Въпрос 23 за държавен изпит

Минимизация на детерминирани крайни автомати

1.Дефиниция за краен автомат и автоматен език

Определение 1 . *Азбука наричаме множеството* $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m\}$.

Σ е крайно множество

Означаваме Σ^* множеството от всички думи над дадена азбука Σ

Определение 2 .*Нека* $w \in \Sigma^*$ *, броят на членовете на w ще наричаме дължина на w и ще означаваме с* $|w|$.

ξ - празната дума . Ако $|w| = 0$ то $w = \xi$

$|w| = 1$ то $w = \sigma_i$

Със Σ^n отбелязваме можеството от думи с дължина n .

Определение 3 . *Конкатенация на две думи* $u, v \in \Sigma^*$ *наричаме* $u.v$ *и тяхната дължина е* $|u.v| = |u| + |v|$

Свойства :

1) $\xi w = w\xi = w$ за $\forall w \in \Sigma^*$
2) $(uv)w = u(vw) = uvw$

Нека са дадени $u, v \in \Sigma^*$

1) u е начало на $v \Leftrightarrow v = uw$ за $w \in \Sigma^*$
2) u е край на $v \Leftrightarrow v = wu, w \in \Sigma^*$
3) u е поддума на $v \Leftrightarrow v = w'uw''$, $w', w'' \in \Sigma^*$

Определение 4 .*Език над множеството* Σ *нариаме L , L – множеството от думи от* Σ^* .

L – подмножество на Σ^* .

Определение 5 .*Нека е дадена азбука* Σ . *Краен автомат над* Σ *ще наричаме всяка наредена четворка* (Q, R, S, T) *, където* Q *е крайно множество .*

Q	*- множество(множество на състоянията)*
$R \subseteq Qx\Sigma xQ$	*- таблица на преходите*
$S \subseteq Q$	*- множество на началните състояния*
$T \subseteq Q$	*- множество на заключителните състояния*

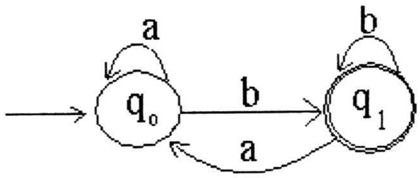
Пояснение :: Ако имаме (q, σ, q) където $q, q' \in Q$ и $\sigma \in \Sigma$, то множеството $(q, \sigma, q') \in R$ и казваме ,че автомата преминава от състояние q в състояние q` .

Определение 6 .*Казваме , че автомата* $A=(Q,R,S,T)$ *е детерминиран ако* $|S|=1$ *и за* $(q,\sigma,q')\in R$ *и* $(q,\sigma,q'')\in R$ *следва че* $q'=q''$.

Определение 7 . *Казваме че автомата A е тотално детерминиран автомат ако за* $\forall q\in Q$ *и* $\forall\sigma\in\Sigma$, $\exists!\, q'$ *за което* $(q,\sigma,q')\in R$.

Пример : (Тотално детерминиран автомат)

$Q=\{q_0,q_1\}$, $L=\{a,b\}$, $R=\{(q_0,a,q_0),(q_0,b,q_1),(q_1,a,q_0),(q_1,b,q_1)\}$,
$S=\{q_0\}$, $T=\{q_1\}$



Тотален детерминиран автомат

Определение 8 . *Дефинираме графа* G_A *по следния начин* $G_A=(Q,R,\alpha,\beta)$, *където Q е множество на върховете , R е множество на ребрата ,* $\alpha(q,\sigma,q')=q$, $\beta(q,\sigma,q')=q'$.

Определение 9 . $\mu_A(q,\sigma)=q' \Leftrightarrow (q,\sigma,q')\in R$, $rng(\mu_A)\subseteq Q$.

μ_A *наричаме функция на матрицата на преходите .*

Определение 10 . *Нека е дадена думата* $w=c_1,.....,c_n$, $c_i\in\Sigma$ *и* $e_1,...,e_n$ *път в* G_A *състоящ се от n на брой ребра ,* $e_i=c_i, i=2,..$ $\alpha(c1)=S$ *, тогава казваме, че* $(e_1,...,e_n)$ *е допустим за* w .

Определение 11 .*Казваме че думата w се приема от автомата A , ако съществува път в* G_A *допустим за w и имащ край в T .*

Забележка : ξ *се приема от A ако* $S\cap T\neq\varnothing$.

Определение 12 .*Дадени са състоянията q ,* $\overline{q}$ *и* $w=c_1,..,c_n$ *.Казваме ,че* $\overline{q}$ *е достижим от q чрез w ако в* G_A *съществува път* $(e_1,...,e_n)$ *от q до* $\overline{q}$ *, такъв че буквата на* e_i *да бъде* c_i , $i=1,...,n$ *и бележим* $q\underset{w}{\longrightarrow}\overline{q}$.

