

最大公約数と最小公倍数の条件でしぼりこむ

hiragn

2024 年 12 月 13 日

「算数にチャレンジ!!」第 1204 回の問題^{*1}を解いた。

次の条件をみたす 3 つの相異なる整数 a, b, c がある。 a の値を求めよ。

条件 1. a と b の公約数を小さい方から並べると 5 番目が 14

条件 2. b と c の公約数を小さい方から並べると 5 番目が 15

条件 3. a, b, c の最小公倍数は 2100

<http://www.sansu.org/used-html/index1204.html>

1. brute force 解

まずは問題文そのままのコードで計算してみる。 (a, b, c) は 3 組あり, a は 28 だった。

```
1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   lst = Select[Tuples[Divisors@2100, 3], LCM @@ # == 2100 &];
4   cond[{a_, b_, c_}] := Module[{divsab, divsbc},
5     divsab = Divisors@GCD[a, b];
6     divsbc = Divisors@GCD[b, c];
7     Length@divsab >= 5 && Length@divsbc >= 5 &&
8     divsab[[5]] == 14 && divsbc[[5]] == 15];
9   ans = Select[lst, cond]]
10
11 Out[] = {0.141541,
12 {{28, 420, 525}, {28, 2100, 105}, {28, 2100, 525}}}
```

^{*1} この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

2. 公約数の条件から候補をしぼりこむ

a, b, c の候補を絞り込むことを考える。まず条件 3 からこれらは 2100 の約数 (36 個)。さらに条件 1 と条件 2 から次のことがわかる。

- a は 14 の倍数 (12 個)
- b は 14×15 の倍数 (4 個)
- c は 15 の倍数 (12 個)

この時点で (a, b, c) の候補は $12 \times 4 \times 12 = 576$ 個になる。

この中で最小公倍数が 2100 になるものは 400 個だった。brute force 解で使った lst の要素数が 17689 個だったのと比べると約 40 分の 1 になった。計算時間も約 40 分の 1 だった。

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[n_] := Select[Divisors@2100, Divisible[#, n] &];
4   lst = Select[Tuples[{f[14], f[14*15], f[15]}], LCM @@ # == 2100 &];
5   cond[{a_, b_, c_}] := Module[{divsab, divsbc},
6     divsab = Divisors@GCD[a, b];
7     divsbc = Divisors@GCD[b, c];
8     Length@divsab >= 5 && Length@divsbc >= 5 &&
9     divsab[[5]] == 14 && divsbc[[5]] == 15];
10  ans = Select[lst, cond]
11
12 Out[] = {0.00340629,
13  {{28, 420, 525}, {28, 2100, 105}, {28, 2100, 525}}}
```
