حمید رضا کاشانی

$f_0 = \{x \mid Ax \prec b\}$ ، اگر $\mathrm{dom}\, f_0$ بی‌کران باشد $\longleftrightarrow \exists v \neq 0 \to Av \preceq 0$

1) a)

طرف دوم مسئله: اگر یک همچین v وجود داشته باشد که $Av \preceq 0$ شود وجود دارد و x_0 هم در دامنه f_0 است.

پس $x_0 + tv$ هم به خاطر روبه‌رو در دامنه است:

$A(x_0+tv) = \underbrace{Ax_0 + tAv}_{t>0 \;\preceq 0}$ برای $t>0$

$\Rightarrow Ax_0 \preceq b \to Ax_0 + \underbrace{tAv}_{\text{منفی}} \preceq b$ پس برای هر t این در دامنه است پس بی‌کران می‌شود.

طرف اول مسئله: فرض کنیم x^k دنباله‌ای از نقاط دامنه f_0 است به طوری که $\|x^k\|_2 \to \infty$ (که این یعنی باید f_0 بی‌کران باشد). و تعریف کنیم

$v^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2}$ به طوری که $\|v^k\| = 1$ برای هر k. و داریم

$$a_i^T x^k < b_i \to a_i^T v^k \times \|x^k\| < b_i \Rightarrow a_i^T v^k < \frac{b_i}{\|x^k\|} \xrightarrow{\|x^k\| \to \infty} a_i^T v^k \preceq 0$$

و $v \neq 0$ پس این v اگر فرض برقرار باشد وجود دارد.

b) 1- اگر طرف دوم برقرار: وجود داشته باشد v که $Av \preceq 0$ باشد در این صورت $a_j^T v < 0$ است به ازای $t>0$ از سوال قبل کنیم در دامنه است

$$f_0(x_0+tv) = -\sum_{i=1}^{m} \log(b_i - a_i^T x_0 - t a_i^T v) \leq -\sum_{i \neq j} \log(b_i - a_i^T x_0) - \log(b_j - a_j^T x_0 - t a_j^T v)$$

بزرگتر کردیم

حال اگر t را زیاد کنیم $-\log$ آن کم می‌شود و برای $t \to \infty$ به $-\infty$ میل می‌کند پس f_0 بی‌کران از پایین است.

- طرف اول: اگر فرض شود f از پایین بی‌کران است وجود دارد x^k که $Ax^k \prec b$ و $f_0(x^k) \to -\infty$ و بر اساس محدب بودن مسئله داریم:

$$f_0(x^k) \geq f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{b_i - a_i^T x_0} a_i^T (x^k - a_i^T x_0)$$

$$= f_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - b_i + a_i^T x^k - a_i^T x_0}{b_i - a_i^T x_0} = f_0(x_0) + m - \sum_{i=1}^{m} \frac{b_i - a_i^T x^k}{b_i - a_i^T x_0}$$

حال برای $f(x_0) \to \infty$ باید $\max_i (b_i - a_i^T x^k) \to \infty$ باشد حال فرض کنید $z \succ 0$ داریم که $A^T z = 0$ پس داریم

$$z^T b = z^T(b - Ax^k) \geq z_i \max_i (b_i - a_i^T x^k) \longrightarrow \infty$$ بیشترین ضرب یک دارایه

$z^T b$ یک عدد است و هرچقدر هم بزرگ باشد می‌شود یک x^k را قرار داد که تساوی

برقرار نباشد پس همچین zای وجود ندارد $\longrightarrow$ با قضیه alternative داریم که $\exists v \; Av \preceq 0, Av \neq 0$

(a-2

$$\text{minimize } c^T x$$
$$\text{s.t } Ax = b$$

اگر b توی R(A) نباشه جواب نداریم؛ جز نقطه Feasible نداریم → $p^* = \infty$

فرض b توی R(A) باشه →

بردار c را به صورت روبرو میشه نوشت:

$$c = A^T\lambda + \hat{c}$$ → $\hat{c}$ یک عضو از فضای پوچ A و $A^T\lambda$ هم عمود بر فضای پوچ A است

اگر $\hat{c}=0$ باشد داریم

$$c^T x = \lambda^T \underbrace{Ax}_{b} + \underbrace{\hat{c}^T x}_{0} = \lambda^T b$$ → مقدار ثابت بدست میدهد

