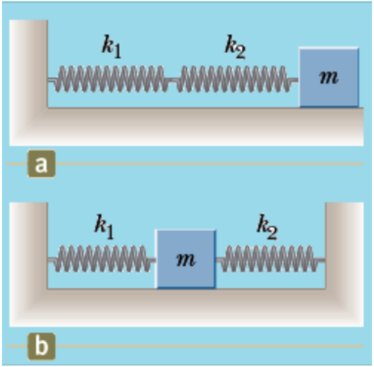
Física II

Movimiento Armónico Simple – Problemas Resueltos

Curso de Estudios Generales

18 de enero de 2026

Un bloque de masa m se conecta a dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 de dos maneras distintas, como se muestra esquemáticamente en la Figura. En ambos casos, el bloque se mueve sobre una mesa sin fricción.



- **Caso I: Resortes en paralelo:**
Cuando los resortes están conectados en paralelo, ambos experimentan el mismo desplazamiento x. La fuerza restauradora total es la suma de las fuerzas elásticas individuales:

$$F = -k_1 x - k_2 x = -\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_{\text{eq}}} x$$

Por lo tanto, la constante elástica equivalente es:

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

Esta es la ecuación diferencial del movimiento armónico simple.

- **Caso II: Resortes en serie:** Para resortes en serie, la fuerza es la misma en ambos resortes, pero el desplazamiento total es la suma de los desplazamientos individuales:

$$x = x_1 + x_2$$

La constante elástica equivalente está dada por:

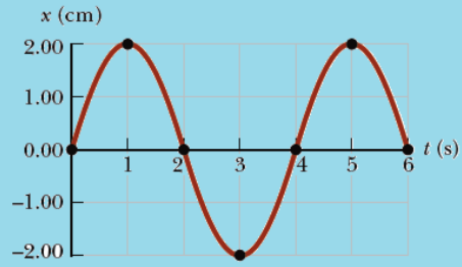
$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

La ecuación de movimiento resulta:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k_{\text{eq}}x = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}x = 0$$

El bloque es desplazado desde su posición de equilibrio una distancia $x = A$ y luego se libera desde el reposo. Se pide:

- Determinar la ecuación de movimiento en ambos casos.
- Para el movimiento armónico simple, encontrar:
  1. La amplitud,
  2. El período,
  3. La frecuencia angular,
  4. La velocidad máxima,
  5. La aceleración máxima,
  6. La ecuación de la posición $x(t)$.



Solución

La ecuación general del MAS es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

donde la frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m}}$$

a). **Amplitud** La amplitud es el desplazamiento máximo inicial:

$$A = x_{\text{máx}}$$

b). **Período**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\text{eq}}}}$$

c). **Frecuencia angular**

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m}}$$

d). **Velocidad máxima** La velocidad máxima ocurre cuando $x = 0$:

$$v_{\text{máx}} = \omega A$$

e). **Aceleración máxima** La aceleración máxima ocurre cuando $x = \pm A$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A$$

f). **Ecuación de la posición** Si el bloque se libera desde el reposo en $x = A$, la ecuación de posición es:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

donde ω depende de la configuración de los resortes:

- Resortes en paralelo: $\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$
- Resortes en serie: $\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$

Una varilla rígida muy ligera de longitud 0,500 m se extiende directamente desde un extremo de un metro. La combinación se suspende de un pivote en el extremo superior de la varilla, como se muestra en la Figura. La combinación se extrae por un pequeño ángulo y se libera.

a). Determinar el período de oscilación del sistema.

b). ¿En qué porcentaje difiere el período del péndulo simple de $1,00\ m$ de largo?

Solución

La combinación formada por una varilla rígida muy ligera de longitud $L_v = 0{,}500\,\mathrm{m}$ y un metro uniforme de longitud $L_m = 1{,}00\,\mathrm{m}$ se comporta como un **péndulo físico**.
Como la varilla es muy ligera, su masa se desprecia y solo contribuye el metro.
Datos:

- Longitud total desde el pivote:

$$L = L_v + L_m = 0{,}500 + 1{,}00 = 1{,}50\,\mathrm{m}$$

- Centro de masa del metro:

$$d = 0{,}500 + \frac{1{,}00}{2} = 1{,}00\,\mathrm{m}$$

Momento de inercia y ecuación de movimiento El momento de inercia del metro respecto al pivote se obtiene usando el teorema de ejes paralelos:

$$I = I_{\mathrm{cm}} + md^2$$

Para una varilla uniforme:

$$I_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{12} m L_m^2$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{12} m (1{,}00)^2 + m(1{,}00)^2 = \frac{13}{12} m$$

La ecuación de movimiento para oscilaciones pequeñas es:

$$I\ddot{\theta} + mgd\,\theta = 0$$

Período de oscilación Comparando con la ecuación del MAS:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

se obtiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El período del péndulo físico es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Sustituyendo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{13}{12}m}{mg(1{,}00)}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{13}{12g}}$$

