Въпрос ~~15~~ 12
Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения

Определение 1. *Нека φ е изображение.Точката ξ за която $\xi = \varphi(\xi)$ се нарича неподвижна точка на изображението φ.*

Определение 2. *Казваме, че φ е непрекъснато изображение на интервала $[\alpha, \beta]$ в себе си, ако за всяко $x \in [\alpha, \beta]$ то $\varphi(x) \in [\alpha, \beta]$.*

Твърдение. *Нека φ е непрекъснато изображение на интервала $[\alpha, \beta]$ в себе си.Тогава φ има поне една неподвижна точка в $[\alpha, \beta]$.*

Доказателство. Ако $\alpha = \varphi(\alpha)$ то α е неподвижна точка.Ако $\beta = \varphi(\beta)$ то β е неподвижна точка.Разглеждаме случая когато $\alpha \neq \varphi(\alpha)$ и $\beta \neq \varphi(\beta)$.Тъй като φ е непрекъснато изображение на интервала $[\alpha, \beta]$ в себе, то $\varphi(\alpha) \in [\alpha, \beta]$ и $\varphi(\beta) \in [\alpha, \beta]$, то ще имаме, че

$$\alpha < \varphi(\alpha),\ \varphi(\beta) < \beta$$

Нека да разгледаме функцията $r(x) = x - \varphi(x)$.Тя е непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ и

$$r(\alpha) = \alpha - \varphi(\alpha) < 0$$
$$r(\beta) = \beta - \varphi(\beta) > 0$$

Следователно съществува точка $\xi \in (\alpha, \beta)$, такава, че $r(\xi) = 0$.От дефиницията на функцията $r(x)$ получаваме, че $\xi = \varphi(\xi)$, т.е. ξ е неподвижна точка. Твърдението е доказано.

Нека $f(x)$ е функция определена в интервала $[\alpha, \beta]$.Ще изследваме уравнението

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Това уравнение можем да запишем във вида:

$$x = \varphi(x) \tag{1.2}$$

Това може да стане лесно, например като добавим x от двете страни на $f(x) = 0$, или с друго преобразувание.Очевидно е, че ако точка ξ е неподвижна за изображението φ дефинирано чрез (1.2), то ξ е решение на уравнението (1.1).Следователно, задачата се свежда до намиране на неподвижна точка на φ.

Нека да изберем произволно $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и да построим редицата

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1.3}$$

по правилото

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.4}$$

Искаме редицата (1.3) построена по правилото (1.4) да клони към корена ξ на уравнението (1.2), т.е. ξ да бъде неподвижна точка.Ясно е, че правилото (1.4) не поражда такава редица за произволна функция φ.Ще търсим условия за φ, при които редицата (1.3) е сходяща към корена ξ.

Определение 3. *Казваме, че g(x) удоволетворява условието на Липшиц с константа q в интервала* $[\alpha, \beta]$, *ако*

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y|, \text{ за } \forall x, y \in [\alpha, \beta]$$

Определение 4. *Изображението* φ, *което удоволетворява условието на Липшиц с константа по-малка от единица, се нарича свиващо изоражение.*[1]

Теорема. *Нека* φ *е свиващо непрекъснато изображение на интервала* $[\alpha, \beta]$ *в себе си.Тогава*

А) Уравнението $x = \varphi(x)$ *има единствен корен* $\xi \in [\alpha, \beta]$

(изображението φ *има единствена неподвижна точка).*

Б) Редицата (1.3) построена по правилото (1.4) клони към ξ *при* $n \to \infty$. *Нещо повече,*

$$|x_n - \xi| \leq q^n(\beta - \alpha) \qquad (1.5)$$

за $\forall n$, *където q е константата на Липшиц(q<1).*

Доказателство.

А) От твърдението следва, че φ има поне една неподвижна точка.Ще докажем, че тя е и единствена.Да допуснем, че

$$\xi_1 \neq \xi_2, \xi_1 = \varphi(\xi_1), \xi_2 = \varphi(\xi_2), \xi_1 \in [\alpha, \beta], \xi_2 \in [\alpha, \beta]$$

Имаме, че

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &= |\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| \\ &\leq q|\xi_1 - \xi_2| \qquad \text{(от условието на Липшиц)} \\ &< |\xi_1 - \xi_2| \qquad \text{(от това, че q<1)} \end{aligned}$$

Стигнахме до противоречие, с което единтвеноста е доказана.

