۸۱۰۱۰۰۴۴۱ | HW 1 | حمیدرضا کاشانی

2. a) True ← چون A و B onto هستند داریم $y_1=Ax$ و $y_2=Bx$ پس برای $A+B$ داریم

$Ax+Bx$ ← چون برای هر x و Ax و Bx یک جواب یک به یک دارد اگر $A+B$ هم صفر نشود $Ax+Bx$ هم یک جواب دارد

مگر چون A و B صفر نشود این گزاره درست است.

b) True

$$N\left(\begin{bmatrix}A\\A+B\\A+B+C\end{bmatrix}\right) \to Ax=0 \text{ و } (A+B)x=0 \text{ و } (A+B+C)x=0$$

$$Ax+Bx=0 \to x\in N(A)\cap N(B) \qquad x\in N(A)\cap N(B)\cap N(C)$$

c) False

$$N\left(\begin{bmatrix}A\\AB\\ABC\end{bmatrix}\right) \to Ax=0,\ ABx=0,\ ABCx=0$$

$$A=[1,-1] \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3&4\\4&3\end{bmatrix} \to AB=[-1,1] \qquad x=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$Ax=0 \quad ABx=0 \xrightarrow{AB,\,A}$ x در Null space است ولی $Bx=\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix} \to$ در B Null space نیست $\neq 0$

d) False

$$N(B^TA^TAB+B^TB) \overset{?}{=} N(B) \to N(B^T(A^TA+I)B)$$

اگر x ای باشد که Bx در $N(B^T)$ و $N(A)$ هم قرار نگیرد آنگاه حاصل صفر نشود ولی x در $N(B)$ نبوده است

e) True $\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}$ Fullrank است یعنی سطرها یا ستون ها و یا هر دو با هم مستقل اند که هر کدام باشد نتیجه می‌شود که سطرها یا ستون ها یا هر دو (سطر و ستون) های A و b مستقل اند

f) در حالت کلی false است اما اگر $[A\ I]$ باشد سطرهای مستقل بوده و سطرهای A هم مستقل شود و چون $[I\ A^T]$ است Fullrank می‌شود ولی در حالت کلی نمی‌شود چنین نتیجه ای گرفت

g) True A^2 onto باشد $A\underbrace{Ax}_{y}$ پوشا است یعنی Ay هم پوشاست که این یعنی A هم پوشا بوده و سطرهای مستقل دارد.

h) False است اگر ستون های ماتریس A مستقل باشند ولی سطرهای آن نباشند $A^T\underbrace{Ax}_{y}$ ← پوشا است ولی Ax پوشا نیست و onto نمی‌شود.

ذ) True چون زاویه تمام بردارها باهم تند و نود درجه است حاصل جمع ضریب از این بردار باهم نسبت به بقیه باز هم زاویه تندی بازد و هیچ کدام از جملات هیچ وقت نمی‌توانند صفر شوند در که برای این که بقیه جملات را کنسل کرده و حاصل را صفر کنند پس تمام آنها باید صفر شوند تا حاصل یک صفر شود.

ل) False در حالت کلی غلط است اما اگر $k+m<n$ شود ماتریس $[AB]$ skinny و full rank است چون ستون‌های آن مستقل اند.

---

c. true

$N(A)=\{0\}$ و $N(B)=\{0\} \rightarrow$ $x \neq 0$ $\quad$ $Ax \neq 0$, $Bx \neq 0$ $\quad$ $A\underbrace{Bx}_{y \neq 0} = \underbrace{Ay}_{\neq 0} \neq 0$

$N(AB) \neq 0$

d. True

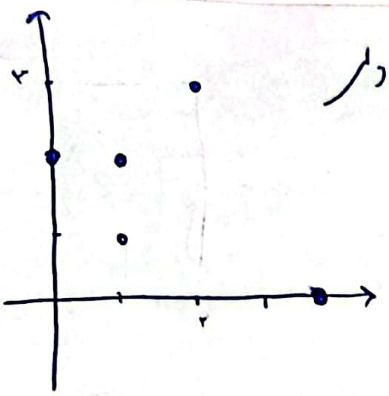
پوشا $= Ax$ $\quad \longrightarrow \quad A\underbrace{Bx}_{y} = \underbrace{Ay}_{\text{پوشا}} \longrightarrow AB = \text{onto}$