Con $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$:

$$T \approx 2{,}09\,\mathrm{s}$$

El período de un péndulo simple de longitud $L = 1{,}00\,\mathrm{m}$ es:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00}{9{,}8}}$$

$$T_0 \approx 2{,}01\,\mathrm{s}$$

La diferencia porcentual es:

$$\%\Delta T = \frac{T - T_0}{T_0} \times 100$$

$$\%\Delta T = \frac{2{,}09 - 2{,}01}{2{,}01} \times 100$$

$$\%\Delta T \approx 4{,}0\,\%$$

Resultados finales

Resultados

- **Período del sistema:**

$$T \approx 2{,}09\,\mathrm{s}$$

- **Diferencia con el péndulo simple de 1 m:**

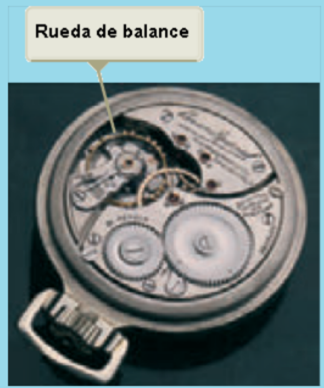
$$\approx 4{,}0\,\%\ \text{mayor}$$

Balanceo de reloj

El balanceo de reloj (ver figura) tiene un período de oscilación de $0,250\ s$. La rueda se construye de modo que su masa de $20,0\ g$ se concentra alrededor de un borde de radio $0,500\ cm$. Determine

a). El momento de inercia de la rueda y

b). ¿La constante de torsión del resorte unido?



Datos del problema:

- Período de oscilación: $T = 0{,}250$ s
- Masa de la rueda: $m = 20{,}0$ g $= 0{,}020$ kg
- Radio del borde: $r = 0{,}500$ cm $= 5{,}00 \times 10^{-3}$ m

Se asume que toda la masa está concentrada en el borde, por lo que la rueda puede modelarse como un **aro delgado**.

a). **Momento de inercia** Para un aro delgado:

$$I = mr^2$$

Sustituyendo:

$$I = (0{,}020)(5{,}00\times10^{-3})^2 = 5{,}0\times10^{-7}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

b). **Constante de torsión del resorte** El período de un oscilador torsional viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Despejando la constante de torsión κ:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

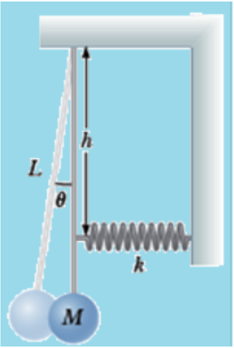
$$\kappa = \frac{4\pi^2(5{,}0\times10^{-7})}{(0{,}250)^2} = 3{,}16\times10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m/rad}$$

Conclusión: El balanceo del reloj se comporta como un oscilador armónico torsional, donde el período depende directamente del momento de inercia de la rueda y de la rigidez torsional del resorte.

Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte de fuerza constante k conectado a ella a una distancia h por debajo de su punto de suspensión (ver figura). Encuentre

a). La frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud (θ pequeño)

b). La energía del oscilador si la amplitud angular de oscilación es A. Suponga que la barra de suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.



Solución

Modelo físico El sistema consiste en:

- Una masa puntual M al extremo de una varilla rígida y sin masa de longitud L.
- Un resorte de constante elástica k conectado a la varilla a una distancia h desde el punto de suspensión.
- Oscilaciones pequeñas: $\theta \ll 1$.

Para pequeños ángulos:

$$\sin\theta \approx \theta$$

El desplazamiento horizontal del punto donde actúa el resorte es:

$$x = h\theta$$

La fuerza del resorte es:

$$F = -kx = -kh\theta$$

El torque producido por el resorte respecto al punto de suspensión es:

$$\tau_k = -kh^2\theta$$

El torque gravitacional para ángulos pequeños es:

$$\tau_g = -MgL\,\theta$$

Momento de inercia Como la varilla es sin masa:

$$I = ML^2$$

Ecuación de movimiento Sumando los torques:

$$I\ddot{\theta} = -MgL\,\theta - kh^2\theta$$

$$ML^2\ddot{\theta} + \left(MgL + kh^2\right)\theta = 0$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico simple.

a). **Frecuencia angular** Comparando con:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Se obtiene:

$$\omega^2 = \frac{MgL + kh^2}{ML^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{kh^2}{ML^2}}$$

b). **Energía del oscilador** La energía total para amplitud angular A es:

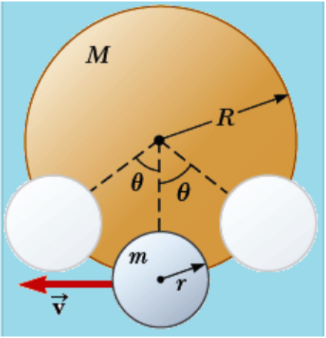
$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} ML^2 \left(\frac{g}{L} + \frac{kh^2}{ML^2} \right) A^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \left(MgL + kh^2 \right) A^2}$$

Interpretación física El sistema oscila como un péndulo efectivo cuya rigidez aumenta debido al resorte, incrementando la frecuencia y la energía almacenada.

Disco más pequeño de radio r y masa m

Un disco más pequeño de radio r y masa m se fija rígidamente a la cara de un segundo disco más grande de radio R y masa M como se muestra en la Figura. El centro del disco pequeño se encuentra en el borde del disco grande. El disco grande se monta en su centro en un eje sin fricción. El conjunto se gira a través de un pequeño ángulo desde su posición de equilibrio y se libera. Determine la energía del oscilador.



Solución

Descripción del sistema

- Disco grande: masa M, radio R, montado en un eje sin fricción por su centro.
- Disco pequeño: masa m, radio r, fijado rígidamente al borde del disco grande.
- El centro del disco pequeño está a una distancia R del eje.

