

# Project Euler 95. Amicable Chains

hiragn

2024 年 12 月 25 日

## 1. 問題の概要

ある数の真の約数とは、自分自身より小さい約数のことである。

220 の真の約数の和は 284 で、284 の真の約数の和は 220 であり、2 つの数が対をなしている。220 と 284 は友愛数と呼ばれる。

真の約数の和を求める操作をたとえば 12496 から始めると、5 つの数の鎖（チェーン）ができる。

$$12496 \rightarrow 14288 \rightarrow 15472 \rightarrow 14536 \rightarrow 14264 (\rightarrow 12496 \rightarrow \dots)$$

この鎖は出発点に戻っているため、友愛鎖と呼ばれる。どの要素も 1,000,000 を超えない最長の友愛鎖の最小のメンバーを求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=95>

## 2. 解法

真の約数の和のリストを作ります。リストの作成を打ち切る条件は真の約数の和が次のいずれかになることです。

- $10^6$  を超える
- リストに含まれているのと同じ数になる
- 出発点より小さな数になる

「出発点より小さな数になる」を条件に加えるのは、すでに調べた鎖をもう一度調べるのを避けるためです。この条件を加えることで計算時間をかなり短くできます。

でき上がったリストの中から終着点の真の約数の和が出発点になるものを抽出して、その長さを調べました。

---

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   nmax = 10^6;
4   f[n_] := f[n] = DivisorSigma[1, n] - n;
5   calc[n_] := Module[{cur = n, visited = {}},
6     While[! MemberQ[visited, cur] && n <= cur <= nmax,
7       AppendTo[visited, cur]; cur = f[cur];
8     If[f@Last@visited == First@visited, {n, Length@visited}, {0, 0}]];
9   ans = MaximalBy[ParallelMap[calc, Range[2, nmax]], Last]]
10
11 Out[] = {2.51527, {{14316, 28}}}
```

---

最長の友愛鎖の長さは 28 で、その中身は次のようになっていました。

$$\begin{aligned}
&14316 \rightarrow 19116 \rightarrow 31704 \rightarrow 47616 \rightarrow 83328 \rightarrow 177792 \rightarrow 295488 \rightarrow 629072 \\
&\rightarrow 589786 \rightarrow 294896 \rightarrow 358336 \rightarrow 418904 \rightarrow 366556 \rightarrow 274924 \rightarrow 275444 \\
&\rightarrow 243760 \rightarrow 376736 \rightarrow 381028 \rightarrow 285778 \rightarrow 152990 \rightarrow 122410 \rightarrow 97946 \\
&\rightarrow 48976 \rightarrow 45946 \rightarrow 22976 \rightarrow 22744 \rightarrow 19916 \rightarrow 17716 (\rightarrow 14316)
\end{aligned}$$