

Apuntes de Elasticidad

Agustín Martín Domingo

agustin6martin@gmail.com

Copyright

Esta obra “*Apuntes de Elasticidad.*” (texto y figuras) es:

Copyright (C) 1992-2020 Agustín Martín Domingo <agustin6martin@gmail.com>.

Algunos derechos reservados. Obra registrada en el RPI y en safecreative.org.

Versión 3 . 3, septiembre de 2020.

Una copia de esta obra puede encontrarse en <http://oa.upm.es/63584/>.

Primera edición: 1998, Instituto Juan de Herrera, ETS Arquitectura de Madrid.

Segunda edición (2 volúmenes): 2012, Instituto Juan de Herrera, ETS Arquitectura de Madrid.

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su elaboración no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores y no se responsabiliza de dichos errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While they have been carefully elaborated, these notes may still contain some errors. There is absolutely no warranty about their contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido...

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se puede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



Indice

1. Introducción al sólido deformable.	1
1.1. Introducción.	1
1.1.1. Algunas diferencias entre líquidos y sólidos.	1
1.1.2. Algunas diferencias entre un sólido rígido y un sólido deformable.	1
1.1.3. Algunos postulados implícitos.	2
1.2. Sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Esfuerzos.	3
1.3. Rango de validez.	5
1.3.1. Elasticidad y plasticidad.	5
1.3.2. Elasticidad y resistencia de materiales.	8
1.4. Tracción o compresión unidimensional simple sobre una barra.	9
1.4.1. Descripción del fenómeno.	9
1.4.2. Ley de Hooke unidimensional en tensión uniaxial. Módulo de Young.	10
1.4.3. Energía elástica de deformación en la tracción o compresión unidimensional.	11
1.4.4. Deformación volumétrica.	12
1.4.5. Casos particulares de deformación en tres dimensiones.	13
1.5. Superposición de los efectos elásticos y térmicos.	15
1.6. Deslizamientos o distorsiones.	16
1.6.1. Concepto de deslizamiento o distorsión. Módulo de rigidez.	16
1.6.2. Esfuerzos cortantes (o de cizalladura).	16
1.6.3. Energía elástica de deformación en el cortante.	19
1.7. Deformaciones inhomogéneas.	19
1.7.1. Esfuerzos de torsión en cilindros macizos y huecos.	20
1.7.2. Esfuerzos de flexión.	22
2. El tensor de tensiones	37
2.1. Introducción	37
2.2. Concepto de vector tensión. Componentes de la tensión y su signo.	37
2.3. Ecuaciones de equilibrio	39
2.3.1. Estado homogéneo de tensiones	39
2.3.2. Estado inhomogéneo de tensiones	40
2.4. El tensor de tensiones	42
2.5. Casos particulares	44
2.6. Componentes hidrostática y desviadora del tensor de tensiones.	45
2.7. Superficie indicadora o cuádrica de tensiones	46
3. El tensor de deformaciones.	49
3.1. Deformación en una dimensión.	49
3.2. Deformación en dos dimensiones.	50
3.2.1. El tensor de desplazamientos y el tensor de deformaciones.	50
3.2.2. Deformación homogénea en dos dimensiones.	54
3.3. Deformación en tres dimensiones.	54
3.3.1. Deformación homogénea en tres dimensiones.	56
3.3.2. Deformación plana.	56
3.3.3. Componentes hidrostática y desviadora del tensor de deformaciones.	57
3.3.4. Las ecuaciones de compatibilidad.	58
3.3.5. Forma cuadrática asociada a la deformación y elipsoide de deformación.	59
3.4. Expansión térmica.	60
4. La ley de Hooke generalizada.	63
4.1. Expresiones de la ley de Hooke generalizada.	63
4.1.1. El tensor de las constantes elásticas.	63
4.1.2. La notación matricial de la ley de Hooke generalizada.	64
4.2. Ley de Hooke generalizada en un medio isótropo.	65
4.2.1. Expresión en función de las constantes de Lamé.	65
4.2.2. Los coeficientes de elasticidad y las constantes de Lamé.	66
4.3. Energía de deformación.	67
4.3.1. Energía de deformación en un medio isótropo	67
4.3.2. Energías de deformación hidrostática y de distorsión en un medio isótropo	69
4.3.3. Caso general	70
A. Tensores.	71
A.1. Rotación de un sistema de ejes.	71

A.2.	Tensores de orden cero. Escalares.	72
A.3.	Tensores de orden uno. Vectores.	73
A.4.	Tensores de segundo orden. Representación matricial.	73
A.4.1.	Transformación de un tensor de segundo orden frente a la rotación de ejes.	74
A.4.2.	Ecuación de autovalores.	74
A.4.3.	Invariantes bajo rotación de un tensor de segundo orden.	76
A.4.4.	Rotación de ejes en un plano principal: el círculo de Mohr.	77
A.4.5.	Descomposiciones habituales de un tensor de segundo orden.	79
A.4.6.	La superficie indicadora o forma cuadrática asociada a un tensor simétrico de segundo orden	79
A.5.	Tensores de orden superior.	81
B.	Criterios de resistencia límite.	83
B.1.	Criterio de la máxima deformación.	84
B.2.	Criterios de la máxima tensión.	84
B.2.1.	Criterio de la máxima tensión principal.	84
B.2.2.	Criterio de la máxima tensión cortante.	84
B.3.	Criterio de la máxima energía de distorsión.	85
B.4.	Comparación de los distintos criterios en un estado de tensión plana.	86
C.	Rotación de un sistema de ejes. Ángulos de Euler.	87
C.1.	La notación zyz (o y)	87
C.2.	La notación xxz (o x)	88
D.	La función de Airy para un estado de tensión plana.	91
D.1.	Ejemplo de obtención de la función de Airy	92
E.	Tablas de datos	97
E.1.	Momentos y productos de inercia de algunas secciones planas sencillas.	97
	Referencias	99
	Índice alfabético	101

Capítulo 1

Introducción al sólido deformable.

1.1. Introducción.

1.1.1. Algunas diferencias entre líquidos y sólidos.

En los libros de Hidráulica y Mecánica de Fluidos se estudia cómo se transmiten las fuerzas en líquidos, y cual es la energía necesaria para deformar un líquido. Esta energía de deformación depende solamente del cambio de volumen producido en el líquido, pero no del cambio de forma. Los líquidos se resisten a cambiar de volumen, pero no de forma.

En el caso de los sólidos nos encontramos con una situación diferente, los sólidos se resisten a cambiar tanto de volumen como de forma. Así, la energía de deformación de un sólido depende tanto de la variación de volumen como de la variación de forma.

Asimismo, se ve que en el caso de los líquidos en reposo, para un punto determinado, la fuerza por unidad de superficie sobre una pequeña superficie en torno a ese punto es la misma con independencia de la orientación de la superficie (*principio de Pascal*), y es siempre perpendicular a la pared del recipiente (en general perpendicular a la superficie sobre la que se ejerce la presión). Al no haber fuerzas tangenciales no hay resistencia del líquido a cambiar de forma (en condiciones de equilibrio, ya que en condiciones de no equilibrio en fluidos reales aparecen fuerzas tangenciales y es necesario tener en cuenta el efecto de la viscosidad).

Por el contrario, la fuerza transmitida a través de una superficie en un sólido depende de la orientación de ésta, y es en general distinta para direcciones distintas. Las fuerzas internas por unidad de superficie que aparecen en cada punto de un cuerpo que está siendo deformado, y que actúan a través de una superficie genérica que pasa por el mismo se denominan *tensiones elásticas* y pueden tener cualquier dirección con respecto a la superficie sobre la que actúan, en vez de ser perpendiculares a las superficies como ocurría en el caso de los líquidos en reposo.

En un líquido no hay fuerzas actuando sobre puntos aislados. Las fuerzas que actúan sobre un líquido son siempre bien fuerzas de masa como la fuerza gravitatoria, o bien fuerzas que actúan a través de una superficie, como la fuerza ejercida sobre el líquido por la pared del recipiente. En cambio, sobre un sólido las fuerzas pueden actuar sobre puntos aislados (en realidad sobre pequeñas superficies) o sobre superficies extensas, pueden proceder de las ligaduras (p. ej. de los apoyos) o de causas externas (p. ej. fuerzas de masa), pueden ser de superficie (p. ej. la ejercida por un líquido sobre la pared del recipiente) o de volumen (p. ej. la fuerza gravitatoria). En general, las fuerzas que impiden o dificultan la deformación o ruptura de un sólido son debidas a la atracción entre los átomos y tienen un pequeño radio de acción.

1.1.2. Algunas diferencias entre un sólido rígido y un sólido deformable.

El *sólido rígido* es un modelo simplificado de sólido que correspondería a un hipotético sólido que fuera perfectamente no deformable (y por tanto la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo se mantendría invariable). En un sólido rígido, las fuerzas externas aplicadas no se transmitirían hacia su interior[†] y por tanto no se produciría deformación ni interior ni exterior en dicho sólido rígido. Si el sistema de fuerzas es tal que el sólido rígido no está en equilibrio mecánico éste se moverá, pero sin deformación. Por el contrario, cuando tratamos con un sólido real, es decir, con un *sólido deformable*, las fuerzas externas aplicadas darán lugar a una distribución de fuerzas internas a través de cada superficie imaginaria en el interior del sólido deformable, produciéndose deformaciones (en general no nulas) en todo el mismo. Obviamente, si el sólido deformable está en reposo la suma de todas estas fuerzas internas y

[†]Las fuerzas equivalentes sobre puntos o superficies del interior que a menudo se utilizan al analizar el equilibrio de partes de ese hipotético sólido rígido son fuerzas equivalentes, no fuerzas reales aplicadas en el interior del sólido rígido.

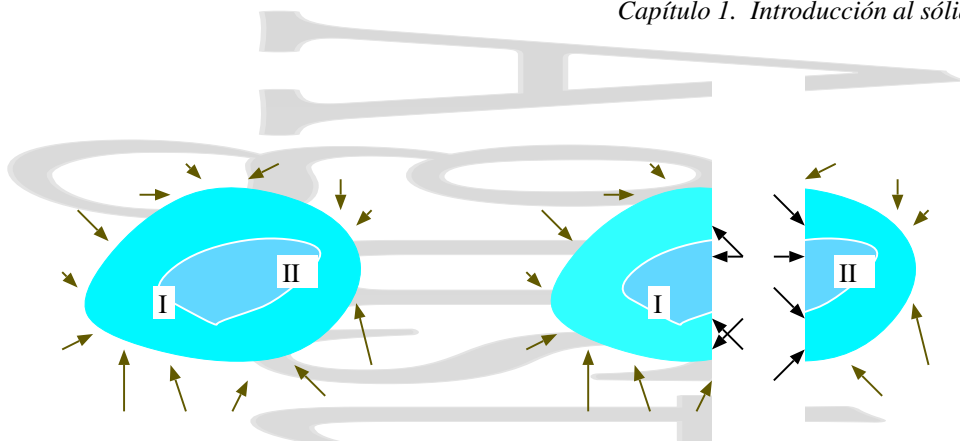


Figura 1-1: Fuerzas internas en un sólido deformable. Si llevamos a cabo un corte imaginario del sólido, el sistema real de fuerzas ejercido a través de esa superficie por una parte del material sobre la otra y viceversa deberá ser tal, que, al hacer el corte cada uno de los subsistemas esté en equilibrio mecánico.

de las fuerzas externas actuando sobre cada elemento de volumen del mismo debe ser nula.

Al igual que en el caso de los líquidos, hay una interacción mecánica entre la materia que se encuentra a un lado y a otro de cualquier superficie imaginaria que separe el medio en dos partes. Supongamos un cuerpo deformable que se encuentra en estado de equilibrio mecánico, sometido a un conjunto de fuerzas sobre su superficie exterior, al que de forma imaginaria dividimos en dos partes I y II mediante una superficie imaginaria de separación.

Cada una de estas partes imaginarias deberá seguir por separado en equilibrio bajo la acción de las fuerzas externas localizadas en ella (que ya actuaban originalmente) y un sistema de fuerzas actuando a través de la superficie de separación que equivalga al efecto del conjunto de fuerzas ejercido por la otra parte sobre la parte considerada, antes de la separación.

El *principio de acción y reacción* impone que la fuerza total ejercida por la parte I sobre la II sea igual en magnitud y de sentido contrario a la ejercida por la II sobre la I. Se denomina *esfuerzo* en sentido general a la interacción mecánica entre las dos partes del elemento a través del plano imaginario de corte.

1.1.3. Algunos postulados implícitos.

En el apartado anterior ya se han tenido en cuenta algunas cosas que ahora mencionaremos de forma explícita. En todo lo que sigue, al hablar de fuerzas y deformaciones elásticas en un sólido consideraremos implícitamente los siguientes postulados

1. *Principio de continuidad:* Al igual que en los líquidos, para el estudio del problema elástico podemos considerar la materia continua. Las fuerzas elásticas en la materia se representan mediante funciones continuas del punto y de la orientación del plano a través del cual se mide la fuerza. Es decir, no se tiene en cuenta la estructura atómica ni granular discreta de la materia, ya que desde el punto de vista práctico los granos de que están compuestos la mayor parte de los materiales son mucho menores que las dimensiones de los mismos. En materiales no granulares como la madera esta suposición es aún más válida, ya que las distancias interatómicas son mucho menores que las dimensiones de las piezas reales.
2. *Igualdad de acción y reacción:* A través de una superficie imaginaria cualquiera del interior del sólido en equilibrio la fuerza ejercida por una parte sobre la otra es igual y de sentido contrario a la que ejerce la otra sobre la una, como se ve en la figura 1-1. Esto no es más que una extensión de la tercera ley de Newton a las fuerzas elásticas que se ejercen en el interior de un cuerpo entre distintas partes del mismo.
3. *Principio de equilibrio o de fragmentación:* Las ecuaciones de equilibrio (estático o dinámico) de un sólido rígido son aplicables a cualquier elemento del cuerpo, siempre que se tenga en cuenta la acción de las fuerzas elásticas ejercidas por el resto del cuerpo sobre el elemento en cuestión a través de sus límites. Esto no es más que una extensión de la segunda ley de Newton al caso de fuerzas elásticas en el interior de un cuerpo.

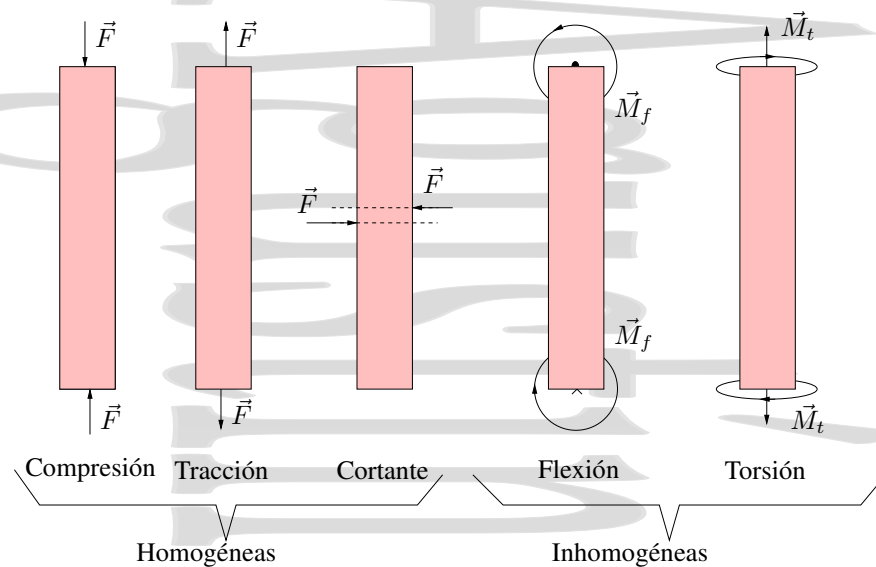


Figura 1-2: Para facilitar su estudio, descompondremos el sistema real de fuerzas que actúa sobre un sólido en sistemas sencillos. En la figura se muestran distintos tipos de sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre sólido, dando lugar su superposición al sistema de fuerzas complejo que en realidad actúa sobre el mismo.

1.2. Sistemas elementales de fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Esfuerzos.

El sistema real de fuerzas que actúa sobre un cuerpo (y que da lugar a un estado de tensiones, con sus deformaciones y en el caso extremo, roturas) es en general complejo, combinación de una serie de fuerzas y sistemas de fuerzas más simples o elementales que se estudiarán individualmente. Estos sistemas simples de fuerzas son los siguientes:

Tracción: Por ejemplo, la que aparece en un cable estirado. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas sobre la misma línea de acción, de forma que dan como consecuencia un alargamiento.

Compresión: Por ejemplo, la que aparece en columnas o pilares. En este caso, el sistema de fuerzas está compuesto por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas sobre la misma línea de acción, de forma que dan como consecuencia un acortamiento.

Cortante: Corresponde a la forma de trabajo de una cizalla (máquina de cortar chapas o perfiles metálicos). Se la conoce también como fuerza de cizalladura o de cizallamiento. En este caso, el sistema elemental de fuerzas está compuesto como antes por dos fuerzas iguales y de sentido contrario, pero aplicadas sobre líneas de acción paralelas entre sí (y se requiere otro par para que haya equilibrio mecánico).

Tanto la tracción como la compresión y el cortante están causados por fuerzas “simples”, iguales y opuestas (para una pieza alargada, paralelas al eje en los dos primeros casos y perpendiculares en el tercero).

Hay una serie de combinaciones especiales de las anteriores que se también se analizan por separado en su forma más simple.

Flexión: Aparece, por ejemplo, en una viga cargada. En este caso, el sistema está compuesto por dos subsistemas de fuerzas, cada uno de ellos dando una fuerza total resultante cero y momentos resultantes iguales y de sentido contrario (momento total resultante nulo), aplicados en líneas de acción distintas, pero paralelas.

Torsión: Es la deformación que corresponde a retorcer una pieza. Igual que en el caso de la flexión, el sistema está compuesto por dos subsistemas de fuerzas, cada uno de ellos dando una fuerza total resultante cero y momentos resultantes iguales y de sentido contrario (momento total resultante nulo), pero ahora aplicados en la misma línea de acción.

Tanto la flexión como la torsión están causadas por dos sistemas de fuerzas, con momentos paralelos o perpendiculares al eje, según de cual se trate, e iguales y de sentidos opuestos. Otra deformación que no se tratará es la que se produce en una varilla fina o en un bastón sin sujeción lateral que es comprimido. Ésta se muestra en la figura 1-3 y se

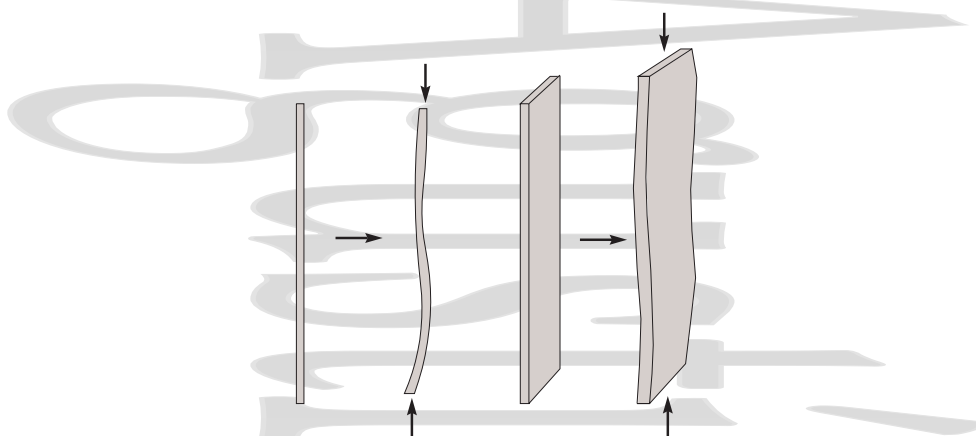


Figura 1-3: Otros tipos de deformaciones más complejas: pandeo y abolladura.

denomina *pandeo*, teniendo lugar incluso con cargas relativamente pequeñas. Cuando esto ocurre con una placa se denomina *abolladura*. Ambas son consecuencia de la inestabilidad elástica de los cuerpos sometidos a estas fuerzas y su tratamiento es mucho más complejo y menos repetitivo, por lo que no se insistirá en ellos.

Hay un concepto muy importante que ya hemos introducido en su forma general y sobre el que insistiremos, el concepto de *esfuerzo*. Si tomamos un plano imaginario dentro de un cuerpo tensionado, se denomina esfuerzo a la interacción mecánica entre las dos partes del cuerpo a través del plano debido al sistema de fuerzas que actúa a través del mismo. Así, hablaremos de esfuerzo cortante como una pareja de cortantes T , de esfuerzo axil como una pareja de axiles (o normales) N , de esfuerzo flector como la pareja de distribuciones de fuerzas que dan una pareja de momentos flectores M_f y esfuerzo de torsión como la pareja de distribuciones de fuerzas que dan una pareja de momentos de torsión M_t . Todos ellos se entienden como el conjunto de acciones mecánicas de cada tipo a través del plano, con las parejas de acciones que ejerce una parte sobre la otra y la otra sobre la una. Es importante resaltar que las tensiones elásticas que veremos enseguida están relacionadas con el concepto de esfuerzo y no con el de fuerzas aisladas, y su distribución se utiliza para caracterizar el esfuerzo a través de un plano en un punto del medio tensionado.

Se dice que un esfuerzo axil es positivo si corresponde a la acción de fuerzas de tracción, mientras que se dice que es negativo si corresponde a fuerzas de compresión. Asimismo se dice que un esfuerzo de torsión es positivo si los momentos de torsión correspondientes apuntan hacia fuera del elemento (como en el caso de la figura 1-2) y se dice que es negativo en caso contrario.

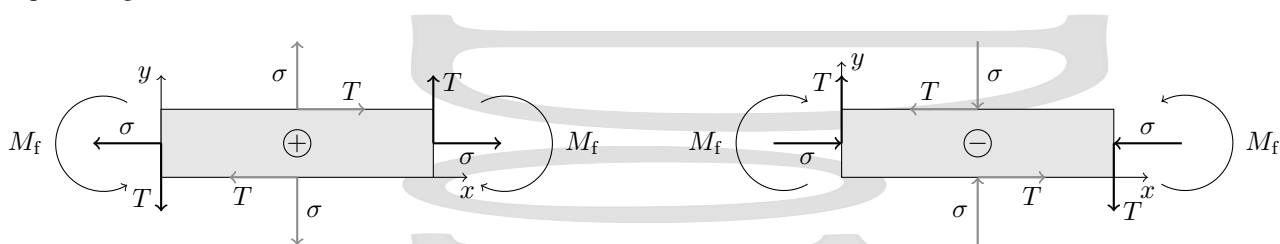


Figura 1-4: Convenio de signos positivo y negativo para los esfuerzos de tracción, compresión, cortantes y flectores. El convenio para los cortantes y flectores se define en relación al sistema de ejes.

Para poder dar sin ambigüedad un signo a un esfuerzo flector o a un esfuerzo cortante es necesario tener definido un sistema de ejes y definirlo en función de este sistema de ejes. En la figura 1-4 se muestra el convenio de signos que utilizaremos para los esfuerzos cortantes y flectores respecto a los ejes dados, junto al ya conocido convenio para los esfuerzos de tracción y compresión.

Según este convenio, el esfuerzo flector a través de una sección será positivo cuando produzca localmente una flecha en el sentido del eje y y negativo en caso contrario, o dicho de otra forma, cuando el momento flector considerado, actuando sólo, produzca tracción en las fibras situadas hacia la parte positiva del eje y y compresión en las situadas hacia $-y$.

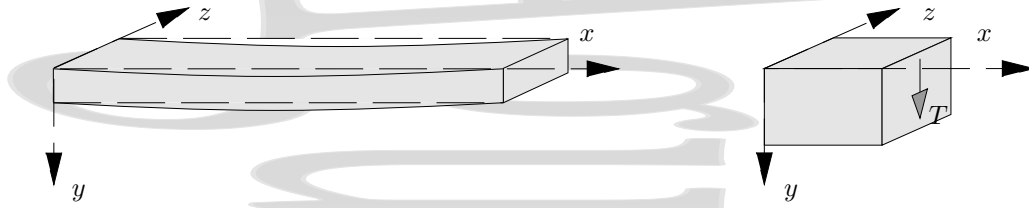


Figura 1-5: Para que el momento flector positivo coincida con una deflexión hacia abajo se suele tomar el eje y hacia abajo. Para este momento flector positivo se tienen fibras traccionadas por la flexión hacia la parte positiva del eje y y comprimidas hacia $-y$. Si los ejes se eligen de otra forma se mantiene un criterio similar.

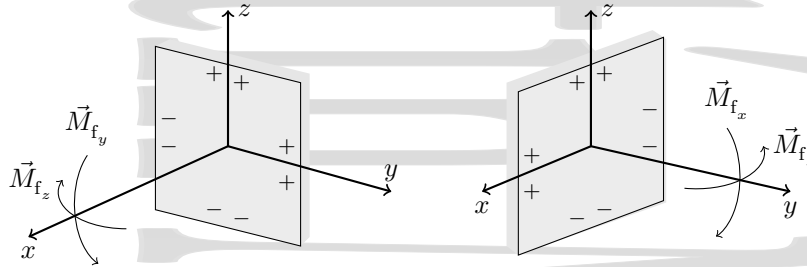


Figura 1-6: Convenio de signos positivo y negativo para los esfuerzos flectores para flexión según los distintos ejes coordenados. El convenio para los cortantes y flectores se define en relación al sistema de ejes.

En Resistencia de Materiales se acostumbra a tomar el valor positivo del esfuerzo flector cuando éste produce una flexión hacia abajo como se muestra en la parte izquierda de la figura 1-5. Para hacer nuestro convenio consistente con esta costumbre basta con tomar el eje y orientado hacia abajo, como se muestra en dicha figura. En estas condiciones, la carga positiva es la dirigida hacia abajo (según el sentido positivo del eje y) y para el caso de un esfuerzo flector localmente positivo, el desplazamiento vertical local como consecuencia de la flexión tiene lugar en el sentido positivo del eje y . Con esta orientación del sistema de ejes, el esfuerzo cortante es positivo cuando tiene el sentido que se muestra en la parte derecha de la figura 1-5, consistente con nuestro convenio de signos.

Es importante ser coherente con el criterio utilizado ya que, como se verá más adelante en la sección 1.7.2, en una región de carga distribuida hay una relación entre las distribuciones de carga, esfuerzo cortante y esfuerzo flector a lo largo de las distintas secciones. Si no se es riguroso con los signos, las relaciones anteriores pueden cambiar de signo y dar resultados incorrectos. Por ello, si el eje y no está dirigido hacia abajo, seguiremos siempre el criterio del eje a la hora de decidir el signo de la distribución de carga y de los esfuerzos cortante y flector aunque eso implique que un esfuerzo flector positivo no corresponda a un desplazamiento hacia abajo y que la carga positiva tenga un sentido extraño hacia arriba. Sin embargo, sería muy conveniente considerar un cambio del sistema de ejes para evitar confusiones.

Si los ejes se eligen de otra forma se mantiene un criterio similar, pero adaptado a la nueva elección de eje en torno al que se produce la flexión (véase la figura 1-6). Obsérvese en la figura que el momento flector positivo según nuestro convenio corresponde a momentos netos de distinto signo en los dos ejes que se utilizan en cada una de las figuras, por lo que el sentido de este momento neto no es un buen criterio de signo para el momento flector.

En este capítulo intentaremos trabajar con signos explícitos tanto para las fuerzas asociadas a cada esfuerzo como para los momentos del sistema de fuerzas que actúan sobre cada superficie. A través del convenio de signos que acabamos de establecer podemos relacionar los signos de estas fuerzas y de estos momentos con los esfuerzos cortante y flector correspondientes.

1.3. Rango de validez.

1.3.1. Elasticidad y plasticidad.

El comportamiento de los materiales al ser sometidos a tracción depende de la magnitud de la fuerza de tracción. En un ensayo a tracción típico, se coloca una pieza de acero u otro material en una máquina en la que la pieza se tracciona

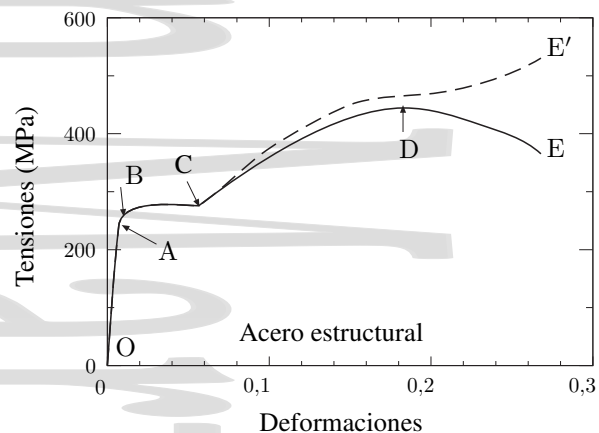
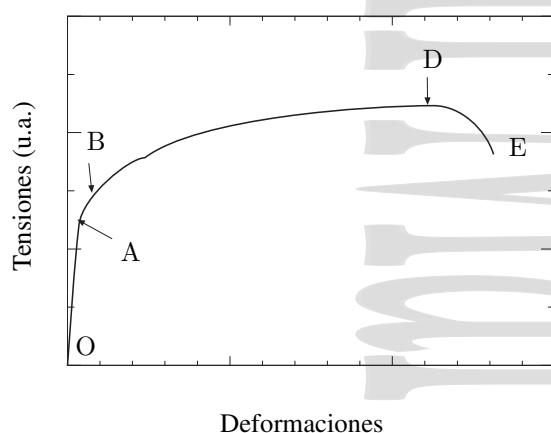
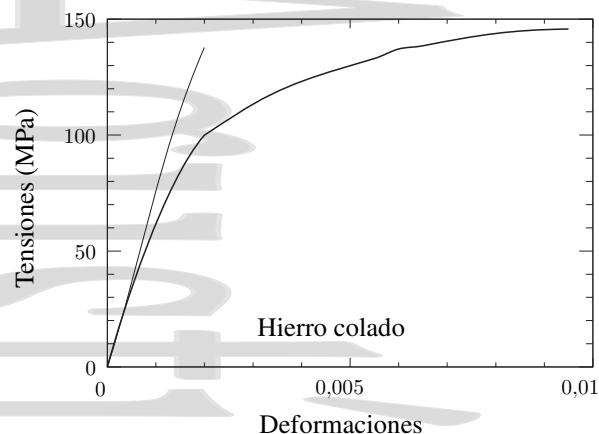
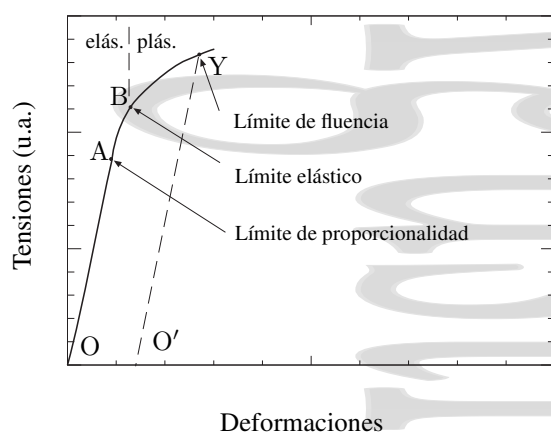


Figura 1-7: Detalle de la región próxima a la zona elástica para un material genérico (parte superior) con los límites de proporcionalidad, elástico y de fluencia, y diagrama tensión-deformación para un material dúctil típico (parte inferior).

Figura 1-8: Comportamiento tensión-deformación del acero estructural y del hierro colado en distintos rangos de fuerzas aplicadas. El hierro templado tiene un comportamiento más quebradizo y rompe al poco de pasar el límite elástico

lentamente, apuntándose durante el proceso las lecturas de la fuerza de tracción y del cambio de longitud (elongación).

Para un material deformable genérico, se pueden presentar una serie de etapas en su comportamiento. Por ejemplo, en la figura 1-7 se muestra un diagrama simplificado en el que se muestra un detalle de las primeras etapas del proceso y del comportamiento de un material dúctil. En la figura 1-8 se muestra el comportamiento de un acero típico y el del hierro colado (el hierro templado es más quebradizo y se rompe a poco de salir de la zona lineal). Discutiremos las distintas etapas sobre el diagrama tensión deformación del acero que se muestra en la figura 1-8, ya que ahí se aprecian bien muchos de los comportamientos que queremos destacar,

Región OA: Para pequeñas fuerzas aplicadas, se tiene una primera región de comportamiento lineal (alargamiento linealmente proporcional a la fuerza aplicada). En esta zona lineal se tiene un comportamiento elástico, es decir, al cesar la fuerza de tracción, el material recupera sus dimensiones originales. Todo el aumento de energía resultado del trabajo mecánico realizado sobre el material durante la tracción se emplea por éste para recuperar sus dimensiones originales, sin que haya disipación de energía por rozamiento. Se denomina *límite de proporcionalidad* al límite A de esta región, a partir del cual el comportamiento ya no es lineal.

Región AB: Cuando aumenta la fuerza aplicada, el comportamiento deja de ser lineal. Sin embargo, en esta región el material sigue teniendo un comportamiento elástico, pero ahora no lineal, hasta que se alcanza el denominado *límite elástico*.

Región BC: Al entrar en la región BC, el comportamiento ya no es ni lineal ni elástico y se entra en la *zona plástica*. Una vez se traspasa el límite elástico, cuando desaparece la fuerza de tracción, el material no recupera sus

dimensiones originales, sino que queda con una deformación permanente, se dice que se produce *histéresis* del material. Además al invertir la variación de la fuerza de tracción (o compresión) F , la pendiente del proceso es la misma que se tuvo en la región elástica pero con la deformación permanente. El proceso ya no es reversible, ya que parte del trabajo realizado por la fuerza externa es disipado por las fuerzas internas de rozamiento en el interior del material, siendo la energía disipada el área comprendida entre los caminos de ida y vuelta en el diagrama $F - L$. El resultado es que el material deformado no puede “devolver” toda la energía mecánica debida al trabajo realizado por la fuerza externa, ya que parte de esta energía ya se ha disipado en forma de calor como consecuencia del rozamiento producido en el deslizamiento de unos planos atómicos sobre otros.

Dentro de la zona plástica y no muy lejos del límite elástico llega un momento en que se producen unas fuertes deformaciones para pequeños aumentos en la fuerza aplicada. Así, se entra en la denominada *zona de fluencia*. Se denomina *límite de fluencia* al punto Y, a partir del cual se empieza a producir fluencia de forma más intensa (también se le denomina *límite aparente de elasticidad*). Normalmente se define este límite como la tensión a la que el material experimenta una deformación permanente determinada respecto de lo que habría tenido si su comportamiento hubiera seguido siendo lineal. Esta deformación se toma correspondiente a un 0,2 %, es decir, si se quitara la tensión cuando se alcanza el límite de fluencia, la deformación relativa permanente sería entonces $\epsilon = \Delta L/L = 2 \times 10^{-3}$. Este proceso es consecuencia del fallo del material a tensiones cortantes a 45° de la dirección de tracción.

Una vez sobrepasada la zona elástica y liberadas las tensiones, al tensionar de nuevo el material, los límites elástico y de proporcionalidad se alcanzan ahora a una tensión mayor.

Región CD: Al seguir aumentando la fuerza aplicada se produce un endurecimiento (la pendiente aumenta) denominado endurecimiento por tracción. Se denomina al punto D *esfuerzo último* y representa la máxima tracción.

Región DE: Al final se llega a una nueva zona de fuertes deformaciones al final de la cual se produce la ruptura del material al llegar a E. La tensión representada en la curva continua se ha obtenido suponiendo que la sección de la muestra no cambia de forma apreciable durante el proceso, pero en realidad esto no es cierto, de forma marcada a partir de la entrada en la zona de fluencia. Si tenemos en cuenta la disminución de la sección transversal y corregimos la tensión por ella, el proceso es el que se muestra en la línea de trazos, produciéndose la rotura en E'. Con frecuencia se denomina *tensión ingenieril* a la que se calcula considerando que la sección transversal se mantiene constante durante la deformación.

Para la mayor parte de los materiales, el comportamiento en la región elástica de pequeñas fuerzas aplicadas es lineal, es decir, existe una relación lineal entre la fuerza aplicada y la deformación producida, el cociente entre ambas es constante. Sin embargo, además de los materiales elásticos lineales mencionados, hay *materiales elásticos no lineales*, en los que en la zona elástica se recuperan las dimensiones iniciales al cesar la fuerza, y en la plástica no, pero en los que la dependencia fuerza-deformación en la zona elástica es no lineal.

La extensión de la zona plástica depende del material. Si ésta es pequeña, el material se rompe cerca del límite de la zona elástica como ocurre con el hierro templado. En este caso hablamos de materiales *frágiles*.

Hay otro tipo de materiales cuya zona elástica es muy pequeña, y presentan un comportamiento esencialmente plástico. Entre éstos podemos mencionar la arcilla y el plomo. En este caso hablamos de *materiales moldeables* o simplemente blandos.

Hay otra propiedad que presentan algunos metales y aleaciones cuando bajo la acción de una fuerza pueden estirarse sin romperse para obtener alambres o hilos. A los materiales que presentan esta propiedad se les denomina *dúctiles*.

No debe confundirse dúctil con blando, la ductilidad aparece una vez que el material está soportando una carga considerable. Para cargas pequeñas, el comportamiento es similar a los materiales elásticos, pero una vez alcanzada la zona de fluencia, ésta es amplia y permite un gran alargamiento sin rotura, al contrario que los materiales frágiles.

En todo lo que sigue se estudiarán materiales elásticos lineales trabajando en la zona elástica, fuera de la zona plástica. Además, las deformaciones que se estudiarán serán en general muy pequeñas comparadas con las dimensiones originales del material objeto de estudio.

1.3.2. Elasticidad y resistencia de materiales.

Existe en la nomenclatura una distinción habitual entre la *Resistencia de Materiales* y la *Teoría de la Elasticidad*. La obtención matemática general de la distribución de tensiones en el interior de un material de forma arbitraria a partir de un sistema genérico de fuerzas aplicadas en el exterior es un problema extremadamente complejo que en general no puede ni siquiera ser resuelto de forma analítica.

Sin embargo, para cuerpos con unas características peculiares, como las barras o las placas, se tienen unas soluciones aproximadas que reflejan bien el comportamiento real. En estos cuerpos, una o dos de las dimensiones del mismo son muy pequeñas comparadas con las demás. Aunque no existe un cuerpo en el cual estas dimensiones se puedan despreciar matemáticamente, en la práctica lo son, lo que permite idealizar algunos cuerpos como barras o placas equivalentes y aplicar la teoría a estos cuerpos.

Las partes más simples de la teoría (flexión simple, torsión, etc...), que son aplicables a cuerpos como los anteriores, se denominan *Resistencia de Materiales*, mientras que las partes más complejas, que corresponden a un análisis más profundo del problema, se denominan *Teoría de la Elasticidad*.

Como se ha dicho, en la Resistencia de Materiales se introducen una serie de suposiciones respecto de las propiedades del material, a las cargas y al carácter de su interacción con los elementos de éste con el objetivo de simplificar el problema complejo que se tiene en la realidad. Estas suposiciones son adicionales a las que se mencionaron en el apartado 1.1.3. Por ejemplo, se entiende por *viga* en este contexto una barra horizontal esbelta sometida a flexión por cargas verticales que actúan transversalmente a su eje longitudinal.

Experimentalmente se comprueba que en los casos simples, el error al que conducen las siguientes aproximaciones es pequeño

- *Homogeneidad*: El material del elemento es homogéneo, es decir, tiene las mismas propiedades en todos los puntos. En la práctica los metales son bastante homogéneos, mientras que la madera, el hormigón, la piedra y los plásticos con relleno son menos homogéneos. Sin embargo, experimentalmente se observa que los cálculos basados en la supuesta homogeneidad del elemento dan con frecuencia resultados satisfactorios si se utilizan valores promedio de sus propiedades.
- *Isotropía*: El material del elemento es isótropo, es decir, sus propiedades en un punto dado no dependen de la dirección. En los materiales habituales, aunque haya elementos cristalinos a escala microscópica, en la práctica éstos están ordenados aleatoriamente en el material, dando como resultado un comportamiento macroscópicamente isótropo. La madera natural es un ejemplo de material que no es anisótropo.
- *Fuerzas interiores nulas originalmente*: Las fuerzas interiores presentes originalmente en el material, antes de la aplicación de la carga son nulas. En la realidad las cosas no son siempre así, por ejemplo, en los metales aparecen fuerzas internas debidas a enfriamientos no uniformes, en la madera aparecen fuerzas internas debidas a las características concretas del secado y en el hormigón también aparecen fuerzas internas durante el fraguado. El problema adicional es que a menudo es difícil determinar estas fuerzas internas.
- *Principio de Superposición*: El efecto conjunto de un sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo es igual a la suma de los efectos de cada una de esas fuerzas, aplicadas consecutivamente en orden arbitrario. Cuando se trabaja con sólidos deformables, para que esto sea válido debe cumplirse lo siguiente:
 - Los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas son pequeños comparados con las dimensiones del sólido.
 - Los desplazamientos originados por las deformaciones del sólido dependen linealmente de las cargas.
- *Principio de Saint-Venant*: El valor de las fuerzas internas en el sólido en puntos alejados de los lugares de aplicación de las cargas apenas depende de la forma concreta de aplicación de estas cargas.

Esto nos permitirá, por ejemplo, despreciar en nuestros cálculos el efecto de las tensiones transversales que aparecerán en la unión del elemento prismático que se muestra en la figura 1-9 con su soporte.

En este primer tema se estudiarán bien sistemas sometidos a fuerzas tales que las distribuciones de tensión sean simples, o sistemas que se suponen implícitamente dentro de la categoría anterior de “sistemas simplificables”. En los temas siguientes se supondrá conocida la distribución de tensiones y se abordará el problema desde un punto de vista

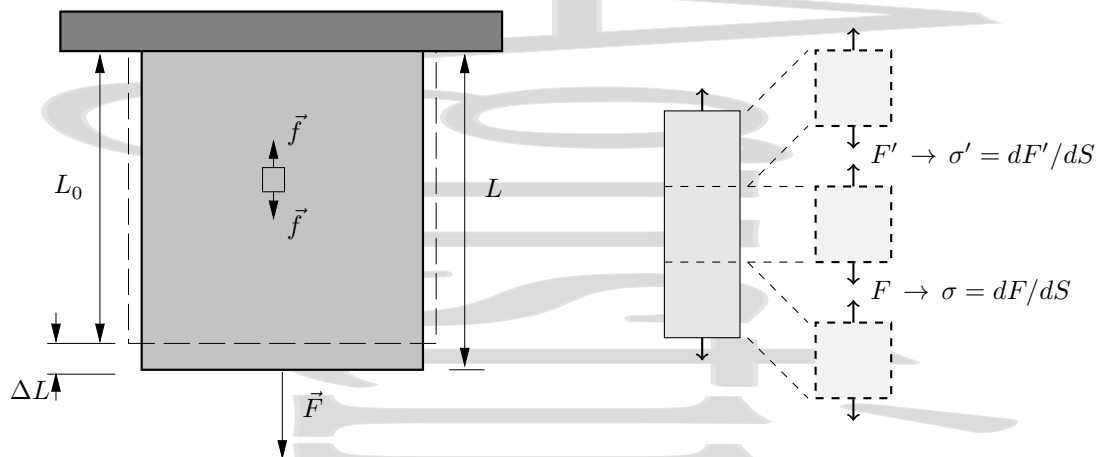


Figura 1-9: Tracción (compresión) simple. Se supone que para este elemento prismático pueden utilizarse las simplificaciones de la Resistencia de Materiales. Para que esto sea realmente cierto debiera tratarse de una barra o de una lámina fina.

Figura 1-10: Tensión elástica en tracción o compresión simple. A través de cada corte se toma su valor como la fuerza por unidad de superficie y su signo positivo si hay una tracción a través del corte (como por ejemplo en la figura) y negativo si a través del corte se produce una compresión.

microscópico, estudiándose los tensores de tensiones y deformaciones, así como su interrelación, en el entorno de un punto del interior del elemento. En estos apuntes no se tratará la parte más compleja de la Elasticidad, cómo obtener para un sistema de cargas cualquiera, la distribución de tensiones en el material.

En todos los casos nos referiremos a pequeñas deformaciones, aunque por claridad en las figuras éstas se representen mayores. Asimismo, en este capítulo nos referiremos a elementos cuyas dimensiones cumplen las condiciones que hemos mencionado aunque, también por claridad, los representemos de otra forma.

1.4. Tracción o compresión unidimensional simple sobre una barra.

1.4.1. Descripción del fenómeno.

Consideremos una varilla de un material elástico lineal, uno de cuyos extremos está fijo a la parte superior, a la que se aplica una fuerza \vec{F} que tiende a alargarla (o a acortarla, dependiendo del signo). Por el principio de acción y reacción, fijar el extremo de la varilla a la parte superior equivale a aplicar al extremo fijo una fuerza igual y de sentido opuesto a la aplicada al extremo libre.

