1С

Въпрос 10

Ред на Лоран.Теорема за резидуумите.

Нека разглеждаме следния степенен ред

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n.(z-z_0)^n}_{\text{главна част}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n}_{\text{правилна част}} =$$

$$= \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + a_0 + a_1.(z-z_0) + a_n.(z-z_0)^n + \ldots$$

Дефиниция 1.

Такива редове се наричат редове на Лоран.

Кога този ред е сходящ?

$f(z) = g(z) + h(z)$

$g(z)$ - главна част

$h(z)$ - правилна част

Реда на Лоран е сходящ когато и двете части са сходящи и реда е равен на сумата на тези две части.

1).Разглеждаме правилната част

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n$$

За този ред $\exists R$ (радиус на сходимост) $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}$, такъв че при

$|z-z_0| < R$ редът е сходящ.

$|z-z_0| > R$ редът е разходящ.

2).Разглеждаме главната част

$$g(z) = \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots$$

Полагаме $\dfrac{1}{(z-z_0)} = \xi$

$$g(z) = G(\xi) = a_{-1}.\xi + a_{-2}.\xi^2 + \ldots + a_{-n}.\xi^n + \ldots$$

Това е степенен ред по стойностите на ξ и е сходящ при $|\xi| < \dfrac{1}{l}$

Полагаме $a_{-n} = c_n$.

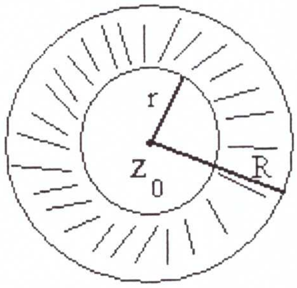
$l = \lim \sqrt[n]{c_n} = \lim \sqrt[-n]{a_{-n}}$

$\frac{1}{(z-z_0)} < \frac{1}{l} \Leftrightarrow |z-z_0| > l = r$,т.е редът е сходящ при $|z-z_0| < r$.

Сега да разгледаме три случая за r и R.

1. R>r

Редът на Лоран е сходящ в $r < |z-z_0| < R$.



Тази област се нарича пръстен или венец.Бележим го с $K(z_0, r, R)$.

2. $R = \infty$

Редът на Лоран е сходящ във външноста на кръга с център т. z_0 и радиус r.

3. R<r

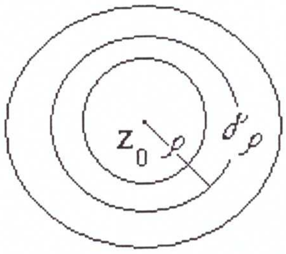
Редът на Лоран е разходящ.

Лема(за единственост на развитието на Лоран)

Нека $f(z)$ е холоморфна/аналитична във венеца $K(z_0, r, R)$.Нека $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n$ и $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n.(z-z_0)^n$.Тогава $a_n = b_n$,т.е. развитието в ред на Лоран е единствено.

Д-во:

Избираме произволна окръжност вътре във венеца $\gamma_\rho, r < \rho < R$.



Имаме $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n \qquad (1)$$

Умножаваме (1) по $(z-z_0)^{-m-1}$.После интегрираме по γ_ρ и умножаваме $\frac{1}{2\pi i}$.

m – фиксирано цяло число.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (\xi - z_0)^{n-m-1} d\xi$$

$$\int\limits_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-m-1} d\xi = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 2\pi i, n = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$\Rightarrow$ коефициентите се определят еднозначно.

Теорема(на Лоран)

Всяка функция f ,която е холоморфна във венец с център т. z_0 ,притежава лораново развитие

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n$ в този венец.При това коефициентите a_n се определят еднозначно от формулите

$$a_n = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad ,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

където γ_ρ е окръжност с център $z_0 : r < \rho < R$ и $|\xi - z_0| < \rho$.(γ_ρ е окръжност която се съдържа във венеца $K(z_0, r, R)$).

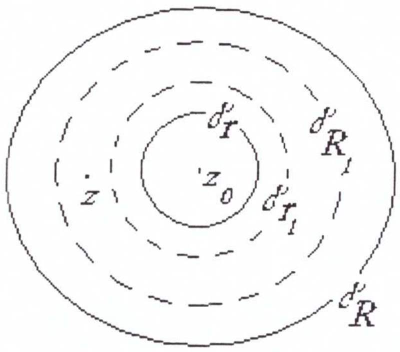
Д-во:

Имаме че f е холоморфна във венеца $K(z_0, r, R)$.

