حمید رضا کاشانی

$f_0 \{x \mid Ax < b\}$ ، اگر $\mathrm{dom} f_0$ بی‌کران باشد $\longleftrightarrow \exists v \neq 0 \rightarrow Av \preceq 0$

a (1

طرف دوم مسئله: اگر یک همچین v وجود داشته باشد که $Av \preceq 0$ شود وجود دارد و x_0 هم در دامنه f_0 است.

پس $x_0 + tv$ هم به خاطر روبه‌رو در دامنه است:

$$A(x_0+tv) = \underbrace{Ax_0 + \underbrace{tAv}_{t>0 \ \preceq 0}}$$

برای $t>0$

$\Rightarrow Ax_0 \preceq b \longrightarrow Ax_0 + \underbrace{tAv}_{\text{منفی}} \preceq b$ پس برای هر t این در دامنه است پس بی‌کران می‌شود

طرف اول مسئله: فرض کنیم x^K دنباله‌ای از نقاط دامنه f_0 است که $\|x^K\|_2 \to \infty$ (که این یعنی باید f_0 بی‌کران باشد). به طوری

و تعریف کنیم $v^K = \frac{x^K}{\|x^K\|_2}$ به طوری که $\|v^K\| = 1$ برای هر K ای. و داریم

$$a_i^T x^K < b_i \longrightarrow a_i^T v^K \times \|x^K\| < b_i \Rightarrow a_i^T v^K < \frac{b_i}{\|x^K\|} \xrightarrow{\|x^K\| \to \infty} a_i^T v^K \preceq 0$$

و $v \neq 0$ پس این v اگر فرض برقرار باشد وجود دارد.

طرف دوم از الف

b) 1- اگر وجود داشته باشد v که $Av \preceq 0$ باشد در این صورت $a_j^T v > 0$ است برای $t>0$ از سوال قبل داریم در دامنه است

$$f_0(\widehat{x_0+tv}) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i^T x_0 - t a_i^T v) \leq -\sum_{i \neq j} \underbrace{\log(b_i - a_i^T x_0)}_{\text{بزرگتر کردیم}} - \log(b_j - a_j^T x_0 - t a_j^T v)$$

حال اگر t را زیاد کنیم $\log$ - آن کم می‌شود و برای $t \to \infty$ به $-\infty$ میل می‌کند پس f_0 بی‌کران از پایین است.

- طرف اول: اگر فرض شود f از پایین بی‌کران است وجود دارد x^K که $Ax^K < b$ و $f_0(x^K) \to -\infty$ و براساس کانوکس بودن مسئله داریم:

$$f_0(x^K) \geq f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - a_i^T x_0} a_i^T (x^K - a_i^T x_0)$$

$$= f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - b_i + a_i^T x^K - a_i^T x_0}{b_i - a_i^T x_0} = f_0(x_0) + m - \sum_{\text{اعضا}}^{m} \frac{b_i - a_i^T x^K}{b_i - a_i^T x_0}$$

حال برای $f(x_0) \to \infty$ باید $\max_i (b_i - a_i^T x^K) \to \infty$ باشد حال فرض کنید $z > 0$ داریم که $A^T z = 0$ پس داریم

$$z^T b = z^T (b - Ax^K) \geq z_i \max_i (b_i - a_i^T x^K) \longrightarrow \text{بیشترین عضو یک درایه} \rightarrow \infty$$

$z^T b$ یک عدد است و هرچند هم بزرگ باشد می‌شود یک x^K را قرار داد که نامساوی برقرار نباشد پس همچین z ای وجود ندارد با تقیه alternative داریم که $\exists v \ Av \preceq 0, Av \neq 0$

c) حال برای A که $\text{rank}(A)=n$ باشد می‌توانیم نشان دهیم: اگر $\text{dom}\, f_0$ کران‌دار باشد در این صورت α-sublevel set های
آن close است و برای یک α های نقطه‌ی minimum داریم و اگر $\text{dom}\, f_0$ بی‌کران باشد طبق مسئله قبل یک v
وجود دارد که در آن جهت بی‌کران است به صورتی که $Av \preceq 0$ ، $v \neq 0$ و چون $\text{rank}(A)=n$ داریم $Av \neq 0$ پس
طبق مسئله قبل f_0 بی‌کران می‌شود پس f_0 از پایین بی‌کران است اگر و تنها اگر دامنه کران‌دار باشد که این نشان می‌دهد
یک x^* دارد که جواب بهینه می‌دهد.

