中山大学 DCS5706《随机过程及应用》期末作业

$M/M/1$ 排队系统的控制研究

何瑞杰 25110801

摘　要

目录

1. 问题描述

$M/M/1$ 排队系统广泛存在于生产生活中，它指的是一个先到先服务的单服务台的服务系统。顾客按照参数为 λ 的 Poisson 过程到达；服务台的服务时间服从参数为 μ（即服务速率）的指数分布，且和顾客的到达过程独立。

现考虑带有服务速率控制的 $M/M/1$ 排队系统，其服务速率 $\mu(i) \in (\lambda, \bar{\mu}]$ 取决于系统中的顾客数目 i，该数目包括等待的顾客和正在服务的顾客。系统有两重成本：第一重为单位时间的服务成本 $q(\mu)$，其满足 $q(0) = 0$；第二重为顾客等待成本 $c(i)$。对该 $M/M/1$ 系统的控制目标为对系统内不同顾客数量时采用不同服务速率，以期最小化单位总成本。

2. 模型建立

带有控制的 $M/M/1$ 排队系统可使用连续时间 Markov 决策过程建模，其各参数如下：

CTMDP 资料	$M/M/1$ 系统中的元素
状态 $x(t)$	系统中该时刻的顾客数目 i
动作 $u(t)$	系统该时刻的服务速率 μ
代价函数 $g(x(t), u(t))$	单位时间总成本 $q(\mu) + c(i)$
策略 μ_k	系统的服务速度策略 $\mu(i)$

若转移速度对所有状态和动作均匀，则有

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{\beta+\nu}\right)^k \frac{g(x_k, \mu_k(x_k))}{\beta+\nu}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k \cdot \tilde{g}(x_k, \mu_k(x_k))\right],$$

对应的 Bellman 方程为

$$J(i) = \frac{1}{\beta + \nu} \min_{u \in U(i)} \left[g(i,u) + \nu \sum_j p_{i,j}(u) J(j) \right]$$

考虑转移速度对所有状态和动作不均匀, 但存在上界 ν, 若对状态 i 和动作 u, 有转移速度 $\nu_i(u)$, 考虑下面拥有新的转移概率的均匀转移速度的 CTMDP:

$$\tilde{p}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{\nu_i(u)}{\nu} p_{i,j}(u) & \text{if } i \neq j \\ \dfrac{\nu_i(u)}{\nu} p_{i,i}(u) + 1 - \dfrac{\nu_i(u)}{\nu} & \text{if } i = j \end{cases}$$

因此新的 CTMDP 的 Bellman 方程为

$$J(i) = \frac{1}{\beta + \nu} \min_{u \in U(i)} \left[g(i,u) + (\nu - \nu_i(u)) J(i) + \nu_i(u) \sum_j p_{i,j}(u) J(j) \right]$$

在 $M/M/1$ 队列中，转移速率 $\nu_i(\mu)$ 在系统中无顾客（$i = 0$）时为 λ，在有顾客时为 $\lambda + \mu$，则依照上述结果的转移速率上界为 $\nu = \lambda + \bar{\mu}$。由于该系统的状态只可能向相邻状态转移，且当系统中没有顾客时，规定 $\mu(0) = 0$，因此可以得到其 Bellman 方程为

$$J(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta + \nu} [c(0) + (\nu - \lambda) J(0) + \lambda J(1)] & i = 0 \\ \dfrac{1}{\beta + \nu} \min\limits_{\mu} [c(i) + q(\mu) + (\nu - \lambda - \mu) J(i) + \lambda J(i+1) + \mu J(i-1)] & i \geqslant 1 \end{cases}$$

注意系统中转移概率 $p_{i,i+1}(u)$ 对应着新顾客进入系统，其值为 $\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$，而 $p_{i,i-1}(u)$ 对应着顾客服务完成离开系统，其值为 $\dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$。

3. 最优策略计算

本节介绍代价函数的取法和求解 Bellman 方程用到的算法。

3.1. 代价函数

本项目研究排队代价和服务代价分别为线性、二次函数、指数函数情况时的最优控制策略，共有九种组合。具体地，线性、二次代价和指数代价分别取

$$\begin{aligned} f_{\text{linear}}(x) &= x, \\ f_{\text{quad}}(x) &= \frac{1}{2} x^2, \\ f_{\exp}(x) &= e^{0.1x}. \end{aligned}$$

3.2. 值迭代

第一种求解方法是值迭代，其原理为直接应用 Bellman 方程的定义，并用其迭代让边界处的值逐渐传导到其他各个状态，直至收敛:

$$J_{k+1}(i) = \min_{u \in U(i)} \left[g(i,u) + \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}(u) J_k(j) \right]$$

在 $M/M/1$ 系统中，值迭代算法可以写为

procedure Value-Iteration($c(i)$, $q(\mu)$, λ, $\bar{\mu}$, β, ε)

▷ 初始化参数与统一化速率 nu

$$\nu \leftarrow \lambda + \bar{\mu}$$

$$J_0(i) \leftarrow 0, \forall i \in \{0, ..., N\}$$

$$k \leftarrow 0$$

while true **do**

▷ 更新状态 0 (无服务控制)

$$J_{k+1}(0) \leftarrow \frac{1}{\beta + \nu}\left[c(0) + (\nu - \lambda) J_{k(0)} + \lambda J_{k(1)}\right]$$

▷ 更新状态 i >= 1

for $i \leftarrow 1, ..., N - 1$ **do**

$$J_{k+1}(i) \leftarrow \frac{1}{\beta + \nu} \min_{\mu \in (\lambda, \bar{\mu}]}\left[c(i) + q(\mu) + \mu J_{k(i-1)} + (\nu - \lambda - \mu) J_{k(i)} + \lambda J_{k(i+1)}\right]$$

end

▷ 边界处理

$$J_{k+1}(N) \leftarrow J_{k+1}(N - 1)$$

▷ 收敛判定

if $\max_i |J_{k+1}(i) - J_{k(i)}| < \varepsilon$ **then**

break

end

$k \leftarrow k + 1$

end

▷ 根据最终值函数提取最优策略

$$\mu^*(i) \leftarrow \arg\min_{\mu}\left[q(\mu) - \mu(J_{k+1}(i) - J_{k+1}(i - 1))\right], \forall i \geq 1$$

return (J_{k+1}, μ^*)

Algorithm 1 Value Iteration for Controlled M/M/1 Queue

3.3. 相对值迭代

3.4. 策略迭代

4. 仿真验证

5. 模型参数对最优策略的影响

6. 结论

7. 代码附录