Б) Ще докажем оценката (1.5) от която ще следва условието Б).

Имаме, че

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| \leq q|x_{n-1} - \xi| \\ &= q|\varphi(x_{n-2}) - \varphi(\xi)| \leq q^2|x_{n-2} - \xi| \\ &= q^2|\varphi(x_{n-3}) - \varphi(\xi)| \leq q^3|x_{n-3} - \xi| \\ &\ldots \\ &\leq q^n|x_0 - \xi| \leq q^n(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

тъй като $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и $\xi \in [\alpha, \beta]$, то $|x_0 - \xi| \leq (\beta - \alpha)$.

С това теоремата е доказана.

Итерационният метод за намиране на решение на (1.1) с помоща на φ (удоволетворяващо условията на теоремата) и чрез редицата (1.3) построена по правилото (1.4) се нарича *метод на свиващите изображения.*

---

[1] Разтоянието между образите $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ е строго по-малко от праобразите x и y ,т.е. φ “свива” разтоянията.

Следствие. *Нека ξ е корен на уравнението $x=\varphi(x)$ и φ има непрекъсната производна в околност U на ξ, за която $|\varphi'(\xi)|<1$, то при достатъчно добро начално приближение x_0 итерационният процес породен от φ, е сходящ със скороста на геометрична прогресия,т.е. съществуват константи C>0 и 0<q<1 , такива, че*

$|x_n-\xi|\le Cq^n$ *за* $\forall n$

Доказателство. Тъй като $\varphi'(t)$ е непрекъсната в U и $|\varphi'(\xi)|<1$, то съществуват $q<1$ и $\varepsilon>0$ такива, че

$|\varphi'(t)|\le q$ за $\forall t\in[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$

Освен това при $t\in[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ имаме

$|\varphi(t)-\xi|\le q|t-\xi|\le q\varepsilon<\varepsilon$

т.е. $\varphi(t)\in[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$.Следователно φ е свиващо изображение на интервала $[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$в себе си.Тогава всички твърдения на следствието следват от доказаната вече теорема.

За да характеризираме скороста на даден итерационен процес въвеждаме понятието *ред на сходимост*.

Определение 5. *Казваме, че итерационният процес $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ има ред на сходимост p, ако съществуват положителни константи C и $q<1$, такива, че $|x_n-\xi|\le Cq^{p^n}$.*

Метод на хордите

Нека $[\alpha,\beta]$ е краен интервал и $f(x)$ е два пъти диференцируема в него функция, удоволетворяваща условията

А) $f(\alpha)f(\beta)<0$

Б) $f'(x)f''(x)\ne 0$ *за* $\forall x\in[\alpha,\beta]$

При тези условия съществува единствен корен[2] ξ на уравнението $f(x)=0$ в интервала $[\alpha,\beta]$.

Построяваме редицата $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ по следният начин:

- Прекарваме линия l_0 през точките $(\alpha,f(\alpha))$ и $(\beta,f(\beta))$.Тя пресича оста x в точка x_0(начално приближение).

  Точката x_0 лежи отляво на корена ξ, ако $f(x)$ е изпъкнала или отдясно на ξ, ако $f(x)$ е вдлъбната.

---

[2] От А) следва, че съществува точка ξ такава, че $f(\xi)=0$.
От Б) следва, че f' и f'' не се анулират в $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ имат постоянен знак в този интервал $\Rightarrow$ f е строго монотонна функция , при това изпъкнала ако $f''>0$ или вдлъбната ако $f''<0$.Но една монотонна функция пресича оста x точно в една точка.

- Прекарваме линия l_1 през точките $(x_0, f(x_0))$ и $(\beta, f(\beta))$ (или през точките $(\alpha, f(\alpha))$ и $(x_0, f(x_0))$ ако $f''(x) < 0$). Тя пресича оста x в точка x_1 и т.н.

Търсим аналитичен израз за x_{n+1}.

Приемаме, че $f''(x) > 0$.Тогава правата l_{n+1} има уравнение:

$$y(x) = \frac{1}{\beta - x_n}\left[\left(f(\beta) - f(x_n)\right)x + \left(\beta f(x_n) - x_n f(\beta)\right)\right]$$

Но x_{n+1} е корен на уравнението на правата l_{n+1} т.е. $y(x_{n+1}) = 0$ откъдето получаваме

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\beta) - f(x_n)}(\beta - x_n)$$

Твърдение. *Итерационният процес породен от*

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(\beta) - f(x)}(\beta - x)$$

е сходящ със скороста на геометрична прогресия, при условие, че коренът е отделен в достатъчно малък интервал.