El sistema se gira un pequeño ángulo θ y se libera. Para oscilaciones pequeñas:

$$\sin\theta \approx \theta$$

La única contribución restauradora proviene del peso del disco pequeño, ya que el disco grande está simétricamente montado.

Torque gravitacional El peso del disco pequeño genera un torque respecto al eje:

$$\tau = -mgR\sin\theta \approx -mgR\theta$$

Momento de inercia total El momento de inercia total del sistema es la suma de:

- Disco grande:

$$I_M = \frac{1}{2}MR^2$$

- Disco pequeño respecto al eje (teorema de ejes paralelos):

$$I_m = \frac{1}{2}mr^2 + mR^2$$

$$I_{\text{total}} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + mR^2$$

Ecuación de movimiento

$$I_{\text{total}}\ddot{\theta} = -mgR\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR}{I_{\text{total}}}\theta = 0$$

Es un oscilador armónico simple.

Solución

Energía del oscilador La energía total para una amplitud angular A es:

$$E = \frac{1}{2} I_{\text{total}} \omega^2 A^2$$

donde:

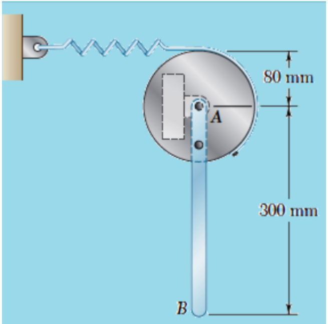
$$\omega^2 = \frac{mgR}{I_{\text{total}}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} mgRA^2}$$

Conclusión física La energía del oscilador depende únicamente del torque gravitacional del disco pequeño, mientras que la inercia total controla la frecuencia, pero no la energía máxima almacenada para una amplitud dada.

Una varilla delgada de $3,00\ kg$ AB se atornilla a un disco uniforme de $5,00\ kg$. Un resorte de constante $280\ N/m$ se conecta al disco y se desconecta en la posición mostrada. Si el extremo B de la varilla se da un pequeño desplazamiento y liberado, determinar el período de vibración del sistema.



Datos del sistema

- Masa de la varilla: $m_v = 3{,}00$ kg
- Longitud de la varilla: $L = 300$ mm $= 0{,}300$ m
- Masa del disco: $m_d = 5{,}00$ kg
- Radio del disco: $R = 80$ mm $= 0{,}080$ m
- Constante del resorte: $k = 280$ N/m

El sistema gira alrededor del eje fijo en A. El resorte se estira cuando el disco rota un pequeño ángulo θ.

Para pequeñas oscilaciones:

$$x \approx R\theta$$

Torque restaurador del resorte

$$F = kx = kR\theta$$

$$\tau_k = -FR = -kR^2\theta$$

Momento de inercia del sistema

- Disco uniforme (respecto a su centro):

$$I_d = \frac{1}{2}m_d R^2 = \frac{1}{2}(5{,}00)(0{,}08)^2 = 0{,}016\,\text{kg·m}$$

- Varilla delgada (respecto al extremo superior A):

$$I_v = \frac{1}{3}m_v L^2 = \frac{1}{3}(3{,}00)(0{,}30)^2 = 0{,}090\,\text{kg·m}$$

Momento de inercia total

$$I = I_d + I_v = 0{,}016 + 0{,}090 = 0{,}106\ \text{kg·m}^2$$

Ecuación de movimiento

$$I\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{kR^2}{I}\theta = 0$$

Es un oscilador armónico simple.

Solución

Frecuencia angular

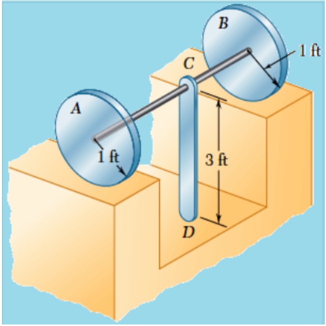
$$\omega = \sqrt{\frac{kR^2}{I}} = \sqrt{\frac{280(0{,}08)^2}{0{,}106}} = 4{,}11 \text{ rad/s}$$

Período de vibración

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4{,}11} \approx 1{,}53 \text{ s}}$$

Varilla uniforme

Una varilla CD uniforme de $10,0\ lb$ es soldado en C a un eje de masa insignificante que es soldado a los centros de dos discos uniformes de $20,0\ lb$ A y B. Sabiendo que los discos ruedan sin deslizamiento, determinar la energía del oscilador mostrado en Joules si su amplitud de oscilación angular es .



Datos del sistema

- Peso de la varilla: $W_v = 10{,}0$ lb
- Peso de cada disco: $W_d = 20{,}0$ lb
- Radio de los discos: $R = 1$ ft $= 0{,}3048$ m
- Longitud de la varilla: $L = 3$ ft $= 0{,}9144$ m
- Aceleración gravitatoria: $g = 9{,}81$ m/s^2

Conversión de pesos a masas:

$$m_v = \frac{W_v}{g} = \frac{10(4{,}448)}{9{,}81} = 4{,}53 \text{ kg}$$
$$m_d = \frac{W_d}{g} = \frac{20(4{,}448)}{9{,}81} = 9{,}06 \text{ kg}$$

El sistema oscila con un pequeño ángulo θ alrededor del punto C. La varilla produce el torque restaurador debido a la gravedad.

