16. Случайни величини с непрекъснати разпределения. Задачи, в които възникват моменти - математическо очакване и дисперсия.

Непрекъснатото разпределение на сл. в. определяме с вероятностна плътност. Сл. в. X има възможност да приема стойности все „по-често" в/у реалната права.

Нека апроксимираме (заменим) сумата от вероятностите в малък интервал Δx съдържащ x и ширина Δ с помощта на ф-я:

$$f(x) = \frac{P(X \in \Delta x)}{\Delta} \quad \text{или} \quad P(X \in \Delta x) = f(x).\Delta$$

Естествени с-ва на тази ф-я (ако $\exists$) са:

- $f(x) \geq 0$ за $\forall x$ от реалната права;
- $f(x)$ е интегруема ф-я в/у реалната права $(-\infty; +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Първото следва от това, че вероятността винаги е неотрицателна и $\Delta > 0$.

Нека разбием правата на изброимо много интервали Δx с еднакви ширини Δ от опр на $f(x) \Rightarrow$ равен

$$\sum_{\Delta x} P(X \in \Delta x) = \sum_{\Delta x} f(x).\Delta$$

Безкрайната сума отляво е сходяща и е равна $P(\Omega) = 1$ а сумата ~~отляво~~ в дясно е приближение на определения интеграл от $f(x)$ в/у интервала $(-\infty; +\infty)$

Разпределението на $\forall$ сл в X (в зададено вероятностно пространство (Ω, A, P) се опр. с ф-ята на разпределение $F_X(x) = P(X \leq x)$

Сл. в. X е с непрекъснато разпределение само ф-ята ѝ на разпределение $F_X(x)$ е непрекъсната и абсолютно непрекъсната, ако $\exists$ ф-я $f(x)$ такава, че

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Ф-ята $f(x)$ наричаме плътност на разпределението на X и ако диференцираме двете страни на равенството по x я получаваме в явен вид.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

* Независимост на непрекъснати разпределения.

Две случайни величини (X, Y) със съвместна ф-я на разпределение $F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$ са със съвместно непрекъснато разпределение, ако $\exists$ съвместната плътност $f(u,v)$ и е в сила представянето:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dv\right] du.$$

Двете маргинални разпределения също са непрекъснати и плътностите им се получават с интегриране върху правата:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv \quad и \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)du$$

Условието за независимост на двете сл. в. (X, Y) изразено чрез съвместната и маргиналните ~~разпр~~ функции на разпределение

$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ при непрекъснати разпределения е еквивалентно на $f(x,v) = f_X(x) f_Y(y)$

- моменти.

Математическото очакване на сл. в. с непрекъснато разпределение:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$, който е добре определен ако интеграла е абсолютно сходящ.

Забележка: Ако е разходящ в/у $[0, +\infty)$ и сходящ в/у $[-\infty, 0]$ можем да приемем че очакването е $+\infty$ и обратно, ако е сходящ върху $[0, +\infty)$ и разходящ в/у $[-\infty, 0]$ можем да приемем, че очакването е $-\infty$.

* Равномерно разпределение.

Сл. в. с равномерно разпределение е модел на наблюдения за които е известно единствено, че са от даден интервал $[a, b]$. Стандартното равномерно разпределение е в/у интервала $[0, 1]$. Озн. с $X \sim U(0,1)$; сл. в X е равномерно разпределена в/у ~~...~~ единичния интервал. Сл. в с равномерно разпределение в интервала $[a, b]$ ще получим с очевидна линейна трансформация $Y = a + X(b-a)$, предполагаме, че $a < b$ и означаване $Y \sim U(a, b)$

Стандартното равномерно разпределение се получава и в резултат на смяната трансформация: ако сл. в X има непрекъсната ф-я на разпределение $F(x)$, то $Y = F(X) \sim U(0,1)$ [Този факт позволява да се генерират редици от случайни величини с дадено разпределение с помощта на генератор на случайни (или псевдо-случайни) редици от равномерно разпределени случайни величини.

* Функция на разпределение на стандартно равномерно разпределение е диагоналът на единичния квадрат, с хоризонтални продължения извън интервала [0,1]

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Плътността на равномерното разпределение в интервал [0,1] сл. в е константа 1 в интервала [0,1] и 0 извън него.

Плътността на разпределение $Y \sim U(a,b)$ е равна на $\frac{1}{b-a}$ в интервала $[a,b]$ и 0 извън него.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, a] \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x \in (b, \infty) \end{cases}$$

Моменти. Математическото очакване на сл. в X със стандартно равномерно разпределение получаваме директно

$$EX = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

. Ант. получаваме, че втория момент е

$$EX^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

и за дисперсията на X получаваме, че:

$$Var\,X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Сл. в. $Y \sim U(a,b)$ получаваме ~~ЕЗ~~ с трансформация $Y = a + X(b-a)$. Математическо очакване

$$EY = E(a + X(b-a)) = a + (b-a)EX = a + (b-a)\frac{1}{2} =$$

$$= a + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$ и

$$\mathrm{Var}\,Y = \mathrm{Var}(a + X(b-a)) = \cancel{a +} (b-a)^2 \mathrm{Var}\,X = \frac{(b-a)^2}{12} ?$$

* Експоненциално разпределение.