Избираме числата r_1, R_1 подчинени единствено на условието

$$r < r_1 < (z - z_0) < R_1 < R$$

Получаваме



Избираме т. z в новия венец $K_1(z_0, r_1, R_1)$.Тъй като f е холоморфна в K_1 и по контурните му окръжности , то можем да изразим стойността на f в т. z , като използваме формула на Коши за многосвързана област.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)} = I_1 + I_2$$

Сега ще развием в редове по степени на $(\xi - z)$ подинтегралните функции на I_1 и I_2 .

$I_1 : \dfrac{1}{(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0})}$ е геометрична прогресия и $\left|\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \dfrac{|z-z_0|}{R_1} = q < 1$.

$$\frac{1}{(\xi-z)} = \frac{1}{(\xi-z_0+z_0-z)} = \frac{1}{((\xi-z_0)-(z-z_0))} =$$

$$= \frac{1}{(\xi-z_0).(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0})} = \frac{1}{(\xi-z_0)}.(1+\frac{z-z_0}{\xi-z_0}+(\frac{z-z_0}{\xi-z_0})^2+\ldots) =$$

$$= \frac{1}{\xi-z_0} + \frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(\xi-z_0)^3} + \ldots + \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\xi-z_0}.(\frac{z-z_0}{\xi-z_0})^n$$

Нека $M = \max\{|f(\xi)| : \xi \in \gamma_{R_1}\}$

Значи реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}.(\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0})^n$ е равномерно сходящ върху γ_{R_1} и може да се интегрира почленно.

$$I_1 = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)}}_{a_0} + (z-z_0).\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^2}}_{a_1} + \ldots + (z-z_0)^n.\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}}_{a_n} + \ldots$$

Сега ще направим същото за I_2.

$$\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} = q_1 < 1$$

$$I_2 : -\frac{1}{(\xi-z)} = \frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0).(1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0})} =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)} + \frac{\xi-z_0}{(z-z_0)^2} + \frac{(\xi-z_0)^2}{(z-z_0)^3} + \ldots + \frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-z_0}.(\frac{\xi-z_0}{z-z_0})^n$$

По същите съображения както горе можем да интегрираме почленно.

$$I_2 = \frac{1}{z-z_0}.\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(\xi)d\xi}_{a_{-1}} + \frac{1}{(z-z_0)^2}.\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} (\xi-z_0).f(\xi)d\xi}_{a_{-2}} + \ldots$$

$$..+\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\eta}(\xi-z_0)^n.f(\xi)d\xi}_{a_{-n}}+...$$

След всички направени сметки получаваме следното нещо:

$$f(z)=a_0+a_1.(z-z_0)+...+a_n.(z-z_0)^n+...+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+...+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+...$$

(3)

Понеже т. z беше избрана произволно във венеца $K_1(z_0,r_1,R_1)$,то развитието (3) се отнася за всяка точка от този венец.Освен това коефициентите a_n и a_{-n} не зависят от т. z ,то развитието (3) е лораново развитие на f във венеца $K_1(z_0,r_1,R_1)$.

Като вземем впредвид , че числата r_1,R_1 са подчинени единствено на условието $r<r_1<(z-z_0)<R_1<R$, то f може да се представи като ред на Лоран във всеки венец съдържащ се във венеца $K(z_0,r,R)$.Лемата, която ни гарантира единствеността на лорановото развитие, пък ни дава основание да твърдим че развитието на (3) не зависи от венеца $K_1(z_0,r_1,R_1)$.

$\Rightarrow$ теоремата е доказана с еднозначно определани коефициенти.

Изолирани особени точки на холоморфни функции. Класификация.

Дефиниция 2.

Точката z_0 се нарича изолирана особена точка(изолирана особеност) на f ,ако f е холоморфна в известна околност на z_0 с изключение само на т. z_0. Това означава, че съществува околност $K(z_0,0,R)=\{0<z-z_0<R\}$, в която f е холоморфна.

Дефиниция 3.

Нека т. z_0 е изолирана особеност на f и нека $a_n, n=0,\pm1,\pm2,...$ са коефициентите на лорановото развитие на f около т. z_0 .Тогава

1. т. z_0 се нарича отстранима особеност на f, ако $a_n=0$ за $\forall n<0$,т.е ако лорановия ред не съдържа членове с отрицателни степени на $z-z_0$.
2. т. z_0 се нарича полюс на f, ако лорановия ред на f съдържа само краен брой членове с отрицателни степени на $z-z_0$. Ако $a_n=0$ за $\forall n\le -m-1$, но $a_n\ne 0$ за $m>0$, т. z_0 се нарича m-кратен полюс на f (m - кратност на полюса).

3. т. z_0 се нарича съществена осбеност на f, ако $a_n \neq 0$ за безброй много отрицателни стойности на n, т.е. ако лорановото развитие на f съдържа безброй много членове с отрицателни степени на $z - z_0$.

Изследване на поведението на функциите около изолираните им особености.

