

hiragn

2024 年 12 月 16 日

「算数にチャレンジ!!」第 1188 回の問題*1を解いた。

以下のように左から順にカードに数を記入していく。

1. 1 番目のカードには 1 を記入する。
2. 偶数番目のカードには番号が半分のカードと同じ数を記入する。たとえば 10 番目のカードには 5 番目のカードと同じ数を記入する。
3. 奇数番目のカードにはその番号を 2 で割って 0.5 を引いたカード番号の数に 1 を加えて記入する。たとえば 11 番目のカードには $11 \div 2 - 0.5 = 5$ 番目のカードに記入されている数に 1 を足した数を記入する。

カード番号が 300 番になるまで続けたとき、カードに記入された数の最大値を求めよ。

<http://www.sansu.org/used-html/index1188.html>

1. 漸化式を使って計算

まずは問題文の条件をそのまま漸化式にしてみる。

n が奇数のときは引数を $n \rightarrow \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$ に変えるので、次のようになる。

$$f(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & (n \text{ が偶数のとき}) \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

mathematica で $f(1) \sim f(300)$ の最大値を求めると、答えは 8。

*1 この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

```

1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[1] = 1;
4   f[n_] := f[n] = If[EvenQ@n, f[n/2], f[(n - 1)/2] + 1];
5   ans = Max[f /@ Range@300]]
6
7 Out[]= {0.0000666282, 8}

```

2. 2進法で考える

2進法で考えると $n \rightarrow \frac{n}{2}$, $n \rightarrow \frac{n-1}{2}$ は末尾を削る操作になっている。

$$2_{(10)} = 10_{(2)} \rightarrow 1_{(2)}, 3_{(10)} = 11_{(2)} \rightarrow 1_{(2)}$$

1を削るたびに $f(n)$ が1増えるので、最大値を与える n は2進法であらわしたときにすべての桁が1になる数。

300以下だと $255 = 256 - 1$ で、こう考えると (最大値) = 8 は暗算で求められる。

$$256 - 1 = 2^8 - 1 = \overbrace{11 \cdots 1}^{8 \text{ 個}}_{(2)}$$

同じ発想で一般の $f(n)$ を求めることもできる。

$$f(n) = (n \text{ を } 2 \text{ 進法であらわしたときの } 1 \text{ の個数})$$

これは mathematica だと `DigitCount[n, 2, 1]` で求められる。

```

1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[n_] := DigitCount[n, 2, 1];
4   ans = Max[f /@ Range@300]]
5
6 Out[]= {0.00153632, 8}

```
