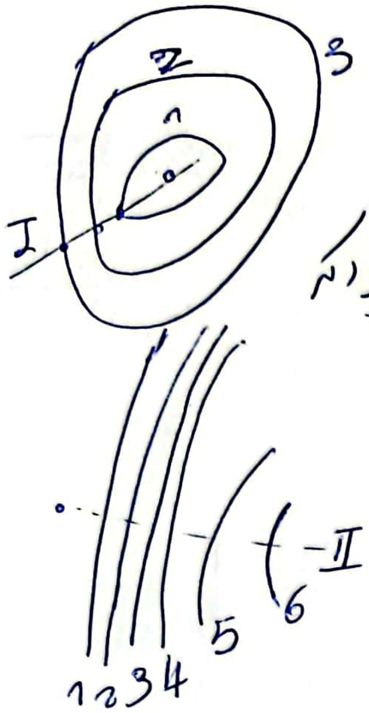
810100441

حمیدرضا کاشانی

HW2

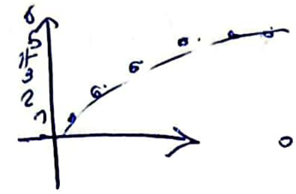


۱) تابع روبه رو می‌تواند quasiconvex باشد زیرا سابلول ست های آن کانوکس است ولی نمی‌تواند quasiconcave یا concave باشد زیرا superlevel set های آن کانوکس نیست.

تابع convex هم نیست زیرا روی خط I به این صورت می‌شود که

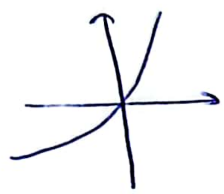
این شکل کانوکس نیست.

تابع روبه رو هم دارای superlevel set های کانوکس است پس تابع می‌تواند quasiconcave باشد و بنابر هر خط این مسیر قرار است پس concave هم هست.



2- تمام α-sublevel set ها و α-superlevel set های آن کانوکس است پس $\boxed{\text{quasilinear}}$

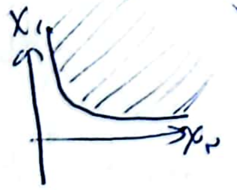
a) $e^x - 1$



$\longrightarrow$ شکل تابع واضح است کانوکس بودن آن $\boxed{\text{Convex}}$

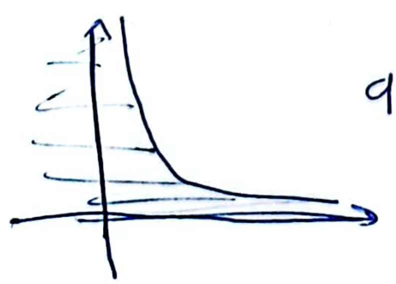
b) $x_1 x_2 \longrightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1 \longrightarrow$ نه convex و نه concave است



تمام α-superlevel set های آن کانوکس است تابع quasiconcave است.

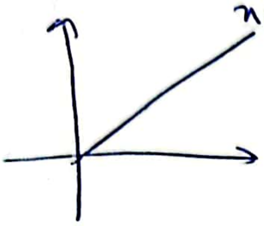
c) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1 x_2} \longrightarrow \nabla f = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x_1^2 x_2} \\ -\dfrac{1}{x_1 x_2^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \nabla^2 f = \dfrac{1}{x_1 x_2} \begin{bmatrix} \dfrac{2}{x_1^2} & \dfrac{1}{x_1 x_2} \\ \dfrac{1}{x_1 x_2} & \dfrac{2}{x_2^2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{PSD}$



quasiconvex

d) $\frac{x_1}{x_2}$ $\quad \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2} \\ \frac{-x_1}{x_2^2} \end{bmatrix}$, $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{x_2^2} \\ \frac{-1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}$

$\lambda^2 - \frac{2x_1}{x_2^3}\lambda - \frac{1}{x_2^4} = 0 \xrightarrow[x_1 = a]{x_2 = b} \lambda^2 - \frac{2a}{b^3}\lambda - \frac{1}{b^4} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{2a}{b^3} \pm \frac{1}{b^3}\sqrt{a^2-4b^2}}{2}$



$x_1 = cx_2$ $\quad \cdot$ Convex

چون $a > \sqrt{a^2-4b^2}$ است پس هردو λ مثبت اند

$\longrightarrow$ quasi linear

e) $\frac{x_1^2}{x_2}$ $\quad \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{2x_1}{x_2} \\ \frac{-x_1^2}{x_2^2} \end{bmatrix} \rightarrow \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_2} & -\frac{2x_1}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3} \end{bmatrix}$

