and in Slovakia, namely 36<sup>th</sup> CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS organized by the Czech Society for Geometry and Graphics of the Union of Czech Mathematicians and Physicists and 25<sup>th</sup> SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY CSG '2016 organized by the Slovak Society for Geometry and Graphics.

Among 42 conference participants from the Czech republic and Slovakia there were present also foreign participants from Austria, Hungary and Poland. In addition to 20 contributed talks and 5 posters from applied and pure geometry, graphics and education of geometry, participants enjoyed 3 plenary lectures on various topics. Daniela Velichová from Slovak University of Technology in Bratislava, Slovakia presented the latest results in the field of studying possible generalizations and some applications of *Minkowski set operations*. Zbyněk Šír from Charles University, Czech Republic shared his experience with teaching selected geometric courses at the Faculty of Mathematics and Physics in Prague in the talk entitled *Differential geometry and geometric modelling – some didactic aspects*. Monika Sroka-Bizoń from Politechnika Ślaska, Gliwice, Poland presented selected examples of contemporary architecture and application of geometry in the field of architectural description in the talk *Architectural Geometry*.

Workshop on usage of dynamic mathematical software GeoGebra was also a part of the conference.

Conference was organized by the Department of Informatics and Computers and the Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Ostrava together with the Ostravian branch of the Union of Czech Mathematicians and Physicists. Social programme included tourist walks in the Beskydy mountains with possibilities to enjoy discussions among participants in the beautiful open nature, not to forget about conference dinner with traditional folk music performed by the dulcimer group Lipka from Ostrava.

We would like to invite you to the next joint event of 26<sup>th</sup> Symposium on Computer Geometry SCG '2017 and 37<sup>th</sup> Conference on Geometry and Graphics that will be held again together by representatives of both soci-

eties for geometry and graphics as Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics in September in Slovakia, in order to keep the good tradition of our common meetings deeply rooted in the history.

Plzeň & Bratislava, November 30, 2016

Miroslav Lávička  
*chair of ČSGG*

Daniela Velichová  
*chair of SSGG*

## PLENARY TALKS



# Architectural geometry

Monika Sroka-Bizoń

*Geometry and Engineering Graphics Centre, Silesian University of Technology  
Krzywoustego Street No. 7, 44-100 Gliwice, Poland  
email: monika.sroka-bizon@polsl.pl*

**Abstract.** Architectural Geometry is an area of research, which combines applied geometry and architecture. H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer and A. Kilian firstly used the term "Architectural Geometry" in 2007 in their book at the same title. Cooperation of three geometers and an architect gave a great effect. [3] But sometimes it seems that architects understand the concept of architectural geometry in a slightly different way than the authors of the concept. Architectural geometry in this way means - special geometry, new, mysterious, which needs new magic words. Concepts such as parametric architecture, parametric modeling and parametric design become fashionable slogans. But sometimes it is very difficult to understand what these terms mean. On a two-selected example of contemporary architecture the author wants to present that language of geometry is reliable in the field of architectural description. And knowledge of the geometry is required to the contemporary designer.

*Key words:* geometry, architectural geometry, design, architectural design

## 1 Introduction

Architectural design is a fantastic process. The empty space in a city was filled with a new structure. The designer must take into account in the assumed design solution context of the place - *genius loci*. The specified function has been placed in the prescribed form, in the geometrical form.

Analysis of two contemporary realized architectural objects can present some of the aspects of designing and shaping the surface as part of the architectural object.

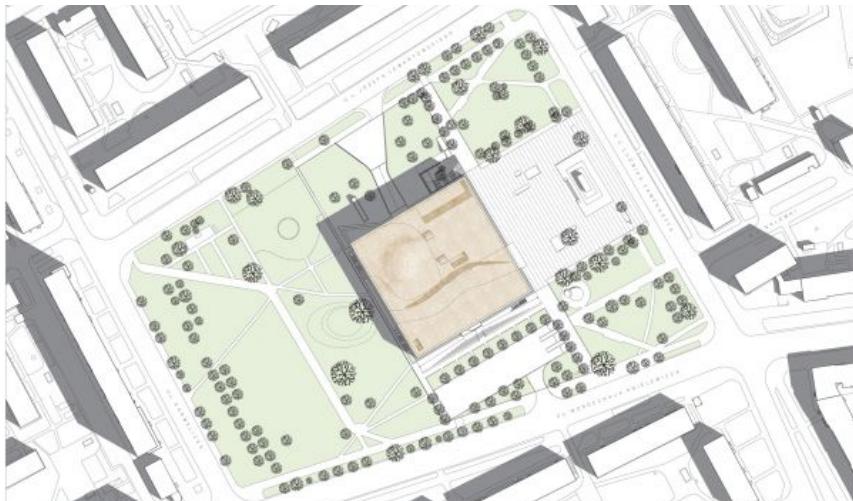
## 2 POLIN – The Museum of the History of Polish Jews – the box with a surprise

The first object which was analysed it was The Museum of the History of Polish Jews. The building was built in 2009-2013, in Warsaw, at Anielewicza Street. The museum was realized in a small park in Muranów, district of Warsaw, in the former ghetto area, opposite the Ghetto Heroes Memorial. [4]

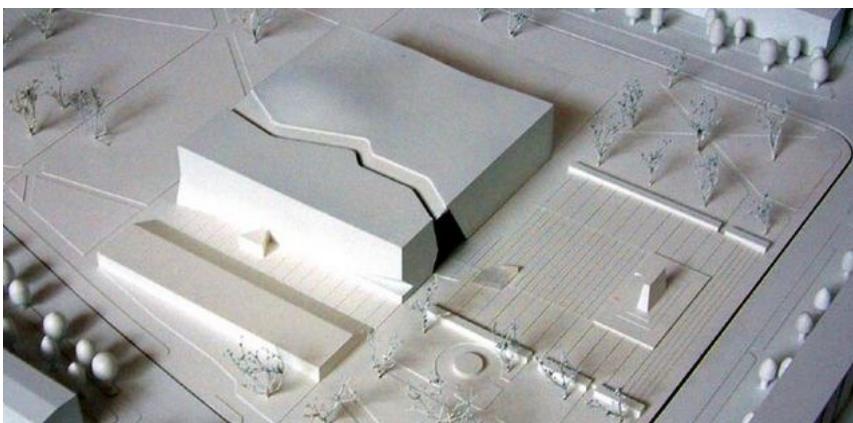
A design competition for the museum (2005) was won by the Finnish practice of Lahdelma & Mahlamaki. According to the jury, the winning design presented a perfect combination of rational and expressive forms. One of the architectural critics has called the object "box with a surprise."

Surrounding of the square, where is located the museum, create rectangular blocks of flats. Architects, authors of the design, described their project as a compromise between rather simple form of buildings which are situated around the square, the green open area of park and the expressive power of the monument of the heroes of the ghetto.

The main body of the museum building is a cuboid separated curved rupture described by the architects as *Yum Suf* – the parting waters of Red Sea.



**Fig. 1: Schematic diagram of the design a rectangular building with a curved "rupture"**



**Fig. 2: Physical model of the museum**

Curvilinear rupture of the building, symbolizing parting the red sea, has been designed as two load-bearing walls with a height of 20 m, with a total area of 2000 m<sup>2</sup>.

The initial computer model of the walls was developed in AutoCAD based on scans of freehand design sketches. The final computer model of the steel structure of the walls has been developed in the RHINO. The biggest challenge for designers was to find solutions for shaping the discrete surface of the walls. The discrete representation of the surface was the mesh constructed with quadrangle's panels curved into two directions. The mesh of quadrangles was covered with shotcrete designed by Torkret company. [2]



**Fig. 3: The steel structure of the wall and the final visual, result of the discrete surface**

### **3 Złote Tarasy – commercial complex with a interesting overlap**

The commercial complex „Złote Tarasy“ was realized in 2002-2006 in a central part of Warsaw at Plater Street. The building is located near the Central Station in Warsaw.

The American architect David Rogers from The Jerde Partnership – the international design office, designed the building. According to his description of the design the most important and interesting part of the complex should be the courtyard. This part of the complex should be like the urban quarter, a shopping arcade.

The main buildings of the complex are multi-useable objects with a typical architectural form for this type of objects. A distinguishing feature of the complex, kind of showcase of the object, is the overlap (the roof) situated over the inner courtyard of the complex. The surface of roof covering, under the premise of the design, was to resemble waving fabric thrown over the treetops...

The design office Ove Arup & Partners from USA developed the first part of the project roof covering. Engineers from Ove Arup have found the idea of shell structure as a solution for construction of the structural overlap. But the shell structures are implemented mainly as a reinforced concrete structure. And the inner courtyard of the complex need light, especially sunlight. So finally the discrete surface was realized as steel/glass structure and the triangle mesh was used as a representation of the surface. This part of design was realised by Waagner Biro from Austria. The company specializing in the construction of this type has designed a huge gridshell with triangular glass panels. Such design solution gave the greatest possibility to form in free way the curvature of the surface. [1] [5]

So the first architect's description of the design was realized as at approximately 10,000 m<sup>2</sup> free form surface similar to the cloth draped over seven spheres. [5]



**Fig. 4: The computer visualization of the commercial complex “Złote Tarasy” in Warsaw**



**Fig. 5: The structural overlap – the landmark of this part of Warsaw**

## 4 Conclusion

The realization of freeform shapes in architecture poses great challenges to engineering and design. The complete design and construction process involves many aspects, including:

- form finding,
- feasible segmentation into panels,
- functionality,
- materials,
- statics and costs.

On a base of the analysed objects is possible to present two ways for presenting discrete surface in architecture – as an invisible part of the object (POLIN The Museum of the History of Polish Jew) or as the most important part of architecture, which directly determines the aesthetics of the object. [3]

Only close cooperation of architects, engineers and geometers enables resolving issues related to designing and constructing of the freeform structures.

Geometry alone is not able to provide solutions for the entire process, but a solid geometric understanding is an important step toward a successful realization of such a project.

## References

- [1] N. Anderson: *Wielkie Budowy III RP: Złote Tarasy*, Architektura Murator vol. 2, 2005, pp. 95-104
- [2] A. Cudak, M. Ferenc, A. Łoziński, R. Mahlamaki, K. Mycielski, G. Stiasny, T. Żylski: *Muzeum Historii Żydów Polskich*, Architektura Murator vol. 6, 2013, pp. 38-60
- [3] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian: *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press 2007, pp.I-IV, pp.669-709
- [4] G. Stiasny: *Getto, warszawska architektura pamięci*, Architektura Murator vol. 6, 2013, pp. 26-36
- [5] <http://www.waagner-biro.com/en/divisions/steel-glass-structures/references/reference/złote-tarasy>

# Křivky v diferenciální geometrii a geometrickém modelování

## Curves in differential geometry and in geometric modeling

Zbyněk Šír

*Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy  
Sokolovská 83, Praha  
zbynek.sir@mff.cuni.cz*

**Abstract.** In this paper I want to discuss my experience with teaching Differential geometry and Geometric modeling at the Charles University. In particular I want to focus on several concrete topics and different ways how to handle them. The most interesting is connection between the theoretical and applied aspects of these topics. We will thus discuss the reparameterization of curves, curvature, torsion, various frames along the curve, polynomial and rational curves.

**Keywords:** differential geometry, geometric modeling, curvature, reparameterization, rotation minimizing frame

**Klíčová slova:** diferenciální geometrie, geometrické modelování, křivost, reparametrisace, repér minimální rotací.

### 1 Úvod

V tomto příspěvku se chceme zamyslet nad některými tématy a problémy, se kterými se setkáváme při výuce geometrických předmětů pro obor Obecná matematika na MFF UK. Nepůjde přitom o nějaké převratné objevy. Většina látky, kterou zmíníme je standartní. Spíše se bude jednat o určitá pozorování, koncepty a přístupy, která dle našich zkušeností mohou přispět ke zkvalitnění výuky.

Geometrie není na naší fakultě ve studiu příliš bohatě zastoupena. V rámci hlavního matematického bakalářského oboru *Obecná matematika* se setkáváme s tradiční dominancí matematické analýzy. Rovněž algebraické předměty jsou poměrně dobře zastoupeny. Z geometrických předmětů je povinná pouze diferenciální geometrie po jeden semestr v rozsahu 2/1. Na ní volně navazuje nepovinně volitelný předmět Geometrické modelování. Právě o zkušenosti s výukou těchto dvou předmětů se opírá tento příspěvek.

Přes omezenou hodinovou dotaci je možno pojmut výuku relativně náročně, právě proto, že se můžeme opřít o řadu znalostí z kvalitně pojaté analýzy a lineární algebry. Můžeme tak z matematické analýzy předpokládat velmi solidní znalosti z diferenciálního a integrálního kalkulu jedné a více proměnných, křivkový a plošný integrál včetně Greenovy věty a teorie řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Z lineární algebry pak využijeme dobrou znalost vlastností vektorových prostorů, rozkladu matic a zejména orthogonální diagonalizace bilineárních forem.

## 2 Význam parametrizované křivky

Na rozdíl od teorie ploch je diferenciální geometrie křivek založena podstatně na *globální parametrizaci*. Je to způsobeno tím, že křivky na rozdíl od ploch nemohou mít komplikovanou topologii. „Lepením“ obrazů intervalů dostaneme vždy pouze obraz intervalu (případně uzavřenou křivku jako obraz kružnice), není možné žádné větvení. Proto je vhodné vyjít z definice parametrizované křivky, tedy dostatečně hladkého regulárního zobrazení z intervalu do reálného prostoru

$$\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

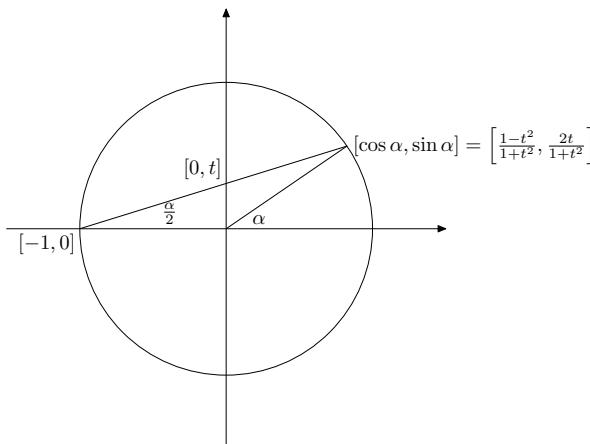
Zobecnění do vyšší dimenze podle mého názoru nepřináší hlubší matematické pochopení a je vhodnější se mu vyhnout. Naopak zásadní je pojem reparametrizace

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) := \mathbf{c}(\phi(\tilde{t})), \quad \tilde{t} \in \tilde{I}, \quad (2)$$

kde  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  je diffeomorfismus (či obecněji bijekce která má dostatečně mnoho derivací spojitých stejně jako její inverze). Křivku pak definujeme jako třídu všech reparametrizací a diferenciální geometrii chápeme jako studium vlastností nezávislých na reparametrizaci.

Hledání vhodných parametrizací je velmi důležité, ale prakticky není možné se mu rychle naučit, protože odhaluje pravé geometrické a matematické myšlení. Dovolím si uvést svých několik oblíbených příkladů.

- **Kubiky.** Máme implicitní křivku jako množinu bodů v rovině, které splňují rovnici  $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ . Najděte parametrizaci této křivky.
- **Cykloida** Najděte parametrický popis trajektorie bodu, který leží na povrchu kola o poloměru  $a$ , které se valí bez prokluzování po ose  $x$  doprava konstantní rychlostí  $v$ , přitom v čase  $t = 0$  se bod nachází v bodě  $[0, 0]$ .
- **Epicykloida.** Uvažujme kružnici o poloměru  $r$ , která se valí po vnější straně kružnice o poloměru  $R$ . Parametricky popište trajektorii zvoleného bodu na pohyblivé kružnici. Načrtněte tuto křivku pro případ  $R = r$ , určete parametrický interval na němž se křivka uzavře a spočtěte její délku.
- **Kissoida.** Uvažujme kružnici  $k$  o poloměru  $r$  a nějakou její tečnu  $p$ . Označme jako  $S$  bod dotyku přímky  $p$  s kružnicí  $k$  a nechť bod  $A$  leží na kružnici  $k$  naproti bodu  $S$ . Pro polopřímku  $q$ , která vychází z bodu  $A$  a která se protíná s přímkou  $p$ , označme jako  $R$  bod průniku  $p$  a  $q$ , jako  $Q$  bod průniku  $k$  a  $q$ . Označme jako  $P$  bod na  $q$ , který splňuje  $|A - P| = |Q - R|$ . Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů  $P$ , a najděte parametrický popis této množiny.
- **Tractrix** je křivka v  $\mathbb{R}^2$ , kterou opisuje hmotný předmět  $A$ , který je tažený na provázku délky 1 předmětem  $B$ . Ve počátečním čase  $t = 0$  se předmět  $A$  nachází v bodě  $(0, 1)$  a předmět  $B$  v bodě  $(0, 0)$ . Předmět  $A$  se pohybuje konstantní rychlostí 1 podél osy  $x$  doprava. Najděte parametrizaci tractrixu.



Obrázek 1: Dvě různé parametrizace kružnice.

- **Vivianiho křivka.** Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr.

### 3 Reparametrizace křivek

Je vhodné rovněž procvičovat reparametrizaci křivek. Jako jednoduchý příklad lineární reparametrizace uveďme různé parametrizace úsečky. V prostoru mějme body  $A = [1, 2, 3]$ ,  $B = [0, -2, -1]$ . Nalezněte regulární parametrizaci úsečky  $AB$ . Nalezněte všechny parametrizace  $\mathbf{c}(s)$  úsečky  $AB$  obloukem tak, aby bod  $\mathbf{c}(0)$  ležel ve třetině  $AB$ , blíže k bodu  $A$ . Nalezněte parametrizaci  $AB$  tak, aby obsahovala singulární bod, tj. bod, kde je vektor první derivace nulový.

Velice krásným příkladem jsou však dvě různé parametrizace jednotkové kružnice bez bodu  $[-1, 0]$ , viz Obr. 1. Ta je samozřejmě parametrizována jako  $[\cos(\alpha), \sin(\alpha)]$ ,  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ . Zároveň ji však můžeme parametrizovat stereografikou projekcí z osy  $y$  se středem v bodě  $[-1, 0]$ . Přesněji uvažujme přímku, která spojuje body  $[-1, 0]$  a  $[0, t]$ . Jako snadné cvičení z analytické geometrie nahlédneme, že protne kružnici v dalším bodě o souřadnicích

$$\left[ \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right]. \quad (3)$$

Když měníme parametr  $t \in \mathbb{R}$ , procházíme celou kružnicí (bez bodu  $[-1, 0]$ ). Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem je patrné, že obě parametrizace spolu souvisí prostřednictvím reparametrizace  $t = \tan(\alpha/2)$ . Tento příklad je velmi elegantní, protože poskytuje vzorce pro vyjádření funkcí cos a sin pomocí tangens polovičního úhlu. Zároveň poskytuje racionální parametrizaci kružnice.

Racionální parametrizace mají z hlediska reparametrizací ještě jednu důležitou vlastnost, totiž že jejich stupeň se nemění při reparametrizaci lineární lomenou funkcí. Speciálně funkce tvaru

$$t = \frac{\lambda s}{(\lambda - 1)s + 1}, \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ je pevné} \quad (4)$$

jsou difeomorfismy intervalu  $[0, 1]$  na sebe. Kupříkladu tak parametrizace 3 pro  $t \in [0, 1]$  parametrizuje čtvrtinu kružnice ležící v prvním kvadrantu. Pomocí reparametrizace 4 můžeme upravit distribuci parametru na tomto intervalu a přitom získat parametrizaci téhož typu.

Při obecném pohledu na reparametrizace je klíčové vědět, jak se mění jejich derivace. Máme-li parametrizaci  $\mathbf{c}(t)$  a její reparametrizaci  $\tilde{\mathbf{c}}(s) := \mathbf{c}(\phi(s))$ , pak derivováním složené funkce dostáváme  $\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds} = \frac{d\mathbf{c}}{dt} \cdot \frac{d\phi}{ds}$ . Podobně můžeme pokračovat pro vyšší derivace. Pokud zavedeme zjednodušující zápis, ve kterém reparametrizovanou křivku označujeme  $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(t(s))$  a dále tečkou značíme derivaci  $\frac{d}{dt}$  a čárkou derivaci  $\frac{d}{ds}$ , dostáváme vztahy pro první tři derivace, které můžeme shrnout v maticovém tvaru jako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}' \\ \mathbf{c}'' \\ \mathbf{c}''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & 0 & 0 \\ t'' & (t')^2 & 0 \\ t''' & 3t't'' & (t')^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{c}} \\ \ddot{\mathbf{c}} \\ \dddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Jedná se o jakousi matici přechodu, která bude hrát klíčovou roli ve studiu invariantů křivek (křivost a tozre). Rovněž z ní můžeme vyčíst některé geometrické vlastnosti. Například vektory první a druhé derivace vždy určují stejnou rovinu (oskulační) a navíc vektor druhé derivace míří do stejné poloroviny (která obsahuje střed křivosti).

## 4 Repéry podél křivky

Máme-li parametrizaci  $\mathbf{c}(t)$ , pak z první rovnice (5) plyne, že parametrizaci obloukem získáme reparametrizací  $t(s)$ , která splňuje  $|t'| = 1/\|\dot{\mathbf{c}}\|$ . Zároveň je zjevné, že každé dvě parametrizace obloukem se liší pouze reparametrizací  $\tilde{s} = \pm s + s_0$ , tedy počátečním bodem a směrem procházení. Parametrizace obloukem je tak přirozená, že je téměř „geometrická“. Je to význačný reprezentant třídy všech reparametrizací, neboť odpovídá isomorfismu parametrického intervalu a obrazu křivky. Proto je vhodné využít jí k definici základních pojmu. Tento postup se nám osvědčil lépe, než jejich definice v obecné parametrizaci.

Definujeme tedy v parametrizaci obloukem tečný vektor  $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$  a křivost  $\kappa = \|\mathbf{t}'\|$  jako velikost změny tohoto vektoru. Při nenulové křivosti pak doplníme  $\mathbf{t}$  na orthonormální (Frenetův) repér vektory  $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/\|\mathbf{t}'\|$  a  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ . V tuto chvíli přichází klíčové tvrzení, které je zároveň větou (Frenetovou) a definicí,

totiž že existuje jediná funkce  $\tau$  (nazývaná torze) taková, že platí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Důkaz této věty je v literatuře často zastřen speciálními vlastnostmi Frenetova repéru. Je lépe pochopitelný, uvažujeme-li obecný pohyblivý ON repér  $\{\mathbf{v}_1(s), \mathbf{v}_2(s), \mathbf{v}_3(s)\}$ . Jeho okamžitá změna vyjádřená opět v tomto repéru je vyjádřena maticí

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou reálná čísla. Důkaz je přímočarý, neboť  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{i,j}$  a tedy  $0 = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)' = \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j'$ . Matice v (6) tedy antisymetrická, čímž jsme mimochodem určili Lieovu algebru speciální orthonormální Lieovy grupy.

V případě Frenetova repéru dostaváme z definice vektoru  $\mathbf{n}$ , že  $\beta = 0$  a  $\alpha = \kappa$ . Zbývající funkce  $\gamma$  je pak označena jako  $\tau$  a nazývána torze. Význam Frenetovy věty je obrovský, je v ní shrnuta celá lokální teorie křivek. Z pohybu Frenetova repéru je možno pochopit geometrický význam křivosti a torze. Zároveň z příslušných diferenciálních rovnic plyne, že  $\kappa$  a  $\tau$  určují křivku jednoznačně až na přímou shodnost. Takto určená křivka existuje a je možno jí s pomocí Frenetovy věty lokálně kanonicky rozvinout

$$\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(0) + \mathbf{t}(s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + \dots) + \mathbf{n}(\frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\kappa'}{6}s^3 + \dots) + \mathbf{b}(\frac{\kappa\tau}{6}s^3 + \dots). \quad (7)$$

Významné jsou ale i další případy pohyblivých repérů, zejména když  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$  a navíc v (6) předpokládáme, že  $\gamma = 0$ , dostaváme repér s minimální rotací. Takovým příkladem je například volba

$$\mathbf{v}_2 = (\cos \phi)\mathbf{n} + (\sin \phi)\mathbf{b},$$

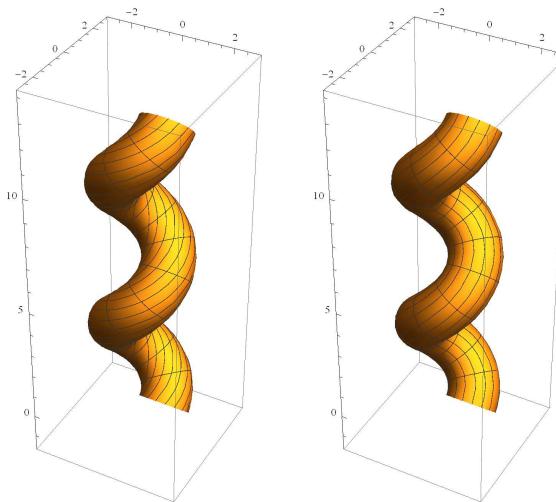
kde  $\phi = -\int \tau$ . Tento repér má velký teoretický výnam, protože je příkladem paralelního přenosu (podél křivky) a rovněž velký význam pro aplikace. Pro ně je totiž Frenetův repér nevhodný, jak je patrné z následujícího příkladu.

Pro danou křivku  $\mathbf{c}(t)$  můžeme parametrizovat trubicovou plochu o poloměru  $r$  s křivkou  $\mathbf{c}(t)$  jako páteřní křivkou dvěma následujícími způsoby

$$\mathbf{p}_1(t, \theta) = \mathbf{c}(t) + (\cos \theta)\mathbf{n}(t) + (\sin \theta)\mathbf{b}(t) \quad (8)$$

$$\mathbf{p}_2(t, \theta) = \mathbf{c}(t) + (\cos \theta)\mathbf{v}_1(t) + (\sin \theta)\mathbf{v}_2(t). \quad (9)$$

Ve druhém případě dostaneme lepší kvalitu parametrických čar - viz Obr. 2.



Obrázek 2: Dvě různé parametrizace trubicové plochy. Nalevo s využitím Freonetova repéru, napravo s využitím repéru s minimální rotací.

Na závěr této části chceme zmínit, že náš přístup nám umožňuje velmi elegantní a systémový důkaz formulí pro křivost a torzi v obecné parametrizaci

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3}, \quad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}) \cdot \dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

V parametrizaci obloukem tyto formule platí triviálně a zároveň snadno nahlédneme, že tyto výrazy jsou invariantní vůči reparametrizacím díky formulím (5).

## 5 Křivky v geometrickém modelování

V nejrůznějších aplikacích není praktické uchovávat celou parametrizaci křivek. Namísto toho je křivka reprezentována pouze koeficienty vůči vhodné bázi. V ideálním případě mají tyto koeficienty geometrický význam (řídící polygon).

Jako dobrý úvod do této problematiky se nám osvědčilo studium  $C^1$  Hermittovské interpolace. Hledáme křivku  $\mathbf{c}(t)$  tak, aby na intervalu  $t \in [0, 1]$  interpolovala koncové body a tečné vektory. Řešíme tedy rovnice

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{c}(1) = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{c}'(0) = \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{c}'(1) = \mathbf{V}_1. \quad (10)$$

Nejprve hledáme kubickou  $\mathbf{c}(t)$  v monomiální bazi  $\mathcal{M} = \{1, t, t^2, t^3\}$ . Křivku tedy napíšeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \mathbf{A}_3 t^3$$

a koeficienty  $(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$  pak dostaneme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{pmatrix}.$$

Existuje taková baze  $\mathcal{F} = \{f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ , ve které bude mít problém jako řešení

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{P}_0 f_0(t) + \mathbf{P}_1 f_1(t) + \mathbf{V}_0 f_2(t) + \mathbf{V}_1 f_3(t)?$$

Jinými slovy, odpovídající soustava lineárních rovnic má jednotkovou matici? Je snadné nahlédnout, že výše uvedená matice musí být maticí přechodu  $[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}}$  od monomiální báze k této ideální (Fergusonově) bazi a tedy dostáváme

$$[id]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jinými slovy Fergusonovu bazi máme vyjádřenu vůči monomiální bazi ve sloupečcích této poslední matice a tedy

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ f_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ f_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ f_3(t) &= -t^2 + t^3. \end{aligned}$$

Za archetyp geometrického modelování je však třeba považovat Bézierovy křivky, tedy polynomální křivky vyjádřené v Bernsteinově bázi polynomů stupně nejvýše  $n$

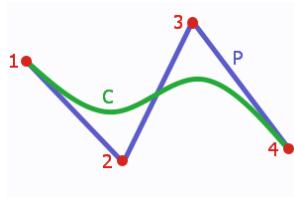
$$\mathcal{B}_n = \{B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)\},$$

kde  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)}$ . Křivku potom parametrizujeme jako

$$\mathbf{c}(t) = \sum_n^{i=0} \mathbf{P}_i B_i^n(t),$$

kde  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^N$  jsou kontrolní body.

Výklad teorie Bézierových křivek je standartní a dobře zpracovaný v literatuře. Za zmínu ovšem stojí, že Bernsteinovy polynomy byly poprvé použity



Obrázek 3: Bézierova kubika a její řídící polygon.

ke konstrukčnímu důkazu Weierstrassovy věty. Jsou úzce spojeny s teorií pravděpodobnosti, neboť  $\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  je pravděpodobnost, že jev který má pravděpodobnost  $t$  nastane z  $n$  opakování právě  $i$  krát. Z toho ihned plyne nenuvolnost polynomů na intervalu  $[0, 1]$  a to, že jsou rozkladem jednotky.

Od Bézierových křivek, které jsou jakýmsi ideálem geometrického modelování chceme přejít ke skutečně významným objektům pro aplikace, kterými jsou NURBS [4]. Za tímto účelem musíme udělat tři kroky: přejít ke splajnům, přejít k racionálním křivkám a přejít od křivek k plochám.

Teorie B-splajnů je často vykládána bez náležité vazby na lineární algebru. Naším základním pohledem je, že máme-li dánou uzlové dělení  $(u_0, u_1, \dots, u_m)$  kde  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_m$ , definujme prostor funkcí  $\mathcal{P}_p(u_0, u_1, \dots, u_m)$  obsahující funkce  $f : [u_0, u_m] \rightarrow \mathbb{R}$ , které mají na celém intervalu  $[u_0, u_m]$  spojitu  $(p-1)$  derivaci a zůžené nakaždý interval  $[u_i, u_{i+1}]$  jsou to polynomy stupně  $p$ . Jedná se zjevně o vektorový prostor, jakou má dimenzi? A je elegantním jevem geometrického modelování, že je možno rekurzivně sestrojit posloupnost funkcí stupně  $p$

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (11)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t), \quad (12)$$

která tvoří bázi (B-spline) tohoto protoru funkcí (ovšem zúžených na interval  $[u_p, u_{m-p}]$ ).

Přechod k racionálním křivkám je možno vyložit na příkladu Bernsteinovy báze s tím, že pro B-spine bázi je konstrukce analogická. Z matematického pohledu je přirozené racionální Bézierovy křivky chápat jako affinní verze polynomiálních křivek. Z důvodu geometrického modelování je však nutné, aby zároveň řídící polygon byl affinní verzí projektivního řídícího polygonu. Z toho důvodu se váhy objevují nejen na poslední (homogenizující) souřadnici, ale jsou jimi přenásobeny všechny souřadnice. Uvažujeme tedy polynomiální křivku s

řídícími body  $w_i[\mathbf{P}_i, 1]$ , jejíž affinní verze má tvar

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}. \quad (13)$$

V tuto chvíli je vhodné připomenout reparametrizaci (4), pomocí níž dostaneme reparametrizovanou křivku  $\mathbf{c}(s)$ , která má tytéž řídící body, ale váhy  $(\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_n)$ , kde  $\tilde{w}_i = \lambda^i w_i$ . Důkaz je přímočarý

$$B_i^n(t(s)) = B_i^n(s) \frac{\lambda^i}{[(\lambda - 1)s + 1]^n}$$

a tedy i

$$\frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{P}_i B_i^n(t(s))}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t(s))} = \frac{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i B_i^n(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i \mathbf{P}_i B_i^n(s)}{\sum_{i=0}^n \tilde{w}_i B_i^n(s)}.$$

Z toho vyplývá, že každou racionální křivku můžeme reparametrizovat tak, aby první a poslední váha byla rovna 1. Tohoto vyjádření se využívá zvláště v případě kuželoseček.

## 6 Závěr

V našem příspěvku jsme se pokusili ukázat, jak některé základní pojmy z teorie křivek můžeme využívat jak k teoretickému výkladu, tak k aplikacím. Při výuce je velmi vhodné tyto pohledy kombinovat. V našem příštím příspěvku se chceme podobně věnovat teorii ploch.

## Literatura

- [1] M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces* Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- [2] G. Farin, J. Hoschek, M. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design* Elsevier, 2002
- [3] J. Hoschek, D. Lasser: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design* A. K. Peters, 1993
- [4] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*, Monographs in Visual Communications. Springer, Berlin, 1997
- [5] A. N. Pressley: *Elementary Differential Geometry* Springer 2010



# Minkowski point set operations

Daniela Velichová

*Institute of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering,  
Slovak University of Technology in Bratislava,  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic  
email: daniela.velichova@stuba.sk*

**Abstract.** Paper brings a survey of basic properties of Minkowski point set operations - sum, difference and product of two point sets defined as basic geometric objects: points, lines and curves. Intrinsic geometric properties of resulting geometric figures are determined by means of derivatives of vector functions representing operands of Minkowski operations. Interesting examples and applications of generated forms are included and illustrated.

**Key words:** Minkowski sum, difference and product, modelling curves and surfaces

## 1 Introduction

Minkowski sum  $\oplus$ , Minkowski difference  $\Theta$ , and Minkowski product  $\otimes$  of two point sets are point-wise operations based on sum and product of two points in a basic geometric space performed on their position vectors with respect to a fixed reference point.

Minkowski sum is believed to be introduced by H. Minkowski around 1903, during his close cooperation with D. Hilbert in Göttingen. This operation is used in Grassmann algebras for symbolic calculations. Re-discovered by Rida Farouki in 1990-ties it was applied in Computer graphics to summing up polygonal regions in plane or convex polyhedra (polytopes) in higher dimensions, calculation of offsets, robot motion planning, etc.

More definitions are available, based on different approach to representation of a point (vector, complex number or quaternion). In this paper we will use vector based definition of point.

**Definition 1.** Minkowski sum of point sets  $A$  and  $B$  is set  $S$  of all such points that are sums of all points  $a \in A$  with all points  $b \in B$

$$S = A \oplus B = \{a + b; a \in A, b \in B\}.$$

Interesting geometric interpretation of Minkowski sum of two point sets as continuous motion of one set on the boundary of the other without any change of orientation leads to other form of definition.

**Definition 2.** Minkowski sum of point sets  $A$  and  $B$  is set  $S$  that is the union of all positions of set  $A$  translated by all position vectors of points from set  $B$

$$S = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A^b .$$

Minkowski difference of two point sets can be introduced in various not equivalent forms.

**Definition 3.** Minkowski difference of point sets  $A$  and  $B$  is set  $D$  of all such points  $d$  whose Minkowski sum with the set  $B$  is a subset of set  $A$

$$D = A \ominus B = \{d; d + B \subseteq A\}.$$

Formula connecting Minkowski sum and difference is as follows, while  $A^C$  and  $(-B)^C$  stand for complements of sets  $A$  and  $-B$  in space  $C$

$$\begin{aligned} A \ominus B &= (A^C \oplus (-B)^C)^C, \\ A \cup A^C &= C, (-B) \cup (-B)^C = C. \end{aligned}$$

**Definition 4.** Minkowski difference of point sets  $A$  and  $B$  is set  $D$  of all such points that are differences of all points  $a \in A$  and all points  $b \in B$

$$D = A \oplus (-B) = \{a - b; a \in A, b \in B\}.$$

The above definitions determine different sets, therefore in general

$$A \ominus B \neq A \oplus (-B).$$

Operation of Minkowski product was introduced by Rida Farouki in 2001 on complex planar sets (in  $C = R \times R$ ) by means of product of complex numbers representing points in the complex plane. Concept has been extended in 2002 by Weiner and Gu, later in 2003 by Smukler to 4D (in  $H = C \times C$ ) by means of quaternion product. In 2013 it was generalized to arbitrary dimension  $n$  by means of wedge (outer) vector product of points' position vectors satisfying the following properties:

1.  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$
2.  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$
3.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$
4.  $\|\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\| = 1$

**Definition 5.** Minkowski product of point sets  $A$  and  $B$  is set  $P$  of all such points that are products of all points  $a \in A$  with all points  $b \in B$

$$P = A \otimes B = \{a \wedge b; a \in A, b \in B\}$$

Given points  $a, b \in \mathbf{E}^n$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , their sum is

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n) + (b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n) = \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in \mathbf{E}^n \end{aligned}$$

while their product is

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n) = \\ &= a_1 b_1 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \dots + a_2 b_1 (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1) + \dots = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) + \dots + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) (\mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n) \end{aligned}$$

Bivectors

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1\wedge 2} &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{1\wedge n} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_{2\wedge 3} &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{2\wedge n} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_n, \\ \dots, \mathbf{e}_{n-1\wedge n} &= \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

form orthonormal basis of the bivector space

$$\wedge^2(\mathbf{E}^d), d = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

while for  $n = 3$  is  $d = 3$  and wedge product is equivalent to the cross product (up to one sign). Bivector space  $\wedge^2(\mathbf{E}^3)$  with basis  $\{\mathbf{e}_{1\wedge 2}, \mathbf{e}_{1\wedge 3}, \mathbf{e}_{2\wedge 3}\}$  is isomorphic to space  $\mathbf{E}^3$  with basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , and this regular linear transformation mapping one basis to the other one

$$\varphi: \{\mathbf{e}_{1\wedge 2} \mapsto \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{1\wedge 3} \mapsto -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{2\wedge 3} \mapsto \mathbf{e}_1\}$$

$$\varphi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\varphi^{-1}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

is represented by matrix

$$\mathbf{M}_\varphi = \mathbf{M}_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Properties of Minkowski sum  $\oplus$

- Commutative  $A \oplus B = B \oplus A$
- Associative  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- Distributive  $(A \cup B) \oplus (C \cup D) =$   
 $= (A \oplus C) \cup (A \oplus D) \cup (B \oplus C) \cup (B \oplus D)$   
 $\bigcup_i P_i \oplus \bigcup_j Q_j = \bigcup_{i,j} P_i \oplus Q_j, i, j \in N$

Properties of Minkowski product  $\otimes$

- Anti-symmetric  $A \otimes B = -(B \otimes A)$
- Distributive  $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$

## 2 Minkowski operations on points and manifolds

Let point  $p$  in space  $\mathbf{E}^n$  be determined as  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  and manifold  $M \subset \mathbf{E}^n$  be given by vector map  $\mathbf{r}(u_i) = (x_1(u_i), x_2(u_i), \dots, x_n(u_i))$ ,  $u_i \in \Omega$ , with coordinate functions  $x_j(u_i)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i \leq n$  defined and at least once differentiable on  $\Omega \subset \mathbf{R}^i$ .

Minkowski sum  $p \oplus M = M' \subset \mathbf{E}^n$  is manifold represented by vector map

$$\mathbf{p}(u_i) = (x_1(u_i) + p_1, \dots, x_n(u_i) + p_n), u_i \in \Omega.$$

Manifold  $M'$  is manifold  $M$  translated by position vector of point  $p$ .

Minkowski product of point  $p \in \mathbf{E}^n$  and manifold  $M \subset \mathbf{E}^n$  is manifold  $M^* \subset \mathbf{E}^d$ ,  $d = n(n-1)/2$ , determined by vector map in the form

$$\begin{aligned} p \wedge M = \\ (p_1 \mathbf{e}_1 + \dots + p_n \mathbf{e}_n) \wedge (x_1(u_i) \mathbf{e}_1 + \dots + x_n(u_i) \mathbf{e}_n) = \\ = (p_1 x_2(u_i) - p_2 x_1(u_i), \dots, p_{n-1} x_n(u_i) - p_n x_{n-1}(u_i)) \end{aligned}$$

Minkowski product  $M^* = p \wedge M$  of point  $p$  and surface patch  $M$  in  $\mathbf{E}^3$  can be considered as image of manifold  $M$  determined by vector map

$$\mathbf{r}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)), (u, v) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$$

under a “quasi-central projection” from the centre  $p = [p_1, p_2, p_3]$  to the plane passing through origin  $O$  and perpendicular to position vector of centre  $p$ , while

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{r}(u, v) \cdot \begin{pmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Illustrations of Minkowski product of point and various manifolds are in Fig. 1.

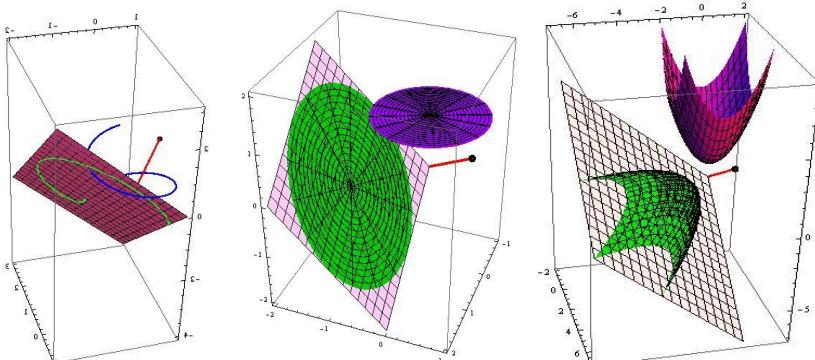


Fig. 1. Minkowski product of helical arc, disc, and parabolic surface patch.

Minkowski sum and product of two lines determined parametrically by vector functions  $\mathbf{p}(u) = p + u\mathbf{a}$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{q}(v) = q + v\mathbf{b}$ ,  $v \in \mathbf{R}$  are manifolds

$$S = \mathbf{p}(u) \oplus \mathbf{q}(v) = p + q + u\mathbf{a} + v\mathbf{b},$$

$$P = \mathbf{p}(u) \otimes \mathbf{q}(v) = p \wedge q + q \wedge u\mathbf{a} + p \wedge v\mathbf{b} + u\mathbf{a} \wedge v\mathbf{b}$$

defined for  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ . Their form is determined by lines' common position. Classification of various super-positions of two lines in space and their special position with respect to fixed reference point at origin is included in the following Table 1, with illustrations of resulting manifolds.

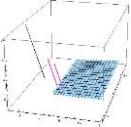
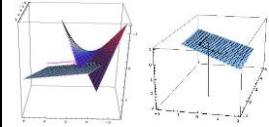
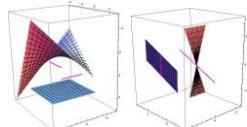
	Parallel lines	Intercept lines	Skew lines
$\oplus$	<b>Line</b> If one line is passing through origin, $\oplus =$ the other line.	<b>Plane</b> If lines form plane passing through origin, $\oplus =$ plane they form.	<b>Plane</b> If one line is passing through origin, $\oplus =$ plane through the other line.
$\otimes$	<b>Plane</b> If lines form plane passing through origin, $\otimes =$ perpendicular line through origin.	<b>Hyperbolic paraboloid</b> If lines form plane through origin, $\otimes =$ line through origin that is perpendicular to the plane formed by lines.	<b>Hyperbolic paraboloid</b> If one line is passing through origin, $\otimes =$ plane through origin perpendicular to the line passing through origin.
			

Table 1. Minkowski sum and product of two lines.

Minkowski sum and product of line and plane parametrically represented by vector functions  $\mathbf{p}(t) = p + t\mathbf{a}$ ,  $t \in \mathbf{R}$  and  $\mathbf{q}(u, v) = q + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ ,  $u, v \in \mathbf{R}$ , are manifolds determined for  $(u, v) \in \mathbf{R}^2$  as

$$S = \mathbf{p}(u) \oplus \mathbf{q}(v) = p + q + t\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$$

$$P = \mathbf{p}(u) \otimes \mathbf{q}(v) = p \wedge q + p \wedge (u\mathbf{b} + v\mathbf{c}) + q \wedge t\mathbf{a} + t\mathbf{a} \wedge (u\mathbf{b} + v\mathbf{c})$$

With respect to the mutual position of line and plane, special properties of the resulting manifold can be determined, see in Table 2 and 3.

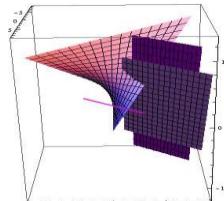
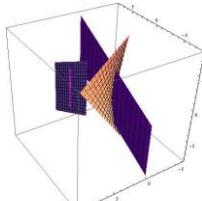
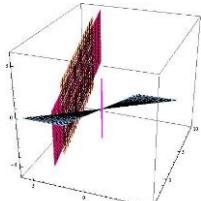
	<b>Line parallel to plane</b>	If line is passing through origin	If plane is passing through origin
⊕	<b>Plane parallel to both</b>	Parallel plane through this line	The same plane
⊗	<b>Hyperbolic paraboloid</b>		Plane perpendicular to given line
			

Table 2. Minkowski sum and product of plane and parallel line.

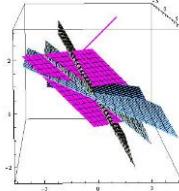
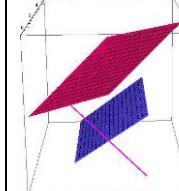
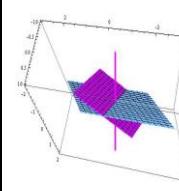
	<b>Line intersecting plane</b>	If plane is passing through origin	If line is passing through origin	If line and plane share origin
⊕	<b>Space</b>			
⊗	<b>Space</b>	1-parametric system of planes with common line through origin that is perpendicular to given line.	Plane through origin that is perpendicular to given line.	Plane intersecting given plane in line passing through origin perpendicular to given line.
				

Table 3. Minkowski sum and product of intersecting plane and line.

Minkowski sum and product of two planes represented by vector maps in forms

$$\mathbf{p}(u, v) = p + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \quad u, v \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{q}(s, t) = q + s\mathbf{a} + t\mathbf{c}, \quad s, t \in \mathbf{R}$$

determine the whole space, in case they are intersecting and none of them is passing through origin. Minkowski sum of two parallel planes is plane in the same direction, while their Minkowski product is the whole space. Results of Minkowski sum and product of two planes in special positions with respect to the reference point are illustrated in Table 4.

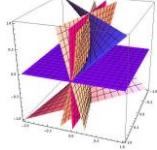
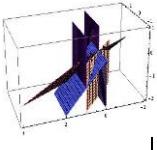
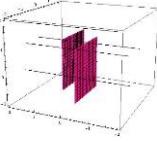
	<b>Intersecting planes</b>	Intersecting planes through origin	<b>Parallel planes</b>	One plane through origin
$\oplus$	<b>Space</b>		<b>Plane in the same direction</b>	The other plane
$\otimes$	<b>Space</b>	1-parametric system of hyperbolic paraboloids with common line in pierce line of planes through origin.	<b>Space</b>	Space formed by system of parallel lines.
				

Table 4. Minkowski sum and product of two planes.

Minkowski sum of two curves in  $\mathbf{E}^3$  represented parametrically by vector maps

$$\mathbf{k}(u) = (xk(u), yk(u), zk(u)), u \in I \subset \mathbf{R}$$

$$\mathbf{l}(v) = (xl(v), yl(v), xl(v)), v \in L \subset \mathbf{R}$$

is translation surface patch defined on planar region  $\Omega = I \times L \subset \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{s}(u, v) = (xk(u)+xl(v), yk(u)+yl(v), zk(u)+zl(v)), (u, v) \in \Omega.$$

Intrinsic differential characteristics of this surface are derived as

$$\varphi_1 = \|\mathbf{k}'\|^2 du^2 + 2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{l}' dudv + \|\mathbf{l}'\|^2 dv^2 \quad D_1 = (\|\mathbf{k}'\| \cdot \|\mathbf{l}'\|)^2 - (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{l}')^2 = \|\mathbf{k}' \times \mathbf{l}'\|^2$$

$$\varphi_2 = L du^2 + N dv^2, L = \frac{[\mathbf{k}', \mathbf{l}', \mathbf{k}'']}{\|\mathbf{k}' \times \mathbf{l}'\|}, N = \frac{[\mathbf{k}', \mathbf{l}', \mathbf{l}'']}{\|\mathbf{k}' \times \mathbf{l}'\|}$$

$$D_2 = L.N = \frac{D}{D_1}, D = \begin{vmatrix} \|\mathbf{k}'\|^2 & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{l}' & \mathbf{k}' \cdot \mathbf{l}'' \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{l}' & \|\mathbf{l}'\|^2 & \mathbf{l}' \cdot \mathbf{l}'' \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' & \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{l}' & \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{l}'' \end{vmatrix} \quad K = \frac{D}{D_1^2}$$

while  $K$  denotes the Gaussian curvature.

Minkowski product of above two curves in  $\mathbf{E}^3$  is surface patch defined for all  $(u, v) \in \Omega$  by vector map

$$\mathbf{p}(u, v) = \begin{pmatrix} yk(u)zl(v) - zk(u)yl(v) \\ zk(u)xl(v) - xk(u)zl(v) \\ xk(u)yl(v) - yk(u)xl(v) \end{pmatrix}^T$$

Intrinsic differential characteristics are determined by vectors that are vector products of derivatives of vector functions representing original two curves

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{l} = \mathbf{a}, \mathbf{k} \times \mathbf{l}' = \mathbf{b}, \mathbf{k}' \times \mathbf{l}' = \mathbf{c}, \mathbf{k}'' \times \mathbf{l} = \mathbf{d}, \mathbf{k} \times \mathbf{l}'' = \mathbf{e}$$

$$\varphi_1 = \|\mathbf{a}\|^2 du^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} dudv + \|\mathbf{b}\|^2 dv^2 \quad D_1 = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$$

$$\varphi_2 = D_1^{-1} (Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)$$

$$L = [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}], M = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}], N = [\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$$K = \frac{D_{LN} - D_M}{D_1^2} \quad D_2 = D_1^{-1} (D_{LN} - D_M)$$

$$D_{LN} = \begin{vmatrix} \mathbf{d} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{d} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \|\mathbf{a}\|^2 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \|\mathbf{b}\|^2 \end{vmatrix}$$

Illustrations of Minkowski sum and Minkowski product of line segment and circle are in Table 5, while Minkowski sum and Minkowski product of two circles in perpendicular planes in  $\mathbb{E}^3$  are presented in Table 6. Different forms appear for different sets of common points of the two circles, which influences consequently also number of singular (double) points on resulting surfaces and complexity of their forms.

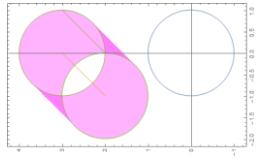
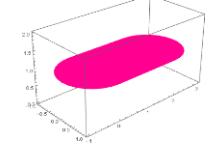
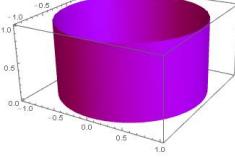
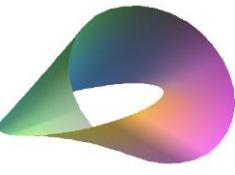
	Line segment and circle in the same plane	Line segment and circle in parallel plane	Line segment and circle in perpendicular plane
$\oplus$			
$\otimes$			

Table 5. Minkowski sum and product of line segment and circle.

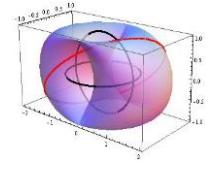
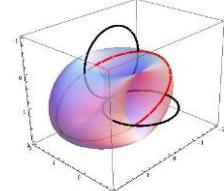
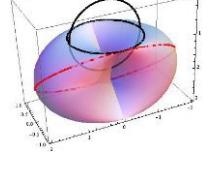
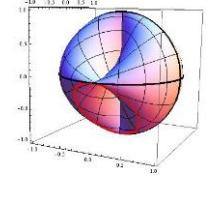
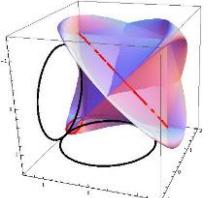
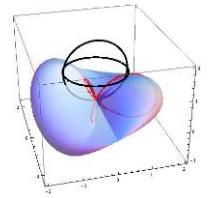
	Concentric circles located in coordinate planes, with centres at origin, and with 2 common points	Circles located in coordinate planes, and with 1 common point	Concentric circles located in planes parallel to coordinate planes, with 2 common points
$\oplus$			
$\otimes$			

Table 6. Minkowski sum and product of two circles.

Partial Minkowski sum and product are point set operations constrained to special types of point sets, e.g. differentiable manifolds  $K, L$  represented by vector maps with equal parameterization  $q(u), r(u)$  defined on interval  $I \subset R$

$$S_{P\oplus} = K \oplus L = \{q(u_0) + r(u_0), \forall u_0 \in I \subset R\}$$

$$P_{P\otimes} = K \otimes L = \{q(u_0) \wedge r(u_0), \forall u_0 \in I \subset R\}$$

Partial Minkowski sum or partial Minkowski product of two euqually parameterised curve segments is a curve at the surface that is Minkowski sum or Minkowski product of these segments

$$S_{P\oplus} \subset S, P_{P\otimes} \subset P$$

that is homeomorphic image of diagonal of the rectangular  $I \times I$  in the parametric space  $R^2$ . Both, curves and surfaces are illustrated in Table 6.

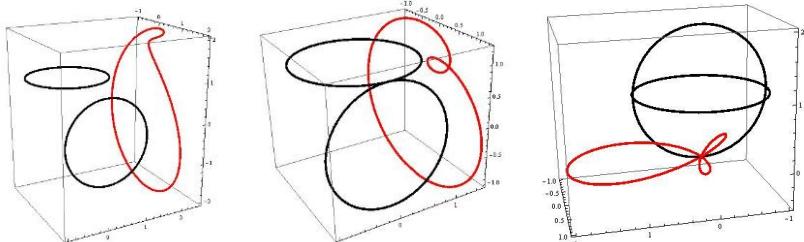


Fig. 2. Minkowski product of 2 circles with none, one and two common points.

### 3 Minkowski combinations of point sets

Generalisation of Minkowski point set operations are Minkowski point set combinations, leading to more powerful modelling tools enabling determination of two-parametric families of surfaces or curves with extreme form elasticity depending on values of 2 real parameters.

**Definition 6.** Multiple of a point set  $A \subset \mathbf{E}^3$  by a scalar  $k \in R$  is the set  $A_k$  in  $\mathbf{E}^3$  defined as

$$A_k = k.A = \{k.m / m \in A, k \in R\}.$$

Thus, we can define  $k$ -multiples of point sets with straightforward geometric interpretation as scaling of point set by coefficient  $k$ , i.e. homothety with centre in the reference point  $O$ .

**Lemma 1.** Linear combination of  $n$ -times set  $A \neq \emptyset, n \in N$  is subset of  $n$ -times Minkowski sum of set  $A$

$$n.A \subseteq \underbrace{A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{n\text{-times}}$$

**Proof.** Let us define set  $A = \{a_1, a_2\}$ ,  $a_1 \neq a_2$ . Then  $2.A = \{2a_1, 2a_2\}$ , and Minkowski sum  $A \oplus A = \{2a_1, 2a_2, a_1+a_2\}$ . Thus  $A \oplus A = 2.A \cup (\{a_1\} \oplus \{a_2\})$ , which means that  $2.A \subset A \oplus A$ .

**Definition 7.** Multiple of a point set  $A \subset \mathbf{E}^3$  by a regular square matrix  $\mathbf{M}$  of rank  $n$  with real entries is the set  $A_{\mathbf{M}}$  in  $\mathbf{E}^3$  defined as

$$A_{\mathbf{M}} = A.\mathbf{M} = \{m.\mathbf{M} / m \in A, \det(\mathbf{M}) \neq 0\}$$

**Definition 8.** Minkowski summative combinations of point sets can be defined as:

- a) linear, for real constants  $k, l$

$$LS_{k,l} = k.A \oplus l.B = \{k.a + l.b; a \in A, b \in B\}$$

- b) matrix, for regular square matrices  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{T}$  of rank 3

$$MS_{\mathbf{P},\mathbf{T}} = A.\mathbf{P} \oplus B.\mathbf{T} = \{a.\mathbf{P} + b.\mathbf{T}; a \in A, b \in B\}$$

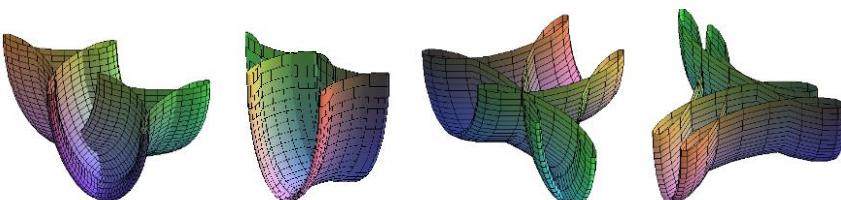


Fig. 3. Minkowski linear combinations semi-ellipse and Steiner hypocycloid.

**Definition 9.** Minkowski productive combinations of point sets can be defined as: a) linear, for real constants  $k, l$

$$\begin{aligned} LP_{k,l} &= k.A \otimes l.B = \{k.a \wedge l.b / a \in A, b \in B\} = \\ &= \{kl(a \wedge b) / a \in A, b \in B\} = kl(A \otimes B) \end{aligned}$$

b) matrix, for regular square matrices  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{T}$  of rank 3

$$\begin{aligned} MP_{\mathbf{P},\mathbf{T}} &= A.\mathbf{P} \otimes B.\mathbf{T} = \{a.\mathbf{P} \wedge b.\mathbf{T} / a \in A, b \in B\} = \\ &= \{(a \wedge b).\mathbf{P}.\mathbf{T} / a \in A, b \in B\} = (A \otimes B).\mathbf{P}.\mathbf{T} \end{aligned}$$

**Definition 10.** Minkowski partial summative combination of two space curves  $K: \mathbf{q}(u) = (q_1(u), q_2(u), q_3(u))$  and  $L: \mathbf{r}(u) = (r_1(u), r_2(u), r_3(u)), u \in I \subset R$ ,

$$S = k.K \oplus l.L, k, l \in \mathbf{R}, k^2 + l^2 \neq 0$$

determines a 2-parametric family of curve segments represented on  $I \subset R$  by vector maps for  $u \in I \subset R$

$$S: \mathbf{s}(u) = k.\mathbf{q}(u) + l.\mathbf{r}(u) = (s_1(u), s_2(u), s_3(u)),$$

where  $s_i(u) = k.q_i(u) + l.r_i(u)$ , for  $i = 1, 2, 3$ .