d) در حالتی می‌توانیم همه‌ی جواب‌ها affine باشد که ما strictly convex داشته باشیم در مسئله خود.
باز هم برای $\text{rank}(A)=n$ مسئله را بررسی می‌کنیم.

$$\nabla^2 f(x) = A^T \text{diag}(d) A \quad \rightarrow d_i = \frac{1}{(b_i - a_i^T x)^2}, \quad i = 1, \dots, m$$

که ماتریس هسین مثبت است اگر $\text{rank}(A)=n$ باشد ← که در این صورت تابع محدب اکید می‌شود که
به این معنی است که یک جواب داریم.

(a-2

minimize $c^T x$ → اگر b تو $R(A)$ نیست → $p^* = \infty$

s.t $Ax = b$ → جواب نداریم چون نقطه feasible نداریم

→ فرض b تو $R(A)$ باشه

بردار c را به صورت دو بردار میشه نوشت:

$c = A^T\lambda + \hat{c}$ → $\hat{c}$ یک عنصر از فضای پوچ A و $A^T\lambda$ هم عمود بر فضای پوچ A است

اگر $\hat{c} = 0$ باشد داریم

$$c^T x = \lambda^T \underbrace{Ax}_{b} + \underbrace{\hat{c}^T x}_{0} = \lambda^T b \longrightarrow \text{مقدار ثابت بدست می‌دهد}$$

اگر $\hat{c} \neq 0$ باشد داریم: در این صورت x را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$x = x_0 - t\hat{c}$ ← x_0 نقطه feasible

$$\to c^T x = \lambda^T A x + \hat{c}^T x \longrightarrow -\infty$$

t را ببریم به سمت ∞ - جواب کل $-\infty$ $\Rightarrow p^* = -\infty$

$$p^* = \begin{cases} +\infty & b \notin R(A) \\ \lambda^T b & c = A^T\lambda \text{ for some } \lambda \\ -\infty & \text{o.w} \end{cases}$$

---

b) c را به دو بردار موازی با a و عمود بر آن تجزیه می‌کنیم:

minimize $c^T x$ → برای هر a ما نقطه feasible داریم

s.t $a^T x \leq b$

$c = a\lambda + \hat{c}$ به طوری که $a^T\hat{c} = 0$ داریم

برای $\lambda > 0$ داریم:

$$c^T x = (a^T\lambda + \hat{c}^T)x = \lambda a^T x + \hat{c}^T x$$

حال $x = -ta$ $\Rightarrow c^T x = -\underbrace{\lambda t a^T a}_{+\ +\ +} - t\underbrace{\hat{c}^T a}_{0} \xrightarrow{t \to \infty} -\infty$

← از پایین بی‌کران می‌شود.

برای $\hat{c} \neq 0$ داریم: اگر $x = ba - t\hat{c}$

$$c^T x = \lambda a^T(ba - t\hat{c}) + \hat{c}^T(ba - t\hat{c}) = \underbrace{\lambda b a^T a}_{-\text{ یا }+} - t\underbrace{\hat{c}^T\hat{c}}_{+} \xrightarrow{t \to \infty} -\infty$$

← از پایین بی‌کران می‌شود.

حال $\hat{c} = 0$, $\lambda < 0$ داریم:

$c = a\lambda \Rightarrow c^T x = \lambda a^T x$

$\min \overset{\text{منفی}}{\lambda} a^T x$ → $\max a^T x$ $\Rightarrow p^* = \lambda b$

s.t $a^T x \leq b$ s.t $a^T x \leq b$

$$p^* = \begin{cases} \lambda b & c = a\lambda \text{ for some } \lambda \leq 0 \\ -\infty & \text{o.w} \end{cases}$$

c) minimize $c^T x$ $\Rightarrow$ $\min\ c_1 x_1 + \dots + c_i x_i + \dots + c_n x_n$

s.t $l \le x < u$ $\qquad$ s.t $l_i < x_i < u_i \quad i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \min c_1 x_1$ s.t $l_1 < x_1 < u_1$, ... , $\min c_i x_i$ s.t $l_i < x_i < u_i$, $\min c_n x_n$ s.t $l_n < x_n < u_n$

$\to \begin{cases} c_i l_i & \text{اگر مثبت } c_i = c_i^+ \\ c_i u_i & \text{اگر منفی } c_i = c_i^- \end{cases}$, ... $\Rightarrow p^* = l^T c^+ + u^T c^-$

c^- یعنی برای درایه‌های منفی خود درایه و برای درایه مثبت صفر و c^+ یعنی برای درایه‌های منفی صفر

d) minimize $c^T x$

s.t $1^T x = 1$, $x \ge 0$ and s.t $1^T x < 1$, $x \ge 0$

همان مسئله portfolio است.

c_i ها سود هر سهم است و $-c_i$ ها را در این مسئله باید min کنیم.