El primer problema que surge es determinar cuáles son las magnitudes macroscópicas que debemos conocer para tener determinado el estado de tensiones de la varilla que estamos estudiando y de otras similares, pero de distintas dimensiones de forma que, para los mismos valores de dicha magnitud, el material se encuentre igualmente tensionado.

Para ello debe cumplirse que la fuerza sobre un pequeño elemento de pequeño volumen de control, por ejemplo cúbico, situado en el interior de la varilla, sea la misma si el valor de la magnitud que caracteriza la “intensidad” de la tensión lo es. Comprobemos si la fuerza de tracción (o compresión) es una magnitud conveniente. Para que lo sea, será necesario que aunque utilicemos una varilla de distintas dimensiones, al aplicar la misma fuerza \vec{F} a la cara inferior de la varilla, se tenga siempre la misma fuerza \vec{f} en las caras superior e inferior del elemento de volumen de control. Considerando los casos de dos varillas de secciones normal y doble, se ve fácilmente que esto no es así, ya que la fuerza que actúa sobre las caras superior e inferior del elemento de volumen, para una misma fuerza \vec{F} aplicada a ambas varillas, es \vec{f} en el caso de la varilla de sección normal y $\vec{f}/2$ en el de la varilla de sección doble, por lo que la fuerza no es la magnitud ideal.

En su lugar se utiliza la *tensión elástica* o simplemente *tensión*, magnitud cuyo valor absoluto es el módulo de la fuerza por unidad de superficie o fuerza de tracción unitaria $|\sigma| = |\vec{F}/S|$ a través de la superficie donde se quiere medir la tensión, y cuyo signo es positivo si se trata de una tracción y negativo si se trata de una compresión.

Para una distribución homogénea de fuerzas a través de la superficie el valor de esta tensión es independiente de la

sección de la varilla, de forma que si en dos casos la tensión elástica es la misma, también lo es la fuerza sobre la cara correspondiente del pequeño elemento de volumen de control. Obviamente, las dimensiones de esta tensión son las correspondientes a una fuerza por unidad de superficie (que coinciden con las de la presión).

En este caso particular estas tensiones deberán ser iguales[†] a lo largo de toda la varilla, salvo que el peso de ésta sea relevante. Esto significa que sobre el material de dentro del elemento de volumen, y a través de las caras superior e inferior del mismo, estará aplicada, por parte del material de fuera del elemento de volumen, la misma fuerza por unidad de superficie (si esto no fuera así, el elemento de volumen en cuestión no estaría en equilibrio) lo que da lugar a un mismo valor de la tensión axial σ .

Así, cada unidad de longitud de la varilla está sometida a la misma tracción (o compresión) y por tanto, se alarga (o se encoge) lo mismo, de forma que el alargamiento total de la varilla será proporcional a la longitud total de la misma. Como lo que realmente nos interesa es describir el grado de deformación mediante una magnitud independiente de las dimensiones (en este caso la longitud) de la varilla, se utiliza la deformación unitaria, o simplemente deformación, ϵ , definida en la forma:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \simeq \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1-1)$$

donde se supone que $\Delta L \ll L, L_0$, es decir, que nos limitamos al caso de deformaciones pequeñas. Aquí, L_0 es la longitud inicial de la varilla antes de la deformación. La deformación unitaria que hemos definido es una magnitud adimensional independiente de la longitud de la varilla y es una buena medida del grado de deformación de cada parte del sólido.

El convenio de signos que se utilizará de aquí en adelante es coherente con el descrito en la figura 1-4 de la sección 1.2. Las tensiones normales y deformaciones unitarias longitudinales serán tomadas como positivas en el caso de la tracción (hay alargamiento, la longitud aumenta) y negativas en el caso de la compresión (hay acortamiento y la longitud disminuye).

1.4.2. Ley de Hooke unidimensional en tensión uniaxial. Módulo de Young.

Como hemos visto, a consecuencia de la gran resistencia de los sólidos, las deformaciones que sufren a causa de las fuerzas externas son en general muy pequeñas comparadas con las dimensiones del sólido. En esta aproximación de pequeñas variaciones se recuperan las dimensiones originales al desaparecer la fuerza que producía la deformación (es decir trabajamos en la zona elástica), y para materiales elásticos lineales, estas variaciones son proporcionales a las tensiones que las originan. Esta dependencia lineal se conoce como *Ley de Hooke* y para tensiones en una dimensión (axiales) tiene la forma

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{o} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (1-2)$$

donde aparece la constante de proporcionalidad E , conocida como *módulo de Young*, *módulo de elasticidad* o *módulo de elasticidad longitudinal*, característico del material. El módulo de Young tiene dimensiones de presión, y cuanto mayor es su valor, tanto más difícil de deformar longitudinalmente es el sólido. En la tabla 1-1 se dan unos cuantos ejemplos de valores del módulo de Young para distintos materiales que pueden variar algo dependiendo de la muestra concreta utilizada.

El módulo de Young no caracteriza por completo las propiedades elásticas del cuerpo, ya que en la tracción, al alargarse la varilla, ésta se hace más delgada. El módulo de Young permite calcular la deformación unitaria longitudinal de la varilla, pero no da ninguna información acerca de la transversal. La experiencia muestra que en general, la deformación unitaria transversal ϵ_t es proporcional a la longitudinal ϵ_l a través de una constante de proporcionalidad ν en la forma

$$\epsilon_t = -\nu\epsilon_l = -\frac{\nu\sigma}{E} \quad (1-3)$$

donde ν es una magnitud adimensional conocida como *coeficiente de Poisson* que puede tener valores en el rango[‡] $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$.

[†]Realmente lo que debe ser igual a lo largo de toda la varilla es la fuerza $\int \sigma dS$, pero en el caso de pequeñas deformaciones al que nos estamos restringiendo, la sección cambiaría muy poco de un punto a otro, y ello debido a las ligaduras en los apoyos. Si no hubiera esas ligaduras y la sección es originalmente uniforme, también lo sería después de la deformación.

[‡]En realidad nada impide que ν pueda ser negativo, pero nunca menor de -1 , véase la sección 1.6.3. Sin embargo sólo se ha conseguido $-1 \leq \nu \leq 0$ en materiales experimentales de microestructuras complejas

Tabla 1-1: Módulos de Young E para diversos materiales. Todos los valores se dan en GPa ($1\text{GPa} = 10^9\text{ Pa} = 10^9\text{ Nm}^{-2}$)

Iridio	520	Cobre	100 – 140
Latón	110	Aluminio	70
Acero	180 – 250	Oro	80
Plomo	16	Bronce	100 – 120
Titanio	107	Hierro	83 – 170
Plata	77	Platino	170
Níquel	210	Estaño	41
Cera de abeja	0,2	Cuarzo(fundido)	73
Hielo (a -2°C)	3	Caucho	0,5
Madera de roble	13	PTFE (Teflon)	0,5
Hormigón	17 – 35	Basalto	80
Granito	10 – 40	Mármol	80
Caliza	10 – 80	Arenisca	2 – 6
Alúmina	370	Diamante	1140

El coeficiente de Poisson ν toma el valor 0 para cuerpos porosos que no se contraen lateralmente, en los cuales lo que se produce es un aumento del tamaño de los poros en la dirección longitudinal. En la tabla 1-2 se dan ejemplos

Tabla 1-2: Coeficientes de Poisson para diversos materiales

Oro	0,42	Plata	0,37	Platino	0,39
Acero	0,28	Aluminio	0,34	Hierro	0,27
Cobre	0,34	Níquel	0,30	Plomo	0,44
Bronce	0,36	Latón	0,35	Titanio	0,34
Estaño	0,33	Madera	0,3 – 0,5	Corcho	0
PTFE (Teflon)	0,46	Cuarzo	0,14	Vidrio normal	0,24
Hormigón	0,19	Granito	0,21	Arenisca	0,1
Caucho blando	0,42	Caucho duro	0,39	Polietileno	0,33

de valores del coeficiente de Poisson para algunos materiales. Estos valores pueden variar de forma importante dependiendo de la muestra concreta utilizada. De este modo, las propiedades elásticas de un material homogéneo e isótropo a tracción o compresión quedan caracterizadas por las dos magnitudes E y ν .

En realidad, las expresiones (1-2) y (1-3) son válidas para tracción o compresión uniaxial en un elemento esbelto. Si se tratara de un elemento masivo, pueden aparecer tensiones adicionales en las direcciones transversales debido a una resistencia transversal a la deformación longitudinal.

1.4.3. Energía elástica de deformación en la tracción o compresión unidimensional.

El trabajo realizado en la deformación elástica de un cuerpo se acumula en forma de energía elástica. Calcularemos esta energía para una barra sometida a tracción. El trabajo elemental δW realizado sobre la barra por una fuerza de tracción \vec{F} que aumenta su longitud en $dL = d[L_0(1 + \epsilon)] = L_0 d\epsilon$ será

$$\delta W = F dL = F L_0 d\epsilon = S \sigma L_0 d\epsilon = S E \epsilon L_0 d\epsilon = \epsilon E V d\epsilon = E V d\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right) = \delta W. \quad (1-4)$$

Integrando esta expresión, se tiene que si la deformación unitaria de la barra varía desde un valor inicial 0 hasta un valor final ϵ se efectuará un trabajo

$$\frac{1}{2} E V \epsilon^2 \quad (1-5)$$

y cada unidad de volumen de la barra deformada por tracción o compresión “almacena” la siguiente energía, que corresponde a la *densidad de energía elástica* por tracción o compresión:

$$\mathcal{U} = \frac{E \epsilon^2}{2} = \frac{1}{2} \epsilon \sigma = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (1-6)$$

Ésta es la energía utilizada por el material para realizar un trabajo contra la fuerza externa, cuando ésta disminuye y el cuerpo va recuperando sus dimensiones originales. No se realiza trabajo como consecuencia de la deformación transversal al ser ésta perpendicular a la fuerza.

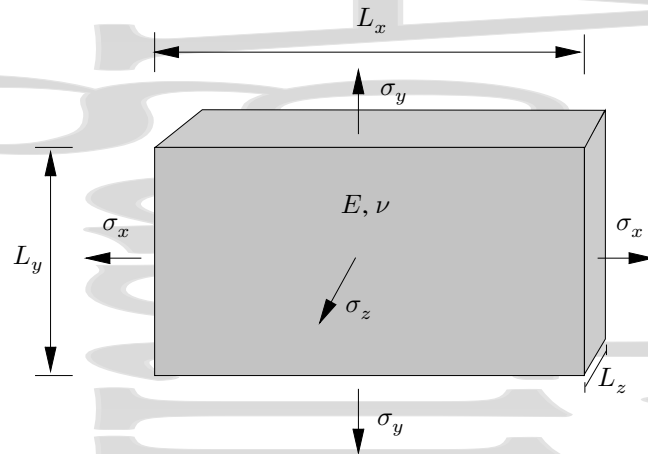


Figura 1-11: Tensiones y deformaciones por tracción y compresión en tres direcciones perpendiculares.

Obsérvese que el módulo de Young debe ser necesariamente positivo también por consideraciones energéticas, ya que la energía del medio debe siempre aumentar durante la deformación, ya que se aleja del equilibrio.

1.4.4. Deformación volumétrica.

Generalizaremos ahora las fórmulas que se han visto para la tracción simple al caso de deformaciones homogéneas cualesquiera en las que tenemos sólo tracciones o compresiones, pero en las tres direcciones. Para ello consideraremos un elemento de un material isotrópico en forma de paralelepípedo rectangular que se estira o comprime por la aplicación de fuerzas en todas sus caras.

Las fuerzas F_x , F_y y F_z serán en general distintas entre sí, y como consecuencia de la aplicación de las mismas, aparecerán unas tensiones elásticas σ_x , σ_y , σ_z que a su vez serán en general distintas entre sí. Tanto para las tensiones en las tres direcciones como para las deformaciones unitarias en las tres direcciones utilizaremos el mismo convenio que ya se utilizó para el caso de tracción y compresión unidimensional

Tracción $\sigma, \epsilon, \mathcal{F}$ positivas

Compresión $\sigma, \epsilon, \mathcal{F}$ negativas

En este caso, se producirán deformaciones unitarias ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z en cada una de las direcciones x, y, z que, en general, serán distintas entre sí. Consideraremos la deformación unitaria resultante en cada una de las direcciones como la superposición del resultado de las tres tracciones o compresiones simples en cada dirección. Así, tendremos que, para ϵ_x , tomando σ_x , σ_y y σ_z como positivas (si alguna es negativa su signo cambia y por tanto su efecto es el contrario), tendremos alargamiento como consecuencia de σ_x y acortamiento como consecuencia de σ_y y σ_z quedando

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} ; \quad \epsilon_{xy} = -\nu \frac{\sigma_y}{E} ; \quad \epsilon_{xz} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (1-7)$$

y análogamente para ϵ_y y ϵ_z . En todas las expresiones se ha utilizado la notación para p. ej ϵ_{yx} de deformación unitaria en la dirección y originada por las fuerzas de tracción o compresión aplicadas en la dirección x . En las condiciones en las que trabajamos se satisface el principio de superposición, por lo que sumando todos los efectos para las deformaciones unitarias en cada una de las tres direcciones se tiene, para un material isotrópico,

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1-8a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1-8b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (1-8c)$$

que es la ley de Hooke extendida a tres dimensiones.

Calculemos ahora la variación del volumen $V = L_x L_y L_z$ para ΔV pequeño. Para ello tomaremos el logaritmo neperiano del volumen $\ln V = \ln L_x + \ln L_y + \ln L_z$ e incrementos (que para pequeños cambios de se comportarán de forma aproximada a las diferenciales) quedando, para la *variación unitaria de volumen, deformación volumétrica, o deformación cúbica* θ :

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (1-9)$$

con

$$V = V_0(1 + \theta). \quad (1-10)$$

Sustituyendo las expresiones para ϵ_x , ϵ_y y ϵ_z se tiene:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1-11)$$

Es importante recalcar que estos resultados son válidos únicamente para deformaciones pequeñas y comportamiento elástico lineal e isótropo, y no son ciertos para grandes deformaciones.

1.4.5. Casos particulares de deformación en tres dimensiones.

Tensión y deformación hidrostáticas.

En el caso de tensión hidrostática todas las tensiones elásticas son iguales $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \equiv \sigma$ (y por tanto $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \equiv \epsilon$) y se tiene:

$$\epsilon = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma \quad (1-12)$$

y la deformación cúbica es:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{K}} \Rightarrow \sigma = \mathcal{K}\theta = \mathcal{K}3\epsilon \quad (1-13)$$

donde \mathcal{K} es el *módulo de compresibilidad*[†] dado por:

$$\mathcal{K} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad [\text{N/m}^2 \equiv \text{Pa}] \quad (1-15)$$

que como se ve, se conoce una vez se conocen el módulo de Young y el coeficiente de Poisson. La expresión (1-13) anterior es el equivalente a la ley de Hooke, pero para la tracción o compresión hidrostática.

Energía elástica en deformación hidrostática. Para obtener la energía de deformación en el caso de deformación hidrostática analizaremos primero la energía de deformación por fuerzas y desplazamientos en cada una de las tres direcciones del espacio en este caso particular en el que se tiene $\theta = 3\epsilon$ y que $\sigma = \mathcal{K}\theta$,

$$\delta W^{1 \text{ dim}} = F dL = \sigma S L_0 d\epsilon = \mathcal{K}\theta V d\epsilon = \frac{1}{3}\mathcal{K}\theta V d\theta = \frac{1}{3}\mathcal{K}V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right). \quad (1-16)$$

La energía total de deformación hidrostática será la suma de las tres contribuciones, resultando en tres veces el valor anterior[‡]

$$\delta W^{3 \text{ dim}} = 3 \times \delta W^{1 \text{ dim}} = \mathcal{K}V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right). \quad (1-18)$$

[†]La inversa del módulo de compresibilidad es el *coeficiente de compresibilidad*

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \quad [\text{Pa}^{-1}] \quad (1-14)$$

[‡]Otra opción habría sido utilizar la expresión

$$\delta W^{\text{sobre}} = \sigma dV = \mathcal{K}\theta V d\theta = \mathcal{K}V d\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \quad (1-17)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$V = V_0(1 + \theta) \Rightarrow dV = V_0 d\theta$$

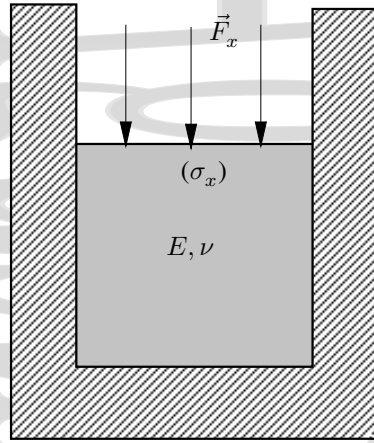


Figura 1-12: Compresión uniaxial aplicada con límites en las paredes. Como consecuencia de la rigidez de las paredes, aparecen fuerzas de reacción en las direcciones y y z (con tensiones σ_y, σ_z).

Así, la densidad de energía (*energía elástica por unidad de volumen*) acumulada en la deformación hidrostática será la *densidad de energía de deformación hidrostática*

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2}\epsilon\sigma = \frac{\mathcal{K}\theta^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\mathcal{K}} = \frac{1}{2}\sigma\theta \quad (1-19)$$

\mathcal{K} debe ser positiva (V aumenta en la tracción hidrostática y disminuye en la compresión) porque si no, los cuerpos serían inestables energéticamente. Esto se ve en la expresión de la energía, donde si $\mathcal{K} < 0$ se tendría que $\mathcal{U} < 0$ y por tanto cuanto mayor fuera la tensión hidrostática menor sería la energía del cuerpo, el cuerpo tendería a pasar a energía menor indefinidamente y para ello se deformaría indefinidamente. Lo anterior implica que

$$\mathcal{K} > 0 \Rightarrow 1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}, \quad (1-20)$$

luego $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Un valor $\nu = \frac{1}{2}$ implicaría un módulo de compresibilidad \mathcal{K} infinito para un módulo de Young finito, es decir, sería un cuerpo absolutamente incompresible hidrostáticamente, aunque esto no impide que pueda cambiar de forma.

Deformación con restricciones: ejemplo de compresión unilateral o uniaxial.

Consideraremos un cuerpo deformable sometido a compresión en una dirección (z) y limitado en las direcciones transversales (x e y) por unas paredes suficientemente rígidas, que permanecen fijas de modo que sus dimensiones transversales no varían apreciablemente.

En estas condiciones aparecen unas reacciones de las paredes que impiden la extensión lateral, dando lugar a tensiones σ_y y σ_z . Como las condiciones de invariabilidad de dimensiones en las direcciones y y z serán $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$ se tiene

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \epsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0, \quad (1-21)$$

de donde se tiene $\sigma_y - \nu\sigma_z = \sigma_z - \nu\sigma_y = \nu\sigma_x$, que tiene por única solución $\sigma_y = \sigma_z$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación $\sigma_y - \nu\sigma_z = \nu\sigma_x$ que se había obtenido anteriormente, se tiene:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1 - \nu}\sigma_x \quad (1-22)$$

quedando la relación entre tensión (compresión) axial y deformación en la misma dirección de la forma

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{E(1 - \nu)}\sigma_x. \quad (1-23)$$

1.5. Superposición de los efectos elásticos y térmicos.

Es bien sabido que, en general, los cuerpos se dilatan al calentarse. El calentamiento da lugar a una variación de las dimensiones del cuerpo que en el caso general debe ser tenida en cuenta en nuestros cálculos. Se sabe que para pequeñas variaciones de tamaño las longitudes varían con la temperatura en la forma

$$L = L_0(1 + \alpha_l \Delta T) \quad (1-24)$$

donde α_l es el *coeficiente de dilatación lineal promedio*, que se define como el aumento relativo de longitud por unidad de aumento de temperatura

$$\alpha_l = \frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1-25)$$

y por tanto sus unidades son $^{\circ}\text{C}^{-1}$ o K^{-1} . Como un cambio en un grado Celsius implica un cambio en un Kelvin es equivalente utilizar ambas unidades.

De forma análoga a como hemos hecho con las deformaciones producidas por fuerzas, podemos definir una deformación unitaria debida únicamente a los efectos térmicos en la forma:

$$\epsilon_{\text{térmica}} = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L_{\text{térmica}}}{L_0} = \alpha_l \Delta T \quad (1-26)$$

Con estas expresiones, al satisfacerse el principio de superposición la deformación unitaria total queda en la forma

$$\epsilon_{\text{total}_x} = \epsilon_{\text{elástica}_x} + \epsilon_{\text{térmica}_x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_l \Delta T \quad (1-27a)$$

$$\epsilon_{\text{total}_y} = \epsilon_{\text{elástica}_y} + \epsilon_{\text{térmica}_y} = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_l \Delta T \quad (1-27b)$$

$$\epsilon_{\text{total}_z} = \epsilon_{\text{elástica}_z} + \epsilon_{\text{térmica}_z} = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_l \Delta T \quad (1-27c)$$

donde solamente se ha considerado el caso de materiales isótropos, en los cuales ni α_l ni E dependen de la dirección. De hecho, en materiales anisótropos no tiene sentido hablar ni de módulo de Young ni de coeficiente de Poisson sino de componentes del tensor de las constantes elásticas (véase el capítulo 4).

Además de tratar el cambio en las longitudes de un elemento al cambiar la temperatura también se pueden analizar de forma similar las dilataciones de superficie y de volumen con pequeñas variaciones de las dimensiones,

$$\begin{aligned} S &= S_0(1 + \alpha_s \Delta T) \\ V &= V_0(1 + \alpha_v \Delta T) \end{aligned} \quad (1-28)$$

con α_s el *coeficiente de dilatación de superficie* y α_v el *coeficiente de dilatación de volumen* o *coeficiente de dilatación cúbica*, que se definen como

$$\alpha_s = \frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta S}{S_0} \quad \alpha_v = \frac{1}{\Delta T} \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1-29)$$

En un sólido isótropo se cumple $\alpha_s = 2\alpha_l$ y $\alpha_v = 3\alpha_l$. De esta forma, la deformación térmica de volumen sería

$$\theta_{\text{térmica}} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V_{\text{térmica}}}{V_0} = \alpha_v \Delta T. \quad (1-30)$$

La deformación cúbica total, que incluye tanto la contribución de deformación elástica (1-11) como la de deformación térmica (1-30), queda entonces como

$$\theta_{\text{total}} = \epsilon_x^{\text{total}} + \epsilon_y^{\text{total}} + \epsilon_z^{\text{total}} = \theta_{\text{elástica}} + \theta_{\text{térmica}} = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha_v \Delta T. \quad (1-31)$$

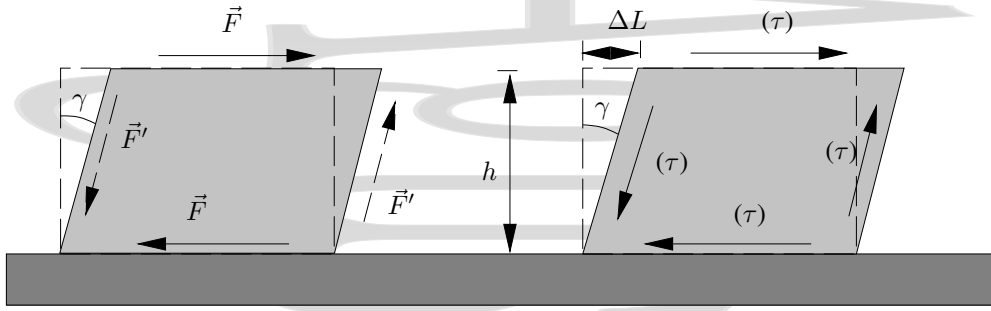


Figura 1-13: Tensiones y deformaciones cortantes. Para que un cuerpo al que se aplican un par de fuerzas cortantes \vec{F} como el de la figura esté en equilibrio mecánico, estas fuerzas dan lugar a otro par de fuerzas en las caras laterales que contrarresta el anterior. El valor de las tensiones elásticas con origen en estas fuerzas debe ser el mismo en los dos pares de caras, para que se mantenga el equilibrio mecánico.

1.6. Deslizamientos o distorsiones.

1.6.1. Concepto de deslizamiento o distorsión. Módulo de rigidez.

Consideraremos ahora un caso particular de deformaciones en las que se mantiene el volumen, pero no la forma del cuerpo, los *deslizamientos* o *distorsiones*. Utilizando la expresión (1-11), la invariancia del volumen implica

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0 \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0, \quad (1-32)$$

teniéndose para el eje x

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x = \frac{1}{2G} \sigma_x = \epsilon_x \Rightarrow \sigma_x = 2G\epsilon_x \quad (1-33a)$$

y ecuaciones análogas para los ejes y y z ,

$$\sigma_y = 2G\epsilon_y, \quad (1-33b)$$

$$\sigma_z = 2G\epsilon_z \quad (1-33c)$$

donde se ha definido el *módulo de rigidez* G como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1-34)$$

Otras denominaciones del módulo de rigidez son *módulo de elasticidad transversal*, *módulo cortante* o *módulo de cizalladura*.

1.6.2. Esfuerzos cortantes (o de cizalladura).

Analicemos un caso particular de deslizamiento (o distorsión), el cortante. Como consecuencia de la aplicación al cuerpo de fuerzas tangenciales a la superficie (en vez de perpendiculares) el paralelepípedo de la figura se deforma inclinándose un ángulo γ (denominado *ángulo cortante* de deslizamiento).

El ángulo γ es pequeño, ya que en todo momento estamos considerando deformaciones muy pequeñas respecto de las dimensiones del cuerpo, por lo que se pueden hacer las aproximaciones $\sin \gamma \simeq \gamma$ y $\tan \gamma \simeq \gamma$ (*¡Que sólo son válidas con γ medida en radianes!*). La ley de Hooke que ya conocíamos pasa a ser para el caso de los cortantes:

$$\tau = G\gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1-35)$$

donde G es el mismo *módulo de rigidez* que acabamos de introducir de forma general para las distorsiones.

El módulo de rigidez caracteriza la dificultad de llevar a cabo una deformación cortante en el material. Asimismo, este módulo de rigidez debe ser una magnitud positiva, ya que en caso contrario a una tensión cortante en una dirección

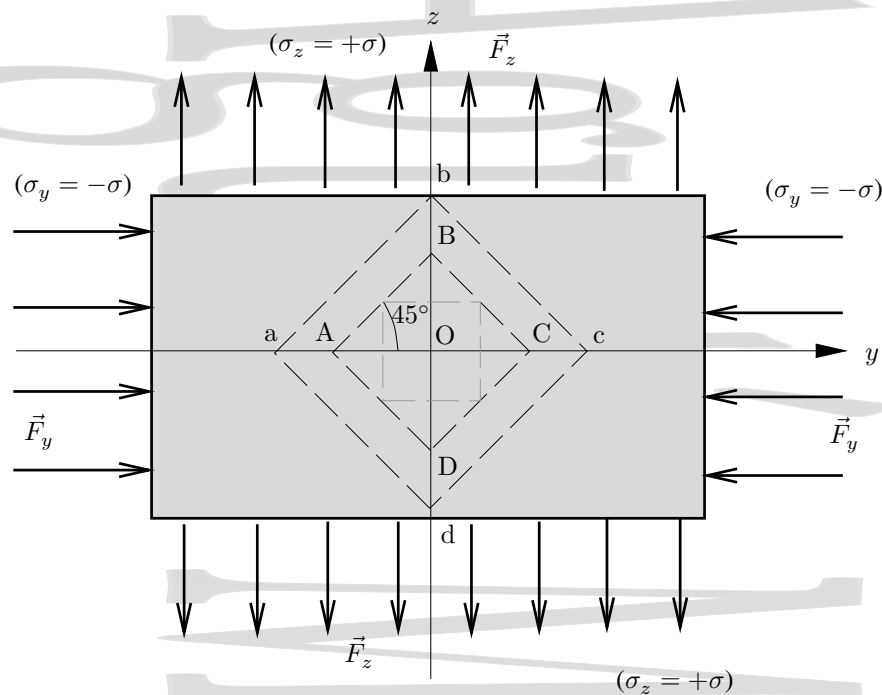


Figura 1-14: Obtención de la Ley de Hooke para los cortantes. Para ello se considerará el estado de tensiones de la figura, donde hay aplicadas en un plano (en la figura el Oyz) fuerzas tales que se producen tensiones σ_y y σ_z de idéntica magnitud, pero distinto signo, estudiándose como se deforma el cuadrado ABCD rotado 45° respecto de los ejes Ox y Oz .

(sin ninguna tensión más aplicada) le correspondería un desplazamiento en la dirección contraria, por lo que se debe cumplir la condición $1 + \nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$, quedando los límites para el coeficiente de Poisson ν , $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$. El caso $\nu = -1$ daría un módulo de rigidez G infinito para un módulo de Young finito, por lo que se tendría en ese caso un cuerpo absolutamente indeformable frente a los cortantes.

Según esto que hemos visto, podrían existir cuerpos con un valor negativo del coeficiente de Poisson (serían cuerpos en los que hay un ensanchamiento lateral como consecuencia de una tracción simple), pero en la naturaleza no se conocen cuerpos así, sólo se ha conseguido en algún caso muy especial con un material de laboratorio[15].

Obtención de la ley de Hooke para el cortante.

En realidad, la ecuación (1-35) no es un resultado tan nuevo como parece, sino que puede obtenerse a partir de la ley de Hooke que ya conocemos (Ec. 1-8). Para ello consideremos un cuerpo en un estado de tensión plano, al que se aplican una tracción en una dirección y una compresión en la otra dirección perpendicular de tal forma que las tensiones asociadas tienen idéntico valor absoluto (pero distinto signo) como se indica en la figura, manteniéndose libre de tensiones las caras perpendiculares a la tercera dirección (x en este caso). Así, se cumplen $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0$ y $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$, por lo que se produce una distorsión en la que se satisfacen las ecuaciones (1-33). En estas condiciones, se cumple

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = -\sigma \\ \sigma_z = \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \epsilon_x = 0 \\ \epsilon_y = -\epsilon \\ \epsilon_z = \epsilon \end{array} \right\} \quad (1-36)$$

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas al volumen asociado al triángulo rectángulo $OB'C'$ que se muestra en la figura, se observa que sobre la superficie asociada a la hipotenusa actuará una fuerza cortante que da una tensión cortante[†] $\tau = \sigma$ que, junto con las que actúan a través de las superficies asociadas a las hipotenusas de los otros tres triángulos dan un cortante completo como el de la figura 1-13. Es decir, en realidad estamos estudiando un cortante.

[†]Para ver que esta relación es exacta, consideremos rigurosamente el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el triángulo. Como la magnitud de ambas tensiones es la misma, pero su signo distinto, no hay deformación en la dirección z . Por ello trabajaremos con fuerzas por unidad de

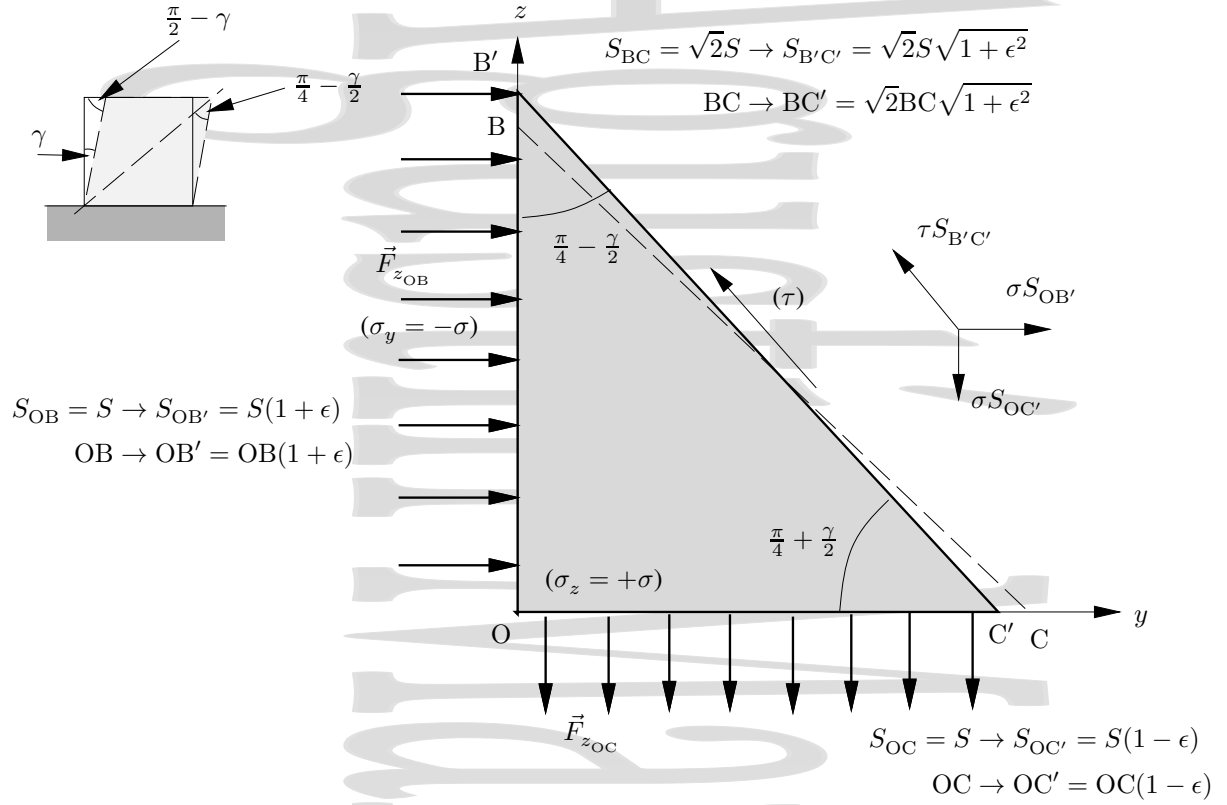


Figura 1-15: Equilibrio de fuerzas en el triángulo de la figura. Como consecuencia de las fuerzas concretas aplicadas, la distancia OB aumenta y la distancia OC disminuye, variando asimismo los ángulos de 45° originales.

Considerando las relaciones trigonométricas que se satisfacen en el triángulo $OB'C'$, se obtiene

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = \frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_z} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right), \quad (1-37)$$

que, mediante la *ley de la tangente* y la aproximación $\tan(\gamma/2) \simeq \gamma/2$, queda

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1+\epsilon_y}{1+\epsilon_z} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}, \quad (1-38)$$

de forma que al comparar las dos expresiones se obtiene que

$$\gamma = 2\epsilon$$

y al tener en cuenta las ecuaciones (1-33) para las distorsiones se tiene finalmente

$$\gamma = 2\epsilon_z = -2\epsilon_y = \frac{\sigma_z}{G} = \frac{\sigma}{G} = \frac{\tau}{G} \Rightarrow \tau = G\gamma. \quad (1-39)$$

Nótese que si hubiéramos aplicado tensiones cortantes τ apropiadas en el cuadrado exterior “abcd” rotado 45° habríamos producido en el cuadrado interior “ABCD” rotado exactamente el mismo estado de tensiones que el par de profundidad, obteniéndose para el cuadrado del módulo de la fuerza sobre la cara $B'C'$, el resultado

$$\tau^2 \overline{B'C'}^2 = \sigma^2 \overline{OB'}^2 + \sigma^2 \overline{OC'}^2 = \sigma^2 \overline{B'C'}^2$$

que da directamente $\sigma = \tau$. Para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, en el triángulo rectángulo $OB'C'$, el cuadrado del lado $B'C'$ es

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2$$

tensiones normales σ y $-\sigma$. Asimismo habríamos producido en el cuadrado interior sin rotar exactamente el mismo estado de tensiones que producen las fuerzas de tracción y compresión originales. Entenderemos esto mejor cuando tratemos el tensor de tensiones en el capítulo 2.

1.6.3. Energía elástica de deformación en el cortante.

Hemos visto que cuando se aplica una fuerza cortante a un material, éste se deforma. Si estamos dentro del límite elástico, al desaparecer la fuerza que produce la deformación, el material recupera sus dimensiones originales. Podemos decir que, análogamente al caso de un muelle que se estira, cuando el material se deforma almacena una energía elástica que empleará posteriormente en recuperar su forma inicial en el caso de que la fuerza cortante haya desaparecido. Calculemos esta energía elástica. El desplazamiento ΔL de una base frente a la otra en función de la tangente del ángulo cortante y de la altura h del prisma viene dado por

$$\tan \gamma = \frac{\Delta L}{h} \rightarrow \Delta L = h \tan \gamma \quad (1-40)$$

Como nos restringimos al caso de pequeñas deformaciones, podremos hacer la aproximación $\tan \gamma \simeq \gamma$ (con γ medida en radianes), quedando la expresión anterior como $\Delta L \simeq h\gamma$. Así, la relación entre una variación infinitesimal dL de la distancia L y una variación infinitesimal $d\gamma$ del ángulo cortante γ viene dada por:

$$dL \simeq h d\gamma \quad (1-41)$$

De este modo, el trabajo elemental δW realizado por una fuerza F al desplazar la superficie superior en dL es:

$$\delta W = F dL = F h d\gamma = \tau S h d\gamma = V G \gamma d\gamma \quad (1-42)$$

que al integrar da, para el trabajo realizado por la fuerza F al deformar el sólido un ángulo γ

$$W = \frac{1}{2} V G \gamma^2 \quad (1-43)$$

Por tanto, la energía elástica almacenada por unidad de volumen en el material durante una deformación cortante es la *densidad de energía de deformación cortante*

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (1-44)$$

Una consecuencia inmediata de esta expresión es que G debe ser una magnitud positiva, ya que si fuera negativa se tendría una inestabilidad energética. Si fuera negativo, al aplicar una tensión cortante de cualquier signo, \mathcal{U} sería negativa, y además, tanto más negativa cuanto mayor fuera τ , es decir, el material estaría más cómodo energéticamente cuanto más deformado estuviera. Esto se ve también en la expresión $\tau = G\gamma$. Por tanto, $G > 0$, y como $G = E/[2(1 + \nu)]$ se tiene

$$1 + \nu > 0 \Rightarrow \nu > -1 \quad (1-45)$$

luego los límites teóricos para el coeficiente de Poisson son:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (1-46)$$

aunque en la realidad, como ya se ha dicho, no se conocen materiales naturales con $\nu < 0$.

1.7. Deformaciones inhomogéneas.

Hasta ahora hemos estudiado solamente los casos en que todos los elementos del cuerpo objeto de estudio están sometidos implícitamente al mismo estado de tensiones. Sin embargo, en muchas ocasiones el cuerpo está sometido a una acción tal que distintos elementos del cuerpo están necesariamente sometidos a distintos estados de tensiones y por tanto tienen distintas deformaciones. En estos casos, se dice que tenemos *deformaciones inhomogéneas*. El estudio general de las deformaciones inhomogéneas es a menudo difícil, pero hay dos casos de deformaciones inhomogéneas simples de gran importancia, la flexión y la torsión.

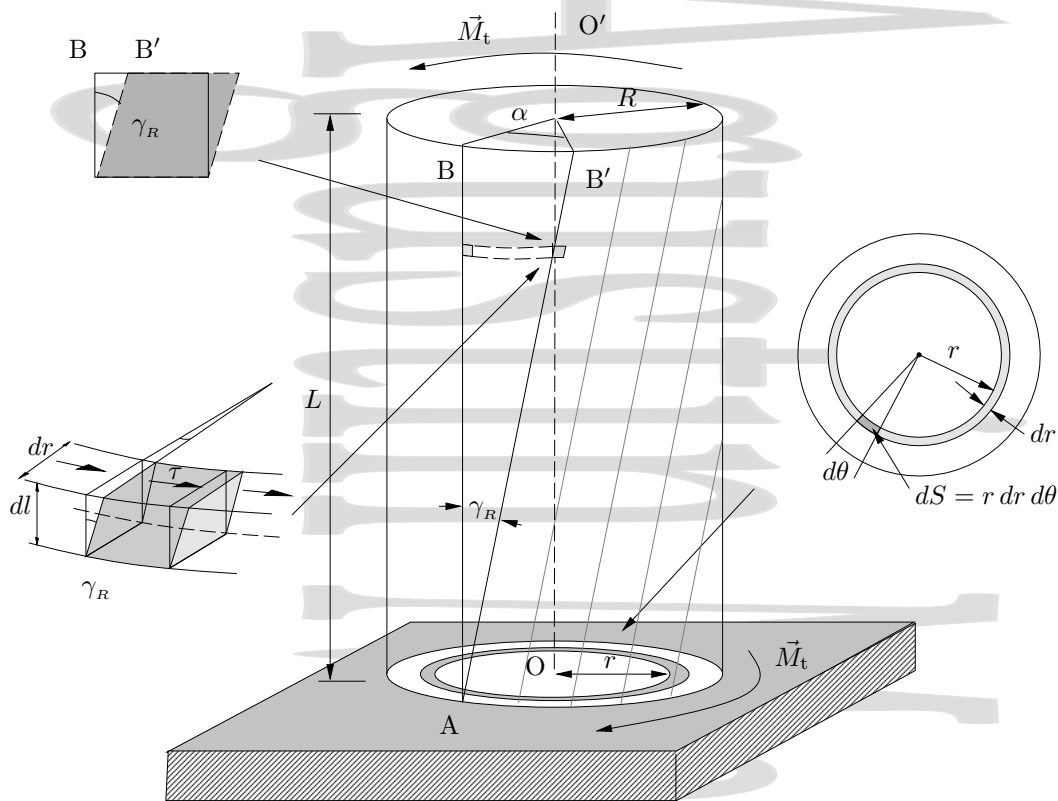


Figura 1-16: Torsión de una barra cilíndrica. En la figura se representa una barra cilíndrica que es torsionada bajo la acción de dos pares de fuerzas que actúan en cada una de las bases, cada uno de ellos dando momentos M_t iguales y opuestos dirigidos a lo largo del eje del cilindro.

1.7.1. Esfuerzos de torsión en cilindros macizos y huecos.

Estudiaremos ahora un caso de deslizamiento puro, pero no homogéneo, el de una barra cilíndrica maciza que tiene uno de sus extremos fijo a un soporte, retorciéndose desde el otro extremo.[†] Así, la barra entera se retuerce, pero las distintas secciones de la barra giran un ángulo distinto respecto de la base fija, dependiendo de la distancia a que se encuentren de ésta. Sobre cada una de las bases del cilindro macizo actúa un sistema de fuerzas de resultante nula y momento neto M_t perpendicular a las bases según el eje de la barra, y de sentido distinto en cada una de ellas. De este modo, a través de cada superficie intermedia paralela a las bases se tiene un esfuerzo de *torsión* caracterizado por el momento de torsión M_t , momento del sistema de fuerzas tangencial que actúa a través de dicha superficie y da lugar a la torsión. En este caso de torsión pura, la magnitud de éste es uniforme a lo largo del cilindro de altura L , de forma que para cada elemento de la misma altura dL se tiene el mismo giro $d\alpha$ entre sus bases si el giro total es α .

Consideremos el cilindro macizo que se muestra en la figura, de radio R y longitud L . Como consecuencia de la deformación, cada una de las generatrices AB se transforma en una línea inclinada AB' produciéndose una deformación cortante. Si las deformaciones son muy pequeñas, es posible aproximar el triángulo real ABB' sobre la pared cilíndrica por un triángulo ABB' en el plano. Así, para un tubo imaginario de espesor despreciable en la superficie lateral exterior del cilindro, se cumple:

$$\overline{BB'} = R\alpha \rightarrow \gamma_R \simeq \tan \gamma_R \simeq \frac{\overline{BB'}}{L} = \frac{R\alpha}{L} \simeq \frac{\overline{BB'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \gamma_R = \frac{R\alpha}{L} \quad (1-47)$$

aproximación que sólo es válida para pequeñas deformaciones y con el ángulo expresado en radianes. Si consideramos ahora una superficie cilíndrica de radio r ($< R$), es decir, en el interior del cilindro, se tendrá que sus elementos de volumen estarán deformados un ángulo cortante $\gamma(r) = r\alpha/L$, menor que el ángulo γ_R que corresponde a los

[†]Nótese que esto es equivalente a una barra retorcida desde ambos lados, simplemente tomamos la referencia del giro en uno de ellos

elementos en la superficie del cilindro. De este modo, distintos elementos de la barra cilíndrica sufren deslizamientos diferentes, menores cuanto más próximo al eje está el elemento.