Доказателство. Вижда се, че $x = \varphi(x)$ е еквивалентно на $f(x) = 0$. Искаме да приложим следствието.Търсим $\varphi'(\xi)$:

$$\varphi'(\xi) = 1 - \frac{f'(\xi)}{f(\beta)}(\beta - \xi) = \frac{f(\beta) - f'(\xi)(\beta - \xi)}{f(\beta)} \qquad (1.6)$$

след като диференцираме и помним, че $f(\xi) = 0$.

Като използваме формулата на Тейлор:

$$f(\beta) = f(\xi) + f'(\xi)(\beta - \xi) + \frac{f''(\eta_1)}{2}(\beta - \xi)^2 \qquad (1.7)$$

$$f(\beta) = f(\xi) + f'(\eta_2)(\beta - \xi) \qquad (1.8)$$

където $\eta_1, \eta_2 \in (\alpha, \beta)$ и заместим (1.7) в числителя на (1.6), а (1.8) в знаменателя на (1.6) получаваме

$$\varphi'(\xi) = \frac{f''(\eta_1)}{2f'(\eta_2)}(\beta - \xi)$$

Нека

$$M = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |f''(t)|, m = \min_{t \in [\alpha, \beta]} |f'(t)|$$

От това, че $f'(t) > 0$ то $M > 0$ и $m > 0$.Тогава

$$|\varphi'(\xi)| \le \frac{M}{2m}|\beta - \xi|$$

$|\varphi'(\xi)|$ може да стане по-малко от произволно, отнапред избрано $q < 1$, стига $\beta - \xi$ да е достатъчно малко,т.е. отделили сме корена в достатъчно малък интервал.От тук по следствието получаваме:

$$|x_n - \xi| \le Cq^n$$

т.е. сходящ със скороста на геометрична прогресия.

Метод на секущите

Нека $f(x)$ удовлетворява условията а),б) от предишният пример.
Построяваме редицата $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ по следният начин:

- Избираме $x_0 = a$ или $x_0 = b$, така че да е изпълнено условието $f(x_0)f''(x_0) > 0$
- Избираме произволна точка x_1 за която $\xi < x_1 < x_0$.Но как да изберем такава точка, при положение, че ние не знаем точката ξ(Тази точка търсим)? Това условие е изпълнено, ако $f(x_0)f(x_1) > 0$(т.е. те са от една и съща страна на ξ), а ако $f(x_1) = 0$ то спираме, тъй като сме намерили корена.
- След избора на x_0, x_1 намираме x_2 като пресечна точка на секущата l_1, минаваща през точките $\left(x_0, f(x_0)\right)$ и $\left(x_1, f(x_1)\right)$, и оста x
  (т.е. нула на $l_1(x)$).
- x_3 - нула на секущата l_2, минаваща през $\left(x_1, f(x_1)\right)$ и $\left(x_2, f(x_2)\right)$

...

- x_{n+1} - нула на секущата l_n, минаваща през $\left(x_n, f(x_n)\right)$ и $\left(x_{n+1}, f(x_{n+1})\right)$

Търсим аналитичен израз за x_{n+1} чрез x_n и x_{n-1}:
Намираме уравнението за l_n, и от това, че x_{n+1} му е нула , получаваме

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}\left(x_{n-1} - x_n\right)$$

Доказва се, че $\{x_n\} \to \xi$ (корена на $f(x)$) с ред на сходимост $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$
Следователно, *този метод е по-бърз от метода на хордите.*

Метод на Нютон (метод на допирателните)

Предполагаме отново, че $f(x)$ удовлетворява условията а),б) от предишният пример.

Избираме $x_0 = a$ или $x_0 = b$, така че да е изпълнено условието $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Следващото приближение x_1 намираме като пресечна точка на оста x с допирателната d_0 към правата $y = f(x)$ в точката x_0.И т.н. x_{n+1}-нулата на допирателната d_n към $y = f(x)$ в x_n.

Отново търсим аналитичен израз за x_{n+1}.Понеже,

$$d_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)\left(x - x_n\right)$$

получаваме

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Редът на сходимост е 2 при достатъчно добро начално приближение x_0.
Следователно, *този метод е най-бърз от всичките три разглеждани метода.*