پوشا $= Bx$

b. Fake ⇐ اگر A و B فول رنگ باشد در این $= n \leq m, p$ $\quad$ if $\rightarrow$ $A \rightarrow m \times n$ و $B \rightarrow n \times p$

صورت $AB_{m \times p}$ فول رنگ نیست ولی اگر $n \geq m, p$ باشد درست می‌شود

a. True ⇐ $\text{rank}(AB)$ برابر min ورودی و خروجی و n بزرگتر از minimum ورودی و خروجی باید باشد (با توجه نکته ضرب دو ماتریس جزوه) حال اگر A و B فول rank نباشند یعنی $\text{rank}(A)<m$ و $\text{rank}(B)<p$ پس $\text{rank}(AB)$ کوچکتر از m و p می‌شود که این در تناقض فرض اول است. پس A و B فول رنگ است.



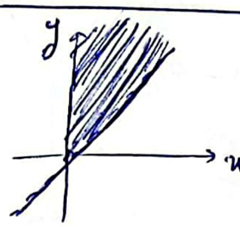
7- a) (۰و۲) یک نقطه minimal است نه minimum زیرا از تمام نقاط کوچکتر نیست ولی نقاطی کوچک‌تر از آن هم وجود ندارد. پس false است

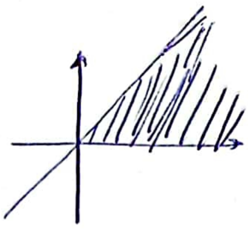
b) true چون از این نقطه کوچکتر وجود ندارد که قابل مقایسه باشد.

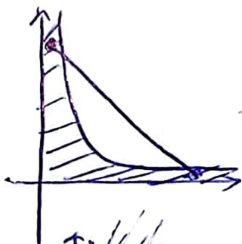
c) خیر false است زیرا (۱و۱) از (2و3) کوچکتر است.

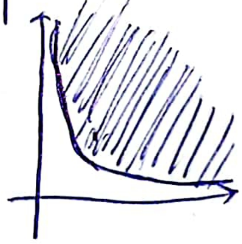
d) True چون هیچ نقطه‌ی قابل مقایسه‌ی کوچکتر از (۱و۱) وجود ندارد.

6-

a) $\{(x,y)\in R^2_{++}\ ,\ x/y\leq 1\}\Rightarrow$  $\Rightarrow$ ناحیه‌ی هاشور خورده یک ناحیه‌ی کانوکس است زیرا هر دو نقطه انتخاب کنیم خط بین دو نقطه در ناحیه قرار می‌گیرد.

b) $\{(x,y)\in R^2_{++}\ ,\ x/y\geq 1\}\Rightarrow$  $\Rightarrow$ ✓ کانوکس است

c) $\{(x,y)\in R^2_{+}\ ,\ xy\leq 1\}\Rightarrow$  $\Rightarrow$ ✗ کانوکس نیست

d) $\{(x,y)\in R^2_{+}\ ,\ xy\geq 1\}\Rightarrow$  $\Rightarrow$ کانوکس

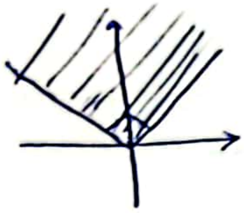
-5

a) $K=\{0\}$ $\quad K^*=\{y \mid y^T x \geq 0 \ \forall x \in K\}$

$\hookrightarrow y^T x \geq 0 \rightarrow y^T 0 \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \in \mathbb{R}^2} = K^*$

b) $K=\mathbb{R}^2 \longrightarrow y^T x \geq 0 \Rightarrow$ فقط برای $y=0$ همیشه برقرار است $\Rightarrow \boxed{y \in \{0\}} = K^*$

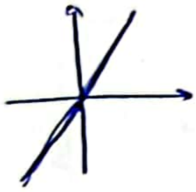
c) $K=\{(x_1,x_2) \mid |x_1| \leq x_2\} \longrightarrow$



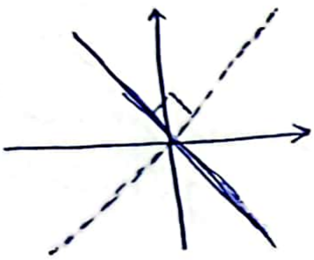
$\Rightarrow$ چون در مرزهای کون زاویه ۹۰ درجه داریم dual آن با خودش برابر است