Differential characteristics, curvature and torsion, of the two-parametric family of summative laces in  $\mathbf{E}^3$  can be derived by means of derivatives of operand curves vector maps in the following forms

$$\kappa = \frac{|(k.\mathbf{q}' + l.\mathbf{r}') \times (k.\mathbf{q}'' + l.\mathbf{r}'')|}{|k.\mathbf{q}' + l.\mathbf{r}'|^3}$$

$$\tau = \frac{[k.\mathbf{q}' + l.\mathbf{r}', k.\mathbf{q}'' + l.\mathbf{r}'', k.\mathbf{q}''' + l.\mathbf{r}''']}{|(k.\mathbf{q}' + l.\mathbf{r}') \times (k.\mathbf{q}'' + l.\mathbf{r}'')|^2}$$

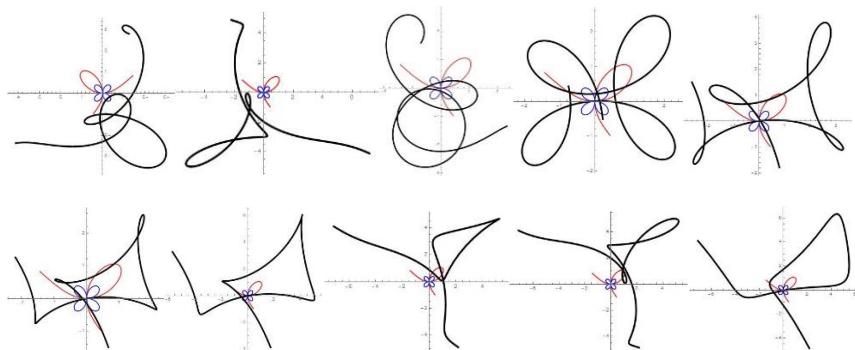


Fig. 4. Minkowski summative laces – shamrock curve and leaf of Descartes.

**Definition 11.** Minkowski partial multiplicative combination of curves  $K$  and  $L$

$$P = k.K \otimes l.L, k, l \in R \quad k^2 + l^2 \neq 0$$

is a family of curve segments in  $\mathbf{E}^3$  represented on  $I \subset R$  by vector maps

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u) &= k.\mathbf{q}(u) \times l.\mathbf{r}(u) = \\ &= k.l \left( \begin{vmatrix} q_2(u) & q_3(u) \\ r_2(u) & r_3(u) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} q_1(u) & q_3(u) \\ r_1(u) & r_3(u) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} q_1(u) & q_2(u) \\ r_1(u) & r_2(u) \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Derivatives of vector map of multiplicative laces are derived as

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(u) &= (k.\mathbf{q}(u) \times l.\mathbf{r}(u))' = k.l(\mathbf{q}'(u) \times \mathbf{r}(u)) + (\mathbf{q}(u) \times \mathbf{r}'(u)) \\ \mathbf{p}''(u) &= (k.\mathbf{q}(u) \times l.\mathbf{r}(u))'' = k.l((\mathbf{q}'(u) \times \mathbf{r}(u)) + (\mathbf{q}(u) \times \mathbf{r}'(u)))' = \\ &= k.l(\mathbf{q}''(u) \times \mathbf{r}(u)) + 2(\mathbf{q}'(u) \times \mathbf{r}'(u)) + (\mathbf{q}(u) \times \mathbf{r}''(u)) \\ \mathbf{p}'''(u) &= (k.\mathbf{q}(u) \times l.\mathbf{r}(u))''' = k.l(\mathbf{q}(u) \times \mathbf{r}(u))''' \end{aligned}$$

and differential characteristics of two-parametric family of multiplicative laces in  $\mathbf{E}^3$  can be then derived in the following forms

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|(k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})' \times (k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})''|}{|(k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})'|^3} = \frac{|(\mathbf{q} \times \mathbf{r})' \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r})''|}{kl|(\mathbf{q} \times \mathbf{r})'|^3} \\ \tau &= \frac{[(k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})', (k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})'', (k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})''']}{|(k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})' \times (k.\mathbf{q} \times l.\mathbf{r})''|^2} = \\ &= \frac{kl[(\mathbf{q} \times \mathbf{r})', (\mathbf{q} \times \mathbf{r})'', (\mathbf{q} \times \mathbf{r})''']}{|(\mathbf{q} \times \mathbf{r})' \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r})''|^2} \end{aligned}$$

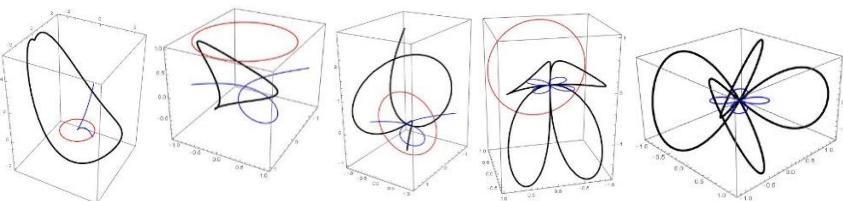


Fig. 5. Minkowski multiplicative laces – combinations of circle and cissoids, leaf of Descartes and shamrock curve in perpendicular planes.

## 4 Conclusions

Minkowski point set operations and their generalisations have many applications in various fields of computer graphics and geometric modelling, design, architecture and art. These modelling algorithms can be used for modelling various forms of curves and surfaces, in morphing – deformation of curve shape, or adjusting the shape  $C$  to a given desirable form  $A$ ,  $B = C \oplus (-k).A$ , where

$\lim_{k \rightarrow n} B = k.A, n > 0$ . Decomposition of a point set to set components can be achieved as Minkowski difference of point sets  $C$  and  $A$ , while  $C = A \oplus B$ , which leads for known  $C$  and  $A$  to  $B = C \oplus (-A)$ , see in Fig. 6.

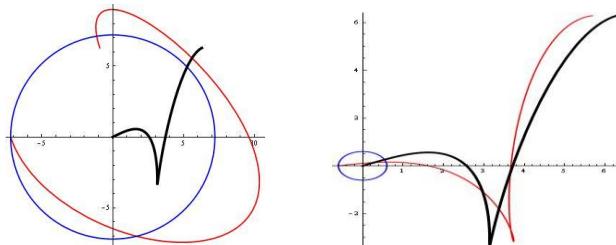


Fig. 6. Deformation of curve adjusted to the shape of circle (on the left), decomposition of given curve to an ellipse and other curve (on the right).

Minkowski combinations of discrete point sets can be used to generate mosaics, as illustrated in Fig. 7.

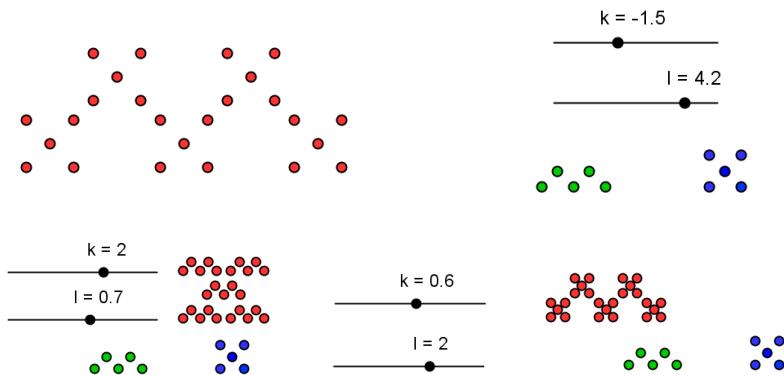


Fig. 7. Minkowski combinations in modelling mosaics.

## Acknowledgements

The author has been supported by project APVV-1061-12.

## References

- [1] J. Dobrakovová, V. Záhonová: *Minkowski product of lines*, G - Slovak Journal for Geometry and Graphics, Vol. 9, No.18, 2012, pp.5-12
- [2] J. Dobrakovová, V. Záhonová: *Minkowski Product of Point and Curve or Point and Surface in Three-Dimensional Euclidean Space*. G - Slovak Journal for Geometry and Graphics, Vol. 11, No. 21, 2014, pp.17-26

- [3] R. T. Farouki, H. T. Moon, B. Ravani: *Minkowski Geometric Algebra of Complex Sets*. *Geometriae Dedicata* 85: 283-315, 2001
- [4] R. T. Farouki: *Minkowski Combinations of Complex Sets*. Curve and Surface Fitting, Saint Malo, 2002.
- [5] R. T. Farouki, H. Pottman: *Exact Minkowski Product of N Complex Discs*. *Reliable Computing* 8: 43-66, 2002
- [6] A. Kaul, R. T. Farouki: *Computing Minkowski Sums of Planar Curves*. *International Journal of Computational Geometry and Applications* 5, 1995, pp. 413-432
- [7] I. K. Lee, M. S. Kim, G. Elberg: *The Minkowski Sum of 2D Curved Objects*. Proceedings of Israel-Korea Bi-National Conference on New Themes in Computerized Geometrical Modelling. Tel-Aviv Univ., 1998, pp.155-164
- [8] M. Smukler: *Geometry, Topology and Application of the Minkowski Product and Action*. PhD. thesis, Harvey Mudd College, 2003.
- [9] S. Tomičková: *Minkowski Operations and Their Applications*. PhD. thesis, West Bohemian Univ. Plzeň, 2006
- [10] I. Weiner, W. Gu: *Minkowski Geometric Algebra of Quaternion Sets*. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 3, No. 4, 2002, pp.385-411
- [11] D. Velichová: *Forms from Minkowski triples of Circles*, Seoul Bridges Proceedings 2014, Tessellations publishing, Phoenix, Arizona, USA, pp. 469-472
- [12] D. Velichová: *Minkowski Operations in Shape Modelling*, Mathematics and Art III, Cassini 2015, France, pp.127-138
- [13] D. Velichová: *Classification of Manifolds Resulting as Minkowski Operation Products of Basic Geometric Point Sets*. *Journal for Geometry and Graphics*, Heldermann Verlag 2015, Volume 19, No. 1, pp.13-29

## CONTRIBUTED TALKS



# Packing problems

Vojtech Bálint, Peter Adamko

*Dept. of Quantitative Methods and Economic Informatics,  
Fac. Of Operation and Economics of Transport and Communications, University of Zilina  
Univerzitná 1, 010 26 Zilina, Slovak Republic  
email: vojtech.balint@fpedas.uniza.sk, peter.adamko@fpedas.uniza.sk*

**Abstract.** Very short overview on some special cases of packing problems is given in the first part of the paper. The second part is devoted to a little more detailed study of development of result about one class of packing problems. At the end there are some asymptotical results.

*Key words:* extremum, packing of cubes

## 1 Historical overview

Packing problems are very old. It is sufficient to remind *Kepler's conjecture* (called also *cannon ball problem*) from the 1611 (see e.g. [57], [36], [99], [30], [47], [41], [50], [42], [51], [43], [44], [45], [46], [29]) or the *Newton number* (called also *kissing number*) from the 1694 (see e.g. [98], [60], [40], [94], [61], [25], [102], [20], [78], [21], [2], [79]). Both were solved only recently.

The usual key question is on the maximal density of the packing. Finding the best possible results on the packing problems is almost always too difficult, therefore many special cases were investigated. Of course, these special cases are very interesting and often useful.

Let us remind shortly a few of these special cases together with the literature:

Packing of circles into the square, see e. g. [95], [96], [97], [92], [69], [63], [87], [1], [66].

Packing of circles into the circle, see e. g. [93], [56], [70], [37], [38], [32], [33], [34], [35].

Packing of balls into the rectangular parallelepiped, cube or ball (also as placing of points which are the centres of balls), see e. g. [88], [62], [100], [7], [8], [23], [21], [9], [10], [54], [11], [64], [49], [55], [13], [14].

Packing of rectangles into the rectangle or square, see e. g. [74], [67], [4], [5], [52], [53], [6], [90].

Packing of triangles into the circle, see e. g. [65], [101], [3], [12], [19], [18].

Packing of circles into the triangle [89], [68], [71], [72], [37], [91].

## 2 Original Leo Moser's problems

Problem (L. Moser [73]). Determine the least number  $V(2)$  such that every system of squares with total area 1 can be parallelly packed into some rectangle of the area  $V(2)$ .

Leo Moser's collection of problems [73] gave creative urge for the research not only on the above question but on other similar questions. (This collection later extended Leo's younger brother W. O. J. Moser [75].) Approximately in the same time arose also the very interesting problem books [39], [24].

Extraordinarily valuable collections of problems [76], [77] were republished many times (in extended form). They were finally published as the book [22] with the foreword of Pál Erdős – one of the greatest propagator of the intuitive geometry problems (see e. g. [26], [27]), and excellent books on packing and covering problems [28] and [21]. Let us recall also the survey [31].

Denote  $V_n(d)$  the least number such that every system of  $n$  cubes with total volume 1 in  $d$ -dimensional (Euclidean) space can be packed into some rectangular parallelepiped of volume  $V_n(d)$ . Determine  $V_n(d)$  and also the maximum  $V(d)$  of the set of all  $V_n(d)$ .

Obviously, the sequence  $V_n(d)$  is nondecreasing and  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(d) = V(d)$ .

Known results in almost chronological order without more detailed commentary are the following.

Kleitman and Krieger [59]: every such finite system can be packed into the rectangle with sides of lengths  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  and  $\sqrt{2}$ , so  $V(2) \leq \frac{4}{\sqrt{6}} \doteq 1.632\ 993\ 162$ .

Trivially,  $V_2(2) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \doteq 1.207\ 106\ 781$ .

Twenty years later Novotný [80]:  $V_3(2) \doteq 1.227\ 758\ 9$  and  $V(2) \geq \frac{2+\sqrt{3}}{3} > 1.244$  for three squares with area  $\frac{1}{6}$  and one square with area 0.5.

Novotný [82], [83]:  $V_4(2) = V_5(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ ;  $V_6(2) = V_7(2) = V_8(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$

On the basis of these results is maybe true the following

**Conjecture 1.**  $V(2) = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \doteq 1.244\ 016\ 936$ .

Novotný [81]:  $V(2) < 1.53$ .

Hougardy [49]:  $V(2) \leq \frac{2867}{2048} < 1.4$ .

**Dimension 3:** A. Meir, L. Moser [67]:  $V_n(3) \leq 4$ .

Novotný [84]:  $V_2(3) = \frac{4}{3}$  required for  $x_1 = \sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ ,  $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ ;

$V_3(3) \doteq 1.440\ 099\ 51$ , required for  $x_1 \doteq 0.850\ 849\ 56$ ,  $x_2 \doteq 0.635\ 937\ 94$ ,  $x_3 \doteq 0.502\ 451\ 41$ .

Novotný [85]:  $V_4(3) \doteq 1.519\ 630\ 3266$ , required for  $x_1 \doteq 0.820\ 068\ 594$ ,  $x_2 \doteq 0.584\ 631\ 1102$ ,  $x_3 = x_4 \doteq 0.499\ 112\ 082$ .

Novotný [86]:  $V_5(3) = V_4(3)$  and  $V_n(3) \leq 2.26$ .

**Conjecture 2.**  $V_n(3) \doteq 1.519\,630\,3266$  for every positive integer  $n \geq 4$ ,  
e. g.  $V(3) \doteq 1.519\,630\,3266$ .

**Dimension 4:**  $V_2(4) \doteq 1.420\,319\,245$  required for  $x \doteq 0.976\,755\,178$ ,  
 $y \doteq 0.547\,398\,666$  and  $V_3(4) \doteq 1.633\,696\,62$ , required for  $x \doteq 0.912\,366\,488$ ,  
 $y \doteq 0.671\,979\,213$ ,  $z \doteq 0.566\,768\,345$  ([15][16]).

**Dimension 6:**  $V_2(6) \doteq 1.534\,554\,558$  required for  $x \doteq 0.988\,837\,88$ ,  
 $y \doteq 0.634\,305\,358$ ;  $V_3(6) \doteq 1.944\,491\,61$  required for  $x \doteq 0.966\,715\,05$ ,  
 $y \doteq 0.699\,300\,546$  and  $z \doteq 0.637\,089\,066$  ([17]).

**Asymptotical results** (unpublished):

$$\lim_{d \rightarrow \infty} V_n(d) = n \text{ for } n = 2, 3, 4.$$

### 3 Conclusion

In the paper, we offered a brief historical overview on some special cases of packing problems. We have also mentioned some of the crucial packing problems together with its solutions (if known). Unfortunately, despite the wide interest of mathematicians there are still many questions unanswered. And possibly even more questions are undiscovered.

### References

- [1] Ament P., Blind G.: *Packing equal circles in a square*. Studia. Sci. Math. Hungar. Vol. 36, (2000), pp.313-316.
- [2] Anstreicher K. M.: *The thirteen spheres: A new proof*. Discrete Comput. Geom. 31 (2004), pp.613-625.
- [3] Andreescu T., Mushkarov O.: *A note on the Malfatti problem*. Math. Reflections Vol. 4, (2006), pp.1-7.
- [4] Bálint V.: *A remark on a packing problem*. Práce a Štúdie Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, séria Mat. - Fyz. Vol. 8, 1990, pp.7-12. (in Slovakian).
- [5] Bálint V.: *A packing problem and the geometrical series*. Proc. of 4th Czechoslov. Symp. on Combinatorics, Graphs and Complexity, Prachaticke, 1990, 17-21. Also in: *Ann. Discrete Math.* Vol. 51 (1992), pp.17-21.
- [6] Bálint V.: *Two packing problems*. Discrete Math. Vol. 178 (1998), pp.233-236.
- [7] Bálint V., Bálint V., jr.: *Unicity of one optimal arrangement of points in the cube*. In: Proc. of Symposium on Computer Geometry, Bratislava, Slovakia, 2001, pp.8-10. (in Slovakian)
- [8] Bálint V., Bálint V., jr.: *On the number of point at distance at least one in the unit cube*. Geombinatorics Vol. 12 (2003), pp.157-166.

- [9] Bálint V., Bálint V. jr.: *Horný odhad pre rozmiestňovanie bodov v kocke*. In: Sborník 5. konference o matematice a fyzice na VŠT. Brno: Univerzita obrany, 2007, pp.32-35.
- [10] Bálint V., Bálint V. jr.: *On the maximum number of points at least one unit away from each other in the unit n-cube*. Periodica Mathematica Hungarica 57 (1) (2008), pp.83-91.
- [11] Bálint V., Bálint V. jr.: *Placing of points into the unit cube*. Slovak Journal for Geometry and Graphics 5 (9) (2008), pp.5-12. (in Slovakian)
- [12] Bálint V.: *Maximization of the sum of areas*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, Vol. 24 (2010), pp.1-8.
- [13] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Placing of points into the 5-dimensional unit cube*. Periodica Math. Hungarica 65 (1) (2012), pp.1-16.
- [14] Bálint V., Bálint V. Jr.: *Packing of points into the unit 6-dimensional cube*. Contributions to Discrete Mathematics 7 (1) (2012), pp.51-57.
- [15] Bálint, V., Adamko, P.: *Minimalizácia objemu kvádra pre uloženie troch kociek v dimenzii 4*. G – Slovak Journal for Geometry and Graphics 12 (23) 2015, pp.5-16 and Figures on p.64.
- [16] Bálint, V., Adamko, P.: *Minimization of the container for packing of three cubes in dimension 4*. In: Proceedings of Slovak – Czech Conference on Geometry and Graphics, September 2015, Terchová, pp. 13-24.
- [17] Bálint, V., Adamko, P.: *Minimization of the parallelepiped for packing of three cubes in dimension 6*. In: Proceedings of 15<sup>th</sup> Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2016, Bratislava, February 2-4, pp. 44-55.
- [18] Bálint V., Kaukič, M., Peško, Š.: *Solving one maximization problem using a computer*. In: Abstracts – 3<sup>rd</sup> Croatian Conference on Geometry and Graphics, Supetar, September 7-11, 2014, pp.8-9.
- [19] Bezdek A, Fodor F. Extremal triangulations of convex polygons, *Symmetry: Culture and Science*, Vol. 21, Nos.1-4, 2010, pp. 333-340.
- [20] Böröczky K.: *The Newton-Gregory problem revisited*. In: Discrete Geometry: *In Honor of W. Kuperberg's 60<sup>th</sup> Birthday*, A. Bezdek, ed., Marcel Dekker 2003, pp.103-110.
- [21] Böröczky K. Jr.: *Finite Packing and Covering*. Cambridge Univ. Press, 2004.
- [22] Brass P., Moser W. O. J., Pach J.: *Research Problems in Discrete Geometry*. New York: Springer, 2005.
- [23] Cohn H., Elkies N. D.: *New upper bounds on sphere packings I*. Ann. Math. (2) 157 (2003), pp.689-714.
- [24] Croft H. T., Falconer K. J., Guy R. K.: *Unsolved problems in Geometry*. 2nd ed., New York-Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag 1994.

- [25] Edel Y., Rains E. M., Sloane N. J. A.: *On kissing numbers in dimensions 32 to 128*. Electron. J. Combin. 5 (1988).
- [26] Erdős P.: *On some problems of elementary and combinatorial geometry*. Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV (103) (1975), pp.99-108.
- [27] Erdős P.: *Some more problems on elementary geometry*. Australian Math. Soc. Gazette, 5 (1978), pp.52-54.
- [28] Fejes Tóth L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. (2. Auflage), Springer-Verlag, 2003.
- [29] Ferguson S. P., Hales T. C.: *The Kepler Conjecture: The Hales – Ferguson Proof*. New York, Springer, 2011.
- [30] Fejes Tóth L.: *Remarks on a theorem of R. M. Robinson*. Studia Sci. Math. Hungar 4 (1969), pp.441-445.
- [31] Fejes Tóth G, Kuperberg W.: *Packing and covering with convex sets*. p. 811, *Handbook of Convex Geometry*, Vol. B. Amsterdam–London–New York–Tokyo, NORTH-HOLLAND, 1993.
- [32] Fodor F.: *The densest packing of 19 congruent circles in a circle*. Geometriae Dedicata 74 (1999), pp.139-145.
- [33] Fodor F.: *The densest packing of 12 congruent circles in a circle*. Beiträge Algebra Geom. 21 (2000), pp.401-409.
- [34] Fodor F.: *Packing 14 congruent circles in a circle*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, Vol. 16 (2003), pp.25-34.
- [35] Fodor F.: *The densest packing of 13 congruent circles in a circle*. Beiträge Algebra Geom. 21 (2003), pp.431-440.
- [36] Gauss C. F.: *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludvig August Seber*, Göttingische gelehrte Anzeigen 9. Juli 1831, see: Werke, Band 2, 2. Aufl. Göttingen 1876, 188-196; also Reine Angew. Math. 20 (1840), pp.312-320.
- [37] Graham R. L., Lubachevsky B. D.: *Dense packings of equal disks in an equilateral triangle: from 22 to 34 and beyond*. Electron. J. Combin. 2 (1995), #A1.
- [38] Graham R. L., Lubachevsky B. D., Nurmiela K. J., Östergård P. R. J.: *Dense packings of congruent circles in a circle*. Discrete Math. 181 (1998), pp.139-154.
- [39] Guy R. K.: *Problems in the geometry of linear and metric spaces*. Springer Lecture Notes Math. Vol. 490, (1975), pp.233-244.
- [40] Hadwiger H.: *Über Treffenzahlen bei translationsgleichen Eikörpern*. Arch. Math. 8 (1957), 212-213.
- [41] Hales T. C.: *The sphere packing problem*. J. Comput. Appl. Math. 44 (1992), pp.41-76.
- [42] Hales T. C.: *The status of the Kepler conjecture*. Math. Intelligencer 16 (3) (1994), pp.47-58.
- [43] Hales T. C.: *Sphere packings*, I. Discrete Comput. Geom. 17 (1997), pp.1-51.

- [44] Hales T. C.: *Sphere packings*, II. Discrete Comput. Geom. 18 (1997), 135-149.
- [45] Hales T. C.: *Cannonballs and honeycombs*. Notices Amer. Math. Soc. 47 (4) (2000), pp.440-449.
- [46] Hales T. C., Ferguson S. P.: *The Kepler conjecture*. Discrete Comput. Geom. Vol. 36 (1) (2006), pp.1-269.
- [47] Hortobágyi I.: *Über die Scheibenklassen bezügliche Newtonsche Zahl der konvexen Scheiben*. Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös, Sect. Math. 18 (1975), pp.123-127.
- [48] Horvát G. A.: *Packing points into a unit cube in higher space*. Studies of the University of Žilina, Math. Series, Vol. 24 (2010), pp.23-28.
- [49] Hougaard S.: *On packing squares into a rectangle*. Tech. Report 101007, Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik, March 2010.
- [50] Hsiang W.-Y.: On the sphere packing problem and the proof of Kepler's conjecture. Internat. J. Math. 4 (1993), pp.739-831.
- [51] Hsiang W.-Y.: *A rejoinder to T. C. Hales' article: „The status of the Kepler conjecture“*. The Mathematical Intelligencer 17 (1) (1994), pp.35-42.
- [52] Jennings D.: *On packing unequal rectangles in the unit square*. J. Combinatorial Theory ser. A, Vol. 68 (1994), 465-469.
- [53] Jennings D.: *On packing of squares and rectangles*. Discrete Math. Vol. 138 (1995), pp.293-300.
- [54] Joós A.: *Pontok elhelyezése egységkockában*. PhD tézisek, 2008 (in Hungarian)
- [55] Joós A.: *On the number of points at distance at least 1 in the 5-dimensional unit cube*. Acta Sci. Math. Vol. 76 No. 1-2 (2010), pp.217-231.
- [56] Kabatjanskij G. A., Levenshtein V. I.: *Bounds for packings on a sphere and space*. Problemy Peredachi Informacii, Vol. 14 (1978), pp.3-24.
- [57] Kepler J.: *Srena seu de nive sexangula*. Tampach, Frankfurt, 1611. English translation: *The Six-Cornered Snowflake*. Oxford, 1966.
- [58] Kleitman D. J., Krieger M. M.: *Packing squares in rectangles* I. Ann. New York Acad. Sci. Vol. 175 (1970), pp.253-262.
- [59] Kleitman D. J., Krieger M. M.: *An optimal bound for two dimensional bin packing*. Proceedings FOCS 1975, IEEE computer Soc.1975, pp.163-168.
- [60] Leech J.: *The problem of thirteen spheres*. Math. Gazette 40 (1956), pp.22-23.
- [61] Leech J.: *Some sphere packings in higher space*. Canad. J. Math. 16(1964), pp.657-682.
- [62] Levenshtein V. I.: *On bounds for packings in n-dimensional Euclidean space*. Soviet Math. Dokl. 20 (1979), pp.417-421.

- [63] Lubachevsky B. D., Graham R. L., Stillinger F. H.: *Patterns and structures in disk packings*. Period. Math. Hungar. Vol. 34 (1997), pp.123-142.
- [64] Makai E, jr. Private communication.
- [65] Malfatti G.: *Memoria sopra un problema sterotomico*. Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze 10 (1803), pp.235-244.
- [66] Markót M. Cs.: Optimal packing of 28 equal circles in a unit square – the first reliable solution. Numerical Algorithms Vol. 37 (2004), pp.253-261.
- [67] Meir A., Moser L.: *On packing of squares and cubes*. J. Combinatorial Theory Vol. 5 (1968), pp.126 - 134.
- [68] Melissen J. B. M.: *Densest packings of congruent circles in an equilateral triangle*. Amer. Math. Monthly **100** (1993), pp.916-925.
- [69] Melissen J. B. M.: *Densest packing of six equal circles in a square*. Elemente Math. 49 (1994), pp.27-31.
- [70] Melissen J. B. M.: *Densest packing of eleven congruent circles in a circle*. Geometriae Dedicata 50 (1994), pp.15-25.
- [71] Melissen J. B. M.: *Densest packing of eleven congruent circles in an equilateral triangle*. Acta Math. 65 (1994), pp.389-393.
- [72] Melissen J. B. M., Schuur, P. C.: *Packing 16, 17 or 18 circles in an equilateral triangle*. Discret Math. 145 (1995), pp.333-342.
- [73] Moser L.: Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry. Mimeographed, 1966.
- [74] Moon J., Moser L.: *Some packing and covering theorems*. Colloquium Math. Vol. 17 (1967), pp.103-110.
- [75] Moser W. O. J.: *Problems, problems, problems*. Discrete Applied Mathematics Vol. 31 (1991), pp.201-225.
- [76] Moser W. O. J., Pach J.: *100 Research Problems in Discrete Geometry*. McGill University, Montreal, 1986.
- [77] Moser W. O. J., Pach J.: *Research Problems in Discrete Geometry*. Privately published collection of problems, Montreal, McGill University, 1994.
- [78] Musin O. R.: *The problem of twenty-five spheres*. Russ. Math. Surv. 58 (2003), pp.794-795.
- [79] Musin O. R.: *The kissing number in four dimensions*. arXiv: math.MG/0309430.
- [80] Novotný, P.: *A note on packing of squares*. Stud. Univ. Transp. Commun. Žilina, Math-Phys. Ser. A Vol. 10 (1995), pp.35-39.
- [81] Novotný, P.: *On packing of squares into a rectangle*. Archivum Math. (Brno), Vol. 32 (1996), 75-83.
- [82] Novotný, P.: On packing of four and five squares into a rectangle. In *Note di Matematica* 19 (1999), pp.199-206.

- [83] Novotný, P.: Využitie počítača pri riešení ukladacieho problému. In *Proceedings of Symposium on Computational Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2002, ISBN 80-227-1773-8, pp. 60-62.
- [84] Novotný, P.: Pakovanie troch kociek. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2006, ISBN 80-227-2489-0, pp.117-119.
- [85] Novotný, P.: Najhoršie pakovateľné štyri kocky. In: *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2007, ISBN 978-80-227-2734-1, pp.78-81.
- [86] Novotný, P.: Ukladanie kociek do kvádra. In *Proceedings of Symposium on Computer Geometry SCG'*, Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2011, ISBN 978-80-227-3580-3, pp.100-103.
- [87] Nurmela K. J., Östergård P. R. J.: *More optimal packings of equal circles in a square*. Discrete Comput. Geom. 22 (1999), pp.439-457.
- [88] Odlyzko A. M., Sloane N. J. A.: *New bounds on the unit spheres that can touch a unit sphere in n-dimensions*. J. Combinatorial Theory Ser. A 26 (1979), pp.210-214. (Russian: O granicach dľa upakovok v n-mernom evklidovom prostranstve. Doklady Akademii Nauk SSSR 245 (6) (1979), pp.1299-1303.)
- [89] Oler N.: *A finite packing problem*. Canad. Math. Bull. 4 (1961), 153-155.
- [90] Paulhus M.: *An algorithm for packing squares*. J. Combinatorial Theory ser. A 82 (1998), pp.147-157.
- [91] Payan Ch.: Empilement de cercles égaux dans un triangle équilatéral. À propos d'une conjecture d'Erdős-Oler. Discrete Math. 165-166 (1997), pp.555-565.
- [92] Peikert R., Würtz D., Monagan M., de Groot C.: *Packing circles in a square: A review and new results*. In: System Modelling and Optimization 1991, P. Kall, ed., Springer Lecture Notes Control Inf. Sci. 180 (1992), pp.45-54.
- [93] Pirl U.: Der Mindestabstand von  $n$  in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten. Math. Nachr. 40 (1969), 111-124.
- [94] Rogers C. A.: *The packing of equal spheres*. Proc. London Math. Soc. 3. Ser. 8 (1958), pp.609-620.
- [95] Schaefer J.: *The densest packing of 9 circles in a square*. Canad. Math. Bull. 8 (1965), 273-277.
- [96] Schaefer J., Meir A.: *On a geometric extremum problem*. Canad. Math. Bull. 8 (1965), pp.21-27.
- [97] Schaefer J.: *On the densest packing of spheres in a cube*. Canad. Math. Bull. 9 (1966), pp.265-270.
- [98] Schütte K., van der Waerden B.L.: *Das Problem der dreizehn Kugeln*. Math. Ann. 125 (1953), pp.325-334.

- [99] Thue A.: *On the densest packing of congruent circles in the plane.* Skr. Vidensk-Selsk, Christiania 1 (1910), 3-9. Also in: Selected Mathematical Papers, T. Nagell et al., eds., Universitetsforlaget Oslo, 1977, pp.257-263. (in Norwegian)
- [100] Vardy A.: *A new sphere packing in 20 dimensions.* Inventiones Math. 121 (1995), pp.119-133.
- [101] Zalgaller V. A., Los G. A.: *The solution of Malfatti's problem.* Journal of Mathematical Sciences 72 (4) (1994), pp.3163-3177.
- [102] Zong C.: *The kissing numbers of convex bodies – a brief survey.* Bull. London Math. Soc. 30 (1998), pp.1-10.



# On interpolations with medial axis/surface transforms providing rational envelopes

Michal Bizzarri<sup>a,1</sup> and Miroslav Lávička<sup>a,b,2</sup>

<sup>a</sup> NTIS – New Technologies for the Information Society, Faculty of Applied Sciences,  
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Czech Republic

<sup>b</sup> Department of Mathematics, Faculty of Applied Sciences,  
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Czech Republic

<sup>1</sup>bizzarri@ntis.zcu.cz, <sup>2</sup>lavicka@kma.zcu.cz

**Abstract.** Recalling a recently introduced class of RE curves (i.e., rational envelope curves) and RE surfaces (i.e., rational envelope surfaces), we present simple and efficient methods for interpolating with medial axis/surface transforms providing rational envelopes. The approach is presented on two particular examples. Furthermore, some possible applications of the presented algorithms are mentioned and referred, e.g. the construction of flexible blending canal surfaces using RE curves, and modelling parts of branched skins and blends with RE surfaces.

**Keywords:** Rational envelope curves, rational envelope surfaces, Hermite interpolation, blending, skinning.

## 1 Introduction

Investigating the rationality of geometric shapes belongs to challenging and thoroughly studied problems in geometric modelling, see e.g. [4, 5]. On the other hand non-rational descriptions are more frequent as results of algebro-geometric operations. Then suitable approximate parameterization techniques must be often applied to overcome disadvantages of non-rational parameterizations.

The first simple non-rational parametric descriptions are square-root parameterizations. A curve or surface is called *square-root parameterizable* if it may be rationally parameterized in terms of  $t$  or  $u, v$  and  $\sqrt{p(t)}$  or  $\sqrt{p(u, v)}$ , where  $p(t)$  or  $p(u, v)$  is a polynomial in  $t$  or  $u, v$ , respectively. However, in some particular cases constructions with square-root parameterized curves or surfaces lead to rational resulting shapes.

In this survey paper, we recall some results from several recent papers. The so-called RE curves, i.e., curves considered as medial axis transforms in 3D yielding associated rational envelopes of circles in 2D were introduced and studied in [2]. Next, RE surfaces satisfying the distinguished condition that when considered as medial surface transforms in four-dimensional space provide rational envelopes of spheres in 3D were introduced and investigated in [3]. Reader interested in this topic can also find some applications with presented objects (e.g. blending and skinning) in [1, 3, 10].

## 2 Rational Envelope (RE) curves

Let be given a parametric curve  $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), r(t))$  in the Minkowski 3-space  $\mathbb{R}^{2,1}$  (with the signature  $++-$ ) considered as an medial axis transform (MAT)

of its associated domain. The corresponding two branches  $\mathbf{x}^\pm(t)$  of the envelope curve  $\mathbf{x}(t)$  are parameterized by

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{y}(t) - r(t) \frac{r'(t) \mathbf{y}'(t) \pm \mathbf{y}'^\perp(t) \sqrt{\|\mathbf{y}'(t)\|^2 - r'^2(t)}}{\|\mathbf{y}'(t)\|^2}, \quad (1)$$

where  $\mathbf{u}^\perp = (u_2, -u_1)$  for  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ . Clearly, the Minkowski Pythagorean Hodograph (MPH) curves (see [11, 9] for more details), which satisfy

$$\|\mathbf{y}'(t)\|^2 - r'^2(t) = \sigma^2(t) \quad (2)$$

for some rational function  $\sigma(t)$ , guarantee the rationality of the associated envelope branches  $\mathbf{x}^\pm$ .

Nonetheless MPH curves are not the only ones providing rational envelopes. In particular, let  $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), \sqrt{R(t)})$  be a regular  $C^1$  parametric curve considered as the MAT of a planar domain with  $\mathbf{y}(t)$  and  $R(t)$  rational. Then the corresponding envelope is given by

$$\mathbf{x}^\pm(t) = \mathbf{y}(t) - \frac{R'(t) \mathbf{y}'(t) \pm \mathbf{y}'^\perp(t) \sqrt{4R(t)\|\mathbf{y}'(t)\|^2 - R'^2(t)}}{2\|\mathbf{y}'(t)\|^2}. \quad (3)$$

Hence, the envelope  $\mathbf{x}^\pm(t)$  of  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  is rational if and only if there exists a rational function  $\sigma(t)$  such that

$$4R(t)\|\mathbf{y}'(t)\|^2 - R'^2(t) = \sigma^2(t). \quad (4)$$

Curves  $\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{y}(t), \sqrt{R(t)})$  in  $\mathbb{R}^{2,1}$  satisfying condition (4) are called *RE curves*, i.e., *curves yielding Rational Envelopes*, cf. [2].

As shown in [9], any MPH curve can be obtained in this way by using the fact that if  $\bar{\mathbf{y}}$  is an MPH curve then the corresponding envelopes  $\mathbf{x}^\pm(t)$  are planar rational Pythagorean Hodograph (PH) curves, [6, 7]. An analogous construction is possible in the case of RE curves as well.

First, for a given rational planar curve  $\mathbf{x}(t)$ , we construct its *one-sided* generalized offset curve  $\mathbf{y}(t)$  with varying distance  $r(t)$ , i.e., the curve in the form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + r(t) \frac{\mathbf{x}'^\perp(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}. \quad (5)$$

We stress that in this case the sign  $\pm$  is not needed. The constructed curve is rational if and only if

$$\frac{r(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = f(t) \quad (6)$$

is a rational function. Then, using (6) we arrive at a class of *all* RE curves in the form

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{x}(t) + f(t) \mathbf{x}'^\perp(t), f(t) |\mathbf{x}'(t)|). \quad (7)$$

### 3 Rational Envelope (RE) surfaces

Consider a  $C^1$  segment  $\bar{\mathbf{y}}(u, v) = (\mathbf{y}(u, v), r(u, v))$  of a medial surface transform (MST) in the Minkowski 4-space  $\mathbb{R}^{3,1}$  (with the signature  $++-$ ), then the boundary of the corresponding domain  $\Omega$  is given by the envelope formula

$$\mathbf{x}^\pm = \mathbf{y} - r \frac{(r_u G - r_v F) \mathbf{y}_u + (r_v E - r_u F) \mathbf{y}_v \pm (\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v) \sqrt{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2}}{EG - F^2}, \quad (8)$$

where  $r_u$  denotes the partial derivatives of  $r$  with respect to  $u$ , etc. The components  $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$  of the first fundamental form of  $\bar{\mathbf{y}}(u, v)$  are computed using the indefinite Minkowski inner product  $\mathbb{R}^{3,1}$  whereas the components  $E, F, G$  of the first fundamental form of  $\mathbf{y}(u, v)$  are determined using the standard Euclidean inner product in  $\mathbb{R}^3$ .

Clearly, the so-called *MOS surfaces* (i.e., *Medial surfaces Obeying a certain Sum of squares condition*, see [8]), which satisfy

$$\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2 = \sigma^2(u, v), \quad (9)$$

for some rational function  $\sigma(u, v) \in \mathbb{R}(u, v)$ , guarantee the rationality of the associated envelope branches  $\mathbf{x}^\pm$ .

Nonetheless, as in the univariate case of RE curves and MATs [2], MOS surfaces are not the only MSTs yielding rational envelopes. This brings us to a broader class of (generally non-rational) *RE surfaces*, i.e., *surfaces yielding Rational Envelopes*. Accordingly, we set  $r(u, v)$  as the square root of some non-negative function  $R(u, v)$ . This leads to

$$rr_u = \frac{1}{2}R_u \in \mathbb{R}(u, v), \quad rr_v = \frac{1}{2}R_v \in \mathbb{R}(u, v). \quad (10)$$

Then the rationality of the envelope  $\mathbf{x}^\pm$ , cf. (8), is guaranteed by the condition

$$R(\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2) = \sigma^2(u, v), \quad (11)$$

cf. [3]. Additionally, any RE surface  $\bar{\mathbf{y}}$  in  $\mathbb{R}^{3,1}$  can be constructed starting from an (associated) rational surface  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^3$  and a rational function  $f$  in the form

$$\bar{\mathbf{y}}(u, v) = (\mathbf{x} + f(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v), f|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|). \quad (12)$$

In contrast to MOS surfaces, it is easy to generate RE surfaces in the form  $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, r = \sqrt{R})$ .

### 4 Interpolation by RE curves

Consider the following  $G^1$  Hermite input data in  $\mathbb{R}^{2,1}$  – the end points  $\mathbf{p}_i$  and the associated tangent vectors  $\mathbf{t}_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . Using (1), we obtain the associated

points  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$  on the corresponding envelope curve as

$$\mathbf{q}_i = \overset{\vee}{\mathbf{p}}_i - p_{i3} \frac{t_{i3} \overset{\vee}{\mathbf{t}}_i + \overset{\vee}{\mathbf{t}}_i^\perp \sqrt{\|\overset{\vee}{\mathbf{t}}_i\|^2 - (t_{i3})^2}}{\|\overset{\vee}{\mathbf{t}}_i\|^2}, \quad (13)$$

where  $\overset{\vee}{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  for  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . We choose  $\mathbf{v}_i$  as the perpendicular vectors to the vectors  $\overset{\vee}{\mathbf{p}}_i - \mathbf{q}_i$ , i.e.,

$$\mathbf{v}_i = \alpha_i \left( \overset{\vee}{\mathbf{p}}_i - \mathbf{q}_i \right)^\perp. \quad (14)$$

The magnitudes  $\alpha_i$  of  $\mathbf{v}_i$  are free parameters and can be chosen to modify the resulting shape. Next, we interpolate  $\mathbf{q}_i$  and  $\mathbf{v}_i$  in the plane by a suitable Hermite interpolation method (we use e.g. Ferguson cubics) and obtain a planar curve  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  satisfying

$$\mathbf{x}(i) = \mathbf{q}_i, \quad \text{and} \quad \mathbf{x}'(i) = \mathbf{v}_i, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (15)$$

Finally, we lift the interpolant  $\mathbf{x}(t)$  from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^{2,1}$ . This is done by computing a polynomial  $f(t)$  such that the curve (7) interpolates the input data in  $\mathbb{R}^{2,1}$ . We employ the Ferguson interpolant again, this time given by the Hermite data  $f_0, f_1, f'_0, f'_1$ , where

$$f_i = f(i) = \frac{\mathbf{p}_{i3}}{\|\mathbf{v}_i\|} \quad \text{and} \quad f'_i = f'(i) = -\frac{\overset{\vee}{\mathbf{t}}_i \cdot (f_i \mathbf{x}''(i) - \mathbf{v}_i^\perp)}{\overset{\vee}{\mathbf{t}}_i \cdot \mathbf{v}_i} \quad (16)$$

were computed by solving

$$\bar{\mathbf{y}}(i) = \mathbf{p}_i \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{y}}'(i) = \beta_i \overset{\vee}{\mathbf{t}}_i, \quad (17)$$

where

$$\beta_i = \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - f_i \mathbf{x}''(i) \cdot \mathbf{v}_i^\perp}{\overset{\vee}{\mathbf{t}}_i \cdot \mathbf{v}_i}. \quad (18)$$

This gives the sought-after RE interpolant  $\bar{\mathbf{y}}(t)$ .

**Example 4.1** We construct an RE curve interpolating the data

$$\mathbf{p}_0 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{p}_1 = (7, 0, 2), \quad \mathbf{t}_0 = (2, 2, 1), \quad \mathbf{t}_1 = (2, -2, 1/2). \quad (19)$$

First, we compute the boundary points and vectors via (13) and (14). Next we interpolate this data by the Ferguson cubic and finally using (7) we arrive an RE interpolant, see Fig. 1.

In [1, 2], this approach was used for constructing suitable *blending surfaces*, i.e., for computing flexible transition canal surfaces smoothly joining two given circular cones (or other canal surfaces) – see the references for more details.

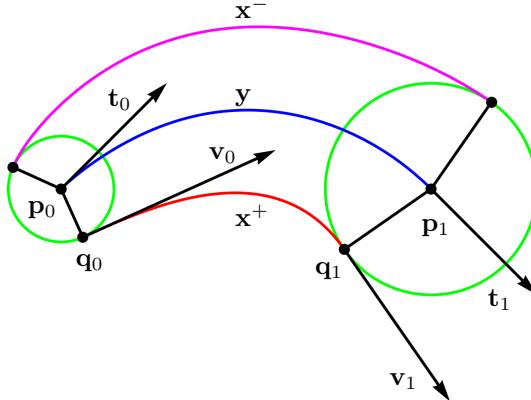


Figure 1: Medial axis (blue) associated to a suitable MAT providing two rational branches of the envelope (red and magenta) and interpolating data from Example 4.1.

## 5 Interpolation by RE surfaces

Consider four points  $\bar{\mathbf{p}}_i = (\mathbf{p}_i, r_i) \in \mathbb{R}^{3,1}$  and four tangent planes  $\bar{\alpha}_i$  at these points given by the vectors  $\bar{\mathbf{t}}_{i1} = (\mathbf{t}_{i1}, \tau_{i1})$  and  $\bar{\mathbf{t}}_{i2} = (\mathbf{t}_{i2}, \tau_{i2})$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Using envelope formula (8), we obtain the associated end points  $\mathbf{q}_i$  on the corresponding envelope

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i - r_i \frac{(\tau_{i1} G_i - \tau_{i2} F_i) \mathbf{t}_{i1} + (\tau_{i2} E_i - \tau_{i1} F_i) \mathbf{t}_{i2} \pm (\mathbf{t}_{i1} \times \mathbf{t}_{i2}) \sqrt{\bar{E}_i \bar{G}_i - \bar{F}_i^2}}{E_i G_i - F_i^2}, \quad (20)$$

where  $E_i = |\mathbf{t}_{i1}|^2$ ,  $F_i = |\mathbf{t}_{i2}|^2$ ,  $G_i = \mathbf{t}_{i1} \cdot \mathbf{t}_{i2}$  and  $\bar{E}_i = |\mathbf{t}_{i1}|^2 - \tau_{i1}^2$ ,  $\bar{F}_i = |\mathbf{t}_{i2}|^2 - \tau_{i2}^2$ ,  $\bar{G}_i = \mathbf{t}_{i1} \cdot \mathbf{t}_{i2} - \tau_{i1}\tau_{i2}$ . Naturally, the normal vectors  $\mathbf{n}_i$  of the envelope surface at  $\mathbf{q}_i$  are

$$\mathbf{n}_i = \lambda_i (\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

We can construct in  $\mathbb{R}^3$  a polynomial patch  $\mathbf{x}(u, v)$  (e.g. the Ferguson patch) interpolating the points  $\mathbf{q}_i$  and the associated normal vectors  $\mathbf{n}_i$ . Next, using formula (12) we lift  $\mathbf{x}(u, v)$  to  $\mathbb{R}^{3,1}$  and as a result we arrive at the medial surface transform  $\bar{\mathbf{y}}(u, v)$ . Conditions on  $\bar{\mathbf{y}}(u, v)$  to interpolate the points  $\bar{\mathbf{p}}_i$ , i.e.,

$$\bar{\mathbf{y}}(u_i, v_i) = \bar{\mathbf{p}}_i, \quad (22)$$

yield the following conditions on the function  $f(u, v)$ :

$$f_i(u_i, v_i) = \frac{r_i}{|\mathbf{n}_i|}. \quad (23)$$

Moreover, we require that  $\bar{y}(u, v)$  touches the tangent planes  $\bar{\alpha}_i$  at the given points  $\bar{p}_i$ , i.e.,

$$\begin{aligned}\bar{y}_u(u_i, v_i) &= \beta_{i1} \bar{t}_{i1} + \beta_{i2} \bar{t}_{i2}, \\ \bar{y}_v(u_i, v_i) &= \gamma_{i1} \bar{t}_{i1} + \gamma_{i2} \bar{t}_{i2},\end{aligned}\quad (24)$$

which yields

$$\begin{aligned}f_u^i(u_i, v_i) &= -\frac{(\mathbf{x}_u(u_i, v_i) + f_i(u_i, v_i)\mathbf{n}_u(u_i, v_i)) \cdot \mathbf{m}_i}{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i}, \\ f_v^i(u_i, v_i) &= -\frac{(\mathbf{x}_v(u_i, v_i) + f_i(u_i, v_i)\mathbf{n}_v(u_i, v_i)) \cdot \mathbf{m}_i}{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{m}_i},\end{aligned}\quad (25)$$

where  $\mathbf{m}_i = \mathbf{t}_{i1} \times \mathbf{t}_{i2}$ . Hence when constructing a rational function  $f(u, v)$  satisfying conditions (23) and (25), the surface associated to  $\bar{y}(u, v)$  smoothly envelopes the given 4 spheres and respects the given tangent planes at the prescribed points.

**Example 5.1** Consider 4 spheres

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= (0, 0, -1, 1), & \bar{p}_2 &= (8, 1, 2, 3/2), \\ \bar{p}_3 &= (7, 7, 0, 5/2), & \bar{p}_4 &= (0, 7, -1, 2),\end{aligned}\quad (26)$$

and 4 associated tangent planes at  $\bar{p}_i$  given by

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1 : \quad &\bar{t}_{11} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1, \quad \bar{t}_{12} = \bar{p}_4 - \bar{p}_1, \\ \bar{\alpha}_2 : \quad &\bar{t}_{21} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1, \quad \bar{t}_{22} = \bar{p}_3 - \bar{p}_2, \\ \bar{\alpha}_3 : \quad &\bar{t}_{31} = \bar{p}_3 - \bar{p}_4, \quad \bar{t}_{32} = \bar{p}_3 - \bar{p}_2, \\ \bar{\alpha}_4 : \quad &\bar{t}_{41} = \bar{p}_3 - \bar{p}_4, \quad \bar{t}_{42} = \bar{p}_4 - \bar{p}_1.\end{aligned}\quad (27)$$

We compute the corresponding points  $\mathbf{q}_i$  and the normal vectors  $\mathbf{n}_i$  of the associated envelope, cf. (20) and (21). Next we can choose the tangent vectors  $\mathbf{u}_{i1}$ ,  $\mathbf{u}_{i2}$ , e.g. by projecting  $\mathbf{t}_{i1}$ ,  $\mathbf{t}_{i2}$  to the plane given by the point  $\mathbf{q}_i$  and the normal vector  $\mathbf{n}_i$ , i.e.,

$$\mathbf{u}_{i1} = \mathbf{t}_{i1} - \frac{\mathbf{t}_{i1} \cdot \mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|^2} \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{u}_{i2} = \mathbf{t}_{i2} - \frac{\mathbf{t}_{i2} \cdot \mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|^2} \mathbf{n}_i. \quad (28)$$

Then we construct the Ferguson surface  $\mathbf{x}(u, v)$  interpolating the points  $\mathbf{q}_i$  and the tangent vectors  $\mathbf{u}_{i1}$  and  $\mathbf{u}_{i2}$  and compute the lifting function  $f(u, v)$  as a one dimensional Ferguson surface interpolating (23) and (25). Finally we compute the corresponding medial surface transform  $\bar{y}$  in form (12) and the second branch of the envelope, see Fig. 2.

As concerns applications, we recall the operations of skinning and blending. Applying RE surfaces, a simple method for computing rational branched skins of a system of balls in 3D and rational  $n$ -way blends between canal surfaces is offered. These operations play an important role in various applications, e.g. in computational chemistry, molecular biology, computer animation, and modelling of tubular surfaces, cf. [3, 10].

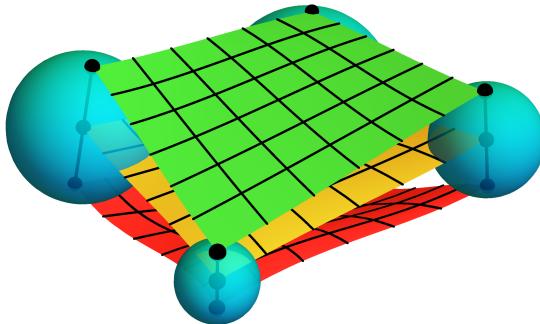


Figure 2: Medial surface (yellow) associated to a suitable MST providing two rational branches of the envelope (green and red) and interpolating data from Example 5.1.

## 6 Conclusion

In this paper, we recalled results from some of our recent papers devoting to curves, or surfaces parameterized via square-roots but yielding associated rational envelopes of circles in 2D, or spheres in 3D, respectively. Especially we focused on Hermite interpolations with these shapes. In addition, some applications of the presented methods were recalled and referred.

## Acknowledgments

The authors were supported by the project LO1506 of the Czech Ministry of Education, Youth and Sports.

## References

- [1] M. BIZZARRI AND M. LÁVIČKA, *Rational blends of two cones from square-root parameterized medial axis transforms*, in Proceedings of the 16th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, 2016, pp. 211–218.
- [2] M. BIZZARRI, M. LÁVIČKA, AND J. KOSINKA, *Medial axis transforms yielding rational envelopes*, Computer Aided Geometric Design, 46 (2016), pp. 92–102.
- [3] ——, *Skinning and blending with rational envelope surfaces*, Computer-Aided Design, submitted, (2016).
- [4] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2002.
- [5] G. FARIN, J. HOSCHEK, AND M.-S. KIM, eds., *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier, 2002.

- [6] R. FAROUKI, *Pythagorean–hodograph curves*, in Handbook of Computer Aided Geometric Design, J. Hoschek, G. Farin, and M.-S. Kim, eds., Elsevier, 2002, pp. 405–427.
- [7] ———, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*, Springer, 2008.
- [8] J. KOSINKA AND B. JÜTTLER, *MOS surfaces: Medial surface transforms with rational domain boundaries*, in The Mathematics of Surfaces XII, vol. 4647 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 2007, pp. 245–262.
- [9] J. KOSINKA AND M. LÁVIČKA, *On rational Minkowski Pythagorean hodograph curves*, Computer Aided Geometric Design, 27 (2010), pp. 514–524.
- [10] M. LÁVIČKA AND M. BIZZARRI, *Modelling parts of branched skins using rational envelope surfaces*, in Proceedings of the 16th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, 2016, pp. 742–751.
- [11] H. MOON, *Minkowski Pythagorean hodographs*, Computer Aided Geometric Design, 16 (1999), pp. 739–753.

## 3D GeoGebra v deskriptivní geometrii

# 3D GeoGebra in descriptive geometry

Dagmar Dlouhá, Radka Hamříková

*VŠB - TU Ostrava, Katedra matematiky a deskriptivní geometrie*

*17. listopadu 15, Ostrava, Česká republika*

*dagmar.dlouha@vsb.cz, radka.hamrikova@vsb.cz*

**Abstract.** Linking 2D and 3D GeoGebra to simplify the tasks of descriptive geometry and improved spatial understanding of students.

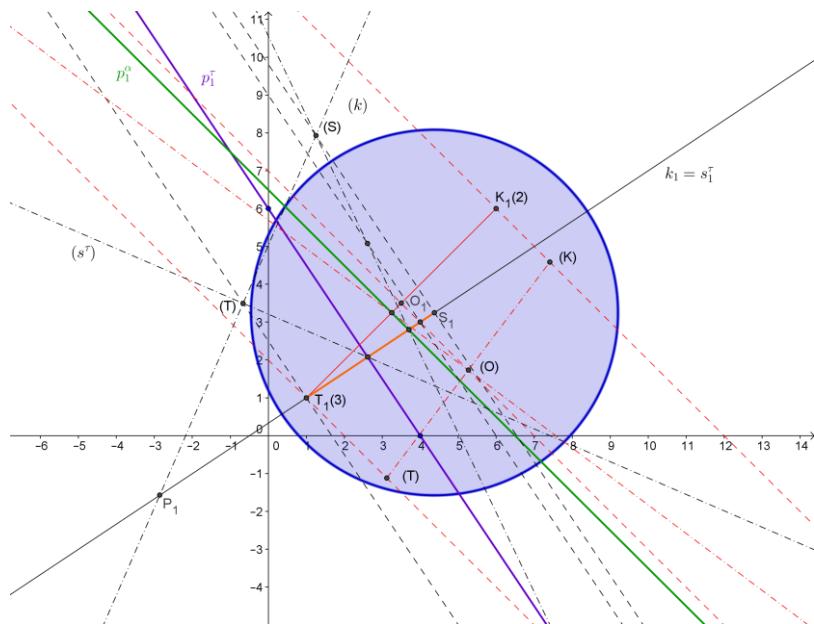
*Key words:* 3D, GeoGebra, geometry.

*Klíčová slova:* 3D, GeoGebra, deskriptivní geometrie.

## 1 Ukázka řešení dané problematiky v kótovaném promítání

Sestrojte kulovou plochu, je-li dána její tečná rovina  $\tau$  s bodem dotyku T a další bod K plochy. Úlohu řešte v kótovaném promítání.

Hlavním cílem je zjednodušit studentům konstrukci, naučit je využívat GG v deskriptivní geometrii a zpřehlednit výsledek.



Obr. 1: Hotová úloha v kótovaném promítání

Naším cílem je najít střed a poloměr kulové plochy. Střed leží na kolmici k tečné rovině, která prochází bodem dotyku. Dále leží v rovině souměrnosti úsečky TK. Poloměr je roven vzdálenosti středu S od bodu T.

