

Project Euler 63. Powerful Digit Counts

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

5 桁の数 $16807 = 7^5$ は自然数を 5 乗した数である。同様に 9 桁の数 $134217728 = 8^9$ は自然数を 9 乗した数である。

自然数を n 乗して得られる n 桁の正整数は何個あるか？

<https://projecteuler.net/problem=63>

2. 解法

x^n が n 桁になる条件は

$$10^{n-1} \leq x^n \leq 10^n - 1$$

が整理することです。

右側の不等式から $x \leq 9$ がわかります。左側の不等式が成立するには

$$10^{n-1} \leq 9^n \Leftrightarrow n-1 \leq n \log_{10} 9$$

が必要で、これを解くと $n \leq 21$ です。

```
In[] := NestWhile[# + 1 &, 1, 10^(# - 1) <= 9^# &] - 1
Out[] = 21
```

はじめの不等式を x について解くようになります。

$$10^{\frac{n-1}{n}} \leq x \leq (10^n - 1)^{\frac{1}{n}}$$

これをみたす x の個数は $\text{Floor}[\text{右辺}] - \text{Ceiling}[\text{左辺}] + 1$ 個です。これを $n = 1$ から $n = 21$ まで足したものが答えです。

```
1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   nmax = NestWhile[# + 1 &, 2, 10^(# - 1) <= 9^# &] - 1;
4   ans = Sum[Floor[Power[10^n - 1, 1/n]] -
5     Ceiling[Power[10^(n - 1), 1/n]] + 1, {n, 1, nmax}]]
6
7 Out[] = {0.000641858, 49}
```
