Project Euler 94. Almost Equilateral Triangles

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

一辺の長さが整数の正三角形は面積が整数にならないことを示すのは簡単である。しかし，5-5-6 の辺をもつほとんど正三角形に近い擬正三角形 (almost equilateral triangle) は面積が 12 で整数である。
二等辺三角形で 3 つ目の辺の長さが他と 1 しか違わないもの (5-5-6, 5-5-4 等) を擬正三角形と呼ぶ。
周囲の長さが 10^9 以下で面積が整数になる擬正三角形を考える。周囲の長さの総和を求めよ。

`https://projecteuler.net/problem=94`

2. 解法

ヘロンの公式を使います。3 辺の長さが $(n, n, n+1)$, $(n, n, n-1)$ の三角形の面積をそれぞれ $f(n)$, $g(n)$ とすると次のようになります。

$$f(n) = \frac{1}{4}(n+1)\sqrt{(3n+1)(n-1)}$$

$$g(n) = \frac{1}{4}(n+1)\sqrt{(3n-1)(n-1)}$$

$f(n)$ が整数になるには n が奇数であることが必要です。$n = 2m$ のとき $f(2m)$ の $n+1$ などはすべて奇数で，ルートが外れたとしても分母の 4 が消えないからです。

n が奇数のときは $n = 2m-1$ に対して $(3m-1)(m-1) = (平方数)$ ならば条件をみたします。これはペル方程式で，`Reduce` で解けます。

$$n_1 = \frac{1}{3}\left\{(7+4\sqrt{3})^k + (7-4\sqrt{3})^k + 1\right\} \quad (k \geqq 1)$$

$g(n)$ も同様で，$n = 2m - 1$ に対して $(3m - 2)m =$ (平方数) が条件です。

$$n_2 = \frac{1}{3}\left\{(2-\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})^k + (2+\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})^k - 1\right\} \quad (k \geqq 2)$$

$3n_1 + 1$ と $3n_2 - 1$ の総和が答えです。

$(n, n, n+1)$ 型も $(n, n, n-1)$ 型も 7 個しかありませんでした。

```
In[]:= ClearAll["Global‘*"];
RepeatedTiming[
 {a, b} = {2 - Sqrt@3, 2 + Sqrt@3};
 n1[k_] := (a^(2 k) + b^(2 k) + 1)/3 // Simplify;
 n2[k_] := (a*b^(2 k) + b*a^(2 k) - 1)/3 // Simplify;
 num1[k_] := num1[k] = 3*n1[k] + 1;
 num2[k_] := num2[k] = 3*n2[k] - 1;
 k1max = NestWhile[# + 1 &, 1, num1@# <= 10^9 &] - 1;
 k2max = NestWhile[# + 1 &, 2, num2@# <= 10^9 &] - 1;
 ans = Total[num1 /@ Range[1, k1max]] + Total[num2 /@ Range[2, k2max]];
 {ans, {k1max, k2max - 1}}]

Out[]= {0.0000278699, {518408346, {7, 7}}}
```