2

# Въпрос 2
## Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства.Основни свойства.Теорема за диагонализация (предпълнение)

**Определение.** *Нека F е непразно множество, в което са дефинирани две операции:*

*1) На всеки два елемента $a$ и $b \in F$ се съпоставя трети елемент $a+b \in F$, който се нарича сума на $a$ и $b$.*

*2) На всеки два елемента $a$ и $b \in F$ се съпоставя трети елемент $a * b \in F$, който се нарича произведение на $a$ и $b$.*

*Казваме, че относно тези операции F е поле, ако е изпълнено:*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *- асоциативност.*
2. $a+b = b+a$ *- комутативност.*
3. $\exists$ *нулев елемент* $0 \in F$ *такъв, че* $a+0=a$ *за* $\forall a \in F$.
4. $\forall$ *елемент* $a \in F$ *има противоположен елемент* $-a : a+(-a)=0$.
5. $(ab)c = a(bc)$.
6. $ab = ba$.
7. $(a+b)c = ac+bc$.
8. $\exists$ *единичен елемент* $e \neq 0$, *такъв че* $ae = a$, $\forall a \in F$.
9. $\forall$ *ненулев елемент* $a \in F$ *има обратен елемент* $a^{-1} : aa^{-1} = e$.

**Определение.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е непразно множество, F е поле и са дефинирани следните две операции:*

*1) За* $\forall$ *два елемента* $a$ *и* $b \in \mathcal{L}$ *сумата* $a+b \in \mathcal{L}$.

*2) За* $\forall$ *елемент* $\lambda \in F$ *и* $\forall$ *елемент* $a \in \mathcal{L}$ *е дефиниран елементът* $\lambda a \in \mathcal{L}$.

*Казваме, че относно тези операции* $\mathcal{L}$ *е линейно пространство над полето F, ако са изпълнени :*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$.
2. $a+b = b+a$.
3. $\exists$ *нулев елемент* $\vartheta \in \mathcal{L}$: $a+\vartheta = a$ *за* $\forall a \in \mathcal{L}$.
4. $\forall$ *елемент* $a \in \mathcal{L}$ *има противоположен елемент* $-a \in \mathcal{L}$: $a+(-a) = \vartheta$.
5. *Ако* $e$ *е единичен елемент на F тогава* $ea = a$ *за* $\forall a \in \mathcal{L}$
6. $\mu(\lambda a) = (\mu\lambda)a$, *за* $\forall \lambda, \mu \in F$ *и* $\forall a \in \mathcal{L}$
7. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.
8. $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$.

**Определение.** *Нека* $\mathcal{L}$ *е линейно пространство над полето на реалните числа т.е. над* **R** *и за* $\forall$ $a$, $b \in \mathcal{L}$ *е определено реално число, което се бележи с* $(a,b)$. *Казваме, че* $\mathcal{L}$ *е евклидово пространство, ако:*

1. $(a,b) = (b,a)$. $\quad a, b \in \mathcal{L}$
2. $(a+b,c) = (a,c)+(b,c)$. $\quad a, b, c \in \mathcal{L}$
3. $(\lambda a, b) = \lambda(a,b)$. $\quad a, b \in \mathcal{L}$
4. $(a,a) \geq 0$ *като* $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = \vartheta$. $\quad a \in \mathcal{L}$

$(a,b)$ *се нарича скаларно произведение на* $a$ *и* $b$, *а* $1) \div 4) -$ *аксиоми за скаларно произведение.*

**Определение.** *Нека $\mathcal{L}$ е линейно пространство над $F$. Казваме, че векторите $a_1,...,a_k \in \mathcal{L}$ са пораждащо множество на $\mathcal{L}$, ако $\forall$ $x \in \mathcal{L}$ е линейна комбинация на $a_1,...,a_k$, т.е. $\exists$ $\lambda_1,...,\lambda_k \in F : x = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k$.*

**Определение.** *Казваме, че линейното пространство $\mathcal{L}$ е крайномерно, ако има крайно пораждащо множество.*

**Определение.** *Казваме, че едно линейно пространство има **базис,** ако съществува краен брой вектори $a_1,...,a_k$, за които*

*1) са линейно независими, т.е. $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k = \vartheta \Leftrightarrow \lambda_i = 0$ за $i = \overline{1,n}$.*

*2) $\{a_1,...,a_k\}$ е пораждащо множество на линейното пространство.*

**Определение.** *Нека $\mathcal{L}$ е евклидово пространство и $e_1,...,e_n$ е базис на $\mathcal{L}$. Казваме, че този базис е ортогонален, ако $\forall$ два независими вектора са ортогонални, т.е. $(e_i, e_j) = 0$ за $i \neq j$.*

