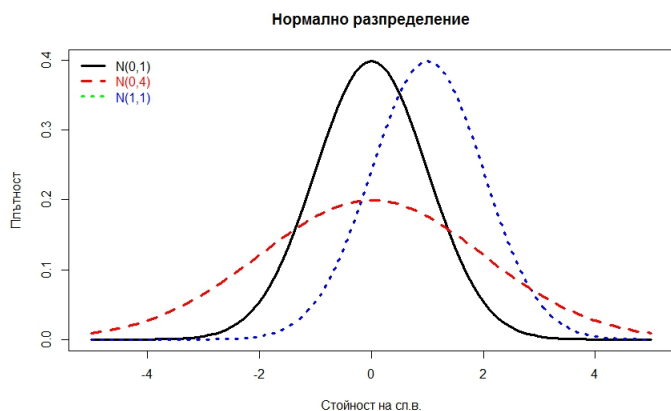


# Понятия и формули:

- Нормално разпределение

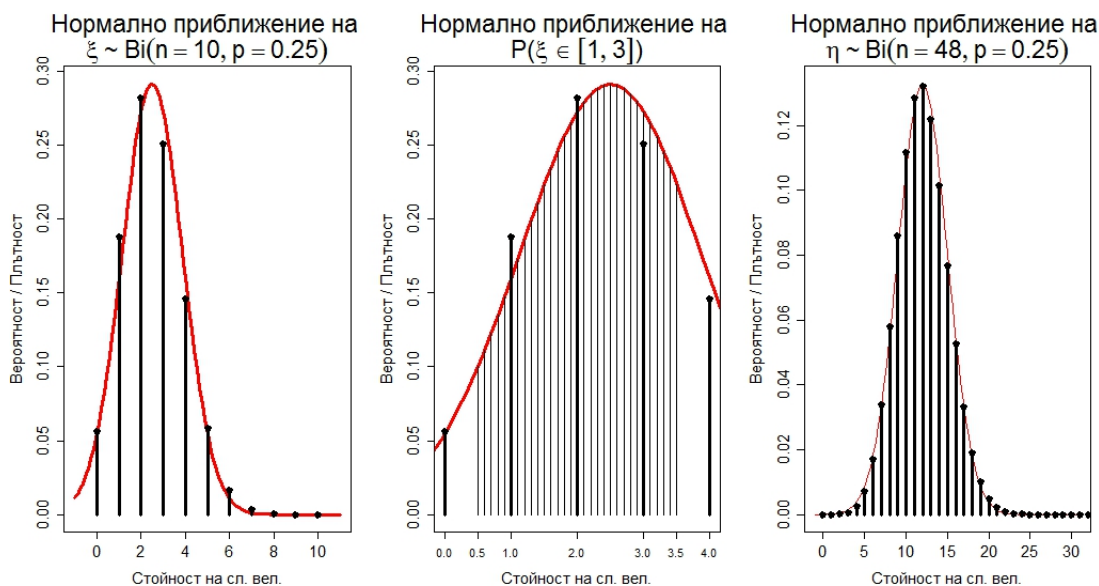
$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2), x \in \mathbf{R}, \mathbf{E}\xi = \mu, \mathbf{D}\xi = \sigma^2$$

$$\text{Ако } \eta = (\xi - \mu) / \sigma \Rightarrow \eta \sim N(0, 1).$$



- Нормално приближение на биномно разпределение

Ако  $\xi \sim \text{Bi}(n, p)$ , то  $\mathbf{P}(a \leq \xi \leq b) \approx \mathbf{P}(a - 0.5 \leq \xi^* \leq b + 0.5)$ , където  $\xi^* \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$ . Ако  $(\mu \pm 2\sigma) \subset [0, n]$ , приближението е добро, а ако  $(\mu \pm 3\sigma) \subset [0, n]$ , приближението е много добро.



Навсякъде, където не е уточнено допълнително, ще предполагаме, че  $z \sim N(0, 1)$

**Зад.1** Намерете  $P(0 \leq z \leq 1.63)$ . Отговор: 0.4484

**Зад.2** Намерете  $P(-0.5 \leq z \leq 1.0)$ . Отговор: 0.5328

**Зад.3** Намерете стойност  $z_0$ , такава че 0.95 от площта лежи в границите  $\pm z_0$  стандартни отклонения от средното. Отговор:  $z_0 = 1.96$

**Зад.4**  $x \sim N(10, 4)$ . Намерете  $P(11 \leq x \leq 13.6) = ?$ . Отговор: 0.2726

**Зад.5** Случайна величина  $x$  е нормално разпределена с неизвестно средно  $\mu$  и стандартно отклонение  $\sigma = 2$ . Ако вероятността  $x$  да надхвърля 7.5 е 0.8023, намерете средното  $\mu$ . Отговор:  $\mu = 9.2$