El valor absoluto de la fuerza que actúa sobre un elemento de superficie horizontal (en el dibujo) de ese tubo diferencial, a una distancia r del eje, de espesor dr y ángulo comprendido $d\theta$ es:

$$dF(r, \theta) = \tau dS = G\gamma dS = G\gamma r dr d\theta \quad (1-48)$$

El momento respecto del eje OO' será, para este elemento diferencial

$$dM_t(r, \theta) = r dF(r, \theta) = G\gamma r^2 dr d\theta = \frac{G\alpha}{L} r^3 dr d\theta \quad (1-49)$$

El momento de las fuerzas que actúan sobre la corona circular de espesor dr que se encuentra a una distancia r del eje del cilindro es entonces:

$$dM_t(r) = \int_0^{2\pi} dM_t(r, \theta) = \frac{2\pi G\alpha}{L} r^3 dr \quad (1-50)$$

quedando para toda la superficie de la base del cilindro macizo (y para cualquier otra sección paralela a la misma) el momento de torsión en función del ángulo de giro y de las dimensiones y características del material

$$M_t = \int_0^R dM_t = \pi G \frac{\alpha}{L} \frac{R^4}{2} = \frac{\pi}{32} \frac{D^4}{L} G\alpha, \quad (1-51)$$

donde $D = 2R$ es el diámetro del cilindro y M_t el momento de las fuerzas que actúan sobre la cara superior del cilindro. Sobre la cara inferior actúa un sistema de fuerzas que da un momento resultante igual al anterior, pero de sentido contrario. El resultado es un esfuerzo de torsión caracterizado por un momento de torsión M_t de las fuerzas tangenciales que actúan a través del plano horizontal. En el caso que hemos estudiado el esfuerzo de torsión es uniforme a través de las distintas superficies paralelas a las bases, aunque los estados de tensiones y deformaciones en sí sean inhomogéneos.

Un cilindro de un material dado será más fácil de deformar por torsión cuanto mayor sea su longitud, y tanto más difícil cuanto mayores sean su diámetro y su módulo de rigidez.

Como hemos visto, esta torsión se transmite entre todos los elementos del cilindro a través de los distintos cortes horizontales, estando todo el cilindro sometido a este esfuerzo de torsión. Recordemos que cuando hablamos de momento de torsión en realidad nos referimos a los pares de momentos que ejerce una parte del sistema sobre la otra a través de la superficie correspondiente.

A partir de la expresión (1-50) se puede obtener también la relación entre el momento de torsión y el ángulo de giro de torsión para un cilindro hueco de radio interior R_1 y radio exterior R_2 . Para ello basta con tomar estos valores como límites inferior y superior de integración en (1-51) quedando

$$M_t = \int_{R_1}^{R_2} dM_t = \pi G \frac{\alpha}{L} \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} = \frac{\pi}{32} \frac{D_2^4 - D_1^4}{L} G\alpha, \quad (1-52)$$

Esfuerzos de torsión en un cilindro en función del momento de inercia polar de la sección plana.

Si escribimos la ecuación (1-49) en función del elemento diferencial de superficie en coordenadas cilíndricas $dS = r dr d\theta$, se tiene

$$dM_t(r, \theta) = r dF(r, \theta) = G\gamma r^2 dr d\theta = \frac{G\alpha}{L} r^2 r dr d\theta = \frac{G\alpha}{L} r^2 dS.$$

Al integrar a toda la superficie el momento de torsión queda como

$$M_t = \int_S dM_t = \frac{G\alpha}{L} \int_S r^2 dS = \frac{G\alpha}{L} I_{OO} \quad (1-53)$$

donde

$$I_{OO} = \int_S r^2 dS \quad (1-54)$$

es el *momento de inercia polar* (o *momento polar de inercia*) de la superficie plana circular respecto del eje perpendicular a la misma que pasa por su centroide.

Para la superficie circular de radio R correspondiente al cilindro macizo, el momento de inercia de dicha sección plana queda

$$I_{OO}^{cm} = \int_S r^2 dS = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \pi R^4 \quad (1-55)$$

que, sustituyendo en (1-53) nos da el mismo resultado (1-51) que ya obtuvimos.

Estos resultados pueden aplicarse de forma casi inmediata al cálculo de la relación entre momento de torsión y deformación (ángulo girado) para un cilindro hueco de radio interior R_1 y radio exterior R_2 . El momento de inercia polar de dicha sección plana del cilindro hueco (ch) será la diferencia entre las de un cilindro (cm₂) macizo de radio R_2 y la de otro cilindro cm₁ macizo de radio R_1

$$I_{OO}^{ch} = I_{OO}^{cm_2} - I_{OO}^{cm_1} = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) \quad (1-56)$$

por lo que la relación entre momento de torsión y ángulo girado será

$$M_t^{ch} = \frac{G\alpha}{L} I_{OO}^{ch} = \frac{1}{2} \frac{\pi G\alpha}{L} (R_2^4 - R_1^4), \quad (1-57)$$

resultado igual a (1-52).

El el apéndice E se dan algunos ejemplos de momentos de inercia para algunas secciones planas sencillas, tanto para ejes contenidos en la superficie como para el eje perpendicular a la misma. Es importante hacer notar que este momento de inercia de superficie no es lo mismo que el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje, definido por

$$I_{OO} = \int d^2 dm$$

con d la distancia de cada elemento infinitesimal al eje considerado. Sin embargo, sí están relacionados, para una densidad superficial masa uniforme el momento de inercia de superficie es el momento de inercia de un cuerpo por unidad de densidad superficial de masa, ambos respecto del mismo eje.

1.7.2. Esfuerzos de flexión.

Flexión y tipos de flexión

Hasta el momento se han visto deformaciones por alargamiento o acortamiento en las que los elementos del sólido paralelos a las fuerzas que actúan conservan su dirección. Otro sistema inhomogéneo de tensiones es la *flexión*, en la que se produce una curvatura bajo la acción de sistemas de fuerzas que dan lugar a pares de momentos netos iguales y opuestos con ejes paralelos (posiblemente junto con otras acciones distintas). La flexión lleva aparejadas deformaciones por alargamiento y acortamiento y dependiendo de como sean éstas de importantes, será más o menos fácil deformar el elemento. Se denomina *flecha* al desplazamiento vertical máximo que sufre la barra.

Podemos clasificar la flexión según el tipo de esfuerzos presentes. Cuando a través de las secciones transversales de un elemento o región del mismo únicamente actúan esfuerzos flectores decimos que se tiene *flexión pura*. En estas condiciones los esfuerzos normal, cortante y de torsión son nulos en todo el elemento (o por lo menos en la región considerada). El hecho de que no haya cortantes en la práctica implica que el esfuerzo flector debe ser además constante en dicho elemento o región (véase la sección dedicada a la relación entre la fuerza cortante y la variación del momento flector en la página 28). Si además de los esfuerzos flectores actúan esfuerzos cortantes tenemos la denominada *flexión simple*. El hecho de que aparezcan cortantes implica que el esfuerzo flector a través de las distintas secciones es variable en dicho elemento o región (véase de nuevo la página 28). Cuando sobre las distintas secciones actúan conjuntamente esfuerzos flectores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales se tiene la denominada *flexión compuesta*.

También podemos clasificar la flexión de acuerdo con la simetría de las fuerzas y deformaciones. Si por ejemplo, consideramos una barra homogénea horizontal con un plano de simetría vertical II, sometida a una serie de fuerzas (peso, reacciones de los apoyos, etc...) simétricas respecto de ese plano veremos que como consecuencia de éstas,

cada fibra de la barra se deforma, pero el plano vertical Π de simetría se sigue manteniendo durante la deformación. En estas condiciones estamos ante un caso de *flexión plana*, como los que se muestran en la figura 1-17. El momento flector neto que aparece en la flexión plana a través de cada sección transversal debe ser perpendicular al plano de simetría. Si no hay simetría respecto de un plano Π se tiene la denominada *flexión desviada*.

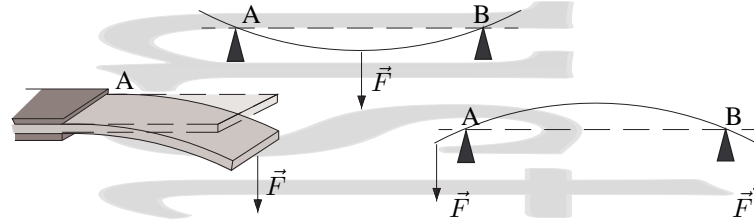


Figura 1-17: Flexión plana. Se produce cuando la deformación por flexión tiene lugar manteniendo un plano de simetría, en el caso de la figura, el plano vertical que pasa por el centro de la pieza.

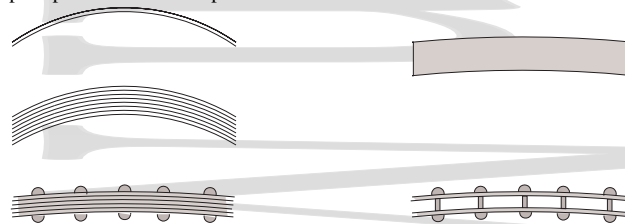


Figura 1-18: La facilidad de deformar por flexión un elemento de un material depende de la forma del mismo. Según sea la pieza concreta a deformar será más fácil o más difícil hacerlo. Por ejemplo, será mucho más fácil deformar por flexión un conjunto de láminas apiladas que ese mismo conjunto de láminas que estén además remachadas.

Como decíamos, la dificultad de la deformación por flexión está relacionada con la magnitud de las deformaciones por acortamiento y alargamiento asociadas a la misma, como se ve mejor en los siguientes ejemplos. Si por ejemplo consideramos el caso de una lámina muy fina, ésta se deformará con facilidad, ya que la variación de longitud en los extremos superior o inferior de la misma es pequeña. Sin embargo, si consideramos el caso de un conjunto de láminas apiladas, pero no unidas entre sí, como un taco de hojas de papel, la deformación será algo más difícil, pero no mucho más, ya que la variación de longitud de cada hoja individual sigue siendo pequeña, y una hoja desliza sobre la otra. Sólo el rozamiento entre las hojas dificulta un poco la flexión. En cambio, si las láminas de esta pila están grapadas entre sí, ya no deslizan unas sobre otras al producirse la deformación, y las hojas más externas por fuera sufren una fuerte tracción que intenta alargarlas, mientras que las hojas más externas por dentro sufren una fuerte compresión que intenta acortarlas. El resultado de todo esto es que resulta mucho más difícil deformar el taco de hojas ahora que antes, ya que ahora las variaciones de longitud de las hojas que se necesitan son mucho más importantes. Análogamente ocurriría para el caso de dos planchas separadas entre sí, pero remachadas, ya que los remaches impiden que deslicen las planchas una respecto de la otra.

Una visión parecida es la que utilizaremos para abordar el problema. Consideraremos el elemento elástico a estudiar como compuesto imaginariamente de una serie de fibras longitudinales. Aunque las distintas fibras se mueven solidariamente, las que se encuentran hacia la concavidad están comprimidas, mientras que las que se encuentran hacia la convexidad se encuentran traccionadas, y sólo las fibras que se encuentran a una determinada altura no se deforman y mantienen su longitud. Cada una de estas fibras estaría sobre la denominada *fibra neutra*. Definiríamos la fibra neutra como el lugar geométrico de los puntos del elemento elástico que no están tensionados en la dirección longitudinal. Todas las fibras que se encuentran situadas más hacia la convexidad se alargan, mientras que las fibras que se encuentran hacia la concavidad se acortan. Para la flexión pura (y también para la flexión simple), esta fibra neutra se encuentra situada a la altura del centro de gravedad de la sección plana de la barra, como se verá en el apartado siguiente.

Estudio analítico del momento flector en flexión pura y plana.

Estudiemos ahora el problema analíticamente, observando cuál es el efecto de la flexión pura sobre una sección del elemento, por supuesto todo en el caso de pequeñas deformaciones (y elemento esbelto) en el que se satisface la ley

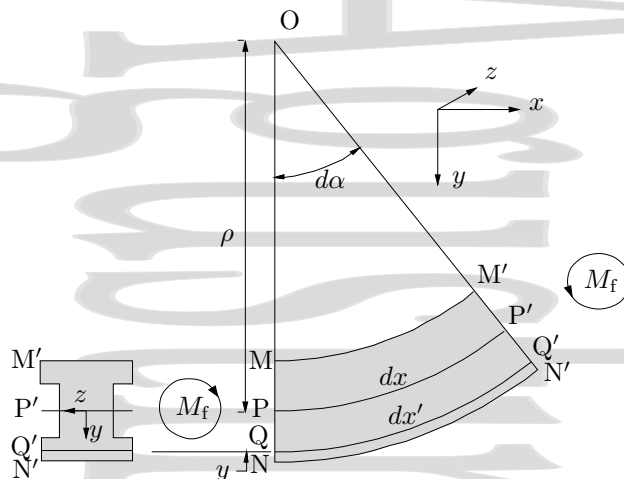


Figura 1-19: Estudio analítico del momento flector en flexión plana pura. Para estudiar analíticamente la relación entre el momento flector y el ángulo flectado en un elemento consideramos un corte del mismo de espesor infinitesimal, como se muestra (de una forma bastante exagerada) en la figura. La fibra neutra está representada por la línea PP' y a través de las caras del elemento en contacto con el resto de la pieza actúa un sistema de fuerzas que da un momento flector M_f . La orientación del sistema de ejes se muestra en la parte derecha de la figura y está elegida según se describe en la figura 1-5 para que los signos sean coherentes con los presentados en la figura 1-4.

de Hooke (1-2) para la tracción y compresión unidimensional y suponiendo que el módulo de Young es el mismo en tracción y compresión.

Además de lo anterior, supondremos que la sección del elemento es simétrica respecto del plano de simetría vertical, de forma que la deformación tiene lugar manteniéndose dicho plano de simetría II. Es decir, lo que estudiaremos en realidad es la flexión plana pura en la que el único momento flector es perpendicular al plano de simetría. En estas condiciones hablamos de *eje neutro* como el corte de la fibra neutra con el plano de simetría.

En estas condiciones, el corte de la figura (1-19) corresponde al plano de simetría vertical II. En dicha figura, MN y M'N' son las proyecciones sobre II de dos secciones del elemento, a distancias x y $x + dx$ de la sección recta original, O es el centro de curvatura del arco de fibra neutra PP', ρ es el radio de curvatura y $d\alpha$ el ángulo POP'.

Consideremos una fibra cualquiera, a una distancia y de la fibra neutra en la sección considerada y a una distancia $\rho + y$ del centro de curvatura O. El ángulo $d\alpha$ será, para ρ y $\rho + y$:

$$d\alpha = \frac{dx}{\rho} \quad d\alpha = \frac{dx'}{\rho + y} \quad (1-58)$$

quedando la variación de longitud de la fibra:

$$dx' - dx = (\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha = yd\alpha \quad (1-59)$$

y por tanto la deformación unitaria ϵ es, para la fibra a una distancia $\rho + y$ de O:

$$\epsilon = \frac{dx' - dx}{dx} = y \frac{d\alpha}{dx} = \frac{y}{\rho} = \epsilon(y) \quad (1-60)$$

Aplicando la Ley de Hooke,[†]

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{y}{\rho} = \sigma(y) \quad (1-61)$$

se tiene que sobre esta fibra actuará una fuerza:

$$dF = \sigma dS = E\epsilon dS = E \frac{y}{\rho} dS \quad (1-62)$$

[†]Nótese que esto es cierto para elementos esbeltos, para elementos masivos hacen falta correcciones debidas a la oposición transversal del material a la deformación.

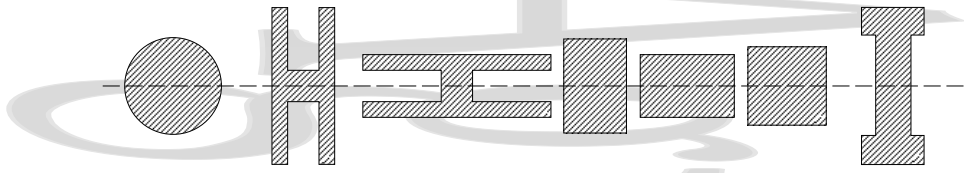


Figura 1-20: Distintas formas para un mismo área de la sección de la barra. A pesar de que en todos los casos el área de la sección es la misma, los momentos de inercia de las secciones planas son distintos y por tanto, el comportamiento frente a la flexión.

donde dS es un elemento de superficie de la fibra, perpendicular al plano estudiado (y por tanto a la fibra). El momento, tomado respecto del eje horizontal que pasa por la fibra neutra, del conjunto de las fuerzas que actúan a través de la sección MN y originan la flexión es el *momento flector* que actúa a través de esa sección plana, y tiene un valor

$$M_f = \int_S y dF = \int_S E \frac{y^2}{\rho} dS = \frac{E}{\rho} I_{zz} = \frac{E\epsilon}{y} I_{zz} = \frac{\sigma}{y} I_{zz} = M_f \quad (1-63)$$

donde I_{zz} es el *momento de inercia de la sección plana* (también conocido como *momento de inercia de segundo orden*, *momento de inercia de área*, *segundo momento de área* o *segundo momento de inercia*) respecto del eje z que pasa por la fibra neutra,

$$I_{zz} = \int_S y^2 dS \quad (1-64)$$

Este momento de inercia depende de la forma y del valor de la sección de la barra, pudiendo ocurrir que para secciones del mismo área, pero de distinta forma (como las que se muestran en la figura 1-20), las resistencias a la flexión sean muy distintas.

De este modo, si se conoce el momento flector en la sección sometida a flexión plana pura, a partir de (1-63) pueden obtenerse las tensiones y deformaciones axiales correspondientes a cualquier punto de dicha sección,

$$\sigma(y) = \frac{M_f}{I_{zz}} y \quad (1-65)$$

$$\epsilon(y) = \frac{M_f}{EI_{zz}} y \quad (1-66)$$

En el caso de flexión plana pura, la fibra neutra estará siempre situada sobre el centro de gravedad de cada sección. Para comprobarlo partiremos del hecho de que a través de cada sección transversal no se transmite una fuerza neta perpendicular a la misma al no haber esfuerzos axiales netos. Por tanto, la fuerza perpendicular total sobre la misma debe ser cero desde cualquier lado, lo que junto con la ecuación (1-62), con y respecto de la fibra neutra, nos da

$$\int_S dF = 0 = \int_S \sigma dS = \frac{E}{\rho} \int_S y dS$$

que directamente da

$$\int_S y dS = 0$$

pero por otra parte esa integral es precisamente $S y_{cg}$, con y_{cg} la coordenada y del centro de gravedad en el sistema de referencia con origen en la fibra neutra. Por tanto $y_{cg} = 0$ es decir, la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección plana en el caso de la flexión pura y en realidad para cada sección estamos tomando y como la componente y respecto del centro de gravedad de la sección.

Por este motivo tomaremos la referencia de y en el centro de gravedad de la sección sobre el plano de simetría. Aunque añadamos otros efectos, utilizaremos el principio de superposición para ver el resultado conjunto de éstos como la superposición de flexión pura plana y de las otras contribuciones, pero manteniendo el origen de coordenadas en el mismo sitio.

Momento flector en flexión plana no pura.

El efecto de los cortantes que aparecen junto al momento flector en flexión simple es el de deformar las superficies inicialmente planas que se han utilizado para el cálculo anterior (Figura 1-19), como se tratará en la página 30. Afortunadamente su efecto en los resultados es despreciable, por lo que lo anterior también puede aplicarse a flexión plana simple.

Si junto a la flexión pura o simple se tiene en la dirección longitudinal una tracción o compresión adicional $\sigma_{xx}^{\text{axil}}$ que preserva la simetría respecto del plano II, la tensión total en la dirección longitudinal será la superposición de ambas

$$\sigma_{xx}^{\text{tot}} = \sigma_{xx}^{\text{pura}} + \sigma_{xx}^{\text{axil}} = \frac{M_{fz}}{I_{zz}} y + \sigma_{xx}^{\text{axil}} = E \epsilon_{xx}^{\text{tot}}. \quad (1-67)$$

En la fibra neutra se cumple $\sigma_{xx}^{\text{tot}} = 0$ quedando, con y tomada respecto del centro de gravedad de la sección, la ecuación de la fibra neutra

$$y_N = -\frac{I_{zz}}{M_{fz}} \sigma_{xx}^{\text{axil}}. \quad (1-68)$$

Si no hay cortantes sobre el plano transversal el momento flector no varía de una a otra sección transversal. Esto implica que la fibra neutra se desplaza la misma distancia desde la superficie que pasa por el centro de gravedad de las secciones para todas las mismas.

Por el contrario, si hay cortantes, el momento flector no es uniforme y el desplazamiento de la fibra neutra respecto de dicho plano depende del valor del momento flector en cada sección.

Momento flector y curva de deformación.

Obtengamos ahora la ecuación de la *curva de deformación* o *curva elástica*. Para ello analizaremos la curva que se muestra en la figura 1-21 y utilizaremos las relaciones $\rho d\theta = dl \simeq \sqrt{dx^2 + dy^2}$ y $\tan \theta = dy/dx$. Si diferenciamos

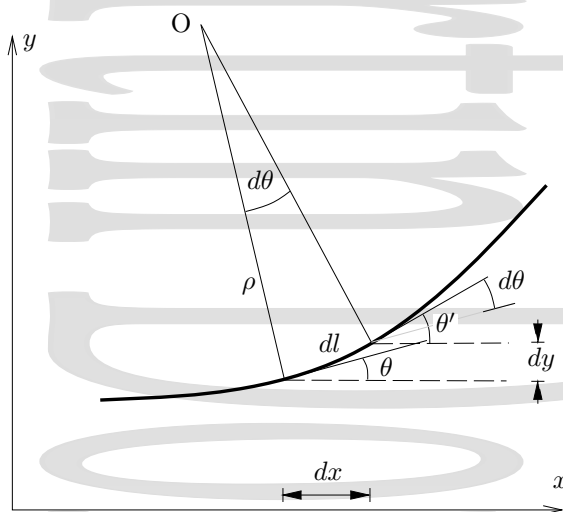


Figura 1-21: Obtención de la ecuación de la curva de deformación o curva elástica.

en ésta última, se tiene

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{d^2 y}{dx^2} dx \Rightarrow d\theta = \cos^2 \theta \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

que nos permite escribir el elemento de arco $dl = \rho d\theta$ como

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \rho d\theta = \rho \cos^2 \theta dx \frac{d^2 y}{dx^2},$$

y obtener

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \cos^2 \theta \frac{d^2 y}{dx^2},$$

que junto con la clásica ecuación trigonométrica

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

nos da la ecuación de la curva de deformación

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1-69)$$

con y medida respecto de la horizontal y con signos $+$ o $-$ dependiendo de la dirección de la curvatura en el sistema de ejes considerado. El signo $+$ corresponde a una curvatura como la que se muestra en la figura 1-21 y el signo $-$ a la contraria.

Para valores pequeños de la pendiente (con nuestra elección de ejes), como ocurre cuando estamos en el límite de pequeñas deformaciones, se cumple $(dy/dx)^2 \ll 1$ y la ecuación anterior puede escribirse de forma aproximada como[†]

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$$

En estas condiciones de pequeña pendiente la ecuación (1-63) queda la *ecuación diferencial de la elástica*

$$M_f = -EI_{zz} \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (1-70)$$

ecuación que nos permite obtener por integración la curva de deformación una vez que conocemos el momento flector $M_f(x)$ e incluimos las condiciones de contorno (nótese que aparecen dos constantes de integración). En esta ecuación hemos puesto el signo explícitamente de modo que todo sea coherente con el convenio de signos descrito previamente en las figuras 1-4 y 1-5 de la sección 1.2. Así, la curvatura positiva que se muestra en la figura 1-21 estaría asociada con un momento flector negativo (parte convexa hacia la parte negativa del eje y).

La primera derivada dy/dx nos da la tangente del ángulo formado por la elástica con la horizontal en cada punto (es decir, la pendiente de la misma en cada punto) y se denomina *ley de giros*.

Flexión bajo carga distribuida.

Obtendremos ahora algunas relaciones importantes que se cumplen cuando la flexión tiene lugar en una zona de carga distribuida, es decir, en una zona en la que no hay aplicadas cargas puntuales que hacen que los esfuerzos cambien bruscamente en la misma.

Para ello, estudiaremos el equilibrio frente a traslación y rotación en un elemento de volumen de la viga como el que se muestra en la figura 1-22, situado en dicha zona de carga distribuida. Este elemento de volumen tiene una anchura dx y el momento flector y la fuerza cortante varían respectivamente en dM_f y dT entre uno y otro extremo. Sobre este elemento actúa una carga distribuida $q(x)$ por unidad de longitud (si solamente es su peso, $q = g \, dm/dx$) que da como resultado una carga $dp = q(x) \, dx$ sobre dicho elemento que consideramos aplicada en el centro del mismo.

La condición de equilibrio frente a la traslación en la dirección vertical nos da

$$T - T - dT - dp = T - T - dT - q(x)dx = 0$$

por lo que debe cumplirse

$$q(x) = -\frac{dT(x)}{dx}. \quad (1-71)$$

Si analizamos la dirección x , cuando en hay una carga distribuida de densidad lineal de carga $q(x)$ el cortante $T(x)$ varía a lo largo del elemento, siendo su tasa de variación frente a x igual a menos la densidad lineal de carga.

[†]Nótese que aquí, y está medida respecto de la horizontal.

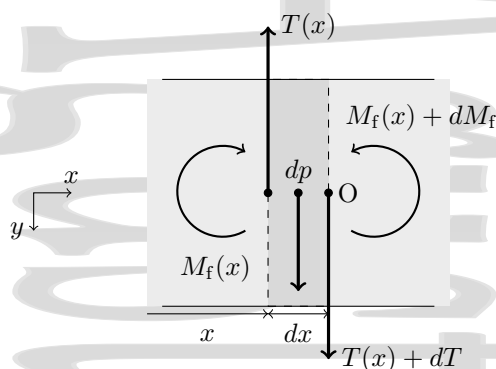


Figura 1-22: Estudio del equilibrio mecánico en una sección de un elemento flexionado sobre la que no actúan cargas puntuales.

Por otra parte, la condición de equilibrio frente a rotación nos da, tomando momentos respecto del punto O

$$M_f + dM_f + \frac{dx}{2} q(x) dx = M_f + T dx \Rightarrow dM_f - T dx = \frac{1}{2} q(x) (dx)^2 \Rightarrow T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx} + \frac{1}{2} q(x) dx.$$

El último término es un infinitésimo de primer orden mientras que el resto de los términos no son infinitesimales, por lo que éste puede despreciarse, quedando

$$T(x) = \frac{dM_f(x)}{dx} \quad (1-72)$$

que muestra claramente que la presencia o no de una fuerza cortante está relacionada con la uniformidad del momento flector a lo largo del eje x .

Distribución de tensiones cortantes en la flexión.

La fuerza cortante neta T en una sección de una viga flexionada viene dada por ecuaciones como las (1-81a) o (1-88a) y se repartiría en dicha sección de forma que la distribución de tensiones cortantes asociada satisfaga la relación

$$T = \int_S \tau dS \quad (1-73)$$

. En primer lugar, comprobemos que esta distribución no puede ser uniforme (su valor sería entonces el cociente entre las fuerzas cortantes y la sección de la viga), sino que debe ser una distribución más compleja con un valor nulo en la superficie exterior. Para ver esto, consideremos un pequeño elemento de volumen como el que se muestra en la figura 1-23a. Para que haya equilibrio frente a la rotación, si hay tensiones cortantes en las caras verticales, deberá haberlas también en las horizontales, de forma que sus momentos se compensen. En concreto, si este elemento de volumen se toma con un lado en la superficie externa, debiera haber una fuerza cortante en ésta, pero no hay fuerzas actuando sobre esa superficie, por lo que a la altura de la superficie externa tampoco habrá fuerzas cortantes en la cara vertical.

Pasemos ahora al cálculo de la distribución de tensiones cortantes. Para ello consideremos el elemento de volumen que se presenta en la figura 1-24, de anchura dx y con caras horizontales una en la parte externa y otra en la parte interna, y dentro de éste la parte situada debajo de la fibra que se encuentra a una distancia y de la fibra neutra. A través de la cara superior de ésta (la cara horizontal interna) se tiene una tensión cortante[†] τ en general distinta de cero. Las fuerzas normales totales que actúan sobre las caras izquierda y derecha del elemento son, respectivamente

$$F_\sigma = \int_y^{h_1} \sigma dS = \int_y^{h_1} \frac{y M_f}{I_{zz}} dS \quad (1-74)$$

$$F_{\sigma+d\sigma} = \int_y^{h_1} (\sigma + d\sigma) dS = \int_y^{h_1} \frac{y (M_f + dM_f)}{I_{zz}} dS \quad (1-75)$$

[†]Nótese que esta tensión cortante τ está medida a una distancia finita $h_1 - y$ de la superficie externa inferior y por tanto no tiene por qué ser cero, al contrario de lo que ocurría en el elemento de volumen infinitesimal de la figura 1-23.

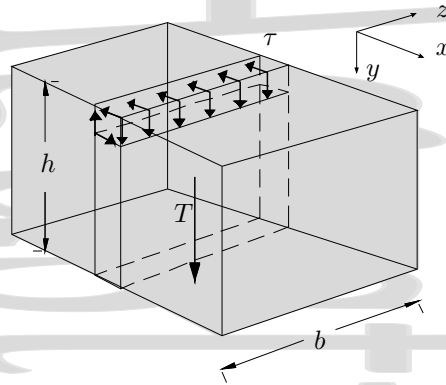


Figura 1–23: Tensiones cortantes en vigas flexionadas. Como la tensión cortante en la superficie exterior debe ser nula si ésta está libre, cuando hay una fuerza cortante neta en la sección debe haber una distribución de tensiones cortantes en la misma.

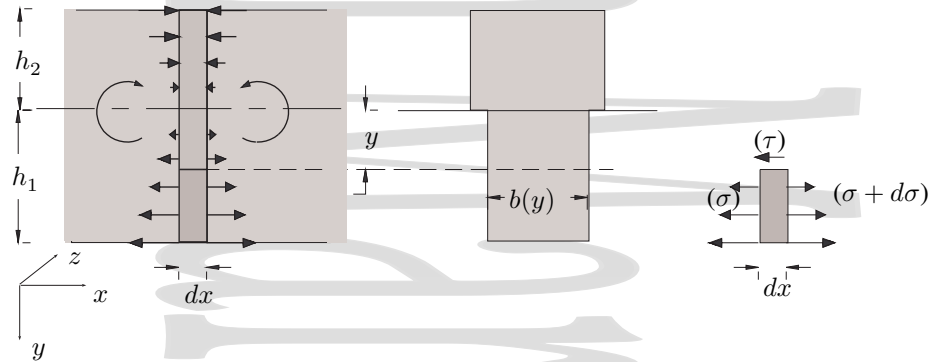


Figura 1–24: Cálculo de las tensiones cortantes en vigas flexionadas. Para ello se consideran las condiciones de equilibrio frente a traslación en la dirección x para una parte de una lámina de espesor infinitesimal dx .

La condición de equilibrio de fuerzas da entonces, en la dirección horizontal

$$\tau b dx = F_{\sigma+d\sigma} - F_{\sigma} = \int_y^{h_1} \frac{y(M_f + dM_f)}{I_{zz}} dS - \int_y^{h_1} \frac{yM_f}{I_{zz}} dS = \int_y^{h_1} \frac{y dM_f}{I_{zz}} dS$$

de donde la distribución de tensiones cortantes queda, teniendo en cuenta que el momento flector se refiere a la sección y por tanto, puede sacarse de la integral,

$$\tau(x, y) = \frac{dM_f}{dx} \frac{1}{b I_{zz}} \int_y^{h_1} y dS = \frac{T(x)}{b I_{zz}} \int_y^{h_1} y dS = \frac{T(x)}{b I_{zz}} M_{\text{est}}. \quad (1-76)$$

La integral

$$M_{\text{est}} = \int_y^{h_1} y dS = y_{y_{h_1 \text{CG}}} S_{y_{h_1 \text{CG}}} \quad (1-77)$$

representa el *momento estático*, *primer momento de área*, *momento de inercia de primer orden* o *momento de primer orden de la superficie*, respecto de la fibra de la sección transversal que contiene a su centro de gravedad, de la porción sombreada en gris más oscuro (y “extraída” en la parte derecha) de la figura 1–24.

Para el caso concreto de una viga de sección rectangular de anchura b y altura h el momento de inercia de la sección plana es $I_{zz} = bh^3/12$, las alturas h_1 y h_2 son ambas $h/2$ y la distribución de tensiones cortantes queda

$$\tau(x, y) = \frac{12T(x)}{b^2 h^3} \int_y^{h_1} y b dy = \frac{6T(x)}{b h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (1-78)$$

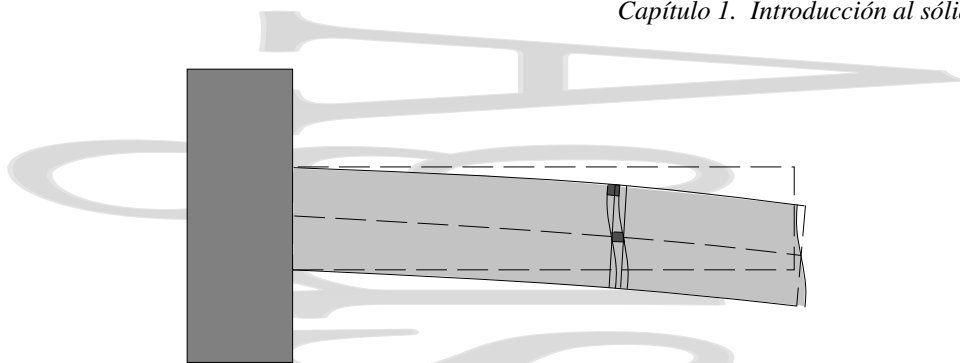


Figura 1–25: Al aparecer una distribución de tensiones cortantes en las secciones, éstas no se mantienen planas, sino que se alabean.

que es una parábola que se hace cero para $y = \pm \frac{1}{2}h$ y tiene un valor máximo $3T/(2bh)$ para $y = 0$, y además debe cumplir (1–73). En la expresión anterior está incluida la dependencia en l a través de la fuerza cortante $T(l)$. La consecuencia de esta distribución de tensiones cortantes es que las secciones que originalmente eran planas se alabean. Desde un punto de vista riguroso esto hace que el estudio analítico que hemos hecho de las tensiones normales durante la deformación por flexión plana deje de ser válido, ya que estaba basado en que las secciones se mantenían planas durante la deformación. Afortunadamente, el efecto de tener en cuenta este alabeo en el cálculo de las tensiones normales es muy pequeño y por tanto, aunque las secciones realmente se alabeen, se realizan los cálculos de las tensiones normales como si estas superficies se mantuvieran planas durante la deformación. Esta suposición se denomina *Hipótesis de Navier* y es también una de las hipótesis habituales en la Resistencia de Materiales. Asimismo, si la sección es originalmente rectangular y el elemento no es fino, se tiene que ésta deja de ser rectangular durante la deformación y sus picos se redondean, como se ve fácilmente deformando una goma de borrar prismática y no fina. Esto hace que la validez de nuestros cálculos será peor en esas condiciones y mejor cuando estamos en las condiciones de barras o láminas finas.

En un estudio más riguroso del problema, también hay que tener en cuenta las tensiones normales que aparecen en la dirección vertical, debidas al peso de la viga o a la carga que actúa sobre la misma, cuyo valor se muestra en el apéndice D. Afortunadamente, en situaciones normales de carga en elementos esbeltos éstas son muy pequeñas.

Ejemplos de flexión en vigas.

Veamos ahora algunos ejemplos de cálculos de las distribuciones de momentos flectores $M_f(x)$ y de fuerzas cortantes $T(x)$ a través de las secciones transversales de vigas sometidas a distintas acciones.

Viga biapoyada de sección uniforme sometida a su peso. Consideremos en primer lugar el caso de una viga biapoyada, con una masa total M y una longitud L , como la que se muestra en la figura 1–26. En estas condiciones el peso de la viga está repartido por igual entre los dos apoyos, con una reacción vertical en cada uno

$$R_1 = R_2 = \frac{Mg}{2}. \quad (1-79)$$

Consideremos una sección imaginaria de la misma a una distancia x del apoyo izquierdo **1**, y a una distancia l del apoyo derecho **2**. Si consideramos el elemento de volumen a la izquierda de la sección (entre esta sección y el apoyo **1**), cuya masa es $m = Mx/L$, el equilibrio de fuerzas establece que debe cumplirse

$$R_1 = mg + T,$$

lo que nos permite obtener la fuerza cortante T :

$$T = R_1 - mg \quad (1-80)$$

Así, la fuerza cortante total a través de la sección considerada queda, en función de x o de l ,

$$T(x) = g \left(\frac{M}{2} - m \right) = \frac{Mg}{L} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (1-81a)$$

$$T(l) = \frac{Mg}{L} \left(l - \frac{L}{2} \right). \quad (1-81b)$$

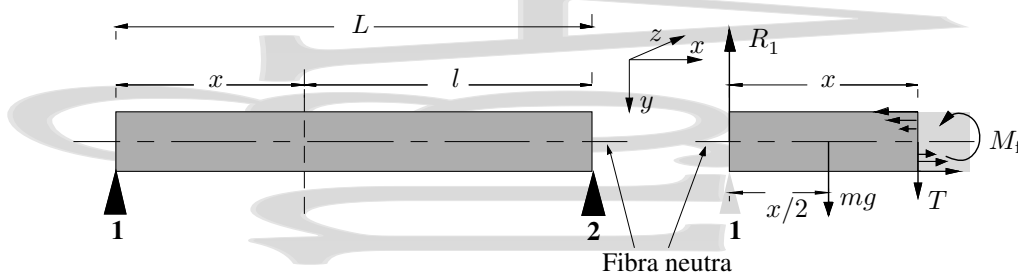


Figura 1-26: Momento flector en una viga biapoyada que pesa. Tomamos la parte de la viga entre el apoyo izquierdo y la sección situada a una distancia x del apoyo izquierdo o a una distancia l del apoyo derecho, y sustituimos la acción del material fuera de este volumen por el sistema de fuerzas equivalente. El sistema de ejes está orientado como se muestra en la figura y su origen está situado en la sección izquierda de la viga sobre el centroide de la misma.

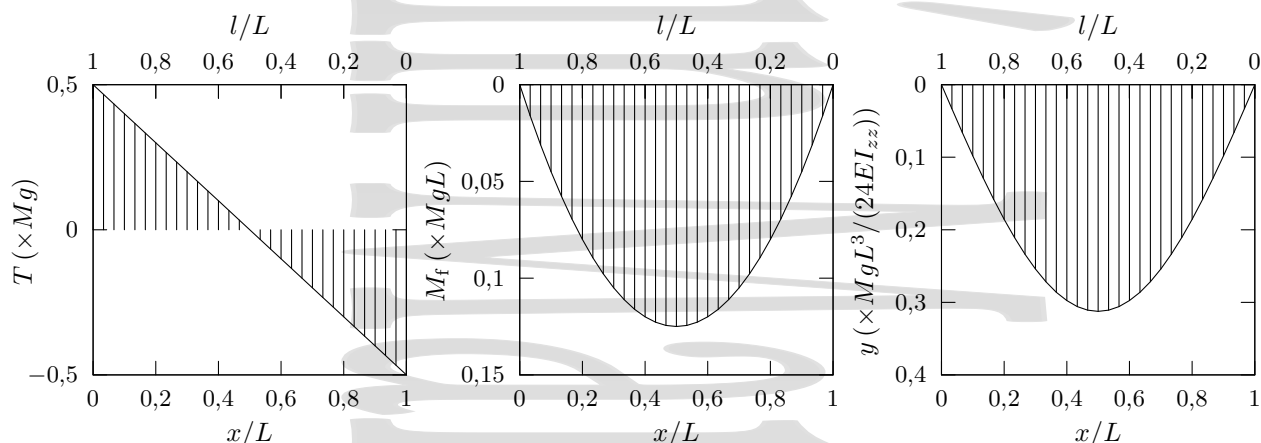


Figura 1-27: Diagramas de fuerza cortante T , momento flector M_f y deflexión y para una viga biapoyada sometida únicamente a su propio peso, representados en función de la distancia x al apoyo izquierdo o de la distancia l al apoyo derecho. Los signos del momento flector, de la fuerza cortante y de la deflexión están conformes con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

Por otra parte, si tomamos momentos respecto del punto de aplicación de T , para que haya equilibrio frente a la rotación deberá cumplirse:

$$M_f = xR_1 - \frac{x}{2}mg \quad (1-82)$$

donde la fuerza R_1 sobre el apoyo 1 es la mitad $Mg/2$ del peso total de la viga. Si además tenemos en cuenta las ecuaciones (1-63) y (1-60), la ecuación (1-82) queda

$$M_f(x) = \frac{1}{2} \frac{Mg}{L} x(L-x) = \frac{E\epsilon}{y} I_{zz} = \frac{\sigma}{y} I_{zz}, \quad (1-83)$$

lo que nos permite escribir la deformación en función de la distancia x al apoyo y de la distancia y a la fibra neutra y obtener, a través de la ley de Hooke $\sigma = E\epsilon$, la expresión de las tensiones normales en función de y y de x (o de y y de l). En función de l , la distribución de momentos flectores habría quedado

$$M_f(l) = \frac{1}{2} \frac{Mg}{L} (L-l)l. \quad (1-84)$$

Las expresiones de $T(x)$ y $M_f(x)$ que acabamos de obtener están de acuerdo con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2. En este caso particular, el momento flector tiene una dependencia parabólica en x y es nulo en los apoyos y máximo en el centro.

Como el momento flector $M_f(x)$ para este caso viene dado por (1-83) podemos, mediante sucesivas integraciones a partir de la ecuación diferencial (1-69), obtener la ley de giros y la ecuación de la elástica. La primera integración da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Mg}{12EI_{zz}} [2x^3 - 3Lx^2] + A_1$$

en función de una constante de integración A_1 . Para obtener esta constante de integración A_1 , observemos que en el centro de la viga la pendiente debe ser nula por la simetría del problema, quedando

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L/2} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{Mg}{2EI_{zz}} \frac{L^2}{12}.$$

Sustituyendo, se obtiene la expresión de la ley de giros

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Mg}{24EI_{zz}} [4x^3 - 6Lx^2 + L^3]. \quad (1-85)$$

Integrando de nuevo, se obtiene

$$y(x) = \frac{Mg}{24EI_{zz}} [x^4 - 2Lx^3 + L^3x] + A_2$$

en función de una nueva constante de integración A_2 . Para obtener el valor de esta constante de integración A_2 no hay más que observar que el desplazamiento vertical es nulo en los apoyos, por lo que se cumple tanto $y(0) = 0$ como $y(L) = 0$. Con cualquiera de estas dos condiciones de contorno se obtiene que la constante de integración es nula, $A_2 = 0$. La ecuación de la elástica para este caso queda

$$y(x) = \frac{Mg}{24EI_{zz}} [x^4 - 2Lx^3 + L^3x]. \quad (1-86)$$

El máximo desplazamiento respecto de la posición vertical (flecha) tiene lugar en el centro de la viga ($x = L/2$) y su valor es

$$y_{\text{máx}} = y(L/2) = \frac{5}{16} \frac{MgL^3}{24EI_{zz}}. \quad (1-87)$$

Como entre los dos apoyos se tiene una región de carga distribuida, las expresiones (1-81a) y (1-83) para las fuerzas cortantes y los momentos flectores también se pueden obtener a partir de las relaciones (1-71) y (1-72). En efecto, al ser la carga por unidad de longitud $p = Mg/L$ uniforme, integrando (1-71) se obtiene

$$T(x) = - \int p(x) dx = -px + A_1 = -\frac{Mg}{L}x + A_1.$$

donde la constante de integración A_1 se obtiene a partir de las condiciones $T(0) = R_1 = Mg/2$ o $T(L) = -R_2 = -Mg/2$, quedando $A_1 = Mg/2$. Sustituyendo este valor de A_1 , se obtiene la ecuación (1-81a). Asimismo, al integrar esta ecuación se obtiene

$$M_f(x) = \int T(x) dx = \frac{1}{2} \frac{Mg}{L} (Lx - x^2) + A_2$$

que con la condición en los límites $M_f(0) = 0$ o con la $M_f(L) = 0$ da un valor $A_2 = 0$ para la constante de integración y al sustituir se obtiene la ecuación (1-83).

Viga empotrada de sección uniforme sometida a su peso. Si en vez de ser biapoyada, esa misma viga estuviera empotrada en **1** (Fig. 1-28) la fuerza vertical R_1 de reacción en el empotramiento sería Mg , y el momento flector en éste $M_1 = \frac{1}{2}LMg$.

