ABC 390 D - Stone XOR

hiragn

2025年2月10日

1. 問題の概要

N $(2 \le N \le 12)$ 個の袋がある。袋 i には A_i $(1 \le A_i \le 10^{17})$ 個の石が入っている。「2 つの袋 x,y を選び,袋 x の石をすべて袋 y に入れる」という操作を繰り返す。操作回数は 0 回でもよい。

操作終了後の袋iの石の個数を B_i とする。 $B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_N$ がとりうる値が何通りあるか求めよ。

注)⊕は排他的論理和(XOR)を表す。

https://atcoder.jp/contests/abc390/tasks/abc390_d

2. 方針

 B_1, B_2, \cdots を求めなくても $B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_N$ を求めることができる。 これはグループ分けの問題であり、次のようにすればいい。

- N 個の袋をいくつかのグループに分ける
- グループごとに石を集める
- グループごとの石の個数の XOR を計算

たとえばすべての石を袋 1 に集めた場合と袋 2 に集めた場合の結果は同じ。グループ分けの場合の数は N^N ($\le 12^{12}$) ではなくベル数 B_n ($\le B_{12}=4,213,597$) で与えられる。この程度なら全探索できる。

3. 実装

stackoverflow の「How can I obtain all partitions of a list in Mathematica?」という記事が参考になった。*1

リストを集合としてとらえて分割するのに SetPartitions が使える。これは古い関数だが、 現行の mathematica でもちゃんと動いた。

```
In[]:= Clear["Global'*"]
2 n = 3;
3 Needs["Combinatorica'"]
4 comb = SetPartitions@Range@n
5
6 Out[]= {{{1, 2, 3}},
7 {{1}, {2, 3}}, {{1, 2}, {3}}, {{1, 3}, {2}},
8 {{1}, {2}, {3}}}
```

あとはこれらの部分集合の和を求めて、XORを計算すればいい。1行で書けた。

^{*1} https://stackoverflow.com/questions/8304892/how-can-i-obtain-all-partitions-of-a-list-in-mathematica