تمام مقادیر ویژه‌ها مثبت است پس PSD است پس convex است

f) $x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-1}x_2^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha-1}x_2^{-\alpha} & (-\alpha)(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha-1} \end{bmatrix}$$

$$= -\alpha(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\begin{bmatrix} 1/x_1 \\ -1/x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/x_1 & -1/x_2 \end{bmatrix} \rightarrow NSD$$

qasi convex ، convex

$f(X) = tr(X^{-1})$ dom $f = S^n_{++}$ .3

$\Rightarrow f^*(Y) = \sup_X \{Y^T X - f(X)\} \Rightarrow \sup_X \{Y^T X - tr(X^{-1})\}$

$\Rightarrow (Y^T X - tr(X^{-1}))' = 0 \Rightarrow (tr(Y^T X) - tr(X^{-1}))' = 0$

$\hookrightarrow Y + X^{-2} = 0 \Rightarrow X = -Y^{-1/2}$

$\Rightarrow tr(Y^T(-Y^{-1/2})) - tr((-Y^{1/2})^{-1}) = -tr(-Y^{1/2}) - tr(-Y^{+1/2}) = \boxed{-2tr(-Y^{1/2})}$

برای دامنه آن فرض می‌کنیم Y یک مقدار ویژه مثبت داشته باشد $\lambda_i > 0$.

$Y = Q\Lambda Q^T = \sum_{j=1}^n \lambda_j q_j q_j^T$, $X = Q\,diag\{1,\dots,\overset{i\text{ام}}{t},\dots,1\}Q^T = t q_i q_i^T + \sum_{j=1, j\ne i}^n q_j q_j^T$ فرض

$\Rightarrow tr(XY) - tr(X^{-1}) = t\lambda_i + \sum_{j=1, j\ne i}^n \lambda_j - 1/t - (n-1) \Rightarrow$ برای $t \to \infty$ مقدار آن ∞ می‌شود

پس در دامنه نیست پس هیچ مقدار ویژه‌ای (λ_i) نمی‌تواند مثبت شود پس $Y \preceq 0$ است. دامنه $\boxed{-S^n_+}$ می‌شود

$f^*(Y) = -2tr(-Y)^{1/2}$ dom $f^* = -S^n_+$

.4 داریم $V = [v_1, \dots, v_n]$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ، $V\lambda \Leftarrow$ هر نقطه داخل polyhedron

$$\underbrace{f(V\lambda) \le \sum \lambda_i f(v_i)}_{\text{Jensen نامساوی}} \le \max_{i=1,\dots,n} f(v_i)$$

در بدترین حالت سمت چپ اگر تمام $f(v_i)$ ها با max برابر شد نامساوی برابری می‌شود.

حال چون $f(v_i)$ ها عضو $V\lambda$ است و چون حداکثر $f(x)$ برابر $\max_{i=1,\dots,n} f(v_i)$ است

پس داریم

$$\sup_{x \in P} f(x) = \max_{i=1,\dots,n} f(v_i)$$

5- در نظر بگیریم $f(x)\leq t$ اگر $\theta\in[0,1]$ و y و z و t_1 و t_2 به صورتی که

$$g(y)\leq t_1 ,\ h(z)\leq t_2 ,\ \theta y+(1-\theta)z=x ,\ \theta t_1+(1-\theta)t_2=t$$

بنابراین:

$$\text{epi} f=\text{conv}(\text{epi} g\cup \text{epi} h)$$

پس $\text{epi} f$ برابر کانوکس هال اجتماع epi h و g است پس f کانوکس.

ثابت با تغییر متغیر $\tilde{y}=\theta y$ و $\tilde{z}=(1-\theta)z$ می‌توان f را به صورت مسئله بهینه زیر نوشت:

$$\text{minimize}\ \theta g(y/\theta)+(1-\theta)h(z/(1-\theta))$$

تابع بالا حاصل جمع پرسپکتیو توابع کانوکس است

$$\text{s.t}\quad y+z=x\ ,\ 0\leq\theta\leq 1$$

با شروط نامساوی کانوکس و شرط مساوی خطی

پس مسئله کانوکس بوده و جواب آن هم کانوکس است. پس $f(x)$ کانوکس می‌شود.

ثابت $g(x)$ و $h(x)$ کانوکس است و $0<\theta<1$ پس $\theta g(y)+(1-\theta)h(z)$ هم کانوکس است.

دامنه ما برای z و y، R^n و کانوکس است و θ هم بازه خط است و نسبت به هم مستقل هستند.