/* Свойства : $q\underset{w}{\longrightarrow}\overline{q}$

1. $A:q\underset{\xi}{\longrightarrow}\overline{q}\Leftrightarrow q=\overline{q}$

2. Ако $A:q\underset{u}{\longrightarrow}\overline{q}$ и $A:\overline{q}\underset{v}{\longrightarrow}\overline{\overline{q}}$, то $A:q\underset{uv}{\longrightarrow}\overline{\overline{q}}$

3. $A:q\underset{uv}{\longrightarrow}\overline{\overline{q}}$,то $\exists$ $\overline{q}$ такова че $A:q\underset{u}{\longrightarrow}\overline{q}$ и $A:\overline{q}\underset{v}{\longrightarrow}\overline{\overline{q}}$ */

Определение 15 .*Казваме ,че w се приема от A точно тогава когато за някое* $q\in S$ *и* $\overline{q}\in T$ *е изпълнено условието* $A:q\underset{w}{\longrightarrow}\overline{q}$.

Определение 16 .*Език на автомат се нарича множеството от онези думи , които се приемат от автомата A и бележим L(A) .*
Определение 17 .*Един език наричаме автоматен , когато той е език на автомат .*

2. Еквивалентни автомати

Определение 18 . *Дадени са автоматите A и B над азбуката Σ . Казваме ,че A и B са еквивалентни ако техните езици съвпадат т.е. L(A)=L(B) .*

Теорема за детерминизация
Ако A е краен автомат над Σ ,то съществува тотален детерминиран краен автомат над Σ ,който е еквивалентен на A .

// За по-любознателните
Доказателство : Алгоритъм за детерминизация на автомат
A=(P,Q,S,T) A\`=(P(Q),R\`,{S},T\`)
$\mu : P(Q)x\Sigma \to P(Q)$
$X \in P(Q)$, $\sigma \in \Sigma$
Полагаме $\mu(x,\sigma) = \{q' \mid (q,\sigma,q') \in R,$ за някое $q \in X\}$
$R' = \{(x,\sigma,\mu(x,\sigma)) \mid x \in P(Q), \sigma \in \Sigma\}$
$T' = \{x \in P(Q) \mid x \bigcap T \neq \varnothing\}$
Тогава A' е тотално детерминиран автомат .
//

3. Недостижими и неразличими (еквивалентни) състояния

Определение 19 . *Даден е краен автомат A=(Q,R,S,T) ,$q \in Q$.Казваме ,че q е достижимо ,ако $A : s \xrightarrow[w]{} q$, за $s \in S$ и $w \in \Sigma^*$.*

Дадена е азбука Σ и тотално детерминиран автомат A=(Q,R,S,T)
$\mu_A : Qx\Sigma^* \to Q$
$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \mu_A(s,w) \in T\}$
Разглеждаме $q \in Q$ $L_q(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \mu_A(q,w) \in T\}$
Забележка : $L_s(A) = L(A)$

Определение 20 . $q, \bar{q} \in Q$ *Казваме , че* $q \Leftrightarrow \bar{q}$ *ако* $L_q(A) = L_{\bar{q}}(A)$

За еквивалентните състояния са в сила релациите :
1) Рефлективност
$L_q(A) = L_q(A)$
2) Симетричност
$L_q(A) = L_{\bar{q}}(A)$ и $L_{\bar{q}}(A) = L_q(A)$
3) Транзитивност
$L_q(A) = L_{\bar{q}}(A)$ и $L_{\bar{q}}(A) = L_{q^*}(A)$, то следва $L_q(A) = L_{q^*}(A)$

Свойства :

1) Ако $q \in T, \overline{q} \notin T \Rightarrow q \neq \overline{q}$.
2) Нека $q \Leftrightarrow \overline{q}$ и е даден автомата А тогава съществуват думи $w_0 \in \Sigma^*$ такива че $\mu_A(q, w_0) \Leftrightarrow \mu_A(\overline{q}, w_0)$

4 . Минимални автомати

Определение 21 .*Минимален автомат наричаме такъв тотално детерминиран автомат , който не е еквивалентен на никой друг тотално детерминиран автомат с по-малко на брой състояния .*

Твърдение 1. Всеки автомат е еквивалентен на някой минимален автомат
Доказателство : Вземаме всички автомати еквивалентни на дадения .От тях избираме този , който има най –малко състояния .
Твърдение 2.Ако един автомат е минимален ,то той няма недостижими състояния .
Доказателство :Ако има недостижими състояния , то ние ще ги премахнем и ще получим автомат минимален на дадения , следва противоречие .
Твърдение 3.Ако един автомат е минимален , то всеки две еквивалентни негови състояния съвпадат .
Доказателство : $q \neq q_0$ $q \Leftrightarrow q_0$ следва съществува автомат с 1 по-малко състояния еквивалентен на дадения . Следва противоречие .