La condición de equilibrio de fuerzas en la dirección vertical nos da el valor de la fuerza cortante en la sección $T = R_1 - mg = Mg - mg$. Sustituyendo el valor de m se obtiene, en función de x o de l ,

$$T(x) = Mg \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{Mg}{L} (L - x) \quad (1-88a)$$

$$T(l) = \frac{Mg}{L} l \quad (1-88b)$$

Tomando momentos respecto del mismo punto que antes tendríamos

$$M_1 + \frac{x}{2}mg = -M_f + xMg$$

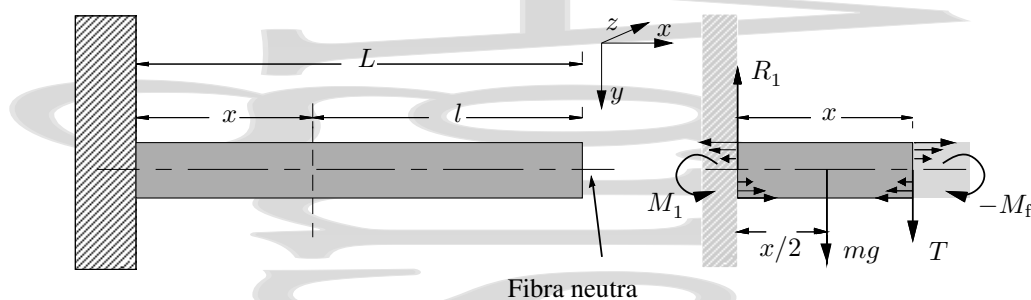


Figura 1-28: Fuerza cortante y momento flector en una viga que pesa empotrada en uno de sus extremos. Para su estudio consideraremos el elemento comprendido entre el empotramiento y una sección que se encuentra a una distancia x del empotramiento y a una distancia l del extremo derecho, sustituyéndose la acción del resto del material por el sistema de fuerzas equivalente. El sistema de ejes está orientado como se muestra en la figura y su origen está situado en la sección izquierda de la viga sobre el centroide de la misma.

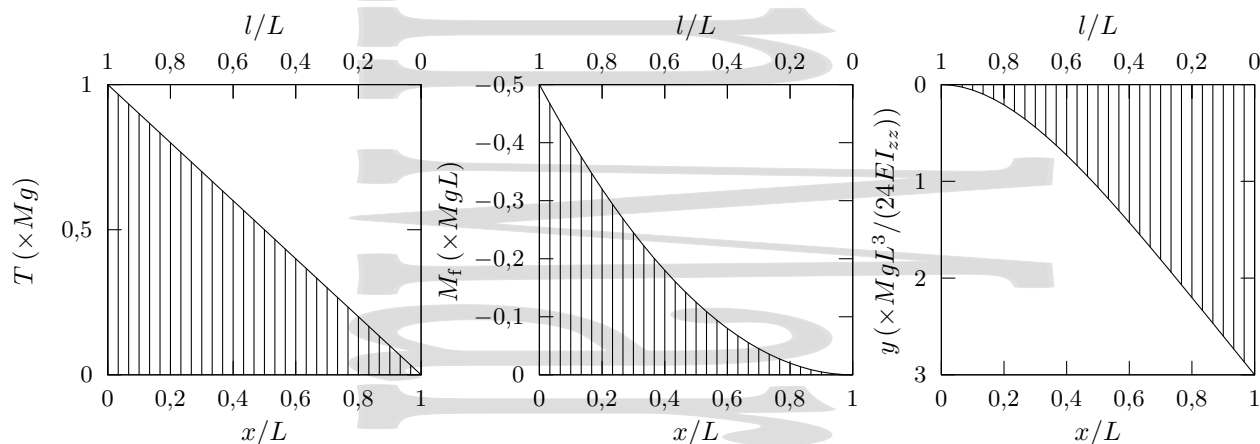


Figura 1-29: Diagramas de fuerzas cortantes T , momentos flectores M_f y deflexión y para una viga empotrada en uno de sus extremos representados en función de la distancia x al empotramiento y de la distancia l al extremo libre. Tanto el signo del momento flector como los de la fuerza cortante y la deflexión están conformes con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

Si agrupamos términos y sustituimos el valor de m , esta ecuación queda:

$$M_f(x) = -\frac{Mg}{2L} [L^2 + x^2 - 2Lx] = -\frac{Mg}{2L} (L - x)^2 = \frac{E\epsilon}{y} I_{zz} = \frac{\sigma}{y} I_{zz} \quad (1-89)$$

con $T(x)$ y $M_f(x)$ de acuerdo con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2. En función de l se tendría, para el momento flector,

$$M_f(l) = -\frac{Mg}{2L} l^2. \quad (1-90)$$

En este caso habría resultado más sencillo tomar el elemento de volumen en la parte exterior, pero el resultado es el mismo. Análogamente al caso anterior, de aquí se obtendría la deformación normal en cada punto de la viga y , a través de la ley de Hooke, la tensión normal en ese punto.

Al igual que en el ejemplo anterior podemos en éste, a partir de la expresión (1-89) para el momento flector $M_f(x)$, obtener mediante doble integración a partir de (1-69) la ecuación de la curva elástica. La primera integración nos daría

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Mg}{2LEI_{zz}} \left[\frac{x^3}{3} - Lx^2 + L^2x \right] + A_1$$

en función de una constante de integración A_1 . Como en este caso la pendiente en el origen es nula $[dy/dx]_{x=0} = 0$, la constante de integración también lo debe ser ($A_1 = 0$), quedando la expresión de la ley de giros

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Mg}{6LEI_{zz}} [x^3 - 3Lx^2 + 3L^2x]. \quad (1-91)$$

La segunda integración nos da

$$y(x) = \frac{Mg}{6LEI_{zz}} \left[\frac{1}{4}x^4 - Lx^3 \frac{3}{2}L^2x^2 \right] + A_2 = \frac{Mg}{24LEI_{zz}} [x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2] + A_2$$

en función de una nueva constante de integración A_2 . Como en el origen (que coincide con el empotramiento) el desplazamiento vertical es nulo, la constante de integración también lo debe ser ($A_2 = 0$). Así, para este caso particular la ecuación de la elástica queda

$$y(x) = \frac{Mg}{24LEI_{zz}} [x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2]. \quad (1-92)$$

El máximo desplazamiento respecto de la posición vertical (flecha) tiene lugar en el extremo libre de la viga ($x = L$) y su valor es

$$y_{\text{máx}} = y(L) = 3 \frac{MgL^3}{24EI_{zz}}. \quad (1-93)$$

Debe recordarse que en las expresiones (1-86) y (1-92) la parte positiva del eje y apunta hacia abajo, de acuerdo con nuestro criterio de elección de ejes y de signos de los momentos flectores.

Al igual que en el caso de la viga biapoyada, como fuera del empotramiento se tiene una región de carga distribuida, las expresiones (1-88a) y (1-89) para las fuerzas cortantes y los momentos flectores también se pueden obtener a partir de las relaciones (1-71) y (1-72). En efecto, al ser la carga por unidad de longitud $p = Mg/L$ uniforme, integrando (1-71) se obtiene

$$T(x) = - \int p(x)dx = -px + A_1 = -\frac{Mg}{L}x + A_1.$$

donde la constante de integración A_1 se obtiene a partir de las condiciones $T(0) = R_1 = Mg$ o $T(L) = 0$, quedando $A_1 = Mg$. Sustituyendo este valor de A_1 , se obtiene la ecuación (1-88a). Asimismo, al integrar esta ecuación se obtiene

$$M_f(x) = \int T(x)dx = \frac{Mg}{L} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + A_2$$

que con la condición en los límites $M_f(0) = MgL/2$ o con la $M_f(L) = 0$ da para la constante de integración $A_2 = -MgL/2$, que al sustituir da la ecuación (1-89).

Vigas sometidas a cargas uniformemente distribuidas. Si además de su peso hubiera una carga distribuida uniformemente sobre la viga habría que sustituir Mg/L por la carga total por unidad de longitud en la viga, donde ya estarían incluidos tanto el peso como la carga extra. Si en vez de carga uniformemente distribuida, o además de ella, hubiera cargas puntuales en ciertas posiciones, habría que incluirlas en las expresiones de los momentos y de las fuerzas cortantes, en un proceso similar al anterior, obteniéndose una serie de expresiones válidas cada una de ellas en un cierto rango. En este caso sería necesario rehacer todos los cálculos en los distintos rangos entre las distintas cargas puntuales, como se hace en el siguiente ejemplo.

Viga empotrada sometida a carga uniformemente distribuida y a cargas puntuales. Consideremos ahora el caso que se presenta en la figura 1-30, en el que se tiene una viga de longitud L sometida por un lado a una carga distribuida uniformemente, y por otro lado a un par de cargas puntuales P_1 y P_2 situadas en x_1 y L . Está claro que en este caso tendremos dos regiones de comportamiento diferenciado, dependiendo de si estamos observando una sección antes de la carga puntual P_1 o entre las dos cargas puntuales.

Comencemos calculando el valor de la fuerza R_1 de reacción en el empotramiento y el momento M_1 en el mismo. La fuerza R_1 en el empotramiento será

$$R_1 = Mg + P_1 + P_2 \quad (1-94)$$

y el momento en el empotramiento

$$M_1 = \frac{L}{2}Mg + x_1P_1 + LP_2 \quad (1-95)$$

y veamos qué ocurre en cada región:

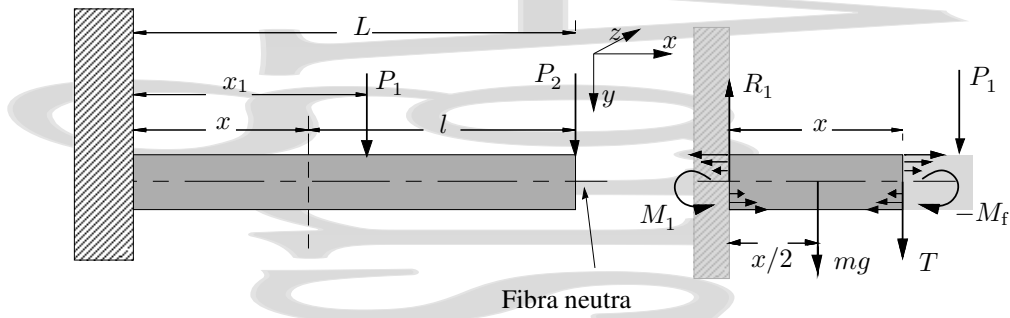


Figura 1-30: Fuerza cortante y momento flector para de una viga empotrada que pesa y está además sometida a dos cargas puntuales P_1 y P_2 . El sistema de ejes está orientado como se muestra en la figura y su origen está situado en la sección izquierda de la viga sobre el centroide de la misma.

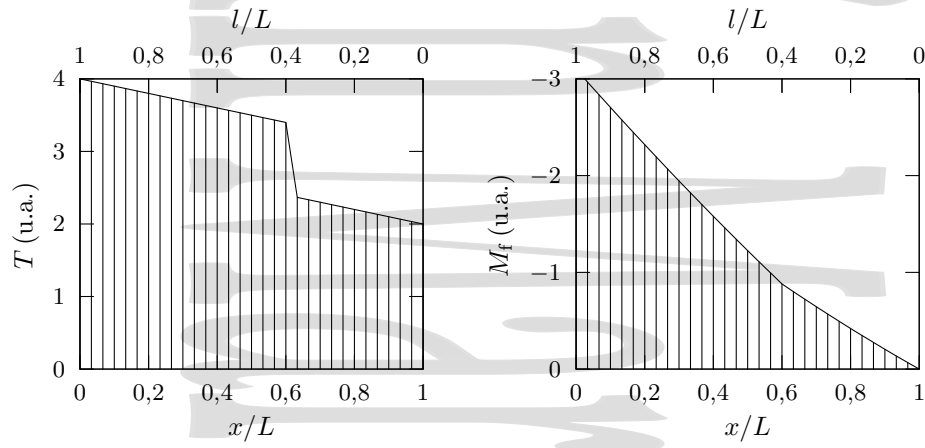


Figura 1-31: Diagramas de fuerzas cortantes T y momentos flectores M_f para una viga con peso empotrada en uno de sus extremos y sobre la que actúan además dos cargas puntuales P_1 y P_2 , en función de la distancia al empotramiento l y de la distancia x al extremo libre. Como P_1 y P_2 dependen de cada caso los valores se dan en unidades arbitrarias (u.a.). Tanto el signo del momento flector como el de la fuerza cortante están conformes con el convenio de signos que hemos definido en la sección 1.2.

$$0 \leq x \leq x_1$$

Considerando la sección que se muestra en la parte derecha de la figura 1-30, la condición de equilibrio de fuerzas aplicada a esa sección da

$$R_1 = Mg + P_1 + P_2 = mg + T = \frac{x}{L}Mg + T$$

de donde se obtiene la fuerza cortante en ese intervalo

$$T(x) = (L - x) \frac{Mg}{L} + P_1 + P_2 = l \frac{Mg}{L} + P_1 + P_2 \quad (1-96)$$

Para obtener el momento flector se tiene la ecuación de equilibrio de momentos,

$$M_1 = \frac{L}{2}Mg + x_1P_1 + LP_2 = \frac{x}{2}mg + xT - M_f$$

que sustituyendo $m = Mx/L$ y $T(x)$ por el valor anterior nos da

$$M_f(x) = (x - x_1)P_1 + (x - L)P_2 - \frac{Mg}{2L}(L - x)^2 \quad (1-97)$$

$$x_1 \leq x \leq L$$

En este caso la condición de equilibrio de fuerzas para el volumen de control correspondiente es

$$R_1 = Mg + P_1 + P_2 = mg + T + P_1 = \frac{x}{L}Mg + T + P_1$$

quedando la fuerza cortante

$$T(x) = (L - x)\frac{Mg}{L} + P_2, \quad (1-98)$$

mientras que la condición de equilibrio de momentos es

$$M_1 = \frac{L}{2}Mg + x_1P_1 + LP_2 = \frac{x}{2}mg + xT + x_1P_1 - M_f$$

quedando el momento flector

$$M_f(x) = (x - L)P_2 - \frac{Mg}{2L}(L - x)^2 \quad (1-99)$$

La obtención de las expresiones para la ley de giros y la ecuación de la elástica en un caso como éste, en el que hay cargas puntuales, es más complicada. Para ello hay que trabajar por zonas (como a la hora de obtener las distribuciones del momento flector y del cortante)), empezando a trabajar en las zonas en las que conocemos las condiciones de contorno, a partir de la expresión del momento flector correspondiente, y luego seguir por las zonas adyacentes.

En todo este proceso es necesario empalmar adecuadamente las expresiones obtenidas para las distintas regiones ajustando los valores de las constantes de integración, ya que tanto la expresión de la ley de giros como la de la ecuación de la elástica deben venir dadas por funciones continuas. Una discontinuidad en cualquiera de ellas no es compatible con una deformación elástica. Resumiendo,

- Si conocemos el valor de la pendiente de la elástica en algún punto de la viga, debemos empezar a calcular la ley de giros en el tramo que contiene dicho punto, a partir de la expresión para el momento flector obtenida para ese tramo y de la relación (1-70) entre la curvatura de la elástica con éste, particularizada al sistema de ejes correspondiente. La constante de integración que nos aparece se obtendría a partir del valor conocido de la pendiente de la elástica en un punto del tramo.

Una vez conocemos la ley de giros en ese tramo, continuamos con los tramos adyacentes, utilizando como condición de contorno el valor dado por la ley de giros en el punto de unión de los tramos, y así sucesivamente.

- Una vez obtenida la expresión completa de la ley de giros repetimos el proceso con una nueva integración para obtener la ecuación de la elástica, comenzando por el tramo en el que conocemos el valor de la misma.

Al igual que para la obtención de la ley de giros, luego continuamos con los tramos adyacentes utilizando como valor conocido de la elástica el valor que nos da la expresión ya obtenida para el punto de separación entre las secciones.

Capítulo 2

El tensor de tensiones

2.1. Introducción

En el primer tema se ha visto un estudio fenomenológico macroscópico del comportamiento de un material deformable isótropo frente a la acción de un sistema de fuerzas que le tensionan y deforman. Para ello se ha definido la tensión elástica a través de una superficie mediante una fuerza macroscópica por unidad de superficie a través de la superficie y la deformación elástica como la variación relativa de la longitud, de forma también macroscópica.

Sin embargo, las magnitudes macroscópicas anteriormente definidas a menudo no reflejan fielmente la situación que tiene lugar en la escala microscópica. En general, la tensión o fuerza por unidad de superficie dependerá del punto concreto en el que se estudia, ya que la mayor parte de los estados de tensiones reales son inhomogéneos. Por tanto, para describir el estado de tensiones en un punto del material es necesario estudiar las tensiones a través de elementos diferenciales de superficie alrededor del punto objeto de estudio. Si se toman estos elementos de superficie según las diversas caras perpendiculares a los ejes coordenados, las fuerzas (por unidad de superficie) que actúan a través de estas caras nos darán información acerca del estado de tensiones alrededor de ese punto. En este tema también veremos que las componentes de estas fuerzas por unidad de superficie ordenadas de cierta forma se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden, con las consecuencias que esto implica.

2.2. Concepto de vector tensión. Componentes de la tensión y su signo.

Como hemos visto en el capítulo anterior, cuando un sistema de fuerzas externo actúa sobre un cuerpo deformable, todos los elementos de volumen del cuerpo sufren la acción de dicho sistema de fuerzas. Se dice que el cuerpo está en un *estado de tensión*.

Sobre este cuerpo pueden actuar dos tipos de fuerzas. Las *fuerzas de masa* son aquellas que actúan sobre todos los elementos del cuerpo, y cuyo valor es proporcional al volumen del elemento. En Elasticidad, la fuerza de masa que aparece típicamente es la fuerza gravitatoria. Caracterizaremos la acción de estas fuerzas de masa mediante la fuerza por unidad de masa (con dimensiones de aceleración) y el momento por unidad de masa. Las *fuerzas de superficie* son aquellas que son proporcionales al área de la superficie sobre la que se aplican, como por ejemplo, la fuerza ejercida por un líquido sobre una pared sólida. Las que denominamos *fuerzas puntuales* en realidad son fuerzas sobre pequeñas superficies. En Elasticidad encontraremos las fuerzas de superficie que actúan a través de un plano en un cuerpo tensionado por la acción de un sistema de fuerzas externo y las caracterizaremos a través de la *tensión* o intensidad de la fuerza. Las ecuaciones de equilibrio mecánico deberán tener en cuenta el efecto combinado de ambos tipos de fuerzas, de masa y de superficie.

De forma general, denominamos *tensión elástica* en un punto P a través de un plano que le contiene a la fuerza por unidad de superficie que actúa entre las dos partes en que el plano real o imaginario divide al material tensionado. Esta tensión elástica representa de alguna manera la “intensidad” de la fuerza y se representa mediante el *vector tensión* o *vector de esfuerzos*, fuerza por unidad de superficie (para una pequeña superficie en torno a P) ejercida desde fuera del plano real o imaginario (hacia donde apunta el vector superficie) sobre el material del otro lado del plano. El vector tensión caracteriza el esfuerzo en el punto P a través de cada plano que pasa por dicho punto.

Para caracterizar el estado tensional en un punto de un material tensionado estudiaremos las distintas componentes del vector tensión elástica en ese punto a través de los planos coordenados (que son perpendiculares entre sí) que pasan por dicho punto, como se muestra en la figura 2-2, con los vectores superficie positivos (con el sentido del eje coordenado). De esta forma, los valores positivos de las componentes tienen el sentido indicado en la figura, que corresponde al valor positivo en nuestro convenio de signos (descrito en la figura 1-4 de la sección 1.2). Obsérvese que si la componente normal del vector tensión a través de dicha superficie tiene el sentido del vector superficie

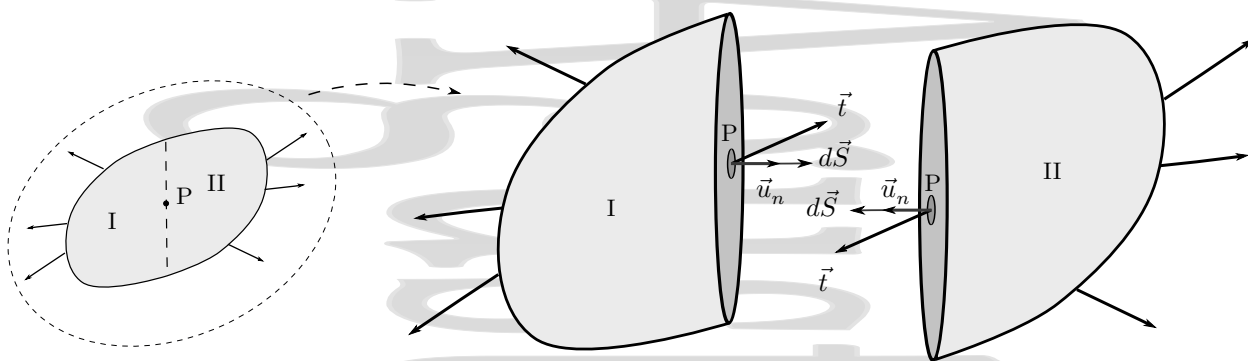


Figura 2-1: Vector tensión en un punto P a través de un plano que contiene al punto y separa dos partes de un cuerpo tensionado, visto desde los dos lados.

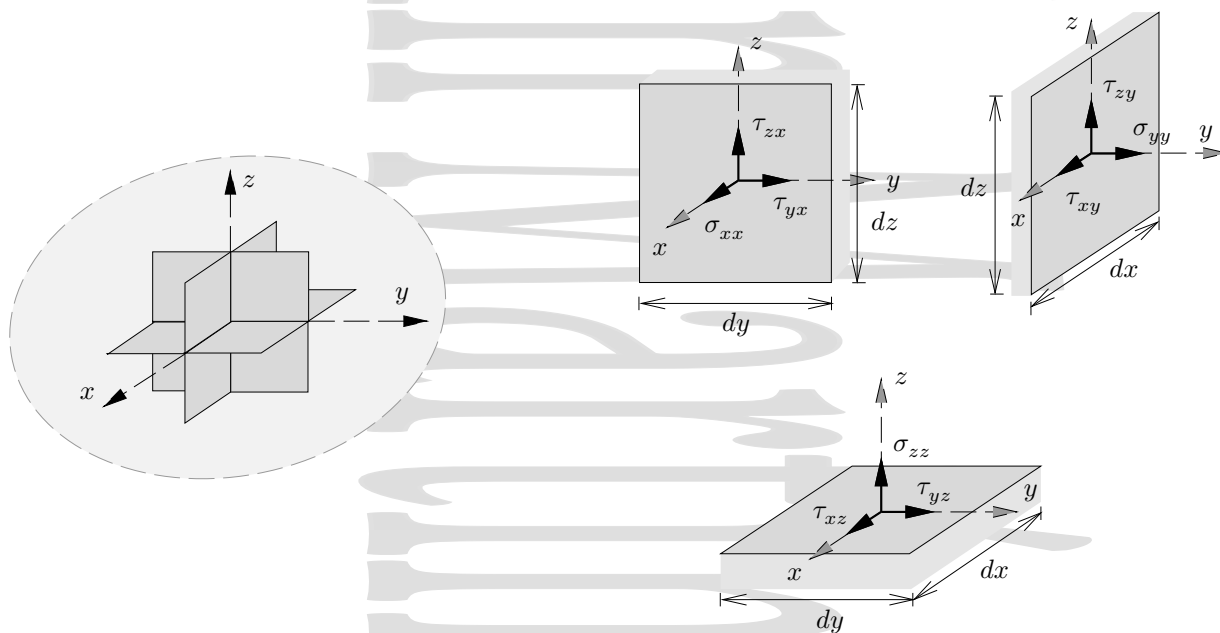


Figura 2-2: Definición de las magnitudes σ_{ij} (o τ_{ij}) en un punto. Para ello se toman 3 planos paralelos a los planos coordenados que se cortan en el punto, y se calculan las componentes según los ejes coordenados del vector tensión en dicho punto a través de los planos coordenados desde la parte positiva del eje correspondiente. De esta forma, σ_{ij} (o τ_{ij}) es la componente i del vector tensión a través de la cara perpendicular al eje j . Si $i = j$, σ_{ij} (o τ_{ij}) corresponde a una componente normal a la cara y si $i \neq j$, σ_{ij} (o τ_{ij}) corresponde a una componente tangente a la misma (cortantes). El sentido que se muestra en la figura es el sentido positivo por omisión.

(o del vector unitario asociado a la misma) se tiene *tracción* a través de dicha superficie y si tiene el contrario se tiene *compresión*, en ambos casos combinadas con posibles componentes tangenciales. Los distintos vectores tensión quedan en la forma

$$\begin{aligned}\vec{t}_x &= \sigma_{xx}\vec{u}_x + \tau_{yx}\vec{u}_y + \tau_{zx}\vec{u}_z \\ \vec{t}_y &= \tau_{xy}\vec{u}_x + \sigma_{yy}\vec{u}_y + \tau_{zy}\vec{u}_z \\ \vec{t}_z &= \tau_{xz}\vec{u}_x + \tau_{yz}\vec{u}_y + \sigma_{zz}\vec{u}_z\end{aligned}\tag{2-1}$$

En estos temas denominaremos τ_{ij} (o σ_{ij} indistintamente) a la componente según la dirección i del vector tensión a través de la cara j que aparece como consecuencia de la fuerza ejercida por el material de fuera del elemento sobre el material de dentro del mismo. En temas anteriores hemos utilizado la notación σ cuando trabajamos con tensiones normales (componentes del vector tensión perpendiculares a la cara sobre la que se aplican) y la notación τ para las tensiones tangenciales (componentes del vector tensión tangentes a la cara sobre la que se aplican). Sin embargo lo que realmente muestra si estamos tratando con una tensión normal o tangencial es el hecho de que los subíndices sean iguales (en cuyo caso tendríamos tensiones normales) o distintos (en cuyo caso tendríamos tensiones tangenciales),

por lo que a partir de ahora utilizaremos indistintamente las dos notaciones σ y τ , siendo la igualdad o no de subíndices la que realmente indica si se trata de una componente normal o tangencial. Así, tanto σ_{ij} como τ_{ij} representarán una tensión normal si $i = j$ (σ_{ii} o τ_{ii}) y una tensión cortante si $i \neq j$ con independencia del símbolo utilizado.

2.3. Ecuaciones de equilibrio

Analizaremos ahora cómo varían en el espacio las magnitudes que acabamos de definir, en los casos de tensiones homogéneas e inhomogéneas, a partir de las ecuaciones de equilibrio mecánico.

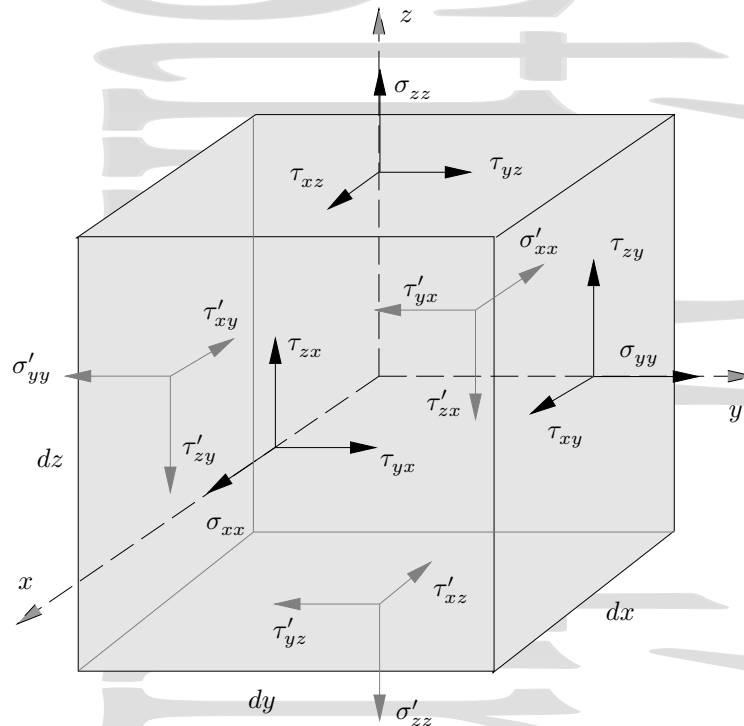


Figura 2-3: Equilibrio mecánico en un sistema de tensiones homogéneas. Distintas componentes de los vectores tensión a través de las caras de un prisma orientado según los ejes coordenados y dimensiones dx , dy y dz .

2.3.1. Estado homogéneo de tensiones

Se tiene un estado de tensiones homogéneo cuando la tensión en una dirección dada es independiente del punto del material. Para *tensiones homogéneas*, en el equilibrio mecánico y en ausencia de fuerzas de masa, se tienen los siguientes resultados

Para que el sistema esté en *equilibrio traslacional* la condición que debe cumplirse es que la fuerza neta (suma de fuerzas aplicadas sobre el mismo) sea nula. Como esto debe ser cierto para cualquier sistema de fuerzas, con independencia de si produce valores normales o tangenciales del vector tensión a través de los planos coordenados, debe ser también cierto para cada pareja de fuerzas en una cara y en la contraria.

Así, la fuerza a través de una cara es de idéntica magnitud y sentido contrario a la correspondiente fuerza en la cara opuesta. Como ambas caras tienen la misma superficie, esto implica que en la figura 2-3 debe cumplirse $\sigma_{xx} = \sigma'_{xx}$, la tensión normal σ_{xx} correspondiente a la cara $+x$ es idéntica a la tensión normal σ'_{xx} correspondiente a la cara opuesta $-x$ si se tiene un estado homogéneo de tensiones en el cuerpo. Como ya hemos visto, a la hora de hablar de tensiones elásticas normales al estado de tensiones producido por este sistema de fuerzas se le da un signo positivo si es de tracción y negativo si es de compresión, aunque las fuerzas en sí tengan distintos sentidos.

Del mismo modo que antes, la fuerza tangencial F_{ij} en la cara Oi representada en la figura y la fuerza F'_{ij} en la cara opuesta Oi' deben ser iguales y de sentido contrario. Como ambas caras tienen la misma superficie, esto implica que

las tensiones elásticas cortantes τ_{ij} en ambas caras también son iguales, $\tau_{ij} = \tau'_{ij}$ ($i \neq j$).

Para que el sistema esté en *equilibrio rotacional* la condición que debe cumplirse es que el momento neto (suma de momentos de todas las fuerzas aplicadas sobre el mismo) sea nulo.

Aunque en una distribución homogénea de tensiones las fuerzas sobre una cara y sobre la opuesta dan una fuerza resultante nula, el momento debido a este par de fuerzas no es nulo salvo que se trate de las componentes normales. Por ejemplo, aunque $\tau_{xy} = \tau'_{xy}$, el momento debido al par de fuerzas asociado es $\tau_{xy}dS_ydy$, no nulo. Para que haya un momento resultante nulo, es necesario que se cumpla la condición $M_{ij} = M_{ji}$, donde M_{ij} es el momento producido por el par F_{ij} , es decir el momento de uno de los pares de fuerzas considerados debe estar compensado por el momento del otro par de fuerzas. Teniendo en cuenta los brazos de los dos pares de fuerzas esto se traduce en la condición $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ para las tensiones cortantes en un estado homogéneo de tensiones. Por ejemplo, $\tau_{xy}dS_ydy = \tau_{xy}dxdydz = \tau_{yx}dS_xdx = \tau_{yx}dxdydz$ que implica $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

2.3.2. Estado inhomogéneo de tensiones

En la situación más general la tensión elástica varía de un punto a otro y no puede considerarse uniforme. En este caso se tienen *tensiones inhomogéneas* y es necesario tener en cuenta su variación en el espacio. Para analizar este problema, utilizaremos un elemento de volumen prismático infinitesimal como el que se muestra en la figura 2-4 visto desde la dirección z .

Comenzaremos estudiando las condiciones de *equilibrio traslacional*. En la dirección x la fuerza cortante total dF_{xy} sobre la cara y es

$$\begin{aligned} dF_{xy} &= -\left(\tau_{xy}(0,0) - \frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dzdx + \left(\tau_{xy}(0,0) + \frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dzdx = \\ &= \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dxdydz \end{aligned} \quad (2-2a)$$

y análogamente para la fuerza cortante dF_{xz} sobre la cara z

$$dF_{xz} = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}dxdydz \quad (2-2b)$$

y para la fuerza normal dF_{xx} sobre la misma cara x

$$dF_{xx} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dxdydz \quad (2-2c)$$

quedando, para la fuerza total por unidad de volumen en la dirección x , una vez sumados los efectos de las fuerzas cortantes y normales y añadida una contribución debida a las posibles fuerzas de masa, la ecuación de movimiento

$$\frac{dF_x}{dV} = \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x = \rho \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2-3)$$

donde g_x es la componente de la fuerza por unidad de masa debida a fuerzas de masa y d^2x/dt^2 la componente x de la aceleración con que se mueve el cuerpo considerado.

En las direcciones y y z se obtienen expresiones similares. Como hay equilibrio mecánico, no hay aceleración y por tanto se cumple $\partial^2\vec{r}/\partial t^2 = 0$. Así, se tienen las ecuaciones de equilibrio traslacional para un estado de tensiones inhomogéneo

$$\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial r_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial r_j} + \rho g_i = \sum_j \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial r_j} + \rho g_i = 0 \quad (2-4)$$

con $i, j = x, y, z$ y $r_{i,j} = x, y, z$. Un ejemplo de tensiones normales que varían en una dirección aparecería cuando hay que tener en cuenta la acción del peso, un ejemplo de tensiones cortantes en una dirección que varían al cambiar de sección lo tendríamos en la distribución de tensiones cortantes asociadas a fuerzas cortantes variables que aparecen en la sección 1.7.2.

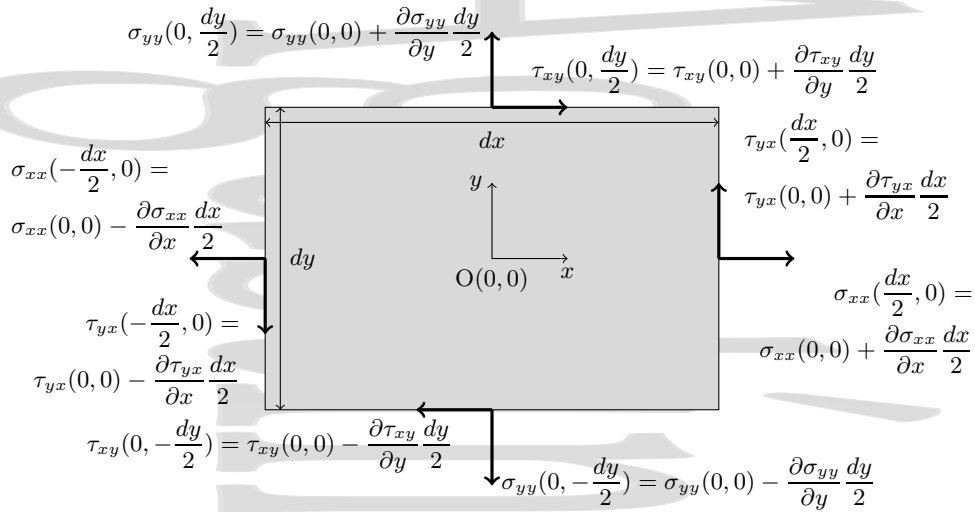


Figura 2-4: Equilibrio mecánico para un estado de tensión inhomogéneo en un elemento de volumen prismático infinitesimal con aristas orientadas según los ejes coordenados. En este caso, el estado tensional varía de un punto a otro. Como las dimensiones del elemento de volumen son infinitesimales, se desarrollan las tensiones elásticas en torno a su valor en el centro del elemento.

Por ejemplo, para un elemento vertical sometido exclusivamente a su peso, se tendría una única componente de aceleración debida a las fuerzas de masa, $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, por lo que las ecuaciones anteriores se convertirían en

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho g &= 0\end{aligned}$$

al no existir ninguna de las tensiones cortantes σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} (no están aplicadas explícitamente ni aparecen asociadas a flexión alguna). Las dos primeras ecuaciones implicarían que la tensión elástica es uniforme en las direcciones x e y , mientras que la tercera da para la tensión una dependencia

$$\sigma_{zz}(z) = \sigma_{zz}^0 + \rho g(z - z_0) \quad (2-5)$$

si la tensión en z_0 es σ_{zz}^0 .

Si este elemento es un pilar de altura L y densidad ρ apoyado sobre el suelo, se tendría $\sigma_{zz}(L) = 0$ en su base superior, obteniéndose una tensión vertical de la forma $\sigma_{zz}(z) = \rho g(z - L)$ (negativo, como corresponde a una compresión) y tensiones horizontales nulas. Para el mismo pilar, pero colgado de su extremo superior, la condición a cumplir sería $\sigma_{zz}(0) = 0$ en la base inferior, quedando una distribución de tensiones $\sigma_{zz}(z) = \rho g z$, de tracción.

En cuanto al *equilibrio rotacional*, estudiaremos los momentos de los distintos pares de fuerzas que actúan. Observemos la figura 2-4 en el plano xy y consideremos los pares de fuerzas que dan un momento en la dirección z . Se obtiene que el momento de las fuerzas F_{yx} respecto del eje z es

$$\begin{aligned}\left(\tau_{yx}(0,0) - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} dy\right) dx dz \frac{1}{2} dy + \left(\tau_{yx}(0,0) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} dy\right) dx dz \frac{1}{2} dy = \\ = dM_{yx} = \tau_{yx}(0,0) dx dy dz\end{aligned} \quad (2-6)$$

en función de τ_{yx} . El momento de las fuerzas F_{xy} respecto del eje z se obtiene de forma similar en función de τ_{xy}

$$dM_{xy} = -\tau_{xy}(0,0) dx dy dz \quad (2-7)$$

quedando la ecuación de movimiento rotacional respecto del eje z en la forma:

$$dM_{yx} - dM_{xy} = (\tau_{yx} - \tau_{xy}) dxdydz + G_z dxdydz = dI_{zz} \frac{d^2\theta_z}{dt^2} \quad (2-8)$$

donde G_z es la componente según z del momento por unidad de volumen debido a las fuerzas de masa, e I_{zz} el momento de inercia del cuerpo sólido respecto del eje z , $I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$, que en el límite infinitesimal va como $\sim \rho dx^5$, un infinitésimo de quinto orden. En el mismo límite infinitesimal, $dxdydz$ va como dx^3 , como un infinitésimo de tercer orden, y por tanto, a no ser que $\tau_{yx} - \tau_{xy} + G_z$ sea cero, $d^2\theta_z/dt^2$ debería hacerse infinito por el simple hecho de tomar el límite infinitesimal en las dimensiones del problema, lo que es absurdo, luego debe cumplirse

$$\begin{aligned} \tau_{zy} - \tau_{yz} + G_x &= 0 \\ \tau_{xz} - \tau_{zx} + G_y &= 0 \\ \tau_{yx} - \tau_{xy} + G_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-9)$$

donde ya se ha incluido el resultado que se obtiene para los momentos perpendiculares a los ejes x e y . Sólo existe un momento debido a las fuerzas de masa en algunos casos muy especiales, como cuando hay un campo eléctrico o magnético actuando sobre un material anisótropo que se polariza o magnetiza bajo la acción del campo correspondiente. Así, en ausencia de estas situaciones, se tiene la importante relación

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2-10)$$

es decir, las τ_{ij} (o σ_{ij}) son simétricas también en el caso de un sistema inhomogéneo de tensiones.

2.4. El tensor de tensiones

Hasta ahora hemos estado trabajando con las magnitudes σ_{ii} y τ_{ij} y viendo cuál es su significado como componentes del vector tensión a través de una superficie. Veremos ahora que estas componentes, a las que en general llamaremos $[\tau_{ij}]$ o $[\sigma_{ij}]$, colocadas de cierta forma, se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden. Para ello será suficiente demostrar que correlacionan dos magnitudes vectoriales \vec{p} y \vec{q} (que representan cada una una magnitud física) en la forma $p_i = \sum_{j} T_{ij} q_j$, ya que la ecuación debe ser invariante bajo rotación del sistema de ejes.

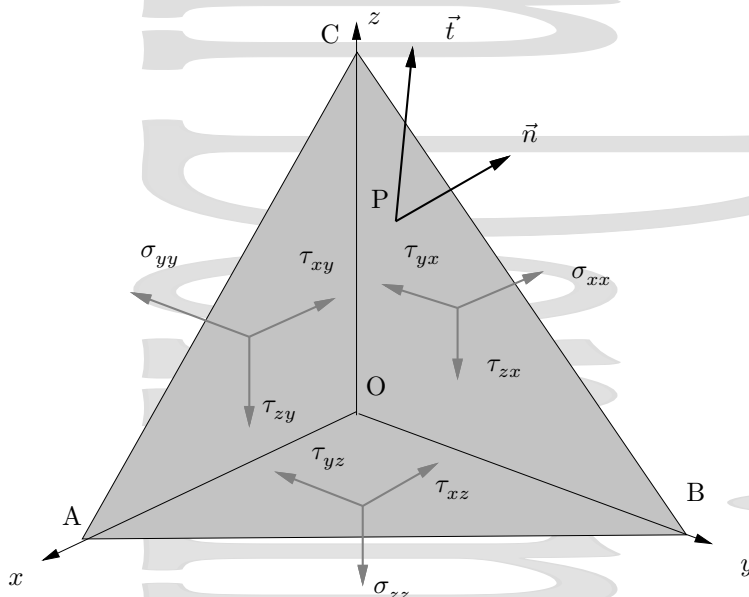


Figura 2-5: Para demostrar que las $[\tau_{ij}]$ forman un tensor de segundo orden se considera el equilibrio de fuerzas en el elemento de volumen limitado por una parte por un plano que pasa por un punto P, con una orientación descrita por un vector unitario normal n y por otra por los planos coordenados. A través de cada cara actúan las correspondientes tensiones con sus componentes y a través del plano la tensión dada por el vector tensión \vec{t} .

Si tomamos una superficie elemental dS , que contiene un punto P en el cuerpo tensionado, y denominamos \vec{n} al vector unitario normal a la superficie y \vec{t} al vector tensión, que representa la tensión total transmitida a través de la superficie (de carácter vectorial), tendremos que $\vec{t}dS$ será la fuerza total transmitida a través de la superficie.

¿Cómo cambia esta fuerza al variar la dirección de \vec{n} de forma que siempre pase por el punto P? Para abordar este problema, consideraremos el caso de:

- Tensión homogénea.
- No hay fuerzas de masa.
- El cuerpo está en equilibrio.

y veremos las consecuencias de este equilibrio. Denominaremos ABC a la superficie triangular variable perpendicular a \vec{n} y BOC, AOC y AOB a las otras caras triangulares. En la dirección x :

$$\begin{aligned} t_x \text{ABC} &= \sigma_{xx} \text{BOC} + \tau_{xy} \text{COA} + \tau_{xz} \text{BOA} \rightarrow \\ \rightarrow t_x &= \sigma_{xx} \frac{\text{BOC}}{\text{ABC}} + \tau_{xy} \frac{\text{COA}}{\text{ABC}} + \tau_{xz} \frac{\text{BOA}}{\text{ABC}} \end{aligned} \quad (2-11)$$

pero como cada uno de los cocientes entre las superficies no es sino cada una de las componentes del vector \vec{n} , o lo que es lo mismo, cada uno de los cosenos directores de \vec{n} , se tiene, al repetir el proceso para las demás direcciones:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ t_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{aligned} \quad (2-12)$$

o, en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

o vectorial:

$$t_i = \sum_j \tau_{ij} n_j \Leftrightarrow \vec{t} = [\tau_{ij}] \vec{n} \quad (2-14)$$

es decir, se transforman como las componentes de un tensor de segundo orden. Así, este *tensor de tensiones* nos permite además de caracterizar el estado de tensiones en un punto, obtener el vector tensión \vec{t} en ese punto a través de cualquier plano que pasa por un punto conociendo en éste el tensor de tensiones y el vector unitario perpendicular al plano. Según la componente del vector tensión a lo largo del vector unitario que describe el plano hacia fuera (dada por $\vec{t} \cdot \vec{n}$) sea positiva o negativa ese vector tensión llevará asociada una tracción o a una compresión.

Para el caso de tensión inhomogénea, esta expresión también es válida, ya que los términos adicionales desaparecen al tomar el límite infinitesimal.

El tensor así obtenido es simétrico, por lo que existen unos ejes en los que éste es diagonal con todos los autovalores reales:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

donde σ_1 , σ_2 y σ_3 son las tensiones principales. Cuando se escogen estas direcciones como ejes, las componentes cortantes desaparecen, quedando únicamente las componentes normales, es decir, las fuerzas sobre las caras de un prisma orientado según esas direcciones son perpendiculares a las caras.

Asimismo, la traza del tensor, la suma de los determinantes de los menores complementarios de los elementos de la diagonal y el determinante del tensor son invariantes bajo rotación del sistema de ejes.

En general, la fuerza elástica resultante de las fuerzas que ejerce el resto del cuerpo tensionado sobre un elemento de volumen del cuerpo a través de la superficie cerrada S que le rodea viene dada por

$$\vec{F} = \int_S \vec{t} dS, \quad (2-16)$$

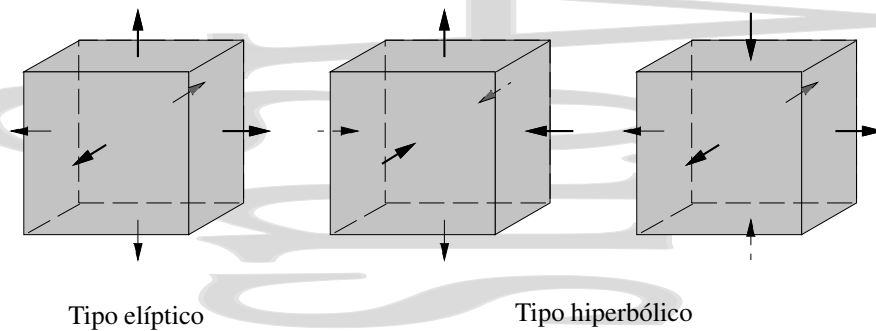


Figura 2-6: Distintos tipos de tensiones triaxiales. Cuando todas las tensiones principales tienen el mismo signo se dice que se tiene un estado de tensiones de tipo elíptico, mientras que cuando tienen distintos signos se dice que el estado de tensiones es de tipo hiperbólico.

la suma de las fuerzas elementales sobre cada elemento de la superficie, donde dS es cada una de las áreas infinitesimales y \vec{t} el vector tensión a través de la misma.

