

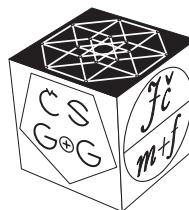
SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

**26<sup>th</sup> Symposium on  
Computer Geometry SCG'2017**



**PROCEEDINGS OF THE  
SLOVAK-CZECH CONFERENCE ON  
GEOMETRY AND GRAPHICS 2017**

Vršatské Podhradie  
September 11–14, 2017



**37<sup>th</sup> Conference on  
Geometry and Graphics**

CZECH SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS  
OF THE UNION OF CZECH MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS

Language correction of the publication was not performed, language accuracy is the sole responsibility of the contributing authors.

Contributions included in the proceedings were selected by the scientific committee members based on reviews.

All rights reserved. No part of this work may be used or reproduced in any manner whatsoever or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without written permission from the publisher and copyright owner.



Vydavatelský servis  
Republikánská 28, Plzeň

Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2017  
First edition

© Daniela Velichová, Miroslav Lávička, Světlana Tomiczková, 2017

© Vydavatelský servis, 2017

ISBN 978-80-86843-58-2 (online)

ISBN 978-80-86843-57-5 (CD)

# Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2017

Organized by:

Slovak Society for Geometry and Graphics

## Organizing Committee:

Daniela **Velichová** – STU Bratislava

Daniela **Richtáriková** – STU Bratislava

Dagmar **Szarková** – STU Bratislava

## Scientific Committee:

Roman **Hašek** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)

Pavel **Chalmovianský** – Univerzita Komenského v Bratislavie (SK)

Mária **Kmeťová** – Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra (SK)

Miroslav **Lávička** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)

Emil **Molnár**, Budapesti Muszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (HU)

Pavel **Pech** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)

Monika **Sroka-Bizoń** – Politechnika Ślaska, Gliwice (PL)

Maria **Horvath-Šimić** – Sveučilište u Zagrebu (HR)

Daniela **Velichová** – Slovenská technická univerzita v Bratislave (SK)

Gunter **Weiss** – Technische Universität Wien (AT)



## Table of Contents

FOREWORDS . . . . .	7
PLenary talks . . . . .	9
ODEHNAL BORIS <i>Hermite Interpolation with Ruled and Canal Surfaces</i> . . . . .	11
PECH PAVEL <i>Investigation of loci in dynamic geometric</i> . . . . .	13
VAJSÁBLOVÁ MARGITA <i>Geometric tools in a precision of image elements on maps</i> . . . . .	25
Contributed talks . . . . .	37
BÁTOROVÁ MARTINA, KUDLIČKOVÁ SOŇA <i>Softvérková podpora výučby deskriptívnej geometrie a geometrického modelovania na FMFI UK</i> . . . . .	39
BIZZARRI MICHAL, LÁVIČKA MIROSLAV, VRŠEK JAN <i>On rational approximation of curves parameterized by square roots</i> . . . . .	45
BLAŽKOVÁ EVA <i>Algebraic Curves Given by Puiseux Tree</i> . . . . .	53
ČMELKOVÁ VIERA <i>GeoGebra a výučba zobrazovacích metód</i> . . . . .	61
FERDIÁNOVÁ VÉRA <i>Krátky úvod do Geometria del Compasso</i> . . . . .	65
GERGELITSOVÁ ŠÁRKΑ, HOLAN TOMÁŠ <i>Jak rozpohybovat GeoGebru?</i> . . . . .	71
HAŠEK ROMAN <i>Dynamická geometrie online</i> . . . . .	77
HOLEŠOVÁ MICHAELA <i>Ovals in Technical Practice.</i> . . . . .	83
CHALMOVIANSKÝ PAVEL <i>Local Intersection Multiplicity</i> . . . . .	89
KMEŤOVÁ MÁRIA <i>Visualisation in problem solving</i> . . . . .	97

KOLCUN ALEXEJ, RAUNIGR PETR <i>Plánování pohybu robota pomocí nástrojů nUrBS</i>	103
KOLOMAZNÍK IVAN, ČERVENKA FRANTIŠEK <i>Modelování ploch technické praxe a jejich 3D tisk</i>	111
KRÁLOVÁ ALICE <i>Zajímavé vlastnosti elipsy, které se neprobírají v rámci běžného učiva</i>	115
KUDLIČKOVÁ SOŇA, MACKOVOVÁ ALŽBETA, BÁTOROVÁ MARTINA <i>Konstrukcie elipsy v interakcii s GeoGebrou</i>	121
MAŤAŠOVSKÝ ALEXANDER, VISNYAI TOMÁŠ <i>Možnosti zásuvného modulu GeoGebra systému Moodle</i>	127
MOLNÁR EMIL, SZIRMAI JENO <i>Non-Euclidean polyhedral manifolds, models and visualization</i>	133
SROKA-BIZOŃ MONIKA, POLINCEUSZ PIOTR <i>Tensegrity structures – the idea and the realization</i>	141
STACHEL HELLMUTH <i>Two particular quadratic cones</i>	147
ŠAFARÍK JAN, SLABĚŇÁKOVÁ JANA, SIVČÁK JOZEF <i>Výuka deskriptivní geometrie na Stavební fakultě VUT a nové studijní materiály vytvářené v dynamickém systému GeoGebra</i>	153
TOMICZKOVÁ SVĚTLANA, JEŽEK FRANTIŠEK <i>Geometrický software a výuka geometrie</i>	163
TYTKOWSKI KRZYSZTOF <i>About a certain supplement of double-image parallel projection</i>	167
VELICOVÁ DANIELA <i>3D Data Reconstruction</i>	173
ZAMBOJ MICHAL <i>On Methods of Synthetic Projective Geometry</i>	179
LIST OF PARTICIPANTS	185

## Forewords

The third *Slovak–Czech conference on Geometry and Graphics* took place in hotel Vršatec, Vršatské Podhradie, Slovakia, on September 15–18, 2017, as a joint event of 26<sup>th</sup> SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY CSG '2017 organized annually by the Slovak Society for Geometry and Graphics and 37<sup>th</sup> CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS held by the Czech Society for Geometry and Graphics of the Union of Czech Mathematicians and Physicists.

Conference was attended by 48 participants from 7 countries: Slovakia, Czech republic, Poland, Hungary, Germany, Austria and Australia, who presented 31 contributed talks and 3 posters from applied and pure geometry, geometric modelling, computer graphics and education of geometry. Participants enjoyed also interesting live presentation of 3D printer in performance. Conference organizers hosted three plenary speakers with invited lectures focused on different fields of pure and applied geometry. Margita Vajsálová from Civil Engineering Faculty of Slovak University of Technology in Bratislava introduced some basic information on geometric concepts and methods used in cartography in lecture entitled *Geometric Tools in a Precision of Image Elements on Maps*. Invited speaker Boris Odehnal from University of Applied Arts in Vienna presented in his talk an interesting algebraic approach to *Hermite Interpolation of Ruled Surfaces and Canal Surfaces*. Plenary lecture *Investigation of Loci in Dynamic Geometric Environment* by Pavel Pech from South Bohemian University in České Budějovice was related to utilisation of dynamic geometric software for automated theorem proving, by means of symbolic geometric methods currently introduced and available in the dynamic mathematical software environment.

Slovak–Czech GeoGebra Workshop about dynamic mathematical software GeoGebra was also a part of the conference. Participants presented here their experience with software inclusion to maths education, both teaching and learning, as supplementary dynamic didactic tool, and shared their good practise in development of applets as dynamic presentations and study materials.

Conference was organized by the committee of the Slovak Society for Geometry and Graphics. Social programme included short walks in the Vršatec Mountain, the most spectacular part of White Carpathians, visit to small glass museum in Lednické Rovne and trip to ruins of an old castle Lednica, build on a steep stony hill and boasting with interesting history, unusual interior structure, and nice view to the countryside.

We would like to invite all interested participants to attend also the next *Czech–Slovak Conference on Geometry and Graphics* organized in Czech republic in September 2018, that will be held in cooperation of representatives of both societies for geometry and graphics as joint event of 38<sup>th</sup> CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS and 27<sup>th</sup> SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY SCG ‘2018. We are pleased to keep successfully the good tradition of our common meetings deeply rooted in the history.

Bratislava & Plzeň, November 30, 2017

Daniela Velichová  
*chair of SSGG*

Miroslav Lávička  
*chair of ČSGG*

## PLENARY TALKS



# Hermite Interpolation with Ruled and Canal Surfaces

Boris Odehnal

*University of Applied Arts Vienna  
Oskar-Kokoschka-Platz 2, A-1010 Wien, Austria  
email: boris@geometrie.tuwien.ac.at*

**Abstract.** We show an algebraic way to interpolate Hermite data of ruled or canal surfaces. For that we construct rational (indeed polynomial) curves within Plücker's quadric  $M_2^4$  and within Lie's quadric  $L_2^4$  which are point models for the geometries of lines and spheres. The technique we use applies to both types of surfaces, because they can be represented as curves within the afore mentioned quadrics. The Bézier ansatz for a curve in either quadric involves some design parameters guiding the shape of the ruled or canal surfaces. These parameters are to be determined by solving a system of algebraic equations. The degrees of the equations admit a prediction of the number of possible solutions. Together with geometric criteria, useful solutions, i.e. solutions that meet practical requirements can be selected. Our main goal is the interpolation of  $G^k$  data at the boundaries of ruled surfaces and canal surfaces. Depending on  $k$ , the degree  $n$  of the curve in the Bézier ansatz has to be chosen: the higher  $k$ , the higher the degree of the ansatz. Nevertheless, we aim at low degree interpolants, and therefore, we choose the lowest possible  $n$  in any case.

*Key words:* Interpolation, Hermite data, ruled surface, channel surface, Plücker's quadric, Lie's quadric, rational normal curve.

## Remark.

Full paper with all information presented at the conference plenary talk will be available published in the issue of scientific journal G – Slovak journal for geometry and graphics, vol. 14, No. 28, 2017.



# Investigation of loci in dynamic geometric environment

Pavel Pech

*Faculty of Education, University of South Bohemia  
České Budějovice, Czech Republic  
pech@pf.jcu.cz*

**Abstract.** A classical problem in plane geometry consists of searching for the path of a point, that is subject to given constraints. Except for the most simple loci such as lines, circles or possibly conics, this topic is not contained in most geometry texts. The reason might be difficulties when visualizing various objects with different movements. The use of dynamic geometry software (DGS) considerably facilitates the loci investigation. Whereas in the past the study of loci by DGS was based on numerical methods, now we are facing the introduction of symbolic methods based on the theory of automated theorem proving into DGS. The result is the implicit equation of the locus. In the text a few concrete examples are given.

**Keywords:** Dynamic geometry, locus, locus equation.

## 1 Introduction

Roughly spoken a locus is a set of points subject to some geometric constraints. Searching for loci belongs, in our opinion, to difficult part of mathematics school curricula all over the world. New technologies considerably facilitate searching for loci not only to students but also to mathematicians. Firstly dynamic geometry tools such as the command **Locus** appeared. Nowadays we encounter the use of CAS based on the theory of automated theorem proving, such as commands **Prove**, **LocusEquation**.

## 2 Command Locus

The tool **Locus** belongs to one of traditional functions of dynamic geometry systems. To its application we need two points. The first point is *a mover*, the point which usually moves along a certain object. The second point - *a tracer* - is somehow dependent on the mover and draws the sought trajectory. The command **Locus** is very simple and useful, we can use it at all types of schools.

### Problem 1

*Let  $ABC$  be a triangle with a side  $AB$  and a vertex  $C$  on a circle  $c$  centered at  $A$  and radius  $|AB|$ . Determine the locus of the orthocenter  $H$  of  $ABC$  when  $C$  moves along  $c$ .*

Using the command **Locus**, first clicking on the tracer  $H$  and then on the mover  $C$ , we get the curve of the *third* degree which is the strophoid,

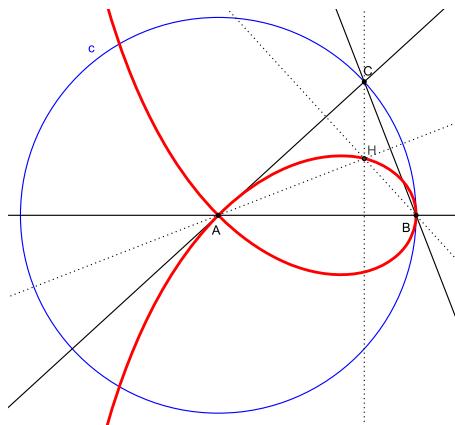


Figure 1: Computer displays the strophoid

Fig. 1.

How to compute it?

Let  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, 0)$ ,  $C = (u, v)$  and  $H = (p, q)$ . Then:

$$(H - C) \perp (B - A) \Leftrightarrow h_1 : p - u = 0,$$

$$(H - A) \perp (C - B) \Leftrightarrow h_2 : p(u - a) + qv = 0.$$

$$C \in c \Leftrightarrow h_3 : u^2 + v^2 - a^2 = 0.$$

Elimination of  $u, v$  in the system  $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$  gives the equation of the fourth degree which decomposes into the strophoid and the line

$$(p^3 - ap^2 + aq^2 + pq^2)(p - a) = 0. \quad (1)$$

How is it possible?

The problem lies in the position when  $C$  arrives at  $B$ , i.e.  $u = a, v = 0$ , and the line  $BC$  is not defined, Fig. 2. Then the system  $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$  transforms into one relation

$$p - a = 0$$

which is the line in (1).

To avoid this, we add the condition  $B \neq C$ , i.e.  $((u - a)^2 + v^2)t - 1 = 0$ , where  $t$  is a slack variable, into the system above. Then we get the only equation

$$S : p^2(a - p) - q^2(a + p) = 0$$

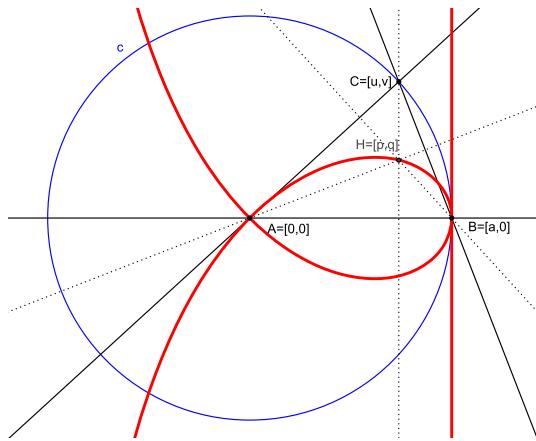


Figure 2: Together with the strophoid an extraneous line appears

which is the strophoid.

Opposite implication (often neglected at schools).

Let  $H \in S$ . We ask whether the vertex  $C$  lies in the circumcircle of  $ABC$  for a given orthocenter  $H$ . Then adding the condition  $q \neq 0$ , which leads to the point  $[a, 0]$ , to the system above, we get  $NF = 0$ . This means

$$q^2(u^2 + v^2 - a^2)^2 = c_1(p - u) + c_2(p(u - a) + vq) + c_3S, \quad (2)$$

where  $c_1, c_2, c_3$  are certain polynomials. Then (2) implies  $u^2 + v^2 - a^2 = 0$ .

Conclusion: The locus is the strophoid without the point  $[a, 0]$ .

## Problem 2

Let  $A$  be a fixed point on a circle  $c$ , and  $l = AM$  a line passing through  $A$  and a point  $M \in c$ . Determine the locus of  $P \in l$  such that  $|MP| = k$ , where  $k$  is a constant, when  $M$  moves along the circle  $c$ .

Similarly, using the command **Locus** we get the curve of the fourth degree called the limaçon of Pascal, Fig. 3.

How to compute it?

Let  $A = [0, 0]$ ,  $S = [a, 0]$ ,  $M = [u, v]$ ,  $P = [p, q]$ . Then:

$$M \in c \Leftrightarrow h_1 := (u - a)^2 + v^2 - a^2 = 0,$$

$$|MP| = k \Leftrightarrow h_2 := (p - u)^2 + (q - v)^2 - k^2 = 0,$$

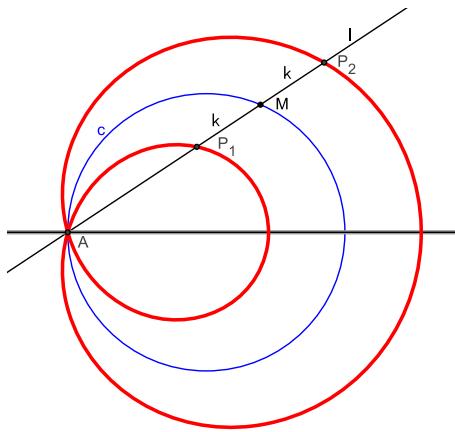


Figure 3: Computer displays the limaçon of Pascal

$P, M, A$  are collinear  $h_3 := pv - qu = 0$ .

Elimination of  $u, v$  in the system  $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$  gives the equation

$$(p^2 + q^2 - k^2)((p^2 + q^2 - 2ap)^2 - k^2(p^2 + q^2)) = 0 \quad (3)$$

of the degree six which decomposes into the limaçon of Pascal and the circle.

Why?

The problem arises in the position when  $M$  arrives at  $A$ , i.e.  $[u, v] = [0, 0]$ , and the line  $AM$  is not defined. Then the system  $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$  transforms into the only relation

$$p^2 + q^2 - k^2 = 0$$

which is the circle in (3), Fig. 4.

To get rid of this "extraneous" circle, we add the condition  $M \neq A$ , i.e.  $(u^2 + v^2)t - 1 = 0$ , where  $t$  is a slack variable, into the system above. Then we get the only equation

$$S : (p^2 + q^2 - 2ap)^2 - k^2(p^2 + q^2) = 0$$

which is the limaçon of Pascal.

Opposite implication.

Let  $P \in S$ . We ask whether the point  $M \in AP \cap c$  fulfills  $|MP| = k$ .

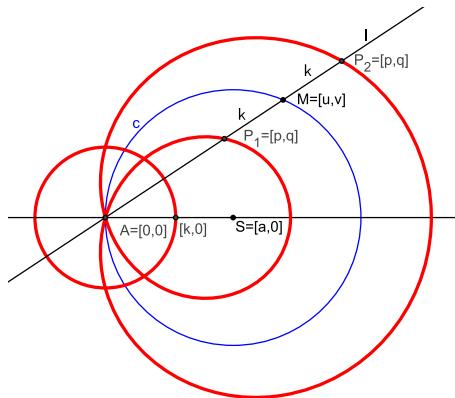


Figure 4: Together with the limaçon of Pascal an extraneous circle appears

Adding the condition  $apu \neq 0$ , which is equivalent to  $P \neq [0,0]$ , into the system above, we get  $NF(1, L) = 0$ .

Conclusion: The locus of  $P$  is the limaçon of Pascal  $S$  without the point  $[0,0]$ .

### 3 Command LocusEquation

The command *Locus* cannot be applied to any locus. Problems that we will present now are of this case. To solve them we have to use a more advanced tool *LocusEquation* which has recently been implemented into GeoGebra version 5. This command brings a new approach in searching for loci. It is based on automated discovery, the part of the theory of automated theorem proving. This tool uses elimination of variables in a system of algebraic equations describing the locus. It returns an implicit equation of the locus. It is well known that the result is the Zariski closure of a projection on the space of local coordinates. This often leads to the situation that instead of a real locus we get the smallest variety which contains, besides the locus, also some extraneous objects not pertaining to it.

Before using the command *LocusEquation* we have to construct in GeoGebra a geometric diagram describing the locus. After constructing the diagram we apply the command *LocusEquation* which has two parameters. The first one is the thesis  $T$  (which must be a Boolean expression), the second one is a free point  $P$ , whose locus we investigate. The result of *LocusEquation* [ $T, P$ ] produces the set  $V$  such that "if  $T$  is true then  $P \in V$ ".

Several Boolean expressions in the form of commands such as `AreCollinear`, `AreParallel` or `AreConcyclic` are tested in a few problems which results to curves in the plane.

By searching for loci we apply Gröbner bases method using software CoCoA.

### Problem 3

Determine the locus of a point  $P$  such that its reflections  $K, L, M$  in the sides of a given triangle  $ABC$  are collinear.

It is obvious that in this case the command `Locus` cannot be applied. However the command `LocusEquation` solves the problem. Procedure determining the locus is following:

1. First construct a geometric diagram

- Construct a triangle  $ABC$ .
- Choose an arbitrary point  $P$ .
- Construct reflections  $K, L, M$  of the point  $P$  in the sides  $AB, BC, CA$ .

2. Enter the command `LocusEquation[AreCollinear[K, L, M], P]`.

Besides the graph of the searched locus one also gets its equation in given

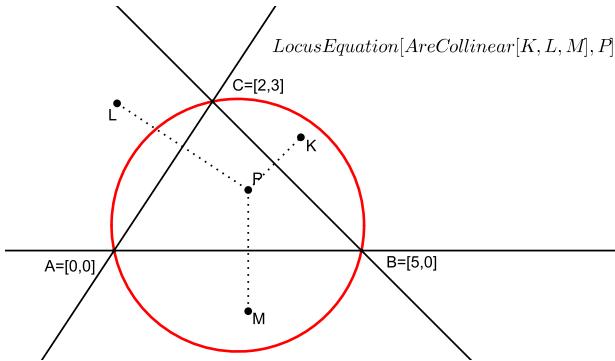


Figure 5: On the screen the circumcircle of  $ABC$  appears

rectangular coordinates

$$x^2 + y^2 - 5x - y = 0.$$

We see that the locus is the circumcircle of  $ABC$ , Fig. 5.

Which way does the computer proceed?

Let us show how we arrive at the solution — the circumcircle of  $ABC$  — using the theory of automated theorem proving.

Let the coordinates be chosen such that  $A = [0, 0]$ ,  $B = [a, 0]$ ,  $C = [u, v]$ ,  $P = [p, q]$ ,  $K = [k_1, k_2]$ ,  $L = [l_1, l_2]$ ,  $M = [m_1, m_2]$ . Suppose that the

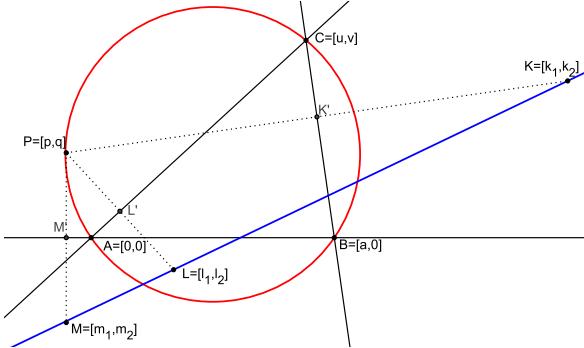


Figure 6: The locus of the point  $P$  is the circle

points  $K, L, M$  are collinear. Then:

$$PK \perp BC \Leftrightarrow h_1 := (p - k_1)(u - a) + (q - k_2)v = 0,$$

$$K' \in BC \Leftrightarrow h_2 := 2av + u(q + k_2) - v(p + k_1) - a(q + k_2) = 0,$$

$$PL \perp CA \Leftrightarrow h_3 := (p - l_1)u + (q - l_2)v = 0,$$

$$L' \in CA \Leftrightarrow h_4 := (p + l_1)v - (q + l_2)u = 0,$$

$$PM \perp AB \Leftrightarrow h_5 := p - m_1 = 0,$$

$$M' \in AB \Leftrightarrow h_6 := q + m_2 = 0,$$

$K, L, M$  are collinear  $\Leftrightarrow$

$$h_7 := k_1l_2 + l_1m_2 + k_2m_1 - l_2m_1 - k_1m_2 - k_2l_1 = 0.$$

After eliminating variables  $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2$  in the system above we get

$$av^2 \cdot S = 0,$$

where

$$S = vp^2 + vq^2 - avp + (au - u^2 - v^2)q.$$

If  $a \neq 0$  and  $v \neq 0$ , i.e. if  $A \neq B$  and  $A, B, C$  are not collinear, then  $S = 0$  represents the circumcircle of  $ABC$ , Fig. 6.

This can be easily verified by substituting coordinates of the triangle vertices into  $S = 0$ .

Opposite implication.

Let  $P \in S$ . We ask whether  $K, L, M$  are collinear, i.e.  $h_7 = 0$ . Suppose that  $A \neq C$  and  $B \neq C$ , i.e.  $(u^2 + v^2)((u - a)^2 + v^2) \neq 0$ . Then we get  $NF = 0$ , which is equivalent to

$$(u^2 + v^2)((u - a)^2 + v^2)h_7 = c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_6h_6 + c_7S. \quad (4)$$

Since we suppose that  $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_6 = 0$  and  $S = 0$ , then (4) implies that  $h_7 = 0$ .

Thus every point  $P$  of the circumcircle of  $ABC$  satisfies the condition that  $K, L, M$  are collinear.

Conclusion: If  $A \neq B, A \neq C, B \neq C$  and  $A, B, C$  are not collinear, then the locus is the (*entire*) circumcircle of  $ABC$ .

#### Problem 4

*Let  $ABCD$  be a quadrilateral and  $K, L, M, N$  feet of perpendiculars from a point  $P$  to the lines  $AB, BC, CD, DA$ . Determine the locus of  $P$  such that the lines  $KN$  and  $LM$  are parallel.*

It is obvious that in this case the command **Locus** cannot be applied. We will use the command **LocusEquation**.

Procedure determining the locus is following:

1. First construct a geometric diagram
  - Draw a quadrilateral  $ABCD$ .
  - Choose an arbitrary point  $P$ .
  - Construct feet  $K, L, M, N$  of perpendiculars from  $P$  to the lines  $AB, BC, CD$  and  $DA$ .
  - Denote  $m = KN$  and  $n = LM$ .

2. Enter the command **LocusEquation[AreParallel[m,n],P]**.

Besides the graph of the searched locus one also gets its equation in given rectangular coordinates

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

We see that the locus is a circle, Fig. 7.

Following questions may arise:

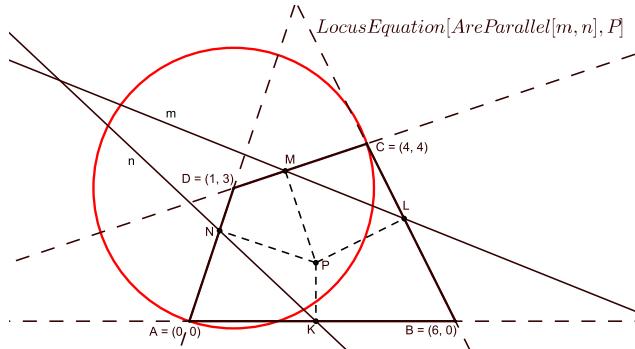


Figure 7: On the screen the circle is displayed

- Is the solution really the *entire* circle?
- Is the solution always a circle (and not another curve)?
- If the solution is not a circle, which positions of the vertices  $A, B, C, D$  does it happen for?

Which way does computer proceed?

Let's show how we arrive at the solution using the theory of automated theorem proving.

Let  $A = [0, 0]$ ,  $B = [a, 0]$ ,  $C = [u, v]$ ,  $D = [w, z]$ ,  $P = [p, q]$ ,  $K = [k, 0]$ ,  $L = [l_1, l_2]$ ,  $M = [m_1, m_2]$ ,  $N = [n_1, n_2]$ . Suppose that the lines  $KN$  and  $LM$  are parallel. Then:

$$PK \perp AB \Leftrightarrow h_1 := p - k = 0,$$

$$L \in BC \Leftrightarrow h_2 := ul_2 + av - al_2 - vl_1 = 0,$$

$$PL \perp BC \Leftrightarrow h_3 := (p - l_1)(u - a) + (q - l_2)v = 0,$$

$$M \in CD \Leftrightarrow h_4 := um_2 + zm_1 + vw - wm_2 - uz - vm_1 = 0,$$

$$PM \perp CD \Leftrightarrow h_5 := (p - m_1)(w - u) + (q - m_2)(z - v) = 0,$$

$$N \in DA \Leftrightarrow h_6 := wn_2 - zn_1 = 0,$$

$$PN \perp DA \Leftrightarrow h_7 := (p - n_1)w + (q - m_2)z = 0,$$

$$KN \parallel LM \Leftrightarrow h_8 := (l_1 - m_1)n_2 - (l_2 - m_2)(n_1 - k) = 0.$$

After eliminating variables  $k, l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2$  in the system above we get

$$z(av - vw - az + uz)S = 0, \quad (5)$$

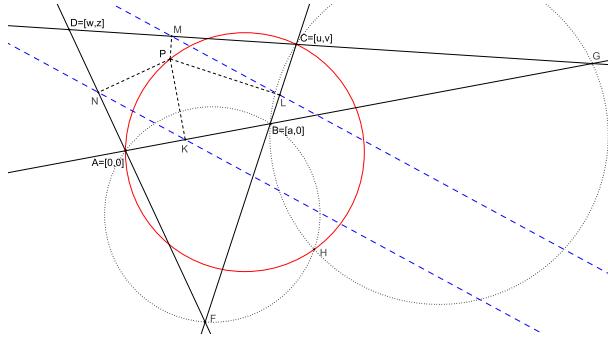


Figure 8: The locus of  $P$  is the circle

where

$$S = (p^2 + q^2)(avw - 2uvw + vw^2 - auz + u^2z - v^2z + vz^2) + p(u^2vw + v^3w - avw^2 + au^2z - u^3z + av^2z - uv^2z - avz^2) - q(au^2w - u^3w + av^2w - uv^2w - auz^2 + u^2w^2 + v^2w^2 - u^2vz - v^3z - auz^2 + u^2z^2 + v^2z^2).$$

In (5) we can suppose that  $z \neq 0$ ,  $av - vw - az + uz \neq 0$ , otherwise  $ABCD$  degenerates.

Thus (5) implies the locus equation of  $P = [p, q]$

$$S = 0.$$

Denote the coefficient at  $p^2 + q^2$  by

$$T = avw - 2uvw + vw^2 - auz + u^2z - v^2z + vz^2.$$

If  $T \neq 0$ , then (5) is the circle passing through the points  $A, C$  and the Miquel point  $H$ , Fig. 8.

Now suppose that  $T = 0$ . Then  $S = 0$  is the line passing through the vertices  $A, C$ . For  $P \in AC$  the angles by  $B$  and  $D$  are equal, Fig. 9.

Opposite implication.

Does every point  $P = [p, q]$  satisfying  $S = 0$  have the required property  $KN \parallel LM$ ?

Suppose that  $P$  obeys  $S = 0$ . We want to show that then  $KN \parallel LM$ , i.e.  $h_8 = 0$ . Using the command Normal Form **NF** in CoCoA we get  $NF \neq 0$ . The answer is negative.

Adding the conditions  $P \neq A$  and  $P \neq C$ , i.e.  $(p^2 + q^2)((p - u)^2 + (q - v)^2)s - 1 = 0$  to the system above, we get **NF=0**. This implies that  $h_8 = 0$ .

Conclusion:

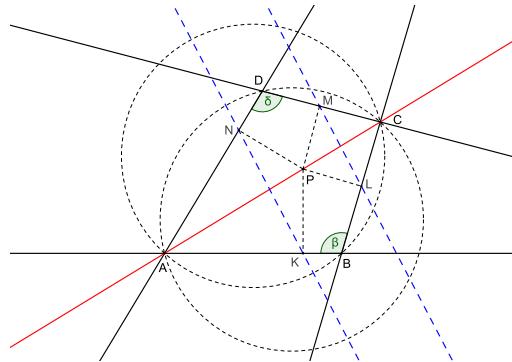


Figure 9: If the angles by  $B$  and  $D$  are equal then the locus is the line  $AC$

— If the angles by  $B$  and  $D$  of a quadrilateral  $ABCD$  are distinct then the locus is the circle through the points  $A, C$  and the Miquel point  $H$ , without  $A$  and  $C$ .

— If the angles by  $B$  and  $D$  are equal then the locus is the line  $AC$  without the points  $A$  and  $C$ .

**Remark:** Realize that if  $P = A$  or  $P = C$  then  $K = N$  or  $L = M$  and the lines  $KN$  or  $LM$  are not defined.

## 4 Conclusion

In the article investigation of loci in the plane using new GeoGebra commands `Locus` and `LocusEquation` is given. Firstly we applied these commands on a few problems, secondly these problems were analyzed in detail. Realize that the locus equation generated by the command `LocusEquation` is only the *necessary* condition for validity of the condition given by a Boolean expression in the command. We recommend, mainly for educational reasons, despite the fact that this is a difficult problem, to implement the verification of the opposite implication — *which part of the found set of points belongs to the locus* — into the program in future.

## References

- [1] M. A. Abánades, F. Botana, A. Montes, T. Recio: *An algebraic taxonomy for locus computation in dynamic geometry*, Computer-Aided Design 56 (2014), 22-33

- [2] M. A. Abánades, F. Botana, Z. Kovács, T. Recio, C. Sólyom-Gecse: *Implementing automatic discovery in GeoGebra*, Proceedings of ADG 2016, Strasbourg 2016
- [3] F. Botana, M. Hohenwarter, P. Janičić, Z. Kovács, I. Petrovič, T. Recio, S. Weitzhofer: *Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements*, Journal of Automated Reasoning 55 (2015), 39-59
- [4] A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano: *CoCoA, a System for Doing Computations in Commutative Algebra*, <http://cocoa.dima.unige.it>
- [5] S. C. Chou: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1987
- [6] T. Recio, M. P. Vélez: *Automatic discovery of theorems in elementary geometry*, Journal of Automated Reasoning, 23 (1999), 63-82

# Geometric tools in a precision of image elements on maps

Margita Vajsálová

*Dept. of Mathematics and Descriptive Geometry, Fac. of Civil Engineering, Slovak Univ. of Technology in Bratislava  
Radlinského 11, 810 05 Bratislava, Slovak Republic  
email: margita.vajsablova@stuba.sk*

**Abstract.** Maps in analog and digital form affect every area of life. An actual problem affected by the precision of positioning geodetic points using new GNSS technologies in coordinate systems is the precision of the map projection. Map projections are coming out of geometric expression of properties of reference surfaces of Earth using methods of differential geometry, as well as of relation between two linear manifolds - reference ellipsoid and map plane. Choice of cartographic projection is determined by the geometrical characteristics of the territory and choice criteria for distortion of map elements. The aim of this paper is to show the role of geometry and mathematics in the cartography and different options for access to the distortions of the territory, such as optimization of extreme value of distortion, summing and integral criterion on area territory, in some case using criterion with the requirement of a minimum mean value of scale distortion in a given area.

**Key words:** Riemann manifolds, reference surfaces, conical, azimuthal, variational cartographic projection, scale distortion.

## 1 The role of geometry in map creation

„Experience proves that anyone studies geometry in infinitely quicker to grasp difficult subjects than one who has not.“ This is the big idea from Platon (The Republic Book 7, 375 B.C.). Map creation is the interdisciplinary problem connected geometrical, mathematical and cartographical view. An actual problem affected by the precision of positioning geodetic points using new GNSS technologies in coordinate systems is the precision of the map projection. Multi-geometry tools are introduced into this process, as differential, analytical, constructive and descriptive geometry as well spherical geometry and topology. The aim of this paper is to show the role of geometry and mathematics in the cartography and different options for access to the distortions of the territory, such as optimization of extreme value of distortion, minimizing summing and integral criterion on area territory, in some case using criterion with the requirement of a minimum mean value of scale distortion in a given area.

Map projections are coming out of geometric expression of properties of reference surfaces of Earth using methods of differential geometry, as well as of relation between two linear manifolds - reference ellipsoid and map plane (Grafarend&Krumm, 2006).

## 2 Distortion in map projections of reference ellipsoid

Reference ellipsoid is two-dimensional Riemann manifold  $\Phi$  with curvilinear coordinates  $\varphi$  and  $\lambda$ , with parametrization  $\Phi(\varphi, \lambda)$ , whose elements of vector are right side of system of equations:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \cos \lambda, \\ Y &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi, \quad \varphi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle, \lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $a$  is length of the semi-axis of meridian ellipse  $b$  and  $e$  is the 1<sup>st</sup> numerical eccentricity. Gaussian matrix  $\mathbf{G}$  of reference ellipsoid:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & N^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

For meridian radius of curvature  $M$  and for normal radius of curvature  $N$  it holds:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3)$$

The 1st fundamental form of ellipsoidal surface  $\Phi$  (expressing differential length  $ds$  of the element of geodesic) is formulated from elements of metric tensor  $\mathbf{G}$ :

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (4)$$

Cartographic projections define mathematic relation between geographic coordinates on reference surface  $\Phi_1$  and coordinates in the map plane  $\Phi_2$  that is mean relation between two-dimensional Riemann manifolds determined by map equations for orthogonal coordinates:

$$x = x(\varphi, \lambda), \quad (5)$$

$$y = y(\varphi, \lambda)$$

and map equations for polar coordinates:

$$\rho = \rho(\varphi, \lambda), \quad (6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\varphi, \lambda).$$

Relation of distortion between two-dimensional Riemann manifolds is expressed by Cauchy–Green deformation tensor  $\mathbf{C}$  (Pressley, 2001):

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{J}_1^T \mathbf{G}_2 \mathbf{J}_1, \quad (7)$$

where  $\mathbf{J}_1$  is Jacobi matrix of the first differentials:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} d\varphi & 0 \\ 0 & d\lambda \end{pmatrix} \quad (8)$$

$\mathbf{G}_2$  is metric tensor of Riemann manifold  $\Phi_2$  – image of the points of ellipsoid onto a plane by map equations:

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ where: } E = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad (9)$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2.$$

Than Cauchy–Green deformation tensor  $\mathbf{C}_1$  is:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} E d\varphi^2 & F d\varphi d\lambda \\ F d\varphi d\lambda & G d\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Scale distortion between two Riemann two-dimensional manifolds is expressed by scale distortion factor  $m$ , which is quotient of the first fundamental forms, of Cauchy–Green deformation tensor and sum of the elements Gaussian matrix of reference ellipsoid:

$$m^2 = \frac{\sum_{i,j} c_{ij}}{\sum_{i,j} g_{ij}} = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}. \quad (11)$$

Factors  $m_p$  and  $m_r$  of scale distortion of meridian and parallels are:

$$m_p = \sqrt{\frac{c_{11}}{g_{11}}}, \quad m_r = \sqrt{\frac{c_{22}}{g_{22}}}. \quad (12)$$

### 3 Conformal conical and azimuthal projection of reference ellipsoid

Map projections on developable surfaces are the most important in cartographic and geodetic practice. Conical and azimuthal projections are relations between two-dimensional manifolds:

- $\Phi_1$  with parameters  $\varphi, \lambda$  - ellipsoidal surface,
- $\Phi_2$  with parameters  $\rho, \varepsilon$  - image of the points of ellipsoid on conical surface after developing onto a plane.

Their relation is defined general map equations for polar coordinates:

$$\rho = f(\varphi),$$

$$\varepsilon = n\lambda, \quad 0 < n < 1,$$

(13)

where  $n$  is one of the parameters of conical projection, for azimuthal projection parameter  $n = 1$ . Transformation of polar coordinates  $\rho$  and  $\varepsilon$  on orthogonal coordinates  $x$  and  $y$ :

$$x = \rho_0 - \rho \cos \varepsilon, \quad (14)$$

$$y = \rho \sin \varepsilon,$$

where  $\rho_0$  is radius of image of standard parallel with ellipsoidal latitude  $\varphi_0$ . Constants  $\rho_0$  and  $\varphi_0$  are also parameters of conical projection.

Distortion in conical projection formulated by Cauchy-Green deformation tensor  $C_1$  first order, which is given as product of Jacobi matrix and Gaussian matrix:

$$C_1 = J_1^T G_2 J_1 = \begin{pmatrix} \frac{d\rho}{d\varphi} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\rho}{d\varphi} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 & 0 \\ 0 & n^2 \rho^2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

there are matrix  $J_1$  is Jacobi matrix for manifold  $\Phi_1$ , elements of Gaussian matrix  $G_2$  of manifold  $\Phi_2$  are determined from first partial derivations of parametrization  $\Phi_2(\rho, \varepsilon)$ . Gaussian matrix  $G_1$  for ellipsoid is equation (2).

Elements of matrix  $C_1$  denoted by  $c_{ij}$  and elements of matrix  $G_1$  by  $g_{ij}$ , where  $i, j \in \{1, 2\}$ . Scale distortion of meridian and parallel  $m_p$  and  $m_r$  are expressed from elements of matrixes  $C_1$  and  $G_1$  by (12):

$$m_p = \sqrt{\frac{c_{11}}{g_{11}}} = -\frac{d\rho}{M d\varphi}, \quad m_r = \sqrt{\frac{c_{22}}{g_{22}}} = \frac{n\rho}{N \cos \varphi}. \quad (16)$$

Because azimuthal projections have parameter  $n = 1$ :

$$m_p = -\frac{d\rho}{M d\varphi}, \quad m_r = \frac{\rho}{N \cos \varphi}. \quad (17)$$

Map equations for conformal projections are determined by condition for factors of scale distortion of meridian and parallel:

$$m_p = m_r. \quad (18)$$

Than map equations for conformal conical projection of reference ellipsoid are (Srňka, 1986):

$$\rho = \rho_0 \left[ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)} \sqrt{\left( \frac{(1-e \sin \varphi_0)(1+e \sin \varphi)}{(1+e \sin \varphi_0)(1-e \sin \varphi)} \right)^e} \right]^n, \quad \varepsilon = n\lambda, \quad (19)$$

where  $e$  is the 1<sup>st</sup> numerical eccentricity of ellipsoid,  $\varphi_0$ ,  $\rho_0$  and  $n$  are mentioned parameters of conical projection. From the condition (18), map equations for conformal azimuthal projection of reference ellipsoid are:

$$\rho = c \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \sqrt{\left( \frac{1+e \sin \varphi}{1-e \sin \varphi} \right)^e}. \quad (20)$$

$$\varepsilon = \lambda.$$

## 4 Choosing and optimizing of cartographic projection depending on geometric character of area

Choosing cartographic projection depending on geometric character of area and optimization of its parameters are solving for example in

(Vajsálová&Klimeková, 2016), (Szatmári, 2016) especially for Slovakia in (Vajsálová, 2015). In this paper the geometric characteristics of Croatia and some proposals of cartographic projection are presented.

The currently used cartographic projection in Croatia is Gauss-Krüger conformal projection in System HR-HDKS. Croatia territory on reference ellipsoid Bessel is divided on two meridian bands (Zone 5 with central meridian 15°, Zone 6 with central meridian 15°) which are projected onto two cylindrical surfaces in transverse position. Maximal scale distortion is +18 cm/km.

For comparison we formulate conformal conical projection in normal position for Croatia territory. Parameters of projection are determined from criterion on equal distortion on bounded parallels  $\varphi_J$  and  $\varphi_S$  and on the standard parallel  $\varphi_0$ . The equation for parameter  $n$  is derived (Vajsálová, 2009) from the first requirement on equal scale distortion of bounded parallels  $\varphi_J$  and  $\varphi_S$ :

$$m_{rS} = m_{rJ} \Rightarrow \frac{n\rho_S}{N_S \cos \varphi_S} = \frac{n\rho_J}{N_J \cos \varphi_J}. \quad (21)$$

Equation for parameter  $\rho_0$  is derived from the second requirement, that absolute value of scale distortion of bounded parallels  $\varphi_J$  and  $\varphi_S$  is equal to absolute value of scale distortion of standard parallel  $\varphi_0$ . This condition is formulated:

$$\begin{aligned} m_J &= m_S = 1 + \nu, \\ m_0 &= 1 - \nu. \end{aligned} \quad (22)$$

From the both of these conditions the parameters  $n$ ,  $\rho_0$  of conical projection are calculated by equations:

$$\rho_0 = \frac{2N_S \cos \varphi_S N_0 \cos \varphi_0}{nN_0 \cos \varphi_0 \left[ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_S}{2} + 45^\circ\right)} \sqrt{\left( \frac{(1 - e \sin \varphi_0)(1 + e \sin \varphi_S)}{(1 + e \sin \varphi_0)(1 - e \sin \varphi_S)} \right)^e} \right]^n + nN_S \cos \varphi_S}, \quad (23)$$

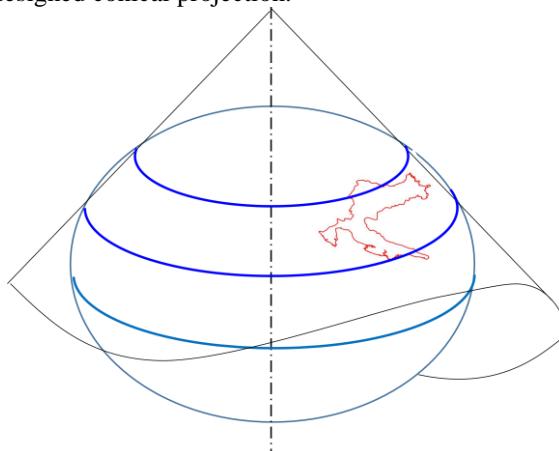
$$n = \log_c \frac{N_S \cos \varphi_S}{N_J \cos \varphi_J},$$

where  $N_J$ ,  $N_S$  and  $N_0$  are normal radii of curvature in parallels with latitudes  $\varphi_J$ ,  $\varphi_S$  and  $\varphi_0$  and  $c$  is determined by  $\varphi_J$  and  $\varphi_S$ :

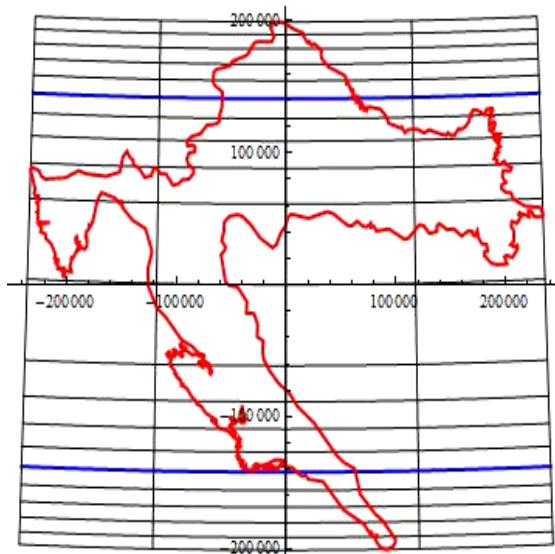
$$c = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_J}{2} + 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_S}{2} + 45^\circ\right)} \sqrt{\left( \frac{(1 - e \sin \varphi_J)(1 + e \sin \varphi_S)}{(1 + e \sin \varphi_J)(1 - e \sin \varphi_S)} \right)^e}. \quad (24)$$

This conformal conical projection of Croatia has 2 preserved parallels with latitude 43°27'51.73786" and 46°0'40.07021", angle of vertex is 44°44'32.96365". Geometric principle of this projection is on the Fig. 1.

Advantage of this projection is 1 surface, therefore 1 coordinate system for Croatia territory. Disadvantage is maximal scale distortion:  $\pm 25$  cm/km, bigger than in Gauss-Krüger conformal projection currently used in Croatia. On the Fig. 2 is cartographic parallels (isometric lines), meridians and Croatia boundary in designed conical projection.



**Fig. 1: Geometric principle of conical projection in normal position of Croatia**



**Fig. 2: Croatia territory in conformal conical projection in normal position**

Geometric properties of projected area are position, size and shape. Quantification of area position is by the point  $T$  near the centroid of area. For Croatia is this point outside of country and its coordinates are:

$$\varphi_T = 44^\circ 49' 19.20'', \lambda_T = 16^\circ 18' 32.40''.$$

Size is expressed by area value  $P$ , this is:

$$P = 52\,038.297 \text{ km}^2.$$

Perimeter  $O$  of the boundary is:

$$O = 2\,682.551 \text{ km}$$

Quantification of the shape of area is by compactness index  $I_k$ . For area on the ellipsoidal surface  $I_k$  is defined in (Vajsálová, 2015):

$$I_k = \left( 4\pi - \frac{P}{M_T N_T} \right) \frac{P}{O^2}, \quad (25)$$

here  $M_T$  and  $N_T$  are radii of curvature in the point  $T$  solved by (3). Value of compactness index  $I_k$  for Croatia calculated from Croatia boundary is:

$$I_k = 0.091.$$

Value of compactness index  $I'_k$  for Croatia calculated for Croatia bordered by ellipsoidal trapezium is more useful to choosing of cartographic projection:

$$I'_k = 0.780.$$

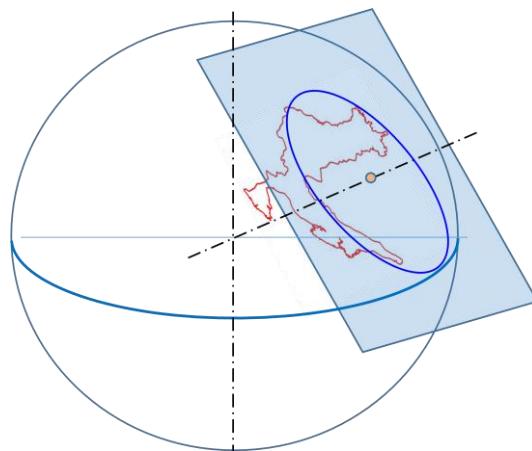
Value of compactness index  $I'_k$  means that Croatia is bordered by ellipsoidal trapezium with circular shape. It follows that for projection of Croatia territory the azimuthal projection is effective. We designed conformal azimuthal projection in oblique position with cartographic pole equals to the mentioned point  $T$ . Geometric principle of this projection is on the Fig. 3. The reference ellipsoid was projected by conformal projection on the sphere after that projected on the secant plane in oblique position with preserve circle (cartographic parallel) whose cartographic latitude is  $88^\circ 24' 20.72016''$ . Parameter  $c$  and cartographic latitude of preserved parallel of conformal azimuthal projection was calculated from requirement on equal scale distortion of border parallel and scale distortion in cartographic pole:

$$\begin{aligned} m_{Pol} &= 1 - \nu, \\ m_J &= 1 + \nu. \end{aligned} \quad (26)$$

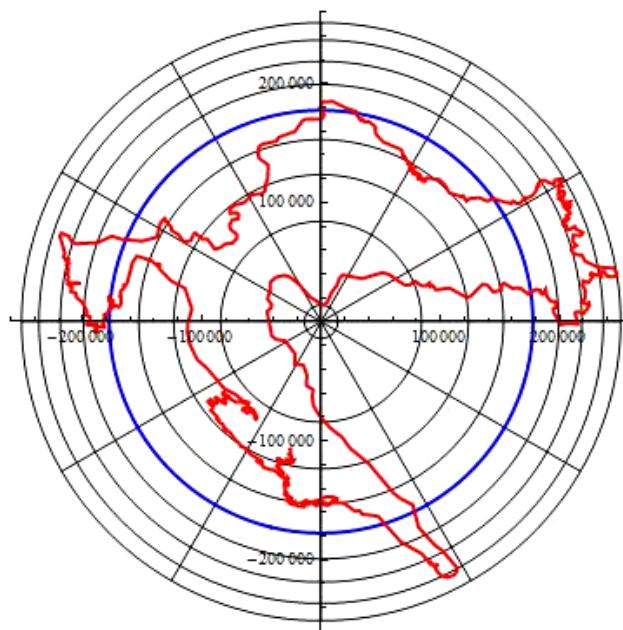
From previous we derived the equation for calculation parameter  $c$ :

$$c = \frac{4aN_J \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_J}{2} \right) \sqrt{(1-e)^e} \sqrt{(1-e \sin \varphi_J)^e}}{N_J \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_J}{2} \right) \sqrt{1-e^2} \sqrt{(1+e)^e} \sqrt{(1-e \sin \varphi_J)^e} + a \sqrt{(1-e)^e} \sqrt{(1+e \sin \varphi_J)^e}}. \quad (27)$$

Maximal scale distortion is  $\pm 19$  cm/km ergo similarly Gauss-Krüger projection used in System HR-HDKS. But our proposal projection has the advantage that Croatia is projected on one surface and has approximately equal scale distortion. On the Fig. 4 is cartographic parallels (isometric lines), meridians and Croatia boundary in designed azimuthal projection.



