Project Euler 73. Counting Fractions in a Range

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

n と d を正の整数として分数 n/d を考える。$n < d$ かつ $\gcd(n, d) = 1$ のものを真既約分数と呼ぶ。
$d \leqq 8$ の真既約分数を小さい方から順に並べると次のようになる。

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \mathbf{\frac{1}{3}}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \mathbf{\frac{1}{2}}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}$$

$1/3$ と $1/2$ の間には 3 つの分数がある。
$d \leqq 12,000$ の真既約分数を並べた集合では $1/3$ と $1/2$ の間に何個の分数があるか？

`https://projecteuler.net/problem=73`

2. 解法

真既約分数は分母毎にグループ化できて，重複は生じません。分母 d ごとに分数の個数を数えてその総和を求めます。

2.1 分母 d を固定して数える

$1/3 < n/d < 1/2$ を n について解くと $d/3 < n < d/2$ で，閉区間に直すとこうなります。

$$\texttt{Floor}[d/3] + 1 \leqq n \leqq \texttt{Ceiling}[d/2] - 1$$

この範囲で d と互いに素なものの個数の総和が答えです。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 dmax = 12000;
 f[d_] := Length@Select[
    Range[Floor[d/3] + 1, Ceiling[d/2] - 1], CoprimeQ[d, #] &];
 ans = Total[f /@ Range[4, dmax]]]

Out[]= {3.4747, 7295372}
```

2.2 分子 n を固定して数える

`Floor` や `Ceiling` を使うと境界条件でミスりそうなので $2n < d < 3n$ を使って d を数えてみました。この場合，d, n の範囲はこうです。

$$2n+1 \leqq d \leqq 3n-1,\ 1 \leqq n < \frac{1}{2}d_{\max} = 6000$$

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 dmax = 12000;
 cond[n_, d_] := CoprimeQ[n, d] && 2 n < d < 3 n && d <= dmax;
 f[n_] := Length@Select[Range[2 n + 1, 3 n - 1], cond[n, #] &];
 ans = Total[f /@ Range[Quotient[dmax, 2] - 1]]]

Out[]= {17.1023, 7295372}
```