

Project Euler 64. Odd Period Square Roots

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

正整数の平方根の連分数表示は周期をもつ。たとえば $\sqrt{23}$ の周期は 4 である。

$$\sqrt{23} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \dots}}}}$$

整数部分は 4 であり、小数部分の連分数展開には 1, 3, 1, 8 が周期的にあらわれる。

これを $\sqrt{23} = [4; (1, 3, 1, 8)]$ とあらわす。

13 以下の正整数 n で奇数の周期をもつ平方根 \sqrt{n} は 4 つある。 $n \leq 1000$ のとき奇数の周期をもつ平方根が何個あるか答えよ。

<https://projecteuler.net/problem=64>

2. 解法

組み込み関数の `ContinuedFraction` を使います。

```
In [] := ContinuedFraction@Sqrt@23
Out [] = {4, {1, 3, 1, 8}}
```

この関数の返り値は問題文中の $[4; (1, 3, 1, 8)]$ と同じ形のリストで、第 2 成分の長さが奇数のものが条件をみたします。解法はこうです。

1. `ContinuedFraction` で連分数に直す
2. `Last` で循環する部分を取り出す
3. `Length` でその長さを求める
4. 長さが奇数のものを数える

ルートの中身が平方数のときは連分数表示が循環する部分をもたず、`Last` での取り出しに失敗するので最初から除外して計算しました。

```
1 In[]:= Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   nmax = 10^4;
4   cond[n_] := OddQ@Length@Last@ContinuedFraction@Sqrt@n;
5   lst = Complement[Range@nmax, Table[k^2, {k, Sqrt@nmax}]];
6   ans = Length@Parallelize@Select[lst, cond@# &]]
7
8 Out[] = {0.515699, 1322}
```