اگر $\hat{c}\neq 0$ باشد داریم: در این صورت x را به صورت زیر نمایش میدهیم:

$$x = x_0 - t\hat{c}$$ نقطه feasible

$$\rightarrow c^T x = \lambda^T A x + \hat{c}^T x \longrightarrow -\infty$$ t را ببریم به سمت ∞ - جواب کل $-\infty$ $\Rightarrow p^* = -\infty$

$$p^* = \begin{cases} +\infty & b \notin R(A) \\ \lambda^T b & c = A^T\lambda \text{ for some } \lambda \\ -\infty & \text{o.w} \end{cases}$$

(b) c را به دو بردار موازی با a و عمود بر آن تجزیه می‌کنیم:

$$\text{minimize } c^T x$$
$$\text{s.t } a^T x \leq b$$

→ برای هر a ما نقاط feasible داریم

$$c = a\lambda + \hat{c}$$ به صورتی که $a^T\hat{c} = 0$ داریم ⇐

برای $\lambda > 0$ داریم:

$$c^T x = (a^T\lambda + \hat{c}^T)x = \lambda a^T x + \hat{c}^T x$$

حال $x = -ta$ $\Rightarrow c^T x = \underbrace{-\lambda t\, a^T a}_{+\ +\ +} \underbrace{-t\,\hat{c}^T a}_{0} \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$

از پایین بی‌کران می‌شود.

برای $c\neq 0$ داریم:

اگر $x = ba - t\hat{c}$

$$c^T x = \lambda a^T(ba - t\hat{c}) + \hat{c}^T(ba - t\hat{c}) = \underbrace{\lambda b a^T a}_{\text{ثابت}} - t\underbrace{\hat{c}^T\hat{c}}_{+} \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$$

از پایین بی‌کران می‌شود.

حال $c=0$ و $\lambda < 0$ داریم:

$$c = a\lambda \Rightarrow c^T x = \lambda a^T x$$

$$\min_{\text{s.t } a^T x \leq b} \overset{\text{منفی}}{\lambda} a^T x \rightarrow \lambda \max_{\text{s.t } a^T x \leq b} a^T x \Rightarrow p^* = \lambda b$$

$$p^* = \begin{cases} \lambda b & c = a\lambda \text{ for some } \lambda \leq 0 \\ -\infty & \text{o.w} \end{cases}$$

c) minimize $c^T x$ $\Rightarrow$ min $c_1x_1+\dots+c_ix_i+\dots+c_nx_n$

s.t $l \preceq x \preceq u$ $\quad$ s.t $l_i \le x_i \le u_i$ $\quad i=1,\dots,n$

$\Rightarrow$ min $c_1 x_1$ s.t $l_1 \le x_1 \le u_1$, ... , min $c_i x_i$ s.t $l_i \le x_i \le u_i$, min $c_n x_n$ s.t $l_n \le x_n \le u_n$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} c_i l_i & \text{اگر مثبت } c_i = c_i^+ \\ c_i u_i & \text{اگر منفی } c_i = c_i^- \end{cases}$, ... $\Rightarrow$ $p^* = l^T c^+ + u^T c^-$

c^- یعنی برای درایه‌های منفی خود درایه و برای درایه مثبت صفر و c^+ یعنی برای درایه‌های منفی صفر

d) minimize $c^T x$

s.t $1^T x = 1$, $x \succeq 0$ $\quad$ and $\quad$ s.t $1^T x \le 1$, $x \succeq 0$

چون مسئله portfolio است.

c_i ها سود هر سهم است و c_i- ها را در این مسئله باید min کنیم.

اگر c_i ها را براساس مقدارشان مرتب کنیم یعنی اگر مقدار c_i- کمتری دارد (سود بیشتر) اول و آن که بیشتر است آخر بگذاریم:

$$c_1 = c_2 = c_3 \dots = c_k < c_{k+1} < \dots < c_n$$

داریم

$$\underbrace{c^T x \ge c_1(1^T x)}_{\text{به جای همه } c_i \text{ ها کوچکترین را گذاشتیم}} = c_{min} \Rightarrow p^* = c_{min}$$

قاعدتاً تمام سرمایه را باید در آن سهم که سود بیشتری می‌دهد پخش کنیم.

حال اگر شرط $1^T x \le 1$ داشته باشد در مسئله قبل باید سرمایه‌گذاری کنیم حتی اگر c_{min} ضرر باشد چون جمع x_i باید یک شود ولی در این مسئله اگر c_{min} منفی باشد $x_i = 0$ قرار می‌دهیم تا سرمایه‌گذاری نکنیم.

$$p^* = \min\{0, c_{min}\}$$

۳_ الف) اگر x_iها در حل مسئله بین صفر باشند یعنی با انتخاب شدن x_iای به غیر از صفر و یک توانستیم به نقطه‌ی بهینه تری برسیم و p^* کمتری داشته ایم و این را در نظر داشته باشیم که نقاط مسئله Boolean LP در نقاط مسئله relaxtion وجود دارد و نقاط feasible آن مسئله در این مسئله وجود دارد و ولی چون آزادی عمل بیشتری داریم از مسئله اولیه امکان دارد به مقدار کمینه تر از مسئله اصلی برسیم که این به این معنی است که جواب ما یا جواب مسئله اصلی است و یا از آن کوچکتر است پس مسئله relaxtion یک lower bound از مسئله Boolean LP به ما می‌دهد.

