Въпрос14

Линейно оптимиране

Задача на линейното оптимиране. Свойства. Многостенни множества. Екстремни точки. Екстремни направления и характеризацията им. Теорема за представяне на многостенно множество. Условие за оптималност на задачата на линейното оптимиране.

------------Предговор-----------

Ранг на система вектори : *Ранг на система вектори се нарича най-големия брой линейно независими вектори от тази система.*

Фундаментална теорема на Фаркаш: *Нека* $\{a_1,...,a_m,b\}$ *са точки* $\in \mathbb{R}^n, t = rang\{a_1,..,a_n,b\}$, *тогава е в сила едно от следните две твърдения :*

1. $b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0$ *(неотр. Линейна комбинация)*

   или

2. *съществува вектор с :* $cb < 0, ca_i \geq 0 \quad \forall i$

   $H = \{x : cx = 0\}$ *-уравнение на хиперравнина съдържаща точката 0.*

Ако вземем множеството от неотрицателните стойности на $\{a_1,...,a_m\}$ *получаваме множество (конус), дефинирано от тези точки* $\{a_1,...,a_m\}$. *Ако b е произволна точка от този конус, то е в сила условие 1.*

Теорема1:(Теорема на Фаркаш) Системата линейни уравнения : $\left|\begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\rangle$ има решение $\Leftrightarrow$ за $\forall y : yA \leq 0 \Rightarrow yb \leq 0$ или $\forall y : yA \geq 0 \Rightarrow yb \geq 0$. Имаме :

$A : n \times m, x \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$ и $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$, където i=1,…,n.

Д-во: $\rightarrow$) Нека $Ax = b, x \geq 0$ и разгледаме : $yAx = yb$, от тук се вижда, че $yA \leq 0 \Rightarrow yb \leq 0$

$\rightarrow$ (Нека $b \notin$ конуса, определен от точките : $\{a_1,...,a_m\} \Rightarrow \exists$ вектор с, за който $cb < 0, ca_j \geq 0$, но тука достигаме до противоречие, следователно $b \in$ конуса и тогава имаме : $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i$ (от Фундаментална теорема на Фаркаш).

Def1: Едно алгебрично множество от точки **S** се нарича изпъкнало, ако за кои да е две точки $x_1, x_2 \in S \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in S \quad (\lambda \in [0,1])$ (изпъкнала комбинация на две точки).

Def2: Обобщеният вид на изпъкналата комбинация е : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, където $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$.

Def3: Сечението на изпъкнали множества е изпъкнало множество.

Def4: Една точка се нарича крайна точка за дадено множество, ако не е вътрешна за нито една отсечка от това множество, т.е. не е възможно следното представяне : $x \in S, x_1, x_2 \in S, 0 < \lambda < 1$, S-изпъкнало множество $\Rightarrow x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

Def5: Афинно множество – произволна транслация на линейно пространство.

Def6: Размерността на линейно пространство е равна на броя на линейно независимите вектори.

Def7: Размерността на афинно множество е равна на размерността на линейното подпространство, което е паралелно с това множество.

Def8: Размерност на множество – размерността на афинното множество с най-малка размерност, което съдържа даденото множество.

Def9: Множество от точки : $H = \{x \in R^n \mid ax = b\}$, се нарича хиперравнина, а-нормален вектор на хиперравнината.

Def10: Множество от точки $\bar{H} = \{x \mid ax \le b\}$ - полуравнина получена при пресичането на хиперравнината с пространството.

Def11: Хиперравнината е изпъкнало множество.

Def12: Многостенно множество – Сечение на краен брой хиперравнини или полупространства.

Def13: Многостенното множество е изпъкнало.

Def14: Ограничено многостенно множество се нарича многостен.

Def15: Сечението на произволна хиперравнина с многостенно множество се нарича стена.

Def15.1: Стена с размерност 0 се нарича връх.

Def15.2: Стена с размерност 1 се нарича ръб.

Def15.3: Стена с максимална размерност се нарича фасет, т.е. ако многостенно множество е с размерност р, то стена с размерност р-1 се нарича фасет.

Теорема2: Нека (1) $P = \{x \mid Ax = b, x \ge 0\}$ е многостенно множество. Казваме, че точка $x \in P$ е връх $\Leftrightarrow$ стълбовете на матрицата А, който съответстват на положителните компоненти на т.х са линейно независими.

