P-стойността на критерия K е вероятност която се определя по една от формулите:

- за едностранна дясна кр. об.:

$$P = P(Z \ge Z_0 \mid H_0 \text{ е вярна}) \quad ..(11)$$

- за едностранна лява кр. об.:

$$P = P(Z \le Z_0 \mid H_0 \text{ е вярна}) \quad ..(12)$$

- за двустранна критична област:

$$P = 2\min\left(P(Z \le Z_0 \mid H_0 \text{ е вярно}),\ P(Z \ge Z_0 \mid H_0 \text{ е вярна})\right) \quad ..(13)$$

където $\min(a, b)$ озн. по-малкото от числата

За изхода от проверката са възможни два различни случ.

1) За P-стойността на критерия за проверка е в сила: $P \le \alpha$.
Тогава е налице статистически значим ~~незначим~~ резултат
$H_0$ се отхвърля;

2) За P-стойността на критерия за проверка е в сила: $P > \alpha$
Тогава е налице статистически незначим резултат.
$H_0$ се приема.

Дефиниция мощ на критерии.

$P(H_0 \text{ се отхвърля} \mid H_1 \text{ е вярна}) = \pi$. Бележим с $\pi$ мощта на критерия. Нарича се още мощ на теста. Очевидно се допълва до 1 с вероятността за грешка от 2 род.

Лема на Нейман-Пирсън:

Нека са дадени две плътности $f_0(x)$, $f_1(x)$. Тогава решението на разпределителната задача:

$$\sup_W \int_W f_1(x)dx \quad \text{при фиксирано } \alpha = \int_W f_0(x)dx$$

се дава от условието $W = \{x : f_1(x) \ge c f_0(x)\}$ при подходящо подбрано $c$.

Д-во: Нека $W = \{x : f_1(x) \ge c f_0(x)\}$ и $\alpha = \int_W f_0(x)dx$.
Нека $W'$ е такова, че $\alpha = \int_{W'} f_0(x)dx$. $A = W \setminus W'$, $B = W' \setminus W$
$C = W \cdot W'$

Да разгледаме разликата

$$\int_W f_1(x)dx - \int_{W'} f_1(x)dx = \int_A f_1(x)dx - \int_B f_1(x)dx \geq$$

$$\int_A c f_0(x)dx - \int_B c f_0(x)dx = c\left(\int_W f_0(x)dx - \int_{W'} f_0(x)dx\right) = 0 \quad ■$$

20

?. Оценки на параметри, свойства (неизместеност, състоятелност, ефективност)

Опр. Казваме, че статистиката $[^*(\hat{\theta})] = [^*(\hat{\theta})](x_1, x_2, \dots x_n)$ е оценка на параметъра $\theta$, ако $[^*(\hat{\theta})]$ не зависи от стойността на параметъра.

Опр. Казваме, че оценката $[^*(\hat{\theta})] = [^*(\hat{\theta})](x_1, x_2, \dots x_n)$ на параметъра $\theta$ е <u>неизместена</u>, ако $E[^*(\hat{\theta})] = \theta$

I ~~според нен~~ $[^\wedge(\theta)] \equiv [(\hat{\theta})]$

Опр. Казваме, че оценката $[^*(\hat{\theta})]$ на параметъра $\theta$, е <u>ефективна</u>, ако е с минимална дисперсия сред всички неизместени оценки на този параметър

Опр. Казваме, че редицата от статистики $[^*(\hat{\theta})]_n$ е състоятелна оценка на параметъра $\theta$, ако $[^*(\hat{\theta})]_n \to \theta$ при увеличаване на брой $n$ на наблюденията

Опр.

# Неравенство на Рао-Крамер

Опр. Наричаме функция на правдоподобие $f(x,\theta)$ плътността на наблюдаваната сл. в. $\xi$, когато тя зависи от неизвестен параметър.

Теорема. (Рао-Крамер) Ако $\theta$ е едномерен параметър и

1. $f(x,\theta) > 0, \quad x \in X$;
2. $f(x,\theta)$ притежава производни по $\theta$, $x \in X$
3. $\exists \quad E(([(\partial \log f) / (\partial \theta)])^2) < \infty$
4. $[^*(\hat{\theta})]$ е неизместена оценка на $\theta$, такава че $E[^*(\hat{\theta})]^2 < \infty$, то е валидно следното неравенство.

$$D(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{E\left(\left(\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right)}$$

при това равенство се достига само, ако

до тук сме научили

$$\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial \theta} = k(\theta)(\hat{\theta} - \theta)$$

Д-во: Да използваме равенството $\frac{\partial \log f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} / f$, което е изпълнено винаги когато ф-ята $f$ е положителна. Първо да покажем, че $\exists$ следния интеграл

$$\int_X \hat{\theta} \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta} dx = \int_X \hat{\theta} \sqrt{f(x,\theta)} \frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial \theta} \sqrt{f(x,\theta)}\, dx \leq$$

$$(E|\hat{\theta}^2|)^{1/2} \left(E\left(\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta}\right)^2\right)\right)^{1/2} < \infty$$

Тогава можем да диференцираме по $\theta$ двата интеграла

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_X f(x,\theta)\,dx = \int_X \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}\,dx = E\,\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} E(\hat\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_X \hat\theta(x) f(x,\theta)\,dx = \int_X \hat\theta\,\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}\,dx = E\,\hat\theta\,\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta} = 1$$

Тогава имаме

$$1 = \int_X (\hat\theta-\theta)\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta} f(x,\theta)\,dx = E\,(\hat\theta-\theta)\frac{\partial \log f(x,\theta)}{\partial\theta} \le$$

$$D(\hat\theta)^{1/2}\left(E\left(\frac{\partial \log f}{\partial\theta}\right)^2\right)^{1/2}$$