

# $n$ も $n + 1$ も桁数字の和は 17 の倍数

hiragn

2024 年 12 月 14 日

「算数にチャレンジ!!」第 970 回の問題<sup>\*1</sup>を解いた。

4 桁の整数  $n$  の各位の数の和は 17 の倍数である。また、 $n + 1$  の各位の数の和も 17 の倍数である。このような  $n$  の最大値を求めよ。

<http://www.sansu.org/used-html/index970.html>

mathematica で全探索する他、手計算で解く方法を 2 通り考えた。

## 1. $n$ の 1 の位は 9

$n$  と  $n + 1$  の桁数字の和が両方とも 17 の倍数なので、 $n \rightarrow n + 1$  の 1 の位で繰り上がりがおきるはず。 $n$  の 1 の位は 9。 $n = 1009 + 10k$  の形の数に絞って調べる。

最大値を求めるので 4 桁の整数を大きい方から順に調べた。

---

```
1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   cond[n_] :=
4     AllTrue[{n, n + 1}, Divisible[Total@IntegerDigits@#, 17] &];
5   ans = SelectFirst[Reverse@Range[1009, 9999, 10], cond]]
6
7 Out[] = {0.0000627216, 9799}
```

---

ちなみに条件をみたす数は 8899, 9799 の 2 つだった。

## 2. $n$ の下 2 桁は 99

手計算で解く方法も知りたいので、繰り上がりによる桁数字の変化をもう少し詳しく見てみる。繰り上がりの回数で場合分けする。

---

<sup>\*1</sup> この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

1.  $abc9 \xrightarrow{+1} ab(c+1)0 \quad (c \neq 9)$
2.  $ab99 \xrightarrow{+1} a(b+1)00 \quad (b \neq 9)$
3.  $a999 \xrightarrow{+1} (a+1)000 \quad (a \neq 9)$
4.  $9999 \xrightarrow{+1} 10000$

4 桁の数の桁数字の和は  $9 \times 4 = 36$  以下なので、問題文中の「17 の倍数」は 17 か 34。3. と 4. の  $n+1$  は明らかに不適。

1. の  $n+1 = ab(c+1)0$  の桁数字の和は  $9 \times 3 = 27$  以下なので 17。

$$a + b + (c + 1) = 17 \quad \therefore a + b + c = 16$$

このとき  $n$  の桁数字の和は  $a + b + c + 9 = 25 \not\equiv 0 \pmod{17}$  となって 1. は不適。

2. も同様に考えると  $a + b + 9 + 9 = 34$ ,  $a + b + 1 = 17$  から  $a + b = 16$  がわかる。 $b \neq 9$  も考えると  $(a, b) = (8, 8), (9, 8)$  となって  $n = 8899, 9799$  がわかる。これなら手計算でも解ける。

### 3. 9 で割った余りに注目

桁数字の和ということで  $\text{mod } 9$  で考える。上で見たように問題文中の「17 の倍数」は 17 か 34 しかなく、9 で割ったときの余りは 8 か 7 になる。

$$17 \equiv 8, 34 \equiv 7 \pmod{9}$$

$n \rightarrow n+1$  のとき 9 で割った余りは「1 増える」か「8 だったのが 0 になる」のどちらか。余りが変わらなかったり、余り 8 が余り 7 になったりすることはないので

$$n \equiv 7, n+1 \equiv 8 \pmod{9}$$

しかない。つまり  $n \equiv 7 \pmod{9}$  のはずで、 $n$  の桁数字の和は 34。

4 桁の数の桁数字の和は最大で  $9 \times 4 = 36$  なので、これはかなり強い制約になっている。使える数字は次の 2 組しかない。

$$\{9, 9, 9, 7\}, \{9, 9, 8, 8\}$$

1 の位が 9 であることも考えると、 $n$  の候補は次の 6 個。

$$n = 9979, 9799, 7999, 9889, 8989, 8899$$

これらに対して  $n+1$  の桁数字の和を調べると、条件をみたすのは  $n = 8899, 9799$  だけだとわかる。