Project Euler 2. Even Fibonacci Numbers

hiragn

2024 年 12 月 23 日

1. 問題の概要

400 万以下で偶数値のフィボナッチ数の総和を求めよ。

https://projecteuler.net/problem=2

2. 2 で割った余りの周期性を利用

n 番目のフィボナッチ数を $f(n)$ であらわします。

簡単な実験で $f(n)$ を 2 で割った余りは 1, 1, 0 を繰り返すことがわかるので 400 万以下の $f(3n)$ の和を求めればよいことになります。

$f(3n)$ が 400 万以下になる最大の n $(= n_0)$ を求めて，$f(3n)$ $(1 \leqq n \leqq n_0)$ の和を求めます。$n_0 = 11$ なので計算はすぐ終わります。

```
In[]:= ClearAll["Global`*"];
RepeatedTiming[
 n0 = NestWhile[# + 1 &, 1, Fibonacci[3*#] <= 4*10^6 &] - 1;
 ans = Total@Fibonacci[3*Range@n0];
 {ans, n0}]

Out[]= {0.0000142316, {4613732, 11}}
```

3. 漸化式を使う

$g(n) = f(3n)$ とおいて漸化式を使って計算します。

$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ の特性方程式は $x^2 - x - 1 = 0$ です。これの解を α, β とおくと解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$$

$g(n)$ の特性方程式の解は α^3, β^3 です。簡単な計算で $\alpha^3+\beta^3=4$, $\alpha^3\beta^3=-1$ がわかるので $g(n)$ の特性方程式は $x^2-4x-1=0$ で，漸化式は次のようになります。

$$g(n+2)=4g(n+1)+g(n) \quad \cdots\cdots ①$$

$n_0=11$ なのでこの漸化式で $g(1)$〜$g(11)$ を求めて足せばいいのですが，後学のためもう少し変形します。

$S(n)=\sum_{k=1}^{n} g(k)$ とおきます。$S(1)=g(1)=f(3)=2$ で

$$g(n)=S(n)-S(n-1) \quad \cdots\cdots ② \quad (n \geqq 2)$$

②を①に代入して整理します。

$$S(n+2)=5S(n+1)-3S(n)-S(n-1)$$

これを繰り返し使って $S(11)$ を求めました。

```
In[]:= ClearAll["Global‘*"];
RepeatedTiming[
 n0 = NestWhile[# + 1 &, 1, Fibonacci[3*#] <= 4*10^6 &] - 1;
 s[1] = Fibonacci@3;
 s[2] = Fibonacci@3 + Fibonacci@6;
 s[3] = Fibonacci@3 + Fibonacci@6 + Fibonacci@9;
 s[n_] := s[n] = 5*s[n - 1] - 3 s[n - 2] - s[n - 3];
 ans = s@n0]

Out[]= {0.0000154462, 4613732}
```