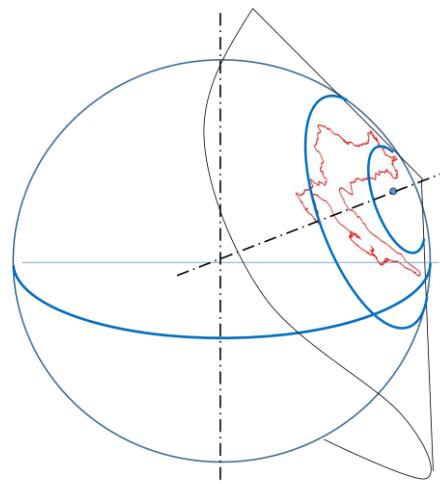
**Fig. 3: Geometric principles of azimuthal projection in oblique position of Croatia**



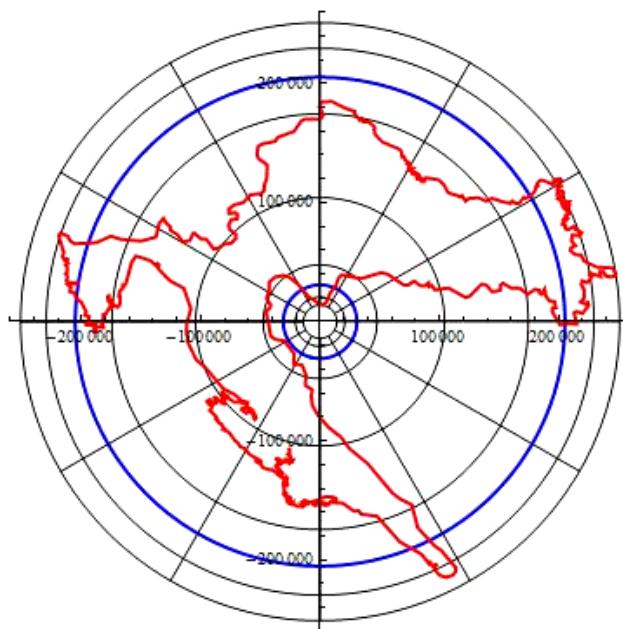
**Fig. 4: Croatia territory in conformal azimuthal projection in oblique position**

Amplitude of Croatia cartographic parallels is  $2^{\circ}7'45.73438''$ . This indicates using conical projection in oblique position for territory Croatia. Geometric principle of this projection is on the Fig. 5. Parameters of conformal conical

projection of reference ellipsoid with 2 preserved parallels from requirement on scale distortion of  $\varphi_0$ ,  $\varphi_I$  and  $\varphi_S$ .



**Fig. 5: Geometric principles of conical projection in oblique position of Croatia**



**Fig. 6: Croatia territory in conformal conical projection in oblique position**

Cartographic latitudes of two preserved parallels are:  $88^{\circ}9'25.24343''$  and  $89^{\circ}43'22.61029''$ . On the Fig. 4 is cartographic parallels (isometric lines), meridians and Croatia boundary in designed conical projection. Vertex angle of cone is  $89^{\circ}3'50.26891''$  and maximal scale distortion is  $\pm 10$  cm/km, which is almost half scale distortion of cartographic projection on the proximate plane. On the Fig. 6 is cartographic parallels (isometric lines), meridians and Croatia boundary in designed conical projection.

Optimizing of scale distortion on the projected territory by variational criteria is alternative criterion for creation of cartographic projection. Proposal of variational projection for Czechoslovakia is in (Hojovec, 1996), for Czechia in (Bořík, 1999), for Canadian territory in (Frankich, K., 1982). Proposal for Slovakia territory in (Vajsálová, Szatmári, 2014) applied Airy-Kavrajskii criterion for conformal projection with condition  $m_a = m_b = m$ , therefore integral criterion on area is:

$$I^2 = \int_{V_1}^{V_2} \int_{U_J}^{U_S} \ln^2 m \cos U dU dV. \quad (28)$$

By minimizing  $I$  we obtain characteristic function for calculation scale distortion  $m$ , which determined map equations of cartographic projection. A minimax or variational projection can be derived for the reference sphere using the following procedure. In conformal projections it holds:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial V^2} = 0, \quad (29)$$

where  $Q$  is isometric latitude and function  $u$  is:

$$u = \ln(m \cos U). \quad (30)$$

After application expression for conformal projection of the point in the complex plane with the using isometric coordinates  $Q$  and  $V$  ( $Q$  is the function of geographic latitude and  $V$  is equal to geographic longitude), we obtain for the scale distortion factor (complex variables for  $n = 4$ ):

$$\begin{aligned} \ln m = & a_0 + a_1 Q + a_2 (Q^2 - V^2) + a_3 (Q^3 - 3QV^2) + a_4 (Q^4 - 6Q^2V^2 + V^4) + \\ & + b_1 V + 2b_2 QV + b_3 (3Q^2V - V^3) + + b_4 (4Q^3V - 4QV^3) - \ln \cos U. \end{aligned} \quad (31)$$

By minimizing  $I$  we obtain system nine equations for  $i = 0$  to  $4$ ,  $j = 1$  to  $4$  where  $i$ -th or  $j$ -th equation is derivation  $I$  by variable  $a_i$  and by variable  $b_j$ :

$$\frac{\partial I^2}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial I^2}{\partial b_j} = 0. \quad (32)$$

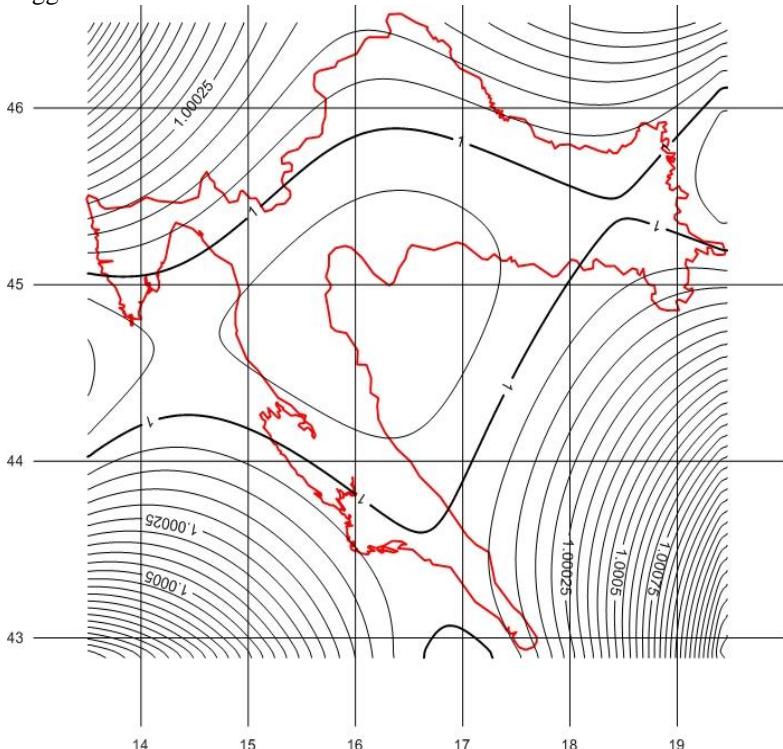
We get value of coefficients  $a_0-a_4$ ,  $b_1-b_4$  and we calculate value of factors of scale distortion  $m$ .

Variational projection we designed from boundary and interior points of Croatia. Value of the coefficients of variational projection is:

$$a_0 = 13.41036, \quad a_1 = -24.51991, \quad a_2 = -18.18192,$$

$$a_3 = 52.49748, a_4 = -23.3965, b_1 = -111.057,$$
$$b_2 = 182.47383, b_3 = -20.64307, b_4 = 26.56114.$$

Scale distortions in this projection have value from -8.9 cm/km to +19.6 cm/km. Isometric lines in variational cartographic projection of Croatia is on the Fig. 7. Advantage of variational projection is optimization distribution of scale distortion on projection territory therefore the smaller distortions are on the bigger area value.



**Fig. 7: Croatia territory in conformal variational projection**

## 5 Conclusion

Contributions has been depicted in the approach to creating a cartographic projection from geometric character of projected area and the use of various geometric tools in cartography were shown.

The evaluation of the projection from the view of the extreme distortions or the distribution of the distortion on the projected area was shown both in the process of creation and in the final evaluation. The efficiency of the projection is also affected by the number transformation steps.

The role of geometry and mathematics was visible on each of the steps of cartographic creation.

## Acknowledgements

The author has been supported by research project VEGA 1/0682/16.

## References

- [1] Bořík, M. (1999). Užití variačního kritéria pro zobrazení ČR. In *Mapa – produkt geoinformačných technológií: zborník referátov z 13. kartografickej konferencie*. Bratislava: Kartografická spoločnosť Slovenskej republiky, ISBN 80-966978-5-4, s. 37-42.
- [2] Frankich, K. (1982). Optimization of geographic map projections for Canadian territory. Canada: Simon Fraser University, 1982.
- [3] Grafarend, W. E. – Krumm W. F. (2006). *Map Projections. Cartographic Information systems*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg. 713 s.
- [4] Hojovec, V. (1996). Aplikace optimalizačních kritérií v konformních zobrazeních. In *Geodetický a kartografický obzor*, roč. 42/84, č. 7, s. 133-137.
- [5] Pressley, A. (2001) *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag London, 2001, 343 p. ISBN 1-8523-152-6.
- [6] Srnka, E. (1986) *Matematická kartografie*. Brno: Vojenská akademie Antonína Zápotockého, 302 s.
- [7] Szatmári, D. (2016) Optimization of conformal cartographic projections for the Slovak Republic by Chebyshev's theorem. *Slovak Journal of Civil Engineering*. Volume 23, Issue 4, Pages 19–24, ISSN (Online) 1210-3896, DOI: [10.1515/sjce-2015-0019](https://doi.org/10.1515/sjce-2015-0019).
- [8] Vajsálová, M. (2009) Výpočet parametrov kužeľového zobrazenia elipsoidu pre územie SR. In *Geodetický a kartografický obzor*. ISSN 0016-7096. 2009, roč. 55 (97), č. 9, s. 193-197.
- [9] VAJSÁLOVÁ, M. – Klimeková, Z. (2016) Kvantifikácia tvaru územia s využitím v kartografii. In *Proceedings of the SLOVAK-CZECH CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS* Rožnov pod Radhoštěm, September 12–15, 2016. Bratislava: Ostravská univerzita. ISBN 978-80-7464-874-8 (online), ISBN 978-80-7464-873-1 (CD). S. 185-192
- [10] Vajsálová, M. (2013) *Matematická kartografia*. 1. vyd. Bratislava: STU, 2013. 315 s. ISBN 978-80-227-4027-2.
- [11] Vajsálová, M. – Szatmári, D. (2014) Variational cartographic projections of Slovak Republic territory. In *Scientific Research and Essays*. [online] ISSN 1992-2248. Vol. 9 (2014), No. 6. p. 114-120.
- [12] Vajsálová, M. (2015) *Aspekty tvorby kartografického zobrazenia pre územie Slovenska*. Bratislava: STU, 2015. 108 s. ISBN 978-80-227-4393-8.
- [13] Wolfram Mathematica, Version 9.0.

## CONTRIBUTED TALKS



# Softvérková podpora výučby deskriptívnej geometrie a geometrického modelovania na FMFI UK

## Software support of descriptive geometry and geometric modelling at FMPH CU

Martina Bátorová, Soňa Kudličková

*Department of algebra, geometry and didactics of mathematics,*

*Faculty of mathematics, physics and informatics,*

*Comenius University in Bratislava*

*Mlynská Dolina, 841 48 Bratislava, Slovak Republic*

*email: [martina.batorova@fmph.uniba.sk](mailto:martina.batorova@fmph.uniba.sk), [sona.kudlickova@fmph.uniba.sk](mailto:sona.kudlickova@fmph.uniba.sk)*

**Abstract.** This paper presents several mostly free software tools and environments that are used to modernize and enhance classes of descriptive geometry and geometric modelling as taught at our faculty. Several exceptional student projects and theses are presented as well.

**Keywords:** *software support, descriptive geometry, geometric modelling, innovative teaching*

**Kľúčové slová:** *softvérková podpora, výučba deskriptívnej geometrie, výučba geometrického modelovania, inovatívna výučba*

## 1 Deskriptívna geometria a geometrické modelovanie na FMFI UK

Štúdium a výučba deskriptívnej geometrie a geometrického modelovania má na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského (FMFI UK) dlhú a bohatú tradíciu, hoci formálna i obsahová štruktúra zodpovedajúcich studijných programov prešla viacerými zásadnými zmenami.

*Deskriptívnu geometriu* (DG) na FMFI UK je v súčasnosti možné študovať ako odbor učiteľstva v kombinácii s matematikou, a to na bakalárskom s dĺžkou štúdia 3 roky [1] a na magisterskom stupni s dĺžkou 2 roky [2]. Navyše je k dispozícii trojročný konverzný magisterský študijný program, ktorý umožňuje absolventom bakalárskeho stupňa príbuzných odborov (matematika, informatika) plnohodnotné štúdium deskriptívnej geometrie (v kombinácii s matematikou). V rámci všetkých uvedených programov je dôraz kladený predovšetkým na dôsledné osvojenie si matematických základov zobrazovacích metód a ich aplikácií v rôznych oblastiach ľudskej činnosti.

*Geometrické modelovanie* (GM) tvorí významnú časť magisterského študijného programu *Počítačová grafika a geometria* (PGG), pričom niektoré predmety z tejto oblasti sú zaradené ako povinne voliteľné alebo výberové i v rámci ďalších príbuzných študijných programov (napr. informatika, aplikovaná informatika). Vo výučbe geometrického modelovania sa vyžaduje

nielen dôkladné osvojenie si rigoróznych matematických postupov, ale snahou je sprostredkovať študentom aj možnosť budovať svoju profesionálnu technickú a technologickú erudovanosť, predovšetkým prostredníctvom vypracovávania náročnejších programovacích zadaní vo viacerých moderných programovacích jazykoch a im zodpovedajúcich vývojových prostrediach.

Absolventi odborov DG a GM nachádzajú na trhu práce široké možnosti uplatnenia. Majú možnosť pracovať na pozíciah vyžadujúcich prácu s technickými výkresmi, topografickými mapami, rekonštrukciou objektov z fotografií a pri spracovaní geometrických a grafických informácií resp. obsadzujú programátorské pozície na budovaní a rozširovaní Computer Aided (Geometric) Design (CA(G)D) systémov či pri vizualizácii rôzneho typu dát.

Ukazuje sa, že modernizáciou výučby sa zvyšuje paleta možností uplatnenia našich študentov. V ostatných rokoch sa stále vo väčšej miere zaraďujú do výučby rôzne softvérové (SW) riešenia, ktorých ambíciou je slúžiť predovšetkým ako nástroj budovania a cibrenia technologických zručností a technického myslenia.

## 2 Existujúci SW vo výučbe

Vo výučbe sa vo zvýšenej miere používajú predovšetkým nástroje podporujúce priamu výučbu resp. následné samoštúdium študentov. Mnohé študijné materiály sú po náležitej úprave publikované ako študijné materiály, učebné texty alebo učebnice i v komerčných nakladateľstvách. Prirodzene, takéto práce a výstupy by nemohli vzniknúť bez náležitej grantovej a inej podpory.

Vo výučbe a praxi DG a GM tiež čoraz väčšiu úlohu zohráva programovanie a algoritmizácia ako taká. Pri použití vhodných softvérových riešení takto modifikovaná výučba umožňuje pochopenie preberaných pojmov v ich najpraktickejšej forme – takej, ktorá sa dá priamo aplikovať, použiť, vyskúšať, vypočítať, zostaviť. Študenti zároveň získajú cenné praktické zručnosti a skúsenosti, ktoré môžu využiť v profesionálnej dráhe po ukončení štúdia.

### 2.1 Nástroje Office

Medzi obľúbené patria kancelárske softvérové balíky (Office), a to vo svojej platenej i voľne dostupnej verzii. Vďaka svojej intuitívnosti, jednoduchosti používania a dostupnosti i pre študentov sa kontaktná výučba a následné samoštúdium značne zjednodušuje. Príkladom takýchto materiálov vzniknúvších na podporu DG a GM sú napr. výučbové texty [3]. V obsažnej a zároveň esteticky príťažlivej forme umožňujú nielen sprostredkovať preberané učivo, ale i oboznámiť publikum s niektorými zložitejšími konštrukciami, ktoré pri použití statických vizualizácií prichádzajú o svoj časový rozmer – ako a v akom poradí sa jednotlivé kroky robia a prečo.

## 2.2 CAS (wx)Maxima

V súčasnosti si i teoretické matematické odbory vyžadujú prácu s modernými výpočtovými prostriedkami, programovanie a skriptovanie nevynímajúc. Preto je podľa nás veľmi dôležité, aby sa študenti mohli oboznámiť s takou formou algoritmizácie matematického myslenia, ktoré im napomôže uchopiť a prakticky aplikovať získané poznatky.

Na FMFI UK používame ako jeden z nástrojov Computer Algebra System (CAS) *Maxima* [4], najmä v kombinácii s jeho používateľsky príjemným grafickým rozhraním *wxMaxima* [5]. Ide o komplexný voľne dostupný systém počítačovej algebre založený na jazyku LISP, pričom je dostupný pre všetky majoritné operačné systémy (*Windows*, *Linus*, *MacOS*).

*CAS Maxima* pracuje so symbolickými a numerickými výrazmi potrebnými na riešenie úloh v diferenciálnom a integrálnom počte, vrátane Taylorových radov, obyčajných diferenciálnych rovníc, systémov linerárnych i nelineárnych rovníc atď. Umožňuje taktiež prácu s polynomami, množinami, vektormi, maticami a tenzormi a ďalšími matematickými štruktúrami.

Výsledky dosiahnuté pomocou *CAS Maxima* dosahujú vysokú numerickú presnosť, jednak vďaka tomu, že je možné pracovať s presnými zlomkami, najdôležejšími konštantami (Eulerova konštanta  $e$ , číslo  $\pi$ ), celými číslami i s číslami s premenlivou desatinou čiarkou. Výsledky je možné vykresliť (napr. grafy funkcií, a to v rovine i trojrozmernom priestore) a taktiež exportovať do viacerých napr. vektorových formátov.

Vďaka všetkým uvedeným vlastnostiam je *CAS Maxima* ideálna nielen pre testovanie hypotéz, ale i vysokokvalitné generovanie vizualizácií nielen pre potreby výučby, ale i pre odborné publikácie.

Pre potreby výučby je *CAS Maxima* výhodná najmä vďaka úspornosti kódu, jednoduchosti používania, výbornej online podpore napr. na používateľských fórách. Vďaka integrovaným vizualizačným knižniciam je možné u študentov veľmi jednoducho rozvíjať priestorovú predstavivosť a geometrickú intuiciu.



Obr. 1: Logo *CAS Maxima* (vľavo, zdroj [5]) a *wxMaxima* (vpravo, zdroj [6]).

## 3 SW vznikajúci v rámci záverečných prác

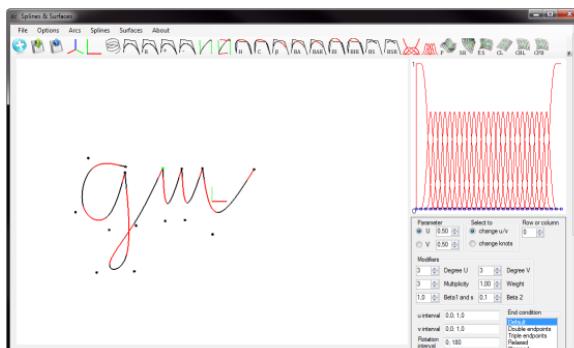
Softvérové diela sú častým priamym alebo vedľajším produkтом záverečných prác študentov DG a GM. Texty a výstupy bakalárskych a diplomových prác sú

umiestňované spolu s elektronickými študijnými materiálmi na stránke Oddelenia geometrie KAGDM FMFI UK [6] resp. na stránkach vyučujúcich a sú prístupné širokému počtu záujemcov, teda aj potenciálnych študentov deskriptívnej geometrie a geometrického modelovania.

### 3.1 Záverečné práce z GM

GM patrí medzi oblasti poskytujúce širokú paletu problémov, ktoré si vyžadujú nielen kvalitné teoretické, ale aj zmysluplné praktické softvérové riešenia. V rámci záverečných prác si študenti GM často volia témy práve z tejto problematiky, pričom neraz vypracovávajú natoľko kvalitné softvérové aplikácie, že ich je možné použiť nielen v odbornej praxi, ale napr. aj v ďalšej výučbe.

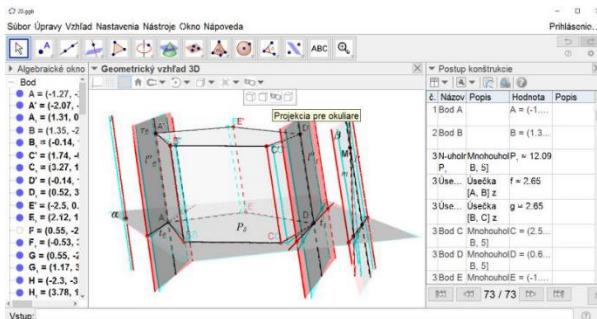
Výborným príkladom je diplomová práca (DP) P. Bezáka [7], konkrétnie SW výstup *Splines and surfaces* tvoriaci jej praktickú časť. V rámci používateľsky príjemnej a intuitívnej aplikácie autor implementuje krvinky a plochy preberané v rámci celého základného kurzu GM študijného programu PGG na FMFI UK, pričom dôsledne prepája algebraický a geometrický prístup ku geometrickému modelovaniu. Aplikácia je výnimcočná nielen rozsahom, ale i kvalitou vypracovania a svojou prístupnosťou pre medzinárodné publiku, keďže je (vrátane používateľskej príručky) dostupná v angličtine.



Obr. 2: Peter Bezák: *Splines and Surfaces* (ukážka z DP [7]).

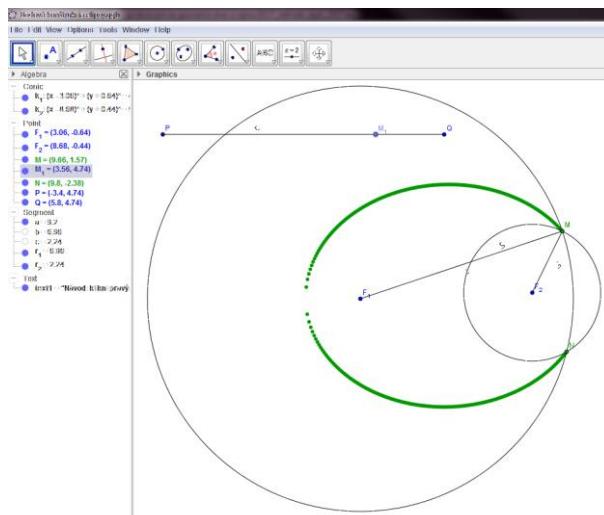
### 3.2 Záverečné práce z DG

Inšpiráciu pre bakalársku prácu *Styčné a dotykové roviny geometrických telies* Daniely Hansmanovej [8] tvoril článok [9] venovaný tvorbe anaglyfických obrázkov priestorových scén. Obdobný prístup bol použitý i na spracovanie tematiky styčných a dotykových rovín gule, valca, kužeľa, ihlana a hranola. Práca nachádza vynikajúce uplatnenie pri budovaní priestorovej predstavivosti resp. pri prezentácii tematiky v rámci výučby DG.



**Obr. 3:** Daniela Hansmanová: *Styčné a dotykové roviny geometrických telies* (ukážka z BP [8]).

Bakalárska práca Alžbety Mackovovej [10] sa venovala metrickým konštrukciám elipsy, pričom dôraz bol kladený na vypracovanie 25 úloh v interaktívnom softvérovom nástroji *GeoGebra* [11]. Autorka vo svojej prácii uverejnenej i v rámci Študentskej vedeckej konferencie [12] vedie ku konštrukciám elipsy, oskulačných kružníkach a dotyčníc neformálnou cestou. Výsledky tejto práce sú po značnom rozšírení a dopracovaní uverejnené i v rámci iného príspevku tohto zborníka [13].



**Obr. 4:** Alžbeta Mackovová: *Metrické vlastnosti elipsy* (ukážka z BP [10]).

## 4 Záver

V príspevku sme predstavili niekoľko prevažne voľne dostupných softvérových nástrojov a vývojových prostredí, ktoré sú na FMFI UK používané na podporu a modernizáciu výučby deskriptívnej geometrie a geometrického modelovania.

Uviedli sme tiež niekoľko výnimočných študentských projektov, vzniknuvších v rámci záverečných prác, ktoré demonštrujú využitie moderných technologických prostriedkov pri štúdiu predmetných odborov.

## Literatúra

- [1] *Učiteľstvo deskriptívnej geometrie v kombinácii – bakalársky študijný program.* Dostupné 15.10.2017 na <https://fmph.uniba.sk/studium/programy/ucitelstvo-deskriptivnej-geometrie-v-kombinaci/>
- [2] *Učiteľstvo deskriptívnej geometrie v kombinácii – magisterský študijný program.* Dostupné 15.10.2017 na <https://fmph.uniba.sk/studium/magisterske-studium/ucitelstvo-deskriptivnej-geometrie-v-kombinaci/>
- [3] M. Tisoň, S. Kudličková: *Geometrické základy počítačovej geometrie, časť Axonometria a Rotačné plochy.* Knižničné a edičné centrum FMFI UK v Bratislave, 2015. ISBN 978-80-8147-040-0. EAN 9788081470400. (CD nosič)
- [4] Computer Algebra System *CAS Maxima.* Dostupné 15.10.2017 na <http://maxima.sourceforge.net/>
- [5] Grafické používateľské rozhranie *wxMaxima* k CAS Maxima. Dostupné 15.10.2017 na <https://sourceforge.net/projects/wxmaxima/>
- [6] Websúť Oddelenia geometrie KAGDM FMFI UK venovaná štúdiu DG a príbuzných disciplín. Dostupné 15.10.2017 na: <https://flurry.dg.fmph.uniba.sk/webog/sk/studium>
- [7] P. Bezák: *Splines and surfaces,* Diplomová práca, FMFI UK, 2016. Dostupné 15.10.2017 na <http://www.sccg.sk/~batorova/GM1.html>
- [8] D. Hansmanová: *Styčné a dotykové roviny geometrických telies,* Bakalárska práca, FMFI UK, 2017. Dostupné 15.10.2017 na: <https://flurry.dg.fmph.uniba.sk/webog/sk/kudlickova-vyucba/56-kudlickova/406-zobrazovacie-metody-1>
- [9] M. Kmeťová, Z. Vítézová: *Anaglyfy a ich využitie vo vyučovaní geometrie,* G – slovenský časopis pre geometriu a grafiku, vol. 12, no. 23, 2015, pp. 31-36. ISSN 1336-524X
- [10] A. Mackovová: *Metrické vlastnosti elipsy,* Bakalárska práca, FMFI UK, 2016.
- [11] *GeoGebra.* Dostupné 15.10.2017 na <http://www.geogebra.org/cms/sk/>
- [12] A. Mackovová: *Elipsa v GeoGebre.* Študentská vedecká konferencia, vol. 1, no. 1, 2016, pp. 299-304. ISBN 978-1541342941. Dostupné 15.10.2017 na <http://comppbio.fmph.uniba.sk/svk2016/svk2016-zbornik.pdf>
- [13] S. Kudličková, A. Mackovová, M. Bátorová: *Konštrukcie elipsy v interakcii s GeoGebrou,* Slovensko – česká konferencia o geometrii a grafike, 2017.

# On rational approximation of square-root parameterizable curves

Michal Bizzarri<sup>a,1</sup>, Miroslav Lávička<sup>b,a,2</sup> and Jan Vršek<sup>b,a,3</sup>

<sup>a</sup> NTIS – New Technologies for the Information Society, Faculty of Applied Sciences,  
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Czech Republic

<sup>b</sup> Department of Mathematics, Faculty of Applied Sciences,  
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, Czech Republic

<sup>1</sup> bizzarri@ntis.zcu.cz, <sup>2</sup>lavicka@kma.zcu.cz, <sup>3</sup>vrsekjan@kma.zcu.cz

**Abstract.** We study situations when non-rational parameterizations of planar curves from special classes as results of certain geometric constructions arise. In particular, we deal with rational, elliptic or hyperelliptic curves that are square-root parameterizable. On the example of conchoids and strophoids, we present the algorithm from [4] for computing an approximate (piecewise) rational parametrization using the Weierstrass curves of the considered curve. Simple shapes reflecting a number of real roots of a univariate polynomial and a possibility to approximate easily each branch separately play a main role in this method.

**Keywords:** Square-root parameterizations, hyperelliptic curves, Weierstrass form, topological graph, rational approximation, conchoids, strophoids

## 1 Introduction

NURBS representation, based on parametric descriptions via polynomials and rational functions, is nowadays considered as a universal standard in computer aided geometric design (CAGD), see [11]. Nonetheless, most of geometric operations applied to NURBS curves or surfaces do not preserve rationality. Naturally, the first simple non-rational parametric descriptions are square-root parameterizations. Then suitable approximate parameterization methods must be used to overcome shortcomings of non-rational descriptions.

In what follows we will focus on the situations when square-root parameterizations of some planar curves as results of geometric operations appear. We use the algorithm designed and studied recently in [4] and present it on the so called conchoids and strophoids, which are typical geometric constructions leading to hyperelliptic results, in general. The approach is presented in two commented examples.

## 2 Motivation and preliminary

Let a rational curve  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  be given by a parameterization  $\mathbf{x}(t)$ . By Lüroth theorem,  $\mathbf{x}(t)$  can be computed to be birational, i.e., its inverse provides a one-to-one map  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . From this point of view, the simplest class of non-rational curves are those possessing a two-to-one map  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 2.1** A curve  $\mathcal{C}$  is called hyperelliptic if and only if there exists a two-to-one map  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ .

The following proposition is a classical result from algebraic geometry, [9].

**Proposition 2.2** *Each hyperelliptic curve of genus  $g$  is birationally equivalent to a planar curve in the Weierstrass form*

$$y^2 - p(x) = 0, \quad (1)$$

where  $p(x)$  is a square-free polynomial of degree  $2g + 1$  or  $2g + 2$ .

The computational aspects and efficient algorithms for finding the Weierstrass form (implemented in CAS Maple) can be found in [14, 15]. Nevertheless, in the case of conchoids and strophoids (which will be studied in this manuscript) the Weierstrass form can be obtained directly without any subsequent transformation step, see Sections 4 and 5.

Next, recall that a curve is called *square-root parameterizable* if there exists a square-free polynomial  $p(t)$  and

$$\mathbf{x}(t, \sqrt{p(t)}) = (x_1(t, \sqrt{p(t)}), x_2(t, \sqrt{p(t)})), \quad (2)$$

such that  $x_i$  are rational expressions in  $t$  and  $\sqrt{p(t)}$  and for almost all points  $\mathbf{p}$  on the curve there exists a unique  $t_0$  such that  $\mathbf{p} = \mathbf{x}(t_0, \sqrt{p(t_0)})$ . It can be proved, see [4]

**Lemma 2.3** *A curve is square-root parameterizable via  $\mathbf{x}(t, \sqrt{p(t)})$  if and only if it is birational to a Weierstrass curve in the form  $y^2 - p(x) = 0$ .*

Thus, we can assume in what follows that a curve in the Weierstrass form is the input for further considerations. Since the mapping  $\mathbf{x}(x, y)$  is in fact a rational map

$$\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

which sends  $\mathcal{E}$  to  $\mathcal{C}$ , then we will construct a collection of polynomial arcs  $\mathbf{f}_i(t)$  approximating the Weierstrass curve  $\mathcal{E}$  and using

$$t \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{f}_i(t)), \quad i = 1, \dots, k \quad (4)$$

we arrive at a piecewise rational curve replacing the given non-rational curve  $\mathcal{C}$ .

### 3 Rational approximation of curves in the Weierstrass form

For the later use, we start with short recalling some fundamental notions which are necessary for constructing the topological graphs of algebraic curves. A point  $\mathbf{p}$  on a planar curve  $\mathcal{C}$  defined by  $f(x, y) = 0$  is called a *x- or y-critical* if  $f_y(\mathbf{p}) = 0$  or  $f_x(\mathbf{p}) = 0$ , respectively. The points on  $\mathcal{C}$  which are simultaneously *x- and y-critical* are the *singular points* of  $\mathcal{C}$ , for more details see e.g.

[2, 3]. By the *topological graph* of a real algebraic curve we understand a construction of some arrangement of polylines which is topologically equivalent to the given curve, see [7].

Now, we present a method for computing an approximate (piecewise) rational parametrization of a hyperelliptic curve  $\mathcal{E}$  in the Weierstrass form in some prescribed bounding box, as it was designed in [4]. It consists of two steps:

- (i) first, we construct the topological graph of  $\mathcal{E}$  having the critical points and the inflection points of  $\mathcal{E}$  as its vertices;
- (ii) next, we replace each edge of the graph by some free-form curve and optimize its shape.

As concerns PART (i), any general method for constructing topological graphs of planar curves can be employed, see for instance [5, 3]. However when a planar curve is given in the Weierstrass form (1) the construction of the topological graph is considerably simpler than for the general case. Since we work with a function in one variable in this case, it is easy to compute the critical and inflection points. For instance, no elimination technique is needed. Then it is not necessary to determine the number of branches starting at the critical points, cf. [3], and therefore it is straightforward to join the corresponding pairs. And we do not have to deal with the singular points.

In PART (ii) we replace all edges of the graph by some (parts of) free-form curves, which will approximate the original curve  $\mathcal{E}$ , we prescribe all the critical and inflection points of  $\mathcal{E}$  to the set of vertices of the topological graph; this improves the consequent computation of the approximant. Such a graph is usually called a *graph of critical points* of the curve  $\mathcal{E}$  and denoted by  $G(\mathcal{E})$ . Let us emphasize that it brings another simplification compared to general methods, cf. [5, 3], as no other extra points are needed for constructing the topological graphs. Furthermore, we can exploit a useful fact that the curve  $\mathcal{E}$  is composed of two symmetrical parts  $\mathcal{E}^\pm$ , i.e., graphs of the functions  $y = \pm\sqrt{p(x)}$ . Hence it is enough to deal only with e.g.  $\mathcal{E}^+$  given by the function  $y = \sqrt{p(x)}$  and use the symmetry to obtain the results for  $\mathcal{E}^-$ .

Let us now present the method in more detail. We start with computing the real roots (lying in some prescribed interval of interest  $[a_0, a_1]$ ) of the polynomials in one variable  $p(x)$ ,  $p'(x)$  and  $2p''(x)p(x) - p'(x)^2$  which correspond to the  $x$ -critical,  $y$ -critical and inflection points (of a corresponding part) of  $\mathcal{E}^+$ , respectively. More precisely, if  $x_i$  is a real root of the polynomial  $p(x)$ ,  $p'(x)$  or  $2p''(x)p(x) - p'(x)^2$ , then the point  $(x_i, \sqrt{p(x_i)})$  is a real  $x$ -critical (i.e.,  $(x_i, 0)$  in this case),  $y$ -critical or inflection point on  $\mathcal{E}^+$ , respectively. Thus when sorting all the roots (lying in  $[a_0, a_1]$  together with the boundary values  $x_0 = a_0, a_1 = x_{k+1}$ ) and computing the corresponding real points  $(x_i, \sqrt{p(x_i)})$  (the points satisfying  $p(x_i) \geq 0$ ) it is enough to connect the consecutive pairs  $(x_i, \sqrt{p(x_i)})$  and  $(x_{i+1}, \sqrt{p(x_{i+1})})$  assuming the polynomial  $p(x)$  is non-negative on  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Now we replace each edge of the topological graph  $G(\mathcal{E})$  representing any real segment  $\mathcal{E}_i$  of  $\mathcal{E}$  by a suitable arc  $\mathbf{f}_i(t)$  of the Ferguson cubic (or any other free form curve when needed), cf. [6], which possesses the same tangent lines at its endpoints (vertices of  $G(\mathcal{E})$ ) as  $\mathcal{E}$  has. The tangent vectors at the points  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$  are equal to

$$\mathbf{t}_i = \left( 2\sqrt{p(x_i)}, p'(x_i) \right). \quad (5)$$

Especially, these are the multiples of the unit vectors  $(0, 1)$  and  $(1, 0)$  for  $x$ - and  $y$ -critical points, respectively.

Thus for each edge of  $G(\mathcal{E}^+)$  connecting the points  $\mathbf{p}_i$  and  $\mathbf{p}_{i+1}$  we construct the Ferguson cubic  $\mathbf{f}_i(t, \alpha_i, \beta_i)$  interpolating these two points and the corresponding tangent vectors  $\mathbf{t}_i$  and  $\mathbf{t}_{i+1}$  with the lengths  $\alpha_i, \beta_i$  which serve as free modelling shape parameters. Next, the particular values  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  of the lengths  $\alpha_i, \beta_i$  are computed w.r.t. some natural criteria. For instance we can require that the curvatures of the Ferguson cubics  $\mathbf{f}_i(t, \alpha_i, \beta_i)$  at  $\mathbf{p}_i$  and  $\mathbf{p}_{i+1}$  are equal to the curvatures of  $(x, \sqrt{p(x)})$  at these points.

Of course any other criterion or approximation method can be used. For instance one can always compute  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i$  by minimizing the objective function

$$\Phi_i(\alpha_i, \beta_i) = \int_0^1 \frac{f^2(\mathbf{f}_i(t, \alpha_i, \beta_i))}{\|\nabla f(\mathbf{f}_i(t, \alpha_i, \beta_i))\|^2} dt, \quad (6)$$

which measures the orthogonal distance of the parametric curve  $\mathbf{f}_i(t, \alpha_i, \beta_i)$  to the implicitly given curve  $f(x, y) = y^2 - p(x) = 0$ , see [3] for further details.

Finally, using the symmetry we obtain a (piecewise) polynomial approximation of the whole curve  $\mathcal{E}$ .

## 4 Rational approximation of conchoids

The construction of a conchoid curve to a given curve finds its origin already in the ancient Greece; we recall for instance the conchoid of Nicomedes (which is the conchoid of a line), discovered when studying the problem of angle trisection. The conchoidal constructions have been recently attracted different authors, see for instance [12, 1, 8, 10].

**Definition 4.1** Let  $\mathcal{C}$  be an algebraic curve,  $\mathbf{o}$  a given point and  $\delta \in \mathbb{R}$  a positive constant. If  $\leftrightarrow \mathbf{ox}$  denotes the line joining  $\mathbf{o}$  and  $\mathbf{x}$  then the  $\delta$ -conchoid  $\mathcal{C}_\delta \mathcal{C}$  is the closure of the set

$$\{\mathbf{q} \in \leftrightarrow \mathbf{ox} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{C} \text{ and } \|\mathbf{q} - \mathbf{x}\| = \delta\}. \quad (7)$$

If  $\mathcal{C}$  is a rational curve described by a parameterization  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  then the two branches of the conchoid are given by

$$\mathbf{c}^\pm(t) = \mathbf{x}(t) \pm \delta \frac{\mathbf{x} - \mathbf{o}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{o}\|}. \quad (8)$$

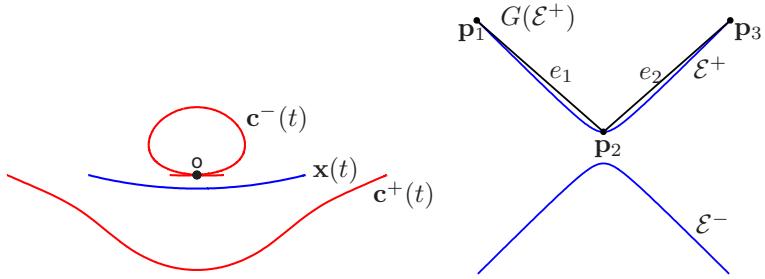


Figure 1: Left: A part of parabola (blue) with the rational approximation of its conchoid (red) from Example 4.3. Right: Graph of critical points  $G(\mathcal{E}^+)$  of its corresponding Weierstrass curve  $\mathcal{E}$ .

Although  $\mathbf{x}(t)$  is rational the conchoid does not have to be rational, in general. The conchoids are square-root parameterizable and thus they are again hyperelliptic by Lemma 2.3. If we write

$$\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{o})} = \frac{q(t)}{r(t)} \sqrt{p(t)}, \quad (9)$$

where  $p(t)$  is a square-free polynomial, then we arrive at:

**Lemma 4.2** *A generic conchoid of a rational curve is hyperelliptic with Weierstrass form (1), where the square-free polynomial  $p$  is obtained from (9).*

For a rational curve  $\mathbf{x} = (x_1/x_3, x_2/x_3)$ , a direct computation shows

$$p(t) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3(x_1o_1 + x_2o_2) + x_3^2(o_1^2 + o_2^2). \quad (10)$$

Hence we can again approximate curve with equation  $y^2 = p(t)$  and use it for computing the approximation of the conchoid.

**Example 4.3** Consider a part of parabola

$$\mathbf{x}(t) = (t, 8t^2), \quad t \in [-1, 1], \quad (11)$$

point  $\mathbf{o} = (0, 1)$  and  $\delta = 6$ . Then the corresponding conchoid has the following equation

$$\mathbf{c}^\pm(t) = \left( 8x \pm \frac{48t}{\sqrt{t^4 + 62t^2 + 1}}, t^2 \mp \frac{6(1-t^2)}{\sqrt{t^4 + 62t^2 + 1}} \right), \quad t \in [-8, 8]. \quad (12)$$

Hence we approximate the following curve:

$$\mathcal{E} : y^2 - t^4 - 62t^2 - 1 = 0, \quad t \in [-1, 1]. \quad (13)$$

The whole approximation is composed of two arcs and has the error less than  $2.7 \cdot 10^{-9}$ , see Fig. 1.

## 5 Rational approximation of strophoids

The algorithm designed in [4] and presented in this paper can be typically used for resulting curves of many well-known algebro-geometric operations, as offsets, conchoids (see the previous section), bisectors of special curves, convolutions with curves of convolution degree two etc. We conclude this paper with applying the presented method on another classical class of curves, namely on *strophoids*, see also [13].

**Definition 5.1** Let  $\mathcal{C}$  be an algebraic curve,  $\mathbf{o}$  and  $\mathbf{p}$  are given points. If  $\leftrightarrow \mathbf{ox}$  denotes the line joining  $\mathbf{o}$  and  $\mathbf{x}$  then the strophoid  $S_{\mathbf{p}}\mathcal{C}$  is the closure of the set

$$\{\mathbf{q} \in \leftrightarrow \mathbf{ox} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{C} \text{ and } \|\mathbf{q} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|\}. \quad (14)$$

Consider a regular parametric planar curve  $\mathbf{x}(t)$ , then the strophoid can be parameterized

$$\mathbf{s}^{\pm}(t) = \mathbf{p} + (\mathbf{x}(t) - \mathbf{p})(1 \pm \mathbf{n}(t)), \quad (15)$$

where

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{o}\|}{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}\|}. \quad (16)$$

Analogously to the conchoid case the strophoids admit square-root parameterizations and thus they are again hyperelliptic by Lemma 2.3. If we write

$$\frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{o}\|}{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}\|} = \frac{q(t)}{r(t)} \sqrt{p(t)}, \quad (17)$$

where  $p(t)$  is a square-free polynomial, then we can formulate:

**Lemma 5.2** A generic strophoid of a rational curve is hyperelliptic with Weierstrass form (1), where the square-free polynomial  $p$  is obtained from (17).

In particular, for a rational curve  $\mathbf{x} = (x_1/x_3, x_2/x_3)$  the parametric equation of the strophoid contains the square-roots of the polynomial

$$\begin{aligned} p(t) = & ((o_1^2 + o_2^2)x_3^2 - 2x_3(o_1x_1 + o_2x_2) + x_1^2 + x_2^2) \\ & ((p_1^2 + p_2^2)x_3^2 - 2x_3(p_1x_1 + p_2x_2) + x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Again we approximate a curve in the Weierstrass form and consequently we compute a rational approximation of the strophoid.

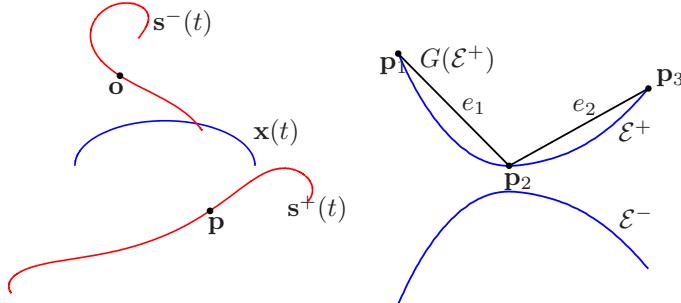


Figure 2: Left: A part of the ellipse (blue) with the computed rational approximation of its corresponding strophoid (red) from Example 5.3. Right: Graph of critical points  $G(\mathcal{E}^+)$  of its corresponding Weierstrass curve  $\mathcal{E}$ .

**Example 5.3** In particular, consider a part of the ellipse

$$\mathbf{x}(t) = \left( \frac{4t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \right), \quad t \in [-1, 1], \quad (19)$$

and two points  $p = (1, -1)$  and  $o = (-1, 2)$ . Then the parametric equation of the corresponding strophoid contains the square-root of the polynomial (18), i.e.

$$p(x) = 2 \left( t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 8t + 5 \right) \left( 5t^4 + 4t^3 + 12t^2 + 4t + 1 \right). \quad (20)$$

The computed approximation of the strophoid possesses the error less than  $1.9 \cdot 10^{-8}$ , see Fig. 2.

## 6 Conclusion

A simple algorithm for computing an approximate rational parametrization of hyperelliptic curves using topological graphs of their Weierstrass form was introduced recently. Simple shapes reflecting a number of real roots of a univariate polynomial and a possibility to approximate easily each branch separately play a main role in this approximation method. In this paper, the functionality of the method was demonstrated on the example of conchoids and strophoids.

## Acknowledgments

The authors were supported by the project LO1506 of the Czech Ministry of Education, Youth and Sports.

## References

- [1] A. ALBANO AND M. ROGGERO, *Conchoidal transform of two plane curves*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 21 (2010), pp. 309–328.
- [2] J. ALCÁZAR AND J. R. SENDRA, *Computation of the topology of real algebraic space curves*, Journal of Symbolic Computation, 39 (2005), pp. 719–744.
- [3] M. BIZZARRI AND M. LÁVIČKA, *A symbolic-numerical approach to approximate parameterizations of space curves using graphs of critical points*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 242 (2013), pp. 107 – 124.
- [4] M. BIZZARRI, M. LÁVIČKA, AND J. VRŠEK, *Piecewise rational approximation of square-root parameterizable curves using the Weierstrass form*, Computer Aided Geometric Design, 56 (2017), pp. 52 – 66.
- [5] J. CHENG, S. LAZARD, L. PEÑARANDA, M. POUGET, F. ROUILLIER, AND E. TSIGARIDAS, *On the topology of planar algebraic curves*, in Proceedings of the 25th annual symposium on Computational geometry, SCG '09, New York, NY, USA, 2009, ACM, pp. 361–370.
- [6] G. FARIN, J. HOSCHEK, AND M.-S. KIM, eds., *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier, 2002.
- [7] T. W. GAMELIN AND R. E. GREENE, *Introduction to topology*, Dover Publications, 1999.
- [8] D. GRUBER AND M. PETERNELL, *Conchoid surfaces of quadrics*, J. Symb. Comput., 59 (2013), pp. 36–53.
- [9] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [10] M. PETERNELL, L. GOTTHART, J. SENDRA, AND J. R. SENDRA, *Offsets, conchoids and pedal surfaces*, Journal of Geometry, 106 (2015), pp. 321–339.
- [11] L. PIEGL AND W. TILLER, *The NURBS book*, Monographs in Visual Communication, Springer-Verlag New York, Inc., 2 ed., 1997.
- [12] J. R. SENDRA AND J. SENDRA, *An algebraic analysis of conchoids to algebraic curves*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 19 (2008), pp. 413–428.
- [13] H. STACHEL, *Strophoids, a family of cubic curves with remarkable properties*, Journal of Industrial Design and Engineering Graphics, 10 (2015), pp. 65–72.
- [14] M. VAN HOEIJ, *An algorithm for computing the Weierstrass normal form*, in ISSAC '95 Proceedings of the 1995 international symposium on Symbolic and algebraic computation, ISSAC '95, New York, NY, USA, 1995, ACM, pp. 90–95.
- [15] ———, *An algorithm for computing the Weierstrass normal form of hyperelliptic curves*, arXiv:math/0203130, (2002).

# Algebraic Curves Given by Puiseux Tree

Eva Blažková

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University*

*Sokolovská 83, Praha*

*eblažkova@karlin.mff.cuni.cz*

**Abstract.** Puiseux tree represents locally planar curve branches at a given point. It is well known how to find Puiseux tree from the algebraic equation of the curve. We consider the other direction and propose an algorithm to find algebraic equation of (one of many) curve having prescribed Puiseux tree or branches at the origin. It allows us to generate curves having singularities of given properties.

**Keywords:** Puiseux tree, singularity, curve branch, planar algebraic curve

## 1 Introduction

Puiseux tree is one possibility how to represent the branches of a planar curve. From Puiseux tree, we can easily compute rational Puiseux series, the local curve branches parametrizations, introduced by Duval in [4]. Rational Puiseux series are suitable tool to study the local properties of algebraic curves at theirs singular points, because the system of rational Puiseux series is in bijection with the branches (trough the origin) of a given algebraic curve.

In publications about (rational) Puiseux series, e.g. [1, 4, 5, 7], is always very neatly described how to compute the local parametrizations of the branches of the given algebraic curve at the given point. This paper is devoted to the other direction, which was never considered before. Assume that we are given the branches at the given point and we describe how to compute an equation of an algebraic curve having there a singularity with the prescribed branches. In this paper, we restrict ourselves to curves defined by a polynomial from  $\mathbb{Q}[x, y]$ .

This procedure can be used as a source of examples of algebraic curves having interesting singularities.

## 2 Puiseux Tree of an algebraic curve

Puiseux tree is a data structure, which represents parametrizations of branches of a curve at the origin. It is build while computing the Puiseux series of the branches.

**Definition 1.** Puiseux tree is generally infinite tree having nodes of three types

- the root of the tree with attached a polynomial,
- $N$ -nodes represents edges of Newton polygon and they have attached quadruple  $(q, p, l, h)$ , where  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p, l \in \mathbb{Z}$ ,  $p, q$  coprime and  $h(z) \in \mathbb{C}[z]$

- *C-nodes* represents coefficients of Puiseux series. They have attached quadruple  $(\varrho, \gamma, \delta, g)$ , where  $\varrho, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  and  $g \in \mathbb{C}[x, y]$ . *N-nodes* and *C-nodes* periodically alternate.

The *Newton polygon* of  $f = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^j y^i$ , computed in every *C-node*, is lower convex hull of *Newton graph*  $G_f = \{[i, j] \in \mathbb{N}^2 \mid a_{i,j} \neq 0\}$ . Every edge  $L$  of the Newton polygon of  $f$  corresponds to one child *N-node*. The line containing each edge has the unique equation  $pi + qj = l$ . The *characteristic polynomial* of  $L$  is defined as  $h(z) = \sum_{[i,j] \in L} a_{i,j} z^{(i-i_0)/q}$ , where  $i_0$  is the minimal number for which exists  $j_0$ , so that  $[i_0, j_0] \in L$ .

Each root  $\varrho$  of  $h(z)$  corresponds to one *C-node* and the attached values are computed as follows. First we choose  $u, v \in \mathbb{Z}$  such that  $uq + vp = 1$ . Then we define coefficients  $\gamma = \varrho^{-v}$  and  $\delta = \varrho^u$ . The new polynomial  $g$  is then computed as  $g(x, y) := x^{-l} f(\gamma x^q, x^p(\delta + y))$ .

An important subtree of Puiseux tree is a singular Puiseux tree, which is sufficient to describe the local structure (topology and geometry) at a given point, see [3].

**Definition 2.** For every branch of Puiseux tree  $B = (f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots)$  there exists  $j_0$  such that for every  $k > k_0$  it holds

$$\gamma_k = q_k = 1 \quad \text{and} \quad \delta_k \in \mathbb{Q}(\gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2, \dots, \gamma_{k_0}, \delta_{k_0}).$$

The part of the tree branch  $(f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots, N_{k_0}, C_{k_0})$  is called *singular*. The subtree consisting of singular part of each branch is called *singular Puiseux tree* of  $f$ .

Using Puiseux tree, the parametrization can be expressed as follows, for the proof see e.g. [3, 4].

