

Понятия и формули:

- случайна величина (сл.в.) (random variable): функция дефинирана върху извадковото пространство, заемаща реални стойности. Случайните величини са дискретни или непрекъснати.

$$0 \leq P(\xi = x) \leq 1; \sum_x P(\xi = x) = 1$$

- очаквана стойност на сл.в. (expected value): $E\xi = \mu_\xi = \sum_x xP(\xi = x)$
- дисперсия на сл.в. (variance): $Var\xi = \sigma_\xi^2 = E[(\xi - E\xi)^2] = E\xi^2 - (E\xi)^2$
- стандартно отклонение на сл.в. (standard deviation): $\sigma_\xi = \sqrt{\sigma_\xi^2}$
- Емпирично правило: за случайна величина ξ с камбановидно разпределение е в сила $P(\xi \in (\mu \pm \sigma)) \approx 0.68$; $P(\xi \in (\mu \pm 2\sigma)) \approx 0.95$; $P(\xi \in (\mu \pm 3\sigma)) \approx 0.997$
- Правило на Чебишев: за произволна случайна величина ξ е в сила $P(\xi \in (\mu \pm k\sigma)) > 1 - 1/k^2$
- Биномно разпределение

$$\xi \sim Bi(n, p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, E\xi = np, Var\xi = npq$$

- Поасоново разпределение

$$\xi \sim Po(\lambda) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, E\xi = \lambda, Var\xi = \lambda$$

- Геометрично разпределение

$$\xi \sim Ge(p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, E\xi = 1/p, Var\xi = q/p^2$$

Зад.1 Пациент се оплаква от тежки болки в стомаха и е прегледан в местна болница. След серия от тестове докторите са стеснили кръга от възможни диагнози до 4. Смятат, че има 0.4 вероятност пациентът да е болен от хепатит, 0.45 да има камъни в жлъчката, 0.1 да е болен от цироза и 0.05 да има рак на панкреаса. Докторите са убедени, че пациентът е болен от една от изброените болести, но трябва допълнителни изследвания. Цената за лечението на всяка болест е следната: хепатит - 700 \$, цироза - 1100 \$, камъни в жлъчката - 3320 \$, рак на панкреаса - 16450 \$.

- Напишете разпределението на случайната величина 'цена на лечението на този пациент'.
- Пресметнете очакваната стойност на цената за лечение. Каква е интерпретацията ѝ?
- По-нататъшни изследвания показват, че пациентът има или хепатит, или цироза. Напишете разпределението на сл. вел. цена на лечението на този пациент след като знаете тази информация.
- Пресметнете очакваната стойност на цената за лечение при условие, че пациентът има или хепатит, или цироза. Каква е интерпретацията ѝ?

Отговор: б) 2706.5; г) 780

Зад.2 Всеки човек притежава две хромозоми за пол. Копие на една от двете (с равна вероятност) се предава на поколенията. Мъжете имат една X хромозома и една Y хромозома, докато жените имат две X хромозоми. Ако една семейна двойка има три деца, каква е вероятността, че поне едно от тях ще е момче. Дефинирайте сл. вел. x , която е броят на момчетата. Напишете разпределението на x , намерете очакването и дисперсията.

Отговор: $x \sim Bi(n = 3, p = 0.5)$; $Ex = 1.5$; $Varx = 0.75$

Зад.3 Нова операционна процедура е успешна в 80% от случаите. Предполагаме, че операцията е направена 5 пъти и изходът на всяка е независим от изхода на всяка друга. Каква е вероятността, че:

- а) всички 5 операции ще са успешни?
- б) ще има точно 4 успешни?
- в) по-малко от 2 ще са успешни.

