پروژه درس نقشه برداری ژئودتیک

مرحله ی اول پروژه ی گروه ۴: برآورد مختصات نقاط شبکه

اعضای گروه:

حسن رضوان، سهند صبحی، رعنا اسماعیلی، فاطمه فلاح

دستیار آموزشی:

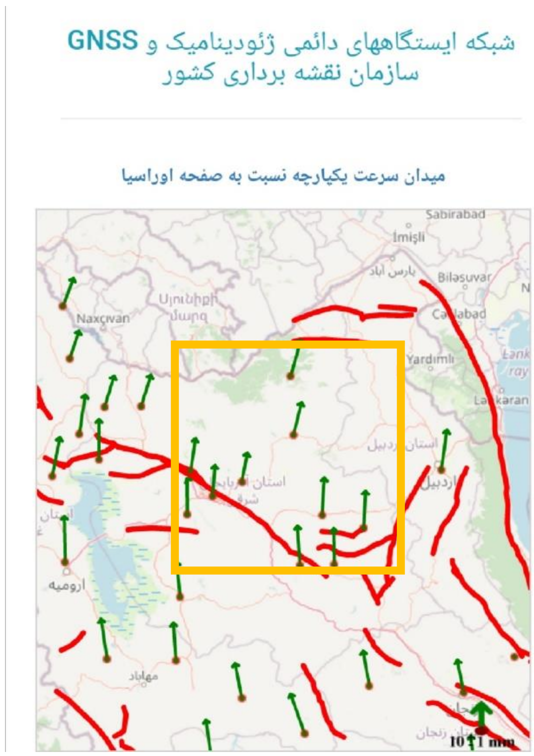
مهندس علی رضا ثبوتی

برنامه ی اصلی مربوط به این پروژه، فایل Epoch_1.m است. در این برنامه از ۴ تابع فرعی کمک گرفته شده است.

۱. **A_Maker.m: برای ساخت ماتریس ضرایب در قید با مختصات معلوم.**
۲. **L_Maker: برای تشکیل بردار مشاهدات از طریق ماتریس های داده شده در فایل پروژه.**
۳. **AA_Maker: برای تشکیل ماتریس ضرایب در حالت استفاده از روش قیود داخلی.**
۴. **ecef_tarnsform_geodetic.m: برای تبدیل مختصات های بدست آمده به مختصات ژئودتیک.**

مقدمه

شبکه ی ژئودینامیک کشور با هدف اولیه ی مطالعات ژئودینامیکی ایجاد شده که از داده های مربوط به آن می توان به عنوان نقاط چارچوب مرجع ملی تعیین موقعیت و بسیاری از پروژه های نقشه برداری، عمرانی، اکتشافی، استخراج نفت و ... استفاده کرد. به کمک سامانه ی IPGN، پی برده شد که شبکه داده شده به گروه ۴، قسمتی از شبکه ی ژئودزی شمال غرب کشور شامل ۸ ایستگاه شناسایی شده ی کلیبر، اهر، تبریز، خواجه، سهند، آمند، ترکمانچای و بهرمان به همراه دو ایستگاه دیگر است.



شکل ۱. نقاط شبکه در سامانه ی IPGN

برآورد مختصات نقاط شبکه

شبکه ی نقاطی که در اختیار داریم، شامل مجموعه ای از مشاهدات و مجموعه ای از مجهولات است که هدف نهایی ما در این پروژه، محاسبه ی مجهولات در ۳ بعد به کمک مشاهدات است. پس چون قرار است از مشاهدات به مجهولات برسیم، از مدل معکوس یا برآورد (estimation) استفاده می کنیم. برای حل این مسئله لازم است که آنرا به زبان ریاضی بیان کنیم؛ به دیگر بیان برای برآورد مختصات نقاط مجهول، باید مدل ریاضی را تشکیل دهیم.

مشاهدات شبکه ی مورد نظر، خط مبنا است که هر خط مبنا شامل سه مولفه ی مشاهداتی مستقل در سیستم مختصات کارتزین مرجع می باشد. مدل ریاضی خط مبنا به صورت زیر است:

$$\begin{cases}\Delta x_{AB} = x_B - x_A\\ \Delta y_{AB} = y_B - y_A\\ \Delta z_{AB} = z_B - z_A\end{cases}$$

همانطور که در معادلات فوق قابل مشاهده است، معادلات خط مبنا، خطی هستند. پس مدل ریاضی که قرار است تشکیل دهیم، پارامتریک خطی است (L=AX). اما چون در واقعیت سیستم معادلات پارامتریک خطی به دلیل وجود خطا با واقعیت سازگار نیست، باید خطا ها را هم به آن اضافه کنیم. پس مدل نهایی به صورت L=AX+V در می آید.

مجهولات شبکه هم با توجه به معلوم بودن مختصات نقطه ی KHAJ ،شامل ۹ نقطه است.

مدل پارامتریک شامل دو بخش است: ۱. مدل تابعی ، ۲. مدل آماری.

- مدل تابعی: ارتباط بین مشاهدات و مجهولات به کمک مدل تابعی برقرار می شود.
  از آنجایی که تعداد مشاهدات خط مبنا، ۳۳ تاست و هر خط مبنا، سه مولفه ی x,y,z دارد، تعداد مشاهدات(n)، برابر ۹۹ می شود. تعداد مجهولات(u) هم که ۹ نقطه و هرکدام در سه راستاست، برابر ۲۷ است. ترتیب نوشتن معادلات نیز با توجه به اندکس مشاهدات خط مبنا که در فایل پروژه آمده، به صورتی است که در هر سطر، از ستونی به ستون دیگر می رود و در پایان هر سطر به سطر بعدی می رود. معادلاتی که در پایین آمده، بر اساس جهت مشاهده ی خط مبنا نوشته شده اند. مثلا مشاهده از نقطه ی KLBR به AHAR انجام شده است.

$$Equations = \begin{pmatrix} x_{KLBR} - x_{AHAR}\\ y_{KLBR} - y_{AHAR}\\ z_{KLBR} - z_{AHAR}\\ x_{KLBR} - x_{KHAJ}\\ y_{KLBR} - y_{KHAJ}\\ z_{KLBR} - z_{KHAJ}\\ \vdots\\ x_{TCKE} - x_{TABZ}\\ y_{TCKE} - y_{TABZ}\\ z_{TCKE} - z_{TABZ}\end{pmatrix}_{99\times1}$$

پس با توجه به معادلات فوق ماتریس های X,L,A را تشکیل می دهیم. پس ماتریس L که همان ماتریس مشاهدات است، یک ماتریس ۱*۹۹ است. چینش این ماتریس از داده های Dx_ep1.mat ، Dy_ep1.mat و Dz_ep1.mat به این گونه می باشد که هر سه سطر ماتریس L به ترتیب مربوط به مشاهدات Δx، Δy و Δz هر خط مبنای بین دو نقطه است. ماتریس A هم یک ماتریس ۲۷*۹۹ شامل ضرایب معادلات فوق می باشد. معادلات شبکه به صورت زیر می شود:

$$x_{KLBR} - x_{AHAR} = L1$$
$$y_{KLBR} - y_{AHAR} = L2$$
$$z_{KLBR} - z_{AHAR} = L3$$
$$x_{KLBR} = L4 - x_{KHAJ}$$
$$y_{KLBR} = L5 - y_{KHAJ}$$
$$z_{KLBR} = L6 - z_{KHAJ}$$
$$x_{KLBR} - x_{AMND} = L7$$
$$y_{KLBR} - y_{AMND} = L8$$
$$z_{KLBR} - z_{AMND} = L9$$
$$x_{KLBR} - x_{TABZ} = L10$$
$$y_{KLBR} - y_{TABZ} = L11$$
$$z_{KLBR} - z_{TABZ} = L12$$
$$x_{KLBR} - x_{SHND} = L13$$
$$y_{KLBR} - y_{SHND} = L14$$
$$z_{KLBR} - z_{SHND} = L15$$
$$x_{AHAR} = L16 + x_{KHAJ}$$
$$y_{AHAR} = L17 + y_{KHAJ}$$
$$z_{AHAR} = L18 + z_{KHAJ}$$
$$x_{AHAR} - x_{AMND} = L19$$
$$y_{AHAR} - y_{AMND} = L20$$
$$z_{AHAR} - z_{AMND} = L21$$
$$x_{AHAR} - x_{TABZ} = L22$$
$$y_{AHAR} - y_{TABZ} = L23$$
$$z_{AHAR} - z_{TABZ} = L24$$
$$x_{AHAR} - x_{SHND} = L25$$
$$y_{AHAR} - y_{SHND} = L26$$
$$z_{AHAR} - z_{SHND} = L27$$
$$x_{AHAR} - x_{LEDH} = L28$$
$$y_{AHAR} - y_{LEDH} = L29$$
$$z_{AHAR} - z_{LEDH} = L30$$
$$x_{AMND} = L31 + x_{KHAJ}$$
$$y_{AMND} = L32 + y_{KHAJ}$$
$$z_{AMND} = L33 + z_{KHAJ}$$
$$x_{TABZ} = L34 + x_{KHAJ}$$
$$y_{TABZ} = L35 + y_{KHAJ}$$
$$z_{TABZ} = L36 + z_{KHAJ}$$
$$x_{SHND} = L37 + x_{KHAJ}$$
$$y_{SHND} = L38 + y_{KHAJ}$$
$$z_{SHND} = L39 + z_{KHAJ}$$
$$x_{BRMN} = L40 + x_{KHAJ}$$
$$y_{BRMN} = L41 + y_{KHAJ}$$
$$z_{BRMN} = L42 + z_{KHAJ}$$
$$x_{LEDH} = L43 + x_{KHAJ}$$
$$y_{LEDH} = L44 + y_{KHAJ}$$
$$z_{LEDH} = L45 + z_{KHAJ}$$
$$x_{AMND} - x_{TABZ} = L46$$
$$y_{AMND} - y_{TABZ} = L47$$
$$z_{AMND} - z_{TABZ} = L48$$
$$x_{AMND} - x_{SHND} = L49$$
$$y_{AMND} - y_{SHND} = L50$$
$$z_{AMND} - z_{SHND} = L51$$
$$x_{AMND} - x_{LEDH} = L52$$
$$y_{AMND} - y_{LEDH} = L53$$
$$z_{AMND} - z_{LEDH} = L54$$
$$x_{TABZ} - x_{SHND} = L55$$
$$y_{TABZ} - y_{SHND} = L56$$
$$z_{TABZ} - z_{SHND} = L57$$
$$x_{TABZ} - x_{LEDH} = L58$$
$$y_{TABZ} - y_{LEDH} = L59$$
$$z_{TABZ} - z_{LEDH} = L60$$
$$x_{SHND} - x_{BRMN} = L61$$
$$y_{SHND} - y_{BRMN} = L62$$
$$z_{SHND} - z_{BRMN} = L63$$
$$x_{SHND} - x_{LEDH} = L64$$
$$y_{SHND} - y_{LEDH} = L65$$
$$z_{SHND} - z_{LEDH} = L66$$
$$x_{SHND} - x_{KCMN} = L67$$
$$y_{SHND} - y_{KCMN} = L68$$
$$z_{SHND} - z_{KCMN} = L69$$
$$x_{SHND} - x_{TCKE} = L70$$
$$y_{SHND} - y_{TCKE} = L71$$
$$z_{SHND} - z_{TCKE} = L72$$

$x_{BRMN} - x_{AHAR} = L73$

$y_{BRMN} - y_{AHAR} = L74$

$z_{BRMN} - z_{AHAR} = L75$

$x_{BRMN} - x_{LEDH} = L76$

$y_{BRMN} - y_{LEDH} = L77$

$z_{BRMN} - z_{LEDH} = L78$

$x_{BRMN} - x_{KCMN} = L79$

$y_{BRMN} - y_{KCMN} = L80$

$z_{BRMN} - z_{KCMN} = L81$

$x_{BRMN} - x_{TCKE} = L82$

$y_{BRMN} - y_{TCKE} = L83$

$z_{BRMN} - z_{TCKE} = L84$

$x_{LEDH} - x_{KCMN} = L85$

$y_{LEDH} - y_{KCMN} = L86$

$z_{LEDH} - z_{KCMN} = L87$

$x_{LEDH} - x_{TCKE} = L88$

$y_{LEDH} - y_{TCKE} = L89$

$z_{LEDH} - z_{TCKE} = L90$

$x_{KCMN} - x_{TABZ} = L91$

$y_{KCMN} - y_{TABZ} = L92$

$z_{KCMN} - z_{TABZ} = L93$

$x_{KCMN} - x_{TCKE} = L94$

$y_{KCMN} - y_{TCKE} = L95$

$z_{KCMN} - z_{TCKE} = L96$

$x_{TCKE} - x_{TABZ} = L97$

$y_{TCKE} - y_{TABZ} = L98$

$z_{TCKE} - z_{TABZ} = L99$

هر سطر ماتریس A مربوط به هر مشاهده ی خط مبناست؛ یعنی هر سه سطر مانند ماتریس L به ترتیب مربوط به مشاهدات Δx، Δy و Δz خط مبنای بین دو نقطه است. ستون های ماتریس A هم مربوط به مجهولات است. بخشی از ماتریس طرح به شکل زیر می شود.

	KLBR	AHAR	AMND	TABZ	SHND	BRMN	LEDH	KCMN	TCKE
$x_{KLBR} - x_{AHAR}$	1 0 0	-1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
$y_{KLBR} - y_{AHAR}$	0 1 0	0 -1 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
$z_{KLBR} - z_{AHAR}$	0 0 1	0 0 -1	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
. . .									
$x_{TCKE} - x_{TABZ}$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	-1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 0 0
$y_{TCKE} - y_{TABZ}$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 -1 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 0
$z_{TCKE} - z_{TABZ}$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 -1	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1

- مدل آماری: تعیین وریانس ها و متعاقب آن وزن های مشاهدات، در مدل آماری می آید. در واقع وزن هر مشاهده میزان تصحیحی را که در طول سرشکنی به آن اعمال می شود، کنترل می کند. با معکوس کردن ماتریس وریانس کوووریانس، ماتریس وزن را بدست می آوریم.

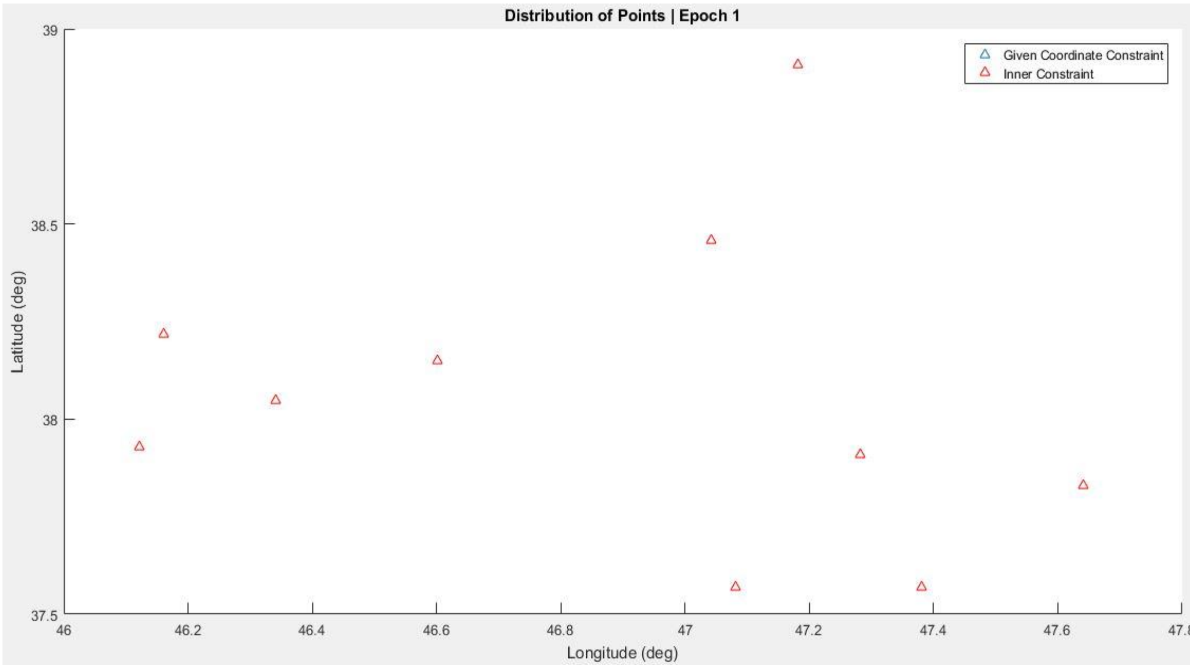
پس از تشکیل مدل پارامتریک خطی و به کمک روش کمترین مربعات و با فرمول $X = (A^T PA)^{-1} A^T PL$ مجهولات را برآورد می کنیم.

