Въпрос 7
Степоенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред

Дефиниция: *Нека е дадена редицата от функции*

$$u_1(z), u_2(z), u_3(z), \cdots u_n(z), \cdots \quad z \in \mathbb{C}$$

израз от вида

(1) $$u_1(z)+u_2(z)+u_3(z)+\cdots+u_n(z)+\cdots,$$

се нарича безкраен ред или просто ред, от функции на комплексна променлива.

Множестеото G от точки z, за които реда (1) е сходящ се нарича *област на сходимост на реда.*

Една специална категория редове от функции са така наречените *степенни редове.* Общият вид на един степенен ред е следният

(2) $$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ се наричат коефициенти на реда и тук множеството G от точки z, за които $f(z)$ е сходящ ред се нарича *област на сходимост на реда.*

Дефиниция: *Казваме, че един ред*

$$u_1(z)+u_2(z)+u_3(z)+\cdots+u_n(z)+\cdots$$

е абсолютно сходящ, когато е сходящ редът

$$|u_1(z)|+|u_2(z)|+|u_3(z)|+\cdots+|u_n(z)|+\cdots \quad .$$

Теорема на Абел: *Ако степенният ред*

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

е сходящ за някое $z_0 \in \mathbb{C}$, но $z_0 \neq 0$, то той е абсолютно сходящ за $\forall z : |z| < |z_0|$.

Доказарелство: От сходимоста на реда

$$f(z_0)=a_0+a_1z_0+a_2z_0^2+\cdots+a_nz_0^n+\cdots$$

следва, че редицата от неговите членове $a_0, a_1z_0, a_2z_0^2, \cdots, a_nz_0^n, \cdots$ клони към нула. Поради това тя е ограничена и маже да намерим такова число *M*, че $|a_nz_0^n| < M$.

Нека сега z_1 е такова, че $|z| < |z_0|$. Тогава $q = \left|\frac{z_1}{z_0}\right| < 1$. Имаме следното

$$|a_0| + |a_1||z_1| + |a_2||z_1|^2 + \cdots + |a_n||z_1|^n + \cdots =$$

$$= |a_0| + |a_1||z_0|\left|\frac{z_1}{z_0}\right| + |a_2||z_0|^2\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2 + \cdots + |a_n||z_n|^n\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n + \cdots \leq$$

$$\leq M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n + \cdots = M(1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots) = M\frac{1}{1-q}.$$

От това следва, че $|a_0|+|a_1||z_1|+|a_2||z_1|^2+\cdots+|a_n||z_1|^n+\cdots$ е сходящ и респективно $a_0+a_1z_1+a_2z_1^2+\cdots+a_nz_1^n+\cdots$ ще бъде абсолютно сходящ. Тъй като z_1 беше произволно взета точка, която удовлетворява $|z|<|z_0|$, то теоремата е доказана.

Теорема: *За всеки степенен ред*

(3) $$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

съществува R: при $|z|<R$ реда е абсолютно сходящ; при $|z|>R$ реда е разходящ. При $|z|=R$ са нужни допълнителни изследвания за неговия вид. Когато $R=0$ реда е разходящ. Възможно е също и $R=\infty$ тогава реда е сходящ за $\forall z\in\mathbb{C}$.

Доказателство: Нека допуснем, че даденият ред нито е абсолютно сходящ за $\forall z\in\mathbb{C}$, нито пък е сходящ само в точката $z=0$. Трябва да докажем, че съществува число R: при $|z|<R$ реда (3) е абсолютно сходящ, а при $|z|>R$ (3) е разходящ.

Да означим с G множеството отония z, за които (3) е сходящ. Ако допуснем, че това множество не е ограничено, ще заключим, че реда (3) е абсолютно сходящ за всяко z, а това ще бъде случай, който ние отхвърлихме. Това е така, защото ако вземем каквото и да е z то ще съществува $z_1:|z_1|>|z|, z_1\in G$ и съгласно теоремата на Абел (3) ще бъде сходящ и то абсолютно за $\forall z\in\mathbb{C}$.

Стигаме до извода (от горните резсъждения), че G е ограничено отгоре. Да означим с R неговата горна граница, т.е. $G=\{z:|z|\le R\}$. Ако обаче $R=0$, то бихме имали, че редът е сходящ само за $z=0$ – случай, който ние отхвърлихме.

И така, нека $R>0$. Тогава да вземем $z:|z|<R$ следователно съществува $z_1\in G:|z_1|>|z|$, от където следва, че редът (3) е абсолютно сходящ за z.

