810100441 HW 4 حمیدرضا کاشانی

1) متغیر دوال را Z_i می‌گیریم که $Z_i \in S^{k_i}$ است ، $Z_i \succeq 0$ ؛ تابع لاگرانژین برابر می‌شود با :

تابع لاگرانژین برابر است با → $L(X, Z_1, \dots, Z_m) = \underbrace{\log \det X^{-1}}_{-\log\det X} + \sum_{i=1}^{m} tr\left(Z_i (A_i^T X A_i - B_i)\right)$

SDP است که در فرمول آن tr اضافه شده است.

برای پیدا کردن مسئله dual باید تابع لاگرانژ را نسبت به X ی مینیمایز کرد ؛ چون تابع X کانوکس و بقیه خطی هست داریم

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \underbrace{-X^{-1}}_{\text{مثبت منفی}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T}_{\text{برای جواب داشتن همیشه باید مثبت بشود}} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T \succ 0$$

برای تمام A_i ها باید برقرار باشد که اگر برقرار نشود تابع نسبت به X مینیمم ندارد و از پایین بی‌کران می‌شود.

پس با وجود این شرط داریم : $X^* = \left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right)^{-1}$

داخل مسئله لاگرانژین جایگذاری می‌کنیم :

$$g(Z_1, \dots, Z_m) = L(X^*, Z_1, \dots, Z_m)$$

$$= -\log\det\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{m} tr\left\{Z_i \left(A_i^T \left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right)^{-1} A_i - B_i\right)\right\}$$

$$= \log\det\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right) - \sum_{i=1}^{m} tr\{Z_i B_i\} + \sum_{i=1}^{m} tr\left\{Z_i \left(A_i^T \left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right)^{-1} A_i\right)\right\}$$

$$= \log\det\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right) - \sum_{i=1}^{m} tr\{Z_i B_i\} + \underbrace{tr\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right)^{-1}\right\}}_{n}$$

$$= \log\det\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right) - \sum_{i=1}^{m} tr\{Z_i B_i\} + n$$

مسئله dual برابر :

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{maximize } \log\det\left(\sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T\right) - \sum_{i=1}^{m} tr\{Z_i B_i\} \\ &\text{s.t } Z_i \succeq 0 \text{ و } \sum_{i=1}^{m} A_i Z_i A_i^T \succ 0 \text{ داشته باشیم} \rightarrow \text{ برای } i = 1, \dots, m \end{aligned}}$$

چون B_i ها مثبت هستند پس می‌توان X را پیدا کرد به این صورت که $X = \varepsilon I$ که $\varepsilon > 0$ و به اندازه کافی کوچک باشد تا شرط برقرار باشد طبق قضیه slater's condition ، strong duality همیشه برقرار است.

2

$$\text{minimize } \tfrac{1}{2}\|x-a\|_2^2 \quad \text{s.t } \|x\|_1 \leqslant 1 \;\rightarrow\; L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\|x-a\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 - \lambda$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k-a_k)^2}{2} + \lambda|x_k| - \lambda$$

که این تابع به راحتی تجزیه‌پذیر است برای بهینه کردن:

$$g_k(\lambda) = \inf_{x_k}\left(\frac{(x_k-a_k)^2}{2} + \lambda|x_k|\right) \rightarrow$$

مشتق

$$x_k - a_k + \lambda\frac{x_k}{|x_k|} = 0$$

$$\rightarrow \quad x_k \geqslant 0 \rightarrow x_k = a_k - \lambda \Rightarrow a_k \geqslant \lambda \Rightarrow g_k(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda a_k$$

$$x_k < 0 \longrightarrow x_k = +a_k + \lambda \Rightarrow \underbrace{-a_k < \lambda,\; a_k > -\lambda}_{\text{اگر } \lambda > |a_k|} \Rightarrow g_k(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2} - \lambda a_k$$

$$x_k = 0 \rightarrow g_k(\lambda) = \frac{a_k^2}{2}$$

$$\Rightarrow g_k(\lambda) = \begin{cases} -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda|a_k| & \lambda < |a_k| \\ a_k^2/2 & \lambda \geqslant |a_k| \end{cases}$$

dual problem:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\text{maximize } g(\lambda) = \sum_k g_k(\lambda) - \lambda \\ &\text{s.t } \quad \lambda \geqslant 0 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow g'(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \max\{|a_k| - \lambda, 0\} - 1 = 0$$

