

Project Euler 65. Convergents of e

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

$\sqrt{2}$ の連分数による近似分数を考える。

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = 1.414213\dots$$

繰り返し部分を途中で打ち切ったものを整理すると次のようになる。

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

この数列の最初の 10 項を示す。

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}$$

e の近似分数からなる数列も考えることができる。

$$2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}, \dots$$

10 個目の近似分数の分子の各桁の数字を合計すると $1 + 4 + 5 + 7 = 17$ である。

e の近似分数の 100 項目の分子について各桁の数字の和を求めよ。

<https://projecteuler.net/problem=65>

2. 解法

mathematica には連分数用の関数があるので、それを活用します。

1. ContinuedFraction[E, 100] で e の連分数展開の 100 項目を得る
2. FromContinuedFraction で普通の分数に直す
3. Numerator で分子を取り出す
4. IntegerDigits で桁ごとに区切る
5. Total で和を求める

```
1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   ans = Total@IntegerDigits@Numerator@
4     FromContinuedFraction@ContinuedFraction[E, 100]]
5
6 Out[] = {0.0000557651, 272}
```
