

# 2数の差がすべて異なる6数の集合

hiragn

2024年12月15日

「算数にチャレンジ!!」第1112回の問題<sup>\*1</sup>を解いた。

6枚のカードにそれぞれ異なる1以上の整数が書かれている。この6枚から2枚を取り出す方法は15通りあり、それらすべてについて2つの数の差は異なる。カードに書かれた数の最大値と最小値の差は最大でいくつだろうか。

<http://www.sansu.org/used-html/index1112.html>

## 1. 方針

最大値と最小値の差がわかればいいので、最小値を1とする。

6個の数を小さい方から順に並べたときの階差を  $a, b, c, d, e$  とおく。6個の数は次のようにあらわせる。

$$1, 1+a, 1+a+b, 1+a+b+c, 1+a+b+c+d, 1+a+b+c+d+e$$

最大値と最小値の差を  $n$  とすると、これは  $a$  から  $e$  までの総和に他ならない。

$$n = (1+a+b+c+d+e) - 1 = a+b+c+d+e$$

$n$  は  $1+2+3+4+5=15$  以上。これを初期値として、条件をみたす  $\{a, b, c, d, e\}$  が存在するような  $n$  の最小値を探す。

## 2. mathematica で解く

手計算でやるのは大変なので mathematica を使った。

1. `IntegerPartitions[n, 5]` で  $n$  を相異なる5つの数の和に分解する

---

<sup>\*1</sup> この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

2. 1. の返り値は降順なので `Permutations` で並べ替えて  $\{a, b, c, d, e\}$  の候補を全部作る

3. 15 通りの差がすべて異なるかどうか調べる

15 通りの差は次のようなもの。  $\{a, b, c, d, e\}$  の  $i$  番目から  $j$  番目の和として指定できる。

$$\begin{aligned} &a, a+b, a+b+c, a+b+c+d, a+b+c+d+e \\ &b, b+c, b+c+d, b+c+d+e, \\ &c, c+d, c+d+e, \\ &d, d+e, \\ &e \end{aligned}$$


---

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[n_] := Module[{lst},
4     lst = Select[IntegerPartitions[n, {5}], DuplicateFreeQ];
5     Flatten[Permutations /@ lst, 1]];
6   idx = Most@Flatten[Table[{i, j}, {i, 1, 5}, {j, i, 5}], 1];
7   g[lst_] := DuplicateFreeQ[Total@lst[[#][[1]] ;; #[[2]]]] & /@ idx;
8   ans = NestWhile[# + 1 &, 15, NoneTrue[f@#, g] &]]
9
10 Out[] = {0.00486877, 17}

```

---

答えは 17 で、カードに書かれた数字の組み合わせは 8 通りあった。

$$\begin{aligned} &(1, 5, 7, 10, 17, 18), (1, 4, 6, 10, 17, 18), (1, 2, 9, 13, 15, 18) \\ &(1, 2, 9, 12, 14, 18), (1, 6, 8, 14, 17, 18), (1, 3, 8, 14, 17, 18) \\ &(1, 2, 5, 11, 16, 18), (1, 2, 5, 11, 13, 18) \end{aligned}$$