Въпрос 9

Холоморфни функции. Основна теорема на Коши

Дефиниция 1. *(функция на на комплексна променлива)*
Ще казаме ,че е зададена комплекснозначна функция f , дефинирана в множеството $M \subset \mathbb{C}$, ако на всяка точка $z \in M$ по определено правило или закон , f съпоставя единствена точка $\omega \in \mathbb{C}$ (т.е. f изобразява мн-вото M върху някаква част от $\mathbb{C}$) или $f : z \to f(z), z \in M$ (т.е. на всяка точка z от M функцията съпоставя точката $f(z)$) .

Дефиниция 2. *(Граница на функция на комплексна променлива)*
Нека $f : M \to \mathbb{C}$ и z_0 е точка на съпоставяне на M . Казваме ,че f има <u>граница A</u> в точката z_0 (z клони към z_0) и записваме по следния начин $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$,ако за $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall z \in M$, за което $0 < |z - z_0| < \delta$ е изпълнено $|f(z) - A| < \varepsilon$

Дефиниция 2'. *(Граница на функция на комплексна променлива)*
Нека $f : M \to \mathbb{C}$ и z_0 е точка на сгъстяване на M . Казваме , че f има <u>граница A</u> в точката $z_0 \in \mathbb{C}$ ако от това ,че $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ $(z_n \in M, z_n \neq z_0)$ следва че $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$.

Твърдение 1. (произлизащо от определение 1 и 2)
Нека $f : M \to \mathbb{C}$, f има граница в т. $z_0 \in \mathbb{C}$.
$(z_0 = x_0 + iy_0)$ $\Leftrightarrow$ когато функциите $u : M \to \mathbb{R}$ и $v : M \to \mathbb{R}$, където $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ имат граници в точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
При това ако $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} u(x,y) = A_1$, $\lim\limits_{z \to z_0} v(x,y) = A_2$, то $A = A_1 + iA_2$

Дефиниция 3. *(непрекъсната функция на комплексна променлива)*
Нека $M \subset \mathbb{C}$ и т. $z_0 \in M$ е точка на сгъстяване на M . Ще казваме ,че $f : M \to \mathbb{C}$ е <u>непрекъсната</u> в т. z , ако $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

От Дефиниция2 $\Rightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$

Дефиниция 4. *(равномерно непрекъсната функция)*
Нека $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$
f е равномерно непрекъсната в M , ако за $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че за $\forall z', z'' \in M$, за които $|z' - z''| < \delta$ е изпълнено $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$

Дефиниция 5. *(производна на ф-ция на комплексна променлива)*
Нека f е дефинирана в околност на т. $z_0 \in \mathbb{C}$.

Казваме ,че f притежава производна в z_0 ($\mathbb{C}$ - диференцируема в z_0), ако

$$\exists \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Дефиниция 6. *(холоморфна /аналитична функция)*

Нека $G\subset\mathbb{C}$

$f:G\to\mathbb{C}$ се нарича холоморфна или аналитична функция в областта G , ако притежава производна във всяка точка от G .

Казваме, че f е холоморфна в т. z_0 ,ако е холоморфна в някоя околност на z_0 .

Забележка: От съществуването на производна в дадена точка следва непрекъсността на фунцията в точката .

Необходими и достатъчни условия за $\mathbb{C}$ диференцируемост

Теорема(НДУ)

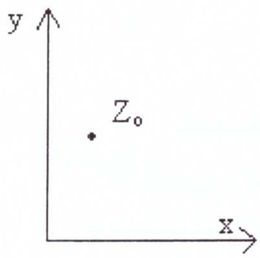
НДУ $f(z)$ да бъде диференцируема е функциите u и v да бъдат диференцируеми по x и y ,и да удовлетворяват условията

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy} \quad , \quad \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$$ - условия на Коши – Риман

Доказателство: **1)Необходимост**

$z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0)$

$f(z)-f(z_0)=u(x,y)-u(x_0,y_0)+i\left[v(x,y)-v(x_0,y_0)\right]$



т. z_0 е фиксирана , можем да се приближаваме към нея по произволен начин

а) Приближаваме към т. z_0 в случая когато приближаваме т. z по оста x (т.е y не се мени)

$z\to z_0$, $z=(x,y_0)$, $z_0=(x_0,y_0)$

При така избраните z,z_0

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}+i\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}=f'(z_0) \tag{1}$$

б) Приближаваме по y (т.е x не се мени)

$z\to z_0$, $z=(x_0,y)$, $z_0=(x_0,y_0)$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}+i\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$\Rightarrow -i\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}=f'(z_0) \tag{2}$$

От (1) и (2) $\Rightarrow -i\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}=\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx}$

