Теореми за средните стойности(Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлор.

Дефиниция. *Ще казваме, че функцията f(x) има локален максимум в някоя вътрешна точка* x_0 *от своята дефиниционна област, когато съществува такава околност* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *на* x_0 *съдържаща се в дефиниционната област на f(x), че за всяко* x *от тази околност да имаме* $f(x) \le f(x_0)$.

Аналогично *f(x)* ще има *локален минимум* в точката x_0, когато тя е вътрешна за дефиниционната област на функцията и когато за всяко x от някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *на точката* x_0 е изпълнено неравенството $f(x) \ge f(x_0)$.

Локалните максимуми и локалните минимуми ще наричаме с общото име *локални екстремуми.*

Теорема на Ферма. *Ако функцията f(x) е диференцуема в една вътрешна точка* x_0 *от своята дефиниционна област и ако тя има локален екстремум в тази точка, то* $f'(x_0)=0$.

Доказателство: Нека *f(x)* има локален максимум в точката x_0 (случаят с локален минимум е аналогичен). Тогава $f(x) \le f(x_0)$, за всяко x от някоя околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ на точката x_0. Щом *f(x)* е диференцуема в x_0 то тя притежава както лява, така и дясна производна в тази точка и при това те са равни на производната в нея (вж w4). Нека сега да ги разгледаме:

$$f'_+(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad \text{а} \quad f'_-(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Виждаме, че за $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и същеременно $x>x_0$ частното $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, тъй като $f(x)-f(x_0)\le 0$, а $x-x_0>0$, т.е. $f'_+(x_0)\le 0$. За $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и същеременно $x<x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, защото $f(x)-f(x_0)\le 0$, а $x-x_0<0$ и следователно $f'_-(x_0)\ge 0$.

Но както казахме $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. И така имаме едновременно $f'_+(x_0)\le 0$ и $f'_-(x_0)\ge 0 \Rightarrow f'(x_0)=0$.□

Теорема на Вайерщрас. *Ако една функция* $f(x)$ *е непрекъсната в крайния и затворен интервал* $[a,b]$, *то тя притежава една най-голяма и една най-малка стойност.*

Теорема на Рол. *Ако една функция* $f(x)$ *е непрекъсната в крайния и затворен интервал* $[a,b]$ *и е диференцуема в отворения интервал* (a,b) *и ако освен това* $f(a)=f(b)$, *то съществува поне една точка* ξ, *намираща се между a и b, за която* $f'(\xi)=0$.

Доказателство: Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в един краен и затворен интервал, то тя е ограничена. Да означим съответно с L и l точната и' горна и долна граница в интервала $[a,b]$, те се достигат, както знаем от теоремата на Вайерщрас.

Ако l=L то от $l \le f(x) \le l$, за $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x)$, ще бъде константа в $[a,b]$ и нейната производна ще бъде нула за $\forall x \in (a,b)$ и теоремата ще бъде доказана.

Нека l<L. От теоремата на Вайерщрас следва, че съществуват две точки x_1 и $x_2 \in [a,b]: f(x_1) = l$ и $f(x_2) = L$, като поне една от тях принадлежи на интервала (a,b). В противен случай $x_1 = a, x_2 = b$ или обратното и от $f(a) = f(b)$ получаваме, че l=L, случай който вече разгледахме.

Нека x_1 е вътрешна за $[a,b]$. От $f(x_1) = l$ следва, че функцията има локален минимум в тази точка, поради което съгласно теоремата на Ферма ще имаме, че $f'(x_1) = 0$ и теоремата ще бъде доказана.