برای حل بخش قیود داخلی مسئله لازم است تا مرکز ثقل نقاط حاصل را بدست آوریم تا نقاط بدست آمده در بخش قیود داخلی را به مکان مناسب خود شیفت دهیم.

$$centroid_x = \frac{1}{n}\sum x_i \quad , \qquad centroid_y = \frac{1}{n}\sum y_i \quad , \qquad centroid_z = \frac{1}{n}\sum z_i$$

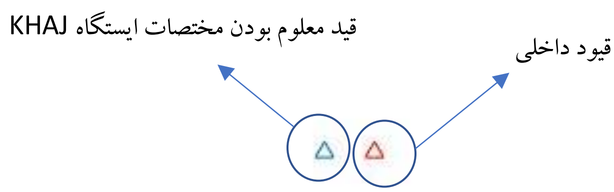
برای قسمت چهارم سوال و روش قیود داخلی، مختصات ایستگاه KHAJ را هم به عنوان مجهول در نظر می گیریم و به جای معکوس گرفتن از A^TPA ، از معکوس مور–پنروز (pinv) استفاده می کنیم. پس از به دست آمدن مجهولات آنها را

به کمک مرکز ثقل هایی که بدست آوردیم، منتقل می کنیم. برای رسم نهایی مجموعه ی نقاط بدست آمده، آنها را به مختصات ژئودتیک تبدیل کرده و λ و φ را بدست آوریم.



شکل ۲. پراکندگی مجهولات برآورد شده ی نقاط شبکه

با بزرگنمایی پلات نقاط، میتوان دید که نقاط در دو روش با هم اندکی جابجایی دارند و دقیقا روی هم منطبق نیستند.



شکل ۳. اختلاف مختصات نقطه ی KHAJ در دو روش

درجه ی آزادی

هر سرشکنی به نوعی کنترل نیاز دارد و عدم تامین تعداد مناسب قیود سبب می شود مسئله بدون جواب شود. هر پیمایش برای ثابت کردن موقعیت خود، حداقل به یک ایستگاه کنترل و برای ثابت کردن توجیه دورانی اش، به خطی با امتداد معلوم نیاز دارد. وقتی پیمایشی دارای حداقل قیود باشد، پیمایش با حداقل قیود نامیده می شود. بدون این حداقل سرشکنی امکان

پذیر نیست. اگر این حداقل قید در اختیار نباشد، می توان قیود لازم را فرض کرد و محاسبات را در فضای اختیاری انجام داد.

در مدل پارامتریک خطی در صورتیکه مختصات یک نقطه ی معلوم را داشته باشیم نیازی به مقادیر اولیه نداریم. در حقیقت این نقطه ی معلوم نقش مبدا مختصات را دارد. در روش قیود داخلی هم به کمک مراکز ثقل توانستیم نقاط را در جای مخصوص خود منطبق کنیم.

در یک شبکه ی سه بعدی، هفت نقص دیتوم می تواند اتفاق بیفتد. ۳ پارامتر مکانی(positional)، ۳ پارامتر دوران(rotational) و ۱ پارامتر مقیاس(scale). با توجه به اینکه مشاهدات خط مبنا از جنس فاصله هستند و از طرف دیگر، مقیاس و آزیموت هم از جنس فاصله هستند، نتیجه می گیریم که مشاهدات خط مبنا می توانند دیفکت های مربوط به پارامتر های مقیاس و دوران را حل کنند. ولی همچنان این نوع از مشاهدات از نظر فیکس بودن مبدا مشکل دارند. برای حل این مشکل باید یک نقطه ی معلوم داشته باشیم. پس چون در شبکه ای که در اختیار داریم مختصات یک نقطه را داریم، شبکه ی نقاط از نظر موقعیت مکانی هم ثابت شده و نقص دیتوم مبدا هم برطرف می شود.

نکته ی مهم دیگر آن است که کمبود رتبه در ماتریس ضرایب معادلات مشاهدات، ناشی از ضعف هندسی مسئله در تعریف توجیه سیستم مختصات است و یا به عبارتی وضعیت قرار گرفتن نقاط در صفحه ی نقشه با اطلاعات موجود نامشخص است. پس برای اینکه تشخیص دهیم آیا در فرآیند برآورد نقص دیتوم داریم یا خیر، پس از تشکیل ماتریس A، می توان رتبه ی ماتریس را حساب کرد. اگر رتبه کامل باشد، نقص دیتوم نداریم. در مسئله ای که در اختیار داریم، ماتریس A فول رنک است که نشان از نداشتن نقص دیتوم می دهد.

در تشکیل معادلاتی که نقطه ی معلوم در آنها شرکت دارند، مختصات نقاط معلوم به طرف مشاهدات تساوی رفته و با مقدار مشاهده ی خط مبنا جمع می شوند و مقدار حاصل در طرف دیگری تساوی عضوی از ماتریس مشاهدات(L) خواهد شد. از طرفی در ماتریس A هم تنها ضریب نقطه ی دیگر که در معادلات آمده ثبت میشود و دیگر درایه های سطر مربوط به معادله ی مذکور صفر می شود. به طور مثال:

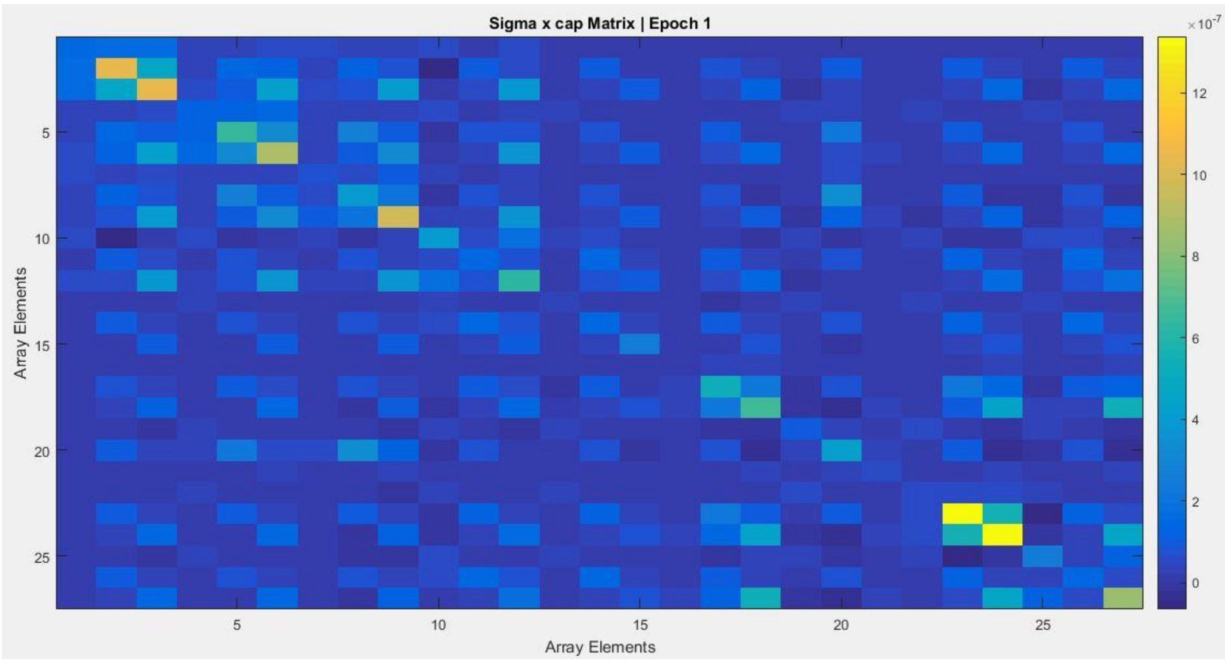
$$\begin{array}{l} x_{KLBR} - x_{KHAJ} = l^o \xRightarrow{x\ of\ KHAJ\ is\ given} x_{KLBR} = \\ y_{KLBR} - y_{KHAJ} = l^o \xRightarrow{y\ of\ KHAJ\ is\ given} y_{KLBR} = \\ z_{KLBR} - z_{KHAJ} = l^o \xRightarrow{z\ of\ KHAJ\ is\ given} z_{KLBR} = \end{array} \boxed{\begin{array}{l} l^o + x_{KHAJ} \\ l^o + y_{KHAJ} \\ l^o + z_{KHAJ} \end{array}}$$

