

Project Euler 27. Quadratic Primes

hiragn

2024 年 12 月 20 日

1. 問題の概要

$n^2 + n + 41$ は $n = 0, 1, \dots, 39$ のとき素数だが, $n = 40$ のときは素数ではない。

$|a| < 1000, |b| \leq 1000$ として 2 次式 $n^2 + an + b$ を考える。 $n = 0, 1, \dots$ と整数を代入していつてできる素数の列が最も長いときの a と b の積を答えよ。

<https://projecteuler.net/problem=27>

2. 解法

計算の前に a と b の候補をしばらくこんでおきます。以下, $f(n) = n^2 + an + b$ です。

$$f(0) = b, f(1) = 1 + a + b, f(2) = 4 + 2a + b$$

などが素数になる条件を考えます。

2.1 b は素数

$g(0) = b$ が素数であることから b は素数です。

2.2 b は奇素数

$b = 2$ とすると

$$f(2m) = 4m^2 + 2ma + 2 = 2(2m^2 + ma + 1)$$

これが素数になるのは $2m^2 + ma + 1 = 1$ つまり $m(2m + a) = 0$ のときです。

これをみたら m は 2 個以下なので「最長」の条件をみたくしません。 b は奇素数です。

2.3 a は奇数

a が偶数なら $f(2m-1) = (2m-1)^2 + a(2m-1) + b$ は偶数の素数つまり 2 です。上と同じ理由でこの a は「最長」の条件をみたくしません。 a は奇数です。

2.4 計算

以上をもとにコードを書きます。素数列の長さは `NestWhile` で求めました。

```

1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   calc[{a_, b_}] := NestWhile[# + 1 &, 0, PrimeQ[#^2 + a*# + b] &];
4   as = Range[-999, 999, 2];
5   bs = Select[Range[-999, 999, 2], PrimeQ];
6   ans = Times @@ First@MaximalBy[Tuples[{as, bs}], calc]]
7
8 Out[] = {0.914554, -59231}
```

ちなみに $a = -61$, $b = 971$ のとき長さ 71 の素数列を与えるのが最長でした。