

# Project Euler 45. Triangular, Pentagonal, and Hexagonal

hiragn

2024 年 12 月 22 日

## 1. 問題の概要

三角数, 五角数, 六角数は次のような数である。

$$\text{三角数 } T_n = n(n+1)/2 \quad 1, 3, 6, 10, 15, \dots$$

$$\text{五角数 } P_n = n(3n-1)/2 \quad 1, 5, 12, 22, 35, \dots$$

$$\text{六角数 } H_n = n(2n-1) \quad 1, 6, 15, 28, 45, \dots$$

$T(285) = P(165) = H(143) = 40755$  である。次の三角数かつ五角数かつ六角数な数を求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=45>

## 2. 解法

$T_x = P_y = H_z$  とすると, これは連立 2 次不定方程式です。ペル方程式の一般解を 2 回求めることで解決します。

まず, 三角数  $T(x)$  と六角数  $H(z)$  が一致する条件を求めます。

---

```
t[n_] := PolygonalNumber[3, n];
p[n_] := PolygonalNumber[5, n];
h[n_] := PolygonalNumber[6, n];
Reduce[{t[x] == h[z], x > 0, z > 0}, {x, z}, Integers] // Simplify
```

---

$x = 2k + 1, z = k + 2$  ( $k \geq 0$ ) でした。

次は三角数  $T(2k + 1)$  と五角数  $P(y)$  が一致する条件を求めます。

---

```
Reduce[{t[2 k + 1] == p[y], k > 0, y > 0}, {k, y},
Integers] // Simplify
```

---

解は  $k \geq 1$  として次のようになります。

$$y(k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}(5 + 3\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})^{2k} - \frac{1}{12}(5 - 3\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})^{2k}$$

$y(2)$  に対する五角数  $P(y(2))$  が答えです。

---

```
1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   p[n_] := PolygonalNumber[5, n];
4   y[k_] := 1/12 (2 + (7 - 4 Sqrt[3])^(2 k) (5 - 3 Sqrt[3]) +
5     (5 + 3 Sqrt[3]) (7 + 4 Sqrt[3])^(2 k));
6   ans = p@y@2 // Simplify]
7
8 Out[] = {0.0000285634, 1533776805}
```

---