Въпрос 8
Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.

Определение1

Нека $f(t)$ и $g(t)$ са две функции, дефинирани в интервал $[a,b]$.Когато променливата t приема всички стойности от a до b (когато t описва нтервала $[a,b]$), точката $P(x,y)$, чиито координати се определят от равенствата

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x = f(t) \\ y = g(t) \end{vmatrix}$$

ще опише в равнината O_{XY} едно множество от точки L, което наричаме крива.

Определение2

Кривата L зададена с уравнвнията

$$\begin{vmatrix} x = f(t) \\ y = g(t) \end{vmatrix}$$

наричаме гладка, ако $f(t)$ и $g(t)$ са диференцируеми и не са едновременно нули за никое $t \in [a,b]$, т.е $(f(t)', g(t)') \neq (0,0)$.

Определение3(формула за дължина на крива)

Нека имаме кривата L зададена с уравненията

$$\begin{vmatrix} x = f(t) \\ y = g(t) \end{vmatrix} \qquad t \in [a,b]$$

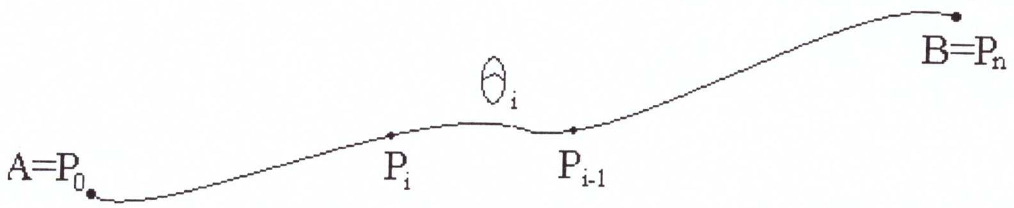
Дължина на L е $\quad d = \int_a^b \sqrt{f(t)'^2 + g(t)'^2}\,dt$

Криволинейни интеграли от първи род

Разглеждаме кривата $\alpha = \alpha(t)$.

$$L: \begin{vmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{vmatrix} \qquad t \in [a,b]$$

Правим деление на интервала $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ (издребняваща редица).



$P_i = \alpha(t_i) = (x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$

За $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ в този интервал съответства точка $\theta_i = \alpha(\tau_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i))$ от кривата.

Образуваме сумата на Риман: $\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i).l_{P_{i-1}P_i}$

където $l_{P_{i-1}P_i}$ е разстоянието между точките $P_{i-1}P_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\theta_i).l_{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i).\int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha'(t)dt = \text{от теоремата за средните стойности} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i).\|\alpha'(\tau_i)\|.(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i)).\sqrt{x'^2(\bar{\tau}_i) + y'^2(\bar{\bar{\tau}}_i)}.(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{\Lambda^*}$$

$$\xrightarrow{\Lambda^*} \int_a^b f(x,y).\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Дефиниция: *Криволинеен интеграл от първи род наричаме*

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y).\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Свойства:

1.Криволинейния интеграл от I род не зависи от параметризацията.

2.Запазва се при смяна на посоката на обхождане.

3.Адитивност

$\Gamma_{AC} = \alpha([a,c])$, $\Gamma_{CB} = \alpha([c,b])$

$\Gamma_{AB} = \Gamma_{AC} \cup \Gamma_{CB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} f(x,y)dt = \int_{\Gamma_{AC}} f(x,y)dt + \int_{\Gamma_{CB}} f(x,y)dt$$

Криволинейни интеграли от втори род

Разглеждаме функциите $P(x,y)$ и $\theta(x,y)$, които образуват вектора $\vec{F} = (P,Q)$. Правим деление на кривата $L: \left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. \quad t \in [a,b]$,

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, $P_i = \alpha(t_i) = (x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$. За $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ в този интервал съответства точка $\theta_i = \alpha(\tau_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i))$ от кривата.

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}) = (x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1})) =$$

$$= (x'(\bar{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}), y'(\bar{\bar{\tau}}_i)(t_i - t_{i-1}))$$

Образуваме сумата:

$$\sum_{i=1}^{n} F(\theta_i).\overrightarrow{P_{i-1}P_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\bar{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} Q(x(\tau_i), y(\tau_i))y'(\bar{\bar{\tau}}_i)(t_i - t_{i-1}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_a^b P(x,y)x'dt + \int_a^b Q(x,y)y'dt = \int_a^b F\alpha'dt$$

Дефиниция: *Криволинеен интеграл от II род наричаме :*

$$\int_a^b Pdx + \int_a^b Qdy = \int_a^b (Px' + Qy')dt$$

Свойства :
1)Криволинейният интеграл от II род не зависи от параметризацията на кривата.
2)Знакът се променя при смяна на посоката
3)Адитивност

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i \Rightarrow \int_{\Gamma} F\alpha' dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F\alpha' dt$$

Формули за свеждане на криволинейни интеграли към Риманови

Определение4

Една област в равнината е *нормално разположена относно оста* O_X, ако нейния контур представлява проста затворена крива, и ако тя може да бъде разделена с помощта на отсечки, успоредни на оста O_Y, на краен брой криволинейни трапци, нормално разположени относно оста O_X, всеки два от които или нямат общи точки, или имат само контурни общи точки.
Аналогично на дефинираме и област *нормално разположена относно оста* O_Y.

Определение5

Когато една област в равнината е нормално разположена както относно оста O_X ,така и относно O_Y, то ще казваме че областа е нормално разположена в равнината.

1.Формула на Грийн

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Където:

R е нормално разположена в равнината.
L е контурът на R, описан в положителна посока.
P,Q са непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни.