Теорема :Нека А е тотален детерминиран автомат , на който всички състояния са достижими и в който всеки две еквивалентни състояния съвпадат . Тогава А е минимален автомат .(*Няма доказателство)*

Алгоритъм за минимизация на тотално детерминиран автомат

Дадено : A(Q, R,S,T) тот. дет. автомат
Резултат: тот. дет. автомат A_0 минимален за езика L_A
Алгоритъм :

1) Образуваме разбиването $Q_0 = \{Q_1^0, Q_2^0\}$ на Q където $Q_1^0 = Q \setminus T$, $Q_2^0 = T$. Нека $i = 0$.
2) Нека сме построили разбиването $Q^i = \{Q_1^i, Q_2^i, \ldots, Q_{l_i}^i\}$ на Q за някое i . Всяко Q_j^i разбиваме на подмножествата $Q_{j_1}^{i+1}$, $Q_{j_1+1}^{i+1}$, ... , $Q_{j_1+r}^{i+1}$ такива ,че елементите на всяко от тях не се проявяват като нееквивалентни с теста на едната буква**(*)** , за никое $\sigma \in \Sigma$. Обединяваме получените разбивания и получаваме разбиването $Q^{i+1} = \{Q_1^{i+1}, Q_2^{i+1}, \ldots\ldots, Q_{l_{i+1}}^{i+1}\}$
3) Ако Q^i и Q^{i+1} са едно и също разбиване край . В противен случай $i = i+1$ и преминаваме към 2 .

КРАЙ.

(*)Тест на едната буква:Състоянията q_1 и q_2 на тот. детерм. автомат А не са еквивалентни , ако съществува $\sigma \in \Sigma$ такова ,че $\mu(q_1,\sigma)$ и $\mu(q_2,\sigma)$ не са еквивалентни .

Нека $Q^r = Q^{r+1} = Q^{r+2} = ...$ е последното разбиване получено от алгоритъма .
Всяко подмонжество на Q^r се състои само от еквивалентни състояния . Като не е възможно еквивалентни състояния да са в различни множества на рабиването .
Построяваме минималния автомат $A_0(Q,R,S,T)$ където $Q_0 = Q^r$. Началното състояние s_0 е това Q_i^r за което $s_0 \in Q_i^r$.Множеството от заключителни състояния $T_0 = \{Q_k^r \mid Q_k^r \subseteq T\}$.

5. Единственост с точност до изоморфизъм на минималния автомат еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат

<u>**Теорема за единственост с точност до изоморфизъм**</u>
Нека A(Q, R,S,T) и $A'(Q',R',S',T')$ са със следните свойства L(A)=L(A`)=L , A и A' са минимални , $Q' \subseteq Q$.Тогава съществува (еднозначно) обратимо изображение h на Q върху Q'

1) $h:(s_0) = s_0'$, където $s_0 \in S$
2) $h:(T) = T'$
3) $\forall q \in Q$ и $\forall \sigma \in \Sigma$, $h(\mu(q,\sigma)) = \mu'(h(q),\sigma)$, μ функция на матрицата на преходите

Доказателсвто :
Нека $q \in Q$, A минимален $\Rightarrow$ q достижимо $\Rightarrow$ $q = \mu(s_0,u)$, за $u \in \Sigma^*$.
Нека $h(q) := \mu'(s_0',u)$
Коректност : Ще покажем , че h не зависи от u .
Нека $q = \mu(s_0,v)$, $v \in \Sigma^*$
$\mu(s_0,u) = \mu(s_0,v)$ $\Rightarrow$ u и v са еквивалентни спрямо L . Но по условие L е език на A' $\Rightarrow$ $\mu'(s'_0,u) = \mu'(s'_0,v)$
Нека $q' \in Q'$ и A' е минимален по условие $\Rightarrow q'$ е достижимо $\Rightarrow q' = \mu'(s_0',u)$ за $u \in \Sigma^*$
Означаваме $q := \mu(s_0,u)$, тогава $h(q) = \mu'(s_0',u) = q'$ т.е. h е изображение върху .
Ще докажем ,че h е обратимо .
Нека $q_1 \neq q_2$, $q_1,q_2 \in Q$
$q_1 = \mu(s_0,u_1)$ и $q_2 = \mu(s_0,u_2)$, $u_1,u_2 \in \Sigma^*$
q_1 и q_2 не са неразличими $\Rightarrow$ u_1 и u_2 не са еквивалентни относно L
$h(q_1) = \mu'(s_0',u_1)$, $h(q_2) = \mu'(s_0',u_2)$, u_1 и u_2 не са еквивалентни $\Rightarrow h(q_1) \neq h(q_2)$
$\Rightarrow$ доказахме биекция .