Алгебрична затвореност на полето на комплексните числа. Следствия

Тема 3

1. Предварителни сведения за понятията в заглавието и анотацията.

<u>Дефиниция 1.1</u> (за пръстен)

Нека K е непразно множество, в което са дефинирани следните две операции:

- първата: на всеки два елемента a, b ∈ K съпоставя елемент a + b ∈ K, който се нарича ***сума*** на a и b
- втората: на всеки два елемента a, b ∈ K съпоставя елемент a.b ∈ K, който се нарича ***произведение*** на a и b.

Казваме, че относно тези операций K е **<u>пръстен</u>**, ако са изпълнени следните условия:

(1) (a + b) + c = a + (b + c) - асоциативност на събирането

(2) a + b = b + a - комутативност на събирането

(3) съществува нулев елемент 0 ∈ K такъв, че a + 0 = a, за всяко a ∈ K

(4) За всяко a ∈ K съществува противоположен елемент –a ∈ K такъв, че a + (-a) = 0

(5) (a.b).c = a.(b.c) - асоциативност на умножението

(6) (a + b).c = a.c + b.c - дясна дистрибутивност на умножението

(7) c.(b + c) = c.a + c.b - лява дистрибутивност на умножението

Да споменем, че (1-4), показват, че K е комутативна група относно събирането*[1]

Казваме, че K е пръстен ***с единица***, ако съществува e ∈ K, e ≠ 0 такъв, че a.e = e.a = a за всяко a∈K.

Казваме, че K е ***комутативен*** ако за всяко a, b∈K a.b=b.a

<u>Дефиниция 1.2</u> (за поле)

Комутативният пръстен P с единица ще наричаме ***поле***, ако единицата не съвпада с нулевия елемент на P и всеки ненулев елемент на P е обратим[2].

<u>Дефиниция 1.3</u> (за полином)

Нека K е комутативен пръстен. Полином на променлива x над пръстена K, наричаме израз от вида: $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, където $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ и се наричат коефициенти на f(x).

Полагаме $a_0x^0 = a_0$ и $a_1x^1 = a_1x$. Така, че всеки полином ще има вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ Ако всички коефициенти на f(x) са равни нула, f(x) се нарича нулев **<u>полином</u>**. Ако f(x) е ненулев, тогава най-голямото естествено число n, за което коефициента пред x^n е различен от нула се нарича степен на f(x) и се бележи ст(f(x)) или deg(f(x)). Множеството на всички полиноми над пръстена K се бележи с K[x]. То също е пръстен и с единица тогава и само тогава, когато самият K е пръстен с единица. В този случей единицата на K[x] е полиномът от нулева степен с единствен коефициент единицата в K.

<u>Дефиниция 1.4</u> (за алгебрически затворено поле)

Казваме, че *полето* F е ***алгебрично затворено***, ако всеки неконстантен полином от F[x] се разлага на линейни множители над F[3].

---

[1] Виж дефиницията на група например от [1,2]

[2] т.е. P е поле, ако мултипликативната му група P* съвпада с подмножеството P\{0} от ненулевите елементи на P

[3] За целите на темата, интуитивната представа за разлагане на полином е достатъчна. За прецизация [3].

2. Основна теорема на алгебрата. Затвореност на полето на комплексните числа като следствие.

***Теорема 2.1** Основна теорема на алгебрата(Теорема на Даламбер):*

Всеки неконстантен полином $f(x) \in C[x]$ има комплексен корен.

Ще са ни необходими следните две леми.

Лема 1:

Нека $f(x) \in R[x]$ и ст. $f(x)$ е нечетно число. Тогава $f(x)$ има реален корен.

Доказателство :

Нека $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$

ст. $f(x) = n$, n – нечетно число

$h(x) = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_0}{a_n} + \ldots + x^n\right)$. $f(x)$ има реален корен тогава и само тогава, когато $h(x)$ има реален корен. Следователно достатъчно е да докажем, че $h(x)$ има реален корен. Тъй-като ст.$(h(x))$ е нечетна имаме

$$\lim_{x \to -\infty}(h(x)) = -\infty \text{ и } \lim_{x \to +\infty}(h(x)) = +\infty.$$

Следователно съществува $x_1 \in R$ такова, че $h(x_1) < 0$ и съществува $x_2 \in R$ такова, че $h(x_2) < 0$. тъй като $h(x)$ е непрекъсната, съществува $x_0 \in [x_1, x_2]$ такова, че $h(x_0) = 0$, т.е. x_0 е корен на $h(x)$.

Лема 2:

Нека $a + bx + cx^2 \in C[x]$, $a \neq 0$. Тогава $a + bx + cx^2$ има комплексен корен.

Доказателство:

Корените на $a + bx + cx^2 = 0$ са $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, които в общия случей са комплексни.

