# <u>Въпрос 6</u>
# Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на напрекъснати функции. Теорема на Нютон-Лайбниц.

## Определение на интеграл. Интегруемост.

**Определение 1.** *Ще казваме, че е дадено едно разбиване на* **крайния** *интервал* $[a,b]$, *ако са дадени точките* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, *за които* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. *Такова разбиване означаваме с* $\{x_k\}$.*Отсега нататък когато работим с интервала* $[a,b]$, *ще имаме в предвид крайния интервал* $[a,b]$.

**Определение 2.** *Нека с* $\Delta x_k$ *означим разликата* $x_k - x_{k-1}$.*Числото* $d = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$ *наричаме диаметър на разбиване.*

**Определение 3.** *Нека е даден интервалът* $[a,b]$, *негово разбиване* $\{x_k\}$ *и функция* $f(x)$ *дефинирана в* $[a,b]$.*Тогава числото*

$$\sigma = \sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \text{ където } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

*наричаме Риманова сума(Интегрална сума).*

**Определение 4.** *Числото* $I$ *се нарича граница на интегралните суми* $\sigma(x_k, \xi_k)$, *когато диаметърът* $d$ *на делението* $\{x_k\}$ *клони към нула и ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $\delta > 0$, *зависещо от* $\varepsilon$, *че при* $d < \delta$ *и всеки избор на точките* $\xi_k$ *да е в сила неравенството* $|I - \sigma| < \varepsilon$.

За означение на границата на интегралните суми се използва символът

$$I = \lim_{d\to 0} \sigma(x_k, \xi_k)$$

**Определение 5.** *Функцията* $f(x)$ *се нарича интегруема по Риман в интервала* $[a,b]$, *ако за тази функция в този интервал съществува границата на интегралните ѝ суми* $\sigma(x_k, \xi_k)$, *когато диаметърът* $d$ *на делението* $\{x_k\}$ *клони към нула.*

Числото $I$ се нарича *определен интеграл на Риман* на функцията $f(x)$ в граници от $a$ до $b$ и се означава с:

$$\int_a^b f(x)dx$$

## Неинтегруемост по Риман
## на неограничените в интервала $[a,b]$ функции.

Нека $f(x)$ е неограничена в интервала $[a,b]$.Ще покажем, че за всяко разбиване $\{x_k\}$ интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ може да стане по абсолютна стойност произволно голяма, в зависимост от избора на точките $\xi_k$.

И така, нека е дадено $\{x_k\}$ - разбиване на интервала $[a,b]$ и функция $f(x)$ - неограничена в $[a,b]$.Функцията $f(x)$ ще бъде неограничена поне в един подинтервал на разбиването.Без да нарушаваме общноста, ще приемем, че този подинтервал е $[x_0,x_1]$. Точките $\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ избираме произволно в останалите интервали и ги фиксираме.Означаваме с $\sigma_1(x_k,\xi_k)$ величината:

$$\sigma_1(x_k,\xi_k)=f(\xi_2)\Delta x_2+f(\xi_3)\Delta x_3+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n$$

Разглеждаме $f(x)$ само в интервала $[x_0,x_1]$.Тъй като тук тя е неограничена за всяко отнапред избрано $M$ можем да намерим $\xi_1$ от този интервал за което,

$$|f(\xi_1)|\geq\frac{(|\sigma_1|+M)}{\Delta x_1}$$

От тук получаваме, че $|f(\xi_1)|\Delta x_1\geq(|\sigma_1|+M)$ и затова:

$$|\sigma(x_k,\xi_k)|=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|=|f(\xi_1)\Delta x_1+\sigma_1|\geq|f(\xi_1)|\Delta x_1-|\sigma_1|\geq M$$

Нека сега си изберем редица от числа $\{M_n\}$ такива, че $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=+\infty$, а също и редица от разбивания за които $d\to 0$.По посоченият по-горе начин строим редицата от интегралните суми $\sigma_n$ удоволетворяващи условието $|\sigma_n|\geq M_n$.Тази редица е разходяща.

И така показахме, че ***всички интегруеми по Риман функции са ограничени.*** Обратното, обаче, не е вярно, т.е. не всички ограничени функции са интегруеми по Риман.Например функцията на Дирихле, стойностите на която в рационалните точки са равни на нула, а в ирационалните - на единица, не е интегруема по Риман.

## Голяма и малка сума на Дарбу и техните свойства.

Нека $f(x)$ е ограничена функция в интервала $[a,b]$, и е дадено негово разбиване $\{x_k\}$.Понеже $f(x)$ е ограничена в интервала $[a,b]$, то тя е ограничена във всеки подинтервал на $[a,b]$.Тя ще има точна долна граница $m_k$ и точна горна граница $M_k$ в интервала $[x_{k-1},x_k]$ т.е.

$$m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

$$M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

**Определение 6.** *Сумите*

$$S=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots M_n\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$$

$$s=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\ldots m_n\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$$

*се наричат съответно голяма и малка сума на Дарбу на* $f(x)$ *за дадено разбиване* $\{x_k\}$ *на интервала* $[a,b]$.