که وابسته به شرایط جواب های گوناگونی داره. دیگر برای $\|a\|_1 \leq 1$ جواب برابره. برای $\|a_k\|=1$ ، λ بهینه صفر است که x بهینه برابر $x=a$ است. و برای $\|a\|_1 > 1$ داریم: λ بهینه را به دست می‌آوریم و با آن x_k ها به این صورت می‌شوند:

$$x_k = \begin{cases} 0 & \lambda \geqslant |a_k| \\ a_k - \lambda & \lambda < |a_k|,\; a_k > 0 \\ a_k + \lambda & \lambda < |a_k|,\; a_k < 0 \end{cases}$$

۹.۱۳) شروط داده شده در مسئله تمام شرایط قضیه KKT را برقرار می‌کند. این نشان می‌دهد که x تمام این شرایط را دارد
آنها نقطه‌ی بهینه بوده و در آن strong duality برقرار است. اگر فرض کنیم x و λ قیود را برابر می‌کنند داریم:

$$f(x) \le f(x) + \underbrace{\lambda(\|x\|_2^2 - 1)}_{0} = x^T(A+\lambda I)x + 2b^Tx - \lambda$$

← چون x و λ قیدها را ارضا می‌کنند.

← چون لاگرانژین $L(\tilde{x}, \lambda)$ کانوکس است برای $\tilde{x}$ که $A+\lambda I \succeq 0$ برقرار باشد و گرادیان لاگرانژین برابر صفر است پس $(A-\lambda I)x + b = \nabla_x L(x,\lambda) = 0$ duality gap صفر است و تساوی برقرار است

$$= \inf_{\tilde{x}} \left(\tilde{x}^T(A+\lambda I)\tilde{x} + 2b^T\tilde{x} - \lambda\right) = g(\lambda)$$

← در واقع شرایط داده شده هم شرایط KKT بود. چون مسئله فقط با شروط $b \in R(A+\lambda I)$ و $A+\lambda I \succeq 0$ به صورت dual قابل نوشتن بوده ← $g(\lambda) = -b^T(A+\lambda I)^{\dagger}b - \lambda$ است.

b) i) اگر $\|x\|_2 < 1$ باشد و شرط 11 می‌خواهد برقرار شود شرط $\lambda(1-\|x\|_2^2) = 0$ چون $\|x\| \neq 1$ است فقط وقتی برقرار است که $\lambda = 0$ باشد که در این صورت ما یک مسئله بهینه‌سازی بدون قید داریم و این مسئله وقتی نقطه‌ی بهینه دارد که تابع کانوکس شود که یعنی $A \succeq 0$ و گرادیان مساوی با صفر شود که یعنی $2Ax + 2b = Ax + b = 0$.

ii) از راهنمایی گفته شده استفاده می‌کنیم. برای $\|x\|_2 = 1$ فرض می‌کنیم v ای که وجود دارد که $(Ax+b)^Tv < 0$ و $v^TAv < 0$. برای t کوچک و مثبت داریم $\|x+tv\|_2 < 1$ و:

$$f(x+tv) = (x+tv)A(x+tv) + 2b^T(x+tv) = x^TAx + t^2v^TAv + tx^TAv + tv^TAx$$

$$+ 2b^Tx + 2b^Ttv = x^TAx + 2b^Tx + t^2v^TAv + (tx^TAv)^T + tv^TAx + 2b^Ttv$$

$$= x^TAx + 2b^Tx + t^2v^TAv + 2tv^T\underbrace{(Ax+b)}_{<0}$$

→ v^TAv هر عددی می‌تواند اگر مثبت باشد t را می‌توان آنقدر کوچک گرفت که ضریب t^2 در آن از ترم خطی کوچکتر شود

$$< x^TAx + 2b^Tx$$

پس دیگر x نقطه‌ی minimum نمی‌شود.

با راهنمایی دوم داریم: $t = -2\dfrac{w^Tx}{w^Tw}$

$$y^Ty = \left(x - 2\frac{w^Tx}{w^Tw}w\right)^T\left(x - 2\frac{w^Tx}{w^Tw}w\right) = x^Tx - 2 - 2 + 4 = x^Tx = 1$$

با استفاده از $b = -(A+\lambda I)x$ داریم:

$$y^TAy + 2b^Ty \overset{\text{جایگذاری}}{=} y^T(A+\lambda I)y - 2x^T(A+\lambda I)y - \lambda$$

$$= \underbrace{(y-x)^T(A+\lambda I)(y-x)}_{<0} - x^T(A+\lambda I)x - \lambda < -x^T(A+\lambda I)x - \lambda = x^T(A+\lambda I)x + 2b^Tx - \lambda$$

$$= x^TAx + 2b^Tb$$

$y = x + tw \longrightarrow w(Ax+b)w < 0$ با فرض وجود

پس باز هم x نقطه‌ی بهینه نمی‌شود.