ب) در این صورت جواب مسئله relax شده با جواب مسئله Boolean LP برابر است زیرا نقاط feasible آنها یکسان است برای جواب و جواب ما در مسئله اصلی هم feasible است.

---

۵) n, level فعالیت داریم. که مقدار هر کدام را $x_1, \dots, x_n$ می‌گذاریم. مقدار منبعی از i برای فعالیت j نیاز است $A_{ij}x_j$ است کل مقدار مصرف منبع i برابر همیشه با $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$ است. که A_{ij} می‌تواند منفی باشد یعنی فعالیت منبع i را تولید کند. c_i^{max} محدودیت هر منبع است. و مقدار درآمد برابر $r_j(x_j)$ است.

$$r_j(x_j) = \begin{cases} p_j x_j & 0 \le x_j \le q_j \\ p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) & x_j \ge q_j \end{cases}$$

که قیمت پایه

مقدار با تخفیف برای زیادی است

هدف بیشینه کردن $\sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$ است.

مسئله بهینه سازی به صورت زیر است:

$$\text{maximize} \sum_{j=1}^{n} r_j(x_j)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \le c^{max}, \quad x \ge 0$$

که این مسئله کانوکس است زیرا $r_j(x_j)$ یک تابع کانکیو است زیرا قسمت دوم این تابع خطی با شیب کمتر است) و شروط هم همه خطی هستند پس کانوکس هستند و max یک تابع concave را داریم می‌گیریم ← پس این مسئله کانوکس است

برای LP کردن این مسئله باید تابع هدف را به شرط‌های نامساوی تبدیل کرده و مرزهای آن نامساوی را max کنیم برای این کار ابتدا $r_j(x_j)$ را بازنویسی می‌کنیم با تابع زیر:

$$r_j(x_j) = \min\left(p_j x_j, \; p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j)\right)$$

که min دو تابع خطی کانکیو می‌شود و مسئله هم قبلی است.

برای $0 \le x_j \le q_j$ این تابع همیشه کمتر است

و برای $x_j \ge q_j$ این تابع همیشه کمتر است

حال برای تبدیل کردن تابع هدف به شرط هر $r_j(x_j)$ را تبدیل به نامساوی $r_j(x_j) \ge u_j$ می‌کنیم تا به جای تابع‌ها u_jها را max کنیم که خطی است که از این نامساوی نتیجه می‌شود که باید $p_j x_j \ge u_j$ و $p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) \ge u_j$ باشد.

پس مسئله ما به صورت مسئله LP زیر می‌شود:

$$\text{maximize} \sum_{j=1}^{n} q_j = 1^T q$$

$$\text{s.t} \quad Ax \leq c^{max} ,\ x \geq 0 ,\ p_j x_j \geq q_j ,\ p_j q_j + p_j^{disc}(x_j - q_j) \geq q_j$$

$$j = 1, \dots, n$$

این مسئله هم ارز قبلی است مثلا برای x ثابت $q_i \leq r_i(x)$ شود که بیشترین q_iها $r_i(x)$ است $1^T q$ همیشه کوچکتر یا مساوی جواب مسئله اصلی است که برابر $q_i = r_i(x)$ مساوی می‌شود که با max کردن آن به این جواب می‌رسیم.

---

8) a) $f(p) = \max_{i=1,\dots,n} |\log a_i^T p - \log I_{des}| \quad a_i \in R^m ,\ I_{des} > 0 ,\ p \in R_+^m$

برای ساده کردن نگارش مسئله $a_i = a_i / I_{des}$ و I_{des} را مساوی با یک فرض می‌کنیم. پس داریم:

