16.

Едно разпределение е непрекъснато ако ф-ята му на разпределение $F_X(x) = P(X \leq x)$ е непрекъсната. Най-често тези разпределения се генерират чрез функции на плътността на разпределението. Ако разпределението на X е непрекъснато, то казваме, че X е сл. непр. вел.

Непр. сл. вел. може да заема безброй много стойности в даден интервал, за разлика от дискретната.

Вероятността X да е в даден интервал можем да намерим чрез интегриране на плътността:

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, където $f(x)$ е плътността

Самата плътност можем да получим от

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$, като $f_X(u) \geq 0$ (неотрицателност) и

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$ (нормираност)

Моментите са характеристики на разпределението, тясно свързани с мат. очакване и дисперсията. Съществува ф-я за генериране (пораждане) на моментите (MGF).

$M_X(t) = E[e^{tX}]$, където $t \in \mathbb{R}$, X - сл. вел.

За непрекъснати разпределения имаме $M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$

Ако за две разпр. имаме, че $M_X(t) = M_Y(t)$, то и $F_X(x) = F_Y(y)$.
Чрез моментите можем да намерим очакването и дисперсията, тъй като $m_n = E(X^n)$.

Нормално разпределение

Нормалното (още Гаусово) разпределение е двупараметрично и се бележи с $N(\mu, \sigma^2)$, където μ – мат. очакване, а σ^2 – дисперсията. То е симетрично спрямо μ и може да заема всички ст. в/у реалната ос.

Плътността на N се задава с формулата:

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

MGF за N е: $M(t) = E(e^{tX}) = e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Взимайки $M'(0) = \left(e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right) \cdot \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \cdot (2t)\right) =$

$$= (e^0 \cdot e^0) \cdot \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \cdot 0\right) =$$

$$= 1 \cdot \mu = \mu$$

А пък $M''(0) = \left(e^{\mu t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right)\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)\left(e^{\mu t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right)\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} 2t\right) =$

$$= (e^0 \cdot e^0)\sigma^2 + \mu (e^0 \cdot e^0) \cdot \mu = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = M''(0) - (M'(0))^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

(За $E[X]$ може да покажем и $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} dx = 0$.) (За $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$

$Var X = E(X)^2 - (EX)^2 = 1 - 0 = \underset{\text{ст.н.разпр.}}{1}$)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x+\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Пример: $d(\text{част}) \in [24;25]$
$\mu = 24.6$ $\sigma = 0.4$ $P(24 \le d \le 25) = F\left(\frac{25-24.6}{\sigma}\right) - F\left(\frac{24-24.6}{\sigma}\right)$
$= F(1) - F\left(\frac{-0.6}{0.4}\right) = 0.8413 - F(-1.5)$

Равномерно разпределение

Равномерното разпределение е двупараметрично и се означава с $U(a,b)$, където $[a,b]$ е интервалът, в който се срещат сл. вел. от р-ето.

Плътността на $U(a,b)$ е $\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{1}{b-a}, & x\in[a;b] \\ 0, & x>b \end{cases}$

Ф-ята на разпределение на $U(a,b)$ е $\begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 1, & x>b \end{cases}$

$$\int_a^b \frac{e^{xt}}{b-a}dx$$

MGF е: $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$, $t\neq 0$ и 1 за $t=0$ (с Л'Опитал)

$M'(t) = e^{bt}(bt-1) - e^{at}(at-1) / (t^2(b-a))$

(Взимайки $M'(0) = \frac{be^{tb}-ae^{ta}}{t(b-a)} = \dots$)

$$E[X] = \int_a^b x f_X(x)dx = \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E[X^2] = \int_a^b x^2 f_X(x)dx = \int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(a^2+ab+b^2)}{3\cancel{(b-a)}}$$

$$Var(X) = E(X^2)-(EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(a^2+ab+b^2)-3a^2-6ab-3b^2}{12} =$$

$$= \frac{+a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Пример: RNG

Експоненциално разпределение

Експ. р-е зависи от един параметър и заема ст-ти $(0;+\infty)$. Отбелязва се с $Exp(\lambda)$, $\lambda>0$.

Плътността на експ. р-е е $\begin{cases} \cancel{1}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

Ф-ята на разпр. е $\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

MGF за Exp е $M_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$.

$$=\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx=\lambda\frac{1}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^\infty$$

$$E[X]=\int_0^\infty x f_X(x)dx=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=$$

$$=(0-0)+-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2]=\int_0^\infty x^2 f_X(x)dx=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx=$$

$$=(0-0)+\left(-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty\right)+\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=$$

Пример: Чакането в ПП.

$$=(0-0)+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$M'(0)=\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}=\frac{1}{\lambda} \qquad M''(0)=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X)=M''(0)-(M'(0))^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

Гама разпределение

Нека за $\alpha>0$ означим $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ (Гама ф-я).
$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, $\Gamma(n)=(n-1)!$ и $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.
С помощта на $\Gamma(\alpha)$ се задава гама разпределението, което означаваме с $\Gamma(\alpha,\beta)$.

Плътността на $\Gamma(\alpha,\beta)$ е $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, $x>0$

MGF за $\Gamma(\alpha,\beta)$ е: $M(t)=\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}$, $t<\beta$
$M'(t)=\alpha(1-t/\beta)^{-\alpha-1}/\beta$

$$E[X]=\int_0^\infty x f_X(x)dx=\int_0^\infty x\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$E[X^2]=\int_0^\infty x^2 f_X(x)dx=\int_0^\infty x^2\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2}$$

$$Var(X)=(EX^2)-(EX)^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

Пример: Модел на времето на очакване нещо да се случи.
Сума от $Exp(\lambda)$ е $Gamma(n,\lambda)$

15.
Едно разпределение е дискретно, ако сл. вел. могат да заемат краен брой или изброимо много стойности.
Т.е., $\sum_n P(X=n)=1$. По същия начин вероятността е нормирана, защото $f_X(x)=P(X=x)$ и $\sum f_X(x)=1$.
Всяка вероятност освен нормирана, е и неотрицателна.