$\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}+i\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)=0$, $\mathrm{Re}=0$ и $\mathrm{Im}=0$

$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}$ условия на

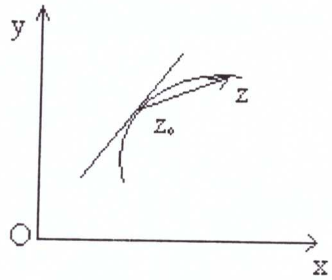
$\frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}$ Коши-Риман

Път и крива в равнината

Дефиниция 7. *Път в равнината $\mathbb{C}$ се нарича всяко непрекъснато изображение $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, където $[a,b]$ е интервал от $\mathbb{R}$ ($[a,b]$ ще наричаме параметричен интервал на пътя γ).Множеството $\gamma^*=\{\gamma(t): a\le t\le b\}$, което представлява образът на $[a,b]$ чрез γ се нарича носител или графика на пътя .*

Дефиниция 8. *(гладък път)*
Пътят $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ се нарича гладък , ако γ притежава производна $\gamma'(t)\neq 0$ за $\forall t\in[a,b]$ и непрекъсната производна $\gamma':[a,b]\to\mathbb{C}$

Теорема
Нека Γ е крива , а $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ е параметризация на Γ . Ако съществува $\gamma'(t_0)\neq 0$ за някое $t_0\in[a,b]$, то Γ има тангента в точката $z_0=\gamma(t_0)$ и ъгълът , който тази тангента сключва с положителната посока на реалната ос , е равен на $\arg\gamma'(t_0)$.



Конформно изображение

Нека G е област , $z_0\in G$ и $f:G\to\mathbb{C}$ е непрекъсната ф-ция , която има производна $f'(z_0)\neq 0$ в т. z_0
Нека $\gamma:[a,b]\to G$ е крива/път в G , която минава през т. z_0 $\Rightarrow$
$\exists t_0\in[a,b]:\gamma(t_0)=z_0$
Нека $\exists\gamma'(t_0)\neq 0$, т.е кривата γ има тангента в т. z_0 .
$\gamma(t)\in G$ и f , γ са непрекъснати , то можем да дефинираме(има смисъл)

$\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, като Γ е непрекъсната ф-ция , т.е тя е крива и минава през точката $f(z_0)$

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0) \\ \Gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)\end{array}\right| \quad \Gamma \text{ е образ на } \gamma \text{ чрез изображението } f$$

$$\Rightarrow \arg\Gamma' = \arg\left[f'(z_0)\gamma'(t_0)\right] = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0) \qquad (*)$$

Теорема
Ако $f : G \to \mathbb{C}$ е непрекъсната ф-ция в точката $z_0 \in G$ и $\exists f'(z_0) \neq 0$,то f запазва ъглите между кривите в тази точка по големина и посока .
Доказателство : Нека $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to G$ и
$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to G$
γ_1 , γ_2 криви пресичащи се в т. z_0

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \exists \text{ т.} t_1 \in [a_1, b_1] : \gamma_1(t_1) = z_0 \\ \Rightarrow \exists \text{ т.} t_2 \in [a_2, b_2] : \gamma_2(t_2) = z_0\end{array}\right| \Rightarrow \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$$

Нека $\gamma_1(t_1) \neq 0$, $\gamma_2(t_2) \neq 0$
Ако с Γ_1 и Γ_2 означим образите съответно на γ_1 и γ_2 чрез изображението f , то Γ_1, Γ_2 са криви минаващи през т. z_0

От (*) $\Rightarrow$ $\arg\Gamma_1 = \arg f'(z_0) + \arg\gamma_1'(t_1)$ (1)

$\arg\Gamma_2 = \arg f'(z_0) + \arg\gamma_2'(t_2)$ (2)

Образуваме разликата (1) – (2)
$\arg\Gamma_1 - \arg\Gamma_2 = \arg\gamma_1'(t_1) - \arg\gamma_2'(t_2)$

$\arg\Gamma_1 - \arg\Gamma_2$ - ъгълът м/у образите на γ_1 и γ_2 чрез изображението f в точката $f(z_0)$

$\arg\gamma_1'(t_1) - \arg\gamma_2'(t_2)$ - ъгълът м/у кривите γ_1 и γ_2 в т. z_0

Дефиниция 9. *(конформно изображение)*
Изображение , което запазва ъглите м/у кривите по големина и посока , се нарича конформно .