**Proposition 3.** Let  $B = (f, N_1, C_1, N_2, C_2, \dots, N_w, C_w)$  be a part of a Puiseux tree branch of  $f$  and its singular part have length  $2k_0$  and  $w > k_0$ . The parametrization corresponding to the Puiseux series of the curve branch is

$$\left[ \lambda t^n, \sum_{j=1}^{k_0} \xi_j t^{c_j} + \sum_{j=k_0+1}^w \chi_j t^{d_j} + \dots \right] \quad (1)$$

where

$$\lambda = \prod_{k=1}^{k_0} \gamma_k^{\prod_{i=1}^{k-1} q_i}, \quad n = \prod_{k=1}^{k_0} q_k, \quad \xi_j = \delta_j \prod_{l=1}^j \left( \prod_{k=l+1}^{k_0} \gamma_k^{\prod_{i=l+1}^{k-1} q_i} \right)^{p_l},$$

$$c_j = \sum_{i=1}^j \left( p_i \prod_{k=i+1}^{k_0} q_k \right), \quad \chi_j = \frac{\delta_j \xi_{k_0}}{\delta_{k_0}}, \quad d_j = c_{k_0} + \sum_{i=k_0+1}^j p_i.$$

## Qualitative Puiseux tree

A singularity having branches with same topology can be present on many algebraic curves. Singular Puiseux trees of theirs polynomials coincide in many values. We define *qualitative* Puiseux tree, which will be identical for such polynomials.

**Definition 4.** *Qualitative* Puiseux tree of a polynomial  $f$  is singular Puiseux tree having at each  $N$ -node attached

- $(q, p)$  describing the slope of the Newton polygon edge and
- $m$  – the horizontal length of the Newton polygon edge.

In every  $C$ -node are attached values

- $\varrho$  - the root of the characteristic polynomial
- $r$  - the multiplicity of  $\varrho$ .

Note, that we consider only the singular Puiseux tree. Due to Def. 2, once having a leaf of the singular Puiseux tree, the rest of the tree branch is uniquely determined.

Now, we formulate and prove the necessary and sufficient condition for a tree to be a qualitative Puiseux tree of a polynomial.

**Proposition 5.** *Let the nodes of a tree  $T$  has attached values as in Definition 4. The nodes satisfy the following conditions*

- (a) *If  $C$  is a leaf of  $T$  than  $r = 1$ .*
- (b) *If  $C$  has children  $N_1, N_2, \dots, N_s$ , then  $\sum_{i=1}^s m_i = r$ .*
- (c) *If  $C_1, C_2, \dots, C_s$  are children of  $N$ , then  $\sum_{i=1}^s r_i = m/q$ .*

*if and only if there exists a polynomial  $f$  having  $T$  as its qualitative Puiseux tree.*

*Proof.* As by the way product of the proof of proposition in Definititon 2 (see [7, page 102]) we obtain that every leaf of the singular Puiseux tree has one root of the characteristic polynomial of multiplicity one, so the necessity of condition (a). The sum of horizontal lengths of the Newton polygon edges of negative slope equals the multiplicity of the root of characteristic polynomial (see [7, page 101]) which implies the necessity of (b). It rests to prove the necessity of (c): let  $N$  be a node of a Puiseux tree and  $C_1, C_2, \dots, C_s$  be its children. The characteristic polynomial  $h$  has degree  $m/q$ , so due to the Fundamental Theorem of Algebra we have that  $\sum_{i=1}^s r_i = m/q$ , which is the necessity of condition (c).

The proof of the sufficiency is constructive and it is given by the following section.  $\square$

### 3 Algebraic curve given by qualitative Puiseux tree

Once given a properties of curve branches at the singularity, we first build (one of many) qualitative Puiseux tree satisfying them. Then we compute (one of many) equation of an algebraic curve having the prescribed qualitative Puiseux tree. The first half can be done using properties of singular Puiseux tree (see cf. [3]). This section covers the second part. We proceed in three main steps.

- (1) Using only qualitative Puiseux tree  $\tilde{T}$ , we can compute a parametrization  $\tilde{P}_i$  for each branch of  $\tilde{T}$ .
- (2) For each branch, from parametrization  $\tilde{P}_i : x = B_{i,x}(t), y = B_{i,y}(t)$ , using resultant, we obtain its local equation  $f_i(x, y) = 0$ .
- (3) The product of polynomials  $f_i$  of all branches represents a reducible curve having the prescribed qualitative Puiseux tree. Adding one term, we obtain an irreducible polynomial having the same qualitative Puiseux tree.

Now, we will describe all steps in details. To compute  $\tilde{P}_i$ , we use Proposition 3. We need values  $p_i, q_i, \gamma_i, \delta_i, k_{i,0}$ . The values  $p_i, q_i, k_{i,0}$  are given by the qualitative Puiseux tree, the values  $\gamma_i, \delta_i$  can be uniquely computed. As the given qualitative Puiseux tree  $\tilde{T}$  is finite, the obtained parametrizations are finite, too. Remind that these parametrizations represent the branches locally, but they are sufficient to describe all topological qualities of the curve singularity. Every such parametrization has the form  $P_i = [B_{i,x}(t), B_{i,y}(t)]$ . To find the explicit equation, we compute the resultant of  $B_{i,x} - x$  and  $B_{i,y} - y$  with respect to  $t$ . The zero set of the obtained polynomial  $f_i(x, y)$  is the implicit equation of the given branch.

In the last step, the product of local polynomials of all branches  $\tilde{f} = \prod_{i=1}^k f_i(x, y)$  has by construction the prescribed qualitative Puiseux tree. But we are looking for an irreducible curve. We show that by adding one term to  $\tilde{f}$  we can obtain an irreducible polynomial having same qualitative Puiseux tree.

First observe, which terms we can add to the polynomial without changing the qualitative Puiseux tree. To do so, we will need at each  $N$ -node also the value  $l$ , which delimits the position of the Newton polygon in the coordinate system. The easiest variant is to assume that each Newton polygon has exactly one vertex on each axis. Assume that, the  $N$ -nodes are ordered by the descending slope of the Newton polygon edges. If the Newton polygon consists of edges  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , for every  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , we compute  $l_i$  as follows:

$$l_i = \left( \sum_{1 \leq j < i} m_j \right) p_i + \left( \sum_{i \leq j \leq k} \frac{p_j m_j}{q_j} \right) q_i.$$

Then the terms not disturbing qualitative Puiseux tree are characterized by the following proposition:

**Proposition 6.** *Let  $\tilde{f} \in \mathbb{Q}[x, y]$  and  $f = \tilde{f} + cx^M y^S$  for  $c \in \mathbb{Q}$  and  $M, S \in \mathbb{N}_0$ . Denote  $\tilde{T}$  and  $T$  theirs qualitative Puiseux trees, respectively. For every branch  $B = (N_1, C_1, \dots, N_{k_0}, C_{k_0})$ , we denote  $R_1 = q_1 S + p_1 M - l_1$  and  $R_{i+1} = q_{i+1} R_i - l_{i+1}$ . Trees  $T$  and  $\tilde{T}$  are identical if for each branch of  $\tilde{T}$  is satisfied*

$$R_{k_0} > 0. \quad (2)$$

To prove this proposition, it will be useful the following lemma:

**Lemma 7.** *Assume the notation as in Proposition 6. For  $i \geq 2$ , the term  $cx^M y^S$  influences only vertices of Newton graph  $N_{i+1}$  lying in the triangle  $\Delta_{i+1}$  defined by its vertices:*

$$[0, R_i], \left[ 0, R_i + S \left( \sum_{k=2}^i p_k \prod_{j=k+1}^i q_j \right) \right], \left[ S, R_i + S \left( \sum_{k=2}^i p_k \prod_{j=k+1}^i q_j \right) \right].$$

*Proof.* In Newton graph  $N_1$ , the term  $cx^M y^S$  influences only the point  $[S, M]$ . In the iteration step, we substitute  $f_i(x, y) := x^{-l_i} f_{i-1}(\gamma_i x^{q_i}, x^{p_i}(\delta_i + y))$ . Therefore, in Newton polygon  $N_2$ , the term  $cx^M y^S$  influences vertices  $[\alpha, q_1 S + p_1 M - l_1] = [\alpha, R_1]$  for  $\alpha = 0, 1, \dots, S$ . Similarly, every vertex  $[\alpha, R_1]$  in  $N_2$ , influences in  $N_3$  vertices  $[\beta, q_2 R_1 - l_2 + \alpha p_2] = [\beta, R_2 + \alpha p_2]$  for  $\beta = 0, 1, \dots, \alpha$ . Considering all  $\alpha = 0, 1, \dots, S$ , these vertices lie in the triangle given by  $[0, R_2]$ ,  $[0, R_2 + Sp_2]$  and  $[S, R_2 + Sp_2]$ . This proves the statement of the lemma for  $i = 2$ .

Now, let us prove the inductive step. Assume that the vertices influenced by  $cx^M y^S$  in  $N_{i+1}$  lie the triangle  $\Delta_{i+1}$ . A point of  $\Delta_{i+1}$  has the form

$$\left[ \alpha, R_i + \left( \sum_{k=2}^i \beta_k p_k \prod_{j=k+1}^i q_j \right) \right],$$

where  $\forall k \leq i : \alpha \leq \beta_k \leq S$ . This point influences points

$$\left[ \alpha_1, \underbrace{q_{i+1} R_i - l_{i+1}}_{R_{i+1}} + \left( \sum_{k=2}^i \beta_k p_k \prod_{j=k+1}^{i+1} q_j \right) + \alpha p_{i+1} \right]$$

of  $N_{i+2}$  for  $\alpha_1 = 0, 1, \dots, \alpha$ . These points lie in the triangle  $\Delta_{i+2}$ , which proves the inductive step and the lemma, too.  $\square$

*Proof of Proposition 6.* First observe that if  $[0, R_i]$  does not influence Newton polygon  $N_{i+1}$ , then no other vertex in triangle  $\Delta_{i+1}$  does not influence it. It is clear from the definition of the Newton polygon as the lower convex hull.

Specially, the point  $[0, R_i]$  does not influence the Newton polygon, if it is over each edge of Newton polygon, i.e.  $q_{i+1}R_i > l_{i+1}$ , equivalently  $R_{i+1} > 0$ . By the assumption of the proposition we have  $R_{k_0} > 0$ . It rest to prove it also for all smaller  $i$ . If  $R_i = q_i R_{i-1} - l_i > 0$ , then also  $R_{i-1} > l_i/q_i > 0$ . So, by induction,  $R_i > 0$  for all  $i = 1, \dots, k_0$ . Thus Newton polygon at any level of singular Puiseux tree is not influenced by  $cx^M y^S$  as the proposition claims.  $\square$

Due to this propositon, it suffices to choose  $S$  and  $M$  sufficiently large to do not influence the qualitative Puiseux tree. Now, let us focus on the irreducibility of the resulting polynomial. To prove it, we use the following proposition (see [6]).

**Proposition 8.** *Let  $f \in \mathbb{Q}[x, y]$  has the form  $f(x, y) = g_0 y^d + g_1(x) y^{d-1} + \dots + g_d(x)$ , where  $g_0$  is a nonzero constant and  $g_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$  for  $i = 1, 2, \dots, d$ . Denote*

$$\nu_y(f) = \max_{i=1,2,\dots,d} \frac{\deg g_i}{i}.$$

*If  $\nu_y(f) = m/d$  and  $\gcd(m, d) = 1$ , then  $f$  is absolutely irreducible.*

Clearly  $\tilde{f}$  satisfies assumptions of this proposition as the leading coefficient in  $y$  is the product of leading coefficients in  $y$  of all  $f_i$ . By explicit computation of resultant (in step 2), we get that the leading coefficient of  $f_i(y)$  is  $\lambda_i^{c_{ik_0}}$ , which does not depend on  $x$ .

Then, we want to add  $x^M$  to  $\tilde{f}$  to obtain an irreducible polynomial  $f$ . We will seek  $M$  in the form  $M = \nu_y(\tilde{f}) * d + N$  such that

$$\gcd(\nu_y(\tilde{f}) * d + N, d) = 1. \quad (3)$$

There exists infinitely many such  $N$ , because between any  $d$  succeeding numbers, there is one which has after division by  $d$  the remainder one.

Denote  $N_0$  the smallest  $N$  satisfying (3) and for which  $x^{\nu_y(\tilde{f}) * d + N}$  does not influences qualitative Puiseux tree (Proposition 6). Then  $\nu_y(f) = (\nu_y(\tilde{f}) * d + N_0)/d$  and due to Proposition 8,  $f$  is absolutely irreducible.

Naturally, we can consider the polynomial  $\tilde{f}$  as graded in  $x$  and similarly, we can compute suitable  $S$ , for which  $f = \tilde{f} + y^S$  is irreducible, too.

## 4 Example

We will demonstrate the algorithm on an example. Assume that we want to construct a polynomial having at the origin a singularity with 5 real branches with given properties:  $B_1$  : vertical normal vector, curvature  $1/2$ ,  $B_2$  : normal vector slope  $-1/2$ , curvature greater than 1,  $B_3$  : normal vector slope  $-1/2$ , zero curvature,  $B_4$  and  $B_5$  both horizontal normal, singular, inflection. Example of qualitative Puiseux tree having the prescribed properties is in Figure 1.

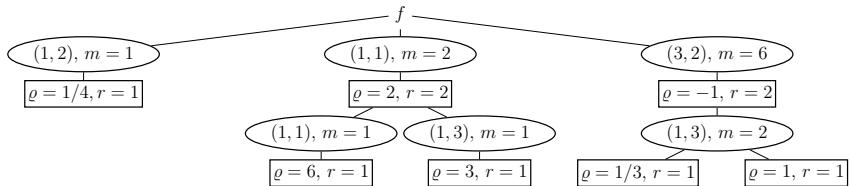


Figure 1: Qualitative Puiseux tree having prescribed properties.

First, we have to compute local parametrizations of branches:  $P_1(t) = [t, t^2/4]$ ,  $P_2(t) = [t/12, t/6+t^2/6]$ ,  $P_3(t) = [t/2, t+3t^4]$ ,  $P_4(t) = [-t^3, -t^2+t^5/3]$ ,  $P_5(t) = [-t^3, -t^2+t^5]$ . Using resultant, we get theirs implicit equations:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 4y - x^2 = 0 \\ f_2(x, y) &= -24x^2 - 2x + y = 0 \\ f_3(x, y) &= -48x^4 - 2x + y = 0 \\ f_4(x, y) &= x^5 + 9x^4 + 27x^3 + 27x^2 + 27y^3 = 0 \\ f_5(x, y) &= x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 + y^3 = 0 \end{aligned}$$

Their product, we denote  $\tilde{f} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5$ . And we compute  $\nu_y(\tilde{f})$  as defined in Proposition 8:

$$\nu_y(\tilde{f}) = \max(4, 3, 8/3, 9/4, 11/5, 13/6, 2, 2, 2) = 4.$$

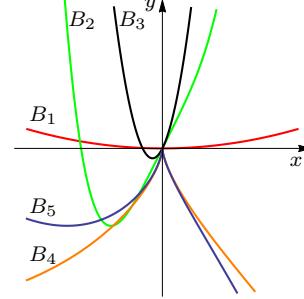
So the first irreducible candidate to have prescribed qualitative Puiseux tree is  $f = \tilde{f} + x^{37}$ . It is the case, because for branches of qualitative Puiseux tree, we have  $B_1 : R_1 = 1 \cdot 37 - 7 > 0$ ,  $B_2 : R_2 = 1 \cdot 30 - 2 > 0$ ,  $B_3 : R_2 = 1 \cdot 30 - 4 > 0$ ,  $B_{4,5} : R_2 = 1 \cdot 93 - 6 > 0$ . Assuming  $f$  as graded in  $x$ , we have

$$\nu_x(\tilde{f}) = \max\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13}, \frac{9}{14}, \frac{8}{15}, \frac{1}{2}, \frac{9}{17}\right) = \frac{2}{3}.$$

The second irreducible candidate to have the given tree is  $f = \tilde{f} + y^{13}$ . This polynomial has also the required qualitative Puiseux tree as  $B_1 : R_1 = 2 \cdot 13 - 7 > 0$ ,  $B_2 : R_2 = 1 \cdot 6 - 2 > 0$ ,  $B_3 : R_2 = 1 \cdot 6 - 4 > 0$ ,  $B_{4,5} : R_2 = 1 \cdot 8 - 6 > 0$ .

The polynomial  $f = \tilde{f} + y^{13}$  has smaller degree, so we will prefer it. Next to the rational Puiseux series of its branches at the origin, we can see theirs graphs.

$$\begin{aligned} B_1 &: [t, \frac{t^2}{4} - \frac{t^{20}}{28991029248} + \dots] \\ B_2 &: [\frac{t}{2}, t + 3t^4 + \frac{2t^6}{81} - \frac{53t^7}{216} + \dots] \\ B_3 &: [\frac{t}{12}, \frac{t}{6} + \frac{t^2}{6} - \frac{t^6}{1889568} - \frac{331t^7}{60466176} + \dots] \\ B_4 &: [-t^3, -t^2 + \frac{t^5}{3} + \frac{t^7}{648} + \frac{t^8}{162} + \dots] \\ B_5 &: [-t^3, -t^2 + t^5 - \frac{t^7}{648} - \frac{t^8}{162} + \dots]. \end{aligned}$$



Note, that the constructed polynomial is only one of many polynomials having the prescribed qualitative Puiseux tree or even the prescribed properties, because we can add to it arbitrary many terms, which does not influence the qualitative Puiseux tree (Prop. 6), neither the properties of the singularity.

## 5 Acknowledgment

The author's work and participation on the conference was supported by grant of Charles University Grant Agency SVV-2017-260456.

## References

- [1] Basu, S., Pollack, R., Roy M.-F.: Algorithms in Real Algebraic Geometry. Springer-Verlag (2006).
- [2] Blažková E., Šír Z.: Exploiting the Implicit Support Function for a Topologically Accurate Approximation of Algebraic Curves. In: MMCS 2012, LNCS 8177, 49 – 67 (2014).
- [3] Blažková, E., Šír, Z.: Local Properties of Algebraic Curves Using Rational Puiseux Series. In: Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics. Nakladatelstvo STU, 73 – 84 (2015).
- [4] Duval, D.: Rational Puiseux expansions. Compositio Mathematica 70, 119–154 (1989).
- [5] Fischer, G.: Plane Algebraic Curves. American Mathematical Society (2001)
- [6] Schmidt, W.M.: Absolutely irreducible equations  $f(x, y) = 0$ . In: Equations over Finite Fields, LNCS, 92–133 (1976).
- [7] Walker, R.J.: Algebraic Curves. Springer-Verlag (1978).

# GeoGebra a výučba zobrazovacích metód

## GeoGebra and the projection methods teaching

Viera Čmelková

*Department of Quantitative Methods and Economic Informatics,  
The Faculty of Operation and Economics of Transport and Communications,  
University of Žilina  
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovak Republic  
email: viera.cmelkova@fpedas.uniza.sk*

**Abstract.** In the paper we will talk about possibilities of using mathematical educational software GeoGebra by the projection methods and geometry teaching.

**Keywords:** educational software, geometry, projection methods, GeoGebra

**Kľúčové slová:** vzdelávací softvér, geometria, zobrazovacie metódy, GeoGebra

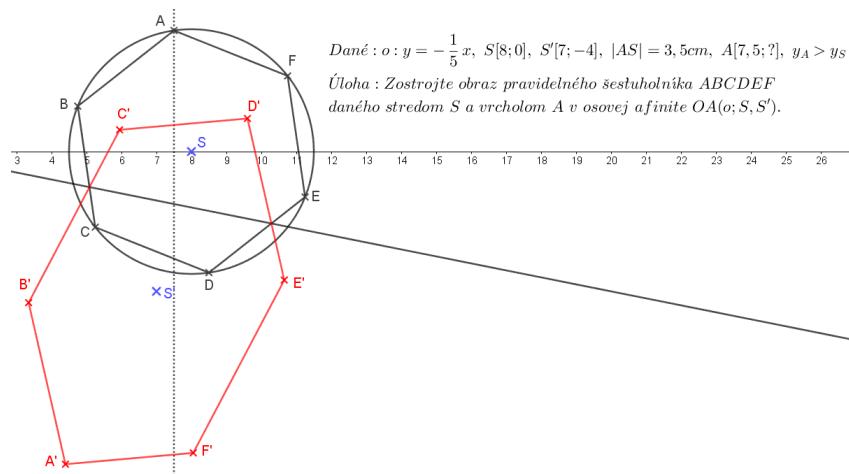
GeoGebra je voľne šíriteľný matematický edukačný softvér. Centrála vývoja sídli v rakúskom Linzi. Počas viac než 15 rokov vývoja zožal softvér GeoGebra množstvo medzinárodných ocenení. Je širokopoužiteľný. Pôvodná myšlienka bola spojiť algebru a geometriu pri podpore výučby na základných a stredných školách. Neskôr sa však pridali oblasti ako matematická štatistika, matematická analýza a tiež sa rozšírila možnosť zobrazovať rovinné vzťahy útvarov na možnosť trojdimenzionálneho zobrazovania jednoduchých objektov využitím dvojsťredového premietania. Pri výučbe učitelia určite oceňujú rôzne možnosti zviditeľnenia, resp. zmeny údajov a učitelia geometrie určite ocenia možnosť krokovania konštrukcie.

Ako bolo spomenuté GeoGebra je širokospektrálny program. Ale platí to nielen čo sa týka oblastí matematiky, pri ktorých výučbe je možné GeoGebru použiť, ale aj vekových kategórií študentov.

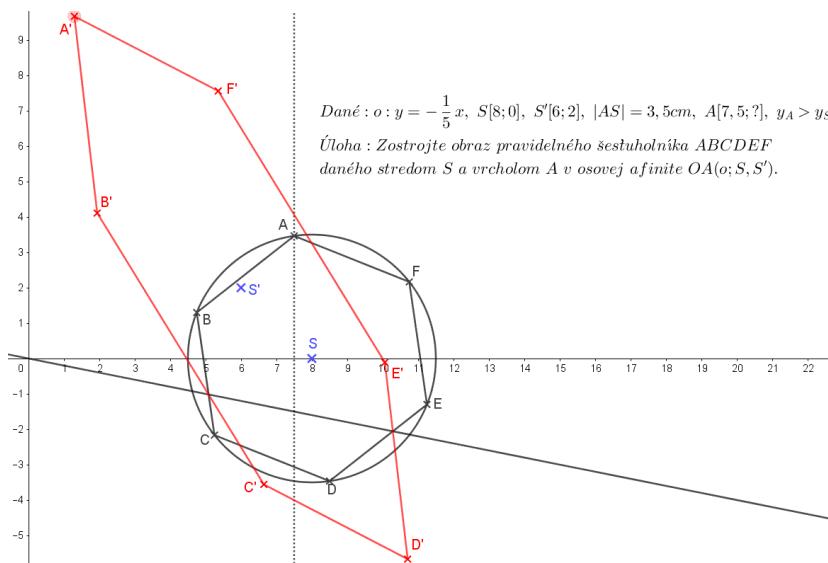
Na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov Žilinskej univerzity používame GeoGebru v podpore výučby predmetu Geometria. Náplňou tohto predmetu je voviesť študentov do tajov zobrazovacích metód. Keďže predmet má dotáciu 2/2 a vyučuje sa v prvom semestri bakalárskeho štúdia, je možné podať študentom len základy. Sústredíme sa preto najmä na pochopenie princípov a logických schém.

Vzhľadom na skladbu študentov (prevažne ekonomickej strednej školy a dopravné odborné školy v odboroch, ktoré absolvujú predmet Geometria) používame softvér GeoGebra najmä na podporu domáceho štúdia. Študenti po prebraní učiva na prednáške a cvičeniach majú voľne prístupné applety s riešenými príkladmi, pomocou ktorých si môžu doma danú tému precvičiť hlbšie a konzultujeme spolu tieto riešenia aj na ďalších cvičeniach. Tieto

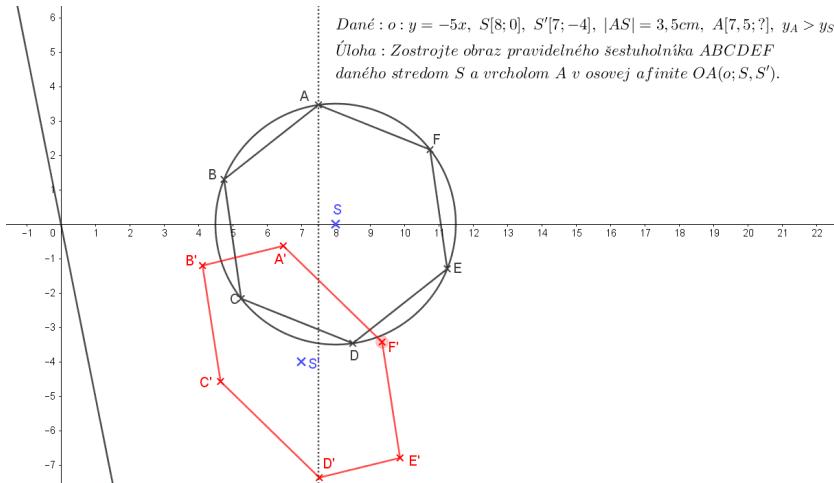
applety, ako bolo spomenuté, je možné krokovat, čo je veľká výhoda a dodáva to konštrukcii prehľadnosť, študenti si uvedomujú nadväznosť krokov konštrukcií.



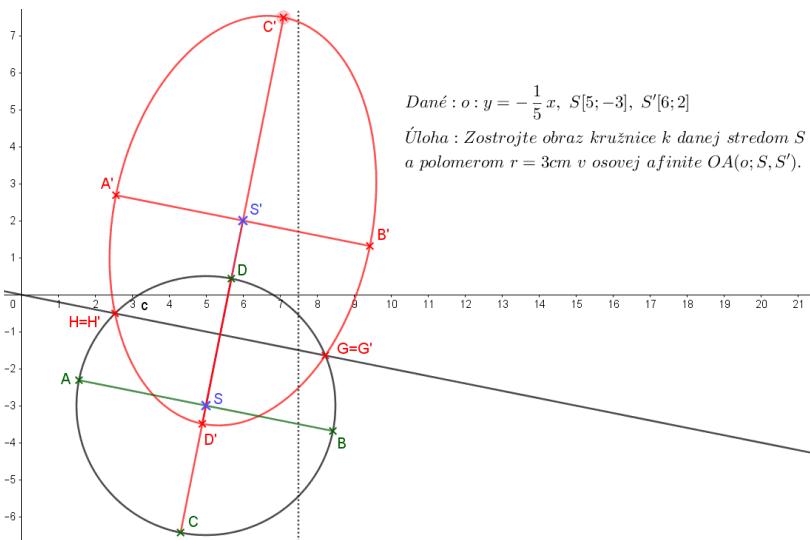
Obr. 1: Obraz pravidelného šestuholníka v osovej afinité I



Obr. 2: Obraz pravidelného šestuholníka v osovej afinité II

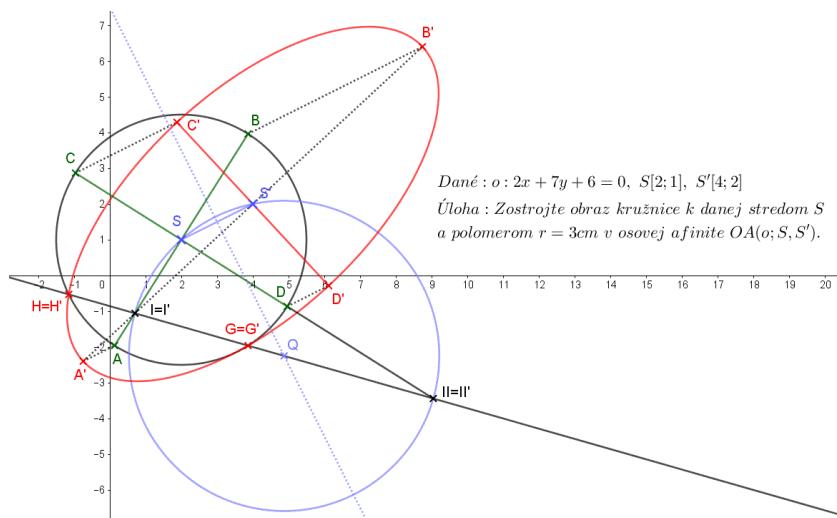


Obr. 3: Obraz pravidelného šestuholníka v osovej afinité III



Obr. 4: Obraz kružnice v osovej afinité I

Máme už vytvorených niekoľko súborov príkladov, ako napr. úvod do Mongeovho premietania, teleso zobrazené v Mongeovom premietaní, úvod do kolmej afinity, polohové úlohy riešené pomocou v kolmej afinity a iné. V obrázkoch prikladáme zopár appletov zo sady príkladov na precvičenie osovej afinity v rovine.



Obr. 5: Obraz kružnice v osovej afinité II

## Záver

Záverom môžeme len odporúčať GeoGebru všetkým učiteľom , ktorí majú záujem priniesť do výučby matematiky a príbuzných predmetov svoje myšlienky, svoje inovácie a nový viector do metodiky vyučovania.

## Literatúra

- [1] GeoGebra, prevzaté 29 Sept., 2017, z <https://www.geogebra.org/>

# Krátý úvod do Geometria del Compasso

## Short Introduction to Geometria del Compasso

Věra Ferdiánová

*Dept. of mathematics, Fac. of Science, Univ. of Ostrava  
30. dubna 22, 701 03 Ostrava, Czech Republic  
email: vera.ferdianova@osu.cz*

**Abstract.** The paper presents selected Mascheroniho structure in which only uses compasses. This is a limited-resource construction. The Italian mathematician Lorenzo Mascheroni (1750-1800) described these constructions in his book Geometria del compasso (1797).

*Key words:* Mascheroni construction, GeoGebra

*Klíčová slova:* Mascheroniho konstrukce, GeoGebra

## 1 Georg Mohr a Lorenzo Mascheroni

Georg Mohr (Jørgen Mohr) byl matematik, který se narodil v roce 1640 v dánské Kodani. Jelikož jeho život není podrobně zmapován, předpokládá se, že odešel studovat na některou z holandských univerzit, které v té době byly velmi populární a většina dánských vzdělanců té doby je navštěvovala. V roce 1672 publikoval knihu Euclides Danicus, která obsahuje základní myšlenky Mascheroniho teorie, ale byla napsána v dánštině a dlouho se předpokládalo, že se jedná o přepis Euklidova díla. Až v roce 1927, upozornil na významnost této knihy profesor Johann Hjemslevov, který ji dostal od svého studenta [4]. Druhá Mahrova kniha Compendium Euclides Curiosi byla vydána v roce 1673 a její obsah vychází z Euklidovy knihy Základy.

Zajímavostí je dochovaný dopis ze dne 12. května 1676 od Leibnitze adresovaný sekretáři H. Oldenburgovi londýnské královské společnosti, ve kterém píše: „Georgius Mohr Danus bude přínosem v geometrii a analýze“. Leibnitz se v daný čas nacházel a působil v Paříži [2], takže je teoreticky možné, že se oba matematici setkali anebo se Leibniz seznámil s Mohreho prací.

Mohr se v roce 1681 vrací zpět do Dánska a uchází se o místo u dánského královského dvora, král mu nabídl pozici pro dohled budování královského loděstva, kterou nepřijal. V roce 1687 se oženil a odstěhoval se do Holandska, prameny tvrdí, že to bylo z důvodů neshod s dánským králem. Před sklonkem svého života přijal Tschirnhausovu pracovní nabídku a odešel se svou rodinou do německého Kieslingwaldu [4].

Skoro o 200 let později se narodil italský kněz, básník a matematik Lorenzo Mascheroni (1750-1800) v italském Bergamu. Již v 17 letech byl Mascheroni

vysvěcen na kněze a pokračoval ve studiích rétoriky, kterou začal vyučovat v Bergamu o 5 let později. Další oblast jeho zájmu byla filozofie, která se zaměřovala i na základy logiky a fyziky. V roce 1786 nastupuje na pozici profesora algebra a geometrie na pávské univerzitě. Ve stejném roce publikuje knihu *Nuove ricerche sull' equilibrio delle volte* (1786) a poté následují další významná díla *Adnotationes ad calculium integralem Euleri* (1792), *Problemi per gli agrimensori* (1793) a *Geometria del Compasso* (1797). Poslední jmenované dílo je pro nás z pohledu geometrie stěžejní, jelikož zde Mascheroni popisuje euklidovské konstrukce, které lze sestrojit pouze za pomocí kružítka [5].

## EUCLIDES DANICUS,

Bestaande udi Too Deele.

**Dend Förste Deel :** Handler uðas de Sex  
Förste / EUCLIDES Sc: ger / de der ubr begeffne  
Maklumthige Werckmyster.

**Dend Anden Deel :** Gifover anledning At-  
ställig Werckmyster at göre/son Stering/ Roring/ Decling/  
Stämbe Regenten & Soola-vijere. Alternativt med  
en Circel (Förden Enkel at bruge) med Ske-  
riser af Runder.

Foreföllet.

Af

Gworg Mohr.



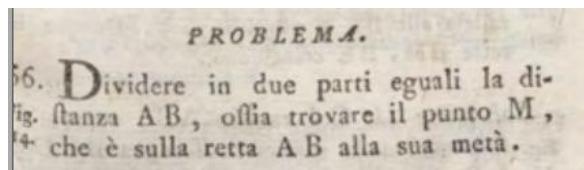
Dremet i Amsterdam af Jacob van Behen.  
For Authorc, Året 1672.

**Obrázek 1 Euclides Danicus**

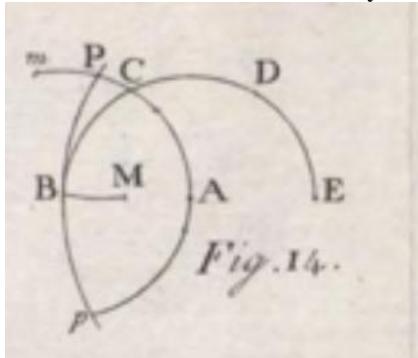
## 2 Geometria del Compasso

Geometria del Compasso je napsána starou italštinou a jedná se o ucelené Mascheronovo dílo. Kniha je rozdělena do dvanácti hlavních kapitol, přičemž jedna kapitola vždy obsahuje kompletní problematiku daného tématu. Struktura jednotlivých kapitol je systematicky uspořádána a obsahuje: Zadání úlohy, popis konstrukce s odkazem na konstrukci, důkaz, alternativní řešení. Výsledné konstrukce nalezneme na konci knihy jako přílohu. Při konstrukcích Mascheroni využívá pro větší přehlednost nejen kružnice, ale i oblouky. Každá kapitola postupuje od nejjednodušší po nejsložitější konstrukce. Například

v kapitole zaměřené na rozdelení a prodloužení úsečky, začíná rozdelením úsečky na dvě stejné části (obr. 2). Poté pokračuje rozdelením úsečky na 4, 8 atd. stejných částí a následně přechází na rozdelení v lichém počtu a poslední konstrukce se zabývá rozdelením úsečky na  $n$  stejných dílů.



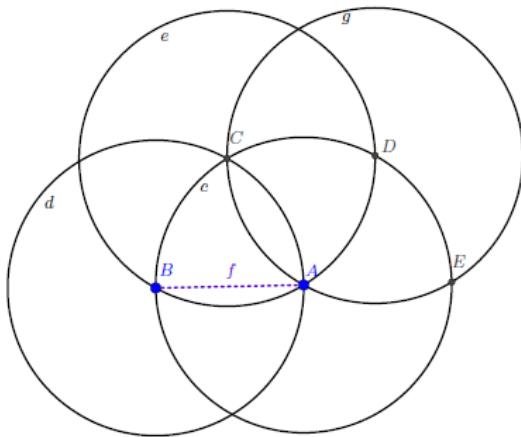
Obrázek 2 Zadání a řešení úlohy [3]



Obrázek 3 Konstrukce dle Mascheroniho [3]

Zadání: Sestrojte střed úsečky AB.

Rozbor: Konstrukční úloha obsahuje i nalezení bodu E, pro něž platí  $|BA| = |AE|$ . K sestrojení bodu E využijeme jednoduchou konstrukci pro zdvojení délky úsečky (viz obr. 4). Dále při konstrukci můžeme využít vlastností trojúhelníků.

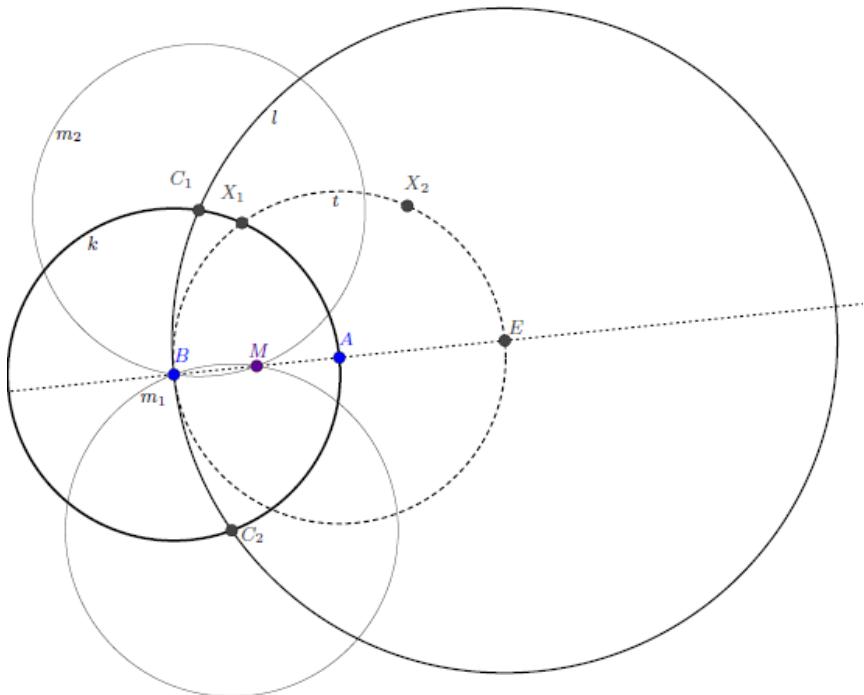


**Obrázek 4 Zdvojení délky úsečky AB**

Popis konstrukce:

- 1)  $AB$ ;
- 2) Konstrukce bodu  $E$ ;
- 3)  $l; l = (E, r = |BE|)$ ;
- 4)  $C_1, C_2; C_1, C_2 \in k \cap l$ ;
- 5)  $m_1; m_1 = (C_2, r = |C_2B|)$ ;
- 6)  $m_2; m_2 = (C_1, r = |C_1B|)$ ;
- 7)  $M; M \in m_1 \cap m_2$

Konstrukce:



## Závěr

Georg Mohr a Lorenzo Mascheroni nezávisle po sobě popsali možnost konstruovat úlohy pouze za pomoci kružítka. Následně se touto problematikou zabýval Steiner (1833) a až v roce 1906 přišel s inovací Adler, jenž danou problematiku rozšířil o využití kruhových inverzí [1]. Příspěvek měl za cíl poukázat na existenci výjimečné knihy, která zůstala již trochu opomenuta. Výhodou je, že v dnešní době elektronizace italské kolegové knihu naskenovali a je k dispozici v originále. Čtenář je ve výhodě oproti Adlerovi, který již vycházel z německého překladu. Do budoucna je v plánu vytvořit alespoň český překlad všech zadání, které jsou uvedeny v Geometria del Compasso.

## Literatura

- [1] Adler, August, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. De Gruyter, 1906.
- [2] Gerhardt, Karl, *Leibniz in London*. Oxford University Press, 1917.
- [3] Mascheroni, Lorenzo. *Geometria del Compasso*. Pávia, 1797.
- [4] Mohr, Georg, *The Galileo Project* [online]. Dostupné z: <http://galileo.rice.edu/Catalog/NewFiles/mohr.html>.
- [5] Vojtěch, Jan, Theorie Geometrických konstrukcí. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*. Vol. 31, 1902.

# Jak rozpohybovat GeoGebru?

## How to get GeoGebra to move?

Šárka Gergelitsová, Tomáš Holan

*Katedra softwaru a výuky informatiky Matematicko-fyzikální fakulty*

*Univerzity Karlovy v Praze*

*Malostranské náměstí 25, Praha*

*sarka@gbn.cz*

*Tomas.Holan@mff.cuni.cz*

**Abstract.** When creating more complex applets you may need to program less or more. In the paper we show three different ways how to implement more advanced technique in GeoGebra, each of them we demonstrate on one applet. In the first one lists are very useful objects for reaching the goal, in the second one we comment use of GeoGebra Script and finally we show the benefits of using JavaScript.

**Keywords:** GeoGebra, lists, JavaScript, GeoGebra Script.

**Klíčová slova:** GeoGebra, seznamy, JavaScript, GeoGebra Script

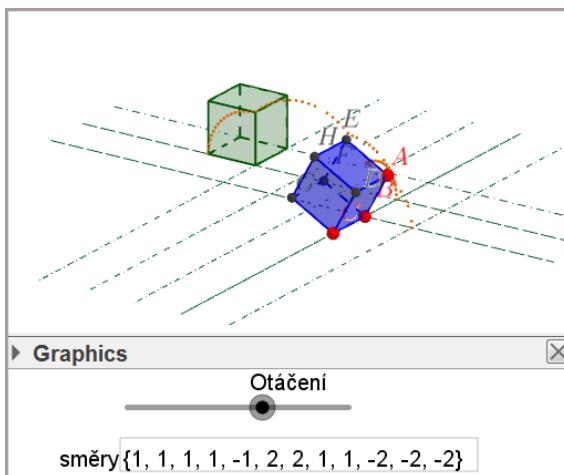
## 1 Úvod

GeoGebra poskytuje přehledné prostředí a mnohé intuitivní nástroje pro rychlou tvorbu výukových appletů a pro přímé využití v hodině. Pokud je třeba, můžeme s trochou úsilí vytvořit pomocí přímých nástrojů GeoGebry i výukové materiály profesionálního vzhledu a funkcí. Přesto může být někdy nutné při tvorbě appletu přistoupit k programování. V tomto článku chceme ukázat, jak v GeoGebře vytvořit (složitější) aplikaci. Ty způsoby budou tři, jeden bez programování a dva s programováním ve dvou různých programovacích jazycích. Ale pokud vás programování ani vytváření aplikací nezajímá, neprestávejte číst – možná se vám budou hodit i ty samotné aplikace, které si hotové můžete stáhnout z adresy uvedené v závěru článku.

## 2 Aplikace

Abychom věděli, k čemu chceme dojít a také abychom netratili ty čtenáře, které vytváření aplikací nezajímá, pojďme se nejdříve podívat na hotové aplikace. Budou to dvě pomůcky, nebo „hry“, chcete-li, které můžete použít ve výuce a které vyžadují (a rozvíjejí) prostorovou představivost.

První aplikace je demonstrace řešení úlohy, v níž máme najít polohu, kam se po několika překlopeních krychle přemístí její daný vrchol. Aplikace umožní simulovat postupný pohyb krychle a vyznačuje pohyb jednoho jejího vrcholu. Požadovanou posloupnost překlopení zadá uživatel do textového pole jako posloupnost znaků nebo hodnot zastupujících pohyby vpravo, vlevo, vpřed a vzad. V aplikaci jsme zvolili zadání pomocí hodnot 1, -1, 2, -2.



Obrázek 1: Dráha bodu  $A$  překlápující se krychle

Druhá aplikace rozdělí danou krychli ( $3 \times 3$ ) na požadovaný počet dílků složených z jednotkových krychliček a tyto dílky „rozháže“ – posune, ale neotáčí. K vyřešení úlohy je třeba posoudit, kam který dílek patří, a pomocí ovladače ho posunout na správné místo. Aplikace dokáže (na požádání) vyhodnotit, zda jsou dílky složeny správně.

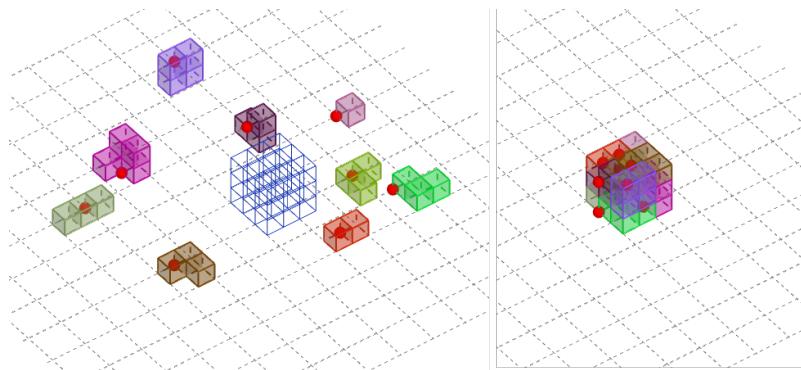
Podívejme se dále, jakými prostředky je možné uvedené aplikace sestrojit.

## 2.1 Prvý přístup – objekty Geogebry bez použití skriptování

Aplikace má umožnit uživateli simulovat pohyb krychle a sledovat její polohu při postupném plynulém překlápení podle zadанé posloupnosti jednotlivých kroků – překlopení. Probíhající čas můžeme simulovat hodnotou interaktivního posuvníku, přičemž každé dílčí překlopení bude probíhat v časovém intervalu délky 1. Plynulá změna hodnoty posuvníku vyvolá ilizi plynulého pohybu krychle. Pokud máme například dánou posloupnost otočení, která má délku 5, pak v čase 3,5 krychle provedla 3 překlopení a ve čtvrtém překlopení je zatím otočená o úhel  $45^\circ$ .

V aplikaci *rotace\_krychle* potřebujeme pracovat s posloupností pohybů krychle. Potřebujeme si nějak zaznamenat zadání úlohy (tím je požadovaná posloupnost otočení) a pro toto zadání počítat polohu krychle v daném časovém okamžiku.

Velmi užitečným nástrojem při sestavování členitějších appletů je objekt **seznam**. Ten využijeme nejen pro zaznamenání zadání úlohy, ale i pro výpočty transformací.



Obrázek 2: Příklad zadání tétoho a složené krychle

V GeoGebře jsou pro geometrické transformace dostupné nástroje. Ty fungují tak, že GeoGebra vytvoří k danému objektu nový objekt, který je transformací objektu daného. Tyto nástroje (či příkazy) tedy nemůžeme provádět pro jednotlivá překlopení postupně, krychličky by se nám ve scéně množily. Sestrojíme a zobrazíme si v appletu jednu krychličku, která zůstane ve výchozí pozici, a k ní vytvoříme její otočenou kopii v zobrazení, které je složením všech jednotlivých otočení. Využijeme přitom výpočet souřadnic vrcholů krychle pomocí matice transformace. Určíme matice jednotlivých pohybů a výslednou transformaci získáme jejich násobením. Pro tento účel byly v appletu sestrojeny nástroje pro převod kartézských souřadnic bodu do homogenních a zpět.

Homogenní souřadnice sice GeoGebra využívá ve své vnitřní reprezentaci bodů, uživatelsky ale dostupné nejsou. Přidané nástroje můžeme najít a prozkoumat v menu **Nástroje** → **Správa nástrojů** → **Otevřít**. Podobně – aby nebyl samotný popis modelu zatížen mnoha definicemi – jsou zde i nástroje, které sestaví matici pro otočení o daný úhel kolem jednotlivých souřadnicových os. Tyto matice pak využijeme pro skládání zobrazení.

Applet využívá seznam úhlů otočení přepočítaných na intervale mezi celočíselnými hodnotami nazvaný **parametry**, který se aktualizuje podle hodnoty posuvníku, seznam poloh pro jednotlivé kroky pohybu a seznamy, které jsou dílčími kroky k určení seznamu os otočení. Pro výslednou animaci jsou tedy důležité tři seznamy: seznam úhlů otočení (**parametry**) a spočítané seznamy **otoceni** – seznam matic výsledných rotací a seznam **otcelkem** – seznam matic transformace pro jednotlivé kroky výsledného pohybu (zahrnující nejen rotaci kolem os, ale i posunutí). Protože krychli výsledně otočíme podle matice **otfin**, která je součinem těchto matic, tj.

součinem prvků seznamu matic, a protože seznamy počítáme postupně od prvého k poslednímu pohybu, musíme ještě seznam **otcelkem** obrátit – to je seznam **op**, tj. **otfin = Soucin(op)**. Doplňme ještě, že uvedeným postupem spočteme souřadnice transformovaného bodu (nemůžeme tak otáčet například krychli). Takže výsledná „kráčející“ krychlička je sestřena příkazem **Cube(AA, BB, CC)**, kde body **AA**, **BB**, **CC** jsou transformované polohy vrcholů **A**, **B**, **C** původní krychle.

V appletu tedy není využito skriptování v pravém slova smyslu, vše se „schovalo“ do předpisů pro sestavení dílčích seznamů.

## 2.2 Skriptování

Na ukázce krychle rozpadající se na několik dílčích částí ukážeme rozdíl ve využití ošetření událostí pomocí GeoGebra Scriptu a JavaScriptu.

Problém v konstrukci appletu je náhodně rozdělit krychli ( $3 \times 3$  nebo  $4 \times 4$ ) na daný počet souvislých částí. Tedy částí, v nichž každé dvě jednotkové krychličky sousedí stěnou. Algoritmus bude v obou případech stejný: vytvoříme seznamy jednotkových krychliček, které budou reprezentovat jednotlivé části, a pro každý seznam vygenerujeme krychličky v něm obsažené. Přiřadíme k nim ovladače – to budou volné body, jimiž budeme pohybovat pomocí myši – a tak budeme dílky posouvat.

Jak rozdělit krychli na části? Například tak, že vytvoříme seznam všech krychliček (seznam **ceły**) a postupně budeme aktualizovat seznam krychliček již zařazených v některé části (seznam **jcasti**). Z nich pak odvodíme seznam krychliček dosud čekajících na zařazení (seznam **zbylé**). Ke každé části si navíc budeme držet aktuální seznam krychliček, které lze v danou chvíli k části přidat – seznam **sousedí**. Kandidátem na sousední krychličku v dané části je každá volná (tj. dosud nezařazená) krychlička, která sousedí stěnou s některou krychličkou této části. Na začátku dělení, kdy jsou všechny části prázdné, vložíme do každé části jednu (náhodnou) krychličku, a pak pomocí cyklu náhodně vybereme část a do ní přidáme jednoho kandidáta na souseda (pokud nějaký takový kandidát existuje). To budeme dělat tak dlouho, dokud budeme mít nějaké zbylé, nezařazené krychličky v poli **zbylé**.

## 2.3 Druhý přístup – využití GeoGebra Scriptu

Rozdělení krychle na části můžeme v aplikaci vyvolat stiskem tlačítka, kliknutím nebo změnou hodnoty nějakého objektu (třeba počtu částí, na něž chceme krychli rozdělit). GeoGebra má vlastní skriptovací jazyk – GeoGebra Script [1]. V něm můžeme ke každému objektu přiřadit posloupnost příkazů, které se mají v reakci na uvedenou událost provést. Povolené příkazy jsou všechny příkazy GeoGebry tak, jak je zapisujeme do příkazové řádky, zejména speciální skriptovací příkazy, které jsou uvedeny v seznamu dostupných příkazů v sekci **Skriptování**.

Výše uvedený postup v appletu snadno realizujeme pomocí seznamů. Problém nastane až v okamžiku, kdy se bude provádět cyklus, který rozděluje zbylé krychličky do částí. Nejen, že v GeoGebra Scriptu nemáme k dispozici klasický cyklus řízený podmínkou a musíme odhadnout počet opakování nějakou dostatečnou konstantou (při náhodném výběru části můžeme opakováně vybírat ty části, které již není možné rozšířit o další krychličku, takže potřebný počet kroků se bude různit a cyklus poběží „pro jistotu“ zbytečně dlouho). Horší problém je ten, že při průběhu cyklu se nestihne aktualizovat řetězec souvisejících objektů GeoGebry (seznamů), takže se bude stávat, že budeme do dílku přidávat krychličku, která je již zařazena jinde, jen se ještě nestihla vyřadit ze seznamu zbylých. Tento jev se nazývá *Race-Condition* a při časově náročných operacích s dlouhými seznamy k němu bude docházet často.