Нека x_1 е крайна за $[a,b]$, тогава x_2 ще бъде, както вътрешна, така и точка на локален максимум и следователно пак от теоремата на Ферма ще имаме, че $f'(x_2) = 0$.И така във всички случаи съществува точка $\xi \in (a,b)$, за която $f'(\xi) = 0$□

Теорема на Лаганж(за крайните нараствания). *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и е диференцуема в отворения интервал (a,b), то съществува поне една точка $\xi \in (a,b)$, за която*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказателство: Да въведем $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и диференцуема в интервала (a,b), като при това $\varphi(a) = f(a)$ и $\varphi(b) = f(a) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$. Получихме, че $\varphi(x)$ удовлетворява всички условия на теоремата на Рол и следователно ще съществува поне една точка $\xi \in (a,b)$, за която $\varphi'(\xi) = 0$. Но $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Теоремата е доказана.□

Теорема на Коши(обобщена теорема за крайните нараствания). *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и диференцуема в отворения интервал (a,b) и ако $g'(x) \ne 0$ за $\forall x \in (a,b)$, то съществува поне една точка $\xi \in (a,b)$, за която* $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Доказателство: Да отбележим, че знаменателят $g(b) - g(a) \ne 0$, тъй като в противен случай $g(b) = g(a)$, и $g(x)$ би удовлетворявала условията в теоремата на Рол и би следвало, че съществува точка $\eta \in (a,b)$, за която $g'(\eta) = 0$, което е противоречие с условието $g'(x) \neq 0$ *за* $\forall x \in (a,b)$. Образуваме си помощната функция $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left[g(x)-g(a)\right]$. И $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$ и диференцуема в интервала (a,b), като при това $\varphi(a) = f(a)$ и $\varphi(b) = f(a) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$. $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$. И тук $\varphi(x)$ удовлетворява условията на теоремата на Рол и следователно ще съществува тогава някаква точка $\xi \in (a,b)$, за която $\varphi'(\xi) = 0$, т.е. $f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Теоремата е доказана.□

Следствие(което ще използваме за формулата на Тейлор): *Нека* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са две функции, дефинирани и* $n+1$ *пъти диференцуеми в някоя околност D на една точка* a, *като при това* $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0, \ldots\ldots, g^{(n+1)}(x) \neq 0$ *при* $x \neq a$. *Да предположим освен това, че*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,$$
$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0.$$

Тогава за $\forall x \in D$, *но* $x \neq a$, *имаме* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$, *където* $\xi \in (a,x)$.

Доказателство: Като вземем предвид, че $f(a) = g(a) = 0$ и прилагаики теоремата на Коши получаваме $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$, където $\xi_1 \in (a,x)$. Сега от $f'(a) = g'(a) = 0$ ще имаме $\dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \dfrac{f'(\xi_1)-f'(a)}{g'(\xi_1)-g'(a)} = \dfrac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$, където $\xi_2 \in (a,\xi_1)$ следователно и $\xi_2 \in (a,x)$.

И така, като продължим в същия дух на разсъждения, прилагайки $n+1$ пъти теоремата на Коши ще достигнем до равенството $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$, където $\xi \in (a,x)$.

Формула на Тейлор

Нека Вземем един полином от n-та степен

(1) $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Да го диференцираме последователно n пъти, получаваме

(2) $$\begin{cases} f'(x) = na_n x^{n-1} + n-1a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1, \\ f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2.1.a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 3.2.a_n x + (n-1)(n-2)\cdots 2.1.a_{n-1}, \\ f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots 3.2.1a_n. \end{cases}$$

Като заместим в горните равенства x с 0, ще получим
$f(0)=a_0, f'(0)=1!a_1, f''(0)=2!a_2,\cdots, f^{(n-1)}(0)=(n-1)!a_{n-1}, f^{(n)}(0)=n!a_n$. Т.е. коефициентите на полинома $f(x)$ се изразяват чрез стойностите на $f(x)$ и неговите производни в точката 0. Това означава, че (1) може да се запише във вида:

(3) $$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Нека сега да приемем произволна точка a да играе ролята на точката 0. За целта да положим $x=a+h$ и $f(a+h)=\varphi(h)$. Функцията
$\varphi(h)=a_n(a+h)^n+a_{n-1}(a+h)^{n-1}+\cdots+a_1(a+h)+a_0$ е полином на променливата h от n-та степен и от (3) ще имаме

(4) $$\varphi(h)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}h+\frac{\varphi''(0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}h^n.$$

От друга страна,

$$\varphi(h)=f(a+h),\varphi'(h)=f'(a+h),\varphi''(h)=f''(a+h),\cdots,\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(a+h)$$