اگر c_i ها را براساس مقدارشان مرتب کنیم یعنی اگر مقدار $-c_i$ کمتری دارد (سود بیشتر) اول و آن که بیشتر است آخر بگذاریم:

$c_1 = c_2 = c_3 \dots = c_k \cancel{\le} c_{k+1} \cancel{\le} \dots \cancel{\le} c_n$

داریم

$c^T x \ge \underbrace{c_1 (1^T x)}_{\text{به جای همه } c_i \text{ ها کوچکترین را گذاشتیم}} = c_{min}$ $\Rightarrow p^* = c_{min}$

قاعدتاً تمام سرمایه را باید در آن سهم که سود بیشتری می‌دهد پخش کنیم.

حال اگر شرط $1^T x < 1$ داشته باشیم در مسئله قبل باید سرمایه گذاری کنیم حتی اگر c_{min} صفر باشد چون جمع x_i باید یک شود ولی در این مسئله اگر c_{min} منفی باشد $x_i = 0$ قرار می‌دهیم تا سرمایه‌گذاری نکنیم.

$p^* = \min\{0, c_{min}\}$

۳_ الف) اگر x_iها در حل مسئله بین صفر باشند یعنی با انتخاب شدن x_iای به غیر از صفر و یک توانستیم به نقطه‌ی بهینه‌تری برسیم و p^* کمتری داشته‌ایم و این را در نظر داشته باشیم که نقاط مسئله Boolean LP در نقاط مسئله relaxation وجود دارد و نقاط feasible آن مسئله در این مسئله وجود دارد و ولی چون آزادی عمل بیشتری داریم از مسئله اولیه امکان دارد به مقدار کمینه‌تر از مسئله اصلی برسیم که این به این معناست که جواب ما یا جواب مسئله اصلی است و یا از آن کوچکتر است پس مسئله relaxation یک lower bound از مسئله Boolean LP به ما می‌دهد.

ب) در این صورت جواب مسئله relax شده با جواب مسئله Boolean LP برابر است زیرا نقاط feasible آنها یکسان است برای جواب و جواب ما در مسئله اصلی هم feasible است.

---

۵) n level فعالیت داریم. که مقدار هر کدام را x_n و ... و x_1 می‌گذاریم. مقدار منبعی از i برای فعالیت j نیاز است $A_{ij}x_j$ است کل مقدار مصرف منبع i برابر بیشینه با $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \le c_i^{max}$ است. که A_{ij} هر چقدر منفی باشد یعنی فعالیت منبع دیگری را تولید کند. c_i^{max} محدودیت هر منبع است. و مقدار درآمد برابر $r_j(x_j)$ است.

$$r_j(x_j) = \begin{cases} p_j x_j & 0 \le x_j \le q_j \\ p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) & x_j \ge q_j \end{cases}$$

که قیمت پایه

مقدار با تخفیف برای فعالیت j است

هدف بیشینه کردن $\sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$ است.

مسئله بهینه سازی به صورت زیر است:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \le c^{max} \quad , \quad x \ge 0$$

که این مسئله کانوکس است زیرا $r_j(x_j)$ یک تابع کانکیو است زیرا قسمت دوم این تابع خطی با شیب کمتر است) و شروط هم همه خطی هستند پس کانوکس هستند و max یک تابع concave را داریم می‌گیریم پس این مسئله کانوکس است

برای LP کردن این مسئله باید تابع هدف را به شرط‌های نامساوی تبدیل کرده و مرزهای آن نامساوی را max کنیم برای این کار ابتدا $r_j(x_j)$ را بازنویسی می‌کنیم با تابع زیر:

$$r_j(x_j) = \min\left(p_j x_j \,,\, p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j)\right)$$

برای $0 \le x_j \le q_j$ این تابع همیشه کمتر است

و برای $x_j \ge q_j$ این تابع همیشه کمتر است

که min دو تابع خطی کانکیو می‌شود و مسئله هم کانوکس است.

