11

Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

I. Уравнения с променливи коефициенти.

Разглеждаме линейното хомогенно обикновено диференциално уравнение (ОДУ) от n–ти ред

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 . \tag{1}$$

Коефициентите $a_i(t)$ са дефинирани и непрекъснати за $t \in \mathbb{R}$, а $x = x(t)$ е неизвестната функция.

Ще изследваме решенията на уравнението (1), като го сведем към система от n линейни ОДУ от първи ред. За целта полагаме

$$x_1 := x, \quad x_2 := \dot{x}, \; \ldots, \quad x_n := x^{(n-1)}.$$

Новите променливи удовлетворяват линейната система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\, x_{n+1-k} . \end{array} \right. \tag{2}$$

Ако

$$A(t) \; := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

(над диагонала стоят единици), то системата (2) приема вида

$$\dot{y} = A(t)y , \qquad y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t . \tag{3}$$

Уравнението (1) и системата (2) са еквивалентни: на всяко решение $x = \varphi(t)$ на уравнението (1), съответства решение $y = \psi(t) = \big(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\big)^t$ на системата (3). Обратно, на всяко решение $y = \psi(t) = \big(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)^t$ на системата (3) съответства решение $x = \psi_1(t)$ на уравнението (1).

Теорема 1. *Нека елементите $a_{ij}(t)$ на матрицата $A(t)$ са дефинирани и непрекъснати функции за $t \in \mathbb{R}$. Тогава, за произволни начални условия $(t_0, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, задачата на Коши за системата (3)*

$$\dot{y} = A(t)y, \qquad y(t_0) = \xi \tag{4}$$

има единствено решение $y(t)$, дефинирано за всяко $t \in \mathbb{R}$.

Без доказателство!

Да означим с Y множеството от решенията на системата (3). Основният резултат в теорията на линейните диференциални уравнения е следната теорема.

Теорема 2. *Множеството Y от решенията на (3) е линейно пространство, изоморфно на линейното пространство $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство.

• Y е линейно пространство. Наистина, нека y_1 и y_2 са две решения на системата (3), а c_1 и c_2 са константи. Тогава

$$\tfrac{d}{dt}(c_1y_1 + c_2y_2) \; = \; c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2 \; = \; c_1A(t)y_1 + c_2A(t)y_2 \; = \; A(t)(c_1y_1 + c_2y_2),$$

т.е. $c_1y_1 + c_2y_2$ също е решение.

• Дефинираме изображението $\rho : Y \to \mathbb{R}^n$, съпоставящо на всяко решение $y \in Y$ неговата стойност в момента $t = 0 : \rho y = y(0)$. Всъщност, както се вижда от изложеното по-долу, на решение y можем да съпоставим неговата стойност $y(t_0)$ за произволно $t_0 \in \mathbb{R}$; важното е, че това решение е единствено.

• Ще докажем, че ρ е изоморфизъм на линейни пространства.

– ρ е линейно: ако $y_1, y_2 \in Y$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha y_1 + \beta y_2$ също е от Y:

$$\rho(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)(0) = \alpha y_1(0) + \beta y_1(0) = \alpha\rho y_1 + \beta\rho y_2.$$

– ρ е сюрективно (върху), т.е. образът е цялото пространство $\mathbb{R}^n$: за всяко $\xi \in \mathbb{R}^n$ съществува решение $y \in Y$ с начално условие $y(0) = \xi$, дефинирано за всяко $t \in \mathbb{R}$ (теорема 1).

– ρ е инективно, т.е. $\operatorname{Ker}\rho = \{y(t) \equiv 0\}$: съгласно теорема 1, задачата на Коши (4) с нулево начално условие $y(0) = 0$ притежава единственото решение $y(t) \equiv 0$.

Следователно, ρ е изоморфизъм и Y е крайномерно и изоморфно на $\mathbb{R}^n$. □

Дефиниция. *Фундаментална система от решения на (3)* наричаме който и да е базис $\{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)\}$ на линейното пространство от решения Y.

Такива базиси съществуват – вземаме която и да е линейно независима система от начални условия $Y_k(0) \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots n$. Тогава съответните решения $Y_k(t) := y(t)$ на задачата на Коши (4) $\dot{y} = A(t)y, \; y(0) = Y_k(0)$ са линейно независими и образуват фундаментална система от решения.

II. Уравнения с постоянни коефициенти.

Разглеждаме уравнения от вида

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = 0. \qquad (5)$$

Тук a_i са реални константи, а $x = x(t)$ е неизвестната функция ($t \in \mathbb{R}$). Интересуваме се от реалните решения.

Като частен случай на уравненията с променливи коефициенти знаем, че пространството от решения на (5) е n–мерно. За разлика от тях тук можем изпишем фундаменталната система от решения $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ в явен вид (а следователно и общото решение), стига да можем да решим алгебричното уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{6}$$

наричано още характеристично уравнение на (5).

Фундаментална система решения на (5) намираме по следния алгоритъм.

Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ са корените на характеристичното уравнение. Между тях може да има кратни, а ако λ е комплексен корен, то корен е и комплексно спрегнатият му $\overline{\lambda}$. На тези корени съответстват линейно независими решения на (5). Съответно:

– на прост реален корен λ на (6) съответства частното решение $e^{\lambda t}$.

– на s–кратен реален корен λ съответстват s частни решения

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{s-1}e^{\lambda t},$$

– на двойка комплексно спрегнати прости корени $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ съответства двойка реални решения

$$e^{\alpha t}\cos\beta t\,, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t\,,$$

– ако $\lambda = \alpha + i\beta$ е s–кратен корен, то и $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ е s–кратен корен. На тези $2s$ корена съответстват $2s$ реални решения

$$e^{\alpha t}\cos\beta t\,, \quad te^{\alpha t}\cos\beta t\,, \quad \ldots, \quad t^{s-1}e^{\alpha t}\cos\beta t\,,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t\,, \quad te^{\alpha t}\sin\beta t\,, \quad \ldots, \quad t^{s-1}e^{\alpha t}\sin\beta t\,.$$

Фундаменталната система от решения получаваме като запишем заедно получените общо n (линейно независими) реални решения $\{\phi_1(t), \ldots\} = \{e^{\lambda_1 t}, \ldots\}$.

Общото решение на диференциалното уравнение (5) е

$$x(t) \;=\; C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \ldots + C_n\phi_n(t), \tag{7}$$

където C_i са произволни реални константи.

==

За пълнота привеждаме следното

<u>Доказателство на теорема 1</u>.

(i) Ще докажем, че за всяко $T > t_0$, решението $y(t)$ се продължава и е единствено за $t \in [t_0, T]$. По аналогичен начин следва и съществуване и единственост на $y(t)$ за $t \in [T, t_0]$ при $T < t_0$. Тези две условия означават еднозначна продължимост на $y(t)$ върху цялата права $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Тъй като теоремата за съществуване и единственост (ТСЕ) изисква оценка на дясната част $A(t)y$ в (3), то ще използваме неравенството

$$|Ay|^2 \;=\; \langle Ay\,, Ay\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n\right)^2 \;\le\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\,|y|^2\,,$$

изпълнено за всяка $(n \times n)$–матрица A и за всеки n–мерен вектор y.

(iii) Фиксираме $T > t_0$ и дефинираме константа

$$L \ := \ \sup_{t_0 \le t \le T} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(t) \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Тъй като интервалът $[t_0, T]$ е компактен, а $a_{ij}(t)$ са непрекъснати, то L е коректно определена положителна константа и

$$|A(t)y| \le L\,|y| \qquad \forall t \in [t_0, T] \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

(iv) Ще докажем ТСЕ за (4) за $t \in [t_0, T]$, като на няколко стъпки приложим ТСЕ за подинтервалите

$$\big[t_0, t_0 + \tfrac{1}{2L}\big], \ \big[t_0 + \tfrac{1}{2L}, t_0 + \tfrac{2}{2L}\big], \ \dots, \ \big[t_0 + \tfrac{k}{2L}, T\big]$$

с дължина $1/2L$, като последният интервал има евентуално по–малка дължина. По–конкретно, ще решим $(k+1)$ задачи на Коши

$$(C_l) \qquad\qquad \dot{y} = A(t)y, \qquad y\big(t_0 + \tfrac{l-1}{2L}\big) = \eta_l.$$

където $t_0 + \frac{l-1}{2L} \le t \le t_0 + \frac{l}{2L}$ (или T за последния интервал), а началното условие η_l е определено от $(l-1)$–вото решение на задачата на Коши; $l = 1, \dots, k+1$, а $\eta_1 := \xi$.

(v) За да осъществим l–тото продължение на $y(t)$, прилагаме ТСЕ за конуса

$$K_l := \Big\{(t,y) : t_0 + \tfrac{l-1}{2L} \le t \le t_0 + \tfrac{l}{2L}, \ |y - \eta_l| \le (t - t_0 - \tfrac{l-1}{2L})M_l\Big\}.$$

като константата M_l е решение на уравнението

$$L\Big(|\eta_l| + \tfrac{M_l}{2L}\Big) = M_l, \quad \text{т.е.} \quad M_l := 2L|\eta_l|.$$

От една страна, за $(t, y) \in K_l$ имаме ограничението

$$|A(t)y| \le L\,|y| \ \le \ L|\eta_l| + L\,|y - \eta_l| \ \le \ L|\eta_l| + L\tfrac{M_l}{2L} \ = \ M_l\,.$$

Съгласно (ii), функцията $A(t)y$ е липшицова в K_l:

$$|\,A(t)\,y^* - A(t)\,y^{**}\,| \ = \ |\,A(t)\,(y^* - y^{**})\,| \ \le \ L\,|\,y^* - y^{**}\,|$$

Условията от ТСЕ за (C_l) са изпълнени. Оттук ТСЕ е в сила за интервала $[t_0, T]$, следователно и за целия интервал $t \in \mathbb{R}$.

Теоремата е доказана.