Torque gravitacional (pequeños ángulos)
El centro de masa de la varilla se encuentra a $L/2$ de C:

$$\tau_g \approx -m_v g \frac{L}{2}\, \theta$$

Momento de inercia del sistema

- **Varilla uniforme respecto a C:**

$$I_v = \frac{1}{3} m_v L^2 = \frac{1}{3}(4{,}53)(0{,}9144)^2$$
$$= 1{,}26 \text{ kg·m}^2$$

- **Cada disco (traslación + rotación)** Rodadura sin deslizamiento:

$$v = R\dot{\theta}$$

Momento equivalente de cada disco:

$$I_d^{eq} = m_d R^2 + \frac{1}{2} m_d R^2 = \frac{3}{2} m_d R^2$$
$$I_d^{eq} = \frac{3}{2}(9{,}06)(0{,}3048)^2 = 1{,}26 \text{ kg·m}^2$$

Dos discos:

$$I_{2d} = 2(1{,}26) = 2{,}52 \text{ kg·m}^2$$

Momento de inercia total

$$I = I_v + I_{2d} = 1{,}26 + 2{,}52 = 3{,}78 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Energía total del oscilador Para una amplitud angular A:

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m_v g \frac{L}{2} A^2}$$

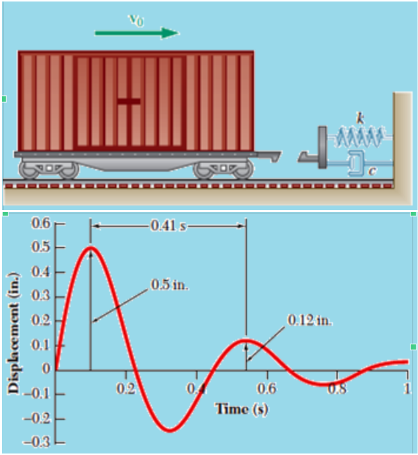
Sustituyendo valores:

$$E = \frac{1}{2}(4{,}53)(9{,}81)\frac{0{,}9144}{2} A^2 \approx 10{,}15\, A^2 \text{ J}$$

Un vagón ferroviario cargado que pesa $30,000\ lb$ está rodando a una velocidad constante de cuando se empareja con un resorte y sistema de parachoques amortiguado. La curva de desplazamiento-tiempo registrada del vagón de ferrocarril cargado después del acoplamiento es como se muestra. Determinar

a). La constante de amortiguación,

b). La constante de resorte. (**Sugerencia:** Utilice la definición de decremento logarítmico.)



Solución

Datos del problema

- Peso del vagón: $W = 30\,000$ lb
- Masa:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{30\,000}{32{,}2} = 932 \text{ slug}$$

- Amplitud primer pico: $x_1 = 0{,}50$ in
- Amplitud segundo pico: $x_2 = 0{,}12$ in
- Período amortiguado: $T_d = 0{,}41$ s

a). **Decremento logarítmico**

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{0{,}50}{0{,}12}\right) = 1{,}427$$

La relación entre δ y el coeficiente de amortiguamiento es

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Despejando β:

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{1{,}427}{\sqrt{39{,}48 + 2{,}04}} = 0{,}221$$

Frecuencia amortiguada

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0{,}41} = 15{,}32 \text{ rad/s}$$

Frecuencia natural

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{15{,}32}{\sqrt{1-0{,}221^2}} = 15{,}70 \text{ rad/s}$$

b). **Constante del resorte**

$$k = m\omega_n^2 = 932(15{,}70)^2$$
$$= 2{,}30 \times 10^5 \text{ lb/ft}$$

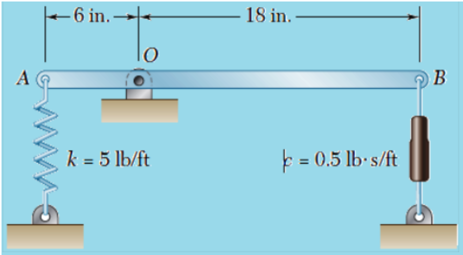
Constante de amortiguamiento

$$c = 2m\beta\omega_n = 2(932)(0{,}221)(15{,}70)$$
$$= 6{,}46 \times 10^3 \text{ lb·s/ft}$$

Una varilla uniforme de $4,00\ lb$ es soportada por un pin en O y un resorte en A y está conectada a un amortiguador en B. Determine

a). La ecuación diferencial del movimiento para oscilaciones pequeñas,

b). El ángulo que la varilla formará con el horizontal $5\ s$ después del extremo B ha sido empujado $0,90\ in$, hacia abajo y liberado.



Solución: Paso 1 — Diagrama de cuerpo libre y variables

Consideramos una rotación pequeña $\theta(t)$ alrededor del punto O.

