Поведение на производителя при конкурентни пазари. Поведение на потребителя. Ф-я на полезност

~~Тема 23~~

Тема 25

1.

Опитвайки се да моделираме поведението на производителите на пазара, най-важния обект от който се започва са фирмите. Ще моделираме производството и печалбата и загубите на фирма, която произвежда един продукт (за простота). Да си представим, че фирма произвежда продукта X, който се произвежда от различни елементи, наричани *входни елементи,* а именно $z_1, .., z_n$. Технологията на производство на фирмата се моделира от функцията

$$y = F(z_1, z_2, ..., z_n),$$

където у е количество произведена продукция, която зависи от количествата на входните елементи. Ясно е, че ресурсите $z_1, .., z_n$ или купува, или си произвежда сама, но те при всички случай имат някаква цена за нея. Нека означим единичните цени на ресурсите $z_1, .., z_n$ с $\omega_1, .., \omega_n$. В такъв случай, разходите на фирмата имат вида

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \omega_i$$

Нека единичната цена на готовата продукция у е р. Тогава печалбата е ру. Но за да изразим „чистата печалба" на фирмата, трябва да извадим от грубата печалба ру разходите. И така, задачата, която стои пред всеки собственик на фирма е да реши задачата

$$(0) \max_{z_1, z_2, ..., z_n} \left(pF(z_1, .., z_n) - \sum_{i=1}^{n} z_i \omega_i \right)$$

В общия случай тази задача е на повече от една променлива. Поради това решаването на задачата не е лесна. Първия анализ, който можем да направим е изследвайки необходимите условия за наличие на максимум, които са производните по всички променливи да са 0. Ясно е, че ако имаме максимум в точка $z_1^*, .., z_n^*$, то и производните

$$(1) \frac{\partial}{\partial z_i} \left(pF(z_1, .., z_n) - \sum_{i=1}^{n} z_i \omega_i \right) |_{z=z^*} = 0$$

Обратното не е вярно, ако тези прозиводни в някоя точка са 0, то не е задължително в нея да има максимум, нещо повече не е нужно в нея да има дори екстремум (пример – инфлексни точки при функция на една променлива). Преработвайки (1) получаваме условията от 1 род

$$(2) \mathrm{pF}_{z_i} = \omega_i, i = 1, .., n$$

Интерпретацията на pF_{z_i} е стойността на маргиналния продукт z_i, тоест приходът, получен в резултат използването на продукта i. При това положение, наистина близко до логиката е, че когато имаме оптимална стратегия, цената на всеки продукт носи съответен принос, тоест фирмата не харчи излишни пари за продукт, който дава ниска производителност.

Условие от *втори ред* за задачата (0) би било такова, което ще превърне необходимите условия (2) в достатъчни. Такова едно условие е функцията F да бъде вдлъбната по всичките си променливи. Ако това е така, от теорията на изпъкналите функции следва, че ако имаме критична точка (изпълняваща (2)) , то тя ще е точка на максимум. При това ако F е строго изпъкнала, този максимум е единствен. Ако F е функция на една променлива, условие от втори ред е

$$f''(x^*) < 0$$

За функция на много променливи това би било Хесияна на –F да е положително дефинитен. Условията, които току що изброихме са силни – понякога поради допълнителни съображения или условия са достатъчни и по- слаби условия.

Понякога задачата, която фирмата си поставя не е максимализиране на чистата печалба, а минимизация на разходите (криза ☺). Задачата за минимизиране на разходите при положение, че е известна технологията на производство е

$$(3)\ \min_{z_1,\dots,z_n} \sum_{i=1}^{n} z_i\omega_i$$

$$F(z_1,..,z_n) = y$$

Да забележим, че задачите (3) и (0) не са еквивалентни – например в (3) не взима участие цената на продукта на пазара, която фирмата поставя.

Необходими условия за задача от тип (3) се дават от теоремата на Лагранж, която адаптирана за (3) (само едно ограничение), дава

$$\operatorname{grad}\big(\mathcal{L}(z_1,..,z_n;\lambda)\big) = \operatorname{grad}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\omega_i + \lambda(F(z_1,..,z_n) - y)\right) = 0$$

Разписани, тези n+1 условия са

$\omega_i = \lambda F_{z_i}, i = 1,..,n$

$F(z_1,..,z_n) = y$

Нека отново напомним, че тези условия са само необходими. Ако функцията F е изпълнала, те са и достатъчни, понеже $\sum_{i=1}^{n} z_i\omega_i$ е изпъкнала, защото е линейна (Теорема на Кун и Такър).