مقدار مشخص

ماتریس وریانس کوورریانس مجهولات

برای برآورد دقت پارامتر های محاسبه شده، از ماتریس وریانس کوورریانس استفاده می کنیم که یک ماتریس متقارن است. در واقع این ماتریس معرف دقت مجهولات برآوردشده است. برای محاسبه ی ماتریس وریانس کوورریانس مجهولات مطابق زیر داریم:

$$\Sigma_{\hat{X}} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \xrightarrow{\sigma_0^2 = 1} \Sigma_{\hat{X}} = (A^T P A)^{-1}$$



شکل ۴. تصویر ماتریس وریانس کوورریانس مجهولات برآورد شده

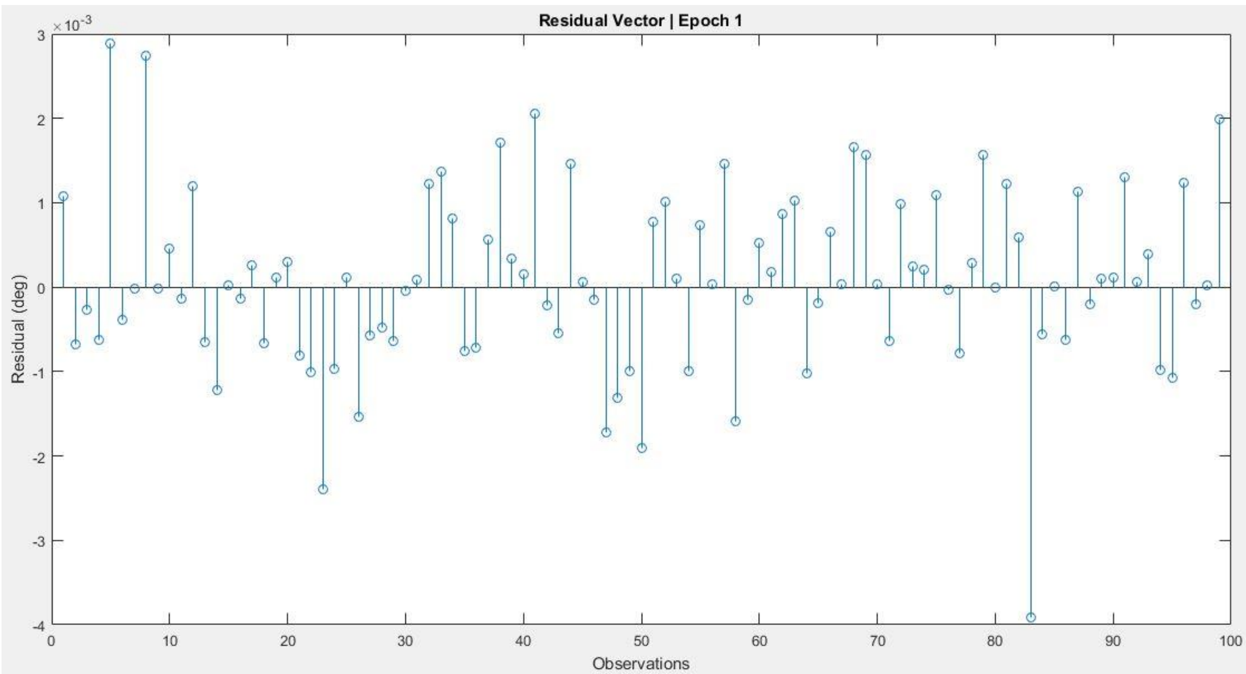
برای تحلیل شکل فوق می توان از نوار رنگ به عنوان راهنما کمک گرفت. دقت هر نقطه را می توان از رنگ مربوط به درایه های روی قطر اصلی تصویر بالا تشخیص داد. با توجه به شکل مشاهده می شود که هرچه، رنگ هر درایه به آبی تمایل داشته باشد دقت بیشتر و هرچه به زرد متمایل بباشد دقت کمتری دارد. کمترین دقت ها در بیشتر نقاط مربوط به مولفه های yوz می باشند. همانطور که در شکل مشهود است، بیشترین دقت مربوط به مجهولات ۳ تا۶ است، چراکه این نقاط به نقطه ی KHAJ که مختصات معلوم دارد، نزدیکترند و از آنها به نقطه ی مذکور مشاهده انجام شده است. علت کمتر بودن دقت دو مجهول اول هم می تواند به فاصله ی زیاد آنها از دیگر نقاط شبکه مربوط باشد.

باقی مانده ی مشاهدات

پس از برآورد مجهولات، با ضرب بردار X در A و تفاضل آن از بردار مشاهدات می توان اختلاف بین مشاهدات و مقدار برآورد شده ی مشاهده را بدست آورد.

$$\hat{V} = A\hat{X} - L$$

شکل زیر نمایشی از بردار ۱*۹۹ باقی مانده است.