**Определение.** *Нека $\mathcal{L}$ е евклидово пространство и $e_1,...,e_n$ е базис на $\mathcal{L}$ Казваме, че този базис е ортонормиран, ако:*

*1) $e_1,...,e_n$ е ортогонален.*

*2) $|e_1| = |e_2| = ... = |e_n| = 1$ $\quad (|e_i| = \sqrt{(e_i, e_i)}$ – норма на $e_i$ ).*

**Определение.** *Линеен оператор $\mathcal{A}$ на линейното пространство $\mathcal{L}$, наричаме всяко изображение[1] на $\mathcal{L}$ в себе си, т.е. $\mathcal{L} \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{L}$ и са изпълнени:*

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$.
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$,

*т.е. изображението е линейно[2].*

***<u>Матрица на линеен оператор</u>***

Нека $\mathcal{L}$ е линейно пространство, $dim\mathcal{L}$ = n, $e_1,...,e_n$ е базис на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ е линеен оператор.За $\forall x \in \mathcal{L}$ има вида $x = \xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n \Rightarrow$

$\mathcal{A}(x) = \xi_1 \mathcal{A}(x_1) + ... + \xi_n \mathcal{A}(x_n)$.

Ясно е, че ако знаем $\mathcal{A}(e_1),...,\mathcal{A}(e_n)$ може да разберем и образа на всеки един

---

[1] Нека $M$ и $M'$ са две множества. Тогава $\varphi : M \to M'$ или $M \xrightarrow{\varphi} M'$ наричаме изображение на множество $M$ в множество $M'$, ако за $\forall m \in M$ $\exists$ единствен елемент $m' \in M'$, така че $m \xrightarrow{\varphi} m'$, пишем също $\varphi(m) = m'$. $m'$ се нарича образ на $m$.

[2] Нека $\mathcal{L}$ и $\mathsf{L}'$ линейни пространства над полето $F$ и $\mathsf{L} \xrightarrow{\varphi} \mathsf{L}'$ е изображение. Казваме, че $\varphi$ е линейно изображение, ако:

1. $x \xrightarrow{\varphi} x'$, $y \xrightarrow{\varphi} y'$ тогава $x + y \xrightarrow{\varphi} x' + y'$ за $x, y \in \mathsf{L}$ и $x', y' \in \mathsf{L}'$.
2. $x \xrightarrow{\varphi} x'$ тогава $\lambda x \xrightarrow{\varphi} \lambda x'$, за $x \in \mathsf{L}$, $x' \in \mathsf{L}'$ и $\lambda \in F$.

вектор $\mathcal{A}(x)$, т.е. $\mathcal{A}(e_1),\dots,\mathcal{A}(e_n)$ характеризират напълно линейния оператор.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\
&\mathcal{A}(e_2) = \alpha_{21}e_1 + \cdots + \alpha_{2n}e_n \\
&\vdots \\
&\mathcal{A}(e_n) = \alpha_{n1}e_1 + \cdots + \alpha_{nn}e_n
\end{aligned}$$

**Определение.** *Матрицата* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ *се нарича матрица на линейния оператор* $\mathcal{A}$ *в базиса* $e_1,\dots,e_n$.

**Определение.** *Нека* $A$ *е квадратна матрица. Тогава* $\det(A-\lambda E)$ *се нарича характеристичен полином на матрицата* $A$ *и се бележи с* $f_A(\lambda)$.

**Определение.** *Нека* $\mathcal{A}$ *е линеен оператор, който в даден базис има матрица* $A$. *Характеристичният полином на* $A$ *се нарича също така характеристичен полином на линейния оператор* $\mathcal{A}$.

**Определение.** Нека $L$ е линейно пространство над полето F и $\mathcal{A}$ е линеен оператор. Казваме, че векторът $u \in L$ е собствен вектор на линейния оператор $\mathcal{A}$, ако:

1. $u \neq \vartheta$.
2. $\mathcal{A}(u) = \lambda u$ за някое $\lambda \in F$

числото $\lambda$ от равенство 2. се нарича собствена стойност на линейния оператор $\mathcal{A}$ съответстваща на собствения вектор $u$.