**Зад.6** Случайна величина  $x$  е нормално разпределена с неизвестно средно  $\mu$  и стандартно отклонение  $\sigma = 1.8$ . Ако вероятността  $x$  да надхвърля 14.4 е 0.3015, намерете средното  $\mu$ . Отговор:  $\mu = 13.464$

**Зад.7** Случайна величина е нормално разпределена с неизвестни средно и стандартно отклонение. Знае се, че вероятността  $x$  да надхвърля 4 е 0.9772 и вероятността  $x$  да надхвърля 5 е 0.9332. Намерете  $\mu$  и  $\sigma$ . Отговор:  $\mu = 8$ ,  $\sigma = 2$

**Зад.8** Броят на вдишванията за минута на възрастен в покой (сл. вел.  $x$ ) зависи от възрастта и варира от човек до човек. Предполагаме, че вероятностното разпределение на  $x$  е приблизително нормално със средно 16 и стандартно отклонение 4. Ако случайно е избран човек и е записан броят на вдишванията за минута при покой  $x$ , каква е вероятността, че  $x$  ще надминава 22? Отговор: 0.0668

**Зад.9** Предполагаме, че броят на даден тип бактерия в 1 мл. питейна вода е приблизително нормално разпределен със средно 85 и стандартно отклонение 9. Каква е вероятността, че извадка от 1 мл. ще съдържа повече от 100 бактерии? Отговор: 0.0475

**Зад.10** Издател открил, че броят на думите, които съдържа нов ръкопис е нормално разпределен със средно 20 000 в повече от това, което е отбелязано в договора и стандартно отклонение 10 000 думи. Ако издателят иска да е почти сигурен (да кажем с вероятност 0.95), че ръкописът ще бъде по-малко от 100 000 думи, какъв е броят думи, записан в договора? Отговор: 63 550

**Зад.11** При изследване на динамиката на популация от риби, знанието за разпределението на дължината на даден вид на различна възраст е съществена. Fisheries Science (Feb. 1995) публикува едно изследване на разпределението на дължината на сардините, обитаващи японските води. Двугодишните риби имат разпределение на дължината, което е приблизително нормално със средно 20.2 см и стандартно отклонение 0.65 см.

а) Намерете вероятността, че една двугодишна сардина, живееща в японски води, е дълга между 20 и 21 см.

б) Една сардина, хваната в японски води има дължина от 19.84 см. Вероятно ли е тази сардина да е двугодишна?

в) Повторете изчисленията за подточка б) за сардина с дължина 22.01 см.

Отговор: а) 0.5124; б) да, вероятно е; в) възможно е, но е малко вероятно

**Зад.12** В лабораторен експеримент изследователи от Barry University (Miami Shores, Florida) изследвали скоростта, с която морски таралежи поглъщат даден вид морска трева (Florida Scientist, Summer/Autumn 1991). Таралежите са оставени без храна за 48 часа и след това са хранени с 5-сантиметрови листа от дадената морска трева. Средното време за поглъщане е 2.83 ч. и стандартното отклонение е 0.79 ч. Да предположим, че времето за поглъщане на тревата от таралежите има приблизително нормално разпределение.

а) Намерете вероятността, че на един таралеж ще са необходими 4 или повече часа да смели едно 5-сантиметрово парче от морската трева.

б) Намерете вероятността, че на един таралеж ще са необходими между 2 и 3 часа да смелят едно 5-сантиметрово парче от морската трева.

**Зад.13** Способността на ненаситената почва да задържа вода е критична за почвената екосистема. Екип от учени изследвали свойствата за задържане на вода на парчета земя от незасята наносна глинеста почва (Soil Science, Jan. 1995). При налягане от 0.1 МПа, съдържанието на вода в почвата, мерено в  $\text{м}^3$  вода на  $\text{м}^3$  почва е определено да бъде приблизително нормално разпределено със средно 0.27 и стандартно отклонение 0.04.

а) За парче земя при налягане 0.1 МРа каква е вероятността, че неговото съдържание на вода ще е по-малко от  $0.3 \text{ m}^3/\text{m}^3$ ?

б) Допълнително към измерванията на съдържание на вода при налягане от 0.1 МРа са направени изследвания при наляганя от 0, 0.005, 0.01, 0.03 и 1.5 МРа. Разглеждаме парче земя, чието съдържание на вода е 0.14. Вероятно ли е това наблюдение да е получено при налягане от 0.1 МРа?