- Masa de la varilla:

$$m = \frac{W}{g} = \frac{4{,}00 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ ft/s}^2} \approx 0{,}1242 \text{ slugs}$$

- Longitud total:

$$L = 6 + 18 = 24 \text{ in} = 2 \text{ ft}$$

- Distancia

$$OA = 6 \text{ in} = 0{,}5 \text{ ft}$$

$$OB = 18 \text{ in} = 1{,}5 \text{ ft}$$

- Constante del resorte:

$$k = 5 \text{ lb/ft}$$

- Coeficiente de amortiguamiento:

$$c = 0{,}5 \text{ lb·s/ft}$$

Para pequeñas oscilaciones, las fuerzas son:

- Fuerza del resorte en A:

$$F_s = k \cdot x_A = k \cdot (0{,}5\theta)$$

Momento:

$$M_s = -F_s \cdot 0{,}5 = -k(0{,}5)^2\theta$$

- Fuerza del amortiguador en B:

$$F_d = c \cdot v_B = c \cdot (1{,}5\dot{\theta})$$

Momento:

$$M_d = -F_d \cdot 1{,}5 = -c(1{,}5)^2\dot{\theta}$$

- Momento de inercia de la varilla respecto a O:

$$I_O = I_G + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2} - 0{,}5\right)^2$$

Solución:

Pero como O no está en el centro de masa, mejor usar:

$$I_O = \frac{1}{12}m(2)^2 + m(1-0{,}5)^2 = \frac{1}{3}m + m(0{,}5)^2$$
$$= \frac{1}{3}m + \frac{1}{4}m = \frac{7}{12}m$$

(**Nota:** centro de masa está a 1 ft de extremo izquierdo, y O está a 0.5 ft, entonces distancia desde O al CM es 0.5 ft). Entonces:

$$I_O = \frac{7}{12} \cdot 0{,}1242 \approx 0{,}07245 \text{ slug·ft}^2$$

a). **Ecuación diferencial del movimiento** Aplicando la segunda ley de Newton para rotación:

$$\sum M_O = I_O\ddot{\theta}$$

$$-k(0{,}5)^2\theta - c(1{,}5)^2\dot{\theta} = I_O\ddot{\theta}$$

Sustituyendo valores:

$$-5 \cdot 0{,}25 \cdot \theta - 0{,}5 \cdot 2{,}25 \cdot \dot{\theta} = 0{,}07245\ddot{\theta}$$
$$-1{,}25\theta - 1{,}125\dot{\theta} = 0{,}07245\ddot{\theta}$$

Reordenando y dividiendo entre 0,07245:

$$0{,}07245\ddot{\theta} + 1{,}125\dot{\theta} + 1{,}25\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + 15{,}53\dot{\theta} + 17{,}25\theta = 0$$

Esta es la ecuación diferencial del movimiento para oscilaciones pequeñas.

b). **Tipo de amortiguamiento y solución general**

$$\ddot{\theta} + 2\beta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

Comparando:

$$2\beta\omega_n = 15{,}53 \Rightarrow \beta = \frac{15{,}53}{2 \cdot 4{,}153} \approx 1{,}87$$
$$\beta > 1 \Rightarrow \text{Amortiguamiento sobreamortigua}$$
$$\omega_n^2 = 17{,}25 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{17{,}25} \approx 4{,}153 \text{ rad/s}$$

Solución general:

$$\theta(t) = e^{-\beta\omega_n t}\left(C_1 e^{\omega_n\sqrt{\beta^2-1}\,t} + C_2 e^{-\omega_n\sqrt{\beta^2-1}\,t}\right)$$

Solución: Condiciones iniciales

Definimos:

$$\alpha = \beta\omega_n = 15{,}53/2 = 7{,}765$$

$$\zeta = \omega_n\sqrt{\beta^2 - 1} = 4{,}153\sqrt{(1{,}87)^2 - 1} \approx 4{,}153 \cdot 1{,}603 \approx 6{,}657$$

Entonces:

$$\theta(t) = e^{-7{,}765t}\left(C_1 e^{6{,}657t} + C_2 e^{-6{,}657t}\right)$$

- En $t = 0$, el extremo B se empuja 0,90 in = 0,075 ft hacia abajo y se libera. Como $x_B = 1{,}5\theta$, entonces:

$$\theta(0) = \frac{x_B}{1{,}5} = \frac{0{,}075}{1{,}5} = 0{,}05 \text{ rad}$$

  Y como se libera desde reposo: $\dot{\theta}(0) = 0$. Aplicando condiciones iniciales:

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = 0{,}05$$

$$\dot{\theta}(t) = -7{,}765e^{-7{,}765t}(C_1 e^{6{,}657t} + C_2 e^{-6{,}657t}) + e^{-7{,}765t}(6{,}657C_1 e^{6{,}657t} - 6{,}657C_2 e^{-6{,}657t})$$

- **En $t = 0$:**

$$\dot{\theta}(0) = -7{,}765(C_1 + C_2) + 6{,}657(C_1 - C_2) = 0$$

  Sustituimos $C_1 + C_2 = 0{,}05$:

$$-7{,}765 \cdot 0{,}05 + 6{,}657(C_1 - C_2) = 0$$

$$-0{,}38825 + 6{,}657(C_1 - C_2) = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = \frac{0{,}38825}{6{,}657} \approx 0{,}05832$$

Solución: Solución particular y evaluación en $t = 5$ s

Resolviendo sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 0{,}05 \\ C_1 - C_2 & = & 0{,}05832 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} (+)\ 2C_1 = 0{,}10832 & \Rightarrow & C_1 = 0{,}05416 \\ (-)\ 2C_2 = -0{,}00832 & \Rightarrow & C_2 = -0{,}00416 \end{array}\right.$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\theta(t) = e^{-7{,}765t}\left(0{,}05416e^{6{,}657t} - 0{,}00416e^{-6{,}657t}\right) = 0{,}05416e^{-1{,}108t} - 0{,}00416e^{-14{,}422t}$$

