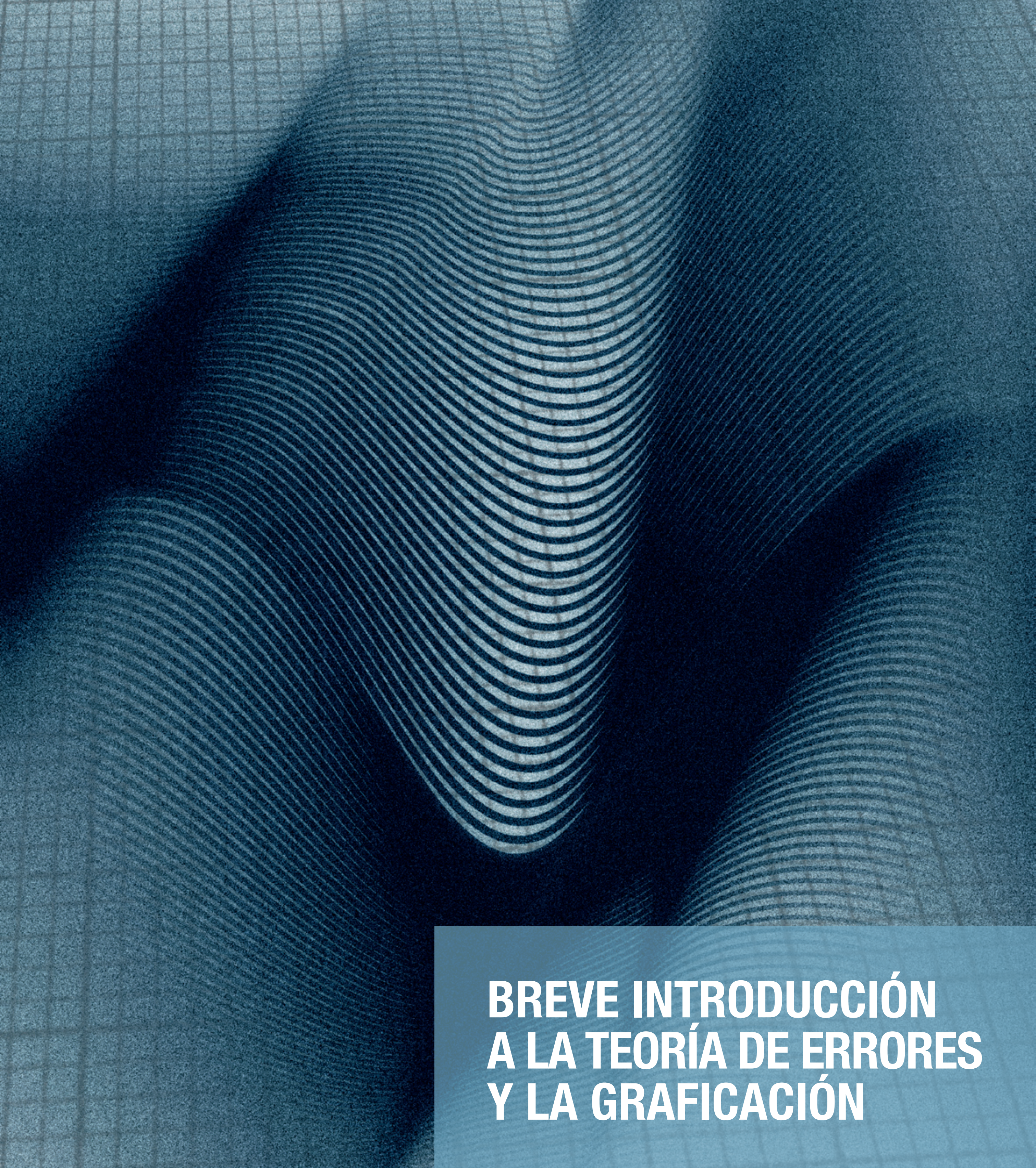


BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ERRORES Y LA GRAFICACIÓN

CIENCIAS BÁSICAS

textos**universitarios**

Salvador Medina Rivera

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ERRORES Y LA GRAFICACIÓN

BREVE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE ERRORES Y LA GRAFICACIÓN

Salvador Medina Rivera

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

Breve introducción a la teoría de errores y la graficación

Primera edición 2017

D.R. © Universidad Autónoma de Aguascalientes
Av. Universidad No. 940
Ciudad Universitaria
C.P. 20131, Aguascalientes, Ags.
http://www.uaa.mx/direcciones/dgdv/editorial/

D.R. © Cresencio Salvador Medina Rivera

ISBN 978-607-8523-50-4

Hecho en México / *Made in Mexico*

Índice

1 INTRODUCCIÓN

Física, palabra proveniente del griego que significa naturaleza, es el vocablo que empleamos para designar el estudio de los fenómenos naturales. Su estudio nos permite hurgar los misterios del mundo en que vivimos con la intención de descifrar su funcionamiento. Podemos decir que "la física es una ciencia cuyo objetivo es estudiar los componentes de la materia y sus interacciones mutuas. En función de estas interacciones el científico explica las propiedades de la materia en conjunto, así como los otros fenómenos que observamos en la naturaleza".[1]

Con el fin de lograr sus metas, la física –al igual que las ciencias naturales, puras o aplicadas– depende de la observación y de la experimentación. Mientras que la *observación* consiste en el examen cuidadoso y crítico de un fenómeno, donde el observador identifica, mide y analiza los diversos factores y circunstancias que influyen en dicho fenómeno, *la experimentación*, en cambio, no es más que la observación de un fenómeno en condiciones cuidadosamente controladas (y por supuesto, previamente organizadas y planeadas) que permiten al experimentador la revelación de la forma en que éstas afectan al proceso. Para experimentar es necesario efectuar cuantificaciones, es decir, *debemos* medir.[2] Sin la experimentación y la medición, la ciencia moderna jamás habría logrado los avances actuales; por esta razón los laboratorios son tan importantes para el desarrollo de la ciencia.

Ahora bien, por medición significamos *la manera en que procedemos para cuantificar nuestra experiencia buscando describir y/o explicar objetivamente el mundo que nos rodea*; en el caso de las ciencias naturales, tal experiencia proviene no nada más de la intuición, sino de la interacción que tenemos con el medio ambiente. Lord Kelvin lo expresó sucintamente al decir que "cuando uno puede medir aquello de lo que está hablando y expresarlo en números, sabe algo acerca de ello; pero cuando no puede medirlo, cuando no

---

1 Alonso, M. & Finn, E. J. [1967]; *Física, Vol. I*; Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. México, 1986. p. 2.