Да отбележим, че както при задачата за максимизиране на чистата печалба, така и при задачата за минимизиране на разходите ако докажем, че имаме решение и използваме необходимите условия за да намерим всички критични точки, след сравняване на стойностите на целевите функции в тези критични точки можем да намерим решението.

2.

Моделирането на поведението на потребителя е по- различно от това на производителя по причина, че основната задача пред него (от гледна точка на това, че е потребител) е да задоволи максимално потребностите си при ограничени ресурси. Пазара предлага

100

продукти и услуги, които потребителя желае в определено количество и качество, но в общия случай не всички желания се задоволяват и на потребителя се налага да прави избор измежду няколко „не напълно задоволителни" комбинации. Основните стоки и услуги, от които потребителя се нуждае се наричат *потребителска кошница*. Нуждите и желанията на потребителя се моделират от т.нар. *функция на полезността*. Нека потребителската кошница на потребителя се състои от продуктите/услугите $X_1,..,X_n$. За аргументи на функцията на полезността взимаме количества от тези стоки/услуги : $x_1,..,x_n$. Всяка комбинация $(x_1,..,x_n)$ е потребителски пакет и функцията полезност дава някаква оценка (на желаност) на този пакет:

$$U:(x_1,..,x_n) \to U(x_1,..,x_n)$$

Тази функция се строи така, че $U(x_1,..,x_n) > U(y_1,..y_n)$ когато пакета x е по- желан от пакета y. Повърхнините(линиите) на ниво за U се наричат повърхнини(криви) на *безразличие*- на тях отговарят пакети с еднаква желаност от потребителя.

Ясно е, че обикновено функциите U са такива, че

$$k > 1 => U(\mathrm{kx}_1,..\mathrm{kx}_n) > U(x_1,..,x_n),$$

Което означава че потребителя желае да има по- големи количества от стоките, от колкото по- малко. Друго важно предположение, което се прави е за квазивдлъбнатост на U.

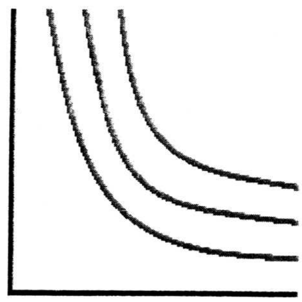
Дефиниция (квазивдлъбната функция)

Казваме, че функцията $U(x_1,..,x_n)$ е *квазивдлъбната* ако всяко множество от вида

$$P_a = \{x\epsilon R^n | U(x) \geq a\}, a\epsilon\mathbb{R}$$

е изпъкнало [http://www.economics.utoronto.ca/osborne/MathTutorial/QCC.HTM].

Например при функция на две променливи квазивдлъбнатостта означава, че линийте на безразличие ще са извити към координатното начало (фиг. 1)



Сега за да конструираме задачата, която стои пред потребителя нека означим дохода му (или количеството средства, с които разполага за харчене на разглежданата кошница) с m. Нека единичните цени на благата $X_1,..,X_n$ са $p_1,..,p_n$. При това положение, потребителя би желал да намери решение на задачата

(4) $\max\limits_{x_1,..,x_n} U(x)$

$p_1x_1+..+p_nx_n = m$

Подобно на задачата за минимизация на разходите, тук НУ се дават от градиента на функцията на Лагранж, която в случая е

$$\mathcal{L}(x_1,..,x_n;\lambda) = U(x_1,..,x_n) - \lambda(p_1x_1+..+p_nx_n - m)$$

Необходимите условия са

$U_{x_i} = \lambda \mathrm{p}_i, i = 1,..,n$

$p_1x_1+..+p_nx_n = m$

По принцип, задачата (4) рядко има решение, затова се преформулира на

(4') $\max\limits_{x_1,..,x_n} U(x)$

$p_1x_1 + .. + p_nx_n \leq m,$

в която не е нужно „всичко да е похарчено до стотинка ☺".

Нека задачата (4') има решение $(x_1^*, .., x_n^*)$.

Забележка:

Липсва обяснение за потребителски излишък и крива на предлагане – трябва да се добавят.

Литература

[1] Математическо въведение в икономиката, Смит (Скот?)

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.

102