و چون داریم برای $f(x,y)$ همبستگی کانوکس و C عضو مجموعه convex باشد $\inf\limits_{y\in C} f(x,y)$ کانوکس است پس

$\inf\limits_{x,y,\theta}\left(\theta g(y)+(1-\theta)h(z)\,|\,---\right)$ کانوکس می‌شود.

6- a) برای اثبات pdf از تعریف استفاده $g(x)=c^Tx+b$ با شرط $c\neq 0$ می‌کنیم و یک تابع indicator تعریف می‌کنیم به شکل زیر:

$$h(x,a)=\begin{cases}1 & a\leq g(x)\leq a+\delta a\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}\qquad \delta a>0$$

که روی مجموعه کانوکس

$$\{(x,a)\,|\,a\leq g(x)\leq a+\delta a\}$$

$h(x,a)$ هم log-concave است. $\log(0)=-\infty$ و $0=\log(1)$

$$Pr\{a\leq Y\leq a+\delta a\}=E\,h(X,a)=\int p(x)h(x,a)\,dx \longrightarrow \text{log-concave}$$

طبق ویژگی‌ها این هم log-concave می‌شود.

پس $\text{pdf}=\lim\limits_{\delta a\to 0}\dfrac{Pr\{a\leq Y\leq a+\delta a\}}{\delta a}\Rightarrow$ log-concave پس pdf هم log-concave است $\boxed{\text{True}}$

b) برای این هم یک indicator به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x,a)=\begin{cases}1 & g(x)\leq a\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}\Rightarrow \{(x,a)\,|\,g(x)\leq a\}$$

$\text{epi}(g(x))$ است که یک ست کانوکس است $\Leftarrow$ log-concave است

$$\int p(x)h(x,a)\,dx=E\,h(X,a)=Pr(Y\leq a)=CDF\Rightarrow \text{log-concave}\ \checkmark$$

است

$\boxed{\text{True}}$

۶- هر متغیر تصادفی Y را داریم که $\frac{d}{da}E(Y-a)_+ = -Prob(Y\geq a)$

حال ثابت است که $1-Pr(Y<a)$ است پس منفی یک تابع ~~...~~ است پس همیشه غیرنزولی است. پس مشتق همیشه غیرمنفی مانند که یعنی مشتق دوم مثبت بوده و $E(Y-a)_+$ کانوکس است.

غیرصعودی

- $g(x)$ ← کانوکس است

مجموعه سطح های کانوکس است

$h(x,a)=\begin{cases}1 & g(x)\geq a\\ 0 & o.w\end{cases} \to$ ~~...~~ $\Rightarrow h(x,a) \to$ ~~...~~ log-concave $\Rightarrow P(Y>a)=\int p(x)h(x,a)dx \to$ log-concave

$E(Y-a)_+ = \int_a^{+\infty} Pr(Y>a)\,db \to$ انتگرال ~~...~~ $Pr(Y>a)$ log-concave است پس آن هم log-concave است

۷- $f(x,y)=\sqrt{1+\frac{x^4}{y}} = \|(1,\frac{x^2}{\sqrt{y}})\|_2 = norm2(1, quad\_over\_lin(x, sqrt(y)))$

sqrt ← ~~...~~ concave

quad_over_lin ← نسبت به v نزولی و تابع convex

ترکیب آن نسبت به v ← convex

norm2(u,v) ← صعودی و کانوکس

ترکیب این دو هم کانوکس است

پس $f(x,y)$ تابعی کانوکس است.

۸- a) $f(u,v)=uv \to \nabla f=\begin{bmatrix}v\\u\end{bmatrix} \Rightarrow H=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} = 0 \begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm1 \to \boxed{Neither}$

b) همانطور که در سوال ۷ داشتیم تابع $\frac{u^2}{v}$ jointly convex است پس $\frac{x^Tx}{4}$ کانوکس است و $v-\frac{x^Tx}{4}$ هم تابعی خطی منهای تابعی کانوکس است پس کانکیو است حال log صعودی و ~~...~~ concave است و داخل آن هم concave ~~...~~ است پس حاصل آن $\boxed{concave}$ می شود.

c) $\frac{1}{u}$ تابعی کانوکس است (در R^{++}) و $b_i-a_i^Tx>0$ پس $\frac{1}{b_i-a_i^Tx}$ تابعی کانوکس است؛ exp کانوکس و صعودی و داخل آن کانوکس پس $exp(\frac{1}{b_i-a_i^Tx})$ هم کانوکس است و مجموع توابع کانوکس ~~...~~ هم کانوکس است پس حاصل هم کانوکس است $\boxed{convex}$