Problém v principu nevyřešíme, můžeme ale jeho vliv potlačit tím, že donutíme GeoGebru aktualizovat objekty před každým průchodem cyklu. Například tím, že necháme zobrazenou scénu překreslit. V našem appletu jsme proto provedení jednoho kroku cyklu navázali na krok posuvníku, který překreslování vyvolává. Celému cyklu, který vytvoří rozdělení velké krychle, tak odpovídá jeden animovaný průchod možnými hodnotami posuvníku. Na připraveném appletu si můžete ověřit, že aktualizace objektů, a tím celý rozklad krychle, probíhá velmi dlouho.

*Poznámka:* Základním příkazem pro přiřazení hodnoty nějakému objektu GeoGebry je příkaz *NastavitHodnotu* (*SetValue*). Například příkaz *NastavitHodnotu(B, A)* umístí volný bod B na aktuální pozici existujícího bodu A, aniž by mezi oběma body vznikla vazba. Příkaz *B = A* by způsobil předefinování bodu B, který by od tohoto okamžiku „kopíroval“ bod A.

## 2.4 Třetí přístup – využití JavaScriptu

Problém s aktualizací objektů z vypočtených hodnot vyřeší využití JavaScriptu. Od počátku budeme mít v appletu pouze abstraktní pole reprezentující požadované výsledné seznamy a po provedeném výpočtu rozdelení jen vygenerujeme v GeoGebře viditelné objekty – seznamy krychliček. Jistou nepříjemností pro využití JavaScriptu je to, že JavaScriptem je přímo podporováno jen několik příkazů GeoGebry. Seznam těchto příkazů je uveden v [2]. K vyzáření libovolného příkazu GeoGebry z JavaScriptu slouží příkaz *ggbApplet.evalCommand(prikaz)*, kde *prikaz* je textový řetězec, který má přesný tvar příkazu GeoGebry, a to v jeho anglické (us) verzi. Například:

```
for ( i=1; i <=16; i++) {
ggbApplet.evalCommand(
" SetValue(M'+i+",(RandomBetween(-7,6),RandomBetween(-5,8),0))"
)}
```

je cyklus, který bodům  $M_1, M_2, \dots, M_{16}$  nastaví náhodné celočíselné souřadnice  $x, y$  v uvedených mezích a souřadnici  $z = 0$ . Pro přístup k souřadnicím bodů sice existují přímé příkazy JavaScriptu: `setCoords()` a `getXcoord()`, `getYcoord()`, `getZcoord()`, ale pokud chceme například nastavit body  $M$  do pozic bodů  $A$ , oceníme zkratku:

```
for (i=1;i<=16;i++){
    ggbApplet.evalCommand(" SetValue(M"+i+",A"+i+" )")
}
```

Ty části kódu, které zajišťují například obarvení objektů či změnu jejich polohy, mohou být napsány též rovnocenně v GeoGebra Scriptu i v JavaScriptu, výše uvedený příklad „rozházení“ bodů  $M$  však v textové podobě napíšeme v JavaScriptu pomocí cyklu intuitivněji.

V JavaScriptu, kde máme v našem appletu spočítané body uložené v poli, vytvoříme přímo textový tvar objektu. Následující kód vyrobí seznam délů rozbité krychle. Každý dílek je seznam uspořádaných trojic v kulatých závorkách (souřadnic polohy krychliček délky) a seznam sám je uzavřený ve složených závorkách:

```
var tt= " ";
for (i = 0; i < pocet-1; i++) {
tt = tt + "(" + jcasti[i].join(",") + ")";
}
tt = tt + "(" + jcasti[pocet-1].join(",") + ")";
ggbApplet.evalCommand(" casti={" + tt + " }");
```

JavaScriptová verze appletu obsahuje navíc ještě kontrolu správnosti složení kostičky. Kód ověří že každá jednotková krychlička původní krychle je obsažena v některém délku.

### 3 Závěr

Všechny tři výše komentované applety jsou k dispozici na úložišti GeoGebra Tube pod tímto odkazem: <https://www.geogebra.org/m/VZbJS2m7>. Můžete si je odtud stáhnout a prozkoumat jejich kód. Pro přímé spuštění jsou jejich okna příliš velká a také scripty jsou při online použití pomalé, spusťte si až stažené .ggb soubory.

### Literatura

- [1] GeoGebra [online]. [cit. 2017-10-01]. *Tutorial:Introduction to GeoGebraScript*,  
[https://wiki.geogebra.org/en/Tutorial:Introduction\\_to\\_GeoGebraScript](https://wiki.geogebra.org/en/Tutorial:Introduction_to_GeoGebraScript)
- [2] GeoGebra [online]. [cit. 2017-10-01]. *Reference:JavaScript*,  
<https://wiki.geogebra.org/en/Reference:JavaScript>

# Dynamická geometrie online

## Dynamic geometry online

Roman Hašek

*Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta  
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice  
hasek@pf.jcu.cz*

**Abstrakt.** The paper relates to the GeoGebra workshop, which was held at the Slovak–Czech conference on geometry and graphics. It deals with such tools of this software that are suitable for geometry teaching. First, attention is paid to the use of web-based services that are available to each user free of charge at geogebra.org web page. These are, for example, environments for the online creation, storage and use of dynamic materials, collection of them into structured books, formation of user groups and sharing materials within them. Then, the rest of the paper deals with particular tools related to the automated theorem proving that are implemented in GeoGebra.

*Keywords:* Dynamic geometry, GeoGebra, online, automated proving

*Klíčová slova:* Dynamická geometrie, GeoGebra, online, automatické dokazování

## 1 Úvod

Článek vychází z příspěvku, předneseného na workshopu programu GeoGebra, pořádaném při příležitosti Slovensko–české konference o geometrii a grafice. Stejně jako v příspěvku budou i v článku nejprve představeny služby webového prostředí [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), vhodné pro využití ve výuce geometrie. Jedná se například o tvorbu a využití dynamických materiálů, strukturovaných online publikací, formování skupin uživatelů a online testování. Potom se zaměříme na vybrané funkce programu, za kterými se skrývají algoritmy počítačové algebry pro automatické odvozování a dokazování geometrických vlastností. Jedná se vesměs o funkce nové, jejichž postupná implementace do programu dosud probíhá, v souladu s vývojem a optimalizací příslušných algoritmů [6]. Své schopnosti odhalovat geometrické vztahy v dynamických obrázcích a dokazovat jejich obecnou platnost, případně je převádět do podoby rovnic množin bodů daných vlastností proto prokazují zatím jenom na omezeném rejstříku úloh. Přesto má již smysl přemýšlet, jak se mohou tyto nové schopnosti programu dynamické geometrie promítнуть do výuky. V článku popisované vlastnosti a funkce se vztahují k verzi 5.0.395.0 programu GeoGebra.

## 2 Online služby spojené s programem GeoGebra

Ze stránky [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) lze program okamžitě spustit v prohlížeči, bez nutnosti jeho instalace. Vytvořené soubory lze ukládat do počítače

nebo do cloudového prostředí stránky a dále používat. Program je tak se všemi svými funkciemi i s materiály v něm vytvořenými bezprostředně dostupný na každém zařízení s připojením na internet a s prohlížečem webových stránek.

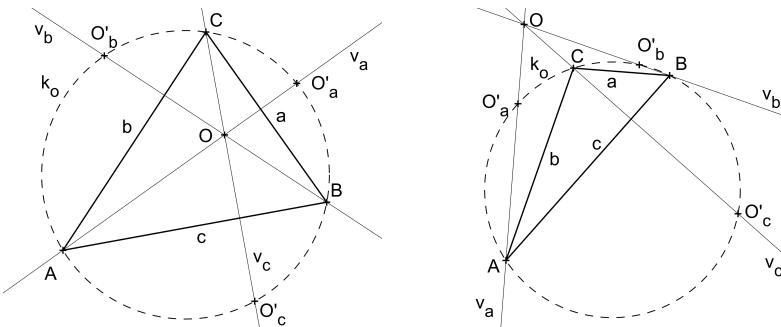
Každý uživatel si může na stránce geogebra.org zdarma vytvořit svůj profil. Tím získá přístup ke službám portálu. Jedná se především o možnost ukládat zde své materiály a sdílet je s ostatními uživateli, bud' prostřednictvím odkazu, nebo veřejně, prostřednictvím vyhledávání. Materiály ostatních uživatelů pak lze volně používat, stahovat, případně dále modifikovat. Učitel tak může mít své materiály vždy dostupné prostřednictvím připojení k internetu a pomocí odkazů je sdílet se svými žáky. Materiály lze sdružovat do strukturovaných kolekcí, nazývaných GeoGebra knihy, [3], [5]. Tak je možné připravovat ucelené soubory materiálů pro výuku rozličných témat.

Kromě správy svých materiálů může uživatel na stránce geogebra.org vytvářet také skupiny uživatelů, jakási uzavřená diskusní fóra, v jejichž rámci lze sdílet materiály. Učitel může tento režim využít pro distribuci materiálů mezi žáky třídy nebo studijní skupiny. Zpětnou vazbu od žáků získá v rámci diskuse, sdílení materiálů nebo prostřednictvím do skupiny zadaných testů. Materiály totiž mohou mít různé formy, nemusí se jednat jenom o dynamické geometrické obrázky. Jednou z forem je právě testová otázka, otevřená i uzavřená. Sdružením více otázek pak vznikne online test. Prostředí skupiny poskytuje přehlednou evidenci pro správu odevzdávání a hodnocení těchto testů. Více o skupině viz [4].

### 3 Nástroje automatického dokazování

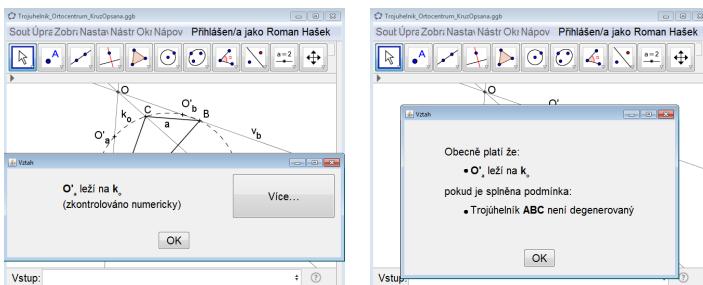
V současnosti jsou v programu GeoGebra k dispozici tyto funkce podporované symbolickými algebraickými výpočty (protože se v GeoGebře překládají i jména příkazů, jsou v závorkách uváděny i anglické varianty jmen funkcí): *Vztah (Relation)*, *Dokazat (Prove)*, *PodrobnostiDukazu (ProveDetails)*, *RovniceMnozinyBodu (LocusEquation)* a *Obalka (Envelope)*. V následujících partiích bude na konkrétních příkladech ukázáno použití těchto funkcí. Cílem přitom bude výhradně představení jejich možností. Otázkami jejich didakticky vhodného či nevhodného využití ve výuce se nebudeme zabývat.

Naším prvním úkolem bude ověřit pomocí nástrojů GeoGebry platnost tohoto tvrzení: *Body souměrně sdružené s průsečíkem výšek trojúhelníka podle jeho stran leží na kružnici mu opsané*. Po nakreslení příslušného obrázku do *Nákresny* můžeme nejprve využít jeho dynamického charakteru a při tažení volných bodů konstrukce myší provést vizuální evidenci platnosti uvedeného tvrzení, viz Obr. 1. Další možností je, zeptat se programu na vztah mezi vybranými objekty, v tomto případě mezi jedním z bodů  $O'_a, O'_b, O'_c$ , např.  $O'_a$ , a kružnicí  $k_o$ . Bud' vybereme příslušný



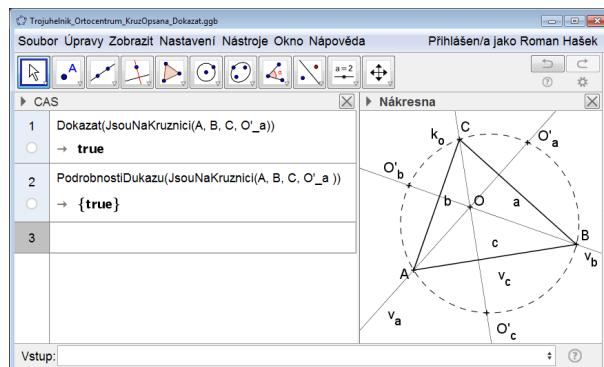
Obrázek 1: Modifikace obrázku tažením volných objektů

nástroj, jmenuje se *Vztah mezi objekty*, a v *Nákresně* postupně ukážeme na oba objekty, nebo zadáme do vstupního řádku nebo v prostředí *CAS* příkaz *Vztah(O'\_a, k\_o)*. Jak vidíme na Obr. 2, reakce programu je „dvoustupňová“. Nejprve nám poskytne odpověď, která vzešla z numerického ověření (pracuje se skutečnými souřadnicemi), viz Obr. 2, vlevo. Poté, pokud o to požádáme stisknutím tlačítka *Více...*, nám sdělí obecně platný výsledek, vycházející ze symbolického řešení dané úlohy (pracuje s algebraickými rovnicemi, na které je, pokud to jde, obrázek převeden), viz Obr. 2, vpravo. Tento výsledek vzešel ze symbolického algebraického důkazu, který byl programem proveden na pozadí funkce *Vztah*, je proto pravdivý. K úloze můžeme přistoupit i jinak. Řekněme, že po prvotní veri-

Obrázek 2: Vztah mezi obrazem  $O'_a$  ortocentra  $O$  a kružnicí opsanou  $k_o$ 

fikaci tažením myší formulujeme sledovanou vlastnost ve formě domněnky, že *body A, B, C a  $O'_a$  leží na společné kružnici*. Potom k jejímu důkazu použijeme funkce *Dokazat* a *PodrobnostiDukazu*. Rozdíl mezi těmito příkazy spočívá v tom, že druhý z nich nám, pokud to jde, sdělí postačující

podmínky pravdivosti ověřovaného tvrzení. Výsledek pro naší domněnku vidíme na Obr. 3. Byla programem dokázána. Výstupy obou příkazů se

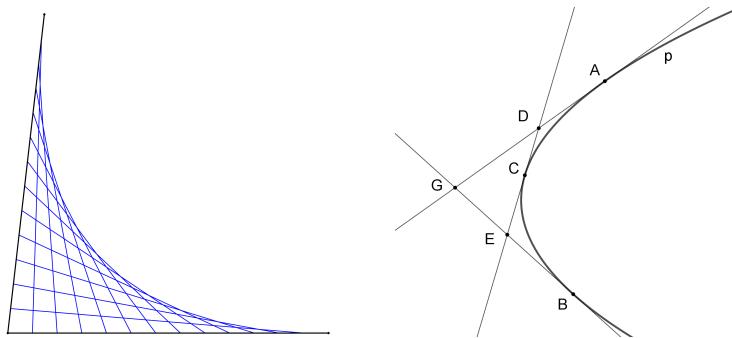


Obrázek 3: Body  $A, B, C$  a  $O'$  leží na společné kružnici

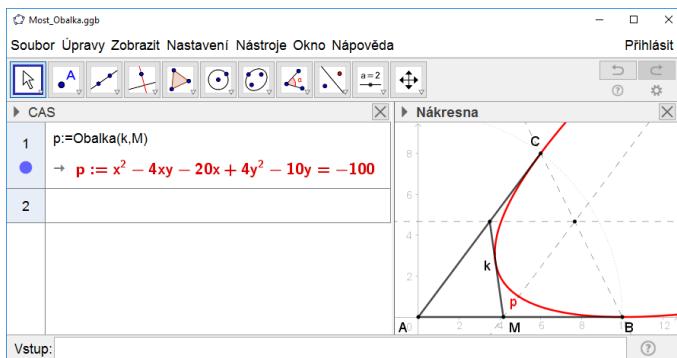
shodují, u druhého z nich nejsou uvedeny žádné podmínky. Tvrzení o tom, že uvažované čtyři body leží na společné kružnici, je tedy vždy pravdivé. Na nás je, jak tento výsledek vyhodnotíme vzhledem k danému tvrzení o trojúhelníku.

Je bezesporu vhodná doba zabývat se otázkou, jak lze představené nástroje automatického dokazování využít ve výuce. Z příkladů je zřejmé, že při uvedeném použití příliš nepomáhají uživateli v tom, aby pronikl do podstaty příslušného jevu, případně aby byl schopen nalézt jeho syntetický důkaz. V dalším příkladu si ukážeme použití funkcí automatického dokazování jako nástroje zkoumání geometrického modelu reálného jevu.

V Jeruzalémě byl před necelými deseti lety otevřen lanový most, viz [7], jehož závěsný systém, ceněný pro svou lehkost a eleganci, se těší pozornosti i pro své geometrické vlastnosti [1]. Jeho zjednodušeným modelem mohou být dvě různoběžné úsečky se společným krajním bodem, představující mostovku a pylon, spojené příčkami-lany, jejichž koncovými body jsou obě tyto úsečky rozděleny vždy ve stejném poměru, ovšem z opačných stran, viz Obr. 4, vlevo. Výrazným estetickým prvkem mostu je právě křivka vykreslená jeho tímto způsobem ukotvenými nosnými lany. Z geometrického hlediska nejde o žádnou záhadu nebo kuriozitu. Je známo, že obálkou takového systému přímek je parabola [2]. Jedná se přitom o důsledek následující vlastnosti paraboly, která byla již kolem r. 200 př. n. l. popsána Apollóniem z Pergy: *Libovolné tři tečny paraboly jsou svými průsečíky a body dotyku s parabolou rozděleny na úsečky ve stejném poměru. Dle Obr. 4, vpravo, tedy platí  $\frac{|AD|}{|DG|} = \frac{|GE|}{|EB|} = \frac{|DC|}{|CE|}$ .*



Obrázek 4: Závěsný systém mostu (vlevo) vs. Apolloniova věta (vpravo)

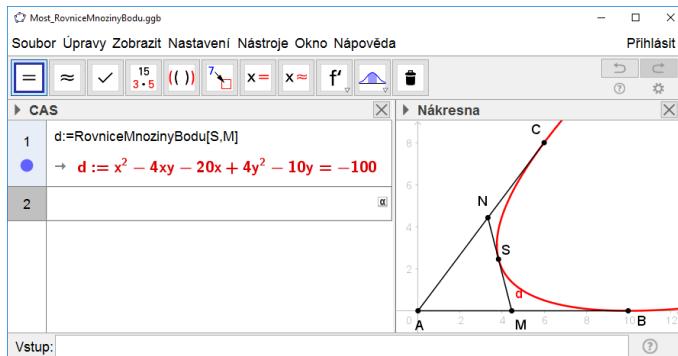


Obrázek 5: Parabola jako obálka přímek

Nyní si ukážeme, jak lze v programu GeoGebra z geometrického modelu získat rovnici uvažované křivky. Využitím jak funkce *Obálka*, tak i *RovniceMnozinyBodu*, viz Obr. 5 a 6. Funkci *Obálka* zadáme příkazem se syntaxí *Obálka(Dráha, Bod)*, kde parametrem *Dráha* (v originále *Path*) se rozumí přímka či křivka z parametrického systému, který vytváří obálku, parametr *Bod* pak reprezentuje volný bod, jehož pohybem získáváme jednotlivé křivky systému. Příkaz je aplikován na dynamický obrázek, v němž by měly být objekty s rolemi parametrů sestrojeny eukleidovsky, aby ho bylo možno převést na soustavu algebraických rovnic. Výsledek výpočtu obálky systému úseček  $k$  (přesněji celých přímek) pro  $A[0,0], B[10,0]$  a  $C[6,8]$  a pohyblivý bod  $M$  vidíme na Obr. 5.

Funkci *RovniceMnozinyBodu* aplikujeme na dynamickou eukleidovskou konstrukci Apolloniovovy věty, viz obsah *Nákresny* na Obr. 6. Použijeme

příkaz se syntaxí *RovniceMnožinyBodu(Bod množiny bodů, Pohyblivý bod)*, kde jako první parametr figuruje bod  $S$ , jako druhý parametr pak bod  $M$ . Pro body  $A[0, 0]$ ,  $B[10, 0]$  a  $C[6, 8]$  dostáváme pochopitelně stejnou rovnici jako v případě obálky.



Obrázek 6: Parabola jako množina bodů  $S$

## 4 Závěr

Spojení témat online služeb programu GeoGebra a nástrojů automatického dokazování v tomto článku mělo za cíl upozornit na skutečnost, že dostupnost poměrně vyspělých nástrojů symbolického dokazování dosáhla v programu takové úrovně, že si zaslouží, aby byly zvažovány jejich možné dopady na výuku geometrie.

## Reference

- [1] J. D. Barrow: *100: sto důležitých věcí o umění a matematice, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte)*. Praha: Dokořán, 2017.
- [2] H. Dörrie: *100 great problems of elementary mathematics: their history and solution*. 1. New York: Dover Publications, 1965.
- [3] GeoGebra Docu Team: *GeoGebra Book Editor* [online], 2015. Dostupné na <https://www.geogebra.org/m/P5Zrj0Su>
- [4] GeoGebra Docu Team: *GeoGebra Groups* [online], 2015. Dostupné na <https://www.geogebra.org/b/rQrbooeq#chapter/0>
- [5] R. Hašek: *Dynamická geometrie online* [online], GeoGebra Book, 2017. Dostupné na <https://www.geogebra.org/m/mDUCf25K>
- [6] Z. Kovács, T. Recio, M. P. Vélez: *GeoGebra Automated Reasoning Tools, A Tutorial* [online], 2017 Dostupné na <http://mintlinz.pbworks.com/f/Kovacs-20160113.pdf>
- [7] Wikipedia The Free Encyclopedia: *Chords Bridge* [online], 2017 Dostupné na [https://en.wikipedia.org/wiki/Chords\\_Bridge](https://en.wikipedia.org/wiki/Chords_Bridge)

# Ovals in Technical Practice

Michaela Holešová

*Dept. of Structural Mechanics and Applied Mathematics, Faculty of Civil Engineering  
University of Žilina, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovak Republic  
email: michaela.holesova@fstav.uniza.sk*

**Abstract.** From the beginnings of architecture, we encounter elements and shapes that have a base in a circle or an ellipse. Very often, in technical practice, we meet the concept of oval. This term denotes a curve composed of circular arcs, but many times also the ellipse itself. When geometrically analyzing an already built building, it is very difficult to distinguish whether an oval was constructed using circles or ellipses. The quality of approximate constructions may be the reason. In the contribution, we will focus on some interesting constructions used by architects, theorists such as Sebastiano Serlio and Guarino Guarini.

*Key words:* ellipse, oval, geometric analysis, construction

## 1 Introduction

In technical practice, we meet with the notion oval. The word oval derived from the Latin word “*ovus*” for egg. Here it is used in terms of the shape of curves that resemble an egg or resemble an ellipse. It is, in fact, a curve for which strict mathematical definition is missing but has the following common features:

- is a closed curve in a plane which "loosely" resembles the outline of an egg
- they are differentiable (smooth-looking), simple (not self-intersecting), convex, closed, plane curves;
- there is at least one axis of symmetry.

In a special case, we can see the oval as a curve, which is composed of circular arcs. In the past, this approach has been used extensively for construction and approximating the ellipse.

## 2 Ovals in geometry and technical practice

In the rest of the period, we are engaged in the study and geometric analysis of buildings with elements of ovals. These are buildings that have ground plan as an oval-ellipse or have been used in the construction of theirs internal building elements. In Slovakia we can for example show buildings as Cathedral of St John of Matha in Bratislava and elliptic St. Ladislav Chapel in the former Ostrihom archbishop's palace in Bratislava (Fig.1 and Fig.2).

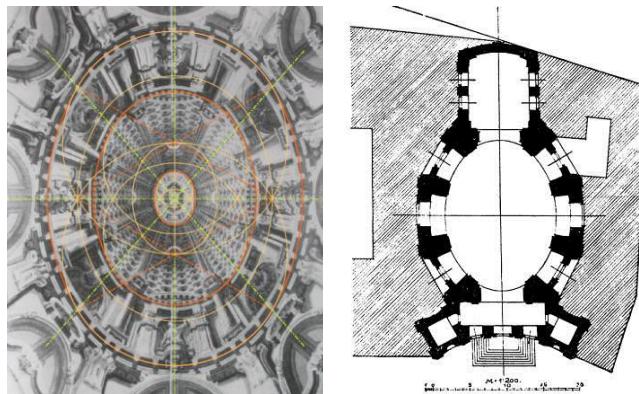


Fig. 1: Cathedral of St John of Matha in Bratislava



Fig. 2: Ostrihom archbishop's palace in Bratislava (Primaciálny palác).

The most well-known ovals that are mathematically described can be included Cassini ovals or Cartesian ovals (Fig. 3).

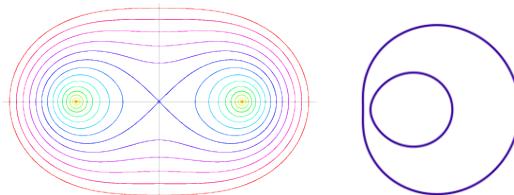


Fig. 3: Cassini ovals (left), Cartesian oval (right)

When looking at the oval as a curve, which is composed of circular arcs, we can use for the construction two or more different circles. Serlio [1] and Guarini [2] used two different circles and will be dealt with in more detail later on. When we use three different circles as Fig. 4, we can denote  $|SH|= h$ ,  $|SK|=$

$k$ , the radii of two known circles are  $R$  and  $r$ , with  $r < R$  and  $R-r < h$ ,  
 $k = \frac{h^2 - (R-r)^2}{2(R-r)}$  and radius of the joining circle is  $\rho = \frac{h^2 + R^2 - r^2}{2(R-r)}$ .

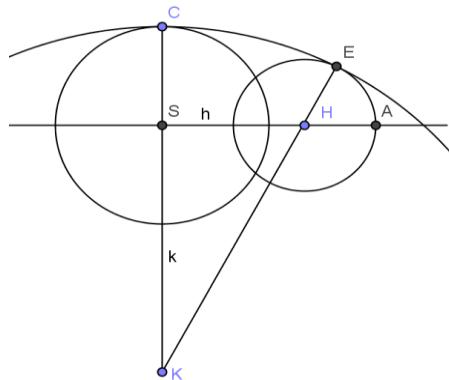


Fig. 4: Construction of oval using three circles

### 3 Serlio's constructions

Architects in practice not try to construct an ellipse exactly, but approximate it by circular arches. Due to the symmetry of an ellipse it made sense to use in most cases only two different circles. The constructs are based on the fact that they are searching for the centers and radius of the two circles that are connected smoothly. The circles have a common tangent in its point of connection, which means that the centers  $H$ ,  $K$  (Fig. 5) of these circles must belong on one line. Let  $h = |SH|$  and  $k = |SK|$  where  $S$  is the center of the oval. Found circles have radii of  $a - h$ ,  $a - h + \sqrt{h^2 + k^2}$ .

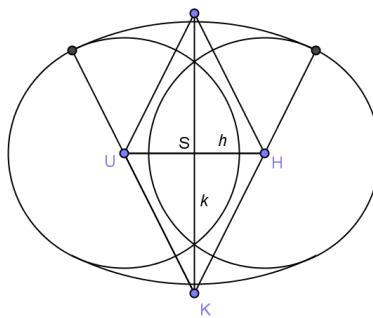
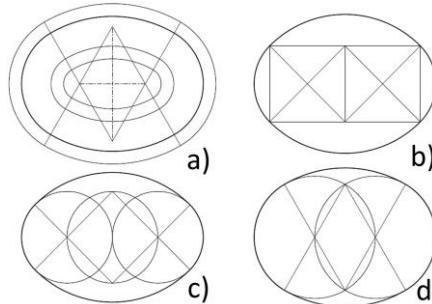


Fig. 5: Construction of two-center oval, based upon Serlio's treatise.

When we get Serlio's construction,  $h$  a  $k$  have description by type of construction.

Fig. 6: Sebastiano Serlio: *Il primo libro d'architettura*

The construction of the Fig. 7 a) is in the case that UHK is the equilateral triangle and  $h = \frac{a-b}{\sqrt{3}-1}$ ,  $k = \sqrt{3}h$ . The ratio of the radius of the circles, and the ratio  $a / b$  are not constant. These ratios are constant in other Serlio's construction, see [3]. In case Fig. 7b) is  $h=k = \frac{a}{\sqrt{2}+1}$ ,  $a/b = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}$  and the ratio of the radii of the arcs is  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . In case Fig. 7c) is  $h = k = a/2$ ,  $a/b = \sqrt{2}$  and the ratio of the radii of the arcs is  $\sqrt{2} - 1$ . In case Fig. 7d) is  $h=a/3$ ,  $a/b = \frac{3}{4-\sqrt{3}}$ ,  $k = \sqrt{3}h$  and the ratio of the radii of the arcs is  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Fig. 7: *Oval constructions by Serlio*

## 4 Guarino Guarini's oval

Guarini describing construction to an oval generally, but he constructed two circles with same radius, see in Fig. 8. We can take two circles with centers

A and F, which have any distance, non-intersecting or intersect (each other), with equal or unequal radii.

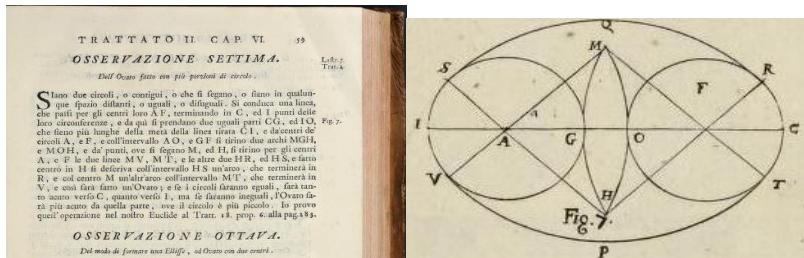


Fig. 8: Guarini, Guarino, 1624-1683; Architettura civile: opera postuma

We take non-intersecting circles (Fig. 9) with different radii. Line AF intersects this circles in points I and C. We choose any length greater than half the line segment CI and we construct points G and H, such that  $|IC| = |CG|$  and is equal to this length. We construct circles with centers A and F and radii  $AO$ ,  $GF$ . These circles have common the points M and H. It is clear that the line MH is perpendicular to the line IC. We get lines MF, HF, MA, HA. The lines intersect the circles at points S, R. (Figure 9). The construction is good when the points S and R lie on a circle with center H and the radius  $|SH|=|HR|$ .

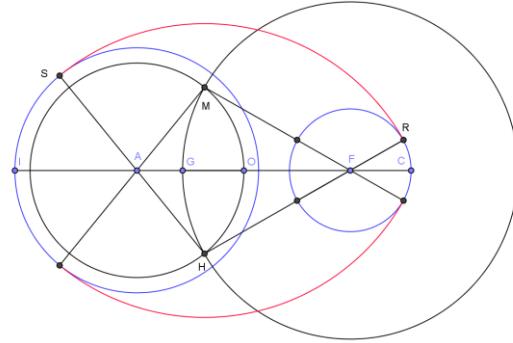


Fig. 9: Oval constructed using Guarini's method

We can show that appropriate choice of the characteristics of Guarini's oval we can get Serlio's oval. For example we get Serlio's oval in the construction of Fig. 7 d) so that we choose the radii of the circles as  $2a/3$ , the distance between centers of the circles is  $2a/3$  and the point G is identical to the point A.

Guarini construction of Fig. 8 can be described also by means of algebra and we express certain conditions.

Let  $r=|AI|=|CF|$  and  $h=|AF|/2$ . Thus, the length of the major axis is  $a=h+r$ . Let Z is the center of the oval – ellipse. We know that  $|GO|=2(h-r)$  and

$|GF| = |FH| = |GO| + r$ , It follows that  $|GF|=|FH|=2h-r$  and the radius of the second circle which describes oval is  $|HR|=|HF|+r=2h=|AF|$ . Let  $k=|ZH|$ , can be algebraically expressed as  $k = \sqrt{3h^2 - 4hr + r^2}$ . The ratio of the radii of the arcs is  $2h/r$  and ratio

$$\frac{a}{b} = \frac{h+r}{2h - \sqrt{3h^2 - 4hr + r^2}}$$

## 5 Conclusion

We think that the constructions mentioned in this article are not used in practice today and we meet more with an ellipse. However, it is a pity that these very nice constructions have almost disappeared from practice. We think that these should be preserved for the future generations as well as for the teaching of descriptive geometry, because we can apply them also now as they were applicable five hundred years ago.

## References

- [1] S. Serlio: *Il primo [-secondo] libro d'architettura*. Venice, 1545.  
(italian) Online: [https://archive.org/details/gri\\_33125008448702](https://archive.org/details/gri_33125008448702)
- [2] G. Guarini, F. Gujenotti, G. Abbiati: *Architettura civile: opera postuma*. Published 1737.  
[https://archive.org/details/gri\\_33125008641249](https://archive.org/details/gri_33125008641249)
- [3] P. L. Rosin: *On Serlio's constructions of ovals*. The Mathematical Intelligencer, 23(1), 2001, pp. 58-69. DOI: 10.1007/BF03024523
- [4] Z. Grúňová, M. Holešová: *Ellipse and oval in baroque sacral architecture in Slovakia*. Civil and environmental engineering. Vol. 13, No. 1, 2017, pp. 30-41.
- [5] Z. Grúňová, M. Holešová: *Geometrical analysis of Palesch family chapel in Kľačno, former Gajdel in Western Slovakia*. RSP 2017 – XXVI R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering, Vol. 117, No. 00060, 2017, online: [https://www.matec-konferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/31/matecconf\\_rsp2017\\_00\\_060.pdf](https://www.matec-konferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/31/matecconf_rsp2017_00_060.pdf)
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/Oval.html>

# Local Intersection Multiplicity

Pavel Chalmovianský

*Department of algebra, geometry and math education  
Mlynská dolina, 84248 Bratislava, Slovakia  
pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk*

**Abstract.** The intersection of algebraic varieties is a fundamental operation. It is a well known fact that the intersection of  $n$  given hypersurfaces in  $n$ -dimensional projective space over an algebraically closed field which results in a zero-dimensional variety has a degree which is a product of degrees of the intersecting varieties. The product of multiplicities of each point in the intersection with respect to the given hypersurfaces provides a lower bound of local multiplicity. The question what is the geometric interpretation of the difference of the lower bound and the true local multiplicity is partially solved in several papers. We sketch the idea which might lead to the solution in case of curves.

*Keywords:* Bézout theorem, local intersection, blowup

## 1 Introduction

Intersection is a basic operation with algebraic varieties and it is widely studied. There are several very good sources of intersection theory such as [4] or recently [2]. The theory is deeply explored, still there are many questions to answer. The intersection can be studied from both global and local point of view. The local study, which is the case here, consist of computing intersection based on the local characteristics such a multiplicity of the point. The global theorems, such as Bézout theorem, are considering the whole varieties and their properties with respect to all points, such as degree in this case.

We consider the idea of computing local intersection multiplicity in geometric terms. We use blowup technique as a main tool for obtaining the structure of the intersection and classification of special cases of intersection.

## 2 Basic facts

In algebraic geometry, the varieties corresponds to the ideals. There are several good introductory books such as [5]. Let  $k$  be an algebraically closed field. Let  $V, W \subset A^n(k)$  be two algebraic varieties with their corresponding ideals  $I_V, I_W \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , which comprise all polynomials for which the varieties  $V$  and  $W$  are subsets of their roots. The intersection of the varieties corresponds to the sum of the ideals  $I_V + I_W$ . Intuitively, we require for the points of  $V$  additional conditions to be satisfied – they should be roots of more equations (those for the points of  $W$ ).

Algebraically, the intersection can be described using sequence of strictly embedded ideals  $I_V = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n = I_{V \cap W}$ . The longer the

sequence, the better the structural description of the new conditions required for the points of  $V$  one might obtain.

Such an intersection can be relatively easy to describe in transversal cases and quite complicated in non-transversal cases. It can be seen already on a one-dimensional example of intersection of graph of a polynomial in plane with axis. A transversal intersection corresponds to a simple root of the polynomial, while the non-transversal intersection corresponds to a multiple root (e.g.  $Z(y-x^2) \cap Z(y)$  leads to a double origin). Similarly, not counting the multiplicity of the point (origin in this case) can lead to a wrong notion of intersection, e.g.  $Z(x^2) \cap Z(y^2)$  leads to a point which is locally different from the point  $Z(x) \cap Z(y)$ . As sets, these two cases are indistinguishable. Hence, an additional algebraic structure is required.

The proper setting for the computation is scheme-theoretic setting (gluing of local rings). The notion of multiplicity of a variety (more precisely a scheme) is natural there.

We start with the low-dimensional case, intersection of curves. There are many results known already several centuries. Among them, Bézout theorem and its applications form a (historical) starting point of a more complex intersection theory. The intersection has a certain stability, which is known also as Moving lemma or conservation numbers law in certain areas. It covers “small” change of a generic situation which does not change either the structure of intersection, or in case of structure change, such a property can be used to evaluate the situation in non-generic cases. A more complex notion of flat family is required. A very important area of application is computation of singularities of a curve  $C = Z(f)$  given by  $Z(f, \nabla f)$ , where  $f \in k[x, y]$ . Finally, there are many problems leading to the intersection theory such as applications in configuration counting (e.g. “How many lines and which do intersect three lines in  $P^3(\mathbb{C})$  in general position?”).

### 3 Bézout theorem

Planar version of the famous theorem follows

**Theorem 3.1** *Let  $F, G \in k[X, Y, Z]$  be homogeneous polynomials and  $(F, G) = 1$ ,  $k$  an algebraically closed field with characteristic zero. Then  $|Z(F, G)| = \deg F \deg G$  counted with multiplicity.*

Geometrically, two algebraic curves  $C = Z(F)$  and  $D = Z(G)$  in the projective plane over an algebraically closed field without a common component have a constant number of points in common counted with their multiplicity. The constant is the product of degrees of the given curves.

There are several versions of the theorem. The most common  $n$ -dimensional version covers the intersection of  $n$  hypersurfaces  $Z(F_1) \cap \cdots \cap Z(F_n)$  in  $P^n(k)$  with a finite number of points in common. Then, there are  $\prod_{i=1}^n \deg F_i$  points counted with multiplicity.

The most known proofs are using the sum of local intersections multiplicities. Hence, multiplicity is the key notion here. Moreover, multiplicity of a point on an algebraic variety is a special case of intersection multiplicity.

The general idea behind the multiplicity of a point on a hypersurface  $Z(f)$  is that all the derivatives of  $f$  of the order less than the multiplicity are zero. Hence, multiplicity of a point is the least order of non-zero derivative of  $f$  at the point. There are several ways of computation of the multiplicity number including its further structure based on (or characterizing) the local geometry of the point. Most of the methods are technical and complicated in detail especially in higher dimensional cases. Therefore, it is beyond the scope of this paper to say more than the following list of such techniques.

- First get a Weierstrass parameterization of the curve starting at a point, then count the degree of the first non-zero term.
- Blowup the curve at a point and count the ordinary double points (nodes) of the final curve. General approach for arbitrary dimension varieties is available.
- Compute the length of the maximum ideal of the local ring corresponding to the point.
- Find such a number  $\mu$  that  $f \in m_P^\mu \setminus m_P^{\mu+1}$ .
- Use Hilbert-Samuel multiplicity  $e_0$  defined via Hilbert function.
- Take a variety  $V \subseteq P^N(k)$  and a point  $P \in V$ . For a linear subspace  $L$  such that  $P \in L$  and  $L \cap V$  is finite, sum the intersection multiplicity  $s(P, L)$  of all the points except  $P$ . Take  $i_P(V) = \min_L \{\deg(V) - s(P, L)\}$ .

Clearly, the last approach cannot be used to define intersection multiplicity. The number of approaches shows the importance of the notion which appeared in several areas. The detail can be found e.g. in [8].

## 4 Local intersection

Multiplicity of a point roughly measures the generality of the local properties of the point on a variety. The configurations with less multiplicities are more general.

Local intersection multiplicity can be composed of several summands. Let  $C = Z(F), D = Z(G)$  be curves and  $P \in C \cap D$ , then  $i_P(C \cap D) \leq i_P(C)i_P(D)$  which can be seen more-less directly via Weierstrass parameterization approach. In an example, the point  $L_1^n \cap L_2^m$  is expected to

have its multiplicity at least  $mn$  provided  $L_1, L_2$  are linearly independent lines in plane.

We show few examples of local intersections. Considering  $P = (0, 0)$  as the point of interest in an affine plane, we get

- $f = y - x^2, g = y - \lambda x, i_P(C) = 1, i_P(D) = 1, \text{ then } i_P(C \cap D) = 1 \text{ for } \lambda \neq 0$
- $f = y - x^2, g = y, i_P(C) = 1, i_P(D) = 1, \text{ then } i_P(C \cap D) = 2$
- $g = x^2, g = y^3, i_p(C) = 2, i_P(D) = 3, \text{ then } i_P(C \cap D) = 6$
- $f = y - x^2, g = x^2 + (y - \lambda)^2 - \lambda^2, i_p(C) = 1, i_P(D) = 1, \text{ then } i_P(C \cap D) = 2 \text{ for } \lambda \neq \frac{1}{2}$
- $f = y - x^2, g = x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}, i_p(C) = 1, i_P(D) = 1, \text{ then } i_P(C \cap D) = 4$

The specific value in the last two cases gives osculating circle of the parabola  $C$ . Higher order osculation gives higher correcting term. This was partially explored in [1] and the references therein.

There is way of axiomatic description of local intersection in the affine plane  $A^2$ . The intersection multiplicity is a number  $i_P(C, D) = \dim_k \mathcal{O}_{P, C \cap D} = \dim_k \mathcal{O}_{P, A^2}/(f, g)$  satisfying the following axioms:

1.  $i_P(C, D) = 0$  if and only if  $P \notin C \cap D$ ,  $i_P(C, D) = \infty$  if  $C$  and  $D$  have a common component through  $P$ , otherwise  $i_P(C, D) \in \mathbb{N}$ , the set of non-negative integers,
2.  $i_P(D, C) = i_P(C, D)$ ,
3.  $i_P(C_1 + C_2, D) = i_P(C_1, D) + i_P(C_2, D)$ , where  $C_1 + C_2$  is the curve defined by  $f_1 f_2$ , with  $f_i$  defining  $C_i$ ,
4.  $i_P(C', D) = i_P(C, D)$ , if  $C'$  is defined by  $f + gh$ , some  $h \in k[x, y]$ ,
5.  $i_P(C, D) = 1$ , if  $f = x - a$ ,  $g = y - b$ , or more generally, if the Jacobian  $\partial(f, g)/\partial(x, y)$  is not zero at  $P$ ,
6.  $i_P(D, E) \geq \min(i_P(C, D), i_P(C, E))$ , if  $P$  is a simple point on  $C$ , and  $C$  has no common component with  $D$  or  $E$  through  $P$ ,
7.  $i_P(C, D) \geq i_P(C) \cdot i_P(D)$ , the equality holds if and only  $C$  and  $D$  intersect transversally at  $P$  (i.e. if the curves have no common tangents at  $P$ ),

A similar properties can be given for a non-singular surface  $S$  taken instead of plane  $A^2$  and the curves  $C, D$  are considered on the surface.

The axioms provide a way of more-less intuitive computation of local intersection multiplicity, since the axioms have clear geometric meaning.

Some cases are easy to describe when computing intersection such as transversal intersection, moving lemma cases, reduction of multiple intersection to irreducible cases.

However, there are many questions hidden inside the intersection calculus. We are concerned with the following one connected to the last intersection axiom. What additional information does one need in order to compute the intersection multiplicity based on the multiplicity of the point on each curve? As we see in the next, the answers are not so direct.

## 5 Techniques of computation

In order to achieve the result in terms of invariants of the Čech cohomology, we use a technique of Koszul complex.

Let  $a = (a_1, \dots, a_t)$  denote a system of elements of the ring  $A$ . The Koszul complex  $K(a; A)$  is defined as follows: Let  $F$  denote a free  $A$ -module with basis  $e_1, \dots, e_t$  and  $K_i(a; A) = \Lambda^i(F)$  for  $i = 1, \dots, t$ . A basis of  $K_i(a; A)$  is given by wedge products  $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}$  for  $1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq t$ . The boundary homomorphism  $K_i(a; A) \rightarrow K_{i+1}(a; A)$  is defined by  $d_i : e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i} \mapsto \sum_{k=1}^i (-1)^{k+1} a_{i_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e_{i_k}} \wedge \dots \wedge e_{j_i}$  on the free generators. For an  $A$ -complex  $X$ , we define  $K(a; X) := K(a; A) \otimes_A X$ . We write  $H_i(a; X)$ , where  $i \in \mathbb{Z}$ , for the  $i$ -th homology of  $K(a; X)$ .

$$0 \rightarrow A \rightarrow A^t \rightarrow A^{\binom{t}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow A \rightarrow 0$$

The idea behind Koszul complex is the detection the level of algebraic independence (syzygies) of the elements in  $a$  characterized by the Hilbert-Samuel intersection multiplicity.

Using the above techniques applied on regular sequence  $(f, g)$  in  $A = k[x, y]_{(x, y)}$ ,  $m = (x, y)A$  and denoting  $t$  the number of common tangents, one gets

$$e_0(f, g; A) = cd + t + \ell \geq cd + t,$$

where  $\ell = \ell_A((fm^{nc} + gm^{nd} + m^{n+1})/(fm^{nc} + gm^{nd}))$  for  $n \gg 0$ .

Similar result can be obtained for  $A = k[x, y, z]_{(x, y, z)}$  and  $e_0(f, g, h; A)$ .

It is technically same for higher dimensions, however the notation is very heavy.

The approach of Koszul complexes has been used by Serre, Fulton, Roberts, Schenzel and they obtained other algebraic results in certain setup.

- Fulton's cycle theory forms a Chow ring with a multiplication defined via intersection as  $Y \cdot Z = \sum_W i_W(Y, Z)[W]$  for a proper intersecting varieties  $Y, Z$  and all components  $W$  therein. Moving approach required for improper intersections. Rational equivalence is used. See [4].
- Serre's formula for the intersection multiplicity of subschemes  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  in a scheme  $X$  at a point  $x$  uses the 1 derived functors and gives

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{length}_{\mathcal{O}_{X,x}} \text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x, \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x)$$

It works basically as Euler characteristic of a complex corresponding to the intersection. See [6].

- W. Vogel's and J. Stückrad's approach is able to describe even improper intersections. See [3], [7].

The approaches lack geometric interpretation at least in certain cases. We propose a way of describing it in planar case using the following three steps.

- The crucial plane case is the case of two curves with a common tangent (recall parabola and a circle from the set of intersection examples).
- The cases with more tangents at an intersection point can be reduced to this case using blowup transform applied simultaneously on both curves.
- The combination of the local multiplicities has to be done combining the multiplicities.

## 6 Conclusion

We have surveyed few notion of intersection multiplicity. The used techniques are in detail described in several outstanding books or publications and we adopt them for the interpretation of local intersection following the axiom of the intersection.

We plan to use blowup technique to interpret geometrically the local intersection of curves in terms of mutual osculation of curves along common tangents.

## Acknowledgement

The author was supported by Grant VEGA 1/0101/17.

## References

- [1] Eduard Boda and Peter Schenzel. Local bezout estimates and multiplicities of parameter and primary ideals. arXiv:1702.03704, February 2017.
- [2] David Eisenbud and Joe Harris. *3264 and All That Intersections: A Second Course To Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 2016.
- [3] H. Flenner, L. O'Carroll, and W. Vogel. *Joins and intersections*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [4] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

- [5] Ernst Kunz. *Introduction to plane algebraic curves.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005. Translated from the 1991 German edition by Richard G. Belshoff.
- [6] Jean-Pierre Serre. *Local algebra.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author.
- [7] Wolfgang Vogel. *Lectures on results on Bezout's theorem*, volume 74 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1984. Notes by D. P. Patil.
- [8] C. T. C. Wall. *Singular points of plane curves*, volume 63 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.



# Visualisation in problem solving

Mária Kmeťová

*Dept. of Mathematics, Fac. of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University,  
Tr. A Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia  
email: mkmelova@ukf.sk*

**Abstract.** The paper deals with different possibilities of visualisation of mathematical relationships in problem solving. A new viewpoint can give us new ideas and conception leading to simplified solution of a mathematical problem.

*Key words:* visualisation, visual proof, problem solving

## 1 Introduction

The idiom ‘A picture is worth a thousand words’ refers to the notion that a complex idea can be conveyed with just a single still image or that an image of a subject conveys its meaning or essence more effectively than a description does.



Fig. 1: The part of 1913 newspaper advertisement, Ohio, USA [7]

Likely the same idea lead Edward R. Tufte to write his books [1, 2, 3] and thus to coin information visualisation in 1983. He illustrated the importance of visual grasp of information on convincing example from 1854, when the cholera disease raged in London. An exemplary use of map to chart patterns of disease was the famous dot map of Dr. John Snow, who plotted the location of deaths from cholera in central London for September 1854 [1].



Fig. 2: Snow's map of location of deaths from cholera in central London

Examining the map in Figure 2, Snow observed that cholera had spread among those who lived near and drank from the Broad Street water pump. The famous dot map showed itself as lifesaving, because the contaminated pump was removed, ending the neighbourhood epidemic which had taken more than 500 lives. The link between the pump and the disease might have been revealed by computation and analysis, but here the graphical view testifies about the data far more efficiently than calculation.

## 2 Visualisation in problem solving process

In mathematics, we often associate visualisation with drawing pictures as an aid to getting started on problems. But it has a much wider role in problem solving. Visualisation helps the development of ideas and supports communication of results and understanding. The process of creating a visual picture of relationships between key elements of the problem has two steps [6]. In the first step the problem solver creates an internal model (mental imagery) and then in the second step he or she creates the real visual model (visualisation) of it.

The problem solver can use visual models basically for two different purposes.

- A) reify the problem,
- B) generalise the problem.

For the case A) we give an example of creating a visual model during problem solving by 5th grade pupil. He/she solved the following problem:

*Mara said: "I have so many brothers as sisters."*

*Her brother Jano said: "I have three-times as many sisters as brothers."* How many are the siblings?

He/she prepared the visual model pictured in Figure 3 and gave a correct answer. Apparently he needed to grasp the problem in more concrete form: to name the siblings.



Fig. 3

His/her visual representation shifts the problem into entirely concrete real life case.

For case B) generalisation, we give the following example to solve a practical problem:

*We have got 6 litres of liquid in two 3-litre containers, as well as a 5-litre empty container. Spread the liquid into the 3 given containers, 2 litres in each of them.*

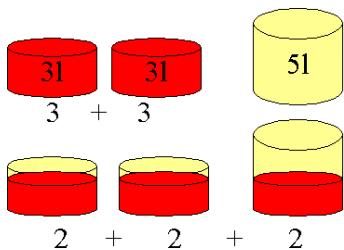


Fig. 4

We can visualise the problem as in Figure 4, but it does not help to solve it. We need to find a new approach, a new insight into the problem. The general aim is to divide 6 litres of liquid into 3 parts,  $i, j, k$ , such that  $i+j+k = 6$ , when  $0 \leq i \leq 3$ ,  $0 \leq j \leq 3$ ,  $0 \leq k \leq 5$ , what follows from the capacity of the containers.

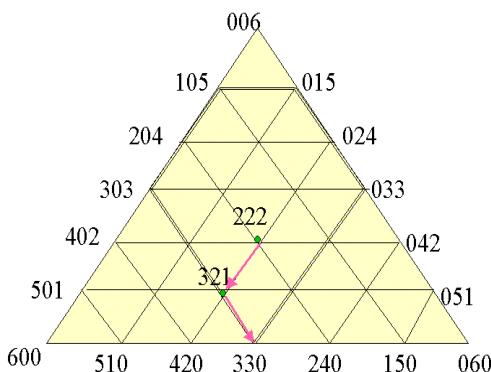


Fig. 5: Solution of the inverse problem

The practical realisation of the solution is possible only by steps reaching the border of marked region (it means to empty one of the containers). Now we can see that the original problem has no solution, only the inverse problem, when we have got 6 litres of liquid in 3 containers (with capacity 3 l, 3 l, 5 l), 2 litres in each of them and we have to spread the liquid into two 3-litre containers and leave the 5-litre container empty.