**Твърдение.** *Всеки собствен вектор има единствена собствена стойност.*

**ВАЖНО:** *Нека* $L$ *е крайномерно линейно пространство над полето* $F$ *и* $\mathcal{A}$ *е линеен оператор. Собствените стойности на линейния оператор* $\mathcal{A}$ *са тези от корените на характеристичния полином на матрицата на* $\mathcal{A}$ *в някакъв базис, които принадлежат на полето F и само те.*

## Въпрос 3

## Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства.Основни свойства.Теорема за диагонализация

**Определение.** *Нека $A$ е квадратна матрица.Казваме че тази матрица е симетрична, ако при транспониране тя не се променя т.е. $A' = A$.*

**Определение.** *Нека $\mathcal{A}$ е линеен оператор в евклидово пространство.Казваме, че този оператор е симетричен, ако $\left(\mathcal{A}(x), y\right) = \left(x, \mathcal{A}(y)\right)$ за $\forall\ x, y$.*

**Теорема.** *Ако $A$ е симетрична матрица с реални елементи $a_{ij} \in \mathbf{R}$, то корените на характеристичния полином са реални числа.*

**Доказателство.**

Както знаем, характеристичният полином има вида $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Понеже елементите на $A$ са реални, следва, че коефициентите на $f(\lambda)$ също са реални числа. И тъй като всеки ненулев полином с реални коефициенти има комплексни корени (вж. Теорема на Даламбер), то ще трябва да докажем, че комплексните корени на $f(\lambda)$ всъщност са реални.

Нека $\lambda_0$ е корен на $f(\lambda)$ т.е. $f(\lambda_0) = \det(A - \lambda_0 E) = 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

От $\det(A - \lambda_0 E) = 0$, следва, че хомогенната система

$$(A - \lambda_0 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

има ненулево решение $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n), \beta_i \in \mathbb{C}$ .Имаме, че

$$(A - \lambda_0 E)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Умножаваме от ляво с $(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_n)$т.е. комлексноспрегнатите числа на $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$.Получаваме,

$$(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_n) A\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_n)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \lambda_0 (\overline{\beta}_1\beta_1, \overline{\beta}_2\beta_2, ..., \overline{\beta}_n\beta_n) =$$

$$= \lambda_0 \underbrace{(\beta_1^2, \beta_2^2, ..., \beta_n^2)}_{\Delta}$$

Следователно, $\lambda_0 = \dfrac{\gamma}{\Delta}$, където

$$\gamma = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_n) A\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\overline{\beta}_1, \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\overline{\beta}_2, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}\overline{\beta}_n\right)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{\beta}_i\beta_j$$

и $\Delta \in \mathbf{R}$ т.е. за да бъде $\lambda_0$ реално, трябва да установим, че $\gamma \in \mathbf{R}$ .Да разгледаме комплексноспрегнатото на $\gamma$ :

$$\overline{\gamma} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a}_{ij} \overline{\overline{\beta}}_i \overline{\beta}_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \beta_i \overline{\beta}_j \quad [3]$$

Сега трябва да установим, че $\gamma = \overline{\gamma}$ .Те се състоят от $n^2$ на брой събираеми, като при това коефициентът пред $\overline{\beta}_i \beta_j$ в $\gamma$ е равен на $a_{ij}$ , а коефициентът пред $\overline{\beta}_i \beta_j$ в $\overline{\gamma}$ е равен на $a_{ji}$ .От симетричността на матрицата $A$ следва, че $a_{ij} = a_{ji}$ , следователно $\gamma = \overline{\gamma}$ т.е. $\gamma \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbf{R}$ .
С това теоремата е доказана.

**Теорема.** *Нека* $\mathsf{L}$ *е ненулево крайномерно евклидово пространство. Ако линейният оператор* $\mathcal{A}$ *в* $\mathsf{L}$ *е симетричен тогава в* $\mathsf{L}$ *съществува ортонормиран базис от собствени вектори на* $\mathcal{A}$*. Разбира се, в този базис, матрицата ще бъде диагонална, като по диагонала са собствените стоиности на линейния оператор.*

**Доказателство.**

Нека имаме, че $\dim \mathsf{L} = n$, $n \geq 1$. Прилагаме индукция по $n$ :

*База* $n = 1$. $\mathsf{L} = \{\lambda u \mid u \neq \vartheta, \lambda \in \mathbb{C}\}$ .Ясно е, че всеки вектор от $\mathsf{L}$ се изобразява в пропорция на вектора $u$ т.е. $\mathcal{A}(u) = \lambda u$ , $\mathcal{A}(u) \in \mathsf{L}$ $u$ е собствен вектор, а $\dfrac{u}{|u|}$ ще бъде както собствен така и нормиран.