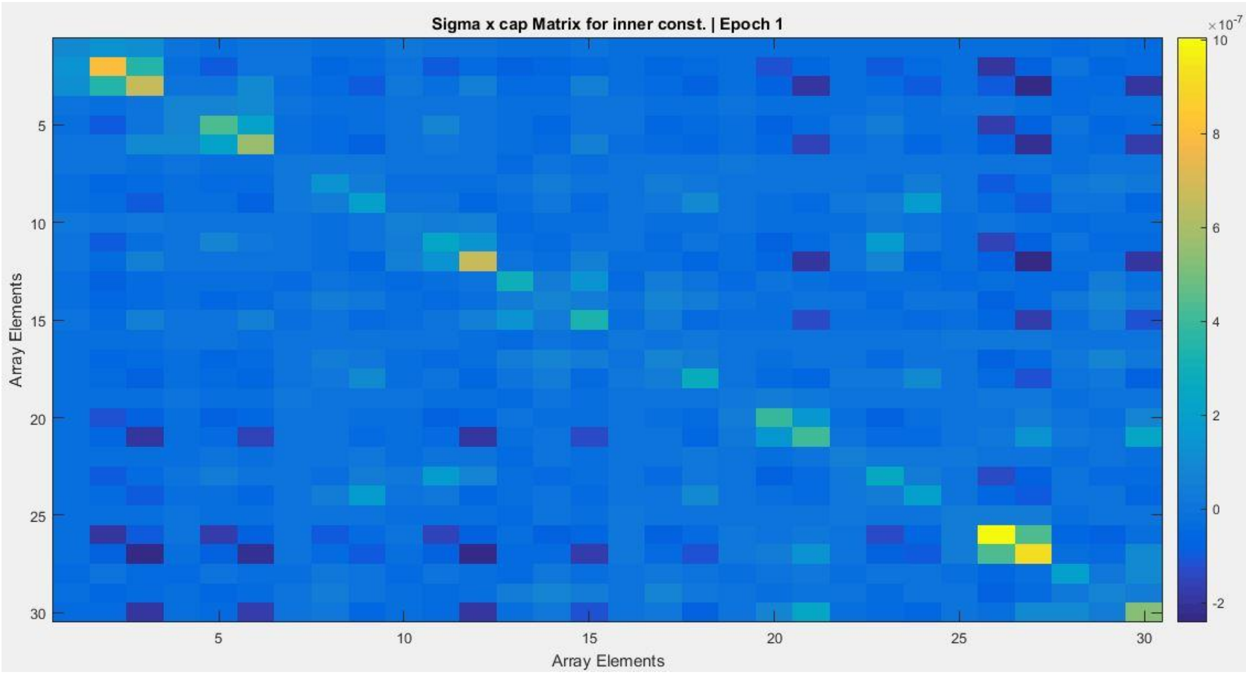


شکل ۵. تصویر بردار باقی مانده

بازه ی تغییرات بردار باقی مانده از ۰.۰۰۳۹- تا ۰.۰۰۲۹ است. با توجه که این بردار از مرتبه ی (۳-)^۱۰ است، می توان نتیجه گرفت که مقادیر سرشکن شده بردار (X) و مشاهده شده (L) از اختلاف کمی برخوردار هستند. از سوی دیگر چون از روش کمترین مربعات استفاده کردیم در حالی که هدف از کمترین مربعات مینیمم شدن V^2 است، می توان گفت نتایج قابل پیش بینی بوده است.

ماتریس وریانس کوورریانس به روش قیود داخلی

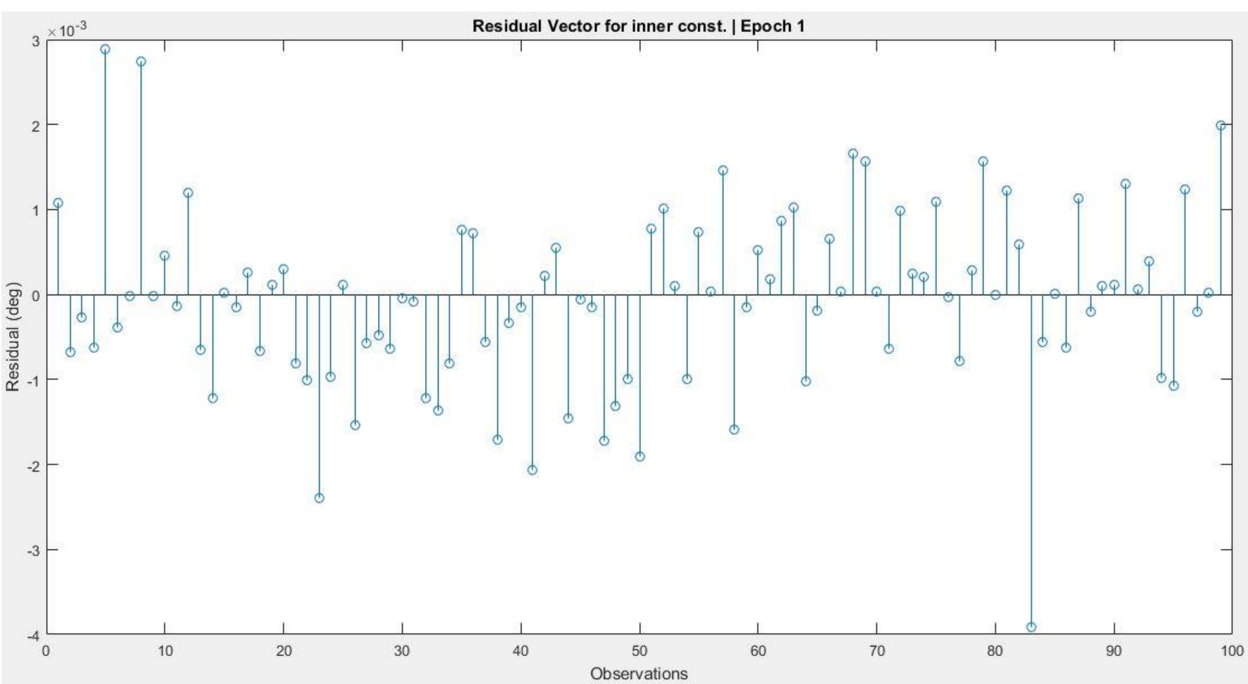
ماتریس وریانس کوورریانس در این روش یک ماتریس ۳۰*۳۰ است که به صورت زیر نمایش داده می شود:



شکل ۶. تصویر ماتریس وریانس کوورریانس به روش قیود داخلی

شکل فوق شباهت زیادی با شکل ماتریس وریانس کوورریانس به روش قید با نقطه ی معلوم دارد، با این تفاوت که نقطه ی KHAJ به عنوان مجهول سوم یعنی درایه های ۷ تا ۹ وارد ماتریس مجهولات شده است.

باقی مانده به روش قیود داخلی



شکل ۷. تصویر بردار باقی مانده به روش قیود داخلی

با مقایسه ی شکل فوق در می یابیم که تنها تغییر آن نسبت به حالت قبل، تفاوت در معادلات بین۴ تا ۶، ۱۶ تا ۱۸ و ۳۱ تا ۴۵ که در همه ی آنها، نقطه ی KHAJ شرکت دارد تغییر کرده است. این تغییر دو عامل دارد:

۱. در حالت قبل، مختصات نقطه ی KHAJ با درایه ی L مربوط به معادله ی خودش جمع شده بود. پس بخش زیادی از این دگرگونی به این موضوع بر می گردد.
۲. عامل دیگر که تاثیر کمتری دارد جابجایی مختصات نقاط مجهول نسبت به حالت قبل(مقدار X) است.

آزمون فاکتور واریانس

پس از سرشکنی، بایستی سازگاری فاکتور واریانس ثانویه (برآوردشده) با فاکتور واریانس اولیه مورد آزمون قرار گیرد.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{df}$$

به منظور سنجش میزان سازگاری فاکتور واریانس ثانویه با فاکتور واریانس اولیه، از آماره ی آزمون زیر استفاده می شود که از تابع توزیع کای دو پیروی می کند:

$$y = \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(df)$$

در سطح معنی دار α اگر رابطه ی زیر برقرار باشد، فرض صفر سرشکنی قبول خواهد شد:

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(df) \leq \frac{df\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(df) \rightarrow \chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(72) \leq 38.6434 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(72)$$

$$\rightarrow 50.4279 \ ! \leq 38.6434 \ ! \leq 97.3531$$

با توجه به نزدیک بودن مقادیر بردار باقی مانده در حالت های قید با مختصات معلوم و قیود داخلی، مقدار فاکتور واریانس ثانویه در هر دو حالت بسیار نزدیک خواهد بود. پس با توجه به نابرابری بالا، آزمون هم برای روش اول و هم برای روش قیود داخلی رد می شود.

با توجه به اینکه آزمون فاکتور واریانس رد شده، ماتریس واریانس کوواریانس برآوردشده مجهولات برآوردشده یا ماتریس واریانس کوواریانس ثانویه از ضرب فاکتور واریانس ثانویه در ماتریس واریانس کوواریانس پیشین بدست می آید.

دلایل مربوط به رد شدن آزمون، می تواند وزن دهی نادرست مشاهدات یا وجود خطای زیاد در مشاهدات باشد.

جمع بندی

با استفاده از مشاهدات خط مبنا و نقطه ی معلوم، توانستیم مدل پارامتریک خطی را تشکیل داده و مجهولات که همان مختصات نقاط بود را بدست آوریم. باقی مانده ی برآورد از مرتبه ی (۳-)^۱۰ شد که نشان از اختلاف کم برآورد از مشاهدات دارد.

پس از آن برای سنجش صحت فاکتور واریانس اولیه، از آزمون فاکتور واریانس استفاده کردیم. به کمک بردار باقی مانده و درجه آزادی، آماره ی آزمون را تشکیل دادیم و چون مقدار حاصل بین دو حد آستانه ی پایین و بالا قرار نگرفت، آزمون رد شد و فرض فکتور واریانس اولیه نادرست بوده است و ماتریس واریانس کوواریانس جدید بدست آمد..

