1円玉，2円玉，5円玉で支払う方法

hiragn

2024 年 12 月 13 日

「算数にチャレンジ!!」第 1200 回の問題[*1]を解いた。

> マサル国には 1 円玉，2 円玉，5 円玉の 3 種類の硬貨が流通している。これらを使って 10 円を支払う方法は 10 通りある。
>
> マサル国で 100 円を支払う方法は 90 円を支払う方法より何通り多いだろうか。
>
> http://www.sansu.org/used-html/index1200.html

mathematica で解くなら FrobeniusSolve するだけだが，これだとあまりに味気ないので手計算で解く方法も考えた。

1. フロベニウス方程式

1 円玉，2 円玉，5 円玉を使って a 円払う方法は $x + 2y + 5z = a$ の非負整数解と同じ個数だけある。この形の方程式をフロベニウス方程式というらしく，mathematica にはこれを解くための FrobeniusSolve という関数が用意されている。

10 円の支払い法は次のようになり，確かに 10 通りある。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
sol = FrobeniusSolve[{1, 2, 5}, 10]
Out[]= {{0, 0, 2}, {0, 5, 0}, {1, 2, 1}, {2, 4, 0}, {3, 1, 1},
{4, 3, 0}, {5, 0, 1}, {6, 2, 0}, {8, 1, 0}, {10, 0, 0}}

In[]:= Length@sol
Out[]= 10
```

この関数を使って n 円の支払い法の数 $f(n)$ を定義する。

答えは $f(100) - f(90) = 99$ 通り。ちなみに $f(100) = 541$, $f(90) = 442$ だった。

[*1] この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
f[n_] := Length@FrobeniusSolve[{1, 2, 5}, n];
ans = f@100 - f@90

Out[]= 99
```

2.　対応づけて数える

100 円の支払い法と 90 円の支払い法を対応づけると手計算でも解ける。

「$x+2y+5z=a$ の非負整数解」を「平面 $x+2y+5z=a$ 上の格子点」と考えるとイメージしやすい。平面 $x+2y+5z=90$ 上の格子点 (X, Y, Z) の真上には格子点 $(X, Y, Z+2)$ があり，この点は平面 $x+2y+5z=100$ 上にある。

このような対応づけができないのは平面 $x+2y+5z=100$ 上の z 座標が 0 か 1 の点だけなので，$x+2y=100$ と $x+2y=95$ の非負整数解の個数の和が答え。

$$\left(\left\lfloor\frac{100}{2}\right\rfloor+1\right)+\left(\left\lfloor\frac{95}{2}\right\rfloor+1\right)=51+48=99\ \text{通り}$$