Отговор: а) 0.3277; б) 0.4096; в) 0.0067

Зад.4 Архивите показват, че 30% от всички пациенти на дадена клиника не плащат техните сметки и това евентуално се дължи на това, че са забравени. Предполагаме, че $n = 4$ нови пациента представляват случайна извадка от голямо множество на очаквани пациенти на дадената клиника. Каква е вероятността, че:

- а) всички сметки на пациентите ще бъдат забравени
- б) една ще бъде забравена
- в) никоя от сметките няма да бъде забравена.

Отговор: а) 0.0081; б) 0.4116; в) 0.2401

Зад.5 Даден метаболичен дефект се случва на приблизително 1 от всеки 100 раждания. Ако има 4 новородени в дадена болница в даден ден, каква е вероятността, че:

- а) никое няма да има този дефект?
- б) не повече от едно ще има този дефект.

Отговор: а) 0.9606; б) 0.9994

Зад.6 Зоолозите са открили, че животните прекарват голяма част от времето си почивайки, въпреки че почивката може да има функционално значение (например хищниците причакват своята плячка лежейки). Изследовател от Университета във Вермонт оценил процента от времето, което различни видове животни прекарват в почивка без да отчита времето, прекарано в дълбок сън. Например вероятността, че даден вид женски гущер ще почива в определен момент, е 0.97.

а) В случайна извадка от 20 женски гущера, каква е вероятността, че поне 15 ще почиват в даден момент?

б) В случайна извадка от 20 женски гущера, каква е вероятността, че по-малко от 10 ще почиват в даден момент?

в) В случайна извадка от 200 женски гущера, очаквате ли, че по-малко от 190 ще почиват в даден момент? Обяснете.

Зад.7 Синдром на Луис Бар (атаксия телеангиектазия) е неврологично разстройство, което отслабва имунната система и предизвиква преждевременно състаряване. Повечето пациенти с това заболяване умират като тинейджъри или в ранните двадесет. Според Science News (June 24, 1995), когато двамата родители имат А-Т ген, техните деца развиват тази болест в 1/4 от случаите.

а) Разглеждаме 15 двойки, в които и двамата родители имат А-Т ген. Каква е вероятността, че повече от 10 двойки имат деца с това неврологично разстройство?

б) Разглеждаме 10000 двойки, в които и двамата родители имат А-Т ген. Каква е вероятността, че по-малко от 3000 двойки имат деца със синдром на Луис Бар? (напишете решението без да го пресмятате). Пресметнете средното и стандартното отклонение на разпределението на броя двойки с деца с това неврологично разстройство и дайте интуитивен отговор.

Зад.8 Според изследователите от Факултета по Медицина на Университета Джон Хопкинс една от всеки три жени е била жертва на домашно насилие (Annals of Internal Medicine, Nov. 1995). Тези резултати са били получени от изследване сред 2000 жени, живеещи в Балтимор, Мериленд. Да предположим, че правим случайна извадка от 15 жени и сред тях 4 са били жертва на домашно насилие.

а) Каква е вероятността да наблюдаваме 4 или повече насилени жени в извадка от 15, ако истинската пропорция на жертвите на домашно насилие е 1/3?

б) Много експерти смятат, че пропорцията на жените на домашно насилие е близо до 0.1. Пресметнете вероятността да наблюдаваме 4 или повече насилени жени в извадка от 15, ако истинската пропорция на жертвите на домашно насилие е 0.1.

в) резултатите от а) и б) към какви заключения за пропорцията на жените на домашно насилие Ви водят?

Зад.9 Средният брой на пътните инциденти на централно кръстовище е 2 на седмица. Предполагаме, че броят на катастрофите е Поасоново разпределен с параметър $\mu = 2$.

а) Намерете вероятността да няма инцидент на това кръстовище през едноседмичен период.

б) Намерете вероятността за най-много 3 катастрофи на това кръстовище през двуседмичен период.

Отговор: а) 0.135335; б) 0.433

Зад.10 Броят на хората x , посещаващи спешното отделение на дадена болница всеки ден следва Поасоново разпределение със средно 5 души на ден.