پروژه درس نقشه برداری ژئودتیک

مرحله ی دوم پروژه ی گروه ۴: بیضی خطا و اعتمادپذیری شبکه

اعضای گروه:

حسن رضوان، سهند صبحی، رعنا اسماعیلی، فاطمه فلاح

دستیار آموزشی:

مهندس علی رضا ثبوتی

برنامه ی اصلی مربوط به این پروژه، فایل Epoch_1.m است. در این برنامه از ۷ تابع فرعی کمک گرفته شده است.

۱. **A_Maker.m: برای ساخت ماتریس ضرایب در قید با مختصات معلوم.**
۲. **L_Maker: برای تشکیل بردار مشاهدات از طریق ماتریس های داده شده در فایل پروژه.**
۳. **AA_Maker: برای تشکیل ماتریس ضرایب در حالت استفاده از روش قیود داخلی.**
۴. **ecef_tarnsform_geodetic.m: برای تبدیل مختصات های بدست آمده به مختصات ژئودتیک.**
۵. **Net: برای رسم شبکه در حالت حداقل قیود.**
۶. **Net_in: برای رسم شبکه در حالت قیود داخلی.**
۷. **CalculateEllipse: برای رسم بیضی های خطا.**

مقدمه

مرحله ی قبل پروژه را در دو حالت حداقل قیود و قیود داخلی انجام دادیم. در حالت حداقل قیود، یک نقطه ی معلوم داشتیم(۳ پارامتر دیتوم) و به دلیل داشتن مشاهدات خط مبنا، ۳ پارامتر دیگر دیتوم که مربوط به آزیموت و ۱ پارامتر که مقیاس است را می توان حل کرد. در حالت قیود داخلی، مختصات نقطه ی معلوم را هم به عنوان مجهول فرض کردیم. در هر یک از دو حالت فوق، مختصات نقاط شبکه را بدست آورده و سرشکنی کردیم. همچنین آزمون بعد از سرشکنی فاکتورواریانس را نیز انجام دادیم.

پس از آنکه سرشکنی شبکه را در مرحله ی قبل پروژه انجام دادیم، نیاز است انحراف معیار مختصات ایستگاه سرشکن شده برآورد شود. این انحراف معیار ها برآورد خطا را در امتداد محور های مینا نشان می دهند. انحراف معیار ذکر شده از تابع توزیع نرمال دومتغیره پیروی می کند که در نهایت به شکل یک بیضی است. پس برای شرح کامل خطای برآوردشده ی یک ایستگاه، تنها نیاز است که جهت و طول نیم قطرهای بیضی خطا را بدست آوریم.

پس از آنکه انحراف معیار محاسبه و نمایش داده شد، به سراغ اعتمادپذیری می رویم. اعتمادپذیری درواقع صحت انجام پروژه را نشان میدهد. باید اعتمادپذیری را به صورت یک عدد درآوریم تا قابل فهم شود و برای این کار از آزمون های بعد از سرشکنی استفاده میکنیم.

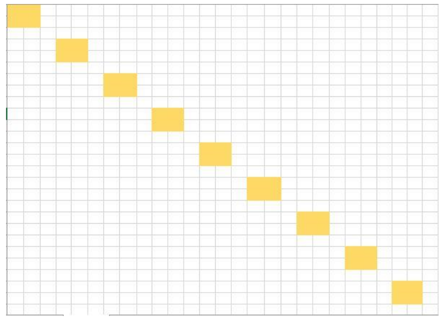
بیضی خطا

همانطور که در مقدمه گفته شد، هدف از رسم بیضی خطا، نمایش انحراف معیار ایستگاه سرشکن شده است. دو نوع بیضی خطا داریم:

۱. بیضی خطای مطلق: بیضی خطای هر نوع به مرکزیت ایستگاه رسم می شود

۲. بیضی خطای نسبی: دقت مختصات یک نقطه نسبت به مختصات نقطه ی دیگر را توصیف میکند. این بیضی خطا نشانگر کیفیت داخلی شبکه است و بر روی خط واصل میان دو نقطه ترسیم می شود. یکی از مزایای رسم بیضی خطا، آن است که مقایسه ی تصویری برای دقت نسبی بین هر دو ایستگاه انجام می شود.

برای رسم بیضی های خطا در حالت حداقل قیود، از ماتریس وریانس کوورریانس مجهولات بدست آمده در حالت حداقل قیود از مرحله ی قبل پروژه استفاده می کنیم. در این حالت، ابعاد ماتریس وریانس کوورریانس، ۲۷*۲۷ است. برای بدست آوردن پارامترهای بیضی خطای مطلق، ماتریس های ۲*۲ مربوط به هر نقطه را از روی قطر اصلی جدا می کنیم.



شکل ۱. نحوه ی جداکردن ماتریس های هر نقطه از ماتریس وریانس کوورریانس مجهولات

اگر المان های هر ماتریس را به صورت $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ فرض کنیم، معادله ی مشخصه را تشکیل داده، و جواب های معادله ی مشخصه به صورت λ_1 و λ_2 بدست می آید: معادله مشخصه $= \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2) = 0$

نیم قطرهای بیضی خطای استاندارد را با جذر از مقادیر بدست می آوریم:

برای بدست آوردن نیم قطرهای اصلی، باید ضریب k را در نیم قطرهای استاندارد ضرب کنیم. $k = \sqrt{\chi^2(95\%, 2)}$

مقدار k برابر می شود با ۵.۹۹. نیم قطر های اصلی به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$a = k * a_{st} \quad ; \quad b = k * b_{st}$$

زاویه ی بیضی را هم از رابطه ی روبرو بدست می آوریم: $2t = \tan^{-1}\left(\frac{2b}{a-c}\right)$

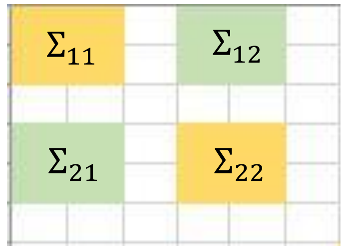
این جواب را بر اساس علامت b تعیین علامت می کنیم.

در نهایت پارامترهای بیضی خطا وارد تابع رسم شده و به مرکزیت نقطه ی برآوردشده، بیضی رسم می شود.

برای بیضی خطای نسبی هم باید ماتریس وریانس کوورریانس اختلاف مختصات دو نقطه را که یک ماتریس ۲*۲ است، بدست آوریم. به طور مثال اگر بخواهیم پارامترهای بیضی خطای تقاط ۱و۲ را بدست آوریم، ابتدا باید یک ماتریس ۴*۴ تشکیل می دهیم که درایه های آن به صورت زیر است:

$$\Sigma_{1122} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

نحوه ی جدا کردن ماتریسها در شکل زیر آمده:



شکل ۲. نحوه ی جداکردن ماتریس های هر نقطه از ماتریس وریانس کوواریانس مجهولات

برای اینکه به ماتریس ۲*۲ مطلوب برسیم، از عبارت زیر استفاده می کنیم:

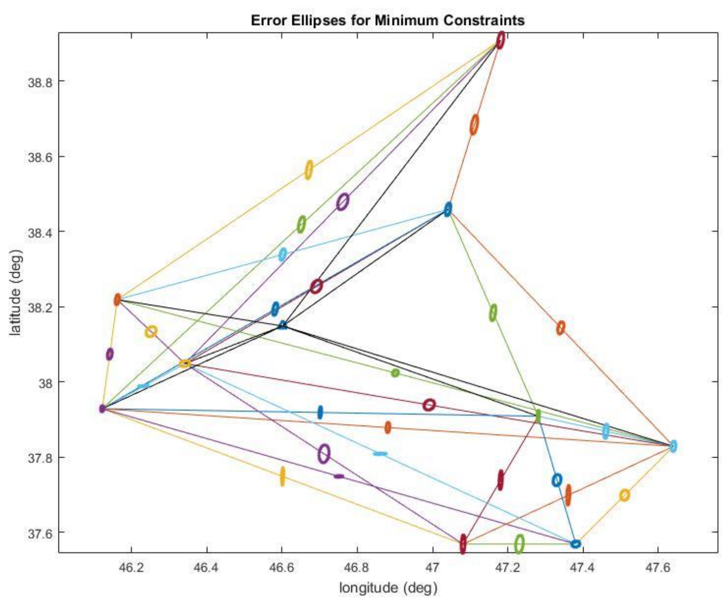
$$\Sigma_{\Delta 12} = I * \Sigma_{1122} * I^T \qquad which: \; I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

المان های ماتریس بدست آمده در رابطه ی بالا وارد معادله ی مشخصه می شوند و همانطور که برای بیضی خطای مطلق توضیح داده شد، پارامترهای بیضی خطای نسبی هم بدست می آیند.