The task of perpendicular clock hands is found in multiple collections of math exercises, and has also been featured as a Mathematical Olympiad assignment. One possible wording is [4]:

*The cuckoo clock has the hands just perpendicular to each other now. How many minutes later will they be perpendicular to each other again?*

In the solution process we need to overcome two obstacles. The first obstacle is taking into account the constant movement of the hands. If the little hand was fixed, the big hand should go for 30 minutes. But during those 30 minutes, the

small hand crosses halfway between two numbers. Then the big hand has to move accurately. But at that time the little hand moves further, and so on. We get an endless sum. We will resolve this issue by a different insight into the problem. Forgetting about the movement, we'll just look at the initial and final state of the hands and compare them. Here we get to the second obstacle. How to describe these states with angles between hands? (Usual problem of solvers.) The process of converting minutes to angles and back causes opacity of the solution. (The same mistake was made in [4].) Then forgetting about the angles, let's assume that the hands will be perpendicular again in  $t$  minutes. We know it takes 30 minutes, plus the extra minutes connected to the movement of the big hand for time  $t$ .

Because the big hand moves 12 times slower than the small one, it takes  $t/12$

minutes. So we have equation  $t = 30 + \frac{t}{12}$ , and hence  $t = 32\frac{8}{11}$  minutes. Here, the thought behind the picture is much more important than the visual picture itself.

In these cases the mental picture and the visualisation of problem solving show us a way of generalisation and possibilities of creating similar tasks.

Fig. 6

### 3 Visual proof

Visual proof shows the core of geometric relationship immediately in picture. The most famous visual proof is the proof of Pythagoras theorem. But not only typical geometric problems are worthy to visualise. The next example shows the visual proof of incommensurability of the side and diagonal of a regular pentagon. It is not a rigorous proof, but it makes the result almost apparent at first sight [5]. We ask if  $d$  (diameter) and  $s$  (side) are commensurable (Fig. 7). If yes, they are both multiples of a common interval  $e$ , and the interval  $d-s$  on the second picture is also a multiple of the interval  $e$ .

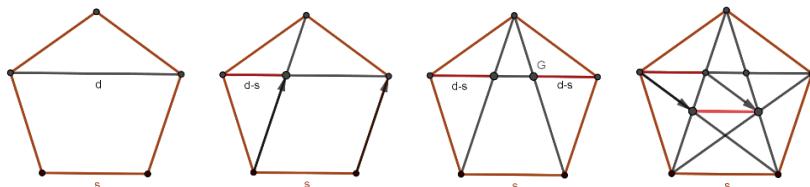


Fig. 7

In the inside green pentagram again, we have to find a common part  $e$  of the side and diameter (Fig. 8). While it is a never ended process, we can see that there does not exist such a common part  $e$ , thus  $d$  and  $s$  are incommensurable.

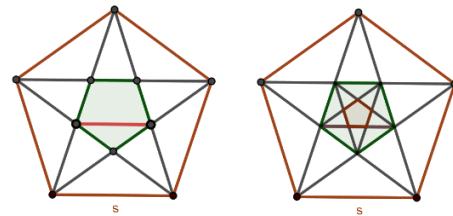
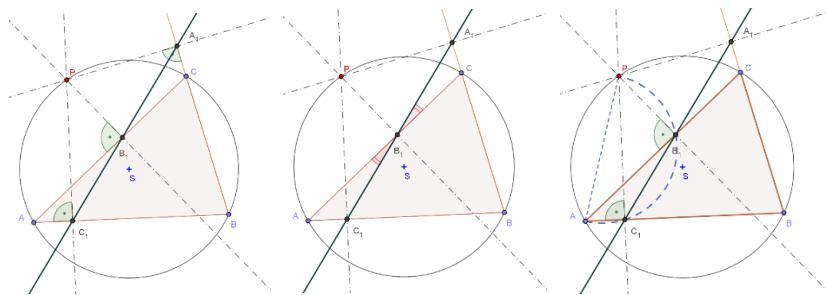


Fig. 8

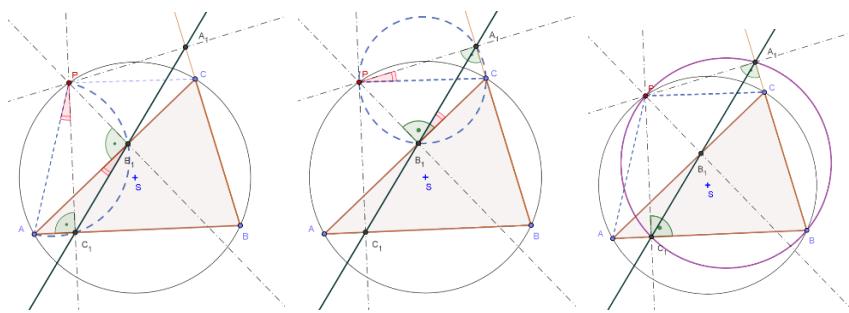
Applying the most important Tufte's principles [1], [5] we can create different easily understandable visual proofs. Now we summarise the most important visual explanation principles in a nutshell:

1. create visual hierarchy,
2. integrate text and graphics (to avoid unnecessary eye movements which are against easy comprehension),
3. make the pictures themselves carry a story.

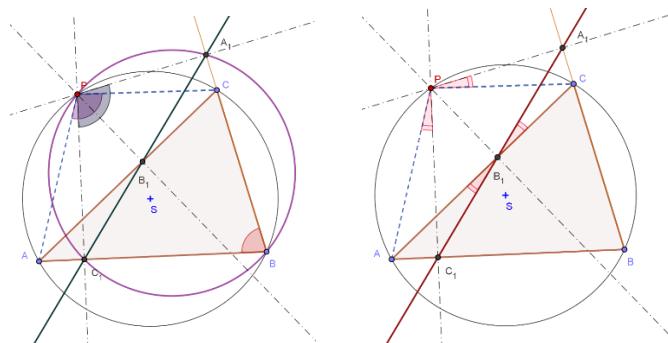
Example: Proof of the theorem on Wallace-Simson line: *Given a triangle ABC and a point P on its circumcircle, the three closest points to P on lines AB, AC, and BC ( $C_1$ ,  $B_1$  and  $A_1$ ) are collinear.*



Are  $C_1$ ,  $B_1$  and  $A_1$  collinear? We prove that the 2 marked angles are equal. Thales circle.



Inscribed angles are equal. The same is valid in second circle. Circumcircle of  $C_1BA_1P$ .



The sum of opposite inscribed angles is  $180^\circ$ , thus the inscribed angles at P are equal.

In Figure 9 we can follow the proof of equality of the angles  $AB_1C_1$  and  $CB_1A_1$  which means the collinearity of points  $A_1$ ,  $B_1$  and  $C_1$ .

## 4 Conclusion

Visualisation in problem solving is a complex cognitive process which is worth supporting in every step of thinking: creating a mental model, a view (mental imagery) and final visualisation. The more a teacher supports it, the more the students give creative independent problem solving. Geometry teaching is much more connected with visualisation than other mathematical disciplines. We showed some examples for effective use of visual explanation and visual proof in geometry teaching also.

## Acknowledgements

The author has been supported by grant KEGA 016UKF-4/2016.

## References

- [1] E. R. Tufte: *The Visual Display of Quantitative Information*, Graphics Press, 2001 (first edition 1983), Cheshire, Connecticut.
- [2] E. R. Tufte: *Envisioning Information*, Graphics Press 1990, Cheshire, Connecticut.
- [3] E. R. Tufte: *Visual Explanations*, Graphics Press 1997, Cheshire, Connecticut.
- [4] M. Hejný, A. Michalcová: *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*, Metodické centrum v Bratislave, 2001.
- [5] B. Casselman: *A review of Visual Explanation by E. Tufte*, notices of the AMS 46, 1999, pp. 43-46.
- [6] A. W. Crapo et al: *Visualization and The Process of Modeling: A Cognitive-theoretic View*, Proc. ACM SIGKDD '00, 2000, pp. 218-226.
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/A\\_picture\\_is\\_worth\\_a\\_thousand\\_words](https://en.wikipedia.org/wiki/A_picture_is_worth_a_thousand_words)

# Plánování pohybu robota pomocí nástrojů nUrBS

## The robot motion planning using nUrBS

Alexej Kolcun, Petr Raunigr

*Katedra informatiky a počítačů, PřF, Ostravská univerzita  
Ul. 30 dubna 22, 702 00 Ostrava, Česká republika  
email: alexej.kolcun@osu.cz, petr.raunigr@osu.cz*

**Abstract.** In the paper, we demonstrate various robot movement scenarios along a square path to show that the desired smoothness lower than  $C_2$  leads to a trajectory that differs significantly from that required. For this purpose a SW control for the SPHERO robot was created. The developed system can be used as a learning aid.

**Keywords:** NURBS, parametric smoothness, SPHERO, Sphero Edu, coons curve, bézier curve, b-spline curve

**Klíčová slova:** NURBS, parametrická hladkost, SPHERO, Sphero Edu, Coonsova křivka, Bézierova křivka, b-spline křivka

### 1 Úvod – motivace

Pohyb tělesa je přímo spojený s působící silou. Tento fakt je kvantitativně popsáný druhým Newtonovým zákonem. Jeho vyjádření s využitím časové závislosti dává vztah

$$F(t) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \quad (1)$$

Pro plynulý pohyb (tj. bez náhlé – skokové změny síly, resp. se spojitým průběhem síly) z (1) plyne, že trajektorie musí splňovat parametrickou hladkost druhého stupně –  $C_2$ .

Takto formulovaná podmínka je často pro studenty příliš abstraktní. Proto je vhodné toto demonstrovat reálným experimentem.

V současně době jsou dostupné jednoduché programovatelné mobilní HW-systémy. Naprogramování jejich pohybu na základě formalizmu, založeného na popisu křivek jako NURBS objektů, dovoluje vyrobit sadu experimentů pro demonstraci tvaru výsledné trajektorie v závislosti na předpokládané parametrické hladkosti jednotlivých částí požadované trajektorie.

V příspěvku popisujeme takové experimenty pro mobilní HW-systém SPHERO. V rámci experimentů se omezujeme na jednoduchou trajektorii – hranici čtverce.

V následující kapitole popisujeme různé scénáře předpokládaného pohybu v závislosti na požadované parametrické hladkosti v rozích čtverce. V Kap. 3. je popis zařízení SPHERO a popis samotné aplikace. V závěrečné kapitole je ukázka reálně dosáhnuté trajektorie pro různé scénáře pohybu.

## 2 Čtvercová trajektorie a její různé scénáře

Předpokládejme čtvercovou dráhu vytyčenou body

$$A = (0, 0), \quad B = (d, 0), \quad C = (d, d), \quad D = (0, d). \quad (2)$$

Nejjednodušší scénář je daný lineární parametrizací. Ukážeme další tři scénáře pohybu.

Vzhledem na to, že kubická Bézierova křivka je často používaný nástroj, vytvoříme tomu odpovídající postup. Následující dva scénáře odvodíme z uniformních b-spline křivek druhého a třetího stupně.

Ve všech případech se omezíme na konstrukce, které používají jenom body (2). Je třeba zdůraznit, že podmínu parametrické hladkosti druhého stupně splňuje z uvedených případů jen kubický uniformní b-spline. Druhý a třetí scénář mají jen parametrickou hladkost  $C_1$ . První scénář je jenom ze třídy  $C_0$  (parametrická spojitost).

### 2.1 Čtverec s lineární parametrizací

S lineárním parametrickým vyjádřením úsečky se studenti seznamují již na střední škole. Výsledná trajektorie z takto vytvořených částí má po částech konstantní rychlosť

$$P(t) = \begin{cases} A + t(B - A) & 0 \leq t \leq 1 \\ B + t(C - B) & 1 \leq t \leq 2 \\ C + t(D - C) & 2 \leq t \leq 3 \\ D + t(A - D) & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}, \quad P'(t) = \begin{cases} B - A & 0 \leq t \leq 1 \\ C - B & 1 \leq t \leq 2 \\ D - C & 2 \leq t \leq 3 \\ A - D & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}. \quad (3)$$

a očividně je jenom ze třídy  $C_0$ .

### 2.2 Čtverec jako posloupnost kubických Bézierových křivek

Uvažujme posloupnost kubických bázierových křivek zadanou dvojnásobnými řídícími body:

$$AABB, BBCC, CCDD, DDAA. \quad (4)$$

Násobnost řídících bodů zaručí, že rychlosť pohybu v koncových bodech je nulová a výsledná křivka je úsečka. Vzhledem k tomu, že druhá derivace je lineární funkce s hodnotami v koncových bodech

$$P''(0) = 6(P_0 - 2P_1 + P_2), \quad P''(1) = 6(P_1 - 2P_2 + P_3), \quad (5)$$

v případě našeho scénáře (4) dostáváme např. na první úsečce hodnoty druhých derivací

$$P''(0) = 6(B - A), \quad P''(1) = 6(A - B). \quad (6)$$

Např. ve vrchole  $B$  tak dostáváme skokovou změnu druhé derivace z hodnoty  $6(A - B)$  na hodnotu  $6(C - B)$ .

## 2.3 Čtverec jako kvadratický uniformní b-spline

Uvažujme kvadratický uniformní b-spline určený řídícími body

$$AABBCCDDAA. \quad (7)$$

Kvadratický uniformní b-spline definovaný řídícími body  $P_0 P_1 P_2$  je totožný s kvadratickou Bézierovou křivkou určenou řídícími body

$R_0 = \frac{P_0 + P_1}{2}$ ,  $R_1 = P_1$ ,  $R_2 = \frac{P_1 + P_2}{2}$  [1]. Proto scénář např. pro úsečku  $AB$  obsahuje dvě kvadratické Bézierovy křivky, s řídícími body  $A, A, \frac{A+B}{2}$ , a  $\frac{A+B}{2}, B, B$ . Vzhledem k tomu, že pro druhou derivaci platí

$$P''(t) = 2(R_0 - 2R_1 + R_2), \quad (8)$$

i v tomto případě dostáváme nespojitost druhých derivací. Např. uprostřed úsečky  $AB$  nastává skoková změna z hodnoty  $B - A$  na hodnotu  $A - B$  a ve vrcholu  $B$  je to skok z  $A - B$  na hodnotu  $C - B$ , což je 6 krát méně v porovnání se scénářem kubické Bézierovy křivky.

## 2.4 Čtverec jako kubický uniformní b-spline

Uvažujme uniformní kubický b-spline s řídícími body

$$AAABBBCCCCDDDDAAA, \quad (9)$$

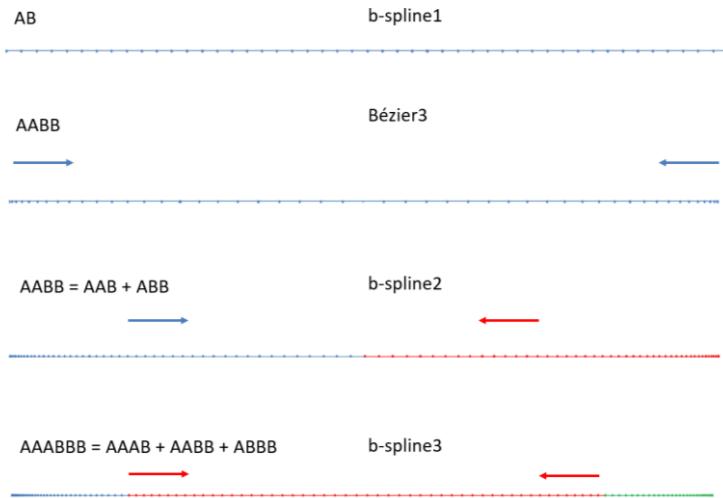
tj. posloupnost Coonsových křivek [1] s řídícími body  $AAAB, AABB, ABBC, BBCB, BBCC, BCCC, \dots DDA, DAAA$ . V tomto případě je např. úsečka  $AB$  tvořena třemi křivkami – úsečkami s koncovými body

$$A, \frac{5A+B}{6}, \frac{A+5B}{6}, B, \quad (10)$$

Vzhledem k tomu, že druhá derivace Coonsovy křivky je lineární funkce s hraničními hodnotami

$$P''(0) = (P_0 - 2P_1 + P_2), \quad P''(1) = (P_1 - 2P_2 + P_3), \quad (11)$$

na trajektorii  $AB$  tak v bodech (10) se dosahují hodnoty 0,  $(B - A)$ ,  $(A - B)$ , 0, tj. pro celý scénář (9) dostáváme po částech lineární spojitou funkci.



**Obr. 1: Čtyři scénáře generování úsečky.**

Na Obr.1 je rychlosť je znázornená delením úsečky (je prímo úmerná dĺžce úsečiek), pôsobiaci sila šipkou. V prípadech Bézier3 a b-spline3 je prubeh sily lineárny (v prípade b-spline3 je síla v koncových bodech nulová). V prípade b-spline2 je na jednotlivých úsecích síla konštantná. V prípade b-spline1 vzhľadom na rovnomernosť a prímočarosť pohybu je pôsobiaci síla nulová.

### 3 SPHERO a jeho ovládanie

V rámci použitia experimentu byl využit sférický robot označovaný ako SPHERO. Jde o jednoduchý HW-systém skládajúci sa z motorov zajišťujúcich pohyb a niekoľka senzorov, ktoré SPHERO, potažmo užívateľ, využíva. K jeho ovládaniu sa zpravidla používa smartphone nebo tablet, do ktorého sa nainstaluje príslušná aplikácia. Druhou možnosťí je využitie prímočarého programovania [2]. Pro tyto účely jsou k dispozicii i vytvořené SDK balíčky a jednoduché ukázkы [3].

#### Technické parametry

- Váha: 170 g,
- nabijenie: induktívne,
- baterie: 2x 350 mAh LiPo (až 1 hodina provozu),
- rychlosť: až 2 m/s,
- obal: tvrzený polykarbonát (odolá nárazu a pádu),
- robot je vodotesný (plave na vode i pod vodou),
- komunikaciu zajišťuje Bluetooth ver 4.0 a novější (dosah až 30 m),
- senzory: gyroskop, akcelerometr, teploměr,
- LED diody pro barevné osvětlení robota.

Hlavní funkčností robota je samozřejmě kutálení se a využití senzorů. Kromě senzorů má v sobě robot zabudovány algoritmy pro orientaci v prostoru, přepočet ujeté dráhy na cm, detekci kolizí nebo volného pádu a také detekci, jakým směrem se robot natočil. Hodnoty, které můžeme z robota získat, jsou:

- dráha (cm),
- orientace ( $^{\circ}$ )
- hodnoty gyroskopu ( $^{\circ}/s$ )
- hodnoty akcelerometru (g),
- rychlosť (cm/s)
- ujetá vzdálenost (cm).

Pro ovládání SPHERA byla využita aplikace *Sphero Edu* stažena z Google Play (pro systém Android). V ní se dá robot ovládat pomocí jednoduchého ovládání skládajícího se z virtuálního joysticku. Další možností je programovat robota buďto pomocí tzv. bloků, kde každý blok má svůj specifický význam a účel a které uživatel skládá za sebou a vytváří celek, který připomíná třeba vývojový diagram nebo přímo psaním zdrojového kódu. Zde je využit jazyk JavaScript [4]. Jak u bloků, tak i v případě JavaScriptu nebo přímého programování se pohyb SPHERA určuje tak, že se mu nastaví rychlosť a úhel jeho natočení. Pak už je na nás, jak dlouho robota necháme kutálet s takto nastavenými hodnotami. Programování v JavaScriptu bylo využito při experimentech.

### 3.1 Sphero Edu

Aplikace je vytvořena přímo autory SPHERA a je dostupná pro systémy Android, iOS i Amazon Kindle a také jako doplněk pro prohlížeč Chrome. Ve všech případech je název aplikace stejný. Po nainstalování aplikace se uživatel musí registrovat. V průběhu určí, jakou roli bude zastávat (učitel nebo student), kde učitel může navíc vytvářet tzv. kroužky nebo třídy a do nich studenty pozvat. Následně může uživatel začít vytvářet vlastní projekty. Aplikace také umožňuje prohlížet projekty vytvořené přímo autory SPHERA nebo projekty vytvořené komunitou. Cizí projekty je možné si zkopirovat a dále upravovat dle potřeby.

K většimu pohodlí při vytváření, obzvláště při programování v JavaScriptu, je lepší nainstalovat aplikaci v prohlížeči Chrome a na svém počítači nebo notebooku psát zdrojový kód. Jelikož aplikace zatím nepodporuje ovládání robota přímo pomocí počítače, stačí se na mobilu či tabletu přihlásit pod stejným účtem jako na počítači, obnovit seznam vlastních projektů a následně aktualizovaný projekt spustit.

### 3.2 Vytvořené projekty

Během experimentů bylo vytvořeno celkem 7 projektů – JavaScript programů. Kromě lineárního případu byly křivky naprogramovány ve 2 variacích. První počítá rychlosť jako rozdíl teoretické polohy v sousedních hodnotách časové diskretizace, druhá využívá hodnoty odvozených prvních derivací v bodech časové diskretizace. Projekty se dají najít v aplikaci pod názvem:

#### SQUARE [typ\_krvky] ([vypocet\_rychlosti])

- [typ\_krvky] – Bezier3, b-spline2, Coons,
- [vypocet\_rychlosti] – derivation, discretization,
- Speciální případ je SQUARE Polyline.

Např.: SQUARE Bezier3 (derivation)

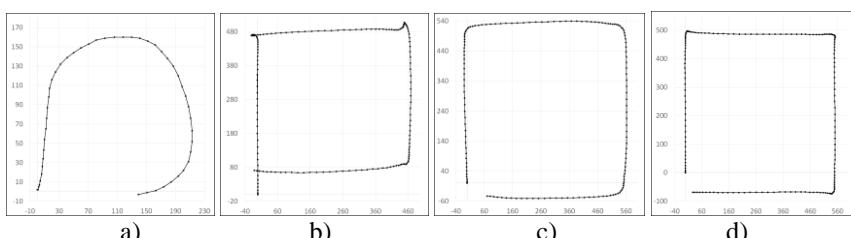
## 4 Výsledky experimentů

SPHERO poskytuje export všech naměřených hodnot. Níže uvádíme, Obr.2–5 zaznamenanou polohu u realizovaných experimentů. Každá varianta byla opakována třikrát. Vzhledem k tomu, že rozdíly byly malé, uvádíme jen jednoho zástupce z každé varianty.

Obr. 2 ukazuje, že lineární řízení  $C_0$  je pro danou trajektorii zcela nevhodné. Setrvačnost pohybu zařízení ovlivní výslednou trajektorii tak, že prakticky vůbec neodpovídá předepsané dráze.

Řízení kubickým Bézierovým splinem Obr. 3 i uniformním kvadratickým b-splinem Obr. 4 ukazuje, že pro řízení robota v rozích čtverce je  $C_1$  hladkost nedostatečná. Pozitivním výsledkem je, že řízení kvadratickým b-splinem je lepší. Toto je v souladu s teorií (kap. 2.3). Zde stojí za zmínku, že nespojitá změna druhé derivace se při daném tvaru trajektorie uprostřed hrany čtverce pro řízení b-spline2 neprojevuje.

Nejlepší výsledky vykazuje řízení kubickým Coonsovým splinem, co potvrzuje, že daný HW je dostatečně vhodný nástroj pro demonstraci nutnosti  $C_2$  hladkosti při řízení těles s nezanedbatelnou hmotností.



Obr. 2: Řízení robota a) Lineární, b) Bezier3, c) b-spline2, d) Coons

## 5 Závěr

Výsledky experimentů s použitím různých scénářů pro řízení pohybu robota ukazují, že HW SPHERO je vhodným nástrojem, na kterém je možné demonstrovat nejenom rozdíl řízení s různým stupněm hladkosti  $C_0 - C_2$ , ale i rozdíly v rámci  $C_1$ .

Další výzvou je pokusit se zpřesnit řízení tak, aby robot dosáhnul cíl (uzavřenost trajektorie).

## Poděkování

Tento článek vznikl v rámci institucionální podpory rozvoje KIP PřF OU.

## Literatura

- [1] A. Kolcun: *Parametrické modelovanie kriviek*, Učebný text, Ostrava, 2013.
- [2] Sphero Docs. *Sphero* [online]. 2017 [cit. 2017-11-03]. Dostupné z: <http://sdk.sphero.com/>
- [3] Sphero Developers. *Sphero* [online]. 2017 [cit. 2017-11-03]. Dostupné z: <https://developer.gosphero.com/>
- [4] Get Started. *Sphero JavaScript* [online]. 2017 [cit. 2017-11-03]. Dostupné z: <https://sphero.docsapp.io/docs/get-started>



# Modelování ploch technické praxe a jejich 3D tisk

## Modeling of technical surfaces and their 3D print

Ivan Kolomazník, František Červenka

*Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava*

*17. listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba*

*ivan.kolomaznik@vsb.cz*

*frantisek.cervenka@vsb.cz*

**Abstrakt.** Ruled surface are often used in civil engineering. In this poster we describe parametrization and modeling for 3D print some of them. We use OpenSCAD solid 3D CAD modeler. Unlike most free software for creating 3D models it does not focus on the artistic aspects of 3D modelling but instead on the CAD and programmers aspects.

*Keywords:* OpenSCAD, 3D modeling, ruled surface, parametrization

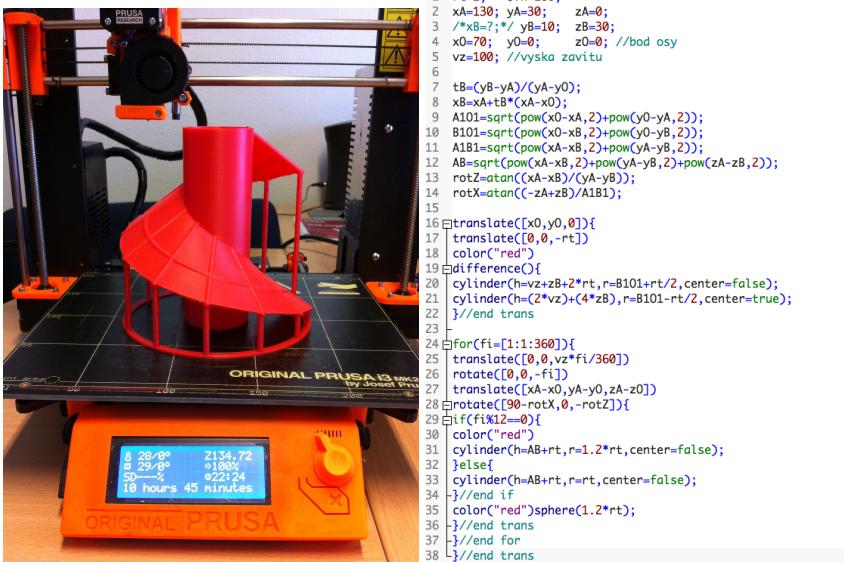
*Klíčová slova:* OpenSCAD, 3D modelování, přímkové plochy, parametrizace

### 1 Úvod

Přímkové plochy jsou často využívány ve stavebnictví. V tomto článku ukážeme parametrizaci a modelování pro 3D tisk některých z nich. Použijeme modelovací software OpenSCAD. Na rozdíl od většiny volně šířitelných 3D modelovacích programů se nezaměřuje na vzhled objektů, ale na technickou a programátorskou stránku navrhování. Při vytváření objektu můžeme využít širokou škálu nástrojů — množinové operace (sjednocení, průnik, rozdíl) na předdefinované primitivní tělesa, matematické funkce, speciální modelovací funkce (sweep, extrude) a dokonce pomocí vestavěného makrojazyka si vytvořit vlastní primitiva s využitím cyklů, podmínek a dalších programátorských nástrojů.

### 2 Modelování přímkových ploch stavební praxe

Přímkové šroubové plochy se snadno parametrizují, a proto jsou vhodné na úvod do problematiky modelování přímkových ploch. Jednoduchost není jenom matematická, ale i konstrukční - není snad jiná možnost, jak vytvořit zakřivenou plochu jenom pomocí přímých nosníků. Další jejich výhodou jsou při vhodné volbě rozměrů a síly nosníku exceleň statické vlastnosti.



Obrázek 1: Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

## 2.1 Přímková šroubová plocha

Nejznámější a nejčastěji využívanými zástupci přímkových ploch jsou přímkové šroubové plochy. Využití je rozmanité, např. šrouby, schodiště a jejich originální zastřešení.

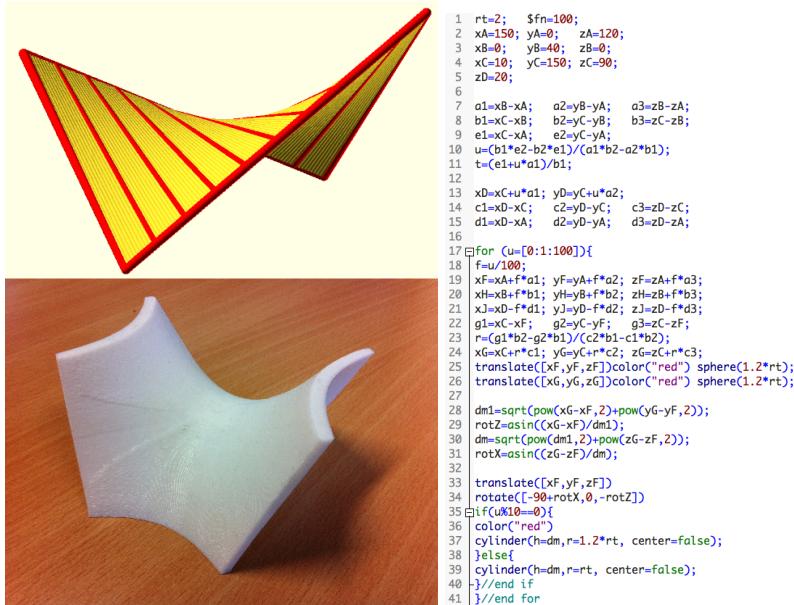
Parametrizace šroubovice je zobecněním kružnice do prostoru, spolu s jednoduchou parametrizací přímky, proto jsou tyto plochy ideální pro úvod do problematiky parametrizace ploch.

Při 3D tisku je třeba počítat s dostatečně velkou základnou, aby nedošlo k odtržení objektu od základny, při sklonu šroubovice alespoň  $40^\circ$  pak není nutné ani použití podpěr.

## 2.2 Hyperbolický paraboloid

Hyperbolický paraboloid neboli sedlová plocha. Jednou z možností zadání jeho části je určit ji zborceným čtyřúhelníkem (protější strany jsou mimořežné), tvořící přímky protínají vždy dvojici protějších stran a jsou rovnoběžné s rídící rovinou. Ve stavebnictví se s ním můžeme setkat ve dvou formách:

- a) záměrně vytvořený — zastřešení lichoběžníkového půdorysu
- b) nechtěný — při nepřesně zhotovené pultové střeše, jejíž protější hrany



Obrázek 2: Hyperbolický paraboloid

(nosníky) nejsou rovnoběžné (v případě skleníku se skleněně desky úhlopříčně lámou)

Pro tisk je nutné vhodné umístění podpěr, které by ale neměly narušit prostorový dojem z plochy.

### 2.3 Plocha marseilleského oblouku

Zajímavým příkladem přímkových ploch ve stavební praxi jsou konusoidy. Jedná se o přímkové nerozvinutelné plochy určené trojicí křivek, tvořící přímky plochy musí protínat všechny zadány křivky např. Marseilleský oblouk je určen přímou a dvojicí kružnic, z nichž jedna je posunuta vertikálně dolů, analogicky můžeme vytvořit tzv. "šíkmý průchod", jedna kružnice se posune horizontálně.

Tisk je možný při umístění bud' na vhodně dimenzovanou podstavu, případně při otočení na čelní půlkružnici s dostatečnou šírkou.



Obrázek 3: Marseilleský oblouk

### 3 Závěr

Na přímkových plochách můžeme studentům ukázat praktické využití analytické geometrie v prostoru — parametrizaci přímky (úsečky), kružnice, šroubového pohybu, aplikaci goniometrických a cyklometrických funkcí včetně problémů s definičním oborem a oborem hodnot.

Technologie 3D tisku nám umožňuje uzavřít celý řetězec ”vymyslet, vypočítat/vyřešit a vytvořit”. Úlohy už nejsou jenom abstraktními problémy ale reálnými. Je nutné nejen najít teoretické řešení, ale ještě ho převést do realizovatelné podoby s ohledem na možnosti tiskáren, materiálu, náklady i čas realizace. Vytvořené modely používáme ve výuce deskriptivní a konstruktivní geometrie.

### Poděkování

3D tiskárny Průša i3 MK2 a Flashforge Creator Pro byly pořízeny z grantu: Projekt 7/2016 : Inovace počítačových učeben a inovace náplně některých počítačových předmětů.

# Zajímavé vlastnosti elipsy, které se neprobírají v rámci běžného učiva

## Interesting properties of the ellipse which are not mentioned in the standard syllabus

Alice Králová

*Ústav matematiky LDF Mendelovy univerzity v Brně*  
*Zemědělská 3, Brno, 613 00*  
*alice.kralova@mendelu.cz*

**Abstrakt.** Deduction of parametric representation of the ellipse, which is in position that its major axis is rotated in relation to the  $x$ -axis. Using these equations we will be able to draw the ellipse if three of its points are given – vertex  $A$ , co-vertex  $C$  and a common point  $M$ .

*Keywords:* Parametric representation, Ellipse, Revolution.

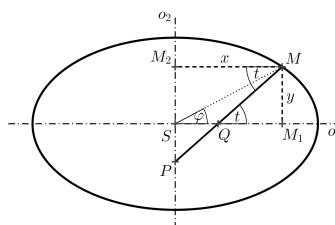
*Klíčová slova:* Parametrické rovnice, elipsa, otáčení.

### 1 Pootočená elipsa

V tomto příspěvku se podíváme na to, jak budou vypadat parametrické rovnice elipsy, jejíž hlavní osa je pootočena vzhledem k ose  $x$  o zadaný úhel  $\alpha$ . Získané rovnice užijeme pro konstrukci elipsy, která je určena hlavním vrcholem  $A$ , vedlejším vrcholem  $C$  a obecným bodem  $M$ .

### 2 Parametrické rovnice elipsy

Mějme zadánu elipsu v „základní poloze“ se středem v bodě  $S[0; 0]$ , hlavní poloosou délky  $a$  v ose  $x$  a vedlejší poloosou délky  $b$  v ose  $y$ . Tuto elipsu můžeme parametrisovat rovnicemi  $x = a \cdot \cos t$ ,  $y = b \cdot \sin t$ ,  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ , které vyhovují její středové rovnici  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



Obrázek 1: Parametrisace elipsy v „základní“ poloze

Musíme však vědět, že úhel  $t$  v těchto parametrických rovnicích není odchylkou úsečky  $SM$ , kde  $M$  je obecný bod elipsy, od kladného směru osy  $x$ ! Tuto odchylku označíme jako úhel  $\varphi$ .

Abychom zjistili skutečný význam úhlu  $t$ , který nazýváme *excentrická anomálie*, uvažujme rozdílovou proužkovou konstrukci elipsy. Sestrojíme-li pro obecný bod  $M$  elipsy úsečku  $MP$  o délce  $a$  tak, že bod  $P$  leží na vedlejší ose elipsy a bod  $Q$  na hlavní ose elipsy je vnitřním bodem úsečky  $MP$ , bude  $|MQ| = b$ .

Úhel  $t$  udává odchylku úsečky  $MP$  od hladného směru osy  $x$  a parametrické rovnice elipsy lze vyjádřit z pravoúhlých trojúhelníků  $MM_1Q$  a  $MM_2P$ , kde  $M_1$  a  $M_2$  jsou kolmé průměty bodu  $M$  na osy  $x$  a  $y$ . Spojitost mezi úhly  $\varphi$  a  $t$  je dána vztahem

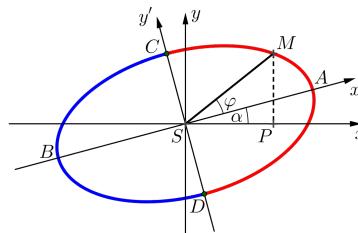
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{b \cdot \sin t}{a \cdot \cos t} = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t \right).$$

Zvolme nyní souřadnicový systém  $\langle S, x', y' \rangle$ , v němž osa  $x'$  svírá s osou  $x$  zadaný úhel  $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ . Nechť je dána elipsa  $\mathcal{E}$  se středem  $S$ , jejíž hlavní osa  $o_1$  je totožná s osou  $x'$ . Protože mají souřadnice obecného bodu  $M$  elipsy  $\mathcal{E}$  v systému  $\langle S, x', y' \rangle$  tvar  $x' = a \cdot \cos t$ ,  $y' = b \cdot \sin t$ ,  $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ , je  $|SM| = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t}$ .

Úsečka  $SM$  je vzhledem k ose  $x$  otočena o úhel  $\alpha + \varphi = \alpha + \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t \right)$ . Protože je hodnotou funkce arkus tangens úhel v rozsahu  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , získáme parametrizaci jedné poloviny elipsy  $\mathcal{E}$ , a to oblouku omezeného vedlejšími vrcholy  $C$  a  $D$  na ose  $y'$ , jenž protne kladný směr osy  $x'$  v hlavním vrcholu  $A$ .

Pro parametrizaci zbývajícího oblouku  $CBD$  elipsy  $\mathcal{E}$  musíme uvažovat úhel  $\alpha + \varphi + \pi = \alpha + \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t \right) + \pi$ . Vzhledem k periodicitě funkce tangens stačí omezit  $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Je-li bod  $P$  kolmým průmětem bodu  $M$  do osy  $x$ , určíme souřadnice  $x$  a  $y$  bodu  $M$  v systému  $\langle S, x, y \rangle$  užitím pravoúhlého  $\triangle SPM$  tak, že  $\cos(\alpha + \varphi) = \frac{x}{|SM|} \Rightarrow x = |SM| \cdot \cos(\alpha + \varphi)$ ,  $\sin(\alpha + \varphi) = \frac{y}{|SM|} \Rightarrow y = |SM| \cdot \sin(\alpha + \varphi)$ .



Obrázek 2: Parametrizace elipsy v pootočené poloze

Protože  $\cos(\alpha + \varphi + \pi) = -\cos(\alpha + \varphi)$ ,  $\sin(\alpha + \varphi + \pi) = -\sin(\alpha + \varphi)$ , parametrické rovnice elipsy  $\mathcal{E}$  mají tvar (\*)

$$\left. \begin{array}{l} x = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \cos [\alpha + \operatorname{arctg}(\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t)] \\ y = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \sin [\alpha + \operatorname{arctg}(\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t)] \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \text{pro oblouk} \\ \text{DAC} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \cos [\alpha + \operatorname{arctg}(\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t)] \\ y = -\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t} \cdot \sin [\alpha + \operatorname{arctg}(\frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} t)] \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \\ \text{pro oblouk} \\ \text{CBD} \end{array}$$

Vedlejší vrcholy  $C$  ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ),  $D$  ( $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) parametrizujeme samostatně  $C = [-b \cdot \sin \alpha, b \cdot \cos \alpha]$ ,  $D = [b \cdot \sin \alpha, -b \cdot \cos \alpha]$ .

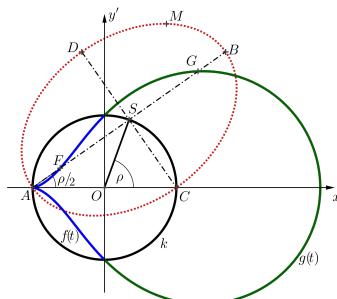
## 2.1 Konstrukce elipsy, je-li dán hlavní vrchol $A$ , vedlejší vrchol $C$ a obecný bod $M$

Provedeme algebraické řešení této úlohy. Aby se celá situace zjednodušila, zavedeme nový souřadnicový systém  $\langle O, x', y' \rangle$ , v němž je bod  $O$  středem úsečky  $AC$  a vrcholy  $A$  a  $C$  leží na ose  $x'$ . Položíme  $A = [-r; 0]$ ,  $C = [r; 0]$ , kde  $r \in (0; \infty)$ . V tomto systému bude mít bod  $M$  obecné souřadnice  $[m_1; m_2]$ .

Střed  $S$  hledané elipsy  $\mathcal{E}$  leží na Thaletově kružnici  $k$  nad průměrem  $AC$ , která je určena středem  $O[0; 0]$  a poloměrem  $r$ , její parametrické rovnice jsou tedy  $x' = r \cdot \cos \rho$ ,  $y' = r \cdot \sin \rho$ ,  $\rho \in (0; 2\pi)$ .

Protože délka  $a = |AS|$  hlavní poloosy elipsy musí být větší (nebo alespoň rovna) délce  $b = |SC|$  vedlejší poloosy, pro nalezení polohy středu  $S$  omezíme velikost úhlu  $\rho$  na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \setminus \{0\}$ .

Délku  $a = \|\vec{AS}\|$  vyjádříme v upraveném tvaru  $2r \cdot \cos(\frac{\rho}{2})$  a délku  $b = \|\vec{CS}\|$  ve tvaru  $2r \cdot |\sin(\frac{\rho}{2})|$ . Protože je  $|\angle COS| = \rho$ , odchylka  $\alpha$  hlavní osy elipsy  $\mathcal{E}$  od osy  $x'$  je rovna  $|\angle CAS| = \frac{\rho}{2}$ .



Obrázek 3: Konstrukce elipsy při zadaných bodech  $A, C, M$

Pro vyjádření elipsy užijeme odvozené parametrické rovnice (\*), v nichž k pravé straně přičteme souřadnice středu  $S$  elipsy, neboť ten je posunutý mimo počátek  $O$  souřadnicového systému. Po dosazení získáme rovnice

$$x' = \pm 2r \sqrt{\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos^2 t + \sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin^2 t} \cdot \cos\left[\frac{\rho}{2} + \arctg(|\tg(\frac{\rho}{2})| \cdot \tg t)\right] + r \cos \rho,$$

$$y' = \pm 2r \sqrt{\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \cos^2 t + \sin^2\left(\frac{\rho}{2}\right) \sin^2 t} \cdot \sin\left[\frac{\rho}{2} + \arctg(|\tg(\frac{\rho}{2})| \cdot \tg t)\right] + r \sin \rho,$$

kde  $\rho \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \setminus \{0\}$ ,  $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Jelikož bod  $M[m_1; m_2]$  leží na elipse  $\mathcal{E}$ , dosadíme jeho souřadnice za proměnné  $x'$  a  $y'$ , a následně upravíme pravé strany rovnic. V programu Maple tedy řešíme jednu ze dvou soustavy rovnic (v obou rovnicích zapíšeme buďto znaménko +, nebo -)

$$m_1 = \pm r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \rho \cos 2t} \cdot \cos\left[\frac{\rho}{2} + \arctg(|\tg(\frac{\rho}{2})| \cdot \tg t)\right] + r \cos \rho,$$

$$m_2 = \pm r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \rho \cos 2t} \cdot \sin\left[\frac{\rho}{2} + \arctg(|\tg(\frac{\rho}{2})| \cdot \tg t)\right] + r \sin \rho,$$

kde  $\rho \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \setminus \{0\}$ ,  $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Výsledkem výpočtu je velikost úhlu  $\rho$ , kterým otočíme vedlejší vrchol  $C$  kolem středu úsečky  $AC$  do hledaného středu  $S$  elipsy, čímž je elipsa  $\mathcal{E}$  určena. Při chybné volbě dvojice rovnic program Maple úhel  $\rho$  nespočítá.

## 2.2 Parametrizace křivek, po nichž se pohybují ohniska $F$ a $G$

V závislosti na poloze středu  $S$  hledané elipsy  $\mathcal{E}$  se mění poloha jejích ohnisek  $F$  a  $G$  na hlavní ose  $o_1 = \leftrightarrow AS$ . Budou se pohybovat po jisté křivce, jejíž parametrické vyjádření nyní odvodíme.

Použijeme-li bod  $A$  a vektor  $\vec{AS}$ , můžeme parametrické rovnice hlavní osy zapsat ve tvaru

$$o_1 : \begin{cases} x = -r + u \cdot r \cdot (1 + \cos t) \\ y = u \cdot r \cdot \sin t \end{cases}, \quad u \in \mathbf{R}.$$

(Z formálních důvodů úhel  $\rho$  přeznačíme jako  $t$ .)

Osu  $o_1$  protneme v ohniscích  $F$  a  $G$  kružnicí  $l$  se středem ve vedlejším vrcholu  $C$  a poloměrem  $a$  s rovnicí  $(x - r)^2 + y^2 = 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ . Dosazením získáme kvadratickou rovnici

$$(-2r + u \cdot r \cdot (1 + \cos t))^2 + (u \cdot r \cdot \sin t)^2 = 4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

s proměnou  $u$ , kterou následně upravíme do tvaru

$$u^2 \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 2u \cdot \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 0.$$

Pak je  $u_{1,2} = \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \pm \sqrt{\cos^4\left(\frac{t}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \dots = 1 \pm \sqrt{\frac{2 \cos t}{1 + \cos t}}.$

Pro  $u_1 = 1 - \sqrt{\frac{2 \cos t}{1 + \cos t}}$  a  $u_2 = 1 + \sqrt{\frac{2 \cos t}{1 + \cos t}}$  je  $u_1 \leq u_2$ , což znamená, že hodnota  $u_1$  udává polohu ohniska  $F$ , které je na ose  $o_1$  blíže hlavnímu vrcholu  $A$ , a hodnota  $u_2$  určuje ohnisko  $G$  vzdálenější od vrcholu  $A$ .

Po dosazení hodnot  $u_1$  a  $u_2$  do parametrických rovnic osy  $o_1$  získáme parametrizaci křivky  $f(t)$ , na níž leží ohnisko  $F$ , resp. křivky  $g(t)$  obsahující ohnisko  $G$ .

$$f(t) : \begin{cases} x = r \cdot (\cos t - \sqrt{2 \cos t \cdot (1 + \cos t)}) \\ y = r \cdot \sin t \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2 \cos t}{1 + \cos t}}\right) \end{cases}$$

Po úpravě můžeme psát, že

$$g(t) : \begin{cases} x = r \cdot (\cos t + \sqrt{2 \cos t \cdot (1 + \cos t)}) \\ y = r \cdot \sin t \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2 \cos t}{1 + \cos t}}\right) \end{cases}$$

Přitom platí, že  $t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \setminus \{0\}$ .

Výrazy definující proměnnou  $y$  lze zjednodušit, pokud tuto množinu rozdělíme na dva samostatné intervaly  $\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$  a  $(0; \frac{\pi}{2})$ .

Pokud  $t \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$  je  $\sin t < 0$ , proto  $\sin t = -\sqrt{\sin^2 t} = -\sqrt{1 - \cos^2 t}$ , zatímco pro  $t \in (0; \frac{\pi}{2})$  je  $\sin t > 0$ , tedy  $\sin t = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ .

Pak se křivky  $f(t)$  a  $g(t)$  rozpadnou na dvě části  $f_1(t)$  a  $f_2(t)$ , resp.  $g_1(t)$  a  $g_2(t)$ , jejichž parametrické rovnice jsou ve tvaru

$$f_1(t) : \begin{cases} x = r \cdot (\cos t - \sqrt{2 \cos t \cdot (1 + \cos t)}) \\ y = r \cdot (\sin t + \sqrt{2 \cos t \cdot (1 - \cos t)}) \end{cases} \quad \text{pro } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$$

$$f_2(t) : \begin{cases} x = r \cdot (\cos t - \sqrt{2 \cos t \cdot (1 + \cos t)}) \\ y = r \cdot (\sin t - \sqrt{2 \cos t \cdot (1 - \cos t)}) \end{cases} \quad \text{pro } t \in (0; \frac{\pi}{2})$$

$$g_1(t) : \begin{cases} x = r \cdot (\cos t + \sqrt{2 \cos t \cdot (1 + \cos t)}) \\ y = r \cdot (\sin t - \sqrt{2 \cos t \cdot (1 - \cos t)}) \end{cases} \quad \text{pro } t \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$$

$$g_2(t) : \begin{cases} x = r \cdot (\cos t + \sqrt{2 \cos t \cdot (1 + \cos t)}) \\ y = r \cdot (\sin t + \sqrt{2 \cos t \cdot (1 - \cos t)}) \end{cases} \quad \text{pro } t \in (0; \frac{\pi}{2})$$

Vyřešením rovnice  $|FM| + |GM| = 2a$  v programu Maple najdeme polohu středu  $S$  elipsy  $\mathcal{E}$ .  $|FM|$  a  $|GM|$  jsou výrazy obsahující proměnnou  $t$ ,  $2a = 4r \cdot \cos(\frac{t}{2})$ .

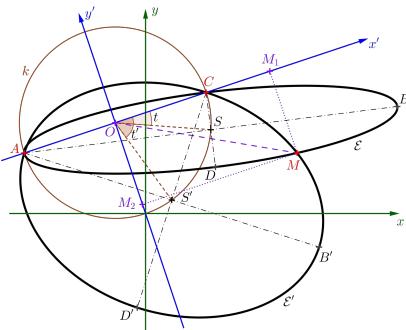
### 2.3 Příklad : Určete elipsu $\mathcal{E}$ , je-li $A[-4; 2]$ , $C[2; 4]$ a $M[5; 2]$ .

V novém souřadnicovém systému  $\langle O, x'y' \rangle$  je počátkem  $O$  střed úsečky  $AC$ , proto  $O[-1; 3]$ . Osa  $x' = \leftrightarrow AC$ . Musíme spočítat, jaké budou souřadnice bodů  $A, C$  a  $M$  v novém souřadnicovém systému:

$\overrightarrow{OA} = (-3, -1)$ ,  $|OA| = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{10} \Rightarrow A[-\sqrt{10}; 0], C[\sqrt{10}; 0], r = \sqrt{10}$ . Označíme-li  $M_1$  a  $M_2$  kolmé průměty bodu  $M$  na osy  $x'$  a  $y'$ , určíme nové souřadnice  $m_1$  a  $m_2$  bodu  $M$  výpočtem délek  $|OM_1|$  a  $|OM_2|$ . K tomu ale potřebujeme znát  $|OM|$  a  $|\triangle MOC|$ .

$\overrightarrow{OM} = (6; -1)$ ,  $|OM| = \sqrt{37}$ . Z  $\triangle MOC$  spočítáme  $|\triangle MOC|$  pomocí kosinové věty, přičemž  $|OC| = \sqrt{10}$  a  $|CM| = \sqrt{13}$ , neboť  $\overrightarrow{CM} = (3; -2)$ .  $|CM|^2 = |OM|^2 + |OC|^2 - 2 \cdot |OM| \cdot |OC| \cdot \cos(|\triangle MOC|)$ , odkud

$$\cos(|\angle MOC|) = \frac{17}{\sqrt{370}} \text{ a } \sin(|\angle MOC|) = +\sqrt{1 - \cos^2(|\angle MOC|)} = \frac{9}{\sqrt{370}}.$$



Obrázek 4: Konstrukce elipsy pro konkrétní zadání určujících bodů

$$\begin{aligned} Výjádříme & |m_1| = |OM_1| = |OM| \cdot \cos(|\angle MOC|) = \frac{17}{\sqrt{10}}, \\ & |m_2| = |OM_2| = |OM| \cdot \sin(|\angle MOC|) = \frac{9}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

V závislosti na zvolené orientaci os  $x'$  a  $y'$  položíme  $M = \left[ \frac{17}{\sqrt{10}}; -\frac{9}{\sqrt{10}} \right]$ . Výsledek získáme pomocí programu Maple vyřešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 17 &= 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \rho \cos 2t} \cdot \cos \left[ \frac{\rho}{2} + \operatorname{arctg} \left( \left| \tan \left( \frac{\rho}{2} \right) \right| \cdot \tan t \right) \right] + 10 \cos \rho \\ -9 &= 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos \rho \cos 2t} \cdot \sin \left[ \frac{\rho}{2} + \operatorname{arctg} \left( \left| \tan \left( \frac{\rho}{2} \right) \right| \cdot \tan t \right) \right] + 10 \sin \rho \end{aligned}$$

Vypočítáme dvě hodnoty úhlu  $\rho$ , a to  $\rho_1 \doteq -72,32^\circ$ ,  $\rho_2 \doteq -22,64^\circ$ , jimiž otočíme vrchol  $C$  kolem počátku  $O$  do středu  $S$  elipsy  $E$ .