2. Формула на Стокс

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Където:

L е частично гладка крива.
S е гладка двустранна повърхнина с контур L, така че посоката на L е съгласувана с посоката на нормалата на S.
P,Q,R са гладки функции.

3. Формула на Гаус-Остроградски

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

Където:

S е затворена, частично гладка и ограничена повърхнина.

G е тялото, което S загражда.

P,Q,R са гладки функции.

Доказателство на формулата на Грийн

Теорема

Нека R е затворена област нормално разположена относно оста O_X. Нека $P(x,y)$ е непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $P_y'(x,y)$ в някаква отворена област $D: R\subset D$. Ако с L означим контура на R, описан в положителна посока, то

$$\int_L P(x,y)dx=-\iint_R P_y'(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Ако пък R е затворена област нормално разположена относно оста O_Y и $Q(x,y)$ е функция, която е непрекъсната и притежава непрекъсната частна производна $Q_x'(x,y)$ в D, то

$$\int_L Q(x,y)dy=\iint_R Q_x'(x,y)dxdy \qquad (2)$$

Д-во:

Нека най-напред разгледаме случая когато R е криволинеен трапец нормално разположен относно оста O_X, зададен с неравенствата

$$\begin{vmatrix} a\le x\le b \\ f_1(x)\le y\le f_2(x)\end{vmatrix}$$

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ са непрекъснати в затворения интервал $[a,b]$.

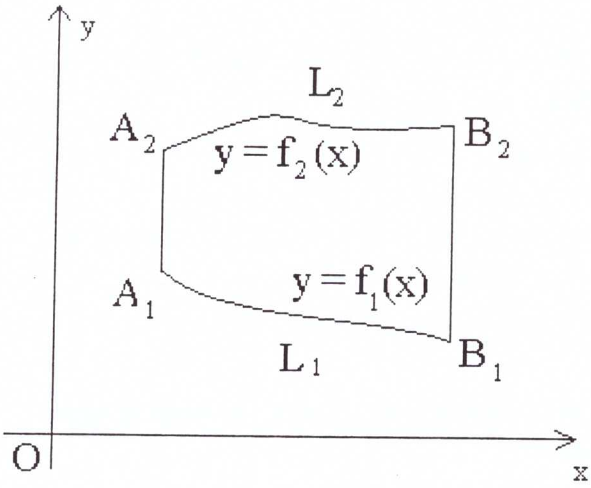
Можем да напишем

$$\iint_R P_y'(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y'(x,y)dy\right]dx$$

Но от теоремата на Лайбниц-Нютон(по-точно от едно от следствията й) имаме че

$$\iint_R P_y'(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y'(x,y)dy\right]dx=\int_a^b\left[P(x,f_2(x))-P(x,f_1(x))\right]dx \quad (3)$$

Сега ако означим с L_1 графиката на функцията $y=f_1(x)$, а с L_2 графиката на $y=f_2(x)$ и A_1,A_2,B_1,B_2 началните точки на L_1 и L_2 както на графиката, то ще получим



$$\int_L P(x,y)dx = \int_{\overset{\frown}{A_1B_1}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{B_1B_2}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{B_2A_2}} P(x,y)dx + \int_{\overset{\frown}{A_2A_1}} P(x,y)dx$$

Като вземем предвид, че отсечките B_1B_2 и A_2A_1 са успоредни на оста O_Y, и като използваме за кривите L_1 и L_2 параметричните уравнения

$$L_1 : \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ y = f_1(x) \end{array} \right.$$

$$L_2 : \left| \begin{array}{l} a \le x \le b \\ y = f_2(x) \end{array} \right.$$

то получаваме

$$\int_L P(x,y)dx = \int_{L_1} P(x,y)dx - \int_{L_2} P(x,y)dx =$$

$$\int_a^b P(x, f_1(x))dx - \int_a^b P(x, f_2(x))dx \qquad (4)$$

Равенствата (3) и (4) ни дават равенство (1).По този начин доказахме в случая когато R е криволинеен трапец.

Нека сега R е нормално разположена относно оста O_X .Като в разделим на криволинейни трапеци $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ще имаме

$$\iint_R P_y'(x,y)dxdy = \iint_{R_1} P_y'(x,y)dxdy + \ldots + \iint_{R_n} P_y'(x,y)dxdy \qquad (5)$$

В същото време ако с L_i означим контура на областа R_i от (1) имаме

$$\int_{L_i} P(x,y)dx = -\iint_{R_i} P_y'(x,y)dxdy \qquad (6)$$

Тук всеки от интегралите $\int_{L_i} P(x,y)dx$ може да бъде представен като сума от няколко криволинейни интеграла.Част от тези интеграли ще бъде равна на нула(защото те са успоредни на оста O_Y), а друга част ще е върху части от контура L.Ето защо можем да напишем

$$\int_L P(x,y)dx = \int_{L_1} P(x,y)dx + .. + \int_{L_n} P(x,y)dx \qquad (7)$$

От равенствата (5),(6),(7) получаваме пак (1), но този път доказано за всяка област R нормално разположена относно оста O_X.

По аналагочен начин доказваме и равенството (2), за област нормално разположена относно оста O_Y.

Накрая като вземем една област R разположена нормално в равнината чрез събиране на (1) и (2) ще получим следното

$$\int_L \left[P(x,y)dx + Q(x,y)\right]dy = \iint_R \left[Q_x'(x,y) - P_y'(x,y)\right]dxdy$$

което е именно формулата на Грийн.

Лема*

Нека $f(t)$ е непрекъсната в интервала $\left[a,b\right]$.Нека е дадена издребняваща редица от разделяния на интервала $\left[a,b\right]: a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$

Тогава $\sum_{i=1}^{n} f(t_i).(t_i - t_{i-1}) \to \int_a^b f(t)dt$