Преди доказателството на теоремата на Даламбер ще докажем следното по-слабо твърдение:

Теорема 2.2:

Нека $f(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти. Тогава $f(x)$ има комплексен корен.

Д-во:

Нека $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$. Нека $n = 2^s.k$, k – нечетно число.

Доказателството ще извършим по индукция относно s.

1.База $s = 0$.

В тази ситуация n е нечетно число и от **Лема 1** следва, че $f(x)$ има даже реален корен.

2.Нека $s \geq 1$. Разглеждаме разширение E на полето на комплексните числа C над, което $f(x)$ се разлага на линейни множители.

$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)\ldots(x - \alpha_n)$ където $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$ и са корени на $f(x)$ в E.

Разглеждаме

$$H(x; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1\le i<j\le n} [x - (x_i + x_j + cx_i x_j)]$$

където c е произволно реално число. След като развием дясната част и направим съответните опростявания ще получим полином на променливата x, коефициентите на който са от пръстена на полиномите $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Разглеждаме транспозицията $x_i \leftrightarrow x_j$ при тази транспозиция имаме

$$x_i + x_j + cx_i x_j \leftrightarrow x_j + x_i + cx_j x_i$$

$$x_i + x_k + cx_i x_k \leftrightarrow x_j + x_k + cx_j x_k,\ k \neq j$$

Множителите, в които не участват x_i и x_j не се променят. Следователно произволна при транспозиция на променливите множителите на $H(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$ се разместват, но тяхното произведение не се променя. Следователно при всяко разместване на променливите коефициентите на $H(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$ не се променят. Това означава, че коефициентите пред степените на x са симетрични полиноми от пръстена $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Съгласно *основното следствите на теоремата за симетрични полиноми[2 – тема за Симетрични полиноми]* коефициентите на $h(x) = H(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ще бъдат реални числа, т.е.

$$(*) H(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod\nolimits_{1\le i<j\le n} [x - (\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j)] \epsilon R[x]$$

Имаме ст.$h(x) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^s k(2^s k-1)}{2} = 2^{s-1}k(2^s k - 1) = 2^{s-1}k'$, където k' е нечетно число.

И така $h(x) \in R[x]$ и ст.$h(x) = 2^{s-1}k'$, където k' е нечетно число. Съгласно индуктивната хипотеза $h(x)$ има комплексен корен $\beta \in C$. Заместваме в (*) и получаваме

$$h(\beta; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{1\le i<j\le n} [\beta - (\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j)] = 0$$

Тъй-като в E няма делители на нулата, имаме $\beta = \alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j$ за някои индекси i и j. И така за всяко реално число $c \in R$ съществуват индекси i и j такива, че $\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j \in C$. Понеже двойките индекси (i, j), където $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le n$ са краен брой, а реалните числа са безброй много съществуват реални числа $c_i \neq c_j$, за които при едни и същи индекси i и j имаме:

$$\alpha_i + \alpha_j + c_1\alpha_i\alpha_j = z_1 \epsilon C$$

$$\alpha_i + \alpha_j + c_2\alpha_i\alpha_j = z_2 \epsilon C$$

като извадим тези равенства получаваме

$$(c_1 - c_2)\alpha_i\alpha_j = z_1 - z_2 \quad \text{и} \quad \alpha_i\alpha_j = \frac{z_1 - z_2}{c_1 - c_2}$$

Поради това $\alpha_i + \alpha_j = z_1 - c_1\alpha_i\alpha_j \epsilon C$. Получихме, че сумата и прозведението на a_i и a_j са комплексни числа. Разглеждаме

$$(**)\ t(x) = (x - \alpha_i)(x - \alpha_j) = x^2 - (\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i\alpha_j$$

От Лема 2 имаме, че $t(x)$ има комплексен корен γ. Заместваме в (**) и получаваме

$(\gamma - \alpha_i)(\gamma - \alpha_j) = 0$

Тъй като в F няма делители на нулата имаме, че $\gamma = \alpha_i$ или $\gamma = \alpha_i$. Следователно α_i или α_i е комплексно число. Теорема 2.2 е доказана.

<u>Д-во на Теоремата на Даламбер(Т. 2.1):</u>

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in C[x]$, $a_n \neq 0$.

Ако коефициентите са реални Теоремата на Даламбер следва от Теорема 1.

Ще предполагаме, че не всичките коефициенти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са реални. Разглеждаме полинома $f_1(x) = \bar{a_0} + \bar{a_1}x + \bar{a_2}x^2 + \ldots + \bar{a_n}x^n$, чийто коефициенти са комплексно спрегнатите на коефициентите на f. Да разгледаме полинома h(x) от степен 2n, който е равен на произведението на f и f_1. $h(x) = f(x)f_1(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{2n}x^{2n}$.