- **Evaluamos en $t = 5$ s:**

$$\begin{aligned} \theta(5) &= 0{,}05416e^{-1{,}108\cdot 5} - 0{,}00416e^{-14{,}422\cdot 5} \\ &= 0{,}05416e^{-5{,}54} - 0{,}00416e^{-72{,}11} \\ &\approx 0{,}05416 \cdot 0{,}00403 - 0{,}00416 \cdot 0 \approx 0{,}000218 \text{ rad} \end{aligned}$$

Convertido a grados:

$$\theta(5) \approx 0{,}000218 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 0{,}0125^\circ$$

Respuesta Final

a). La ecuación diferencial del movimiento es:

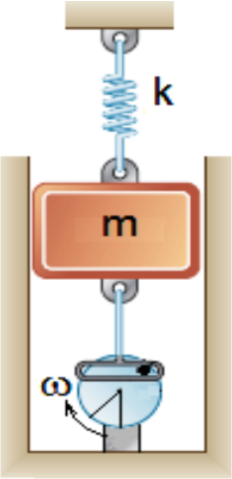
$$\boxed{\ddot{\theta} + 15{,}53\dot{\theta} + 17{,}25\theta = 0}$$

b). El ángulo que forma la varilla con la horizontal a los 5 s es aproximadamente:

$$\boxed{\theta(5) \approx 0{,}000218 \text{ rad o } \approx 0{,}0125^\circ}$$

Nota: Debido al alto amortiguamiento ($\beta \approx 1{,}87$), el sistema retorna rápidamente a la posición de equilibrio sin oscilaciones.

Un peso de $40,0\ N$ está suspendido de un resorte que tiene una constante de fuerza de $200\ N/m$. El sistema es no amortiguado y está sujeto a una fuerza motriz armónica de $10,0\ Hz$ frecuencia, resultando en un movimiento forzado de $2,00\ cm$ de amplitud. Determine el máximo valor de la fuerza motriz.



Solución: Paso 1 — Datos y variables

- Peso:

$$W = 40{,}0\ \text{N} \Rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{40{,}0}{9{,}81} \approx 4{,}077\ \text{kg}$$

- Constante del resorte:

$$k = 200\ \text{N/m}$$

- Frecuencia de la fuerza motriz:

$$f = 10{,}0\ \text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 20\pi \approx 62{,}83\ \text{rad/s}$$

- Amplitud del movimiento forzado:

$$X = 2{,}00\ \text{cm} = 0{,}0200\ \text{m}$$

- Sistema no amortiguado:

$$\zeta = 0,\ c = 0$$

La ecuación del movimiento para un sistema forzado no amortiguado es:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

La amplitud de la respuesta estacionaria es:

$$X = \frac{F_0/m}{|\omega_n^2 - \omega^2|} \text{ donde } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Calcular frecuencia natural ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{4{,}077}} \approx \sqrt{49{,}05} \approx 7{,}004\ \text{r}$$

Comparando con $\omega = 62{,}83$ rad/s, vemos que $\omega \gg \omega_n$, lo cual es esperable en sistemas forzados lejos de resonancia.

Solución: Relación entre amplitud y fuerza máxima

De la fórmula de amplitud:

$$X = \frac{F_0/m}{|\omega_n^2 - \omega^2|} \Rightarrow F_0 = X \cdot m \cdot |\omega_n^2 - \omega^2|$$

Sustituimos valores:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= (7{,}004)^2 \approx 49{,}05 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \\ \omega^2 &= (62{,}83)^2 \approx 3947{,}6 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \\ |\omega_n^2 - \omega^2| &= |49{,}05 - 3947{,}6| \\ &= 3898{,}55 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Entonces:

$$F_0 = 0{,}0200 \cdot 4{,}077 \cdot 3898{,}55 \approx 317{,}9 \text{ N}$$

$$\boxed{F_0 \approx 318 \text{ N}}$$

Interpretación física:

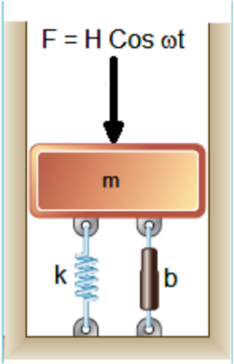
- Aunque la frecuencia de excitación (10 Hz) está muy lejos de la frecuencia natural ($\approx 1{,}11$ Hz), la amplitud de 2 cm requiere una fuerza motriz considerable debido a la inercia de la masa.
- En sistemas no amortiguados, la amplitud se hace infinita en resonancia ($\omega = \omega_n$), pero aquí estamos lejos de ella, por lo que la fuerza necesaria es finita y calculable directamente.

Verificación rápida Podemos usar la fórmula alternativa:

$$\begin{aligned} F_0 &= X \cdot |k - m\omega^2| \\ F_0 &= 0{,}0200 \cdot |200 - 4{,}077 \cdot 3947{,}6| \\ &= 0{,}0200 \cdot |200 - 16092{,}5| \\ &= 0{,}0200 \cdot 15892{,}5 \approx 317{,}85 \text{ N} \end{aligned}$$

¡Coincide!

El coeficiente de amortiguamiento $b = 0,85\ N\ s/m$ para un objeto de $0,150\ kg$ colgando de un resorte ligero de $6,30\ N/m$. Una fuerza sinusoidal con una amplitud de $1,70\ N$ mueve el sistema. ¿A qué frecuencia la fuerza haría que el objeto vibre con una amplitud de $0,440\ m$?