۳) C) ابتدا مقدار ویژه‌ها را از بزرگتر به کوچکتر لورت می‌کنیم: $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i q_i^T$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{K-1} > \alpha_K = \alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_n$$

داریم:

$$y_i = q_i^T x \quad , \beta_i = q_i^T b \quad , \|y\|_2 < 1 , \lambda \geq -\alpha_n , \underline{(\alpha_i+\lambda) y_i = -\beta_i}$$

$$\lambda(1 - \|y\|_2) = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

برای $\lambda > -\alpha_n$ تعریف می‌کنیم: $\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^2}{(\alpha_i+\lambda)^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

و برای $\lambda = -\alpha_n$ داریم: اگر $\beta_K = \dots = \beta_n = 0$ می‌شود تعریف کرد $\Leftarrow \phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\beta_i^2}{(\alpha_i+\lambda)^2}$

حال تعریف می‌کنیم $\Leftarrow \bar{\lambda} = \max\{0, -\alpha_n\}$

- برای $\phi(\bar{\lambda}) \geq 1$ داریم: چون $\phi(\lambda)$ به صورت اکید نزولی است به سمت صفر با $\lambda \to \infty$ پس یک $\lambda \geq \bar{\lambda}$ وجود دارد که $\phi(\lambda) = 1$ شود. این معادله به معادله secular و برای λ به آسانی حل می‌شود. (با استفاده متد نیوتن یا بایسکشن) با به دست آوردن λ داریم: $y_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_i+\lambda} \qquad i = 1, \dots, n$

(با این منحنی حل شد که درس گرفتیم)

- $\phi(\bar{\lambda}) < 1$ و $\alpha_n \leq 0$ که این نتیجه می‌دهد $\beta_K = \dots = \beta_n = 0$ و $\bar{\lambda} = -\alpha_n$ پس ما $\lambda = \bar{\lambda} = -\alpha_n$ می‌گیریم و داریم:

$$y_i = \begin{cases} -\beta_i / (\alpha_i+\lambda) & i = 1, \dots, K-1 \\ (1-\phi(\lambda))^{1/2} & i = K \\ 0 & i > K \end{cases}$$

با این انتخاب مقدار بهینه $\|y\|_2 = 1$ را برقرار می‌کند.

- $\phi(\lambda) < 1$ و $\alpha_n > 0$ که نتیجه می‌دهد $\bar{\lambda} = 0$ که ما $\lambda = 0$ انتخاب می‌کنیم:

$$y_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad i = 1, \dots, n$$

شرط $\|y\|_2 < 1$ را برقرار می‌کند.

4- باید نشان دهیم $p^*(u) = (-g)^*(-u)$ که می‌باشد $p^*(u) = \inf\{f_0(x) \mid \exists x \in D, f_i(x) \leq u_i\}$ است. فرض می‌شود $u \in \operatorname{int} \operatorname{dom} p^*$ است بنابراین یعنی یک $\tilde{u} < u$ وجود دارد که $\tilde{u} \in \operatorname{dom} p^*$ است یعنی $p^*(\tilde{u}) < \infty$ بنابراین یعنی $\tilde{x} \in \operatorname{dom} f_0$ است و $f_i(\tilde{x}) \leq \tilde{u}_i$. مسئله به صورت زیر است:

$$\text{minimize } f_0(x)$$

$$\text{s.t } \tilde{f}_i(x) = f_i(x) - u_i \leq 0 \quad i = 1, \ldots, m \xrightarrow{\text{مقدار بهینه}} p^*(u)$$

$$\text{dual function} \Rightarrow \tilde{g}(\lambda) = \inf_x \left(f_0(x) + \lambda_1 (f_1(x) - u_1) + \cdots + \lambda_m (f_m(x) - u_m) \right)$$

$$= g(\lambda) - \lambda^T u$$

که برای $\tilde{x}$ داریم $f_i(\tilde{x}) \leq \tilde{u}_i < u_i$ که این strictly feasible است پس slater's condition را داریم