2 Lea y Burke enfatizan la necesidad de medir en la vida cotidiana, pues "Una actividad práctica y común es medir cosas. Para comprar la cantidad de madera suficiente para construir una perrera, o para llegar a tiempo a la clase, necesitas mediciones prácticas de longitud y tiempo." Lea, S. & Burke, J. R. [1998]; *Física. La naturaleza de las cosas. Vol. I*; International Thomson Editores. S. A. de C. V. México, 1999, p. 22.

puede expresarlo en números, su conocimiento es escaso e insatisfactorio: podrá ser un principio de conocimiento, pero escasamente ha avanzado su conocimiento a la etapa de una ciencia”.[3] Aunque tal afirmación pudiera parecer exagerada, lo cierto es que las mediciones son la columna vertebral de la experimentación; sin el conocimiento y adecuado manejo de las mediciones, difícilmente el hombre habría alcanzado el conocimiento que hoy posee del mundo natural que le rodea. De una manera sencilla, podemos redefinir más precisamente la medición como *el proceso mediante el cual asignamos un número a una propiedad (o cualidad) física de cualquier objeto (o conjunto de objetos) con propósitos de comparación*.[4] No obstante, tengamos presente que cuando medimos e informamos los resultados de la medición, lo que en verdad reportamos es que las medidas no son números exactos, sino que implícitamente hablamos de intervalos dentro de los cuales tenemos confianza de que encontraremos el valor esperado; dicho de otra manera, la medición consiste en una muestra del conjunto de observaciones posibles que podemos llevar a cabo dentro de un intervalo seleccionado. Debe subrayarse que el acto de medir exige determinar tanto la localización como la anchura o tamaño del intervalo, y para ello, utilizamos lo más escrupulosamente posible la percepción visual; Baird lo ejemplifica con toda sencillez al decir:

> Si le doy a alguien el cuaderno en el que escribo esto y le pido que mida su longitud con una regla, la respuesta es invariable: la longitud del cuaderno es de 29.5 cm. Pero esa respuesta nos debe hacer pensar: ¿en realidad se nos pide que creamos que la longitud del cuaderno es de exactamente 29.50000000....... cm? Seguro que no; es claro que esa afirmación está fuera de los límites de la credibilidad. Entonces, ¿cómo vamos a interpretar el resultado? Un momento de reflexión en presencia del cuaderno y de una regla nos hará darnos cuenta de que, lejos de determinar el valor “correcto” o “exacto”, lo único que podemos hacer en forma realista es acercarnos al borde del cuaderno sobre la escala, diciéndonos conforme avanzamos: “¿Puedo asegurar que el resultado es menos de 30 cm?, ¿menos de 29.9 cm?, ¿menos de 29.8 cm?”. La respuesta a cada una de estas preguntas indudablemente será “Sí”. Pero conforme avancemos sobre la escala, llegaremos a un punto en el cual ya no podremos dar con confianza la misma respuesta. En ese punto debemos detenernos, y de ese modo identificamos un extremo del intervalo que se convertirá en nuestro valor medido. De manera semejante podríamos acercarnos al borde del cuaderno por abajo, preguntándonos a cada paso: “¿Estoy seguro de que el resultado es mayor de 29.0 cm? ¿29.1 cm?”, y así sucesivamente. Una vez más debemos de llegar a un valor en el cual nos tendremos que detener, porque ya no podremos decir con seguridad que

---

3 En: Baird, D. C. [1988]; *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos;* Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. México, 1991, p. 8.

4 ¿Se imagina el lector las enormes ventajas que esto representa? Piense si pudieran cuantificarse conceptos fundamentales del ser humano como el amor, la bondad, la belleza o la justicia; sería algo interesante y digno de ver; quizá esto influiría positivamente en nuestras relaciones afectivas y ayudaría a resolver con mayor prontitud y eficacia algunos dilemas morales.

> el resultado es mayor. Mediante la combinación de estos dos procesos identificamos un intervalo sobre la escala. *Ese es el intervalo más pequeño que, hasta donde podemos estar seguros, contiene el valor deseado; sin embargo, no sabemos en qué punto del intervalo está ese valor.* Esta es la única consecuencia realista del proceso de medición. *No podemos esperar resultados exactos y tendremos que contentarnos con medidas que toman la forma de intervalos*.[5]

Del ejemplo anterior se desprende que no existen reglas absolutas para determinar la longitud del intervalo, y que la extensión de éste depende de algunos de los factores involucrados en el proceso de medición, tales como: tipo de medición, nivel de precisión deseado, tamaño de la escala, destreza y/o habilidad del experimentador, agudeza visual, e incluso las condiciones ambientales (por ejemplo: humedad, iluminación, temperatura), etc.; así, es palpable entonces por qué cada situación experimental debe evaluarse minuciosamente y de manera individual.

Asimismo, en el ámbito experimental, la teoría de errores asume un rol estelar, considerándosele un elemento esencial e imprescindible de magnitud tal que todo proceso que involucre mediciones y/o manejo de datos –con su consecuente reporte– debe acompañarse con su respectivo error. Esto nos obliga a introducir técnicas y métodos que permitan tratar los datos de una manera rápida, eficiente y cuidadosa, buscando sentar bases objetivas y firmes que garanticen un mayor grado de veracidad y confiabilidad; esto es, a la par, requisito y aspiración, y es que “cuando una ciencia se desarrolla y llega a su madurez, sus experimentos tienden a hacerse más exactos y/o elaborados [...] En las fronteras de una rama en desarrollo (ciencia nuclear o espacial, por ejemplo), es posible y necesaria por un lado, una alta precisión y por otro, puede ser un gran obstáculo el obtener un valor confiable en un 100% o en un cierto orden de magnitud”.[6]

Así, con intención de simplificar y agilizar el análisis de los errores inherentes a todo proceso de medición o de captura de datos de una sesión experimental (principalmente en un laboratorio), damos aquí una breve introducción a la teoría de errores.[7]

---

5 *Op. cit.,* Baird, D. C., p. 9. (Las cursivas son mías).

6 Meiners, H. F., Eppenstein, W. & Moore, K. H.; *Experimentos de Física*; Ed. Limusa. México, 1980. p. 14.

7 Este documento se pensó como apoyo para alumnos que cursan el laboratorio de Física en 2º ó 3er semestre de una carrera de ingeniería o licenciatura y que cursan simultáneamente la materia de Cálculo Diferencial e Integral, de ahí la precariedad de contenidos y rigor en el tratamiento de los temas. El lector interesado en manejar estos temas apropiadamente y con mayor profundidad puede acudir a: Canales Ramos, J.; *Manual de Experimentación*; Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, UNAM México. 1985.

2 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE ERRORES

Introducción

El manejo de la teoría de errores en el ámbito experimental es sumamente importante, pues son las mediciones, y su consecuente error asociado, quienes nos permiten cuantificar el acontecer natural y validar con ello predicciones teóricas, además de proporcionarnos certezas y objetividad acerca de lo que cuantificamos. En este capítulo, daremos una introducción de los conceptos más elementales asociados con el proceso de medida.

2.1 Errores experimentales

De entre los muchos actores involucrados en todo proceso de medición destaca el ser humano, pues además de observador y ejecutor de las mediciones, es el beneficiario de los resultados obtenidos; precisamente, es a partir de los datos recolectados y su consecuente análisis de donde el científico obtiene información valiosa que le permite crear modelos matemáticos y teorías para describir –o explicar, como aspiración máxima– el funcionamiento del mundo natural.

Antes de entrar de lleno a los conceptos y términos usados en la experimentación, retomemos por un instante el ejemplo donde se desea medir la longitud l de un cuaderno (ver páginas 12 y 13). Supóngase que el experimentador anuncia escuetamente que la lectura resultó ser: l = 29.5 cm (l representa lo largo del cuaderno que, asumimos, es uniforme); entonces, tal y como se señaló líneas arriba, el usuario de tal información debe asumir que el valor numérico asignado a la variable l puede provenir de una medida única, o bien, de un conjunto de n repeticiones; es decir: implícitamente se admite que la lectura reportada, l = 29.5 cm, no consiste sólo de un número sino que, tácitamente, asumimos que es un dato del conjunto de observaciones, por lo que este dato es sujeto de variabilidad estadística, dado que en su lectura influyeron la precisión del instrumental empleado en la medición, las características personales propias del experimentador y la manera en que se desarrolló el proceso de medida, entre muchos otros factores que afectan la medición. Naturalmente, surgen las interrogantes: ¿influyen decisivamente tales factores en la medición? ¿Esto conduce a errores de la medida? ¿Puede atenuarse su efecto? ¿Podemos confiar en una medida de tal naturaleza? La respuesta a todas estas cuestiones es afirmativa.