Разпределението е еднопараметрично и е върху $(0, +\infty)$

Сл. в X е експоненциално разпределение с параметър $\lambda > 0$

озн. с $X \sim Exp(\lambda)$.

* Задачи и приложение. Сл. в с експоненциално разпределение е модел на сл. време T на настъпване на очаквано (или не) събитие. Вероятността за настъпване ~~на~~ или точно събития за единица време е $P(X=0) = e^{-\lambda}$. Ако озн. с T момента на настъпване на очакваното събитие, то събитието $\{X=0\}$ може да се запише и като $\{T>1\}$. При t последователни и независими опита настъпването на събитието може да се запише като $\{T>t\}$ и вероятността му е

$$P(\{T>t\}) = (e^{-\lambda})^t = e^{-\lambda t}$$

! Съществено по допускане тук е в независимостта на събитията „ненастъпване" в съседни непресичащи се интервали, което се изразява с равенството

$$P(\{T > t+s\}) = P(\{T>t\}) \cdot P(\{T>s\})$$

записано във вида

$$\frac{P(\{T>t+s\})}{P(\{T>t\})} = P(\{T>t+s\} \mid \{T>t\}) = P(\{T>s\}),$$

Последното равенство може да се запише като функционално у-е

$$g(t+s) = g(t).g(s)$$ с известно общо решение

$g(x) = e^{ax}$ За случая $g(x) = 1 - F(x)$ може да опр. и стойността на параметъра $a = -\lambda$

<u>Функция на разпределение</u> на експоненциалното разпределение с параметър $\lambda > 0$ определяме:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Плътността на разпределението при $x > 0$ получаваме директно с диференциране на $F(x)$

$$f(x) = \frac{F(x)}{dx} = ((1 - e^{-\lambda x})'_x) = 0 - (-\lambda e^{-\lambda x}) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda x}.$$

За отрицателните стойности на x плътността е нула. $f(x) = 0$.

Моменти. Ще определим мат. очакване и дисперсията като използваме пораждаща моментите функция

$M_X(t) = Ee^{tX}$ за сл.в с експоненциално разпределение $X \sim Exp(\lambda)$ имаме

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} . \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f(x)} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} \underbrace{\int_0^\infty (\lambda - t) . e^{-(\lambda - t)x} dx}_{=1} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Първата производна на $M_X(t)$ е

$$M_X'(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)' = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$$ и получаваме мат. очакване на X.

$$\underline{EX = M_X'(0)} = \frac{\lambda}{(\lambda-0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$ Анал. от втората производна на $M_X(t)$

$$M_X''(t) = \left(\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right)' = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$$ и за дисперсията

$M'X(0) = EX$
$M''X(0) = E(X^2)$

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda-0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

получаваме

$$\operatorname{Var} X = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(Продиктувай за нормалното ~~ако от~~ после тези двете гама и бета)

* Гама разпределение

Разпределението е двупараметрично и е върху $(0, +\infty)$

Озн $Y \sim \Gamma(k, \beta)$

* Задачи и приложения. Гама разпределението подобно на експоненциалното е модел на времето за очакване нещо да се случи. Нека k независими и еднакво разпределени сл. в. $Y_1 \dots Y_k$ имат експоненциално разпределение с параметър $\lambda > 0$. Тяхната сума има разпределение което наричаме „гама" с параметри k и β като $\beta = \frac{1}{\lambda}$. Параметъра k опр. така е цяло, но плътността на разпр. може да приеме и положителни стойности на k и озн. с α

* Функция на разпределение. Функ. на разпределение на сл. в. $Y \sim \Gamma(k, \beta)$ не се изразява в явен вид. ~~Нека Y и Z са независими и с разпределение $Exp(\lambda)$. Сумата им~~

~~$X = Y + Z$ има плътност~~ :

$\cancel{f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}}$!

Пресмятаме плътността на сл.в. $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ – съответ-ствено

$$f_X(x) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$, където ще заместим

λ с параметър β^{-1}.