а) Каква е вероятността, че броят на хората, влизащи в спешното отделение в даден ден, ще е две? по-малък или равен на две?

б) Вероятно ли е x да надхвърли 10? Обяснете.

Отговор: а) 0.08422, 0.12465; б) не, $x = 10$ лежи 2.236 стандартни отклонения над средното

Зад.11 Агенцията за защита на околната среда (АЗОС) изисква производителите на винилхлорид и подобни химични съединения да ограничат количеството на тези химикали в емисиите си до не повече от 10 частици на милион. Да предположим, че средната емисия на винилхлорид в даден завод е 4 частици на милион. Да предположим, че броят на частиците винилхлорид на милион във въздуха, x , следва Поасоново разпределение.

а) Какво е стандартното отклонение на x за завода?

б) Вероятно ли е в една проба от завода x да надхвърли лимита, зададен от АЗОС?

Зад.12 Служител от отдел Безопасност на труда в голям завод предполага, че очакваният брой на трудовите инциденти за месец е 3.4.

а) Каква е вероятността, че ще има 2 инцидента следващия месец?

б) Каква е вероятността за 3 или повече инцидента за следващия месец?

в) Каква е вероятността за повече от 7 инцидента в рамките на следващите 2 месеца?

Зад.13 В много градове жителите на даден квартал сформират доброволчески групи в опит да намалят престъпността. Да предположим, че в даден квартал, в който средният брой на криминалните престъпления е 10 на година, сформира такава група. През първата година след сформирането на групата са извършени 3 престъпления.

а) Използвайте Поасоново разпределение, за да пресметнете вероятността, че 3 или по-малко престъпления са извършени за година при положение, че средният брой е все още 10 за година.

б) Допускате ли, че това събитие потвърждава твърдението, че тази група в този квартал е ефективна?

Зад.14 За да покажем колко добре Поасоновото разпределение приближава биномното разпределение, пресметнете Поасоново приближение за $p(0)$ и $p(1)$, където $x \in Bi(n = 25, p = 0.05)$. Сравнете резултата с точните стойности от таблиците за биомно разпределение.

Отговор: $p(0) \approx 0.2865$, $p(1) \approx 0.3581$, от таблиците: $p(0) = 0.277$, $p(1) = 0.365$

Зад.15 Производител на компакт дискове ги превозва в партиди по 1200 диска в партида. Преди да ги превози, 20 компакт диска от всяка партида са произволно избрани и подложени на тест. Ако няма нито един дефектен диск, партидата е изпратена. Ако има един или повече от един дефектни дискове, цялата партида е тествана.

а) Какво е вероятностното разпределение на x , която е броят на дефектните компакт дискове в случайна извадка с големина 20.

б) Какво разпределение може да бъде използвано за приближение на вероятностите за x .

в) Каква е вероятността, че партидата ще бъде изпратена, ако в нея има 10 дефектни диска? Ако има 20 дефектни диска? Ако има 30 дефектни диска?

Отговор: а) хипергеометрично, приблизително биомно; б) Поасоново разпределение; в) 0.85, 0.72, 0.61

Зад.16 Приблизително 40 процента от населението на САЩ имат А кръвна група.

а) ако редът на донори на кръв, посещаващи коя да е кръвна банка в кой да е ден, е случаен, намерете вероятностното разпределение на x , броят на донорите на кръв на даден ден, докато се появи първият донор с кръвна група А.

б) намерете средното и стандартното отклонение на x .

Отговор: а) $p(x) = (0.6)^{x-1}(0.4)$, $x = 1, 2, \dots$; б) $\mu = 2.5$, $\sigma = 1.9$

Функции на R за Биомно разпределение:

- `dbinom(1, size=10, p=0.25)`
- `pbinom(5, size=10, p=0.25)`
- `rbinom(100, size=10, p=0.25)`
- `qbinom(0.7, size=10, p=0.25)`