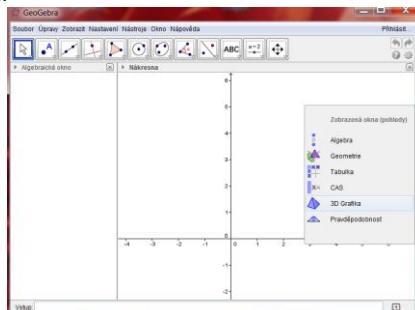
Konstrukce:

1. kolmice k tečné rovině, která prochází bodem dotyku,
2. střed úsečky TK,
3. rovina kolmá k úsečce TK jejím středem,
4. průsečík kolmice a roviny souměrnosti,
5. poloměr  $r = |ST|$ .

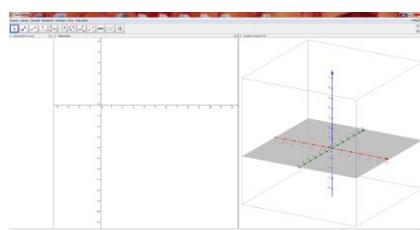
## 1.1 Zadání

Sestrojte kulovou plochu, je-li dána její tečná rovina  $\tau = ABT$ ,  $A=[4,0,0]$ ,  $B=[0,6,0]$ ,  $T=[1,1,3]$  s bodem dotyku T a další bod K=[6,6,2] plochy.

Po spuštění programu si vybereme z nabídky 3D grafika. Dále zvolíme Zobrazit - Nákresna.



Obr. 2: Úvodní strana GeoGebry



Obr. 3: 3D GeoGebra

## 1.2 Konstrukce

- zadání, zadáme body v souřadnicích do příkazového řádku  $A=(4,0,0)$ ,  $B=(0,6,0)$ ,  $T=(1,1,3)$ ,  $K=(6,6,2)$ , body A, B se zobrazují jak ve 3D, tak i v nákresně
- zvolíme tlačítko 'rovina třemi body', klikneme na body A, B, T ,  $\tau = ABT$
- tlačítkem 'průnik ploch' sestrojíme stopu roviny  $\tau$ , vybereme zadanou rovinu a půdorysnu
- bod T promítneme do půdorysny, vedeme přímku bodem \$ kolmo k půdorysně
- najdeme průsečík kolmice a průmětny, zrušíme jeho popis
- ručně přejmenujeme na  $T\_1(3)$ , bod se objeví také v nákresně
- bod K promítneme do půdorysny, vedeme přímku bodem K kolmo k půdorysně
- najdeme průsečík kolmice a průmětny, zrušíme jeho popis
- ručně přejmenujeme na  $K\_1(2)$ , bod se objeví také v nákresně
- bodem T vedeme kolmici k k rovině  $\tau$
- bodem  $T\_1$  v nákresně vedeme kolmici  $k\_1$  ke stopě roviny  $\tau$ , objeví se i ve 3D
- stopník P přímky k najdeme ve 3D, jako průsečík k a  $k\_1$ , objeví se i v nákresně, přejmenujeme na  $P\_1=P$
- spojíme body T a K ve 3D, budeme konstruovat rovinu  $\beta$
- spojíme body  $T\_1$  a  $K\_1$  ve 3D, úsečka se objeví i v nákresně
- najdeme střed O úsečky TK
- bod O promítneme do půdorysny, vedeme přímku bodem O kolmo k půdorysně
- ručně přejmenujeme na  $O\_1$ , bod se objeví také v nákresně
- bodem O vedeme rovinu  $\varphi$  kolmou k TK
- tlačítkem 'průnik ploch' sestrojíme stopu roviny  $\varphi$ , vybereme zadanou rovinu a půdorysnu
- střed S najdeme jako průsečík k a roviny  $\varphi$
- bod S promítneme do průmětny, bodem vedeme přímku kolmou k průmětně
- bod  $S\_1$  najdeme jako průsečík kolmice bodem S a průmětny, objeví se i v nákresně
- poloměr r je roven vzdálenosti bodů S a T
- sestrojíme hledanou kulovou plochu
- průmět kulové plochy sestrojíme v nákresně, střed je  $S\_1$  a poloměr r je roven vzdálenosti bodů S a T

## 2 Závěr

Propojení 2D a 3D GeoGebry rozšiřuje možnosti pochopení probírané látky. Nabízí okamžitou vazbu mezi realitou a promítací metodou. Studenti se snáze orientují v posloupnosti řešení dílčích úloh konstrukce. Zkušenosti s takto řešenými příklady na přednáškách a cvičeních jsou výborné, protože studenti tento způsob postupu řešení využívají i k samostatné přípravě.

## Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu Inovace počítačových učeben a inovace náplně některých počítačových předmětů.

## Literatura

- [1] RESTL, Čestmír a Jiří DOLEŽAL. *Kótované promítání a topografické plochy*. 1. vyd. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2004. ISBN 80-248-0651-7.

# Hrátky s 3D GeoGebrou

Pavla Güttnarová

*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava*  
*email: pavla.guttnerova@vsb.cz*

**Abstrakt.** Vytváření rozvinutelných a nerozvinutelných (zborcených) ploch a ukázka některých vlastností zborcených ploch na příkladec.

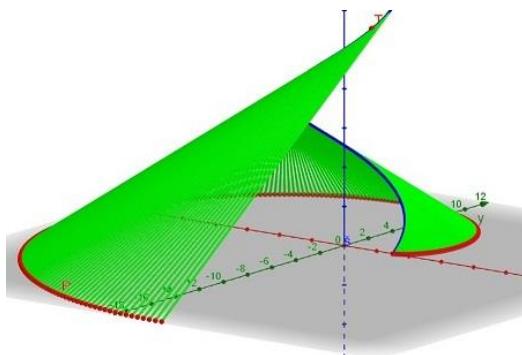
**Klíčová slova:** animace, rotace, torzus, zborcený hyperboloid, hyperbolický paraboloid, konoid

## 1 Motivace

Obrázky v 3D GeoGebře používám na přednášce v předmětu Deskriptivní geometrie na stavební fakultě VŠB-TU v zimním semestru 1. ročníku. Jde o první seznámení s pojmem rozvinutelná a nerozvinutelná plocha, o vytvoření představy o vzniku těchto ploch z daných řídících útvarů. Obrázky jsou také zamýšleny jako motivace k samostatné práci s GeoGebrou.

### 1.1 Rozvinutelná plocha (torzus)

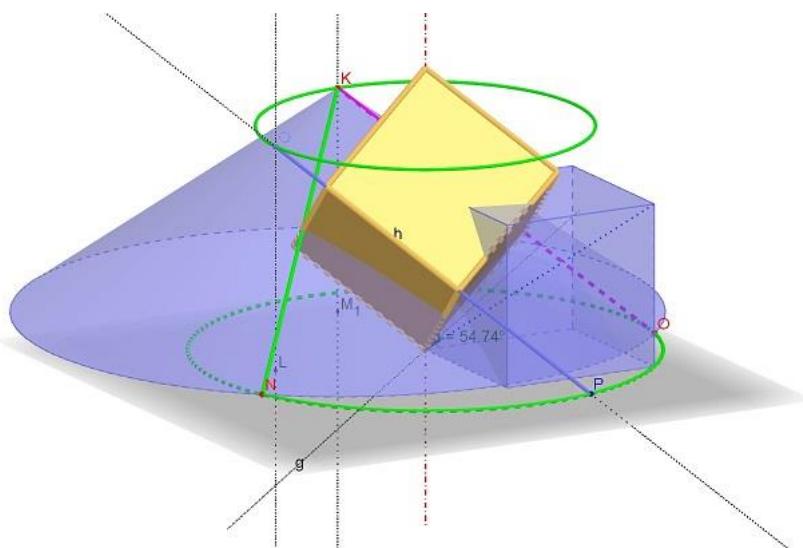
Chceme ukázat vznik rozvinutelné šroubové plochy pohybem její tečny. Do vstupního pole zadáme parametrickou rovnici šroubovice. Z nabídky *Nástroje* vybereme *Bod na objektu* a zvolíme bod  $T$  na šroubovici  $\tilde{s}$ . To nám umožní tento bod ukazovátkem posunovat po šroubovici nebo tento pohyb spustit zapnutím tlačítka *Animace zapnuta* ve vlastnostech bodu  $T$ . V bodě  $T$  sestrojíme tečnu šroubovice, ohraničíme ji bodem  $T$  a průsečíkem  $P$  s rovinou  $(x, y)$ . Tečnu skryjeme a ve vlastnostech bodu  $T$  zatrhneme tlačítko *Animace zapnuta*, ve vlastnostech úsečky  $PT$  a bodu  $P$  zatrhneme *Stopa zapnuta*. Část tečny, pohybující se podél hrany vrata, vykreslí torzus a bod  $P$  evolventu. (viz. Obr. 1)



Obr. 1: Torzus

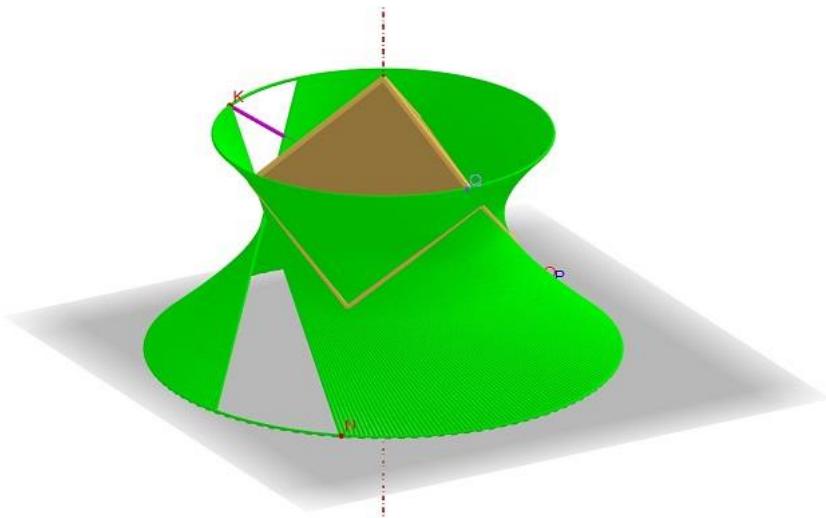
## 1.2 Rotace krychle (zborcený hyperboloid)

Ukážeme vznik části zborceného hyperboloidu rotací hrany krychle kolem tělesové úhlopříčky. Začneme sestrojením krychle a jejím vhodným otočením tak, aby tělesová úhlopříčka byla kolmá na rovinu  $(x, y)$ . Kolem této tělesové úhlopříčky bude rotovat vybraná hrana, mimoběžná s osou rotace. Pro větší názornost si tuto hranu prodloužíme na přímku  $h$  a ohraničíme ji průsečíkem  $P$  s rovinou  $(x, y)$  a bodem  $Q$ , který si zvolíme jako *Bod na objektu* z menu *Nástroje*. To nám umožní tento bod ukazovátkem posunovat po přímce  $h$  a měnit část zobrazené plochy nebo tento pohyb spustit zatržením tlačítka *Animace zapnuta* ve vlastnostech bodu  $Q$ . Kružnice, po kterých se otáčí body  $P$  a  $Q$  sestojíme volbou nástroje *Kružnice daná osou a bodem*. Na rovnoběžce bodu  $Q$  zvolíme bod  $K$  tlačítkem *Bod na objektu*, aby mohl později při animaci rotovat po této kružnici. Tvořící úsečky obou regulů sestojíme pomocí površky  $PQ$  rotačního kuželeta s vrcholem v bodě  $Q$  a bodem podstavné hrany  $P$  (viz. Obr. 2). Vrchol přemístíme do bodu  $K$ .



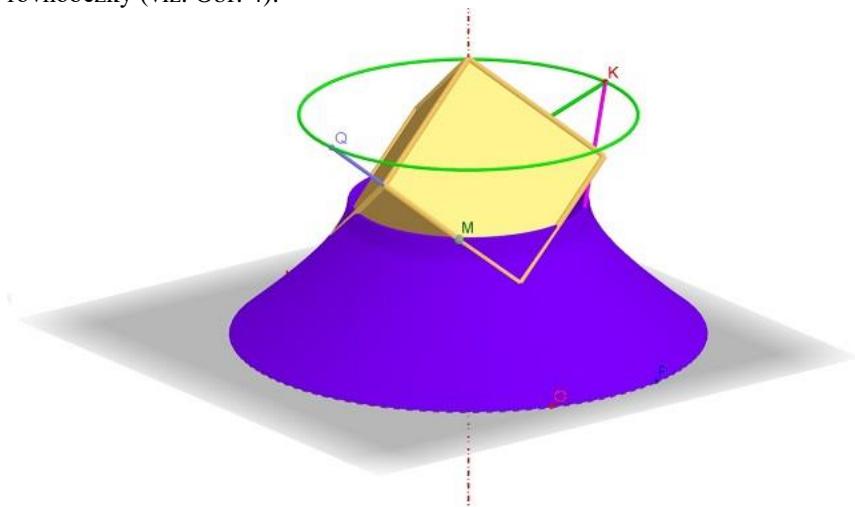
Obr. 2: Sestrojení tvořících úseček  $KN$  a  $KO$

Nepotřebné objekty skryjeme, bod  $K$  můžeme ukazovátkem posunout po rovnoběžce do bodu  $Q$ . Ve vlastnostech bodu  $K$  zapneme animaci a ve vlastnostech úsečky  $KN$  zapneme stopu (viz. Obr. 3).



Obr. 3: Část zborceného hyperboloidu

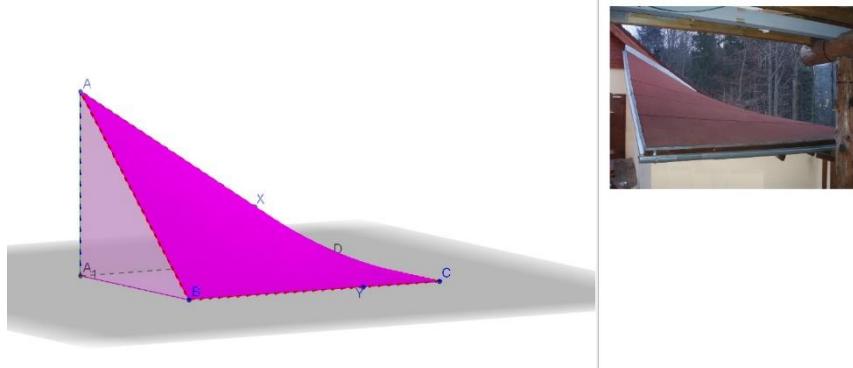
Vypneme animaci bodu  $K$  a stopu úsečky  $KN$ . Na úsečce  $PQ$  zvolíme bod  $M$  a sestrojíme jeho rovnoběžku. Zapneme animaci bodu  $M$  a stopu jeho rovnoběžky (viz. Obr. 4).



Obr. 4: Jiné vytvoření téže plochy

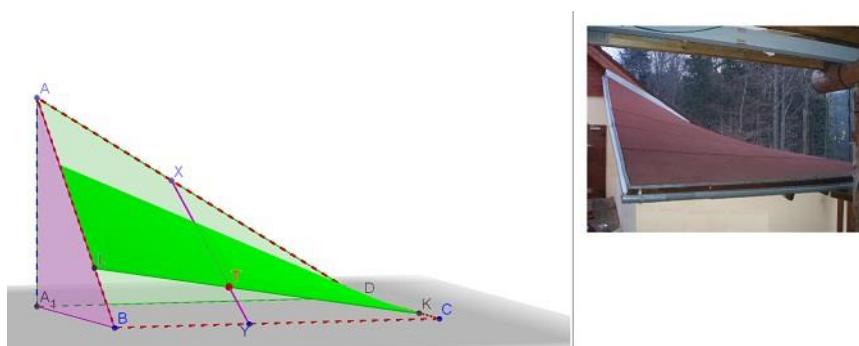
### 1.3 Hyperbolický paraboloid (sedlová plocha)

Ukážeme možnosti konstrukce zastřešení sedlovou plochou. Do *Nákresny* vložíme fotografii střechy a v *Grafickém náhledu 3D* nakreslíme zborcený čtyřúhelník  $ABCD$ , který přibližně odpovídá obrázku. V rovině rovnoběžné s řídící rovinou  $ABA_1$  sestrojíme tvořící úsečku  $XY$ , přičemž bod  $X$  je volen jako *Bod na objektu*. Bodu  $X$  zapneme animaci a úsečce  $XY$  stopu (viz. Obr. 5).



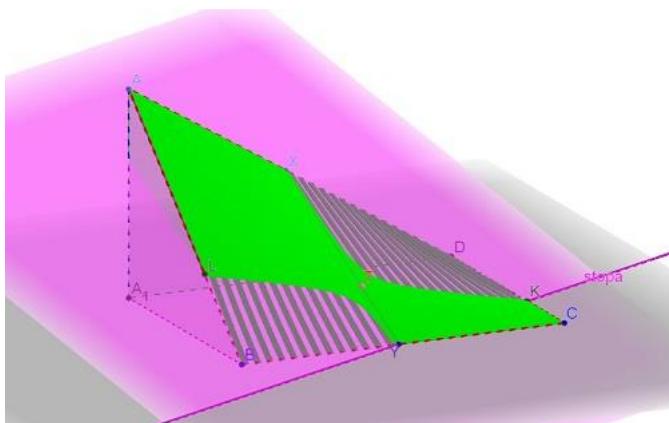
**Obr. 5: Hyperbolický paraboloid**

Na tvořící úsečce  $XY$  zvolíme bod  $T$ , v něm sestrojíme tvořící úsečku druhého regulu  $KL$  a zapneme její stopu (viz. Obr. 6).



**Obr. 6: Druhý regulus tvořících přímek**

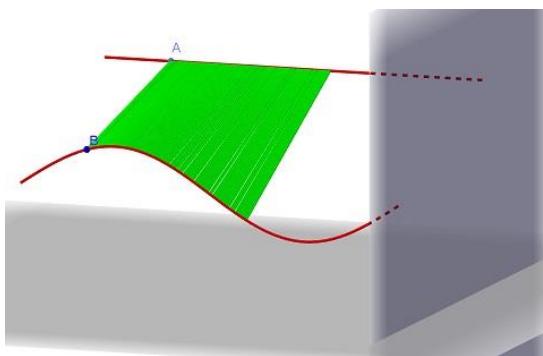
Tyto úsečky určují tečnou rovinu plochy v bodě  $T$ . Sestrojíme průsečnici této tečné roviny s rovinou  $(x, y)$  (stopu). Při zapnuté animaci bodu  $T$  můžeme sledovat, jak se tečná rovina podél přímky  $XY$  „otáčí“ a současně její průnik s plochou (viz. Obr. 7).



Obr. 7: Tečná rovina hyperbolického paraboloidu

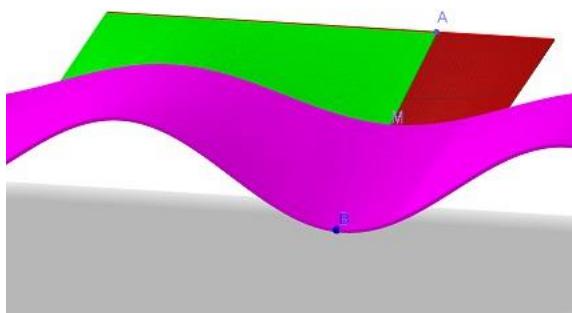
## 1.4 Vlnkový konoid

Chceme ukázat vlastnosti plochy, která byla použita ke konstrukci střechy na fotografii. Do *Nákresny* vložíme fotografii střechy a v *Grafickém náhledu 3D* zadáme ve vstupním poli rovnicemi řídící útvary plochy. Na řídící přímce zvolíme bod  $A$ , sestrojíme celou tvořící úsečku  $AB$ , zapneme animaci bodu  $A$  a stopu úsečky (viz. Obr. 8).



Obr. 8: Vytvoření vlnkového konoidu

Další vhodnou volbou bodů na objektech v kombinaci se zapnutými stopami a animací lze ukázat jiné možnosti vytvoření konoidu. Například pohybem sinusoidy, která vznikne jako řez plochy rovinou rovnoběžnou s řídící sinusoidou. Při pohybu je patrné, že se její amplituda zmenšuje až k nule (viz. Obr. 9).



**Obr. 9: Jiná možnost vytvoření konoidu**

## 2 Závěr

GeoGebra je velmi dobrý nástroj pro vytváření představy o nejrůznějších prostorových objektech, pokud nemáme po ruce skutečný 3D model.

## Poděkování

Tento článek vznikl za duchovní podpory a povzbuzení mých kolegů z Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TU Ostrava, za což jim patří můj dík.

## Literatura

- [1] <https://www.geogebra.org/>

# Kreslení a vyšetřování křivek v GeoGebře

## Drawing and investigation of curves in GeoGebra

Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta  
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice  
hasek@pf.jcu.cz

**Abstract.** Possible ways of an effective use of the combination of tools of dynamic geometry and computer algebra features of GeoGebra are presented by means of particular examples in the contribution. The curves are considered as locus curves or envelopes of families of curves.

**Keywords:** Algebraic curves, cardioid, conchoid, dynamic geometry, GeoGebra.

**Keywords:** Algebraické křivky, kardioida, konchoida, dynamická geometrie, GeoGebra.

## 1 Úvod

Článek představuje nástroje pro kreslení a vyšetřování rovnic algebraických křivek v rovině, které nabízí zdarma dostupný program pro studium a výuku matematiky GeoGebra (viz [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)).

Použití těchto nástrojů, jejichž účinek sahá od pouhého vykreslení křivky až po automatický výpočet její rovnice, je v první části článku ukázáno na příkladu kardioidy, algebraické křivky čtvrtého stupně, která je speciálním případem epicykloidy pro odvalování kružnic téhož poloměru [10]. Je využito skutečnosti, že kardioidu lze snadno představit jednak jako obalovou křivku jednoparametrického systému křivek, jednak jako množinu bodů daných vlastností.

Kardioidu můžeme ale definovat také jako konchoidu kružnice vzhledem k pólu na jejím obvodu [10]. V druhé části článku je představena další, v odborné literatuře dosud zatím jenom letmo zmíněná (viz [3]), křivka čtvrtého stupně, která je pro změnu konchoidou paraboly vzhledem k pólu v jejím ohnísku. Na geometrické konstrukci této křivky zajímavého tvaru, která vychází z úlohy na množinu bodů dané vlastnosti uvedené ve sbírce [4] vydané koncem 18. století v Praze, budeme ilustrovat působení algoritmů automatického odvozování geometrických vět implementovaných v GeoGebře.

## 2 Kardioida

Program GeoGebra dovoluje zkoumat tvary a rovnice algebraických křivek, ať jsou nahlíženy jako obalové křivky jednoparametrických systémů křivek,

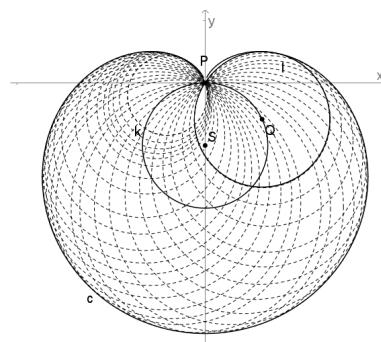
nebo jako množiny bodů daných vlastností. Postupně si na příkladu kardiodidy (zvané též srdcovka) ukážeme oba přístupy.

## 2.1 Obalová křivka

Obalovou křivkou, též obálkou, parametrického systému křivek v rovině rozumíme křivku, která se dotýká každé z křivek tohoto systému [5]. Rovnice obálky tak získáme eliminací parametru  $\varphi$  ze soustavy algebraických rovnic, která je tvořena rovnicí parametrického systému křivek  $l(x, y, \varphi) = 0$ , kde  $\varphi$  je reálný parametr, a její derivací  $l_\varphi(x, y, \varphi) = 0$ .

Uvažujme kružnici  $k$  se středem  $S = [0, -a]$  a poloměrem  $a$ , která určuje systém kružnic  $l$  tak, že každá z nich má střed  $Q$  na  $k$  a prochází bodem  $P[0, 0]$ , viz Obr. 1. Potom obálkou systému kružnic  $l$  je kardiodida  $c$ , křivka čtvrtého stupně o rovnici

$$(x^2 + y^2 + 2ay)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \quad (1)$$



Obrázek 1: Kardiodida jako obálka

Symbolické odvození této rovnice v prostředí *CAS* programu GeoGebra je zachyceno na Obr. 2. Nadále se zaměříme na možnost získání rovnice kardiodidy z geometrické konstrukce provedené v *Nákresně*. Dle zadání se strojíme kružnici  $k(S, a)$ , kde hodnotu  $a$  ovládáme posuvníkem; v článku budeme pracovat s nastavenou hodnotou  $a = 1$ . Na kružnici  $k$  umístíme bod  $P[0,0]$  a volný bod  $Q$ . Potom sestrojíme kružnici  $l$  se středem  $Q$  a procházející bodem  $P$ . Prvotní informaci o podobě obálky získáme prostřednictvím volby *Stopa zapnuta*, kterou aktivujeme pro kružnici  $l$ . Při pohybu bodem  $Q$  podél  $k$  zaznamenává program jednotlivé polohy  $l$ , jak vidíme na Obr. 1. Jejich sjednocení pak poskytuje první přiblížení k podobě vyšetřované obálky. Pro získání rovnice křivky a jejího grafického zobrazení použijeme příkaz **Obalka[1, Q]**. Výsledkem je jednak rovnice

1	$b = (x-a(1-t^2)/(1+t^2))^2 + (y+a(1-t)/(1+t^2))^2 - (a(1-t^2)/(1+t^2))^2 - (a(1-t)^2/(1+t^2))^2$ $\rightarrow b := \frac{t^2 x^2 + t^2 y^2 + 2 a t^2 x + 2 a t^2 y - 4 a t y + x^2 + y^2 - 2 a x + 2 a y}{t^2 + 1}$
2	$bt := \text{Derivace}[b, t]$ $\rightarrow bt(t) := \frac{4 a t^2 y + 8 a t x - 4 a y}{t^4 + 2 t^2 + 1}$
3	$c := \text{Eliminovat}[\{b, bt\}, t]$ $\rightarrow c := \{x^6 a + 3 x^4 y^2 a + 3 x^2 y^4 a + y^6 a + 4 x^4 y a^2 + 8 x^2 y^3 a^2 + 4 y^5 a^2 - 4 x^4 a^3 - 4 x^2 y^2 a^3\}$
4	$c1 := \text{Rozklad}[c]$ $\rightarrow c1 := \{a(x^2 + y^2)(x^4 - 4 x^2 a^2 + 4 x^2 a y + 2 x^2 y^2 + 4 a y^3 + y^4)\}$
5	$c2 := \text{Prvek}[\text{Cinitle}[P\text{rvek}[c1, 1]], 3, 1]$ $\rightarrow c2 := x^4 - 4 x^2 a^2 + 4 x^2 a y + 2 x^2 y^2 + 4 a y^3 + y^4$

Obrázek 2: Symbolický výpočet rovnice kardioidy v prostředí CAS

1	$c := \text{Obalka}[l, Q]$
●	$\rightarrow c := x^4 + 2 x^2 y^2 + 4 x^2 y - 4 x^2 + y^4 + 4 y^3 = 0$

Obrázek 3: Výpočet rovnice kardioidy jako obálky v prostředí CAS

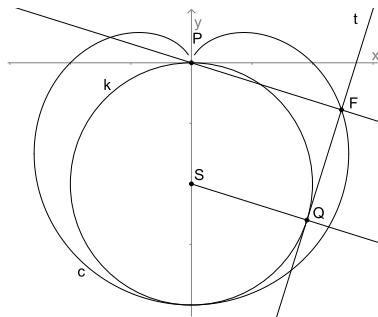
obálky  $c$ , kterou vidíme na Obr. 3, jednak zobrazení křivky  $c$  v *Nákresně*, jak je zachyceno na Obr. 1.

Je nutno dodat, že funkce *Obalka* nemá dosud univerzální působnost. Kardioida patří také mezi tzv. kaustiky, tj. obalové křivky paprsků odražených od určitých křivek. Konkrétně se jedná o obálku paprsků odražených od kružnice, jestliže jejich zdrojem je bod ležící na jejím obvodě. V tomto případě funkce *Obalka* zatím rovnici kardioidy neurčí. Více o výpočtu obálek v GeoGebře viz [1].

## 2.2 Množina bodů daných vlastností

Nyní budeme kardioidu uvažovat jako množinu bodů dané vlastnosti. Opět existují různé způsoby, jak kardioidu jako množinu bodů definovat, viz [8, 10]. Zde využijeme definici kardioidy jako úpatnice, tj. jako množiny pat kolmice sestrojených z daného bodu na všechny její tečny. Úvažujme kružnici  $k$  se středem  $S[0, -a]$  a poloměrem  $a$ , bod  $P[0, 0]$  a volný bod  $Q$  na  $k$ . Jestliže v bodě  $Q$  sestrojíme tečnu  $t$  a k ní kolmici z bodu  $P$  s patou  $F$ , viz Obr. 4, potom množina bodů  $F$  pro všechny body  $Q$  na  $k$  je kardioida s rovinicí

$$(x^2 + y^2 + ay)^2 = a^2(x^2 + y^2). \quad (2)$$



Obrázek 4: Kardioida jako množina bodů dané vlastnosti

Abychom z obrázku vzešlého z výše popsané konstrukce získali rovnici vyšetřované množiny, není zatím možné použít posuvník pro ovládání hodnot poloměru  $a$  výchozí kružnice. Žádnou komplikaci však nepřináší, pokud k sestrojení této kružnice použijeme libovolně zvolené body  $S$  a  $P$ . Zde však, pouze pro zjednodušení podoby výsledné rovnice a zachování její korespondence s tvarem (2), použijeme souřadnice  $S[0, -1]$  a  $P[0, 0]$ . Rovnici vyšetřované množiny bodů potom z příslušného obrázku, který vidíme na Obr. 4, získáme zadáním příkazu `RovniceMnozinyBodu[F, Q]`. Je jedno, jestli tak učiníme v příkazovém řádku nebo v prostředí CAS. Výsledek získaný v druhém případě vidíme na Obr. 5.

```

1   c:=RovniceMnozinyBodu[F,Q]
•   → c := x4 + 2x2y2 + 2x2y - x2 + y4 + 2y3 = 0

```

Obrázek 5: Výpočet rovnice kardioidy jako množiny bodů v prostředí CAS

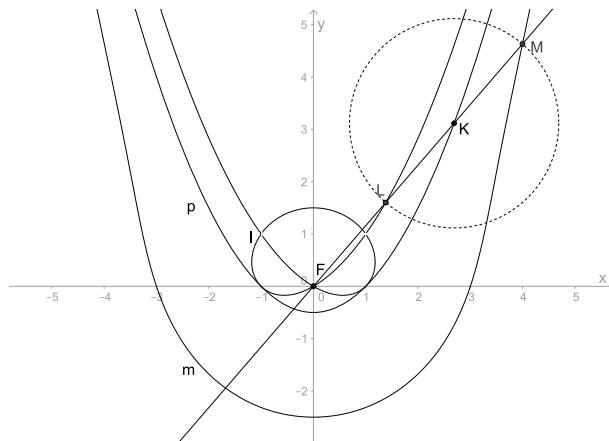
Za funkci `RovniceMnozinyBodu` se skrývá algoritmus, který geometrický obrázek převádí na soustavu algebraických rovnic a tuto soustavu následně řeší. Z toho plyne jednak omezená působnost této funkce, jednak občasná nekorespondence mezi poskytnutým algebraickým řešením a skutečným tvarem hledané množiny. Těmito omezeními netrpí funkce `MnozinaBodu` pro zobrazení numericky spočítaného tvaru množiny bodů. Zadáváme ji příkazem se stejnou syntaxí, tj. ve tvaru `MnozinaBodu[Q, P]`, kde  $Q$  je bod vykreslující množinu při pohybu bodu  $P$ .

### 3 „Preclíková“ křivka

Kardioidu lze definovat také jako tzv. konchoidu. Konchoida je křivka, která je určena pevným bodem (pólem)  $P$ , křivkou  $k$  a parametrem  $b$ .

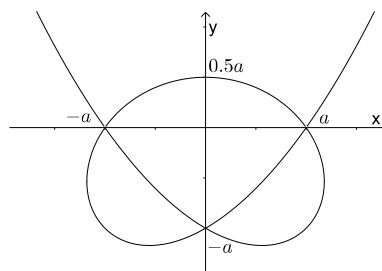
Jestliže  $p$  je přímka procházející bodem  $P$ , která protíná křivku  $k$  v bodě  $K$ , potom množina bodů  $L, M$  takových, že  $|LK| = |KM| = b$ , kde  $b$  je konstanta, je konchoidou křivky  $k$  vzhledem k bodu  $P$ , [7]. Například kardioida  $c$  z Obr. 1 s rovnicí (1) je konchoidou kružnice  $k$  vzhledem k bodu  $P$  s parametrem  $b = 2a$ .

Nyní se ale budeme věnovat jiné algebraické křivce čtvrtého stupně, která je pro změnu jednou z větví konchoidy paraboly vzhledem k jejímu ohnisku, jak pro parabolu  $p : x^2 - 2ay - a^2 = 0$ , ohnisko  $F[0, 0]$  a parametr  $2a$  ilustruje Obr. 6. Z obrázku je patrný charakteristický tvar této křivky



Obrázek 6: Konchoida paraboly  $p$  vzhledem k jejímu ohnisku  $F$

připomínající preclífk, proto o ni hovoříme jako o „preclíkové“ křivce. Při jejím umístění vzhledem k souřadnicovým osám podle Obr. 7 můžeme



Obrázek 7: Preclíková křivka

algebraickou rovnici této křivky psát ve tvaru

$$(x^2 - a^2)^2 + x^2 y^2 = a y^2 (2y + 3a), \quad (3)$$

její parametrické rovnice potom jsou

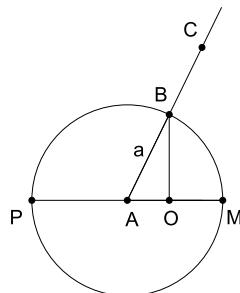
$$x = \frac{-at^3 + 3at}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{at^4 - 6at^2 + a}{2t^2 + 2}; \quad t \in R. \quad (4)$$

Z algebraických křivek čtvrtého stupně, které byly v minulosti v odborné literatuře popsány, je této křivce nejbližší křivka daná rovnicí  $(x^2 - a^2)^2 = ay^2(2y + 3a)$ , zmiňovaná v [9] a [2] jako „knot curve“. Její obrázek a stručný popis jsou uvedeny na stránce [mathworld.wolfram.com/KnotCurve.html](http://mathworld.wolfram.com/KnotCurve.html).

Jak je uvedeno v [3], preclíková křivka se objevila při použití programu GeoGebra k řešení následujícího problému na množinu bodů dané vlastnosti, který je jako „Problém 35“ zadán a ukázkově vyřešen v latinštině psané sbírce geometrických úloh [4]: *Je dána kružnice se středem A a průměrem MP (viz Obr. 8). Pro libovolný bod B této kružnice leží bod C na polopřímce AB tak, že platí*

$$\frac{MO}{AO} = \frac{a}{BC},$$

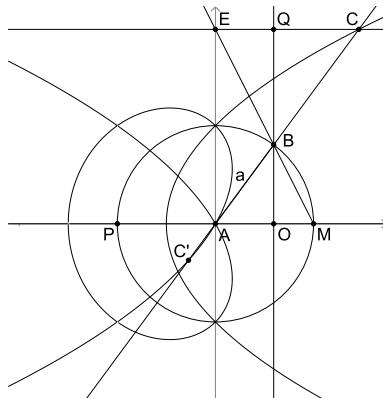
*kde a je poloměr kružnice a O je pata kolmice spuštěné z B na MP. Určete množinu bodů C.*



Obrázek 8: Problém 35; ilustrace zadání

Řešením problému 35, které uvádí autor sbírky [4] Ioannis Holfeld, je parabola o rovnici  $y^2 = 2ax + a^2$ . Její odvození není nikterak složité, vystačíme s několika poznatky elementární geometrie. Nebudeme ho zde však provádět, soustředíme se pouze na postup získání rovnice z geometrického obrázku prostřednictvím funkce *RovniceMnozinyBodu*. Jak už bylo uvedeno výše, uplatněním této funkce se geometrická úloha převádí

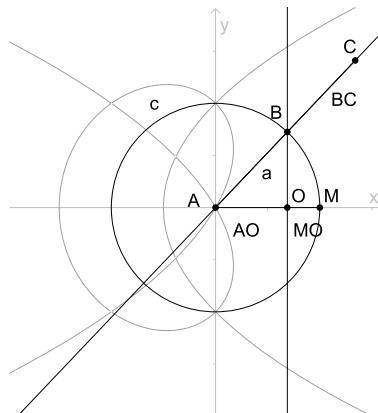
na algebraickou. Její úspěšnost tak závisí na vhodnosti použité konstrukce k převedení na soustavu algebraických rovnic. Proto se vždy snažíme danou úlohu realizovat Eukleidovskou konstrukcí, která proveditelnost algebraické reprezentace zaručuje. Příklad takovéto konstrukce problému 35 je zachycen na Obr. 9. Zadáme-li, do příkazovém řádku nebo v prostředí



Obrázek 9: Problém 35; Eukleidovská konstrukce

CAS, příkaz `RovniceMnozinyBodu[C,B]`, výsledkem je rovnice paraboly, která odpovídá výše uvedenému Holfeldovu řešení. Existuje však ještě jeden bod na přímce  $AB$ , který splňuje podmínu (3), pokud nebereme v úvahu orientace v tomto vztahu uvažovaných úseček. Tímto bodem, označme ho  $C'$ , je obraz bodu  $C$  ve středové souměrnosti podle bodu  $B$ . Jak je patrné z Obr. 9, množinou těchto bodů  $C'$  je právě „preclíková křivka“, tentokrát s rovnicí  $2x^3 + x^2y^2 + 3x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^2 = 0$ . Uvedený vztah mezi body  $C$  a  $C'$  je klíčem k výše popsané roli této křivky jako konchoidy paraboly.

Prostřednictvím funkce `RovniceMnozinyBodu` jsou do GeoGebry implementovány algoritmy automatického odvozování a dokazování geometrických vět. Konkrétně se jedná o její zadání formou příkazu se syntaxí `RovniceMnozinyBodu[logický výraz, volný bod]`. Výsledkem je rovnice křivky, kterou v dané konstrukci vykresluje „volný bod“, pokud je splněna podmínka daná „logickým výrazem“. Postup použití tohoto příkazu si ukážeme na Problému 35. Nejprve připravíme konstrukci dle zadání problému, ovšem s tím rozdílem, že bod  $C$  v ní figuruje jako volný bod. Přitom úsečky vystupující ve vztahu (3) opatříme odpovídajícími jmény, viz Obr. 10. Potom zadáme `RovniceMnozinyBodu[MO/AO==a/BC,C]` a jak vidíme na Obr. 11, výsledkem jsou rovnice obou křivek, Holfeldovy paraboly i „preclíkové“ křivky. Je to dáno tím, že při převedení z geo-



Obrázek 10: Problém 35; výchozí konstrukce pro automatické řešení

1	<code>b:=RovniceMnozinyBodu[MO / AO ⊥ a / BC,C]</code>
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow b := 4x^4 + 8x^3 - x^2y^4 + 2x^2y^2 + 3x^2 - y^6 + 2y^4 - y^2 = 0$
2	<code>Rozklad[LevaStrana[b]]</code>
<input type="radio"/>	$\rightarrow (2x - y^2 + 1)(2x^3 + x^2y^2 + 3x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^2)$

Obrázek 11: Problém 35; automatický výpočet rovnice množiny bodů

metrické na algebraickou se úloha stává obecnější. Konkrétně v případě problému 35 přestává hrát roli orientace úseček. Pro bližší seznámení s tímto přístupem k řešení daného problému lze doporučit online dynamický materiál [6].

## 4 Závěr

V článku bylo na příkladech dvou křivek čtvrtého stupně ukázáno, jaké možnosti nabízí program GeoGebra při získávání rovnic algebraických křivek z dynamických obrázků provedených v *Nákresně*. Je nesporné, že při vývoji příslušných nástrojů se stále více uplatňují algoritmy automatického odvozování a dokazování geometrických vět. Nabízí se tak otázka, jak může tento trend ovlivnit metody studia a výuky geometrie.

## Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu GAJU 121/2016/S.

## Reference

- [1] F. Botana, Z. Kovács. *Teaching loci and envelopes in GeoGebra, GeoGebraBook*, (2014).  
Dostupné z <http://tube.geogebra.org/material/simple/id/128631#>.
- [2] H. M. Cundy. *Mathematical models*. Oxford at the Clarendon Press, New York, 1961 (str. 72).
- [3] R. Hašek, J. Zahradník. Současná interpretace vybraných historických úloh na množiny bodů dané vlastnosti. *Sborník příspěvků 33. konference o geometrii a grafice. Horní Lomná, 9. - 12. září 2013.* Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu 15/2172, Ostrava, 2013. str. 115-120.  
Dostupné z <http://csgg.cz/33lomna/sbornik2013.pdf>
- [4] I. Holfeld. *Exercitationes Geometricae*. Charactere Collegii Clementini Societas Jesu, Praha, 1773.
- [5] B. Hostinský. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1950.
- [6] Z. Kovács, *Holfeld's 35th problem as an implicit locus*.  
Dostupné z <https://www.geogebra.org/m/Gj6RgKJk> (2016).
- [7] J. D. Lawrence. *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [8] E. L. Lockwood. *A Book of Curves*. Cambridge University Press, Cambridge, 1961.
- [9] G. Salmon (1879). *A treatise on the higher plane curves*. Cambridge, 1879 (str. 41).
- [10] Š. Voráčová a kol. *Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná*. Academia, Praha, 2012.



# Geometrical Constructions and the Digital Information Space

## Michaela Holešová

*Dept. of Structural Mechanics and Applied Mathematics, Faculty of Civil Engineering  
University of Žilina, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovak Republic  
email: michaela.holesova@fstav.uniza.sk*

**Abstract.** In a period of rapid growth of digital and information technologies is dedicated to the development of these skills. But in education we should not forget for the means of classical geometry, because geometry was one of the cornerstones in the construction of knowledge. We show some of the constructions that have their place in the educational process at this time, because among other things, they can help show for students the correlation between synthetic and analytic geometry.

*Key words:* constructions, digital information space, synthetic, analytical geometry

## 1 Introduction

In the digitization of education geometry it is very important to ensure the adequate content of the digital information space. This is necessary, because it is during the development of ICT is a global information space in the past dominance of objects written character (mainly books, textbooks) is becoming a nearly pure digital information space (mainly digital objects). We can assume that in the foreseeable future it will be a minimum difference between the global information space and the digital information space. Geometry and information science both are the enormous progress of science, which brought geometry is considered as an exact science, information science is the discipline that deals with society, although its position in the system of science is not yet specified. Geometry is the science which accompanies the humanity from its beginnings; information science has developed in recent decades. Information science also includes the exact description of digital information space as a set of objects and relations between them maintained by information system, fundamental building element of the digital information space is a digital object.

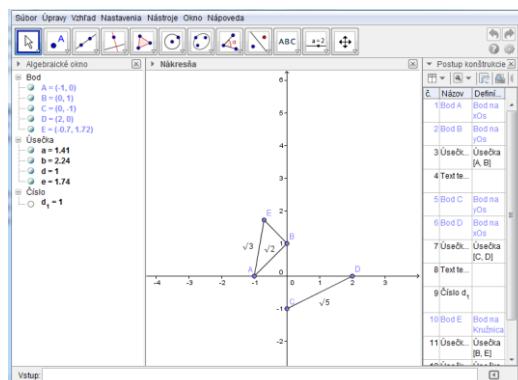
## 2 Synthetic and analytical approach of teaching geometry and new technologie

We must think about the appropriate use of ICT during teaching at schools. This closely related with the filling of the digital information space. We as teachers, we should ensure the highest quality of basic elements - objects of this space with which our students meeting during the learning process. Now we use electronic textbooks, useful applets, etc. The number of such devices within the global information space and also within the digital information space is growing rapidly. We deal with than teaching of geometry at the universities is influenced by this.

The goals of teaching geometry are acquirement knowledge of some parts of geometry necessary for some other courses of the study programme, studying geometry develops spatial imagination of students and learning geometry could help to transfer geometric imagination into the real life and a future work of students.

Study literature is digitized and thus elements of a classic information space are changing into the elements of the digital information space. We think that using of new information technologies is more attractive for students and their achieved knowledge are better. In our opinion this is because we use possibilities of visualization and dynamic view on particular problems. Gradually degrades formalism of acquired knowledge. For example free software GeoGebra gives wide range of uses, not just in the geometry lessons but also in mathematics. We work with this software, as we are of the opinion that the instruments of this software allow for easy connection of synthetic and analytical approach to teaching geometry. Also by means of software GeoGebra is possible to create interesting objects of the digital information space - applets. These can be very effectual using during the learning process.

We think that new technologies allow more clearly teaching. It is true that new methods displace some classic elements of the educational process that have been used for centuries in the past. We rarely use classical drawing tools (a compasses, a ruler). We replace them with various softwares (GeoGebra, CAD, etc.). GeoGebra is the best and most used software for drawing at schools in this time. From this perspective some geometrical constructions were forgotten over the time in the teaching of mathematics in secondary schools and universities. Students have rarely learn about the Golden ratio of line segment or other important proportions, or line segments irrational and the rational length. It is possible to combine new technologies with classic constructions, so as to ensure that these constructions will be component of the educational proces.



**Fig. 1:** Applet in GeoGebra

When we use simple applets in GeoGebra (Fig. 1), students see the desired geometric interpretation. In this case there are complementarities between the analytic methods with synthetic, what we consider to be very beneficial. Students identify as positive when they can use modern technology during the lessons. We think that in this way acquired knowledge are not formally, because they tried to identify and constructs the line segment with irrational length.

Analytic and synthetic methods in geometry, both of these methods must be remembered that the main principle of a mathematics teacher's work is not only teaching, but more important than knowledge transfer is the formation of personality of the student therefore the teacher is to qualitatively change the psyche of the student. Criteria by which this evaluation process is rated are: student's confidence in their abilities of thinking, desire of student for knowledge, reached the stage of development thinking. (Hejný in [1])

Therefore, we believe that for fulfillment of this strategy is preferable in lower grades the synthetic approach, for the possibility of illustration, which is very important for students because then they can work with objects that they can imagine or plot. The abstraction is to get the higher grades, which is conditioned by the development itself. The analytical approach is therefore preferable to develop at an older age and at colleges and universities, where is already a precondition to the fact that students are able to generalize and have not problem with abstraction.

This does not exclude the possibility that students of lower grades at least become familiar of the basic principles of analytical methods such consistent work with the use of square paper. We believe that in the upper grades should not teach these methods completely separate, because only a very small group of students can then find the link and interdependence between them. At colleges and especially at universities should be connection of these approaches.

### **3 Golden ratio, harmonic, arithmetic and geometric proportions**

Even last millennium people considered basic geometrical constructions necessary and appropriate, as evidenced by the statement of the German mathematician, physicist, astronomer Johannes Kepler (1571-1630):

*Geometry has two treasures: Pythagoras' Theorem and Golden Ratio. The first is prized by gold, the other looks more like a precious stone. "*

We must recall that the ancient knowledge was the basic foundation of modern knowledge and science. Without wisdom and knowledge of classical geometry, there would not be neither advances of our time in the form of graphics software. It is true that it has open up completely different options in the teaching of geometry, for example, giving us the opportunity to show interactively some terms and demonstrate them. It is in our opinion a great

asset, but we consider that it would be a shame if classical methods of teaching geometry completely disappeared.

The first clear definition of number  $\varphi$ , which later come to be called as the Golden Ratio, was brought by Euclid around 300 B.C. Formulated by task, which in today's mathematical language could be read as follows: *Divide the line segment AB into two segments - longer AC and shorter CB, so that the contents of a square the side AC equals the contents of rectangle with sides AB and CB.*



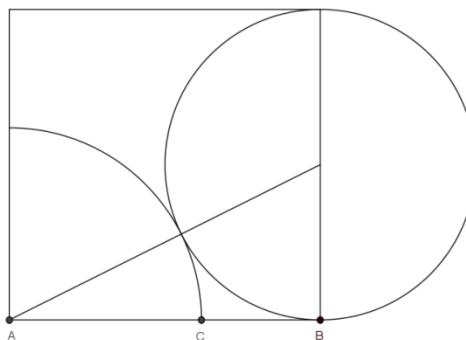
**Fig. 2: Line segment AB divide by Golden Ratio**

If we use the label as in Fig. 2 we can by mathematically language of algebra write this problem in the form of  $|AC|:|CB|=|AB|:|AC|$ . Without loss of generality, we can assume that the length line segment  $CB$  is  $|CB|=1$  and the length of line segment  $AC$  is  $x$  units,  $|AC|=x$ . Then we get that  $x:1=(x+1):x$ .

If we find the length of  $x$ , the task will be solved. After elementary adjustments we get, that the wanted length  $x$  is the solution of the quadratic equation

$$x^2 - x - 1 = 0. \text{ Solutions of this equation are the numbers } x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

We wanted only positive solution to this equation. Searched the length of  $x$  is given explicitly, i.e.  $x = x_1 = \varphi$ , which is the value of the Golden Ratio and we say that the point  $C$  divides the line segment  $AB$  by Golden Ratio [3]. Geometrically, we can construct the point  $C$  as shown in Fig. 3. Just we remind that this is not the only possible construction of the Golden Ratio.



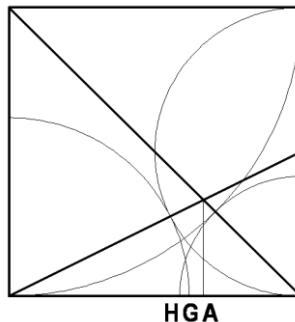
**Fig. 3: Line segment AB divide by Golden Ratio**

Between important ratios we could include arithmetic, geometric and harmonic proportion. It is a division of the line segment length into the two

parts, so that the length  $b$  of the longer part of this line segment is the arithmetic, geometric, respectively harmonic proportion of the length  $a$  of the entire length line segment and  $c$  the remainder part of this line segment.

Said ratios we now refer as Pythagorean. We denote three members  $a$ ,  $b$  and  $c$ , where  $a > b > c$ , then the member  $b$  is obtained as arithmetic  $b = \frac{a+c}{2}$ ,  $b = \sqrt{ac}$  geometric respectively harmonic  $b = \frac{2ac}{a+c}$  average members  $a$  and  $c$ , i.e. members  $a$ ,  $b$ ,  $c$  are three consecutive members of arithmetic, geometric or harmonic sequence.

If we divide a line segment in arithmetic proportion, thus the ratio between the longer part and the shorter part is 2:1, the geometric proportion divide of line segment by the Golden Ratio which we have already mentioned, i.e. the ratio between the longer and shorter part of this segment is  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1 (\varphi : 1)$ . By using harmonic proportion the ratio between the length of the longer and the shorter parts is  $\sqrt{2} : 1$ . Construction the dividing point of line segment through of all the ratios is shown in Fig. 4, point  $H$  denotes the dividing point of line segment in harmonious proportion, point  $G$  in a geometric proportion (Golden Ratio) and point  $A$  in arithmetic proportion.

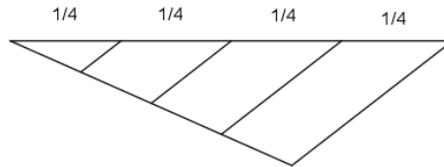


**Fig. 4: Division of a line segment in arithmetic, geometric and harmonic proportions**

## 4 Interesting constructions

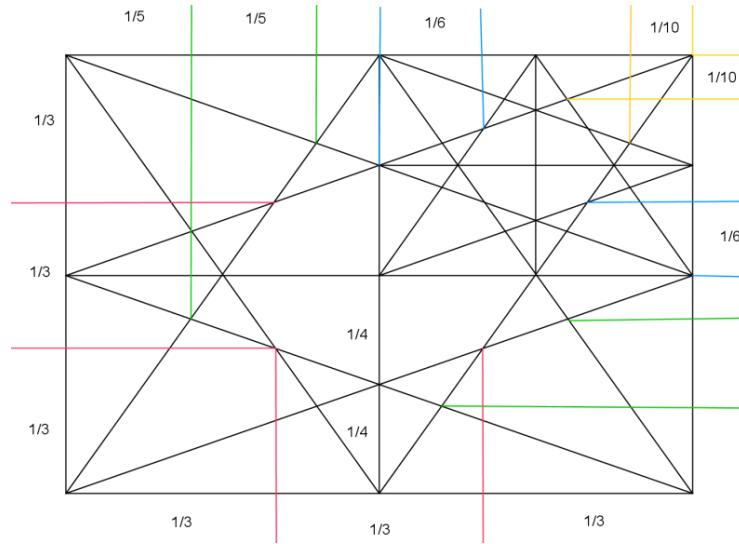
**Example 1:** Let the rectangle with sides of length  $a$  and  $b$ . We construct the line segment whose length is equal to the k-multiple of lengths  $a$ ,  $b$ , where  $k = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ .

Only some of our students know how to structurally solve this example by using similarity of the triangles as shown in Fig. 5 for 1/4.



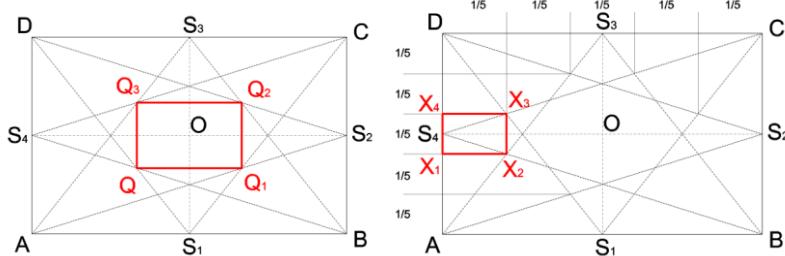
**Fig. 5: Division of line segment into quarters**

It is a great pity that completely disappeared construction shown in Fig. 6, which was previously massively used in the construction of buildings and the roof trusses.



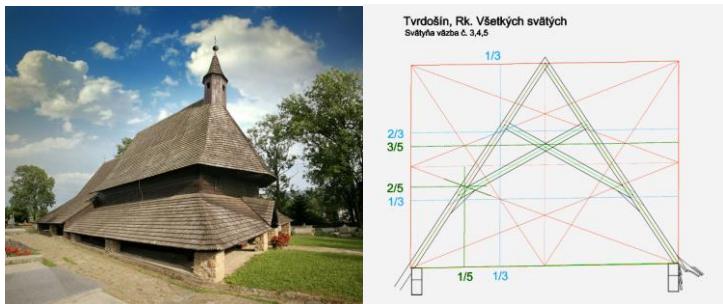
**Fig. 6: Division of line segment into halves, quarters, thirds, fifths etc.**

The proof of this construction is based on the similarity of triangles. We prove that rectangles  $QQ_1Q_2Q_3$ ,  $XX_1X_2X_3$  have relevant length of the sides (see Fig. 7).



**Fig. 7**

This construction is interesting for students, because in the past in construction practice was used. We can assume that this design was also used in determining the basic structural elements in the construction of the Roman Catholic Church of All Saints in Tvrdošín. Fig. 8 shows this church and geometric construction the structure of the truss above the sanctuary.



**Fig. 8: R.C. Church in Tvrdošín and geometric construction of the truss above the sanctuary**

## 5 Conclusion

Finally, we want only to add that despite the above facts, we consider that in teaching of geometry is necessary to develop synthetic and analytic approaches simultaneously. Even if prevails in the lower grades synthetic approach, the aim should be that students in higher grades know to solve any geometric task comprehensively, using the system, i.e. that these approaches did not separate, but deeply connected.

Appropriate use the new technologies during the teaching process allow us make it more attractive and especially to improve the quality of the teaching process and learning of students, what largely affects the level of their knowledge. We think such an approach can help the teacher to eliminate formalism from knowledge of students and to their better utilization for the company and practice.

We can only hope that in this day in age of modern technology, in the teaching of geometry the classical approach does not completely disappear and also its beauty, which gave us great mathematicians and scholars of our past. It would be a shame, if the presented constructions so often used in the past and in practice were completely forgotten.

We believe that properly selected parts of geometry should be included in the education of all students at universities. It was so in the distant past, when geometry was one of the main pillars of education.

Our opinion is not based only on the distant past but also the present. We have already mentioned the possible use of geometry for information science that is new. We hope that geometry remains still interesting for all study programmes at universities.

## References

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2 [Theory of Mathematics Education 2]*, SPN Bratislava 1990.
- [2] Hartshorne, R.: *Geometry: Euklid and Beyond*. Undergraduate Texts in Mathematics. USA: Springer 2000, ISBN 978-0-387-98650-0.
- [3] Walser, H.: *Der Goldene Schnitt*. Leipzig: B. G. Teubner Verlag 1996. P. 233, ISBN 978-3-937219-85-1.
- [4] Capková, E. (2012). *Geometry in information science*. SVU and its role in the era of globalisation: transatlantic collaboration, innovation and preservation. Highland Park, NJ, USA: Czechoslovak society of arts and sciences, 2012. ISBN 978-0-615-80114-8, pp. 94-98
- [5] Holešová, M : *Analytic and Synthetic Methods in Geometry*. SVU and its role in the era of globalisation: transatlantic collaboration, innovation and preservation: 26th SVU World congress of the Czechoslovak society of arts and sciences: July 1-6, 2012 in Žilina, Slovakia 2012, pp. 112-118, ISBN 978-80-554-0619-0.
- [6] Holešová, M.: *Selected geometrical constructions*. Acta mathematica 17: conference proceedings of international conference 12th mathematical conference in Nitra : 19 June 2014, Nitra, Slovakia. - Nitra: Constantine the Philosopher University in Nitra, 2014. - ISBN 978-80-558-0613-6. - pp. 49-54.
- [7] Holešová, M.: *Impact of the digital information space for teaching geometry in the study programs at universities*. ICERI 2015, 8th international conference of education, research and innovation. Seville (Spain) 16-18 november 2015, konference proceedings, ISNN 2340-1095.