Para minimizar la aparición de los múltiples errores en la medida y con afán de aumentar la confiabilidad de las lecturas (o datos), se han definido conceptos como el de *incertidumbre de la medida,* que permite "juzgar la calidad del proceso de medición";[1] y el *límite del error o error de escala*, por ser una cantidad inherente al instrumento de medida y ser "el límite residual dentro del cual el fabricante garantiza que se producirán los errores";[2] análogamente, se han impuesto criterios como el de las *cifras significativas y el redondeo (de la medida)*, consistentes en precisar qué cantidad de dígitos deseamos que aparezcan en la estimación de la medida pues

> ...tanto el número de cifras significativas como la incertidumbre dicen algo acerca de nuestra estimación del resultado [...] Según vayamos mejorando la calidad de nuestros instrumentos de medición y la sofisticación de nuestras técnicas, podremos llevar a cabo experimentos a niveles de precisión siempre más elevados; esto es, podremos extender los resultados medidos a más y más cifras significativas y correspondientemente reducir la incertidumbre experimental del resultado.[3]

Es importante resaltar la trascendencia en la experimentación –y en general, en cualquier resultado que se obtenga mediante operaciones aritméticas o cálculos matemáticos– de las *cifras significativas y el redondeo*, por ser de los primeros elementos en que fijamos nuestra atención a la hora de efectuar mediciones; y es que las *cifras significativas* son aquellos dígitos susceptibles de ser comprobados por la precisión de un instrumento de medida y a quienes atribuimos la confiabilidad de la medida efectuada con ese instrumento, es decir, las cifras significativas son el primer gran indicador, y depositario, del grado de confianza que tenemos al obtener el valor de una medida empleando dicho instrumento, en tanto que las *cifras estimadas* (*o redondeo*) son atribución exclusiva de quien realiza la medición, puesto que la magnitud de éstas sólo depende del criterio del experimentador, por ser quien realiza la lectura.

Para ilustrar esto, supongamos que deseamos medir el espesor t de una tabla de madera utilizando como instrumento de medición una regleta de plástico graduada en mm; cuando sobreponemos la regleta a la tabla, notamos que el espesor se encuentra entre 1.8 y 1.9 cm, es decir: $1.8 \text{ cm} < t < 1.9 \text{ cm}$. Al estimar la distancia entre 0.8 y 0.9 cm, decidimos que el espesor es, aproximadamente, 1.85 cm (vea la Figura 1.a). Sin embargo, cuando medimos t con un vernier, cuya precisión es de 0.1 mm (= 0.01 cm), ajustamos el valor del dato de medida, puesto que la nueva lectura para l arroja un valor aproximado de 1.845 cm, donde el dígito 5 se ha estimado por la distancia entre las marcas 0.04 cm y 0.05 cm (vea la Figura 1.b). Es evidente entonces, que a mayor precisión del instrumento de medida, mayor verosimilitud y confianza tenemos en el dato colectado,

1 Baird, D. C *op. cit.,* p. 11.
2 Meiners, *et al.,* p. 20.
3 Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K. S.; *Física, Vol. I. 4ª Edición*; CECSA. México, 1996, p. 8. Se recomienda la lectura de §1.6, para una mayor comprensión y manejo óptimo de las cifras significativas.

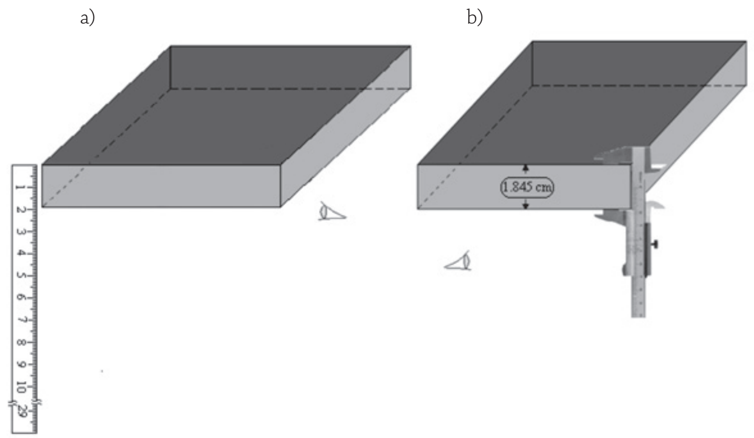


Figura 1. Medición directa de una caja con instrumentos de diferente precisión. (a) Con una regleta de plástico graduada en mm. (b) Con un vernier graduado en décimas de mm. Note la diferencia en las lecturas.

dado que se reduce el número de cifras estimadas. En sentido inverso, las cifras significativas permiten inferir qué precisión tiene el instrumento empleado para medir. Así, si únicamente leyéramos que t= 1.845 cm para el espesor de la tabla, inmediatamente colegiríamos que ésta pudo ser medida con un vernier o con un tornillo micrométrico, pues ambos poseen una precisión de 0.01 cm o más.

Ahora bien, un buen experimentador, amén de antelar qué tipos de medida involucra la medición, debe detallar la cantidad conveniente de cifras significativas para una medición confiable y relacionarla con la incertidumbre o error de escala asociada a los instrumentos de medida; para medir, se cuenta con dos posibilidades:

Medida
Directa. Se hacen comparaciones directas con una unidad de medida estándar (ejemplo: medir la longitud de un lápiz).
Indirecta. Se emplean instrumentos de medida que indican variaciones de una cualidad determinada en la medición (*v. g.*, la dilatación del mercurio en un termómetro analógico). Muchas veces son resultado de cálculos obtenidos a partir de valores que provienen de mediciones directas (ejemplo: obtención del radio de la Tierra).

Cuadro 1. Tipos de medida

Del cuadro anterior, y de lo que hemos expuesto previamente, es inmediato intuir que efectuar una medida es muy fácil, siendo evidente que la única exigencia para medir es ser cuidadosos y organizados (no se requieren dotes experimentales únicas o excepcionales; todos somos, potencialmente, buenos experimentadores); aun así, y para reducir al máximo el riesgo del subjetivismo que esto conlleva, la ciencia –sobre todo en el ámbito de las ciencias experimentales– ha implementado técnicas y métodos que proporcionan un valor más fidedigno al dato que emana de la medida y que, a su vez, permiten estimar mejor las incertidumbres finales involucradas en el proceso experimental: las imputables al experimentador,[4] y las debidas a diversos factores que influyen en el experimento,[5] pues repercuten en el resultado final de la medición (es recomendable prever qué tipo de variables e incertidumbres afectan la medición, cómo controlarlas y cómo cuantificarlas, con la finalidad de minimizar el efecto neto del error en la incertidumbre final); afortunadamente, esto lo logramos mediante un buen diseño experimental y mediante el uso de la estadística.