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_jx_j + ... + A_nx_n = b$

Д-во: Нека $A : m \times n,\ m < n$.

$\rightarrow$) За удобство първите р са положителните компоненти :

$A_1^+x_1 + A_2^+x_2 + ... + A_p^+x_p \mid +A_{P+1}^0x_{p+1} + ... + A_n^0x_n = b$, т.е. $x = (x_1, x_2, ..., x_p, 0, ..., 0)$. Сега нека допуснем противното, т.е. стълбовете до р са линейно зависими :

$A_1w_1 + ... + A_pw_p = 0,\ w = (w_1, ..., w_p, 0, ..., 0)$. Разглеждаме т. $(x \pm \xi w),\ \ \xi > 0$. Имаме:

$A(x \pm \xi w) = Ax \pm A\xi w = b \pm 0 = b$, следователно т. $(x \pm \xi w)$ е решение на (1). Търсим такова ξ, за което е изпълнено : $(x \pm \xi w) \ge 0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_p \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \pm \xi \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_p \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \ge 0$$

Разглеждаме точките : $\begin{matrix} x_1 = x + \xi w \\ x_2 = x - \xi w \end{matrix} \in P \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x$, т.е x е среда на отсечката (x_1, x_2), т.е. достигнахме до противоречие. Следователно стълбовете са линейно независими.

$\rightarrow$(Допускаме, че x е вътрешна точка $\rightarrow x = \lambda y + (1-\lambda)z,\ 0 < \lambda < 1,\ \ y, z \in P$.

Разглеждаме $(x - y) \ne 0$. Ненулевите координати на $(x - y)$ са сред положителните компоненти на x. $A(x - y) = 0$,но $(Ax = b,\ Ay = b,\ x, y \in P) \rightarrow$ стълбовете са линейно зависими. Достигнахме до противоречие, от където можем да направим извода, че точка x не е вътрешна $\rightarrow$ връх.

Следствие: Всяко базисно допустимо решение е връх на множеството Р.

Д-во: $A(m \times n),\ rank(A) = m,\ B(m \times m),\ \det B \ne 0$.Нека първите m стълба са линейно независими.

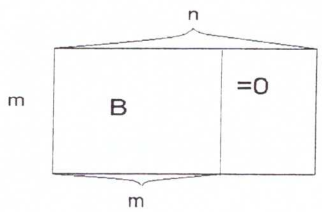
$Ax = b$, x- n-мерен вектор

$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_mx_m = b,\ \ x_{m+1} + ... + x_n = 0$

$Bx_b = b$, x_b е m-мерен вектор

m-броя на лин. нез. век. образуващи базиса

$x_b = B^{-1}b$ - базисно решение, ако $x_b \ge 0$, то това е базисно допустимо решение (не всяко базисно решение е допустимо).



Def16: Нека имаме, че $(x_1,....,x_p,0,....,0)$, $A_1^+x_1+.....A_p^+x_p\,|+....+A_j^0x_j=b$. Когато p<m, тогава върхът се нарича изроден (rank(A)=m).
Твърдение: Броя на върховете е крайно множество.
Def17: d се нарича посока за множеството P , ако за произволна точка $x\in P$ е изпълнено $x+\theta d\in P,\ \forall\theta\geq 0$ ($(x+\lambda d)$ е лъч).

Нека е дадено множество $P=\{x\,|\,Ax=b,\ x\geq 0\}$ и $\begin{pmatrix}X_b\\X_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}\geq 0\rightarrow$ базисно допустимо решение, като B е неособена квадратна подматрица на A с пълен ранг.

За това множество d е поска ако $\left|\begin{matrix}Ad=0\\d\geq 0\end{matrix}\right\rangle,\forall d\geq 0$. λd е също посока.

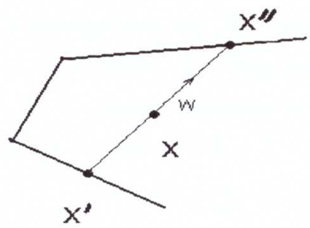
Теорема3: (Теорема за представяне на многостенно множество). Нека е дадено многостенното множество $P=\{x\,|\,Ax=b,\ x\geq 0\}$.Нека $x_i, i=1,..,k$ са върховете на P. Тогава произволна точка $x\in P$ може да се представи като изпъкнала комбинация на върховете : $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i+d,\ \ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,\ \ \lambda_i\geq 0, d$ е посока.

