

n で割ると 22 余る 3 桁の整数が 22 個

hiragn

2024 年 12 月 13 日

「算数にチャレンジ!!」第 1202 回の問題^{*1}を解いた。

次の性質をもつ自然数 n の最小値を求めよ。

(性質) 整数 n で割ると 22 余る 3 桁の整数が 22 個ある。

<http://www.sansu.org/used-html/index1202.html>

「23 以上の n を下から順に調べる」「条件を floor 関数と ceiling 関数であらわす」の 2 通りの方法で解いた。

1. 下から順に調べる

まずは問題文をそのまま数式にして brute force で解く。

n で割った余りが 22 なので n は 23 以上。 $\text{mod}(x, n) = 22$ をみたす 3 桁の自然数 x が 22 個ある n を下から順に探す。答えは 41。

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   cond1[n_] :=
4     Length@Select[Range[100, 999], Mod[#, n] == 22 &] == 22;
5   ans = NestWhile[# + 1 &, 23, ! cond1[#] &]]
6
7 Out[] = {0.00589877, 41}
```

^{*1} この問題文は原題を適当に書き換えたもの。

2. 条件を floor 関数と ceiling 関数であらわす

n で割った商を q とおくと、もとの数は $nq + 22$ と書ける。

3 桁の条件は $100 \leq nq + 22 \leq 999$ で、これをみたす q が 22 個ある。

q が自然数であることに注意して不等式を整理する。

$$\frac{78}{n} \leq q \leq \frac{977}{n} \quad \therefore \left\lceil \frac{78}{n} \right\rceil \leq q \leq \left\lfloor \frac{977}{n} \right\rfloor$$

q が 22 個ある条件は次のようになる。

$$\left\lfloor \frac{977}{n} \right\rfloor - \left\lceil \frac{78}{n} \right\rceil + 1 = 22$$

22 以上の n でこれをみたすものを探す。さっきの解法よりこちらの方が速い。

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   cond2[n_] := Floor[977/n] - Ceiling[78/n] + 1 == 22;
4   ans = NestWhile[# + 1 &, 23, ! cond2@# &]]
5
6 Out[] = {0.00003812, 41}
```

この解法は少し高速化できる。

まず、「割り算してから Floor をとる」より「Quotient で商を求める」の方が速い。

$$\text{Floor}[977/n] = \text{Quotient}[977, n]$$

$\lceil a/b \rceil = \lfloor (a + b - 1)/b \rfloor$ を使うと ceiling 関数もこの形に直せる。

$$\text{Ceiling}[78, n] = \text{Floor}[78 + (n - 1), n] = \text{Quotient}[77 + n, n]$$

結果はこちら。

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   cond3[n_] := Quotient[977, n] - Quotient[77 + n, n] == 21;
4   ans = NestWhile[# + 1 &, 23, ! cond3@# &]]
5
6 Out[] = {0.0000247098, 41}
```