حال برای تبدیل کردن تابع هدف به شرط، هر $r_j(x_j)$ را تبدیل به نامساوی $r_j(x_j) \ge u_j$ می‌کنیم تا به جای تابع‌ها u_j ها را max کنیم که خطی است که از این نامساوی نتیجه می‌شود که باید $u_j \le p_j x_j$ و $u_j \le p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j)$ باشد.

پس مسئله ما به صورت مسئله مقابل زیر می شود:

$$\text{maximize} \sum_{j=1}^{n} a_j = 1^T a$$

$$\text{s.t} \quad Ax \leq c^{max}, \quad x \geq 0, \quad p_j x_j \geq a_j, \quad p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq a_j \quad j=1,\dots,n$$

این مسئله هم محدب است. مثلاً برای x ثابت $a_i \leq r_i(x)$ شود که بیشترین a_jها همان $r_j(x_j)$ است. $1^T a$ هم کوچکتر یا مساوی جواب مسئله اصلی است که برای $a_i = r_i(x)$ مساوی می شود که با max کردن آن به این جواب می رسیم.

---

8)

a) $f(p) = \max_{i=1,\dots,n} |\log a_i^T p - \log I_{des}|$ $\quad a_i \in R^m, \ I_{des} > 0, \ p \in R_+^m$

برای ساده کردن نگارش مسئله $a_i = a_i / I_{des}$ و I_{des} را مساوی با یک فرض می کنیم. پس داریم:

$f(p) = \max_i |\log a_i^T p|$

و حال اگر شرط $\{p \mid a_i^T p > 0, \ i=1,\dots,n\}$ را داشته باشیم:

$$\to |\log(a_i^T p)| = \begin{cases} \log(a_i^T p) & \log(a_i^T p) > 0 \to a_i^T p \geq 1 \\ -\log(a_i^T p) = \log\left(\frac{1}{a_i^T p}\right) & \log(a_i^T p) < 0 \to a_i^T p < 1 \end{cases} = \max\left\{\log(a_i^T p), \log\left(\frac{1}{a_i^T p}\right)\right\}$$

$$= \log \max\{a_i^T p, 1/a_i^T p\}$$

پس داریم:

$$f(p) = \log \max_i \max\{a_i^T p, 1/a_i^T p\} \quad \text{s.t} \ \{p \mid a_i^T p > 0, \ i=1,\dots,m\}$$

حال $a_i^T p$ که کانوکس است و $\frac{1}{a_i^T p}$ هم چون شرط $a_i^T p > 0$ داریم کانوکس می شود و max دو تابع کانوکس هم کانوکس می شود. $\exp(f)$ چون exp تابعی کانوکس بوده و نزولی و f هم کانوکس است تابعی کانوکس می شود.

b) "شرط بیشتر از نصف توان کل در هر ۱۰ لامپ نباشد"

$$\sum_{i=1}^{10} p_{[i]} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i \longrightarrow$$ این شرط یعنی جمع توان ۱۰تا بزرگترین لامپ کمتر از توان کل باشد که این شرط تضمین می دهد هر ۱۰ لامپ جمع توان کمتر از نصف کل دارد.

$p_{[i]} \longrightarrow$ i‌ام عنصر بزرگ بردار p

$$\to \sum_{i=1}^{10} p_{[i]} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 0$$

سمت چپ که کانوکس است زیرا جمع تعداد عضو است که هر کدام هستند و کل تابع هم عملیات خطی است و هم که در R_m^+ می آید که کانوکس است.

