2025 年 11 月 24 日至 11 月 30 日周报

何瑞杰
中山大学, 大湾区大学

目录

1. 项目进展

1.1. 使用神经网络学习生命游戏的演化动力学

2. 文献阅读

2.1. Diffusion Schrödinger Bridge with App. to Score-Based Gen. Modeling

NIPS 2021 | Valentin De Bortoli et al.

2.2. Score-based Gen. modeling through SDE

ICLR 2021 | Yang Song et al.

3. 学习进度

3.1. 机器学习理论

3.1.1. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

3.2. 随机过程

本周学习了连续状态的 Markov 链。

3.3. 随机微分方程

本周开始学习 SDE 解的存在性和唯一性。

3.4. 实分析

3.4.1. 动机

第一个问题源于 Fourier 变换。

第二个问题是极限和积分的可交换性。

第三个问题是可求长曲线的问题。

第四个问题是

3.4.2. 方体

为了求 $\mathbb{R}^p$ 中某些集合的“大小”或者“体积”，我们需要后者分解为可以轻易求得体积的“基本构件”的“几乎无交”并。而我们采用方体为基本构件。

定义 3.4.2.1 ($\mathbb{R}^p$ 中的 (闭) 方体)：$\mathbb{R}^p$ 中的方体是一个这样的集合 R:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p]. \tag{1}$$

它的意思是

$$R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, ..., a_p \leqslant x_p \leqslant b_p\}. \tag{2}$$

它的体积为 $|R| = \prod_{i=1}^{p} (b_p - a_p)$.

相应地；开方体只需将定义中的闭区间变成开区间即可，且其体积与相同端点的闭方体相同。如果两个方体的内部不交，我们称它们几乎无交。对于 $\mathbb{R}^2$ 中的开集，我们能得到十分有趣的结论：$\mathbb{R}^d (d \geqslant 1)$ 中的任意开集都可以写成可数个几乎无交的闭方体的并：

定理 3.4.2.1：$\mathbb{R}^p$ 中的任意开集 $\mathcal{O}$ 都可以写成可数个几乎无交个闭方体的并。

证明它的方法并不复杂。首先画一个边长为 1 的网格，就得到了若干边长为 1 的方体。然后做下面的操作。(1) 如果某方体被集合 $\mathcal{O}$ 包含，那么我们接受该方体；(2) 如果某方体与集合 $\mathcal{O}$ 不交，我们拒绝之；(3) 如果该方体和集合 $\mathcal{O}$ 的边界交集非空，我们暂且接受。接下来将每个暂且接受的方体，划分为大小相同、边长相等的四个小方体，然后继续一直做上面的接受-拒绝测试，然后对于暂且接受的方体一直划分下去。由于所有边长的方体可以和 $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}$ 形成一一对应，因此全体方体的集合是可数的，接收得到的方体的集合也是可数的。

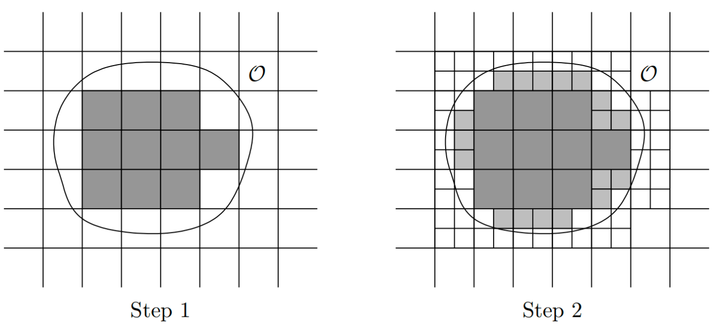

图 1 将开集 $\mathcal{O}$ 分解为可数个几乎无交的方体

3.4.3. Cantor 集

定义 3.4.3.1 (Cantor 集)：定义这样的一列集合 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $C_0 = [0, 1]$。$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$，相当于将 C_0 中的闭区间每个切成三份，弃去中间的一份。然后一直这样做下去，得到 C_2，C_3 等等。Cantor 集 $\mathcal{C}$ 定义为这些集合的交：

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \tag{3}$$

3.4.4. 外测度

3.5. 动力系统基础

4. 问题记录

5. 下周计划

论文阅读

1. 生成模型
    - 薛定谔桥
    - DDIM

项目进度

1. 使用神经网络学习生命游戏的演化动力学
    - 考虑另外两种方法的实现
    - 更新在线 Overleaf 文档
2. 耦合约瑟夫森结
    - 将 MATLAB 模拟代码全部迁移至 Python
    - 考虑简单的 Neural SDE 方法解带参 OU 过程的参数

理论学习

1. 随机过程课程
    - 复习 Poisson 过程和 Markov 过程
2. 随机微分方程
    - 第五章完成