Граници, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива

1.

Преди да дефинираме понятието граница на функция, да припомним някои понятия.

Дефиниция 1.1 (редица от реални числа)

Казваме, че е зададена редица от $\mathbb{R}$ ако на всяко естествено $n\epsilon\mathbb{N}$ е съпоставено реално $a_n\epsilon\mathbb{R}$.

Дефиниция 1.2 (граница на редица)

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от реални числа е сходяща и клони към числото а $\epsilon\mathbb{R}$ ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува такова $\nu\epsilon\mathbb{N}$, че за всяко n > ν да е изпълнено $|a_n - a| < \epsilon$.

Записано иначе,

$$\forall\epsilon > 0\, \exists\nu \epsilon \mathbb{N} : n > \nu \to |a_n - a| < \epsilon$$

Дефиниция 1.3 (точка на сгъстяване за множество M ⊂ $\mathbb{R}$)

Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване за множеството M ако във всяка околност на x_0 има поне един елемент от M, различен от x_0.

Дефиниция 1.4 (дефиниция на *Хайне* за граница на функция)

Казваме, че реалнозначната функция f(x) клони към числото а при x клонящо към x_0 (тук x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционното множество D_f на f) , ако за всяка редица $\underset{x_n\neq x_0\,,\,x_n\epsilon D_f}{x_n \to x_0}$ имаме $f(x_n) \to a$, в смисъл на дефиниция 1.2.

Дефиниция 1.5 (дефиниция на *Коши* за граница на функция)

Казваме, че реалнозначната функция f(x) клони към числото а при x клонящо към x_0 (тук x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционното множество D_f на f) ако за всяко $\epsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$,

че $x\epsilon D_f$ & $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - a| < \epsilon$

Теорема 1.1.

Дефинициите на Хайне и Коши за граница на функция са еквивалентни.

Доказателство:

(=>) Нека f(x)-> а спрямо дефиницията на Хайне. Допускаме, че не е вярно, че f(x)-> а спрямо дефиницята на Коши. Тогава съществува

$$\epsilon_0 > 0: \forall\delta > 0\, \exists\, x_\delta\epsilon(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\&x_\delta \neq x_0\&|f(x_\delta) - a| \geq \epsilon_0$$

Нека последователно взимаме $\delta = \frac{1}{n}$ и да означим $x_\delta = x_{\frac{1}{n}}$ с x_n. Получихме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такава, че $x_n \neq x_0$ & $|x_n\text{-}x_0| < \delta$ & $|f(x_n) - a| \geq \epsilon_0$. Но тази редица е сходяща към x_0 и следователно е нарушена дефиницията на Хайне.

(<=)Нека f(x)-> а спрямо дефиницията на Коши. Нека $\underset{x_n\neq x_0\,,\,x_n\epsilon D_f}{x_n \to x_0}$. Искаме да докажем, че редицата $f(x_n) \to a$. Нека $\epsilon > 0$. От дефиницията на Коши избираме $\delta > 0$, че $x\epsilon D_f$ & $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - a| < \epsilon$. Но от това, че $\underset{x_n\neq x_0\,,\,x_n\epsilon D_f}{x_n \to x_0}$ имаме, че има такова $\nu\epsilon\mathbb{N}$, че за всяко n > ν да е изпълнено $|x_n - x_0| < \delta$. Така доказахме, че от $\underset{x_n\neq x_0\,,\,x_n\epsilon D_f}{x_n \to x_0}$ следва $f(x_n) \to a$.

<u>Дефиниция 1.6</u> (непрекъснатост на функция в точка по Хайне)

Казваме, че f(x) е непрекъсната в точката си на сгъстяване x_0 ако за всяка редица $\underset{x_n \neq x_0\,,\, x_n \epsilon D_f}{x_n \to x_0}$ редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и границата и е $f(x_0)$.

<u>Дефиниция 1.7</u> (непрекъснатост на функция в точка по Хайне)

Казваме, че f(x) е непрекъсната в точката си на сгъстяване x_0 ако за всяко $\epsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$, че $x \epsilon D_f$ & $|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Да отбележим, че може да имаме само „лява" или само „дясна" непрекъснатост. Това е по-слаб случай, когато разглеждаме клонящи редици от x към x_0 съответно само от ляво или само от дясно

($x < x_0$ / $x > x_0$). От тази гледна точка можем да дефинираме непрекъснатост в точка по нов начин: една функция е непрекъсната в точка x_0 ако е непрекъсната в точката от ляво и от дясно.

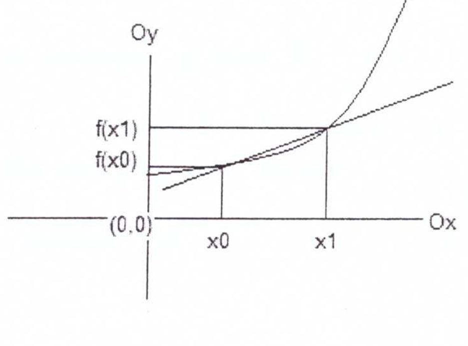
<u>**2.**</u>

<u>Дефиниция 2.1</u> (производна)

Казваме, че функцията f(x) има *производна* в точка x_0 – точка на сгъстяване за D_f, , ако *диференчното частно* $\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$ има граница при $x \to x_0$. Когато тази граница съществува, ще я наричаме *произовдна* на f в x_0. Бележим по няколко начина : $f'(x_0)$, $\frac{d}{dx}f|_{x=x_0}$

<u>Физичен смисъл на производната:</u> Нека разгледаме някоя физична величина f, зависеща от времето(най- често се взима изминато разтояние от материална точка – път). *Средна скорост на изменение* на f в интервала $[t_0, t_1]$ се нарича $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$. *Моментна скорост* на величината f в момента t_0 наричаме стойността на средната скорост за t_1 произволно близко до t_0. Оказва се, че именно това е производната на f в точката x_0. В случая на f=S(t) – изминат път, S'(t)=V(t) е скоростта на движение. V'(t)=A(t) пък е ускорението.

