

n^2 の 10 の位が偶数になる条件

hiragn

2024 年 12 月 14 日

「算数にチャレンジ!!」第 971 回の問題*1を解いた。

$4 \times 4, 5 \times 5, \dots, 99 \times 99$ のうち 10 の位が偶数となるものの個数を求めよ。

<http://www.sansu.org/used-html/index971.html>

mathematica で全探索したが、 $n^2 = (10a + b)^2$ の展開式を考えると手計算でも解ける。

1. 10 で割ったときの商に注目

「10 の位が偶数」とは「10 で割ったときの商が偶数」ということ。この条件をみたす数を探して、答えは 76 個。

```
1 In[] := AbsoluteTiming[
2   ans = Length@Select[Range[4, 99], EvenQ@Quotient[#^2, 10] &]]
3
4 Out[] = {0.000106, 76}
```

2. $n = 10a + b$ を 2 乗する

手計算で解くことを考える。 $n = 10a + b$ (a, b は 0 以上 9 以下の整数) とおいて 2 乗する。

$$\begin{aligned} n^2 &= (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 \\ &= 10 \times 2(5a^2 + ab) + b^2 \end{aligned}$$

これの 10 の位が偶数になる条件は b^2 の 10 の位が偶数であること。実際に計算してみると

*1 この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

次のようになっている。

$$0^2 = 00, 1^2 = 01, 2^2 = 04, 3^2 = 09, \boxed{4^2 = 16},$$

$$5^2 = 25, \boxed{6^2 = 36}, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$$

$b = 4, 6$ 以外は条件をみたす。

4 以上 96 以下の整数は 96 個で、この範囲に $b = 4, 6$ の数が 10 個ずつ計 20 個あるので答えは $96 - 20 = 76$ 個。