Д-во: Индукция по броя на положителните компоненти на x.

- За върховете това твърдение е очевидно вярно и това се вижда лесно като вземем $\lambda_i=1, d=0$.
- Ако всички компоненти на x за 0, то и b=0, т.е има единствен връх и теоремата е вярна.
- Допускаме, че е вярна за t положителни компонента и ще докажем, че е вярна за t+1 компонента. $x=(x_1,x_2,.....,x_t,0,...,0)$, ако $t\leq m,\ m=rank(A)$.Допускаме, че x не е връх (стълбовете на A , който съответстват на положителните компоненти на x са линейно зависими)$\rightarrow\ Aw=0,\exists w\neq 0$.

1. w има смесени по знак компоненти.
2. всички ненулеви компоненти на w са с един и същ знак $(w\geq 0)$
3. всички ненулеви компоненти на w са с един и същ знак $(w\leq 0)$

1)Разглеждаме $x+\theta w$.



Нека $\begin{matrix}x'=x+\theta' w & , & \theta'=\max\theta>0:x'\in P\\ x''=x+\theta'' w & , & \theta''=\max\theta<0:x''\in P\end{matrix}$. Решаваме

$\overline{x}_i+\theta w_i\geq 0,\overline{x}_i\geq -\theta w_i\Rightarrow\theta\leq -\dfrac{\overline{x}_i}{w_i}\rightarrow$ горни граници за θ, от тик намираме θ'. x',x''

имат поне по една положителна компонента по-малко от x. Ако $\theta = -\frac{\overline{x}_i}{w_i}$, то

$\overline{x}_i + \theta w_i = 0$, т.е. една положителна компонента по-малко.

$x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$, $0 < \lambda < 1$. x', x'' имат по една положителна компонента по-малко $\rightarrow$ изпълнява индукционото предположение,т.е.

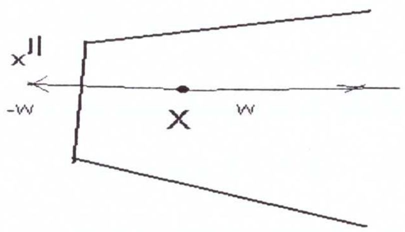
$x = \lambda(\sum \lambda_i' x_i + d') + (1-\lambda)(\sum \lambda_i'' x_i + d'')$,

$\sum \lambda_i' = 1$, $\sum \lambda_i'' = 1$, $\lambda_i', \lambda_i'' \geq 0$, d', d'' са θ или са посоки.

$\sum (\lambda\lambda_i' + (1-\lambda)\lambda_i'')x_i + \lambda d' + (1-\lambda)d''$, $\lambda_i \geq 0$,

$\sum \lambda\lambda_i' + \sum (1-\lambda)\lambda_i'' = \lambda.1 + (1-\lambda).1 = 1 \Rightarrow \sum \lambda_i = 1$, $\lambda d' + (1-\lambda)d'' = d$ -посока или е нула $\Rightarrow x = \sum \lambda_i x_i + d$.

2) $w \geq 0$



$x'' = x + \theta'' w \rightarrow x = x'' - \theta'' w = x'' + (-\theta'')w, \theta'' < 0 \Rightarrow -\theta'' > 0$. x'' има поне една положителна компонента по-малко от x. Изпълнява индукционното предположение $\rightarrow x = \sum \lambda_i'' x_i + d'' + (-\theta'')w$, $d'' + (-\theta'')w = d$ - е посока или θ.

3) $w \leq 0$

$x' = x + \theta' w \Leftrightarrow x = x' - \theta' w$, $\theta' > 0 \rightarrow x = \sum \lambda_i' x_i + d' + (-\theta')w$, $d' + (-\theta')w = d$ - е посока или θ.

Нека е дадено пак : $P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ -многостенно множество.

<u>**Следствие1:**</u> Ако $P \neq \varnothing \rightarrow P$ има поне един връх (базисно допустимо решение).

<u>**Следствие2:**</u> Ако $P \neq \varnothing$ е многостен $\rightarrow$ то всяка точка е изпъкнала комбинация на върховете на многостена.

Нека имаме функцията $Z(x) = cx \rightarrow \min$, $Ax = b$, $x \geq 0$.