2.5. Casos particulares

Estudiaremos ahora algunos casos particulares, casi todos ellos referidos a los ejes principales, y los círculos de Mohr asociados.[†] En otros ejes las componentes del tensor variarán

1. Tensión uniaxial,

por ejemplo, una barra que tiene algo colgado de su extremo inferior. El tensor de tensiones correspondiente a este caso es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

en ejes principales con $\sigma > 0$. En otros ejes tendrá una forma distinta.

2. Tensión biaxial (estado plano de tensión).

Por ejemplo, una lámina sobre la que actúan exclusivamente fuerzas contenidas en el plano de la lámina (en este caso el 13). El tensor de tensiones tomaría la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

y sus círculos de Mohr se muestran en la figura para los tres planos, suponiendo $\sigma_1 < 0 < \sigma_3$.

3. Tensión triaxial (caso general).

En este caso el sistema de fuerzas que actúa sobre el elemento deformado es tal que en ejes principales las tres tensiones principales son no nulas.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

En la figura se ha representado un ejemplo de círculos de Mohr para los tres planos en el caso $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

Dependiendo del signo relativo de las σ_i la tensión triaxial se clasifica en dos tipos. Cuando todas tienen el mismo signo, se tiene una tensión triaxial del *tipo elíptico*. Cuando las componentes tienen distintos signos, se tiene una tensión triaxial del *tipo hiperbólico*. En la figura 2-6 se muestran estos tipos de tensiones triaxiales.

[†]Valores y signos de los autovalores están tomados para facilitar su representación.

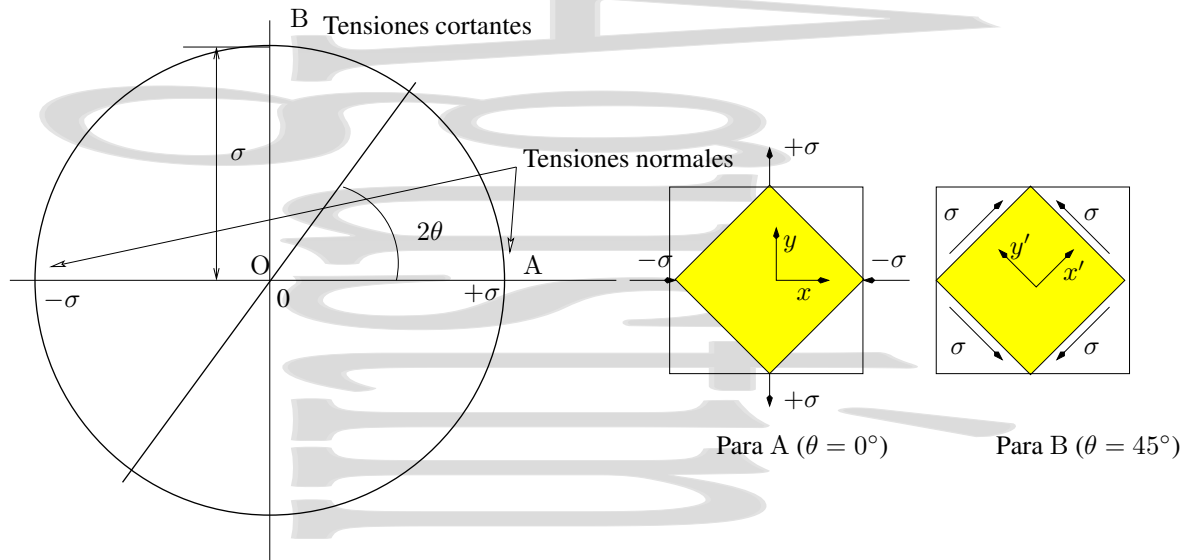


Figura 2-7: Esfuerzo cortante representado en ejes principales y en ejes rotados 45° respecto de los mismos en el plano principal asociado.

Un caso particular de tensión triaxial de especial importancia tiene lugar cuando los valores de las σ_i son iguales. Este caso es el denominado *tensión hidrostática*, tomando el tensor de tensiones la forma

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\mathbb{I} \quad \text{o} \quad -p\delta_{ij} \quad (2-20)$$

El tensor hidrostático se mantiene diagonal con las mismas componentes con independencia del sistema de ejes escogido, no se transforma frente a la rotación. Esto implica que el círculo de Mohr correspondiente a un estado hidrostático de tensiones se reduce a un punto al coincidir las tres tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 .

4. Esfuerzo cortante.

Aparece por ejemplo, al retorcer una varilla larga, o al cortar una chapa metálica con una cizalla. En este caso, el tensor de tensiones toma, en ejes principales, la siguiente forma (para tensión en el plano xy).

$$\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

Si rotamos 45° alrededor del eje principal 3 (z), las componentes normales desaparecen y sólo quedan componentes cortantes del tensor de tensiones

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-22)$$

El estado de tensiones descrito por (2-21) y (2-22) es exactamente el mismo, pero representado en dos sistemas de coordenadas distintos, xy el descrito por la expresión (2-21) y $x'y'$ el descrito por la (2-22). Nótese que éste es el mismo caso que se estudia en la sección 1.6.2.

2.6. Componentes hidrostática y desviadora del tensor de tensiones.

El tensor de tensiones puede descomponerse en sus componentes *hidrostática* y *desviadora* (A-30). La componente hidrostática es un tensor diagonal que contiene toda la traza, en el que todas las componentes son iguales y de valor la media de las componentes diagonales del tensor de tensiones, $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 = \text{traza}/3$

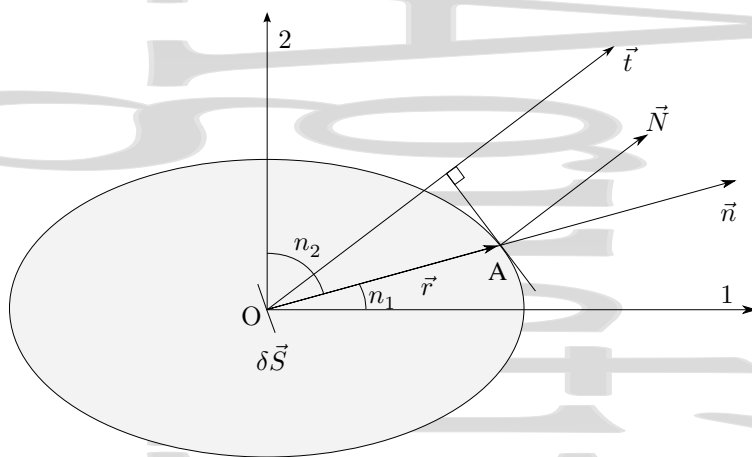


Figura 2-8: Forma cuadrática asociada al tensor de tensiones.

(la traza del tensor de tensiones es un invariante) y la desviadora un tensor que contiene el resto. En ejes principales,

$$\hat{\sigma}^{\text{ep}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_{\text{hidrostática}}^{\text{ep}} + \hat{\sigma}_{\text{desviadora}}^{\text{ep}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{pmatrix} \quad (2-23)$$

y en un sistema de ejes general,

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_{\text{hidrostática}} + \hat{\sigma}_{\text{desviadora}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{pmatrix}. \quad (2-24)$$

La componente hidrostática del tensor es la misma para cualquier sistema de ejes ya que las componentes de un tensor hidrostático no cambian bajo rotación del sistema de ejes (2-20). Cada una de sus tres componentes no necesariamente nulas se mantiene igual a un tercio de la traza y ésta es un invariante. Asimismo, la traza de la componente desviadora también es un invariante, por lo que es nula para cualquier sistema de ejes ya que la componente hidrostática del tensor se lleva toda la traza original en cualquier sistema de ejes.

2.7. Superficie indicadora o cuádrlica de tensiones

La forma cuadrática (Véase la sección A.4.6) asociada al tensor de tensiones es el lugar geométrico de los puntos que cumplen la condición:

$$\sum_{i,j} \tau_{ij} r_i r_j = 1 \quad (2-25)$$

que, expresado respecto de los ejes principales del tensor de tensiones queda en la forma:

$$\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2 r_2^2 + \sigma_3 r_3^2 = 1 \quad (2-26)$$

siendo las longitudes de los semiejes $1/\sqrt{\sigma_1}$, $1/\sqrt{\sigma_2}$ y $1/\sqrt{\sigma_3}$. Los valores de σ_1 , σ_2 y σ_3 pueden ser positivos o negativos, y por tanto la cuádrlica puede ser un elipsoide real o imaginario, o un hiperboloide.

Para sacar la dirección del vector tensión resultante \vec{t} a través de un área pequeña δS se sigue el procedimiento descrito en la sección A.4.6:

1. Se dibuja un vector \vec{r} desde el origen de coordenadas en el centro del elipsoide hasta la superficie de la cuádrlica, de forma que éste sea paralelo a \vec{n} (vector unidad perpendicular a δS), que cortará a la cuádrlica en A.
2. El vector \vec{t} será paralelo a la normal a la cuádrlica en A.

Siempre que A caiga en uno de los tres ejes principales, \vec{t} es paralelo a \vec{n} y por tanto, no hay componentes cortantes. La tensión normal transmitida a lo largo del elemento se obtiene a partir de la longitud r de \vec{r} como $\tau = 1/r^2$. Analíticamente, $\tau = \sum_{ij} \tau_{ij} n_i n_j$ o, si todas las componentes están dirigidas según los ejes principales:

$$\tau = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (2-27)$$

Augustin Martin Jourdain.

Capítulo 3

El tensor de deformaciones.

3.1. Deformación en una dimensión.

Antes de pasar a considerar los casos más generales de deformación en dos y tres dimensiones en el entorno del punto, trataremos el caso más sencillo, que realmente ya se ha visto en el tema introductorio, el de la deformación en una dimensión.

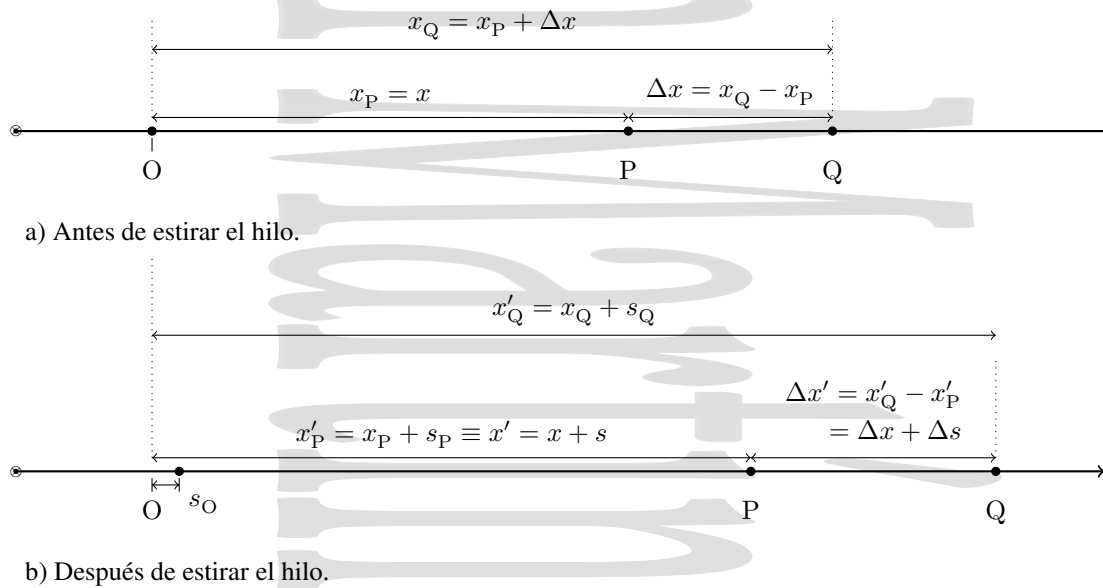


Figura 3-1: Deformaciones en una dimensión

Se considera un hilo elástico que es estirado. Sea O un punto fijo en el espacio (no en el hilo, ni fijado al hilo) que tomamos como origen de coordenadas, y P y Q dos puntos fijos sobre el hilo separados una distancia $\overline{PQ} = \Delta x$.

Al estirar, se produce un desplazamiento $s(x)$ de cada punto, pasando los puntos P y Q a las nuevas posiciones P' y Q', como se muestra en la figura. Estas nuevas posiciones están dadas por

$$\begin{aligned} x_P &\rightarrow x'_P = x_P + s_P & (x' = x + s) \\ x_Q = x_P + \Delta x &\rightarrow x'_Q = x_Q + s_Q = x_P + \Delta x + s_Q \end{aligned}$$

donde $s(x)$ representa el desplazamiento de cada uno de los puntos como consecuencia de la deformación. La separación entre los dos puntos pasa a ser

$$\Delta x' = \overline{P'Q'} = x'_Q - x'_P = \Delta x + s_Q - s_P = \Delta x + \Delta s$$

donde $\Delta s = s_Q - s_P$ representa la variación de la posición relativa de los dos puntos como consecuencia de la deformación.

La forma concreta en que cambian las posiciones x de cada punto y las distancias Δx depende de cómo es el proceso de deformación que se está estudiando. Si se tiene una *deformación homogénea*, la deformación tiene lugar

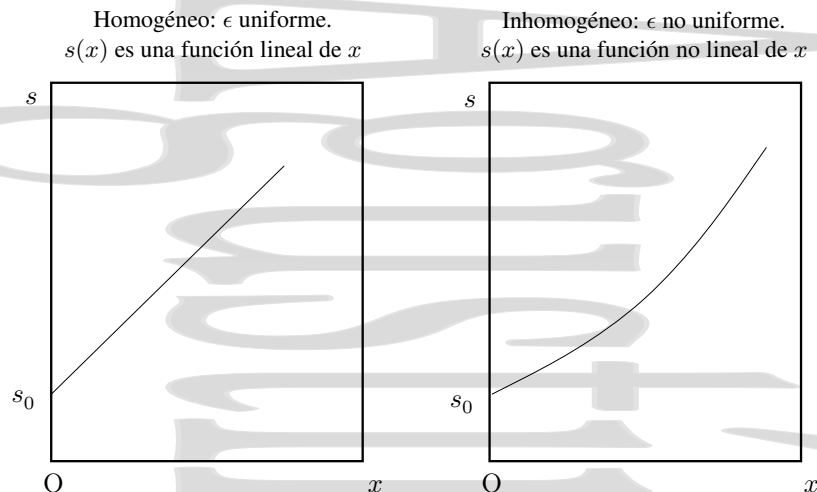


Figura 3-2: Deformaciones homogéneas e inhomogéneas. En el caso de las deformaciones homogéneas s varía de forma lineal con x , mientras que para las deformaciones inhomogéneas esto no es así.

de forma que el desplazamiento $s(x)$ es una función lineal de la posición x de cada punto del hilo. La parte izquierda de la figura 3-2 muestra un ejemplo de deformación homogénea. Cuando se tiene una *deformación inhomogénea* ésta tiene lugar de forma que el desplazamiento $s(x)$ es una función no lineal de la posición x . La forma concreta de la función depende de la deformación concreta que estemos analizando. En la parte derecha de la figura 3-2 se muestra un ejemplo de deformación inhomogénea.

En realidad, en lo que estamos interesados no es tanto en los desplazamientos absolutos, como en los desplazamientos relativos, ya que son éstos los que nos darán el estado de deformaciones de un cuerpo. Para ello definimos la deformación promedio en el segmento PQ en la forma

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta \text{longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad (3-1)$$

y al considerar la deformación de segmentos PQ cada vez más pequeños, tendremos la deformación en el entorno del punto P como

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} \quad (3-2)$$

En el caso general, el desplazamiento de un punto P genérico originalmente situado en x vendrá dado por

$$s(x) = s_0 + \int_0^x \epsilon(x) dx \quad (3-3)$$

de forma que la coordenada x' de su nueva posición es

$$x' = x + s(x) = x + s_0 + \int_0^x \epsilon(x) dx. \quad (3-4)$$

Si la deformación es homogénea, ésta no depende de la posición, $\epsilon \neq \epsilon(x)$ y el desplazamiento $s(x)$ y la nueva coordenada x' quedan como

$$s = s_0 + \epsilon x \quad (3-5)$$

$$x' = x + s(x) = x + s_0 + \epsilon x = s_0 + (1 + \epsilon)x. \quad (3-6)$$

3.2. Deformación en dos dimensiones.

3.2.1. El tensor de desplazamientos y el tensor de deformaciones.

Estudiamos ahora como se produce la deformación de una hoja plana. Como consecuencia del proceso de deformación cada punto de la lámina situado inicialmente en una posición $\vec{r} = (x, y)$ sufre un desplazamiento dado por el

vector de desplazamientos \vec{s} . A cada punto le corresponde un vector de desplazamientos y el conjunto de vectores de desplazamientos forma un campo vectorial, el *campo de los desplazamientos* $\vec{s}(\vec{r}) = \vec{s}(x, y)$. Consideramos un punto P de coordenadas iniciales $\vec{r}_P \equiv \vec{r}$ y un punto Q infinitamente próximo a P, de coordenadas iniciales $\vec{r}_Q = \vec{r} + d\vec{r}$ (véase la figura 3-3) de forma que $d\vec{r}$ es el vector posición de Q medido desde P. Al ser puntos infinitamente próximos nuestros resultados podrán aplicarse directamente a deformaciones inhomogéneas.

Como consecuencia de la deformación el punto P sufre un desplazamiento \vec{s} hasta P' (con $\vec{r}' \equiv \vec{r}_{P'} = \vec{r} + \vec{s}$) y el punto Q se desplaza a Q' (con $\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_Q + \vec{s}_Q = \vec{r} + d\vec{r} + \vec{s} + d\vec{s}$). El vector $d\vec{r}$ que daba la posición de Q medida desde P pasa a ser $d\vec{r}' = \vec{r}_{Q'} - \vec{r}_{P'} = d\vec{r} + d\vec{s}$ que da la nueva posición relativa de Q' medida desde P', donde $d\vec{s}$ da la diferencia entre los vectores desplazamiento de P y Q.

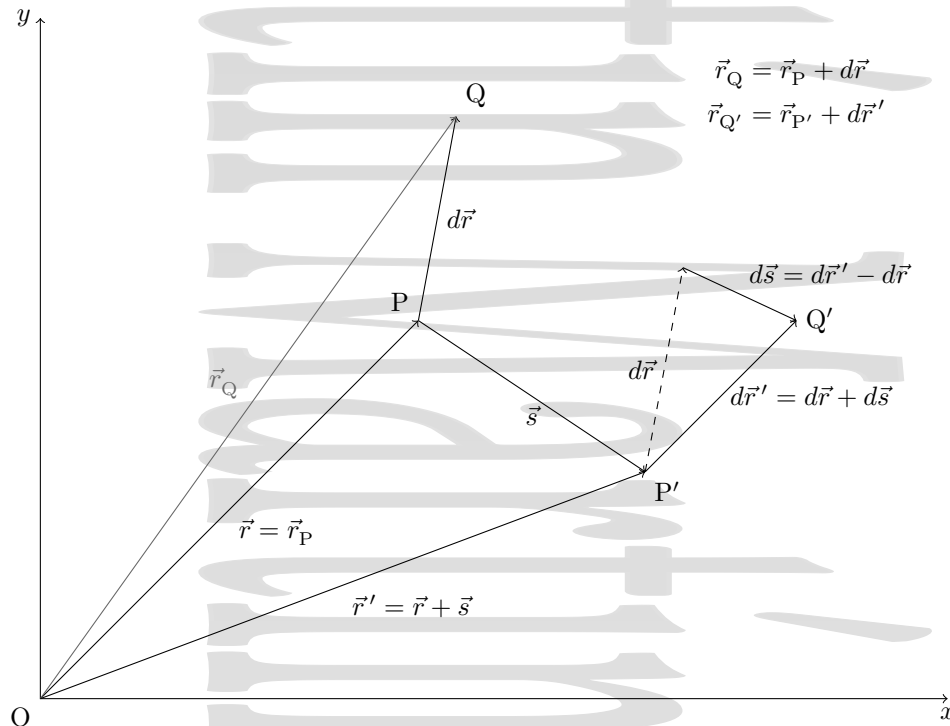


Figura 3–3: Deformación en dos dimensiones

Como P y Q están muy próximos y por tanto dx y dy son muy pequeños, podemos obtener la variación de la función de dos variables $\vec{s} = \vec{s}(x, y)$ entre dos puntos muy próximos separados $d\vec{r}$ entre los que la variable x cambia en dx y la variable y en dy

$$\left. \begin{aligned} ds_x &= \frac{\partial s_x}{\partial x} dx + \frac{\partial s_x}{\partial y} dy = e_{xx} dx + e_{xy} dy \\ ds_y &= \frac{\partial s_y}{\partial x} dx + \frac{\partial s_y}{\partial y} dy = e_{yx} dx + e_{yy} dy \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} ds_x \\ ds_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{s} = \hat{e} d\vec{r}, \quad (3-7)$$

donde hemos definido las magnitudes

$$e_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial s_y}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial s_x}{\partial y}, \quad e_{yx} = \frac{\partial s_y}{\partial x} \quad (3-8)$$

que son cantidades *adimensionales* pequeñas comparadas con la unidad.

Como tanto (ds_x, ds_y) como (dx, dy) son las componentes de dos vectores, el conjunto de componentes $[e_{ij}]$ que relacionan las componentes de dos vectores como lo hacen en la ecuación (3-7) deben transformarse como las componentes de un tensor de segundo orden. Las e_{ij} colocadas en la forma (3-7) se forman un tensor de segundo orden al que denominamos *tensor de desplazamientos*.

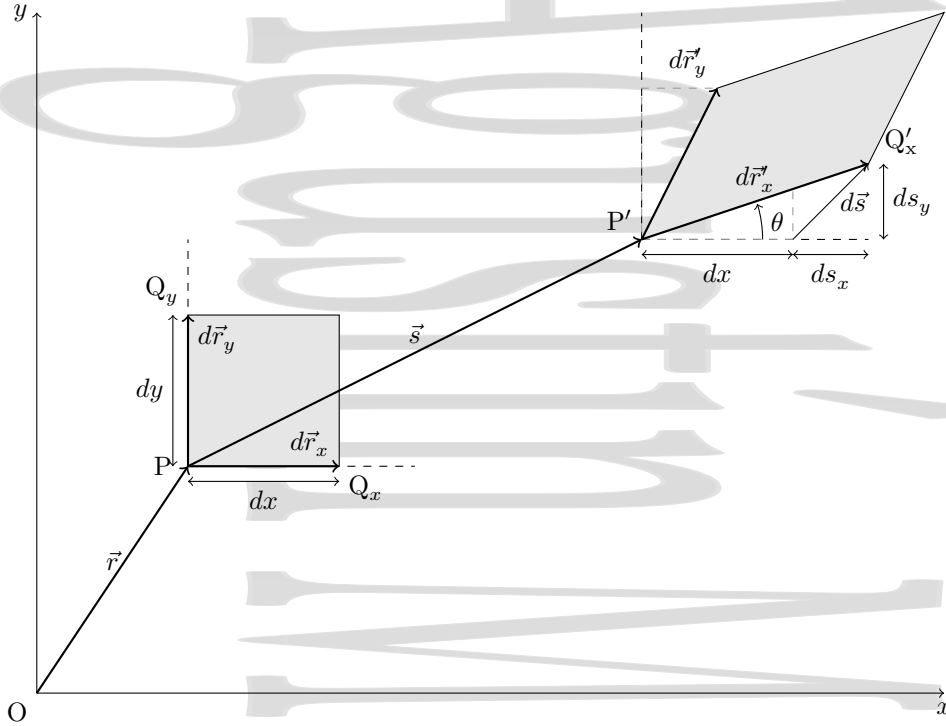


Figura 3-4: Significado físico de las componentes del tensor de desplazamientos $[e_{ij}]$.

Es necesario tener precaución de no incluir en las expresiones de la deformación términos que corresponden a traslación como un sólido rígido, ya que éstos dan una variación de la posición absoluta de Q. Como en vez de la posición absoluta de Q se está considerando la posición relativa de Q respecto de P (es decir $d\vec{r}$) y cuál es la variación de ésta (es decir $d\vec{s}$), se está dejando de lado de forma consciente la variación de la posición de P producida no por la deformación entre P y Q, sino por la traslación del punto P.

¿Qué significan físicamente las magnitudes e_{ij} que acabamos de definir en (3-8)? Para verlo, estudiaremos qué ocurre durante la deformación con dos de los lados (PQ_x y PQ_y) de un rectángulo infinitesimal, dirigidos inicialmente según los ejes coordenados desde el punto P, y cuyas longitudes respectivas son dx y dy (véase la figura 3-4). Para el segmento PQ_x de longitud dx y dirigido inicialmente según x se cumplirá $dy = 0$ mientras que para el segmento PQ_y de longitud dy y dirigido inicialmente según y se cumplirá $dx = 0$. Para PQ_x se tiene

$$ds_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} dx = e_{xx} dx \quad (3-9)$$

$$ds_y = \frac{\partial s_y}{\partial x} dx = e_{yx} dx$$

Así, $e_{xx} = ds_x/dx$ representa la variación relativa de la componente x de un segmento obtenida como la deformación por unidad de longitud de PQ_x medida a lo largo de Ox . A su vez, e_{yx} mide la rotación (antihoraria) del segmento PQ_x hacia el eje y , ya que el ángulo de giro en radianes viene dado por

$$\tan \theta = \frac{ds_y}{dx + ds_x} \simeq \frac{ds_y}{dx} \Rightarrow \theta = \frac{ds_y}{dx} \quad (3-10)$$

al ser ds_x un diferencial de segundo orden respecto de dx y cumplirse, para deformaciones pequeñas, que $\tan \theta \simeq \theta$ con el ángulo θ medido en radianes.

Procediendo del mismo modo para PQ_y se obtiene que e_{yy} es la deformación por unidad de longitud de PQ_y según Oy , y que e_{xy} es la rotación en sentido horario de PQ_y a $P'Q'_y$ (hacia x).

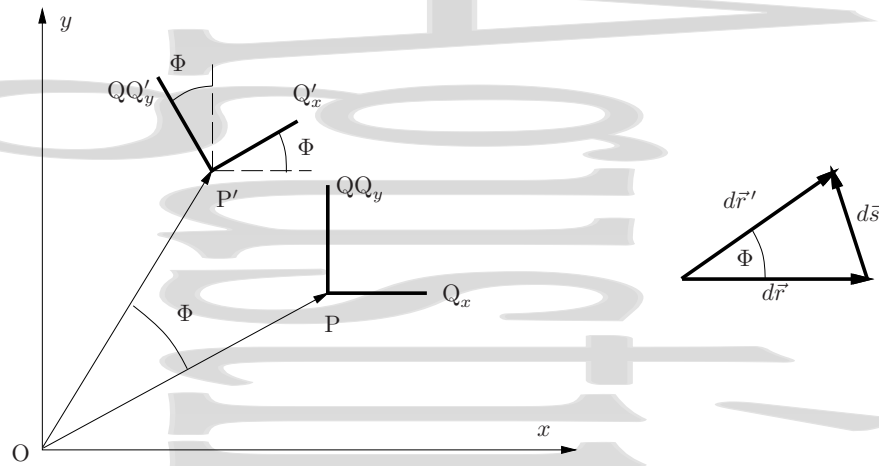


Figura 3-5: Efecto de la rotación como un sólido rígido.

Para que este tensor sea una buena medida del estado de deformaciones en el punto P es evidente que cuando no hay deformación todas las e_{ij} deben ser 0. Sin embargo, esto no siempre es así. Para ver esto, consideraremos el caso en que el cuerpo objeto de estudio gira como un sólido rígido un pequeño ángulo Φ en sentido antihorario. Cuando se tiene en cuenta el significado geométrico de las e_{ij} se tiene un tensor de la forma

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \Phi - 1 & -\sin \Phi \\ \sin \Phi & \cos \Phi - 1 \end{pmatrix} \quad (= [\mathcal{R}^{-1} - \mathbb{I}]) \quad (3-11)$$

que, en el límite de pequeños ángulos[†] queda, en primer orden de variación

$$e_{ij} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -\Phi \\ \Phi & 0 \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

Así, observamos que aunque en este caso no hay una deformación real, las e_{ij} no se hacen 0. La razón de esto es que tenemos incluida en el tensor de desplazamientos el efecto de la rotación como un sólido rígido, y esta contribución no corresponde a una deformación real. Para tener un tensor que realmente caracterice el estado de deformaciones en un punto, tendremos que sacar esta contribución. Para ello, descomponemos el tensor de segundo rango que hemos obtenido en la suma de dos tensores, uno simétrico y uno antisimétrico $[e_{ij}] = [\epsilon_{ij}] + [\omega_{ij}]$, con las componentes definidas en la forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \quad \text{y} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \quad (3-13)$$

El tensor $[\epsilon_{ij}]$, que es simétrico, es el *tensor de deformaciones*, y es el que realmente da el estado de deformaciones de un cuerpo en un punto.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) \\ \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) & e_{yy} \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

Las componentes diagonales son las deformaciones normales

al plano correspondiente y dan las deformaciones unitarias en las direcciones Ox y Oy , mientras que las componentes no diagonales corresponden a la deformación angular o cortante, tangente al plano correspondiente. Dos elementos de longitud paralelos a Ox y Oy antes de la deformación, forman entre sí después de ésta un ángulo $\frac{\pi}{2} - 2\epsilon_{xy}$. Es conveniente recalcar que la deformación por corte ϵ_{xy} es la mitad del cambio total de ángulo entre los elementos.

El tensor antisimétrico $[\omega_{ij}]$ estará asociado a la rotación del cuerpo como un sólido rígido. De hecho, en la ecuación (3-11), el tensor $[e_{ij}]$ que allí aparece es realmente $[\omega_{ij}]$, ya que no hay deformación, y a su vez este último es $[\mathcal{R}^{-1} - \mathbb{I}]$,

[†]Recuérdese que el significado físico de las e_{ij} que hemos visto es cierto únicamente para deformaciones pequeñas.

donde \mathbb{I} es el tensor identidad y \mathcal{R} es la matriz de rotación que da el cambio en las componentes de un vector cuando pasan de representarse en el sistema de ejes xyz original a representarse en el sistema de ejes XYZ rotado un ángulo Φ respecto del anterior.

Así, en el caso general se tiene

$$d\vec{s} = [\hat{e}]d\vec{r} = [\hat{e} + \hat{\omega}]d\vec{r}$$

y[†]

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{s} = [\mathbb{I} + \hat{e}]d\vec{r} = [\mathbb{I} + \hat{e} + \hat{\omega}]d\vec{r} = [\mathcal{R}^{-1} + \hat{e}]d\vec{r}$$

que cuando no hay deformación, sino únicamente rotación como sólido rígido, queda

$$d\vec{r}' = \mathcal{R}^{-1}d\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}d\vec{r}' = d\vec{r}$$

Se denomina *vector deformación* al vector $\vec{\epsilon} = [\hat{e}]\vec{u}$, donde \vec{u} es un vector unitario en la dirección de $d\vec{r}$. El vector deformación así definido está asociado a deformaciones por unidad de longitud en el entorno de un punto, para un segmento infinitesimal inicialmente en la dirección dada y por tanto, es una magnitud adimensional.

Se denominan *componentes intrínsecas* del vector deformación a sus componentes paralela (ϵ_{\parallel}) y perpendicular (ϵ_{\perp}) a $d\vec{r}$ (y por tanto a \vec{u}). Nótese que el vector deformación no es lo mismo que el vector $d\vec{s}$ (pág. 51) para un vector unitario según $d\vec{r}$. En general $d\vec{s}$ contiene una componente de rotación como sólido rígido y además en deformaciones inhomogéneas la contribución de los puntos originalmente según $\vec{u} \parallel d\vec{r}$ va cambiando.

3.2.2. Deformación homogénea en dos dimensiones.

Durante una deformación homogénea, las e_{ij} son uniformes a lo largo del cuerpo y se tiene:

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \hat{e}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad s_i = (s_0)_i + \sum_j e_{ij}r_j = (s_0)_i + \sum_j \omega_{ij}r_j + \sum_j \epsilon_{ij}r_j \quad \begin{matrix} (i, j = x, y) \\ (r_i, r_j = x, y) \end{matrix} \quad (3-15)$$

donde $(s_0)_i$ es el desplazamiento del punto original en el eje Or_i . Una curva que antes de la deformación es $f(x, y) = 0$ pasa a ser después de la deformación $f(x', y') = 0$, con

$$\begin{aligned} x' &= x + s_x = (s_0)_x + x + e_{xx}x + e_{xy}y \\ y' &= y + s_y = (s_0)_y + y + e_{yx}x + e_{yy}y \end{aligned} \quad (3-16)$$

Por ser una sustitución lineal se tiene que, durante una deformación homogénea:

1. Las líneas rectas siguen siendo líneas rectas.
2. Las líneas paralelas siguen manteniéndose paralelas entre sí después de la deformación.
3. Todas las líneas rectas en una dirección se extienden o contraen un mismo factor.
4. Una elipse se transforma en otra elipse, y en particular, un círculo en una elipse.

3.3. Deformación en tres dimensiones.

Para abordar el estudio de las deformaciones en tres dimensiones se sigue un procedimiento completamente similar al seguido en dos dimensiones, por lo que no se repetirá. Se definen nueve componentes de un tensor en la forma:

$$e_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} \quad \begin{matrix} (i, j = x, y, z) \\ (r_x, r_y, r_z = x, y, z) \end{matrix} \quad (3-17)$$

donde e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} representan deformaciones unitarias en las direcciones Ox , Oy y Oz , respectivamente, e_{xy} representa la rotación alrededor de Oz de un elemento originalmente paralelo a Oy hacia Ox , e_{yx} representa la rotación alrededor de Oz de un elemento paralelo a Ox hacia Oy , y del mismo modo para los demás elementos. Por el mismo procedimiento que en el caso bidimensional se obtiene que este tensor no es una buena medida del estado de deformaciones de un cuerpo en un punto, que debe estar dado por un tensor simétrico, para evitar la contribución de la rotación

[†]Nótese que aquí $d\vec{r}'$ es otro vector y no el vector $d\vec{r}$ con componentes expresadas en otro sistema de referencia. Por eso aparece la inversa de la matriz de rotación.

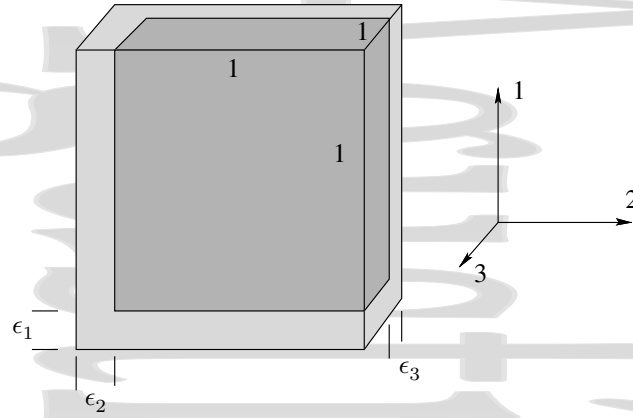


Figura 3-6: Deformación volumétrica. La traza del tensor de deformaciones da la deformación cúbica o variación relativa de volumen.

del cuerpo como un sólido rígido. Así, se define el tensor de deformación a partir de $[e_{ij}]$ en la forma $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})$, quedando:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}(e_{xy} + e_{yx}) & \frac{1}{2}(e_{xz} + e_{zx}) \\ \frac{1}{2}(e_{yx} + e_{xy}) & e_{yy} & \frac{1}{2}(e_{yz} + e_{zy}) \\ \frac{1}{2}(e_{zx} + e_{xz}) & \frac{1}{2}(e_{zy} + e_{yz}) & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

donde las componentes diagonales y no diagonales tienen el mismo significado que en el caso bidimensional, componentes normales y cortantes de la deformación. El vector deformación y sus componentes intrínsecas se definen en la misma forma que vimos en el caso bidimensional y tienen el mismo significado.

Como el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, existirá siempre un sistema de ejes ortogonales (ejes principales) en el que este tensor es diagonal con autovalores (las deformaciones principales) reales $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3-19)$$

Además de ser los ejes en los que el tensor de tensiones es diagonal, los ejes principales satisfacen la condición de ser tres direcciones mutuamente ortogonales que siguen siendo ortogonales entre sí después de la deformación. Nótese que si hay componente de rotación como sólido rígido las direcciones principales pueden cambiar a consecuencia de la misma, pero siguen siendo mutuamente perpendiculares.

El tensor de deformaciones debe tener los tres invariantes bajo cambio del sistema de ejes por rotación fija

1. *Traza del tensor o invariante de primer orden*, suma de los elementos de la diagonal del tensor, $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$.

La traza del tensor de deformaciones representa la denominada *deformación unitaria de volumen* o *deformación cúbica*, variación relativa del volumen. Para verlo, consideramos el cubo de arista unidad de la figura 3-6 que se deforma de forma homogénea según los ejes principales, con una variación relativa de volumen

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) - 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \quad (3-20)$$

donde hemos despreciado términos pequeños de orden superior. La expresión anterior también es cierta para una deformación inhomogénea tomando un elemento de volumen infinitesimal en el entorno del punto considerado y para cualquier otro sistema de ejes al ser la traza un invariante del tensor.

Considerando las definiciones de los elementos del tensor de desplazamientos (3-8) y teniendo en cuenta que $e_{ii} = \epsilon_{ii}$ la deformación cúbica en el entorno de un punto también puede escribirse como la divergencia del

campo de desplazamientos en torno a dicho punto,

$$\theta = \vec{\nabla} \vec{s} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \quad (3-21)$$

2. *Invariante de segundo orden*, suma de los determinantes de los menores complementarios de los elementos de la diagonal

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{vmatrix},$$

igual a $\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_2$ en ejes principales.

3. *Determinante del tensor o invariante de tercer orden*

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix},$$

que en ejes principales es simplemente $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$

Una nota final, en ingeniería se suele utilizar una notación diferente para las deformaciones cortantes, escribiendo el tensor de deformaciones $[\epsilon_{ij}]$ en la forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{con } \gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij} \quad (3-22)$$

Así, por ejemplo γ_{xy} , es igual a la variación del ángulo entre dos líneas que estaban dirigidas originalmente según las direcciones Ox y Oy . Aunque a menudo se les llama componentes cortantes de la deformación, deformaciones cortantes o simplemente cortantes, las γ_{ij} en sí no son componentes del tensor de deformaciones, ya que a causa del factor 2 no se transforman bajo rotación como las componentes de un tensor. Este γ es equivalente al ángulo cortante que veíamos en el tema de introducción.

3.3.1. Deformación homogénea en tres dimensiones.

Se tiene, para este caso de tres dimensiones que, una vez separadas las rotaciones como sólido rígido, el desplazamiento es

$$s_i = (s_0)_i + \sum_j \epsilon_{ij} r_j = (s_0)_i + \sum_j \omega_{ij} r_j + \sum_j \epsilon_{ij} r_j \quad (3-23)$$

Para separar por completo la parte de sólido rígido (traslación más rotación) se define:

$$\bar{s}_i = \sum_j \epsilon_{ij} r_j \quad (3-24)$$

Además de las condiciones vistas para la deformación homogénea en dos dimensiones, durante una deformación homogénea en tres dimensiones los planos siguen siendo planos y los planos paralelos se mantienen paralelos durante la deformación. Asimismo las esferas (un caso particular de elipsoide) se convierten en elipsoides genéricos.

3.3.2. Deformación plana.

La deformación plana es un caso particular de deformación en tres dimensiones en el que una de las deformaciones principales es 0. Un cortante puro es un caso especial de deformación plana que tiene la forma, para un cortante en el plano xy :

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 45^\circ \rightarrow \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-25)$$

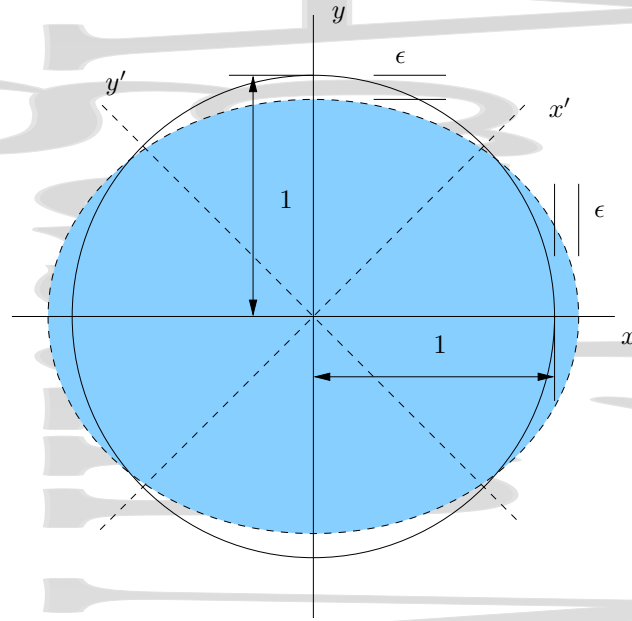


Figura 3-7: Deformación de una esfera en un cortante

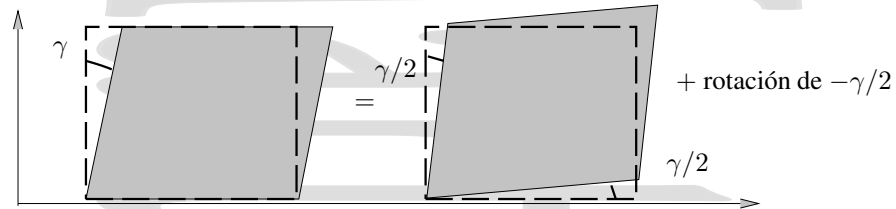


Figura 3-8: Deformación cortante vista desde el sistema en el que se saca el tensor de desplazamientos y desde el sistema rotado $\gamma/2$ en el que se saca el tensor de deformaciones. A menudo se denomina *cortante simple* al primer caso y *cortante puro* al segundo. El cortante simple es el cortante puro más una rotación de $\gamma/2$.

donde se representa el efecto de rotar el sistema de ejes 45 grados alrededor de z . La traza es 0, es decir la deformación cúbica es 0. Esto se puede apreciar en la figura 3-7, donde se muestra como es la deformación de una esfera en esas condiciones. Se puede observar como es cero la extensión en las giradas 45°. Nótese también que en general tensión plana y deformación plana no son equivalentes, ni siquiera en un material isótropo, un estado de tensión plana puede dar lugar a un estado con deformaciones longitudinales en las tres direcciones y en cambio obtenerse un estado de deformación plana mediante tensiones longitudinales en las tres direcciones del espacio.

El caso del cortante simple que se había estudiado en el primer tema corresponde a un deformación cortante pura más una rotación de $\frac{1}{2}\gamma$, como se puede ver en la figura 3-8.

3.3.3. Componentes hidrostática y desviadora del tensor de deformaciones.

El tensor de deformaciones puede descomponerse en sus componentes *hidrostática* y *desviadora* (A-30). La componente hidrostática es un tensor diagonal que contiene toda la traza del tensor original, en el que todas las componentes son iguales y de un valor igual a la media de las componentes diagonales del tensor de deformaciones, $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)/3 = (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})/3 = \theta/3$ (la traza es un invariante igual a la deformación cúbica) y la desviadora un tensor que contiene el resto. En ejes principales,

$$\hat{\epsilon}^{ep} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} = \hat{\epsilon}_{hidrostática}^{ep} + \hat{\epsilon}_{desviadora}^{ep} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 - \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 - \epsilon \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

y en un sistema de ejes general,

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \hat{\epsilon}_{\text{hidrostática}} + \hat{\epsilon}_{\text{desviadora}} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} - \epsilon & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3-27)$$

La componente hidrostática es la misma para cualquier sistema de ejes ya que cada una de sus tres componentes no necesariamente nulas es igual a un tercio de la traza y ésta es un invariante igual a la deformación cúbica $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$. Asimismo, la traza de la componente desviadora también es un invariante, siendo nula para cualquier sistema de ejes ya que la componente hidrostática del tensor se lleva toda la traza original en cualquier sistema de ejes.

3.3.4. Las ecuaciones de compatibilidad.

Analizaremos en mayor detalle las ecuaciones (3-17) y (3-18). Como tenemos seis ϵ_{ij} independientes se tendrán seis ecuaciones, una para cada componente de la deformación, pero en función de sólo tres componentes del desplazamiento s_x, s_y, s_z . Así, si conocemos $\vec{s}(x, y, z)$ podremos obtener directamente las deformaciones.