Моментите са характеристики на р-ето, тясно свързани с мат. очакване и дисперсията. Съществува ф-я за генериране на моментите (MGF):

$M_X(t) = E(e^{tX})$, където $t \in \mathbb{R}$, X - сл. вел.

За дискретно разпр. MGF: $M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i$.

Ако за две разпр. имаме, че $M_X(t) = M_Y(t)$, то и $F_X(x) = F_Y(y)$. Т.е. ако двете имат еднакви MGF, то те са идентични почти навсякъде.

Чрез моментите можем да намерим очакването и дисперсията чрез като $m_n = E(X^n)$.

Дискретно равномерно разпределение

Бележи се с $U(a,b)$, където $[a,b]$ е интервалът, в който се срещат сл. вел. При него всяка стойност има еднаква вер. за появяване.

$P(X = x_k) = c = \frac{1}{n}$, където n е броя на x_n.

$n = b-a+1$

MGF за U е $\frac{e^{at} - e^{(b+1)t}}{n(1-e^t)} = \frac{1}{n}\sum e^{tX} = \frac{1}{n}(e^t + e^{2t} + \dots e^{nt})$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{(\overbrace{b-a+1}^{!\ n})^2 - 1}{12}$$

$m'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^n$ $\qquad$ $E(X^2) = \frac{1}{n}\sum x^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Биномно разпределение

Биномното разпр. е базирано на опити на Бернули.
Ако при даден опит на Бернули деф. $X = \begin{cases} 1 & \text{при успех} \\ 0 & \text{при неуспех} \end{cases}$

то $f_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0,1$.

Ако вместо 1, разглеждаме n опита (независими) и вер. за успех не се променя, то:

$$P(X=k) = f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Очевидно $f_X(x) \geq 0$.

Проверяваме $\sum f_X(k) = 1$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1$

$$EX = \sum k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \sum \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k!)} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)(k-1)} = np$$

Аналогично получаваме $EX(X-1) = np^2(n-1)$.

$\to Var(X) = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$
$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$

$$M_X(t) = \sum e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + \overset{(1-p)}{q})^n$$

$M'(t) = n(1-p+pe^t)^{n-1} pe^t = n \cdot 1^{n-1} p = np$
$M''(t) = n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}(pe^t)^2 + n(1-p+pe^t)^{n-1} pe^t \big|_{t=0}$
$EX^2 = n(n-1)p^2 + np$
$\to Var X = np(1-p)$

Пример: $P(\text{Ези}) = 0.3$
$P(X=0) = \binom{6}{0} 0.3^0 (1-0.3)^{6-0}$
$P(X=1) = \binom{6}{1} 0.3^1 (1-0.3)^{6-1}$ ...

Геометрично разпределение

Геометричното разпр. може да се базира на едно от две неща:

- разпр. на X при опити на Бернули до първи успех
- разпр. на $Y=X-1$ за неуспехи до първи успех (започвайки от 0)

$\underset{Ge_1}{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$ $\qquad$ $\underset{Ge_0}{P}(Y=k) = (1-p)^k p$

И при двата случая разглеждаме геом. прогресия.

MGF за Ge_0 и Ge_1 $\to \underbrace{\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}}_{Ge_1}$ или $\underbrace{\frac{p}{1-(1-p)e^t}}_{Ge_0}$

$$E(X_1^2) = \sum x^2(1-p)p^k = p\sum x^2(1-p)p^{k-1} = p\left(\frac{2}{\underset{(1-p)}{q^2}} - \frac{1}{q}\right)$$

$E(X_1) = \sum kp(1-p)^{k-1} = p\sum k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$ $\qquad$ $EX_0 = \frac{1-p}{p}$

$Var(X_1) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1-p}{p^2}$ $\qquad$ $Var(X_0) = \frac{1-p}{p^2}$

Поасоново разпределение

X е Поасоново разпр. сл. вел., ако $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1\dots$

MGF е: $M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = E(e^{\lambda t})$

$$EX = \sum x p_x(x) = \sum x e^{(-\lambda)}\frac{1}{x!}\lambda^x = 0 + \sum x e^{(-\lambda)}\frac{1}{x!}\lambda^x \overset{y=x-1}{=} \sum (y+1)e^{(-\lambda)}\frac{1}{(y+1)!}\lambda^{y+1} =$$
$$= \sum (y+1)e^{-\lambda}\frac{1}{(y+1)y!}\lambda\cdot\lambda^y = \lambda\sum e^{-\lambda}\frac{1}{y!}\lambda^y = \lambda\sum p_Y(y) = \lambda$$

$\sum X^2 = \sum x^2 p_X(x) = \lambda^2 + \lambda$ $\qquad$ $Var X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

$M'_X(t) = e^{\lambda e^t - \lambda}\lambda e^t = (\lambda e^t)(e^{\lambda e^t}) = \lambda e^{\lambda e^t - \lambda + t}$ $\qquad$ $M''_X(t) = \lambda e^{e^t\lambda + t - \lambda}(e^t\lambda + 1)$

$M'_X(0) = \lambda$ $\qquad$ $M''_X(0) = \lambda^2 + \lambda$

Пример: брой голове в мач от СП: $\lambda = 2.5$ $\qquad \frac{2{,}5^k e^{-2.5}}{k!}$ $\qquad e^{-2.5} = 0.082$