Project Euler 75. Singular Integer Right Triangles

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1.　問題の概要

ある長さの鉄線を折り曲げて 3 辺の長さが整数の直角三角形を作るとき，その方法が 1 通りしかないような最短の鉄線の長さは 12 cm である。他にも沢山の例がある。

- 12 cm : $(3, 4, 5)$
- 24 cm : $(6, 8, 10)$
- 30 cm : $(5, 12, 13)$
- 36 cm : $(9, 12, 15)$
- 40 cm : $(8, 15, 17)$
- 48 cm : $(12, 16, 20)$

これとは対照的に，ある長さの鉄線（たとえば 20 cm）は 3 辺の長さが整数の直角三角形に折り曲げることができない。また，2 つ以上の折り曲げ方があるものもある。120 cm の鉄線を用いた場合，3 通りの折り曲げ方がある。

$$(30,\ 40,\ 50),\ (20,\ 48,\ 52),\ (24,\ 45,\ 51)$$

L を鉄線の長さとする。直角三角形を作るときに 1 通りの折り曲げ方しか存在しないような $L \leqq 1{,}500{,}000$ の個数を求めよ。

`https://projecteuler.net/problem=75`

2.　解法

ピタゴラス数は自然数 $k,\ m,\ n\ (m > n)$ を用いて次のようにあらわせます。m と n は互いに素で，偶奇が異なる数です。

$$(a,\ b,\ c) = \bigl(k(m^2 - n^2),\ 2kmn,\ k(m^2 + n^2)\bigr)$$

3 辺の長さの和が L 以下になる条件は $2km(m+n) \leqq L$ です。
まず $k=1$ の (m, n) を求めて，次に k の範囲を求めて折り曲げ方を数えました。

```
In[]:= Clear["Global`*"];
RepeatedTiming[
 lmax = 15*10^5;
 cnt = Table[0, lmax];
 For[m = 2, 2 m^2 < lmax, m++,
  For[n = 1, t = 2 m (m + n); t <= lmax && n < m, n++,
   If[CoprimeQ[m, n] && OddQ[m - n],
    Do[cnt[[k*t]]++, {k, Quotient[lmax, t]}]]]];
 ans = Count[cnt, 1]]

Out[]= {1.48581, 161667}
```