**Зад.14** Разтвореното количество кислород в реките зависи от температурата на водата и от количеството разлагащи се органични материи от естествени процеси или човешка дейност. Съветът по качеството на околната среда (СКОС) разглежда съдържанието на кислород по-малко от  $5 \text{ mg/L}$  във водите като нежелателно, защото е малко вероятно да поддържа живот във водата. Да предположим, че завод изхвърля отпадъците си в реката и дневните измервания на съдържанието на кислород са нормално разпределени със средно  $6.3 \text{ mg/L}$  и стандартно отклонение  $0.6 \text{ mg/dL}$ .

а) Какъв процент от дните съдържанието на кислород в реката ще бъде разгледано като нежелателно от СКОС?

б) В какви граници очакваме да попада дневното съдържание на кислород в 95% от дните? А в 99% от дните?

**Зад.15** Ecological Applications (May 1995) публикува изследване за развитието на горите след пожари на Северозападното тихоокеанско крайбрежие. Една променлива от интерес за изследователите е диаметърът на дървото на височината на гърдите 110 години след пожара. Популацията на конкретен вид ели има приблизително нормално разпределение на диаметъра със средно 50 см. и стандартно отклонение 12 см. Намерете диаметър  $d$ , такъв че 30 % от този вид ели да имат диаметър, който надвишава  $d$ .

**Зад.16** Данни, събирани през дълъг период от време показват, че даден генетичен дефект се случва на 1 от всеки 1000 деца. Архивите на клиника показват  $x = 60$  деца с този дефект от общо 50 000 изследвани. Ако тези 50 000 деца са случайна извадка от популацията от деца, представена чрез минали архиви, каква е вероятността да наблюдаваме стойност на  $x$  равна на 60 или по-голяма? Можете ли да кажете, че наблюдаването на  $x = 60$  деца е необичайно събитие? Отговор: 0.0901, не

**Зад.17** Някои изследователи смятат, че една на всяка три жени е жертва на насилие (Annals of Internal Medicine, Nov. 1995).

а) За случайна извадка от 150 жени каква е приблизителната вероятност, че повече от половината ще са жертва на домашно насилие?

б) За случайна извадка от 150 жени каква е приблизителната вероятност, че по-малко от 50 ще са жертва на домашно насилие?

в) Очаквате ли да наблюдавате по-малко от 30 жени, жертва на домашното насилие, в извадка от 150? Обяснете.

**Зад.18** Вероятността, че женски гущер от даден вид ще почива в определен момент от време, е 0.97.

а) Предполагаме, че 1000 женски гущера от този вид са под наблюдение в лаборатория. За определен експеримент се иска да се определят 10-те най-активни гущера в кой и да е момент от време. Каква е приблизителната вероятност, че ще бъдат наблюдавани поне 10 активни (непочиващи) гущера?

б) Да предположим, че 50 женски гущера от този тип са под наблюдение и вие се интересувате от вероятността, че по-малко от 40 ще почиват в даден момент от време. Обяснете защо методът от подточка

а) може да не даде точна оценка на вероятността.

**Зад.19** Статия в The International Journal of Sports Psychology (July-Sept. 1990) оценява връзката между физическото състояние и стреса. Изследването разкрива, че офис служителите в добро физическо състояние имат 10 % вероятност да развият здравни проблеми, свързани със стрес. Каква е вероятността, че повече от 60 в случайна извадка от 400 офис служители в добро физическо състояние ще развият болести, свързани със стрес?

**Зад.20** Според Американската онкологична асоциация меланомът, форма на рак на кожата, всяка

година убива 60% от американците, които страдат от тази болест. Разглеждаме извадка от 10 000 пациенти с меланом.

- а) Какви са очакваната стойност и дисперсията на  $x$ , броят на пациентите с меланом измежду разглежданата извадка, които ще умрат тази година?
- б) Намерете вероятността, че  $x$  ще надхвърли 6100?
- в) Очакват ли, че  $x$  ще надхвърли 6500?

**Зад.21** Медианата на времето, което пациент чака, за да бъде прегледан от доктор, в голяма болница, е 20 минути. В даден ден, когато 150 пациента посещават клиниката, каква е приблизителната вероятност, че

- а) повече от половината пациенти ще чакат повече от 20 минути?
- б) повече от 85 пациента ще чакат повече от 20 минути?
- в) повече от 60 пациента, но по-малко от 90, ще чакат повече от 20 минути?

## Функции на R за Гаусово разпределение:

- `dnorm(0, mean=0, sd=1)`
- `pnorm(0, mean=0, sd=1)`
- `rnorm(100, mean=0, sd=1)`
- `qnorm(0.5, mean=0, sd=1)`