奇数の積の下3桁を求める

hiragn

2024年12月14日

「算数にチャレンジ!!」第987回の問題[*1]を解いた。

> 1以上100以下の奇数すべてかけあわせた数の下3桁を求めよ。
>
> http://www.sansu.org/used-html/index987.html

積を求めた上で 10^3 で割っても解けるが，この解法は応用が効かない。漸化式か中国式剰余定理を使う方がよい。

1. 再帰で解く

ためしにまともに積を求めて $\bmod 10^3$ をとってみたら解けた。積の結果は79桁だった。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 ans = Mod[Product[2 i - 1, {i, 1, 50}], 10^3]]

Out[]= {0.0000200642, 875}
```

この解法はあまりにしょうもないので「次の奇数をかけて 10^3 で割る」を漸化式で書いて再帰で解いてみた。

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1 \\
&a_n = \mathrm{mod}\left((2n-1)a_{n-1},\, 10^3\right) \quad (n \geqq 2)
\end{aligned}
$$

計算時間は1/10になった。

[*1] この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 a[1] = 1;
 a[n_] := a[n] = Mod[(2 n - 1)*a[n - 1], 10^3];
 ans = a@50]

Out[]= {1.99612*10^-6, 875}
```

この解法は Fold でも書けるがコードが直感的にわかりにくいし，速くもない。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 ans = Fold[Mod[#1*#2, 10^3] &, 1, Range[3, 100, 2]]]

Out[]= {0.000022902, 875}
```

2.　中国式剰余定理

下 3 桁とは $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ で割った余りであり，中国式剰余定理が使える。
このかけ算でできる数を P とおいて，8 で割った余りと 125 で割った余りを求める。
P の中には 5 と $25 = 5^2$ が含まれるので

$$P \equiv 0 \pmod{125} \quad \cdots\cdots ①$$

奇数は $8q + r$ ($r = 1, 3, 5, 7$) とあらわせるので，奇数を 8 で割った余りは 1, 3, 5, 7 を繰り返して周期 4 になっている。
奇数は全部で $50 = 4 \times 12 + 2$ 個あるので，P を 8 で割った余りは次のようになる。

$$P \equiv (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^{12} \cdot 1 \cdot 3 \equiv \{1 \cdot 3 \cdot (-3) \cdot (-1)\}^{12} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{8} \quad \cdots\cdots ②$$

①②から x, y を整数として $(P =)125x = 8y + 3$ とおける。
これの整数解は $x = 8k + 7,\ y = 125k + 109$（$k$ は 0 以上の整数)。

$$\therefore P = 125x = 125(8k + 7) = 1000k + 875$$

P の下 3 桁は 875。
ちなみに中国式剰余定理は mathematica にもあり，①②を解く過程は省略できる。

```
In[]:= ChineseRemainder[{3, 0}, {2^3, 5^3}]]

Out[]= {0.0000287639, 875}
```