La mayor parte de las incertidumbres que afectan el desenvolvimiento normal de un experimento las agrupamos en:[6]

Incertidumbre	
Errores sistemáticos	Tienen diferentes causas; se corrigen o minimizan al prever el comportamiento del proceso experimental. Las perturbaciones que causan influyen con el mismo valor numérico en todos los valores de una variable experimental; *v. g.*: errores teóricos; errores ambientales; errores instrumentales (como los errores de calibración y límite de escala), y los errores de observación (como los errores de juicio o de paralaje).
Errores Estocásticos, aleatorios o accidentales	Son la suma de perturbaciones individuales pequeñas y fluctuantes. Están presentes aún cuando se han reducido o eliminado los errores sistemáticos. Estos errores se caracterizan porque mediciones repetidas de una variable experimental se encuentran alrededor de un valor central. Se aplican métodos estadísticos para determinar su magnitud.
Errores residuales	Se introducen algunas veces para describir errores sistemáticos remanentes pero indeterminados, presentes o insospechados después de haber realizado las correcciones posibles. Generalmente se incluyen dentro de los errores estocásticos para su análisis.

Tabla I. Tipos de incertidumbre

Es claro, entonces, que todo experimento presenta alguno de estos errores, lo que obliga que cada variable experimental tenga asociados un error sistemático y otro estocástico; la combinación de ambos errores proporciona el *error neto o incertidumbre de la variable*.

4 Muchas de ellas son características inseparables del sujeto, en tanto que otras pueden deberse a manías, trucos, o posturas inadecuadas que se presentan, consciente o inconscientemente, a la hora de medir. Como ejemplo de estas últimas podríamos señalar: cerrar un ojo para ver si coincide determinada línea de la cinta métrica con la frontera o el borde de un objeto a medir, o bien, inclinarnos –o ladear la cabeza– para tener una mejor perspectiva de cómo están las cosas y tomar una "mejor" lectura, etc.

5 Canales R. contempla algunos imponderables que sin duda afectan el proceso de medición, de entre los que descuellan: las condiciones del material de medición y del objeto a medir, la descalibración inadvertida del instrumental (de medición), o actos aparentemente nimios, tales como los movimientos accidentales a la hora de tomar una lectura, etc. (Canales Ramos, *op. cit.*)

6 Meiners *et al.,* y Canales *op. cit*.

Buscando cuantificar estos errores, veamos con más detalle:

Los errores sistemáticos

Adquieren el mismo valor en una variable experimental y se asocian a los instrumentos; son errores que permanecen constantes a lo largo del proceso de medición. A este tipo de errores pertenecen, tal como se señaló en la Tabla I, los errores teóricos; los errores ambientales; los errores instrumentales, por ejemplo: errores de calibración y de escala, entre otros; y los errores de observación tales como: errores de juicio o de paralaje.

a) Los *errores teóricos* son, prácticamente, inmediatos, pudiendo decirse que: se refieren a las expresiones o relaciones de índole matemática que aparecen en el diseño y calibración del instrumental de medida o en la determinación de mediciones indirectas. Suelen pasarse por alto, o tolerarse, con la intención de facilitar el uso de ecuaciones aproximadamente correctas que reemplazan ecuaciones exactas pero inmensurables. Por ejemplo, (el principio virtual) el período P de un péndulo de masa (puntual) m y longitud l puede obtenerse de la ecuación simplificada (para ángulos pequeños (en radianes)):

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

en vez de usar la expresión real (una solución en serie):

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \left(1+\frac{1}{2^2}\cdot sin^2\ \frac{\theta_m}{2}+\ \frac{1}{2^2}\,\frac{3^2}{4^2}\cdot \sin^4\ \frac{\theta_m}{2} + \ldots\right)$$

b) Los *errores ambientales* son aquéllos que pueden alterar la evolución y adecuado desarrollo de un experimento. Nuestro mundo es altamente dinámico, por lo que para llevar a buen puerto un experimento previamente planeado, deben minimizarse los efectos que el medio ambiente tiene sobre aquello que desea medirse y, principalmente, sobre el instrumental de medida. Por tal motivo, para reducir los errores debido al medio ambiente, lo recomendable es:

- Aislar el experimento.
- Controlar, lo más que se pueda, los factores ambientales que pueden repercutir de manera indeseable en el experimento (viento, humedad, iluminación, temperatura, presión atmosférica, etc.).
- Mantener constante la aceleración de la gravedad, de tal suerte que las condiciones experimentales permanezcan, aproximadamente, invariantes.

c) Dentro de los *errores instrumentales* más comunes, tenemos: los errores de calibración y de escala, donde:

i) Los *errores de calibración* son los errores que aparecen por el uso del instrumental de experimentación. Para reducirlos, conviene supervisar continuamente que el equipo experimental se encuentre en estado óptimo y que funcione de manera adecuada y parecida en cada repetición de la medida; para ello se recomienda:

- Supervisión continua y cuidadosa del funcionamiento del equipo.
- Cuantificar el error de cada instrumento que se usará durante el proceso experimental; incluso, es recomendable determinar estos errores partiendo del comportamiento-funcionamiento del instrumental propuesto de antemano, así como efectuar correcciones cuando sea necesario; también, es deseable evaluar a conciencia cómo tales correcciones afectarán, y en qué medida, la magnitud del error, pues esto repercute directamente en el resultado final.
- Elaborar gráficos de calibración (nomogramas), al menos para los instrumentos de medida más sensibles a los disturbios ambientales o a los disturbios accidentales, o bien, inconvenientes causados por la propia descalibración del instrumento debido a su uso constante.

ii) El *límite de escala*. Es de los errores más frecuentes dentro del ámbito experimental. Está íntimamente relacionado con los instrumentos de medida analógicos;[7] su valor se obtiene al tomar la mitad de la mínima lectura posible (llamada *precisión o límite de resolución*, P) del instrumento de medida. Simbólicamente lo expresamos como:

$$\Delta E = \pm \frac{1}{2} P$$

con: ΔE : = Error o incertidumbre de escala y, P : = Precisión, mínima lectura o límite de resolución del instrumento.[8]

Ejemplo 1. Si medimos con un flexómetro (o cinta métrica) la anchura w del cuaderno (anteriormente) citado, encontramos que el flexómetro está graduado en centímetros, por tanto, la precisión (o mínima lectura posible) que deberemos considerar es: $P = 0.1\ cm = 1.0\ mm$, ó: $P = 0.001\ m = 10^{-3}\ m$, luego:

$$\Delta E = \pm \frac{1}{2}(1.0\ mm) = \pm\ 0.5\ mm = \pm\ 0.05\ cm$$

ó

$$\Delta E = \pm \frac{1}{2}(0.001\ mm) = \pm\ 0.0005 m = \pm\ 5x10^{-4}\, m$$

Ahora, si la anchura del cuaderno resultó ser $w = 20.3\ cm$, tendremos que el dato completo que debe reportarse para tal medición es de:

$$w \pm \Delta w = (20.3 \pm 0.05)\ cm = 20.3 \pm 0.05,\ cm$$

7 En el caso de los instrumentos digitales, la incertidumbre se obtiene como un porcentaje de la lectura de medida; el fabricante determina el porcentaje de error siendo común que dicho porcentaje dependa de la escala empleada en la medida.

