

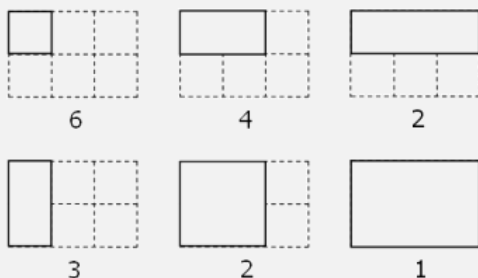
Project Euler 85. Counting Rectangles

hiragn

2024 年 12 月 27 日

1. 問題の概要

図の横の長さ 3、縦の長さ 2 の格子には 18 個の長方形が含まれている。



ぴったり 2,000,000 個の長方形を含む格子は存在しない。長方形の個数が 2,000,000 に一番近い格子の面積を求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=85>

2. 解法

横 x 、縦 y の格子が $f(x, y)$ 個の長方形を含むとします。長方形は縦線 2 本、横線 2 本の組と対応づけることができ、 f は二項係数であらわせます。

$$f(x, y) = {}_{x+1}C_2 \cdot {}_{y+1}C_2 = \frac{1}{4}(x+1)x(y+1)y$$

$|f(x, y) - 2 \times 10^6|$ を最小にする (x, y) に対して xy を答えればいいわけです。分数係数が邪魔なので 4 倍して

$$|(x+1)x(y+1)y - 4c| \quad (c = 2 \times 10^6)$$

を最小にすることを考えます。受験数学なら文字固定してどうこうするところですが、全探索で解きます。

$(x+1)x(y+1)y \approx 8 \times 10^6$ と考えると x, y の検索範囲はそんなに広くありません。

$y = 1$ として x の上限を見積もります。 $2(x+1)x = 8 \times 10^6$ の正の解は $1999.5 \dots$ なので x の上限は約 2000 です。これをもう少し広く取って計算しました。

```

1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   (* x の上限 *)
4   c = 2*10^6;
5   lim = Values@NSolve[{2 (x + 1) x == 4 c, x >= 1}, x];
6   lim = Ceiling@lim[[1, 1]] + 10;
7
8   (* y<=x として(x, y)を全部作る *)
9   tbl = Flatten[Table[{x, y}, {x, 1, lim}, {y, 1, x}], 1];
10
11  (* 計算 *)
12  f[x_] := f[x] = (x + 1) x;
13  g[{x_, y_}] := Abs[f[x]*f[y] - 4 c];
14  ans = Times @@ First@MinimalBy[tbl, g@# &]]
15
16 Out[]= {3.11574, 2772}

```