# Konštrukcia kužel'osečiek v Bézierovom tvare

Tatiana Hýrošová

*Technická univerzita  
T.G.Masaryka 24, 960 53 Zvolen  
tatiana.hyrossova@tuzvo.sk*

**Abstract.** The paper presents the construction of conic arcs of non-parabolic type and their expression in Bézier form with the weights  $w_i$  which are directly given as the result of the main conic data elements. The algorithm for generation of these arcs is based on the known theorems of projective geometry.

**Keywords:** kužel'osečka, Bézier-Bernsteinova reprezentácia kužel'osečky, shoulder-dotyčnica, shoulder-bod.

## 1 Úvod

V geometrickom modelovaní sa na aproximáciu všeobecných kriviek najčastejšie používajú Bézierove krivky (parabolické oblúky). V prípade, že pre túto aproximáciu sú vhodnejšie eliptické alebo hyperbolické oblúky, je možné použiť racionálne Bézierove krivky s váhami  $w_i$ . Tieto oblúky možno zadat', podobne ako parabolu, dotyčnicami v jeho koncových bodoch, čiže tromi riadiacimi bodmi  $b_0, b_1, b_2$ . Na dourčenie kužel'osečky  $K$  neparabolického typu potom stačí zadat' jeden jej jednoduchý prvok - dotyčnicu, resp. bod, ktorým má prechádzať. Jeden zo spôsobov dourčenia kužel'osečky  $K$  je pomocou shoulder-dotyčnice  $Q$ , resp. shoulder-bodu  $q$  [1]. Existuje niekoľko možností na opisanie takejto krivky v Bézierovom tvare. Jednou z nich je konštrukcia umožňujúca vyučislovanie jej bodov pomocou modifikovanej Brianchonovej vety.

## 2 Konštrukcia kužel'osečiek neparabolického typu

Uvažujme kužel'osečku  $K$  určenú riadiacimi bodmi

$$b_0 = (x_0, y_0, 1)^\top, \quad b_1 = (x_1, y_1, 1)^\top, \quad b_2 = (x_2, y_2, 1)^\top$$

a shoulder-dotyčnicou

$$Q = (a, b, c)^\top, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi) = 0,$$

kde  $f(\xi) = ax + by + c$ , pre  $\xi = (x, y, 1)^\top$ . Na vyjadrenie kužel'osečky  $K$  v Bézier-Bernsteinovom tvare treba určiť korektných súradnicových reprezentantov týchto vstupných prvkov. Vychádzame pritom z predpokladu, že riadiace body kužel'osečky majú homogénnych reprezentantov zvolených

tak, aby pre priesečníky  $q_0 = Q \wedge B_0$  a  $q_2 = Q \wedge B_2$ , kde  $B_0 = b_0 \wedge b_1$ ,  $B_2 = b_1 \wedge b_2$ , platilo

$$q_0 = \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}b_1 \quad \text{a} \quad q_2 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2,$$

t.j. shoulder-dotyčnica  $Q$  je strednou priečkou ramien riadiaceho trojuholníka [5]. Pri danej voľbe súradníc bodov  $b_0, b_1, b_2$  majú tieto priesečníky tvar

$$q_0 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1, y_0 + y_1, 2)^\top \quad \text{a} \quad q_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2)^\top.$$

Kedže  $q_0, q_2 \in Q$ , potom musí platiť:

$$\begin{aligned} a(x_0 + x_1) + b(y_0 + y_1) + 2c &= 0 \\ a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + 2c &= 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} f(b_0) &= -f(b_1) \\ f(b_2) &= -f(b_1) \end{aligned}$$

t.j.  $f(b_0) : f(b_1) : f(b_2) = 1 : -1 : 1$ . Takých reprezentantov  $\rho b_0, \sigma b_1, \tau b_2$  riadiacich bodov, aby spĺňali túto podmienku, nájdeme riešením sústavy homogénnych lineárnych rovníc:

$$f(b_0)\rho - k = 0, \quad f(b_1)\sigma + k = 0, \quad f(b_2)\tau - k = 0.$$

Jednému z riešení prislúcha trojica riadiacich bodov:

$$b_0^* = f(b_1)f(b_2)b_0, \quad b_1^* = -f(b_0)f(b_2)b_1, \quad b_2^* = f(b_0)f(b_1)b_2.$$

Bézier-Bernsteinovu reprezentáciu kužeľosečky pre nové riadiace body  $b_0^*, b_1^*, b_2^*$  sa pokúsime odvodiť tak, že budeme konštruovať jej body ako body dotyku dotyčníku kužeľosečky  $K$  priradených reálnym parametrom  $t$ . Využijeme pritom tzv. modifikovanú Brianchonovu vetu:

**Modifikovaná Brianchonova veta:** Spojnice jednotlivých dotykových bodov troch rôznych dotyčníku kužeľosečky  $K$  s priesečníkmi dvoch s nimi neincidentných dotyčníku prechádzajú jedným bodom (Brianchonov bod  $b$ ).

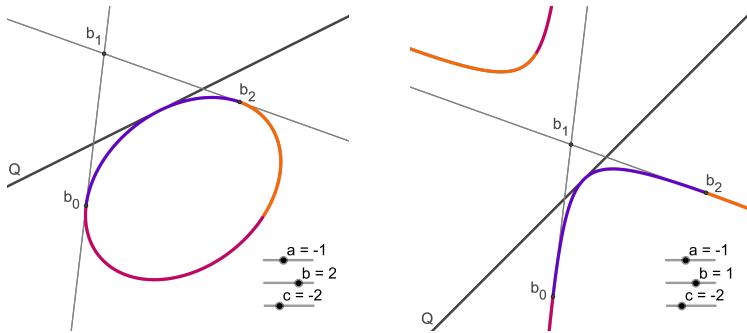
Pre každé  $t \in R$  ( $t \in \langle 0, 1 \rangle$ ) zostrojíme dotyčnicu

$$T = T(t) = b_0^1(t) \wedge b_1^1(t),$$

kde  $b_0^1(t) = (1-t)b_0^* + tb_1^*$  a  $b_1^1(t) = (1-t)b_1^* + tb_2^*$ , kužeľosečky  $K$  a k nej potom pomocou modifikovanej Brianchonovej vety zostrojíme dotykový bod  $x = X(t)$ . Ked' si upravíme zápis dotyčnice do tvaru:

$$T = (1-t)^2(b_0^* \wedge b_1^*) + t(1-t)(b_0^* \wedge b_2^*) + t^2(b_1^* \wedge b_2^*),$$

môžme pri konštrukcii bodu  $X(t)$  kužeľosečky  $K$  efektívne postupovať

Obr. 1: Typ kužeľosečky závisí od voľby  $Q = (a, b, c)^\top$ 

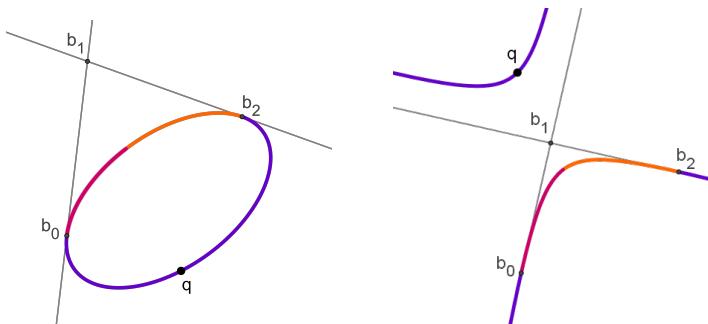
podľa nasledujúceho algoritmu:

1. krok:  $b(t) = (b_0^* \wedge b_1^*(t)) \wedge (b_2^* \wedge b_1^*(t)) =$   
 $= [b_0^* \wedge ((1-t)b_1^* + tb_2^*)] \wedge [b_2^* \wedge ((1-t)b_0^* + tb_1^*)] =$   
 $= [(1-t)(b_0^* \wedge b_1^*) + t(b_0^* \wedge b_2^*)] \wedge [-(1-t)(b_0^* \wedge b_2^*) - t(b_1^* \wedge b_2^*)] =$   
 $= -(1-t)^2(b_0^* b_1^* b_2^*) b_0^* - t(1-t)(b_0^* b_1^* b_2^*) b_1^* - t^2(b_0^* b_1^* b_2^*) b_2^* =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*) [(1-t)^2 b_0^* + t(1-t) b_1^* + t^2 b_2^*]$
2. krok:  $L(t) = b(t) \wedge b_1^* =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*) [(1-t)^2 b_0^* + t(1-t) b_1^* + t^2 b_2^*] \wedge b_1^* =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*) [(1-t)^2 (b_0^* \wedge b_1^*) - t^2 (b_1^* \wedge b_2^*)]$
3. krok:  $X(t) = L \wedge T =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*) [(1-t)^2 (b_0^* \wedge b_1^*) - t^2 (b_1^* \wedge b_2^*)] \wedge$   
 $\wedge [(1-t)^2 (b_0^* \wedge b_1^*) + t(1-t)(b_0^* \wedge b_2^*) + t^2 (b_1^* \wedge b_2^*)] =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*) [t^2 (1-t)^2 (b_0^* b_1^* b_2^*) b_1^* + t(1-t)^3 (b_0^* b_1^* b_2^*) b_0^* +$   
 $+ t^3 (1-t)(b_0^* b_1^* b_2^*) b_2^* + t^2 (1-t)^2 (b_0^* b_1^* b_2^*) b_1^*] =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*)^2 t(1-t) [(1-t)^2 b_0^* + 2t(1-t) b_1^* + t^2 b_2^*] =$   
 $= -(b_0^* b_1^* b_2^*)^2 t(1-t) \sum_{i=0}^2 b_i^* B_i^2(t).$

Výsledná Bézier-Bernsteinova parametrizácia

$$X(t) = -(b_0^* b_1^* b_2^*)^2 t(1-t) \sum_{i=0}^2 b_i^* B_i^2(t)$$

je definovaná len pre  $t \in R \setminus \{0, 1\}$  a reprezentuje dva otvorené obliúky kužeľosečky  $K$  s krajnými bodmi  $b_0$  a  $b_2$  (jeden pre  $t \in (0, 1)$ , druhý pre



Obr. 2: Typ kužeľosečky závisí od voľby  $q$

ostatné  $t \in (1, \infty)$  a  $t \in (-\infty, 0)$ ). Typ kužeľosečky  $K$  závisí od voľby shoulder-dotyčnice  $Q$  (obr. 1).

Ďalšia možnosť je, že shoulder-dotyčnicu nahradíme shoulder-bodom  $q$ , t.j. bodom, ktorým chceme, aby kužeľosečka prechádzala. Pri konštrukcii dotyčnice  $Q$  v danom bode  $q$  použijeme modifikovanú Pascalovu vetu:

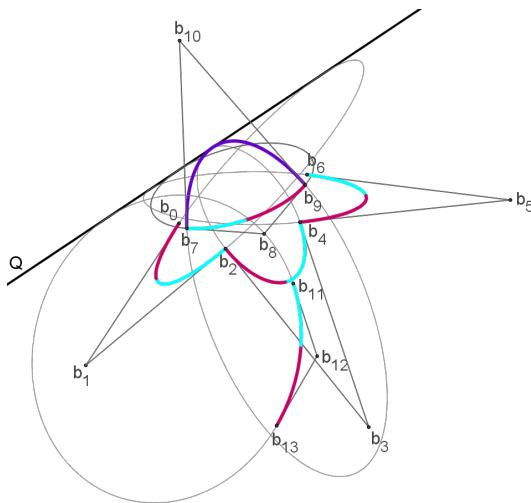
**Modifikovaná Pascalova veta:** Priesečníky jednotlivých dotyčníc kužeľosečky  $K$  so spojnicami dotykových bodov zvyšných dvoch dotyčníc ležia na jednej priamke (Pascalova priamka  $P$ ).

Samotnú konštrukciu dotyčnice  $Q$  možno zrealizovať pomocou nasledujúceho algoritmu:

1. krok:  $P = [(b_0 \wedge b_1) \wedge (b_2 \wedge q)] \wedge [(b_1 \wedge b_2) \wedge (b_0 \wedge q)]$
2. krok:  $L = b_0 \wedge b_2$
3. krok:  $Q = (L \wedge P) \wedge q$ .

Pri výbere homogénnych reprezentantov riadiacich bodov  $b_0^*, b_1^*, b_2^*$  a pri konštrukcii kužeľosečky  $K$  je potom možné pokračovať už známym spôsobom. Aj v tomto prípade od voľby shoulder-bodu  $q$  závisí typ kužeľosečky (obr. 2).

*Poznámka:* Pri formulácii algoritmov ako aj pri riešení polohových úloh je symbolom  $\wedge$  označený vektorový súčin a symbolom  $(b_0^* b_1^* b_2^*)$  zmiešaný súčin stĺpcových vektorov  $b_0^*, b_1^*, b_2^*$ .



Obr. 3: Kvet vytvorený eliptickými oblúkmi

### 3 Záver

Kužel'osečka určená riadiacimi bodmi  $b_0, b_1, b_2$  v afinných súradničach má analytické vyjadrenie

$$X(t) = \frac{f(b_1)f(b_2)b_0B_0^2(t) - f(b_0)f(b_2)b_1B_1^2(t) + f(b_0)f(b_1)b_2B_2^2(t)}{f(b_1)f(b_2)B_0^2(t) - f(b_0)f(b_2)B_1^2(t) + f(b_0)f(b_1)B_2^2(t)},$$

ktoré možno jednoducho prepísat' do racionálneho tvaru

$$X(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i b_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}$$

s váhami  $w_i = (-1)^i f(b_j)f(b_k)$ ,  $i, j, k \in 0, 1, 2$ ,  $i \neq j \neq k \neq i$ .

V príspievku je prezentovaná konštrukcia opisujúca kužel'osečkové oblúky neparabolického typu a ich vyjadrenia v racionálnom tvarе s váhami  $w_i$ , ktoré sú priamo dané ako výsledok vstupných kužel'osečkových prvkov, t.j. riadiacich bodov a shoulder-dotyčnice (príp. shoulder-bodu).

Opísaná konštrukcia umožňuje vykreslovať rôzne obrazce (obr. 3) vytvorené z eliptických a hyperbolických oblúkov a meniť ich tvar jednoduchým spôsobom (len voľbou  $Q$ ,  $q$ , príp. zmenou riadiacich bodov).

Numerické výpočty boli realizované a obrázky vytvorené pomocou dynamického systému GeoGebra 5.0.

## References

- [1] G. E. Farin: *NURBS: From Projective Geometry to Practical Use*, A K Peters, 1999
- [2] G. E. Farin: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Academic Press, 1990
- [3] J. Garaj: *Základy vektorového počtu*, SVTL Bratislava, 1963
- [4] Š. Solčan: *Projektívna geometria*, UK Bratislava, 1995
- [5] T. Hýrošová, V. Zatko: *Bézier-Bernstein Representations of Conics and Conic Arcs*, G-slovenský časopis pre geometriu a grafiku, 2012
- [6] GeoGebra 5.0.170.0-3D: *A Dynamic Mathematics System*, 2014  
<https://www.geogebra.org>

# Intersection of curves – facts, computations, applications in blowup

Pavel Chalmovianský

*Department of algebra, geometry and math education*

*Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Slovakia*

*pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk*

**Abstract.** We deal with application of intersection of curves in resolution of a singularity. The basic tool is a product of curves in homology group used on a certain set of generators producing as a result multiplicity of the infinitely near points of a singularity in the inverse of their proximity matrix. We explain the interconnection of several concepts related to a isolated singularity such as blowup, proximity relations, intersections and homology group of the blowup illustrated on an example.

**Keywords:** singularity, intersection, blowup, homology

## 1 Importance of intersection

The intersection of varieties is a fundamental tool for their inspection and mutual position. There is a huge theory of intersection covering many cases, see [2]. We restrict to a very special case following [3, 5] and we mention just few important applications in order to illustrate the range of the topic at first. A classical topic is Bézout theorem which was in fact known to earlier authors. Its applications are often starting point of many modern topics in intersection theory such as intersection multiplicity (a generalization of root multiplicity), stability of intersection (Moving lemma). Clearly, the singular points of a curve –  $Z(f, \nabla f)$ , general case for varieties, is a very important and in general form for arbitrary varieties also very much open field of modern problems and approaches to their solutions, if available. In the area of discrete and constructive geometry, applications in configuration counting (e.g. “How many lines intersect three lines in  $P^3(\mathbb{C})$  in general position?”) can be easily found and they cannot be easily solved in many cases. The general framework for computing is given by Chow ring and its applications. Multiplicity of a point on a curve is a special case of intersection multiplicity evolved by Fulton, Vogel and Stückrad [4] and many others (see e.g. [1]).

## 2 Basic notions

Let  $C$  be a plane curve given by a polynomial equation  $f = 0$ . A point  $O \in C$  has multiplicity at least  $m$  provided all derivatives of order less than  $m$  are zero at  $O$ . Alternatively, the Taylor polynomial of  $f$  at  $O$  has the lowest non-zero term at least of degree  $m$ .

Additionally, if some derivative of order  $m$  is non-zero at  $O$ , we say the point  $O$  has exactly the multiplicity  $m$ . A point with its multiplicity

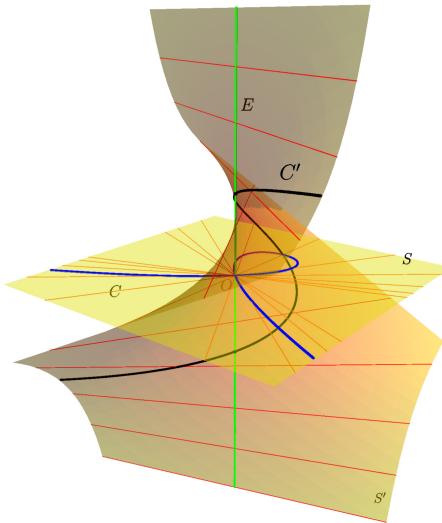


Figure 1: The blowup transform of the curve  $C$  gives an exceptional divisor  $E$  and the strict transform curve  $C'$  with two single intersections instead of one double intersection.

$0$  is outside curve, a point with its multiplicity 1 is a regular point of a curve, a point with its multiplicity at least 2 is a singular point of a curve.

As a simple example, we consider a curve given by a polynomial  $x^2 \pm y^2$  in an affine plane over complex numbers. It has the point  $O = (0, 0)$  of multiplicity 2.

Many questions arise with the notion of multiplicity with respect to its computation and its influence on the quality of a curve. The basic cover how many points of certain multiplicity can the curve have, what can be their configurations. These questions are solved from very broad classes of varieties in terms of other invariants.

### 3 Multiplicity of a point on a curve via blowup

One way of exploring the multiplicity of a point, as a local value, is using blowup transform. We prefer to explain it using fig. 1. A more formal way can be found in many books.

The curve  $C$  on the plane  $S$  is blown up in its singularity  $O$  creating the exceptional divisor  $E$  and the strict transform curve  $C'$ , both on the surface  $S'$ . The simple node singularity vanishes, however there is a relation of intersection of  $E$  and  $C'$  instead respecting the multiplicity of the origin.

Symbolically, if  $\pi: S' \rightarrow S$  is a projection:  $\pi^*[C] = 2[E] + [C']$ , since the point  $O$  is double.

Clearly, it may happen that some points on the curve  $C'$ , even those on  $E$  are again singular. Hence, additional blowup mappings are required.

An algebraic curve  $C \subset P^2(\mathbb{C}) = S = S_0$  with its resolution  $\pi: S' \rightarrow S$  is given as a composition of a finite sequence of blowups  $\pi_i: S_{i+1} \rightarrow S_i$ ,  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  for singular points  $O_i$ . The curve  $C = C^{(0)}$  is blown up into  $C^{(1)}$  and several copies of the divisor  $E_0$ , etc. The image of  $E_i$  in  $S_k$  is denoted  $E_i^{(k)}$  (we start always with  $E_i^{(i+1)}$ ).

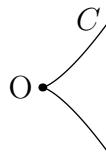
In some steps, we also look at the considered complex curves/surfaces as the real manifolds. The (complex) curve  $C$  is closed oriented (real) 2-dimensional manifold as well as  $E$  and  $C'$  mentioned above. Here,  $S'$ ,  $S_i$ ,  $S$  are (complex) surfaces, some obtained by the blowup technique.

We show certain calculus which is possible within the graph of the blowup. It is based on homology groups of the curve.

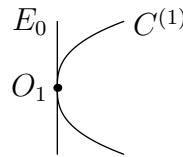
Topologically, the blowup can be seen as a gluing of a  $\mathbb{S}^2 = P^1(\mathbb{C}) \simeq E_i$  instead of a singular point. Roughly, we get such generator  $E_0, \dots, E_{N-1}$  of the homology group  $H_2(S')$  for each singular point during the resolution of the singularity. We demonstrate it on the following example.

### 3.1 Example of resolution

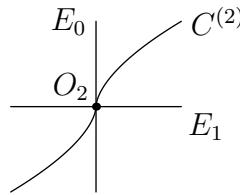
Starting with the curve  $C: y^8 = x^{11}$ , its singularity  $O$



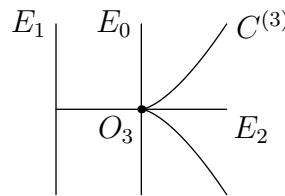
and using the quadratic transform  $x_1y_1 = y$ ,  $x_1 = x$ , one gets  $(x_1y_1)^8 = x_1^{11}$ , hence  $E_0 : x_1^8 = 0$ ,  $C^{(1)} : y_1^8 = x_1^3$ .



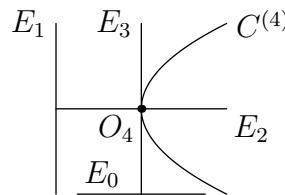
The next blowup  $x_2y_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1$  gives  $C^{(2)} : y_2^5 = x_2^3$  and  $E_1 : y_2^3 = 0$ . Clearly,  $E_0^{(2)} : x_2 = 0$ .



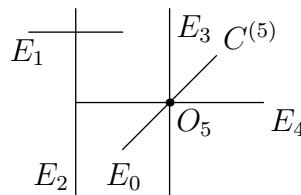
Then,  $x_3y_3 = x_2$ ,  $y_3 = y_2$  provides  $C^{(3)}: y_3^2 = x_3^3$ ,  $E_2: y_3^3 = 0$ ,  $E_0^{(3)}: x_2 = 0$ ,  $E_1^{(3)}$ : on the other map of a surface due to the fact we work over projective plane/surface.



The transform  $x_4 = x_3$ ,  $x_4y_4 = y_3$  changes the equation into  $C^{(4)}: y_4^2 = x_4$ ,  $E_3: x_4^2 = 0$  and  $E_0^{(4)}, E_1^{(4)}$ : on the other map of a surface,  $E_2^{(4)}: y_4 = 0$ .



Resolving the tangent exceptional divisor using  $x_4 = x_5y_5$ ,  $y_4 = y_5$  gives  $E_4: y_5 = 0$ ,  $C^{(5)}: y_5 = x_5$ ,  $E_3^{(5)}: x_5 = 0$ .



And finally, no three divisors intersect and it was resolved with  $x_5 = x_6$ ,  $y_5 = x_6y_6$  resulting in  $E_5: x_6 = 0$ ,  $C^{(6)}: y_6 = 1$ ,  $E_4^{(6)}: y_6 = 0$ .

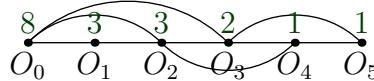
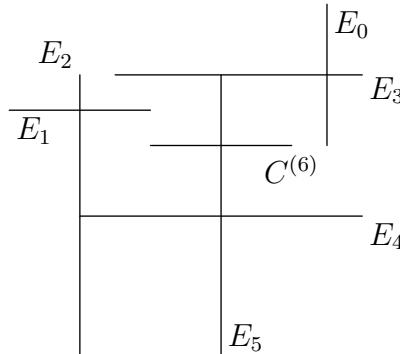


Figure 2: The graph of the resolution of a singularity. The vertices are infinitely near points of the singularity and the edges are given by the proximity relation.



### 3.2 Graph of the resolution

The whole resolution process can be described formally by a graph. The vertices of the graph are the singular points  $O_i$  of the curve during the whole resolution. The edges are given by proximity relation. We say  $O_j$  is proximate to  $O_i$  iff  $O_j$  is located over  $O_i$  at  $E_i$ . Clearly,  $O_i$  is proximate to  $O_{i-1}$  for each  $i > 0$ .

The whole proximity relation can be written down into a proximity matrix  $P = (p_{ij})$  so that

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } O_j \text{ is proximate to } O_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The above example  $y^8 = x^{11}$  provides the graph in fig. 2 and the corresponding proximity matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

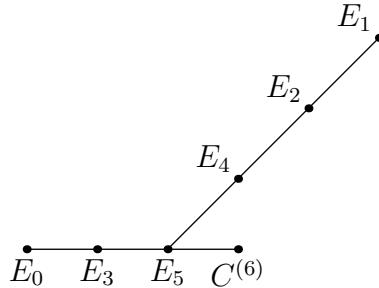


Figure 3: The dual graph of the resolved curve  $y^8 = x^{11}$ .

Clearly, each of the points  $O_i$  might be a singular point on the curve on which it occurs. Hence, its multiplicity is interesting as well.

### 3.3 Multiplicity of infinitely near points

The multiplicity  $m_i(C)$  is the multiplicity of  $O_i$  on the strict transform of  $C$ .

One can show directly  $m_j(C) = \sum_i m_i(C)$ , where  $O_i$  is proximate to  $O_j$ . The last column of the inverse matrix to the proximate matrix  $P$  contains these numbers

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 4 Dual graph of the resolution

Now, we get another description of the singularity using dual graph. The vertices of the dual graph  $\Gamma(C)$  are the exceptional divisors  $E_i$  and two such vertices share an edge iff they intersect. An additional natural subdivision rule for edges is used in case  $O_i$  is proximate to  $O_{i-1}$  and some  $O_j$  for  $j < i - 1$ .

If the curve has several branches, it is convenient to add vertices for each resolved branch of the curve to each corresponding  $E_N$  which is crossed transversely. The resulting graph is called augmented dual graph of the curve. For the above example, the dual graph is in fig. 3.

The shape of the dual graph cannot be arbitrary. A typical dual graph looks like the one in fig. 4. This is due to Euclid's algorithm which is encoded in the resolution (on the exponents of the curve at singularity)

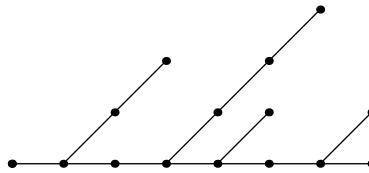
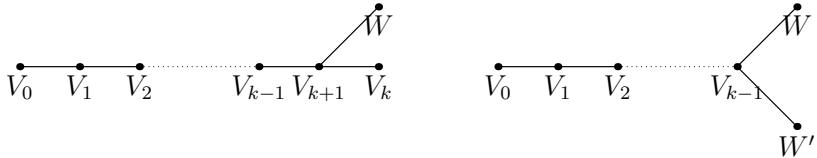


Figure 4: Typical dual graph of an isolated singularity

Figure 5: The dual graphs of  $A_n$  singularities. The graph for  $A_{2k}$  and  $A_{2k+1}$ .

of the branch and certain subdivision rule as we could have seen in the above example.

Structurally, the simplest singularities are those named  $A_n$ ,  $n \geq 1$ . There are two cases,  $n = 2k$ ,  $n = 2k - 1$ . The corresponding dual graphs are drawn in the fig. 5.

## 5 Computation in homology groups

The computations of the multiplicity can be interpreted in terms of homology group of the blown up curve via intersection.

Let  $\pi: S' \rightarrow S$  be a blowup of  $C \subset S$  given by  $f = 0$ . Let  $C'$  be a strict transform of  $C$ ,  $O$  has multiplicity  $m$  on  $C$  and  $E$  be the corresponding exceptional divisor. Then, in the group  $H_2(T)$

$$\pi^*[C] = [C'] + m[E],$$

moreover, one has the additional relations

$$\begin{aligned} [E].[E] &= 1, \\ [E].\pi^*[F] &= 0, \\ \pi^*[F].\pi^*[G] &= [F].[G] \end{aligned}$$

for any  $g$  such that  $[G] = [Z(g)]$  and  $[F] = [Z(f)]$ .

What is a geometric meaning of  $[E].[E] = -1$ ? The intersection form counts the intersection points of the corresponding curves with orientation. The above fact says, we cannot move freely the exceptional curve on

the blowup surface so that the original and the moved one intersect with the same orientation as e.g. lines in the projective complex plane do.

Let  $[\hat{E}_j]$  be the strict transform of  $[E_j]$  in the resolution. It can be shown by induction that

$$[E_i] = \sum_j p_{ij} [\hat{E}_j]$$

since  $\pi_j([E_i^{(j)}]) = [E_i^{(j+1)}] - p_{ij} [E_j^{(j+1)}]$ .

This provides another look at the multiplicity of a point. It is the intersection number of the strict transform of the curve with the strict transform of the exceptional divisor corresponding to the point. Hence, the inversion of the proximity matrix gives the sought intersection numbers.

## 6 Conclusion

We reviewed several concepts of a multiplicity of a point using blowup, graphs, homology and other modern tools of algebraic geometry. As an example, we used a curve which has a cusp of higher order as a singularity to demonstrate the concepts.

## References

- [1] David Eisenbud and Joe Harris. *3264 and All That Intersections: A Second Course To Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 2016.
- [2] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [3] G.-M. Greuel, C. Lossen, and E. Shustin. *Introduction to singularities and deformations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [4] W. Vogel. *Lectures on results on Bezout's theorem*, volume 74 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1984. Notes by D. P. Patil.
- [5] C. T. C. Wall. *Singular points of plane curves*, volume 63 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

# Kružnica ako racionálna krivka do stupňa štyri

## Circle as a rational curve of lower degree than five

Alexej Kolcun

*Dep. of appl.math and computer science, Institute of Geonics CAS, Studentská 1768, Ostrava, CZ  
 Dep. of Informatics and Computers, Fac. of Science, Univ. of Ostrava, 30. dubna 22, Ostrava CZ  
 email: Alexej.Kolcun@ugn.cas.cz*

**Abstract.** In the paper the exact – rational polynomial representation of circle is analysed. For this reason we use rational Bézier curves. Analysis is restricted to the case of a polynomial curve of degree two, three and four. This article follows the paper [1].

**Keywords:** Parametric representation of the curve, polynomial curve, rational curve, Bézier curve, circle

**Kľúčové slová:** Parametrická reprezentácia krivky, polynomická krivka, racionálna krivka, Bézierova krivka, kružnica

### 1 Motívacia

Polynomiálne parametrické modelovanie kriviek je veľmi rozšíreným nástrojom pre generovanie rôznych tvarov. Trieda vyjadriteľných kriviek je dostatočne široká, no ako je všeobecne známe, i tak jednoduchú krivku ako je kružnica, polynomicky parametrizovať nemožno. Práve tento fakt je uvádzaný ako motivácia pre zavedenie kriviek racionálnych. V [1] je ukázaná miera aproximácie kružnice polynomickými krivkami druhého, tretieho a štvrtého stupňa. Pritom v každom z týchto prípadov approximujeme kružnicu najmenším možným počtom Bézierovych kriviek, tj. v kvadratickom prípade tromi, v kubickom prípade dvomi a v prípade krivky štvrtého stupňa jednou Bézierovou krivkou. V literatúre, napr. [2], [4] je spravidla demonštrovaný príklad, kvadratickej racionálnej reprezentácie kružnice,

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (1)$$

Je ľahké sa presvedčiť, že pre  $n=2$ , riadiace body  $P_0 = (0,1)$ ,  $P_1 = (1,1)$ ,  $P_2 = (1,0)$ , racionálne váhy  $q_0 = 2$ ,  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 1$  a kvadratické Bernsteinove polynómy, štandardný tvar racionálnej parametrickej krivky

$$x(t) = \frac{\sum_{i=0}^n f_i(t) q_i x_i}{\sum_{i=0}^n f_i(t) q_i}, \quad y(t) = \frac{\sum_{i=0}^n f_i(t) q_i y_i}{\sum_{i=0}^n f_i(t) q_i} \quad (2)$$

nadobudne formu (1). Spôsob nájdenia týchto racionálnych váh však spravidla uvádzaný nie je.

V príspevku preto práve na kružnici ukážeme, ako racionálne váhy nájsť pre trojicu kvadratických racionálnych Bézierových krivek a pre dvojicu kubických racionálnych Bézierových kriviek. Pokúsime sa taktiež vyjadriť kružnicu ako jednu racionálnu Bézierovu krivku štvrtého stupňa.

## 2 Kružnica ako racionálna polynomická krivka

Zápis jednotkovej kružnice

$$x^2(t) + y^2(t) = 1 \quad (3)$$

pre racionálne vyjadrenie (2) dáva tvar

$$\xi^2(t) + \eta^2(t) = \rho^2(t) \quad (4)$$

kde

$$\xi(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) q_i x_i, \quad \eta(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) q_i y_i, \quad \rho(t) = \sum_{i=0}^n f_i(t) q_i . \quad (5)$$

Maticový zápis (4) je v tvare

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^n \end{pmatrix} \mathbf{M} (q_0 x_0 \dots q_n x_n)^T \\ \eta(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^n \end{pmatrix} \mathbf{M} (q_0 y_0 \dots q_n y_n)^T, \\ \rho(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^n \end{pmatrix} \mathbf{M} (q_0 \dots q_n)^T = \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{I} \end{aligned}$$

Pravú stranu v (4) tak možno zapísat'

$$\rho^2(t) = (\mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{I})(\mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{I})^T = \mathbf{T} (\mathbf{M} \mathbf{I} \mathbf{I}^T \mathbf{M}^T) \mathbf{I}^T . \quad (6)$$

Ďalší postup je založený na detailnej analýze matice

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \mathbf{I} \mathbf{I}^T \mathbf{M}^T . \quad (7)$$

## 3 Kvadratický prípad v Bézierovej forme

Pre kvadratické Bézierove krivky máme

$$\mathbf{M}\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 2(q_1 - q_0) \\ q_0 - 2q_1 + q_2 \end{pmatrix},$$

a tak (7) má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} q_0^2 & 2q_0(q_1 - q_0) & q_0(q_0 - 2q_1 + q_2) \\ 2q_0(q_1 - q_0) & 4(q_1 - q_0)^2 & 2(q_1 - q_0) \\ q_0(q_0 - 2q_1 + q_2) & 2(q_1 - q_0)(q_0 - 2q_1 + q_2) & (q_0 - 2q_1 + q_2)^2 \end{pmatrix}.$$

Kvadratickú formu (6) prevedieme na formu skalárneho súčinu

$$\mathbf{TAT}^T = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 \end{pmatrix} \mathbf{B} \quad (8)$$

kde

$$b_0 = a_{00}, \quad b_1 = a_{01} + a_{10}, \quad b_2 = a_{02} + a_{11} + a_{20}, \quad b_3 = a_{12} + a_{21}, \quad b_4 = a_{22}.$$

Vzhľadom na symetriu matice  $\mathbf{A}$  dostávame

$$\begin{aligned} b_0 &= q_0^2, \\ b_1 &= -4q_0^2 + 4q_0 q_1, \\ b_2 &= 6q_0^2 + 4q_1^2 - 12q_0 q_1 + 2q_0 q_2, \\ b_3 &= -4q_0^2 - 8q_1^2 + 12q_0 q_1 - 4q_0 q_2 + 4q_1 q_2, \\ b_4 &= q_0^2 + 4q_1^2 + q_2^2 - 4q_0 q_1 + 2q_0 q_2 - 4q_1 q_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Ked'že (5) vyjadruje pravú stranu vo vzťahu (4), adekvátne mocniny parametru  $t$  v (4) sú nasledujúce (demonštrujeme pre jeho nultý a prvý stupeň):

$$\begin{aligned} q_0^2(x_0^2 + y_0^2) &= q_0^2, \\ -4q_0^2(x_0^2 + y_0^2) + 4q_0 q_1(x_0 x_1 + y_0 y_1) &= -4q_0^2 + 4q_0 q_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Obecne vzato, štruktúra týchto vzťahov má tvar

$$\cdots + aq_i q_j (x_i x_j + y_i y_j) + \cdots = +aq_i q_j + \cdots$$

resp.

$$\cdots + aq_i q_j (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j) + \cdots = +aq_i q_j + \cdots$$

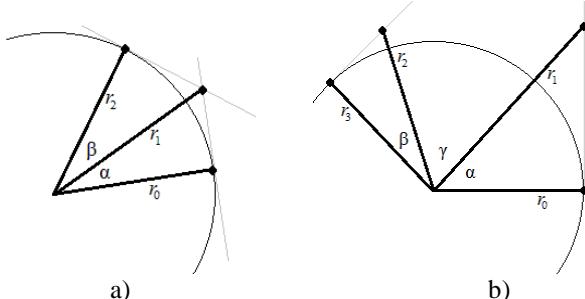
Ekvivalentnými úpravami tak z (9) – (10) dostávame

$$\begin{aligned} q_0^2(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0) &= q_0^2, \\ q_0 q_1(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1) &= q_0 q_1, \\ q_0 q_2(\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2) + 2q_1^2(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1) &= q_0 q_2 + 2q_1^2, \\ q_1 q_2(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) &= q_1 q_2, \\ q_2^2(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2) &= q_2^2 \end{aligned} \quad (11)$$

V (11) vidíme, že v prvý a piaty vzťah vyjadrujú, že koncové body určené vektorami  $\vec{r}_0, \vec{r}_2$  ležia na jednotkovej kružnici, tj.  $r_0 = |\vec{r}_0| = r_2 = |\vec{r}_2| = 1$ , druhý a štvrtý vzťah dávajú vzájomnú polohu dvojíc riadiacich bodov:

$$\eta_1 \cos \alpha = \eta_1 \cos \beta = 1, \quad (12)$$

Kde  $\alpha, \beta$  sú uhly medzi  $\vec{r}_0, \vec{r}_1$  a  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ .



Obr. 1: Riadiace body, pre racionálnu Bézierovu krviku, určené radiusvektorami. a) kvadratický prípad, b) kubický prípad.

Vzhľadom na to, že z (12) vyplýva rovnosť  $\alpha=\beta$ , vzťah medzi racionálnymi vähami  $q_0, q_1, q_2$  dostávame z tretej rovnice,

$$q_0 q_2 (r_0 r_2 \cos(2\alpha) - 1) + 2q_1^2 (r_1^2 - 1) = 0,$$

Elementárnymi úpravami získame výsledný vzťah

$$q_1 = \sqrt{q_0 q_2} \cos \alpha. \quad (13)$$

## 4 Kubický prípad v Bézierovej forme

Zopakovaním toho istého postupu pre

$$\mathbf{M}\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ 3(q_1 - q_0) \\ 3(q_0 - 2q_1 + q_2) \\ -q_0 + 3q_1 - 3q_2 + q_3 \end{pmatrix}$$

dostaneme vektor  $\mathbf{B}$  podobne ako v (9)

$$b_0 = q_0^2 \quad b_4 = 3q_2^2 + 2q_1 q_3,$$

$$b_1 = q_0 q_1, \quad b_5 = q_2 q_3,$$

$$b_2 = 3q_1^2 + 2q_0 q_2, \quad b_6 = q_3^2$$

$$b_3 = 9q_1 q_2 + q_0 q_3,$$

Ekvivalentnými úpravami za predpokladu, že  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , dôjdeme k výsledným vzťahom

$$\frac{q_0 q_2}{q_1^2} = \frac{3}{4} \tan^2 \alpha, \quad \frac{q_1 q_3}{q_2^2} = \frac{3}{4} \tan^2 \beta, \quad \frac{q_0 q_3}{q_1 q_2} = 9. \quad (14)$$

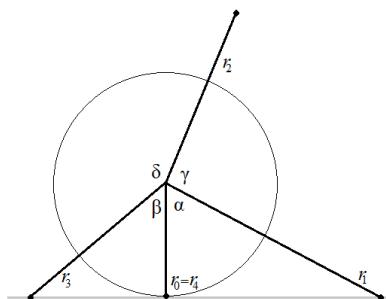
Pri vol'be  $q_0 = q_3 = 1$  dostávame explicitné vyjadrenie pre  $q_1, q_2$ :

$$q_1 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{2 \cot \alpha}^2, \quad q_2 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{2 \cot \beta}^2, \quad \tan \alpha \tan \beta = 4. \quad (15)$$

Je užitočné si uvedomiť, že uhly  $\alpha, \beta$  nemožno voliť vzájomne nezávisle ani za predpokladu  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

## 5 Kružnica ako racionálna krivka štvrtého stupňa

V [1] sme ukázali, že hladkú uzavretú krivku môžeme vyjadriť ako polynomickú krivku štvrtého stupňa na ohraničenej parametrizácii  $0 \leq t \leq 1$ . Naviac, vhodným výberom riadiacich bodov dostávame dostatočne dobrú approximáciu kružnice (maximálna odchylka je menšia ako 4% polomeru). Pre pokus o presné vyjadrenie racionálnej krivky zopakujeme postup z predošlých kapitol.



**Obr. 2: Riadiace body, pre racionálnu Bézierovu krivku, určené radiusvektorami pre vyjadrenie kružnice ako uzavretej hladkej krivky.**

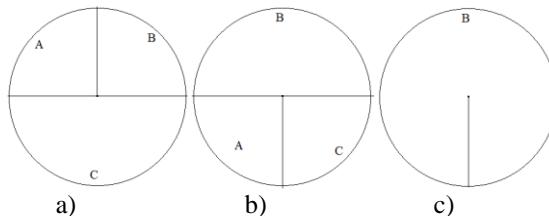
Kedže chceme celú kružnicu vyjadriť ako jednu Bézierovu krivku, musí obecne platiť  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ , viď Obr.2. Vzhľadom na stredovú symetriu kružnice je prirodzené predpokladať symetrické hodnoty riadiacich parametrov:  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$ . Analógom sústavy (11) je v tomto prípade sústava (pre jednoduchosť uvažujeme symetrický prípad racionálnych váh  $q_0 = q_4 = 1$ )

$$\begin{aligned}
 r_0 &= r_4 = 1, \\
 r_1 &= \frac{1}{\cos \alpha}, \quad r_3 = \frac{1}{\cos \beta}, \\
 \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} r_2 &= 1, \quad \frac{\cos \delta}{\cos \beta} r_2 = 1, \\
 3r[2\cos(\alpha + \gamma) - 1]q_2 + (2q_1 \tan \alpha)^2 &= 0, \\
 3r[2\cos(\beta + \delta) - 1]q_2 + (2q_3 \tan \beta)^2 &= 0, \\
 8\left[\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} - 1\right]q_1 q_3 + 9[r_2^2 - 1]q_2^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Máme tak dva parametre  $r_2 = r, \alpha$ . Elementárnymi úpravami (16) však dostávame

$$r_2 = r = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\pi - \alpha)} = -1. \tag{17}$$

Dôvod, prečo kružnicu nemožno vyjadriť ako jednu racionálnu krivku štvrtého stupňa je nasledujúci.



**Obr. 3: Schématické znázornenie parametrizácie pre rôzne stupne racionálnej krivky. a) kvadrika, b) kubika, c) kvartika.**

Pre kvadratický prípad sme v úvode zmienili, že vzťah (1) reprezentuje celú kružnicu, a zároveň štvrtkružnica medzi bodami  $P_0$  a  $P_2$  sa dá vyjadriť ako Bézierova kvadrika. Na Obr. 3a) je oblúk A reprezentovaný parametrizáciou  $-\infty < t < 0$ , oblúk B parametrizáciou  $0 \leq t \leq 1$  a oblúk C parametrizáciou  $1 < t < \infty$ .

Podobne pre kubický prípad racionálne vyjadrenie v celom prípustnom intervale  $-\infty < t < \infty$  generuje celú križnicu, kým Bézierova kubika generuje len polkružnicu B z Obr. 3b) s koncovými bodami  $P_0 = (-1, 0)$ ,  $P_2 = (0, 1)$ .

V prípade racionálnej krivky štvrtého stupňa naša konštrukcia sa snaží vyjadriť celú kružnicu len pre obmedzený definičný obor parametra  $0 \leq t \leq 1$ , kým racionálny prístup predpokladá  $-\infty < t < \infty$ , tj. segmenty A a C zdegenerujú do jediného bodu, čo vedie k sporu (17).

## 6 Záver

V príspevku sme odvodili všeobecné racionálne váhy racionálnej Bézierovej reprezentácie kružnice pre kvadratický a kubický prípad. Ukázali sme taktiež, že nie je možné reprezentovať celú kružnicu ako jednu racionálnu Bézierovu krivku štvrtého stupňa.

## Poděkovanie

Tento článok vznikol za podpory projektu RVO 68145535.

## Literatúra

- [1] A. Kolcun: *Bézierovská approximácia kružnice*. In: Sborník příspěvků 32. konference o geometrii a grafice (Lávička, M., Bastl, B. eds.), Vydatelský servis Plzeň 2012, pp.127-134.
- [2] I. Linkeová: *NURBS křivky*. Vydavatelství ČVUT, 2008.
- [3] R. R. Patterson: *Projective Transformations of the Parameter of a Bernstein-Bézier Curve*. Journal ACM Transactions on Graphics, vol. 4(4), 1985. Pp. 276-290.
- [4] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*. Springer 1997.



# Zobrazení koule v kosoúhlém promítání – co není napsáno v učebnicích deskriptivní geometrie

## Sphere in oblique projection – what is not written in any textbook of descriptive geometry

Alice Králová

*Ústav matematiky LDF Mendelovy univerzity v Brně*  
*Zemědělská 3, Brno, 613 00*  
*alice.kralova@mendelu.cz*

**Abstract.** Alternative method of finding points of contact between projection of a sphere and projection of circles lying in planes parallel to coordinate planes. Two different methods of their construction, one of them based on analysing the situation in space and the second using properties of projective geometry.

**Keywords:** Spherical surface, oblique projection, ellipse, point of contact, projective geometry.

**Klíčová slova:** Kulová plocha, kosoúhlé promítání, elipsa, bod dotyku, projektivní geometrie.

### 1 Čím je tento článek zajímavý . . .

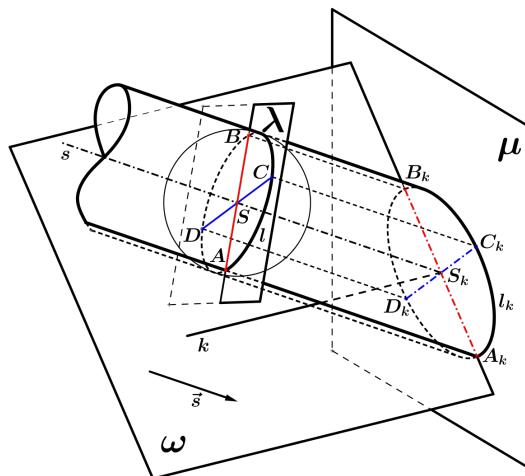
Tento článek je určen zejména pro učitele a studenty deskriptivní geometrie. Popisují v něm alternativní způsob konstrukce bodů dotyku mezi obrysem kulové plochy a průměty kružnic ležících v rovinách rovnoběžných se souřadnicovými rovinami při zobrazení koule v kosoúhlém promítání. Způsob sestrojení bodů dotyku, který zde předkládám, není uveden v žádné z běžně dostupných učebnic deskriptivní geometrie. Při hledání výše zmíněných bodů dotyku vycházím nejen z rozboru prostorové situace, ale též nalézám souvislost s projektivní geometrií a pro určení bodů dotyku využívám jejích vlastností.

### 2 Zobrazení koule v kosoúhlém promítání

**Kosoúhlé promítání** zadejme tak, že průmětnou je rovina  $\mu = (y, z)$  a směr  $\vec{s}$  promítání nechť je takový, že se osa  $x$  směrem  $\vec{s}$  zobrazí do „kosoúhlé osy“  $x_k$ , přičemž  $\measuredangle(x_k, y) = 135^\circ$  a poměr zkrácení  $q = \frac{1}{2}$ . Kosoúhlé promítání je současně typem šikmé axonometrie.

Průmětem kulové plochy do roviny  $\mu$  ve směru  $\vec{s}$  je *elipsa* (obr. 1). Můžeme si představit, že kulové ploše opíšeme rotační válcovou plochu, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné se směrem  $\vec{s}$ , kterou poté průmět na  $\mu$  protne v elipse. (Což plyne z toho, že  $\vec{s} \not\perp \mu \wedge \vec{s} \not\parallel \mu$ .)

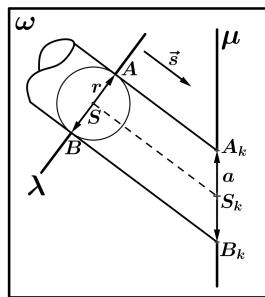
Tato elipsa je průmětem hlavní kružnice  $l$  kulové plochy, která leží v rovině  $\lambda$  procházející středem  $S$  kulové plochy kolmo ke směru promítání  $\vec{s}$ .



Obrázek 1: Elipsa jako průmět koule v kosouhlém promítání

Budeme uvažovat takové dva kolmé průměry hlavní kružnice  $l$ , které se zobrazí do hlavní a vedlejší osy obrysové elipsy  $l_k$ .

První průměr, který označíme  $AB$ , musí ležet v rovině  $\omega$ , pro níž platí, že  $S \in \omega \perp \mu$ , přičemž je současně  $\omega \parallel \vec{s}$ . V průmětně  $\mu$  je pak  $A_k B_k$  hlavní osou obrysové elipsy  $l_k$ .



Obrázek 2: Znázornění situace v rovině  $\omega$

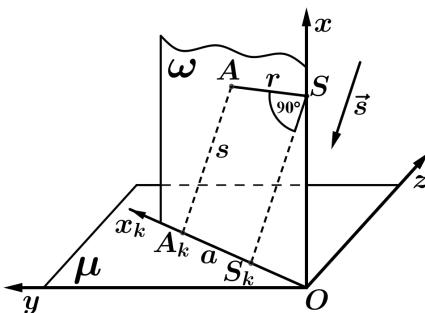
Druhý průměr  $CD$  hlavní kružnice  $l$  je kolmý k rovině  $\omega$ , což ale znamená, že je zároveň rovnoběžný s průmětnou  $\mu$ , do níž se pak promítá

ve skutečné velikosti. Je tedy  $CD \parallel C_k D_k$ ,  $|C_k D_k| = 2r$ , kde  $r$  je zadaný poloměr kulové plochy. Z výše uvedených prostorových vztahů je také vidět, že je  $A_k B_k \perp C_k D_k$ .

Do roviny  $\omega$  se průmětna  $\mu$  i rovina  $\lambda$  kolmo promítají do přímek, neboť je  $\mu \perp \omega$  a také je  $\lambda \perp \vec{s} \wedge \omega \parallel \vec{s} \Rightarrow \lambda \perp \omega$  (obr. 2).

V rovině  $\omega$  je průmět roviny  $\lambda$  totožný s přímkou  $AB$ , průmět roviny  $\mu$  splývá s přímkou  $A_k B_k$ . Poloměr  $r = |SA|$  kulové plochy se promítáním ve směru  $\vec{s}$  zvětší na délku  $a = |S_k A_k|$  hlavní poloosy obrysové elipsy  $l_k$ .

Oba průměry  $CD$  kružnice  $l$  a  $C_k D_k$  elipsy  $l_k$  jsou kolmé k rovině  $\omega$ , takže jejich promítnutím do roviny  $\omega$  splynou body  $S = C = D$ , resp.  $S_k = C_k = D_k$ .



Obrázek 3: Poloha roviny  $\omega$

Protože je rovina  $\omega$  kolmá k průmětně  $\mu$ , můžeme ji posunout tak, aby procházela prostorovou osou  $x$ , která je také kolmá k  $\mu$ . Osa  $x$  se směrem  $\vec{s}$  promítá do průmětny  $\mu$  do „kosoúhlé osy“  $x_k$ , a protože je  $\omega \parallel \vec{s}$ , leží osa  $x_k$  v rovině  $\omega$  a je současně kolmým průmětem celé roviny  $\omega$  do  $\mu$  (obr. 3).

Délku  $a$  hlavní poloosy obrysové elipsy  $l_k$  najdeme tak, že rovinu  $\omega$  sklopíme do průmětny  $\mu$ .

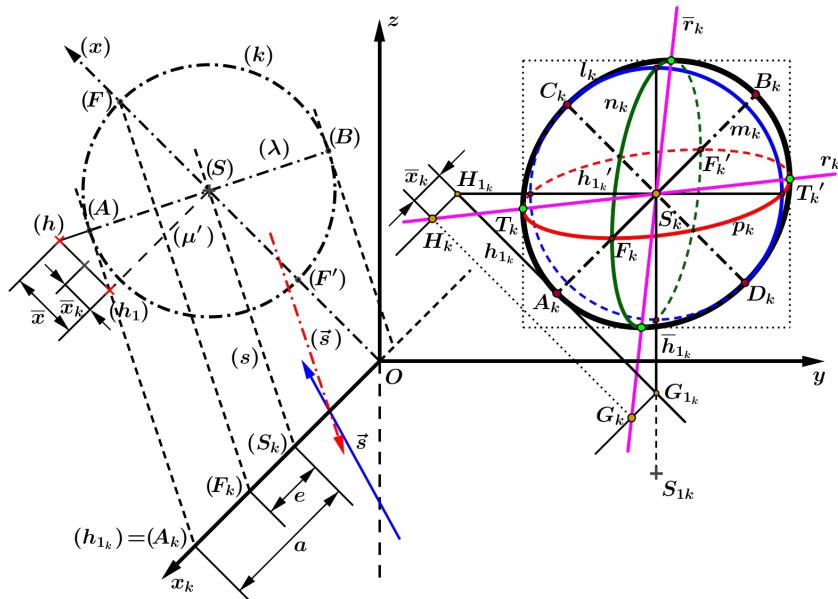
## 2.1 Konstrukce koule s hlavními kružnicemi v rovinách rovnoběžných s $\pi, \nu, \mu$

Jsou dány souřadnice středu  $S$  koule a její poloměr  $r$ . V kosoúhlém promítání tedy známe polohu bodu  $S_k$  (průmětu středu  $S$ ) a bodu  $S_{1k}$  (průmětu půdorysu  $S_1$  středu  $S$ ).

Kosoúhlým průmětem koule je elipsa  $l_k$ , jejíž hlavní osa  $A_k B_k$  leží na rovnoběžce s osou  $x_k$  procházející středem  $S_k$ .

Abychom našli délku hlavní poloosy  $a$ , rovinu  $\omega$ , procházející prostorovou osou  $x$ , a tudíž kolmou k rovině  $\mu = (y, z)$ , do průmětny  $\mu$  sklopíme. Protože kosoúhlá osa  $x_k$  je kolmým průmětem roviny  $\omega$  do  $\mu$ , prostorová osa  $x$  se sklopí tak, že je  $(x) \perp x_k$ .

Ve sklopené rovině  $\omega$  určíme sklopený směr promítání ( $\vec{s}$ ). Zvolíme-li pomocný bod ( $X$ ) na kladné poloosu ( $x$ ), pak jeho průmětem bude bod  $X_k$  umístěný na kladné poloosu  $x_k$  tak, že  $|OX_k| = \frac{1}{2} \cdot |O(X)|$ , neboť koeficient zkrácení má hodnotu  $q = \frac{1}{2}$ . Bod  $O$  je přitom počátek soustavy souřadnic (obr. 4).



Obrázek 4: Konstrukce koule v kosoúhlém promítání

Dále ve sklopené rovině  $\omega$  sestrojíme kružnici ( $k$ ) s poloměrem  $r$ , jejíž střed ( $S$ ) umístíme na osu ( $x$ ) – na přesné poloze kružnice ( $k$ ) v podstatě nezáleží.

Vyznačíme-li poloměr ( $S)(A$ ) kružnice ( $k$ ), jenž je kolmý ke směru promítání ( $\vec{s}$ ), bude jeho průmětem na osu  $x_k$  ve směru ( $\vec{s}$ ) úsečka ( $S_k)(A_k$ ), jejíž velikost je rovna hledané délce hlavní poloosy  $a$ .

Tím jsme našli polohu hlavních vrcholů  $A_k$  a  $B_k$  obrysové elipsy  $l_k$ .

Vedlejší osa  $C_kD_k$  elipsy  $l_k$  prochází středem  $S_k$  kolmo k ose  $x_k$ , přičemž je  $|C_kD_k| = 2r$ .

Jak jsme již uvedli výše, je  $CD$  průměrem obrysové kružnice  $l$  kulové plochy, který je kolmý k rovině  $\omega$ , neboli rovnoběžný s průmětnou  $\mu$ . To jednak znamená, že se promítáním ve směru  $\vec{s}$  do průmětny  $\mu$  jeho velikost nezmění, ale také že je průmět  $C_kD_k \parallel CD$ , neboli že je  $C_kD_k \perp \omega$ , z čehož plyne, že je též  $C_kD_k \perp x_k$ .

Pro úplnost dodejme, že v učebnicích deskriptivní geometrie je konstrukce obrysové elipsy  $l_k$  kulové plochy provedena na základě *Quetelet-Dandelinovy věty*. Ta říká, že se při kosoúhlém promítání zobrazí do ohnišek obrysové elipsy krajní body toho průměru kulové plochy, který je kolmý k průmětně.

Ve sklopené rovině  $\omega$  je tímto průměrem průměr  $(F)(F')$  kružnice  $(k)$  na ose  $(x)$ . Pak se tedy poloměr  $(S)(F)$  o délce  $r$  promítne směrem  $(\vec{s})$  na osu  $x_k$  do úsečky  $(S_k)(F_k)$ , jejíž velikost je rovna excentricitě  $e$  obrysové elipsy  $l_k$ . Protože koeficient zkrácení má hodnotu  $q = \frac{1}{2}$ , je  $e = \frac{r}{2}$ . Obrysová elipsa  $l_k$  je pak sestrojena na základě znalosti polohy vedlejších vrcholů  $C_k$  a  $D_k$  a ohnišek  $F_k$  a  $F'_k$ .

Pro větší názornost lze sestrojit obrazy hlavních kružnic  $p$ ,  $n$  a  $m$  kulové plochy, které leží v rovinách rovnoběžných se souřadnicovými rovinami  $\pi = (x, y)$ ,  $\nu = (x, z)$  a  $\mu = (y, z)$ .