Tentýž výsledek bychom získali také vyřešením jediné rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} &\left[ \left( \frac{17}{\sqrt{10}} - \sqrt{10} \cdot (\cos t - \sqrt{2} \cos t(1 + \cos t)) \right)^2 + \left( -\frac{9}{\sqrt{10}} - \sqrt{10} \cdot (\sin t + \sqrt{2} \cos t(1 - \cos t)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left[ \left( \frac{17}{\sqrt{10}} - \sqrt{10} \cdot (\cos t + \sqrt{2} \cos t(1 + \cos t)) \right)^2 + \left( -\frac{9}{\sqrt{10}} - \sqrt{10} \cdot (\sin t - \sqrt{2} \cos t(1 - \cos t)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 4\sqrt{10} \cos \left( \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

### 3 Poznámka na závěr: grafické řešení uvedené úlohy

Ačkoliv jsme schopni elipsu  $E$  sestrojit na základě vypočítané hodnoty úhlu  $\rho$ , otázka, jak elipsu narýsovat čistě geometricky bez užití předloženého výpočtu, zůstává otevřená...

### Reference

- [1] A. Urban: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha, 1965
- [2] Š. Voráčová a kol.: *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*, Academia, Praha, 2012

# Konštrukcie elipsy v interakcii s GeoGebrou

## Constructions of ellipse in interaction with GeoGebra

Soňa Kudlicková, Alžbeta Mackovová, Martina Bátorová

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského,

Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR

email: sona.kudlickova@fmph.uniba.sk, alzbeta.mackovova@gmail.com,  
martina.batorova@fmph.uniba.sk

**Abstract.** The paper brings description of a study material on metric properties of ellipse. Synthetic constructions of ellipse with drawing tools are realized in interaction with software GeoGebra. Study material represents a contribution for innovative teaching.

**Keywords:** ellipse, constructions of ellipse, GeoGebra

**Kľúčové slová:** elipsa, konštrukcie elipsy, GeoGebra

### 1 Úvod

Výučba kužeľosečiek, orientovaná na ich syntetické konštrukcie, prebieha na stredných odborných školách a vysokých školách technického zamierania. V tomto príspevku ponúkneme opis vytvoreného študijného materiálu „*Metrické konštrukcie elipsy*“ na FMFI UK [3], ktorý sme zamerali práve na syntetické konštrukcie elipsy pomocou rysovacích potrieb. Následne v interakcii s GeoGebrou zabezpečíme vykreslenie elipsy aj pri zmene polohy bodov či vstupných údajov. Použitý dynamický softvér GeoGebra je voľne šíriteľný a podľa nášho názoru je vhodné zaradiť tento softvér do výučby a podporiť inovatívne vyučovacie metódy o digitálny rozmer [2].

Pri vypracovaní študijného materiálu sme mali na zreteli zostaviť študijný text tak, aby čitateľ rozumel konštrukciu elipsy, jednotlivé kroky konštrukcie boli čitateľovi zrejmé a pri interakcii so softvérom GeoGebra vedel, čo program „robí“.

Študijný text je rozdelený na tri časti: *Teoretické východiská; Zbierka riešených príkladov; Zbierka cvičení*, ktoré majú pre jednoduchšiu orientáciu v študijnom teste rovnakú stavbu.

### 2 Elipsa – teoretické východiská

Pri konštrukciách elipsy z daných prvkov je potrebné poznáť základné pojmy a súvisiace vlastnosti. Pre metrické konštrukcie elipsy sú to: ohnisková definícia elipsy, súvisiace pojmy I. (ohniská, sprivedočie bodu, súčet dĺžok sprivedočov, stred elipsy, lineárna excentricita, hlavná os elipsy, vedľajšia os elipsy), súvisiace pojmy II. (hlavné vrcholy, vedľajšie vrcholy, dĺžka hlavnej a vedľajšej osi, charakteristický trojuholník elipsy), bodová konštrukcia elipsy, vykreslovanie

elipsy pomocou oskulačných kružníc, dotyčnica elipsy v jej bode, určujúce a vrcholové kružnice elipsy.

Oboznámenie sa s týmito pojмami je dôležité pri následnej práci v *Zbierke riešených prikladov*. Detaily, úplné definície, vety a ich dôkazy sú umiestnené v práci [3], ktorá tvorí prílohu študijného textu a má podobnú štruktúru. Príloha [3] je určená pre čitateľa, ktorý chce poznať, o ktoré definície a vety sa konštrukcia opiera.

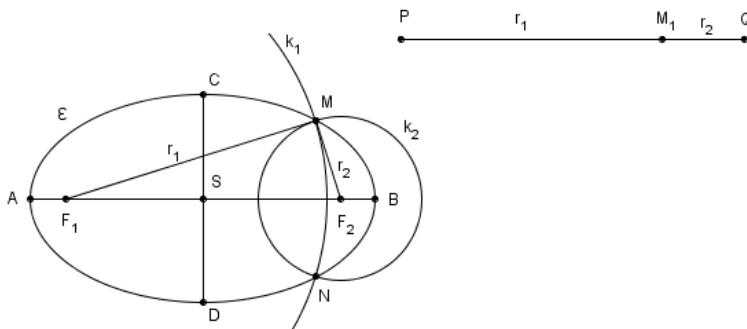
K ilustrácii tejto časti uvedieme segment: **Bodová konštrukcia elipsy**

a) **pomocou rysovacích potrieb**, obr.1

Zostrojte body elipsy  $\varepsilon$ , ak sú dané ohniská  $F_1, F_2$  a súčet dĺžok sprievodičov

$$|F_1M| + |F_2M| = |PQ| = 2a \text{ a platí } |F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|.$$

Vstup:  $|F_1F_2| = 4j$ ,  $|F_1M| + |F_2M| = 5j$  splňajú podmienku  $|F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|$



**Obr. 1: Bodová konštrukcia elipsy**

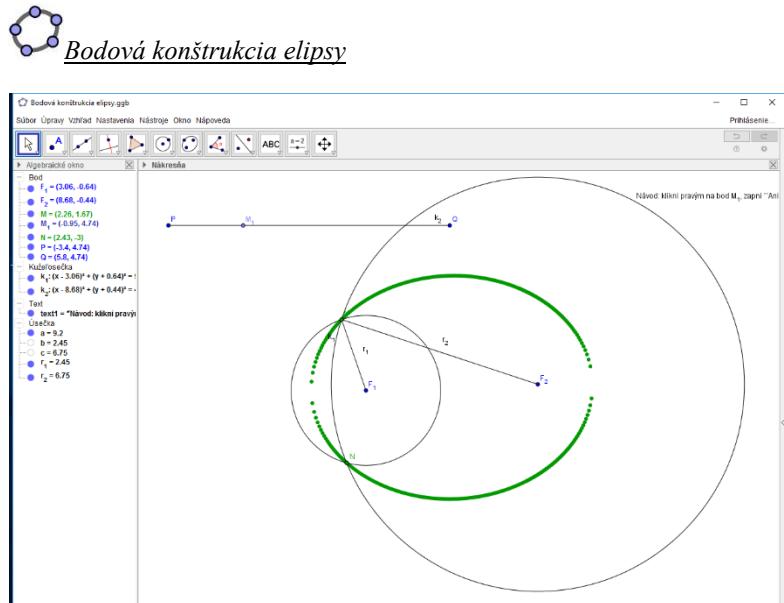
Postup konštrukcie:

1. Zvoľme vnútorný bod  $M_1$  úsečky  $PQ$ , kde  $|PM_1| = r_1$ ,  $|M_1Q| = r_2$ .
2. Zostrojme kružnice  $k_1(F_1, r_1)$ ,  $k_2(F_2, r_2)$ .
3. Určme priesecníky kružníc  $k_1 \cap k_2 = \{M, N\}$ . Ak je splnená podmienka  $|r_1 - r_2| \leq |F_1F_2|$ , tak priesecníky existujú a body  $M, N$  sú body elipsy  $\varepsilon$ .
4. Ďalšie body elipsy zostrojíme opakováním krokov 1, 2, 3.

Výstup: body elipsy  $\varepsilon$

b) **pomocou softvéru GeoGebra**, obr.2

- a) Vykreslí elipsu pre vstupné dátá po kliknutí na bod  $M_1$  a zapnutí „Animating“;
- b) Ponúkne možnosť meniť polohu: ohnisk  $F_1, F_2$  a dĺžku úsečky  $|PQ|$ ;
- c) Pri nesplnení podmienky  $|r_1 - r_2| \leq |F_1F_2|$  t. j. priesecníky neexistujú, sa v algebrickom okne vypíše informácia „*Undefined*“.



Obr. 2: Grafický výstup z GeoGebry pre bodovú konštrukciu elipsy

### 3 Elipsa – zbierka riešených príkladov

Nosnou časťou študijného materiálu je *Zbierka riešených príkladov*, ktorých riešenie je realizované pomocou informácií získaných v teoretickej časti. Do *Zbierky* bolo zaradených 25 úloh, ktorých zadania sa vyskytli v rôznych učebničiach [1], [4].

Príklady v *Zbierke riešených príkladov* sú rozdelené do štyroch skupín:

- I. Konštrukcia elipsy pomocou charakteristického trojuholníka;
- II. Konštrukcia elipsy, ak poznáme hodnoty  $a$ ,  $b$ ,  $e$  a polohu bodov  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $M$ ;
- III. Konštrukcia elipsy, ak je daná dotyčnica;
- IV. Konštrukcia dotyčnice elipsy.

Všetky riešené príklady majú spoločnú stavbu:

Text úlohy s grafickým vstupom na obrázku označenom a), ktorý odporúča, ako si zvolať vstupné prvky.

### Riešenie a) pomocou rysovacích potrieb

Postup konštrukcie: pozostáva z jednotlivých krokov konštrukcie, odôvodnenie kroku je uvedené v prílohe [3].

Výstup: riešením je elipsa určená prvkami vhodnými na bodovú konštrukciu a vykreslenie elipsy. Vykreslené riešenie je na obrázku b).

Táto časť riešenia a) pomocou rysovacích potrieb obsahuje aj diskusiu o počte riešení, ktorá závisí od vstupných prvkov.

### Riešenie b) pomocou softvéru GeoGebra

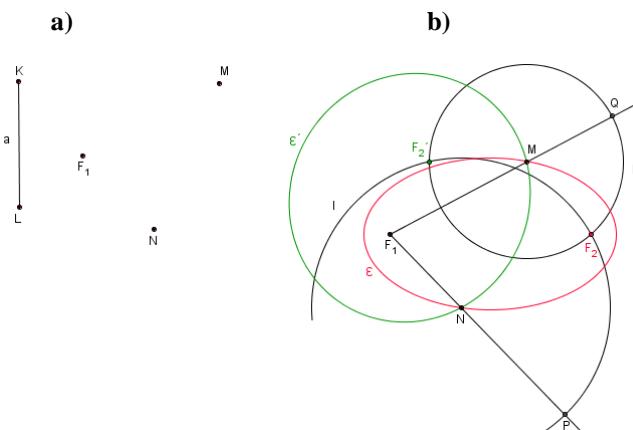
Na základe vstupných údajov a pomocou krokov z časti a) je vykreslené riešenie úlohy a v interakcii s GeoGebrou je možné vstupné dátá meniť.

Práve interakcia ponúkne okamžité vykreslenie elipsy alebo informáciu o neexistencii riešenia. Avšak bez vypracovanej časti a) príslušnej úlohy by sme nevedeli, čo program spracováva. To bol dôvod, prečo je najskôr zaradené riešenie a) pomocou rysovacích potrieb a následne riešenie b) pomocou softvéru GeoGebra. K ilustrácii vyberieme príklad 5. z II. skupiny príkladov (čísla obrázkov sú ako v texte [3]).

**Príklad 5.:** Zstrojte elipsu  $\varepsilon$ , ak je dané ohnisko  $F_1$ , jej dva body  $M, N$  (body  $F_1, M, N$  sú nekolineárne) a dĺžka hlavnej polosi je určená dĺžkou úsečky  $KL$ .

**Riešenie: a) pomocou rysovacích potrieb, obr. 3**

Vstup: ohnisko  $F_1$ , dĺžka hlavnej polosi  $a = /KL/, M, N \in \varepsilon$ , obr.3a).



Obr. 3: Riešenie príkladu 5

### Postup konštrukcie: (Obr. 3b)

1. Na polpriamke  $F_1M$  zostrojíme bod  $Q$ , pričom  $|F_1Q| = 2a = 2/|KL|$ .
2. Na polpriamke  $F_1N$  zostrojíme bod  $P$ , pričom  $|F_1P| = 2a = 2/|KL|$ .
3. Zostrojíme kružnicu  $k(M, |MQ|)$ .
4. Zostrojíme kružnicu  $l(N, |NP|)$ .
5. Vyznačíme  $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$ .

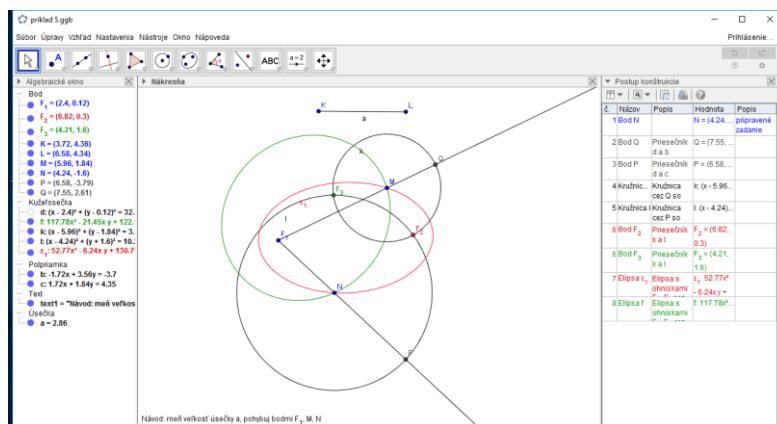
Výstup: elipsa  $\varepsilon(F_1, F_2, M)$ ,  $\varepsilon'(F_1, F_2', M)$

Diskusia: Počet riešení závisí na vzájomnej polohe kružník  $k, l$ :

- $k \cap l = \{F_2, F_2'\}$ , tak úloha má dve riešenia (obr. 3b)  
 $\varepsilon(F_1, F_2, M)$ ,  $\varepsilon'(F_1, F_2', M)$ ,
- $k \cap l = \{F_2\}$ , tak úloha má jedno riešenie,
- $k \cap l = \emptyset$ , tak úloha nemá riešenie.

Riešenie: b) pomocou softvéru GeoGebra

Ked'že čitateľ vie, čo zstrojoval, je vhodné použiť softvér GeoGebra, v ktorom je vykreslované riešenie s možnosťou zmeny vstupných dát. To je hlavný prínos GeoGebry – interakcia používateľa medzi vstupnými dátami a riešením úlohy.



Obr. 4: Grafický výstup z GeoGebry pre príklad 5

## 4 Elipsa – zbierka cvičení

K samostatnej práci a overeniu získaných poznatkov klasickou metódou t. j. pomocou rysovacích potrieb je zostavená zbierka cvičení. Odporuča sa zvoliť polohu resp. hodnotu vstupných údajov tak, ako ich ponúka zadanie ilustrované na obrázku.

Navrhnutých je 27 úloh, mnohé majú aj viac zadanií, označených a), b), c). Niektoré úlohy môžu mať dve riešenia, práve jedno riešenie alebo žiadne riešenie.

Napríklad: **Zadanie 6.**

Zostrojte elipsu, ak je dané ohnisko  $F_2$  a vedľajší vrchol  $C$ ,  $|F_2C| = 2,5j$ , a veľkosť vedľajšej polosi je: a)  $b = 3j$ ; b)  $b = 2,5j$ ; c)  $b = 2j$ .

Zbierka cvičení neobsahuje postup konštrukcie ani výsledky riešení. Je určená pre samostatnú prácu k overeniu získaných poznatkov z teoretickej časti či zo zbierky riešených príkladov.

## 5 Záver

Klasické metódy konštrukcie elipsy doplnené o interakciu v prostredí softvéru GeoGebra otvárajú širšie možnosti využitia. Najskôr tréning v syntetickom poňatí geometrických konštrukcií výrazne napomôže v technickej vizualizácii postupov nielen v deskriptívnej geometrii či konštrukčnej geometrii.

Našou snahou bolo, aby sme čitateľovi napomohli pri riešení úlohy tak, že :

- vezme si papier a rysovacie potreby;
- podľa zadania a návrhu hodnôt a polôh vstupných dát na obr. a) si ich zakreslí;
- podľa krokov postupu konštrukcie dosiahne údaje vhodné na vykreslenie elipsy pomocou rysovacích potrieb, ilustrované na obr. b).

Konštrukcie elipsy realizované pomocou rysovacích potrieb ale i v interakcii so softvérom GeoGebra súvisia s využívaním digitálnych technológií a predstavujú námet na inovatívne vyučovanie.

## Literatúra

- [1] M. Harant, O. Lanta: *Deskriptívna geometria pre SVŠ*, SPN, Bratislava 1965
- [2] L. Koreňová: *Digitálne technológie v školskej matematike*, KEC FMFIUK Bratislava 2015, ISBN 978-80-8147-025-7
- [3] S. Kudličková, A. Mackovová: *Metrické konštrukcie elipsy*, dostupné na internete: <https://flurry.dg.fmph.uniba.sk/webog/sk/kudlickova-vyucba/56-kudlickova/436-zobrazovacie-metody-2>
- [4] A. Urban: *Deskriptívni geometrie I*, SNTL, 1967

# Možnosti zásuvného modulu GeoGebra systému Moodle

## GeoGebra plug-in options for Moodle

Alexander Maťašovský, Tomáš Visnyai

*Institute of Information Engineering, Automation, and Mathematics,*

*Slovak University of Technology in Bratislava*

*Radlinského 9, 812 37 Bratislava, Slovak Republic*

*email: alexander.matasovsky@stuba.sk, tomas.visnyai@stuba.sk*

**Abstract.** The aim of the article is to present the making of GeoGebra questions with randomly generated elements and their using in online quizzes through learning management system Moodle.

**Keywords:** GeoGebra, online quiz, e-learning, e-testing.

**Kľúčové slová:** GeoGebra, online test, e-vzdelávanie, e-testovanie.

## 1 Úvod a motivácia

V dnešnej dobe je samozrejmostou, že na univerzitách jednotlivé predmety sú podporované aj elektronickými kurzami, kde študenti prihlásení do kurzov si môžu nájsť rôzne informácie, elektronické materiály k danému predmetu. V niektorých krajinách dokonca táto e-learningová forma vzdelávania nahradila tú klasickú formu vzdelávania. Na riadenie týchto elektronických kurzov existuje niekoľko systémov ako napríklad LMS Moodle (LMS – Learning Management System).

Tieto systémy okrem iného, podporujú aj tvorbu elektronických úloh z ktorých je možné zostaviť test a poskytnúť ich študentom na otestovanie získaných a osvojených vedomostí. Výhodou elektronického testovania je okamžitá spätná väzba pre študenta a pre učiteľa automatické vyhodnotenie odpovedí, manažment známok, variabilita testov a iné.

Prvý celoslovenský elektronický testovací systém pre základné a stredné školy vznikol v roku 2013 v rámci národného projektu *Zvyšovanie kvality vzdelávania na základných a stredných školách s využitím elektronického testovania*, ktorý realizoval Národný ústav certifikovaných meraní vzdelávania v rámci Operačného programu Vzdelávanie spolufinancovaný zo zdrojov Európskeho sociálneho fondu. Od roku 2015 vybrané základné a stredné školy sa každoročne zúčastnia na tzv. certifikačných testovaniach, ktorými sú pre základné školy Testovanie 5 a Testovanie 9 a pre stredné školy Maturita (pozri [2] alebo [5]).

Najčastejšími typmi otázok v elektronických testoch sú uzavreté otázky ako úloha s výberom jednej správnej odpovede z ponúkaných možností, úloha s výberom viac správnych odpovedí z ponúkaných možností alebo úloha

zoradovacia a otvorené otázky ako úloha s krátkou odpoveďou a úloha s doplnením odpovede/í do textu. Tieto systémy vedia jednoznačne vyhodnotiť len uzavreté otázky na základe definovaného kľúča správnych odpovedí. Odpovede na otvorené otázky ešte musia prechádzať manuálnou kontrolou zo strany učiteľa resp. hodnotiteľa.

Tvorba divergentných úloh, pri ktorých existuje niekoľko alternatívnych riešení ako napríklad konštrukčné úlohy, vôbec neprichádza do úvahy, keď hovoríme o elektronickom testovaní. Pridávaním zásuvného modulu Otázka typu GeoGebra (question type) do LMS Moodle vyrieší tento problém. V nasledujúcej časti si ukážeme, ako vytvoriť geometrickú úlohu v Moodle pomocou GeoGebra a ako ju využiť v online testovaní.

## 2 Tvorba úloh a testov

V nasledujúcim predpokladáme, že čitateľ pozná GeoGebru aspoň na používateľskej úrovni.

### 2.1 Tvorba úlohy v GeoGebre

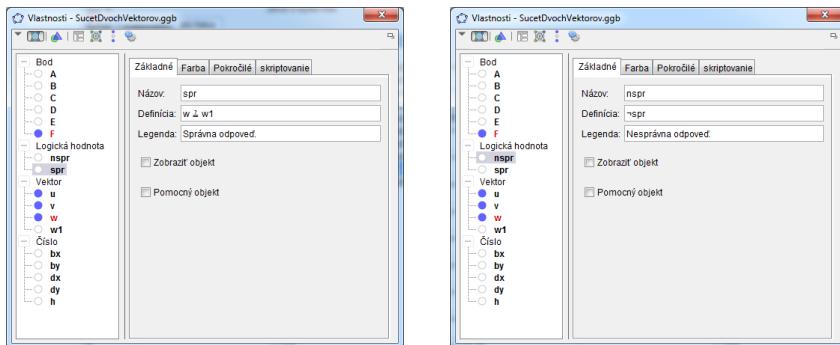
Úlohu do testu vytvoríme pomocou softvéru GeoGebra, ktorý je voľne dostupný a môžeme si ho stihnúť z webovej stránky pozri [3]. Alternatívnym riešením je tvorba úlohy v online prostredí GeoGebry. My sme si zvolili spôsob tvorby úlohy pomocou nainštalovaného softvéru v počítači.

Ako príklad si ukážeme úlohu, ako znázorniť súčet dvoch vektorov. Postup konštrukcie je popísaný v nasledujúcich bodoch.

1. Konštrukcia bodov A, C so súradnicami  $A=C=(0, 0)$ .
2. Definovanie náhodných čísel  $bx, by, dx$  a  $dy$  ako  

$$\text{NáhodnýPrvok}(\{-1, 1\}) * \text{NáhodnýPrvok}(\{1, 2, 3\}).$$
3. Definovanie čísla  $h=\text{HodnosťMatice}(\{\{bx, by\}, \{dx, dy\}\}).$
4. Konštrukcia bodu B so súradnicami  $B=(bx, by).$
5. Konštrukcia bodu D so súradnicami  $D=(Ak(h=1, -dx, dx), dy).$
6. Konštrukcia vektorov  $u=\text{Vektor}(A, B), v=\text{Vektor}(C, D).$
7. Konštrukcia riešenia, ako súčet vektorov  $w1=u+v.$
8. Konštrukcia bodov  $E=(0, 0), F=(1, 0)$  a vektora, ktorý je definovaný týmito bodmi  $w=\text{Vektor}(E, F).$
9. Definovanie logickej hodnoty pre správnu (spr) a pre nesprávnu (nspr) odpoveď, pričom  $spr=w=w1$  a  $nspr=-spr$  a do legendy si napíšeme spätnú väzbu (slovné hodnotenie) v tvare Správna odpoveď a Nesprávna odpoveď (pozri Obr. 1).

Našou snahou je vytvoriť náhodne generovanú úlohu, preto v bode 2 sме súradnice koncových bodov vektorov definovali ako náhodné čísla z množiny  $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ . Vylúčili sme tak nulový vektor a pomocou podmienok z bodov 3 a 5 sme vylúčili lineárne závislé vektory. Takto vytvorenú úlohu uložíme vo formáte ggb súboru.

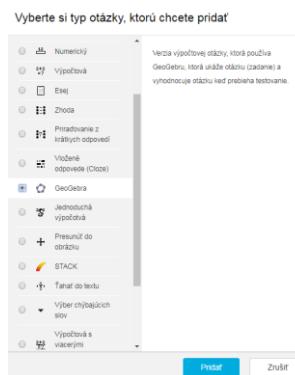


Obr. 1: Definovanie správnej a nesprávnej odpovede

## 2.2 Tvorba úlohy v Moodle

Aby sme mohli nahrať GeoGebra úlohu do Moodle je nutné, aby bol nainštalovaný zásuvný modul GeoGebra question type, ktorý si môžeme stiahnuť zo webstránky (pozri [3]). Inštalačia si vyžaduje práva administrátora.

V tejto časti sa predpokladá, že čitateľ pozná Moodle, vie ako sa vytvárajú úlohy a testy. V Moodle namiesto termínu „úloha“ sa používa „otázka“. Všade v ďalšom, kde na obrázku bude figurovať termín „otázka“, budeme pod nim rozumieť „úlohu“.



Obr. 2: Vytvorenie úlohy typu GeoGebra v Moodle

## 2.3 Nastavenia úlohy

Po kliknutí na tlačidlo „Pridať“ (Obr. 2) sa zobrazia základné nastavenia úlohy, ktoré sú uvedené v nasledujúcich bodoch (pozri [1] a [4]).

1. Kategória.
2. Názov otázky – povinný údaj.

3. Text otázky – povinný údaj a môže obsahovať aj parametre; pozri tiež 10. bod.
4. Východzia hodnota známky – preddefinovanou hodnotou je 1.
5. Všeobecná spätná väzba – je priestor na zadávanie textu, ktorý sa má zobraziť každému študentovi, keď zodpovedali konkrétnu úlohu. Toto pole sa dá rovnako využiť na zadávanie doplňujúcich informácií ako napríklad informácie o zdrojoch k danej téme.
6. URL alebo ID pracovného listu GeoGebra – môžeme použiť budť tlačidlo Šíriť na stránke GeoGebra a kopírovať a vložiť odkaz, alebo použiť úložisko GeoGebra. Applet a jeho parametre sú uložené priamo v Moodle databáze. Applet nebude znova načítaný z GeoGebry, ak o to nepožiadame; pozri tiež 8. bod.
7. ... alebo použí ggb súbor – pomocou techniky Čahaj a pust' (Drag and drop) môžeme premiestniť nami vytvorený ggb súbor z nášho počítača priamo na toto miesto. Ak použijeme túto metódu zobrazia sa nám ďalšie pokročilé nastavenia úlohy.
  - a. Povoliť pravé kliknutie a úpravy pomocou klávesnice.
  - b. Povoliť premiestňovanie pomenovaní.
  - c. Ukáž ikonu na resetovanie konštrukcie.
  - d. Povoliť Shift-Drag a Zoom.
  - e. Ukáž Menu.
  - f. Ukáž paletu nástrojov.
  - g. Ukáž príkazový riadok.
8. (Znovu) načítanie a zobrazenie appletu – (znovu) načítanie appletu z GeoGebry a uloženie novej verzie do Moodle databázy.
9. Existujú nejaké premenné, ktoré by mali byť náhodne zvolené? – môže mať hodnotu „Áno“ alebo „Nie“.
10. Nastavovanie premenných za náhodné – zoznam premenných, ktoré by mali byť náhodne zvolené (oddelené čiarkami). Náhodne môžu byť zvolené len hodnoty posuvníka vytvorené v GeoGebre, pričom je definovaná jeho minimum, maximum a veľkosť kroku. Tieto premenné môžu byť tiež použité aj v texte zadania ako dynamické texty len musíme ich uviesť v množinových zátvorkách napr. {a} je odkaz na premennú „a“.
11. Obmedzenia (podmienky) – ak existujú nejaké obmedzenia resp. podmienky pre premenné napr.  $a < b$ , tak ich možno uviesť na tomto mieste. Jednotlivé podmienky treba oddeliť pomocou čiarky. Podporované relácie medzi premennými sú  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$ .
12. Premenná n – ak chceme použiť automatické vyhodnotenie úlohy a ak GeoGebra applet obsahuje logickú premennú pre (čiastočne) správnu resp. nesprávnu odpoveď, tak toto pole sa vyplňa automaticky po nahratí úlohy do Moodle. Nastavením známky, Moodle dokáže automaticky vyhodnotiť úlohu (Obr. 3).

13. Spätná väzba – je automaticky prevzatá z Legendy danej premennej GeoGebra súboru (Obr. 3).

Premenná 1	<input type="text" value="spr"/> ⓘ Premenná 1 spr	Známka	100%
Spätná väzba	<input type="text" value="Správna odpoveď."/> ⓘ Správna odpoveď.		
Premenná 2	<input type="text" value="nspr"/> ⓘ Premenná 2 nspr	Známka	Žiadne
Spätná väzba	<input type="text" value="Nesprávna odpoveď."/> ⓘ Nesprávna odpoveď.		

Obr. 3: Automaticky doplnená správna a nesprávna odpoveď z GeoGebra úlohy s hodnotením a s príslušnou spätnou väzbou

## 2.4 Úloha v teste a vyhodnotenie odpovede

Na základe nastavení úlohy v bode 2.3 sa v teste zobrazí dynamická úloha na tému súčet dvoch vektorov. Dynamická v tom zmysle, že každému študentovi sa náhodne zobrazia dva vektorov a ich úlohou je premiestniť koncový bod zobrazeného vektora na správne miesto tak, aby reprezentoval ich súčet (Obr. 4 a Obr. 5).

**Olázká 1**  
 Čo je  
 Študent  
 nezodpovedal  
 Max.  
 hodnotenie 1,00

Posunutím koncového bodu vektora  $\vec{w}$  zobrazte vektor  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Obr. 4: Zobrazenie GeoGebra úlohy v teste vytvorenom v Moodle na základe nastavení (začiatočný stav)

Otázka 1  
Správna odpoveď  
Max. hodnotenie 1,00

Posunutím koncového bodu vektora  $\vec{u}$  zobrazte vektor  $\vec{u} + \vec{v}$ .

Správna odpoveď:

Obr. 5: Automatické vyhodnotenie odpovede a zobrazenie späťnej väzby

### 3 Záver

Ukázali sme ďalšie, menej známe využitie GeoGebry vo forme testovacej úlohy prostredníctvom LMS Moodle a tým sme dali možnosť učiteľom zaradíť do didaktických testov aj úlohy zo širšej oblasti geometrie.

### Pod'akovanie

Tento článok je podporený finančným príspevkom Kultúrnej a edukačnej grantovej agentúry MŠVVaŠ SR pod číslom KEGA 047STU-4/2016.

### Literatúra

- [1] DRLÍK M. a kol. *Moodle - Kompletní průvodce tvorbou a správou elektronických kurzů*. 1. vyd. Brno : Computer Press, 2013. 344 s. ISBN 978-80-251-3759-8.
- [2] *E-test* [online] [cit. 2017-09-20]. <<http://www.etest.sk/>>
- [3] *GeoGebra – Dynamic Mathematics* [online] [cit. 2017-09-20]. <<https://www.geogebra.org/home>>
- [4] *Moodle plugins directory – Moodle.org* [online] [cit. 2017-09-20]. <<https://moodle.org/plugins/>>
- [5] *NÚCEM* [online] [cit. 2017-09-20]. <<http://www.nucem.sk/sk/>>

# Non-Euclidean polyhedral manifolds, models and visualization

Emil Molnár and Jenő Szirmai

*Budapest University of Technology and Economics, Institute of Mathematics, Department of Geometry  
Budapest, P.O. Box: 91, H-1521, Hungary  
emolnar@math.bme.hu, szirmai@math.bme.hu*

**Abstract.** As a byproduct of our recent papers [4], [6], and the previous initiative of the first author, we have recently found an infinite sequence of hyperbolic polyhedra  $Cw(2z, 2z, 2z)$  ( $6 \leq 2z, 3 \leq z$  odd integer) which can be equipped with a fixed point free face pairing, as a gluing procedure, so that the polyhedron become a compact hyperbolic manifold. That means each point has a ball-like neighbourhood. The visualization of such "finite Worlds" seems to be a timely task, and we try to involve our students as well. First, we model the famous hyperbolic football manifold, and restrict ourselves only for  $Cw(6, 6, 6)$  manifold as in [6]. The description of fundamental groups and other properties, moreover visualization of such "finite Worlds" seem to be interesting problems, as well.

**Keywords:** Fixed point free isometry group of hyperbolic space, infinite series of compact hyperbolic manifolds and possible material structures (nanotubes).

## 1 Introduction

Complete Coxeter simplex (now orthoscheme)  $\mathcal{O} = W_{uvw}$ , its extended Coxeter's reflection group  $\mathbf{G}$  and its symmetric Coxeter-Schläfli matrix ( $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ )

$$(b^{ij}) = (\cos(\pi - \alpha_{ij})) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\alpha_{01}) & -\cos(\alpha_{02}) & -\cos(\alpha_{03}) \\ -\cos(\alpha_{10}) & 1 & -\cos(\alpha_{12}) & -\cos(\alpha_{13}) \\ -\cos(\alpha_{20}) & -\cos(\alpha_{21}) & 1 & -\cos(\alpha_{23}) \\ -\cos(\alpha_{30}) & -\cos(\alpha_{31}) & -\cos(\alpha_{32}) & 1 \end{pmatrix} = (\langle \mathbf{b}^i, \mathbf{b}^j \rangle) \quad (1.1)$$

are mean tools of describing regular polyhedra in absolute geometry, their metric realization in Euclidean space  $\mathbf{E}^3$  (signature of  $(b^{ij})$  is  $(+, +, +, 0)$ ), in spherical space  $\mathbf{S}^3$  (signature is  $(+, +, +, +)$ ), or in the Bolyai-Lobachevskian hyperbolic space  $\mathbf{H}^3$   $(+, +, +, -)$ , respectively.

Here projective spherical space  $\mathcal{PS}^3(\mathbf{V}^4, \mathbf{V}_4, \mathbf{R}, \sim^+)$  on real ( $\mathbf{R}$ ) vector space  $\mathbf{V}^4$ , its dual form space  $\mathbf{V}_4$ , model points (see [5]):  $(\mathbf{x}) = (\mathbf{y})$  iff  $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}^4$ ,  $c \in \mathbf{R}^+$  (positive reals), planes:  $(\mathbf{u}) = (\mathbf{v})$  iff  $\mathbf{v} = \frac{1}{c}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_4$ ,  $\frac{1}{c} \in \mathbf{R}^+$ . Point  $X = (\mathbf{x})$  is incident to plane  $U = (\mathbf{u})$  iff  $\mathbf{x}\mathbf{u} = 0$ . It stands  $X \in u^+$ , i.e.  $X$  lies in the positive half-space (half-sphere)  $u^+$ , iff  $\mathbf{x}\mathbf{u} > 0$ , i.e. the form  $\mathbf{u}$  take positive real value

on the vector  $\mathbf{x}$ . Identifying opposite points  $(\mathbf{x})$  and  $(-\mathbf{x})$  (and forms  $(\mathbf{u}) \sim (-\mathbf{u})$ ), we get projective space  $\mathcal{P}^3(\mathbf{V}^4, \mathbf{V}_4, \mathbf{R}, \sim)$  for modelling Euclidean and hyperbolic geometry (also elliptic space) in the usual way.

For regular Platonic polyhedron  $P(u, v, w)$  we introduce the characteristic Coxeter - Schläfli orthoscheme  $A_0A_1A_2A_3$  (Fig. 1.a) where  $A_3$  is the 3-centre (or solid centre) of the polyhedron, then  $A_2$  is a 2-centre (face centre) of  $P$ ,  $A_1$  is the 1-centre of an incident (to the previous face) edge, finally  $A_0$  is a vertex of the previous edge. At the same time we introduce the side faces  $b^0, b^1, b^2, b^3$  of  $A_0A_1A_2A_3$ , so that  $b^i = A_jA_kA_l$ ,  $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$ .  $A_i$ -s will be characterized by the vectors  $\mathbf{a}_i \in \mathbf{V}^4$ , while  $b^j$ -s will be by the forms  $\mathbf{b}^j \in \mathbf{V}_4$ . The Kronecker symbol  $\delta_i^j = \mathbf{a}_i \mathbf{b}^j$  just describes the incidences of the above simplex as a projective coordinate simplex as well. For the regularity of  $P$  we assume (postulate) the angles

$$\angle b^i b^j = \alpha_{ij}, \text{ so that } \alpha_{01} = \frac{\pi}{u}, \alpha_{12} = \frac{\pi}{v}, \alpha_{23} = \frac{\pi}{w},$$

$$(3 \leq u, v, w \in \mathbf{N}), \text{ the others are } \alpha_{02} = \alpha_{03} = \alpha_{13} = \frac{\pi}{2} \text{ (rectangle).} \quad (1.2)$$

Thus, we also guaranteed  $A_0A_1A_2A_3 = b^0b^1b^2b^3$  to be the characteristic orthoscheme of the regular polyhedron  $P(u, v, w)$  with regular  $u$ -gon faces, meeting  $v$  pieces at each vertex. Then  $\frac{\pi}{u} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{v} > \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{u} + \frac{\pi}{v} > \frac{\pi}{2}$  for the angle sum of spherical triangle, guarantees  $A_3$  as proper centre. This is equivalent with

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{u} & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{u} & 1 & -\cos \frac{\pi}{v} \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{v} & 1 \end{bmatrix} > 0 \text{ and } (+, +, +, \cdot) \quad (1.3)$$

in the signature of the very important quadratic form

$$b^{ij}u_iu_j = (b^{00}u_0u_0 + 2b^{01}u_0u_1 + b^{11}u_1u_1 + 2b^{12}u_1u_2 + b^{22}u_2u_2) + \quad (1.4)$$

$$+ 2b^{23}u_2u_3 + b^{33}u_3u_3.$$

Similarly, the vertex  $A_0$  will be proper iff

$$\frac{\pi}{v} + \frac{\pi}{w} > \frac{\pi}{2}. \quad (1.5)$$

Thus, the face angle  $\alpha_{23} = \frac{\pi}{w}$  will be important for  $P$ , so that it will be a space-filler regular polyhedron,  $w$  pieces meeting at each edges.

Now the hyperbolic regular mosaic (honeycomb) with congruent pieces of  $P$  will be characterized just the determinant of (1.1) specified by

$$\det(b^{ij}) < 0. \quad (1.6)$$

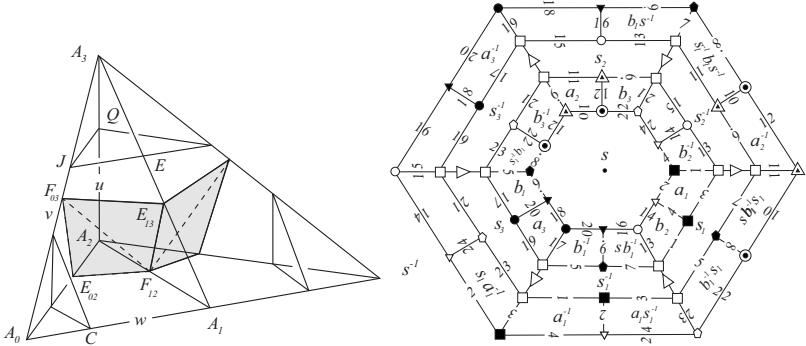


Figure 1:

Now we consider doubly truncated orthoschemes, as in Fig. 1.a , where  $\frac{\pi}{u} + \frac{\pi}{v} < \frac{\pi}{2}$  guarantees that  $A_3$  is outer point. Then we cut (truncate) the simplex with its polar plane  $a_3 = QEJ$ . Furthermore, we assume that  $\frac{\pi}{v} + \frac{\pi}{w} < \frac{\pi}{2}$  i.e.  $A_0$  is also outer vertex with truncating polar plane  $a_0$ . The corresponding minor determinant is also negative, as the complete determinant in (1.6), too. Our aim in [2] was to construct the first non-orientable series (besides orientable ones) on generalized regular polyhedron  $P_Q$  with centre  $Q$  in Fig. 1.a, where 4u truncated orthoschemes meet. Moreover, we intended to equip this  $P_Q$  with face identification (gluing procedure) so that this  $\tilde{P}_Q$  has hyperbolic ball-like neighborhood in each point. To that procedure  $u = v = w$  even was needed. *But then the complete (truncated) orthoscheme  $\mathcal{O} = W_{uuu}$  have an additional halfturn  $\mathbf{h}$  about axis  $F_{03}F_{12}$ , where  $F_{03}$  and  $F_{12}$  are midpoints of  $A_0A_3$  and  $A_1A_2$ , respectively. So the problem arises, whether a smaller hyperbolic space form (a half of the previous one) can also be constructed. Our results are shortly formulated in (see [7])*

**Theorem 1.1** *The cobweb manifold  $Cw(6,6,6)$  to Fig. 1 has been constructed by face identification in Fig. 1.b.*

*The fundamental group  $Cw(6,6,6)$  can be described by three generators and three relations in formulas (2.13-15).*

*The volume of  $Cw(6,6,6)$  is  $\approx 8.29565$ . The largest ball contained in  $Cw(6,6,6)$  is of radius  $r \approx 0.57941$ . The diameter of  $Cw(6,6,6)$  is  $2R \approx 3.67268$ .*

## 2 Construction of cobweb manifold $Cw(6,6,6)$

By the theory of [8] we have to construct a fixed point free group acting in hyperbolic space  $\mathbf{H}^3$  with compact fundamental domain.

In [7] and in the Introduction to Fig. 1 we have described the extended reflection group  $\mathbf{G}(6,6,6)$  to the complete Coxeter orthoscheme  $\mathcal{O} = W_{666}$  and glued together the cobweb polyhedron  $Cw(6,6,6)$  as Dirichlet-Voronoi (i.e. D-V) cell of the kernel point  $Q$  by its orbit under the group  $\mathbf{G}(6,6,6)$ . Now by Fig. 1.b we shall give the face identification of  $Cw(6,6,6)$ , so that it will be fundamental polyhedron of the fixed-point-free group, denoted also by  $\mathbf{Cw}$ , generated just by the face identifying isometries (as hyperbolic screw motions).

The complete construction of  $\tilde{C}w(6,6,6)$  has appeared in Fig. 1.b with face pairs, signed and numbered (from 1 to 24) edge triples, signed vertex classes, all together  $1 + 3 \times 3 = 10$  vertex classes.

In the previous considerations we described the extended complete reflection group  $\mathbf{G}(6,6,6)$ . Fig. 1.a, by its fundamental domain, where the stabilizer subgroups of  $\mathbf{G}$  can also be established. By gluing  $4u = 24$  domains at  $Q$  (whose stabilizer subgroup  $\mathbf{G}_Q$  is just of order  $|stab_Q \mathbf{G}| = 4u = 24$ ) we can "kill out" the fixed points of  $\mathbf{G}$ .

To this  $v = u = 6$  edge domains (signed by  $\rightarrow$ ) is just necessary and sufficient at the former edge  $F_{03}J$  of half  $W_{666}$  for a ball-like neighbourhood of points in  $\rightarrow$  edges. This can be achieved by 3 screw motions  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  for the 6 middle faces of the cobweb  $Cw(6,6,6)$ ,  $\mathbf{s}_i : s_i^{-1} \rightarrow s_i$ . The 12 images of the former  $F_{03}$  will form a vertex class  $\square$ , since  $|stab_{F_{03}} \mathbf{G}| = 4v = 24$  and just  $24 (= 4u)$  domains will form the ball-like neighbourhood at these 12  $\square$ -images.

The most crucial roles are played by the former edges at the halving planes of the orthoscheme  $W_{666}$  to the half-turn axis  $F_{03}F_{12}$ . The stabilizers of the mirror points are of order 2 divided into two parts at  $W_{666}$ , namely at  $F_{03}E_{02}$  and at  $F_{03}E_{13}$  for the odd numbered edges 1, 3, ..., 21, 23, and of  $F_{12}E_{02}$ ,  $F_{12}E_{13}$  for the even numbered edges 2, 4, ..., 22, 24, respectively. The different roles of reflection mirrors of  $m^1$  and  $m^2$ , resp.  $m^0$  and  $m^3$  in the gluing procedure at  $Q$  yield that both edge classes appear in three copies on the cobweb polyhedron  $Cw(6,6,6)$ , each of both classes maintains ball-like neighborhood at each point of them.

Now comes our tricky constructions for identifying the former half-turn faces, furthermore the two base faces  $s^{-1}$  and  $s$  of  $Cw(6,6,6)$  with each other (see Fig. 1.a). Two from the edge triple 1 (to  $F_{03}E_{13}$ ) lie on the faces  $s_1^{-1}$  and  $s_1$ , we introduce the deciding third edge 1 (to  $F_{03}E_{12}$ ) and the orientation preserving motions  $\mathbf{a}_1 : a_1^{-1} \rightarrow a_1$  and its inverse  $\mathbf{a}_1^{-1} : a_1 \rightarrow a_1^{-1}$  by the mapping faces  $a_1^{-1}, a_1$ . This edge triple 1 with faces  $s_1^{-1}, s_1, a_1^{-1}, a_1$  defines a third face pairing identification  $\mathbf{b}_2 : b_2^{-1} \rightarrow b_2$  so that

$$1 : \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{s}^1 = \mathbf{b}_2 \text{ holds.} \quad (2.1)$$

Namely, three image polyhedra join each other, e.g. at the first 1 edge in

space  $\mathbf{H}^3$  (now in combinatorial sense):

$$a_1^{-1}(Cw)s_1^{-1}, \quad s_1^{s_1^{-1}}(Cw)^{s_1^{-1}b_2^{s_1^{-1}}}, \quad (b_2^{-1})^{b_2s_1^{-1}}(Cw)^{b_2s_1^{-1}a_1^{b_2s_1^{-1}}}. \quad (2.2)$$

Now comes again the identity polyhedron through the images

$$(a_1^{-1})^{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{s}_1^{-1}}(Cw)^{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{s}_1^{-1}}(s_1^{-1})^{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{s}_1^{-1}}. \quad (2.3)$$

That means we get

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\mathbf{s}_1^{-1} = \mathbf{1} \text{ the identity} \Leftrightarrow \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{s}_1, \quad (2.4)$$

indeed as in (2.1).

This general method for space filling with fundamental polyhedron, equipped by face pairing generated group, has been discussed in [3] in more details.

The next edge class 3 defines the new face pairs with motion

$$3 : \mathbf{s}_1\mathbf{a}_1^{-1} : a_1s_1^{-1} \rightarrow s_1a_1^{-1} \text{ and its inverse } \mathbf{a}_1\mathbf{s}_1^{-1} : s_1a_1^{-1} \rightarrow a_1s_1^{-1}. \quad (2.5)$$

The next edge class 2 (to edges  $F_{12}E_{13}$ ,  $F_{12}E_{02}$ ), again with triple, just defines the identification of the base faces of  $Cw(6, 6, 6)$ :

$$2 : \mathbf{s} = (\mathbf{a}_1\mathbf{s}_1^{-1})\mathbf{a}_1 : s^{-1} \rightarrow s, \quad (2.6)$$

as a screw motion  $\mathbf{s}$  with  $2\pi/3$  rotation. Repeating  $\mathbf{s}$  we get a "nanotube" and - finally a tiling with it - for the later material structure.

For the edge triple 4 (to  $F_{12}E_{13}$ ,  $F_{12}E_{02}$ ) we get relation

$$4 : \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2^{-1}(\mathbf{s}_1^{-1}) = \mathbf{1} \text{ which will be } \mathbf{a}_1(\mathbf{s}_1^{-1}\mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{s}_1\mathbf{a}_1^{-1}) = 1 \\ \text{a trivial relation for generators } \mathbf{a}_1 \text{ and } \mathbf{s}_1. \quad (2.7)$$

Our next "lucky" choice (it comes from the starting triples 1) for edge triple 5 was influenced by the trigonal symmetry of our cobweb polyhedron  $Cw(6, 6, 6)$ . Then the triples 6, 7, 8 follow as formulas in (2.8) show

$$5 : \mathbf{s}_1^{-1}\mathbf{b}_1, \quad 6 : \mathbf{b}_1\mathbf{s}^{-1}, \quad 7 : (\mathbf{s}\mathbf{b}_1^{-1})\mathbf{s}_1, \quad 8 : (\mathbf{s}_1^{-1}\mathbf{b}_1)\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{s}\mathbf{b}_1^{-1}\mathbf{s}_1) = \mathbf{1}. \quad (2.8)$$

The last relation to edge class 8 is trivial again.

The procedure is straightforward now, and it nicely closes. The edge triple 9 defines the face pairing motion

$$\mathbf{a}_2 : a_2^{-1} \rightarrow a_2 \text{ moreover, a new motion } \mathbf{a}_2^{-1}\mathbf{s}_2 = \mathbf{b}_2. \quad (2.9)$$

The further triples 10 – 16 and identifications are completely analogous. The same holds for edge triples 17 – 24, starting with the face pairing motion  $\mathbf{a}_3$ .

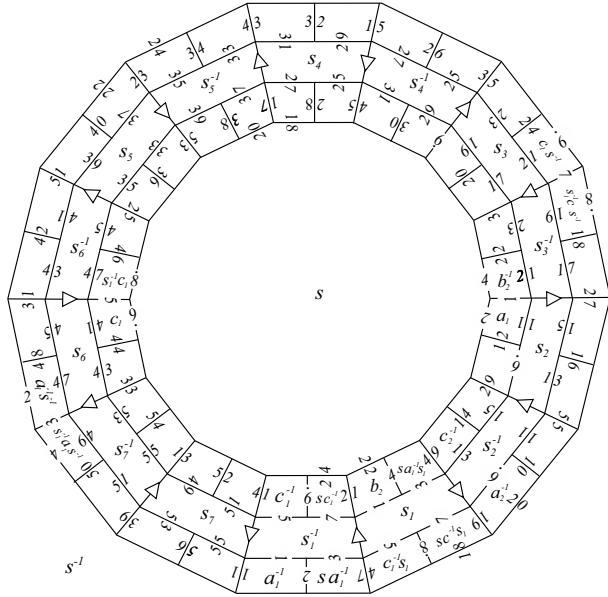


Figure 2:

It turns out that the first three screw motions  $s_1, s_2, s_3$  can be expressed by  $a_1, a_2, a_3$  and  $s$  at triples 2, 10, 18, respectively:

$$s_1 = a_1 s^{-1} a_1, \quad s_2 = a_2 s^{-1} a_2, \quad s_3 = a_3 s^{-1} a_3. \quad (2.10)$$

The relation, to the middle edge class  $\rightarrow$  of 6 edges yields then the relation

$$1 = (a_1 s^{-1} a_1)^2 (a_2 s^{-1} a_2)^2 (a_3 s^{-1} a_3)^2 \quad (2.11)$$

for the fundamental group of our cobweb manifold  $Cw(6,6,6)$ . But in this cyclic process, the pairing motion  $b_1$  to edge class 5 is not independent. Similarly to  $1 : b_2 = a_1^{-1} s_1 = s^{-1} a_1$ , as above, we cyclically obtain  $b_1 = a_3^{-1} s_3 = s^{-1} a_3$ . So we get, at the edge class 7, the motion  $(s b_1^{-1}) s_1 = s(a_3^{-1} s)(a_1 s^{-1} a_1)$ ,

$$1 = (s a_3^{-1} s a_1 s^{-1} a_1) s a_2^{-1}, \quad (2.12)$$

as well at (2.11). Analogously, at edge class 19, so we get the relations

$$1 = (s a_1^{-1} s a_2 s^{-1} a_2) s a_3^{-1}; \text{ and}$$

$$1 = s a_2^{-1} s a_3 s^{-1} a_3 s a_1^{-1}; \text{ eliminating } a_3, \text{ we get} \quad (2.13)$$

$$1 = s a_2^{-1} s (s a_1 s^{-1} a_1 s a_2^{-1} s) s^{-1} (s a_1^{-1} s a_2 s^{-1} a_2 s) s a_1^{-1},$$

$$\text{so } 1_{18} = s a_2^{-1} s^2 a_1 s^{-1} a_1 s a_2^{-1} s a_1^{-1} s a_2 s^{-1} a_2 s^2 a_1^{-1}.$$

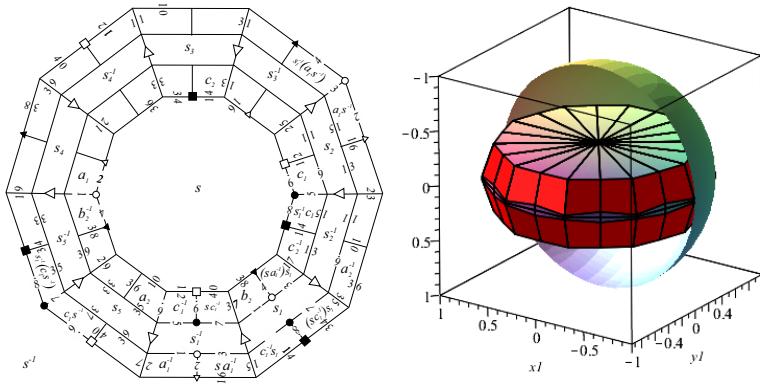


Figure 3:

Thus,  $\mathbf{a}_3$  can be expressed, from (2.12) and (2.13), keeping  $1 \leftrightarrow 2$  symmetry, and we obtain for the fundamental group  $\mathbf{Cw}(6,6,6)$  three relations for the three generators  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{s}$ . From (2.12-13) we get first (a 10 letters relation)

$$\mathbf{1}_{10} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{s}^{-1} \mathbf{a}_1 \mathbf{s} \mathbf{a}_2^{-1} \mathbf{a}_2^{-1} \mathbf{s} \mathbf{a}_2^{-1} \mathbf{s}^{-1}, \quad (2.14)$$

Second, from (2.11) we obtain (a 38 letters relation), symmetrically with indices 1 and 2,

$$\mathbf{1}_{38} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{s}^{-1} \mathbf{a}_1)^2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{s}^{-1} \mathbf{a}_2)^2 (\mathbf{s} \mathbf{a}_1 \mathbf{s}^{-1} \mathbf{a}_1 \mathbf{s} \mathbf{a}_2^{-1} \mathbf{s} \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{s} \mathbf{a}_2 \mathbf{s}^{-1} \mathbf{a}_2 \mathbf{s})^2. \quad (2.15)$$

But we do not give more details, e.g. the first homology group  $\mathbf{H}_1$  of manifold  $Cw(6,6,6)$ , by the commutator factorgroup of  $\mathbf{Cw}(6,6,6)$  can easily be determined, as  $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_6$  direct product of cyclic groups.