Тъй-като $b_k = \sum_{i+j=k} a_i\bar{a_j}$, $\bar{b_k} = \sum_{i+j=k} \bar{a_i}a_j$. Следователно $b_k = \bar{b_k}$, за всяко к = 0, . . , 2n, т.е. $h(x) \in R[x]$. От Теорема 2.1 имаме, че h(x) има комплексен корен $\alpha \in C$. Следователно

$$h(\alpha) = f(\alpha)f_1(\alpha)$$

Тъй като в полето С няма делители на нулата, или $f(\alpha) = 0$, или $f_1(\alpha) = 0$.

Ако $f(\alpha) = 0$, тогава f(x) има комплексен корен α и теоремата е доказана.

Нека $f_1(\alpha) = 0$ т.е. $\bar{a_0} + \alpha\bar{a_1} + \alpha^2\bar{a_2} + \ldots + \alpha^n\bar{a_n} = 0$. Тогава $\bar{f_1(\alpha)} = 0$, т.е. $\bar{\bar{a_0}} + \bar{\alpha}\bar{\bar{a_1}} + \alpha^2\bar{\bar{a_2}} + \ldots + \bar{\alpha}^n\bar{\bar{a_n}} = a_0 + \bar{\alpha}a_1 + \bar{\alpha}^2a_2 + \ldots + \bar{\alpha}^na_n = 0$ т.е. $f(\bar{\alpha}) = 0$ или комплексното число $\bar{\alpha}$ е корен на f(x).

<u>Теорема 2.3</u> Полето С на комплексните числа е алгебрически затворено.

Нека $f(x) \in C[x]$ е неконстантен полином.

Индукция по степента на полинома - n.

- Ако n=1 f(x) е линеен полином и следователно теоремата е доказана.
- Нека за n > 1 е вярно твърдението.
- Нека ст.(f)=n+1. Според теоремата на Даламбер f има поне един корен α , т.е.

$$f(x) = (x - \alpha)g(x),$$

Където ст.(g) = n. Прилагаме индукционната стъпка за g и теоремата е доказана.

<u>Теорема 2.4</u> Над полето на реалните числа неразложими са полиномите от първа степен и тези полиноми над R от втора степен, които нямат реални корени. Други неразложими полиноми в R[x] няма.

<u>Доказателство:</u>

1) Нека f(x) има реални коефициенти и ст.f(x) = 2.

Ако f(x) е разложим над R, тогава корените на f(x) са реални.

Ако f(x) има реален корен α, тогава f(x) се разлага във вида:

$f(x) = (x - \alpha)g(x)$, където ст.g(x) = 1. Следователно f(x) е разложим над R.

Поради това един полином с реални коефициенти от втора степен е разложим над R *тогава и само тогава*, когато има реални корени. Следователно един полином от втора

16

степен е неразложим над полето на реалните числа тогава и само тогава, когато няма реални корени. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}))$

2) Нека ст.f(x) ≥ 3 и f(x) ϵ R [x]. Трябва да докажем, че f(x) е разложим над R.

2.1) Ако f(x) има реален корен α, тогава f(x) се разлага във вида:

$f(x) = (x - \alpha)g(x)$ и $(x - \alpha), g(x) \epsilon R[x]$

където ст.g(x) ≥ 2. Следователно f(x) е разложим над R.

2.2) Нека f(x) няма реални корени. Тогава от теоремата на Даламбер следва, че f(x) има комплексен корен, който не е реален, т.е. $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Следователно в каноничното разлагане на f(x) ще участва $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$, т.е.

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})g(x) = (x^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha})g(x)$$

Тъй като $x^2 - (\alpha + \bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}$ ϵ R [x] следва, че g(x) ϵ R [x]. От ст.f(x) ≥ 3, следва ст.g(x) ≥ 1. Следователно f(x) е разложим над R.

3. Формули на Виет

Нека F е поле и $f \epsilon F$. Нека E е разширение на полето F, над което f се разлага на линейни множители. Имаме, че

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = a_n(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n)$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \epsilon E$ и са корените на f над E. Ако разкрием скобите отдясно получаваме следните връзки между корените на f $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и коефициентите му $a_0, a_1, \ldots, a_n$, които се наричат **формули на Виет**

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{1 \le i < j \le n} \beta_i\beta_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

...

$$\prod_{1 \le i_1 < i_2 < .. < i_k \le n} \beta_{i_1}\beta_{i_2}..\beta_{i_k} = \frac{(-1)^k a_{n-k}}{a_n}$$

...

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

Литература:

[1]Записки по алгебра : Групи, пръстени, полиноми.
[2] http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/va1notes.shtml
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Algebra

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.