Project Euler 66. Diophantine Equation

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1.　問題の概要

2 次のディオファントス方程式（ペル方程式）$x^2 - Dy^2 = 1$ の自然数解を考える。
たとえば $D = 13$ のとき，最小解は (649, 180) である。

$$649^2 - 13 \times 180^2 = 1$$

D が平方数のときは自然数解は存在しない。
$D = 2, 3, 5, 6, 7$ に対する最小解は次のようになる。

- $D = 2$ のとき (3, 2)
- $D = 3$ のとき (2, 1)
- $D = 5$ のとき (9, 4)
- $D = 6$ のとき (5, 2)
- $D = 7$ のとき (8, 3)

$D \leqq 7$ の最小解を考えると，x が最大になるのは $D = 5$ のときである。
$D \leqq 1000$ の最小解で x が最大になるような D を求めよ。

`https://projecteuler.net/problem=66`

2.　解法

最小解は $\sqrt{D}$ の連分数展開を使うと求められます。周期の偶奇で場合分けが必要です。

2.1　周期が偶数のとき

$D = 7$ のとき $\sqrt{D} = \sqrt{7} = [2; 1, 1, 1, 4]$（周期 4）です。一番最後の 4 を除いたものを普通の分数に直すと $[2; 1, 1, 1] = 8/3$ となるので，最小解は $(x,\ y) = (8,\ 3)$ です。

2.2 周期が奇数のとき

$D = 13$ のとき $\sqrt{D} = \sqrt{13} = [3; 1, 1, 1, 1, 6]$（周期 5）です。
一番最後の 6 を除いたものを普通の分数に直すと $[3; 1, 1, 1, 1] = 18/5$
$x^2 - 13y^2 = -1$ の最小解 $(x,\, y) = (18,\, 5)$ がみつかります。
$x^2 - 13y^2 = 1$ の最小解は

$$x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13}$$

から得られる $(x,\, y) = (649,\, 180)$ です。

2.3 コードに落とす

以上をふまえてコードを書きます。

1. $\sqrt{D}$ を連分数展開
2. 周期の偶奇に注意して最小解を求める
3. x が最大になる D が答え

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 calc[d_] := Module[{cf = ContinuedFraction@Sqrt@d, a, b, p, q},
   {a, b} = {Most@cf, Last@cf};
   {p, q} = NumeratorDenominator@FromContinuedFraction@Join[a, Most@b];
   If[EvenQ@Length@b, {d, p}, {d, p^2 + d*q^2}]];
 nmax = 10^3;
 lst = Complement[Range@nmax, Table[k^2, {k, Sqrt@nmax}]];
 ans = First@First@MaximalBy[calc /@ lst, Last]]

Out[]= {0.138739, 661}
```

ちなみに $D = 661$ のときの最小解の x は 38 桁ありました。