19. Проверка на хипотези, оценки и доверителни интервали.

Понятие за статистическа хипотеза.

В много научни изследвания задача може да се формулира във вид на хипотеза, която предстои да бъде потвърдена или отхвърлена. В статистическата практика се налага да се проверяват твърдения относно стойностите на генералните параметри или закона за разпределение на една или няколко статистически променливи. Такива твърдения се наричат **статистически хипотези**.

Например статистически са следните хипотези:
1. Нормално разпределена статистическа променлива има дадени средно и дисперсия
2. Нормалното разпределение има дадено средно (за дисперсия не се твърди нищо);
3. Разпределението на статистическата променлива е нормално (с някакви средно и дисперсия
4. Двете статистически променливи имат еднакво разпределение (за вида за закона на разпределението не се твърди нищо.

В случая на една статистическа променлива се проверяват два основни типа статистически хипотези:
- проверка на хипотезата за равенство на стойността на даден генерален параметър на определено хипотетично число
- проверка на хипотезата за разпределение на изследваната статистическа променлива по даден вероятностен закон.

- Проста и сложна хипотеза. Между хипотезите от пример ~~...~~ 1 и пример 2 има разлика. Хипотезата от пример 1 ~~...~~ е относно стойностите на всичките параметри на разпределението (в случая два параметъра), докато хипотезата от Пр 2 е относно само един от тези два параметъра. Това се формулира по следния начин: Ако разпределението има общо r параметъра и хипотезата твърди, че k от тях имат определени стойности, тя се нарича проста, ако $k=r$, и сложна ако $k<r$. При това числото $r-k$ се нарича бр на степените на свобода на хипотезата, а числото k - брой на ограниченията налагани от хипотезата

Основна и алтернативна хипотеза (не се иска в конспекта)
Проверяваната хипотеза се нарича основна (работна, нулева) и се бележи с H_0. Наред с хипотеза H_0 се разглежда и хипотеза H_1, която и противоречи и се нарича алтернативна (конкурираща)

- Грешки от първи и от втори род

Основната хипотеза може да бъде вярна или грешна и за това възниква необходимостта от нейната проверка. Статистическата проверка на хипотезата се нарича процедурата по изясняване дали да се приеме основната хипотеза или да се отхвърли, при което решението за приемане или отхвърляне се базира на данните от случайна статистическа извадка:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \ldots \quad (1)$$

В хода на статистическата проверка на произволна статистическа хипотеза с критерий за проверка, се открояват следните основни етапи:

1. Определяне на основната (H_0) и алтернативната (H_1) хипотези на проверката.
2. Определяне на нивото на значимост α на проверката.
3. Избиране на критерий за проверка на основната хипотеза.
4. Определяне на критичната област W на критерия за проверка или пресмятане на P-стойността на критерия за проверка.
5. Вземане на решение относно статистическата основа тежкост на основната хипотеза.

Причината за обособяването на основната хипотеза се състои в това, че H_0 обикновено се разглежда като твърдение, което по-важно, ако бъде отхвърлено. Това се основава на общия принцип, че теорията трябва да бъде отхвърлена, ако има поне един противоречащ ѝ пример, но не е задължително за бъде приета, ако такъв пример не е намерен. Понеже решението за приемане или отхвърляне на H_0 се основава на данните случайната извадка - (1) то това решение може да се окаже грешно.
Възможно е да се два рода грешки:
- Ако хипотезата H_0 е вярна, а е прието решение за нейното отхвърляне, то казваме че се допуска грешка от първи род
- Ако хипотезата H_1 е вярна, а е прието решение за приемане на H_0, то казваме, че се допуска грешка от втори род.

Вероятността за грешка от първи род се озн. с α, а вероятността за грешка от втори род с β. Тези вероятности може да се представят във вида:

α = P(да се отхвърли H_0 | H_0 е вярна) ... (2)

β = P(да се приеме H_0 | H_1 е вярна) ... (3)

При проверка на хипотеза може да се приема правилно решение в следните два случая:

1) Ако хипотезата H_0 е вярна и е прието решение за приемане на H_0
2) Ако хипотезата H_1 е вярна и е прието решение за отхвърляне на H_0

Може да го представим нагледно с помоща на таб.

	H_0 е вярна	H_1 е вярна
H_0 е отхвърлена	Грешка от първи род, вероятност α	Вярно решение. Вероятност $\gamma = 1-\beta$
H_0 е приета	Вярно решение, вероятност $p = 1-\alpha$	Грешка от втори род вероятност β

Вероятността $p = 1 - \alpha$ се нарича доверителна вероятност на проверката и показва каква е вероятността да приемем основната хипотеза, в случай, че тя е вярна.
Величината $\gamma = 1 - \beta$ се нарича мощността на проверката и показва каква е вероятността да отхвърлим основната хипотеза H_0 при условие, че е вярна алтернативната хипотеза H_1.

