5 個のおはじきの並べ方

hiragn

2024 年 12 月 12 日

「算数にチャレンジ!!」第 1320 回の問題[*1]を解いた。

赤，緑，黄の 3 色のおはじきを横一列に 5 個並べます。

- 赤は 2 個連続してはならない
- 緑も 2 個連続してはならない

おはじきの並べ方は全部で何通りあるでしょうか。

http://www.sansu.org/used-html/index1320.html

1. 連立漸化式

これは連立漸化式の問題。おはじきを n 個並べる方法のうちで右端が赤，緑，黄のものがそれぞれ $r(n)$, $g(n)$, $y(n)$ 通りあるとして立式する。

$r(1) = g(1) = y(1) = 1$ は明らか。漸化式は次のようになる。

$$r(n+1) = g(n) + y(n)$$
$$g(n+1) = r(n) + y(n)$$
$$y(n+1) = r(n) + g(n) + y(n)$$

答えは $r(5) + g(5) + y(5) = 99$ 通り。

手計算で解くなら $r(2)$ など下から順に決めていくところだが，mathematica で解くなら再帰が楽。

[*1] この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 r[1] = 1;
 g[1] = 1;
 y[1] = 1;
 r[n_] := r[n] = g[n - 1] + y[n - 1];
 g[n_] := g[n] = r[n - 1] + y[n - 1];
 y[n_] := y[n] = r[n - 1] + g[n - 1] + y[n - 1];
 ans = r[5] + g[5] + y[5]]

Out[]= {5.96076*10^-6, 99}
```

$r(n) = g(n)$ は明らか。$g(n)$ を使わない形で書くと少し速くなる。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 r[1] = 1;
 y[1] = 1;
 r[n_] := r[n] = r[n - 1] + y[n - 1];
 y[n_] := y[n] = 2*r[n - 1] + y[n - 1];
 ans = 2*r[5] + y[5]]

Out[]= {4.09145*10^-6, 99}
```

2.　連立じゃない漸化式

$r(n)$, $g(n)$, $y(n)$ の和を $F(n)$ とおいて，その漸化式を立てることもできる。

まず $r(1) = g(1) = y(1) = 1$ より

$$F(1) = 3$$

$r(n)$, $g(n)$, $y(n)$ の漸化式を辺ごとに足して $y(n) = F(n-1)$ を使うと $F(n)$ の 3 項間漸化式になる。

$$F(n) = 2F(n-1) + y(n-1) = 2F(n-1) + F(n-2)$$

$r(2) = g(2) = 2$, $y(2) = 3$ から $F(2) = 7$ もわかる。

答えは $F(5) = 99$。前 2 つの方法よりこの方法のほうが速い。

```
In[]:= Clear["Global‘*"];
RepeatedTiming[
 f[1] = 3;
 f[2] = 7;
 f[n_] := f[n] = 2 f[n - 1] + f[n - 2];
 ans = f@5]

Out[]= {2.51896*10^-6, 99}
```