Un punto de vista alternativo consistiría en considerar las seis deformaciones ϵ_{ij} en función de la posición, y a partir de ellas intentar obtener $\vec{s}(x, y, z)$. Pero esto nos da un conjunto de seis ecuaciones para el cálculo de las tres incógnitas s_x, s_y, s_z , que en principio sería un sistema de ecuaciones indeterminado ya que tiene más condiciones que variables y por tanto no permitiría obtener los desplazamientos a partir del mismo. Sin embargo, esto no ocurriría si existieran relaciones adicionales entre las componentes de la deformación que redujeran el número de ecuaciones independientes a tres. Esto significa que en realidad las seis componentes independientes de ϵ_{ij} no pueden definirse arbitrariamente en el espacio si queremos encontrar funciones únicas y continuas para describir el desplazamiento $\vec{s}(x, y, z)$, de forma que el medio se deforme de forma *compatible*, es decir, sin saltos ni solapes. Por este motivo, deben existir al menos tres relaciones adicionales que nos permitan establecer una relación biunívoca entre deformaciones y desplazamientos.

Para obtener estas relaciones comenzaremos con las definiciones de ϵ_{xx} y ϵ_{yy} vistas al principio de esta sección. Si derivamos la primera dos veces respecto de y y la segunda dos veces respecto de x , y sumamos los resultados, se tiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 s_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 s_y}{\partial x^2 \partial y}$$

y si, a partir de la definición de ϵ_{xy} derivamos respecto de x y respecto de y , se tiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right)$$

que, comparando con la ecuación anterior, da

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (3-28a)$$

obteniéndose de forma similar otras dos ecuaciones,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (3-28b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z}. \quad (3-28c)$$

Partamos ahora de las definiciones de ϵ_{xy} , ϵ_{yz} y ϵ_{zx} ,

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right); \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right); \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right)$$

Despejando s_i y derivando adecuadamente se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_x}{\partial y} &= 2\epsilon_{xy} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 s_x}{\partial y \partial z} = 2\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial^2 s_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial s_x}{\partial z} &= 2\epsilon_{xz} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 s_x}{\partial y \partial z} = 2\frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial^2 s_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} &= 2\epsilon_{yz} \rightarrow 0 = \frac{\partial^2 s_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 s_z}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Si sumamos y derivamos de nuevo respecto de x se tiene

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 s_x}{\partial x \partial y \partial z},$$

que comparado con

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 s_x}{\partial x \partial y \partial z}$$

da

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} \right), \quad (3-28d)$$

y de forma análoga se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (3-28e)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial y} \right) \quad (3-28f)$$

que dan un total de seis ecuaciones que deben cumplir las componentes del tensor de deformaciones para que exista una solución continua para el campo de desplazamientos. Se les denomina *ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant*.

Ahora bien, necesitábamos tres ecuaciones, pero hemos obtenido seis. No debe extrañarnos porque las ecuaciones anteriores no son independientes entre sí, y puede verse que son equivalentes a tres ecuaciones independientes de cuarto orden.

3.3.5. Forma cuadrática asociada a la deformación y elipsoide de deformación.

El invariante de segundo orden del tensor de deformaciones (forma cuadrática del tensor de deformaciones) tiene la forma

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ij} r_i r_j = 1$$

y es idéntica a la forma cuadrática del tensor de desplazamientos

$$\sum_{i,j} e_{ij} r_i r_j = 1$$

como se ve desarrollando su expresión y eliminando términos. Así, ésta última contiene información únicamente sobre la parte simétrica.

Para obtener la deformación unitaria en una dirección arbitraria analizaríamos cómo cambia la componente según esa dirección de un segmento unidad \vec{u} dirigido originalmente a lo largo de la misma. Al producirse la deformación, tendremos en general cambio de longitud y de dirección, de forma que la deformación produce un desplazamiento del extremo en la forma

$$\Delta s_i = \sum_j \epsilon_{ij} u_j$$

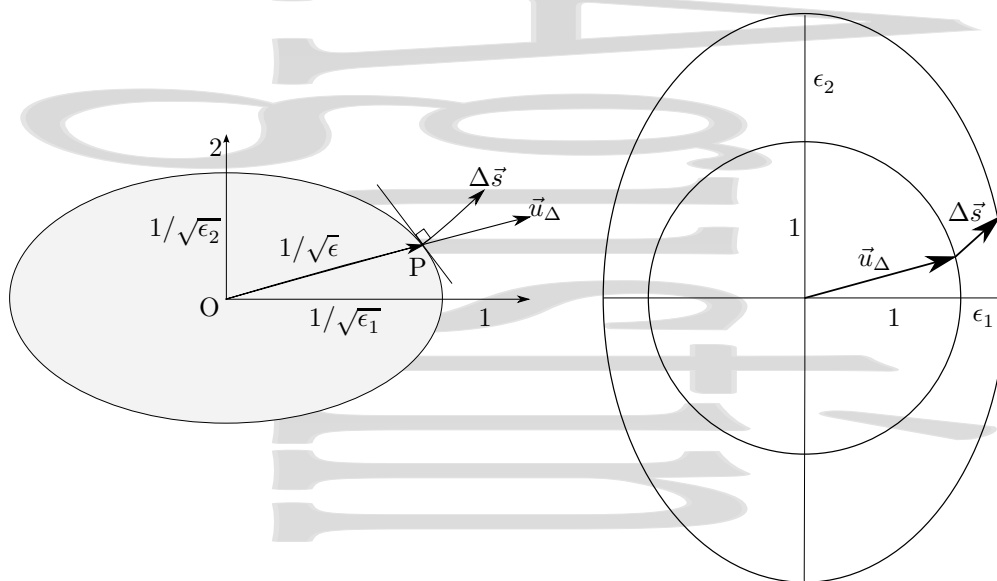


Figura 3-9: Deformación homogénea en tres dimensiones analizada mediante la cuádrlica de deformaciones.

para deformaciones homogéneas, que utilizamos por claridad. Así, la deformación en la dirección original es la componente de $\Delta \vec{s}$ en dicha dirección,

$$\epsilon_{\Delta} = \sum_i \Delta s_i u_i = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} u_i u_j$$

y, en ejes principales,

$$\epsilon_{\Delta} = \epsilon_1 u_1^2 + \epsilon_2 u_2^2 + \epsilon_3 u_3^2.$$

Esto puede verse gráficamente en la figura 3-9, donde la longitud del radio-vector OP en la dirección de \vec{u}_{Δ} es $1/\sqrt{\epsilon}$ y su dirección normal a la cuádrlica en el punto P.

El *elipsoide de deformación* surge al estudiar como es la deformación de una esfera unidad cuando los valores principales del tensor de deformaciones son $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \rightarrow \frac{r_1^2}{(1 + \epsilon_1)^2} + \frac{r_2^2}{(1 + \epsilon_2)^2} + \frac{r_3^2}{(1 + \epsilon_3)^2} = 1 \quad (3-29)$$

siendo esta última expresión la del elipsoide de deformación, que no debe confundirse con la cuádrlica del tensor de deformaciones, que puede ser un elipsoide real o imaginario o un hiperboloide de una o dos hojas, mientras que como su nombre indica, el elipsoide de deformación es siempre un elipsoide.

3.4. Expansión térmica.

Asimismo, se puede utilizar el tensor de deformaciones para especificar la deformación resultante del cambio de temperatura de un material. Cuando se produce un pequeño cambio de temperatura ΔT en un pequeño elemento en torno a un punto del material aparece una deformación de origen térmico en el mismo. Cada una de las componentes de esta deformación es proporcional a la variación de temperatura ΔT , cumpliéndose

$$\epsilon_{ij}^{\text{tér}} = \alpha_{ij} \Delta T \quad (3-30)$$

donde las α_{ij} son los *coeficientes de expansión térmica* o *coeficientes de dilatación*. Como $[\epsilon_{ij}^{\text{tér}}]$ es un tensor simétrico, $[\alpha_{ij}]$ también será un tensor simétrico (el *tensor de los coeficientes de dilatación térmica*), al ser el anterior multiplicado por un escalar.

Por esta misma razón, los ejes principales del tensor $[\epsilon_{ij}^{\text{tér}}]$ coincidirán con los del tensor $[\alpha_{ij}]$. En ejes principales se tiene

$$\epsilon_1^{\text{tér}} = \alpha_1 \Delta T \quad \epsilon_2^{\text{tér}} = \alpha_2 \Delta T \quad \epsilon_3^{\text{tér}} = \alpha_3 \Delta T \quad (3-31)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son los *coeficientes principales de expansión térmica* o *coeficientes de dilatación térmica principales*. El tensor de deformación total, que incluye tanto las componentes de deformación elástica como las de dilatación térmica, será la combinación de los dos

$$[\epsilon_{ij}^{\text{total}}] = [\epsilon_{ij}^{\text{elástica}}] + [\epsilon_{ij}^{\text{térmica}}] \quad (3-32)$$

Si la variación de temperatura es la misma en todos los puntos del elemento, la deformación que aparece a lo largo del material es homogénea. En una deformación homogénea por efecto del cambio de temperatura, una esfera del material se convierte en un elipsoide con ejes proporcionales a $(1 + \alpha_1)$, $(1 + \alpha_2)$ y $(1 + \alpha_3)$.

La cuádrica para la expansión térmica es:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \alpha_{ij} r_i r_j &= 1 && \text{en unos ejes generales} \\ \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2 &= 1 && \text{en los ejes principales} \end{aligned} \quad (3-33)$$

El *coeficiente de expansión de volumen* o *coeficiente de dilatación cúbica* α_v es la traza del tensor $[\alpha_{ij}]$, que en el sistema de ejes principales es $\alpha_v = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ y en un sistema de ejes general xyz es $\alpha_v = \alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}$. Aunque los α_{ij} suelen ser positivos, hay materiales que los tienen negativos (calcita, berilio, yoduro de plata, etc...).

En materiales isótropos, que son buena parte de los materiales que interesan en este curso, el tensor de los coeficientes de dilatación térmica es un tensor hidrostático en el que todas las α_{ii} de la diagonal son iguales entre sí y todos los elementos no diagonales son nulos (es un tensor diagonal), ambas cosas para cualquier orientación del sistema de coordenadas. En estas condiciones el *coeficiente de dilatación de volumen* $\alpha_v = 3\alpha_l$, donde hemos introducido el *coeficiente de dilatación lineal* α_l como uno de los elementos (iguales) de la diagonal, quedando las relaciones entre las dimensiones iniciales y finales en la forma

$$l = l_0(1 + \alpha_l \Delta T), \quad V = V_0(1 + \alpha_v \Delta T) \quad \text{con } \alpha_v = 3\alpha_l \quad (3-34)$$

como ya se vio anteriormente.

Capítulo 4

La ley de Hooke generalizada.

4.1. Expresiones de la ley de Hooke generalizada.

4.1.1. El tensor de las constantes elásticas.

Se ha visto en el primer capítulo la forma que tiene la ley de Hooke para el caso de una tensión uniaxial y la deformación unitaria uniaxial asociada, así como para el caso de una tensión cortante y el ángulo cortante de deformación asociado.

$$\begin{aligned}\sigma &= E\epsilon \\ \tau &= G\gamma\end{aligned}\quad (4-1)$$

y es el momento de preguntarse cuál es la forma que toma esta ley de Hooke cuando se tiene el efecto combinado de tensiones normales y cortantes en el entorno próximo de un punto del material. Hemos visto que para el caso general, el estado de tensiones de un cuerpo se describe mediante un tensor de tensiones $[\tau_{ij}]$, y el estado de deformaciones del mismo mediante un tensor $[\epsilon_{ij}]$, y lo que nos estamos preguntando en este momento es cómo y cuál es la relación entre los tensores de tensiones y deformaciones. Como los tensores de tensiones y deformaciones son tensores de segundo orden, en la región de comportamiento elástico lineal estarán relacionados por un tensor de cuarto orden, que relacionará las componentes de la tensión y de la deformación en la forma:

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{o} \quad [\tau_{ij}] = [C_{ijkl}] [\epsilon_{ij}]) \quad (4-2)$$

o a la inversa

$$\epsilon_{ij} = \sum_{kl} S_{ijkl} \tau_{kl} \quad (\text{o} \quad [\epsilon_{ij}] = [S_{ijkl}] [\tau_{ij}]) \quad (4-3)$$

donde las C_{ijkl} son las *constantes elásticas* del material y S_{ijkl} las *deformabilidades* del material. Al tensor de las C_{ijkl} se le denomina *tensor de las constantes elásticas* o *tensor elástico*. Se denomina a la relación (4-2) (o a la 4-3) *ley de Hooke generalizada*.

De este modo, se observa que en general, el resultado de aplicar una tensión genérica τ_{ij} es una deformación unitaria resultante no nula no sólo en la misma componente, sino en principio en todas las demás. Asimismo, en el caso general, una componente cualquiera del tensor de deformaciones puede tener su origen en cualquiera de las componentes del tensor de tensiones, o en varias de ellas a la vez. Así, por ejemplo, para la componente σ_{xx} de la tensión se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} \equiv \tau_{xx} &= C_{xxxx}\epsilon_{xx} + C_{xxxy}\epsilon_{xy} + C_{xxxz}\epsilon_{xz} + \\ &+ C_{xxyx}\epsilon_{yx} + C_{xxyy}\epsilon_{yy} + C_{xxyz}\epsilon_{yz} + \\ &+ C_{xxzx}\epsilon_{zx} + C_{xxzy}\epsilon_{zy} + C_{xxzz}\epsilon_{zz}\end{aligned}\quad (4-4)$$

y de forma análoga para las otras ocho componentes del tensor de tensiones. De este modo se observa que la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones es a través de un tensor de cuarto orden y tres dimensiones que en general tendrá 81 componentes.

Un análisis de las propiedades de los tensores de tensiones y deformaciones nos muestra que el número de constantes elásticas independientes es sensiblemente menor ya que muchas de ellas son iguales entre sí, incluso en el caso más desfavorable. Para ver esto consideremos en primer lugar la forma que toma la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones para una componente general τ_{ij} del tensor de tensiones:

$$\tau_{ij} = C_{ijxx}\epsilon_{xx} + C_{ijxy}\epsilon_{xy} + \dots + C_{ijyx}\epsilon_{yx} + \dots \quad (4-5)$$

Como el tensor de deformaciones es un tensor simétrico, podremos escribir:

$$C_{ijxy}\epsilon_{xy} + C_{ijyx}\epsilon_{yx} = (C_{ijxy} + C_{ijyx})\epsilon_{xy} \quad (4-6)$$

y análogamente para las demás componentes del mismo tipo. Así, vemos que las componentes C_{ijkl} y C_{ijlk} no aparecen nunca de forma independiente, sino siempre como la suma de las dos. De hecho, cuando se miden experimentalmente estas constantes elásticas, no se miden cada una por separado, sino siempre se mide la suma de las dos, y lo que afecta al resultado no es cada uno de los valores individuales, sino su suma. Así, la relación entre tensiones y deformaciones es la misma para cualesquiera valores individuales de C_{ijkl} y C_{ijlk} que den el valor correcto de la suma. La elección más sencilla consiste en escoger ambas constantes elásticas iguales entre sí, e iguales por tanto cada una de ellas a la semisuma de las dos, a la mitad del valor experimental de la suma:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (4-7)$$

Consideremos ahora los desarrollos para las dos tensiones τ_{ij} y τ_{ji} :

$$\tau_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4-8)$$

$$\tau_{ji} = \sum_{kl} C_{jikl}\epsilon_{kl}$$

Como el tensor de tensiones es simétrico, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ y restando las dos expresiones se tiene:

$$\tau_{ij} - \tau_{ji} = 0 = \sum_{kl} (C_{ijkl} - C_{jikl})\epsilon_{kl} \quad (4-9)$$

que debe ser cero cualquiera que sean las deformaciones unitarias. Para que esto sea así, se debe cumplir:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (4-10)$$

Estas dos condiciones deben de cumplirse siempre y reducen el número de constantes elásticas independientes de 81 a 36, lo que es lógico, ya que tanto el tensor de tensiones como el de deformaciones tienen sólo seis componentes independientes. Antes de tener en cuenta las propiedades de simetría del medio puede verse, mediante consideraciones energéticas, que incluso en el caso más desfavorable (la simetría cristalina más baja, sistema triclinico clase **1**) el número de constantes elásticas independientes es 21 ya que se cumple además $C_{ijkl} = C_{klij}$. Para simetrías cristalinas más altas el número de constantes independientes será menor, tanto menor cuanto mayor es la simetría hasta llegar a las tres constantes independientes que se tienen para un cristal cúbico o a las dos que se tienen para un material isotrópico, que correspondea la máxima simetría.

4.1.2. La notación matricial de la ley de Hooke generalizada.

En la práctica, trabajar con un tensor de cuarto orden es muy poco intuitivo. Por otra parte, tanto en el tensor de tensiones como en el tensor de deformaciones no hay más que 6 componentes independientes, por lo que cada componente de uno puede depender sólo de las 6 componentes del otro, quedando las 36 magnitudes a que hacíamos referencia en el apartado anterior. Esto permite escribir la expresión (4-2) como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{xxxx} & C_{xxxy} & C_{xxxz} & C_{xxyz} & C_{xxxz} & C_{xxxy} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyyz} & C_{yyyz} & C_{yyxz} & C_{yyxy} \\ C_{zzxx} & C_{zzyy} & C_{zzzz} & C_{zzyz} & C_{zzxz} & C_{zzxy} \\ C_{yzxx} & C_{yzyy} & C_{yzzz} & C_{yzyz} & C_{yzxz} & C_{yzxy} \\ C_{zxxx} & C_{zxxy} & C_{zxzz} & C_{zxzy} & C_{zxzx} & C_{zxxy} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyzz} & C_{xyyz} & C_{xyxz} & C_{xyxy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

Para simplificar el manejo de lo anterior se utiliza una contracción de índices definida según

$$\begin{pmatrix} xx & xy \leftarrow xz \\ & \uparrow \\ & yy & yz \\ & \nwarrow \uparrow \\ & & zz \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 \leftarrow 5 \\ & \uparrow \\ & 2 & 4 \\ & \searrow \uparrow \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

de forma que cada pareja de índices ij de la parte izquierda pasa a denominarse mediante un único índice de acuerdo con la parte derecha de esta expresión. En función de los nuevos índices, la ley de Hooke generalizada queda

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (4-12)$$

Hay que hacer notar un par de cosas respecto de las expresiones (4-11) y (4-12). En primer lugar hay que recalcar que los distintos elementos que aparecen en ellas no son tensores, aunque estén formados por componentes de distintos tensores. Por ello se denomina representación matricial a la representación anterior. Por otra parte hay que recordar que las magnitudes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \epsilon_1, \epsilon_2$ y ϵ_3 que aparecen en esta representación no corresponden, en general, a los valores principales de los tensores de tensiones y de deformaciones.

Como vimos al final del apartado anterior, además de las condiciones debidas a la simetría de los tensores de tensiones y deformaciones debe cumplirse la condición $C_{ijkl} = C_{klij}$ (o $C_{ij} = C_{ji}$ en la representación con índices contraídos). Esto implica que la matriz de las constantes elásticas que aparece en las ecuaciones (4-11) y (4-12) debe ser una matriz simétrica por lo que tiene, en el caso más desfavorable, únicamente 21 componentes independientes.

4.2. Ley de Hooke generalizada en un medio isótropo.

4.2.1. Expresión en función de las constantes de Lamé.

Se dice que un medio es isótropo cuando todas las direcciones son equivalentes en el mismo. En el caso de un material isótropo el número de constantes elásticas independientes se reduce drásticamente de 21 a sólo dos. En un medio isótropo los ejes principales de los tensores de tensiones y deformaciones coinciden (los ejes de la cuádriga de tensiones coinciden con los ejes de la cuádriga de deformaciones). Esto hace que para un cuerpo isótropo sólo haya dos constantes elásticas independientes. Por ejemplo, para la tensión normal σ_{xx} , la ley de Hooke queda:

$$\sigma_{xx} = C_{xxxx}\epsilon_{xx} + C_{xyxy}(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (4-13)$$

y para una tensión cortante genérica queda:

$$\tau_{ij} = C_{xyxy}\epsilon_{ij} = (C_{xxxx} - C_{xyxy})\epsilon_{ij} \quad \text{para } i \neq j \quad (4-14)$$

En vez de las constantes elásticas anteriores, en el caso de materiales isótropos se suelen utilizar las constantes de Lamé, definidas en la forma

$$\lambda = C_{xyxy} \quad 2\mu = C_{xxxx} - C_{xyxy}. \quad (4-15)$$

En función de estas constantes de Lamé, la ley de Hooke generalizada para un material isótropo queda en la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}. \quad (4-16)$$

de modo que las constantes elásticas distintas de cero son

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{yyyy} = C_{zzzz} = 2\mu + \lambda \\ C_{xyxy} &= C_{yyxx} = C_{yyzz} = C_{zzyy} = C_{xxzz} = C_{zzxx} = \lambda \\ C_{yzzy} &= C_{zxzx} = C_{yxxy} = (C_{xxxx} - C_{xyxy}) = 2\mu \end{aligned} \quad (4-17)$$

Así, la relación entre las tensiones y deformaciones normales queda en la forma

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 2\mu\epsilon_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\epsilon_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})\end{aligned}\quad (4-18)$$

donde $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ es la deformación cúbica o deformación unitaria de volumen. Para las componentes cortantes se tiene una relación de la forma

$$\tau_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \quad \tau_{xz} = 2\mu\epsilon_{xz} \quad \tau_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz} \quad (4-19)$$

Ambas expresiones pueden escribirse (con la delta de Dirac $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ y 0 en caso contrario y el tensor identidad \mathbb{I} de componentes δ_{ij}) como

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} \Rightarrow \hat{\sigma} = 2\mu\hat{\epsilon} + \lambda\theta\mathbb{I} \quad (4-20)$$

Analizando las relaciones anteriores se observa que, en el caso isótropo, la relación entre las componentes normales del tensor de deformaciones es sólo con las componentes normales del tensor de tensiones, y que la relación entre las componentes cortantes del tensor de deformaciones es sólo con la misma componente cortante del tensor de tensiones. Así, para un cuerpo isótropo, cada una de las tensiones normales da lugar en principio a deformaciones normales distintas de cero en todas las direcciones normales, pero no a deformaciones tangenciales.

Las constantes de Lamé λ y μ así definidas tienen dimensiones de presión como el módulo de Young, las tensiones, o los módulos de rigidez o compresibilidad. Para cuerpos muy rígidos, λ y μ son prácticamente iguales, mientras que cuanto mas plástico es el material menor es μ .

4.2.2. Los coeficientes de elasticidad y las constantes de Lamé.

Escribiendo las relaciones anteriores en la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) & \tau_{xz} &= 2\mu\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) & \tau_{xy} &= 2\mu\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) & \tau_{yz} &= 2\mu\epsilon_{yz}\end{aligned}\quad (4-21)$$

es posible despejar las deformaciones unitarias. Para ello se utiliza la regla de Cramer quedando para la deformación unitaria según x :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \lambda & \lambda \\ \sigma_{yy} & (\lambda + 2\mu) & \lambda \\ \sigma_{zz} & \lambda & (\lambda + 2\mu) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{vmatrix}} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(2\mu + 3\lambda)}\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4-22)$$

Se definen las cantidades E y Ω en la forma:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + 2\mu} \quad \Omega = \frac{2\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda} \quad (4-23)$$

aunque en vez de Ω se acostumbra a usar el cociente:

$$\nu = \frac{E}{\Omega} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4-24)$$

donde E y ν son respectivamente el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, que ya conocemos. En función de estas magnitudes las expresiones para el caso isótropo en el entorno de un punto quedan en una forma similar a la

(1-8) que se ve en el caso de elementos macroscópicos,

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]\end{aligned}\quad (4-25)$$

pero con una gran diferencia, éstas se refieren a las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones en dicho punto. Las relaciones que acabamos de obtener son válidas en el entorno de un punto de un material deformable isótropo sometido a un estado de tensiones en el rango de la elasticidad lineal. Por el contrario, en el caso general de materiales masivos, las ecuaciones (1-8) son válidas de forma bastante aproximada cuando nos encontramos dentro de la aproximación de Resistencia de Materiales, pero su validez empeora (aunque siguen siendo una buena primera aproximación) cuando no ocurre así con las dimensiones del elemento.

Al obtener la expresión de la constante de Lamé μ se observa que ésta coincide con el módulo de rigidez, quedando las relaciones entre las constantes de Lamé y E y ν :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4-26)$$

y los elementos distintos de cero del tensor de las constantes elásticas que aparecían en la ecuación (4-17) como:

$$\begin{aligned}C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz} &= 2\mu + \lambda = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{xxyy} = C_{yyxx} = C_{yyzz} = C_{zzyy} = C_{xxzz} = C_{zzxx} &= \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{yzyz} = C_{zzzz} = C_{xyxy} = (C_{xxxx} - C_{xxyy}) &= 2\mu = \frac{E}{1+\nu}\end{aligned}\quad (4-27)$$

Recordemos asimismo que, para el caso de tensión hidrostática, la deformación volumétrica está relacionada con ésta de la forma

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{K}} \quad (1-13)$$

donde \mathcal{K} es el módulo de compresibilidad, que en función de las constantes de Lamé queda

$$\mathcal{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4-28)$$

4.3. Energía de deformación.

4.3.1. Energía de deformación en un medio isótropo

Calculemos el trabajo necesario para deformar un elemento de volumen $dV = dx dy dz$ de un material elástico isótropo. Como acabamos de ver las tensiones normales están relacionadas únicamente con deformaciones normales y cada una de las tensiones cortantes exclusivamente con su deformación cortante asociada. Así, para calcular la energía total de deformación calcularemos por separado las contribuciones debidas a deformaciones normales y a deformaciones cortantes.

Para las deformaciones normales, utilizando la ecuación (4-20), se tiene para las contribuciones a la energía de los trabajos de deformación en cada dirección

$$\begin{aligned}\delta W_{xx} &= \sigma_{xx} dy dz d\epsilon_{xx} dx = 2G \left[\epsilon_{xx} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu} \right] dV d\epsilon_{xx} \\ \delta W_{yy} &= \sigma_{yy} dx dz d\epsilon_{yy} dy = 2G \left[\epsilon_{yy} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu} \right] dV d\epsilon_{yy} \\ \delta W_{zz} &= \sigma_{zz} dx dy d\epsilon_{zz} dz = 2G \left[\epsilon_{zz} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu} \right] dV d\epsilon_{zz}\end{aligned}$$

que sumados dan

$$\delta W_{\text{normales}} = 2G \left[\epsilon_{xx} d\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} d\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} d\epsilon_{zz} + \frac{\theta\nu}{1-2\nu} d\theta \right] dV,$$

donde se ha tenido en cuenta que la deformación cúbica varía en $d\theta = d\epsilon_{xx} + d\epsilon_{yy} + d\epsilon_{zz}$ al ser ésta $\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$. Integrando la expresión anterior entre la situación inicial en la que las deformaciones ϵ_{ii} y θ son nulas y la situación final en la que alcanzan los valores ϵ_{ii} y θ se tiene, para el trabajo de deformación del elemento de volumen dV por fuerzas normales

$$\delta W_{\text{normales}} = G \left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\theta^2\nu}{1-2\nu} \right] dV,$$

que da una densidad de energía debida a las fuerzas normales,

$$\mathcal{U}_{\text{normales}} = G \left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta^2 \right]. \quad (4-29)$$

Para calcular la contribución de las energías de deformación cortantes, hemos visto que cada una de éstas va por separado, por lo que tendremos

$$\delta W_{xy} = \tau_{xy} dx dz d\gamma_{xy} dy = G \gamma_{xy} d\gamma_{xy} dV$$

$$\delta W_{xz} = \tau_{xz} dx dy d\gamma_{xz} dz = G \gamma_{xz} d\gamma_{xz} dV$$

$$\delta W_{yz} = \tau_{yz} dx dy d\gamma_{yz} dz = G \gamma_{yz} d\gamma_{yz} dV$$

que, una vez integradas dan, para la contribución a la energía de las deformaciones cortantes

$$\delta W_{\text{cortantes}} = \frac{G}{2} [\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2] dV$$

siendo la densidad de energía del medio deformado debida a las deformaciones cortantes,

$$\mathcal{U}_{\text{cortantes}} = \frac{G}{2} [\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]. \quad (4-30)$$

La densidad de energía total debida a la deformación queda entonces como

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= G \left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xz}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^2 \right] \\ &= G \left[\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta^2 + 2\epsilon_{xy}^2 + 2\epsilon_{xz}^2 + 2\epsilon_{yz}^2 \right], \end{aligned} \quad (4-31)$$

en función de las distintas deformaciones. También se podría haber expresado la densidad de energía de deformación en función de las tensiones elásticas, partiendo de p.ej,

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

o, en general,

$$\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \Rightarrow d\epsilon_{ii} = \frac{1}{E} [(1+\nu)d\sigma_{ii} - \nu d(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

que, utilizado en la expresión del cálculo de la densidad de energía de deformación debida a las tensiones normales, y sumado a la contribución debida a las tensiones cortantes, daría

$$\mathcal{U} = \frac{1}{4G} \left[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \right]. \quad (4-32)$$

donde $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ es la traza del tensor de tensiones.

La energía de deformación no puede depender del sistema de ejes en el que analizamos el problema, por lo que podemos hacerlo en el sistema de ejes principales (de hecho, podríamos haberlo hecho así desde el principio). En este

sistema de ejes principales, las componentes cortantes del tensor de deformaciones son nulas, quedando la expresión (4-31) para la densidad de energía de deformación en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= G \left[\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta^2 \right] \\ &= G \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3) \right], \end{aligned} \quad (4-33)$$

expresada en función de las deformaciones principales ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 , y de la deformación cúbica $\theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$.

En el sistema de ejes principales, las componentes cortantes del tensor de tensiones son nulas, por lo que la expresión (4-32) para la densidad de energía de deformación también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{4G} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)], \end{aligned} \quad (4-34)$$

expresada ahora en función de las tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 .

4.3.2. Energías de deformación hidrostática y de distorsión en un medio isótropo

Cuando en un medio isótropo se tiene un estado de tensión hidrostática, se cumple que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \equiv \sigma$ y que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \equiv \epsilon$, y de cualquiera de las expresiones (4-34) o (4-33) se obtiene el valor de la *densidad de energía de deformación hidrostática*

$$\mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = \frac{3E}{2(1-2\nu)} \epsilon^2 = \frac{3-6\nu}{2E} \sigma^2. \quad (4-35)$$

Consideraremos ahora un estado de tensiones general, por simplicidad en ejes principales con autovalores σ_1 , σ_2 y σ_3 , y descompondremos el tensor que lo representa en dos componentes, una hidrostática y una desviadora (A-30). La *componente hidrostática* del tensor de tensiones es un tensor diagonal con todas las componentes iguales al valor medio de las tensiones principales $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ y la desviadora un tensor que contiene el resto,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{pmatrix}.$$

La densidad energía de deformación asociada a la *componente hidrostática* será entonces

$$\mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (4-36)$$

Esta es la *densidad de energía de deformación hidrostática* correspondiente a la componente hidrostática de la deformación, asociada a la componente hidrostática del tensor de tensiones que representa el estado de tensiones dado.

Obtengamos ahora la densidad de energía de deformación correspondiente a la componente desviadora de la deformación, asociada a la *componente desviadora* del tensor de tensiones que representa el estado de tensiones dado. Esta componente de la densidad de energía corresponde a una *distorsión* o *deslizamiento* (con una deformación sin cambio de volumen) y por tanto se denomina *densidad de energía de distorsión*. Su valor se puede obtener, bien a partir de la componente desviadora del tensor de tensiones (o de deformaciones), o bien como la diferencia entre la densidad de energía total de deformación y la densidad de energía de deformación correspondiente a la parte hidrostática, ya que

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{hidrostática}} + \mathcal{U}_{\text{distorsión}}. \quad (4-37)$$

Así, la densidad de energía de distorsión para un medio isótropo queda

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\text{distorsión}} &= \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \\ &= \frac{1}{6G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \\ &= \frac{1}{6G} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4-38)$$

Veamos un par de ejemplos de los casos más simples, la tracción simple y el cortante simple.

Energía de deformación por distorsión en la tracción simple.

En la tracción simple, (véase la sección 1.4) en ejes principales se tiene $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 \equiv \sigma \neq 0$. En este caso la densidad de energía de deformación se reduce a

$$\mathcal{U} = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (4-39)$$

la densidad de energía de deformación hidrostática a

$$\mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{18K}, \quad (4-40)$$

y por tanto, la densidad de energía de distorsión queda como

$$\mathcal{U}_{\text{distorsión}} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{6G}. \quad (4-41)$$

Energía de deformación por distorsión en el cortante simple.

En el cortante simple, en ejes principales se tiene $\sigma_1 = -\sigma, \sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 = \sigma$, por lo que la densidad de energía de deformación queda como

$$\mathcal{U} = \frac{1+\nu}{E} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2G}, \quad (4-42)$$

la densidad de energía de deformación hidrostática es $\mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = 0$ y por tanto, la densidad de energía de distorsión queda igual a la densidad de energía de deformación

$$\mathcal{U}_{\text{distorsión}} = \mathcal{U} = \frac{1+\nu}{E} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2G}. \quad (4-43)$$

4.3.3. Caso general

Para tratar el caso general basta con tener en cuenta que, al estar dentro del rango de la elasticidad lineal, si una fuerza F es de la forma $-kx$, el trabajo requerido para un desplazamiento x es $kx^2/2$. Análogamente, la densidad de energía almacenada por unidad de volumen en el elemento deformado (igual al trabajo realizado por las fuerzas externas por unidad de volumen) es

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (4-44)$$

en función de las componentes del tensor elástico.

Apéndice A

Tensores.

Obviamente, la orientación del sistema de ejes cartesianos en el que describiremos nuestros problemas físicos puede ser escogida en forma arbitraria, aunque nos sea más cómodo trabajar en unos sistemas de ejes que en otros. En tanto se trate sistemas de ejes rotados uno respecto del otro con una orientación relativa fija, las propiedades y leyes físicas deben mantenerse igual, ya que no pueden depender del sistema de ejes coordenados escogido.

Para que esto sea así, las magnitudes físicas deben expresarse de forma que las componentes que describen su valor en un sistema de referencia o en otro rotado deben transformarse de una forma determinada y no de otra. De este modo, un *tensor* estaría formado por un conjunto de cantidades que tienen ciertas propiedades de transformación bajo un cambio de base por rotación, resultando éstas en una invariancia formal de las magnitudes físicas en sí y de las leyes físicas en que éstas aparecen, que se siguen cumpliendo de la misma forma en la nueva base. Desde un punto de vista matemático un tensor sería una aplicación multilineal (lineal en cada uno de sus argumentos), pero nos bastará nuestra definición inicial para empezar a trabajar con tensores y ver la relación entre las componentes de la magnitud física expresadas en un sistema de referencia ortonormal xyz y las que tendría en otro sistema de referencia ortonormal XYZ rotado respecto del anterior. Antes de ello, veremos cómo caracterizar un cambio de sistema de ejes por rotación.

A.1. Rotación de un sistema de ejes.

Comenzaremos estudiando la relación entre los vectores unitarios cartesianos en uno y otro sistema de referencia. En función de los vectores unitarios del sistema xyz , el vector unitario \vec{u}_X a lo largo del eje X del sistema rotado se escribe como

$$\vec{u}_X = (\vec{u}_X \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{u}_X \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\vec{u}_X \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

donde $\vec{u}_X \vec{u}_x$ representa la proyección del vector unitario \vec{u}_X en la dirección dada por el vector unitario \vec{u}_x , es decir, la componente de \vec{u}_X según \vec{u}_x , $\vec{u}_X \vec{u}_y$ su componente según \vec{u}_y y $\vec{u}_X \vec{u}_z$ su componente según \vec{u}_z . Como todos ellos son vectores unitarios, cada una de estas componentes no es más que el coseno del ángulo que forman los dos vectores unitarios, que a su vez es uno de los *cosenos directores* del vector unitario \vec{u}_X en el sistema de referencia xyz . Análogamente los vectores unitarios \vec{u}_Y y \vec{u}_Z se escriben, en función de los vectores unitarios del sistema xyz , como

$$\vec{u}_Y = (\vec{u}_Y \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{u}_Y \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\vec{u}_Y \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_Z = (\vec{u}_Z \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{u}_Z \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\vec{u}_Z \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

Si denominamos α_{ij} al coseno del ángulo formado por el eje i del sistema de ejes rotado y el eje j del sistema de ejes sin rotar (que será igual a $\vec{u}_i^{XYZ} \cdot \vec{u}_j^{xyz}$), podemos resumir todo esto en la tabla (cuyas columnas también valen para obtener \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z)

	\vec{u}_x	\vec{u}_y	\vec{u}_z
\vec{u}_X	α_{xx}	α_{xy}	α_{xz}
\vec{u}_Y	α_{yx}	α_{yy}	α_{yz}
\vec{u}_Z	α_{zx}	α_{zy}	α_{zz}

que nos da la matriz de rotación

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha_{ij} \equiv \alpha_{Ij} = \vec{u}_i^{XYZ} \cdot \vec{u}_j^{xyz} \quad (\text{A-1})$$

En lo sucesivo utilizaremos indistintamente las notaciones xyz o 123 para denominar los sistemas de ejes y etiquetar las componentes de vectores, tensores de segundo orden y matrices de rotación.

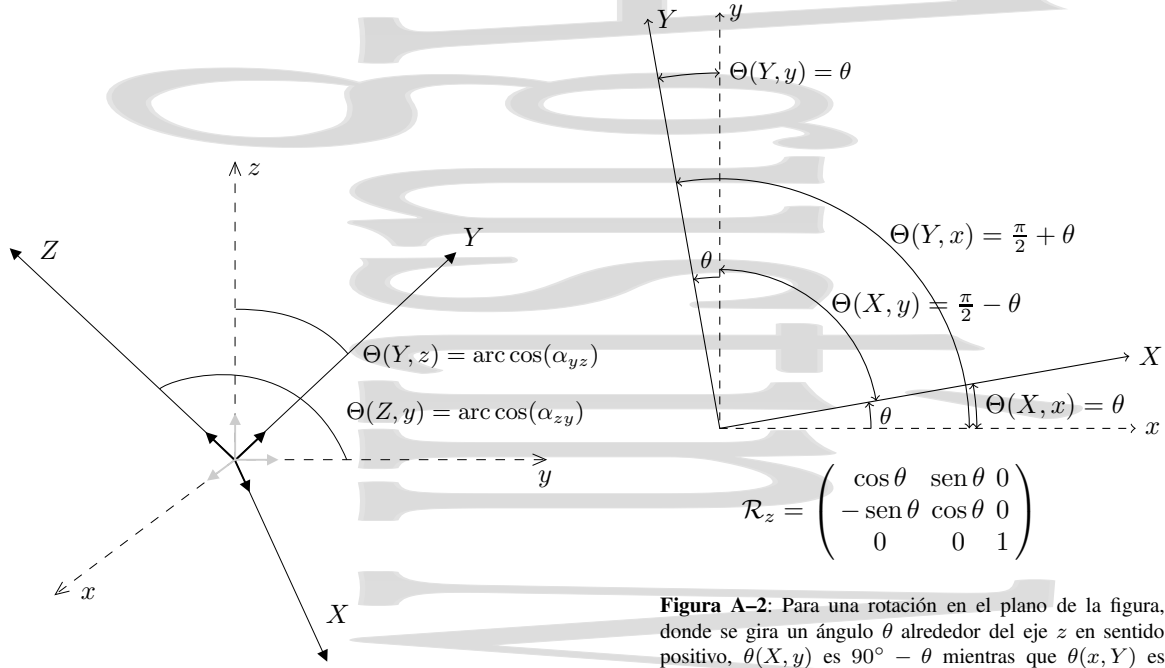


Figura A-1: Rotación de un sistema de ejes. Los cosenos de los ángulos formados por cada uno de los distintos pares de ejes nuevo y antiguo dan los coeficientes que permiten expresar los vectores unitarios de un sistema de coordenadas en función de los vectores unitarios del otro.

Figura A-2: Para una rotación en el plano de la figura, donde se gira un ángulo θ alrededor del eje z en sentido positivo, $\theta(X, y)$ es $90^\circ - \theta$ mientras que $\theta(x, Y)$ es $90^\circ + \theta$. Sumando ambas expresiones se observa que $\theta(x, Y) = 180^\circ - \theta(X, y)$ y por lo tanto, sus cosenos serán iguales y de signo contrario, como se ve en la matriz de rotación para este caso. Sin embargo, para una rotación genérica en el espacio la matriz de rotación no será antisimétrica.

No todos los α_{ij} son independientes entre sí. Por ejemplo, para una rotación en uno de los planos coordenados, el coseno director de un eje i respecto de un eje j es exactamente menos el del eje j respecto del eje i , ya que un ángulo es 180 grados menos el otro (véase el pie de la figura A-2), lo que hace que el coseno cambie de signo y la matriz de rotación quede antisimétrica en este caso. Sin embargo en el caso más general la matriz de rotación no será ni siquiera antisimétrica, aunque sólo tendrá 3 componentes independientes.

La matriz de rotación es una matriz unitaria (su determinante es la unidad) de componentes reales y su inversa es igual a su transpuesta,

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha_{ij} = \vec{u}_i \vec{u}_j \quad \begin{cases} i : \text{sistema rotado} \\ j : \text{sistema sin rotar,} \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

de forma que el resultado de aplicar ambas sucesivamente es igual a la matriz identidad,

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{R}^t = \mathcal{R}^t\mathcal{R} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-3})$$

La matriz de rotación y sus componentes únicamente dependen de cuáles son los sistemas de ejes que relaciona, y en ningún caso del sistema de ejes desde el que estamos observando la transformación.

A.2. Tensores de orden cero. Escalares.

Un *escalar* es un ejemplo de tensor del rango más simple. Cuando una propiedad física está representada por un escalar, el valor de éste no depende del sistema de ejes coordenados utilizado. Por ejemplo, la temperatura de un sólido en un punto no depende de si tomamos los ejes del sólido de una forma o de si rotamos estos ejes. Nótese que el valor de la magnitud física escalar en general dependerá del punto del espacio, aunque para cada punto no dependa de la orientación del sistema de ejes.

A.3. Tensores de orden uno. Vectores.

Un tensor de primer orden se representa por un vector. Cuando una magnitud física es de carácter vectorial, el hecho que describe no depende de la orientación escogida para los ejes coordenados, pero sí sus componentes según estos ejes, es decir, la forma en que lo describe.

Si denominamos (v_x, v_y, v_z) a las componentes del vector en el sistema de ejes coordenados xyz y (v_X, v_Y, v_Z) a las componentes del mismo vector en otro sistema de ejes coordenados XYZ rotado respecto del anterior, en ambos casos tenemos el mismo vector, pero con distintas componentes, dependiendo del sistema de ejes en el que lo representamos

$$\vec{v} = \underbrace{v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z}_{\vec{v}_{(xyz)}} = \underbrace{v_X \vec{u}_X + v_Y \vec{u}_Y + v_Z \vec{u}_Z}_{\vec{v}_{(XYZ)}}.$$

Si multiplicamos por el vector unitario \vec{u}_X se tiene

$$v_X = (\vec{u}_x \vec{u}_X) v_x + (\vec{u}_y \vec{u}_X) v_y + (\vec{u}_z \vec{u}_X) v_z = v_x \cos(xX) + v_y \cos(yX) + v_z \cos(zX) = \alpha_{xx} v_x + \alpha_{xy} v_y + \alpha_{xz} v_z$$

al ser ortonormales entre sí los vectores unitarios de un sistema de ejes.

Un tratamiento análogo puede realizarse para las demás componentes multiplicando por \vec{u}_Y y \vec{u}_Z . Escrito en forma matricial, el resultado queda como:

$$\begin{aligned} (v_X, v_Y, v_Z) &= \begin{pmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{Xx} & \alpha_{Xy} & \alpha_{Xz} \\ \alpha_{Yx} & \alpha_{Yy} & \alpha_{Yz} \\ \alpha_{Zx} & \alpha_{Zy} & \alpha_{Zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

o escrito en forma más compacta:

$$\vec{v}_{(XYZ)} = \mathcal{R} \cdot \vec{v}_{xyz} = [\alpha_{ij}] \vec{v}_{(xyz)} \quad \text{o} \quad \vec{v}' = \mathcal{R} \cdot \vec{v} = [\alpha_{ij}] \vec{v} \quad \text{o} \quad v'_i = \sum_j \alpha_{ij} v_j \quad (\text{A-5})$$

donde \mathcal{R} es la matriz de rotación cuyas componentes son $\alpha_{ij} = \cos(r_i \text{Or}_j) = \cos(\vec{u}_i^{XYZ} \vec{u}_j^{xyz}) = \vec{u}_i^{XYZ} \cdot \vec{u}_j^{xyz}$. En la expresión anterior hemos utilizado la notación con prima para denominar al vector expresado en el sistema de referencia XYZ . Ésta también es una notación frecuente, pero debe recordarse que en ambos casos se trata del mismo vector, pero con componentes expresadas en distintos sistemas de referencia.