<u>Геометричн смисъл на производната:</u>



Нека разгледаме функция, дефинирана в [a, b] и нека $a \le x_0 < x_1 \le b$. Да разгледаме точките
$(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ от графиката на функцията и през тях прекараме права. Тя има уравнение

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Частното $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ е равно на тангенса на ъгъла, който правата сключва с Ox^+. Оставяйки x_1 да клони към x_0 получаваме, че този коефициент клони към производната на функцията в точка x_0, а геометрично правата, която построихме „клони" към допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, f(x_0))$.

3.

Теорема 3.1.

Нека f, g са диференцируеми в отворен интервал, съдържащ т. x_0. Тогава

3.1.1 $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

3.1.2 $(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$

3.1.3 Ако $g(x) \neq 0$ близо до x_0. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

3.1.4 $(f(g))'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$

Доказателство:

3.1.1:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

3.1.2:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f.g)(x) - (f.g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{[(f.g)(x) - f(x_0).g(x)] + [f(x_0)g(x) - (f.g)(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3.1.3:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{[f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)] + [f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)]}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{g(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x\to x_0} g(x)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

3.1.4:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\substack{y=g(x);y_0=g(x_0)\\ y\to y_0}}\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

(Тук използваме непрекъснатостта на g(x) , която е следствие от диференцируемостта и.
Забележка: Навсякъде в доказателствата използвахме свойствата на границите, а именно, че граница от сума/разлика/произведение/частно е сума/разлика/произведение/частно от граници.

Теорема 3.2. В сила са следните равенства

3.2.1 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, x >0

3.2.2 $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, x>0

3.2.3 $(e^x)' = e^x$

3.2.4 $(\sin x)' = \cos x$

3.2.5 $(\cos x)' = -\sin x$

Доказателство:

3.2.1.

$$\ln'(x_0) = \lim_{x->x_0}\frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x->x_0}\frac{\ln(1 + \frac{x}{x_0} - 1)}{x - x_0} = \lim_{x->x_0}\frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{\frac{x - x_0}{x_0}x_0} = \frac{1}{x_0}$$

3.2.2.

$$(\log_a(x_0))' = \lim_{x->x_0}\frac{\log_a(x)-\log_a(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x->x_0}\frac{\log_a(\frac{x}{x_0})}{x-x_0} = \lim_{x->x_0}\frac{\frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{\ln a}}{x-x_0} =$$

$$\frac{1}{\ln a}\lim_{x->x_0}\frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0} \overset{3.2.1}{=} \frac{1}{x_0\ln a}$$

3.2.3 Използваме правилото за диференциране на сложна функция.

$$x = \ln e^x \;|\frac{d}{dx} \leftrightarrow 1 = \frac{1}{e^x}.(e^x)' \leftrightarrow (e^x)' = e^x$$

3.2.4

$$\sin'(x_0) = \lim_{x->x_0}\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x->x_0}\frac{2\sin\frac{(x - x_0)}{2}\cos\frac{(x + x_0)}{2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x->x_0}\cos\frac{(x + x_0)}{2}\lim_{x->x_0}\frac{\sin\frac{(x - x_0)}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos(x_0)$$

3.2.5 $\cos'(x_0) = \sin'(\frac{\pi}{2} - x_0) \overset{\text{сложна функция}}{=} \cos(\frac{\pi}{2} - x_0)(-1) = -\sin(x_0)$

Теорема 3.3. Нека y=f(x) е непрекъснато- диференцируема в околност на x_0. Нека обратната и в тази околност е $x=f^{-1}(y)$ и $y_0=f(x_0)$. Тогава за производната на обратната функция на y имаме

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказателство:

От обратимостта имаме, че $x = f(f^{-1}(x))$. Диференцираме това равенство в т. x_0, прилагайки правилото за диференциране на обратна функция.

Следствие(Пример):

$$x\epsilon(-1{,}1) \to (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Наистина, $\sin(\arcsin(x)) = x$. По теорема 3.3

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.

Дефиниция 4.1 Нека $f{:}\,\Delta \to \mathbb{R}$. Казваме, че функцията $F{:}\,\Delta \to \mathbb{R}$ е примитивна на f , ако F'(x)=f(x).

Теорема 4.1. Нека $f{:}\,\Delta \to \mathbb{R}$. Нека $\mathrm{F}{:}\,\Delta \to \mathbb{R}$ е примитивна на f, тогава

4.1.1 Функцията F+C също е примитивна за f (C е произволна реална константа).

4.1.2 Обратното, ако Φ е някаква примитивна за f , то съществува константа C, че Φ=F+C.

Доказателство:

4.1.1 Нека C е константа. Понеже производна от константа е 0, то (F+C)'=F'+0=f.

4.1.2 Да разгледаме $\Psi = \Phi - F \to \Psi' = \Phi' - F' = f - f = 0$. Но тогава Ψ=C .

Дефиниция 4.2 Изразът F(x)+C, където F е примитивна на f в Δ, ще наричаме неопределен интеграл на f в Δ и ще бележим с нотацията

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Забележка: В темата е доказана първо формулата за производна на логаритъм, а после експонента, не както в анотацията.

Литература:

[1] Математически анализ, Дойчинов

[2] Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива

[3] Записки от лекциите по ДИС1 ,спец. ПМ, на Людмила Николова

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.