Hlavní kružnice  $m$  kulové plochy v rovině  $\mu'$  ( $S \in \mu' \parallel \mu$ ) se zobrazí do shodné kružnice  $m_k$  se středem v bodě  $S_k$ . V tomto případě je vektorem  $\vec{s}$  vlastně realizováno pouze posunutí kružnice  $m$  z roviny  $\mu'$  do průmětny  $\mu$ .

Průměty kružnic  $p$  a  $n$  v rovinách  $\pi'$  ( $S \in \pi' \parallel \pi$ ) a  $\nu'$  ( $S \in \nu' \parallel \nu$ ) jsou elipsy  $p_k$  a  $n_k$ . Sestrojíme je pomocí sdružených průměrů.

Společným průměrem elips  $p_k$  a  $n_k$  je úsečka  $F_k F'_k$  na rovnoběžce s osou  $x_k$  středem  $S_k$ . Ve sklopené rovině  $\omega$  jsme totiž viděli, že se délka  $r$  na ose  $(x)$  promítá do velikosti excentricity  $e$  na ose  $x_k$ .

Druhý sdružený průměr elipsy  $p_k$  o velikosti  $2r$  leží na rovnoběžce s osou  $y$  procházející středem  $S_k$ . Analogicky druhý sdružený průměr elipsy  $n_k$  rovněž velikosti  $2r$  leží na rovnoběžce s osou  $z$  jdoucí středem  $S_k$ .

## 2.2 Konstrukce bodů dotyku mezi elipsou $l_k$ a elipsami $p_k, n_k, m_k$

### – 1. způsob řešení

Nejprve se podívejme na společné body dotyku obrysové elipsy  $l_k$  s kružnicí  $m_k$ , jejíž průměr je  $2r$ . Těmito body dotyku jsou vedlejší vrcholy  $C_k$  a  $D_k$  elipsy  $l_k$ , neboť vedlejší osa  $C_k D_k$  velikosti  $2r$  elipsy  $l_k$  je nejkratší ze všech jejích průměrů. Všechny ostatní body kružnice  $m_k$  tedy musí ležet uvnitř elipsy  $l_k$ .

Společné body dotyku elipsy  $l_k$  a  $p_k$  budou ležet na přímce  $r_k$ , do níž se promítá průsečnice  $r$  rovin  $\lambda$  a  $\pi'$ . Průsečnici  $r$  přitom sestrojíme tak, že protneme dvě přímky roviny  $\lambda$  se dvěma přímkami roviny  $\pi'$ ; získanými průsečíky pak bude přímka  $r$  procházet.

Abychom mohli tento postup zrealizovat, zavedeme **kótované promítání** s průmětnou  $\mu'$ ,  $S \in \mu' \parallel \mu$ . Situaci v rovině  $\mu'$  následně kosoúhle promítáme směrem  $\vec{s}$  do průmětny  $\mu$ .

Pro konstrukci průsečnice  $r$  nejprve najdeme „stopy“ rovin  $\lambda$  a  $\pi'$  v průmětně  $\mu'$  a dále pak použijeme jednu hlavní přímku v každé z těchto rovin, přičemž si jejich společnou kótou vhodně zvolíme.

Začněme rovinou  $\pi'$ . Její stopou v průmětně  $\mu'$  je rovnoběžka s osou  $y$  procházející středem  $S$ , neboť směr osy  $y$  je společný oběma rovinám  $\pi'$  i  $\mu'$ . Protože je dále rovina  $\pi' \perp \mu'$ , splývá kolmý průmět (nazveme ho „půdorysem“) každé hlavní přímky roviny  $\pi'$  do průmětny  $\mu'$  s její stopou.

Následným kosoúhlým promítáním do průmětny  $\mu$  se stopa roviny  $\pi'$  zobrazí do rovnoběžky s osou  $y$  procházející středem  $S_k$ . Ta je však i kosoúhlým průmětem  $h'_{1_k}$  půdorysu  $h'_1$  libovolné hlavní přímky  $h'$  roviny  $\pi'$ .

Nyní se podívejme na rovinu  $\lambda$ . Průměr  $CD$  obrysové kružnice  $l$  v rovině  $\lambda$  je rovnoběžný s rovinou  $\mu$ , což znamená, že stopa roviny  $\lambda$  v průmětně  $\mu'$  splývá s přímou  $CD$ .

Dále si zvolíme hlavní přímku  $h$  roviny  $\lambda$  tak, aby kosoúhlý průmět  $h_{1_k}$  jejího půdorysu  $h_1 \subset \mu'$  procházel bodem  $A_k$ . V průmětně  $\mu$  vidíme, že  $A_k \in h_{1_k} \parallel C_k D_k$ , což mimochodem znamená, že je přímka  $h_{1_k}$  nutně tečnou obrysové elipsy  $l_k$ . Z polohy přímky  $h_{1_k}$  můžeme odvodit kótu hlavní přímky  $h$ .

Určíme ji ve sklopené rovině  $\omega$ . Předem poznamenejme, že vzhledem ke kolmosti níže uvedených přímek a rovin vůči rovině  $\omega$  se budou ve sklopené rovině  $\omega$  tyto přímky jevit jako body a roviny jako přímky. Nejprve řekněme, že ve sklopené rovině  $\omega$  vidíme průmětnu  $\mu'$  jako rovnoběžku s osou  $x_k$ , která prochází bodem  $(S)$ . Přímka  $(h_{1_k})$  splývá s bodem  $(A_k) \in x_k$ . Promítací paprsek určený vektorem  $(\vec{s}')$ , který tímto bodem vedeme, vytíná na přímce  $(\mu')$  bod  $(h_1)$ , který odpovídá půdorysu  $h_1$  hlavní přímky  $h$ . Protože ve sklopené rovině  $\omega$  je rovina  $\lambda$  totožná s přímkou  $(A)(B)$ , bude bod  $(h)$ , který odpovídá hlavní přímce  $h$ , ležet na přímce  $(A)(B)$  tak, aby byla úsečka určená body  $(h_1)$  a  $(h)$  kolmá vůči přímce  $(\mu')$ . Přitom její délka udává hledanou kótou hlavní přímky  $h$ .

Kótou hlavní přímky  $h$ , tj. její výška nad průmětnou  $\mu'$ , která odpovídá délce  $\bar{x}$  na prostorové ose  $x$ , se kosoúhlým promítáním zkrátí na hodnotu  $\bar{x}_k = q \cdot \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{x}$ .

V průmětně  $\mu'$  nyní známe polohu bodu  $H_{1_k} \in h_{1_k} \cap h'_{1_k}$ , který je kosoúhlým průmětem „půdorysu“  $H_1$  bodu  $H$ , což je průsečík použitých hlavních přímek  $h$  a  $h'$  rovin  $\lambda$  a  $\pi'$ .

Abychom mohli sestrojit kosoúhlý průmět  $r_k$  průsečnice  $r$  rovin  $\lambda$  a  $\pi'$ , potřebujeme určit polohu kosoúhlého průmětu  $H_k$  bodu  $H \in h \cap h'$ . To je ovšem snadné, neboť víme, že úsečka  $H_1 H$ , která je rovnoběžná s prostorovou osou  $x$  a má délku  $\bar{x}$ , se musí kosoúhle ve směru  $\vec{s}$  zobrazit do průmětny  $\mu$  do úsečky  $H_{1_k} H_k$  rovnoběžné s osou  $x_k$  o velikosti  $\bar{x}_k$ .

Bod  $H_k$  tedy najdeme tak, že průsečíkem  $H_{1_k} \in h_{1_k} \cap h'_{1_k}$  vedeme rovnoběžku s osou  $x_k$ , na níž naneseme délku  $\bar{x}_k$ , přičemž samozřejmě musíme respektovat, zda je kótou bodu  $H$  kladná či záporná.

Druhým bodem na průsečnici  $r_k$  je střed  $S_k$  coby kosoúhlý průmět středu  $S$ , v němž se protínají stopy rovin  $\lambda$  a  $\pi'$ . Jejich kosoúhlými

průměty do  $\mu$  jsou přímky  $C_k D_k$  a  $h'_{1_k}$ , kde  $S_k \in h'_{1_k} \parallel y$ .

Pak je tedy  $r_k = \leftrightarrow S_k H_k$ , přímka  $r_k$  protíná elipsy  $l_k$  a  $p_k$  v jejich společných bodech dotyku, což jsou zároveň pro elipsu  $p_k$  její body přechodu viditelnosti.

Body dotyku obrysové elipsy  $l_k$  s elipsou  $n_k$  se sestrojí zcela analogicky. Nebudeme proto znovu provádět podrobný rozbor prostorové situace, pouze rychle zopakujeme jednotlivé konstrukční kroky.

Společné body hlavní kružnice  $n$  a obrysové kružnice  $l$  kulové plochy leží na přímce  $\bar{r}$ , v níž se protínají roviny  $\nu'$  a  $\lambda$ .

Protože je rovina  $\nu' \perp \mu'$ , splývá její stopa i kolmý průmět  $\bar{h}_1$  libo volné hlavní přímky  $\bar{h}$  do průmětny  $\mu'$  s rovnoběžkou s osou  $z$  procházející středem  $S$  koule.

Stopou roviny  $\lambda$  v průmětně  $\mu'$  je přímka  $CD$  a dále použijeme už dříve sestrojenou hlavní přímku  $h \subset \lambda$ , jejíž kosoúhlý průmět  $h_{1_k}$  půdorysu  $h_1 \subset \mu'$  prochází bodem  $A_k$  a jejíž kótou známe.

Kosoúhlé průměty  $h_{1_k}$  a  $\bar{h}_{1_k}$  půdorysů obou hlavních přímkových rovin  $\lambda$  a  $\nu'$  se protínají v bodě  $G_{1_k}$ , z něhož odvodíme kosoúhlý průmět  $G_k$  prostorového bodu  $G \in h \cap \bar{h}$ . Je tedy  $G_{1_k} G_k \parallel x_k, |G_{1_k} G_k| = \bar{x}_k$ .

Potom přímka  $\bar{r}_k = \leftrightarrow S_k G_k$  protíná obě elipsy  $l_k$  a  $n_k$  ve společných bodech dotyku, což jsou zároveň pro elipsu  $n_k$  její body přechodu viditelnosti.

### 2.3 Konstrukce bodů dotyku mezi elipsou $l_k$ a elipsami $p_k$ a $n_k$ – 2. způsob řešení

Druhá metoda, pomocí níž lze nalézt body dotyku mezi obrysovou elipsou  $l_k$  a elipsou  $p_k$ , resp. elipsou  $n_k$ , je založena na konstrukci tečné roviny  $\tau$  kulové plochy ve společném bodě  $T$  obrysové kružnice  $l$  a hlavní kružnice  $p$ , případně  $n$ .

Ačkoliv lze tuto konstrukci nalézt v [3, s. 418–419], její výklad není dle mého názoru příliš srozumitelný. V učebnici [4, s. 347–348] je způsob sestrojení uvažovaných bodů dotyku uveden bez důkazu. Konečně v [5, s. 257] není konstrukce bodů dotyku popsána vůbec. Proto považuji za přínosné provést nyní pečlivý rozbor prostorové situace a konstrukci bodů dotyku názorně vysvětlit.

Tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  kulové plochy je kolmá na její poloměr  $ST$ . Protože požadujeme, aby bod  $T$  byl bodem obrysové kružnice  $l$ , musí poloměr  $ST$  ležet v rovině  $\lambda$ , což ale znamená, že roviny  $\tau$  a  $\lambda$  jsou vzájemně kolmé (obr. 5).

Protože je současně rovina  $\lambda$  kolmá ke směru promítání  $\vec{s}$ , musí být rovina  $\tau$  se směrem promítání  $\vec{s}$  rovnoběžná.

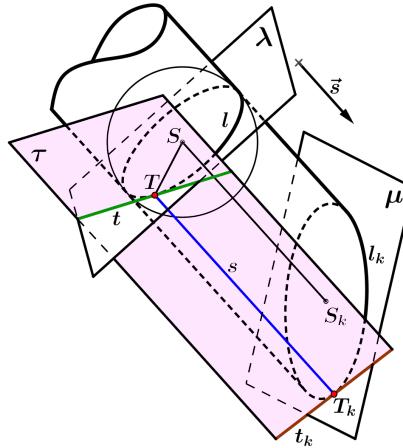
$$ST \perp \tau, ST \subset \lambda \Rightarrow \lambda \perp \tau \quad \lambda \perp \vec{s}, \tau \perp \lambda \Rightarrow \tau \parallel \vec{s}$$

Jelikož je tedy tečná rovina  $\tau$  rovnoběžná se směrem promítání  $\vec{s}$ , jedná se o promítací rovinu, jejímž kosoúhlým průmětem do roviny  $\mu$  je přímka  $t_k$ . Platí, že  $t_k$  je tečnou elipsy  $l_k$ , což dokážeme sporem.

Nechť je přímka  $t_k$  sečnou obrysové elipsy  $l_k$ . Přímka  $t_k$  má tedy s elipsou  $l_k$  kromě bodu  $T_k$  společný ještě další bod  $T'_k$ ,  $T'_k \neq T_k$ . Přitom bod  $T_k$  je kosoúhlým průmětem bodu dotyku  $T$  tečné roviny  $\tau$  s kulovou plochou a leží na její obrysové kružnici  $l$ .

Prostorový bod  $T'$  musí také ležet na obrysové kružnici  $l$  kulové plochy, neboť všechny body koule s výjimkou bodů kružnice  $l$  se promítají dovnitř elipsy  $l_k$ . Přitom je  $T'_k T' \parallel \vec{s}$ , takže je  $T' \neq T$ .

Protože je tečná rovina  $\tau$  rovnoběžná se směrem promítání  $\vec{s}$ , musí obsahovat bod  $T'$ , tudíž i celou úsečku  $TT'$ , která je tak kolmá na poloměr  $ST$  kulové plochy. Tím ovšem dostáváme v rovině  $\lambda$  pravý úhel mezi poloměrem  $ST$  obrysové kružnice  $l$  a její sečnou  $TT'$ , což je spor.



Obrázek 5: Vlastnosti tečné roviny kulové plochy

Dále si ukážeme, že pokud je  $T_k$  bodem dotyku elipsy  $l_k$  a  $p_k$ , musí být tečna  $t_k$  obrysové elipsy  $l_k$  v bodě  $T_k$  rovnoběžná s osou  $z$ .

Kružnice  $p$  procházející bodem  $T$  je hlavní kružnicí kulové plochy ležící v rovině  $\pi'$ . V rovině  $\pi'$  proto leží poloměr  $ST$  koule, což znamená, že je  $\pi' \perp \tau$ , neboť je  $ST \perp \tau$ . Protože je dále na rovinu  $\pi'$  kolmá osa  $z$ , musí být osa  $z$  rovnoběžná s rovinou  $\tau$ .

$$ST \perp \tau, ST \subset \pi' \Rightarrow \pi' \perp \tau \quad \pi' \perp z, \tau \perp \pi' \Rightarrow \tau \parallel z$$

Protože kosotříhlé promítání jako typ rovnoběžného promítání zachovává rovnoběžnost, musí být v průměrně  $\mu$  průmět  $t_k$  roviny  $\tau$  rovnoběžný s osou  $z$ , která v rovině  $\mu$  přímo leží.

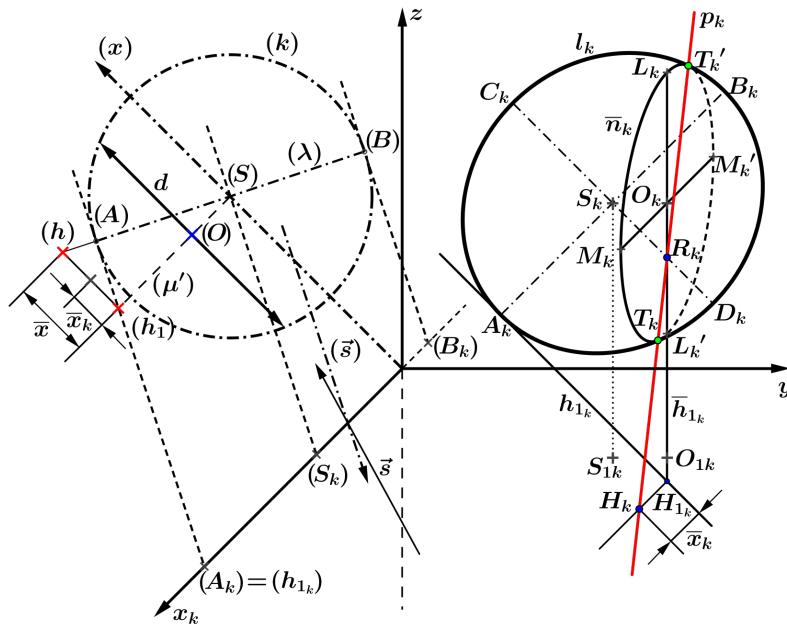
Společné body dotyku elipsy  $l_k$  a  $p_k$  tedy najdeme tak, že sestrojíme body dotyku na tečnách elipsy  $l_k$ , které jsou rovnoběžné s osou  $z$ .

Analogicky platí, že společné body dotyku obrysové elipsy  $l_k$  s elipsovou  $n_k$  určíme jako body dotyku tečen elipsy  $l_k$ , které jsou rovnoběžné s osou  $y$ . Můžeme tedy říci, že elipse  $l_k$  opíšeme obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami  $y$  a  $z$ , a najdeme na nich body dotyku s elipsou  $l_k$ .

Konstrukce bodů dotyku na tečnách elipsy rovnoběžných s daným směrem je popsána v závěrečných poznámkách.

#### 2.4 Řez koule rovinou rovnoběžnou s nárysou $\nu = (x, z)$ , která neprochází středem koule

V další části tohoto článku se budeme věnovat situaci, kdy je daná kulová plocha proříta rovinou  $\bar{\nu}$ , která je rovnoběžná s nárysou  $\nu = (x, z)$ , ale neprochází středem  $S$  koule (obr. 6).



Obrázek 6: Řez koule rovinou  $\bar{\nu}$

Rovina  $\bar{\nu}$  protne kulovou plochu v kružnici  $\bar{n}$ , jejíž střed  $O$  leží na rovnoběžce s osou  $y$  vedené středem  $S$  koule. Body  $O$  a  $S$  mají stejné

$x$ -ové a  $z$ -ové souřadnice, polohu roviny  $\bar{v}$  zadáme tím, že zvolíme polohu středu  $O$  hledané kružnice  $\bar{n}$ .

Elipsu  $l_k$ , která je kosoúhlým průmětem kulové plochy, už umíme narýsovat.

Kružnice  $\bar{n}$  se do průmětny  $\mu$  směrem  $\vec{s}$  kosoúhle promítá do elipsy  $\bar{n}_k$ , kterou sestrojíme pomocí jejích sdružených průměrů. Velikost  $d$  průměru  $LL'$  kružnice  $\bar{n}$ , který je rovnoběžný s osou  $z$ , se kosoúhle promítáním do  $\mu$  nezmění, takže je  $|L_k L'_k| = d$ . Hodnotu  $d$  určíme ve sklopené rovině  $\omega$ .

Ve sklopené rovině  $\omega$  vidíme kružnici  $(k)$  se středem  $(S)$ , jejíž poloměr  $r$  je roven poloměru zadáné koule. Jestliže bod  $(O)$  umístíme tak, aby  $|(S)(O)| = |S_k O_k|$ , pak má tětiva kružnice  $(k)$ , která prochází bodem  $(O)$  kolmo na  $(S)(O)$ , délku  $d$ .

Poznamenejme, že na konkrétní poloze bodu  $(O)$  nezáleží, můžeme ho například umístit na rovnoběžku s osou  $x_k$  vedenou bodem  $(S)$ , která je kolmým průmětem roviny  $\mu'$  do roviny  $\omega$ .

V konstrukci tedy sestrojíme průměr  $L_k L'_k$  elipsy  $\bar{n}_k$  tak, aby  $L_k L'_k \parallel z$  a  $|L_k L'_k| = d$ .

Průměr  $MM'$  kružnice  $\bar{n}$  ležící na rovnoběžce s osou  $x$  se kosoúhle promítne do průměru  $M_k M'_k$  elipsy  $\bar{n}_k$ , který je sdružený k průměru  $L_k L'_k$ , přičemž je  $M_k M'_k \parallel x_k$  a  $|M_k M'_k| = \frac{1}{2}d$ .

Elipsu  $\bar{n}_k$  sestrojíme na základě znalosti jejich sdružených průměrů  $L_k L'_k$  a  $M_k M'_k$ .

## 2.5 Konstrukce bodů dotyku mezi elipsami $l_k$ a $\bar{n}_k$

### – 1. způsob řešení

Nyní budeme hledat body dotyku obrysové elipsy  $l_k$  s elipsou  $\bar{n}_k$ , což jsou zároveň pro elipsu  $\bar{n}_k$  její body přechodu viditelnosti (obr. 6).

První způsob řešení této úlohy je opět založen na tom, že sestrojíme průsečníci  $p$  rovin  $\lambda$  a  $\bar{v}$ , v nichž leží kružnice  $l$  a  $\bar{n}$  kulové plochy.

Znovu si pomůžeme tím, že zavedeme přídružené **kótované promítání** s průmětnou  $\mu'$ ,  $S \in \mu' \parallel \mu$ . Situaci v rovině  $\mu'$  následně kosoúhle promítнемe směrem  $\vec{s}$  do průmětny  $\mu$ .

Stopou roviny  $\lambda$  v průmětně  $\mu'$  je přímka  $CD$ , která se kosoúhle promítne do roviny  $\mu$  do vedlejší osy  $C_k D_k$  obrysové elipsy  $l_k$ . Hlavní přímku  $h$  roviny  $\lambda$  zvolíme tak, aby kosoúhlý průmět  $h_{1_k}$  jejího půdorysu  $h_1 \subset \mu'$  procházel bodem  $A_k$ . V průmětně  $\mu$  je tedy  $A_k \in h_{1_k} \parallel C_k D_k$ . Kótou hlavní přímky  $h$  určíme ve sklopené rovině  $\omega$ . Tuto konstrukci jsme prováděli už v odstavci 2.2, a proto ji nebudeme znova popisovat. Kóta  $\bar{x}$  hlavní přímky  $h$  se kosoúhle promítáním následně zkrátí na hodnotu  $\bar{x}_k = \frac{1}{2}\bar{x}$ .

V rovině  $\mu'$  leží střed  $O$  kružnice  $\bar{n}$ , což znamená, že stopou roviny  $\bar{v}$  je v průmětně  $\mu'$  rovnoběžka s osou  $z$  procházející bodem  $O$ . Ta se pak do  $\mu$  kosoúhle promítne do průměru  $L_k L'_k$  elipsy  $\bar{n}_k$ .

Protože je  $\bar{\nu} \perp \mu'$ , splývají půdorysy všech hlavních přímek roviny  $\bar{\nu}$  v průmětně  $\mu'$  s její stopou. Platí tedy, že kosoúhlý průmět  $\bar{h}_{1_k} \subset \mu$  půdorysu  $\bar{h}_1$  libovolné hlavní přímky  $\bar{h}$  roviny  $\bar{\nu}$  je totožný s přímkou  $L_k L'_k$ .

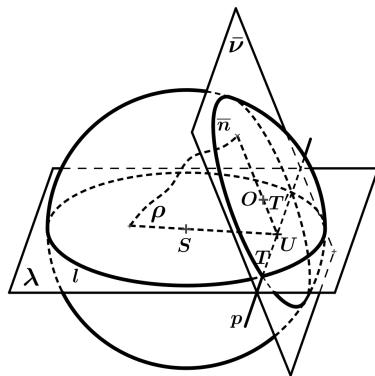
Průsečnici  $p$  rovin  $\lambda$  a  $\bar{\nu}$  získáme jako spojnici dvou různých bodů; prvním z nich je průsečík stop obou rovin a druhým je průsečík hlavních přímek o téže kótě. V průmětně  $\mu$  vidíme stopy rovin  $\lambda$  a  $\bar{\nu}$  jako přímky  $C_k D_k$  a  $L_k L'_k$ . Jejich průsečík označme jako bod  $R_k$ .

Kosoúhlé průměty  $h_{1_k}$  a  $\bar{h}_{1_k}$  půdorysů  $h_1$  a  $\bar{h}_1$  hlavních přímek  $h$  a  $\bar{h}$  rovin  $\lambda$  a  $\bar{\nu}$  se protínají v bodě  $H_{1_k}$ . Průsečík  $H \in h \cap \bar{h}$  obou hlavních přímek se do průmětny  $\mu$  kosoúhle promítne do bodu  $H_k$ , jenž leží na rovnoběžce s osou  $x_k$  procházející bodem  $H_{1_k}$  tak, že je  $|H_k H_{1_k}| = \bar{x}_k$ . Přitom musíme samozřejmě zohlednit znaménko kótý bodu  $H$ .

Přímka  $p_k = R_k H_k$ , která je kosoúhlým průmětem průsečnice  $p$  rovin  $\lambda$  a  $\bar{\nu}$ , protíná elipsy  $l_k$  a  $\bar{n}_k$  v jejich společných bodech dotyku  $T_k$  a  $T'_k$ .

## 2.6 Konstrukce bodů dotyku mezi elipsami $l_k$ a $\bar{n}_k$ – 2. způsob řešení

Body dotyku  $T_k$  a  $T'_k$  obrysové elipsy  $l_k$  s elipsou  $\bar{n}_k$  jsou kosoúhlými průměty bodů  $T$  a  $T'$ , v nichž se protínají obrysová kružnice  $l$  a kružnice  $\bar{n}$  kulové plochy. V odstavci 2.3 jsme ukázali, že tečné roviny  $\tau$  a  $\tau'$  koule se strojené v bodech  $T$  a  $T'$  kružnice  $l$  jsou rovnoběžné se směrem promítání  $\vec{s}$  a do průmětny  $\mu$  se zobrazí do přímek  $t_k$  a  $t'_k$ , které jsou tečnami elipsy  $l_k$ .



Obrázek 7: Znázornění koule v prostoru

Dále ukážeme, že průsečík  $P_k \in t_k \cap t'_k$  leží na přímce  $q_k = \leftrightarrow S_k O_k$ , která spojuje kosoúhlé průměty středu  $S$  koule a středu  $O$  kružnice  $\bar{n}$ .

V odstavci 2.5 jsme označili průsečnici rovin  $\lambda$  a  $\bar{\nu}$  jako přímku  $p$ . Ta je ovšem současně spojnicí bodů  $T$  a  $T'$ .

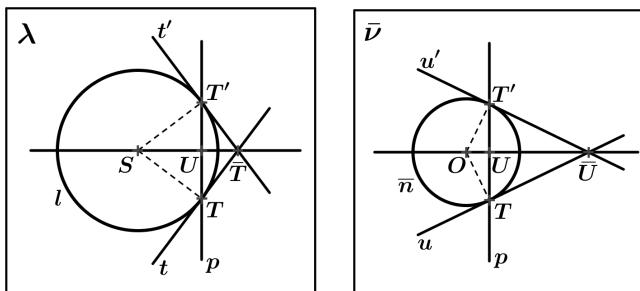
Nechť je nyní bod  $U$  středem úsečky  $TT'$  a nechť  $\rho$  je rovina určená body  $S, O$  a  $U$ . Body  $S, O$  a  $U$  jsou tři různé body, které neleží v jedné přímce, takže rovinu skutečně definují, což dokážeme sporem.

Předpokládejme tedy, že bod  $U$  leží na přímce  $SO$ . Protože oba body  $S$  i  $U$ , kde  $S \neq U$ , patří do roviny  $\lambda$ , leží v rovině  $\lambda$  také bod  $O$ .

Jelikož je kružnice  $l \subset \lambda$  se středem  $S$  hlavní kružnicí kulové plochy, musí kružnice  $\bar{n}$  se středem  $O$  ležet v rovině  $\bar{\nu}$ , která je kolmá k rovině  $\lambda$ . Přitom jsou body  $O$  a  $U$  totožné.

Z kolmosti rovin  $\bar{\nu}$  a  $\lambda$  plyne, že je rovina  $\bar{\nu}$  rovnoběžná se směrem promítání  $\vec{s}$  a do průmětny  $\mu$  se promítá do přímky, neboli kružnice  $\bar{n}$  se do  $\mu$  promítá do úsečky, což je spor.

Kdyby splývaly body  $S$  a  $U$ , pak budou totožné všechny tři body  $S, U$  a  $O$ , což je ve sporu se zadáním úlohy.



Obrázek 8: Kružnice  $l \subset \lambda$  a  $\bar{n} \subset \bar{\nu}$

Dále označme průsečníci rovin  $\tau$  a  $\tau'$  jako přímku  $\bar{p}$ . Protože jsou obě roviny  $\tau$  i  $\tau'$  rovnoběžné se směrem promítání  $\vec{s}$ , bude se směrem  $\vec{s}$  rovnoběžná i jejich průsečnice  $\bar{p}$ . Do průmětny  $\mu$  se pak zobrazí do bodu  $P_k$ , který je průsečíkem přímek  $t_k$  a  $t'_k$ . Ukážeme, že přímka  $\bar{p}$  leží v rovině  $\rho = (S, O, U)$ .

Nejprve se podívejme na situaci v rovině  $\lambda$ . V bodech  $T$  a  $T'$  obrysové kružnice  $l \subset \lambda$  lze sestrojit její tečny  $t$  a  $t'$ , které se protínají v bodě  $\bar{T}$ . Víme, že tečná rovina v daném bodě plochy musí obsahovat tečnu, kterou v tomto bodě sestrojíme k libovolně zvolené křivce na ploše, jež tímto bodem prochází. Proto tečny  $t$  a  $t'$  leží v tečných rovinách  $\tau$  a  $\tau'$  kulové plochy v bodech  $T$  a  $T'$ .

Pak je tedy bod  $\bar{T} \in t \cap t'$  bodem přímky  $\bar{p} = \tau \cap \tau'$ .

V rovině  $\bar{\nu}$  je situace analogická. Ke kružnici  $\bar{n}$  sestrojíme v jejích bodech  $T$  a  $T'$  tečny  $u$  a  $u'$ , které se protínají v bodě  $\bar{U}$ . Také tečny  $u$  a  $u'$  leží v tečných rovinách  $\tau$  a  $\tau'$  kulové plochy, což znamená, že bod  $\bar{U} \in u \cap u'$  leží na přímce  $\bar{p} = \tau \cap \tau'$ . Přitom jsou zřejmě body  $\bar{T}$  a  $\bar{U}$

navzájem různé.

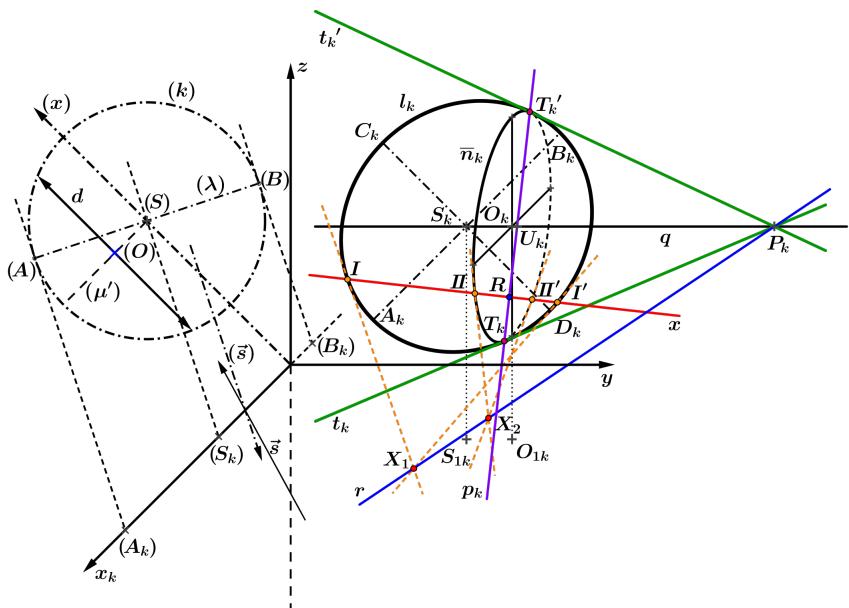
Platí, že v rovině  $\lambda$  bod  $\bar{T}$  leží na polopřímce  $SU$ , kde  $U$  je střed úsečky  $TT'$ , takže  $\bar{T}$  leží v rovině  $\rho = (S, O, U)$ . Podobně v rovině  $\bar{\nu}$  bod  $\bar{U}$  leží na polopřímce  $OU$ , rovněž tedy leží v rovině  $\rho$ . Z toho plyne, že celá přímka  $\bar{p} = \leftrightarrow \bar{T} \bar{U}$  leží v rovině  $\rho$ , což jsme chtěli dokázat.

Výše jsme uvedli, že je přímka  $\bar{p}$  rovnoběžná se směrem promítání  $\vec{s}$ , a protože je  $\bar{p} \subset \rho$ , znamená to, že je se směrem  $\vec{s}$  rovnoběžná i celá rovina  $\rho$ . Do průmětny  $\mu$  se pak rovina  $\rho$  promítá do přímky  $q_k = \leftrightarrow S_k O_k$ .

Vidíme tedy, že kosoúhlý průmět  $P_k \in t_k \cap t'_k$  přímky  $\bar{p}$  skutečně leží na přímce  $q_k = \leftrightarrow S_k O_k$  (obr. 9).

## 2.7 Užití projektivní geometrie pro konstrukci bodů dotyku mezi elipsami $l_k$ a $\bar{n}_k$

Abychom mohli najít body dotyku mezi obrysovou elipsou  $l_k$  a elipsou  $\bar{n}_k$ , je třeba určit přesnou polohu bodu  $P_k$  na přímce  $q_k = \leftrightarrow S_k O_k$ . Pokud se nám to podaří, můžeme pak z bodu  $P_k$  vést tečny  $t_k$  a  $t'_k$  k elipse  $l_k$ , případně k elipse  $\bar{n}_k$ , a sestrojit na nich body dotyku  $T_k$  a  $T'_k$ .



Obrázek 9: Konstrukce bodů dotyku užitím projektivní geometrie

Než se ale do toho pustíme, zdůvodněme ještě jednou, proč bod  $P_k$  leží na přímce  $S_k O_k$ , tentokrát užitím vlastností projektivní geometrie.

Podle [1, s. 121, věta 28,1a] je svazek kuželoseček určen dvěma svými kuželosečkami.

Proto elipsy  $l_k$  a  $\bar{n}_k$  určují svazek kuželoseček  $s(T_k, t_k, T'_k, t'_k)$ , v němž se všechny kuželosečky dotýkají ve společných bodech  $T_k$  a  $T'_k$  dvou různých tečen  $t_k$  a  $t'_k$ , přičemž je  $T_k \in t_k, T'_k \in t'_k$  a  $T_k \neq T'_k$ .

Na základě [1, s. 110, věta 26,6a] a [2, s. 222, poučka (3,1)] můžeme tvrdit následující. Průsečík  $P_k \in t_k \cap t'_k$  a přímka  $p_k = \leftrightarrow T_k T'_k$  jsou pro všechny kuželosečky svazku společným *pólem s polárou*.

Na přímce  $p_k$  tvoří páry sdružených pólů vzhledem k libovolné kuželosečce svazku *involuci* bodů. Přitom nezáleží na volbě konkrétní kuželosečky ze svazku, pro všechny kuželosečky svazku je tato involuce stejná. Jejimi samodružnými body jsou body dotyku  $T_k$  a  $T'_k$ .

Všechny kuželosečky svazku mají společné tyto polární trojúhelníky: jejich vrcholem je bod  $P_k$  a protější stranou je přímka  $p_k$ . Zbývající dva vrcholy jsou tvořeny libovolnou dvojicí sdružených pólů výše zmíněné involuce na přímce  $p_k$ .

Tyto vztahy nyní použijeme k tomu, abychom dokázali, že bod  $P_k$  leží na přímce  $q_k = \leftrightarrow S_k O_k$ , která je spojnicí středů elips  $l_k$  a  $\bar{n}_k$ . Což provedeme, pokud ukážeme, že bod  $O_k$  leží na přímce  $S_k P_k$  (obr. 9).

Označme tedy spojnice bodů  $S_k$  a  $P_k$  jako přímku  $q$ . Protože přímka  $q$  incidentní s bodem  $P_k$  je průměrem elipsy  $l_k$ , jejím pólem vzhledem k elipse  $l_k$  musí být nevlastní bod  $Q_\infty$  přímky  $p_k$ . To plyne přímo z [1, s. 106, věta 26,1b] a [1, s. 107, věta 26,3b], přičemž v našem případě jsou tečny elipsy  $l_k$  sestrojené v jejích průsečících s přímou  $q$  vzájemně rovnoběžné, takže se skutečně protínají v nevlastním bodě přímky  $p_k$ .

Jestliže nyní označíme průsečík přímek  $q$  a  $p_k$  jako bod  $U_k$ , můžeme říci, že body  $U_k$  a  $Q_\infty$  jsou párem sdružených pólů v involuci na přímce  $p_k$  vzhledem ke svazku kuželoseček. Body  $P_k, U_k$  a  $Q_\infty$  jsou tudíž vrcholy polárního trojúhelníka, který je společný pro všechny kuželosečky svazku, tedy i pro elipsu  $\bar{n}_k$ .

Polára bodu  $Q_\infty$  vzhledem k elipse  $\bar{n}_k$ , což je přímka  $P_k U_k$ , neboli přímka  $q$ , musí být průměrem elipsy  $\bar{n}_k$ , musí tedy procházet jejím středem  $O_k$ , což plyne z [1, s. 106, věta 26,1a].

Celkově lze říci, že všechny čtyři body  $S_k, O_k, U_k$  a  $P_k$  leží na společné přímce  $q$ .

Završením naší snahy o nalezení bodů dotyku  $T_k$  a  $T'_k$  mezi elipsami  $l_k$  a  $\bar{n}_k$  je určení přesné polohy bodu  $P_k$  na přímce  $q = \leftrightarrow S_k O_k$ . Pak lze totiž tyto body dotyku sestrojit jako body dotyku tečen  $t_k$  a  $t'_k$  vedených z bodu  $P_k$  k elipse  $l_k$ , případně k elipse  $\bar{n}_k$ .

Konstrukčně najdeme polohu bodu  $P_k$  na přímce  $q$  tak, že zvolíme libovolnou přímku  $x$ , která není společnou polárou svazku kuželoseček. K poláře  $x$  najdeme pól  $X_1$  vzhledem k elipse  $l_k$  a pól  $X_2$  vzhledem

k elipse  $\bar{n}_k$ . Přímka  $X_1X_2$  nyní protne přímku  $q$  v hledaném bodě  $P_k$ .

Správnost této konstrukce plyne z [2, s. 224, poučka (3,5b)]. Přesto si zde uvedený postup konstrukce nyní podrobně zdůvodníme.

Bod  $P_k$  a přímka  $p_k$  jsou společným pólem s polárou pro všechny kuželosečky svazku. Pokud si na přímce  $p_k$  zvolíme bod  $R$  a najdeme jeho poláru  $r$  vzhledem k libovolné kuželosečce svazku, bude dvojice  $R, r$  společným pólem s polárou pro všechny kuželosečky svazku.

Uvažujme, že přímka  $x$  prochází bodem  $R$ . Potom jsou dle [1, s. 107, věta 26,3a] oba póly  $X_1$  a  $X_2$  poláry  $x$  vzhledem k elipsám  $l_k$  a  $\bar{n}_k$  incidentní s přímkou  $r$ . Je tedy  $r = \leftrightarrow X_1X_2$ .

Protože ale bod  $R$  ležel na poláře  $p_k$ , jeho polára  $r$  musí procházet pólem  $P_k$ . To znamená, že lze bod  $P_k$  skutečně získat jako průsečík přímek  $r = \leftrightarrow X_1X_2$  a  $q = \leftrightarrow S_kO_k$ .

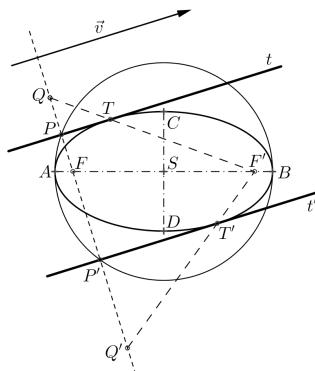
Dodejme také, že jelikož jsme přímku  $x$  volili tak, aby nebyla společnou polárou pro všechny kuželosečky svazku, musí nutně být přímky  $r$  a  $q$  navzájem různé.

Rovněž poznamenejme, že ačkoliv ve skutečnosti nejprve zvolíme přímku  $x$  a teprve poté na ní určíme bod  $R$  jako její průsečík s přímkou  $p_k$ , na předchozí úvahy tento fakt nemá žádný vliv.

## 2.8 Několik závěrečných poznámek

1. Poláru  $x$  lze zřejmě zvolit tak, aby protínala obě elipsy  $l_k$  a  $\bar{n}_k$ . Příslušné póly  $X_1$  a  $X_2$  pak najdeme jako průsečíky tečen, které sestrojíme ve společných bodech přímky  $x$  a elipsy  $l_k$ , resp.  $\bar{n}_k$ . Pokud úlohu rýsujeme v programu GeoGebra, získáme průsečíky přímky s elipsou okamžitě zadáním příslušného příkazu. Rýsujeme-li na výkresu pomocí pravítka a kružítka, uvedené průsečíky lze sestrojit buďto užitím *afinity* mezi kružnicí a elipsou, nebo lze použít konstrukci uvedenou v [1, s. 84, konstrukce 22,1].
2. Tečnu elipsy v daném bodě sestrojíme na základě známého faktu, že půlí vnější úhel průvodičů. Průvodiči elipsy se přitom nazývají dvě polopřímky, které spojují ohniska elipsy s bodem elipsy. Abychom získali ohniska elipsy, musíme nejprve ze sdružených průměrů určit její hlavní a vedlejší osu, k čemuž použijeme Rytzovu konstrukci. V programu GeoGebra bychom elipsu určenou sdruženými průměry mohli sestrojit také tak, že pomocí příčkové konstrukce najdeme pátý bod elipsy. Po zadání pěti různých bodů GeoGebra elipsu vyrýsuje. Při rýsování v GeoGebře následně tečnu elipsy v daném bodě získáme zadáním explicitního příkazu.
3. Konstrukci tečen elipsy rovnoběžných s daným směrem  $\vec{v}$  provedeme tak, že z jednoho ohniska vedeme k tomuto směru  $\vec{v}$  kolmici,

která protne vrcholovou kružnici elipsy v bodech  $P$  a  $P'$ . Těmi procházejí hledané tečny. Bod dotyku je pak průsečíkem příslušné tečny a spojnice druhého ohniska s bodem  $Q$ , resp.  $Q'$ , který je středově souměrný podle bodu  $P$ , resp.  $P'$ , s prvním užitým ohniskem (obr 10).

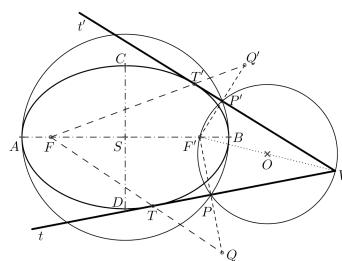


Obrázek 10: Tečny elipsy rovnoběžné se směrem  $\vec{v}$

- Konstrukce tečen elipsy z daného bodu  $V$  je zřejmá z obr. 11. Sestrojíme je jako spojnici bodu  $V$  s průsečíky  $P$  a  $P'$  vrcholové kružnice elipsy a Thaletovy kružnice, jejímž průměrem je úsečka omezená bodem  $V$  a jedním ohniskem elipsy.

Body dotyku  $T$  a  $T'$  na tečnách elipsy pak získáme jako průsečíky tečen elipsy a přímek, které spojují druhé ohnisko elipsy s body  $Q$  a  $Q'$ , jež jsou obrazy prvého ohniska elipsy ve středové souměrnosti podle bodu  $P$ , resp.  $P'$ .

Program GeoGebra umí sestrojit tečny elipsy z daného bodu přímo, takže zmíněnou konstrukci není třeba používat.



Obrázek 11: Tečny elipsy, které vedeme k elipse z bodu  $V$

5. Kdybychom nevěděli, že bod  $P_k$  leží na přímce  $S_kO_k$ , což je nicméně zajímavá vlastnost, kterou jistě stojí za to si odvodit, můžeme určit jeho polohu tak, že si kromě jedné poláry  $x$  zvolíme ještě druhou poláru  $y$  a dohledáme její póly  $Y_1$  a  $Y_2$  vzhledem k elipsám  $l_k$  a  $\bar{n}_k$ . Pak je  $P_k \in \leftrightarrow X_1X_2 \cap \leftrightarrow Y_1Y_2$ .
6. Pokud by rovina řezu nebyla rovnoběžná s žádnou ze souřadnicových rovin  $\pi, \nu, \mu$ , střed  $O$  řezné kružnice kulové plochy by pak neležel na žádné z rovnoběžek se souřadnými osami  $x, y, z$  vedenými středem  $S$  a řezná rovina by měla obecnou polohu – procházela by bodem  $O$  kolmo k úsečce  $SO$ . V tom případě bychom konstrukci řezné kružnice kulové plochy provedli v Mongeově promítání, které je přidružené kosoúhlému promítání. Průměry řezné kružnice na hlavní a spádové přímce I. osnovy bychom transformovali do kosoúhlého promítání, čímž bychom získali sdružené průměry elipsy, která je kosoúhlým průmětem této řezné kružnice.

### 3 Co říci závěrem . . . ?

Účelem tohoto článku bylo srozumitelně a názorně vyložit geometrické vztahy, které platí při kosoúhlém promítání kulové plochy do roviny. Doufám, že tím, jak jsem rozšířila stručný výklad postupu konstrukce, na který se omezují učebnice deskriptivní geometrie, bude tento text pro učitele a studenty deskriptivní geometrie alespoň trochu přínosný.

### Poděkování

Děkuji panu RNDr. Janu Vondrovi, Ph.D. z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity za jeho ochotu přečíst si prvotní verzi mého článku a poskytnout mi jeho byť nezávazné, přesto relevantní, zhodnocení.

Chci také poděkovat svému nadřízenému panu doc. Mgr. Robertu Maříkovi, Ph.D. za rozložení mých pracovních povinností tak, že mi bylo umožněno tento článek vytvořit.

Svůj dík rovněž adresuji kolegovi Mgr. Petru Liškovi, Ph.D. za revizi finální verze tohoto příspěvku a cenné připomínky.

### Literatura

- [1] K. Havlíček: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956
- [2] V. Hlavatý: *Projektivní geometrie I*, Melantrich, Praha, 1944
- [3] E. Kraemer: *Zobrazovací metody (promítání rovnoběžné) II. díl*, SPN, Praha, 1991
- [4] E. Pomykalová: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*, Prometheus, Praha, 2012
- [5] A. Urban: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha, 1965



# On visualization of homogeneous 3-geometries and their Simson-Wallace locus for simplices via exterior calculus

Emil Molnár<sup>1</sup>, Pavel Pech<sup>2</sup>, Jenő Szirmai<sup>3</sup>

*Budapest University of Technology and Economics*

*Institute of Mathematics, Department of Geometry,*

*Egry J. u. 1, P.O. Box 91, H-1521, Budapest Hungary.<sup>1,3</sup>*

*emolnar@math.bme.hu, szirmai@math.bme.hu*

*University of South Bohemia Faculty of Education,*

*České Budějovice, Czech republic, Jeronimova 10371 15.<sup>2</sup>*

*pech@pf.jcu.cz*

**Abstract.** The projective spherical models of the homogeneous 3-spaces (Thurston geometries):  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$ ,  $\text{Nil}$ ,  $\text{Sol}$  are introduced by the initiative of the first author in [13]. Therefore the above spaces can be visualized in Euclidean 3-space  $\mathbb{E}^3$ . Our projective spherical model is based on linear algebra over the real vector space  $\mathbf{V}^4$  (for points) and its dual  $\mathbf{V}_4$  (for planes), upto positive real factor, so that the proper dimension is 3, indeed. We could illustrate and visualize the interesting objects in the Euclidean screen of computer in several Thurston geometries (see e.g. [6], [14], [18], [26], [27], [29]).

In this conference paper we recall a new application based on the above models (on the base [17]). We generalize and visualize the Simson-Wallace locus in  $d$ -dimensional projective metric space, i.e. we look for the points whose orthogonal projections onto the hyperplanes of a fixed  $d$ -simplex lie on a hyperplane. We show that this Simson-Wallace locus  $\mathcal{SW}$  is a (hyper)surface of  $d+1$  degree, if the metric hyperplane to point polarity or later scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is non-degenerate, e.g. in spherical and hyperbolic  $d$ -spaces (also in the geometry of the universal cover of  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$ ), respectively. Else it splits by the ideal hyperplane of poles of the simplex hyperplanes, e.g. into this ideal hyperplane and a remaining  $d$ -degree surface, e.g. in the Euclidean  $d$ -space. Our seemingly new general method is based on the starting concepts of the Grassmann-Clifford exterior algebra calculus.

**Keywords:** Projective metric geometry; Simson-Wallace locus; Grassmann-Clifford exterior algebra calculus; Hypersurface of higher degree in projective  $d$ -space.

## 1 Introduction

The so-called *Thurston geometries* are well known. Here  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  and  $\mathbb{H}^3$  are the classical spaces of constant zero, positive and negative curvature, respectively;  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  are direct product geometries with  $\mathbb{S}^2$  spherical and  $\mathbb{H}^2$  hyperbolic base plane, respectively, and a distinguished  $\mathbb{R}$ -line with usual  $\mathbb{R}$ -metric;  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$  and  $\text{Nil}$  with a twisted product of  $\mathbb{R}$  with  $\mathbb{H}^2$  and  $\mathbb{E}^2$ , respectively; furthermore  $\text{Sol}$  as a twisted product of the Minkowski plane  $\mathbb{M}^2$  with  $\mathbb{R}$ . So that we have in each an infinitesimal (positive definite) Riemann metric, invariant under certain translations, guaranteeing homogeneity in every point.

These translations are commuting only in  $\mathbb{E}^3$ , in general, but a discrete (discontinuous) translation group - as a lattice - can be defined with compact fundamental domain in Euclidean analogy, but with some different properties. The additional symmetries can define crystallographic groups with compact fundamental domain, again in Euclidean analogy, moreover nice tilings, packings, material possibilities, etc.

We emphasize some surprising facts. In  $\widetilde{\text{Nil}}$  and in  $\widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}$  there are orientation preserving isometries, only. In  $\text{Nil}$  we have a lattice-like ball packing (with kissing number 14) denser than the Euclidean densest one [9], [25]. Moreover, in [29] we have formulated a conjecture in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  for the densest geodesic ball packing with equal balls for all Thurston geometries. In  $\text{Sol}$  geometry there are 17 Bravais types of lattices, but depending on an infinite natural parameter  $N > 2$  [14]. Except  $\mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  there is no exact classification result for possible crystallographic groups.

Our projective spherical model, initiated in [13] (see Table 1), is based on linear algebra over the real vector space  $\mathbf{V}^4$  (for points) and its dual  $\mathbf{V}_4$  (for planes), upto positive real factor, so that the proper dimension is 3, indeed. We illustrate and visualize the topic in the Euclidean screen of computer with some new pictures mainly in  $\widetilde{\mathbb{H}^3}, \widetilde{\text{SL}_2\mathbb{R}}, \widetilde{\text{Sol}}$  and  $\widetilde{\text{Nil}}$  on the base of our publications [6], [14], [18], [26], [27], [29].

After a more popular introduction to the classical projective space, we shall illustrate our method related to the generalization of the Simson-Wallace locus in the  $d$ -dimensional projective metric space.

## 2 On the metric projective model of Thurston geometries

Consider a  $d$ -dimensional real projective metric spherical space  $\mathcal{PMS}(\mathbf{V}^{d+1}, V_{d+1}, \mathbb{R}, \sim, (\_))$ , resp. the projective metric space  $\mathcal{PM}(\mathbf{V}^{d+1}, V_{d+1}, \mathbb{R}, \sim, (\_))$ , defined by the real  $(d+1)$ -dimensional vector space  $\mathbf{V}^{d+1}$ , with a standard basis  $\{e_0, e_1, \dots, e_d\}$ . Its dual basis in the space  $V_{d+1}$  of linear forms on  $\mathbf{V}^{d+1}$  will be denoted by  $\{e^0, e^1, \dots, e^d\}$ , i.e.  $e_i e^j = \delta_i^j$  (the Kronecker symbol,  $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ , we shall use the Einstein-Schouten index conventions for sums, etc.).

**Table 1**

Thurston geometries each modelled on  $\mathcal{PS}^3$  by specified polarity or scalar product and isometry group.

Space $\mathbf{X}$	Signature of polarity $\Pi(\star)$ or scalar prod- uct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbf{V}_4$	Domain of proper points of $\mathbf{X}$ in $\mathcal{PS}^3$ ( $\mathbf{V}^4(\mathbf{R})$ , $\mathbf{V}_4$ )	The group $G = \text{Isom } \mathbf{X}$ as a special collineation group of $\mathcal{PS}^3$
$\mathbb{S}^3$	(+ + + +)	$\mathcal{PS}^3$	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\star)$
$\mathbb{H}^3$	(- + + +)	$\{(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0\}$	Coll $\mathcal{P}^3$ preserving $\Pi(\star)$
$\widetilde{\text{SL}_2 \mathbb{R}}$	(- - + +) with skew line fibering	Universal covering of $\mathcal{H} :=$ $:= \{[\mathbf{x}] \in \mathcal{PS}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0\}$ by fibering transformations	Coll $\mathcal{PS}^3$ preserving $\Pi(\star)$ and fibres with 4 parameters.
$\mathbb{E}^3$	(0 + + +)	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \{\omega^\infty\}$ where $\omega^\infty := (\mathbf{b}^0), \mathbf{b}_\star^0 = \mathbf{0}$	Coll $\mathcal{P}^3$ preserving $\Pi(\star)$ , generated by plane reflections
$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	(0 + + +) with $O$ -line bundle fibering	$\mathcal{A}^3 \setminus \{O\}$ $O$ is a fixed origin	$G$ is generated by plane reflec- tions and sphere inversions, leaving invariant the $O$ - concentric 2-spheres of $\Pi(\star)$
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	(0 - + +) with $O$ -line bundle fibering	$\mathcal{C}^+ = \{X \in \mathcal{A}^3 : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle < 0, \text{ half cone}\}$ by fibering	$G$ is generated by plane reflec- tions and hyperboloid inver- sions, leaving invariant the $O$ -concentric half-hyperboloids in the half-cone $\mathcal{C}^+$ by $\Pi(\star)$
$\text{Sol}$	(0 - + +) and parallel plane fibering with an ideal plane $\phi$	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \phi$	Coll. of $\mathcal{A}^3$ preserving $\Pi(\star)$ and the fibering with 3 parameters
$\text{Nil}$	Null-polarity $\Pi(\star)$ with parallel line bundle fibering $F$ with its polar ideal plane $\phi$	$\mathcal{A}^3 = \mathcal{P}^3 \setminus \phi$	Coll. of $\mathcal{A}^3$ preserving $\Pi(\star)$ with 4 parameters

The  $\sim$  relation will denote the multiplicative equivalence by positive reals  $\mathbb{R}^+$  for  $\mathcal{PMS}$ , or by non-zeros  $\mathbb{R}^0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  for  $\mathcal{PM}$ . E.g.  $X = (\mathbf{x})$ , with  $\mathbf{x} := x^i \mathbf{e}_i \in \mathbf{V}^{d+1}$ , will be a point of  $\mathcal{PMS}$ , where  $(\mathbf{x}) \sim (c\mathbf{x})$  is the same point if  $c \in \mathbb{R}^+$  for  $\mathcal{PMS}$ , resp.  $c \in \mathbb{R}^0$  for  $\mathcal{PM}$ ;  $(\mathbf{0})$  is no point. Similarly  $u = (\mathbf{u})$ , with  $\mathbf{u} := e^j u_j \in \mathbf{V}_{d+1}$ , will be a hyperplane (hypersphere) of  $\mathcal{PMS}$ , where  $(\mathbf{u}) \sim (uc)$  is the same hyperplane if  $c \in \mathbb{R}^+$  for  $\mathcal{PMS}$ , resp.  $c \in \mathbb{R}^0$  for  $\mathcal{PM}$ ;  $(\mathbf{0})$  is no hyperplane. The incidence of a point  $X = (\mathbf{x})$  and a hyperplane  $u = (\mathbf{u}) : X \perp u$  will be defined by  $\mathbf{x}\mathbf{u} := x^i u_i = 0$ . Moreover,  $\mathbf{x}\mathbf{u} > 0$  means that  $X$  lies in the positive halfspace  $u^+$  of the hyperplane  $u$  (for  $\mathcal{PMS}$ , resp. for  $\mathcal{PM}$  iff  $d + 1$  is even).

*The forms (denoted by slanted boldface letters) act from the right on the vectors (with upright boldface ones), as our unifying convention in the theoretical considerations* (also later on; we use "left-vectors" and "right-forms" with respect to multiplication by reals)! By this convention we follow e.g. H. S. M. Coxeter. The "opposite side" convention is also generally used, and we also apply it later because of our computer algebra programs which needed also "old style" notations. Moreover, later on the parentheses  $( )$  will be omitted, and instead of  $X = (\mathbf{x})$  we use simply  $X = \mathbf{x}$  for a point in that sense, also  $u = \mathbf{u}$  for a hyperplane. First orthogonality  $\perp$ , then angle metric for two hyperplanes; and distance for two points will be defined by a hyperplane to point polarity, i.e. polar to pole mapping by a linear form to vector mapping

$$(*) : \mathbf{V}_{d+1} \rightarrow \mathbf{V}^{d+1}, (\mathbf{u}) \mapsto (\mathbf{u}_*) := (\mathbf{u}),$$

called also polarity. Two hyperplanes  $u = (\mathbf{u})$  and  $v = (\mathbf{v})$  are said to be orthogonal:  $u \perp v$  iff  $\mathbf{u}_* \mathbf{v} = 0$ , i.e. the pole  $\mathbf{u}_*$  of  $u$  is incident to  $v$ . Thus, we also get a bilinear scalar product

$$\langle , \rangle : \mathbf{V}_{d+1} \times \mathbf{V}_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u}_* \mathbf{v}$$

which is required to be either symmetric, or anti-symmetric [for a so-called null-polarity, where any polar hyperplane is incident to its pole (point); this holds in the so-called symplectic geometry, if  $d + 1$  is even].