## Основни свойства на големите и малките суми.

**Лема 1.** *При раздробяване на интервала (т.е. при добавяне на нови точки в разбиването на интервала) големите суми на Дарбу не нарастват, а малките – не намаляват.*

**Доказателсво.** Нека $\{x_k\}$ е дадено разбиване, а разбиването $\{x'_k\}$ се получава от него с добавяне на само една нова точка $\bar{x}$ .Да предположим, че $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогава в $S$ събираемото $M_k \Delta x_k$ се заменя със $M'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \bar{x})$, където

$$M'_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\}$$

$$M''_k = \sup\{f(x) : x \in [\bar{x}, x_k]\}$$

Понеже, $M'_k \le M_k, M''_k \le M_k$ получаваме

$$M'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \bar{x}) \le M_k((\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})) = M_k \Delta x_k$$

Тъй като всички други събираеми в израза за голямата сума са същите, то доказахме, че при добавяне на една нова точка голямата сума може само да намалява или да остане същата, но не и да нараства.Случаят когато точките са повече от една се свежда до разглежданият.

Аналогични изводи се правят и за малките суми на Дарбу.

**Лема 2.** *Нека $\sigma(x_k, \xi_k)$ е интегралната сума, отговаряща на разбиването $\{x_k\}$. Тогава при всеки избор на точките $\xi_k$ е в сила*

$$s \le \sigma(x_k, \xi_k) \le S,$$

*където $s$ и $S$ са съответно малката и голямата сума за това разбиване.*

**Лема 3.** *Нека $\{x_k\}$ е произволно фиксирано разбиване на $[a,b]$, а $\varepsilon$ е произволно фиксирано положително число.Тогава може да се изберат точки*

- *$\xi_k$ такива, че $0 \le S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon$.*
- *$\eta_k$ такива, че $0 \le \sigma(x_k, \eta_k) - s < \varepsilon$.*

**Определение 7.** *Горен интеграл на Дарбу от функцията $f(x)$ се нарича точната долна граница $I^*$ на множеството от големите суми на Дарбу $\{S\}$ за функцията $f(x)$ и за всевъзможните разбивания на интервала $[a,b]$.*

**Определение 8.** *Долен интеграл на Дарбу от функцията $f(x)$ се нарича точната горна граница $I_*$ на множеството от малките суми на Дарбу $\{s\}$ за функцията $f(x)$ и за всевъзможните разбивания на интервала $[a,b]$.*

Горните определения са законни, тъй като множеството на големите суми е ограничено отдолу, а множеството на малките суми – отгоре, за всяко разбиване на $[a,b]$ и за всяка ограничена функция $f(x)$ .

**Основна лема на Дарбу.** *Горният интеграл на Дарбу $I^*$ е равен на границата на големите суми $S$, когато диаметърът на разбиванията клони към нула, т.е.* $\lim\limits_{d\to 0} S = I^*$. *Аналогично* $\lim\limits_{d\to 0} s = I_*$.

## Теореми за необходими и достатъчни условия за интегруемост на функции.

**Помощна теорема.** *Ограничената функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$ е интегруема по Риман в този интервал, тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството* $I^* = I_*$.

**Доказателство. Необходимост.** Нека $f(x)$ е интегруема по Риман в интервала $[a,b]$.Тогава от определението за интегруемост по Риман следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че при $d < \delta$ и всеки избор на точките $\xi_k$ е изпълнено неравенството

$$\left|I - \sigma\left(x_k, \xi_k\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Според лема 3 може да изберем точки $\xi_k'$ и $\xi_k''$, такива, че

$$S - \sigma(x_k, \xi_k') \le \frac{\varepsilon}{4}, \sigma(x_k, \xi_k'') - s \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

За даденото деление, обаче, са изпълнени и неравенствата

$$\left|I - \sigma(x_k, \xi_k')\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \left|I - \sigma(x_k, \xi_k'')\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Остава да отбележим, че

$$S - s = \left(S - \sigma(x_k, \xi_k')\right) + \left(\sigma(x_k, \xi_k') - I\right) + \left(I - \sigma(x_k, \xi_k'')\right) + \left(\sigma(x_k, \xi_k'') - s\right)$$

Понеже, модулът на сума не надминава сумата от модулите на събираемите, то получаваме, че $S - s < \varepsilon$.Тъй като за всяко разбиване е изпълнено неравенството $s \le I_* \le I^* \le S$ и понеже $\varepsilon$ е произволно избрано, следва, че $I^* = I_*$.

