

# Project Euler 51. Prime Digit Replacements

hiragn

2024 年 12 月 25 日

## 1. 問題の概要

2 桁の数  $\square 3$  の 1 桁目を他の数字で置き換えると 13, 23, 43, 53, 73, 83 という 6 つの素数が得られる。

5 桁の数  $56\square\square 3$  の 3 桁目と 4 桁目を同じ数字で置き換えると 7 つの素数ができる。

56003, 56113, 56333, 56443, 56663, 56773, 56993

この族の最初の数である 56003 は、この性質を持つ最小の素数である。

いくつかの桁を同じ数字で置き換えると 8 つの素数が得られるときがある。その素数の最小値を求めよ。

注) 置き換える桁は連続していなくてもよい。

<https://projecteuler.net/problem=51>

## 2. 解法

桁数字の入れ替えには次のような制約があります。

- 1 の位は入れ替えません。0, 2, 4, 6, 8 で置き換えると偶数が 5 個できて、これらは素数ではないからです
- 首位の数字を 0 で置き換えることはありません。問題文中の例で「 $\square 3 \rightarrow 3$ 」を考えていないことからわかります
- 

また、入れ替える桁数は 3 の倍数個です。入れ替えによって桁数字の和、つまり 3 で割った余りが変わる可能性があることに注目するとこれが言えます。

$\square 3$  などでは  $\square$  の部分（入れ替える部分）の桁数字の和を  $x$  として、残りの部分の桁数字の

和を  $y$  とします。  $x + y \equiv 0 \pmod{3}$  となる数は 3 の倍数であり、素数ではありません。

1 桁入れ替えるときは  $x \equiv 0, 1, 2$  となる数字がそれぞれ 4, 3, 3 個あります。

$y \equiv 0$  のとき  $x \equiv 1, 2$  なので素数は最高で  $3 + 3 = 6$  個しかできません。同様に考えると素数は最高でも  $4 + 3 = 7$  個なので 1 桁の入れ替えで条件をみたすことはできません。

2 桁入れ替える場合も余り 0, 1, 2 の  $x$  が 4, 3, 3 個なので不適です。

- 余り 0 : 00, 33, 66, 99 の 4 通り
- 余り 1 : 22, 55, 88 の 3 通り
- 余り 2 : 11, 44, 77 の 3 通り

証明は割愛しますが、 $3k + 1, 3k + 2$  個の桁を入れ替えたときもダメで、8 個の素数を作るには  $3k$  個の桁の入れ替えが必要です。

3 個の桁の入れ替えでうまくいきました。120383 の 1, 3, 5 桁目を入れ替えると次の 8 個の素数ができます。この中で一番小さい 121313 が答えです。

121313, 222323, 323333, 424343, 525353, 626363, 828383, 929393

---

```

1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   (* n の 1st 桁目を k に変換 *)
4   f[n_, lst_, k_] := Module[{digits = IntegerDigits@n},
5     If[First@digits == 1 && k == 0, Return@0];
6     digits[[lst]] = k;
7     FromDigits@digits];
8
9   (* n の 1st 桁目を変換して素数を 8 個作れるか判定 *)
10  g[n_, lst_] := Length@Select[
11    f[n, lst, #] & /@ Range[0, 9], PrimeQ] == 8;
12
13  (* n のどの桁を変換すればいいか *)
14  h[n_] :=
15    Select[Subsets[Range[IntegerLength@n - 1], {3}], g[n, #] &];
16
17  (* 最小値を求める *)
18  nmin = Prime@NestWhile[# + 1 &, PrimePi@100000, h@Prime@# == {} &];
19  ans = Min@Select[f[nmin, First@h@nmin, #] & /@ Range[0, 9], PrimeQ]
20
21 Out[] = {0.598935, 121313}

```

---