

Project Euler 46. Goldbach's Other Conjecture

hiragn

2024 年 12 月 22 日

1. 問題の概要

Christian Goldbach はすべての奇合成数は平方数の 2 倍と素数の和で表せると予想した。

- $9 = 7 + 2 \times 1^2$
- $15 = 7 + 2 \times 2^2$
- $21 = 3 + 2 \times 3^2$
- $25 = 7 + 2 \times 3^2$
- $27 = 19 + 2 \times 2^2$
- $33 = 31 + 2 \times 1^2$

のちにこの予想は誤りであることが分かった。平方数の 2 倍と素数の和で表せない最小の奇合成数を求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=46>

2. 解法

$n = p + 2a^2$ (p は n より小さい素数, a は自然数) とおくと

$$a^2 = \frac{n - p}{2}$$

この右辺が平方数になるような n の最小値が答えです。

平方数かどうかは素因数分解で判定しました。FactorInteger が返す { 素数, 指数 } のリストの第 2 成分がすべて偶数ならば平方数です。

```
1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   squareQ[n_] := AllTrue[(FactorInteger@n)[[All, 2]], EvenQ];
4   cond[n_] :=
5     CompositeQ@n &&
6     NoneTrue[Range[2, PrimePi@n], squareQ@Quotient[n - Prime@#, 2] &];
7   ans = NestWhile[# + 2 &, 35, ! cond@# &]]
8
9 Out[]= {0.308188, 5777}
```