**Достатъчност.** Нека $I^* = I_* = A$.Според основната лема на Дарбу $\lim\limits_{d\to 0} S = I^*$, $\lim\limits_{d\to 0} s = I_*$.Затова, за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число $\delta > 0$, че при всяко деление с диаметър $d < \delta$ да са изпълнени неравенствата

$$I_* - s = A - s < \varepsilon$$

$$S - I^* = S - A < \varepsilon$$

От лема 2 имаме, че $s \le \sigma(x_k, \xi_k) \le S$, следователно

$$A - \varepsilon < s \le \sigma(x_k, \xi_k) \le S < A + \varepsilon$$

От тук получаваме, че $\left|A - \sigma(x_k, \xi_k)\right| < \varepsilon$ ( за всяко разбиване с диаметър $d < \delta$ ). Следователно $A = \lim\limits_{d\to 0} \sigma(x_k, \xi_k)$ т.е. $f(x)$ е интегруема.

**Основна Теорема.** *Ограничената функция* $f(x)$ *в интервала* $[a,b]$ *е интегруема по Риман в този интервал, тогава и само тогава, когато за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува разбиване* $\{x_k\}$ *за което* $S - s < \varepsilon$.

**Доказателство. Необходимост.** Нека $f(x)$ е интегруема по Риман в интервала $[a,b]$.При доказателството на необходимоста в помощната теорема показахме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че за всяко разбиване на интервала $[a,b]$ с диаметър $d < \delta$ е изпълнено неравенството $S - s < \varepsilon$.Необходимоста е доказана.

**Достатъчност.** Дадено е, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разбиване $\{x_k\}$ на интервала $[a,b]$ , при което за големите и малки суми е изпълнено $S - s < \varepsilon$.Тогава, тъй като

$$s \le I_* \le I^* \le S,$$

то $I^* - I_* < \varepsilon$.От това неравенсво и произволният избор на $\varepsilon$ заключаваме, че $I^* = I_*$, а от помощната теорема получаваме, че $f(x)$ е интегруема.

Теоремата е доказана.

**Теорема.** *Всяка непрекъсната в интервала* $[a,b]$ *функция* $f(x)$ *е интегруема по Риман в този интервал.*

**Доказателство.** Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$.Избираме произволно $\varepsilon > 0$.Понеже функцията е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$, то според теоремата на Кантор, тя е равномерно непрекъсната. Затова, за избраното $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че ако $\xi', \xi''$ са произволни точки от интервала $[a,b]$, за които $|\xi' - \xi''| < \delta$, то $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon(b-a)$. Оттук следва, че разликата между точните горна и долна граници на $f(x)$ в произволен подинтервал с дължина по-малка от $\delta$, е по-малка от числото $\varepsilon(b-a)$. Избираме разбиването $\{x_k\}$ на интервала $[a,b]$ с диаметър $d < \delta$.Нека

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Съгласно дефиницията за голяма и малка сума

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

Като използваме в това съотношение установеното неравенсво $(M_k - m_k) < \varepsilon(b-a)$, ще получим за избраното деление

$$S - s < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$$

От основната теорема заключаваме, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$.

Теоремата е доказана.

# Свойства на определения интеграл.
# Оценки за интегралите.

## 1. Свойства на интеграла.

*А) Нека* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са интегруеми в интервала* $[a,b]$*.Тогава функцията* $f(x)\pm g(x)$ *е също интегруема в* $[a,b]$ *и*

$$\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

*Б) Ако* $f(x)$ *е интегруема в интервала* $[a,b]$*, то функцията* $Cf(x), C=const$ *е също интегруема и*

$$\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b g(x)dx$$

*(Следствие: линейна комбинация на интегруеми функции е интегруема функция.)*

*В) Нека* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са интегруеми в интервала* $[a,b]$*.Тогава функцията* $f(x)g(x)$ *е също интегруема в* $[a,b]$.

*Г) Нека* $f(x)$ *е интегруема в интервала* $[a,b]$*.Тогава функцията* $f(x)$ *е интегруема във всеки затворен подинтервал на* $[a,b]$.

