

73 でも 137 でも割り切れる数

hiragn

2024 年 12 月 12 日

「算数にチャレンジ!!」第 1302 回の問題^{*1}を解いた。

次のような 10 桁の整数がある。この数は 73 でも 137 でも割り切れる。

$$\overline{6A80B8CD51}$$

A, B, C, D に当てはまる 1 桁の整数を求めよ。解答はこれらを連結して 4 桁の整数 \overline{ABCD} として示せ。

<http://www.sansu.org/used-html/index1302.html>

1. 全探索

(A, B, C, D) は 10^4 通りしかない。全パターン試すと解けて、答えは 7179。

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   cond[lst_] := Module[{a, b, c, d, n},
4     {a, b, c, d} = lst;
5     n = FromDigits@{6, a, 8, 0, b, 8, c, d, 5, 1};
6     Divisible[n, 73] && Divisible[n, 137]];
7 ans = First[FromDigits /@ Select[Tuples[Range[0, 9], 4], cond]]]
8
9 Out[] = {0.0427253, 7179}

```

^{*1} この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

2. 合同式を使う

$73 \times 137 = 10001$ に注目して合同式を使うと手計算でも楽に解ける。 $\text{mod } 10^4$ で考える。

$$10^4 \equiv -1, 10^8 \equiv (-1)^2 = 1$$

与えられた数を n とする。

$$\begin{aligned} n &= \overline{6A} \times 10^8 + \overline{80B8} \times 10^4 + \overline{CD51} \\ &\equiv \overline{6A} - \overline{80B8} + \overline{CD51} \quad (= N \text{ とおく}) \end{aligned}$$

簡単な計算で $-7987 \leq N \leq 2012$ がわかるので $n \equiv 0$ になるのは $N = 0$ のとき。

N を分解して整理する。

$$\begin{aligned} N &= 60 + A - 8008 - 10B + 1000C + 100D + 51 \\ &= -7897 + 1000C + 100D - 10B + A \end{aligned}$$

$N = 0$ とすると

$$1000C + 100D + A = 7897 + 10B$$

一の位から順に各位の数字を比較すると、次のようになって解ける。

$$\begin{aligned} A &= 7, 0 \equiv 9 + B, D = 8 + 1, C = 7 \\ \therefore A &= 7, B = 1, C = 7, D = 9 \end{aligned}$$