$\sum_{i=1}^{10} p_{[i]} = a_1^T p + a_2^T p + \dots + a_{10}^T p \to$ کانوکس $\quad \Leftarrow p_{[i]} = a^T p \to$ دارای بیشترین مقدار را ۱ و بقیه به صفر

e) شرط ⇐ «بیشتر از نصف لامپ‌ها روشن نباشد»

$$\sum_{i=1}^{n/2} p[i] = \sum_{j}^{n/2+1} p[j]$$ ⟵ این یعنی از نقطه بزرگ‌ترین به بعد بقیه صفر باشند ⇐ دارد. پس ⇐ لامپ خاموش $p_i = 0$

$$\longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n/2} p[i]}_{\text{convex}} - \overbrace{\sum_{j=1}^{n/2+1} p[j]}^{\text{concave}} = 0$$ ⟶ سمت چپ یک تابع کانوکس است که با یک تابع کانکیو جمع شده است که حاصل لزوماً کانوکس نمی‌شود

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{n/2} p[i] + \left(-\sum_{j=1}^{n/2+1} p[j]\right) = 0 \Longrightarrow ?$$ ⟵ لزوماً کانوکس نیست

اگر جور دیگری هم نگاه کنیم امکان دارد دو جواب p^1 و p^2 داشته باشیم امکان دارد ترکیب این دو جواب داخل مجموعه شرط نباشد که این خلاف قوانین مجموعه کانوکس است (مجموعه کانوکس ترکیب خطی‌شان هم در مجموعه هست).

---

a) به جای $E\{c^Tx\}$ ما c_0^Tx را min می‌کنیم چون $E\{c^Tx\} = c_0^Tx$ است و با این جایگذاری مسئله LP معمولی می‌شود ⇐

$$\text{minimize } c_0^Tx \quad s.t.\ Ax \preceq b$$

b) ما مسئله زیر را داریم:

$$\text{minimize } E\{c^Tx\} + \gamma\, Var(c^Tx)$$
$$s.t.\ Ax \preceq b$$

$$\Longrightarrow Var(c^Tx) = E\{(c^Tx - E\{c^Tx\})^2\} = E\{((c-c_0)^Tx)^2\} = E\{x^T(c-c_0)(c-c_0)^Tx\}$$

$$= x^T \underbrace{E\{(c-c_0)(c-c_0)^T\}}_{\Sigma} x = x^T \Sigma x$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\text{minimize } c_0^Tx + \gamma\, x^T\Sigma x \\ s.t.\ Ax \preceq b\end{array}\right\} \Longrightarrow QP \Longrightarrow$$ مسئله کانوکس است

اگر $\Sigma \succeq 0$ باشد و $\gamma \geq 0$ باشد
(مثبت معین باشد)

c) در صورت منفی بودن γ بسته به ماتریس Σ مسئله می‌تواند کانوکس یا کانکیو و یا هیچکدام باشد. اگر $\Sigma \preceq 0$ باشد مسئله کانوکس می‌شود، اگر $\Sigma \succeq 0$ باشد مسئله کانکیو می‌شود و اگر هیچکدام نباشد مشخص نشود حرف در صورت مسئله زا.

d) minimize β

s.t $\text{Prob}(c^T x \geq \beta) \leq \alpha$, $Ax \preceq b$

$c^T x \leftarrow$ نرمال است

$$\Pr\{c^T x \geq \beta\} \rightarrow \Phi\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|}\right)$$

تابع Φ هم برابر $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|}\right) \leq \alpha \rightarrow \frac{\beta - c_0^T x}{\|\Sigma^{1/2} x\|} \geq \Phi^{-1}(\alpha) \rightarrow \boxed{\beta \geq \Phi^{-1}(\alpha)\|\Sigma^{1/2} x\| + c_0^T x}$$

برای $\alpha \leq \frac{1}{2}$ تابع $\Phi^{-1}(\alpha)$ مثبت می‌شود.

حاصل جمع یک تابع خطی و نورم کانوکس است ✓

$$\Rightarrow \text{minimize } \beta \rightarrow \text{افین}$$

$$\text{s.t } \underbrace{\underbrace{\Phi^{-1}(\alpha)\|\Sigma^{1/2} x\|}_{\text{second-order cone}} + c_0^T x \leq \beta}_{\text{کانوکس}} \text{ , } \underbrace{Ax \preceq b}_{\text{افین}}$$

$\Rightarrow$ convex ✓

برای $\alpha > \frac{1}{2}$ برای $\beta < E\{c^T x\}$ می‌توانیم یک تریداف بین واریانس و میانگین ایجاد کنیم

همراه برای کاهش احتمال $c^T x \geq \beta$ وجود دارد برای $\beta < E\{c^T x\} \rightarrow$ ما می‌توانیم میانگین $c^T x$ را زیاد کنیم

که معنی‌اش به سمت چپ یا می‌توانیم واریانس را افزایش دهیم ، که این همان مسئله انتخاب risk-seeking ،