

Project Euler 57. Smallest Multiple

hiragn

2024 年 12 月 24 日

1. 問題の概要

2 の平方根は無限に続く連分数で表すことができる。

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

最初の 4 回の繰り返しを展開すると次のようになる。

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.41666\dots, \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1.41379\dots$$

この次の 3 つの項は $99/70$, $239/169$, $577/408$ である。第 8 項は $1393/985$ であり、これは分子の桁数が分母の桁数を超える最初の例である。

最初の 1000 項のうち、分子の桁数が分母の桁数を超える項はいくつあるか？

<https://projecteuler.net/problem=57>

2. 解法

連分数展開は `ContinuedFraction` でできます。

通分して普通の分数に直すのは `FromContinuedFraction`。 $\sqrt{2}$ でやってみましょう。

```
In[] :=
f[n_] := FromContinuedFraction@ContinuedFraction[Sqrt@2, n + 1];
f /@ Range@10

Out[] = {3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408, 1393/985, \
3363/2378, 8119/5741}
```

これらを使ってコードを書きます。

1. 連分数を通分したもののリストを作る
2. `NumeratorDenominator` で各分数を分子と分母のリストに変換
3. `IntegerLength` で桁数のリストに変換
4. リストが降順になっているものを数える

```
1 In[] := Clear["Global`*"];
2 RepeatedTiming[
3   f[n_] := FromContinuedFraction@ContinuedFraction[Sqrt@2, n + 1];
4   cond[x_] := ! OrderedQ[IntegerLength /@ NumeratorDenominator@x];
5   ans = Length@Select[f /@ Range@1000, cond]]
6
7 Out[] = {0.124756, 153}
```
