

ARC 118 A - Tax Included Price

hiragn

2024 年 12 月 18 日

1. 問題の概要

消費税率が t ($1 \leq t \leq 50$) パーセントの国では税抜き価格 A 円 (整数) の商品の税込み価格は $\lfloor \frac{100+t}{100} A \rfloor$ 円である。

税込み価格としてはあらわれない金額のうち小さい方から N ($1 \leq N \leq 10^9$) 番目のものを求めよ。

https://atcoder.jp/contests/arc118/tasks/arc118_a

2. 解法

税抜価格 a 円の商品の税込価格を $f(a)$ 円とする。

$$f(a) = \left\lfloor \frac{100+t}{100} a \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{ta}{100} \right\rfloor$$

$a \rightarrow a+1$ と変化させたとき ta の 100 の位が変化するところでジャンプが起こる。

$1 \leq t \leq 50$ を考えると、具体的には「はじめて $ta \geq 100$ になるとき」「はじめて $ta \geq 200$ になるとき」……でジャンプが起こる。

$ta \geq 100k$ とおく。 $a \geq \frac{100k}{t}$ からジャンプを起こす a が求められる。

$$a = \left\lceil \frac{100k}{t} \right\rceil \quad (k = 1, 2, \dots)$$

これを $g(k)$ とおく。 f の周期性も調べよう。

$$\begin{aligned} f(a+100) &= a+100 + \left\lfloor \frac{t(a+100)}{100} \right\rfloor \\ &= a+100 + t + \left\lfloor \frac{ta}{100} \right\rfloor \\ &= f(a) + 100 + t \end{aligned}$$

幅 100 の区間でジャンプが t 回起こるので $g(k)$ において $1 \leq k \leq t$ としてよい。

N を t で割って $N = qt + r$ とおく。 $a = 100q + g(r)$ に対する $f(a) - 1$ が答え。

公式の解説では割り算による誤差について書いていたが mathematica ではあまり気にしなくてよさそう。少なくともサンプルは通った。

```

1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 solve[{t_, n_}] := Module[{f, g, q, r},
3   f[a_] := a + Quotient[t*a, 100];
4   g[k_] := Quotient[100 k + t - 1, t];
5   {q, r} = QuotientRemainder[n, t];
6   a = 100 q + g@r;
7   f@a - 1];
8
9 case = {{3, 5}, {1, 10000000000}};
10 res = {171, 1009999999999};
11 solve /@ case == res
12
13 Out[] = True

```