بنابراین:

$$p^*(u) = \sup_\lambda \left(g(\lambda) - \lambda^T u \right)$$

$$\longrightarrow p^*(u) = \sup_u \Big(\underbrace{\lambda^T}_{y} \underbrace{(-u)}_{x} - \underbrace{(-g(\lambda))}_{f(x)} \Big) = \boxed{(-g)^*(-u)} \checkmark$$

$$-g^*(-u)$$

$$f^*(y) = \sup_x \left(y^T x - f(x) \right)$$

---

5) a) چون $\bar{x}$ کمینه کننده $f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ است داریم:

$$\nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(\bar{x}) = 0$$

برای λ_iها

حال ما داریم که $\exp(f_0(x)) + \sum_1^m \lambda_i f_i(x)$ که:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\exp(f_0(x)) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x) \right]_{x = \bar{x}} = \exp(f_0(\bar{x})) \nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x})$$

$$\overset{\text{فاکتور}}{=} \exp(f_0(\bar{x})) \left[\nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i \exp(-f_0(\bar{x})) \nabla f_i(\bar{x}) \right]$$

با انتخاب λ_i به $0 \leq \tilde{\lambda}_i = \exp(f_0(\bar{x})) \lambda_i$ داریم

$$= \exp(f_0(\bar{x})) \underbrace{\left[\nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(\bar{x}) \right]}_{0} = 0$$

که $\boxed{\tilde{\lambda}_i = \exp(f_0(\bar{x})) \lambda_i}$ برابر dual feasible مسئله است، پس $\bar{x}$ که مسئله اول را بهینه کند مسئله دوم را هم بهینه می‌کند

○

b) در نامساوی داریم که برقرار است باهم مقایسه کنیم تا $p^* \geq g(\lambda)$ و $p^* \geq \log \tilde{g}(\tilde{\lambda})$

$$\tilde{g}(\tilde{\lambda}) = \exp(\underset{\text{برحسب } \tilde{\lambda}}{f_0(\bar{x})}) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\exp(f_0(\bar{x}))\,\lambda_i}_{\tilde{\lambda}} f_i(\bar{x})$$

$$\rightarrow \log(\tilde{g}(\tilde{\lambda})) = \log\left(\exp(f_0(\bar{x})) + \sum_{i=1}^{m} \exp(f_0(\bar{x}))\lambda_i f_i(\bar{x})\right)$$

$$= \log\left(\exp(f_0(\bar{x}))\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x})\right]\right)$$

$$= f_0(\bar{x}) + \log\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x})\right)$$

$$g(\lambda) = f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \log(\tilde{g}(\tilde{\lambda})) - g(\lambda) = \log\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x})\right) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x})$$

$$1 + x \leq e^x$$

$$\rightarrow \log(1+x) \leq x \rightarrow \log(1+x) - x \leq 0$$

$$\Rightarrow \log(\tilde{g}(\tilde{\lambda})) - g(\lambda) \leq 0$$

$$\rightarrow \log(\tilde{g}(\tilde{\lambda})) \leq g(\lambda)$$

یعنی $p^* \geq \log(\tilde{g}(\tilde{\lambda}))$ نامساوی ضعیف‌تر از
$p^* \geq g(\lambda)$ است و اطلاعات بیشتر به ما نمی‌دهد که lower band
بالاتری داشته باشد

---

16 a) dual of SDP ←

$$L(x, Z) = c^T x + \mathrm{tr}(Z(e_1 e_1^T - T_n(x_1, \dots, x_n)))$$

$$= c^T x + \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \cdots \\ z_{21} & z_{22} & & \\ z_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ x_2 & x_1 & x_2 & \\ x_3 & x_2 & x_1 & \ddots \\ & & \ddots & \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= c^T x + z_{11} - x_1(z_{11} + \cdots + z_{nn}) - 2x_2(z_{21} + \cdots + z_{n,n-1})$$
$$- 2x_3(z_{31} + \cdots + z_{n,n-2}) - \cdots - 2x_n z_{n1}$$

$$\nabla_x L(x, z) = 0 \rightarrow c_1 = z_{11} + \cdots + z_{nn}, \quad c_2 = 2(z_{21} + \cdots + z_{n,n-1})$$
$$c_3 = \cdots \qquad c_n = 2 z_{n1}$$

$$g(z) = z_{11}$$

dual SDP $\rightarrow$ maximize $g(Z) = \inf_X (x,Z)$ s.t. $Z \succeq 0$:

maximize Z_{11}

s.t. $Z_{11}+Z_{22}+\dots+Z_{nn}=c_1$, $2(Z_{21}+Z_{32}+\dots+Z_{n,n-1})=c_2$

$2(Z_{31}+Z_{42}+\dots+Z_{n,n-2})=c_3$, ..., $2(Z_{n-1,1}+Z_{n2})=c_{n-1}$

, $2Z_{n1}=c_n$, $Z\succeq 0$

b) می‌خواهیم ثابت کنیم برای تمام نقاط feasible داریم $T_n(x_1,\dots,x_n) \succ 0$:

b) داریم $T_n(x_1,\dots,x_n) \succeq e_1e_1^T$ $\Leftarrow$ $\bar{x}=(x_2,\dots,x_n)$, $A=T_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})$

$$\begin{bmatrix} x_1-1 & \bar x^T \\ \bar x & A\end{bmatrix} \succeq 0$$

schur complement تعریف $\rightarrow (x_1-1)-\bar x^T A^{-1}\bar x \geq 0 \Rightarrow x_1-\bar x^TA^{-1}\bar x \geq 1 > 0$

$T_n(x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix} x_1 & \bar x^T \\ \bar x & A\end{bmatrix} \succ 0 \Leftarrow$ دوباره طبق تعریف schur complement

c) با در نظر می‌گیریم: $X = T_n(x_1,\dots,x_n)-e_1e_1^T$

$$X=\begin{bmatrix} x_1-1 & \bar x^T \\ \bar x & A\end{bmatrix}$$

به طبق strong duality داریم: $tr(XZ)=0$ است

چون $T_n(x_1,\dots,x_n)$ strictly positive است فول رنک می‌شود چون X در یک المان درستون تفاوت دارد با T_n و $T_{n-1}=A$ است پس X حداکثر دارای rank ، $n-1$ است که یعنی دارای حداکثر فضای پوچ یک است. و چون $Z\succeq 0$ و $tr(ZX)=0$ باشد که $Z=yy^T$ است

داریم $tr(yy^TX)=0$ پس y در فضای پوچ X قرار می‌گیرد به همین جهت شرط را برقرار می‌کند پس فضای پوچ Z حداکثر یک است و همان جهت y است.

7/ a)

maximize $c^T x$
s.t $Fc \le g$

minimize $-c^T x$
s.t $Fc \le g$

$$L(c,\lambda) = -c^T x + \lambda^T(Fc - g)$$

$$\nabla_c L = -x + F^T\lambda = 0 \Rightarrow F^T\lambda = x$$

$\Rightarrow$ maximize $-\lambda^T g$
s.t $F^T\lambda = x$, $\lambda \succeq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{minimize } \lambda^T g \\ \text{s.t } F^T\lambda = x \,,\ \lambda \succeq 0 \end{array}}$$

تا زمانی که برقرار باشیم با $C \neq 0$ و قید عایق slater's constraint، مقدار duality gap برابر صفر است که مقدار primal و dual باهم برابر می‌شوده

b) مسئله به صورت زیر می‌شوده:

minimize $\inf\{\lambda^T g \mid F^T\lambda = x, \lambda \succeq 0\}$
s.t $Ax \succeq b$

حالا باید λ و x را باهم بهینه کنیم:

minimize $\lambda^T g$
s.t $Ax \succeq b$, $F^T\lambda = x$, $\lambda \succeq 0$

c) ما x_{nom} و x_{rob} به ترتیب جواب nominal و جواب robust است.

جواب برای python برابره: برای x_{nom}، $c_{nom}^T x$ برابر ۲٫۱۱ و برای x_{rob}، $c_{nom}^T x$ برابر ۲٫۵۲ و برای x_{nom}، $f(x)$ برابر ۷٫۲۲ و برای x_{rob}، $f(x)$ برابر ۳٫۱۷ است.

که ضمیمه شده است.

$$F = \begin{bmatrix} c[\ ]_{10} \\ -c[\ ]_{10} \\ E[c] \\ -E[c] \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1.25 \times c\_nom \\ -0.75 \times c\_nom \\ 1.1 \times E\{c\_nom\} \\ -0.9 \times E\{c\_nom\} \end{bmatrix}$$

ما با حل مسئله x-nom را حساب می‌کنیم و سپس با x-nom می‌آییم بدترین قیمت‌ها را به دست می‌آوریم و مقدار هزینه برای حالتی که با x-rob حساب می‌کنیم کمتر می‌شوده