

Project Euler 44. Pentagon Numbers

hiragn

2024 年 12 月 23 日

1. 問題の概要

五角数は $P(n) = n(3n - 1)/2$ で与えられ、最初の 10 個の値は次のようになる。

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, ...

$P(4) = 22$ と $P(7) = 70$ の和の $22 + 70 = 92$ は五角数だが、差の $70 - 22 = 48$ は五角数ではない。五角数のペア $P(j), P(k)$ で和と差がともに五角数になるものを考え、 $D = |P(k) - P(j)|$ とおく。 D の最小値を求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=44>

2. 解法

2.1 D を 1 つ求める

ある数 a が五角数かどうかは $P(n) = a$ が整数解 n をもつかどうかで判定できます。

$$n = \frac{1 + \sqrt{1 + 24a}}{6}$$

適当に範囲をきめて $P(i) \pm P(j)$ が五角数になる i, j ($i < j$) を探すと $(i, j) = (1020, 2167)$ がみつかります。

- $P(2167) + P(1020) = P(2395)$
- $P(2167) - P(1020) = P(1912) = 5482660 = D$

この D を答えると正解扱いになりますが、最小性を示していないので駄目です。

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[n_] := n (3 n - 1)/2;
4   invf[n_] := (1 + Sqrt[1 + 24 n])/6;
5   cond[{i_, j_}] :=
6     IntegerQ[invf[f@i + f@j]] && IntegerQ[invf[-f@i + f@j]];
7   lst = Parallelize@
8     Select[Flatten[Table[{i, j}, {i, 1, 2000}, {j, i + 1, 3000}], 1],
9     cond];
10  ans = {lst,
11    invf /@ ({f#[[2]]] - f#[[1]], f#[[1]] + f#[[2]]) & /@ lst},
12    Abs[f#[[1]]] - f#[[2]] & /@ lst}]
13
14 Out[] = {62.6383, {{1020, 2167}}, {{1912, 2395}}, {5482660}}

```

2.2 調べる対象を変える

$P(i)$, $P(j)$ が条件をみたすとき

$$P(j) - P(i) = P(a), P(j) + P(i) = P(b)$$

をみたす a , b ($a < b$) が存在して $D = P(a)$ です。

$P(j)$ を消去すると次のようになります。

$$\begin{cases} P(j) = P(i) + P(a) \\ P(b) = \{P(i) + P(a)\} + P(i) = 2P(i) + P(a) \end{cases}$$

この式は 2 通りの解釈ができます。

1. $P(i)$ を基準として $P(a)$, $P(i) + P(a)$ 離れたところにも五角数がある
2. $P(a)$ を基準として $P(i)$, $2P(i)$ 離れたところにも五角数がある

解釈 2 で解きます。 $a < j$ は明らかですし、 $P(j) = P(i) + P(a)$ において $i < a$ としてよいので (i, j) のかわりに (i, a) に注目して $P(i) + P(a)$, $2P(i) + P(a)$ が五角数になる条件を求める方が検索範囲が狭くて得です。

a でループさせて対応する i があつたら、そのときの $P(a)$ が求める最小値です。

```
1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[n_] := f[n] = PolygonalNumber[5, n];
4   invf[n_] := invf[n] = (1 + Sqrt[1 + 24 n])/6;
5   cond[i_, d_] := IntegerQ@invf[f@i + d] && IntegerQ@invf[2 f@i + d];
6   ans = Catch[
7     For[a = 2, True, a++,
8       d = f@a;
9       For[i = 1, i < a, i++,
10        If[cond[i, d], Throw[{d, a, i}]]]]]]
11
12 Out[] = {3.45107, {5482660, 1912, 1020}}
```

$a = 1912, i = 1020$ のときの 5482660 が答えです。最初に求めた値が最小値であることが証明できました。