I. **т.** z_0 е отстранима особеност на f

Теорема на Риман(за отсранимите особености)

НДУ т. z_0 да е отсранима особеност е $f(z)$ да бъде ограничена в околност на т. z_0 (т.е. $f(z) \leq M, |z - z_0| < \rho$)

Д-во:

1).Нека т. z_0 е такава, че в околност на т. z_0 ф-цията f се разлага в ред на Лоран без отрицателни степени.

От дефинция 3 $\Rightarrow \exists K(z_0, 0, R) : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(z - z_0)^n$

Имаме ,че $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$.

Правим полагане $f(z_0) = a_0$

По този начин "додефинираме" функцията f и тя вече става холоморфна в целия кръг $|z - z_0| < R$ $\Rightarrow$ тя е хепрекъсната $\Rightarrow$ тя е ограничена.

2).Нека имаме, че f е ограничена в околност на т. z_0

$f(z) \leq M$

Имаме $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(z - z_0)^n$

Искаме да докажем, че ако функцията е ограничена, то всичките отрицателни коефициети са 0, т.е. че

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(z - z_0)^n$$

Нека γ_ρ е окръжност, която съдържа т. ξ

За коефициетите имаме формулата

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$|a_n| \leq \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi - z_0|^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot \int_{\gamma_\rho} |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} .2\pi.\rho = \frac{M}{\rho^n}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

За $n < 0$ се получава

$$|a_{-1}| \leq \frac{M}{\rho^{-1}} = M.\rho$$

$$|a_{-2}| \leq \frac{M}{\rho^{-2}} = M.\rho^2$$

$$|a_{-n}| \leq \frac{M}{\rho^{-n}} = M.\rho^n$$

Понеже a_n не зависи от ρ то можем да направим $\rho \to 0$

$\Rightarrow$ при $n < 0$ $|a_n| = 0$. Готово.

II.

Т. z_0 е m-кратен полюс на f.

Теорема(връзка между полюс и нула)

Ако $f(z)$ има в т. z_0 полюс от кратност m, то функцията $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ има в т. z_0 нула от кратност m.

Вярно е и обратното:ако е дадена $\varphi(z)$, която има нула от кратност m, то $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ има полюс с кратност m в т. z_0.

Д-во:

1.Първо ще докажем втората част на теоремата.

$\varphi(z)$ има m-кратна нула , $\varphi(z)$ е холоморфна в околност на т. z_0

$\Rightarrow \varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \ldots = \varphi^{(m)}(z_0) = 0 \qquad \varphi^{(m+1)}(z_0) \neq 0$

Но $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0 \qquad c_m \neq 0$

$\Rightarrow$

$$\varphi(z) = c_m.(z - z_0)^m + c_{m+1}.(z - z_0)^{m+1} + \ldots = (z - z_0)^m.(c_m + c_{m+1}.(z - z_0) + \ldots) =$$
$$= (z - z_0)^m.\psi(z)$$

$\psi(z)$ е холоморфна в околност на т. z_0 и $\psi(z_0) = c_m \neq 0$.

$\Rightarrow$ т. z_0 е m-кратен полюс на $\dfrac{1}{\varphi(z)}$.

2. $f(z)$ има полюс с кратност m.

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + a_0 + a_1.(z - z_0) + \ldots + a_n.(z - z_0)^n + \ldots$$

като $a_{-m} \neq 0$

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}.(a_{-m}+a_{-m+1}.(z-z_0)+...+a_0.(z-z_0)^m+...)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} \qquad \textbf{(4)}$$

$\psi(z)$ е холоморфна в околност на т. z_0 и $\psi(z_0)=a_{-m}\neq 0$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(z)}$ е холоморфна в околност на т. z_0 и при това

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^m}{\psi(z)}=0$$

$\Rightarrow$ т. $z=z_0$ е отстранима особеност на $\dfrac{1}{f(z)}$.

$\Rightarrow$ Ако "додефинираме" функцията $\dfrac{1}{f(z)}$,като положим $\dfrac{1}{f(z_0)}=0$ и като имаме предвид представянето **(4)** ,то можем да заключим че т. z_0 е m-кратна нула на $\dfrac{1}{f(z)}$.

Теорема за полюс

НДУ т. z_0 да е полюс е $f(z)\to\infty$ при $z\to z_0$.

Д-во:Нека $f(z)\to\infty$.

Нека $f(z)$ е холоморфна в околност на т. z_0.

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(z)}$ също е холоморфна в околност на т. z_0

$\Rightarrow$ Освен това $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$.Но това означава ,че z_0 е отстранима особеност.

Като "додефинираме" функцията $\dfrac{1}{f(z)}:\dfrac{1}{f(z_0)}=0 \Rightarrow$ т. z_0 е нула на "додефинираната" функция $\Rightarrow$ от предната теорема т. z_0 е полюс на $f(z)$.