El módulo de un tensor de orden 1 (vector) viene dado por

$$v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2} \quad (\text{A-6})$$

y su valor no depende de la orientación escogida para los ejes coordenados en los que éste se expresa ya que el producto escalar del vector por sí mismo no depende de dicha orientación.

Así, el módulo del vector es un *invariante* frente a la rotación del sistema de ejes, aunque sus componentes cambien. El cambio en las componentes del vector al cambiar de sistema de ejes por rotación debe ser tal que el módulo se mantenga invariante.

A.4. Tensores de segundo orden. Representación matricial.

Consideremos ahora una propiedad física descrita por un tensor de segundo orden, que se representa mediante una matriz. Ejemplos de propiedades de este tipo son la conductividad térmica, eléctrica o hidráulica en el caso general, la dilatación térmica y las tensiones y deformaciones elásticas.

A.4.1. Transformación de un tensor de segundo orden frente a la rotación de ejes.

En estos casos, el tensor de segundo orden (al que denominaremos por ejemplo \hat{T}) puede aparecer[†] en una expresión de la forma $\hat{T} \cdot \vec{p} = \vec{q}$, donde \vec{p} y \vec{q} son dos vectores relacionados entre sí a través del operador \hat{T} , todos ellos expresados en un sistema de referencia Or . Visto desde un sistema de ejes Or' , relacionado con el anterior a través de una matriz de rotación \mathcal{R} , esta expresión queda en la forma $T' \cdot \vec{p}' = \vec{q}'$. Si en la primera expresión introducimos la matriz de rotación multiplicada por su inversa, ésta deberá seguir siendo válida:

$$\hat{T} \cdot \vec{p} = \vec{q} = \hat{T} \cdot \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathcal{R} \vec{p} \quad (\text{A-8})$$

Si ahora rotamos este vector, se tiene:

$$\mathcal{R} \cdot \vec{q} = \mathcal{R} \cdot \hat{T} \cdot \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathcal{R} \cdot \vec{p} \quad (\text{A-9})$$

Ahora bien, $\mathcal{R} \cdot \vec{q} = \vec{q}'$ y $\mathcal{R} \cdot \vec{p} = \vec{p}'$, por lo que para que ambas expresiones sean equivalentes, cada una en su sistema de referencia, deberá cumplirse:

$$\mathcal{R} \cdot \hat{T} \cdot \mathcal{R}^{-1} = \hat{T}' \quad (\text{A-10})$$

que es la forma en que se transforman las componentes de un tensor de segundo rango frente a la rotación,

$$T'_{ij} = \sum_{pq} \alpha_{ip} \alpha_{jq} T_{pq}.$$

Es decir, si se tiene un conjunto de nueve cantidades dispuesto con un cierto orden en una matriz 3×3 , para comprobar si éstas son las componentes de un tensor de segundo orden será suficiente comprobar si relacionan dos vectores (cuyas componentes se transforman como las componentes de un tensor de primer orden). Esto ocurrirá siempre que los dos vectores representen propiedades físicas reales, ya que éstas se transforman de esta forma.

A.4.2. Ecuación de autovalores.

Se denominan *ejes principales*, *vectores principales*, o *autovectores* de un tensor al sistema de ejes coordinados en el cual el tensor tiene forma diagonal con valores de los elementos de la diagonal T_1 , T_2 y T_3 , a los que se denomina *autovalores*, *valores propios* o *valores principales* del tensor \hat{T} (usaremos λ para referirnos a ellos de forma genérica),

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \hat{T}^{\text{ep}} = \begin{pmatrix} T'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-11})$$

Cada uno de estos autovalores λ está asociado al correspondiente autovector \vec{v}_p (\vec{v}_p^{ep} en ejes principales). Aquí utilizamos el subíndice 'p' para denotar que nos referimos al vector principal (o propio) y el superíndice 'ep' para denotar que nos encontramos en el sistema de coordenadas principales.

En el sistema de ejes principales, Or^{ep} , los ejes propios del tensor son obviamente $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y como en este sistema de ejes el tensor es diagonal, claramente se cumple, para el vector propio \vec{v}_p^{ep} en el sistema de ejes principales ep

$$\hat{T}^{\text{ep}} \cdot \vec{v}_p^{\text{ep}} = \lambda \vec{v}_p^{\text{ep}} \quad (\text{A-12})$$

donde λ representa el autovalor asociado al vector principal \vec{v}_p^{ep} .

Al ser \hat{T} un tensor de segundo orden y \vec{v}_p un vector, ambos con propiedades de transformación determinadas para garantizar su invariancia bajo rotación, esta ecuación debe ser cierta en cualquier sistema de ejes transformado por rotación respecto del original. Lo podemos comprobar de forma sencilla, considerando otro sistema de ejes que se encuentra rotado respecto del anterior con una rotación caracterizada por una matriz de rotación \mathcal{R} , si hacemos:

$$\mathcal{R} \cdot \hat{T}^{\text{ep}} \mathcal{R}^{-1} \cdot \mathcal{R} \vec{v}_p^{\text{ep}} = \lambda \cdot \mathcal{R} \cdot \vec{v}_p^{\text{ep}}$$

[†] Hay también tensores de segundo orden como el tensor de dilatación térmica que aparecen relacionando un tensor con un escalar. En este caso, la relación

$$\hat{\epsilon}_{\text{térmica}} = [\epsilon_{ij}]_{\text{térmica}} = \hat{\alpha}_{\text{dil.}} \Delta T = [\alpha_{ij}]_{\text{dil.}} \Delta T \quad (\text{A-7})$$

relaciona el tensor de dilatación térmica $\hat{\alpha}_{\text{dil.}}$ con el tensor de deformaciones térmicas $\hat{\epsilon}_{\text{térmica}}$ a través del cambio de temperatura ΔT .

Esto da la misma expresión anterior (A-12) pero en el nuevo sistema de ejes coordenados:

$$\hat{T} \cdot \vec{v}_p = \lambda \cdot \vec{v}_p \quad (\text{A-13})$$

Así, cuando un vector \vec{v}_p está dirigido según una dirección principal, el vector resultante de aplicar el tensor \hat{T} sobre el vector \vec{v}_p es proporcional al mismo, con independencia de la orientación del sistema de referencia respecto del que se representan \hat{T} y \vec{v}_p (pero con ambos expresados respecto del mismo sistema de ejes). Pasando todo al primer miembro, la ecuación de autovalores queda:

$$(\hat{T} - \lambda \mathbb{I}) \vec{v}_p = 0 \quad (\text{A-14})$$

donde \mathbb{I} representa la matriz identidad, con elementos $\mathbb{I}_{ij} = \delta_{ij}$. Al ser \vec{v}_p un vector no nulo, para que la ecuación anterior tenga solución debe cumplirse que el determinante de $(\hat{T} - \lambda \mathbb{I})$ sea cero, es decir

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{A-15})$$

expresión cuya solución nos permite obtener los autovalores del tensor \hat{T} . Cuando alguno de estos autovalores está repetido se dice que hay degeneración.

Autovalores y autovectores de un tensor simétrico de segundo orden

Se dice que un tensor de segundo orden es *simétrico* si sus componentes satisfacen la condición $T_{ij} = T_{ji}$ y por tanto el tensor es igual a su transpuesto. La mayor parte de los tensores de segundo orden que describen propiedades físicas son simétricos (una excepción es p.ej. el tensor termoeléctrico). Se dice que un tensor de segundo orden es *antisimétrico* si sus componentes cumplen la condición $T_{ij} = -T_{ji}$ y por tanto el tensor es igual a menos su transpuesto.

Existe una particularidad muy importante en cuanto a los autovalores y autovectores de los tensores simétricos de segundo orden. Para un tensor simétrico de segundo orden, existe siempre al menos un sistema de tres ejes ortogonales (formado por las tres *direcciones* o *ejes principales*) en el cual el tensor toma la forma diagonal con las soluciones de (A-15), con las tres componentes de la diagonal reales. Estos elementos de la diagonal son los *valores propios* o *valores principales* del tensor, reales en este caso. Si el tensor no es simétrico lo anterior no se cumple y pueden aparecer autovalores complejos o autovectores que no forman un sistema de tres ejes ortogonales reales[†] (bien porque no sean ortogonales, bien porque no sean linealmente independientes o incluso porque aparezcan complejos).

Si dos de los autovalores están repetidos se dice que hay degeneración y que el autovalor es (doblemente) degenerado, cualquier par de ejes perpendiculares entre sí y a su vez perpendiculares al eje principal correspondiente al tercer autovalor (el que es distinto) serían ejes principales en dicho plano, asociados con el autovalor repetido. Así, en este caso existirían muchos sistemas de ejes principales posibles, que comparten el tercer eje principal, y las componentes del tensor asociadas al plano principal no cambiarían por rotación de ejes en el mismo en torno al tercer eje.

En el caso más extremo de degeneración los tres autovalores pueden ser iguales. En este caso, cualquier sistema de tres ejes ortogonales es un sistema de ejes principal. Así, en cualquier sistema de ejes ortonormales el tensor es diagonal con los mismos autovalores iguales y por tanto las componentes del tensor no cambian bajo rotación del sistema de ejes.

[†] Pruébese, por ejemplo, a obtener autovalores y autovectores de alguno de los tensores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.4.3. Invariantes bajo rotación de un tensor de segundo orden.

Para un tensor genérico de segundo orden, la ecuación de autovalores (A-15) queda como:

$$\begin{aligned} & -\lambda^3 \\ & + (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 \\ & - (T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}T_{32} - T_{13}T_{31} - T_{12}T_{21})\lambda \\ & + \Delta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

que, para el caso de un tensor simétrico, pasa a ser

$$\begin{aligned} & -\lambda^3 \\ & + (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 - \\ & - (T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}^2 - T_{13}^2 - T_{12}^2)\lambda \\ & + \Delta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

de soluciones $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \equiv T_1, T_2, T_3$, todas ellas reales. En la ecuación anterior se ha utilizado Δ para el determinante de $[T_{ij}]$, que para un tensor genérico de segundo orden como $[T_{ij}]$ tiene la forma general

$$\Delta = T_{11}T_{22}T_{33} + T_{12}T_{13}T_{31} + T_{21}T_{32}T_{13} - T_{13}T_{22}T_{31} - T_{12}T_{21}T_{33} - T_{32}T_{23}T_{11} \quad (\text{A-18})$$

Si el sistema de ejes está dirigido a lo largo de las direcciones principales, los elementos de fuera de la diagonal son todos nulos, y el determinante queda $\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = T_1T_2T_3$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\equiv T_1, T_2, T_3)$ son los valores propios del tensor obtenidos a partir de la ecuación de autovalores (A-15).

Las soluciones λ_i de la ecuación (A-17) no dependen del sistema de referencia, y por lo tanto, los coeficientes de λ en dicha ecuación tampoco pueden depender del sistema de referencia. Se dice que dichos coeficientes son invariantes frente a la rotación del sistema de ejes.

Se denomina *traza* a la suma de los elementos de la diagonal. En un tensor simétrico de segundo orden, la traza o *invariante de primer orden* es un invariante frente a la rotación, es decir:

$$\text{INV}_1 \equiv \sum_i T_{ii} = \sum_i T'_{ii} \quad (\text{A-19})$$

Existen además otros dos invariantes para un tensor simétrico de segundo orden, el denominado *invariante de segundo orden*,

$$\begin{aligned} -\text{INV}_2 &= -(T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} + T_{11}T_{22} - T_{23}T_{32} - T_{13}T_{31} - T_{12}T_{21}) \\ &= -(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1) \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

que también puede escribirse como la suma de los menores complementarios de los elementos de la diagonal,

$$\text{INV}_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{13} \\ T_{31} & T_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \quad (\text{A-21})$$

y el *determinante* o *invariante de tercer orden*,

$$\text{INV}_3 = \Delta = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = T_1T_2T_3 \quad (\text{A-22})$$

correspondientes a los coeficientes de los términos lineal en λ e independiente. Todos ellos permanecen invariantes bajo rotación del sistema de ejes.

A.4.4. Rotación de ejes en un plano principal: el círculo de Mohr.

El círculo de Mohr constituye una representación gráfica muy sencilla y útil para estudiar el cambio de las componentes de un tensor simétrico de segundo orden cuando se produce una rotación del sistema de ejes en uno de los planos principales.

Consideremos de partida un determinado tensor de segundo orden en su correspondiente sistema de ejes principales, con valores principales T_1 , T_2 y T_3 , ordenados de menor a mayor.

$$\hat{T}^{\text{ep}} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-23})$$

Si se produce una rotación de ejes en uno de los planos principales, por ejemplo, el plano 12 (rotación alrededor del eje 3) caracterizada por una matriz de rotación

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-24})$$

las componentes del tensor se transformarán bajo la rotación como $\mathcal{R}\hat{T}\mathcal{R}^{-1}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que desarrollado queda

$$\hat{T}' = \mathcal{R}\hat{T}^{\text{ep}}\mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta & -T_1 \sin \theta \cos \theta + T_2 \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -T_1 \sin \theta \cos \theta + T_2 \sin \theta \cos \theta & T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A-25})$$

Es decir las componentes diagonales T_{11} y T_{22} del tensor en el nuevo sistema de ejes son

$$T_{11} = T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta \quad (\text{A-26a})$$

$$T_{22} = T_1 \sin^2 \theta + T_2 \cos^2 \theta \quad (\text{A-26b})$$

y las no diagonales T_{12} (iguales a T_{21} para un tensor simétrico) quedan

$$T_{12} = T_{21} = -T_1 \sin \theta \cos \theta + T_2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{A-26c})$$

Demos a estas expresiones unos pequeños retoques. Por ejemplo a la (A-26a),

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_1 \cos^2 \theta + T_2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{T_1}{2}(\cos^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{T_2}{2}(\sin^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= \frac{T_1}{2}(\cos^2 \theta + 1 - \sin^2 \theta) + \frac{T_2}{2}(\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta) \\ &= \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} + \frac{T_1}{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \frac{T_2}{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Con retoques similares en la ecuación (A-26b) y recordando que $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ y que $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, se pueden reescribir las ecuaciones anteriores como

$$T_{11} = \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_2 - T_1}{2} \cos 2\theta \quad (\text{A-27a})$$

$$T_{22} = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{2} \cos 2\theta \quad (\text{A-27b})$$

$$T_{12} = \frac{T_2 - T_1}{2} \sin 2\theta \quad (\text{A-27c})$$

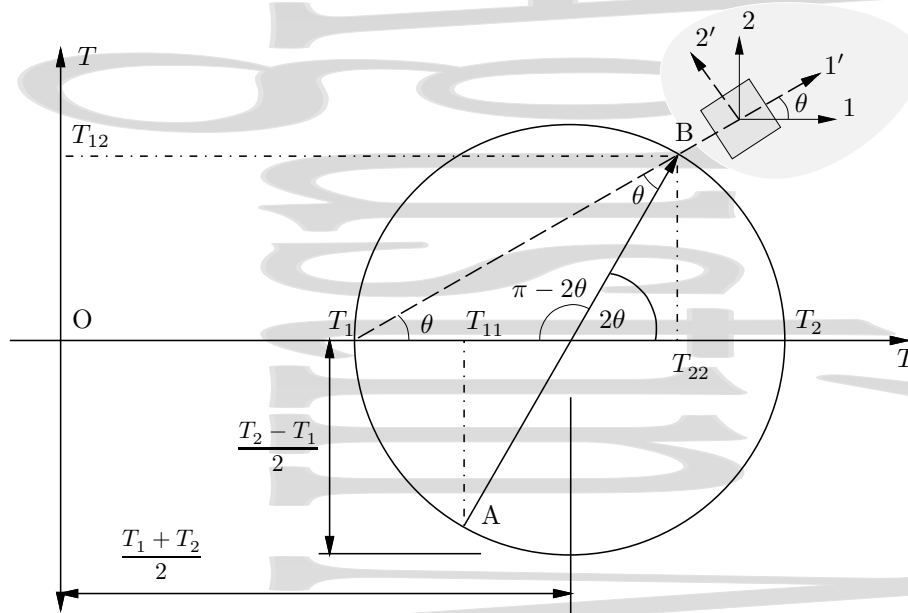


Figura A-3: Círculo de Mohr en un plano principal. Nótese que la rotación en el círculo de Mohr, 2θ es el doble de la rotación θ en el sistema de ejes real. Los sentidos de ambas rotaciones son idénticos, positivo como se muestra en la figura.

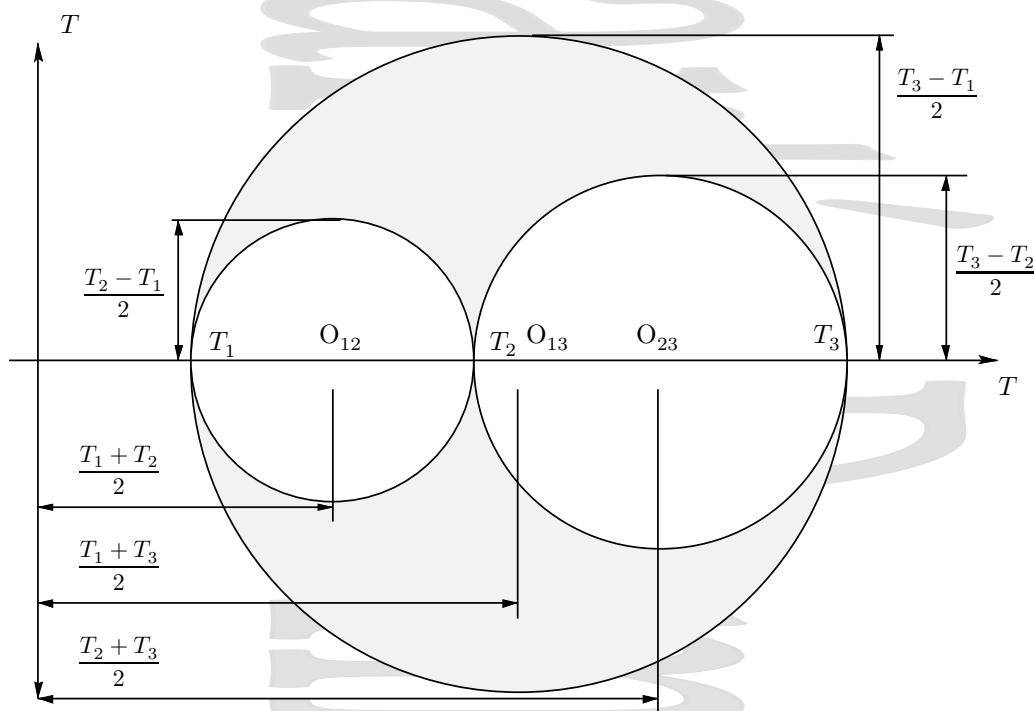


Figura A-4: Círculo de Mohr en los tres planos principales. El máximo valor posible de las componente no diagonales se produce en el plano principal correspondiente a los autovalores extremos.

Pero ésta es la ecuación paramétrica de una circunferencia centrada en el punto $\left(\frac{T_1 + T_2}{2}, 0\right)$ y de radio $\frac{T_2 - T_1}{2}$, como la que se muestra en la figura A-3 y a la que se denomina *círculo de Mohr*.

Esto mismo se podría haber hecho para cualquiera de los otros dos planos principales, teniéndose distintos círculos

de Mohr para cada plano principal como se muestra en la figura A-4.

El círculo de Mohr permite obtener de forma muy sencilla las componentes de un tensor simétrico cuando se produce una rotación de un ángulo θ en un plano principal. Para ello, si el ángulo realmente girado es θ , giramos 2θ el segmento AB en torno al origen del círculo de Mohr. Los puntos de corte de este segmento con el círculo de Mohr dan las componentes del tensor para este giro. Así, las proyecciones de estos puntos sobre el eje horizontal dan las componentes diagonales transformadas, T_{11} y T_{22} mientras que la proyección sobre el eje vertical del punto B da la componente no diagonal transformada, de acuerdo con las ecuaciones (A-27). En cada uno de los planos principales el máximo valor de la componente no diagonal tendrá lugar cuando AB esté vertical, es decir, cuando $\theta = 45^\circ$ que dará $2\theta = 90^\circ$. Obviamente, como se ve en la figura A-4 el máximo valor no diagonal tendrá lugar en el plano en el cual los valores principales correspondientes estén más separados entre sí, en el caso de la figura, el plano 13, a 45° de los ejes principales girando en torno al otro eje principal.

El círculo de Mohr también permite, una vez conocido que el sistema está en uno de sus planos principales, obtener valores y direcciones principales a partir de cálculos trigonométricos sencillos

A.4.5. Descomposiciones habituales de un tensor de segundo orden.

Por distintas razones, a veces es útil descomponer un tensor de segundo orden genérico en dos tensores de ciertas características. Las descomposiciones más habituales son las que se presentan a continuación.

Descomposición en un tensor simétrico y uno antisimétrico.

Siempre es posible descomponer un tensor de segundo orden en la suma de dos tensores, uno simétrico y otro antisimétrico,

$$\hat{T} = \hat{T}^{\text{simétrico}} + \hat{T}^{\text{antisimétrico}} \quad (\text{A-28})$$

con componentes definidas como la semisuma y la semidiferencia de las componentes opuestas en la forma

$$T_{ij}^{\text{simétrico}} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \quad \text{y} \quad T_{ij}^{\text{antisimétrico}} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (\text{A-29})$$

Nótese que esta descomposición sólo tiene sentido para los tensores de segundo orden.

Descomposición en componentes hidrostática y desviadora.

En ocasiones es conveniente descomponer un tensor en sus componentes hidrostática y desviadora.

$$\hat{T} = \hat{T}^{\text{hidrostática}} + \hat{T}^{\text{desviadora}} \quad (\text{A-30})$$

La *componente hidrostática* o *tensor hidrostático* (también llamado *tensor esférico*) es un tensor diagonal con las tres componentes iguales entre sí y cuya traza (suma de los elementos de la diagonal) es igual a la del tensor analizado.

$$T_{ii}^{\text{hidrostática}} = \frac{1}{3} \sum_{i=x,y,j} T_{ii} \quad \Rightarrow \quad \hat{T}^{\text{hidrostática}} = \mathbb{I} T^{\text{hidrostática}} \quad (\text{A-31a})$$

mientras que la *componente desviadora* es la necesaria para complementarlo,

$$\hat{T}^{\text{desviadora}} = \hat{T} - \mathbb{I} \hat{T}^{\text{hidrostática}}, \quad (\text{A-31b})$$

donde \mathbb{I} es el tensor identidad.

A.4.6. La superficie indicadora o forma cuadrática asociada a un tensor simétrico de segundo orden

Una *forma cuadrática* es una generalización del producto escalar de dos vectores \vec{p} y \vec{q} a través de un tensor de segundo orden T_{ij} ,

$$\vec{p} \hat{T} \vec{q} = \sum_{ij} p_i T_{ij} q_j = 1$$

Consideremos una matriz T_{ij} de nueve componentes a la que aplicamos dos vectores posición por la izquierda y por la derecha de forma que el resultado sea la unidad,

$$\sum_{ij} T_{ij} r_i r_j = 1 = (r_1, r_2, r_3) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

que desarrollado queda

$$T_{11}r_1^2 + T_{12}r_1r_2 + T_{13}r_1r_3 + T_{21}r_2r_1 + T_{22}r_2^2 + T_{23}r_2r_3 + T_{31}r_3r_1 + T_{32}r_3r_2 + T_{33}r_3^2 = 1.$$

Si consideramos el caso de una matriz simétrica, $T_{ij} = T_{ji}$, esta suma puede escribirse como

$$T_{11}r_1^2 + T_{22}r_2^2 + T_{33}r_3^2 + 2T_{12}r_1r_2 + 2T_{23}r_2r_3 + 2T_{13}r_1r_3 = 1,$$

que es la ecuación de una superficie de segundo orden (una cuádrica) centrada en el origen y que puede ser bien un elipsoide o bien un hiperboloide, según los signos de T_1 , T_2 y T_3 .

Si ahora transformamos las componentes de los vectores \vec{r} mediante una rotación del sistema de ejes dada por una matriz de rotación $\mathcal{R} = [\alpha_{ij}]$, se tiene $r_i = \sum_k \alpha_{ki} r'_k$ y $r_j = \sum_l \alpha_{lj} r'_l$ (nótese que es la transformación inversa), y la ecuación de la forma cuadrática queda como

$$\sum_{ijkl} T_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{lj} r'_k r'_l = 1 = \sum_{kl} T'_{kl} r'_k r'_l \quad \text{con} \quad T'_{kl} = \sum_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{lj} T_{ij}$$

que coincide con la forma en que se transforman las componentes de un tensor simétrico de segundo orden. De esta forma vemos que para ver cómo se transforman las componentes de un tensor bajo rotación del sistema de ejes basta con ver como se transforma la correspondiente cuádrica.

Una superficie cuádrica de esta forma tiene ejes principales, es decir, unos ejes en los que la cuádrica se representa como

$$T_1 r_1^2 + T_2 r_2^2 + T_3 r_3^2 = 1$$

donde los T_i son los valores principales del tensor correspondiente. Si comparamos con la ecuación general de una cuádrica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

vemos que los semiejes correspondientes son precisamente $1/\sqrt{T_1}$, $1/\sqrt{T_2}$ y $1/\sqrt{T_3}$.

Si los tres valores T_1 , T_2 y T_3 son positivos la superficie es un elipsoide real, y si los tres son negativos tendremos un elipsoide imaginario. Si dos de los valores son positivos y uno negativo la cuádrica es un hiperboloide de una hoja y si uno es positivo y dos negativos es un hiperboloide de dos hojas como se ve en la figura A-5.

Veamos una propiedad interesante basada en las características de una elipse,

Si T_{ij} son las componentes de un tensor simétrico de segundo orden que relaciona los vectores \vec{p} y \vec{q} en la forma $\vec{p} = \hat{T}\vec{q}$ (y por tanto, $p_i = \sum_j T_{ij} q_j$) la dirección de \vec{p} para un \vec{q} dado puede obtenerse dibujando el vector posición \vec{r} de un punto Q de la cuádrica tal que \vec{r} sea paralelo a \vec{q} y encontrando la normal a la cuádrica en Q.

Para demostrar esto partimos del tensor \hat{T} en ejes principales. El vector \vec{u}_q tiene componentes (u_1, u_2, u_3) y, si OQ tiene longitud r , el vector posición de Q, \vec{r} tendrá como coordenadas $r(u_1, u_2, u_3) = (r_1, r_2, r_3)$. Como Q está en la superficie sus coordenadas cumplirán $T_1 r_1^2 + T_2 r_2^2 + T_3 r_3^2$.

En una cuádrica, si los cosenos directores del vector posición de un punto de la misma desde el origen son (u_1, u_2, u_3) el vector $(u_1 T_1, u_2 T_2, u_3 T_3)$ es normal a la superficie de la cuádrica en ese punto. Como

$$\vec{p} = [T_{ij}] \vec{q} = q(u_1 T_1, u_2 T_2, u_3 T_3)$$

\vec{p} deberá ser normal a la superficie en ese punto.

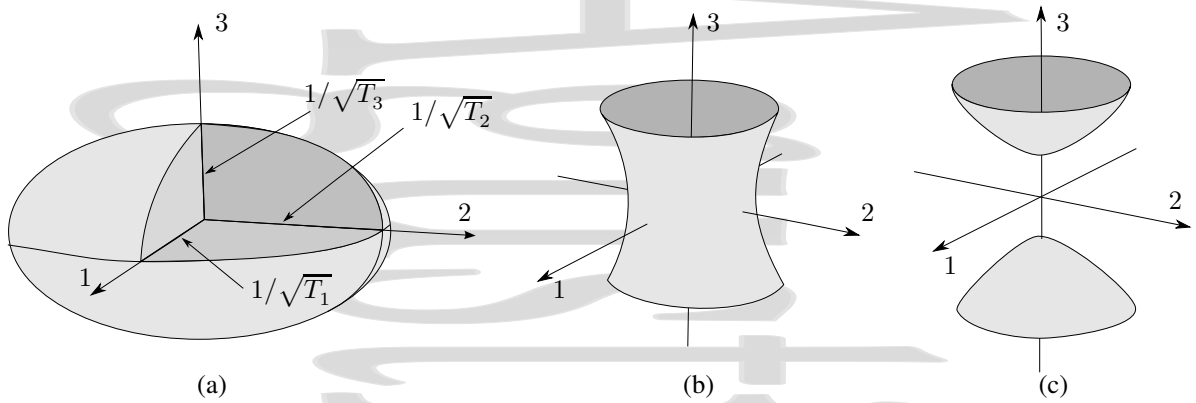


Figura A-5: Distintos tipos de cuádricas. Cuando T_1, T_2 y T_3 son positivos se tiene el elipsoide de (a), cuando dos son positivos y uno negativo (en el caso concreto de la figura, el negativo es T_3) se obtiene un hiperboloide de una hoja como (b) y si dos son negativos y uno positivo (en el caso de la figura, el positivo es T_3) un hiperboloide de dos hojas como en (c).

Esto se ve muy claro en el caso de un elipsoide real, pero si tenemos los tres valores negativos lo que tendremos en realidad es un elipsoide imaginario. En la práctica esto no añade gran complicación, se trabaja con el elipsoide real que correspondería al (a) cambiado de signo ($T_1x^2 + T_2y^2 + T_3z^2 = -1$, que sería un elipsoide real al ser $T_1, T_2, T_3 < 0$) y se cambiaría de signo el resultado, que apuntaría en el sentido contrario, hacia dentro del elipsoide.

Asimismo, cuando tenemos hiperboloides, de una o dos caras, hay direcciones en las que el radio vector no corta el hiperboloide real, por ejemplo, si en la figura A-5-(b) la dirección es próxima al eje 3, o si en la figura A-5-(c) es próxima al plano 12. En estas direcciones, el punto de corte sería imaginario, pero para trabajar con él utilizaríamos el hiperboloide real complementario (el que se obtendría cambiando de signo al 1, por ejemplo en la figura A-5 (b) y (c) serían complementarios) y trabajaríamos con él en esta zona, invirtiendo el sentido del resultado. Para mayor claridad esto se representa en la figura A-7, para el caso de un tensor plano con $T_1 > 0$ y $T_2 < 0$.

A.5. Tensores de orden superior.

Además de los tensores que hemos visto hasta ahora, pueden aparecer tensores de orden superior en las leyes de la Física. Por ejemplo, el *tensor piezoeléctrico* es un tensor de orden 3 que relaciona un vector (la polarización) con un tensor (el tensor de tensiones) en la forma

$$[P_i] = [d_{ijk}][\sigma_{jk}].$$

Las 27 componentes de este tensor de orden tres se transformarían, bajo rotación del sistema de ejes, en la forma

$$d'_{ijk} = \sum_{pqr} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} d_{pqr}$$

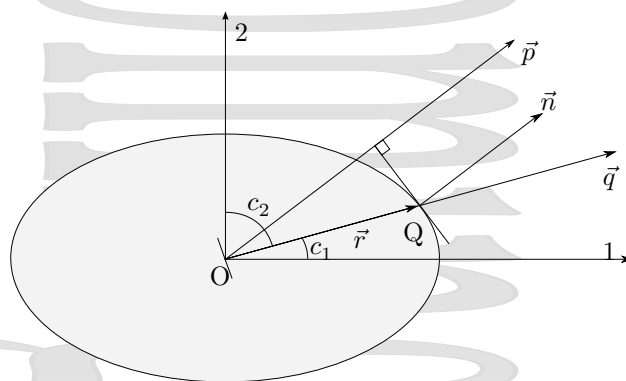


Figura A-6: Forma cuadrática asociada al tensor de tensiones.

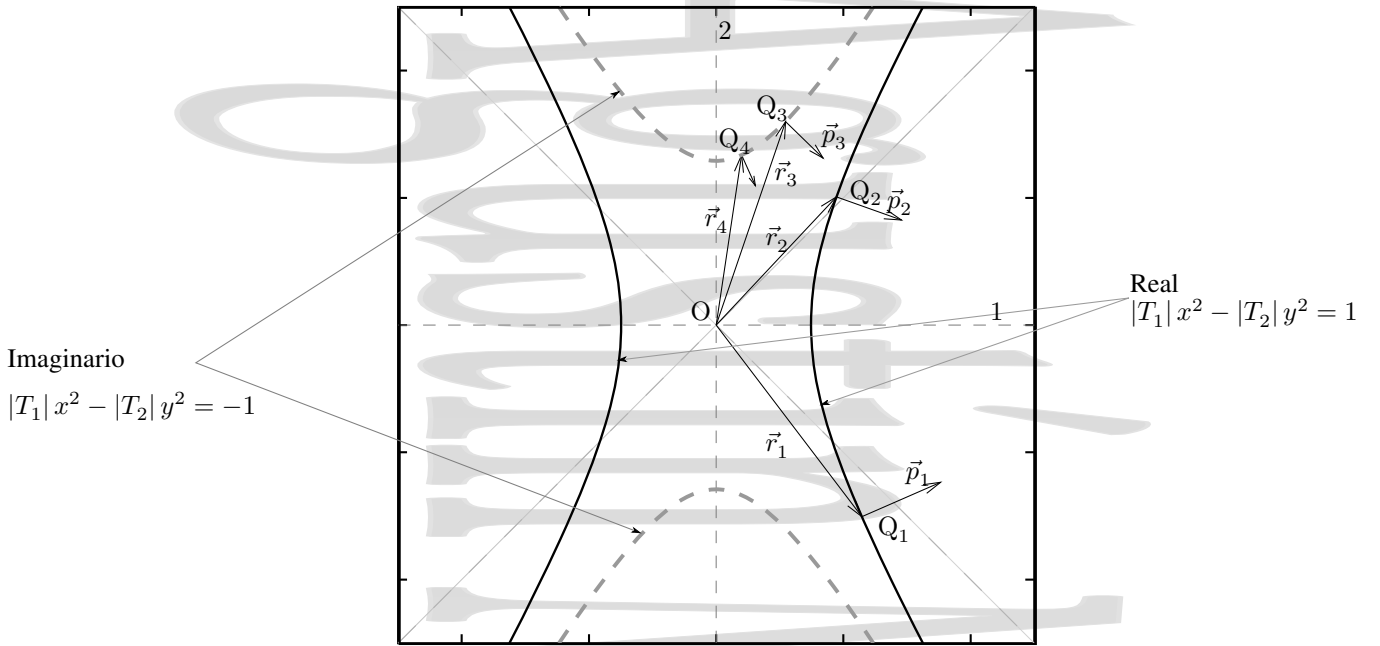


Figura A-7: Trabajando con un hiperboloide real e imaginario en el plano 12 cuando $T_1 > 0$ y $T_2 < 0$. El hiperboloide correspondiente es el marcado en negro y cuando la dirección deseada lo corta se procede como de costumbre. Cuando la dirección deseada no pasa por el hiperboloide real es necesario trabajar con el hiperboloide imaginario complementario (en gris y a trazos), de forma que se busca el punto de corte, se traza la normal y se le da a ésta el sentido contrario que en el caso del hiperboloide real.

la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones viene dada a través de un tensor de orden 4, el *tensor de las constantes elásticas*,

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ijkl}][\epsilon_{kl}]$$

que tendría 81 componentes (afortunadamente ni mucho menos son todas independientes) que se transformarían en la forma

$$C'_{ijkl} = \sum_{pqrs} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \alpha_{ls} C_{pqrs}.$$

Apéndice B

Criterios de resistencia límite.

Una vez analizado el estado de tensiones de un elemento tensionado es muy interesante tener una idea de las condiciones en que este estado de tensiones puede considerarse seguro y de aquéllas en las que el comportamiento del elemento se aproxima a los límites de seguridad.

Como la tanto la fractura como la plastificación (comportamiento en la zona de fluencia) se inicia en un punto, que será el punto con las condiciones más críticas, es necesario asegurarse de que ningún punto del elemento llega a esas condiciones críticas.

No existe un criterio único que pueda aplicarse a todos los materiales, sino una serie de criterios que funcionan mejor en unos o en otros materiales. Por ejemplo, para los materiales frágiles el criterio de máxima tracción funciona razonablemente, mientras que para materiales dúctiles se suelen utilizar los criterios de máximo cortante o los criterios energéticos.

Los criterios suelen estar basados en las condiciones de resistencia del material a una prueba de tracción simple (véase la sección 1.4), en la que $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ y $\sigma_3 \neq 0$. Dependiendo de las características del material concreto, el máximo esfuerzo admisible vendrá dado bien por el límite de fluencia del material σ_{fluencia} en el que empieza a producirse la plastificación (así es para *materiales dúctiles*, en los que al empezar la fluencia el elemento estructural deja de ser útil) o por el esfuerzo último $\sigma_{\text{último}}$ justo antes de la rotura (para *materiales frágiles*), como se describen en la sección 1.3.1. Por simplicidad, denominaremos esfuerzo límite $\sigma_{\text{límite}}$ o esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ al que corresponda de los dos para el material concreto analizado en este estudio de tracción simple.

En estas condiciones, la deformación unitaria máxima es la dada por la ley de Hooke (1-2)

$$\epsilon_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{E}, \quad (\text{B-1})$$

la tensión cortante máxima es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{2}, \quad (\text{B-2})$$

la *densidad de energía de deformación por tracción* viene dada por la expresión (1-6) particularizada a este caso

$$\mathcal{U} = \frac{\sigma_{\text{máx}}^2}{2E}. \quad (\text{B-3})$$

La *densidad de energía de deformación hidrostática* es la componente hidrostática de esta densidad de energía de deformación y viene dada por la ecuación (4-40) particularizada a este caso

$$\mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = \frac{1 - 2\nu}{6E} \sigma_{\text{máx}}^2 = \frac{\sigma_{\text{máx}}^2}{18K}. \quad (\text{B-4})$$

Finalmente la *densidad de energía de distorsión* viene dada por la ecuación (4-43) particularizada a este caso

$$\mathcal{U}_{\text{distorsión}} = \mathcal{U} - \mathcal{U}_{\text{hidrostática}} = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{\text{máx}}^2 = \frac{\sigma_{\text{máx}}^2}{6G}. \quad (\text{B-5})$$

A continuación se dan una serie de criterios que se utilizan o se han utilizado para intentar parametrizar las condiciones en las que un material dado se acerca a un comportamiento que no se considera suficientemente seguro en el punto de un elemento en el que se dan las peores condiciones. Algunos de ellos se dan por un interés meramente histórico, ya que no se utilizan en la práctica.

B.1. Criterio de la máxima deformación.

El *criterio de máxima deformación* o de *Saint-Venant* considera que el elemento sale de la zona de seguridad cuando alguna de las deformaciones principales asociadas al esfuerzo alcanza en una dirección cualquiera un valor por encima de un cierto valor límite igual al obtenido en una prueba de tracción pura cuando el material alcanza el máximo esfuerzo admisible $\sigma_{\text{máx}}$ antes de ser considerado inseguro.

Este criterio se da por un interés académico, ya que aunque es el criterio más antiguo históricamente, no es el que mejor se ajusta a los resultados experimentales.

B.2. Criterios de la máxima tensión.

B.2.1. Criterio de la máxima tensión principal.

Dentro de los criterios de máxima tensión, el primer criterio que se consideró es el denominado *criterio de máxima tensión principal*, atribuido a *Rankine*. Simplemente considera que el elemento fallará si en algún punto del mismo se alcanzan valores de la tensión principal mayores que unos ciertos valores críticos.

Estos valores críticos se establecen tanto para la tracción como para la compresión, teniendo en general valores distintos (en valor absoluto). Por ejemplo el hormigón resiste muy mal la tracción, pero tiene una alta resistencia a la compresión. Estos valores críticos corresponden al esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ a tracción o compresión, obtenido mediante pruebas de tracción o compresión simples.

Este criterio de máxima tensión normal se aplica para analizar el comportamiento de materiales frágiles sometidos a tracción.

En el espacio de las tensiones principales, la zona segura estaría en el interior de un cubo de lado

$$|\sigma_{\text{máx}}^{\text{tracción}}| + |\sigma_{\text{máx}}^{\text{compresión}}|$$

centrado en un punto con sus tres coordenadas iguales a

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}^{\text{tracción}} + \sigma_{\text{máx}}^{\text{compresión}}}{2} = \frac{|\sigma_{\text{máx}}^{\text{tracción}}| - |\sigma_{\text{máx}}^{\text{compresión}}|}{2}.$$

B.2.2. Criterio de la máxima tensión cortante.

Un criterio similar se refiere a la tensión cortante, el *criterio de máxima tensión cortante* o *criterio de Tresca-Guest* o simplemente *criterio de Tresca*. Este criterio considera que el elemento fallará si en algún punto del mismo se alcanzan valores de la tensión cortante por encima de un determinado valor crítico igual al alcanzado en un ensayo de tracción simple ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) cuando se llega al esfuerzo máximo admisible, es decir, $\tau_{\text{máx}} = \sigma_{\text{máx}}/2$. Si σ_1 y σ_3 son las tensiones extremas, la condición de Tresca establecería que se alcanza el límite de resistencia cuando se cumple

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{2} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}.$$

esta condición se suele escribir en la forma

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_{\text{máx}}^2 \quad (\text{B-6})$$

o en la forma general

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_{\text{máx}}^2] [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_{\text{máx}}^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_{\text{máx}}^2] = 0 \quad (\text{B-7})$$

de forma que se producirá plastificación (o rotura) si se satisface alguna de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &\geq \sigma_{\text{máx}} \\ |\sigma_1 - \sigma_3| &\geq \sigma_{\text{máx}} \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &\geq \sigma_{\text{máx}} \end{aligned} \quad (\text{B-8a})$$

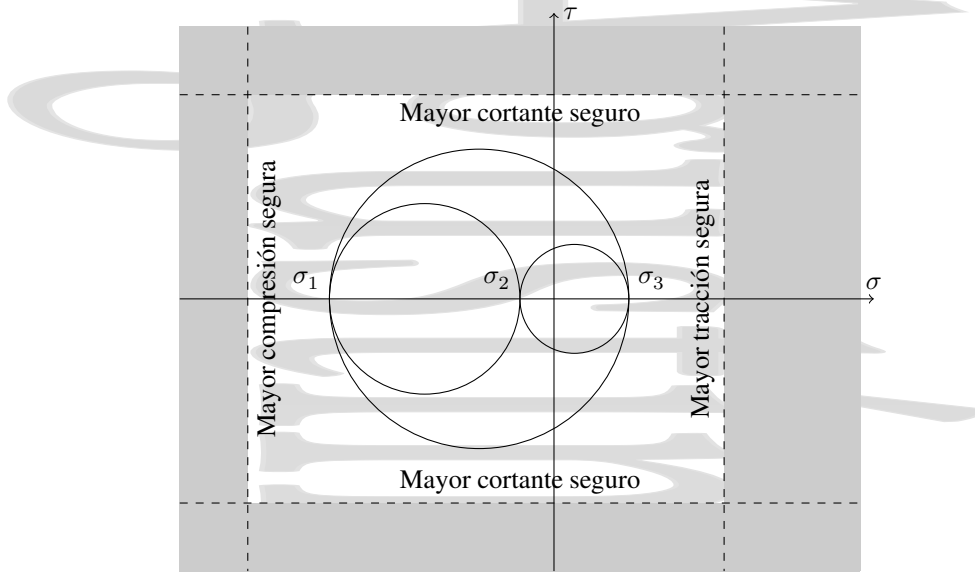


Figura B-1: Regiones seguras dentro de los límites de los criterios de máxima tensión. Aunque los criterios de máxima tensión normal y de máxima tensión cortante se aplican a materiales de distintos comportamientos, se muestran aquí en una única figura. El criterio de máxima tensión normal se aplicaría a materiales frágiles mientras que el criterio de máxima tensión cortante se aplicaría a materiales dúctiles.

Este criterio se utiliza para analizar el comportamiento de materiales dúctiles, en los que en las condiciones críticas se empezará a producir plastificación.

Aunque los criterios de máxima tensión normal y de máxima tensión cortante se aplican a materiales de distintos comportamientos, en la figura (B-1) se representan en conjunto los dos criterios anteriores en un diagrama de tensiones cortantes frente a tensiones normales del tipo del diagrama de los círculos de Mohr.

Para que el comportamiento de un material pueda considerarse seguro según uno de los dos criterios de tensión máxima anteriores, los tres círculos de Mohr asociados al estado de tensiones del material en sus tres planos principales deben encontrarse dentro de los límites marcados por el criterio correspondiente.

B.3. Criterio de la máxima energía de distorsión.

La experiencia muestra que es muy difícil romper un material únicamente mediante una tensión hidrostática, sea ésta de tracción o compresión (los experimentos para tracción hidrostática son realmente complicados).

A partir de esta idea, Richard Von Mises propuso en 1913 un criterio de plastificación según el cual un estado de tensiones debe dejar de considerarse seguro cuando la energía de distorsión (4-38) se hace igual a la energía de distorsión (4-43) correspondiente al estado límite de resistencia en un estudio de tracción simple,

$$\frac{1}{6G} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2} \right] = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{\text{máx}}^2 = \frac{\sigma_{\text{máx}}^2}{6G}. \quad (\text{B-9})$$

Este criterio se denomina *criterio de la máxima energía de distorsión*, *criterio de Maxwell-Hubert-Mises-Hencky* o simplemente *criterio de Von Mises*.