Нека сега $z:|z|>R$ то може да вземем $z_1:R<|z_1|<|z|$ и ако допуснем, че редът е сходящ в точката z то той ще бъде абсолютно сходящ и в z_1, което противоречи на дефиницията на R, а именно, че R е точна горна граница на G, което е множеството от точките за които (3) е сходящ.

Получихме, че степенният ред (3) е абсолютно сходящ за $z:|z|<R$ и разходящ за $z:|z|>R$. Теоремата е доказана.

Теорема на Коши-Адамар. *Нека имаме реда*

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

от предишната теорема знаем, че съществува R такова, че за $z:|z|<R$ реда е абсолютно сходящ, а при $z:|z|>R$ реда е разходящ.

Да разгледаме редицата $|a_0|,|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|,\cdots$ и да вземем горната граница на

$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = l$ *тогава* $R = \frac{1}{l}$.

Доказателство: Нека $l = \infty$, тогава $R = 0$. Наистина, да допуснем, че за някое $z_0 \neq 0$ $f(z_0)$ е сходящ. Тогава $|a_n z_0^n| \to 0 \Rightarrow |a_n||z_0^n| \leq g$, където $g \in \mathbb{R}$ и следователно $\sqrt[n]{|a_n|} z_0 \leq \sqrt[n]{g} < g_1$, $g_1 \in \mathbb{R}, g_1 < \infty$ $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{g_1}{|z_0|} < \infty$, но $\sqrt[n]{|a_n|} = l = \infty$ т.е. достигнахме до противоречие.

Нека $l = 0$. Тогава $R = \infty$. Сега като вземем $z_0 \neq 0$, трябва да докажем, че реда е сходящ. Имаме, че $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Нека вземем $\varepsilon = \frac{1}{2|z_0|}$, от $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, следва, че от някои n нагоре $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon = \frac{1}{2|z_0|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}|z_0| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |a_n||z_0|^n \leq \frac{1}{2^n}$ т.е. Получихме, че нашия ред се мажорира от ред, който е абсолютно сходящ, следователно и той ще бъде такъв.

Нека $l \neq \infty$ и $l \neq 0$. Дали $R = \frac{1}{l}$? При $|z_0| < R = \frac{1}{l} \Rightarrow l|z_0| < 1$, трябва да докажем сходимост на $f(z_0)$, а при $|z_1| > R = \frac{1}{l} \Rightarrow l|z_1| > 1$, трябва да докажем разходимост на $f(z_1)$.

Нека $z_0 : l|z_0| < 1$ т.е. $|z_0| < R$. От $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = l$ следва, че от някой момент нататък всички $\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon$ (за $n > N(\varepsilon)$). Вземаме $\varepsilon = \frac{1 - |z_0| l}{2|z_0|}$, тогава

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon = l + \frac{1 - |z_0| l}{2|z_0|} = \frac{1 + |z_0| l}{2|z_0|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}|z_0| < \frac{1 - |z_0| l}{2} = q < 1 \quad (1 + l|z_0| < 2) \Rightarrow$$

$|a_n||z_0|^n < q^n$, където q е частно на геометрична прогресия, следователно нашият ред е абсолютно сходящ.

Нека $z_1 : l|z_1| > 1$ т.е. $|z_1| > R$. Ще докажем, че реда е разходящ за тези z_1. Както знаем, от известно място нататък $\sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon$ (за $n > N(\varepsilon)$). Вземаме $\varepsilon = \frac{|z_1| l - 1}{|z_1|}$, отгава $\sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon = l - \frac{|z_1| l - 1}{|z_1|} = \frac{1}{|z_1|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}|z_1| > 1$ при $n > N(\varepsilon)$ следователно редът е разходящ. Теоремата е доказана.□

Развитие в ред на Тейлор на елементарните функции $e^x, \sin x, \cos x$ за реални стойности на x.

Както знаем, за всяка функция $f(x)$, която е $n+1$ пъти диференцуема в околнот на точката *a,* важи формулата на Тейлор, а именно – за всяка точка от тази околност $a + h$ е валидна следната формула:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n,$$

а изразът R_n се нарича остатъчен член във формата на Лагранж, ако е записан във вида $R_n = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \theta \in (0,1)$. Сега нека предположим, че имаме една функция безброй много пъти диференцуема в околност $(a-\delta, a+\delta)$, на някоя точка a, тази околност може да бъде и интервалът $(-\infty, +\infty)$. Тоагва за тази функция $f(x)$, може да напишем формулата на Тейлор, за всяко положително число n. Сега да си образуваме степенния ред на променливата h

