

Project Euler 78. Coin Partitions

hiragn

2024 年 12 月 25 日

1. 問題の概要

n 枚のコインを異なった方法で山に分ける場合の数を $p(n)$ で表す。たとえば 5 枚のコインを山に分ける方法は 7 通りなので $p(5) = 7$ である。

$\{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}$

$p(n)$ が 100 万で割り切れるような n の最小値を求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=78>

2. 解法

第 76 問「Counting Summations」の類題です。 $p(100)$ を求めるだけの第 76 問とは違って、こちらは PartitionsP では解ききれません。

wikipedia に載っていた公式^{*1}を使いました。

$$p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left\{ p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right\}$$

カッコ内の $k(3k-1)/2$, $k(3k+1)/2$ は五角数 $P(n) = n(3n-1)/2$ で表せます。

$$p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \{p(n - P(k)) + p(n - P(-k))\}$$

この $p(k)$ を mod 10^6 で調べました。

^{*1} <https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=312250>

```
1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   p[0] := 1;
4   p[n_ /; n < 0] := 0;
5   p[n_ /; n > 0] := p[n] = Mod[Sum[(-1)^(k + 1)*
6     (p[n - PolygonalNumber[5, k]] + p[n - PolygonalNumber[5, -k]]),
7     {k, Floor[1/6 + Sqrt[1 + 24*n]/6]}], 10^6];
8   ans = NestWhile[# + 1 &, 1, p@# != 0 &]]
9
10 Out[] = {0.0336602, 55374}
```