Si definimos la *tensión de Von Mises* como

$$\sigma_{\text{VM}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (\text{B-10})$$

se alcanzaría la condición de Von Mises cuando la tensión de Von Mises se hace igual a la máxima tensión admisible en el experimento de tracción simple.

B.4. Comparación de los distintos criterios en un estado de tensión plana.

Comparemos ahora los distintos criterios de resistencia límite para el caso particular de un estado de tensión plana en el que en ejes principales $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$ y $\sigma_3 = 0$. Por simplicidad consideraremos que los valores de la tracción máxima

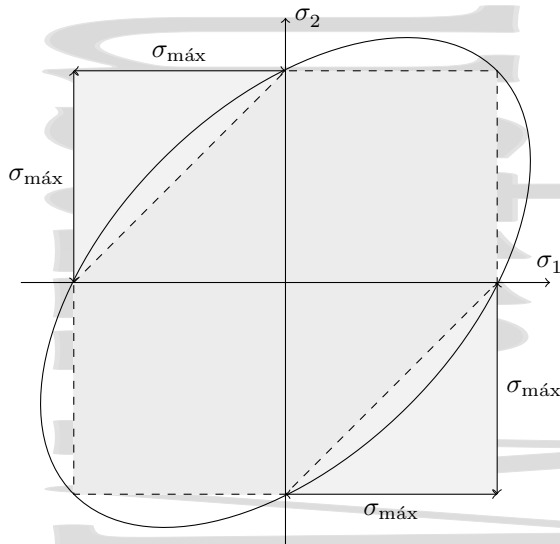


Figura B-2: Comparación de los criterios de máxima tensión y de máxima energía de distorsión para un estado de tensión plana en el espacio de tensiones principales.

y de la compresión máxima son similares y representaremos las tensiones en el espacio de tensiones principales, un sistema de ejes dado por las tensiones principales, en la forma que se presenta en la figura B-2.

Los valores que cumplen el *criterio de máxima tensión principal* son los que se encuentran en el cuadrado sombreado de lado $2\sigma_{\text{máx}}$ y centrado en el origen de coordenadas, que se muestra en la figura.

A la hora de analizar el *criterio de máxima tensión cortante* en el diagrama de la figura hay que distinguir dos casos, cuando las dos tensiones principales tienen el mismo signo y cuando no es así.

Cuando las dos tensiones principales tienen el mismo signo, la máxima diferencia de tensiones principales está entre la tercera tensión principal (nula) y la máxima de entre las tensiones principales σ_1 y σ_2 , lo que nos dará el cortante máximo como la mitad de la tensión principal máxima. Así, en este caso ninguna de estas dos puede superar el valor $\sigma_{\text{máx}}$, por lo que los valores admisibles son los que se encuentran en el área definida por los dos cuadrados de lado $\sigma_{\text{máx}}$ de la figura B-2, con borde exterior en línea de trazos y un vértice en el origen de coordenadas.

Cuando las dos tensiones principales tienen distinto signo la tercera tensión principal (nula) está entre las otras dos tensiones principales, por lo que el cortante máximo vendrá dado por $|\sigma_1 - \sigma_2|/2$ que, en el límite, debe ser igual al cortante máximo admisible (B-2). Así, en el límite debe cumplirse

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_{\text{máx}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_{\text{máx}} & (\sigma_1 > 0) \\ \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_{\text{máx}} & (\sigma_1 < 0) \end{cases}$$

que nos da las dos líneas de trazos en las regiones en las que σ_1 y σ_2 tienen distinto signo. Así, la región delimitada por la línea de trazos correspondería a la región segura de acuerdo con el criterio de máximo cortante.

En cuanto al criterio de máxima energía de distorsión, en el estado de tensión plana considerado la condición de Von Mises quedaría como

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_{\text{máx}}^2 \quad (\text{B-11})$$

que, en la figura, correspondería a la elipse representada en la misma, considerándose segura la región en su interior.

Como se ve, no hay mucha diferencia entre los criterios de máximo cortante y máxima energía de distorsión utilizados para materiales dúctiles.

Apéndice C

Rotación de un sistema de ejes. Ángulos de Euler.

Según el *teorema de rotación de Euler*, la orientación mutua de dos sistemas de ejes en un espacio tridimensional puede describirse completamente por tres parámetros independientes. En concreto puede describirse como el resultado de tres rotaciones consecutivas alrededor de ciertos ejes, denominándose *ángulos de Euler* a los ángulos correspondientes a cada una de las rotaciones. Todos los elementos de la matriz de rotación \mathcal{R} que describe dicho cambio del sistema de ejes[†] pueden expresarse en función de estos tres parámetros.

No existe una definición única de los ángulos de Euler, por lo que aquí se describirán las dos más utilizadas, las denominadas *zxz* y *zyz*. Si denominamos *línea de nodos* ξ a la línea en la que intersectan los planos perpendiculares a los ejes z y Z (recuérdese que los orígenes de ambos sistemas coinciden), la diferencia es que en un caso se comienza llevando el eje x a la línea de nodos y en el otro caso el eje y .

Además de las convenciones anteriores existen otras, incluso con giros en sentido negativo o sistemas de referencia no orientados a derechas, o el denominado sistema de referencia aeroespacial.

Los ángulos de Euler tienen un par de inconvenientes, por una parte es difícil interpolarlos fácilmente, es decir, es difícil construir un camino continuo que vaya de una orientación a otra. Por otra parte hay una indeterminación para β (o θ) igual a 0 o π , incluso con las precauciones descritas más abajo.

C.1. La notación *zyz* (o *y*)

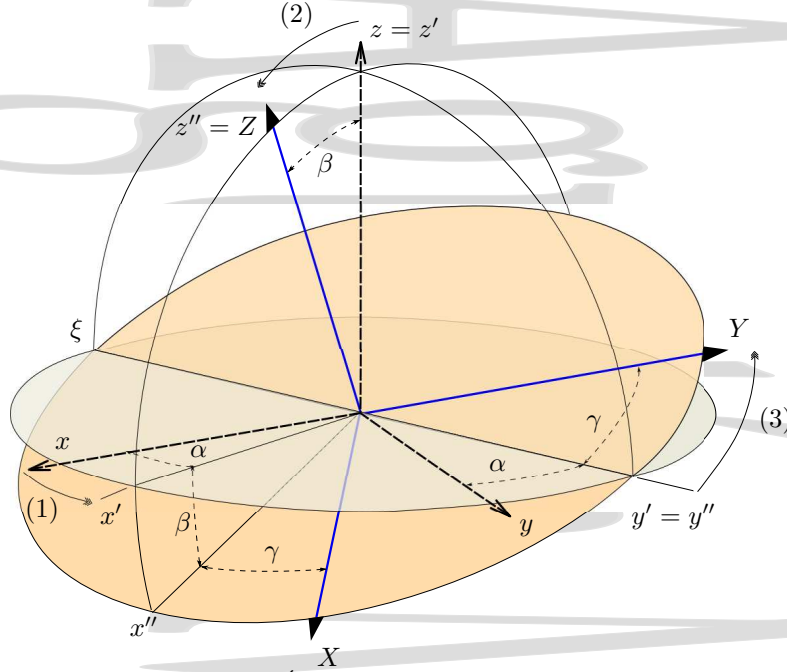
En el convenio *zyz* (o *y*) los ángulos de Euler (α, β, γ) corresponden a las siguientes rotaciones, que aplicadas sucesivamente al sistema de ejes *xyz* le llevan a coincidir con el *XYZ*.

1. Rotación de un ángulo α alrededor del eje z en el sentido positivo (el contrario al de las agujas del reloj) llevando el sistema de ejes *xyz* a $x'y'z'$ (realmente a $x'y'z$ ya que z y z' coinciden). En las condiciones finales de este paso los ejes $z = z'$, x' y Z están contenidos en el mismo plano y se ha llevado el eje y a la línea de nodos. Nótese que el ángulo α coincide con el ángulo azimutal del eje Z en el sistema *xyz* en coordenadas esféricas.
2. Rotación de un ángulo β alrededor del eje y' en sentido positivo hasta que el eje z'' coincide con el eje Z , pasando el sistema de ejes $x'y'z'$ a $x''y''z''$. El ángulo β de giro coincide con la latitud del eje Z en el sistema de coordenadas *xyz*.
3. Finalmente, y ya en el plano perpendicular al eje Z se rota el sistema un ángulo γ alrededor de Z en el sentido positivo pasando el sistema $x''y''z''$ tras esta rotación a coincidir con el sistema *XYZ*.

La matriz de rotación que describe la rotación completa es el producto de las tres matrices de rotación que describen cada una de las rotaciones simples,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{z''}(\gamma) \cdot \mathcal{R}_{y''}(\beta) \cdot \mathcal{R}_z(\alpha) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

[†]Véase la sección A.1 para más detalles acerca del significado y obtención de la matriz de rotación \mathcal{R} .

Figura C-1: Ángulos de Euler en la notación zyz .

que da como resultante

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (\text{C-1})$$

Las filas de \mathcal{R} contienen las componentes de los vectores unitarios \vec{u}_X , \vec{u}_Y y \vec{u}_Z en el sistema de referencia xyz . Análogamente, las columnas de \mathcal{R} contienen las componentes de los vectores unitarios \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z en el sistema de referencia XYZ como en (A-1). Del mismo modo, si \vec{v} es un vector representado en el sistema de coordenadas xyz , $\mathcal{R}\vec{v}$ nos dará el mismo vector, pero expresado en el sistema de coordenadas XYZ .

Esta matriz de rotación es real y tiene determinante unidad, como es de esperar, y su inversa es igual a su transpuesta.

Para que haya una correspondencia inequívoca entre la matriz de rotación y el conjunto de ángulos de Euler, éstos deben estar limitados el rango

$$0 \leq \alpha < 2\pi \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad 0 \leq \gamma < 2\pi$$

sin lo cual habría más de un conjunto de ángulos de Euler que da la misma matriz de rotación. Por ejemplo, la misma matriz de rotación se podría obtener a partir de los siguientes ángulos de Euler

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{R}(\alpha + \pi, -\beta, \gamma + \pi) = \mathcal{R}(\alpha - \pi, -\beta, \gamma - \pi) = \mathcal{R}(-\alpha, \beta + \pi, -\gamma) = \mathcal{R}(-\alpha, \beta - \pi, -\gamma)$$

C.2. La notación zxz (o xx)

En el convenio zxz (o xx) los ángulos de Euler (ϕ, θ, χ) corresponden a las siguientes rotaciones, que aplicadas sucesivamente al sistema de ejes xyz le llevan a coincidir con el XYZ .

1. Rotación de un ángulo ϕ alrededor del eje z en el sentido positivo (el contrario al de las agujas del reloj) llevando el sistema de ejes xyx a $x'y'z'$ (realmente a $x'y'z$ ya que z y z' coinciden). En las condiciones finales de este paso los ejes $z = z'$, y' y Z están contenidos en el mismo plano, habiéndose llevado el eje x a la línea de nodos.
2. Rotación de un ángulo θ alrededor del eje x' en sentido positivo hasta que el eje z'' coincide con el eje Z , pasando el sistema de ejes $x'y'z'$ a $x''y''z''$. El ángulo θ de giro coincide con la latitud del eje Z en el sistema de coordenadas xyz .

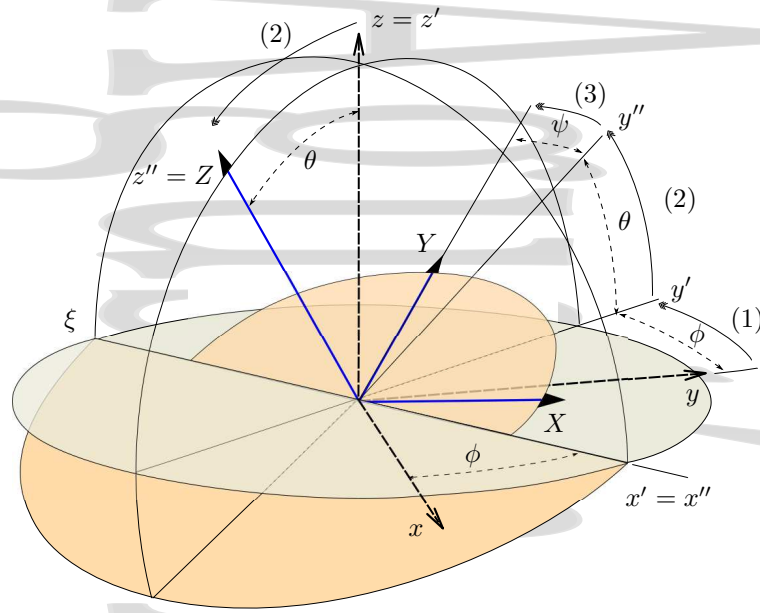


Figura C-2: Ángulos de Euler en la notación zxz .

3. Finalmente, y ya en el plano perpendicular al eje Z se rota el sistema un ángulo ψ alrededor de Z en el sentido positivo pasando el sistema $x''y''z''$ tras esta rotación a coincidir con el sistema XYZ

La matriz de rotación que describe la rotación completa es el producto de las tres matrices de rotación que describen cada una de las rotaciones simples,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{z''}(\phi) \cdot \mathcal{R}_{x''}(\theta) \cdot \mathcal{R}_z(\psi) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

que da como resultante

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \theta \cos \psi - \sin \phi \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C-2})$$

Esta matriz de rotación debe ser la misma que la matriz (C-1) obtenida a partir de los ángulos de Euler en la notación zyz y por tanto es real, tiene determinante unidad y su inversa es igual a su traspuesta.

Se suele denominar a los ángulos ϕ , θ y ψ respectivamente *precesión*, *nutación* y *espín* o *rotación propia*.

La relación entre los ángulos de Euler en las dos notaciones viene cada por

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha + \pi/2 \\ \theta &= \beta \\ \psi &= \gamma - \pi/2\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\sin \phi &= \cos \alpha \\ \cos \phi &= -\sin \alpha \\ \sin \psi &= -\cos \gamma \\ \cos \psi &= \sin \gamma\end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

Apéndice D

La función de Airy para un estado de tensión plana.

Resolver un problema elástico con condiciones de contorno es muy difícil en el caso general, y de hecho durante muchos años, algunos grandes matemáticos han trabajado en el análisis de los problemas con condiciones de contorno. Se han desarrollado una serie de técnicas, algunas muy elegantes, y aunque ninguna de ellas es completamente general, han permitido obtener una información preciosa sobre el comportamiento de los materiales deformables. En la actualidad, este tipo de problemas se suelen abordar de forma numérica mediante cálculos de elementos finitos, pero algunas de las soluciones exactas y los métodos para obtenerlas siguen siendo importantes.

La dificultad de un cálculo exacto estriba en que, cuando se quiere resolver un problema general en elasticidad lineal, incluso en el caso más simple de medios isótropos, es necesario tener en cuenta las ecuaciones de equilibrio (2-4), las definiciones de las componentes del tensor de deformaciones en función del desplazamiento (3-18) y las relaciones tensión deformación para un medio isótropo dadas por (4-25), sin contar con la posibilidad de que simultáneamente se produzca expansión térmica, todo ello basado en el conocimiento que tenemos de lo que ocurre en los límites del material tensionado. Esto implica ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las que intervienen vectores y tensores, lo que en la práctica multiplica el número de ecuaciones.

Una posible aproximación para intentar simplificar el número de ecuaciones involucradas consistiría en intentar reducirlas a una única ecuación diferencial en derivadas parciales para una función escalar, de la que se derivarían las tensiones y deformaciones. Esto no puede hacerse para el caso general de tres dimensiones, pero la función de Airy permitirá hacerlo en el caso de un estado de tensión plana.

Supongamos un estado de tensión plano, en el que p.ej., las caras z están libres de tensiones ($\sigma_{zi} = 0$, para $i = x, y, z$). En estas condiciones las ecuaciones de equilibrio (2-4) que deben cumplir las tensiones elásticas se quedan en

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho g_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho g_y &= 0.\end{aligned}$$

Como una forma de simplificar la búsqueda de funciones cuyas derivadas satisfagan las ecuaciones anteriores, G.B. Airy definió una función escalar de tensión $\phi(x, y)$ a partir de la cual se pueden obtener las componentes del tensor de tensiones en la forma

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \Omega \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Omega \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\end{aligned}\tag{D-1}$$

que, como puede comprobarse por sustitución, satisface las ecuaciones de equilibrio si la fuerza de masa admite un potencial[†] de forma que Ω cumpla

$$\rho g_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \rho g_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}\tag{D-2}$$

[†] Aquí Ω sería realmente una energía potencial por unidad de volumen, una densidad de energía potencial.

donde g_x y g_y representan componentes de la aceleración debida a fuerzas de masa y por tanto, ρg_x y ρg_y son las componentes de la fuerza por unidad de volumen. Se denomina a la función $\phi(x, y)$ *función de Airy* o *función de tensión de Airy*. Nótese que si la fuerza de masa admite un potencial, pero no se satisface (D-2) no es posible definir una función de Airy. Afortunadamente, para el caso de la fuerza gravitatoria la ecuación (D-2) se satisface con (g_x, g_y) las componentes de la aceleración gravitatoria en el sistema de ejes considerado, quedando la densidad de energía potencial Ω en la forma

$$\Omega = -\rho x g_x - \rho y g_y. \quad (\text{D-3})$$

Consideremos ahora la condición de compatibilidad (3-28a) y las relaciones (4-25) entre tensiones y deformaciones para un medio isótropo. Sustituyendo los valores de las deformaciones dados por (4-25) en (3-28a) y particularizando al caso de estado plano de tensiones, se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

de forma que las tensiones que satisfacen esta relación garantizan la continuidad de la deformación. Si sustituimos en esta ecuación los valores dados en (D-1) se tiene

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} \equiv \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = \nabla^4 \phi. \quad (\text{D-4})$$

Así, toda función $\phi(x, y)$ que satisfaga esta ecuación cumplirá automáticamente las condiciones de equilibrio, de compatibilidad y las relaciones de la elasticidad lineal para un medio isótropo. Hay muchas funciones que satisfacen la ecuación anterior, pero para que sea solución del problema objeto de estudio es necesario además que satisfaga las condiciones de contorno de tensión y deformación en los límites del medio deformado, lo que complica mucho las cosas. Puede demostrarse que si se encuentra una solución que satisfaga simultáneamente las ecuaciones de compatibilidad y las condiciones de contorno, ésta es única y por tanto es la solución correcta.

La función de Airy puede utilizarse únicamente en el caso de tensión bidimensional y cuando la fuerza de masa admite un potencial en la forma mostrada en la ecuación (D-2).

D.1. Función de Airy para un voladizo de sección rectangular sometido a su propio peso

Consideremos el caso de un voladizo de sección rectangular para ofrecer un ejemplo de obtención de la función de Airy. Partiremos de un desarrollo polinómico de quinto orden en x e y , tomadas como se indica en la figura D-1,

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & A_{50}x^5 + A_{41}x^4y + A_{32}x^3y^2 + A_{23}x^2y^3 + A_{14}xy^4 + A_{05}y^5 + \\ & + A_{40}x^4 + A_{31}x^3y + A_{22}x^2y^2 + A_{13}xy^3 + A_{04}y^4 + \\ & + A_{30}x^3 + A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{03}y^3 + \\ & + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 \end{aligned} \quad (\text{D-5})$$

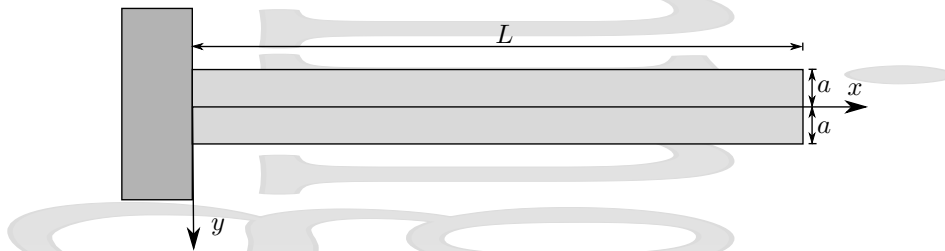


Figura D-1: Obtención de la función de Airy para una ménsula sometida a su propio peso.

y tendremos en cuenta que las aceleraciones debidas a fuerzas de masa son $g_x = 0$ y $g_y = g$ (nótese que el eje y apunta hacia abajo). Así, a partir del desarrollo anterior, las expresiones (D-1) nos dan para σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy}

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y = \quad (D-6a)$$

$$2A_{32}x^2 + 6A_{23}x^2y + 12A_{14}xy^2 + 20A_{05}y^3 + \\ + A_{22}x^2 + 6A_{13}xy + 12A_{04}y^2 + \\ + 2A_{12}x + 6A_{03}y + 2A_{02} - \rho g y$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y = \quad (D-6b)$$

$$20A_{50}x^3 + 12A_{41}x^2y + 6A_{32}xy^2 + 2A_{23}y^3 + \\ + 12A_{40}x^2 + 6A_{31}xy + 2A_{22}y^2 + \\ + 6A_{30}x + 2A_{21}y + 2A_{20} - \rho g y$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 4A_{41}x^3 + 6A_{32}x^2y + 6A_{23}xy^2 + 4A_{14}y^3 + \quad (D-6c)$$

$$+ 3A_{31}x^2 + 4A_{22}xy + 3A_{13}y^2 + \\ + 2A_{21}x + 2A_{12}y + A_{11}$$

Condiciones en las tensiones cortantes. Todas las superficies externas están libres de fuerzas cortantes. Por tanto, las tensiones cortantes deberán ser nulas en todos los puntos de las mismas.

Para la cara extrema a $x = L$ debe cumplirse $\tau_{xy}(L, y) = 0$ y por tanto

$$\tau_{xy}(L, y) = 0 = 4A_{14}y^3 + (6A_{23}L + 3A_{13})y^2 + \\ + (6A_{32}L^2 + 4A_{22}L + 2A_{12})y + \\ + 4A_{41}L^3 + 3A_{31}L^2 + 2A_{21}L + A_{11}$$

también deberá cumplirse para todo valor de y , por lo que los coeficientes de las distintas potencias de y deben ser todos 0,

$$A_{14} = 0 \quad (D-7a)$$

$$2A_{23}L + A_{13} = 0 \quad (D-7b)$$

$$3A_{32}L^2 + 2A_{22}L + A_{12} = 0 \quad (D-7c)$$

$$4A_{41}L^3 + 3A_{31}L^2 + 2A_{21}L + A_{11} = 0 \quad (D-7d)$$

Para las caras superior e inferior, las tensiones cortantes también serán nulas en todos los puntos, $\tau_{xy}(x, \pm a) = 0$. Así, utilizando la ecuación (D-6c) se cumplirá

$$\tau_{xy}(x, \pm a) = 0 = 4A_{41}x^3 + (\pm 6A_{32}a + 3A_{31})x^2 + \\ + (6A_{23}a^2 \pm 4A_{22}a + 2A_{21})x + \\ + (\pm 4A_{14}a^3 + 3A_{13}a^2 \pm 2A_{12}a + A_{11})$$

para todo valor de x , donde el signo superior se refiere a la cara inferior y el inferior a la superior. Todos los coeficientes de las distintas potencias de x deben ser 0, y esto debe ser así tanto para la cara inferior como para la superior. Si tomamos, por ejemplo, el coeficiente de x^2 para las caras superior e inferior y sumamos o restamos ambos el resultado seguirá siendo nulo, pero además observamos que la suma de las partes que no cambian de signo debe ser nula, lo mismo que la suma de las partes que cambian de signo (en el fondo es lo que obtenemos al sumar o restar los coeficientes de las caras superior e inferior). Así, obtenemos, a partir de la condición de contorno de las tensiones

cortantes en las caras superior e inferior,

$$A_{41} = 0 \quad (\text{D-8a})$$

$$A_{32} = 0 \quad (\text{D-8b})$$

$$A_{31} = 0 \quad (\text{D-8c})$$

$$A_{22} = 0 \quad (\text{D-8d})$$

$$3A_{23}a^2 + A_{21} = 0 \quad (\text{D-8e})$$

$$4A_{14}a^3 + 2A_{12}a = 0 \quad (\text{D-8f})$$

$$3A_{13}a^2 + A_{11} = 0. \quad (\text{D-8g})$$

Ahora bien, vimos en (D-7a) que A_{14} es cero, por lo que, a partir de (D-8e), A_{12} también debe serlo. Resumiendo y simplificando los resultados obtenidos a partir de las condiciones de contorno para las tensiones cortantes,

$$A_{12} = A_{14} = A_{22} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = 0 \quad (\text{D-9a})$$

$$2A_{23}L + A_{13} = 0 \quad (\text{D-9b})$$

$$2A_{21}L + A_{11} = 0 \quad (\text{D-9c})$$

$$3A_{23}a^2 + A_{21} = 0 \quad (\text{D-9d})$$

$$3A_{13}a^2 + A_{11} = 0. \quad (\text{D-9e})$$

Condiciones en las tensiones normales. Veamos ahora qué información tenemos acerca de las tensiones normales en los límites.

Por una parte, la tensión normal de tracción en la dirección x debe ser nula en todos los puntos del extremo libre,

$$\sigma_{xx}(L, y) = 20A_{05}y^3 + 12A_{04}y^2 + (6A_{23}L^2 + 6A_{13}L + 6A_{03} - \rho g)y + 2A_{02}$$

donde ya hemos tenido en cuenta que $A_{14} = A_{22} = A_{32} = 0$. Como esta expresión debe cumplirse para cualquier valor de y , los coeficientes de sus potencias serán todos nulos, quedando

$$A_{05} = 0 \quad (\text{D-10a})$$

$$A_{04} = 0 \quad (\text{D-10b})$$

$$6A_{23}L^2 + 6A_{13}L + 6A_{03} - \rho g = 0 \quad (\text{D-10c})$$

$$A_{02} = 0. \quad (\text{D-10d})$$

Veamos otra condición más. Tanto en la cara superior como en la inferior, la tensión normal $\sigma_{yy}(x, \pm a)$ debe ser nula, lo que da las ecuaciones

$$\sigma_{yy}(x, \pm a) = 20A_{50}x^3 + 12A_{40}x^2 + 6A_{30}x + (\pm 2A_{23}a^3 \pm 2A_{21}a + 2A_{20} \mp \rho ga)$$

donde se ha tenido en cuenta que $A_{22} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = 0$. Los coeficientes de las potencias de x deben ser nulos y, dentro de éstos la suma de las partes que cambian de signo y la suma de las partes que no cambian de signo, dando

$$A_{50} = 0 \quad (\text{D-11a})$$

$$A_{40} = 0 \quad (\text{D-11b})$$

$$A_{30} = 0 \quad (\text{D-11c})$$

$$A_{20} = 0 \quad (\text{D-11d})$$

$$2A_{23}a^3 + 2A_{21}a - \rho ga = 0 \quad (\text{D-11e})$$

Combinando todos los elementos. Una vez aplicadas las condiciones de contorno anteriores nos queda una sistema de seis ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A_{23}L + A_{13} &= 0 \\ 2A_{21}L + A_{11} &= 0 \\ 3A_{23}a^2 + A_{21} &= 0 \\ 3A_{13}a^2 + A_{11} &= 0 \\ 6A_{23}L^2 + 6A_{13}L + 6A_{03} - \rho g &= 0 \\ 2A_{23}a^3 + 2A_{21}a - \rho ga &= 0 \end{aligned}$$

con cinco incógnitas. En realidad, las cuatro primeras ecuaciones no son linealmente independientes, luego lo que tenemos es un sistema de cinco ecuaciones con las cinco incógnitas que debemos extraer. Esto es muy sencillo, ya que entre las ecuaciones (D-9b) y (D-11e) es trivial despejar A_{21} y A_{23} y sacar entonces A_{11} de (D-9c) y A_{13} de (D-9b). Finalmente, A_{03} se obtiene de (D-10c), quedando los coeficientes

$$\begin{aligned} A_{03} &= \frac{1}{6}\rho g - \frac{\rho g L^2}{4a^2} \\ A_{11} &= -\frac{3}{2}\rho g L \\ A_{13} &= \frac{\rho g L}{2a^2} \\ A_{21} &= \frac{3}{4}\rho g \\ A_{23} &= -\frac{\rho g}{4a^2} \end{aligned} \quad (\text{D-12})$$

y la función de Airy, una vez agrupados los términos,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{6}\rho g y^3 - \frac{\rho g}{4a^2}y^3(x - L)^2 + \frac{3}{4}\rho g xy(x - 2L). \quad (\text{D-13})$$

Comprobando el resultado. Veamos los resultados que se obtienen a partir de la función de Airy (D-13). Para las tensiones σ_{xx} , se tiene

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y = -\frac{3\rho g}{2a^2}y(L - x)^2, \quad (\text{D-14})$$

similar a lo que se obtendría de la ecuación (1-89), sustituyendo $\rho = M/(2abL)$ y el momento de inercia de la sección plana rectangular por su valor $I_{zz} = 2ba^3/3$. Para las tensiones cortantes τ_{xy} se obtiene

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{3\rho g}{2a^2}(y^2 - a^2)(x - L), \quad (\text{D-15})$$

similar a lo que se obtiene a partir de la ecuación (1-78) con $h = 2a$ y el valor de $T(x)$ dado por (1-88a). Finalmente se obtiene, para las tensiones σ_{yy} ,

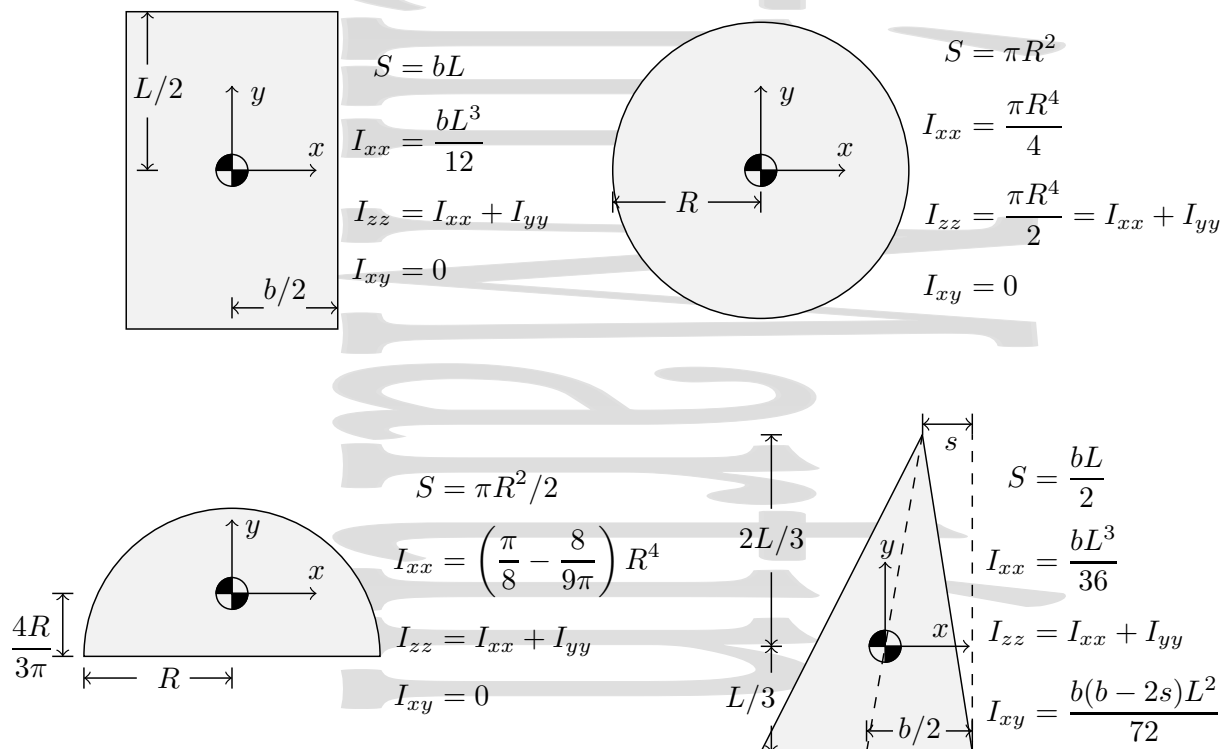
$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho x g_x - \rho y g_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho y g = \frac{\rho g}{2a^2}y(a^2 - y^2), \quad (\text{D-16})$$

ecuación que no obtuvimos, pero que nos expresa la forma de las tensiones normales en la dirección vertical a que se hace referencia en la página 30.

Apéndice E

Tablas de datos

E.1. Momentos y productos de inercia de algunas secciones planas sencillas.



Agustín Martín Domínguez

Referencias

- [1] García de Arangoa, A., *Elasticidad teórica. Fundamentos. Aplicaciones*. Ed. por el autor, Madrid, 1974.
- [2] Timoshenko, S. y D. H. Young, *Elementos de resistencia de materiales*. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, S.A., México, 1991.
- [3] Timoshenko, S. y J. N. Goodier, *Teoría de la Elasticidad*. Ed. URMO, Bilbao, 1968.
- [4] Shames, I. H., *Introducción a la mecánica de los sólidos*. Prentice Hall, N. J., 1979.
- [5] Rodríguez-Avial, F., *Problemas de resistencia de materiales*. Sección de publicaciones. ETS de Ingenieros Industriales, Madrid, 1976.
- [6] Den Hartog, J. P., *Strength of Materials*. Dover, Nueva York, 1977.
- [7] Landau, L., A. Ajiezer y E. Lifshitz, *Curso de Física general: mecánica y Física molecular*. Ed. Mir, Moscú, 1979.
- [8] Fleury, P. y J. P. Mathieu, *Chaleur, thermodynamique, états de la matière*. Éditions Eyrolles, París, 1964.
- [9] Castaños Camargo, M. y F. Soriano Santandreu, *Apuntes prácticos de Física: termodinámica y elasticidad*. Cátedra de Física, E.T.S. Arquitectura de Madrid, Madrid, 1987.
- [10] Strelkón, S., *Mecánica*. Ed. Mir, Moscú, 1978.
- [11] Nash, W. A., *Resistencia de materiales*. McGraw-Hill, México, 1988.
- [12] Stiopin, P. A., *Resistencia de materiales*. Mir, Moscú, 1976.
- [13] Volmir, A., *Problemas de resistencia de materiales*. Ed. Mir, Moscú, 1986.
- [14] Anderson, H. L. (editor), *Physics Vademecum*. American Institute of Physics, N. York, 1981.
- [15] Lakes, R., *Science* **235**, 1038–1040, 1987.
- [16] Nye, J. F., *Physical properties of crystals. Their representation by tensors and matrices*. Oxford University Press, Oxford, 1985.
- [17] Lovett, D. R., *Tensor properties of crystals*. Adam Hilger Books, Bristol, 1989.
- [18] Muelas, S., “El conocimiento práctico del medio continuo I: Elasticidad lineal.” <http://gmc.mecanica.upm.es/~smuelas/elasticidad/elash.html>.
- [19] Chou, P. C. y N. J. Pagano, *Elasticity. Tensor, dyadic and engineering approaches*. Dover, New York, 1992.
- [20] Hervás Burgos, P., M. Rodríguez Danta y J. Martínez García, *Cuadernos de Mecánica: cinemática y tensores*. Manuales universitarios, Editorial Universidad de Sevilla, Sevilla, 1989.

Augustin Martin Domingo

Índice alfabético

A

abolladura, 4
Airy
 función de, 92
 función de tensión, 92
angular
 deformación, 53
ángulo
 cortante, 16, 20
 de Euler, 87
autovalor, 74
 complejo, 75
 degenerado, 75
 ecuación de, 75
 real, 75
autovector, 74

C

campo de desplazamientos, 51
círculo de Mohr, 77, 78
coeficiente
 de compresibilidad, 13
 de dilatación, 60
 cúbica, 15, 61
 de superficie, 15
 de volumen, 15, 61
 lineal, 61
 lineal promedio, 15
 de expansión
 de volumen, 61
 térmica, 60
 de Poisson, 10
componente
 desviadora
 de un tensor, 79
 del tensor de deformaciones, 57
 del tensor de tensiones, 45, 69
 hidrostática
 de un tensor, 79
 del tensor de deformaciones, 57
 del tensor de tensiones, 45, 69
componentes
 intrínsecas del vector deformación, 54
comportamiento
 elástico, 6
 no lineal, 7
 plástico, 6
compresibilidad, módulo de, 13
compresión, 3
constantes
 de Lamé, 65
 elásticas, 63
cortante, 3
 ángulo, 16, 20
 deformación, 16, 53
 energía de deformación, 19
 esfuerzo, 16
 fuerza, 30, 32
 ley de Hooke, 16
 puro, 57
 signo del esfuerzo, 4

 simple, 57
 tensión, 16, 38
 coseno director, 71
 criterio
 de la máxima energía de distorsión, 85
 de máxima
 deformación, 84
 tensión cortante, 84, 86
 tensión principal, 84, 86
 de Maxwell-Hubert-Mises-Hencky, 85
 de Rankine, 84
 de Saint-Venant, 84
 de Tresca, 84
 de Tresca-Guest, 84
 de Von Mises, 85
 cúbica
 coeficiente de dilatación, 61
 deformación, 55
 curva
 de deformación, 26
 elástica, 26

D

deformación, 10
 angular, 53
 cortante, 16, 53
 cúbica, 13, 55, 66
 curva de, 26
 elástica, 15
 elipsoide de, 60
 hidrostática, 13
 energía de deformación, 13, 69
 homogénea, 49
 inhomogénea, 19, 50
 longitudinal, 10
 longitudinal, signo de la, 10
 normal, 53
 tangencial, 16
 térmica, 15
 total, 15
 transversal, 10
 unitaria, 10
 unitaria de volumen, 13, 55, 66
 vector, 54
 volumétrica, 13
deformaciones
 elásticas
 tensor de, 61
 tensor de, 53
 térmicas
 tensor de, 61
densidad de energía
 de deformación
 cortante, 19
 hidrostática, 14, 69, 83
 por distorsión, 69, 83
 por tracción o compresión, 11, 83
deslizamiento, 16, 69
desplazamientos
 campo de, 51
 tensor de, 51

- vector de, 51
- determinante, 76
- dilatación
 - cúbica, coeficiente de, 61
 - lineal, 15
 - térmica
 - coeficientes principales, 61
- distorsión, 16, 69
- ductilidad, 7
- E**
 - ecuación
 - de autovalores, 75
 - de la curva de deformación, 27
 - de la elástica, 27, 32, 34, 36
 - diferencial de la elástica, 27
 - ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant, 59
 - eje
 - neutro, 24
 - principal, 74
 - elástica
 - curva, 26
 - tensión, 9
 - zona, 6
 - elasticidad
 - límite aparente de, 7
 - teoría de la, 8
 - elástico
 - comportamiento, 6
 - límite, 6
 - elipsoide de deformación, 60
 - energía de deformación
 - en el cortante, 19
 - en la deformación hidrostática, 14
 - en tracción o compresión, 11
 - equilibrio
 - rotacional, 40, 41
 - traslacional, 39
 - escalar, 72
 - esfuerzo, 2, 4
 - axil, signo del, 4
 - cortante, 16
 - de torsión, 20
 - signo, 4
 - flector, 22
 - signo, 4
 - normal, signo del, 4
 - último, 7
 - espín, 89
 - Euler, ángulos de, 87
- F**
 - fibra neutra, 23
 - flecha, 22
 - flexión, 3, 22
 - compuesta, 22
 - desviada, 23
 - plana, 23
 - pura, 22
 - signo del esfuerzo de, 4
 - simple, 22
 - fluencia
 - límite de, 7
 - zona de, 7
 - forma cuadrática, 79
 - fragilidad, 7
 - fuerza
 - cortante, 30, 32
 - de masa, 37
 - de superficie, 37
 - puntual, 37
 - simple, 3
 - función
 - de Airy, 92
 - de tensión de Airy, 92
- G**
 - giros, ley de, 27
- H**
 - hipótesis
 - de la Resistencia de Materiales, 8
 - de Navier, 30
 - histéresis, 7
 - homogeneidad, 8
 - Hooke
 - ley de, 10, 16
 - ley generalizada de, 63
- I**
 - intensidad de la fuerza, 37
 - invariante
 - de primer orden, 55, 76
 - de segundo orden, 56, 76
 - de tercer orden, 56, 76
 - frente a la rotación, 76
 - isotropía, 8
- L**
 - ley
 - de giros, 27, 32, 33, 36
 - de Hooke, 10, 16
 - generalizada, 63
 - para los cortantes, 16
 - de la tangente, 18
 - límite
 - aparente de elasticidad, 7
 - de fluencia, 7
 - de proporcionalidad, 6
 - elástico, 6
 - línea
 - de nodos, 87
 - elástica, 26
- M**
 - materiales
 - blandos, 7
 - dúctiles, 7, 83
 - elásticos no lineales, 7
 - frágiles, 7, 83
 - moldeables, 7
 - resistencia de, 8
 - matriz
 - de rotación, 73, 74
 - identidad, 75
 - módulo
 - cortante, 16
 - de cizalladura, 16
 - de compresibilidad, 13
 - de elasticidad, 10
 - longitudinal, 10
 - transversal, 16
 - de rigidez, 16
 - de Young, 10
 - Mohr, círculo de, 77, 78
 - momento

- de área
 - primer, 29
 - segundo, 25
- de inercia
 - de área, 25
 - de primer orden, 29
 - de segundo orden, 25
 - de superficie, 25, 97
 - de un cuerpo respecto de un eje, 22
 - de una sección plana, 25, 97
 - polar de una superficie, 22
 - segundo, 25
- de primer orden de la superficie, 29
- de segundo orden de una superficie, 25
- de torsión
 - cilindro hueco, 21, 22
 - cilindro macizo, 21, 22
 - signo, 4
- estático, 29
- flector, 23, 25
 - signo, 4
- polar de inercia de una superficie, 22

- N**
- Navier, hipótesis de, 30
- normal, deformación, 53
- nutación, 89

- P**
- pandeo, 4
- plástica, zona, 6
- Poisson, coeficiente de, 10
- precesión, 89
- primer momento de área, 29
- principio
 - de acción y reacción, 2
 - de continuidad, 2
 - de equilibrio, 2
 - de fragmentación, 2
 - de Pascal, 1
 - de Saint-Venant, 8
 - de superposición, 8, 12
- producto de inercia de la sección plana, 97
- proporcionalidad, límite de, 6

- R**
- Rankine, 84
- resistencia de materiales, 8
- rigidez, módulo de, 16
- rotación propia, 89

- S**
- Saint-Venant, 84
 - criterio de, 84
 - ecuaciones de compatibilidad de, 59
 - principio de, 8
- segundo momento de área, 25
- signo
 - de la deformación longitudinal, 10
 - de la tensión axil, 4, 10
 - de la tensión normal, 4, 10
 - del esfuerzo axil, 4, 10
 - del esfuerzo cortante, 4
 - del esfuerzo de flexión, 4
 - del esfuerzo de torsión, 4
 - del esfuerzo normal, 4, 10
- sólido
 - deformable, 1

- rígido, 1

- T**
- tangencial
 - deformación, 16
 - tensión, 16, 38
- tensión, 37
 - axil, signo de la, 4, 10
 - cortante, 16, 38
 - de Von Mises, 85
 - elástica, 1, 9, 37
 - hidrostática, 13, 45
 - homogénea, 39
 - ingenieril, 7
 - inhomogénea, 40
 - normal, 38
 - normal, signo de la, 4, 10
 - tangencial, 38
 - tensor de, 43
 - vector, 37
- tensor, 71
 - antisimétrico de segundo orden, 75
 - de coeficientes de dilatación térmica, 60
 - de deformaciones, 53
 - elásticas, 61
 - térmicas, 61
 - de desplazamientos, 51
 - de las constantes elásticas, 63
 - de orden 0, 72
 - de primer orden, 73
 - transformación de las componentes, 73
 - de segundo orden, 73
 - transformación de las componentes, 74
 - de tensiones, 43
 - elástico, 63
 - esférico, 79
 - hidrostático, 79
 - piezoelectrico, 81
 - simétrico de segundo orden, 75
- teorema de rotación de Euler, 87
- teoría de la elasticidad, 8
- torsión, 3, 20
 - momento de
 - cilindro hueco, 21, 22
 - cilindro macizo, 21, 22
 - signo del esfuerzo de, 4
- tracción, 3
- traza, 55, 76

- U**
- unitaria, deformación, 55

- V**
- valor
 - principal, 74
 - propio, 74
- vector
 - de desplazamientos, 51
 - de esfuerzos, 37
 - deformación, 54
 - principal, 74
 - propio, 74
 - tensión, 37
- viga, 8
 - biapoyada, 30
 - empotrada, 32
 - con cargas puntuales, 34
- Von Mises

criterio de, 85
tensión de, 85

de fluencia, 7
elástica, 6
plástica, 6

Z
zona