Of course, this group  $\mathbf{Cw}$ , is a subgroup of our former  $\mathbf{G}(6,6,6)$  by Fig. 1.b. These generators  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{s}$  can be expressed by the former reflections  $\mathbf{m}^0, \mathbf{m}^1, \mathbf{a}_3$  and the half-turn  $\mathbf{h}$  about  $F_{03}F_{12}$  (Fig. 1.a).

The above manifold  $Cw(6,6,6)$  with  $6 = 2z$ , i.e.  $z = 3 = 4p - 1$ , i.e.  $p = 1$  provides us the analogous case  $Cw(14,14,14)$  with  $14 = 2z$ , i.e.  $z = 7 = 4p - 1$ , i.e.  $p = 2$  (see Fig. 2). The screw motion  $\mathbf{s}$  has a rotation component  $\frac{2\pi(z-1)}{2z}$ .

### 3 Construction of cobweb manifold $Cw(10,10,10)$

In this section we only note, that we obtain similarly to the above section the cobweb manifold  $Cw(10,10,10)$ . The face pairing structure of this manifold can be derived by Fig. 3.a. Fig. 3.b shows the Dirichlet-Voronoi

cell of group **Cw**(10, 10, 10) with kernel point  $Q$  (see Fig. 1.a). The screw motion  $s$  has rotation component  $\frac{2\pi(z-1)}{2z}$ . We plan to turn back to this topic in more comprehensive paper.

## References

- [1] Cavichioli, A. – Molnár, E. – Spaggiari, F. – Szirmai, J., Some tetrahedron manifolds with **Sol** geometry. *J. Geometry*, **105/3** (2014), 601-614.
- [2] Molnár, E., Space forms and fundamental polyhedra. *Proceedings of the Conference on Differential Geometry and Its Applications, Nové Město na Moravě, Czechoslovakia 1983. Part 1. Differential Geometry*, (1984), 91-103.
- [3] Molnár, E., Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations. *Acta Math. Hung.*, **59 (1-2)** (1992), 175-216.
- [4] Molnár, E., On non-Euclidean crystallography, some football manifolds. *Structural Chemistry*, **23 /4** (2012), 1057-1069.
- [5] Molnár, E. – Szirmai, J., Symmetries in the 8 homogeneous 3-geometries. *Symmetry Cult. Sci.*, **21/1-3** (2010), 87-117.
- [6] Molnár, E. – Szirmai, J., Top dense hyperbolic ball packings and coverings for complete Coxeter orthoscheme groups. *Submitted Manuscript*, (2016), arXiv: 161204541v1.
- [7] Molnár, E. – Szirmai, J., On hyperbolic cobweb manifolds. *Stud. Univ. Zilina. Math .Ser.*, **28, 43-52.**, **28** (2016), 43-52.
- [8] Wolf, J.A., *Spaces of Constant Curvature*. McGraw-Hill, New York, 1967, (Russian translation: Izd. "Nauka" Moscow, 1982).

# Tensegrity structures - the idea and the realization

Monika Sroka-Bizoń, Piotr Polinceusz

*Div. of geometry and engineering graphics, Dept. of general construction and physics of buildings, Fac. of Civil Engineering, Silesian Univ. of Technology*

*Krzywoustego 7, 44-100 Gliwice, Poland*

*email: [monika.sroka-bizon@polsl.pl](mailto:monika.sroka-bizon@polsl.pl); [piotr.polinceusz@polsl.pl](mailto:piotr.polinceusz@polsl.pl)*

**Abstract.** The idea of tensegrity structures is very interesting. And the history of developing this idea is interesting either. Who is the original author of the concept? Master or pupil? The authors are trying to give the answer on the question, in the paper. And the general idea of tensegrity has been presented in it, too.

**Key words:** tensegrity structure, architecture, geometry

## 1 Introduction – the history of the idea

The concept of “tensegrity”, tensional integrity, was firstly patented in 1962, by Richard Buckminster Fuller. But in real, the concept of the structure, which is composed of simple rods and strings, has been started earlier, and more then only one inventor had been working over it. The idea of tensegrity is most often associated with three creators: Richard Buckminster Fuller, Kenneth Snelson and David G. Emmerich. But the research of literature, which has been realised by authors, has led to conclude that the undoubted contribution to the formation of the concept of tensegrity is related to the work of the Soviet constructivists and Bauhaus professors.

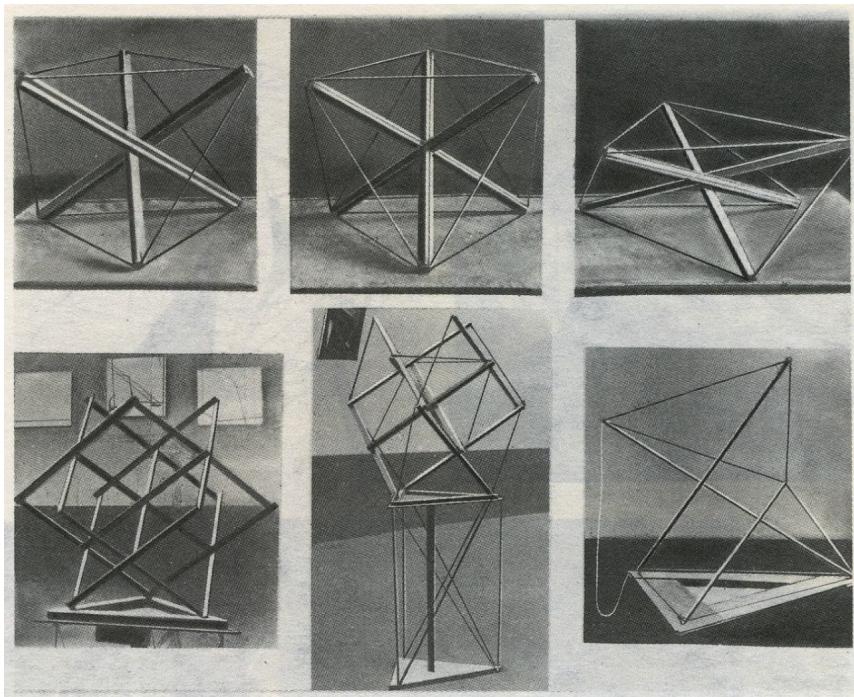
Each of three the most famous tensegrity creators, Fuller, Snelson and Emmerich, has patents related to the concept of tensegrity. [1] Two of them, Kenneth Snelson and Richard Buckminster Fuller, had possibility to work together over the concept, at the Black Mountain College in North Carolina, in the USA. The third one, David G. Emmerich, had been working regardless, in Paris, in France. Sneller's and Fuller's collaboration started by accident. Kenneth Snelson as a student of art had been met Richard Buckminster Fuller at the Black Mountain College in 1948. Fuller had been working there as a lecturer and Snelson had been assisted and helped him with construction of geometrical models which were necessary for Fuller's lectures. On a base of such relationship of academic teacher and student, Kenneth Snelson presented to Fuller his concepts of spatial structures, with the most important one, called by him X - Piece. Richard Buckminster Fuller was very interested in this structure and described it as “*discontinuous - pressure - and continuous tension structural advantage*”. Snelson's model was a base for further Fuller's publications connected with the idea of *tensional integrity* and even for his further patents of tensegrity structures. The background of Snelson's spatial structure and his interest of them probably

went from another *relationship of academic teacher and student*. At the Black Mountain College, Kenneth Snelson took part in three - dimensional design class of Josef Albers, the teacher of Bauhaus. Josef Albers, during his activity in the USA, focused his interest in painting; he is known as the one of the most famous American colour specialists. At the Bauhaus he were working with another famous artist, Hungarian, Laszlo Moholy Nagy, the author of book for students of Bauhaus - Von Material zu Architecture. They were working together as the directors of the beginning course of the Bauhaus and they were responsible of metal and wooden workshops. Laszlo Moholy Nagy was special interested in the idea of constructivism. He had presented pictures of exhibition of works of the group of young Soviet artists called *Constructivists* in his book. The exhibition took place in Moscow, in 1921. There were presented 21 works there, and 9 of them, spatial structures constructed with rods and strings, were composed by Karl Ioganson, the Latvian artist. [2]

It is very probably that Josef Albers during his three - dimensional design classes, which had been taken place in Black Mountain College, had inspired students by constructivism idea. In this area, unfortunately, such conclusion cannot be relied on publishing literature, one can only speculate on the basis of the description left by Kenneth Snelson, which presents its genesis of tensegrity. [3] But the third of the most famous creators of tensegrity, David G. Emmerich, left publication in which he describing work of Karl Ioganson *Study in Balance* and he related it to the Laszlo Moholy Nagy book. According to Emmerich's description, Ioganson's structure was consisted of three struts and nine cables, but he realized that cables were not prestressed.



Fig. 1: **Kenneth Snelson work - X - Piece;** <http://www.tensegriteit.nl/exmodule.html>



**Fig. 2: Second exhibition of young artists - Moscow, 1921 - Works of Karl Loganson - Spatial structures; [http://monoscop.org/Karl\\_Loganson](http://monoscop.org/Karl_Loganson)**

## 2 The general idea

Richard Buckminster Fuller have been described the tensegrity concept as *islands of compression inside an ocean of tension*. [3] But this definition is very broad and general. In accordance with this definition - inflated balloon could be classified as a tensegrity structure. Attempts to define the tensegrity system have been made by many researchers: Anthony Pugh (1976), Schodeck (1993), Bin-Bing Wang (1998), René Motro (2003) and many others [1]

According to Valentin Gomez Jauregui publication, related to architectural application of tensegrity, *tensegrity is a structural principle based on the use of isolated components in compression inside a net of continuous tension, in such a way that the compressed members, usually bars and struts, do not touch each other and the prestressed tensioned members, usually cables or tendons, delineate the system spatially.* [Gomez...]. The authors have adopted the following definition of tensegrity structures for research and comparative analysis: *Tensegrity structures are spatial structures composed of simple rods and strings, in which mutual stabilization of the stretched and compressed elements occurs. They are characterized*

*by durability comparable to lattice systems.* Tensegrity structures can be divided into several groups. One of the more precise subdivisions was formulated by Anthony Pugh and was based on the subdivision of flat structures and spatial structures. According to Pugh subdivision - flat structures are concentric or not concentric. Spatial structures are: regular, non regular, prismatic, spherical and others. [4]

Tensegrity structures						
2D structures		3D structures				
concentric	not concentric	regular	not regular	prismatic	spherical	others

Table 1. Subdivision of tensegrity structures according to A. Pugh

### 3 Tensegrity structures in Architecture

The research interests of authors are tensegrity structures occurring in architectural objects. In the context of the analysis of architectural spatial systems, the authors assume the division of structures into: open, closed, dependent and dispersed. Such division of spatial structures will enable comparative analyses of architectural objects in which tensegrity structures occur. Existing objects with a tensegrity structure can be subdivided into the following types: roof covering - roofing; buildings; bridges; artistic installations.

The authors conducted a preliminary comparative analysis based on the accepted division of spatial structures for selected architectural objects such as:

- roof of world cycling centre in Aigle, Switzerland 2002 - Velodrome Architects - Pierre and Pascal Grand,
- roof of the sports and entertainment hall *Spodek* in Katowice, Poland 1971 - architects - Maciej Gintowt, Maciej Krasiński,
- building "The Cloud" EXPO 2002, Yverdon-les-Bains, Switzerland, architects - Pierre and Pascal Grand,
- para-tension pavilion London, England 2010, architects - Guangyuan Li, Merate Barakat, Sebastian Nau, Sevinj Keyaniyan,
- Kurilpa Bridge, Brisbane, Australia 2009, architects - Cox Rayner Architects,
- Forthside Pedestrian Bridge, Stirlig, Scotland 2009, architect: Keith Brownl,
- Needle Tower, Washington, USA 1968, architect - Kenneth Snelson,
- Kenichi Kawaguchi's Arch, Tokyo, Japan 2011, architect - Kenichi Kawaguchi.

## 4 Conclusion

Analysis of the research literature and preliminary comparative analysis of selected architectural objects allows formulating the following conclusions:

- the original definitions of tensegrity structures were based primarily on the experiment and analysis of the structure of the physical models of the structure,
- definitions of tensegrity structures formulated by Anthony Pugh and other researchers, based on the geometrical analysis of tensegrity structures were the basis for formulating of the mathematical model of these structures,
- formulated mathematical model of structures enables the use of computer tools for studying and analysing tensegrity structures,
- nowadays, the computer programs for parametric and generative design allow the analysis of tensegrity structures in a manner similar to the analysis of the physical model of the structure,
- subdivision of tensegrity structures formulated by Anthony Pugh, based on the geometrical analysis of tensegrity structures can be the basis for adaptation of these structures in architectural objects,
- formulating the additional spatial division of architectural objects, which takes into account the designing of the architectural space, made it possible to carry out a preliminary analysis of the architectural objects in which tensegrity structures occur, in the context of the shaping of architectural space which is very important in architectural contexts of the research,
- tensegrity structures used in architecture give the architect the freedom to shape architectural space,
- the use of kinematic elements in tensegrity structures enables dynamic shaping of the form of an architectural object,
- the use of kinematic elements in tensegrity structures enables dynamic regulation of sun exposure and ventilation of the building, during usage.

## References

- [1] V. G. Jauregui: Tensegrity Structures and their Application to Architecture, School of Architecture, Queen's University, Belfast, 2004; (on line, September of 2017) [http://www.tensegridad.es/Publications/MSc\\_Thesis-Tensegrity\\_Structures\\_and\\_their\\_Application\\_to\\_Architecture\\_by\\_GOMEZ-JAUREGUI.pdf](http://www.tensegridad.es/Publications/MSc_Thesis-Tensegrity_Structures_and_their_Application_to_Architecture_by_GOMEZ-JAUREGUI.pdf), pp. 6-9, 38-40
- [2] L. Moholy-Nagy: Von Material zu Architektur, München, 1929, pp. 139-140
- [3] R. Motro: Tensegrity. Structural Systems for the Future, London, Kogan Page Limited, 2003, pp. 7-16
- [4] A. Pugh: An introduction to tensegrity, University of California Press Berkeley, Los Angeles, London, 1976



# Two particular quadratic cones

Hellmuth Stachel

*Vienna University of Technology  
Wiedner Hauptstr. 8-10/104, A 1040 Wien  
stachel@dmg.tuwien.ac.at*

**Abstract.** The Euclidean geometry of quadratic cones is equivalent to the study of spherical conics. The *normal* (or orthogonal) quadratic cones have circular sections being orthogonal to vertex generators. These cones can be generated by congruent pencils of planes with intersecting axes. The corresponding conics are the spherical analogues of Thales circles.

*Equilateral* quadratic cones are characterized by a vanishing trace. The associated equilateral spherical conics have the property that the three vertices of a regular right-angled spherical triangle can simultaneously move along. Dualization yields cones which are the envelopes of triples of mutually orthogonal planes. If cones of this type are tangent to a regular quadric then their apices are located on a sphere. This reveals the movability of ellipsoids in circumscribed boxes.

**Keywords:** quadratic cone, spherical conic, normal cone, equilateral cone.

## 1 Introduction

A result of Linear Algebra says that for each quadratic cone (=cones of 2<sup>nd</sup> degree) with real points other than the apex exists a coordinate frame such that the cone's equation has the standard form

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 = 0 \quad \text{with} \quad c_1 > 0 > c_2 \geq c_3. \quad (1)$$

Irreducible quadratic cones intersect the unit sphere centered at the apex along two symmetric *spherical conics*. We call each connected component of its intersection with the unit sphere a *spherical ellipse*. Spherical ellipses share many properties with planar ellipses, e.g., the gardener's construction, or the optical property: all rays radiating from one focus pass through the other focus.

Each point  $P$  on the sphere has an antipode  $P^*$ . Therefore each spherical ellipse can also be seen as one branch of a spherical hyperbola. Furthermore, all spherical parabolas  $c$  are spherical ellipses with the major axis  $2a = \frac{\pi}{2}$  [1, p. 444].

Among conic constructions which hold in the plane as well as on the sphere, we mention the construction of Proclus (or de la Hire) for points of ellipses. But also the centers of curvature at the vertices can be found for planar and spherical ellipses in a similar way. The latter construction can even be recognized as an analogue of that for planar hyperbolas.

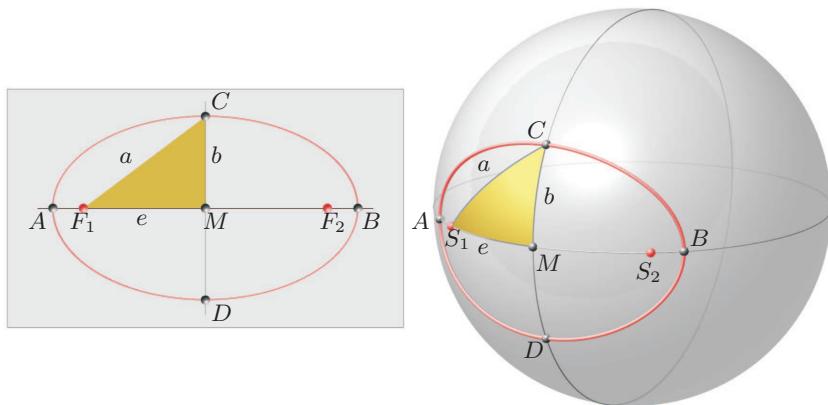


Figure 1: The semiaxes  $a, b$  and the eccentricity  $e$  of a spherical conic.

If a spherical conic on the unit sphere is given by the standard equation (1) then the semiaxes  $a, b$  and the eccentricity  $e$  satisfy (Fig. 1)

$$\tan^2 a = -\frac{c_1}{c_2}, \quad \tan^2 b = -\frac{c_1}{c_3}, \quad \cos a = \cos b \cos e.$$

We are going to study below the two particular cases:

- *normal cones or conics* are characterized by  $c_1 + c_3 = c_2$ .
- *equilateral cones or conics* have a vanishing trace,  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ .

## 2 Normal cones

The cone  $c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 = 0$  with apex  $O$  at the origin is normal if and only if  $\sin a = \tan b$ . It is easy to confirm that exactly in this case the circular sections of the cone, which are parallel to one of the planes  $x\sqrt{c_1 - c_2} \pm z\sqrt{c_2 - c_3} = 0$ , are orthogonal to one of the generators in the plane  $y = 0$  of symmetry.

**Theorem 1.** *On the sphere the set of points  $P$  with  $\not\propto APB = \pi/2$ , i.e., the spherical analogue of the Thales circle, is a normal conic  $c$  with  $A$  and  $B$  as vertices on the minor axis (Fig. 2).*

*Proof.* This can be proved using basic Descriptive Geometry: Let  $g, h$  be the lines which connect the given points  $A, B$ , respectively, with the center  $O$  of the sphere. We are looking for diameter lines  $p$  such that their connecting planes with  $g$  and  $h$  are orthogonal. If we specify  $g$  in vertical position then for any plane  $\varepsilon$  through  $g$  the normal line  $n$  through any point  $H \in h$  to  $\varepsilon$  is horizontal, and  $n$  spans with  $h$  a plane orthogonal to  $\varepsilon$ . The line  $p$  of intersection of these two planes passes through the

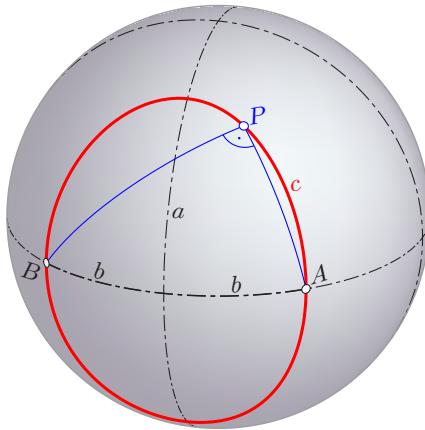


Figure 2: The spherical analogue of the Thales circle is a normal conic.

pedal point of  $H$  in  $\varepsilon$ . For  $H \neq O$ , this pedal point lies on a horizontal circle, due to Thales' theorem. Therefore the lines  $p$  belong to a cone, which contains a horizontal circle and a vertical generator  $g$  in a plane of symmetry.  $\square$

*Remark.* In other cases the spherical isoptic curves  $c$  for the segment  $PQ$ , i.e., the sets of points  $X$  with  $\not\propto PXQ = \varphi$  or  $\pi - \varphi$ , where  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ , are spherical quartics (see [1, Fig. 10.20, p. 465].

In the plane, the constance of the angle  $\varphi$  of circumference and the constant sum of interior angles in each triangle imply: Circles can be generated by an orientation-preserving congruence between two line pencils  $P, Q$ . On the sphere the analogue curves are no more isoptic.

**Theorem 2.** *An orientation-preserving congruence between the pencils  $P, Q$  of great circles generates a pair of antipodal normal conics with the spherical bisector of  $P$  and  $Q$  as the minor axis (Fig. 3).*

*Proof.* By virtue of standard results of Projective Geometry, the given congruence generates a pair of spherical conics  $c$ , and the great circle  $1 = 2'$  connecting  $P$  and  $Q$  corresponds to the respective tangents  $1'$  and  $2$  at  $Q$  and  $P$ . The angle bisectors  $3, 4$  of  $1, 2$  are mapped onto the angle bisectors  $3', 4'$  of  $1', 2'$ . Their points of intersection  $A \in 3, 3'$  and  $B \in 4, 4'$  lie on the orthogonal bisector of  $P$  and  $Q$ , which is an axis of symmetry of the generated conic  $c$ . Hence,  $A, B$  and  $Q$  define  $c$  already uniquely, and the conic  $c$  is normal, by virtue of Theorem 1.  $\square$

*Remark.* After replacing one base point  $P$  by its antipode, we obtain a similar result in the case of an orientation-reversing congruence.

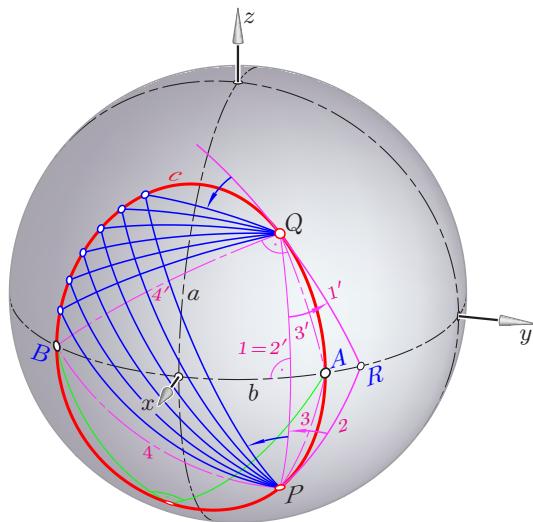


Figure 3: On the sphere an orientation-preserving congruence between two pencils of great circles generates a normal conic.

### 3 Equilateral cones

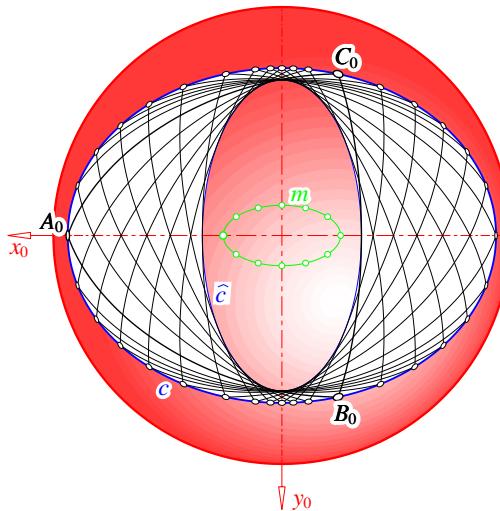


Figure 4: In an equilateral conic a spherical octant can move around.

The cone (1) is equilateral iff  $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ , hence iff

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{3 \sin^2 a - 1}, \text{ where } \sqrt{\frac{2}{3}} < \sin a < 1.$$

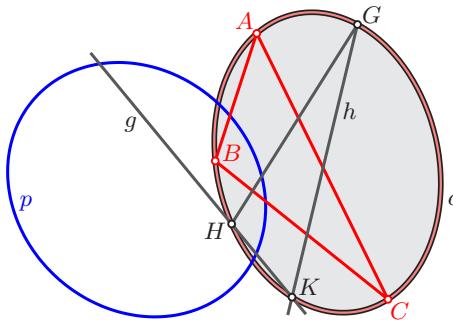


Figure 5: The conic  $p$  is inpolar to the conic  $c$ .

**Theorem 3.** *In each equilateral spherical conic  $c$  a regular right-angled triangle  $ABC$  can move around while all three vertices  $A$ ,  $B$ , and  $C$  run along  $c$ .*

We prove this by using Projective Geometry.

**Definition 1.** A conic  $p$  is called *inpolar* (apolar) to the conic  $c$  if there exists a triangle  $ABC$  auto-polar w.r.t.  $p$  and inscribed in  $c$  (Fig. 5).

Together with  $ABC$  there is always one-parameter set of triangles  $GHK$  which are auto-polar with respect to  $p$  and inscribed in  $c$ . All these triangles are circumscribed to the conic  $\hat{c}$  which is polar to  $c$  w.r.t.  $p$ .

*Proof.* A result of von Staudt says: If the two triangles  $ABC$  and  $GHK$  are auto-polar w.r.t.  $p$  the six vertices are located on a regular or singular curve of degree 2. This curve is already uniquely defined by the five points  $A, B, C, G, H$ .  $\square$

We show that in the case of Theorem 3 the polarity in  $p$  means orthogonality in the bundle, and the cone  $c$  is equilateral. For this purpose we need another theorem from analytic Projective Geometry [1, p. 420].

**Theorem 4.** *Given  $p: \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0$  and  $c: \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = 0$  with symmetric matrices  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{C}$ , with  $c$  containing real points.*

*Then,  $p$  is inpolar to  $c$  if and only if in the characteristic polynomial*

$$\det(\sigma \mathbf{P} + \tau \mathbf{C}) = j_0 \sigma^3 + j_1 \sigma^2 \tau + j_2 \sigma \tau^2 + j_3 \tau^3$$

*the coefficient of  $\sigma^2 \tau$  vanishes, i.e.,  $j_1 = \det \mathbf{P} \cdot \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{P}^{-1}) = 0$  [1, p. 420].*

In our case we have  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_3$ , hence  $\text{tr}(\mathbf{C}) = 0$ .

The sides of the moving triangle envelope another spherical conic  $\hat{c}$ . The cones connecting  $c$  and  $\hat{c}$  with the center are mutually orthogonal.

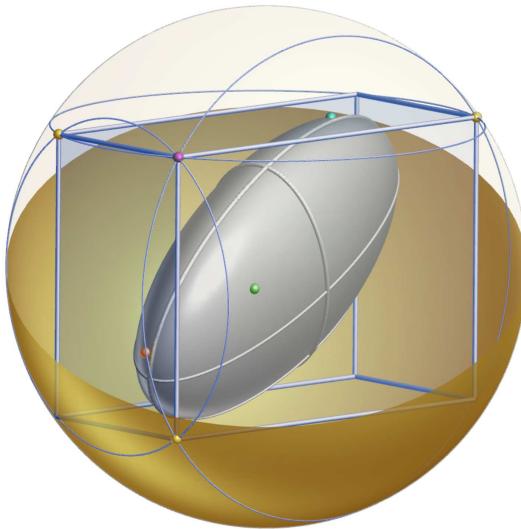


Figure 6: Boxes circumscribed to a tri-axial ellipsoid can move around.

A regular right-angled triangle circumscribed to  $\widehat{c}$  can move such that all sides remain tangent to  $\widehat{c}$ . Such conics are called *dual-equilateral*.

**Theorem 5.** *The point  $S = (\xi, \eta, \zeta)$  is the intersection of three mutually orthogonal tangent planes  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  of the ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  if*

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad (2)$$

*and then  $\overline{M\tau_1}^2 + \overline{M\tau_2}^2 + \overline{M\tau_3}^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .*

A parameter count reveals (Fig. 6): Boxes circumscribed to a tri-axial ellipsoid, hence inscribed in the *director sphere* (2), can move around [2].

## 4 Conclusion

Almost all presented theorems can be found in the classical geometry literature. Nevertheless, one can still enjoy their beauty and the elegance of reasoning. Furthermore, they are also a challenge to use modern media for their visualization.

## References

- [1] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics*, Springer Spektrum, Heidelberg 2016
- [2] G. Glaeser, B. Odehnal, H. Stachel: *The Universe of Quadrics*, Springer Spektrum (in preparation)

# Výuka deskriptivní geometrie na Stavební fakultě VUT a nové studijní materiály vytvářené v dynamickém systému GeoGebra

## Teaching constructive geometry at the Faculty of Civil Engineering, BUT, and new study materials created in the dynamic GeoGebra system

Jan Šafařík, Jana Slaběňáková, Jozef Sivčák

Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Stavební fakulta VUT

Veveří 331/95, 602 00 Brno, Czech Republic

email: safarik.j@fce.vutbr.cz, slabenakova.j@fce.vutbr.cz, jozef.sivcak@vutbr.cz

**Abstrakt.** Příspěvek má za cíl seznámit s historií a současností výuky deskriptivní geometrie na Stavební fakultě VUT v Brně a novými směry při vytváření výukových materiálů, především za pomoci dynamického systému GeoGebra.

**Abstract.** The aim of the paper is to get acquainted with the history and the present of the tuition of descriptive geometry at the Faculty of Civil Engineering, BUT, and the new directions in the creation of teaching resources, especially with the help of the dynamic GeoGebra system.

*Klíčová slova:* Konstruktivní geometrie Zoner Context, OtherCAD, LaTeX, GeoGebra.

*Keywords:* Constructive geometry Zoner Context, OtherCAD, LaTeX, GeoGebra.

## 1 Historie výuky deskriptivní geometrie na Stavební fakultě

Ústavy matematiky I, II a Ústav deskriptivní geometrie vznikly bezprostředně po založení České vysoké školy technické v Brně v roce 1899. Stolice deskriptivní geometrie byla jednou z prvních čtyř, které byly na české technice v Brně v roce 1899 založeny a tvoří tedy základ této školy. Zakladatelem Ústavu deskriptivní geometrie byl prof. Dr. Jan Sobotka. Po jeho odchodu na Filosofickou fakultu Karlovy university v roce 1904 vedl ústav prof. Bedřich Procházka a v roce 1908 se ústavu ujal prof. Miroslav Pelíšek. Po odchodu prof. Pelíška na odpočinek v roce 1925 se stal jeho nástupcem prof. Ing. Dr. Josef Klíma.

V letech 1946 – 1950 byl přednostou Ústavu deskriptivní geometrie prof. Klapka. V roce 1951 byla všechna tři pracoviště (Ústavy matematiky I, II a Ústav deskriptivní geometrie) sloučena v jedinou Katedru matematiky a deskriptivní geometrie s vedoucím prof. Kauckým. V letech 1956 – 1961

vyučovala tato katedra matematiku a deskriptivní geometrii na všech znovu zřízených fakultách, od roku 1962 převzaly výuku na strojní a elektrotechnické fakultě nově vzniklé samostatné katedry matematiky.

V průběhu v posledních zhruba třiceti let se postupně snižovala hodinová dotace předmětu Deskriptivní geometrie – z rozsahu 3/3 ve třech semestrech přes 2/2 v zimním semestru a 0/2 v letním semestru až k dnešnímu 2/2 v semestru letním.

Zároveň se také měnil obsah kurzu. Například v akademickém roce 1992/93 (rozsah 2/2, zkouška v ZS; 0/2, klasifikovaný zápočet v LS) obsahoval harmonogram v zimním semestru zejména promítací metody - Mongeovo promítání a kolmou axonometrii, dále pak šroubovici a plochy šroubové, rotační plochy a plochy zborcené. Obsahem letního semestru byla šikmá axonometrie, perspektivní promítání, osvětlení a topografické plochy. V současné době – na základě požadavků odborných ústavů – obsahuje harmonogram zejména kótované promítání, teoretické řešení střech a topografické plochy (při dotaci 2/2 v LS, zkouška).

Vývoj předmětu Deskriptivní geometrie nyní akreditovaného jako Konstruktivní geometrie doprovázela také vývoj studijních materiálů a pomůcek. Mnohé části byly v původní literatuře zpracovány jen okrajově a s ohledem na požadavky odborných ústavů vznikla nutnost doplnění, případně vytvoření nových výukových projektů.

Od klasických tištěných skript pro výuku přednášek a cvičení přes CD-Rom s teorií a řadou řešených krokovaných příkladů (toto vzniká po roce 2000 s přechodem na bakalářské studium) až po dnes připravované studijní materiály v dynamickém systému GeoGebra.

## 2 BA03 vs BA008

Při přechodu na nově akreditovaný předmět Konstruktivní geometrie došlo k poměrně velkým změnám v obsahu předmětu, jak ukazuje následující srovnávací tabulka.

### BA03 – Deskriptivní geometrie

1. Rozšířený euklidovský prostor.  
Princip promítání středového a rovnoběžného. Perspektivní kolíneace, perspektivní afinita.
2. Systém základních úloh, užití na příkladech. Mongeovo promítání.
3. Mongeovo promítání.
4. Mongeovo promítání.
5. Axonometrická zobrazení.

### BA008 – Konstruktivní geometrie

1. Rozšířený euklidovský prostor.  
Princip promítání středového a rovnoběžného. Perspektivní kolíneace, perspektivní afinita.
2. Systém základních úloh, užití na příkladech, kótované promítání.
3. Kótované promítání (základní konstrukce, průmět tělesa).

- |  |   |
|--|---|
| 6. Axonometrická zobrazení.<br>7. Úvod do středového promítání.<br>Lineární perspektiva.<br>8. Lineární perspektiva.<br>9. Lineární perspektiva.<br>10. Teorie křivek a ploch.<br>Šroubovice.<br>11. Přímý šroubový konoid.<br>Zborcené plochy. Zborcené plochy druhého stupně. Zborcený hyperboloid.<br>12. Hyperbolický paraboloid. Plochy stavebně - technické praxe.<br>13. Rezerva. | 4. Kótované promítání (řezy těles).<br>Mongeova projekce – uvedení do problému.<br>5. Topografické plochy (základní pojmy a konstrukce).<br>6. Topografické plochy. Teoretické řešení střech.<br>7. Teoretické řešení střech.<br>8. Kolmá axonometrie.<br>9. Kolmá axonometrie.<br>10. Úvod do středového promítání.<br>Lineární perspektiva.<br>11. Lineární perspektiva.<br>12. Lineární perspektiva.<br>13. Rezerva. |
|--|---|

Současné studijní materiály však nepokrývají všechny partie nově akreditovaného předmětu BA008 – Konstruktivní geometrie a tak vyvstala potřeba tyto učební texty doplnit.

Pro vytvoření stávajících studijních materiálů bylo v roce 2000 rozhodnuto použít autorský nástroj Zoner Context, přičemž dynamické obrázky byly řešeny pomocí OtherCADu. Nicméně toto řešení už v současnosti nevyhovuje a tak vyvstala otázka, v čem nové studijní materiály vytvářet. Nakonec se pro vytváření textů využilo typografického systému LaTeX a pro dynamické obrázky systému GeoGebra.

### 3 Současné studijní materiály

#### 3.1 Zoner Context

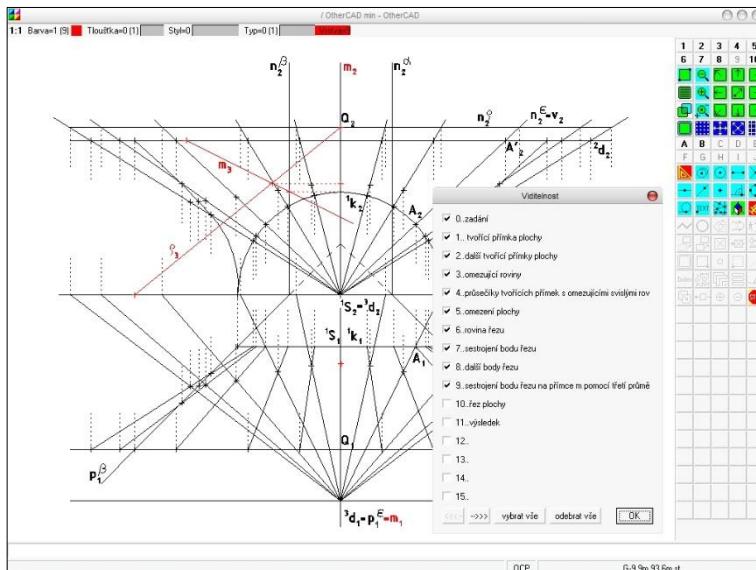
Zoner Context byl ve své době výkonný a univerzální autorský nástroj pro elektronické publikování. Podporoval vlastní pokročilou hypertextovou technologii, umožňující spojit širokou škálu dat – text a tabulky, grafiku, kresby, obrázky a multimédia. Vlastní plnohodnotný hypertextový „WYSIWYG“ editor. Umožňoval přehlednou stromovou strukturu obsahu, vyskakovací (pop-up) okna, tvorbu rejstříku klíčových slov, vytváření systémových odkazů, spouštění externích aplikací, kontroly hypertextových vazeb a vložených souborů, automatické generování matrice pro duplikaci CD-ROM.

#### 3.2 OtherCAD

V případě programu OtherCAD se jednalo o původní český grafický systém firmy ALPRO, s.r.o. a jeho minimální verze byla doplněna o slideshow od Petra Slepčíky.

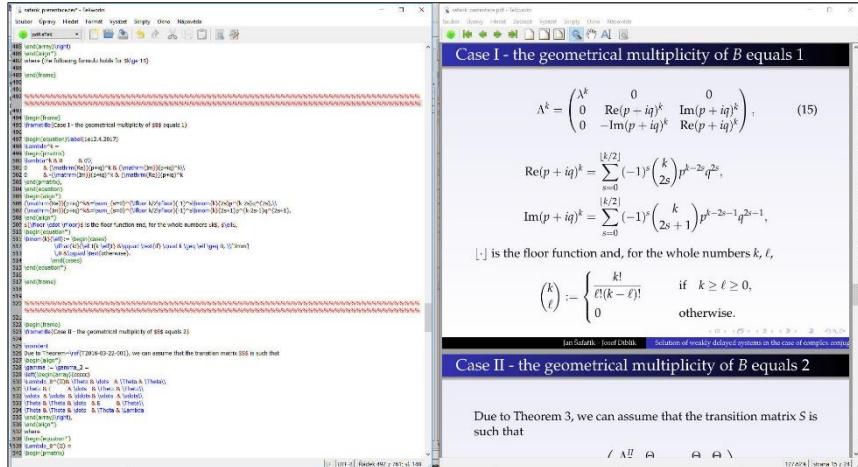


Obr. 1: Výsledný vzhled CD-Romu Deskriptivní geometrie vytvořený pomocí Zoner Contextu

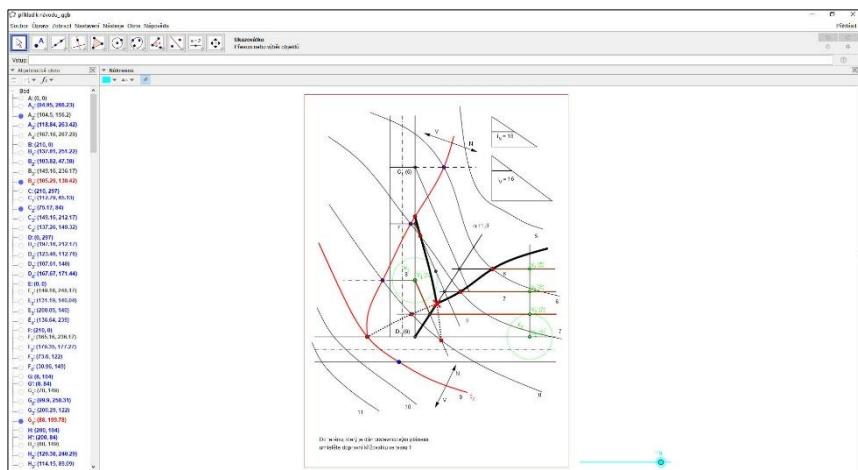


Obr. 2: OtherCAD

OtherCAD umožňuje práci s vektorovou i rastrovou grafikou. Jedná se o modulární grafický systém, který neklade velké nároky na počítač ani na kapacitu disku. K základnímu systému lze doplnit velké množství profesních knihoven a nadstaveb.



Obr. 3: LaTeX



Obr. 4: GeoGebra

## 4 Nové studijní materiály

### 4.1 LaTeX

LaTeX byl původně vytvořen Leslieem Lamportem. Jedná se o balík maker programu TeX, jenž umožňuje autorům textů sázet a tisknout svá díla ve velmi vysoké typografické kvalitě. LaTeX je dostupný zdarma a pro všechny rozšířené operační systémy. Vzhled dokumentu nezávisí na tom, pod kterým operačním systémem byl přeložen, umožňuje velmi dobré (ne-li nejlepší) možnosti tisku matematických textů. Součástí instalace LaTeXu jsou i konvertory do postscriptu a PDF.

### 4.2 GeoGebra

Tvůrcem GeoGebry je Markus Hohenwarter. Jedná se o multiplatformní dynamický software pro všechny úrovně vzdělávání. Spojuje geometrii, algebru, tabulky, znázornění grafů, statistiku a infinitezimální počet. GeoGebra je volně šířitelný multiplatformní software. Instalace GeoGebry není nutná, plnou verzi programu lze kdykoliv spustit v internetovém prohlížeči. Program poskytuje autorizační nástroje k vytvoření výukového materiálu na webové stránce.

## 5 Manuál pro tvorbu dynamických obrázků

Do vytváření studijních materiálu byl zapojen i student 4. ročníku Stavební fakulty Jozef Sivčák, který se na Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie jako „studentská pedagogicko-vědecká síla“ podílel na vytváření modelů pro výuku Konstruktivní geometrie a v současnosti pracuje na vytvoření podrobného manuálu pro konstrukci dynamických obrázků pomocí GeoGebry.

Následuje ukázka z pracovní verze manuálu pro vytváření interaktivních příkladů v programu GeoGebra.

### NÁVOD K VYTVAŘENÍ INTERAKTIVNÍCH PŘÍKLADŮ V PROGRAMU GeoGebra

#### ÚVOD

*GeoGebra je dynamický matematický software, který propojuje geometrii, algebru a matematickou analýzu. Tento návod vám přiblíží zejména geometrickou část programu a konstrukci části vybraného příkladu na topografické plochy. Nachází se tu poznatky užitečné hlavně pro začátečníky s GeoGebrou a informace které se v čase vytváření tohoto podkladu těžko nebo vůbec nedaly dohledat na internetu. Jedná se o některé příkazy pro kreslení složitějších objektů (např. křivky – vrstevnice), dále princip a*

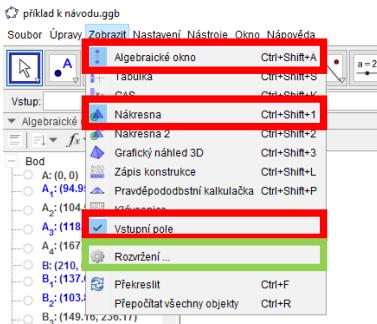
vytváření krokování a animování konstrukcí příkladů a užitečné rady pro lepší přehlednost a orientaci v prostředí softwaru.

## 1 ZÁKLADNÍ FUNKCE SOFTWAREU

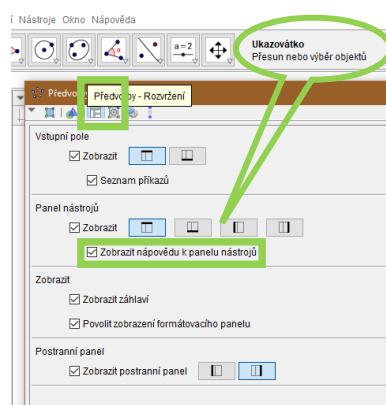
Než začneme pracovat s GeoGebrou, představíme si pár nezbytných funkcí a nastavení programu, které bude vhodné k vytváření příkladu.

### 1.1 NASTAVENÍ PROSTŘEDÍ

Na začátek doporučuji zapnout v nabídce **Zobrazit** možnosti: **Algebraické okno**, **Nákresna** a **Vstupní pole**. V této nabídce dále vybereme možnost **Rozvržení ...**, a na kartě **Předvolby – Rozvržení** možnost **Zobrazit návoděnu k panelu nástrojů**.



Obrázek 2 – nabídka Zobrazit

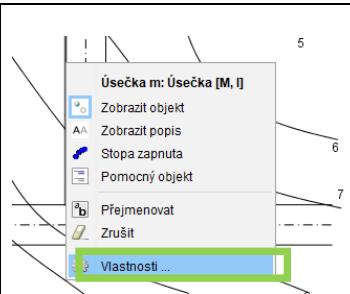


Obrázek 1 – okno Rozvržení

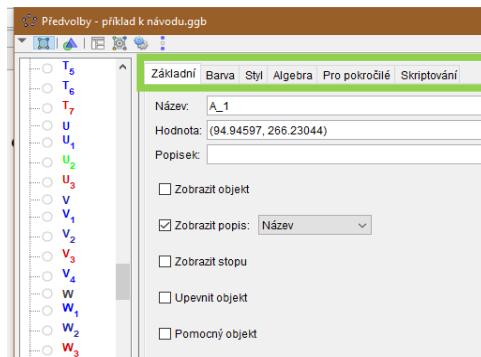
### 1.2 NASTAVENÍ VLASTNOSÍ OBJEKTŮ

Změna vlastností objektů je potřebná z mnoha důvodů a využijeme to téměř při každém objektu. Například: zdůraznění některých objektů, přehlednost, barevnost konstrukce nebo zvýraznění výsledku příkladu.

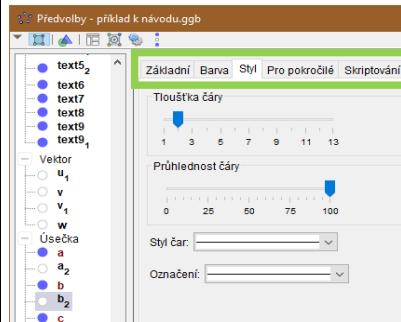
Vlastnosti najdeme v oknu **Předvolby**, nebo když klikneme pravým tlačítkem myši na libovolný objekt v Nákresně nebo Algebraickém oknu. Nabídka vlastností, které se mohou měnit, závisí na vybraném typu objektu. Ve zkratce - GeoGebra umožňuje měnit základní vlastnosti (**název**, **definice**, **popisek**, **zobrazit objekt**, **zobrazit popis + výběr popisu** ...), barvu a styl objektů – tyto vlastnosti se liší v závislosti na objektu (viz obrázek 4, 5 a 6). Dále se v tomto oknu nachází vlastnosti **Pro pokročilé**, kterými se budeme podrobně zabývat později při popisu krokování a animování konstrukce. Dalšími vlastnostmi jako Skriptování, Algebra, nebo pozice, se zabývát nebudeme.



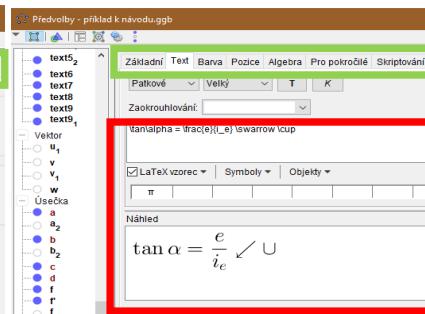
Obrázek 6 – kontextové menu



Obrázek 5 – vlastnosti bodu



Obrázek 4 – vlastnosti úsečky



Obrázek 3 – vlastnosti textu

U textu je velkou výhodou možnost zadávaní v **LaTeXu**.

**Rychlejší a praktičtější možnost úpravy se nám nabízí po označení kteréhokoliv objektu levým tlačítkem myši, hned pod horní lištou okna Nákresna (viz obrázek 7).**

Nejpřetebnější vlastnost **zobrazit/skrýt** objekt se dá jednoduše zapínat/vypínat v algebraickém oknu klinutím na modrý/bílý bod vedle daného objektu (viz obrázek 7). Slouží hlavně k zpřehlednění a vyčištění konstrukce od objektů, které jsou důležité pro zkonstruování příkladu, ale nedají se vymazat, protože na ně navazují další objekty, které by se odstranily taky. Vyčištění příkladu je znázorněno na obrázcích 8 a 9.

## 2 KONSTRUKCE PŘÍKLAĐU

### 2.1 SESTROJENÍ ZADÁNÍ

Zadání jsme měli narýsované jenom na papíru a kvůli výsledku jsme potřebovali příklad co nejpřesněji přerýsovat do nákresny GeoGebry. Proto jsme využili možnost vložení obrázku, resp. Skenu, do nákresny a co nejpřesněji překreslili zadání.

- Vložení obrázku
  - možnost se nachází v nabídce *Úpravy* → *Vložit obrázek z ...* vybereme úložiště *Soubor* nebo *Schránka*, následně vyhledáme obrázek a zvolíme *Otevřít*,
  - obrázek se dá jednoduše vložit taky přemístěním ze souboru do prostoru nákresny a GeoGebra si ho načte s dvěma uchopovacími body,
  - pomocí uchopovacích bodů se dá obrázek podle potřeby zmenšovat/zvětšovat a taky otáčet,
  - víme, že nás obrázek je sken A4, narýsuje pomoci čtyř bodů (rohové se souřadnicemi rozměrů A4) a mnohoúhelníku formát s rozměrem A4 a naskenovaný obrázek uchopovacími body přesuneme do tohoto formátu,
  - body se tažením chytají k mřížce nebo se dají kdykoliv dvojklikem v algebraickém oknu přepsat jejich souřadnice.
- Obkreslení zadání
  - zadání obkreslíme pomocí bodů, úseček, přímek, kolmic, rovnoběžek, osové i středové souměrnosti a jiných nástrojů z panelu nástrojů, jako bychom rýsovali za pomoci dvou pravítka a kružítka,
  - pro nanášení vzdálenosti využijeme **kružnici s poloměrem** nebo **úsečku s pevnou délkou**,
  - na vrstevnici použijeme křivku. Nenachází se v panelu nástrojů, ale kreslí se pomocí příkazu **spline**, který napíšeme do vstupního pole. Nejprve ale naklikáme na jednu vrstevnici minimálně 4 body (vrcholy a inverzní body křivky), doporučují ale alespoň 6–8 bodů pro lepší manipulaci s křivkou, a až potom zadáme příkaz spline a vypíšeme body na vrstevnici přes které má křivka procházet,
  - křivky nakopírujeme a pomocí bodů přesuneme a nastavíme přibližně na určené pozice,
  - dopíšeme textem označení objektů, případně text zadání,
  - nakonec vypneme nepotřebné objekty včetně podloženého skenu a zpřehledníme tak zadání příkladu.