III. т. z_0 е съществена осбеност на f

Теорема(Казорати-Вайерщрас-Сохоцки)

Нека т. z_0 е съществена осбеност на f.Тогава, каквото и да е комплексно число α, функцията f приема стойности, произволно близки до α във всяка околност на т. z_0 .По-точно ако $\alpha\in\mathbb{C},\delta>0,\varepsilon<0$ са произволно избрани, то $\exists$т. $z_\delta\in K(z_0,0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$, за която $|f(z_\delta)-\alpha|<\varepsilon$.

Д-во:

Да допуснем, че теоремата не е вярна.

Тогава съществуват такива $\alpha_0\in\mathbb{C},\delta_0>0,\varepsilon_0<0$, че за всяко z подчинено на условието $0<|z-z_0|<\delta$ е изпълнено $|f(z)-\alpha_0|\geq\varepsilon_0$.

Нека положим

(5) $F(z)=\dfrac{1}{f(z)-\alpha_0}$ при $0<|z-z_0|<\delta_0$

Понеже f е холоморфна в $0<|z-z_0|<\delta_0$, то F също е холоморфна в тази област.

Освен това имаме

$$|F(z)|=\left|\frac{1}{f(z)-\alpha_0}\right|=\frac{1}{|f(z)-\alpha_0|}\le\frac{1}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow F$ е ограничена в околност на т. z_0

$\Rightarrow$ от теорема на Риман т. z_0 е отсранима особеност на F.

$\Rightarrow F$ има граница в т. z_0

$$\lim_{z\to z_0}F(z)=c, c\neq\infty$$

Имаме две възможности за ($c=0$ и $c\neq 0$).

1.Нека $c\neq 0$

От (5) $\Rightarrow f(z)-\alpha_0=\dfrac{1}{F(z)}$ $\Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{F(z)}+\alpha_0$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{F(z)}+\alpha_0$$

$\Rightarrow f(z)$ е ограничена в т. z_0

От теорема на Риман $\Rightarrow$ т. z_0 е отсранима особеност на f.

2.Нека $c=0$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$$

От теоремата за полюса т. z_0 е полюс на f.

С това допускането, че теоремата не е вярна ни доведе до извода, че т. z_0 е или отсранима особеност или полюс.Това обаче води до противоречие с условието на теоремата, че т. z_0 е съществена особеност на f.

Теоремата е вярна и доказана.

Теорема за резидуумите

Дефиниция 4.

Нека т. a е изолирана особеност на f. Коефициентът в лорановото развитие на f в околност на т. a се нарича резидуум на f в т. a .Бележим го с $Res(f;a)$.

Теорема за резидуумите

Нека G е едносвързана област.

Нека f е холоморфна в G (заедно с границата C) с изключение на краен брой особени точки $a_1,a_2,...,a_k\in G$.Тогава интеграл по затворената крива (която не минава през нито една от особените точки) е

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.\sum_{s=1}^{k} Res(f;a_s)$$

Д-во:Първо ще изведем една помощна формула.

Нека т. a е особена точка.Тогава ще можем да развием f в лоранов ред

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(z-a)^n$$

Като умножим равенството по $\frac{1}{2\pi i}$ и го интегрираме(интегрирането ще извършим по крива $\gamma_\rho : |z-a| < \rho$) ще получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}.\frac{1}{2\pi i}.\int_{\gamma_\rho}\frac{dz}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n.\frac{1}{2\pi i}.\int_{\gamma_\rho}(z-a)^n =$$

Но ние имаме, че

$$\frac{1}{2\pi i}.\int_{\gamma_\rho}(z-a)^n = \begin{cases} 0, m \neq -1 \\ 1, m = 1 \end{cases}$$

$$= c_{-1} = Res(f;a) \qquad \Rightarrow \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2\pi i.Res(f;a) \qquad \textbf{(7)}$$

Сега използваики (7) ще докажем теоремата.

Правим окръжности γ_i с центрове точките $a_i, i = 1,...k$,като никоя две от тези окръжности не се пресичат.

В новата област $D = G \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, функцията f е холоморфна, защото в D няма особени точки.

$$\Gamma = C \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup ... \cup \gamma_k^-$$

От теоремата на Коши

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

От формула на Коши за многосвързана област

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{\gamma_1^+} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_k^+} f(z)dz$$

Като използваме формулата (5) за всеки $\int_{\gamma_i} f(z)dz$, $i = 1,...k$

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res(f;a_1) + ... + 2\pi i Res(f;a_k) =$$

$$= 2\pi i.(Res(f;a_1) + ... + Res(f;a_k))$$

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i.\sum_{s=1}^{k} Res(f;a_s)$$

Готово.