*Нека* $n \geq 2$ . Ако вземем ортонормиран базис, тогава в него матрицата на разглеждания оператор е симетрична и съгласно предната теорема корените на характеристичният полином и следователно са собствени стойности на линейния оператор.

И така, разглеждания линеен оператор има собствена стойност, следователно и собствен вектор.Нека $\lambda_1$ е собствена стойност и $e_1$ е собствен вектор т.е. $\mathcal{A}(e_1) = \lambda_1 e_1$ , но $\mathcal{A}\left(\dfrac{e_1}{|e_1|}\right) = \lambda_1 \dfrac{e_1}{|e_1|}$ .Следователно може да предположим, че $e_1$ е нормиран т.е. $|e_1| = 1$ . $e_1$ ще бъде първият вектор на търсеният базис.Допълваме $e_1$ до получаване на базис на $\mathsf{L}$ : $e_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ .По метода на Грам-Шмид правим базиса $e_1, e_2', e_3', \ldots, e_n'$, който е ортонормиран базис на $\mathsf{L}$ . Полагаме $\mathsf{L}_1 = l(e_2', e_3', \ldots, e_n')$ .Понеже $e_2', e_3', \ldots, e_n'$ са линейно независими следва, че $\dim \mathsf{L}_1 = n - 1$ .

Нека $x \in \mathsf{L}_1, x = \xi_2 e_2' + \xi_3 e_3' + \ldots + \xi_n e_n'$ .

$$\mathcal{A}(x) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2' + \mu_3 e_3' + \ldots + \mu_n e_n'$$

$$(\mathcal{A}(x), e_1) = \mu_1 (e_1, e_1) = \mu_1$$

$$(x, \mathcal{A}(e_1)) = (x, \lambda_1 e_1) = \lambda_1 \left(\xi_2 (e_2', e_1) + \xi_3 (e_3', e_1) + \ldots + \xi_n (e_n', e_1)\right) = 0$$

Следователно $\mu_1 = 0$ .От това следва, че $\mathcal{A}(x) \in \mathsf{L}_1$ .

---

[3] Ако $c \in \mathbb{C}$ то $\overline{\overline{c}} = c$ , а ако $r \in \mathbf{R}$ то $\overline{r} = r$ .

Получихме, че ако $x \in L_1$, то $\mathcal{A}(x) \in L_1$.Това ни дава право да разгледаме $\mathcal{A}$ като линеен оператор в $L_1$ и $\mathcal{A}$ ще бъде симетричен в $L_1$.

Нека $\dim L_1 = n-1$. За $\mathcal{A}$ в $L_1$ прилагаме индукционното предположение и следователно в $L_1$ съществува ортонормиран базис $e_2, e_3, \ldots, e_n$ от собствени вектори на $\mathcal{A}$.

Разглеждаме $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$.Това е желаният базис.

$\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i, i = \overline{1,n}.$

Защо $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ е ортонормиран?

Всички вектори са нормирани, $e_2, e_3, \ldots, e_n$ е ортогонална система.Остава да изясним защо $e_1$ е ортогонален на $e_2, e_3, \ldots, e_n$?

Понеже $e_2 \in L_1, e_2 = \alpha_2 e_2' + \ldots + \alpha_n e_n' \Rightarrow (e_2, e_1) = (\alpha_2 e_2' + \ldots + \alpha_n e', e_1) = 0$.

Теоремата е доказана☺

От равенствата $\mathcal{A}(e_i) = \lambda_i e_i, i = \overline{1,n}$ следва, че в получения базис линейният оператор ще има матрица $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

**Определение.** *Казваме, че квадратната матрица A е ортогонална, ако тя е обратима и* $A^{-1} = A'$.

**Теорема.** *За всяка симетрична матрица A съществува ортогонална матрица T, такава, че T'AT е диагонална.*

**Доказателство.**

Нека $A$ е квадратна матрица от $n$-ти ред, и $L$ е евкидово пространство и $\dim L = n$.Разглеждаме ортонормиран базис $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$. Нека $\mathcal{A}$ е линеен оператор който в този базис има матрица $A$.Понеже $A$ е симетрична следва, че $\mathcal{A}$ е симетричен оператор.Съгласно предната теорема съществува ортонормиран базис $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ от собствени вектори на $\mathcal{A}$,т.е. $\mathcal{A}(e_i^*) = \lambda_i e_i^*, i = \overline{1,n}.$ В този базис $\mathcal{A}$ има матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT$, където $T$ е матрица на прехода от базиса $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ към базиса $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$.Понеже това са ортонормирани базиси $T$ е ортогонална т.е. $T^{-1} = T'$.