## 2.2 KONSTRUKCE ŘEŠENÍ

...

## 2.3 ANIMACE PŘÍKLADU

...

## 3 ZÁVĚR

...

# Poděkování

Tento článek vznikl za podpory rozvojového projektu na Fakultě stavební VUT v Brně a Grantu FEKT-S-17-4225.

## Literatura

- [1] Autorský kolektiv Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie FaSt VUT v Brně: *Deskriptivní geometrie, verze 4.0 pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně*, Soubor CD-ROMů Deskriptivní geometrie, Fakulta stavební VUT v Brně, 2012. ISBN 978-80-7204-626-3.
- [2] J. Kratochvíl: *Fakulta stavební Vysokého učení technického v Brně: historie a současnost*, Akademické nakladatelství CERM, Brno, 1999. ISBN 80-214-1449-9.
- [3] J. Roušar, J. Šafařík: *Zcela nový CD-ROM: Deskriptivní geometrie verze 2.0*, Konference eLearning ve vysokoškolském vzdělávání 2004, Zlín, 18.-19. května 2004. ISBN 80-7318-190-8.
- [4] GeoGebra. *GeoGebra — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, Retrieved from <https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> ([Online, accessed 13-September-2017])
- [5] LaTeX. *LaTeX — Wikipedia, The Free Encyclopedia*, Retrieved from <https://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX> ([Online, accessed 13-September-2017])
- [6] OtherCAD. *České grafické systémy, OtherCAD*, Retrieved from <http://mujweb.cz/othercad/> ([Online, accessed 13-September-2017])

# Geometrický software a výuka geometrie

## Geometric software and teaching of geometry

Svetlana Tomiczková, František Ježek

KMA FAV ZČU

Univerzitní 8, Plzeň

[svetlana@kma.zcu.cz](mailto:svetlana@kma.zcu.cz)

KMA FAV ZČU

Univerzitní 8, Plzeň

[jezek@kma.zcu.cz](mailto:jezek@kma.zcu.cz)

**Abstract.** In the contribution we talk about using geometric software in the courses of geometry at University of West Bohemia. We present a few examples we use in the practical lesson of course Differential geometry.

*Keywords:* software, teaching of geometry

*Klíčová slova:* software, výuka geometrie

## 1 Úvod

V současné době je téma nemyslitelné představit si výuku bez využívání techniky, zejména počítačů. Výpočetní a další technika je používána ve všech předmětech (technických, přírodních, ale i humanitních) a ani matematika a geometrie nemůžou být výjimkou. Otázkou je, jakým způsobem zapojit techniku do výuky, neochudit studenty o výcvik praktických dovedností, ale naopak využít její potenciál. Speciálně pro geometrii je významné zvyšování názornosti studované látky. V případě použití bodových (tedy lokálních) konstrukcí (řezy, průniky, charakteristiky) umožňuje počítačová podpora vizualizaci celku (tedy globální výsledek).

Skladba geometrických předmětů je na ZČU je velice široká a také studenti, kteří je navštěvují, jsou z různých studijních programů a dokonce z různých fakult. Přednášíme geometrii pro strojní fakultu, kde máme nejširší záběr od zobrazovacích metod, přes analytickou geometrii až po geometrii křivek a ploch, transformace objektů a krátkého nahlédnutí do geometrického modelování. Dalšími našimi studenty jsou posluchači oboru stavitelství, které seznámíme se zobrazovacími metodami, křivkami a plochami zejména ze syntetického pohledu a dále studenti programů Geomatika a Matematika, kterým k tomuto syntetickému pohledu nabízíme také pohled analytický a diferenciální a zprostředkování znalostí z geometrického modelování. Dále jsou zde studenti programu Učitelství a studenti Fakulty designu a umění, kteří si z naší nabídky vybírají geometrii podle svého zaměření.

V nabízených předmětech je nutné nabídnout jak teoretický základ, tak podle typu předmětu vhodné praktické ukázky formou ukázek prezentovaných vyučujícími, ale i samostatnou nebo skupinovou prací s vhodným geometrickým softwarem. Část studentů prochází i praktickou stránkou vývoje modulů pro řešení geometrických úloh ve vhodném vývojovém prostředí (Matlab, Mathematica).

## 2 Vybrané úlohy

V následujícím textu uvádíme některé z úloh řešených na praktickém cvičení z předmětu Diferenciální geometrie. V těchto úlohách jsou pomocí softwaru Rhinoceros vizualizovány základní pojmy diferenciální geometrie, jako jsou ekvidistanty, křivosti křivek a křivosti ploch (teoretická část využívá klasickou literaturu [1], [3] a pomocný učební text [2]). Studenti se při práci se softwarem setkávají s problémy (někdy je vhodné je k nim i nasměrovat), o kterých je vhodné s nimi diskutovat.

**Příklad 1** Pro elipsu zkonstruujte vnitřní a vnější ekvidistantu.

### Řešení úlohy na teoretickém cvičení:

parametrizace elipsy:  $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in R$

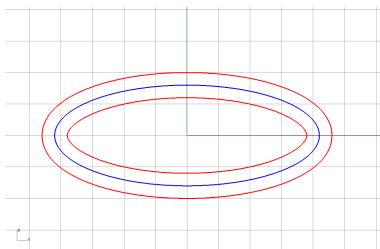
normálový vektor:  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in R$

ekvidistanta:  $R(t) = P(t) + \vec{n} \cdot d$ ,  $d \in R$

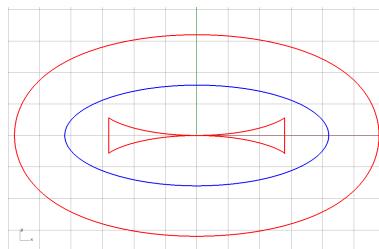
$R(t) = \left( \left( \frac{d}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} + 1 \right) a \cos t, \left( \frac{d}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} + 1 \right) b \sin t \right)$ ,

$d \in R$

### Vizualizace úlohy na praktickém cvičení:



Obrázek 1: Vykreslená ekvidista, kde  $d$  je menší než vedlejší osa elipsy



Obrázek 2: Vykreslená ekvidista, kde  $d$  je rovno vedlejší osa elipsy

### Otázky pro studenty k zamýšlení a diskuzi:

1. Je ekvidistantou elipsy elipsa?
2. Funguje algoritmus výpočtu ekvidistanty správně?

**Příklad 2** Vypočítejte 1. křivost šroubovice. Vymodelujte ji a proveděte vizualizaci vektorů 1. křivosti.

**Řešení úlohy (ve zkrácené formě) na teoretickém cvičení:**

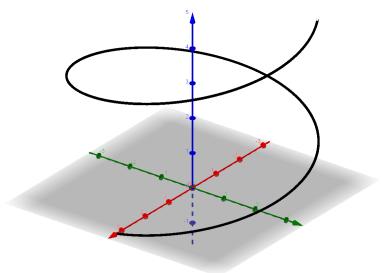
$$\mathbf{P}(s) = \left( r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, \frac{cs}{\sqrt{r^2+c^2}} \right), s \in (-\infty, \infty)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(s) = \left( -r \frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, r \frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{r^2+c^2}} \right)$$

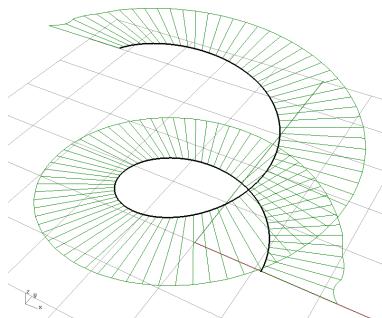
$$\ddot{\mathbf{P}}(s) = \left( -r \frac{1}{r^2+c^2} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, -r \frac{1}{r^2+c^2} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+c^2}}, 0 \right)$$

$${}^1k = \| \ddot{\mathbf{P}} \| = \sqrt{\left(r \frac{1}{r^2+c^2}\right)^2} = \frac{r}{r^2+c^2}$$

**Vizualizace úlohy na praktickém cvičení:**



Obrázek 3: Šroubovice



Obrázek 4: Vizualizace křivosti

**Otázky pro studenty k zamýšlení a diskuzi:**

1. Co můžeme říct o první křivosti šroubovice?
2. Jaký je problém vzhledem k první otázce ve vizualizaci? Z čeho tento problém vyplývá (jak je zřejmě šroubovice datově reprezentována)?

**Příklad 3** Vypočítejte Gaussovou křivost válcové plochy. Vymodelujte ji a proveděte vizualizaci Gaussovy křivosti.

**Řešení úlohy (ve zkrácené formě) na teoretickém cvičení:**

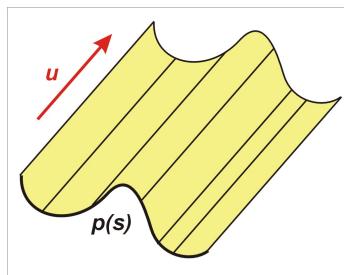
$$\mathbf{X}(s, t) = \mathbf{P}(s) + t\mathbf{u}, s, t \in R$$

$$g_{11} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}', g_{12} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{u}, g_{22} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

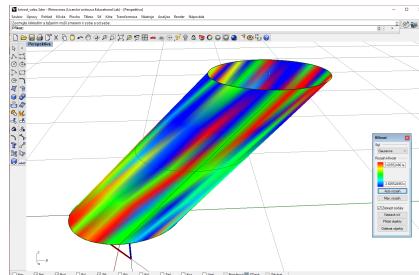
$$h_{11} = \mathbf{P}'' \cdot (\mathbf{P}' \times \mathbf{u}) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{P}' \times \mathbf{u}\|}, h_{12} = 0, h_{22} = 0$$

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = 0$$

## Vizualizace úlohy na praktickém cvičení:



Obrázek 5: Ilustrace k parametrizaci válcové plochy



Obrázek 6: Vizualizace Gaussovy křivosti

### Otázky pro studenty k zamýšlení a diskuzi:

1. Jaké typy bodů existují na válcové ploše?
2. Jaký problém vzhledem k předchozí odpovědi vidíte ve vizualizaci a cím je způsoben?

## 3 Závěr

Při práci s geometrickým softwarem dochází k zajímavým situacím, kdy vizualizace neodpovídá našim výpočtům a je třeba diskutovat o tom, proč tomu tak je. Někdy je na vině chyba v použitém algoritmu, pak můžeme diskutovat o tom, jakým způsobem je možné chybu ošetřit, jindy je to způsob ukládání dat nebo zaokrouhlovací chyba. Například ve vizualizaci Gaussovy křivosti můžeme diskutovat o rozsahu zobrazovaných hodnot a případném přenastavení přesnosti.

Pokud vhodným způsobem využijeme jak výhod, tak nepřesností a chyb geometrických softwarů, můžeme zvýšit přidanou hodnotu předmětu a více ho přiblížit studentům. Zejména se to týká teoretických předmětů, jakým je v článku použitý příklad Diferenciální geometrie.

## Literatura

- [1] B. Budinský, B. Kepr: *Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi*. SNTL, Praha 1970
- [2] F. Ježek: *Diferenciální geometrie – pomocný učební text*. ZČU, Plzeň 2010
- [3] A. Pressley: *Elementary differential geometry*. Springer, London 2001

# About a certain supplement of double-image parallel projection

Krzysztof K. Tytkowski

*Geometry and Engineering Graphics Centre*

*Silesian University of Technology*

*Krzywoustego 7, 44-100 Gliwice, Poland*

*Email:krzysztof.tytkowski@polsl.pl*

**Abstract:** The paper presents the supplement of double-image parallel projection record, which has allowed the restitution of elements on the basis of their two projections. The possible application of such supplemented double-image projection onto one projection plane has also been indicated.

**Key words:** Projection method, paraller projection, goole maps

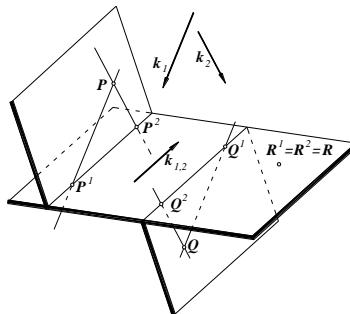
## 1 Introduction

At the turn of the 1950s and the 1960s, several articles on new types of projections were written by authors such as Adam Zawadzki [1,2,3,4,7] and Stanisław Polański [5,6], associated with the Silesian University of Technology.

This article constitutes a supplement to the work by Adam Zawadzki and Karol Bolek “Double-image parallel projection” [7], which, apart from the representation of the principle of double-image projection, includes a mapping of a line passing through two arbitrary points given, a projection of a line parallel to one of two directions, a line parallel to the projection plane, an issue of parallelism, a transformation of one of the directions, an issue of perpendicularity, and rabattement, and basic transformation. This article omits these issues yet supplements the record of projection parameters and related issues. This supplement allows for the restitution of objects on the basis of their double-image projection, as well as the possibility of use in technical issues in the longer perspective.

## 2 Mapping principle

Proposed by the authors, [7], the method of mapping the Euclidean space consists in adopting any projection plane of the projection plane  $\pi$  and adopting two directions  $k_1, k_2$  non-parallel to each other or to the projection plane. For point  $P$  not belonging to projection plane  $\pi$ , we lead two projection radiuses parallel to direction  $k_1$  and  $k_2$  respectively. These radiuses have common points with projection plane  $\pi$ . Each of the radiuses penetrates the projection plane, while the penetration points are the projections of point  $P$  and are marked as  $R^1$  and  $R^2$ . If the point lies on the projection plane, then both its projections are identical with this point, e.g.  $R=R^1=R^2$  (Fig. 1). For a point  $P$  lying above the

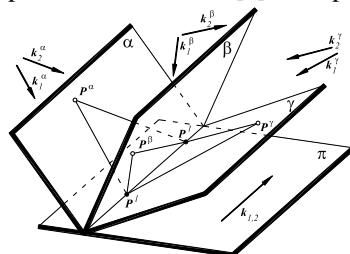


**Fig. 1 Double-image parallel projection mapping principle [7]**

projection plane  $\pi_1$ , we assume line orientation  $P^1P^2$  as positive. We will place a distinguished positive orientation in the form of an arrow described as  $k_{1,2}$  on the projection plane.

## 2.1 Possibilities of restitution

Unfortunately, the record of  $k_{1,2}$  orientation itself did not allow for restitution in this method of mapping. It was unnecessary due to the considerations contained in the description of the method [7]. The projections themselves do

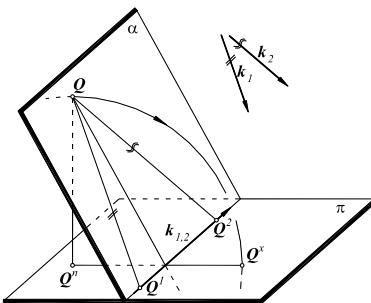


**Fig. 2 Records of orientation  $k_{1,2}$  and projections of point  $P(P^1, P^2)$  do not allow for its restitution**

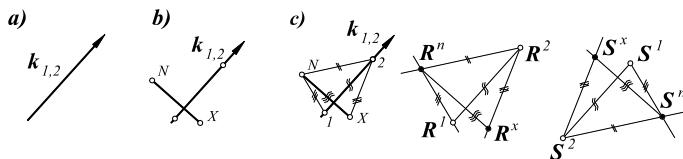
not allow for restitution. There are a lot of solutions for the given projections and unknown projection directions  $k_1$   $k_2$  (Fig.2).

## 2.2 Double-image parallel projection record

For arbitrary directions  $k_1$  and  $k_2$  satisfying the condition  $k_1, k_2 \perp \pi$ . In order to record all parameters allowing for restitution, it is necessary to determine two directions, i.e. two lines. In general, four points of the Euclidean space are needed. If one point is common to both lines, then three points are sufficient. Assuming that two of these three points can lie on the projection plane  $\pi$ , these two points are unequivocally described with their projection. The third point remains which, in principle, cannot lie on the projection plane, since it would



**Fig. 3 Record of information necessary for the restitution of point  $Q(Q^1, Q^2, Q^3, Q^9)$**



**Fig. 4 a) record proposed by the authors [7], b) supplemented record allowing for restitution, c) restitution of point  $R$  and  $S$   $R$  on the basis of their two projections  $R^1, R^2$  and  $S^1, S^2$  as well as recorded directions of projection (12NX).**

mean that  $k_1, k_2 \dots \pi$ , which is contrary to the assumption made earlier. For an unequivocal point record, we need e.g. a normal projection and a point height, two projections into perpendicular projection planes, etc. Adopting the version with a normal projection and the height of a point, we may adopt the convention that we select the third point so that it is at a height of one unit and lines parallel to directions  $k_1$  and  $k_2$  will pass through it. However, determining the length of the unit vector will be then necessary. Therefore, the method of moving any point together with providing its height seems correct. Thus, the placed record will be reduced to providing the position of the points determining this mapping,  $1,2,N,X$  (where: 1 - projection of the point in the direction  $k_1$ , 2 - projection of the point in the direction  $k_2$ , N - normal projection of the point, X - point rabattement), wherein segment NX will always be perpendicular to segment 12.

### 3 Restitution of a point in the base of its double-image projection

With orientation  $k_{1,2}$  and points  $N, X$  as well as double-image projections of point  $R$  in the form of points  $R^1, R^2$  (Fig. 4c) the remaining data can be constructed for the restitution of  $R$ , i.e. points  $R'', R^x$ . In the figure, points  $1,2$  were exceptionally marked on orientation  $k_{1,2}$  which is not needed, yet in this case necessary for legibility and clarity of the construction and its description.

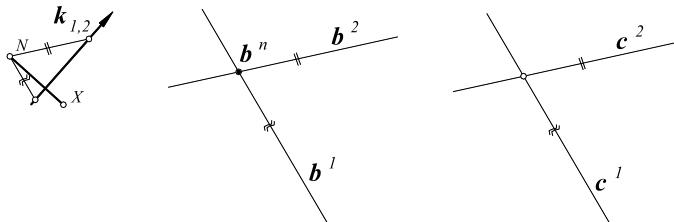
In order to find point  $R^n$ , we use the parallelism of lines  $NN^I \dots R^nR^I$  and  $N^2 \dots R^nR^2$ , and find the searched point by constructing the corresponding parallel lines. Point  $R^x$ , which is found using parallelism  $2X \dots R^2R^x$  and  $NX \dots R^nR^x$  remains to be constructed. Instead the second parallelism  $NX \dots R^nR^x$ , we may also use parallelism  $R^nR^x \underline{|} R^IR^2$ .

A similar algorithm is used for point  $S$  with data  $S^I$  and  $S^2$ , except that point  $S$  lies below the projection plane.

It is worth noting that knowing two projections of a point, e.g.  $T$  of four ( $T^I, T^2, T^n, T^x$ ) unequivocally determining the position of a point in space, we can determine the position of the remaining two points on the basis of the similarity of quadrangle  $I, 2, N, X$ .

## 4 Line mapping

Most of the issues related to the line have already been developed, yet some issues have not yet been addressed. Without providing additional information concerning projection directions, it is not possible to distinguish between perpendicular line projections and lines creating other angles with the



**Fig. 5** In the case of a simple perpendicular to the viewport and the given projection directions  $k_1$  and  $k_2$ , the projections of the straight lines will be parallel to the projections of the projection directions. Projections of line  $b \perp \pi$  with a record of its normal projection, a simplified record for line  $c \perp \pi$  sufficient for an unequivocal interpretation of the projections

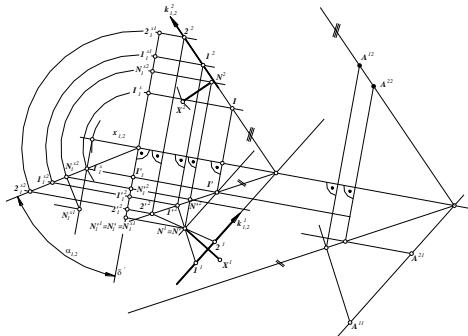
projection plane.

Figure 5 shows a suitable example. In case of a line perpendicular to the projection plane and the given projection directions  $k_1$  and  $k_2$ , the projections of the lines will be parallel to the projections of the projection directions.

## 5 Transformation

The issue of projection direction change has already been developed. Supplementing the record with projection directions  $I^I, 2^I, N^I, X^I$  in case of changing the projection plane requires the determination of parameters for the new projection plane to describe the projection direction - points  $I^2, 2^2, N^2, X^2$ .

We have mapping parameters  ${}^I_{12} (I^I, 2^I, N^I, X^I)$  on projection plane  $\pi_I$  and projections  $A^{II}, A^{2I}$  of point  $A$  respectively from the projection direction  $k_1$  and  $k_2$ . Let the new projection plane  $\pi_2$  be determined with line  $x_{I,2}$ , which, similarly to Monge's projections, will be the edge of projection planes  $\pi_I$  and  $\pi_2$  and dihedral angle  $\alpha_{I,2}$ , formed by the two projection planes. In order to simplify the record of this angle, plane  $\delta$  perpendicular to line  $x_{I,2}$  and the rectangular projection onto that auxiliary projection plane were adopted. We must find the projections of point  $A$  on projection plane  $\pi_2$  maintaining unchanged projection



**Fig. 6 Introduction of a new projection plane with projection directions maintained**

directions  $k_1$  and  $k_2$ . The construction of points  $I^2, 2^2, N^2, X^2$  is based on finding the points of penetrating the projection plane with projection radiiuses  $k_1$   $k_2$  with projection plane  $\pi_2$ . A line parallel to the projection plane  $\pi_I$  and a rectangular projection applied on the projection plane perpendicular to axis  $x_{I,2}$  were used here. The concise nature of the study does not allow a complete discussion of the structure. It seems unnecessary for persons familiar with descriptive geometry.

## 6 Application

Observing Google maps at different times, it can be noticed that the image



**Fig. 7 Images of two identical adjacent buildings featured in Google maps at different times a) earlier b) current c) projections constructed on the basis of images (yellow sections)**

shooting parameters are changing (Fig. 6a, 6b). The images are taken from the circumterrestrial orbit and it can be assumed that for ordinary buildings this is not a perspective projection but a parallel projection. With two images taken from different satellite positions, it can be assumed that we have two parallel projections of the same element at our disposal. By combining these two images, we get a double-image projection of the object. We only need to combine the projections of the same points. Having an object of a known height, we can construct points defining the directions of projection  $k_1$  and  $k_2$ .

## 7 Conclusions

The presented supplement may allow the use of a double-image parallel projection in technical applications implementing satellite imagery.

## References

- [1] Zawadzki A.: *Rzut gliwicki (Gliwice projection)*: Sesja naukowa z okazji 10-lecia istnienia Uczelni Katedra Geometrii Wykresowej Politechnika Śląska. Gliwice, 1956.
- [2] Zawadzki A.: *Rzut śląski (Silesian projection)*, Politechnika Śląska, Gliwice, 1956.
- [3] Zawadzki A.: *Rzut ukośnokątny (Oblique projection)*. Politechnika Śląska, 1959.
- [4] Zawadzki A.: *Rzut równoległy (na jedną rzutnię) Parallel projection (for one viewport)* Politechnika Śląska. Gliwice, 1959.
- [5] Polański S.: *O pewnym uogólnieniu metod rzutu równoległego na jedną płaszczyznę (About a generalization of methods of parallel projection on one plane)*. Prace Katedry Geometrii Wykresowej, nr 2, Politechnika Krakowska, 1961.
- [6] Polański S.: *O odwzorowaniu za pomocą rzutu dwukrotnego (About mapping by double projection)*. Wyższa Szkoła Inżynierska. - Rzeszów : 1965.
- [7] Zawadzki A., Bolek K.: *Dwuobrazowy rzut równoległy (Double-image parallel projection)*, ZN Politechniki Śląskiej Gliwice, 1966, p 57-83

# 3D Data Reconstruction

Daniela Velichová

*Department of Mathematics and Physics, Faculty of Mechanical Engineering,*

*Slovak University of Technology in Bratislava*

*Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic*

*email: daniela.velichova@stuba.sk*

**Abstract.** Some of results achieved in the project GEOCRIM – Determination of Geometric Characteristics of Objects Detected from Criminologically Relevant Image Recordings are presented in the paper. Optimisation methods used for improvements in calculation preciseness are explained and statistics of achieved results for particular reconstructed scene is included.

**Key words:** 3D data reconstruction, epipolar geometry

## 1 Introduction

Analytic representation of classical geometric photogrammetric methods used for 3D data reconstruction from uncalibrated images, supported by epipolar geometry strategies, enable development of reasonably precise algorithms for the reconstruction of selected objects depicted in 2 photographic images taken from stable positioned cameras. Corresponding images of real points selected on reconstructed objects have to be detected manually, which leads to certain incorrectness in performed calculations. Aim of the project was to find methods for optimisation of calculation results and some improvements of basic algorithm for calculations of real data – 3D coordinates of points from 2D coordinates of their images in 2 photos, and real distances between selected points. Interactive user-friendly application CamWitt with Graphical User Interface has been developed for manual detection of corresponding pairs of images of points on selected objects in 2 uncalibrated photographic images of reconstructed 3D scene. Application was supported by calculation module written in C++ programming language. Implementation was based on previous algorithm testing in software package Maple. Parallel comparison of calculation results has been performed using programming language Python, in order to detect possible errors. The analysis of algorithm aimed to test its robustness, constraints and its failures due to specific unsuitable input data geometric configurations have been performed, too.

Project partners cooperating on project, Slovak University of Technology in Bratislava and Criminological and Expertise Institute of Ministry of National Defence of Slovak Republic, solved different tasks related to their expertise. Scientists from university developed application CamWitt and implemented algorithm in the supportive calculation module. Criminalists, who opted to use project results in their criminalistics practise, dealt with the construction of tested 3D scenes in their photogrammetric laboratory, where photographic images were

taken by installed stable cameras with known calibration. Two experimental scenes were generated, see in Fig. 1 and Fig. 2, in both a cube was selected as reconstructed object whose real dimensions had to be calculated by developed algorithm. Calibration was done by detection of 6 pairs of corresponding points in the 2 photographic images of scenes. These points were visibly marked for better detection, avoiding thus, to a certain extent, some incorrectness that could occur in calculations due to improper detection of their position in the scene. Then, related pairs of points would be not really corresponding.



Fig. 1: Example of 2 views of tested 3D scene with selected object – cube



Fig. 2: – More complex example of 3D scene with selected object – cube

## 2 Algorithm analysis

Results of the analysis proved some of the originally stated hypothesis derived in accordance with the experiences gained by using experimental data.

**Hypothesis 1.** 3D scenes displaying weak space variability perform worse results and are not suitable for precise reconstructions.

Scene in Fig. 1, example of a weak space variability (only 3 visible perpendicular planes) was not very suitable for precise reconstruction, and calculations of 3D coordinates of selected vertices on depicted cube were overloaded by higher percentage of errors. Scene in Fig. 2, with higher variability of different objects, enabled homogeneous distribution of points used for calibration, therefore calculated results were more realistic and precise.

Various approaches were used in order to optimise calculation results not depending on the detection of corresponding pairs of points in their views in images of the 2 testing scenes. They were related to changes in input parameters – distance of cameras (estimated parameter, which need not be precise), focal distance (variable with respect to camera self-focusing), position of principal point in image (view of centre of projection). Comparison of calculation results in different algorithm implementations are presented in the following tables.

Table 1 contains columns with results of 3 different implementations (CamWit – C++, original implementation in Maple, new optimised implementation in Maple), including input parameters (distance of cameras, focal distance – position of focus to image plane, horizontal position, vertical position), number of used scene (1, 2), name of tested edge, calculated length of this edge, its real length, and columns with difference of calculated and real length of the edge in mm and in percentage.

Table 2 shows five most precise results of searching for minimal differences by means of changing focal length in scene 1. Table 3 brings survey of all resulting differences for various configurations of parameter focal distance  $f$ , horizontal in row and vertical in column.

	Distance of cameras,			Length		Difference	
Algorithms Implement.	focal length, X, Y, points	Scene	Edge	Calculated	Real	[mm]	[%]
CamWit	1100, 2432, 2736, 1824, 10	1	G	552,6	550	2,6	0,47%
CamWit	1100, 2432, 2736, 1824, 10	1	E	525,7	530	-4,3	0,81%
CamWit	1100, 2432, 2736, 1824, 10	1	F	88,0	88	0,0	0,00%
CamWit	1100, 2432, 2736, 1824, 10	1	F1	83,1	88	-4,9	5,57%
CamWit	1100, 2432, 2736, 1824, 10	1	B	439,9	450	-10,1	2,24%
CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	B2	67,0	88	-21,0	23,86%
CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	B1	64,7	88	-23,3	26,48%
CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	B	71,4	88	-16,6	18,86%
CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	C1	16,8	88	-71,2	80,91%
CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	C	24,3	88	-63,7	72,39%
CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	A	19,4	102	-82,6	80,98%

CamWit	100, 5320, 2736, 1824, 15	2	A1	29,4	102	-72,6	71,18%
Maple orig.	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	G	500,32	550	-49,68	9,03%
Maple orig.	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	E	481,87	530	-48,13	9,08%
Maple orig.	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	F	79,19	88	-8,81	10,01%
Maple orig.	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	F1	76,44	88	-11,55	13,13%
Maple orig.	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	B	384,45	450	-65,55	14,57%
Maple new	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	G	501,00	550	-49,00	8,91%
Maple new	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	E	476,20	530	-53,80	10,15%
Maple new	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	F	79,40	88	-8,60	9,77%
Maple new	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	F1	75,50	88	-12,50	14,20%
Maple new	1100, 2432, 2736, 1824, 18	1	B	394,30	450	-55,70	12,38%
Maple new	120, 5320, 2736, 1824, 31	2	B1	62,60	88	-25,40	28,86%
Maple new	120, 5320, 2736, 1824, 31	2	B	313,20	88	225,20	255,91%
Maple new	120, 5320, 2736, 1824, 31	2	C1	45,47	88	-42,53	48,33%
Maple new	120, 5320, 2736, 1824, 31	2	C	331,20	88	243,20	276,36%
Maple new	120, 5320, 2736, 1824, 31	2	A	172,30	102	70,30	68,92%

**Table 1 – Part of results from testing on real data**

Parameter change			Differences between calculated and real results [mm]					In total [mm]
Focal length	Horizont. position	Vertical position	G	E	F	F1	B	
-5%	-5%	10%	0,53	7,95	0,28	3,82	29,43	42,00
-5%	-5%	5%	2,00	14,77	0,70	2,46	27,81	47,73
-5%	-5%	0%	2,48	19,44	0,94	1,43	25,30	49,59
-5%	0%	5%	13,81	7,22	2,49	4,94	26,95	55,40
-5%	0%	10%	14,72	13,24	2,80	6,18	25,42	62,35

**Table 2 – Best results for variable focal distance in scene 1**

Data presented in tables prove certain assertions, which can be regarded useful as guide for choice of best data input and algorithm self-improvements, and which were proved to be valid during testing real data in experimental scenes.

A1. Complicated scenes are more suitable and enable more accurate calculations of reconstruction.

Taking into consideration only algorithms in programme CamWit, average difference in scene 1 is 1,82 %, while in scene 2 up to 53,52 %. In the implementation Maple new it is even higher (11,08 % vs. 135,68 %)

A2. Higher number of detected pairs of points in images does not guarantee higher precision.

Algorithms Maple new in scene 2 was calculated with 31 points but the error remained quite high (135,68 % in average).

A3. Errors can be very different for various edges.

Algorithms Maple new in scene 2 and edge B1 showed small error (28,86 %) comparing to edge C, where the relative error was almost ten times higher (276,36 %).

A4. Algorithm is not able to improve precision of results in all directions and domains, from the provided input data.

Data in Table 2 show that although difference on all edges decreased under 10 mm, difference on edge B remains over 25 mm. This fact can cause a problem provided not enough reference distances are available.

A5. Even the simple form of algorithm can find the best possible solution by means of consequent change of parameters

Best results can be seen for values [-1, -1, 2] (see Table 2). Simple form of algorithm searching for the best result, which starts in the arbitrary point and proceeds by one step in just one direction, finds this best results in 56 % of various initial positions. In all other situations it could end up in some of the points [-2, 0, -2], [-2, 2, 2], [0, -2, -2]. These open possibilities for design of more intelligent searching algorithms with smaller steps (actually it is 5 %), which could find more precise solution. Parallel running of several algorithms from different positions could more reliable prove that found solution is really the best possible (actually from 4 parallel running algorithms at least one could find the best solution with probability almost 96 %).

### 3 Conclusions

Interactive application CamWitt equipped with the calculation module for 3D data reconstruction from 2 photographic images of 3D scene based on classical geometric photogrammetric methods and concepts of epipolar geometry was presented. Application was tested on experimental data and its robustness and precision have been analysed with respect to suggested modifications of the set of input data, namely distance of two cameras, focal distance, and changing

position of principal point in the image in vertical and horizontal direction. Statistical analysis of differences in real and calculated distances of detected points in the 2 images of 2 experimental scenes were presented and compared, and possible assertions useful for configuration data detection leading to most precise calculations were formulated and explained.

Other improvements of the reconstruction algorithms are possible, namely combination of various searching algorithms in the space of solutions for different input parameters and due to change in the calculation of the fundamental matrix, or their combination. New experimental scenes must be generated to analyse suggested optimisation approach, and also real scenes from the practical reconstruction problems should be considered.

## Acknowledgements

The author has been supported by project of the Scientific Grant Agency APVV of the Slovak Republic under the Grant No. APVV-0161-12.

## References

- [1] K. Mikula, J. Urbán. Fully automatic affine registration of planar parametric curves, ALGORITMY 2016, 20th Conference on Scientific Computing, Vysoké Tatry - Podbanské, Slovakia, March 14 - 18, 2016. Proceedings of contributed papers, Editors: A. Handlovicová and D. Ševčovič, Publishing House of Slovak University of Technology in Bratislava, 2016, ISBN 978-80-227-4544-4, pp. 343-352
- [2] D. Velichová. Analysis of 3D Photogrammetric reconstruction. Proceedings of the 24<sup>th</sup> Conference Geometry-Graphics-Computer, Lodž, Poland, pp.86-87.
- [3] D. Velichová. Reconstruction of 3D Object Dimensions from Video-records. Proceedings – Aplimat 2017, Publishing House of Slovak University of Technology in Bratislava, 2017, ISBN 978-80-227-4650-2, pp.1659-1667.
- [4] D. Velichová. Videogrammetry and one of Its Applications. Scientific Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Conference on Engineering Graphics Baltgraf-13, Vilnius, Lithuania, 2015, eISBN 978-609-457-835-8, pp.23-28.

# On Methods of Synthetic Projective Geometry

Michal Zamboj

*Faculty of Mathematics and Physics, Charles University  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic  
zamboj@karlin.mff.cuni.cz*

**Abstract.** In the contribution, we talk about synthetic methods in the projective extension of the real plane or three-dimensional space for solving problems of projective incidence and affine geometry. We use the concept of von Staudt’s „Wurf“, defined in his *Beiträge zur Geometrie der Lage*, and the derived property that cross-ratios are invariant under projective transformations. The concept of choosing an infinite hyperplane is used for making hypothesis in an affine space to solve projective problems and vice-versa. Insight into the von Staudt’s constructions on the projective scale is given. The methods are shown on some examples in elementary planimetry and stereometry.

**Keywords:** Projective geometry, synthetic geometry, synthetic method.

## 1 Introduction

Projective geometry was systematically formalised by Karl Georg Christian von Staudt on synthetic reasoning in his *Geometrie der Lage* [1] and *Beiträge zur Geometrie der Lage* [2]. In contrast with current fashion in textbooks on projective geometry, we follow this point of view and show some intuitive synthetic ways of solving problems with the use of projective geometry. We avoid deeper theoretical issues and suggest well written book [5] in both synthetic and analytic way, for further reading.

## 2 Synthetic projective methods

The real projective space can be defined in various ways. Von Staudt constructed it in an axiomatic manner based on the incidence property by composition of perspectivities. A classical textbook in which incidence projective geometry is constructed axiomatically is [3]. Our method of projection follows this point of view. Another construction of the projective space may be obtained by projective extension of the affine or euclidean space. We only need to add infinite points corresponding to affine directions. Currently, the most common definition is of existential nature, where projective space is vector space up to scalar multiplication. Subtraction of a hyperplane from the projective space gives an affine space. Last two definitions suggest possibility of working with infinite elements, which leads to the method of selection of the infinite hyperplane.

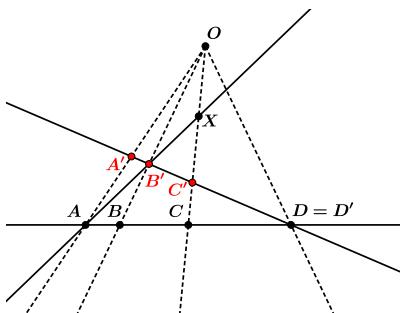
### 2.1 Method of projection

The basic machinery for treating projective geometry synthetically is the method of projection. Von Staudt called placement of four elements in

some (one-parametric) system „Wurf“ („throw“). The value of throw is an analogue of our cross-ratio. Two important facts are needed: Perspectivities preserve cross-ratio. Projectivity is a perspectivity or composition of perspectivities. Perspectivities are denoted by  $\bar{\wedge}$ , projectivities by  $\wedge$ . We demonstrate the method on the following property, which can be found in ([3], p.12).

**Theorem 1.** *Let us have four collinear points  $A, B, C$  and  $D$ . The cross-ratios  $(A, B; C, D)$  and  $(B, A; D, C)$  are equal.*

*Proof.* (Figure 1) We need to find the sequence of perspectivities, which maps the points  $A, B, C$  and  $D$  to  $B, A, D$  and  $C$ , respectively. Let  $O$  be an arbitrary point not on the line  $AB$  and draw a distinct line through the point  $D$ .



Assume the following composition of perspectivities:

$$ABCD \xrightarrow{(O)} A'B'C'D$$

$$A'B'C'D \xrightarrow{(A)} OXC'C$$

$$OXC'C \xrightarrow{(B')} BADC$$

therefore  $ABCD \wedge BADC$

and  $(A, B; C, D) = (B, A; D, C)$ .

Figure 1: Method of projection. □

## 2.2 Method of selection of the infinite hyperplane

The second method consists of selecting the infinite line (in  $\mathbb{RP}^2$ ). If we draw a picture on a paper or computer screen, we consider it embedded in an affine plane (there simply exist parallel lines). To think projectively, we have two choices: We can accept directions of parallel lines to be the infinite points and work in our affine plane of the paper. On the other hand, we can select the infinite line in the paper, which is the line of points of intersections of original parallels (more properly, we perform a collineation which maps the infinite line onto a finite line). Figure 2 demonstrates the idea on two images of the same parabola.

Using the method, we can clarify, from our experience in elementary geometry in affine setting, why some projective constructions work. In Figure 3 (Left) is the common interpretation of the „von Staudt’s construction“ of addition of two elements  $A_1$  and  $B_1$  on the projective scale

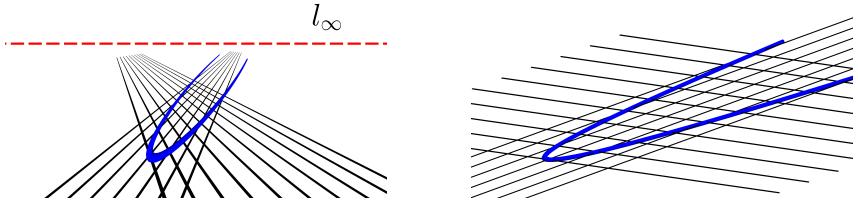


Figure 2: (Left) The infinite line is mapped onto a finite line. (Right) The infinite line is the set of intersections of parallels.

given by the projective coordinate system  $0_1, 1_1, \infty_1$  (for details see [5], pp. 89—91, [4], pp. 20—24, 88—91). The construction is performed in the following steps:

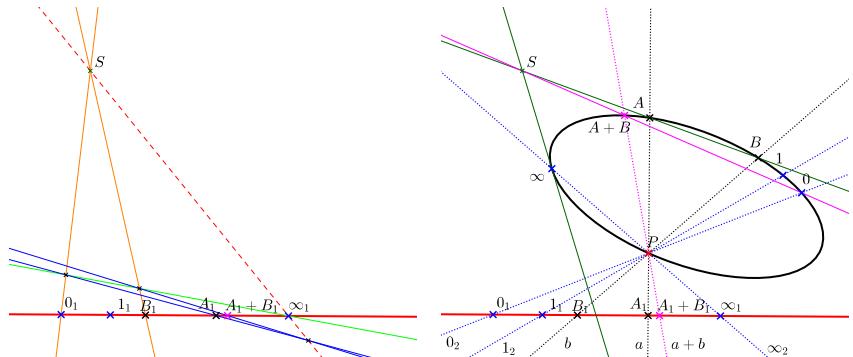


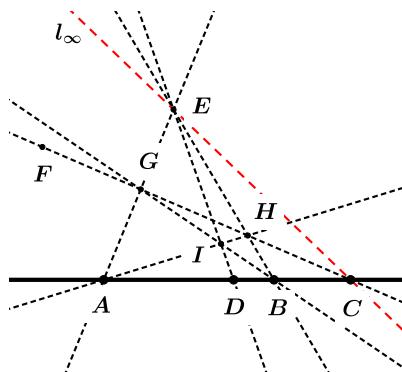
Figure 3: Addition on a projective scale.

1. choose an arbitrary point  $S$  not on the line  $A_1B_1$  and join it with  $0_1$  and  $B_1$
2. choose an arbitrary distinct line (green) through  $\infty_1$  and not passing through  $S$
3. join the intersection of the line  $0_1S$  and the green line with  $A_1$ , and find its intersection with the line  $S\infty_1$
4. join the last intersection on the line  $S\infty_1$  with the intersection of the green line and  $B_1S$  and find its intersection point  $A_1 + B_1$  with the line  $A_1B_1$

If we consider the line  $S\infty_1$  to be the infinite line, it is analogous to the affine situation, and the construction becomes much easier to understand.

Translation of the oriented segment  $0_1B_1$  to an arbitrary parallel line in the „direction“ of  $S$  and another translation of the segment to point  $A_1$  may be one of the interpretations. Figure 3 (Right) shows the construction of addition on a conic. The join of the intersection of the tangent at the point  $\infty$  with the line  $AB$  with the point  $0$  intersects the conic in the point  $A + B$ . Von Staudt used similar constructions to form the fields of real and complex numbers ([2], vol. 2).

The most important construction in synthetic projective geometry is the construction of the harmonic conjugate  $D$  of the given point  $C$  with respect to a pair  $A, B$  (Figure 2.2). The cross-ratio of such points, harmonic quadruple, is  $(A, B; C, D) = -1$ .



1. choose two arbitrary distinct points  $E$  and  $F$  not on the line  $AB$
2. find the intersections  $G$  of the lines  $AE$  and  $CF$ , and  $H$  of the lines  $BE$  and  $CF$
3. join the intersection  $I$  of the lines  $AH$  and  $BG$  with  $E$
4. the point  $D$  is the intersection of the lines  $AB$  and  $EI$

Figure 4: Construction of the harmonic conjugate.

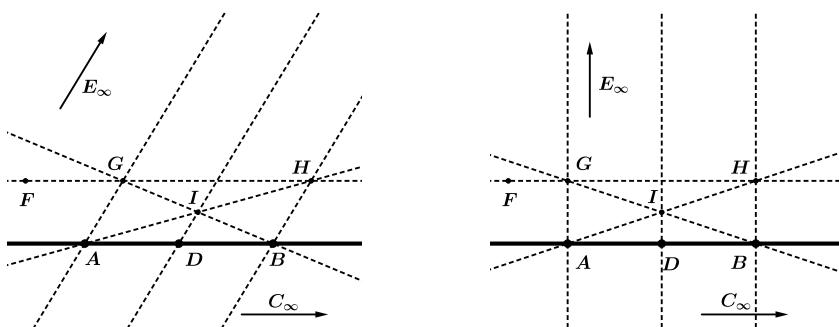


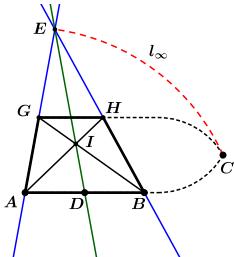
Figure 5: Transformations of the harmonic conjugate construction.

If we consider the line  $EC$  to be the infinite line, the point  $D$  is the midpoint of the segment  $AB$ , and the construction becomes the parallelogram rule in the affine setting (Figure 5) (Left) or a simple property of a rectangle in the euclidean plane (Figure 5) (Right).

The construction of the harmonic conjugate can be effectively used for solving the following property, which is usually proven in elementary geometry with the use of areas of triangles or homotheties.

**Theorem 2.** *Let  $ABHG$  be a trapezoid, where  $AB \parallel HG$  and  $E$  be the intersection point of  $AG$  and  $BH$ . The intersection point  $I$  of the diagonals  $AH$  and  $BG$  lies on the median of the triangle  $ABE$  through  $E$ .*

*Proof.* We will conveniently transform the theorem into the projective extension of the real space.



Let  $C$  be the intersection of parallel sides  $AB$  and  $HG$ . Naming  $CE$  the infinite line, we have the construction for harmonic conjugate, where  $A, B, C$  and  $D$  form harmonic quadruple. Hence, the point  $I$  lies on the join of  $E$  and the midpoint of  $AB$ .

Figure 6: The property of trapezoid.

□

Our last construction can be taken as a planar generalisation of the harmonic conjugate construction on a line. Strictly speaking, we will find the pole of a line with respect to a triangle. Poles and polars with respect to a triangle are described for example in [6], pp. 61–62. Let us have a triangle  $ABC$  and a line  $l_\infty$  in a plane (Figure 7, Left).

1. choose an arbitrary point  $V$  not in the plane  $ABC$  and join it with the vertices of the triangle
2. choose an arbitrary distinct plane  $\rho$  through the line  $l_\infty$  and find its intersection points  $A'$ ,  $B'$  and  $C'$  with the lines  $AV$ ,  $BV$  and  $CV$ , respectively
3. find the intersection point  $O$  of the planes  $ABC'$ ,  $BCA'$  and  $ACB'$
4. the point  $T$  (pole of the line  $l_\infty$ ) is the intersection of the line  $VO$  and plane  $ABC$

Again, if we transform our problem into an affine setting with  $l_\infty$  being the line at infinity, the point  $T$  is nothing else than the centroid of the

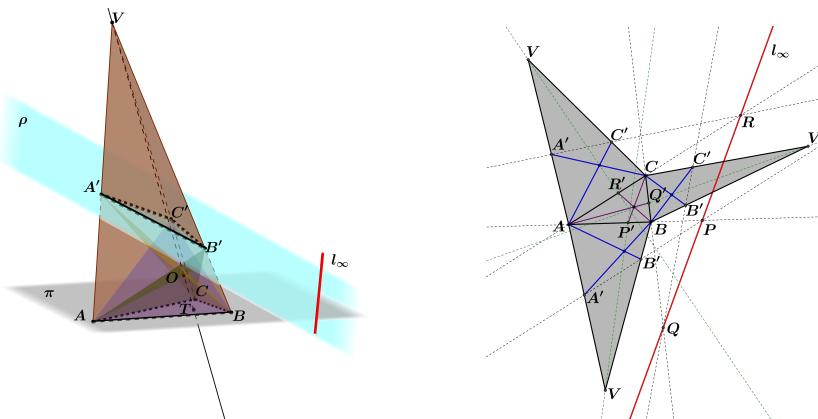


Figure 7: A pole and polar with respect to a triangle.

triangle  $ABC$ . Figure 7 (Right) shows the net of the pyramid  $ABCV$  in which we can easily notice three constructions of harmonic conjugates on the sides of the triangle  $ABC$ .

### 3 Conclusion

We described and gave new applications of synthetic methods of projection and selection of the infinite hyperplane on examples of some elementary geometric properties and projective constructions. The given methods show that we can effectively use intuitive „projective“ thinking not only to solve projective, but also affine or euclidean problems.

### Acknowledgements

The work was supported by the grant SVV 2017 No. 260454.

### References

- [1] K. G. Ch. von Staudt: *Geometrie der Lage*, Bauer und Raspe, Nürnberg, 1847
- [2] K. G. Ch. von Staudt: *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3 parts, Bauer und Raspe, Nürnberg, 1860
- [3] H. S. M. Coxeter: *Projective Geometry*, 2nd edition, Springer, New York, 1987
- [4] V. Hlavatý: *Projektivní geometrie I.*, Melantrich, Praha, 1944
- [5] J. Richter-Gebert: *Perspectives on Projective Geometry*, Springer, Berlin Heidelberg, 2011
- [6] R. Lachlan: *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry* Macmillan and Co, London, 1893

# List of Participants

## CONFERENCE

Bátorová	Martina	KAGDM FMFI, Univerzita Komenského v Bratislavě
Bizzari	Michal	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Blažková	Eva	MFF, Univerzita Karlova v Praze
Čmelková	Viera	KKMAHI PEDAS, Žilinská univerzita v Žiline
Doležal	Milan	KMDG VŠB-TU Ostrava
Ferdianová	Věra	PF, Ostravská univerzita, Ostrava
Hašek	Roman	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Holešová	Michaela	SvF, Žilinská univerzita v Žiline
Hřebíčková	Jana	FS Vysoké učení technické v Brně
Chalmovianský	Pavel	KAGDM FMFI, Univerzita Komenského v Bratislavě
Kmeťová	Mária	KM FPV, Univerzita Konštantína Filozofa, Nitra
Kolcun	Alexej	PF, Ostravská univerzita, Ostrava
Kolomazník	Ivan	VŠB-TU Ostrava
Králová	Alice	LDF, Mendelova univerzita v Brně
Kubinová	Markéta	PF, Ostravská univerzita, Ostrava
Lávička	Miroslav	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Molnár	Emil	IM, Budapest University of Technology and Economics
Notowidigdo	Gennady	University of New South Wales, Sydney
Odehnal	Boris	University of Applied Arts, Vienna
Pech	Pavel	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Polinceusz	Piotr	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Poruba	Jakub	PF, Ostravská univerzita, Ostrava
Raunigr	Petr	PF, Ostravská univerzita, Ostrava
Richtáriková	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Slabeňáková	Jana	FS Vysoké učení technické v Brně
Sroka-Bizoň	Monika	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Stachel	Hellmuth	IDMG, Technische Universität Wien
Szarková	Dagmar	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Šafařík	Jan	FS Vysoké učení technické v Brně
Tomiczková	Svetlana	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Tytkowski	Krzysztof	GEGC, Silesian University of Technology, Gliwice
Vajsálová	Margita	KMDG SvF, STU v Bratislavě
Velich	Ilja	Bratislava
Velichová	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislavě
Vršek	Jan	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Weiss	Gunter	Technical University in Dresden
Zamboj	Michal	MÚ MFF, Univerzita Karlova v Praze

## GEOGEBRA WORKSHOP

Gergelitsová	Šárka	Gymnázium Benešov
Hýrošová	Tatiana	KMDG, Technická univerzita, Zvolen
Koreňová	Božena	Kremnica
Kudličková	Soňa	KAGDM FMFI, Univerzita Komenského v Bratislave
Maťašovský	Alexander	FChPT, STU v Bratislave
Morávková	Zuzana	VŠB-TU Ostrava
Paláček	Radomír	VŠB-TU Ostrava
Schreiberová	Petra	VŠB-TU Ostrava
Volná	Jana	VŠB-TU Ostrava
Volný	Petr	VŠB-TU Ostrava
Zahoranská	Mária	Súkromné gymnázium FUTURUM Trenčín



Proceedings of the  
SLOVAK-CZECH CONFERENCE  
ON GEOMETRY AND GRAPHICS 2017

Editors:

Daniela Velichová, Miroslav Lávička, Světlana Tomiczková

Published by

Vydavatelský servis  
Republikánská 28, Plzeň



Cover design  
Jaromír Dobrý

First Edition

Plzeň 2017

ISBN 978-80-86843-58-2 (online)  
ISBN 978-80-86843-57-5 (CD)