Project Euler 100. Arranged Probability

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

箱の中に 15 枚の青い円盤と 6 枚の赤い円盤が入っている。無作為に 2 枚取り出すとき，青い円盤 2 枚を取り出す確率は次のようになる。

$$\frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20} = \frac{1}{2}$$

無作為に 2 枚取り出すとき，青い円盤 2 枚を取り出す確率がちょうど 1/2 になるような次の組み合わせは箱の中に 85 枚の青い円盤と 35 枚の赤い円盤が入っているときである。
青い円盤 2 枚を取り出す確率がちょうど 1/2 で，箱の中の円盤の合計枚数が 10^{12} を超える最初の組み合わせを考える。箱の中の青い円盤の枚数を求めよ。

https://projecteuler.net/problem=100

2. 解法

「青が b 枚，赤が r 枚」で立式すると対称性の低い式を相手にするはめになってしまうので「青が b 枚，合計 n 枚」で考えます。確率の条件はこうなります。

$$\frac{{}_b\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore 2b(b-1) = n(n-1)$$

これはペル方程式です。Reduce で一般項を求めました。

$$b(k) = \frac{1}{8}\left\{-(\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+3)^k + (\sqrt{2}+2)(3-2\sqrt{2})^k + 4\right\}$$

$$n(k) = \frac{1}{4}\left\{(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+3)^k - (\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})^k + 2\right\}$$

はじめて $n > 10^{12}$ となる k を求めて b の式に代入すると解けます。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 nmax = 10^12;
 b[k_] := 1/8 (4 + (3 - 2 Sqrt[2])^k (2 + Sqrt[2])
        - (-2 + Sqrt[2]) (3 + 2 Sqrt[2])^k);
 n[k_] := 1/4 (2 - (3 - 2 Sqrt[2])^k (1 + Sqrt[2])
        + (-1 + Sqrt[2]) (3 + 2 Sqrt[2])^k);
 k = NestWhile[# + 1 &, 1, n@# <= nmax &];
 ans = Simplify@b@k]

Out[]= {0.000262818, 756872327473}
```