وحال اگر شرط $\{p \mid a_i^T p > 0 ,\ i = 1, \dots, n\}$ را داشته باشیم:

$$f(p) = \max_i |\log a_i^T p|$$

$$\rightarrow |\log(a_i^T p)| = \begin{cases} \log(a_i^T p) & \log(a_i^T p) > 0 \rightarrow a_i^T p \geq 1 \\ -\log(a_i^T p) = \log\left(\frac{1}{a_i^T p}\right) & \log(a_i^T p) < 0 \rightarrow a_i^T p < 1 \end{cases} = \max\left\{\log(a_i^T p), \log\left(\frac{1}{a_i^T p}\right)\right\}$$

$$= \log \max\{a_i^T p, 1/a_i^T p\}$$

پس داریم:

$$f(p) = \log \max_i \max\{a_i^T p, 1/a_i^T p\} \quad \text{s.t} \ \{p \mid a_i^T p > 0 ,\ i = 1, \dots, m\}$$

حال $a_i^T p$ نیز کانوکس است و $\frac{1}{a_i^T p}$ هم چون شرط $a_i^T p > 0$ داریم کانوکس می‌شود و max دو تابع کانوکس هم کانوکس می‌شود. $\exp(f)$ چون exp تابعی کانوکس بوده و نزولی و f هم کانوکس است تابعی کانوکس می‌شود.

b) "شرط بیشتر از نصف توان کل در هر ۱۰ لامپ نباشد"

$$\sum_{i=1}^{10} p_{[i]} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i \longrightarrow$$ این شرط یعنی جمع توان ۱۰ تا بزرگترین لامپ کمتر از

توان کل باشد که این شرط نشان می‌دهد $\longrightarrow$ p امین عنصر بزرگ بردار i

هر ۱۰ لامپ جمع توان کمتر از نصف کل دارد.

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{10} p_{[i]} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 0$$

سمت چپ که کانوکس است زیرا جمع تعداد عضو است که خطی هستند و کل تابع هم عملیات خطی است و pها هم در R_m^+ می‌آید که کانوکس است.

$\sum_{i=1}^{10} p_{[i]} = a_1^T p + a_2^T p + \dots + a_{10}^T p \rightarrow$ کانوکس $\quad \leftarrow p[i] = a^T p \rightarrow$ دارای بیشترین مقدار i و بقیه به همین

c) شرط ← "بیشتر از نصف لامپ ها روشن نباشد"

$$\sum_{i=1}^{n/2} p[i] = \sum_{j}^{n/2+1} p[j]$$ ← این یعنی از نقش بزرگترین به بعد بقیه صفر باشند ← لامپ خاموش $p_i = 0$ دارد. پس

$$\rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n/2} p[i]}_{\text{convex}} - \sum_{j=1}^{n/2+1} p[j] = 0$$ → سمت چپ یک تابع کانوکس است که با یک تابع کانکیو جمع شده است که حاصل لزوماً کانوکس نمی‌شود

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n/2} p[i] + \overbrace{\left(-\sum_{j=1}^{n/2+1} p[j]\right)}^{\text{concave}} = 0$$ → ? ← لزوماً کانوکس نیست

اگر صورت دیگری هم نگاه کنیم امکان دارد دو جواب p^1 و p^2 داشته باشیم امکان دارد ترکیب این دو جواب داخل مجموعه نباشد که این خلاف قوانین مجموعه کانوکس است (مجموعه کانوکس ترکیب محدب هم در مجموعه هست).

---

a) ما به جای $E\{c^T x\}$ را $c_0^T x$ را min می‌کنیم چون $E\{c^T x\} = c_0^T x$ است و با این جایگذاری مسئله LP معمولی می‌شود. ←

$$\text{minimize } c_0^T x \quad \text{s.t. } Ax \preceq b$$

b) ما مسئله زیر را داریم:

$$\text{minimize } E\{c^T x\} + \gamma \operatorname{Var}(c^T x)$$
$$\text{s.t. } Ax \preceq b$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(c^T x) = E\{(c^T x - E\{c^T x\})^2\} = E\{((c-c_0)^T x)^2\} = E\{x^T (c-c_0)(c-c_0)^T x\}$$

$$= x^T \underbrace{E\{(c-c_0)(c-c_0)^T\}}_{\Sigma} x = x^T \Sigma x$$

$$\Rightarrow \text{minimize } c_0^T x + \gamma x^T \Sigma x \quad \text{s.t. } Ax \preceq b$$ → QP ⇒ مسئله کانوکس است

اگر $0 \preceq \Sigma$ باشد و $\gamma \geq 0$ باشد ← مثبت معین باشد

c) در صورت منفی بودن γ بسته به ماتریس Σ مسئله می‌تواند کانوکس یا کانکیو و یا هیچکدام باشد. اگر $0 \preceq \Sigma$ باشد مسئله کانوکس می‌شود، اگر $\Sigma \preceq 0$ باشد مسئله کانکیو می‌شود و اگر هیچکدام نباشد شرط نشود عوض در صورت مسئله ای.