8 El símbolo : = representa una asignación.

Vea que las unidades se separan del dato mediante un paréntesis o una coma. Igualmente, no hay que perder de vista que la incertidumbre tiene las unidades del sistema empleado en el experimento.

d) *Errores de observación.* Son aquéllos que se derivan de la observación del experimentador, y se magnifican cuando el observador se encuentra fatigado o cuenta con deficiencia visual, o cuando las condiciones de iluminación son inadecuadas, o bien, si la atención no es la requerida, etc. Además, muchas observaciones se llevan a cabo con instrumentos analógicos (los de aguja) y suele ocurrir que no manejamos de manera correcta el instrumental, a la vez que desconocemos las escalas del instrumento. Un error común –y de gran magnitud– se presenta cuando la medida directa se lleva a cabo formando un ángulo con la línea de la lectura (paralaje) en vez de hacerlo perpendicularmente. Estos errores pueden subsanarse con un entrenamiento adecuado. Sin embargo, los errores de criterio imputables al observador son lo que tenemos que estudiar con detenimiento, siendo:

d.i) *Cifras significativas y cifras estimadas.* Toda vez que introdujimos el concepto de cifras significativas y cifras estimadas (ver pág. 18), falta señalar el papel del cero como cifra significativa,[9] pues al ocupar distintas posiciones dentro de un dato numérico (al inicio, en medio o al final del dato), su significancia es distinta. Brevemente, diremos que: (*i*)cuando (el cero) precede a un dígito no nulo, entonces (el cero) no se considera como cifra significativa; *v. g.*: el volumen molar, V_m, del gas ideal (a temperatura y presión de 0°C y 1.0 bar, respectivamente) es: $V_m = 0.0224\ m^3/mol$; en este caso, el dígito 2 es la primera cifra significativa del dato;[10] de hecho, este dato debe expresarse en notación científica como: $V_m = 2.24\times10^{-2}\ m^3/mol$. (*ii*) Cuando (el cero) se encuentra entre dígitos distintos de cero, es una cifra significativa, pues forma parte de las cifras que constituyen el número.

Ejemplo 2. Si la anchura b de la mesa de trabajo es $b = 108.5\ cm$, tenemos 4 cifras significativas, y en realidad decimos que: $108.45 < b < 108.55\ cm$.

Por último, tenemos que cuando (el cero) aparece al final de un número, también es cifra significativa; por ejemplo, si reportásemos que el diámetro interno Φ de un tubo de PVC es 10.0 cm, entonces los ceros que aparecen en la cifra ya adquieren significancia, pues en realidad estamos diciendo que $9.95 < \Phi < 10.05$ cm, que puede verificarse realizando una o más mediciones.

En suma, podemos resumir lo anteriormente expuesto para las cifras significativas y estimadas diciendo que *proporcionan una idea bastante aproximada –y buena– de la precisión de una cantidad dada*. Para un manejo rápido y eficiente de estas cifras, se suelen proponer tres criterios básicos (CB) para ponerlas en práctica, siendo:

9 Esto lo puntualiza cabalmente Ramos C. (*op. cit.,* Ramos C.)

10 Dato tomado del Apéndice B (*Constantes Físicas y Fundamentales*) que aparece en Resnick-Halliday-Krane. *op. cit*.

CB1. Si la cantidad de interés no va acompañada por un indicador o índice de precisión (por ejemplo, el error de escala, la distancia al valor promedio o la desviación estándar), la *incertidumbre del último dígito se asumirá en* ± 1; por ejemplo, si el resultado del radio de un cilindro de metal se expresa como: $r = 2.5\ cm$, asumiremos que el valor real de r se encuentra entre $2.4\ cm$ y $2.6\ cm$.

CB2. Si la cantidad contiene un dígito no significativo (también llamado superfluo), se *sumará 1 al último dígito que se conserve, si y sólo si el primero de los dígitos eliminados es mayor o igual que* 5; por ejemplo, en el caso anterior, si r estuviese dado por el dato $r = 2.56\ cm$, el redondeo daría como resultado $r = 2.6\ cm$.

CB3. Si deseamos redondear una cifra que termine en 5, se admite en primera instancia el criterio del experimentador, y después, que la última cifra que se conserva se redondee al valor par más cercano; por ejemplo: $r = 2.565\ cm$ debe redondearse a $r = 2.56\ cm$.

d.ii) Error de juicio. Incertidumbre independiente del instrumento de medida y totalmente imputable al experimentador y sus características personales al depender únicamente de la habilidad, juicio y/o criterio que tiene para medir. A este error también se lo conoce como *incertidumbre de la observación*, y se admite que la estimación de su magnitud debe ser mayor o igual que la del error de escala, por lo que se debe ser cuidadoso tanto con la programación del experimento,[11] como con la ejecución y control de las condiciones experimentales para alcanzar el mayor grado de veracidad posible en la obtención de los datos experimentales. Canales va más allá y sugiere realizar una "corrida previa" en papel –como se hace en la programación–, de modo que el método de observación seleccionado minimice el error de juicio a, por lo menos, magnitudes equivalentes a la de la incertidumbre de escala; de lograrse esto y si el límite de escala es muy pequeño, asegura, las medidas son precisas.

Errores estocásticos

Como se mencionó líneas arriba, en este apartado se contemplan, de manera implícita, los errores residuales. Las incertidumbres debidas a estos errores son causadas por la acumulación de múltiples perturbaciones pequeñas que se combinan aleatoriamente, afectando cada medición, por lo que se obtienen valores distintos en cada repetición de la medida. Los valores de estas incertidumbres fluctúan dentro de un intervalo y se aglutinan en torno a un valor "central" o "esperado" más o menos bien definido (piense en cómo se distribuyen las flechas en el juego de "tiro al blanco"); la variación en el valor numérico de las variables o medidas es causada por factores sobre los que no tenemos control y/o se desconocen pero que, indudablemente, influyen en el experimento. El tratamiento de estos errores se lleva a cabo por métodos estadísticos, y lo abordamos en el capítulo siguiente.

11 En caso de que se desee profundizar en cómo planear un experimento, se recomienda la lectura de: Baird, D. C.; *op. cit.*, capítulo 5, donde se desarrolla impecablemente este tema.

3 TRATAMIENTO DE ERRORES

Introducción

Hemos dicho que toda medición tiene asociado un error que comprende tanto el error del instrumento de medida (así sea el más sofisticado y fino –en términos de precisión–) como el error imputable al observador, así como todos aquellos errores debidos a los imponderables que influyen en el experimento y que de una u otra manera, afectan la medición. Estos errores van incrementándose conforme se avanza en la evolución del experimento y se analiza el comportamiento de los datos; este proceso, conocido como propagación de errores, es vital en el universo experimental, pues los errores repercuten y trascienden las operaciones aritméticas y cálculos matemáticos efectuados dentro del análisis de los datos. En este capítulo estudiaremos cómo hay que trabajar los errores y cómo se propagan y deben aparecer en el reporte final del experimento.

3.1 Errores sistemáticos

Hemos insistido que en todo experimento se encuentran errores que permanecen constantes y otros en los que su magnitud cambia durante el desarrollo del proceso experimental. Los primeros son los errores sistemáticos que, no obstante ser constantes durante el experimento, pueden diferir en magnitud entre sí. Buscando minimizar la magnitud de estos errores, admitimos como buen criterio experimental despreciar las incertidumbres pequeñas respecto a las grandes,[1] puesto que éstas quedan contenidas en las incertidumbres más grandes.[2] Ejemplo típico de esto es la inclusión de la incertidumbre de calibración –habitualmente pequeña– en los errores de reproducción, de escala o de juicio, que suelen ser semejantes; igualmente, es indistinto tomar cualquiera de estos errores para la propagación de los errores.