*Д) Ако* $f(x)$ *е интегруема в интервала* $[a,c]$ *и* $[c,b]$*, то* $f(x)$ *е интегруема в* $[a,b]$ *и*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

## 2. Оценки за интегралите.

*А) Ако функцията* $f(x)$ *е интегруема в* $[a,b]$ *и* $f(x)\geq 0$ *за всички точки от интервала, то интегралът от функцията* $f(x)$ *в този интервал е неотрицателен.*

*Б) Интегриране на неравенства. Ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са интегруеми в интервала* $[a,b]$*, и* $f(x)\leq g(x)$ *за всяко* $x\in[a,b]$ *то* $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

## Теорема за средните стойности.
## Теорема на Нютон-Лайбниц.

**Теорема за средните стойности.** *Ако функцията* $f(x)$ *е непрекъсната в крайния и затворен интервал* $[a,b]$, *то съществува точка* $\xi$ *за която е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

**Доказателство.** Тъй като всяка непрекъсната функция в *краен и затворен* интервал е ограничена, то нека да означим с $m$ и $M$ съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[a,b]$.Тогава от неравенствата

$$m \le f(x) \le M$$

и от свойството за интегриране на неравенства следва, че

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

*Ще покажем, че* $\int_a^b C dx = C(b-a), C = const$ *.При всяко разбиване* $\{x_k\}$ *и при всеки избор на точките* $\xi_k$ *, имаме* $f(\xi_k) = C$ *.Следователно*

$$\sigma(x_k,\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = C(b-a)$$

*Затова*

$$I = \int_a^b C dx = \lim_{d\to 0}\sigma(x_k,\xi_k) = \lim_{d\to 0} C(b-a) = C(b-a)$$

Тогава неравенството приема вида

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

Поради непрекъснатостта на $f(x)$ , то от теоремата на Вайерщрас[1] следва, че съществуват точки $x_1, x_2$ от интервала $[a,b]$ за които $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ .Ако за точките $x_1, x_2$ имаме, че $x_1 = x_2$, то получаваме, че $m = M$ .Следователно функцията е константа в интервала и тогава теоремата е очевидна.

---

[1] *Теорема на Вайерщрас. Ако функцията* $f(x)$ *е непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя притежава една най-голяма и една най-малка стойност.*

Ще разгледаме случая, когато $x_1 \neq x_2$.Точките $x_1, x_2$ определят един интервал.По отнощение на този интервал ще приложим към функцията $f(x)$ теоремата на Болцано[2].И така, имаме, че

$$f(x_1) < \eta < f(x_2), \text{ където } \eta = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}, f(x_1) \neq f(x_2)$$

Тогава съществува $\xi$ от интервала $(x_1, x_2)$, за което $f(\xi) = \eta$ ,т.е.

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

И така, стигнахме до любимото ми изречение в процеса на доказателството на теореми, а именно: С това теоремата е доказана☺.

**Теорема на Нютон-Лайбниц.** *Ако функцията е непрекъсната в интервала $[a,b]$, то функцията*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

*е диференцуема в този интервал и за всяко $x_0 \in [a,b]$ е изпълнено равенството*

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

*т.е. $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интервала $[a,b]$.*

**Доказателсво.** Нека $x_0$ е произволна точка от интервала $[a,b]$.Ако $x_0 + h$ е друга точка от този интервал, то ще имаме

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int\limits_a^{x_o+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x_o} f(t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int\limits_a^{x_o} f(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x_o} f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

За последният интеграл прилагаме теоремата за средните стойности,т.е. съществува точка $\xi \in [x_0, x_0+h]$ такава, че

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = hf(\xi) \Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Следователно

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(\xi)$$

Ако оставим $h$ да клони към нула, то точката $\xi$ ще клони към $x_0$.Като вземем предвид и непрекъснатостта на $f(x)$ в точката $x_0$, ще получим

---

[2] *Теорема на Болцано. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в краен и затворен интервал $[a,b]$, и $f(a) \neq f(b)$, а $\lambda$ е число намиращо се между $f(a)$ и $f(b)$, то съществува поне една точка $\alpha$ в интервала $(a,b)$, за която $f(\alpha) = \lambda$*

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x_0)$$

Понеже $x_0$ беше произволна точка от интервала $[a,b]$, то теоремата е доказана.

Теоремата на Нютон-Лайбниц ни дава един прост начин за пресмятане на определени интеграли от непрекъснати функции.От равенството

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

получаваме, че $F(b) = \int_a^b f(t)dt$.Сега остава да пресметнем $F(b)$. $F(x)$, както видяхме, е една примитивна на $f(x)$.Но $f(x)$ има безброй много примитивни, всяка от които се различава от $F(x)$ с константа. Нека $\Phi(x)$ е примитивна на $f(x)$. Тогава

$$F(x) - \Phi(x) = C$$

Нека вземем $x = a$. Тогава $F(a) - \Phi(a) = C$, но понеже

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0,$$

получичаваме, че $C = -\Phi(a)$.Следователно

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$$

Сега при $x = b$ стигаме до

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

или окончателно

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Ще формулираме тази формула във вид на теорема.

**Основна теорема на интегралното смятане.** *За да се пресметне определеният интеграл от непрекъснатата функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$, трябва да се пресметнат стойностите на произволна нейна примитивна в точката b и в точката a и от първата да се извади втората.*