и следователно

$$\varphi(0)=f(a),\varphi'(0)=f'(a),\varphi''(0)=f''(a),\cdots,\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a).$$

Което ни дава право да запишем равенство (4) във вида:

(5) $$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$

или което е все едно, така:

(6) $$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Равенство (5), както и равносилното му (6), се нарича *формула на Тейлор*. Защо е интересна тази формула? Интересна е защото може да бъде видоизменена по такъв начин, че да запази своята сила не само за полиноми, но и за твърде широка категория от функции.Това е така, тъй като е верна следна

Теорема на Тейлор: Нека функцията $f(x)$ притежава първа, втора и т.н. до $n+1$-ва производна в някоя околност на точката $a-(a-\delta,a+\delta)$ .Ako x е една точка от тази околност, то валидно е равенството

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

където $\xi\in(a,x)$.

Доказателство: Образуваме си функцията
$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Диференцираме и получаваме

$$\varphi'(x)=f'(x)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}(x-a)\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

$$\varphi''(x)=f''(x)-f''(a)-\frac{f'''(a)}{1!}(x-a)\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},$$

....

$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$.

Ясно е тогава, че $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \cdots = \varphi^{(n)}(a) = 0$.

Да разгледаме също и функцията $\psi(x) = (x-a)^{n+1}$, за нея имаме производните

$$\psi'(x) = (n+1)(x-a)^n, \psi''(x) = (n+1)n(x-a)^{n-1}, \cdots, \psi^{(n)}(x) = (n+1)n...2.(x-a).$$

Следователно $\psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \cdots = \psi^{(n)}(a) = 0$. Сега да си припомним следствието от теоремата на Коши и да го приложим за функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, получаваме $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)} \Leftrightarrow \varphi(x) = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}\psi(x)$, където $\xi \in (a,x)$. Като вземем предвид, че $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$ и $\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ получаваме

$$f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

или най сетне

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ където } \xi \in (a,x).$$

Това равенство се нарича *обща формула на Тейлор.* Събираемото $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Се нарича *остатъчен член във формата на Лагранж* и се бележи с R_n. Ако $f(x)$ е полином от *n*-та степен то $f^{(n+1)}(x) = 0$ за всяко x, така че остатъчният член ще изчезне.

Формулата на Тейлор има и модификация. Да положим $x = a + h$ и $\theta = \dfrac{\xi - a}{x - a} \Rightarrow \xi = a + \theta h$ а $\theta \in (0,1)$. Сега получаваме

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

това също е формула на Тейлор.

При $a = 0$ формулата на Тейлор се нарича *формула на Маклорен*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ където } \theta \in (0,1).$$

Остатъчен член във формата на Коши

Нека за функцията $f(x)$ е валидана формулата на Тейлор. Както вече знаем остатъчният член във формата на Лагранж има вида $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Ще покажем, че ако $f^{(n+1)}(x)$ е непрекъсната в разглежданата околност на точката *a*, R_n може да се запише във вида

(7) $$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt .$$

Наистина, инрегрираики последователно по части, имаме

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n df^n(t) = \frac{1}{n!}\Big|(x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_a^x - \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}(t)d(x-t)^n =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} df^{(n-1)}(t) = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\Big|(x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t)\Big|_a^x - \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n-1)}(t)d(x-t)^{n-1} = -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n -$$

$$-\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt = \cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} - \cdots - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \int_a^x f'(t)dt.$$ Но

$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ и ще имаме за $f(x)$ следното

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt,$ от тук следва и исканото равенство (7).

Нека сега към интеграла в (7) приложим теоремата за средните стоиности и ще получим, че

$R_n = \frac{1}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)(x-a),$ където $\xi \in (a,x)$. Нека $\theta = \dfrac{\xi - a}{x-a} \Rightarrow \theta \in (0,1)$ и ще имаме $\xi = a + \theta(x-a)$ тогава $R_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$ или, ако $x - a = h$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Когато използуваме този начин на записване и изразяване на R_n, казваме, че сме записали остатъчния член във *формата на Коши.*