(4) $$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \cdots$$

този ред се нарича *Тейлоров ред* на функцията $f(x)$ относно точката *a*. Ако означим със S_n неговата $(n+1)$-ва частична сума то формулата на Тейлор ни дава

$$f(a+h) = S_n + R_n.$$

Ясно е, че ако за някои стоиности на h имаме, че $R_n \to 0$, то ще имаме, че $\lim S_n = f(a+h)$, т.е. редът (4) ще бъде сходящ и неговата сума ще бъде равна на $f(a+h)$. За ония точки $a+h$, за които това е изпълнено, ние казваме, че функцията $f(x)$ се развива *тейлоров ред.* Обикновено това са точки от някой подинтервал от вида $(a-\delta_1, a+\delta_1)$. За тях имаме

(5) $$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \cdots,$$

където $a+h$ е точка от споменатата околност. Ако положим $a+h=x$, то за (5) ще получим

(6) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots.$$

В специалния случай, когато *a*=0 получаваме така нареченият маклоренов ред на функцията $f(x)$, който има вида

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

в този случай сотатъчният член има вида

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \theta \in (0,1).$$

Когато за всяка точка от някой интервал $(-\delta, \delta)$ е изпълнено равенството

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots,$$

казваме, че $f(x)$ се развива в маклоренов ред в този интервал.Това разбира се, ще се осъществи, когато остатъчният член $R_n \to 0$.

Сега да приложим казаното (написаното) до тук за някои елементарни функции.

e^x :

Имаме, че $f(x)=e^x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=e^x$ и следователно $f^{(n)}(0)=1$ за $\forall n$, то нейният маклоренов ред е следният

(7) $$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots .$$

Нека $x\neq 0$ и към реда $1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+\cdots$ приложим критерия на Даламбер за сходимост. Имаме $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{|x|^n}{n!}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$. Получената граница е по-малка от единица, следователно реда е сходящ, което ще рече, че (8) е абсолютно сходящ за всички $x\neq 0$. Но очевидно е сходящ и за $x=0$.

И така, получихме че (8) е абсолютно сходящ за всяко x, т.е. неговата област на сходимост е интервалът $(-\infty,+\infty)$. Дали обаче неговата сума за всяко x е равна на e^x т.е. дали е изпълнено

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \ ?$$

Това ще е така, ако

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0,\theta\in(0,1).$$

Нека x е произволно число. Имаме $|R_n|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$,а изразът $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ представлява общият член на един сходящ ред, тъй като редът (8) е абсолютно сходящ. Но редицата от членовете на всеки сходящ ред клони към нула, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}R_n=0$. С това доказахме, че функцията e^x е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty,+\infty)$ и той е

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$\sin x$:

Да вземем сега функцията $f(x)=\sin x$ и да докажем формулата за n-тата и' производна, която е

(10) $$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

при n=1: $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Допускаме, че е вярно за n, т.е. изпълнено е $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. Тогава

$f^{(n+1)}(x)=\left(\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Така по индукция доказахме истнността на равенство (10). То всъщност е вярно и за n=0, ако под $f^{(0)}(x)$ разбираме самата функция $f(x)$.

И така (10) е в сила за n=0,1,2,…., от където получаваме $f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ при n=0,1,2,…. Имаме $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k, k=0,1,2,....$

Следователно маклореновият ред на функцията $\sin x$ ще бъде следният

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots .$$

Остатъчният член тук ще бъде във вида

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),\theta\in(0,1)$$

и от неравенството $|R_n|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ следва както видяхме по горе, че $\lim\limits_{x\to\infty}R_n=0$.

И така функцията $\sin x$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty,+\infty)$ и следователно за всяко x е изпълнено равенството

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots .$$

cos x :

Да вземем функцията $f(x)=\cos x$. По аналогичен начин доказваме, както при $\sin x$,доказваме формулата за n-тата и' производна, която е $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. Сега $f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ при n=0,1,2,…. $\Rightarrow$

$f^{(2k)}(0)=(-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0)=0, k=0,1,2,....$.Маклореновият ред на $f(x)=\cos x$ ще бъде следният $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$. Остатъчният член е

$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),\theta\in(0,1)$ и отново от неравенството $|R_n|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ се убеждаваме, че $\lim\limits_{x\to\infty}R_n=0$ за

И така функцията $f(x)=\cos x$ е развиваема в маклоренов ред в интервала $(-\infty,+\infty)$ и за всяко x е изпълнено равенството

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots .$$