$K=K^*$

d) $K=\{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2=0\} \longrightarrow$



$y^T x \geq 0$ ← که تمام بردارهایی روی خط باشد که بر این خط عمود است

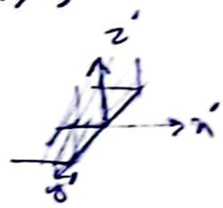


$\Rightarrow K^*=\{(x_1,x_2) \mid x_1-x_2=0\}$

-4

$K_{exp}=\{(x,y,z) \mid y>0, ye^{x/y} \leq z\} \cup \{(x,y,z) \mid x \leq 0, y=0, z \geq 0\}$

$[x', y', z'] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow x'x + y'y + zz' \geq 0 \Rightarrow$ برای بدترین حالت باید برقرار شود. ($y>0$, $ye^{x/y} \leq z$)



$\Rightarrow x'x + y'y + z'ye^{x/y} \geq 0$

از K_{exp} می‌توان دید که z' نمی‌تواند منفی شود.

برای $z'=0 \Rightarrow x'x + y'y \geq 0 \Rightarrow \boxed{x'=0,\ y' \geq 0,\ z'=0}$

($x' \neq 0$ ← از نقاط مرزی عبور نمی‌کند، $y>0$، هر مقداری)

برای $z'>0 \Rightarrow$ بدترین حالت را در نظر بگیریم $x'x + y'y + z'ye^{x/y} \geq 0$ $\quad \boxed{y' \geq 0 \quad x'=0 \quad z'>0}$

برای $x'=0 \rightarrow y'y + z'ye^{x/y} \geq 0 \Rightarrow x' \neq 0$ جواب درست نیست

برای $x'<0 \rightarrow x'x + y'y + z'ye^{x/y} \rightarrow$ کمترین مقدار آن را محاسبه می‌کنیم $\Rightarrow x' + z'e^{x/y} = 0$

$\Rightarrow x = y\ln\left(\frac{-x'}{z'}\right) \xrightarrow{\text{بدترین حالت}} x'y\ln\left(\frac{-x'}{z'}\right) + y'y + (-x'y) \geq 0 \xrightarrow{y>0} x'\left(\ln\frac{-x'}{z'}\right) + y' - x' \geq 0$

$\xRightarrow[x'<0]{z'>0} \ln\frac{-x'}{z'} - 1 \leq \frac{-y'}{x'} \Rightarrow \frac{-x'}{z'} \leq e^{\frac{-y'}{x'}+1} \Rightarrow \boxed{-x'e^{\frac{y'}{x'}} \leq ez' \quad x'<0}$

$$\boxed{K^*_{exp} = \{(x',y',z') \mid x'<0 ,\ -x'e^{\frac{y'}{x'}} \leq e z'\} \cup \{(x',y',z') \mid x'=0, y'\geq 0, z'\geq 0\}}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'<0 \\ y' \\ -x'e^{\frac{y'}{x'}-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y>0 \\ y e^{x/y} \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x'x + y'y}_{\text{ضرب داخلی}} \underbrace{- \underbrace{x'y}_{\text{مثبت}} e^{\frac{x'x+y'y-x'y}{x'y}}}_{\text{همیشه مثبت}} \geq 0$$

$$\Rightarrow K - \overset{\text{منفی}}{z} e^{\frac{K-z}{z}} \geq 0 \Rightarrow K \geq z e^{\frac{K}{z}-1} \Rightarrow \frac{K}{z} \leq e^{\frac{K}{z}-1} \longrightarrow \text{همیشه برقرار است}$$

← پس جواب به‌دست آمده درست است و (۲) ضرب داخلی تمام بردارها آن در K غیرمنفی شود.

3-a) درست است ← توابع درجه دوم و مجموع آن کانوکس است

b) درست ← زیرا مسئله‌های کانوکس مینیمم محلی ندارند

c) غلط ← زیرا اگر مسئله‌ی موجود غیرکانوکس است و ما با کانوکس کردن آن تقریب می‌زنیم

d) غلط ← جواب مسئله‌های محدب یکتا نیست و فقط در صورتی یکتاست که محدب اکید باشد.