Ejemplo 3. Suponga que queremos determinar la longitud l de la mesa de trabajo con un flexómetro y que al ir a medir, encontramos que el flexómetro presentó una torsión en alguna parte de su extensión que no podemos pasar por alto; si esta torsión se presentara al inicio del flexómetro, podríamos simplemente trasladar el cero y proseguiríamos con nuestro proceso de

1 Recuerde que este es un atributo o concesión que se le otorga al experimentador, puesto que él puede "cargar" algunos de estos errores dentro de los errores de juicio o de redondeo por el manejo de cifras significativas. Evidentemente, si esto se hace de manera consistente, generalmente diremos que se trata de un buen experimentador.

2 Si y sólo si, hay que insistir en ello, ambas incertidumbres permanezcan aproximadamente constantes.

medición con toda naturalidad, estimando sólo un error de juicio. En caso de que la torsión se presente en una parte interna del flexómetro –y no podamos trasladar nuestro "cero"–, tenemos que afrontar esta situación engorrosa; para ello, pensamos que este es un error mayúsculo y no contemplado, pues al aparecer, la escala con una torsión dificulta la lectura e incrementa el error. Después de meditar la situación, optamos por estimar el error de la lectura en, digamos, 5.5 cm. Como consecuencia, y dado que este error es mayor que otros involucrados en la medición (*v. g.*: estimamos que los valores de algunos de los errores son: error de escala, $\Delta E = \pm\, 0.05\ cm$; error de juicio $\cong \pm\, 1.0\ cm$; error de paralaje $\cong \pm\, 1.0\ cm$; error de reproducción $\cong \pm\, 1.0\ cm$; posibles errores ambientales $\cong \pm\, 0.1\ cm$; entre otros), decidimos que este error indeseable es el más significativo y el que más afecta el dato recolectado, por lo que el reporte de la longitud l de la mesa, con su respectivo error, resulta ser de, digamos: $l \pm \Delta l = 182.0 \pm 5.5,\ cm$. Note que a pesar de que el error es de una magnitud enorme, el dato resulta ser confiable.

Veamos ahora como obtener la incertidumbre neta asociada a los errores en los que su magnitud no es constante.

3.2 Errores estocásticos

Para adentrarnos en el tratamiento de este tipo de errores, comencemos con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 4. Suponga que con un multímetro digital medimos la corriente eléctrica I (en amperes), que fluye por un alambre de metal de longitud $l \pm \Delta l = 96.9 \pm 0.05,\ cm$ y sección transversal de área $A \pm \Delta A = 1.96 \times 10^{-3} \pm 1.57 \times 10^{-4},\ cm^2$, al que se aplican diferencias de potencial (o voltajes) V (en Volts) con una fuente de poder de voltaje de corriente directa (V_{DC}), de uno en uno hasta llegar a un valor máximo de 10 volts (vea la Figura 2). La intención es encontrar el valor de la resistencia eléctrica, R (en ohms), del alambre y verificar con ello el cumplimiento de la Ley de Ohm; el experimento se repite tres veces, recolectándose los datos que aparecen en la siguiente Tabla.[3]

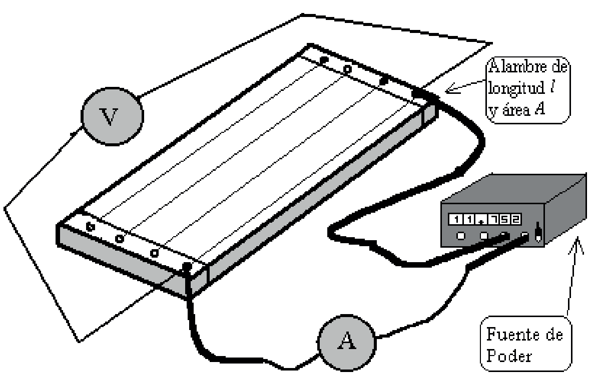


Figura 2. Dispositivo experimental empleado para la Ley de Ohm.

3 Por comodidad, se omite la incertidumbre asociada a cada medida.

V (V)	I_1 (A)	I_2 (A)	I_3 (A)
1	0.16	0.17	0.18
2	0.33	0.36	0.36
3	0.51	0.54	0.53
4	0.7	0.71	0.71
5	0.87	0.89	0.89
6	1.05	1.07	1.07
7	1.23	1.25	1.24
8	1.4	1.4	1.42
9	1.58	1.59	1.6
10	1.78	1.76	1.78

Tabla II. Voltajes y corrientes eléctricas para verificar la Ley de Ohm.

En la Tabla II se observa que I modifica su valor en cada corrida que realizamos, a pesar de no alterar nada del arreglo experimental. Inmediatamente nos asaltan las preguntas: ¿por qué varió I si V = constante para ese dato en particular? ¿Cuál valor de I tomamos para nuestro análisis? ¿Los valores obtenidos están bien? O ¿Qué hicimos mal? ¿El alambre estaba dañado? ¿O fue el multímetro el que no servía?, etc. Empero, y después de un estudio minucioso de la tabla, colegimos que la recolección de datos estuvo bien y que carecemos de elementos decisorios válidos y convincentes para decidir cuál lectura fue "correcta" y cuál fue "incorrecta"; lo que queda claro es que los valores de I fluctúan azarosamente, pero tienden a agruparse en torno a un valor central del conjunto de lecturas, que, suponemos, es el valor medio o promedio de cada serie de datos. Así, plasmamos en la tabla las lecturas tal y como fueron apareciendo pero, como una forma de simplificar su lectura y proceder con mayor agilidad en el análisis posterior de los datos, optamos por incluir una columna adicional que muestre sus medias aritméticas, es decir, se muestran los promedios de las corrientes eléctricas correspondientes a cada voltaje, como se muestra en la Tabla III.

V (V)	I_1 (A)	I_2 (A)	I_3 (A)	$I_{promedio}$ (A)
1	0.16	0.17	0.18	0.170
2	0.33	0.36	0.36	0.350
3	0.51	0.54	0.53	0.527
4	0.71	0.71	0.71	0.71
5	0.87	0.89	0.89	0.883
6	1.05	1.07	1.07	1.063
7	1.23	1.25	1.24	1.240
8	1.4	1.4	1.42	1.407
9	1.58	1.59	1.6	1.59
10	1.78	1.76	1.78	1.773

Tabla III. Voltajes y corrientes eléctricas para verificar la Ley de Ohm. Incluye los valores promedio de la corriente eléctrica I.

El ejemplo aquí expuesto da pie para ilustrar que la cuantificación de los errores estocásticos exige el uso de técnicas y métodos estadísticos –algunos laboriosos, como los ajustes de curvas empleando regresión (principalmente, la regresión lineal o método de los mínimos cuadrados)–, las curvas de distribución, los histogramas y polígonos de frecuencias, las curvas gaussianas y de Poisson, etc. (vea Figuras 3, 4 y 5, respectivamente).

Número de águilas que caen	Frecuencia con que caen águilas en 64 lanzamientos
0	1
1	6
2	15
3	20
4	15
5	6
6	1

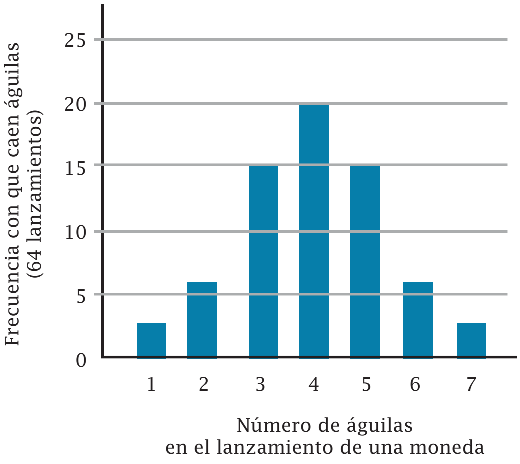


Figura 3. Representación gráfica por medio de un histograma de los diferentes valores de una variable (en este caso, el lanzamiento de una moneda y el número de águilas que caen en 64 lanzamientos. Se muestra la tabla de datos). (Tomado de Meiners *et al.*, p. 35. La gráfica está hecha en Microsoft Excel).

