14

(14) по конспекти за ДИ

## ~~16~~. Диференциална форма на Теоремата на Кун и Такър.

Ще докажем необходими и достатъчни условия за решението на оптимизационната задача:

$$
\begin{aligned}
(P)\qquad & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \qquad i = 1, \dots, m \\
& \langle c_l, x\rangle = d_l, \quad l = 1, \dots s, \\
& x_j \geqslant 0, \qquad j \in J,
\end{aligned}
$$

където $x \in \mathbb{R}^n$, а $J \subset \{1, \dots, n\}$.

Функцията на Лагранж за задачата $(P)$ е следната функция

$$\Lambda(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{l=1}^{s} \nu_l(\langle c, x\rangle - d_l). \tag{16.1}$$

дефинирана в областта $X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$, т.е. за $x \in X := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geqslant 0, j \in J\}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $\nu = (\nu_1, \dots \nu_s) \in \mathbb{R}^s$.

**Теорема 16.1.** *Нека функциите $f : X \to \mathbb{R}$ и $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са изпъкнали в $X$. Предполагаме, че съществува допустима за $(P)$ точка $x_0$ (точка удовлетворяващи всички ограничения на задачата), такава че $g_i(x_0) < 0$ за $i = 1, \dots, m$, които не са афинни неравенства. Нека функциите $f, g_i$, $i = 1, \dots, m$ са диференцируеми в $\overline{x}$. За да бъде $\overline{x}$ решение на $(P)$ е необходимо и достатъчно да съществуват $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, $\overline{\nu} \in \mathbb{R}^s$, такива че*

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \geqslant 0, \quad j \in J, \tag{16.2}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus J, \tag{16.3}$$

$$\overline{x}_j \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{16.4}$$

$$\overline{x}_j \geqslant 0, \quad j \in J, \tag{16.5}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_i}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16.6}$$

$$\overline{\lambda}_i \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_i}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16.7}$$

$$\overline{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16.8}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \nu_l}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad l = 1, \dots, s. \tag{16.9}$$

**Доказателство. Необходимост.** Нека $\overline{x}$ е решение на $(P)$. Тогава от Теоремата на Кун и Такър съществува $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, $\overline{\nu} \in \mathbb{R}^s$, такива че точката $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ е седлова точка за функцията на Лагранж, т.е.

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s, \tag{16.10}$$

където $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geqslant 0, j \in J\}$. От

$$\Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in X$$

следва, че функцията $\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ достига минимума си по $x$ в множеството $X$ в точката $\overline{x}$, откъдето следва, че са изпълнени условията (16.2)–(16.5). От

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s$$

следва, че функцията $\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu)$ достига максимума си по $(\lambda, \nu)$ в множеството $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$ в точката $(\overline{\lambda}, \overline{\nu})$, откъдето следва, че са изпълнени условията (16.6)–(16.9).

**Достатъчност.** Нека са изпълнени условията (16.2)–(16.9). Тъй като функцията $\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ е изпъкнала като функция на $x$, то

$$\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \geqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) + \langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), x - \overline{x} \rangle =$$

$$= \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) + \langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), x \rangle - \langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \overline{x} \rangle.$$

От условията (16.5) следва, че $\overline{x} \in X$. От условията (16.2) и (16.3) следва, че за всяко $x \in X$ е изпълнено $\langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), x \rangle \geqslant 0$. От условията (16.4) следва, че $\langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \overline{x} \rangle = 0$, откъдето горното неравенство се свежда до

$$\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \geqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in X,$$

и имаме, че $\overline{x}$ е точка на минимум на $\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ в $X$.

От друга страна, функцията $\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu)$ е линейна функция на $(\lambda, \nu)$ в областта $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$. Следователно,

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) = \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) + \langle L'_\lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \lambda - \overline{\lambda} \rangle + \langle L'_\nu(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \nu - \overline{\nu} \rangle.$$

От условията (16.6)–(16.9) имаме, че

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s.$$

Следователно $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ е седлова точка за функцията на Лагранж в областта $X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$, което трябваше да се покаже. ■