سپس پارامترهای بیضی خطا وارد تابع رسم شده و به مرکزیت خط واصل دو نقطه، بیضی رسم می شود.

در نهایت شبکه و بیضی های خطا به شکل زیر در می آید:

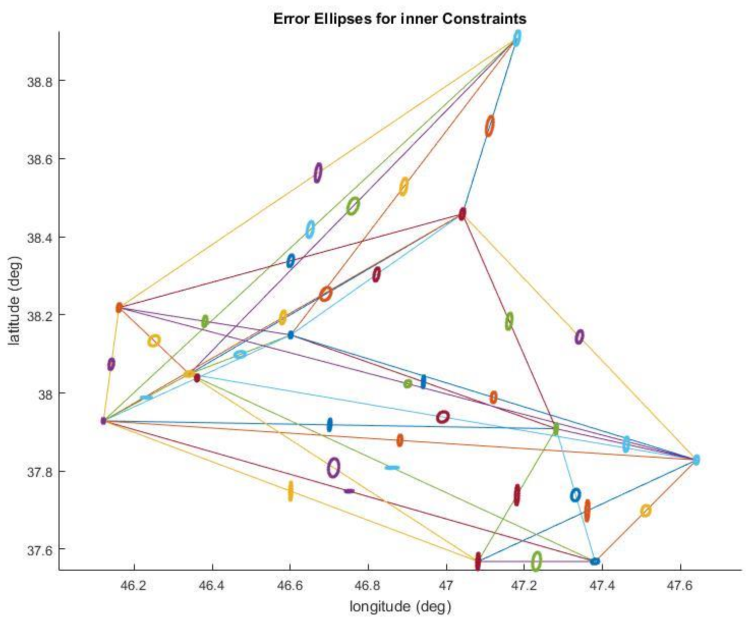
- ❖ برای نمایش بیضی های خطا از مقیاس استفاده شده و نیم قطر های بیضی در ۱۰ ضرب شده اند. (scale=10)



شکل ۳. بیضی های خطا در حالت حداقل قیود

در حالت قیود داخلی، ایستگاه KHAJ هم برآورد می شود. پس این نقطه هم بیضی خطای مطلق و هم بیضی خطای نسبی دارد. یکی تفاوت حالت قیود داخلی با حداقل قیود این مورد است. در حالت قیود داخلی، ماتریس وریانس کوورریانس مجهولات، یک ماتریس ۳۰*۳۰ است که به معنای برآورد ۱۰ نقطه است.

مانند حالت حداقل قیود، برای هر نقطه ماتریس های ۲*۲ را جدا کرده و وارد فرمول های ذکر شده در بالا می کنیم تا پارامتر های بیضی را بدست آوریم.



شکل ۴. بیضی های خطا در حالت قیود داخلی

برای مقایسه و تحلیل بیضی های خطا در حالت حداقل قیود و قیود داخلی، از مساحت بیضی ها استفاده می کنیم. مقادیر بیضی ها در جداول زیر آمده است. (مساحت $*^{-۴}$ ۱۰)

نقطه	حداقل قیود	قیود داخلی
KLBR	۴.۹	۳.۵۳
AHAR	۳.۳۵	۲.۲۱
AMND	۲.۱۵	۱.۴۷
TABZ	۳.۱۹	۲.۰۷
SHND	۱	۰.۵۷۳
BRMN	۱.۳۸۳	۱.۳۸

LEDH	۲.۶۱	۱.۶۲
KCMN	۳.۷	۲.۳۶
TCKE	۲.۶۴	۱.۷۳
KHAJ	---------------------	۰.۸۵۵

جدول ۱. مساحت بیضی های خطای مطلق

همانطور که از جدول بالا مشخص است، مساحت بیضی های خطا در حالت قیود داخلی از حالت حداقل قیود کمتر است. این به معنای آن است که دقت سرشکنی ما در حالت قیود داخلی نسبت به حداقل قیود بهتر بوده است.

برای بیضی های خطای نسبی هم جدول زیر را داریم: (مساحت * $۱۰^{-۴}$)

نقاط	حداقل قیود	قیود داخلی
KLBR-AHAR	۶.۰۸	۶.۰۸
KLBR-AMND	۴.۷۱	۴.۷۱
KLBR-TABZ	۸.۱۹	۸.۱۹
KLBR-SHND	۴.۸۵	۴.۸۵
AHAR-AMND	۳.۰۴	۳.۰۴
AHAR-TABZ	۶.۷۳	۶.۷۳
AHAR-SHND	۳.۱۶	۳.۱۶
AHAR-LEDH	۳.۸۵	۳.۸۵
AMND-TABZ	۵.۴	۵.۴
AMND-SHND	۲.۴۶	۲.۴۶
AMND-LEDH	۱.۸۹	۱.۸۹
TABZ-SHND	۰.۵۵	۰.۵۵
TABZ-LEDH	۵.۷۴	۵.۷۴
SHND-BRMN	۱.۵۱	۱.۵۱
SHND-LEDH	۲.۰۶	۲.۰۶
SHND-KCMN	۲.۰۸	۲.۰۸
SHND-TCKE	۰.۶۵	۰.۶۵

BRMN-AHAR	۴.۱۹	۴.۱۹
BRMN-LEDH	۳.۳۸	۳.۳۸
BRMN-KCMN	۳.۳۴	۳.۳۴
BRMN-TCKE	۴.۸	۴.۸
LEDH-KCMN	۳.۴۷	۳.۴۷
LEDH-TCKE	۴.۵۶	۴.۵۶
KCMN-TABZ	۹.۷۱	۹.۷۱
KCMN-TCKE	۷.۳۲	۷.۳۲
TCKE-TABZ	۰.۸	۰.۸
KLBR-KHAJ	-------------------------	۴.۹
AHAR-KHAJ	-------------------------	۳.۳۵
KHAJ-AMND	------------------------	۲.۱۵
KHAJ-TABZ	------------------------	۳.۱۹
KHAJ-SHND	-----------------------	۱
KHAJ-BRMN	------------------------	۱.۳۸
KHAJ-LEDH	------------------------	۲.۶۱

جدول ۲. مساحت بیضی های خطای نسبی

علاوه بر اندازه ی مساحت ها، زوایای بیضی های خطا هم در دو حالت حداقل قیود و قیود داخلی یکسان هستند.

در مورد بیضی های خطای نسبی، با توجه به اینکه پارامترهای بیضی از دو ماتریس مختلف sigma_x_cap و sigma_x_cap_in (ماتریس وریانس کوواریانس مجهولات در دو حالت حداقل قیود و قیود داخلی) بدست می آیند، اما مساحت بیضی ها در دو حالت قیود داخلی و حداقل قیود برابر است. این موضوع تا حدی قابل پیش بینی است؛ چراکه بیضی خطای نسبی نشان دهنده ی اختلاف مختصات است و اختلاف مختصات نقاط در هر دو حالت یکسان است.
همانطور که در مرحله ی قبل پروژه نشان داده شد، تفاوت دو حالت قیود داخلی و حداقل قیود، در معلوم یا مجهول بودن نقطه ی KHAJ است و در پلات نشان داده شد که شبکه در حالت قیود داخلی نسبت به حداقل قیود اندکی شیفت پیدا کرده است.