In a basis-dual basis pair, above, the polarity can be expressed by

$$e^i \mapsto e_*^i := \mathbf{e}^i := e^{ij} \mathbf{e}_j, \text{ i.e. } \langle e^i, e^j \rangle = e^{ij},$$

where the matrix  $(e^{ij})$  is either symmetric, i.e.  $e^{ij} = e^{ji}$ , or anti-symmetric, i.e.  $e^{ij} = -e^{ji}$  ( $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ ).

### 3 Grassmann-Clifford exterior algebra and its applications

Much more important is the Grassmann-Clifford exterior algebra of  $\mathbf{V}^{d+1}$  and of  $\mathbf{V}_{d+1}$  that extends the anti-symmetric product operation  $\wedge$  (and so the determinant) concept in a very general and concise way. We intend to give a self-contained summary, the interested reader can follow it and also consult with text books, e.g. [4]. Our topic is just fitting to introduce this important machinery.

The set  ${}_2\wedge \mathbf{V}^{d+1}$  of *bivectors*

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = x^i \mathbf{e}_i \wedge y^j \mathbf{e}_j = \sum_{i < j} (x^i y^j - x^j y^i) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j : \in {}_2\wedge \mathbf{V}^{d+1}$$

by this (formal) anti-symmetric  $\wedge$  (wedge) product of  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{d+1}$  and  $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^{d+1}$  and their linear combinations will be introduced (first as a  $d(d+1)/2$  dimensional linear space). So we can extend the classical Plücker coordinates of a line determined by its two points  $X(\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i)$  and  $Y(\mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j)$  in  $\mathcal{PS}$  or  $\mathcal{P}$ .

Similarly, the set  ${}^2\wedge V_{d+1}$  of *biforms*

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} := \mathbf{e}^i u_i \wedge \mathbf{e}^j v_j = \sum_{i < j} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j (u_i v_j - u_j v_i) : \in {}^2\wedge V_{d+1}$$

can be introduced for  $(d-2)$ -planes of  $\mathcal{PS}$  or  $\mathcal{P}$ .

Algebraically, a biform  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  takes an  $\mathbb{R}$  value on a bivector  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  just by the  $2 \times 2$  numerical determinant

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{x}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{y}\mathbf{v}) - (\mathbf{x}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{y}\mathbf{u}).$$

It is linear in each argument and anti-symmetric in  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$ , furthermore in  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{v}$ .

In particular, consider the basis vectors and basis forms where the product operation is formally required, e.g.  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$  (unified zero symbol) and  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i$ . Furthermore,

$$(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j) = 1.$$

Trivectors and triflorms can similarly be introduced, the coordinates are  $3 \times 3$  numerical determinants, etc. A  $(d+1)$ -vector

$$\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_d = \det(x_0^{i_0}, x_1^{i_1}, \dots, x_d^{i_d}) \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_d$$

has one term, i.e. 1-dimensional, with the basis  $(d+1)$ -vector above with coefficient the  $(d+1) \times (d+1)$  numerical determinant of the vector components which will simply be denoted by  $\det(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ .

Thus a  $(d+1)$ -form will be unique up to an  $\mathbb{R}^0$  factor, again 1-dimensional. Let

$$(\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_d)(\mathbf{e}^0 \wedge \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^d) = \det(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

be defined and fixed, as above.

Thus  $(d+1) \times (d+1)$  determinants give us a possibility to define ("dependently on a fixed volume form") a linear dual mapping  $(\heartsuit)$  that orders a linear 1-form to a  $d$ -vector

$$(\heartsuit) : {}_d\wedge \mathbf{V}^{d+1} \rightarrow \mathbf{V}_{d+1}, \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_d \mapsto (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_d)^{\heartsuit} =: \mathbf{w}$$

by

$$\mathbf{w} : \mathbf{V}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d) =: \mathbf{x}\mathbf{w}.$$

This, combined with the previous form to vector polarity (\*), provides the so-called vector product operation  $\times$ , as above

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_d = \mathbf{w}_* := (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_d)_*^\heartsuit.$$

### 3.1 A $d$ -simplex

A  $d$ -simplex, in a  $\mathcal{PM} \subset \mathcal{PMS}$  above will be given by  $d+1$  linear independent vectors  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d$ , these describe the vertices. Its hyperplanes can be characterized by  $d+1$  independent linear forms  $b^0, b^1, b^2, \dots, b^d$ , or vice-versa by duality. Moreover, these can be considered by a basis-dual basis pair for  $\mathbf{V}^{d+1}$  and  $\mathbf{V}_{d+1}$ , respectively.

Namely, as in the Section 2 above

$$\mathbf{b}^i := (-1)^i (\mathbf{a}_0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_d)^\heartsuit / \det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d)$$

for any  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ , is just a well-formed basis for  $\mathbf{V}_{d+1}$ , by changing the positions in the determinant also with alternating signs. Furthermore, the basic polarity (\*) can be (computed then) given by the unit vector

$$\mathbf{b}^i := \mathbf{b}_*^i = b^{ij} \mathbf{a}_j,$$

where then  $b^{ij} = \langle \mathbf{b}^i, \mathbf{b}^j \rangle$ . Sometimes this matrix  $(b^{ij})$  is given by the dihedral angles of the simplex hyperplanes (e.g. at a characteristic or Coxeter simplex, examples come later). Then the metric data of the vertices  $A_i = (\mathbf{a}_i)$  can be computed from the signed subdeterminant (or inverse, if it exists) of  $(b^{ij})$ . These latter computations are not always trivial, as sketched e.g. in [7].

## 4 The Simson-Wallace locus $\mathcal{SW}$

Take a point  $X = (\mathbf{x} = x^i \mathbf{a}_i)$  and the line  $\mathbf{x} - {}^i c \cdot \mathbf{b}^i$  by varying  ${}^i c$  through  $X$ , orthogonal to the hyperplane

$$\mathbf{b}^i := (-1)^i (\mathbf{a}_0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{a}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_d)^\heartsuit / \det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d),$$

i.e. also through the pole  $\mathbf{b}^i := \mathbf{b}_*^i = b^{ij} \mathbf{a}_j$  above by projective extension (formally by  $1/\infty := 0$ , so  ${}^i c = \infty$ ). The scalar  ${}^i c$  has to be taken so that the so-called foot or pedal point

$${}_i X = ({}_i \mathbf{x} := \mathbf{x} - {}^i c \cdot \mathbf{b}^i)$$

lies in the above simplex hyperplane  $\mathbf{b}^i$ , i.e.

$$\det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{x} - {}^i c \cdot \mathbf{b}^i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_d) = 0.$$

From this equation the scalar  ${}^i c$  can be determined, we get

$${}^i c = \det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_d) / \det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}^i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_d)$$

for any  $i \in 0, 1, \dots, d$ . Here  $\mathbf{x} = \mathbf{b}^i$ ,  ${}^i c = 1$ ,  ${}^i \mathbf{x} = \mathbf{0}$  can be naturally excluded if the polarity  $(*)$  above non-dengenerate. The denominator is just  $\mathbf{b}^i \mathbf{b}^i = b^{ii} = \langle \mathbf{b}^i, \mathbf{b}^i \rangle$ , assumed non-zero (or use the previous projective extension). The numerator is  $\mathbf{x} \mathbf{b}^i$ . The above foot points  ${}^0 X, {}^1 X, \dots, {}^i X, \dots, {}^d X$  are in one hyperplane, iff first (writing only the  $i^{\text{th}}$  variable of the determinant function,  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ )

$$0 = \det(\dots; \mathbf{x} - \frac{\det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_d) \mathbf{b}^i}{\det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}^i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_d)}; \dots), \quad (4.1)$$

i.e. second, also multiplying by the non-zero denominators (or by projective extension),

$$0 = \det(b^{00} \mathbf{x} - (\mathbf{x} \mathbf{b}^0) \mathbf{b}^0, \dots, b^{ii} \mathbf{x} - (\mathbf{x} \mathbf{b}^i) \mathbf{b}^i, \dots, b^{dd} \mathbf{x} - (\mathbf{x} \mathbf{b}^d) \mathbf{b}^d). \quad (4.2)$$

This is an equation of degree  $d+1$  for every point  $X(\mathbf{x} = x^i \mathbf{a}_i)$  of the projective Simson-Wallace locus  $\mathcal{SW}$ .

Third, by coordinates  $(x^0, x^1, \dots, x^d)$  with respect to the projective simplex

$$\{A_0 = (\mathbf{a}_0), A_1 = (\mathbf{a}_1), \dots, A_d = (\mathbf{a}_d), A = (\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_d)\}$$

(to be explained yet in concrete cases) the equation (4.2) will have a concise coordinate form, by Einstein-Schouten index conventions. We formulate our main

**Theorem 4.1** *The Simson-Wallace locus  $\mathcal{SW}$  to the simplex, given in Subsect. 3.1 in a projective metric  $d$ -sphere or  $d$ -space, satisfies the equation*

$$\begin{aligned} 0 &= \det(b^{00} x^{j_0} \mathbf{a}_{j_0} - x^0 b^{0j_0} \mathbf{a}_{j_0}, \dots; b^{ii} x^{j_i} \mathbf{a}_{j_i} - x^i b^{ij_i} \mathbf{a}_{j_i}, \\ &\quad \dots; b^{dd} x^{j_d} \mathbf{a}_{j_d} - x^d b^{dj_d} \mathbf{a}_{j_d}) = \\ &= \sum (-1)^{I(j_0, \dots, j_i, \dots, j_d)} (b^{00} x^{j_0} - x^0 b^{0j_0}) \dots (b^{ii} x^{j_i} - x^i b^{ij_i}) \dots \\ &\quad (b^{dd} x^{j_d} - x^d b^{dj_d}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Here  $(j_0, \dots, j_i, \dots, j_d)$  runs through all the permutations of  $(0, 1, \dots, d)$ , as usual  $I(j_0, \dots, j_i, \dots, j_d)$  denotes the number of inversions; and we divided by the non-zero determinant  $\det(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_d)$ .

Some obvious points of  $\mathcal{SW}$  are those of the edges of the simplex  $S = A_0 A_1 \dots, A_d$ , as we look at the above equations of  $\mathcal{SW}$ . Summarizing in other words: For  $d > 2$  (finite) the  $\mathcal{SW}$  locus contains the points of  $j$ -faces of simplex  $S$  for  $0 \leq j \leq d-2$ .

## 5 Applications in 3D

First we will derive a general form of  $\mathcal{SW}$  in  $\mathbb{E}^3$ , with our computer program, see [22], [19], [20], [21]. Then we show some special cases like  $\mathcal{SW}$  associated with equifacial tetrahedra and its properties. Denote by  $K, L, M, N$  orthogonal projections of a point  $X$  onto the faces  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$  and  $ABC$  of a tetrahedron  $ABCD$ .

Choose a rectangular system of coordinates so that  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (a, 0, 0)$ ,  $C = (b, c, 0)$ ,  $D = (d, e, f)$ ,  $K = (k_1, k_2, k_3)$ ,  $L = (l_1, l_2, l_3)$ ,  $M = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $N = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $X = (x, y, z)$ . Suppose that  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $f \neq 0$  since otherwise  $ABCD$  is planar.

$K, L, M, N$  are coplanar  $\Leftrightarrow$

$$h_{13} := \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.1)$$

**Proposition 5.1** *Evaluation of (5.1) gives the locus equation*

$$ac^2f^3 \cdot G = 0, \quad (5.2)$$

where

$$\begin{aligned} G = & c^2f^2x^2y + cf(e^2 + f^2 - ce)x^2z + cf^2(a - 2b)xy^2 + \\ & + cf^2(a - 2d)xz^2 + 2cef(b - d)xyz + b(b - a)f^2y^3 + \\ & + f(be(a - b) + cd(d - a) + cf^2)y^2z + f^2(b^2 - ab + c^2 - 2ce) \\ & yz^2 + (be(a - b) + cd(d - a) + ce(e - c))fz^3 - ac^2f^2xy + \\ & + acf(ce - e^2 - f^2)xz + \\ & + abc f^2y^2 + (a(c^2d - 2bce + be^2) - (cd - be)^2 + \\ & + f^2(ab - b^2 - c^2))fyx + +(ce^2(ab + ad - 2bd) + c^2de(d - a) + \\ & + be^3(b - a) + f^2(a(cd - be) + e(b^2 + c^2)))z^2. \end{aligned}$$

We see that (5.2) is a cubic surface which is called the Cayley cubic [19].

### 5.0.1 $\mathcal{SW}$ associated with equifacial tetrahedron

Let us explore the class of equifacial tetrahedra (or disphenoids) [?] and their associate  $\mathcal{SW}$ s which are Cayley cubics. The faces of equifacial tetrahedra are congruent acute-angled triangles. The equivalent condition for a tetrahedron to be equifacial is that pairs of skew edges have the same lengths, respectively.

Every equifacial tetrahedron  $ABCD$  can be placed into a coordinate system in the following way  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, b, 0)$ ,  $C = (0, 0, c)$ ,  $D = (a, b, c)$ . Suppose that  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .

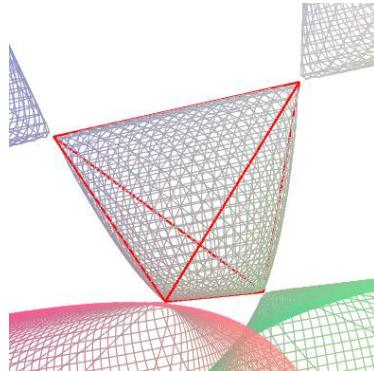


Figure 1: Cayley cubic associated with a regular tetrahedron

Denote side lengths of congruent triangles by  $u, v, w$ . It holds  $b^2 + c^2 = u^2$ ,  $c^2 + a^2 = v^2$ ,  $a^2 + b^2 = w^2$ . Hence for a given acute triangle with side lengths  $u, v, w$  we can always find  $a, b, c$  such that  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, b, 0)$ ,  $C = (0, 0, c)$  as from  $a^2 = (v^2 + w^2 - u^2)/2$ ,  $b^2 = (w^2 + u^2 - v^2)/2$ ,  $c^2 = (u^2 + v^2 - w^2)/2$  by the law of cosines follows.

Similarly as in the previous section we derive the  $\mathcal{SW}$  locus

$$\mathcal{C} := 4abcxyz - (bcx + acy + abz - abc)^2 = 0. \quad (5.3)$$

We can state the

**Proposition 5.2** *Let  $ABCD$  be the equifacial tetrahedron with vertices  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, b, 0)$ ,  $C = (0, 0, c)$  and  $D = (a, b, c)$ . Then its associate Cayley cubic is described by (5.3).*

For  $a = b = c = d = e = f$  we get a regular tetrahedron and its associate Cayley cubic (see Fig. 1)

$$4xyz - a(x + y + z - a)^2 = 0.$$

For  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ ,  $c = 2$  we get a special equifacial tetrahedron whose faces consist of four isosceles triangles with side lengths  $u = 2\sqrt{3}$ ,  $v = 2\sqrt{3}$  and  $w = 4$ . It is known as a space filler (sphenoid or disphenoid in crystallography). Its associate Cayley cubic is

$$4xyz - (x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + 2z - 4)^2 = 0, \quad (5.4)$$

(see also the end of this section).

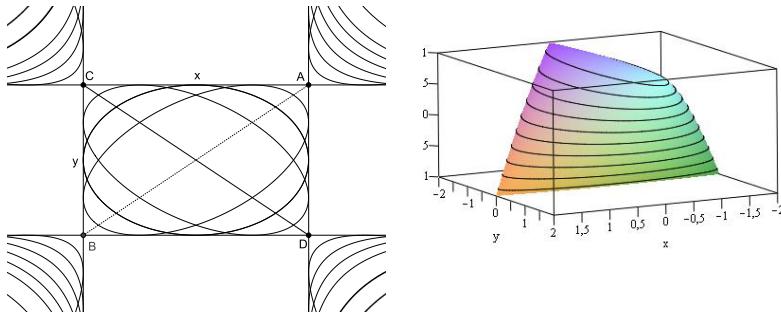


Figure 2: Cayley cubic as a set of conics,  $a = 3, b = 2, c = 1$  — top view and the tetrahedral part of the Cayley cubic associated with a sphenoid

Cayley cubics associated with equifacial tetrahedra have many interesting properties. We will show how to construct these Cayley cubics by a set of conics. We see that intersection of  $\mathcal{C}$  with the ideal plane  $i$  is completely reducible and  $\mathcal{C} \cap i$  consists of three real lines. Then a plane through such a line intersects  $\mathcal{C}$  in a conic.

Let for instance  $z = k, k \in \mathbb{R}$  be a set of planes parallel to  $xy$  coordinate plane. Then for  $\mathcal{C} \cap \{z - k = 0\}$  we get

$$4abcxyk - (bcx + acy + abk - abc)^2 = 0$$

or equivalently

$$\begin{aligned} b^2c^2x^2 + 2abc(c - 2k)xy + a^2c^2y^2 + 2ab^2c(k - c)x + 2a^2bc(k - c)y + \\ + a^2b^2(k - c)^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Note that the canonical form of (5.5) is

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = a^2 b^2 k(c - k),$$

where the eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  obey the characteristic equation

$$\lambda^2 - c^2(a^2 + b^2)\lambda + 4a^2b^2c^2k(c - k) = 0. \tag{5.6}$$

If  $k = 0$  or  $k = c$  the conic (5.5) is a double line, if  $0 < k < c$  we get an ellipse and if  $k < 0$  or  $k > c$  we obtain a hyperbola.

Changing values of the parameter  $k$  we can express  $\mathcal{C}$  by a parametric set of conics lying in mutually parallel planes.

Now we compute the volume  $V$  of the tetrahedral part of  $\mathcal{C}$ , i.e. the part of (5.3) for  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ . It can be described by conic sections (5.5) for  $0 \leq k \leq c$ , i.e. by ellipses and two segments. To compute the volume we will use the areas  $S_k$  of planar sections of  $\mathcal{C}$ . The area  $S_k$  of the ellipse for a given  $k$  equals by (5.6)

$$S_k = \pi ab \sqrt{\frac{k(c-k)}{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\pi ab}{2c} \sqrt{k(c-k)}.$$

Then

$$V = \int_0^c S_k dk = \frac{\pi a}{2} \int_0^c \sqrt{k(c-k)} dk = \frac{\pi^2 abc}{16}.$$

We can state the

**Proposition 5.3** *For the volume  $V$  of the tetrahedral part of the Cayley cubic (5.3) which is associated with an equifacial tetrahedron given by  $a, b, c$  holds*

$$V = \frac{\pi^2 abc}{16}. \quad (5.7)$$

A Cayley cubic associated with a tetrahedron having four congruent isosceles triangles is given by (5.4). Now we will derive another descriptions of such a tetrahedron. Its two opposite dihedral angles are rectangles, while the measure of the remaining four dihedral angles is  $\pi/3$ .

The  $\mathcal{SW}$  locus passes through the edge lines of the tetrahedron (sphenoid). Other investigations for the locus can also be interesting. We get the nice result

$$x^2z - y^2z + x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0.$$

## 6 Computations and visualizations of the $\mathcal{SW}$ surface in the Beltrami-Cayley-Klein model of $\mathbb{H}^3$

For hyperbolic  $d$ -space  $\mathbb{H}^d$ , as indicated in Section 2, we use the projective model in Lorentzian  $(d+1)$ -space  $\mathbb{E}^{1,d}$  of signature  $(1, d)$ , i.e.  $\mathbb{E}^{1,d}$  is the real vector space  $\mathbf{V}^{d+1}$  equipped with the bilinear form of signature  $(1, d)$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x^0y^0 + x^1y^1 + \cdots + x^dy^d$$

where the non-zero real vectors  $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^d) \in \mathbf{V}^{d+1}$  and  $\mathbf{y} = (y^0, y^1, \dots, y^d) \in \mathbf{V}^{d+1}$  represent points in projective space  $\mathcal{P}^d(\mathbb{R})$ .  $\mathbb{H}^d$  is represented as the interior of the absolute quadric

$$Q = \{(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\} = \partial \mathbb{H}^d$$

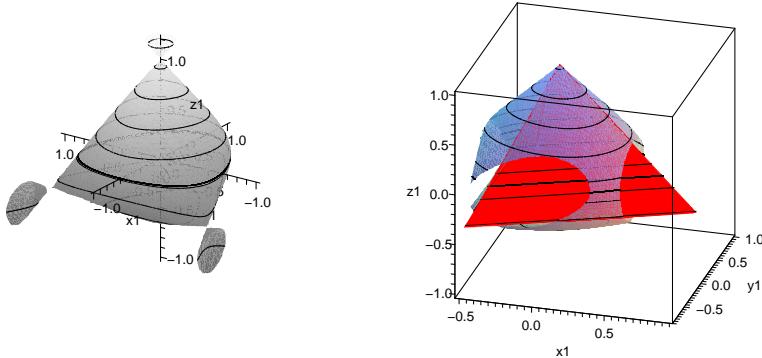


Figure 3: The  $\mathcal{SW}$  surface and the truncated  $\mathcal{SW}$  surface of the regular ideal tetrahedron

in real projective space  $\mathcal{P}^d(\mathbf{V}^{d+1}, \mathbf{V}_{d+1})$ . Proper, i.e. interior points  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^d$  are characterized by  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ .

The boundary points  $\partial\mathbb{H}^d$  in  $\mathcal{P}^d$  represent the absolute points at infinity of  $\mathbb{H}^d$ . Points  $\mathbf{y}$  satisfying  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0$  are called the outer points of  $\mathbb{H}^d$ . Take a point  $X = (\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^d$ , point  $Y = (\mathbf{y}) \in \mathcal{P}^d$  is said to be conjugate to  $(\mathbf{x})$  relative to  $Q$  iff  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ . The set of all points conjugate to  $X = (\mathbf{x})$  form a projective (polar) hyperplane

$$pol(X) := \{(\mathbf{y}) \in \mathcal{P}^d | \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}.$$

Hence the bilinear form  $Q$  induces a bijection or linear polarity  $\mathbf{V}^{d+1} \rightarrow \mathbf{V}_{d+1}$  between the points of  $\mathcal{P}^d$  and its hyperplanes. A point  $X(\mathbf{x})$  and a hyperplane  $\alpha = (\mathbf{a})$  are incident if the value of the linear form  $\mathbf{a}$  on the vector  $\mathbf{x}$  is zero, i.e.  $\mathbf{x}\mathbf{a} = 0$  where  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{d+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ , and  $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_{d+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Similarly, lines in  $\mathcal{P}^d$  are characterized by 2-subspaces of  $\mathbf{V}^{d+1}$  or  $(d-1)$ -spaces of  $\mathbf{V}_{d+1}$ .

In this paper we set the sectional curvature of  $\mathbb{H}^d$  to be  $K = -1/k^2 = -1$  with  $k = 1$  as natural distance unit.

We shall use the Beltrami-Cayley-Klein ball model of the hyperbolic space  $\mathbb{H}^3$  in the Cartesian homogeneous rectangular coordinate system introduced by a vector basis  $\mathbf{a}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) for  $\mathcal{P}^3$ , with the following coordinates of infinite vertices of the regular tetrahedron,

$$A_0 = (1, 0, 0, 1), \quad A_1 = \left(1, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right), \\ A_2 = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad A_3 = \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right).$$

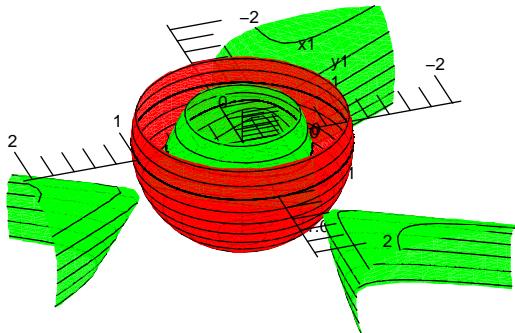


Figure 4: The truncated  $\mathcal{SW}$  surface of the regular ideal tetrahedron in the B-C-K model

We have obtained in Sect. 4 the general equation of the  $\mathcal{SW}$  surface. Applying the above method, we get

**Proposition 6.1** *The equation of the  $\mathcal{SW}$  surface of the hyperbolic regular tetrahedron  $A_0A_1A_2A_3$  is in the above projective coordinate system*

$$\begin{aligned} & 22y^2 - 4x^3\sqrt{2} + 12y^2z + 12x^2z + 22x^2 + 30y^2z^2 + 30x^2z^2 + \\ & + 20x^3\sqrt{2}z + 22z^2 - 8z^3 - 5z^4 - 9 + 12xy^2\sqrt{2} - 60xy^2\sqrt{2}z = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

We note here that in  $\mathbb{H}^3$  the  $\mathcal{SW}$  surface of a hyperbolic regular ideal tetrahedron contains the edges of the tetrahedron. Moreover, the surface has outer part regarding the B-C-K model of the hyperbolic space.

The above  $\mathcal{SW}$  surface is visualized in Figures 3, 4.

## References

- [1] Božić, I., Slićević, A. The analogue of theorems related to Wallace-Simpson line in quasihyperbolic plane. In: Proc. 16th Int. Conf. Geom. Graphics, Innsbruck, (Eds: H.-P. Schröcker, M. Hustý) Paper #65 (2014).
- [2] Brodaczewska, K. *Elementargeometrie in Nil*. Dissertation (Dr. rer. nat.). Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Universität Dresden, Dresden (2014).

- [3] Bölcseki, A. – Molnár, E. Classification and projective metric realizations of tile-transitive triangle tilings. *J. Geometry and Graphics* **11/2** (2007), 137–163.
- [4] Greub, W. Multilinear algebra. 2<sup>nd</sup> edition, *Universitext, Springer Verlag, New York-Heidelberg*, (1978).
- [5] Cavichioli, A. – Molnár, E. – Spaggiari, F. – Szirmai, J. Some tetrahedron manifolds with *Sol* geometry. *J. Geometry*, **105/3** (2014), 601–614.
- [6] Katona, J. – Molnár, E. – Prok, I. – Szirmai, J. Higher dimensional central projection into 2-plane with visibility and applications. *Kragujevac Journal of Mathematics* **35/2** (2011), 249–263.
- [7] Katona, J., Molnár, E., Prok, I. Visibility of the 4-dimensional regular solids, moving in the computer screen. In: *Proc. 13th Int. Conf. Geom. Graphics, Dresden* (Ed. G. Weiss) (2008).
- [8] Molnár, E. On projective models of Thurston geometries, some relevant notes on *Nil* orbifolds and manifolds. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, <http://semr.math.nsc.ru> **7** (2010), 491–498.
- [9] Molnár, E., Szirmai, J. Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries. *Symmetry: Culture and Science* **21** (2010), 87–117.
- [10] Molnár, E. Projective Metrics and hyperbolic volume. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, (1989) **32**, 127–157.
- [11] Molnár, E. Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations. *Acta Math. Hung.*, (1991) **59/1-2**, 175–216.
- [12] Molnár, E. Combinatorial construction of tilings by barycentric simplex orbits (D symbols) and their realizations in Euclidean and other homogeneous spaces. *Acta Cryst.*, (2005) **A61**, 541–552.
- [13] Molnár, E. The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries. *Beitr. Alg. Geom., (Contr. Alg. Geom.)*, (1997) **38/2**, 261–288.
- [14] Molnár, E. – Szirmai, J. Classification of *Sol* lattices. *Geom. Dedicata*, **161/1** (2012), 251–275, DOI: 10.1007/s10711-012-9705-5.
- [15] Molnár, E. – Szilágyi B. Translation curves and their spheres in homogeneous geometries. *Publ. Math. Debrecen.*, **78/2** (2011), 327–346.
- [16] Molnár, E. – Prok, I. – Szirmai, J. Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces. In: *A. Prékopa and E. Molnár, (eds.). Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume, Mathematics and Its Applications*, Springer (2006) Vol. **581**, 321–363.
- [17] Molnár, E. – Pech, P. – Szirmai, J. Simson-Wallace locus in  $d$ -dimensional projective-metric space. *J. Geometry* (2016), DOI: 10.1007/s00022-016-0346-y.
- [18] Molnár, E. – Szirmai, J. – Vesnin, A. Packings by translation balls in  $\widetilde{\mathbb{SL}_2\mathbb{R}}$ . *J. Geometry* **105/2** (2014), 287–306, DOI: 10.1007/s00022-013-0207-x.
- [19] Pech, P. Selected topics in geometry with classical vs. computer proving. *World Scientific Publishing, New Jersey, London, Singapore* (2007).

- [20] Pech, P. On Simson-Wallace theorem and its generalizations. *J. Geometry Graphics* **9** (2005), 141–156.
- [21] Riesinger, R. On Wallace loci from the projective point of view. *J. Geometry Graphics* **8** (2004), 201–213.
- [22] Roanes-Lozano E., Roanes-Macias E., *Automatic Determination of Geometric Loci. 3D-Extension of Simson-Steiner Theorem*. In: Campbell, J. A., Roanes-Lozano, E. (eds.) Lecture Notes in Artificial Intelligence 1930, pp. 157–173. Springer, Heidelberg 2001.
- [23] Scott, P. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, **15** (1983) 401–487.
- [24] Szirmai, J. The optimal ball and horoball packings to the Coxeter honeycombs in the hyperbolic  $d$ -space, *Beitr. Alg. Geom., (Contr. Alg. Geom.)*, (2007) **48/1**, 35–47.
- [25] Szirmai, J. The densest geodesic ball packing by a type of Nil lattices, *Beitr. Alg. Geom., (Contr. Alg. Geom.)*, (2007) **48/2**, 383–397.
- [26] Szirmai, J. The densest translation ball packing by fundamental lattices in Sol space, *Beitr. Alg. Geom., (Contr. Alg. Geom.)*, (2010) **51/2**, 353–373.
- [27] Szirmai, J. Geodesic ball packing in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  space for generalized Coxeter space groups, *Beitr. Alg. Geom., (Contr. Alg. Geom.)*, (2011) **52**, 413–430.
- [28] Szirmai, J. Lattice-like translation ball packings in Nil space, *Publ. Math. Debrecen*, (2012) **80/3-4**, 427–440, DOI: 10.5486/PMD.2012.5117.
- [29] Szirmai, J. A candidate to the densest packing with equal balls in the Thurston geometries. *Beitr. Algebra Geom.*, **55/2** (2014), 441–452, DOI 10.1007/s13366-013-0158-2.
- [30] Szirmai, J. Horoball packings to the totally asymptotic regular simplex in the hyperbolic  $n$ -space, *Aequat. Math.*, **85** (2013), 471–482, DOI: 10.1007/s00010-012-0158-6.
- [31] Thurston, W. P. (and LEVY, S. editor) *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, Vol.1 (1997).
- [32] Weeks, J. R. Real-time animation in hyperbolic, spherical, and product geometries. A. Prékopa and E. Molnár, (eds.). *Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume, Mathematics and Its Applications*, Springer (2006) Vol. **581**, 287–305.



# Publikování a sdílení materiálů na webu geogebra.org

## The export and sharing on geogebra.org

Zuzana Morávková

*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava*

*17. listopadu 15, Ostrava-Poruba*

*zuzana.moravkova@vsb.cz*

**Abstract.** We show how to export GeoGebra materials on geogebra.org and how to create a worksheet and a book of GeoGebra materials. The sharing with another users is described too.

*Keywords:* GeoGebra, export, sharing.

*Klíčová slova:* GeoGebra, publikování, sdílení.

## 1 Úvod

GeoGebra je volně dostupný matematický software, který propojuje algebru, geometrii, analýzu a statistiku. Více o možnostech programu GeoGebra naleznete v [1]. Vytvořené materiály lze nahrát na web geogebra.org ve formě pracovních listů a tím je zpřístupnit dalším uživatelům, studentům nebo kolegům. Pracovní listy lze sdružovat do knih a připravit tak soubor úkolů nebo pomůck k danému tématu. Pracovní listy i knihy mohou mít několik úrovní přístupu. Web geogebra.org nabízí html kód pro vložení na své vlastní webové stránky, kde se pomůcka zobrazí. Výhodou publikování materiálů na geogebra.org je možnost spuštění pracovních listů přímo v prohlížeči a to i pro uživatele, kteří nemají program GeoGebra nainstalován na svém zařízení.

## 2 Publikování a sdílení materiálů

Úvodní strana webu geogebra.org nabízí prohlížení materiálů uživatelů z celého světa, spuštění programu přímo v okně prohlížeče nebo stažení programu pro různé platformy a operační systémy.

### 2.1 Registrace a přihlášení

Na webu (obrázek 1) se přihlásíme pomocí konta na uvedených sítích či službách (obrázek 2a) nebo snadno vytvoříme účet pomocí registrace přímo na geogebra.org (obrázek 2b).

Po přihlášení se v pravém horním rohu stránky objeví naše jméno a menu (obrázek 3).

Kliknutím na jméno se zobrazí stránka s našimi pracovními listy, knihami, oblíbenými pomůckami nebo materiály, které s námi sdílejí ostatní uživatelé (obrázek 3).



Obrázek 1: Úvodní strana webu geogebra.org

The registration form includes fields for 'E-mail', 'Uživatelské jméno', 'Heslo', 'Potvrzení hesla', and a 'Nejsem robot' checkbox with a reCAPTCHA field. It also features social media login options for Google, Office 365, Microsoft, Facebook, and Twitter.

Obrázek 2: a) přihlášení

b) registrace

## 2.2 Vytvořit pracovní list

Pracovní list tvoří GeoGebra soubor, který nahrajeme na web a doplníme informace o věkové skupině, pro kterou je určen, jazyk, případně lze pomůcku doplnit obrázkem, PDF souborem apod. Pracovní list je dostupný na internetu a (podle úrovně přístupu, kterou si zvolíte) přístupný i dalším uživatelům. Pracovní list lze nadále upravovat nebo ho smazat.

Z hlavního menu (obrázek 3) vybereme položku *Vytvořit pracovní list*. Otevře se stránka (obrázek 4), která nám umožní vložit GeoGebra soubor, doplnit jej informacemi, obrázkem a jinými prvky.

### Vložení textu



Pro úpravy textu lze zapnout menu *A* pro formátování textu. Můžeme vkládat text tučný, skloněný, podtržený, přeškrtnutý, měnit barvu a velikost. Samozřejmostí je možnost text zarovnávat vlevo, vpravo nebo cent-

Obrázek 3: Moje materiály

Obrázek 4: Vytvoření pracovního listu

rovat, vkládat tabulku nebo vytvořit číslovaný či nečíslovaný seznam. Lze vložit odkaz, obrázek pomocí url nebo ikony GeoGebry (obrázek 5).

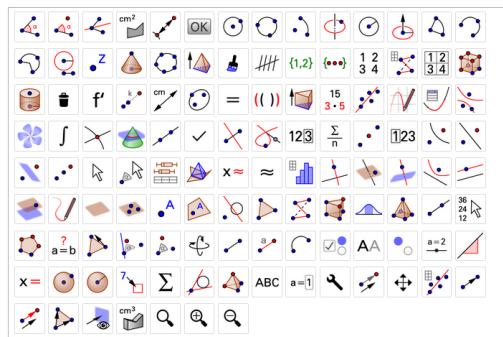
Matematické vzorce lze vkládat buď jako  $\text{\TeX}$ Xové sekvence mezi `[math]` a `[/math]` nebo výběrem z menu  $\text{fx}$ . Tvorbě matematických vzorců v  $\text{\LaTeX}$ u se věnuje například [2].

### Vložení GeoGebra appletu



Appletem se rozumí samotný ggb soubor. Můžeme nahrát soubor ze svého počítače nebo vybrat z již nahraných appletů na geogebra.org.

- **hledat applet** - vyhledávání mezi nahranými applety, a to jak



Obrázek 5: Dostupné ikony GeoGebry

svými, tak jiných uživatelů

- **nahrát applet** - nahrání appletu (ggb souboru) ze svého počítače
- **vytvořit applet** - vytvoření appletu v online verzi GeoGebry

### Vložení souboru s obrázkem, videem nebo pdf



Video



Obrázek



PDF soubor

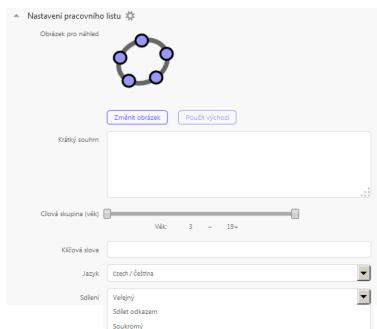
Soubory vložíme pouhým přetažením myší ze svého počítače. U obrázku můžeme změnit jeho velikost a přidat popis.

### Nastavení pracovního listu

Zcela dole na stránce (obrázek 4) lze rozkliknout možnosti nastavení (obrázek 6).

Pracovnímu listu lze nastavit jazyk, ve kterém je vytvořen, věkovou skupinu, pro kterou je určen a klíčová slova pro vyhledávání (povinná položka). Dále nastavíme úroveň přístupu

- **veřejný** - je volně dostupný na webu geogebra.org (vhodné pro již dokončené listy),
- **sdílet odkazem** - mohou ho vidět i ostatní, znají-li odkaz (např. mailem pošleme odkaz kolegovi nebo vložíme odkaz na své stránky),
- **soukromý** - materiál vidí pouze autor (vhodné pro rozpracované či nedokončené pracovní listy).



Obrázek 6: Nastavení pracovního listu

Materiály, které nejsou v přehledu veřejně přístupné, jsou označeny ikonou .

### 2.3 Vytvořit knihu

Kniha slouží ke sdružování pracovních listů. Vkládat je možné nejen své pracovní listy, ale i pracovní listy jiných uživatelů. Kniha má titulní stranu, kterou tvoří název, obrázek a popis, dále přístup, věk uživatele, jazyk a klíčová slova. Pořadí kapitol měníme pouhým přetažením myší, stejně jako pořadí pracovních listů v kapitolách (obrázek 7).

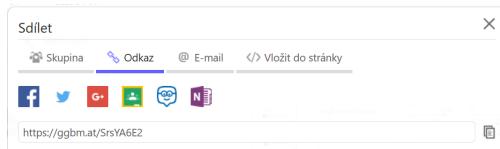
Obrázek 7: Úprava knihy

## 3 Další práce s pracovním listem nebo knihou

Potřebujeme-li pracovní list nebo knihu dále upravovat, smazat, přejmenovat, stáhnout nebo sdílet, pak v přehledu materiálů postačí kliknout na ikonu . Zobrazí se menu, které nám tyto činnosti nabídne.

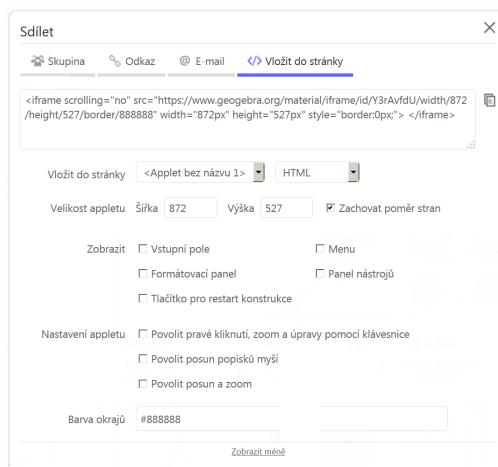
### 3.1 Sdílení

Pracovní listy i knihy můžeme sdílet s dalšími uživateli. Lze sdílet odkaz na sociálních sítích (obrázek 8) nebo poslat odkaz e-mailem.



Obrázek 8: Sdílení odkazu

Další možností je zobrazení pomůcky přímo na svých webových stránkách. Lze okopírovat nabízený html kód nebo kód pro vložení do MediaWiki nebo Google Site (obrázek 9). V případě html kódu je pomůcka zobrazen pomocí tagy iframe. Podrobným popisem tohoto tagu se zabývá například článek [3].



Obrázek 9: Html kód

## Literatura

- [1] Š. Gergelitsová: *Počítač ve výuce nejen geometrie: Průvodce Geogebrou*, Generation Europe, 2012
- [2] J. Rybička: *Latex pro začátečníky*, Konvoj, 2003
- [3] D. Janovský: *Iframe: vnořený rám*, jakpsatweb.cz [online], dostupné z: <http://www.jakpsatweb.cz/iframe.html>

# Tipy a triky pro tvorbu úloh v GeoGebře

## Tips and tricks for GeoGebra

Radomír Paláček

*VŠB - Technická univerzita Ostrava*

*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie*

*17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba*

*radomir.palacek@vsb.cz*

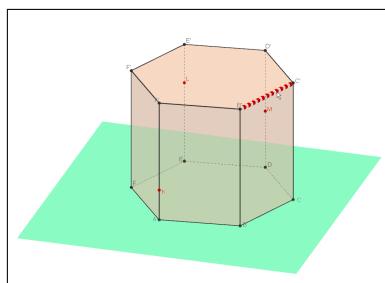
**Abstract.** We show some aspects of GeoGebra on the selected applets that can be useful for creating tasks in GeoGebra. Tips and tricks consist of scripting and displaying objects and tasks in unique file.

*Keywords:* GeoGebra, scripting.

*Klíčová slova:* GeoGebra, skriptování.

## 1 Úvod

V tomto článku si ukážeme některé tipy a triky pro tvorbu úloh v GeoGebře. Konkrétně se zaměříme na změnu vlastností objektu tím, že na něho klikneme (obr. 1). Dále se podíváme na využití tlačítek pro přepínání mezi jednotlivými úlohami a pro vytvoření vlastního krokování konstrukce (obr. 2).



Obrázek 1: Změna vlastností kliknutím.

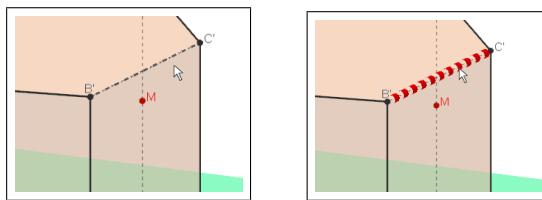


Obrázek 2: Tlačítka.

## 2 Změna barvy, tloušťky a stylu čar kliknutím na objekt

V některých případech bývá při výuce potřeba pro lepší názornost zvýraznit určitou část konstrukce [1]. Může jí být přímka, bod, úsečka, ale také kružnice, elipsa apod. Mnohdy to může být dokonce celá skupina objektů. Způsobů jak toho docílit je jistě celá řada. Jednou z možností je změna vlastností objektů, ke které dojde poté, co na ně klikneme.

Našim úkolem bude kliknutím změnit styl úsečky p z čerchované na čárkovanou, barvu z černé na červenou a tloušťku z hodnoty 3 na 13, jak je naznačeno na obrázku 3.



Obrázek 3: Situace před kliknutím (vlevo) a po kliknutí (vpravo).

Nyní si ukážeme, jak toho můžeme docílit. Budeme předpokládat, že celá konstrukce je již hotová. Nejprve si zadefinujeme číslo, které bude všechny změny řídit. Nazveme ho **prepinac** a nastavíme jeho hodnotu na 0. Toto číslo se bude měnit při kliknutí na úsečku na hodnotu 1 a při následném kliknutí zpět na nulu. Skript zapíšeme ve vlastnostech dané úsečky do záložky *Skriptování → Po kliknutí*.

Pro přepínání mezi černou a červenou barvou použijeme příkaz pro nastavení barvy objektu

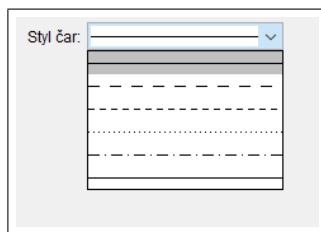
```
NastavitBarvu[<Objekt>, <Červená>, <Zelená>, <Modrá>] .
```

Jak je patrné, nastavení se realizuje prostřednictvím tzv. RGB modelu. Ten je založený na skutečnosti, že lidské oko je citlivé na tři základní barvy (červená, zelená, modrá) a všechny ostatní barvy jsou dány sytostí těchto barev. Hodnoty parametrů <Červená>, <Zelená> a <Modrá> se udávají v rozmezí od 0 do 255.

Styl čar měníme příkazem

```
NastavitStylCary[<Čára>, <Číslo>] .
```

Ve vlastnostech přímky v záložce *Styl* se nejprve podíváme jaké možnosti nám GeoGebra v tomto směru nabízí (obr. 4). Jednotlivým stylům



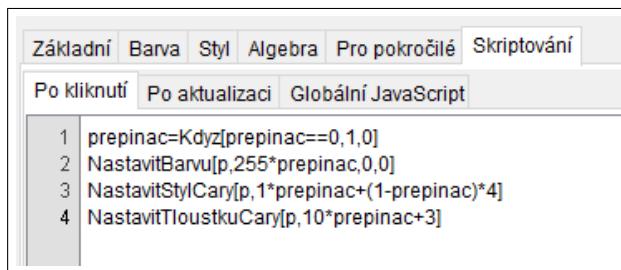
Obrázek 4: Styly čar.

jsou po řadě implicitně přiřazeny čísla, kterými je můžeme volat, tj. 1 - čárkovaná, 2 - čárkovaná (menší čárky), 3 - tečkovaná, 4 - čerchovaná, jakékoliv jiné číslo představuje čáru plnou.

Poslední požadovanou změnu, která zvětší tloušťku úsečky, provedeme příkazem

`NastavitTloustkuCary[<Čára>, <Číslo>]`.

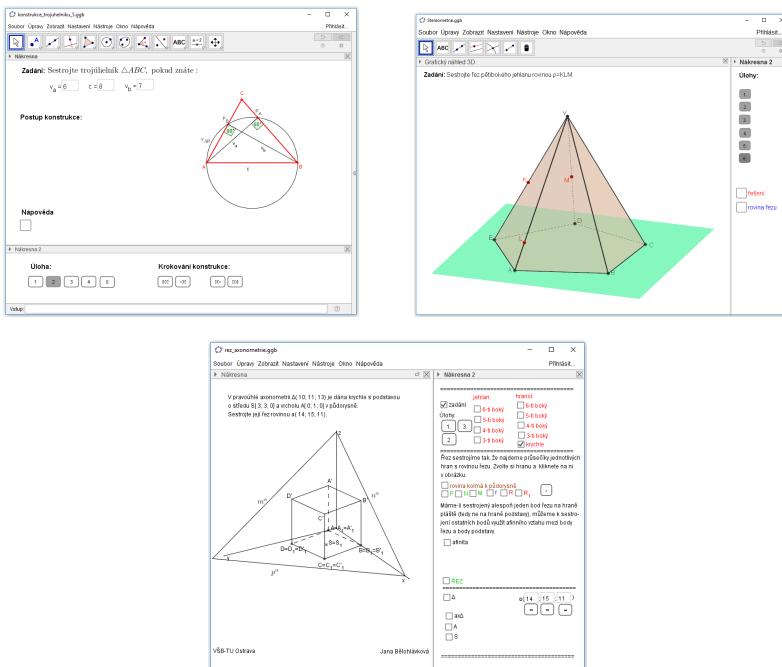
Celý skript pro přepínání mezi čerchovanou a čárkovanou čárou a současným nastavením barvy na červenou a zvětšení tloušťky na hodnotu 13 nakonec může vypadat například tak, jak je vidět na obrázku 5.



Obrázek 5: Skript na změnu barvy, tloušťky a stylu čáry kliknutím.

### 3 Tlačítka a zase ty tlačítka

GeoGebra je software určený primárně pro geometrii a vytváření konstrukcí různého druhu. S konstrukčními úlohami se studenti běžně setkávají ve výuce matematiky od základní školy až po školu vysokou. Jako příklad můžeme uvést konstrukci trojúhelníku [2], řez tělesem, apod. (obr. 6).



Obrázek 6: Příklady konstrukčních úloh.

Podle toho, co je na začátku zadáno, mohou mít tyto úlohy řadu různých variant. Při modelování v GeoGebře potom můžeme vytvářet pro každou variantu vlastní applet. To znamená mít pro každou úlohu jeden ggb soubor, což může být nepraktické. Nabízí se tedy otázka, zda by nebylo možné mít více úloh v jediném souboru. Odpověď na tu otázku může být vytvoření tlačítka pro každou jednu úlohu. Další využití tlačítka lze spartovat v krování konstrukce, kdy na jeden krok se nám bude zobrazovat více konstrukčních prvků najednou, včetně jejich popisu.

Ukážeme, jak takovéto tlačítka vytvořit a nastavit jejich vlastnosti prostřednictvím skriptu. To, co se má při jejich stisknutí vykonat se může značně lišit podle typu úlohy, proto se omezíme jen na několik vlastností, které jsou společné pro většinu úloh.

Předpokládejme, že máme 5 úloh na konstrukci trojúhelníku, které chceme umístit do jediného souboru. Zadání se bude zobrazovat při stisknutí tlačítka s pořadovým číslem úlohy. Dále budeme vytvářet tlačítka pro krování konstrukce. Počet kroků u každé úlohy bude různý.

Nejprve zavedeme tři proměnné a nastavíme jejich počáteční hodnoty:

```
uloha=1, krok=0, pocetKroku=8 .
```

Jak napovídají jejich názvy budou to proměnné určující číslo úlohy, aktuální krok konstrukce a počet kroků konstrukce. Hodnota poslední proměnné bude pro každou úlohu jiná, to se ošetří později ve skriptu jednotlivých tlačítek.

Nyní vložíme do nákresny tlačítka pro přepínání mezi jednotlivými úlohami



Do GeoGebra skriptu u **tlačítka1** napíšeme:

```
NastavitHodnotu[uloha,1]
NastavitHodnotu[krok,0]
NastavitHodnotu[pocetKroku,9]
NastavitBarvuPozadi[tlacitko1,"lightgray"]
NastavitBarvuPozadi[tlacitko2,"white"]
NastavitBarvuPozadi[tlacitko3,"white"]
NastavitBarvuPozadi[tlacitko4,"white"]
NastavitBarvuPozadi[tlacitko5,"white"]
```

Obdobně u zbývajících tlačítek, jen s tím rozdílem, že u proměnné **uloha** nastavíme hodnoty na pořadové číslo úlohy a **pocetKroku** na skutečný počet kroků jednotlivých úloh. Barvu tlačítka, které má být zrovna „stisknuto“ nastavíme na **lightgray**, ostatní na **white**.

Dále vložíme tlačítka pro krování konstrukce.

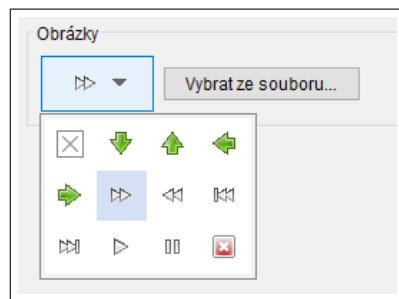


Jednotlivé obrázky, které jsou na tlačítkách, můžeme vybrat ve vlastnostech každého z nich v záložce *Styl* (obrázek 7).

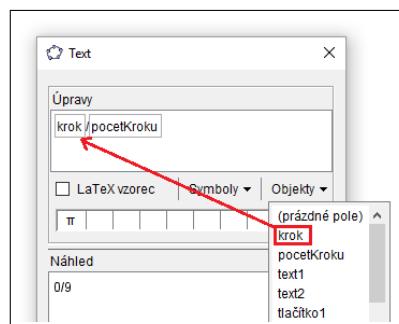
Do GeoGebra skriptu jednotlivých tlačítek napíšeme

	<code>NastavitHodnotu[krok,0]</code>
	<code>NastavitHodnotu[krok,krok-1]</code>
	<code>NastavitHodnotu[krok,krok+1]</code>
	<code>NastavitHodnotu[krok,pocetKroku]</code>

Mezi tlačítka a vložíme text, který propojíme s objekty **krok** a **pocetKroku** (obr. 8).



Obrázek 7: Možnosti výběru obrázku na tlačítka.



Obrázek 8: Propojení textu s objekty.

V okamžiku, kdy bude konstrukce hotova můžeme nastavit, které její části se budou na jaký krok zobrazovat. Například budeme-li chtít, aby se ve čtvrté úloze zobrazovaly přímka a bod od šestého kroku, potom ve vlastnostech těchto objektů v záložce *Pro pokročilé* do kolonky *Podmínky zobrazení objektu* zapíšeme

$$\text{úloha} = 4 \wedge (\text{krok} \geq 6) .$$

## Literatura

- [1] J. Bělohlávková: *Skriptování v GeoGebře*, In: Moderní matematické metody v inženýrství: sborník z 23. semináře, Horní Lomná, 2.-4.6. 2014, VIII – XII, ISBN 978-80-248-3611-9 (CD-ROM).
- [2] R. Paláček: *Konstrukce trojúhelníku*, In: Moderní matematické metody v inženýrství: sborník z 25. semináře, Horní Lomná, 30.5.-1.6. 2016, XVIII-XXIV, ISBN 978-80-248-3992-9 (CD-ROM).

# Vizualizácia 4-rozmerných experimentálnych dát a ich aproximácia funkciou troch premenných

## Four-Dimensional Experimental Data Visualisation and Fitting Function in Three Variables

Daniela Richtáriková

Slovak University of Technology in Bratislava,  
Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Mathematics and Physics,  
Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic  
email: daniela.richtarikova@stuba.sk

**Abstract.** The paper presents CAS aided accessible form of visualisation and approximation of four dimensional data for students in school conditions of technical universities.

**Keywords:** Four-Dimensional Experimental Data, visualisation, power function fitting

*Kľúčové slová:* Štvorozmerné experimentálne údaje, vizualizácia, aproximácia mocninovou funkciou

### 1 Úvod

Na technických vysokých školách študenti v rámci odborných semestrálnych prác často vykonávajú a vyhodnocujú technické experimenty, kde sa vo vymedzenej sústave sleduje vplyv rôznych faktorov. Stanovia sa závisle a nezávisle premenné a skúma sa vplyv zmeny nezávislých premenných na závisle premennú. Namerané údaje sa zaznamenávajú do tabuľiek, spracovávajú a vyhodnocujú. Na spracovávanie experimentálnych dát v inžinierskych odvetviach sa často využívajú profesionálne softvéry, ktoré však nie vždy poskytujú žiadane odpovede. Na uspokojenie požiadaviek môžeme vo vhodných prípadoch vychádzat z obsahu kurzov základných matematických predmetov a istou formou a úrovňou aplikovania dospiet k hľadaným odpovediam. Ilustrujme takú situáciu na príklade.

### 2 Formulácia problému

Známa je spojité mocninová závislosť premennej  $P$  na sledovaných nezávislých premenných. Úlohou je namerané údaje approximovať mocninovou funkciou, vizualizovať údaje a vizualizovať approximačnú funkciu.

## 2.1 Aproximácia funkciou jednej premennej

Sledujeme vplyv jednej premennej. Namerané sú dvojrozmerné údaje  $\{[x_i, P_i]\}$ . Na aproximáciu použijeme mocninovú funkciu jednej premennej v tvare  $P = b x^a$ . Študenti uplatnia priamy transfer poznatkov o aproximácii metódou najmenších štvorcov. Súčtová funkcia má tvar

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - P_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b x^a - P_i)^2.$$

Hľadanie jej minima sice vedie na riešenie sústavy exponenciálnych rovníc, ktoré nie je zvyčajne obsahom štúdia, avšak študenti môžu aplikovať linearizáciu zlogaritmovaním hľadanej funkcie:

$$P = b x^a$$

$$\ln P = \ln b + a \ln x$$

a linearizované dátá approximovať priamkou  $y = a X + B$ , kde  $y = \ln P$ ,  $X = \ln x$  a  $B = \ln b$ . Minimum súčtovej funkcie potom nájdú pomocou sústavy normálových rovníc:

$$\frac{\partial S(a, B)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S(a, B)}{\partial B} = 0,$$

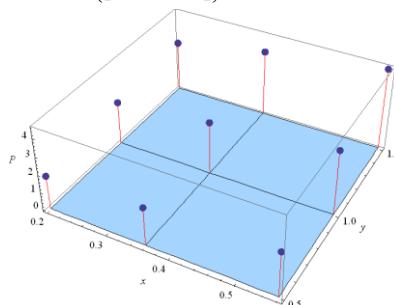
ktoré už sú lineárne. V spätej transformácii koeficient  $a$  dostanú priamo, a na výpočet koeficientu  $b$  použijú vzťah  $b = e^B$ . Pri výpočte globálnej chyby approximácie vychádzajú zo štandardného vzorca pre metódu najmenších

$$\text{štvorcov } \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - P_i)^2}, \text{ kde } n \text{ je počet nameraných dát.}$$

Vizualizujeme v rovine s kartéziánskym súradnicovým systémom zobrazením bodov a grafu funkcie, ktorým je čiara.

## 2.2 Funkcia dvoch premenných

Merajme trojrozmerné údaje  $\{[x_i, y_i, P_i]\}$ .



Obr. 1

Merania sa uskutočňujú pre usporiadane dvojice  $\{[x_i, y_i]\}$ , pričom jedna veličina nadobúda vopred zadané hodnoty a druhá sa mení s konštantným krokom. Výsledkom je nameraná množina bodov v stanovených uzloch siete (obr.1).