Solución:

Datos:

- Masa:
$$m = 0{,}150 \text{ kg}$$
- Constante del resorte:
$$k = 6{,}30 \text{ N/m}$$
- Coeficiente de amortiguamiento:
$$b = 0{,}85 \text{ N·s/m}$$
- Amplitud de la fuerza motriz:
$$H = 1{,}70 \text{ N}$$
- Amplitud de la respuesta:
$$X = 0{,}440 \text{ m}$$

La amplitud de la respuesta estacionaria en un sistema forzado amortiguado es:

$$X = \frac{H/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

Donde:

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow$ frecuencia natural
- $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}} \rightarrow$ factor de amortiguamiento
- $\omega \rightarrow$ frecuencia de excitación (incógnita)

Calcular ω_n y ζ

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6{,}30}{0{,}150}}$$
$$= \sqrt{42} \approx 6{,}481 \text{ rad/s}$$
$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}} = \frac{0{,}85}{2\sqrt{0{,}150 \cdot 6{,}30}}$$
$$= \frac{0{,}85}{2\sqrt{0{,}945}} = \frac{0{,}85}{2 \cdot 0{,}972} \approx \frac{0{,}85}{1{,}944} \approx 0{,}437$$

Entonces:

$$2\zeta\omega_n = 2 \cdot 0{,}437 \cdot 6{,}481 \approx 5{,}666$$

Solución:

Sustituir en la fórmula de amplitud Reescribimos la ecuación:

$$X = \frac{H/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \Rightarrow \frac{H}{mX} = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{H}{mX}\right)^2 = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2$$

Sustituimos valores:

$$\frac{H}{mX} = \frac{1{,}70}{0{,}150 \cdot 0{,}440} = \frac{1{,}70}{0{,}066} \approx 25{,}7576$$

$$\left(\frac{H}{mX}\right)^2 = (25{,}7576)^2 \approx 663{,}45$$

Ahora:

$$663{,}45 = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (5{,}666 \cdot \omega)^2$$

Recordemos: $\omega_n^2 = 42$

$$663{,}45 = (42 - \omega^2)^2 + (5{,}666\omega)^2$$

Solución: Resolver la ecuación cuadrática en ω^2

Desarrollamos:

$$\begin{aligned} 663{,}45 &= (42-\omega^2)^2 + 32{,}10\omega^2 \\ 663{,}45 &= 1764 - 84\omega^2 + \omega^4 + 32{,}10\omega^2 \\ 663{,}45 &= \omega^4 - 51{,}90\omega^2 + 1764 \end{aligned}$$

Reordenamos:

$$\begin{aligned} \omega^4 - 51{,}90\omega^2 + 1764 - 663{,}45 &= 0 \\ \omega^4 - 51{,}90\omega^2 + 1100{,}55 &= 0 \end{aligned}$$

Sea $u = \omega^2$, entonces:

$$u^2 - 51{,}90u + 1100{,}55 = 0$$

Resolvemos con fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} u &= \frac{51{,}90 \pm \sqrt{(-51{,}90)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1100{,}55}}{2} \\ &= \frac{51{,}90 \pm \sqrt{2693{,}61 - 4402{,}2}}{2} \end{aligned}$$

¡Error!

$$\Delta = 2693{,}61 - 4402{,}2 = -1708{,}59 < 0$$

El discriminante es negativo: Esto indica que no hay solución realy que es imposible obtener amplitud de 0,440 m con estos parámetros

Solución: Paso 5 — Verificar la amplitud máxima posible

En sistemas amortiguados, la amplitud máxima ocurre en la frecuencia de resonancia:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Pero primero, calculemos la **amplitud máxima teórica (en resonancia):**

$$X_{\max} = \frac{H/m}{2\zeta\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \text{ (para } \zeta < 1/\sqrt{2})$$

Tenemos $\zeta \approx 0{,}437 < 0{,}707$, así que aplicamos:

$$\begin{aligned} X_{\max} &= \frac{1{,}70/0{,}150}{2 \cdot 0{,}437 \cdot 6{,}481 \cdot \sqrt{1-(0{,}437)^2}} \\ &= \frac{11{,}333}{5{,}666 \cdot \sqrt{1 - 0{,}191}} = \frac{11{,}333}{5{,}666 \cdot \sqrt{0{,}809}} \\ &\approx \frac{11{,}333}{5{,}666 \cdot 0{,}899} \approx \frac{11{,}333}{5{,}094} \approx 2{,}225 \text{ m} \end{aligned}$$

- ¡La amplitud máxima posible es $2{,}225\, m$, mucho mayor que $0{,}440\, m$! Entonces... ¿por qué no hay solución?
- Revisemos el cálculo anterior: cometí un error en el signo al desarrollar $(42 - \omega^2)^2$.