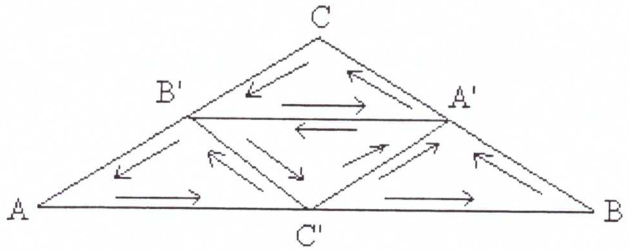
Теорема на Коши

Дефиниция 9. *Едносвързана област наричаме област без дупки .*

Теорема (Коши-класика)
Нека G е едносвързана област и γ е затворена крива , съдържаща се в G . Ако f е холоморфна ф-ция в G , то $\int_\gamma f dz = 0$

Теорема (Коши за триъгълен контур)
Нека f е холоморфна в областа G . Нека ΔABC е затворен триъгалник(ще го бележим с $\bar{\Delta}$) се съдържа в G . Тогава $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$.

$\partial\Delta$-контура от триъгалника ,ориентиран чрез върховете A,B,C,A (наредбата им)



A', B', C' - среди съответно на BC,AC,AB

$\Delta^1 \Delta^2 \Delta^3 \Delta^4$ - триъгълници получени при разделяне на ΔABC

Контурите им са ориентирани по следния начин

$\partial\Delta^1 = [AC'B'A]$ $\quad$ $\partial\Delta^3 = [CB'A'C]$

$\partial\Delta^2 = [BA'C'B]$ $\quad$ $\partial\Delta^4 = [A'B'C'A']$

Имаме

(*) $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta^1} f + \int_{\partial\Delta^2} f + \int_{\partial\Delta^3} f + \int_{\partial\Delta^4} f$ ($\Delta A'B'C'$ интегрираме два пъти по $\neq$ посоки)

Нека с Δ_1 означим този триъгълник , интегралът по който контур има най-голям модул $\Delta_1 = \max\limits_{k=1,\dots,4} \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta^K} f dz \right|$

От (*) $\left| \displaystyle\int_{\partial\Delta} f \right| \le 4 \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta_1} f \right|$ (1)

С триъгълника Δ_1 дейсваме по същия начин както с Δ и получаваме Δ_2 . От тук $\Rightarrow \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta_1} f \right| \le 4 \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta_2} f \right|$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta} f \right| \le 4^2 \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta_2} f \right|$

Продължаваме така и получаваме редицата $\{\Delta_n\}_0^\infty$ от вложени един в друг триъгълници .

$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$ (3)

За тези триъгълници получаваме н-вото

$\left| \displaystyle\int_{\partial\Delta} f \right| \le 4^n \left| \displaystyle\int_{\partial\Delta_n} f \right|, n = 1, 2, \dots$ (**)

Нека S е периметъра на Δ, а S_n периметъра на Δ_n, то $S_n = \frac{S}{4^n} \Rightarrow S_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

При избора на триъгълниците Δ_n $\exists$ единствена т. z_0 (От теоремата на Коши за вложени интервали), която се съдържа във всеки един от тях.

От (3) $\Rightarrow z_0 \in \overline{\Delta}_n$ за $\forall n \Rightarrow z_0 \in G \Rightarrow \exists\ f'(z_0)$ в т. z_0

От Дефиниция5 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \forall z \in G$, за което $|z - z_0| < \delta$ имаме

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

Нека $\eta : G \to \mathbb{C}$

$$\left|\eta(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| \text{ при } z \neq z_0$$

$\eta(z_0) = 0$

е непрекъсната в G, като

$|\eta(z)| < \varepsilon$, за $z \in G$, $|z - z_0| < \delta$ (4)

От това, че $z_0 \in \overline{\Delta}_n$, n=1,2,... и $S_n \to 0$

$\Rightarrow \exists\ m > 0 : n > m\ S_n < \delta$ и $\Rightarrow \overline{\Delta}_n \subset \{z : |z - z_0| < \delta\}$ за $\forall n > m$ (5)

От (4) и (5) $\Rightarrow |\eta(z)| < \varepsilon$ за $\forall z \in \overline{\Delta}_n$ и $n > m$

Изразяваме $f(z)$ чрез $\eta(z)$

$f(z) = (z - z_0)\eta(z) + f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0) \quad \Rightarrow$

$$\int_{\partial\Delta_n} fzdz = \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\eta(z)dz + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f(z_0)dz}_{=0}$$

$$\int_{\partial\Delta_n} fzdz = \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\eta(z)dz$$

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} fzdz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\eta(z)dz\right| \leq \varepsilon S_n^2 = \varepsilon \frac{S_n^2}{4^n} \text{ за } \forall n > m$$

От (**) $\left|\int_{\partial\Delta_n} fzdz\right| \leq \varepsilon \frac{S_n^2}{4^n}$

Този интеграл независи от ε, което е произволно избрано число

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta_n} fzdz = 0$$

Теоремата е доказана.