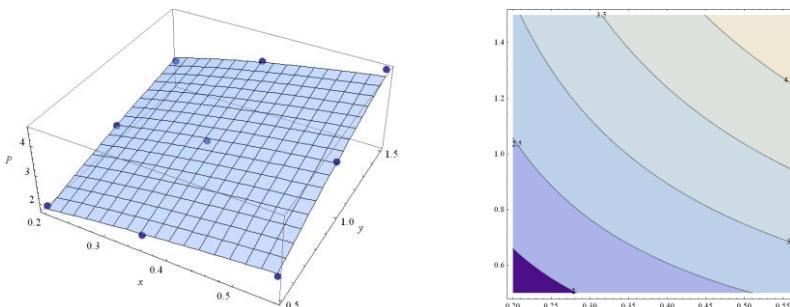
Aproximujeme mocninovou funkciou dvoch premenných v tvare  $P = c x^a y^b$ . Tu už študenti musia použiť nešpecifický transfer poznatkov, keď poznatky o aproximácii funkciou jednej premennej rozšíria na dvojrozmerný priestor. Súčtová funkcia bude mať tvar

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i) - P_i)^2 = \sum_{i=1}^n (c x^a y^b - P_i)^2,$$

po zlogaritmovaní

$$S(a, b, C) = \sum_{i=1}^n (\ln(f(x_i, y_i)) - \ln P_i)^2 = \sum_{i=1}^n (C + a X_i + b Y_i - p_i)^2.$$

Jej minimum nájdú pomocou sústavy normálowych rovníc, keď budú počítať parciálne derivácie podľa  $a$ ,  $b$  a  $C$ . Koeficienty  $a$  a  $b$  dostanú v spätej transformácii priamo, a na výpočet koeficientu  $c$  použijú vzťah  $c = e^C$ . Grafom funkcie  $P = c x^a y^b$  je plocha, ktorú môžeme zobraziť bud' v trojrozmernom karteziańskom systéme alebo ako vrstevnicový graf v dvojrozmernom systéme s prípadným vyznačením výšok  $P$  vrstevníc (obr.2).

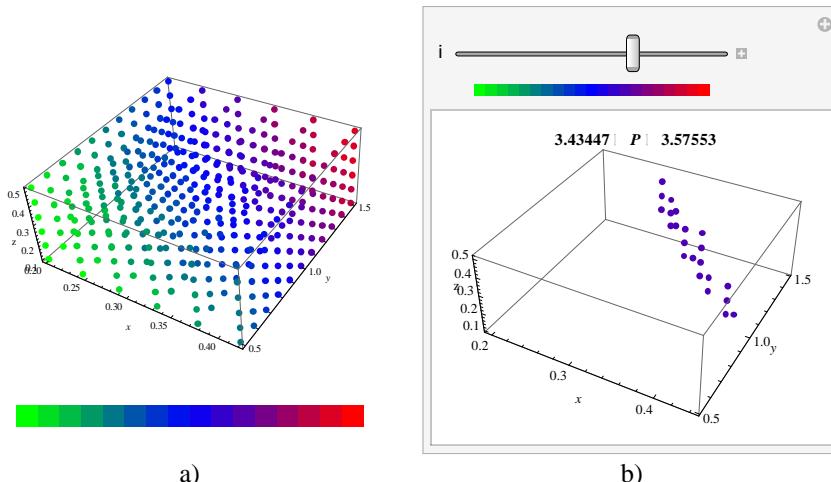


Obr. 2

## 2.3 Funkcia troch premenných

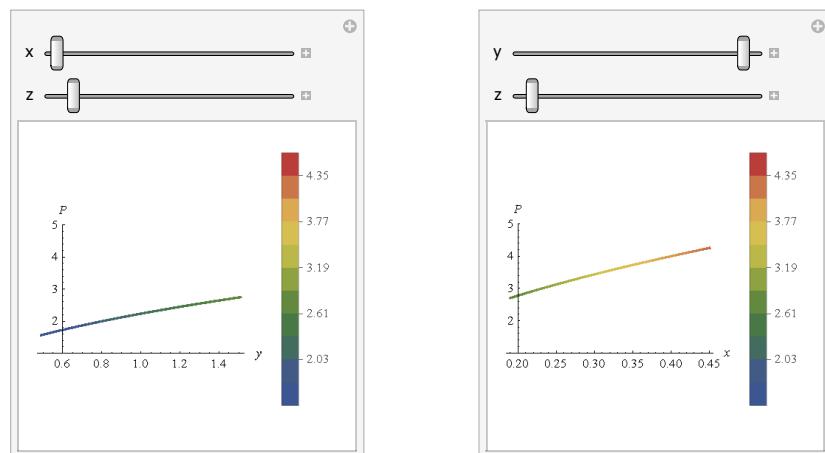
Meríame štvorrozmerné údaje  $\{[x_i, y_i, z_i, P_i]\}$ . Merania pre usporiadane dvojice  $\{[x_i, y_i]\}$  sú obohatené hodnotou tretieho nezávislého parametra  $z$ . Výsledkom je nameraná množina bodov v stanovených uzloch siete pre rôzne hodnoty premennej  $z$ . Umiestnenie jednotlivých uzlov v priestore určujú hodnoty nezávislých premenných  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a na vizualizáciu hodnoty závisle

premennej  $P$  použijeme farbu alebo iný vizuálny odlišovač (obr.3a). Zoskupenie bodov podľa rozsahu hodnoty  $P$  nám poskytne možnosť lokalizovať uzly podľa zvolenej úrovne hodnoty sledovanej premennej  $P$  (obr.3b).

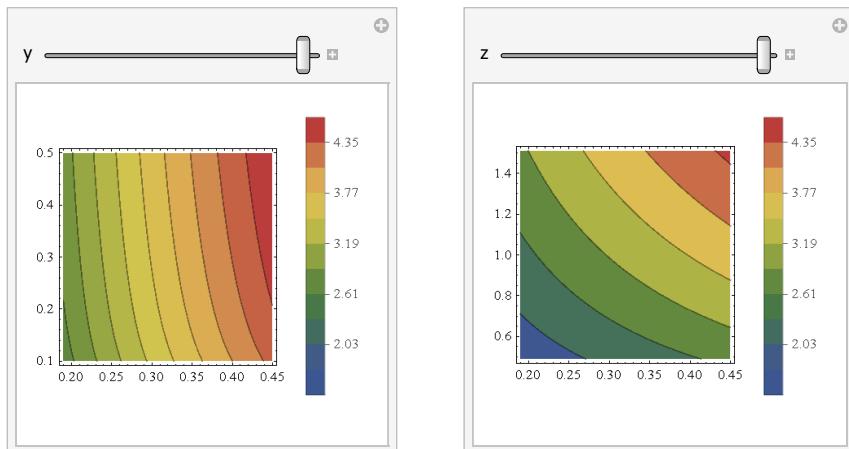


Obr. 3

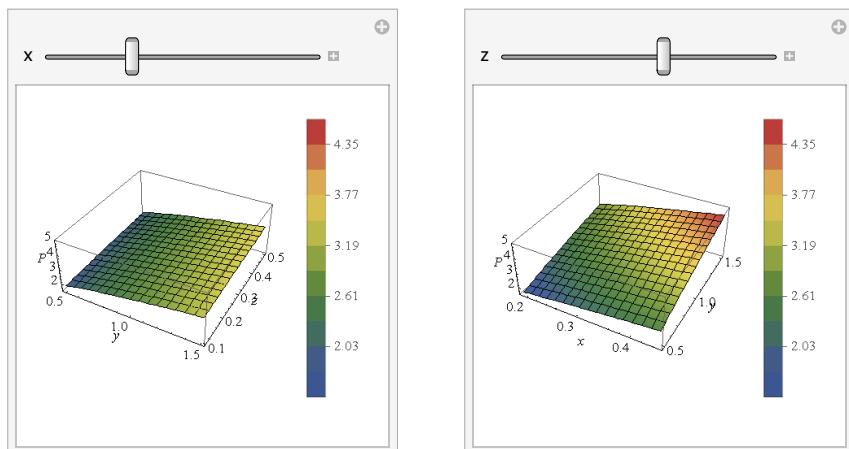
Namerané dátá aproximujeme mocninovou funkciou troch premených v tvare  $P = d x^a y^b z^c$ . Podobne ako pri funkcii dvoch premených, aj tu študenti musia použiť nešpecifický transfer, keď poznatky o aproximácii funkciou jednej premennej aplikujú tentoraz na funkciu až troch premenných.



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Zobrazenie závislosti  $P$  od jednej nezávislej premennej pri pôsobení ostatných môžeme realizovať pomocou čiary, podobne ako pri funkcií jednej premennej, keď ostatné dve fixujeme konštantou. Podobne zobrazíme aj závislosť  $P$  od dvoch nezávislých premenných pomocou plochy, keď tretiu fixujeme konštantou. V tomto nám veľkú službu urobí možnosť vytvárať dynamické grafy, keď hodnotu fixovaných premenných môžeme ručne alebo automaticky meniť pomocou posuvníkov (obr. 4, 5 a 6), čím dostaneme celkový obraz o pôsobení jednotlivých nezávislých premenných.

### 3 Záver

Hoci rozsah základných matematických kurzov na technických vysokých školách väčšinou priamo nepokrýva potreby budúcich inžinierov, s istou úrovňou schopnosti aplikovať a usmernením by mali byť študenti schopní ich naplniť. V prezentovanom príklade predpokladáme u študenta absolvovanie základného kurzu matematiky so základmi geometrie, numerickej matematiky a istú dávku zručnosti v práci so softvérom umožňujúcim vytvárať dynamické alebo statické grafy funkcií a množín bodov. Pri absentovaní základných znalostí a zručností sa budúci inžinieri môžu spoliehať iba na výstupy automatizovaného spracovania softvérom, čo však často vedie k mýlnej interpretácii.

Uplatnením znalostí zo štatistickej analýzy sa dá interpretácia výsledkov veľmi účinne doplniť o vyhodnotenie relevantnosti vplyvu jednotlivých nezávislých premenných.

Obrázky boli generované softvérom Wolfram Mathematica 9.

### Literatúra

- [1] M. Bachratý, M. Tolnay, et.al.: *Impact of cutting environment on cutting power in selected conditions*. Advanced Manufacturing Technologies: 6th international seminar. Sozopol /Bulgaria/, 22-28 June 2012. Sofia: University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 2012, pp. 23-28.
- [2] J. Gabková, D. Richtáriková: *Základy numerickej matematiky : Teória a riešené príklady*. Bratislava, Nakladateľstvo STU, 2012. 213 p., ISBN 978-80-227-3658-9
- [3] A. Ralston: *Základy numerické matematiky*. Praha. Academia, 1987
- [4] Documentation Center, Wolfram Mathematica

# Perceptual illusion in spatial perception

Adam Rużyczka

*Dep. of Land Reclamation and Environmental Development, Fac. of Environmental Engineering and Land Surveying, Univ. of Agriculture in Krakow, Al. Mickiewicza 21, 31-120 Krakow, Poland  
email: rmrujycz@cyf-kr.edu.pl*

**Abstract.** The two competitive concepts exist in the field of research on the processes of visual perception:

- informative approach, explaining the process of reality creation solely on the basis of sensory data,  
- ecological approach, focused on identifying stable properties of perceived objects. The perceived objects are arranged in a given order — we perceive the sense and logic of both their spatial distribution, i.e. distinction, size and location, and the temporal distribution. The resulting image is usually characterized by a figure with well-defined shape and spatial location, and its background.

Focusing solely on the figure or “confounding effect of background”, afterimage continuing to appear in one’s vision for a while after the stimulation has ceased, color or even movement of an observed object are sometimes reflected by a “distortion” of perceived image. The presentation will focus on examples of “optical illusions” and an attempt to explain the origin thereof.

**Key words:** Sensory impression, optic illusion

## 1 Introduction

Perception of stimuli from a surrounding environment starts with activation of receptor surface in a given sensory analyzer. This activation results from the so-called transduction process, i.e. transforming energy of the stimulus, e.g. intensity of light, sound, smell or touch, into neuronal activity. Anatomical coding distinguishes solely between the stimuli that belong to various sense modalities. Afterimage observed in the case of visual stimulation resembles sensory memory, as the sensory analyzer remains activated for a while after the stimulation has ceased. Specificity of this phenomenon – namely, a feature distinguishing it from the sensory buffer – was shown by Massaro [3] on the example of the following demonstration. If a one-second flashlight appears in a darkened room, an examined person, although still in darkness, will be able to “see” the objects present in this room for a period of time.

## 2 Identification of features

An attempt to deconstruct a perceived object into simple components seems to be an obvious first step in the analysis of surrounding environment. Such analysis underlies a research perspective based on an integrative character of perception processes. The simple components can be combined in a complex image of the perceived object. Such research perspective fits into informative

approach to perception process, explaining the process of reality creation on the basis of sensory data. In contrast, a competitive ecological approach is based on identification of stable properties of perceived objects, that can facilitate further adjustment to environmental conditions.

Various groups of neurons respond to specific characteristics of a perceived object, e.g. its shape, orientation, movement in a given direction or color. Therefore, various categories of neurons respond to different (either simple or complex) elements of perceived environment. These neurons are referred to as feature detectors.

According to Konorski's [2] perception theory, the integrative role of sensory analyzers in the process of synthesizing features results in creation of images in form of unitary perceptions, represented by gnostic units located in the so-called gnostic areas. The process of integrating features into complete representation of an object likely takes place during eye movements of an observer.

## 2.1 Stable features of objects

One function of the perceptual system is registration of invariants, i.e. stable characteristics identified during smooth change of a perspective resulting from movement of an observer in relation to an observed object (extracting invariants under transformation).

## 2.2 Perceptual synthesis

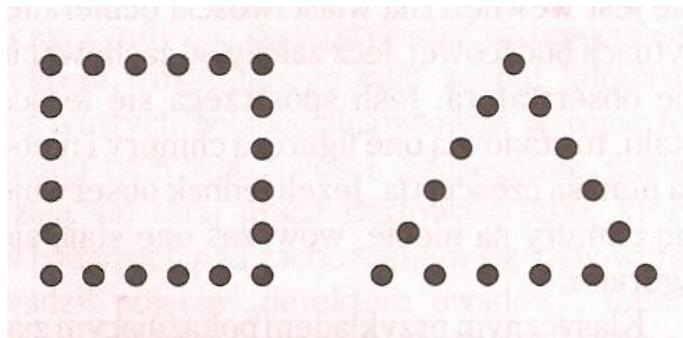
The perceived objects are arranged in a given order — we perceive the sense and logic of both their spatial distribution, i.e. distinction, size and location, and the temporal distribution, also with regards to their movement. The logic of perception combines processes that extend far beyond the scope defined by the specificity of sensory analyzers.

## 2.3 Organization of perception processes

The perceptual ability to implement order and symmetry into registered stimuli is particularly emphasized in one of perception research concepts, referred to as gestalt psychology. Perceiving an object by extracting it from an array of other stimuli is possible due to dividing a cognitive area into figure and background. The figure is usually well defined by its shape and spatial location. The background is typically amorphous and serves mostly as a localization aid (Ryc.1.).



Ryc.1 Profiles and goblet as alternating figures and backgrounds



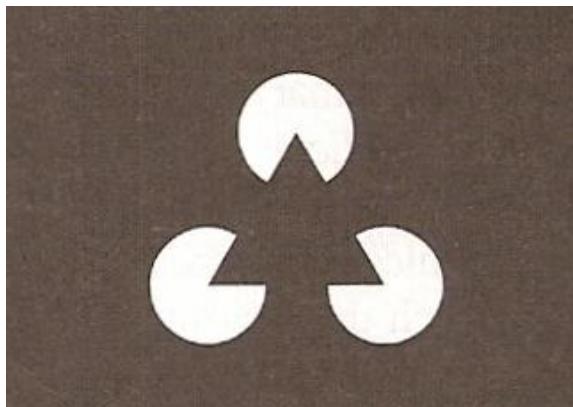
Ryc. 2. Examples of figures that can be perceived due to perceptual grouping of elements

The examples (Ryc. 1. and Ryc. 2.) presented on the figures suggest that one can create reality. He/she can recognize various figures, i.e. organize perceived stimuli in a freely selected manner. Such approach to perception research was reflected by development of a concept referred to as constructivism [4]. Constructivism constitutes a foundation for the principles of gestalt psychology:

- organization of perceived reality
- perceptual grouping

These principles refer to a phenomenon that enables extraction of a figure from its background (Ryc. 3.):

1. Principle of proximity states that elements being close together, rather than those being far apart, form the same object.
2. Principle of similarity states the same with regards to objects that are similar to each other.
3. Principle of closure states that the perceptual system adds lacking elements, thus "closing" the shape of an incomplete figure.
4. The so-called "good figure" or "good continuation" principle corresponds to a simplicity of a perceived object, manifesting mostly by its symmetry and regularity of its shape.
5. The principle of "common fate" states that elements seen moving in the same direction are perceived together and form the same figure.



Ryc. 3. Illusory contour of a triangle

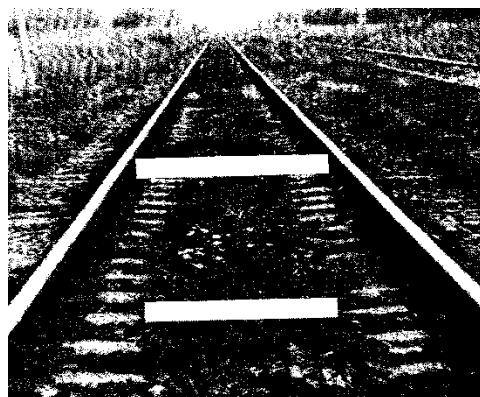
## 2.4 Perceptual organization in view of the informative approach

The concept of perceptual organization is linked to the informative approach to perception. This approach describes a human being as an active individual, who stores, processes and updates information, both originating from surrounding environment and recalled from his/her memory.

## 2.5 Perceptual illusion in spatial perception

Although the horizontal lines presented on the figure are of equal length, one perceives the upper line longer than the lower one (Ryc. 4.). One possible explanation of this phenomenon is unwitting inference based on the following two premises:

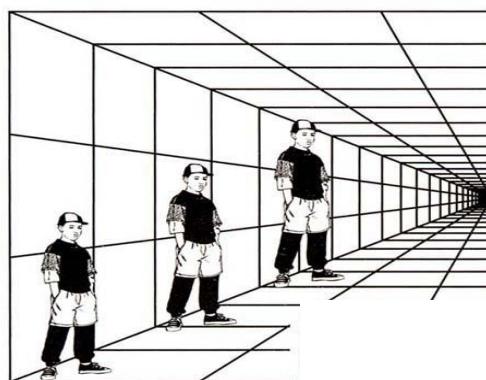
1. From a perspective, the objects producing retinal images of different sizes are interpreted as being of the same size if a farther object is larger than a nearer one.
2. The lines presented on the figure produce retinal images of the same size as the larger line is located farther from the shorter one.



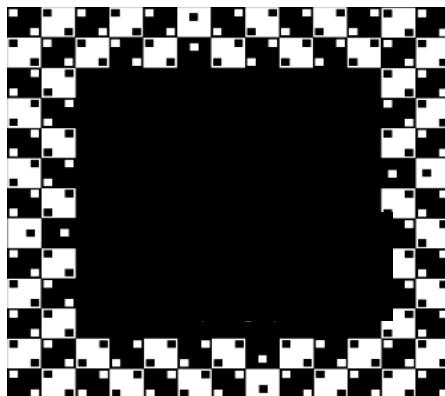
Ryc. 4. Ponzo (railway track) illusion

Strelau J.(red.): Psychologia – podręcznik akademicki, tom II. GWP, Gdańsk 2003 p.49

Two oblique lines (Ryc.4.) forming a railway track activate cognitive representation of three-dimensional space. This internal context creates expectations with regards to perception of objects and events. Other examples (Ryc. 5. and Ryc. 6.).



Ryc. 5. Is the boy in the back truly the largest one?



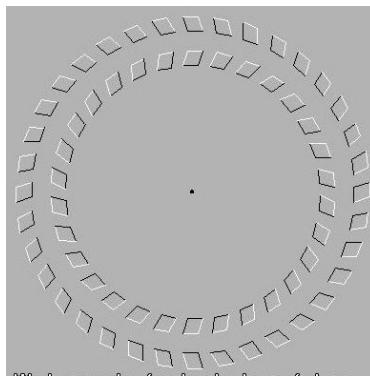
Ryc. 6. These are ideal squares

Looking at all the hereby presented figures, one may clearly notice that they do not have much in common with true objects and events from a surrounding environment.

Moreover, an observer can see an object from only one, isolated perspective. Thus an observer is deprived of the elementary behavioral function, i.e. movement.

## 2.6 P Role of movement in perception: ecological approach

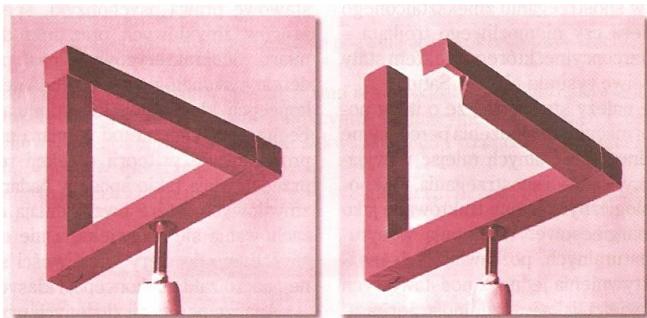
Such limitation leads to unnatural situations, promoting perceptual errors, and subsequent creation of psychological theories of perception that are based on the erroneous assumptions (Ryc. 7.).



Ryc. 7. Looking at the dot one can (from different distances) see moving wheels

## 2.7 Perception of the unrealistic shape

Let's have a look at the Penrose triangle (ryc. 8). Although the "true" construction of this triangle is clearly visible, cognitive curiosity stimulated by unrealistic shape of this object forces one to detailed analysis of this phenomenon from various perceptual perspectives. Changing the perspective leading to perception of the unrealistic shape into another one, one will immediately reveal the true construction of the triangle.



Ryc. 8. Construction of a Penrose triangle

Gregory R.L. : Perceptions as hypotheses. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1980; 290(series B)p.183.

## 3 Conclusion

We presented a perception at the level of sensory impressions, i.e. a sensory processing of simple characteristics of stimuli, along with a perception at the level of experiencing and recognizing specific complex objects in a surrounding environment.

The analysis of perception of complex objects started from characterization of an ultra short-term memory, referred to as a sensory buffer and determining perception of any kind. The processes of perception were presented with regards to identification of features, emphasizing the importance of integrating simple components of a stimulus into a given structure, as well as in terms of perceptual synthesis, highlighting the role of expectations and possessed knowledge in the process of perceptual organization. This analysis points to possibility of potential practical application of these phenomena, for example in fashion design, interior design and advertising industry.

## References

- [1] Gregory R.L.: Perceptions as hypotheses. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1980; 290 (series B):181–197.
- [2] Konorski J.: Integracyjna działalność mózgu. PWN, Warszawa 1969.

- [3] Massaro D.W.: Experimental psychology and information processing. IL: Rand-McNally, Chicago 1975.
- [4] Neisser U.: Cognitive psychology. Appleton-Contury-Crofts, New York 1967.
- [5] Strelau J.(red.): Psychologia – podręcznik akademicki, tom II. GWP, Gdańsk 2003.

# Fractions, Projective Representation, Duality, Linear Algebra and Geometry

Vaclav Skala

*Department of Computer Science and Engineering, Faculty of Applied Sciences,  
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Czech Republic  
<http://www.VaclavSkala.eu>*

**Abstract.** This contribution describes relationship between fractions, projective representation, duality, linear algebra and geometry. Many problems lead to a system of linear equations and this paper presents equivalence of the cross–product operation and solution of a system of linear equations  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  or  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  using projective space representation and homogeneous coordinates. It leads to conclusion that division operation is not required for a solution of a system of linear equations, if the projective representation and homogeneous coordinates are used. An efficient solution on CPU and GPU based architectures is presented with an application to barycentric coordinates computation as well.

*Key words:* Linear system of equations, extended cross product, projective space computation, geometric algebra, scientific computation.

## 1 Introduction

Many applications, not only in computer vision, require a solution of a homogeneous system of linear equations  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  or a non-homogeneous system of linear equations  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . However, the numerical solution actually does not allow further symbolic manipulation. Even more, solutions of equations  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  are considered as different problems and especially  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  is not usually solved quite correctly as users tend to use some additional condition for  $\mathbf{x}$  unknown (usually setting  $x_k = 1$  or so).

Many problems in computer vision, computer graphics and visualization are 3-dimensional. Therefore, specific numerical approaches can be applied to speed up the solution. In the following extended cross product, also called outer product or progressive product, is introduced in the “classical” notation using the “ $\times$ ” symbol.

## 2 Extended Cross-product

Let us consider the standard cross product of two vectors  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$  and  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ . Then the cross product is defined as:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

where:  $\mathbf{i} = [1,0,0]^T$ ,  $\mathbf{j} = [0,1,0]^T$ ,  $\mathbf{k} = [0,0,1]^T$ .

If a matrix form is needed, then we can write:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

In some applications, the matrix form is more convenient.

Let us introduce the extended cross product of three vectors  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]^T$ ,  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T$  and  $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T$ ,  $n = 4$  as:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{l} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

where:  $\mathbf{i} = [1, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{j} = [0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{k} = [0, 0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{l} = [0, 0, 0, 1]^T$ .

It can be shown that there exists a matrix form for the extended cross-product representation:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{34} & \delta_{24} & -\delta_{23} \\ \delta_{34} & 0 & -\delta_{14} & \delta_{13} \\ -\delta_{24} & \delta_{14} & 0 & -\delta_{12} \\ \delta_{23} & -\delta_{13} & \delta_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

where:  $n = 4$ . In this case and  $\delta_{ij}$  are sub-determinants with columns  $i, j$  of the matrix  $\mathbf{T}$  defined as:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

e.g. sub-determinant  $\delta_{24} = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$  etc.

The extended cross product for 5-dimensions is defined as:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{l} & \mathbf{n} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix} \quad (6)$$

where:  $\mathbf{i} = [1, 0, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{j} = [0, 1, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{k} = [0, 0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{l} = [0, 0, 0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{n} = [0, 0, 0, 0, 1]^T$ . It can be shown that there exists a matrix form as well:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} \times \mathbf{d} \\ = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 0 & -\delta_{345} & \delta_{245} & -\delta_{235} & \delta_{234} \\ \delta_{345} & 0 & -\delta_{145} & \delta_{135} & -\delta_{134} \\ -\delta_{245} & \delta_{145} & 0 & -\delta_{125} & \delta_{124} \\ \delta_{235} & -\delta_{135} & \delta_{125} & 0 & -\delta_{123} \\ -\delta_{234} & \delta_{134} & -\delta_{124} & \delta_{123} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

where  $n = 5$ . In this case and  $\delta_{ijk}$  are sub-determinants with columns  $i, j, k$  of the matrix  $\mathbf{T}$  defined as:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

e.g. sub-determinant  $\delta_{245}$  is defined as:

$$\begin{aligned}\delta_{245} &= \det \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_5 \\ b_2 & b_4 & b_5 \\ c_2 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \\ &= a_2 \det \begin{bmatrix} b_4 & b_5 \\ c_4 & c_5 \end{bmatrix} - a_4 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_5 \\ c_2 & c_5 \end{bmatrix} + a_5 \det \begin{bmatrix} b_2 & b_4 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (9)$$

In spite of the “complicated” description above, this approach leads to a faster computation in the case of lower dimensions [1],[2].

### 3 Extended Cross-product

Projective representation and its application for computation is considered mysterious or too complex. Nevertheless, we are using it naturally very frequently in the form of fractions, e.g.  $a/b$ . We also know that fractions help us to express values, which cannot be expressed precisely due to limited length of a mantissa, e.g.  $\frac{1}{3} = 0,33 \dots \dots 333\dots = 0.\bar{3}$ . In the following, we will explore projective representation, actually rational fractions, and its applicability.

#### 3.1 Projective representation

Projective extension of the Euclidean space is used commonly in computer graphics and computer vision mostly for geometric transformations. However, in computational sciences, the projective representation is not used, in general. This chapter shortly introduces basic properties and mutual conversions.

The given point  $X = (X, Y)$  in the Euclidean space  $E^2$  is represented in homogeneous coordinates as  $\mathbf{x} = [x, y: w]^T$ ,  $w \neq 0$ . It can be seen that  $\mathbf{x}$  is actually a line in the projective space  $P^3$  with the origin excluded. Mutual conversions are defined as:

$$X = \frac{x}{w} \quad Y = \frac{y}{w} \quad (10)$$

where:  $w \neq 0$  is the homogeneous coordinate. Note that the homogeneous coordinate  $w$  is actually a scaling factor with no physical meaning, while  $x, y$  are values with physical units in general.

The projective representation enables us nearly double precision as the mantissa of  $x$ , resp.  $y$  and  $w$  are used for a value representation. However, we have to distinguish two different data types, i.e.

- Projective representation of a  $n$ -dimensional value  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , represented by one-dimensional array  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n: x_w]^T$ , e.g. coordinates of a point, that is fixed to the origin.
- Projective representation of a  $n$ -dimensional vector (in the mathematical meaning)  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ , represented by one dimensional array  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n: a_w]^T$ . In this case, the homogeneous coordinate  $a_w$  is actually just a scaling factor. Any vector is not fixed to the origin of the coordinate system and it is “movable”.

Therefore, a user should take an attention to the correctness of operations.

### 3.2 Principle of Duality

The projective representation offers also one very important property – principle of duality. The principle of duality in  $E^2$  states that any theorem remains true when we interchange the words “point” and “line”, “lie on” and “pass through”, “join” and “intersection”, “collinear” and “concurrent” and so on. Once the theorem has been established, the dual theorem is obtained as described above. In other words, the principle of duality says that in all theorems it is possible to substitute the term “point” by the term “line” and the term “line” by the term “point” etc. in  $E^2$  and the given theorem stays valid. Similar duality is valid for  $E^3$  as well, i.e. the terms “point” and “plane” are dual etc. it can be shown that operations “join” a “meet” are dual as well.

This helps a lot to solve some geometrical problems. In the following, we will demonstrate that on very simple geometrical problems like intersection of two lines, resp. three planes and computation of a line given by two points, resp. of a plane given by three points.

## 4 Solution of $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Solution of non-homogeneous system of equation  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  is used in many computational tasks. For simplicity of explanation, let us consider a simple example of intersection computation of two lines  $p_1$  and  $p_2$  in  $E^2$  given as:

$$p_1: A_1X + B_1Y + C_1 = 0 \quad p_2: A_2X + B_2Y + C_2 = 0 \quad (11)$$

An intersection point of two those lines is given as a solution of a linear system of equations:  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Generally, for the given system of  $n$  liner equations with  $n$  unknowns in the form  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  the solution is given:

$$X_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})} \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

where:  $\mathbf{A}$  is a regular matrix  $n \times n$  having non-zero determinant, the matrix  $\mathbf{A}_i$  is the matrix  $\mathbf{A}$  with replaced  $i^{th}$  column by the vector  $\mathbf{b}$  and  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$  is a vector of unknown values.

In a low dimensional case using general methods for solution of linear equations, e.g. Gauss-Seidel elimination etc., is computational expensive. In addition, division operation is computationally expensive and decreasing precision of a solution.

Usually, a condition **if**  $\det(\mathbf{A}) < \text{eps}$  **then** EXIT is taken for solving “close to singular cases”. Of course, nobody knows, what a value of  $\text{eps}$  is appropriate.

## 5 Solution of $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

There is another very simple geometrical problem; determination of a line  $p$  given by two points  $\mathbf{X}_1 = (X_1, Y_1)$  and  $\mathbf{X}_2 = (X_2, Y_2)$  in  $E^2$ . This seems to be a quite simple problem as we can write:

$$aX_1 + bY_1 + c = 0 \quad aX_2 + bY_2 + c = 0 \quad (14)$$

i.e. it leads to a solution of homogeneous systems of equations  $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ , i.e.:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (15)$$

In this case, we obtain one parametric set of solutions as the Eq.(15) can be multiplied by any value  $q \neq 0$  and the line is the same.

There is a problem – we know that lines and points are dual in the  $E^2$  case, so the question is why the solutions are not dual. However, if the projective representation is used the duality principle will be valid, as follows.

## 6 Solutions of $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ and $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

Let us consider again intersection of two lines  $\mathbf{p}_1 = [a_1, b_1: c_1]^T$  and  $\mathbf{p}_2 = [a_2, b_2: c_2]^T$  leading to a solution of non-homogeneous linear system  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ , which is given as:

$$p_1: a_1X + b_1Y + c_1 = 0 \quad p_2: a_2X + b_2Y + c_2 = 0 \quad (16)$$

If the equations are multiplied by  $w \neq 0$  we obtain:

$$\begin{array}{ll} p_1: a_1X + b_1Y + c_1 \triangleq & p_2: a_2X + b_2Y + c_2 \triangleq \\ a_1x + b_1y + c_1w = 0 & a_2x + b_2y + c_2w = 0 \end{array} \quad (17)$$

where:  $\triangleq$  means „projectively equivalent to“ as  $x = wX$  and  $y = wY$ .

Now we can rewrite the equations to the matrix form as  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

where  $\mathbf{x} = [x, y: w]^T$  is the intersection point in the homogeneous coordinates.

In the case of computation of a line given by two points given in homogeneous coordinates, i.e.  $\mathbf{x}_1 = [x_1, y_1: w_1]^T$  and  $\mathbf{x}_2 = [x_2, y_2: w_2]^T$ , the Eq.(14) is multiplied by  $w_i \neq 0$ . Then, we get a solution in the matrix form as  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ , i.e.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (19)$$

Now, we can see that the formulation is leading in the both cases to the same numerical problem: to a solution of a homogeneous linear system of equations.

However, a solution of homogeneous linear system of equations is not quite straightforward as there is a one parametric set of solutions and all of them are projectively equivalent. It can be seen that the solution of Eq. (18), i.e. intersection of two lines in  $E^2$ , is equivalent to:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 \quad (20)$$

Due to the principle of duality we can write for a line given by two points:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \quad (21)$$

In the three dimensional case we can use extended cross product.

A plane  $\rho: aX + bY + cY + d = 0$  given by points  $\boldsymbol{x}_1 = [x_1, y_1, z_1: w_1]^T$ ,  $\boldsymbol{x}_2 = [x_2, y_2, z_2: w_2]^T$  and  $\boldsymbol{x}_3 = [x_3, y_3, z_3: w_3]^T$  is determined in the projective representation as:

$$\boldsymbol{\rho} = [a, b, c: d]^T = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \times \boldsymbol{x}_3 \quad (22)$$

and the intersection point  $\boldsymbol{x}$  of three planes points  $\boldsymbol{\rho}_1 = [a_1, b_1, c_1: d_1]^T$ ,  $\boldsymbol{\rho}_2 = [a_2, b_2, c_2: d_2]^T$  and  $\boldsymbol{\rho}_3 = [a_3, b_3, c_3: d_3]^T$  is determined in the projective representation as:

$$\boldsymbol{x} = [x, y, z: w]^T = \boldsymbol{\rho}_1 \times \boldsymbol{\rho}_2 \times \boldsymbol{\rho}_3 \quad (23)$$

due to the duality principle.

It can be seen that there is no division operation needed, if the result can be left in the projective representation.

The approach presented above has another one great advantage as it allows symbolic manipulation as we have avoided numerical solution and precision is nearly doubled.

## 7 Barycentric coordinates

The barycentric coordinates are often used in many engineering applications, not only in geometry. The barycentric coordinates computation leads to a solution of a system of linear equations. However it was shown, that a solution of a linear system equations is equivalent to the extended cross product [3],[4],[5]. Therefore, it is possible to compute the barycentric coordinates using cross product, which is convenient for application of SSE instructions or for GPU oriented computations. Let us demonstrate the proposed approach on a simple example again.

Given a triangle in  $E^2$  defined by points  $\boldsymbol{x}_i = [x_i, y_i: 1]^T$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , the barycentric coordinates of the point  $\boldsymbol{x}_0 = [x_0, y_0: 1]^T$  can be computed as follows:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= x_0 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 &= y_0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

For simplicity, we set  $w_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . It means that we have to solve a system of linear equations  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

if the points are given in the projective space with homogeneous coordinates  $\boldsymbol{x}_i = [x_i, y_i: w_i]^T$ ,  $i = 1, \dots, 3$  and  $\boldsymbol{x}_0 = [x_0, y_0: w_0]^T$ . It can be proved, due to the multilinearity, we need to solve a linear system  $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ w_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Let us define new vectors containing a row of the matrix  $\mathbf{A}$  and vector  $\mathbf{b}$  as:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_0]^T \quad \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_0]^T \quad \mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_0]^T \quad (27)$$

The projective barycentric coordinates  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_w]^T$  are given as:

$$\lambda_1 = -\frac{\xi_1}{\xi_w} \quad \lambda_2 = -\frac{\xi_2}{\xi_w} \quad \lambda_3 = -\frac{\xi_3}{\xi_w} \quad (28)$$

i.e.

$$\lambda_i = -\frac{\xi_i}{\xi_w} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (29)$$

Using the extended cross product, the projective barycentric coordinates are given as:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{l} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} \\ &= [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_w]^T \end{aligned} \quad (30)$$

where  $\mathbf{i} = [1, 0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{j} = [0, 1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{k} = [0, 0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{l} = [0, 0, 0, 1]^T$ .

Similarly in the  $E^3$  case, given a tetrahedron in  $E^3$  defined by points  $\mathbf{x}_i = [x_i, y_i, z_i : w_i]^T$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , and the point  $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0, z_0 : w_0]^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2, x_3, x_4 : x_0]^T & \mathbf{y} &= [y_1, y_2, y_3, y_4 : y_0]^T \\ \mathbf{z} &= [z_1, z_2, z_3, z_4 : z_0]^T & \mathbf{w} &= [w_1, w_2, w_3, w_4 : w_0]^T \end{aligned} \quad (31)$$

Then the projective barycentric coordinates are given as:

$$\xi = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z} \times \mathbf{w} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 : \xi_w]^T \quad (32)$$

The Euclidean barycentric coordinates are given as:

$$\lambda_1 = -\frac{\xi_1}{\xi_w} \quad \lambda_2 = -\frac{\xi_2}{\xi_w} \quad \lambda_3 = -\frac{\xi_3}{\xi_w} \quad \lambda_4 = -\frac{\xi_4}{\xi_w} \quad (33)$$

i.e.

$$\lambda_i = -\frac{\xi_i}{\xi_w} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (34)$$

It can be seen that method of the barycentric coordinates is simple and convenient for vector-vector operations especially if SSE instructions or GPU is used.

## 8 GPU implementation

Many today's computational systems can use GPU support, which allows fast and parallel processing. The above presented approach offers significant speed up as the "standard" cross product is implemented in hardware as an instruction and the extended cross-product for 4D can be implemented as:

```
float4 cross_4D(float4 x1, float4 x2, float4 x3)
{
    float4 a;
    a.x = dot(x1.yzw, cross(x2.yzw, x3.yzw));
    a.y = -dot(x1.xzw, cross(x2.xzw, x3.xzw));
    a.z = dot(x1.xyw, cross(x2.xyw, x3.xyw));
    a.w = -dot(x1.xyz, cross(x2.xyz, x3.xyz));
    return a}
```

In general, it can be seen that a solution of linear systems of equations on GPU for a small dimension  $n$  is simple, fast and can be performed in parallel.

## 9 Conclusion

Projective representation is not widely used for general computation as it is mostly considered as applicable to computer graphics and computer vision field only. In this paper, the equivalence of cross product and solution of linear system of equations has been presented. The presented approach is especially convenient for 3-dimensional and 4 dimensional cases applicable in many engineering and statistical computations, in which significant speed up can be obtained using SSE instructions or GPU use. In addition, the presented approach enables symbolic manipulation as the solution of a system of linear equations is transformed to extended cross product using a matrix form, which enables symbolic manipulations.

Direct application of the presented approach has also been demonstrated on the barycentric coordinates computation and simple geometric problems.

The presented approach enables avoiding division operations, as a denominator is actually stored in the homogeneous coordinate  $w$ . It that leads to significant computational savings, increase of precision and robustness as the division operation is the longest one and the most decreasing precision of computation.

The above presented approach is based on author's recent publications mentioned in References below.

## Acknowledgements

The author would like to thank to colleagues at the University of West Bohemia in Plzen for discussions and to anonymous reviewers for their comments and hints, which helped to improve the manuscript significantly.

Research was supported by the MSMT CZ, project No.LH12181.

## References

- [1] Skala,V.: Plücker Coordinates and Extended Cross Product for Robust and Fast Intersection Computation, CGI 2016 proceedings, ACM, pp.57-60, Greece, 2016
- [2] Skala,V.: “Extended Cross-product” and Solution of a Linear System of Equations, Computational Science and Its Applications, ICCSA 2016, LNCS 9786, Vol.I, pp.18-35, Springer, 2016
- [3] Skala,V.: Barycentric Coordinates Computation in Homogeneous Coordinates, Computers & Graphics, Elsevier, ISSN 0097-8493, Vol. 32, No.1, pp.120-127, 2008
- [4] Skala,V.: Intersection Computation in Projective Space using Homogeneous Coordinates, Int. Journal of Image and Graphics, Vol.7, No.4, pp.615-628, 2008
- [5] Skala,V.: Length, Area and Volume Computation in Homogeneous Coordinates, Int. Journal of Image and Graphics, Vol.6., No.4, pp.625-639, 2006
- [6] Skala,V.: GPU Computation in Projective Space Using Homogeneous Coordinates , Game Programming GEMS 6 (Ed.Dickheiser,M.), pp.137-147, Charles River Media, 2006
- [7] Skala,V.: A new approach to line and line segment clipping in homogeneous coordinates, The Visual Computer, Vol.21, No.11, pp.905-914, Springer Verlag, 2005



# Construction of All Topologically Unique Quadrilateral Meshes: A Survey

Petra Surynková

Faculty of Mathematics and Physics, Charles University

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

[petra.surynkova@mff.cuni.cz](mailto:petra.surynkova@mff.cuni.cz)

**Abstract.** Much of literature on polygonal representations focuses on quadrilateral meshes which are composed of quadrilaterals as they possess several advantages compared to triangle meshes. In this short contribution we present a survey of known methods for enumeration all topologically unique quadrangulations and we suggest new method for computing all unique quadrilateral meshes of a certain class based on sequential construction.

**Keywords:** Quadrilateral meshes, quadrilateral,  $n$ -sided planar region.

## 1 Introduction

Polygonal meshes are widely used as a stepping stone for representations of 2D and 3D objects in many computational processes. The practical applications of polygonal meshes play a key role in computer-aided architectural and industrial design, [6], engineering and construction industries, [13], reverse engineering, [5], the digitization of real objects using 3D scanning, [1], digital surface reconstruction from point clouds, [14], the replication of the shapes of real-world objects using 3D printing, [8], computer graphics, [7] and many more. Quadrilateral meshes which are composed of quadrilaterals are used in most cases as polygonal meshes because they have significant advantages comparing to triangle meshes. On the other hand quadrilaterals are more delicate and less adaptive structures than triangles that is the study of quadrilateral meshes presents challenges to the both researchers and practitioners.

### 1.1 State of the Art in Quadrilateral Meshes

Regarding the state of the art in quadrilateral meshes, there exist several methods of constructing quadrangulations for an  $n$ -sided planar region which use different approaches. The paving techniques are based on iteratively paving rows of elements to the interior of a region's boundary, [2]. Some methods are using dual graph of quad mesh for the representation and enumeration of a set of all possible quad meshes, [10], or there exist methods which adaptively fills an  $n$ -sided region with a triangle mesh and then merges triangles to quads, [3]. Some approaches attempt to find a topology with the fewest irregular vertices, [11], quadrangulate an  $n$ -sided region with prescribed numbers of edge subdivisions at the boundary, [15], or use the partition to simple patches that contain one or zero irregular vertices, [12].

## 1.2 Terminology

A quadrilateral mesh, [4, 9], is a triple  $(V, E, Q)$  where  $V$  is a set of vertices,  $E$  is a set of edges, and  $Q$  is a set of quadrilaterals. There exists an embedding of  $(V, E, Q)$  into 2D plane such that each vertex is represented as a point in the plane and each edge is represented as a curve in the plane, so that curves connect vertices and each quad is depicted in the plane as a quadrilateral. In our study we furthermore assume only quadrilateral meshes that form a connected, conforming (i.e. free from T-junctions), orientable *2D manifold with boundary*, [4], i.e. we define quadrilateral meshes for segmentation of simply connected planar domains.

Regarding the terminology, an edge of the mesh with two incident quads is said to be *internal*, while an edge with just one incident quad is said to be *boundary*. A vertex of an internal edge is also said to be *internal*, otherwise it is said to be *boundary*. The *valence* of a vertex is the number of edges incident to that vertex.

## 2 Incremental Construction

### 2.1 Quadrilateral Meshes of a Certain Class

For enumerating all possible quadrangulations with respect to some input we have to define some restriction on the types of meshes, otherwise the number of all possibilities is too high. Thus, in our work we consider only valences  $\leq 5$  for the both boundary and internal vertices. The quadrilateral meshes furthermore satisfy the following invariant:

- At least one vertex of each internal edge is internal.

We assume that the number of internal vertices is specified for exploring all possible unique quadrangulations. We also distinguish the types of valences of these internal vertices, for internal vertices only valences 3, 4, and 5 are allowed. The set of quadrilateral meshes with  $n_3$  internal vertices of valence 3,  $n_4$  internal vertices of valence 4, and  $n_5$  internal vertices of valence 5 is denoted by  $M(n_3, n_4, n_5)$ .

### 2.2 Incremental Construction of Quadrilateral Mesh

Our goal is to develop an incremental construction of a quadrilateral mesh and enumerate all unique meshes of a certain class. More precisely, an algorithm will enumerate all possible quad layouts with respect to the number of internal vertices with the given valences and the duplications will be filtered out within a further post-processing for computed set of meshes.

We construct a concrete quadrilateral mesh  $M \in M_I(n_3, n_4, n_5)$ , i.e. a mesh with  $n$  internal vertices where the types of valences are distinguished, incrementally starting from a trivial mesh with one internal ver-

tex. In each step of construction the number of internal vertices of a quadrilateral mesh  $M$  is increased by one by adding new elements into a quadrilateral mesh or by additional modifying of a quadrilateral mesh using *mesh operations*. A quadrilateral mesh always satisfies the invariant, i.e. at least one vertex of each internal edge is internal, before and after modification.

The algorithm for enumerating all topologically unique quadrilateral meshes will compute all possibilities of construction, i.e. it will consider all orders of mesh operations and all possibilities of parts in a quadrilateral mesh to which mesh operations can be applied.

### 3 Conclusion

We presented a survey of existing methods in quadrangulations of an  $n$ -sided planar region and a framework of a new constructing method for generating of all possible unique quadrilateral meshes of a certain class for the given number of internal vertices. We will focus on the formulation of mesh operations and on implementation of an algorithm. The experimental evaluation will be provided and targeted on the number of meshes in different sets  $M(n_3, n_4, n_5)$ .

Regarding the future work we want to extend our method for hexahedral meshes and suggest similar incremental construction in the 3D space.

## References

- [1] 3DSYSTEMS: *3D Scanners - A Guide to 3D Scanner Technology*, <http://www.rapidform.com>, 1989, [retrieved July 2015]
- [2] T. Blacker, M. Stephenson: *Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation*, Numerical Methods in Engineering, 32(4), 811847, 1991
- [3] H. Borouchaki, P. J. Rey: *Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation*, Numerical Methods in Engineering, 41(5), 915934, 1998
- [4] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, B. Lévy: *Polygon Mesh Processing*, A K Peters, Natick, 2010
- [5] E. Eilam: *Reversing: Secrets of Reverse Engineering*, Wiley Publishing, Indianapolis, 2005
- [6] F. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier Science, Amsterdam, 2002
- [7] J. D. Foley, A. Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes: *Computer Graphics: Principle and Practice*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- [8] H. Lipson, M. Kurman: *Fabricated: The New World of 3D Printing*, John Wiley and Sons, Indianapolis, 2013
- [9] S. A. Mitchell: *A Characterization of the Quadrilateral Meshes of a Surface Which Admit a Compatible Hexahedral Mesh of the En-*

*closed Volume*, 13th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 1996

- [10] P. Murdoch, S. Benzley, T. Blacker, S. A. Mitchell: *The Spatial Twist Continuum: A Connectivity Based Method for Representing All-Hexahedral Finite Element Meshes*, Finite Elements in Analysis and Design, 28(2), 137-149, 1997
- [11] A. Nasri, M. Sabin, Z. Yasseen: *Filling N-Sided Regions by Quad Meshes for Subdivision Surfaces*, Computer Graphics Forum, 28(6), 1644-1658, 2009
- [12] C.-H. Peng, M. Barton, C. Jiang, P. Wonka: *Exploring Quadrangulations*, ACM Transactions on Graphics, 33(1), 2014
- [13] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian: *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, Exton, 2007
- [14] P. Surýnková: *Surface Reconstruction*, Proceedings of the 18th Annual Conference of Doctoral Students, MATFYZPRESS, 2009
- [15] K. Takayama, D. Panozzo, O. Sorkine-Hornung: *Pattern-Based Quadrangulation for N-Sided Patches*, Computer Graphics Forum, 33(5), 177184, 2014

# Kvantifikácia tvaru územia s využitím v kartografii

## Quantification of the territory shape with the use in cartography

Margita Vajsálová, Zuzana Klimeková

*Department of mathematics and descriptive geometry, Faculty of Civil Engineering*

*Slovak University of Technology*

*Radlinského 11, 810 05 Bratislava, Slovak Republic*

*email: margita.vajsablova@stuba.sk, zuzana.klimekova@stuba.sk*

**Abstract.** Geometric characteristics of the area (shape, position and area) are the key factor in choosing the appropriate type of cartographic projection. The shape of the territory on the plane is expressed by the compactness index, which is used in various geospatial analysis, as a settlement geography, in characterizing land cover, but also to define the criteria for the accuracy of the area on the cadastral maps. In this article we will focus on deriving the index of compactness for the territory on the reference sphere and the reference ellipsoid (Vajsálová, 2015). Proposal equations are based on the criteria that the compactness index value equal to 1 for an area with a circular border and for the area approaching to linear object approximates to 0. Quantification of the shape of area will be shown on the design of the projection type for the selected European countries (Klimeková, 2014).

**Keywords:** compactness index, cartographic projection, reference surface

**Kľúčové slová:** index kompaktnosti, kartografické zobrazenie, referenčná plocha

### 1 Výber kartografického zobrazenia podľa geometrických charakteristík územia

Do tvorby kartografického diela vstupuje veľa faktorov od matematických kritérií, účelu mapy, až po mentálnu úroveň, či profesionálne zameranie budúceho užívateľa. Medzi základné kritéria vstupujúce do výberu vhodnej triedy kartografického zobrazenia patria geometrické charakteristiky územia - tvar, veľkosť a poloha, determinujúce druh a polohu zobrazovacej plochy. Prehľad optimálneho výberu typu zobrazenia podľa uvedeného je v Tab. 1.

Kvantifikáciou týchto charakteristík je možné zefektívniť výber zobrazenia, a tak dosiahnuť v kartografickom zobrazení podstatné zlepšenie skreslenia mapových prvkov územia. Kvantifikáciu tvaru územia ukážeme na referenčných plochách Zeme – rotačný elipsoid a sféra, pomocou tzv. indexu kompaktnosti. Kvantifikáciu uvedených charakteristík sme aplikovali pri výbere zobrazenia pre územia vybraných európskych štátov, u ktorých sme zefektívnenie výberu porovnali s určeným spôsob zobrazenia v súčasnosti záväznom Geodeticom súradnicovom systéme (GSS) príslušného štátu.

**Tabuľka 1: Výber zobrazenia podľa tvaru a polohy územia**

Tvar a poloha územia		Zobrazenie	
Kruhový	v oblasti pólu	azimutálne	v pôlovej polohe
	v oblasti bodu na rovníku		v rovníkovej polohe
	inde		vo všeobecnej polohe
Pozdĺžny	pozdĺž rovníka	valcové	v pôlovej polohe
	v smere zemského poludníka		v rovníkovej polohe
	v smere ortodrómy		vo všeobecnej polohe
	v smere zemskej rovnobežky	kužeľové	v pôlovej polohe
	v smere kartografickej rovnobežky		vo všeobecnej polohe

## 2 Kvantifikácia geometrických charakteristík územia a ich aplikácia

Geometrické charakteristiky sme určovali pre územia viacerých európskych štátov s využitím referenčného elipsoidu GRS 1980 (Klimeková, 2014). Hodnota indexu kompaktnosti počítaná z bodov jeho hranice je ovplyvnená samotnou členitosťou hranice územia a používa sa v geografickej klasifikácii územia štátov podľa tvaru. Na účely voľby vhodného typu zobrazenia sú vhodnejšie hodnoty kvantifikátorov oblastí ohraničujúcich štátne územia zemepisnými čiarami (elipsoidické, príp. sférické lichobežníky), teda oblúkmi krajných rovnobežiek a poludníkov.

### 2.1 Kvantifikácia polohy, veľkosti a tvaru územia na referenčných plochách Zeme

Nech elipsoidický lichobežník je daný oblúkmi krajných rovnobežiek a poludníkov zobrazovaného územia s elipsoidickými súradnicami:  $\varphi_{min}$ ,  $\varphi_{max}$ ,  $\lambda_{min}$ ,  $\lambda_{max}$ .

**Polohu** zobrazovaného územia je možné charakterizovať intervalom uvedených elipsoidických súradníc, príp. ich priemernou hodnotou, ktorá charakterizuje vnútorný bod  $T$  elipsoidického lichobežníka.

**Veľkosť** zobrazovaného územia je charakterizovaná jeho plošným obsahom  $p$ . Vzťah pre výpočet plošného obsahu  $p$  elipsoidického lichobežníka, ktorý územie ohraničuje je:

$$p = (\lambda_{max} - \lambda_{min}) \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} MN \cos \varphi \, d\varphi, \quad (1)$$

kde meridiánový polomer krivosti  $M$  a priečny polomer krivosti  $N$  v smere normálového rezu sú funkciou elipsoidickej šírky  $\varphi$  bodu:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2)$$

V určitých typoch kartografických zobrazení je určujúcim faktorom maximálnych skreslení rozsah zemepisných súradníc bodov na danom území.

Obvod  $o$  elipsoidického lichobežníka vyjadrujeme ako súčet oblúkov rovnobežiek a poludníkov:

$$o = (N_{\min} \cos \varphi_{\min} + N_{\max} \cos \varphi_{\max})(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) + 2 \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} M \, d\varphi. \quad (3)$$

**Tvar** územia vyjadruje tzv. index kompaktnosti, ktorému je venovaná veľká pozornosť vo viacerých prácach, avšak pre rovinné areály. Spoločnosť grafického vyjadrenia hranice areálu sa venovali viacerí autori, napr. (Shi, 1998), v článku (Ivánová, Vajsálová, 2005) aj s aplikáciou indexu kompaktnosti. V práci (Husár, 2000) je index kompaktnosti  $I_k$  rovinného areálu definovaný tak, že jeho hodnoty ležia v intervale (0, 1), kde  $I_k = 0$  pre úsečku a  $I_k = 1$  pre kruh. Vychádzajúc z tejto podmienky je vo (Vajsálová, 2015) formulovaný index kompaktnosti územia s plošným obsahom  $p$  a obvodom  $o$  na referenčnej ploche Zeme (elipsoide, guľovej ploche) v tvare:

$$I_k = k \frac{p}{o^2}. \quad (4)$$

Index kompaktnosti pre územie nachádzajúce sa na referenčnom elipsoide je navrhnutý tak, že vychádzame z vlastností guľovej plochy, ktorá aproximuje elipsoid v uvedenom bode  $T$  daného územia tak, aby obidve plochy mali v bode  $T$  rovnakú Gaussovou krivost. Potom polomer  $R$  tejto guľovej plochy sa rovná geometrickému priemeru krivosti  $M$  a  $N$  elipsoidu v bode  $T$ :

$$R = \sqrt{M_T N_T}, \quad (5)$$

Koeficient  $k$  vo vzťahu (4) určíme z podmienky, aby sa index kompaktnosti guľového vrchliku s polomerom  $R$  rovnal 1. Za obvod  $o_v$  vrchliku guľovej plochy je považovaná dĺžka hraničnej kružnice so zenitovým uhlom  $\alpha$  určeným od bodu  $T$ , jeho plošný obsah je  $p_v$ , potom z podmienky  $I_k = 1$  platí:

$$k = \frac{o_v^2}{p_v} = \frac{4\pi^2 R^2 \sin^2 \alpha}{2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)} = \frac{2\pi(1 - \cos^2 \alpha)}{1 - \cos \alpha} = 2\pi(1 + \cos \alpha). \quad (6)$$

Potom uhol  $\alpha$  pre ľubovoľné územie s plošným obsahom  $p$ , určujeme ako zenitový uhol vrchliku guľovej plochy s polomerom  $R$  podľa (5) s rovnakým plošným obsahom  $p$ , ako má dané územie, potom platí:

$$p_v = 2\pi M_T N_T (1 - \cos \alpha) = p, \quad (7)$$

odkiaľ je uhol  $\alpha$  vyjadrený z plošného obsahu  $p$  daného územia nasledovne:

$$\alpha = \arccos \left[ 1 - \frac{p}{2\pi M_T N_T} \right]. \quad (8)$$

Dosadením za  $\alpha$  do (6) dostaneme hodnotu koeficientu  $k$ :

$$k = 4\pi - \frac{p}{M_T N_T}. \quad (9)$$

Po dosadení (9) do (4) je vzťah pre výpočet indexu kompaktnosti ľubovoľného územia ležiaceho na rotačnom elipsoide:

$$I_k = \left(4\pi - \frac{P}{M_T N_T}\right) \frac{P}{o^2}. \quad (10)$$

Pri výpočte indexu kompaktnosti územia ležiaceho na guľovej ploche je potrebná v (10) substitúcia  $M_T = N_T = R$ . Pri tejto formulácii indexu kompaktnosti platí, že pre kruhové územie na elipsoide je hodnota indexu kompaktnosti  $I_k$  podľa (10) blízka 1, pre čiarový objekt sa rovná 0.

## 2.2 Aplikácia charakterísk pri výbere kartografického zobrazenia

Index kompaktnosti sme použili ako faktor výberu vhodného kartografického zobrazenia (Klimeková, 2014). Pre pozdĺžne tvary elipsoidických lichobežníkov (index kompaktnosti do 0,8), ktoré ohraničujú územia, považujeme za vhodné kužeľové, príp. valcové zobrazenie. Pre územia s indexom nad túto hranicu (územia kruhového charakteru) považujeme za vhodné azimutálne zobrazenie. Pozornosť sme upriamili na štátu s reálnou rozlohou do 100 000 km<sup>2</sup> určenou z hranice štátu, nakoľko pri rozľahlejších štátach je potrebné uvažovať o použití viacerých zobrazovacích plôch. V Tab. 2 sú geometrické charakteristiky ohraničujúcich elipsoidických lichobežníkov. Nie sú to reálne rozlohy štátov, sú väčšie, najväčšie rozdiely medzi reálnou rozlohou štátu a rozlohou jeho elipsoidického lichobežníka je u Chorvátska, ktorého územie má na referenčnej ploche veľmi členitý tvar (Obr. 2 vpravo).