• Критична област. Правилото К, по което се взема решение за приемане или отхвърляне на основната хипотеза H_0 се нарича статистически критерий за проверка. За да се формулира конкретен критерий за проверка се използва специално подбрана функция на данните от наблюдението. Напр: $Z = Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Тази ф-я се нарича статистика Z на критерия К.
След избора на статистика Z на критерия, м-вото от ∀ възможни стойности на Z се разбива на сума на две непресичащи се множества W и $\overline{W}$. М-вото W се нарича критична област и се състои от всички стойности на Z, при които основната хипотеза се отхвърля. М-вото $\overline{W}$ се нарича област на допустимите стойности и се състои от ∀ стойности на Z, при които основната хипотеза се приема.
Правило за проверка: Ако наблюдаваната стойност на критерия Z_0 попада в критичната област W, хипотезата H_0 се отхвърля, ако Z_0 попада в допустимата област $\overline{W}$, то хипотезата H_0 се приема.
При определяне на критичната област W първо се задава положително число α, което се нарича ниво на значимост. Нивото на значимост е най-голямата вероятност, с която приемаме при проверката да се допусне грешка от първи род. Обикновено α се избира от провеждащият проверката и приема малки стойности: 0,05, 0,01, 0,001.

Например: Ако изберем ниво на значимост $\alpha = 0{,}05$, то това означава, че приемаме средно при 5 от 100 проверки на дадена хипотеза да се допусне грешка от първи род. (да отхвърлим правилна хипотеза)
След избора на α се търси такава критична област W при която величината

$\gamma = P$ (Z_0 попада в W | H_1 е вярна) ... (5) е максимална при условие, че ..

P (Z_0 попада в W | H_0 е вярна) $\le \alpha$ ... (6)

Усл. (6) озн., че статистиката Z трябва да бъде подбрана така, че вероятността за допускане на грешка от първи род да не превишава избраното ниво на значимост.
Усл (5) озн, че статистиката Z трябва да бъде подбрана така, че мощността на проверката γ да е максимална при огр. (6) т.е при това ограничение вероятността β за допускане на грешка от втори род да е минимална.
Критични точки (граници) скр наричаме точките, отделящи критичната област W и областта на допустимите стойности $\overline{W}$.
. Критичните области биват:
- едностранна дясна критична област $[c_r, +\infty)$, която се задава с неравенството $Z > c_r > 0$;
- едностранна лява критична област $(-\infty, c_l]$, която се задава с неравенството $Z \le c_l < 0$;
- двустранна критична област $(-\infty, c_1] \cup [c_2, +\infty)$, която се задава с неравенствата $Z \le c_1$ и $Z \ge c_2$ $(c_1 < c_2)$
В частност, ако двустранната критична област е симетрична относно нулата $(-c_1 = c_2)$ то тя се задава с неравенството от вида $|Z| \ge c$ $(c > 0)$
Ще отбележим, че от алтернативната хипотеза H_1 зависи какъв да бъде видът на избраната критична област.

Напр: Ако се разглежда хипотеза за равенство на параметъра и на някакво хипотетично число θ_0, т.е.

$H_0: \theta = \theta_0$, то при алтернативна хипотеза $H_1: \theta > \theta_0$ се избира едностранна дясна критична област, при алтернативна хипотеза $H_1: \theta > \theta_0$ се избира едностранна дясна критична област, при алтернативна $H_1: \theta < \theta_0$ се избира едностранна лява кр об, а при алтер. $H_1: \theta \neq \theta_0$ се избира двустранна кр област.

Намирането на критичните точки е свързано с решаване на следните уравнения

$P(Z \geq c_r \mid H_0 \text{ е вярна}) = \alpha$ ... (7) (за едностранна дясна кр об)

$P(Z \leq c_l \mid H_0 \text{ е вярна}) = \alpha$ ... (8) (за едностранна лява кр област)

$P(Z \leq c_1 \mid H_0 \text{ е вярна}) = \frac{\alpha}{2}$ и $P(Z \geq c_2 \mid H_0 \text{ е вярна}) = \frac{\alpha}{2}$

(за двустранна критична област)

За да се вземе решение за приемане или отхвърляне на основната хипотеза се изчислява наблюдаваната ст-ст $Z_0 = Z(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и съгласно правилото за проверка се вземат следните решения:

- за едностранна дясна кр. об: При $Z_0 \geq c_r$, хипотезата H_0 се отхвърля, а при $Z_0 < c_r$ хипотезата H_0 се приема.
- за едностранна лява кр. об: При $Z_0 \leq c_l$, хипотезата H_0 се отхвърля, а при $Z_0 > c_l$ хипотезата H_0 се приема;
- за двустранна критична област: При $Z_0 \leq c_1$ или $Z_0 \geq c_2$ хипотезата H_0 се отхвърля, а при $c_1 < Z_0 < c_2$ хипотезата H_0 се приема.

• Значимост на теста и значимост на статистиката на теста (p-value). Вземането на решение за приемане или отхвърляне на основната хипотеза се осъществява с построяване на критична област на критерия