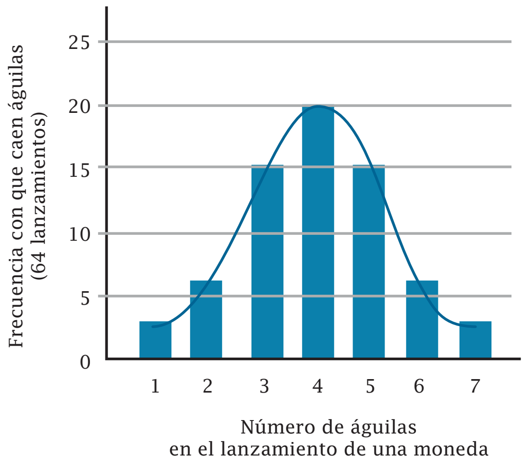


Figura 4. Representación gráfica por medio del ajuste de un polígono de frecuencias (sobrepuesto al histograma, para hacerlo más claro) de los valores que aparecen en la Figura 3. (La gráfica está hecha en Microsoft Excel).

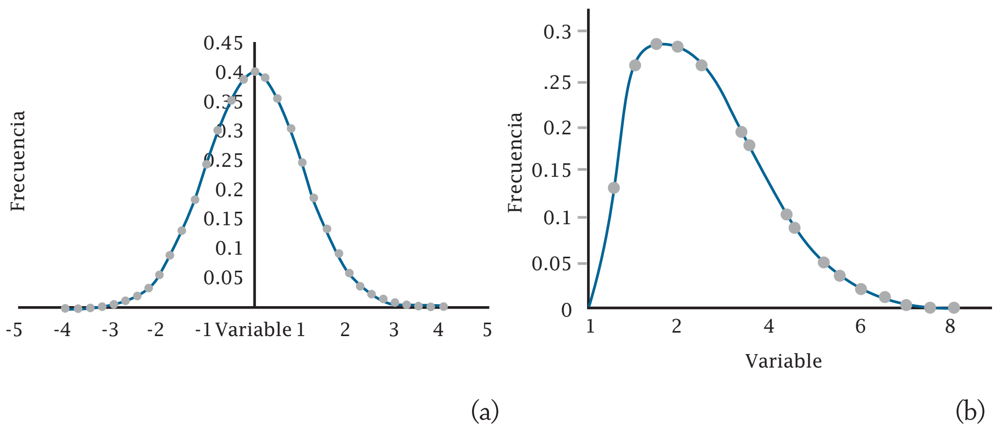


Figura 5. Curvas de distribución: (a) Simétrica o Normal, tipo Gauss (conocida también como "Campana de Gauss"). (b) Asimétrica o Tipo Poisson. (Las gráficas están hechas en Microsoft Excel).

Es necesario decir que la obligatoriedad del manejo estadístico de los datos se introduce debido a que el criterio del experimentador deja de ser el elemento principal que determina la incertidumbre asociada al conjunto de datos, pues las fluctuaciones debidas al azar influyen en los resultados experimentales, ocasionando que las variables modifiquen su valor en cada repetición (o corrida) del experimento; en general, la gráfica de estos datos fluctuantes da lugar a una curva de distribución simétrica del tipo distribución de Gauss, Figuras 4 y 5, ya que:

> [...] la desviación total de una cantidad medida x, respecto de un valor central X, es la resultante de una gran cantidad de pequeñas fluctuaciones que ocurren al azar[...] Considerando a la curva exclusivamente desde el punto de vista matemático por ahora, su ecuación puede expresarse así:

$$y = Ce^{-h^2(x-X)^2}$$

[...] Aquí la constante C es una medida de la altura de la curva, ya que $y = C$ para $x = X$, en el centro de la distribución. La curva es simétrica alrededor de $x = X$ y tiende a cero asintóticamente[...] la cantidad h determina la amplitud de la curva, ya que sólo es un multiplicador en la escala x. Si h es grande, la curva es estrecha y alta en relación a su amplitud; si es pequeña, la curva es ancha y baja. La cantidad h sin duda debe de estar relacionada con la desviación estándar σ de la distribución, y se puede demostrar que la relación en cuestión es

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\, h}$$

Ahora que tenemos una ecuación definida para la distribución, toda la ambigüedad sobre la interpretación de la desviación estándar en términos de probabilidad desaparece, y tenemos valores definidos, únicos y permanentes. Por ejemplo, el área incluida dentro del intervalo $x \pm \sigma$ para una distribución Gaussiana es de 68%, y dentro del intervalo $x \pm 2\sigma$ es de 95%, e igual ocurre para todas las distribuciones Gaussianas.[4]

También, hay que señalar en este apartado un caso bastante frecuente dentro de la experimentación: cuando la recolección de datos para una variable dada nos devuelve valores constantes (como se observa en el renglón 4 de la Tabla de Datos III),[5] estos datos generan una distribución **sui géneris** denominada Distribución Rectangular, caso particular de las curvas simétricas. Otro ejemplo sencillo, y al alcance de la mano, que produce una Distribución Rectangular se tiene cuando medimos, así sea en distintos puntos, la altura o espesor de un paralelepípedo recto (como la caja mostrada en la Figura 1); estas mediciones se exhiben en la Tabla de Valores ubicada a la izquierda del gráfico de la Figura 6. Es fácil observar que la invariancia de los datos y su mapeo nos proporciona un gráfico distinto a los mostrados en las Figuras 3, 4 y 5, aunque suponemos que están emparentados entre sí; observe que los datos graficados tienen la forma de un rectángulo, en vez de una campana; de ahí el nombre de Distribución Rectangular.

Número de medida	Espesor t de la caja (cm)
1	1.845
2	1.845
3	1.845
4	1.845
5	1.845
6	1.845
7	1.845

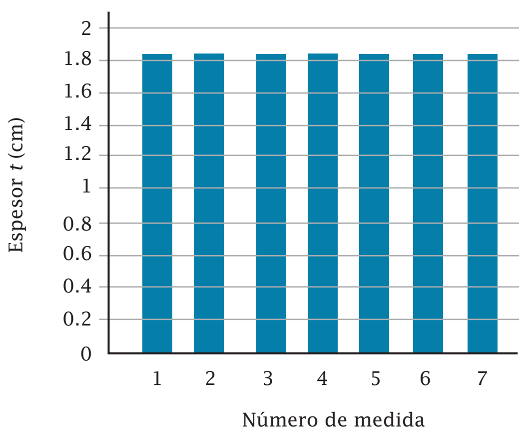


Figura 6. Distribución rectangular (la tabla y la gráfica están hechas en Excel). (Idea tomada de Canales Ramos)

4 Baird, D. C.; *op. cit.*, pp. 34-35.

5 De hecho, si graficáramos los datos de cada renglón de esta tabla, su gráfico esbozaría figuras similares a las de la Figura 3, aunque no tan pronunciadas, debido a lo pequeño del conjunto de datos (sólo 3 por renglón).