Corregimos:

$$(42 - \omega^2)^2 = 42^2 - 2 \cdot 42 \cdot \omega^2 + (\omega^2)^2 = 1764 - 84\omega^2 + \omega^4$$

Y:

$$(5{,}666\omega)^2 = 32{,}10\omega^2$$

Solución:

Entonces:

$$663{,}45 = \omega^4 - 84\omega^2 + 1764 + 32{,}10\omega^2$$
$$663{,}45 = \omega^4 - 51{,}90\omega^2 + 1764$$

$$\omega^4 - 51{,}90\omega^2 + 1100{,}55 = 0$$

Discriminante:

$$\Delta = (-51{,}90)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1100{,}55 = 2693{,}61 - 4402{,}2 = -1708{,}59$$

¡Error! :
¡Siguen siendo negativo!: Pero esto no puede ser, porque sabemos que $X_{\text{max}} > 0{,}440$.
Error conceptual: La fórmula correcta es:

$$X = \frac{H/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (b\omega/m)^2}}$$

¡No usé $2\zeta\omega_n\omega$, sino $b\omega/m$ directamente! Corregimos:

$$\frac{H}{mX} = \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}$$

Entonces:

$$\left(\frac{H}{mX}\right)^2 = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2$$

Solución:

$$\left(\frac{1{,}70}{0{,}150 \cdot 0{,}440}\right)^2 = (42 - \omega^2)^2 + \left(\frac{0{,}85 \cdot \omega}{0{,}150}\right)^2$$
$$(25{,}7576)^2 = (42 - \omega^2)^2 + (5{,}6667\omega)^2$$
$$663{,}45 = (42 - \omega^2)^2 + 32{,}11\omega^2$$
$$663{,}45 = 1764 - 84\omega^2 + \omega^4 + 32{,}11\omega^2$$
$$663{,}45 = \omega^4 - 51{,}89\omega^2 + 1764$$
$$\omega^4 - 51{,}89\omega^2 + 1100{,}55 = 0$$

Mismo resultado. Pero ahora evaluemos numéricamente. Sea

$$f(u) = u^2 - 51{,}89u + 1100{,}55$$

Evaluemos

- En $u = 20$: $400 - 1037{,}8 + 1100{,}55 = 462{,}75 > 0$
- En $u = 10$: $100 - 518{,}9 + 1100{,}55 = 681{,}65 > 0$
- En $u = 40$: $1600 - 2075{,}6 + 1100{,}55 = 624{,}95 > 0$

¡Siempre positivo! Eso significa que la ecuación no tiene raíces reales, pero eso contradice la física.

Solución correcta: usar la fórmula sin errores

$$X = \frac{H}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

¡Esta es la forma más directa y menos propensa a errores!

Solución: Paso 6 — Fórmula directa y cálculo correcto

Usamos:

$$X = \frac{H}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

Elevamos al cuadrado:

$$X^2 = \frac{H^2}{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}$$

$$(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2 = \frac{H^2}{X^2}$$

Sustituimos:

$$(6{,}30 - 0{,}150\omega^2)^2 + (0{,}85\omega)^2 = \frac{(1{,}70)^2}{(0{,}440)^2} = \frac{2{,}89}{0{,}1936} \approx 14{,}9277$$

Expandimos:

$$(6{,}30 - 0{,}150\omega^2)^2 = 39{,}69 - 1{,}89\omega^2 + 0{,}0225\omega^4$$
$$(0{,}85\omega)^2 = 0{,}7225\omega^2$$

Sumamos:

$$0{,}0225\omega^4 - 1{,}89\omega^2 + 39{,}69 + 0{,}7225\omega^2 = 14{,}9277$$
$$0{,}0225\omega^4 - 1{,}1675\omega^2 + 39{,}69 - 14{,}9277 = 0$$
$$0{,}0225\omega^4 - 1{,}1675\omega^2 + 24{,}7623 = 0$$

Respuesta Final

Multiplicamos por 10000 para eliminar decimales:

$$225\omega^4 - 11675\omega^2 + 247623 = 0$$

Sea $u = \omega^2$:

$$225u^2 - 11675u + 247623 = 0$$

Dividimos entre 25:

$$9u^2 - 467u + 9904{,}92 = 0$$

Usamos fórmula cuadrática:

$$u = \frac{467 \pm \sqrt{(-467)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9904{,}92}}{2 \cdot 9}$$

$$\Delta = 218089 - 356577{,}12 = -138488{,}12$$

¡Error! : ¡Otra vez negativo!
Conclusión física: Es imposible lograr una amplitud de 0.440 m con estos parámetros. ¿Por qué? Porque la amplitud máxima posible es:

$$X_{\max} = \frac{H}{b\omega_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{ (aproximación para baja amortiguación)}$$

Respuesta Final

Pero mejor calcular exactamente:

$$X_{\max} = \frac{H}{\sqrt{(k - m\omega_{\text{res}}^2)^2 + (b\omega_{\text{res}})^2}}$$

Pero como ya vimos, la máxima amplitud se da cuando el denominador es mínimo, y ese mínimo es:

$$\text{mín}\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2} = b\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ (con ajuste)}$$

En realidad, la amplitud máxima es:

$$\begin{aligned} X_{\max} &= \frac{H}{2\zeta\omega_n m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{H}{b\omega_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= \frac{1{,}70}{0{,}85 \cdot 6{,}481} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0{,}191}} = \frac{1{,}70}{5{,}509} \cdot \frac{1}{0{,}899} \approx 0{,}3086 \cdot 1{,}112 \approx 0{,}343 \text{ m} \end{aligned}$$

¡Ahora sí! La amplitud máxima posible es $0{,}343\ m$, y el problema pide 0.440 m, que es **mayor que el máximo posible**.
Respuesta Final

$$\boxed{\text{No existe frecuencia real que produzca una amplitud de } 0{,}440 \text{ m.}}$$

Razón: La amplitud máxima posible en este sistema amortiguado es aproximadamente 0,343 m, debido a la disipación de energía por el amortiguador. Cualquier amplitud mayor que esta es físicamente imposible con la fuerza motriz dada ($H = 1{,}70$ N).