<u>**Теорема4:**</u> Ако $P \neq \varnothing$ и $\exists$ посока d , тогава функцията $Z(x)$ или достига min в някой от върховете си (което е изпълнено при $cd \geq 0$ за $\forall d$) или е неограничена отдолу,т.е. Z(x)$\rightarrow -\infty$ върху P (условието, за което е cd<0, което означава , че d сключва тъп ъгъл с c).

<u>**Д-во:**</u> 1) Ако cd<0, $x + \theta d \in P$, $\forall \theta \geq 0 \Rightarrow c(\theta) = cx + \theta cd \rightarrow -\infty$

2) Ако $cd \geq 0$ $x = \sum \lambda_i x_i + d$, $cx = \sum \lambda_i c x_i + cd \geq \sum \lambda_i c x_i \geq \min c x_i$.

<u>**Def:**</u> Един връх се нарича изроден, ако някоя от базисните променливи е равна на нула.

<u>**Твърдение:**</u> Броя на различните базисни представяния на всеки връх е : $2^{\kappa+1}.\kappa^{\kappa-2}$.

Нека е дадено следното многостенно множество : $P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ и търсим $cx \rightarrow \min$. Точка x е пресечница на n-брой хиперравнини(x е еднозначно определена). Ако x е изроден връх хиперравнините са повече от n. Матрицата B тогава може да е повече от една, т.е. не е единствено представянето му. Нека $B = \{a_1, ..., a_m\}$, $x = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$. Нека сега си образуваме матрицата $M = \begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}b \\ 0 & E \end{pmatrix}$. $n_j = \begin{pmatrix} -B^{-1}.a_j \\ e_j \end{pmatrix}$ - j-тия стълб на $\begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ E \end{pmatrix}$, като $j = m+1, ..., n$. Всеки такъв вектор е посоката на ребрата, който излизат от x. $An_j = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-1}a_j \\ e_j \end{pmatrix} = 0$. $\begin{matrix} x(\theta) = x + \theta n_j \\ c(\theta) = cx + \theta c n_j \end{matrix}$. $\bar{c}_j = cn_j$ - редуцирана цена на j-тата базисна променлива. $C_B B^{-1} a_j = c_j \rightarrow$ относителна цена на базисна променлива, като тя е равна на 0 за $j = m+1, ..., n$.

Твърдение: Ако y е произволна точка от многостенното множество $P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, а x е връх на многостена, то y може да се представи във вида: $y = x + \sum_{i=m+1}^{n} y_i n_i$.

Д-во: Разглеждаме $M(x-y) = \begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I \end{pmatrix} (y-x) = \begin{pmatrix} Ay_B - Ax_B \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} = A$,

$(y-x) = \begin{pmatrix} y_B - x_B \\ y_N \end{pmatrix}$.

$M^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ 0 & I \end{pmatrix} \rightarrow y = x + M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_N \end{pmatrix} \rightarrow y = x + \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}N \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_N \end{pmatrix} = x + \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} y_N$.

Твърдение: (Достатъчно условие за оптималност) Ако $\bar{c}_j \geq 0$, то x е оптимално решение на задачата на линейното оптимиране. Ако x е неизроден, то условието е и необходимо.

Д-во: y е произволна точка, $y \in P \rightarrow y = x + \sum_{i=m+1}^{n} y_i n_i \rightarrow cy = cx + \sum_{i=m+1}^{n} y_i \bar{c}_i \geq cx \rightarrow x$ е оптималния минимум на задачата : $cx \rightarrow \min$. Ако $x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} > 0$, е оптимално решение на задачата, то $\bar{c}_i \geq 0$.

$$\text{Разглеждаме } x(\theta) = x + \theta n_k = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ . \\ . \\ \bar{x}_m \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -w_1 \\ . \\ . \\ -w_m \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - \theta w_1 \\ . \\ . \\ \bar{x}_m - \theta w_m \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.\ B^{-1} a_k = \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ w_m \end{pmatrix},\ n_k = \begin{pmatrix} -B^{-1} a_k \\ e_k \end{pmatrix}.$$

Ако $w \leq 0 \rightarrow$ от x излиза неотрицателно ребро.............

Следствие1: Ако $\bar{c}_j = 0, i = 1, .., k \rightarrow$ всяка точка $y = x + \sum_{i=1}^{k} y_i n_i$, то y е оптимално решение на задачата.

Следствие2: Ако $\overline{c}_j > 0$ за всяко j (j=m+1,…,n), $\overline{c}_j = c_j - \pi a_j$, $\pi = C_B B^{-1}$, то x е единственото оптимално решение.