18. Поасонов процес. Характеристични свойства. Приложения.

• Дефиниция на броящ процес – Процесът $\{N(t), t \geq 0\}$ се нарича броящ процес, ако $N(t)$ е общият брой на сбъдванията (появяванията) на определено събитие в интервала $[0, t]$.

– От определението следва че броящият процес удовлетворява следните условия:

(1) $N(t) \geq 0$

(2) $N(t)$ е целочислена величина за всяко t;

(3) Ако $t > s \Rightarrow N(t) \geq N(s)$;

(4) Ако $s < t \Rightarrow N(t) - N(s)$ е броят на сбъдванията на събитието в интервала (s, t).

Опр. Броящият процес е с независими нараствания, ако броя на събитията сбъднали се в непресичащи се интервали от време са независими сл. в.

Опр. Броящият процес е със стационарни нараствания, ако ф. р. на $N(t_2+s) - N(t_1+s)$ – бр. на събитията сбъднали се в интервала (t_1+s, t_2+s) не зависи от s (положението на интервала в/у оста на времето) за всеки $t_2 > t_1 \geq 0$ и $s \geq 0$

Опр1 (за Поасонов процес): Процесът $\{N(t), t \geq 0\}$ се нарича Поасонов със степен $\lambda > 0$, ако

(1) $N(0) = 0$

(2) Има независими нараствания

(3) Броят на събитията във всеки интервал с дължина t е Поасоново разпределена сл. в. $(Po(\lambda t))$ със средно λt, т.е за $\forall s, t \geq 0$, $P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Опр 2 (За Поасонов процес) — Броящият процес ~~еднородна~~ $\{N(t), t \geq 0\}$ се нарича Поасонов със степени $\lambda > 0$, ако

(1) $N(0) = 0$

(2) има стационарни и независими нараствания;

(3) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$, $h \to 0$;

(4) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$, $h \to 0$

Опр 1 и Опр 2 (за Поасонов процес) са еквивалентни

- Характеристични свойства - разпределение на времето на чакане, условни разпределения на времето на появяване и на моментите на появяване. Да се разгледат реални явления, при които възникват такива процеси и да се посочи интерпретацията на свойствата в конкретния случай.

Нека T_1 е момент на сбъдване на първото събитие и при $n > 1$, T_n е времето между $n-1$-то и n-то сбъдване на събитието. Редицата $\{T_n, n = 1, 2 \ldots$ се нарича редица на времената м/у сбъдванията на събитието.

Да се намери разпределението на сл. в. T_n.

$P(T_1 > t) = P($събитието не се е сбъднало в интервала $[0, t]$

$= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \Rightarrow T_1 \in Exp(\lambda)$

По-нататък $P(T_2 > t) = E[P(T_2 > t \mid T_1)]$, но

$P(T_2 > t \mid T_1 = s) =$

$= P($ 0 събития в интервала $(s, s+t] \mid T_1 = s)$

$= P($ 0 събития в интервала $(s, s+t]) = e^{-\lambda t} \Rightarrow T_2 \in Exp(\lambda)$

Предположение:

Сл. в. T_n, $n = 1, 2 \ldots$ са независими, еднакво разпределени с $Exp(\lambda)$ разпределение.

Забележка: Предположението за стационарност и независимост на нарастванията на Поасоновият процес е еквивалентно на твърдението, че във всеки момент от времето процесът започва отначало (стохастично еквивалентен).
С др. думи процесът, започвайки от произволен момент време е независим от това, което се е случило до този момент (поради независимите нарастванія) и има същото разпределение, като започвайки от началото (поради стационарността на нарастванията)
Нека S_n е моментът на настъпване на n-то събитие. ~~наречено още~~ време на чакане до n-то събдване. Ясно е, че $S_n = T_1 + \dots + T_n \Rightarrow S_n \in \Gamma(n, \lambda)$, т.е

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t \geq 0$$

По друг начин

$$F_{S_n}(t) = P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

От тук след диференциране по t се получава отново плътността на сл. в S_n.

Предложението ни дава друг начин за дефиниране на Поасоновия процес. Нека T_n, $n = 1, 2 \dots$ са независими идначово разпределени $Exp(\lambda)$ сл. в. Нека $S_0 = 0$ и $S_n = T_1 + \dots + T_n$, $n = 1, 2 \dots$ Интерпретираме S_n като последователни моменти на настъпване на някакво събитие. Тогава броящият процес $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$ е Поасонов със степен λt.
Да допуснем, че точно едно събитие се е сбъднало до момента t и искаме да намерим разпределението на времето на сбъдване на това събитие. От това, че Поас. процес има независими и стационарни нараствания е ясно, че във всеки подинтервал на $[0, t]$ с фиксирана дължина е равновероятно да се е сбъднало събитието. С др. думи, моментът на появяване на събитието би трябвало да е равномерно

разпределен в интервала $[0,t]$. Това лесно се проверява т.е. за $s \le t$

$$P(T_1 < s \mid N(t)=1) = \frac{P(T_1, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} =$$ ~~P(1 събитие в [0,s)) P(0 съб~~

$$= \frac{P(1 \text{ събитие в } [0,s),\ 0 \text{ събития в } [s,t])}{P(N(t)=1)} =$$

$$= \frac{P(1 \text{ събитие в } [0,s))\, P(0 \text{ събития в } [s,t])}{P(N(t)=1)} =$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

Опр: Нека $Y_1 \dots Y_n$ са наблюдения на сл. в. Y. Казваме, че $Y_{(1)} \dots Y_{(n)}$ са порядкови статистики, съответстващи на $Y_1 \dots Y_n$, ако $Y_{(k)}$ е k-тата по големина стойност сред $Y_1 \dots Y_n$.

