笑わない数学者の問題

hiragn

2024 年 12 月 16 日

「算数にチャレンジ!!」第 1131 回の問題[*1]を解いた。

> 正五角形の各頂点に丸い枠があり，その 1 つに 1 が記入されている。残りの 4 つの枠（時計回りにア〜エとする）にもそれぞれ数が記入されている。
> 隣どうしでつながっているいくつかの数（1 つ〜5 つ）を取り出して和を求める方法は全部で 21 通りある。この和で 1 から 21 までのすべての数を作ることができるときのイとウの和を求めよ。
>
> `http://www.sansu.org/used-html/index1131.html`

1. 全パターン調べる

21 通りの和がすべて異なることからア〜エが相異なることは明らか。どれか 1 つは 2。

ア〜エのうち 2 でないものを大きい順に並び替えたものを a, b, c とする。

$$a > b > c > 2 \quad \cdots\cdots①$$

また $a + b + c + 1 + 2 = 21$ から $a + b + c = 18 \quad \cdots\cdots②$ もわかる。

$c = 3$ かどうかはわからない。1 の隣に 2 を置いて $1 + 2 = 3$ を作ることもできるし，1 の隣に 2 を置かずにどこかの枠に 3 を置くこともできる。場合分けが面倒なので，この後の計算は mathematica にやってもらった。

1. ①②をみたす $\{a, b, c, 2\}$ を作る
2. 1. の結果を Permutations を使って並び替える
3. 21 通りの和がすべて異なるものを抽出する

*1 この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 eqn = {a + b + c == 18, d == 2, a > b > c > 2};
 sol = Values /@ Solve[eqn, {a, b, c, d}, Integers];
 lst = Flatten[Permutations /@ sol, 1];
 calc[lst_] := Module[{a, b, c, d},
   {a, b, c, d} = lst;
   If[DuplicateFreeQ@{a, b, c, d,
      1 + a, a + b, b + c, c + d, d + 1,
      1 + a + b, a + b + c, b + c + d, c + d + 1, d + 1 + a,
      1 + a + b + c, a + b + c + d, b + c + d + 1, c + d + 1 + a,
      d + 1 + a + b},
    b + c, Nothing]];
 ans = First@DeleteDuplicates[calc /@ lst]]

Out[]= {0.00436723, 12}
```

①②をみたす $\{a, b, c, 2\}$ は 7 通りあった。ソート済みのものを載せておく。

$$\{2,5,6,7\},\ \{2,4,6,8\},\ \{2,3,7,8\},\ \{2,4,5,9\}, \{2,3,6,9\},\ \{2,3,5,10\},\ \{2,3,4,11\}$$

21 通りの和のうち実際に調べたのは次の 19 個。1 と $1+a+b+c+d$ が他の項とダブらないのは明らかなので，これらは除外した。

$$\begin{aligned}&a,\ b,\ c,\ d,\\ &1+a,\ a+b,\ b+c,\ c+d,\ d+1,\\ &1+a+b,\ a+b+c,\ b+c+d,\ c+d+1,\ d+1+a,\\ &1+a+b+c,\ a+b+c+d,\ b+c+d+1,\ c+d+1+a,\ d+1+a+b\end{aligned}$$

条件をみたす 5 数は次の 2 組だった。これらは五角形の中心と頂点 1 を通る直線に関して対称な配置になっている。

$$(1,5,2,10,3),\ (1,3,10,2,5)$$

求める和は $2+10=12$。

2.　元ネタについて

これは『笑わない数学者』（森博嗣，講談社ノベルス）に載っている問題らしい。[*2]

> さて，では，もう一つ問題を出そう。五つのビリヤードの玉を，真珠のネックレスのように，リングにつなげてみるとしよう。玉には，それぞれナンバーが書いてあるな。さて，この五つの玉のうち，幾つ取っても良いが，隣どうし連続したものしか取れないとしよう。一つでも二つでも，五つ全部でも良い。しかし，離れているものは取れない。この条件で取った玉のナンバーを足し合わせて，1 から 21 までのすべての数ができるようにしたい。さあ，どのナンバーの玉をどのように並べて，ネックレスを作れば良いかな？（p.58）

[*2] 本に解答は載っていない。