**Tabuľka 2: Geometrické charakteristiky územia ohraničeného zemepisnými čiarami štátu**

Štát	Zobrazenie	Poloha $\phi^T; \lambda^T$	Rozloha lichobežníka [km <sup>2</sup> ]	Index kompakt.	Extr. dĺžkové skreslenie [cm/km]
Dánsko	UTM	56,27°; 9,52°	58680,14	0,717	-5 +11
Litva	UTM	55,17°; 23,96°	105150,27	0,771	-40 +4
Belgicko	Lambert	50,50°; 4,48°	61237,64	0,778	-7 +9
Holandsko	Ster.proj.	52,11°; 5,33°	78474,90	0,781	-9 +10
Rakúsko	G-K	47,70°; 13,35°	167958,65	0,704	0 +16
Švajčiarsko	Konf.valc.	46,82°; 8,22°	76139,47	0,747	+11 +19
Albánsko	G-K	41,15°; 23,96°	49926,44	0,670	0 +26
Chorvátsky	G-K	44,73°; 16,47°	188768,78	0,780	0 +18
Česko	Křovák	49,80°; 15,48°	136249,01	0,728	-10 +14
Maďarsko	EOV	47,16°; 19,51°	162718,02	0,740	-7 +26
Slovensko	Křovák				-10 +11
	Lambert	48,95°; 24,98°	88435,68	0,696	-7 +7

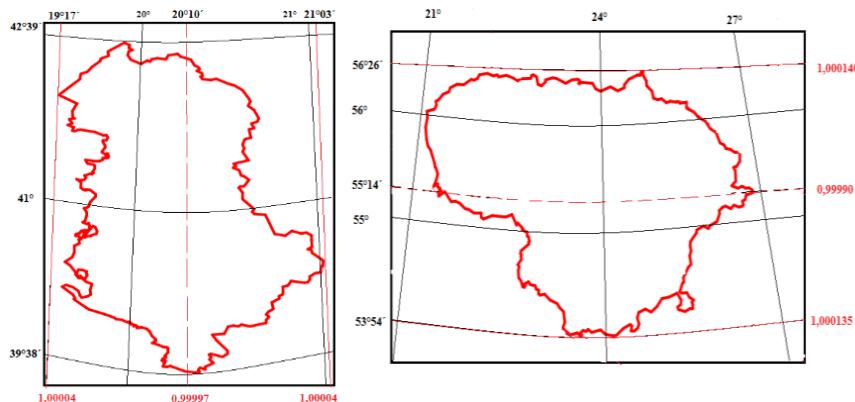
V Tab. 2 je tiež uvedené kartografické zobrazenie záväzne používané v GSS uvedených štátov. UTM a Gaussovo-Krúgerovo (G-K) zobrazenie sú konformné valcové zobrazenia v rovníkovej polohe. Lambertovo zobrazenie je konformné

kužeľové v pólovej a Křovákovo vo všeobecnej polohe. Švajčiarsko používa konformné valcové zobrazenie vo všeobecnej polohe, podobne ako Maďarsko, kde je uvádzané ako EOV. V Holandsku je používaná stereografická azimutálna projekcia, čo je konformné zobrazenie do roviny vo všeobecnej polohe.

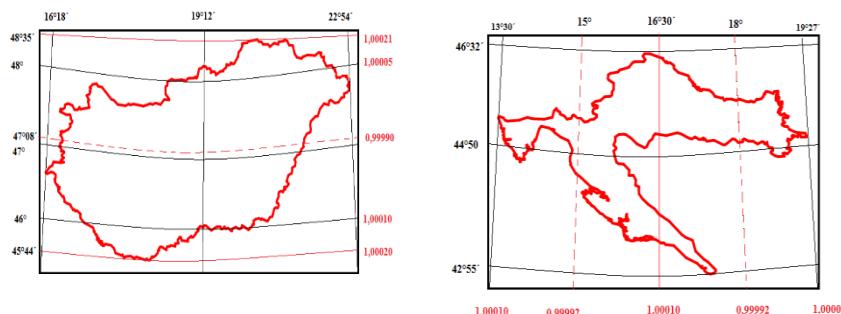
Kartografické zobrazenia používané v Dánsku, Belgicku, Holandsku, Česku a Slovensku považujeme za vhodné, nakoľko hodnoty ich extrémneho dĺžkového skreslenia sú na použitie v katastri vyhovujúce. Na Slovensku uvádzame 2 alternatívy zobrazenia, nakoľko bol v roku 2010 spracovaný návrh nového zobrazenia – Lambertovho pre SR (Vajsáblová, 2015).

**Tabuľka 3: Porovnanie hodnôt skreslení v používanom a novom zobrazení vybraných európskych štátov**

Štát	Používané zobrazenie	Odporúčané zobrazenie			
	Druh	Extr. dĺžkové skreslenie [cm/km]	Druh	Extr. dĺžkové skreslenie [cm/km]	
Albánsko	Gauss-Krüger	0 +26	Gauss-Krüger	-3 +4	
Chorvátsko	Gauss-Krüger	0 +18	Gauss-Krüger	-8 +10	
Litva	UTM	-40 +4	Lambertovo	-10 +14	
Maďarsko	EOV	-7 +26	Lambertovo	-10 +21	
Rakúsko	Gauss-Krüger	0 +16	Lambertovo	-10 +16	
Švajčiarsko	Konf. valcové	0 +19	Lambertovo	-10 +5	

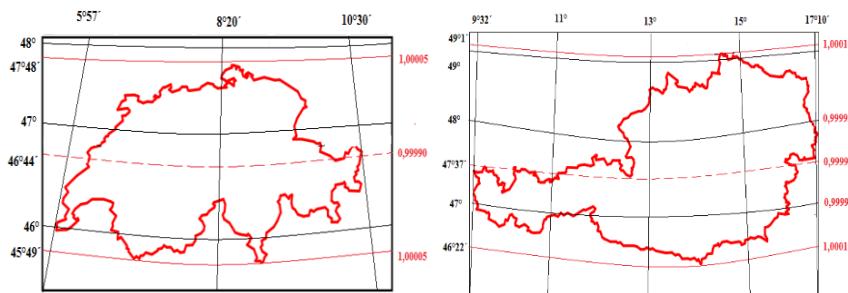


**Obr. 1: Návrhy zobrazení Albánska (vľavo) a Litvy (vpravo)**



**Obr. 2: Návrhy zobrazení Maďarska (vľavo) a Chorvátska (vpravo)**

Vychádzajúc z uvedených charakteristík polohy, veľkosti a tvaru sme kartografické zobrazenia navrhli pre 6 európskych štátov v Tab. 3 s ukázkami zobrazenia na Obr. 1 až 3 (Klimeková, 2014). Navrhnuté zobrazenia sme analyzovali a porovnali so zobrazeniami používanými v súčasnosti v štátnych GSS. Z porovnania v Tab. 3 vidieť, že krajné hodnoty skreslenia Albánska sú v navrhnutom zobrazení až 6-násobne menšie, Litvy takmer 3-násobne, Chorvátska a Švajčiarska sú menšie takmer 2-násobne. V Rakúsku sú krajné hodnoty skreslenia rovnaké, avšak navrhované zobrazenie je zobrazenie celého štátu na jednu plochu kužeľa v pólovej polohe a v pôvodnom zobrazení je štát zobrazený po častiach na 2 valcové plochy v rovníkovej polohe.



**Obr. 3: Návrhy zobrazení Švajčiarska (vľavo) a Rakúska (vpravo)**

### 3 Záver

Navrhnutý index vyjadrujúci tvar územia na referenčnej ploche je aplikovateľný aj na ďalšie geografické, kartografické a iné analýzy. Aplikácia kvantifikácie tvaru, polohy a veľkosti územia v kartografii sa ukázala opodstatnená a uvedenú metodiku je možné použiť aj na územia ďalších štátov.

## Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory grantového projektu VEGA 1/0682/16.

## Literatúra

- [1] HUSÁR, K. (2000). Tvar areálov na príklade krajinnej pokrývky Slovenska. In *Kartografické listy*, 8, Bratislava: Kartografická spoločnosť SR, ISSN 1336-5274, roč. 8., s. 91–98.
- [2] IVÁNOVÁ, I. – VAJSÁBLOVÁ, M. (2005) Uncertainty in Position of Objects as an Influence Factor of the Area Value. In *Proceedings 16th Conference DEXA 2005*. Copenhagen, Denmark: IEEE Computer society Conference Publishing services. 2005, ISBN 0-7695-2424-9, ISSN 1529-4188, vol. 0, no. 0. p. 468-472.
- [3] KLIMEKOVÁ, Z. (2014) *Vplyv charakteru územia na skreslenie v kartografickom zobrazení*. Diplomová práca. STU v Bratislave, 2014.
- [4] SHI, W. Z. (1998) A generic statistical approach for modelling error of geometric features in GIS. In *Int. J. Geographical Information Science*. ISSN 1365-8816, vol. 12(2), p. 131-143
- [5] VAJSÁBLOVÁ, M. (2015) *Aspekty tvorby kartografického zobrazenia pre územie Slovenska*. Edícia vedeckých prác. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2015. 107 s. ISBN 978-80-227-4393-8.



# Síť válce v GeoGebře

## Net of a Cylinder in GeoGebra

Jana Volná, Petr Volný

*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TUO  
17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, Česká republika  
jana.volna@vsb.cz, petr.volny@vsb.cz*

**Abstract.** We present a net of a cylinder as an application of GeoGebra, free dynamical software.

**Keywords:** Net of a Cylinder, GeoGebra.

**Klíčová slova:** Síť válce, GeoGebra.

## 1 Úvod

V rámci workshopu, který proběhl na 36. konferenci o geometrii a grafice pořádané v Rožnově pod Radhoštěm, jsme prezentovali příspěvek na téma Síť kuželu a válce v GeoGebře. Pro příspěvek do sborníku konference jsme připravili návod, jak pomocí GeoGebry vytvořit síť válce, která vzniká rozvinutím povrchu válce do roviny podstavy válce. Vzniká tak pomůcka, ve které je možné rozvíjení síťe animovat, a to z původní, nerozbalené polohy, až do finální, plně rozvinuté sítě.

Příkaz **Síť** je v GeoGebře obsažen, ale pracuje pouze s hranatými tělesy. Dá se použít na jehlan, hranol a platónská tělesa.

U čtenáře předpokládáme jistou minimální uživatelskou znalost GeoGebry. V článku nebudeme detailně rozebírat jednotlivé příkazy použité v pomůckce.

## 2 Síť válce

### 2.1 Zadání válce

Nejdříve si v GeoGebře vytvoříme válec s podstavou v půdorysné rovině. Střed válce umístíme na osu  $x$ , podstavná kružnice bude procházet počátkem. Nejdříve si vytvoříme tři posuvníky:

<code>p=Posuvník[0,1,0.01]</code>	posuvník <b>p</b> mění rozevření síťe
<code>polomer=Posuvník[0,5,0.05]</code>	posuvník <b>polomer</b> mění poloměr válce
<code>vyska=Posuvník[0,8,0.05]</code>	posuvník <b>vyska</b> mění výšku válce

Hodnoty posuvníků nastavíme např. na 1 pro posuvník **polomer** a na 2 pro posuvník **vyska**. Zkonstruujeme čtyři body umístěné na povrchu válce a samotný válec.

`S=(-polomer,0,0)`

střed dolní podstavy

$T=S+(0,0,vyska)$

střed horní podstavy

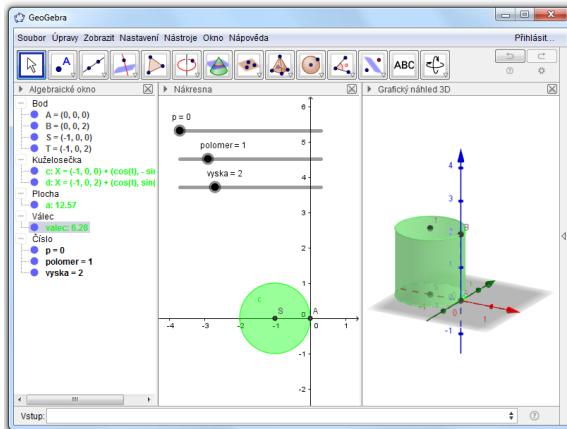
$A=S+(polomer,0,0)$

$B=A+(0,0,vyska)$

body A a B tvoří površku umístěnou do osy z

$valec=Valec[S,T,polomer]$  válec určený středy podstav a poloměrem

Změníme barvu válce např. na zelenou.



## 2.2 Parametrizace pláště válce

Nejdříve budeme rotovat plášt' válce kolem tečny k podstavě, která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem A.

$R=polomer$

poloměr parametrizovaného válce

Plášt' válce parametrizujeme funkcemi  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  pro parametry  $u$  od 0 do  $vyska$ ,  $v$  od  $-\pi$  do  $\pi$ ,

$$f_1(u, v) = R \cdot \cos(v \cdot \text{polomer}/R) - R$$

$$f_2(u, v) = R \cdot \sin(v \cdot \text{polomer}/R)$$

$$f_3(u, v) = u$$

Funkce po zadání do Geogebry skryjeme. Polohu válce máme zvolenou tak, že pro rotaci pláště můžeme využít známé transformační vztahy pro rotaci kolem osy y o úhel  $p\pi/2$ .

$$g_1(u, v) = f_1(u, v) \cdot \cos(p\pi/2) + f_3(u, v) \cdot \sin(p\pi/2)$$

$$g_2(u, v) = f_2(u, v)$$

$$g_3(u, v) = -f_1(u, v) \cdot \sin(p\pi/2) + f_3(u, v) \cdot \cos(p\pi/2)$$

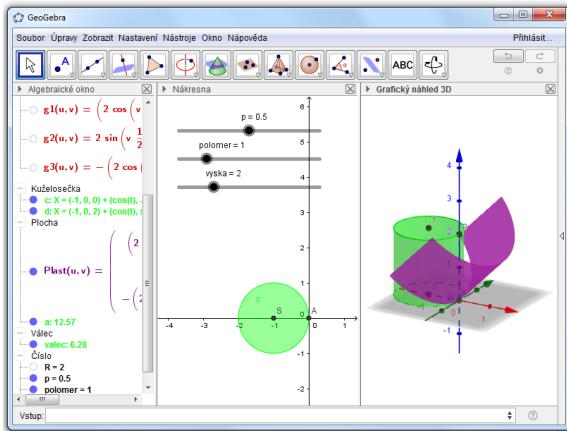
Funkce skryjeme. Otáčející se plášt' získáme příkazem

```
Plast=Plocha[g1(u,v),g2(u,v),g3(u,v),u,0,vyska,v,-π,π]
```

Úhel otočení bude záviset na hodnotě posuvníku  $p$ . Aby se plášt' při otáčení zároveň rozevíral, změníme  $R$  na novou hodnotu

```
R=polomer/(1-p)
```

Ve vlastnostech plochy  $\text{Plast}$  změníme tloušťku čáry na 0 (Styl), změníme barvu na barvu magenta, neprůhlednost nastavíme na 75 (Barva) a zrušíme zobrazení popisu (Základní). Zkuste změnit hodnotu posuvníku  $p$ .



Pro větší přehlednost přidáme k plásti okraj pomocí parametrizace pláště, ve které nastavíme jeden parametr na krajní hodnotu.

```
Okraj1=Krvka[Plast(0,v),v,-π,π]
Okraj2=Krvka[Plast(vyska,v),v,-π,π]
Okraj3=Krvka[Plast(u,-π),u,0,vyska]
Okraj4=Krvka[Plast(u,π),u,0,vyska]
```

Pro všechny čtyři parametrické křivky nastavíme jejich barvu na barvu magenta (Barva) a tloušťku čáry na hodnotu 3 (Styl). Zrušíme zobrazení popisu (Základní).

### 2.3 Části síť

Výsledná síť se skládá z několika částí. Bude obsahovat dvě kružnice a rozevírající se plášt'. První kružnici získáme příkazem

`SitCast1=Kruznice[S,polomer,Vektor[(0,0,1)]]` spodní podstava

Druhá kružnice vzniká z horní podstavy válce složením rotace kolem tečny k horní podstavě v bodě B a rotace kolem tečny k spodní podstavě v bodě A, v obou případech rotujeme o úhel  $p\pi/2$ . Střed této kružnice získáme příkazem

```
pomStred=Rotace[Rotace[T,p*\pi/2,B,Vektor[(0,1,0)]],p*\pi/2,A,
Vektor[(0,1,0)]]
```

Kolmý vektor k této kružnici nalezneme příkazem

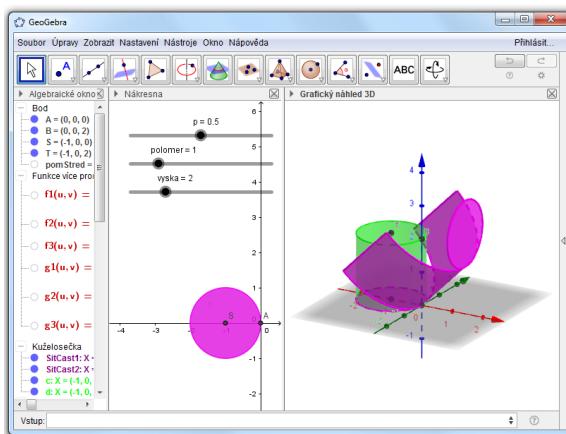
```
pomVektor=Rotace[Vektor[(0,0,1)],p*\pi,0saY]
```

Druhá kružnice (druhá část sítě) je pak dána

```
SitCast2=Kruznice[pomStred,polomer,pomVektor]
```

Objekty pomStred a pomVektor skryjeme. Třetí část tvoří rozevírající se pláště válce s okrajem Plast, Okraj1, Okraj2, Okraj3, Okraj4.

Kružnice SitCast1 a SitCast2 vyplníme změnou neprůhlednosti z 0 na nenulovou hodnotu. Ve vlastnostech (Kuželosečka) změníme tloušťku čáry na 3 (Styl), změníme barvu na barvu magenta, nastavíme neprůhlednost na 75 (Barva) a zrušíme zobrazení popisu (Základní).



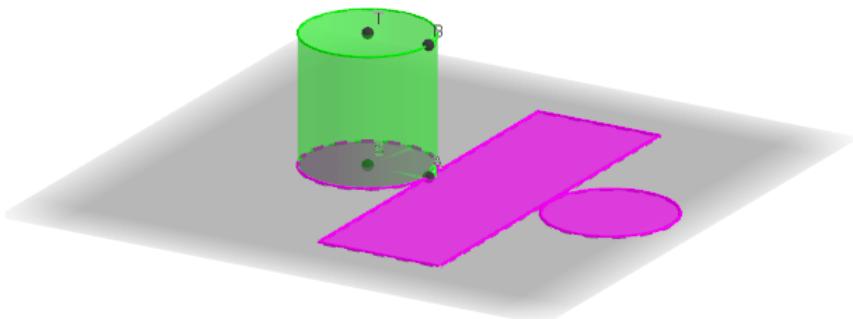
Nakonec přidáme čtvrtou část, která bude odpovídat krajní poloze parametru p=1, kdy parametrizovaná plocha není definovaná (protože ve

vyjádření R dělíme výrazem (1-p), který je v krajní poloze roven nule).

Sestrojíme obdélník s jedním rozměrem **vyska** a s druhým rozměrem  $2*\pi*polomer$ .

```
SitCast4=Mnohouhelnik[A+(0,polomer*pi,0),
A+(vyska,polomer*pi,0),
A+(vyska,-polomer*pi,0),A+(0,-polomer*pi,0)]
```

Ve vlastnostech **SitCast4** (čtyřstranný) změníme tloušťku čáry na 3 (Styl), změníme barvu na barvu magenta, nastavíme neprůhlednost na 75 (Barva) a zrušíme zobrazení popisu (Základní). Tento obdélník budeme chtít zobrazit jen v případě, kdy **p=1**. Proto do podmínek zobrazení objektu (Pro pokročilé) napišeme podmínu **p==1**. To samé napišeme do podmínek zobrazení úseček **f**, **g**, **h**, **i**, které tvoří okraj obdélníku **SitCast4**.



### 3 Závěr

Práce se sítěmi je v GeoGebře pro hranatá tělesa velmi jednoduchá. Čtenářům nabízíme jisté zobecnění standardního příkazu **Sít** na válec. Ponecháváme na čtenáři zpracování této pomůcky do formy vlastního nástroje.

### Poděkování

Autoři děkují za podporu svému pracovišti.

### Literatura

[1] [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)



# How precise is the Kinect?

Jaroslav Zacek, Mehmet Aşkın

*Dept. of Informatics and Computers, Fac. of Science, Univ. of Ostrava  
30. Dubna 22, 701 03 Ostrava, Czech Republic  
email: Jaroslav.Zacek@osu.cz*

**Abstract:** Kinect devices works as input device to control computer games by movements of your body parts. It could be also used as a localisation and mapping device. Let's have a look to its preciseness and try to determine if we can use it as a universal remote controller to autonomous robots.

*Key words:* Kinect, point localisation, preciseness.

## 1 What is Kinect?

Kinect history has started as an experiment of Microsoft company to compete Nintendo Wii product in gaming industry. Unlike the Wii product the Kinect sensor was not profiled only as a gaming device, Kinect is a line motion sensing input device originally developed for Xbox and Xbox 360 gaming console and also Windows PCs. Kinect is based on webcam-style approach and enables users to control and interact with the console/computer. First generation Kinect was introduced in November 2010 (codename Project Natal). A version for Windows was released two years later. Indivisible part of the Kinect is the SDK available for Windows 7 and later since June 2011. SDK supports common known and used languages for Windows platform such as C# or VisualBasic.

Kinect itself is not only a simple input devices, in fact it is a point localisation devices. SDK is very flexible and the device can be used as 3D scanner as seen on Fig.1.

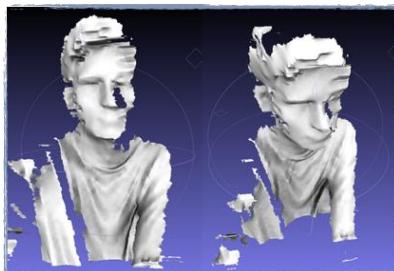


Fig. 1: 3D scan created with Kinect device

Kinect device is consisted of two cameras. First camera is a simple web camera with resolution of 1920x1080, framerate 30 or 15 FPS (based on the

light conditions). Second camera is an Infra-red camera with resolution of 512 x 424 and 30 FPS.

## 2 How Kinect works?

The main challenge of the input device is to determine distance of specific object.

Basically, we have two options. First option is to use a simple triangulation method. Step one is to perform a segmentation of the picture and determine known points. Step two is forming triangles from known points in a different angle of view. However, if we want to form the triangle from multiple view we need to have a more than one camera. Also, there is a precision measurement problem if two cameras are too close to each other.

Second option is to use a comparing method to stationary object (or better say a mesh). Kinect uses an infrared projector and sensor for depth computation. In a first stage IR projector projects laser mesh into the space (as seen on Fig. 2). Then the IR camera takes the picture of the whole scene and tries to calculate deviation of the two IR projected points in the space (mesh structure is already known).



Fig. 2: Laser mesh projected by Kinect into the space

## 3 Experiment definition

We measured four different distances (0.1m, 0.2m, 0.3m, 0.4m) for three different shape of line (vertical, horizontal, inclined) for three body joints (right hand, right elbow, left wrist) and for 2-meter distance between camera and measurement plane. We have also measured four different distances (0.1m, 0.2m, 0.3m, 0.4m) for three different shape of line (vertical, horizontal, inclined) for just right elbow and for 2.5-meter distance between camera and measurement plane. We repeated every measurement for 10 different times.

## 4 Results and limitations

Based on the measurements we can state two hypotheses:

- If the measurement length increases, the precision of the measurement increases.
- If the distance between camera and measurement plane increases, the precision of measurement increases (but there are some exceptions).

After the measurements, we wanted to calculate the horizontal and depth boundaries that sensor can track a body properly. In order to do that we had to examine the Kinect sensor technical specification. We have found out that the angle of view of Kinect sensor is  $70^\circ$ . The body should be  $0.5 - 4.5$  meter distance from camera in order to be tracked. After finding out this information from specification document, we had to calculate side boundaries. Because the side boundaries are not constant and enlarge when the body moves away from the sensor. We calculated these boundaries with trivial mathematical and geometrical operations. You can see these boundaries in fig 3

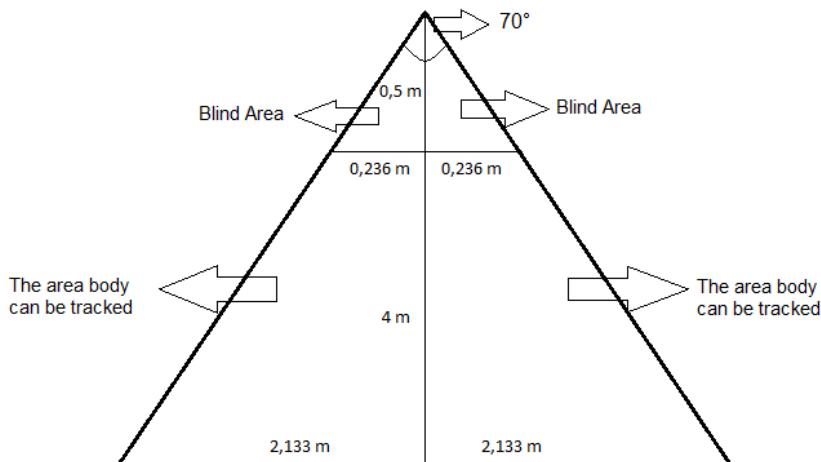


Fig. 3: Boundaries of the Kinect device

We would like to use this device to control a robot so we have concert another limitation, such as some points do not have to be in insight the space.

Therefore, we have to detect and indicate that a part of body or whole body is out of these boundaries. We calculated the current boundaries in real time for every joint by using their positions and with trivial geometrical operations and implement these conditions into the software our framework:

- If whole body is in these boundaries, the displaying screen is black.
- If at least one joint of body is out of these boundaries, the displaying screen switches to yellow.
- If whole body is out of these boundaries, the displaying screen switches to red.

## 4.1 Measurement accuracy

Our main focus of the research was to answer the question if Kinect can be used to control some robotic device through the movement of the body. Therefore, we have defined three main joints to measure:

- Right hand,
- right elbow,
- left wrist.

On figures 4 – 7 you can see the statistical output in a box plot form. Caption states the actual value and graphs show the variability of values including outlying values. Based on these outputs we can state that right elbow joint has the minimal deviation. This is quite logic because the joint lays between other joints and usually is not influenced by undesirable body movements.

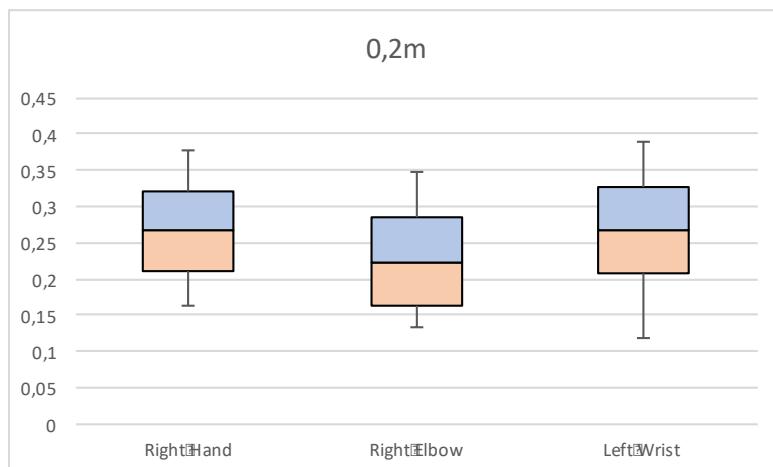


Fig. 4: Distance 0,2m

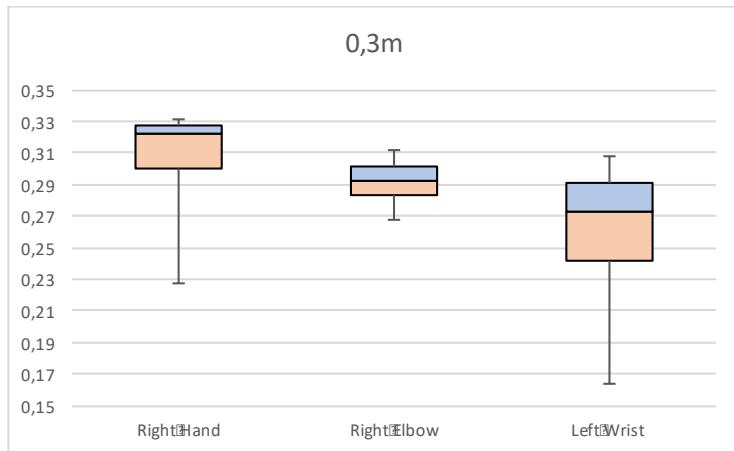


Fig. 5: Distance 0,3m

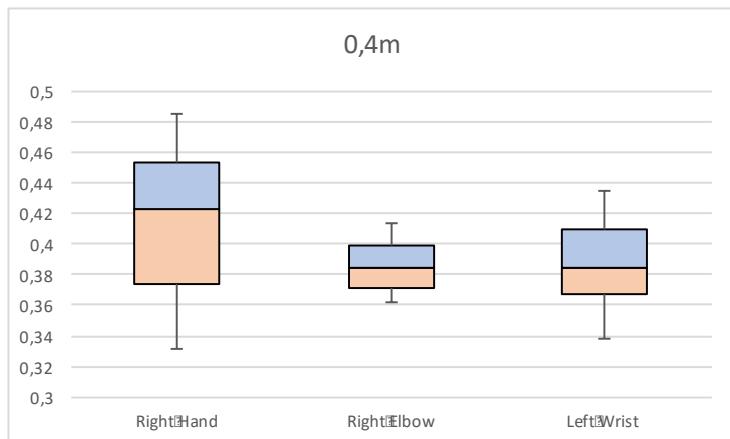


Fig. 6: Distance 0,4m

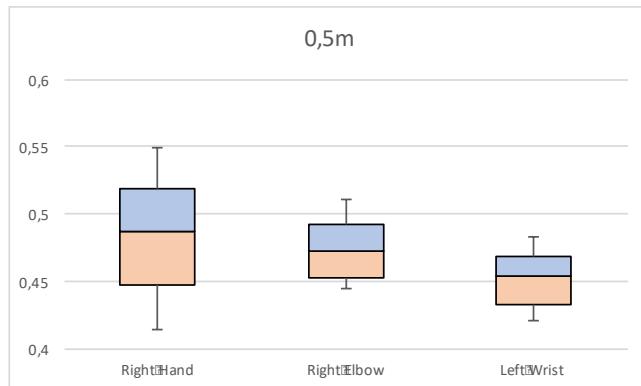


Fig. 7: Distance 0,5m

## 4.2 Error rate

Previous chapter shows only absolute values which is not quite usable for technical practices. In the real world, we have to know what is the threshold of usability of the specific joint. In Fig. 8. you can see an error rate depending on the distance graph. As you can see, error rate of the small distance (0,2m) is 100% in the high limit. If we perform the measurement at distance 0,3m, the error rate drops down to 20%. Therefore, we can state a threshold of the right hand to distance at least 0,3m distance.

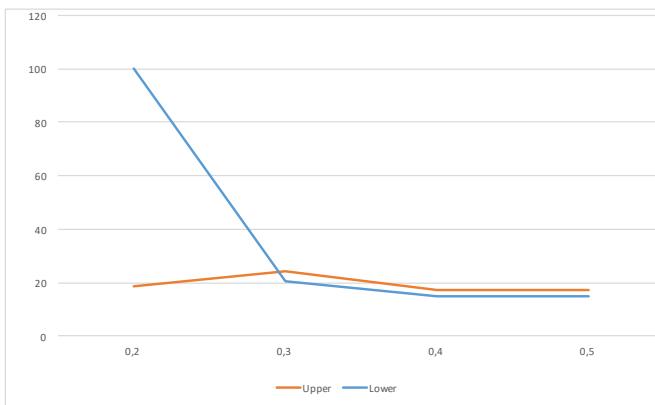


Fig. 8: Error rate – right hand

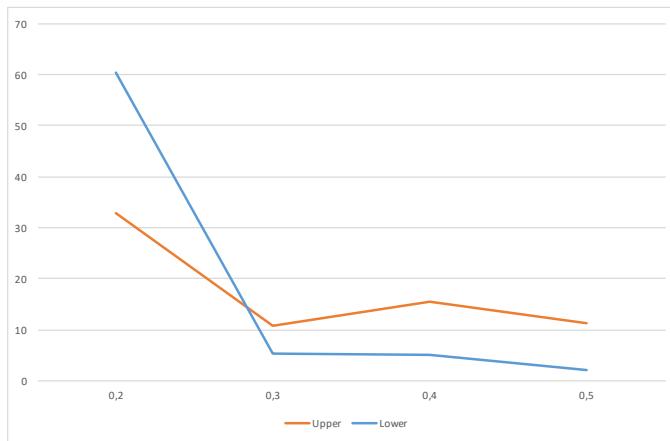


Fig. 9: Error rate – right elbow

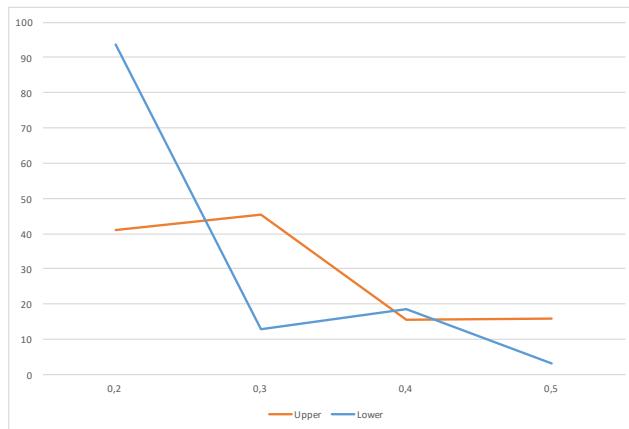


Fig. 10: Error rate – left wrist

Based on the graphs we can also state that algorithm in the Kinect device has tends to exaggerate the measured value in a closer distance.

## 5 Conclusion

In this paper, we have focused to prove that we can use Kinect as a remote controller of the robotic devices, most likely drones. First step of that idea is to determine a precision and measurement limits of the Kinect device. We have

described basic technical parameters of the Kinect device and we have explained how Kinect works. Then we have defined a measure experiment and perform the measurement. Results of the experiment show us that we can use device as controller with respect to thresholds discovered in paragraph 4.2. by having up to 20% error rate which is good applicable to technical practices. Moreover, we have discovered that Kinect device have a tendency to exaggerate the measurement values in a very close distance. That give us an opportunity to create a filter that helps with increasing accuracy.

## Acknowledgements

The paper was supported by the grant provided by Ministry of Education, Youth and Sport Czech Republic, reference no. SGS03/UVAFM/16.

## References

- [1] Gonzalez-Jorge, H., et al. "Metrological evaluation of microsoft kinect and asus xtion sensors." *Measurement* 46.6 (2013): 1800-1806.
- [2] Bonnechere, Bruno, et al. "Determination of the precision and accuracy of morphological measurements using the Kinect™ sensor: Comparison with standard stereophotogrammetry." *Ergonomics* 57.4 (2014): 622-631.
- [3] Andersen, Michael Riis, et al. "Kinect depth sensor evaluation for computer vision applications." Technical Report Electronics and Computer Engineering1.6 (2015).
- [4] Gonzalez-Jorge, H., et al. "Metrological comparison between Kinect I and Kinect II sensors." *Measurement* 70 (2015): 21-26.
- [5] Essmaeel, Kyis, et al. "Comparative evaluation of methods for filtering Kinect depth data." *Multimedia Tools and Applications* 74.17 (2015): 7331-7354.

# Braids of Juggling Patterns

Michal Zamboj

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University  
Sokolovská 83, 186 75 Prague 8, Czech Republic  
zamboj@karlin.mff.cuni.cz*

**Abstract.** In the contribution, we will show a method of a graphic representation of juggling using braids. We will describe how braids improve the mathematical notation of juggling by integer sequences and reveal elementary properties of such juggling tricks.

**Keywords:** Braid theory, mathematics of juggling, siteswap, integer sequences.

## 1 Introduction

In the last 30 years, juggling, as a curious phenomenon, has led mathematicians into development of its mathematical notation and research. It has turned out that juggling is a fruitful ground for discrete mathematical theories such as combinatorics or structural algebra with applications in physics and computer science. Nowadays, the most popular notation of juggling among mathematicians and jugglers is the siteswap notation, which is a notation by integer sequences. Exhaustive studies of properties of juggling based on the siteswap notation can be found for example in [2, 7]. In this paper, we will look at juggling from the graphical point of view, using the theory of braids. The author follows his diploma thesis [9] and was also inspired by other works about juggling related to braids or knots [3, 4, 8].

For our purposes, we will use the following simple model of juggling. Let us imagine a metronome which produces regular beats in time. A juggler:

- throws the balls into beats. Juggler's hands alternate on each beat.
- has always been juggling and will never end.
- throws on each beat at most one ball, and if he catches a ball, he must throw it (on the same beat).

We will, unfortunately, avoid amusing movements such as throws under the leg, behind the back etc. Our hypothetical juggler always faces his juggling pattern, and his hands are in two distinct fixed positions in space, up to the forthcoming inside and outside throws.

The simplest juggling patterns with an odd number of balls are called *cascades*, and those with an even number of balls are called *fountains*. In a cascade, each ball is thrown into an arc and is caught by the other hand. A real juggler can choose if he throws the balls from inside of his body and catches them on outside - *inside throws* (Figure 1 (left)) or vice-versa - *outside throws* (Figure 1 (right)). In a fountain, each ball is thrown and

caught by the same hand. Again, juggler can choose inside and outside throws (Figure 2).<sup>1</sup>



Figure 1: Three ball inside (left) and outside (right) cascades.

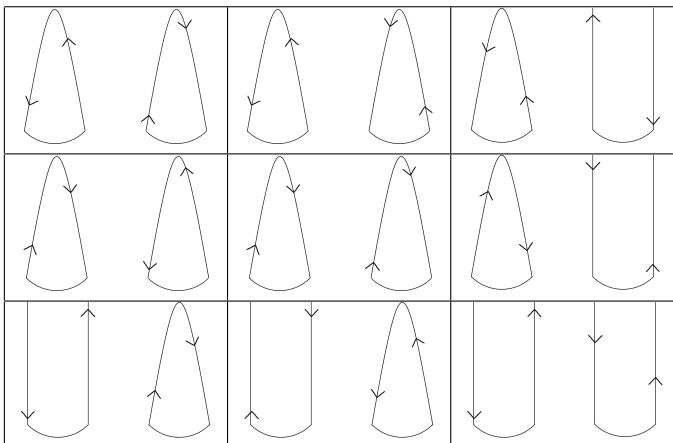


Figure 2: Four ball fountains with possible choices of inside and outside throws.

## 2 Braids of juggling patterns

We will start with an empirical investigation of braids and juggling. Afterwards, we will apply our results to the siteswap notation.

Let us imagine a juggler juggling a three ball inside cascade and walking from our left side to the right (Figure 3). Trajectories of the balls create a system of spatial curves, which we call a *juggling braid*. If we follow the trajectories from the right side to the left (their mirror image), we will observe, that the trajectories fit the outside cascade. Juggling braid of a five ball cascade and its mirror image is in Figure 4.

Choice of inside and outside throws in four ball fountains lead to more variations (see Figures 5 — 7).

---

<sup>1</sup>Cascades and fountains juggled to outside throws are called reverse in juggling terminology.



Figure 3: The juggling braid of a three ball cascade.



Figure 4: The juggling braid of a five ball inside cascade and its mirror image.

## 2.1 Siteswap

In this section, we will shortly introduce the siteswap notation of juggling. The siteswap notation is a notation by nonnegative integer sequences. Let



Figure 5: The juggling braid of a four ball outside fountain.



Figure 6: The juggling braid of a four ball fountain with inside throws in the left hand and outside throws in the right hand.

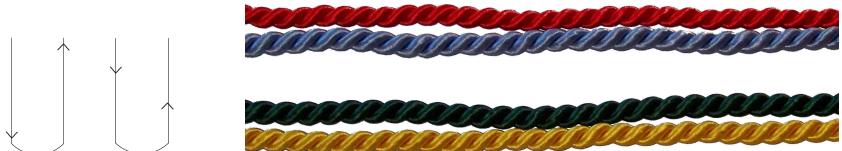


Figure 7: The juggling braid of a four ball fountain columns (alternating inside and outside throws in both hands).

us divide the whole process of juggling into separate throws. A *throw* is a movement of the ball since it was thrown until it is caught. A *height of a throw* is the number of beats which pass since the ball was thrown until it is caught (including catching). For example, in a cascade with three balls, each throw has the height 3. In a fountain with four balls, each throw has the height 4. Furthermore, there exist juggling patterns in which heights of throws can differ.

Let us assign a height of a throw  $h_i \in \mathbb{N}_0$  to each beat  $i \in \mathbb{Z}$  by a *juggling function*  $\vartheta : \vartheta(i) = h_i$ . To hold the properties of our model of juggling we define a *catching function*  $\gamma$ , which assigns to each beat the catching time of the ball thrown on a given beat,  $\gamma(i) = h_i + i$ . Since no more than one ball is caught on one beat, we say that a function  $\vartheta$  is juggling function, if its catching function  $\gamma$  is a permutation of integers. We will restrict juggling to juggling tricks - periodically repeated finite patterns. An example of such juggling pattern is ...12345... periodically repeated (Figure 8).

$i$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$\vartheta(i)$	...	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	...
$\gamma(i)$	...	0	2	4	1	3	5	7	9	6	8	...

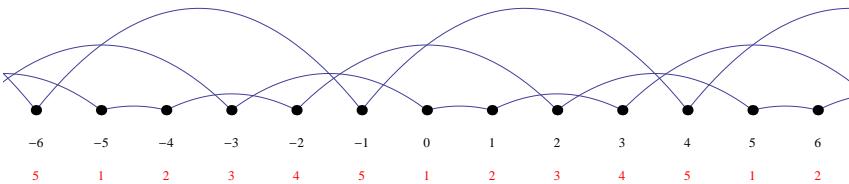


Figure 8: Juggling the throws of heights 12345 periodically repeated.

Since heights of throws are repeating periodically, we need only a finite sequence of throws to represent a juggling trick. A *juggling sequence* or *siteswap* is a sequence of heights of throws  $h_0, h_1, \dots, h_{p-1}$  of a periodic juggling function  $\vartheta$ , where  $h_k \bmod p = \vartheta(k \bmod p)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  and  $p$  is the length of the period. It is not hard to realize, that throws of odd heights will always finish in the second hand, and the throws of even heights will finish in the same hand.

## 2.2 Braids of siteswaps

To describe a braid mathematically, we need two parallel planes in a three dimensional space (Figure 9). Let  $P_1, \dots, P_n; n \in \mathbb{N}$  be regularly distributed points on a line in one plane, and  $P'_1, \dots, P'_n$  be their orthogonal projections into the second plane. We join points  $P_i$  and  $P'_{\pi(i)}$ , where  $\pi$  is

a permutation of  $\{1, \dots, n\}$ , with a curve between the two planes. Then, we replace each curve with a polygonal chain such that in each horizontal cut mostly two of these chains intersect, and no chain intersects itself. This polygonal chain is called a *string*. A braid of  $n$  strings is called an  $n$ -braid. The orthogonal projection of a braid into the plane through its starting and ending points is called a *braid diagram*. In our figures, each braid diagram starts on the left and finishes on the right side.

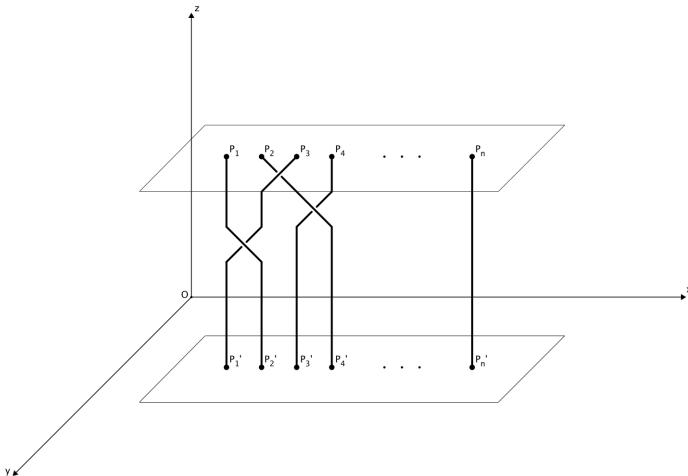


Figure 9: Spatial model of a braid.

Let us shortly summarise some properties of braids, which will be used for our investigation of juggling. Braids have the algebraic structure of the non-abelian group. The trivial braid is made of  $n$  straight strings. Two braids are equivalent, if we can continuously deform one onto the other (we simply cannot cut the string for this deformation). The composition of two braids can be visualized as glueing the endpoints of the first braid with the starting points of the second braid. An inverse braid is the mirror image of a braid in the reflection across the plane containing its endpoints. The braid group can be generated by two generators. In both generators, the strings on the  $i$ -th and  $(i + 1)$ -th position cross. Let  $\sigma_i$  be the one in which the string from the  $i$ -th position passes above the string on the  $(i + 1)$ -th position (Figure 10 (top left)). In the generator  $\sigma_i^{-1}$ , the string from the  $i$ -th position passes below the second string on the  $(i + 1)$ -th position (Figure 10 (bottom left)). One can generate any braid by composing generators. Using the symbolic notation, a braid is represented by its *braid word*. For example see Figure 10 (right). It is

not our purpose to study properties of braids in details. For an interested reader, we recommend the general works on the theory of braids [1, 6, 5].

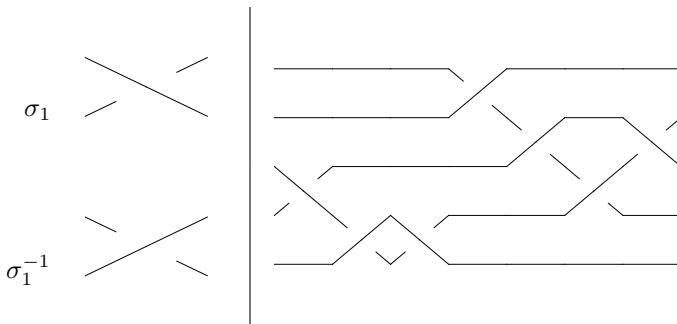


Figure 10: Braid generators and braid word  $\sigma_3\sigma_4^{-1}\sigma_4\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_3$ .

Apart of siteswap notation, braids of juggling patterns give us additional information, if the trajectory of a ball is above or below the others. A five ball inside cascade and its braid word is in Figure 11. A six ball inside fountain is in Figure 12.

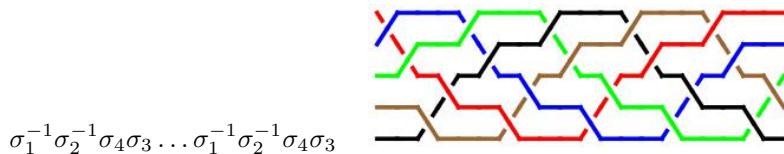


Figure 11: The braid diagram and the braid word of a five ball inside cascade.

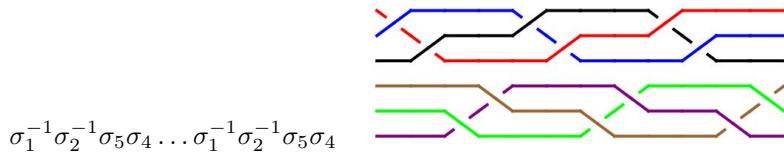


Figure 12: The braid diagram and the braid word of a six ball inside fountain.

For constructing braids of siteswaps a ladder can be used. Each step represents one beat and side rails represent the left and right hand. In Figure 13 we can see the juggling braid of the siteswap 423 with three balls juggled to inside throws.

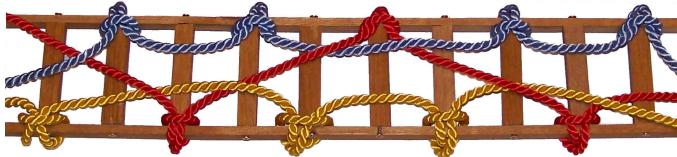


Figure 13: The ladder of the siteswap 423 juggled to inside throws.

On each beat, a juggler can choose if he performs an inside or outside throw. In cascades and fountains, the trajectories of balls thrown to inside and outside throws were easy to notice. In siteswaps with different heights of throws, it is not that simple to distinguish between the inside and outside throw from the trajectories of balls. For example, in the siteswap 51 with three balls (Figure 14) the braid does not change if the throws are inside or outside. Therefore, we describe the inside and outside



Figure 14: The ladder of the siteswap 51.

throw as follows:

- (i) The ball thrown at present by an inside (outside) throw will pass under (above) all the balls, which were thrown earlier and will be caught earlier than the given ball, if all considered balls will be caught by the same hand from which we are throwing.
- (ii) The ball thrown at present by an inside (outside) throw of an odd height will pass under all the balls, which were thrown earlier and will be caught later than the given ball.
- (iii) The ball thrown at present by an inside (outside) throw of an even height will pass under all the balls, which were thrown earlier and will be caught later than the given ball, if all considered balls will be caught by the same hand from which we are throwing.

The given definitions of the inside and outside throws are based on a mathematical model, but they also fit practical juggling. An advanced juggler with more objects can choose the inside and outside throws as described and modify the movement of his hands to do so. A popular juggling trick based on variations of inside and outside throws in a cascade is called the tennis (Figure 15).



Figure 15: The ladder of a three ball tennis - cascade juggled by repeating the inside, inside and outside throw. The trajectory of the yellow ball is always above the trajectories of the red and blue balls.

It is easy to observe that the three ball tennis on six beats creates the trivial juggling braid. Having siteswaps of the same number of balls, we can compose juggling sequences together by using braids. For this purpose, we need to know what is the number of beats during which the strings of the braid will get to their starting positions.<sup>2</sup> This means that we must count the number of repetitions of the siteswap of a period  $p$ . All throws of one ball in juggling are called the *orbit of the ball*. In each siteswap with more than one ball, there can be more equivalent orbits for different balls, or the balls can have different orbits.

For example, in the siteswap 645 (Figure 16), two balls (green and red) are thrown to the height 6, and three balls (white, yellow and blue) are thrown to the heights 4 and 5.



Figure 16: The ladder of the siteswap 645 with 5 balls juggled to inside throws.

The number of periods  $p$ , which pass until the throws of one ball will start to repeat in its orbit, is equal to the sum of heights of all throws of this ball, divided by the period  $p$ . This is also the number of balls with the similar orbit  $b(O_i)$ .<sup>3</sup> Since there can be more different orbits, the number of periods, which pass until the siteswap will repeat, is the least common multiple  $LCM(b(O_1), \dots, b(O_m))$  for  $m$  less

<sup>2</sup>In the braid theory terminology, we need to create a *pure braid*.

<sup>3</sup>The proof of this non-trivial statement, called the average theorem, can be found for example in [7, 9].

or equal to the number of balls in juggling. For even periods, the number of beats, which pass until the siteswap will start to repeat itself, is  $p \cdot LCM(b(O_1), \dots, b(O_m))$ . For the odd periods we need to ensure that the siteswap starts in the same hand. Therefore, the number of beats, which pass until the siteswap of an even period will start to repeat itself, is  $p \cdot LCM(2, b(O_1), b(O_2), \dots, b(O_m))$ .

For example, the siteswap 645 has the period 3.  $b(O_1) = 2, b(O_2) = 3$  as mentioned above. Therefore, the number of beats which pass until the braid is in the starting position is  $3 \cdot LCM(2, 3) = 3 \cdot 6 = 18$  (Figure 17).

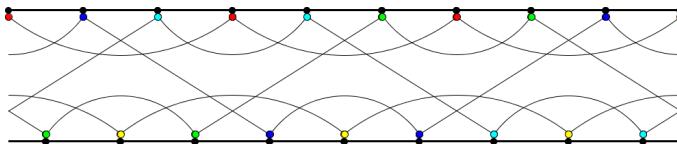


Figure 17: The ladder diagram of the 18 beats of siteswap 645.

Composition of a braid and its inverse is the trivial braid. In other words, the inverse braid (the mirror image) unbraids the original braid. If we use juggling ladder, steps of a ladder represent time, and the inverse braid turns time backwards. To see that the inverse braid represents some juggling pattern, we can record the juggler and play the video backwards. The juggler will also juggle, the heights of the throws will be the same (but they can be in a different order), inside throws will become outside and vice-versa (Figure 18).



Figure 18: The juggling braid of the siteswap 12345 juggled on inside throws and its inverse braid, which represents the siteswap 52413 juggled on outside throws.

### 3 Conclusion

We empirically studied trajectories of balls on many examples of juggling patterns in terms of the theory of braids on elementary level. There are many interesting properties of juggling for further investigation, such as behavior of siteswaps represented by inverse braids. In [3], the theorem which says that any braid is juggleable is proven. The main idea is to construct siteswaps of braid generators and compose them to create the whole braid. Unfortunately, the construction presented by the authors is

not practically realizable. We are convinced that with the use of inside and outside throws as defined, a similar statement can be proven, and it will be our concern for the future. Anyhow, many may have asked about the point of mathematical investigation of juggling. Hopefully, we have made clear that juggling is a wonderful application of some abstract mathematical theories appropriate to find interesting relations in-between them.

## Acknowledgements

The work was supported by the grant SVV 2016 No.260334.

## References

- [1] E. Artin: Theory of braids. *Annals of mathematics*, 48(1):101—126, January, 1947.
- [2] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham, C. Wright: Juggling drops and descents. *American Mathematical Monthly*, 101(6):507—519, 1994.
- [3] S. L. Devadoss, J. Mugno: Juggling Braids and Links. *The Mathematical Intelligencer*, 29(3):15—22, January, 2007.
- [4] M. Macauley: *Braids and Juggling Patterns*. Senior thesis, Senior thesis, Harvey Mudd College, Claremont, 2003.
- [5] S. Moran: *The Mathematical Theory of Knots and Braids*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- [6] K. Murasugi: *Knot Theory*. Boston: Birkhäuser, 1996.
- [7] B. Polster: *The Mathematics of Juggling*. New York: Springer - Verlag, 2003.
- [8] J. Tawney: *Jugglinks*. Master's Thesis, The Ohio State University, 2001.
- [9] M. Zamboj: *Mathematical theory of juggling*. Diploma thesis, Charles University, Prague, 2014.

# List of Participants

## CONFERENCE

Bálint	Vojtech	FPEDAS, Žilinská univerzita v Žiline
Bastl	Bohumír	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Beránková	Eliška	KMA PřF, Ostravská univerzita v Ostravě
Bizzarri	Michal	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Bulantová	Jana	ÚMDG FAST, VUT v Brně
Ferdianová	Věra	KMA PřF, Ostravská univerzita v Ostravě
Hasák	Roman	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Holešová	Michaela	KSMAM, Žilinská univerzita v Žiline
Hýrošová	Tatiana	KMDG, Technická univerzita Zvolen
Chalmoviansky	Pavel	KAGDM FMFI, Univ. Komenského v Bratislavě
Kolcun	Alexej	ÚGN AVČR Ostrava
Kolomazník	Ivan	KMDG, VŠB-TUO Ostrava
Králová	Alice	ÚM MZLU v Brně
Lávička	Miroslav	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Michálková	Kristýna	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Molnár	Emil	BME Budapest
Poruba	Jakub	KMA PřF, Ostravská univerzita v Ostravě
Rabiecová	Iveta	KMA PřF, Ostravská univerzita v Ostravě
Richtáriková	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Ruzyczka	Adam	University of Agriculture in Krakow
Sedlář	Vladimír	MÚ Slezská univerzita v Opavě
Skala	Vaclav	KIV FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Sroka-Bizoň	Monika	Silesian University of Technology Gliwice
Suryneková	Petra	KDM MFF, Univerzita Karlova v Praze
Szarková	Dagmar	SSGG, Bratislava
Šafařík	Jan	ÚMDG FAST, VUT v Brně
Šír	Zbyněk	MFF Univerzita Karlova v Praze
Tomiczková	Svetlana	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Vajsáblová	Margita	KMDG SvF, STU v Bratislavě
Velichová	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Vršek	Jan	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Weiss	Gunter	retired
Zamboj	Michal	MUÚK MFF, Univerzita Karlova v Praze
Zrůstová	Lucie	ÚMDG FAST, VUT v Brně
Žáček	Martin	KIP PřF, Ostravská univerzita v Ostravě
Žáček	Jaroslav	KIP PřF, Ostravská univerzita v Ostravě

## GEOGEBRA WORKSHOP

Dlouhá Dagmar KMDG, VŠB-TUO Ostrava  
Güttnerová Pavla KMDG, VŠB-TUO Ostrava  
Hamříková Radka KMDG, VŠB-TUO Ostrava  
Morávková Zuzana KMDG, VŠB-TUO Ostrava  
Paláček Radomír KMDG, VŠB-TUO Ostrava  
Volná Jana KMDG, VŠB-TUO Ostrava  
Volný Petr KMDG, VŠB-TUO Ostrava



Proceedings of the  
CZECH-SLOVAK CONFERENCE ON  
GEOMETRY AND GRAPHICS 2016

Editors:  
Alexej Kolcun, Miroslav Lávička, Martin Žáček, 2016

Published by  
Ostravská univerzita  
Dvořákova 7, 701 03 Ostrava 1



Cover design  
Jaromír Dobrý

First Edition  
Ostrava 2016  
ISBN 978-80-7464-874-8 (online)  
ISBN 978-80-7464-873-1 (CD)