Теорема: Ако $N(t) = n$ то моментите на пристигане $S_1, S_2, \dots S_n$ имат същото разпределение, както наредените статистически съответни на n независими сл. в. равномерно разпределени в интервала $(0,t)$

Заб: $\xi \in U(0,t) \iff$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & x \in (0,t) \\ 0 & x \notin (0,t) \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{t} & x \in (0,t) \\ 1 & x \ge t \end{cases}$$

Д-во: За да получим условната плътност на $S_1, S_2 \dots S_n$ при условие, че $N(t)=n$ да забележим, че за $0 < s_1 < \dots < s_n < t$ събитие $\{S_1 = s_1, \dots S_n = s_n, N(t) = n\}$ е еквивалентно на събитието $\{T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, \dots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n\}$

Като използваме, че T_i $i = 1, 2 \ldots n$ са независими ~~еднакво~~ сл. в и еднакворазпределени с $Exp(\lambda)$ получаваме.

$$f(s_1, s_2 \ldots s_n | n) = \frac{f(s_1, s_2 \ldots s_n, n)}{P(N(t) = n)} =$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \ldots e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{-\lambda(t - s_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n},$$

$$0 < s_1 < \ldots < s_n < t.$$

Заб. Получения~~т~~ резултат~~а~~ може да се преформулира по следният начин: При условие, че n събития са се сбъднали в интервала $(0, t)$, моментите на сбъдване $S_1, S_2 \ldots S_n$ разгледани като ненаредени случайни величини са разпределени независимо и равномерно в интервала $(0, t)$

Сложен поасонов процес – Процесът $\{X(t), t \geq 0\}$ се нар сложен Поасонов процес, ако

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$ където $\{N(t), t \geq 0\}$ е поасонов процес и $\{Y_n, n = 0, 1, 2\}$ е редица от независими еднакво разпределени сл. в независими от процеса $N(t)$

При фиксирано t сл. в $X(t)$ се нарича сложна Поасонова сл. в

Задача: Да пресметнем $E X(t)$ и $Var X(t)$

Р-е: За $EX(t)$ имаме; $E X(t) = E(E(X(t) | N(t)))$, но

$$E(X(t) | N(t) = n) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\Big|\, N(t) = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) =$$

$$= n E Y_1.$$

Следователно $E(X(t) \mid N(t)) = N(t) E Y_1$, т.е.

~~т.е.~~ $E X(t) = (E N(t))(E Y_1) == \lambda t E Y_1$

За пресмятането на $Var\, X(t)$ ще използваме следната ф-ла за условена дисперсия

$Var\, X(t) = E(Var(X(t) \mid N(t))) + Var(E(X(t) \mid N(t)))$ Имаме

$$Var(X(t) \mid N(t) = n) = Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \mid N(t) = n\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = n Var\, Y$$

I последното равенство е изпълнено поради независимостта на :

Така $Var(X(t) \mid N(t)) = N(t) Var\, Y_1$. Следователно

$$Var\, X(t) = E(N(t) Var\, Y_1) + Var(N(t) E Y_1) = \lambda t Var\, Y_1 + (E Y_1)^2 Var\, N(t)$$

$$= \lambda t Var\, Y_1 + (E Y_1)^2 \lambda t = \lambda t [Var\, Y_1 + (E Y_1)^2] = \lambda t E(Y_1^2)$$

Използвано е, че $Var\, N(t) = \lambda t$, т.к. $N(t)$ е $Po(\lambda t)$

Нехомогенен поасонов процес. — Поасоновият процес $\{N(t), t \geq 0\}$ се нарича нехомогенен с ф-я на интензивнос $\lambda(t)$, $t \geq 0$, ако:

(1) $N(0) = 0$

(2) $\{N(t), t \geq 0\}$ е с независими нараствания

(3) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$, $h \to 0$

(4) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t) h + o(h)$, $h \to 0$

Ако положим $m(t) = \int_0^t \lambda(x) dx \Rightarrow P(N(t+s) - N(t) = n) =$

$= e^{-(m(t+s) - m(t))} \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}$, $n \geq 0$ или с други думи

бр на събитията сбъднали се в интервала $(t, t+s)$,

$N(t+s) - N(t) \in Po(m(t+s) - m(t))$ и освен това

$N(t) \in Po(m(t))$