تبدیل S

برای تبدیل از یک دیتوم به دیتوم دیگر از تبدیل S استفاده می کنیم. برای بدست آوردن ماتریس H از دستور null استفاده می کنیم. برای تشکیل ماتریس دیتوم مقصد، چون شبکه ۳ بعدی است به ۷ قید نیاز داریم. از طرفی چون مشاهدات ما، از جنس خط مبنا هستند، نقص های دوران و مقیاس حل می شود. اما موضوع مبدا سیستم مختصات همچنان باقی می ماند و باید برطرف شود. پس ماتریس دیتوم به صورت زیر تشکیل می شود:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{30*3}$$

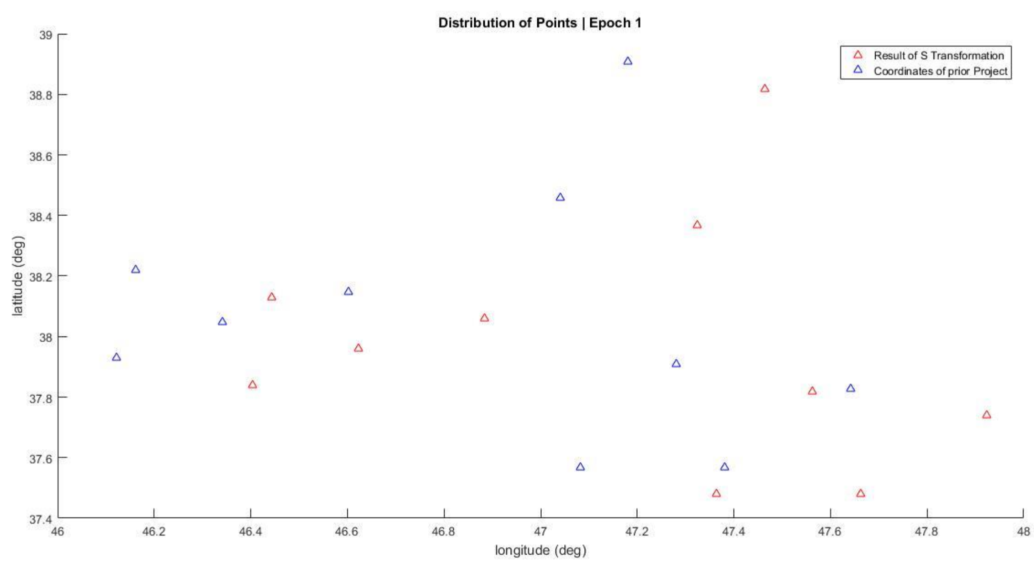
نقطه ی دهم(KHAJ) را به عنوان نقطه ی ثابت فرض کردیم. مرحله ی بعد، بدست آوردن ماتریس S از رابطه ی زیر است:

$$S = I_{30} - H * (D^T * H)^{-1} * D^T$$

نتیجه یک ماتریس ۳۰*۳۰ است که باید در ماتریس مختصات قیود داخلی ضرب شود.

$$Coordinates\ of\ minimum\ const. = S * Coordinates\ of\ inner\ const.$$

مختصات نقاط حاصل از تبدیل S در شکل ۵. آمده است.



شکل ۵. مقایسه مختصات نقاط حاصل از تبدیل S ومختصات پروژه ی قبل

همانطور که شکل بالا مشخص است، شبکه ی مختصات حالت حداقل قیود از پروژه ی قبل نسبت به مختصات های حاصل از تبدیل S مقداری جابجایی دارند؛ اما با این حال اختلاف مختصات دوبه دوی نقاط داخل شبکه ثابت مانده است. این موضوع با توجه به برابر بودن بیضی های خطای نسبی در دو حالت که ناشی از اختلاف مختصات است، در بررسی تفاوت بیضی خطاهای حالت حداقل قیود و قیود داخلی هم مورد بحث قرار گرفت که تفاوت مختصات در هر دو حالت یکسان است. به عنوان نمونه اختلاف مختصات بین دو نقطه ی KHAJ و AHAR یا KLBR و AHAR چه در حالت حاصل شده از تبدیل S و چه در حالت حداقل قیود از پروژه ی قبل ثابت باقی مانده اند.

```
KHAJ_AHAR_S_Transformation =

   -0.4400


KHAJ_AHAR_prior_project =

   -0.4400
```

```
KLBR_AHAR_S_Transformation =

   -0.1400


KLBR_AHAR_prior_project =

   -0.1400
```

برای تبدیل ماتریس واریانس کوواریانس قیود داخلی به حداقل قیود از رابطه ی $Q_{x_{MC}} = S * Q_{x_{IC}} * S^T$ استفاده می کنیم که مرتبه ی خطاها مشابه ماتریس واریانس کوواریانس حداقل قیود در پروژه ی قبل است.

اعتمادپذیری

از آنجایی که گفته شده توان آزمون ۸۰ درصد است می توان نتیجه گرفت که مقدار β برابر است با ۰.۲.

$$\gamma = 1 - \beta \ \rightarrow \ 0.8 = 1 - \beta \ \rightarrow \ \beta = 0.2$$

با توجه به اینکه برابر ۰.۰۵ است و درجه آزادی آزمون برابر ۱ است، از جداول تابع توزیع کای دوی غیر مرکزی کمک میگیریم و پارامتر غیر مرکزی(در برنامه ی متلب tau نامگذاری شده است) را پیدا می کنیم.

$\alpha = 0.05$

λ / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	16	21
1	0.8299	0.7070	0.5900	0.4840	0.3912	0.3122	0.2464	$\boxed{0.1926}$	0.1492	0.1146	0.0874	0.0663	0.0279	0.0207	0.0044

سپس ماتریس آزادی را از رابطه ی $R = I_m - A\left(A^T Q_y^{-1} A\right)^{-1} A^T Q_y^{-1}$ بدست می آوریم. ماتریس حاصل یک ماتریس با ابعاد ۹۹*۹۹ است. مقادیر قطری ماتریس R عدد آزادی مشاهدات است.

برای آنکه کمترین خطای قابل کشف را بدست آوریم، از tau و مقادیر عدد آزادی استفاده می کنیم. چون مشاهدات از هم مستقل اند، از رابطه ی زیر استفاده می کنیم تا کمترین خطای قابل کشف برای هر مشاهده را که یک بردار ۹۹*۱ است محاسبه کنیم.

$$\nabla_{MDB}= \sigma_{y_i}\sqrt{\frac{\lambda}{r_i}}$$

برای اعتمادپذیری خارجی، ابتدا طبق فرض آزمون $H_a: E\left\{\underline{y}\right\} = Ax + c_i\nabla_{MDB}$ مقدار اریبی برآورد مجهولات ناشی از MDB مشاهده ی iام را بدست آوریم.

$$E\{\underline{x}\} = X + \left(A^T Q_y^{-1} A\right)^{-1} A^T Q_y^{-1} c_i \nabla_{MDB} \gg (\nabla_x)\ Bias$$

∇_x نشان دهنده ی بیشینه ی اریبی برای خطاهای کشف نشده است. ∇_x شامل ۹۹ ماتریس با ابعاد ۱*۲۷ است. از مقادیر ∇_x مشخص است که در حد دقت $Q_{\hat{x}}$ است. برای اینکه درک بهتری از مقدار اریبی که یک بردار به تعداد مجهولات است داشته باشیم، نرم هر یک از ۹۹ ماتریس را بدست می آوریم.

$$\|\nabla_x\|_{Q_{\hat{x}}^{-1}} = \nabla_x^T Q_{\hat{x}}^{-1} \nabla_x$$

پس از آن باید به دنبال کمترین نرم باشیم تا نقطه ی با قابلیت اعتماد خارجی را بیابیم. چون اندیس کمترین نرم، ۲۸ است با مقدار ۰.۵۲ و مشاهده ی ۲۸ ام بین نقاط AHAR و LEDH است، می توان گفت این دو نقطه بیشترین قابلیت اعتماد خارجی را دارند.