* Моменти пораждаща моментите ф-я $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ има прост явен вид:

$$\boxed{M(t) = Ee^{tx}} = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x\left(\frac{1}{\beta}-t\right)} dx =$$

$$= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)} dx = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)} dx}_{=1} = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

свойства:

- ако $Y_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ и $Y_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ са независими, то

$$Y_1 + Y_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta);$$

- ако $Y \sim \Gamma(1, \beta)$, то $Y \sim Exp\left(\frac{1}{\beta}\right)$

Да диференцираме два пъти ф-ята $M(t)$:

$$M'(t) = \left(\frac{1}{(1-\beta \cdot t)^\alpha}\right)' = (-\alpha) \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}} \cdot (-\beta) = \alpha\beta \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}$$

$$M''(t) = \left(\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+1}}\right)' = \alpha \beta \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha+2}} (\alpha+1) \beta = \frac{\alpha (\alpha+1) \cdot \beta^2}{(1-\beta \cdot t)^{\alpha+2}}$$

Полагаме $t=0$ и получаваме $EX = \alpha\beta$, за втория момент

$E(X^2) = \alpha(\alpha+1)\beta^2 \Rightarrow$ дисперсията е:

$$Var X = E(X^2) - (EX)^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha\beta^2$$

* Бета разпределение. Разпределението на сл. в. X с бета-разпределение се определя от два положителни параметъра (α_1, α_2) когато. Разпределението е ограничено (стандартно) в/у интервала $[0,1]$. Озн. е $X \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$

* Задачи и приложение. Бета разпределението е удобно за моделиране на разпределение в/у краен интервал. Ако сл. в. $Y_1 \sim \Gamma(\alpha_1, 1)$ и $Y_2 \sim \Gamma(\alpha_2, 1)$ са независими

$$\frac{Y_1}{Y_1+Y_2} \sim Be(\alpha_1, \alpha_2).$$

С линейна трансформация от вида $Y = a + X(b-a)$ и получава разпределение в/у интервала $[a, b]$ (предполагаме, че $a < b$)

* Функция на разпределение. Плътността на разпределението на сл. в. $X \sim Be(\alpha_1, \alpha_2)$ има вида

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1-1} \cdot (1-x)^{\alpha_2-1} \quad \text{за } x \in [0,1] \text{ и}$$

0 извън него.

Моменти. Ще определим директно първия и втория момент.

$$EX = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 x \cdot x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)} \cdot \int_0^1 x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_2-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2) \cdot \Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1) \cdot \Gamma(\alpha_1)} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_2-1} dx}_{=1}$$

$$= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$$

Аналог.

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 x^2 \cdot x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\cdot\Gamma(\alpha_2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1+2)}{\Gamma(\alpha_1+2)} \int_0^1 x^{\alpha_1+1}(1-x)^{\alpha_2-1}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\,\Gamma(\alpha_1+2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+2)\cdot\Gamma(\alpha_1)} \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}{\Gamma(\alpha_1+1)\,\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 x^{\alpha_1+1}(1-x)^{\alpha_2-1}\,dx}_{=1}$$

$$= \frac{(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

Накрая за дисперсията получаваме

$$\operatorname{Var} X = E(X)^2 - (EX)^2 = \frac{(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)} - \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha_1+1)\alpha_1\cdot(\alpha_1+\alpha_2) - \alpha_1^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_1^3 + \alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^3 - \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1^2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2}$$

* Нормално разпределение. Разпределението на сл. в. X, когато е нормално се определя от два параметъра. Обикновено това са математическо очакване $EX = \mu$ и дисперсията $Var\,X = \sigma^2$. Разпределението е в/у цялата реална ос $(-\infty; +\infty)$ и симетрично спрямо очакването μ.

Озн. че сл. в. X има нормално разпределение с $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

* Задачи и приложение.

Метода на най-малките квадрати гласи, че сумата от квадратите на отклоненията трябва да е минимална, което е еквивалентно на твърдението, че модела на грешките са независими и еднакво ~~разпределени~~ нормално разпределени сл. в.

Централна гранична теорема ~~ка~~ твърди, че сумата от независими и еднакво разпределени сл. в. се доближава до нормалното с увеличаване на броя им.

* Ф-я на разпределение. Плътността на стандартното нормално разпределение означаваме с ϕ и има вида

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Тя е положителна за $\forall$ стойности $x \in (-\infty; +\infty)$, симетрична спрямо началото и интегруема в/у $(-\infty; +\infty)$.

Стойността на нормиращата константа $\sqrt{2\pi}$ може да се определи от стойността на интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Функцията на разпределение на стандартното нормално разпределение не се изразява в явен вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Моменти. Математическото очакване на стандартно разпределена сл. в. Z е $EZ=0$ $\Rightarrow$ от симетрията на ф-ята $\varphi(x)$ спрямо нулата. Дисперсията на Z съвпада с втория момент $Var\, Z = E(Z^2)$

$$E(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1} = 1$$

$\Rightarrow$ сл. в Z със стандартно нормално разпределение ~~става~~ може да се запише $Z \sim N(0,1)$

Линейната трансформация $X = aZ + b$ на станд. нор. раз. има също нормално разпределение с мат. очакване

$$EX = E(aZ+b) = a\underbrace{EZ}_{0} + Eb = a$$

Дисперсията и е

$$Var\, X = Var\,(aZ+b) = a^2\, Var\, Z + Var\, b = a^2$$

Обратно ако $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ се получава от.

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Плътността на раз. на сл. в $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ е:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$