Project Euler 71. Ordered Fractions

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1.　問題の概要

n と d を正の整数として分数 n/d を考える。$n < d$ かつ $\gcd(n,\, d) = 1$ のものを真既約分数と呼ぶ。
$d \leqq 8$ について既約分数を大きさ順に並べると次のようになる。

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{5},\ \mathbf{\frac{3}{7}},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8}$$

$3/7$ のすぐ左の分数は $2/5$ である。
$d \leqq 1{,}000{,}000$ について真既約分数を大きさ順に並べたとき，$3/7$ のすぐ左の分数の分子を求めよ。

`https://projecteuler.net/problem=71`

2.　解法

ファレイ数列の問題です。一般解を求めて解きます。
$3/7$ のすぐとなりを n/d とすると $3d - 7n = \pm 1$ が成り立ちます。
$n/d < 3/7$ より $3d - 7n > 0$ なので -1 は不適です。

$$3d - 7n = 1$$

一般解は $d = 5 + 7k,\ n = 2 + 3k$ で，これは真既約条件をみたします。

$$(5 + 7k,\, 2 + 3k) = (1 + k,\, 2 + 3k) = (1 + k,\, k) = 1$$

n/d が k の増加関数であることもわかります。

$$\frac{n}{d} = \frac{2 + 3k}{5 + 3k} = \frac{3}{7} - \frac{1}{7(5 + 3k)}$$

k が最大のときの $n = 2 + 3k$ が答えです。$d = 5 + 7k \leqq 10^6$ から k の最大値を求めると解けます。以上をコードにまとめました。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 dmax = 10^6;
 ans = 2 + 3*Quotient[dmax - 5, 7]]

Out[]= {8.29288*10^-7, 428570}
```