Nos falta cómo encontrar la incertidumbre asociada a mediciones donde los datos se aglutinan en torno a un valor central y que tienen como gráfico curvas (de hecho, son distribuciones) como las que hasta aquí hemos visto; a la incertidumbre asociada a conjuntos de datos con estas características la denominamos Deviación típica o estándar, y se verá a continuación.

3.3 Desviación estándar o desviación típica (σ)

Para obtener la incertidumbre de una medida de tendencia central[6] que tiene como gráfico una campana de Gauss (Figura 5.a), requerimos encontrar la varianza (σ^2), dado que ésta "es una medida del esparcimiento o dispersión de los valores que puede tomar la variable x correspondiente".[7] La varianza es un número no negativo y es el cuantificador más objetivo que tenemos para encontrar la dispersión, o variación, que muestran los valores de la variable respecto del valor medio (o promedio) del conjunto; los valores que toma la variable se denominan *valores muestrales*, mientras que el *valor promedio* del conjunto recibe el nombre de *medida de centralización*; debemos notar que las unidades de la varianza están elevadas al cuadrado.

La *desviación estándar o desviación típica (σ)* del conjunto permite cuantificar, al igual que la varianza, la dispersión de los valores de la variable respecto al valor medio del conjunto; además, es inmediato que la desviación estándar, por ser la raíz cuadrada de la varianza, tiene las mismas unidades que el promedio.

Para obtener σ^2 (ó σ), lo primero que hacemos es calcular el valor promedio del conjunto y posteriormente sumar los cuadrados de cada desviación que presentan los datos, para después dividir la suma total de cuadrados entre el número de observaciones (n), alcanzando con ello la medida de dispersión de los valores del conjunto; es decir, "promediamos" (si es dable llamarle así) las desviaciones cuadráticas. Debemos hacerlo así, pues si tomáramos el promedio "simple" de las desviaciones, encontraríamos que éste es cero, puesto que hay puntos a la izquierda y a la derecha del valor medio y, en consecuencia, se tienen cantidades (o distancias)[8] positivas y negativas que al sumarse, se anulan.

Ejemplo 5. Supóngase que al medir 5 veces la distancia (en metros) que recorre un auto (en línea recta), al cabo de 10 segundos se obtuvieron las siguientes lecturas: $x_1 = 81.6\ m$; $x_2 = 78.1\ m$; $x_3 = 80.5\ m$; $x_4 = 85.0$ y $x_5 = 79.6\ m$. El valor medio (o media muestral), $\bar{x}$, resulta ser:[9]

6 Que en sí misma no es más que una *variable aleatoria*, pudiendo ser discreta o continua. Esta variable está asociada a un *experimento aleatorio u observación aleatoria*, entendiéndolo como aquel "proceso que tiene las siguientes propiedades: (1) El proceso se efectúa de acuerdo a un conjunto bien definido de reglas; (2) es de naturaleza tal que se repite o puede concebirse la repetición del mismo; (3) el resultado de cada ejecución depende de 'la casualidad' (esto es, de influencias que no pueden ser controladas) y, por lo tanto, no se puede predecir un resultado único. Al resultado de una sola ejecución del experimento se le llama el resultado del ensayo." (Kreyszig, E.–1970–; *Introducción a la Estadística Matemática. Principios y Métodos*; Ed. Limusa, S. A. México. 1981, p. 55).

7 Kreyszig, *op. cit.*, p. 100.

8 Recuerde que en geometría analítica definimos la distancia entre un punto $A(x_1, y_1)$ y un punto $B(x_2, y_2)$ como: $d_{AB} = |AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$. En el caso unidimensional, tendremos que $d_{AB} = (x_2-x_1)$. Recuerde también que son dirigidas.

9 El valor medio, valor promedio o, simplemente, media de la muestra, se representa por $\bar{x}$ (se lee "x barra"), dada por: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_i x_i f(x_i)$ para una distribución discreta, mientras que para una distribución continua: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$, donde $f(x)$ es la función de probabilidades o la densidad, respectivamente, de la variable x considerada. El símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ recibe el nombre de "sumatoria de x", y no es más que: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{81.6+78.1+80.5+85.0+79.6}{5} = \frac{404.8}{5} = 80.96\ m$$

Las desviaciones de los datos (dadas por $d_i = (x_i - \bar{x})$, en metros, por ser distancias) respecto al valor medio son:

$d_1 = (81.6 - 80.96) = 0.64$; $d_2 = (78.1 - 80.96) = -2.86$; $d_3 = (80.5 - 80.96) = -0.46$; $d_4 = (85 - 80.96) = 4.04$; $d_5 = (79.6 - 80.96) = -1.36$; con lo que el promedio de las desviaciones resulta ser:

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n} = \frac{0.64 + (-2.86) + (-0.46) + (4.04) + (-1.36)}{5} = \frac{0}{5} = 0\ m$$

Este ejemplo muestra que el promedio de la desviación simple de los datos no es útil para medir la dispersión; por tanto, debe ser evidente por qué tomamos el promedio de las desviaciones cuadráticas (que siempre serán cantidades positivas por estar elevadas al cuadrado) y posteriormente, extraerle raíz cuadrada para obtener la varianza.

Matemáticamente, la varianza está dada por:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - 2(\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{x})^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - 2(\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} + \frac{n(\bar{x})^2}{n}$$

donde consideramos que: $\sum_{i=1}^{n} k = nk$, con k = constante y n = número de observaciones, datos o lecturas, y: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = (\bar{x})$ = valor promedio de x; por tanto, la expresión anterior resulta ser:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \qquad (1)$$

después de extraer raíz cuadrada (y tomando la raíz positiva), σ resulta ser:

$$\sigma = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \right|^{1/2}$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 \right|^{1/2} \qquad (2)$$

que es la desviación típica o estándar.

Que la varianza, o en su caso la desviación estándar, sea pequeña significa que los valores tienden a concentrarse alrededor de la media y, en consecuencia, el gráfico de los datos, como el de la Figura 5.a, resulta ser estrecho y alto. Por el contrario, una varianza (o una desviación estándar) grande implica que los valores están muy dispersos y se distribuyen lejos del valor medio, por lo que el gráfico es de menor altura, pero más ancho. En el primer caso, decimos que la incertidumbre es pequeña, mientras que en el segundo, la incertidumbre será grande.

Note también que la ecuación (2) no dice cuál debe ser el tamaño de n, por lo que tácitamente asumimos que para abarcar todos los casos del universo muestral, $n \rightarrow \infty$;[10] naturalmente que tal cosa es imposible de llevarse a cabo, pues en todo experimento la recolección de datos es limitada y, por tanto, n resulta ser finita; en este caso, hablamos de una muestra y los datos obtenidos constituyen el espacio muestral. Luego, la ecuación (2) debe ajustarse, cosa que hacemos sustituyendo n por $(n\ -1)$ para obtener así la *desviación estándar de la muestra*, S, dada por:

$$S = \left|\sum_i \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}\right|^{1/2} = \left|\sum_i \frac{x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}(\bar{x})^2\right|^{1/2} \tag{3}$$

Las expresiones de S (ecuación (3)) y las de σ (ecuación (2)), numéricamente difieren poco cuando n es grande, aunque conceptualmente sean diferentes: σ es la desviación estándar del universo muestral, en tanto que S es la desviación estándar de la muestra; no obstante, es viable suponer que aún cuando S representa la desviación típica de una muestra, podemos asumirlo como un estimador confiable de la desviación típica del universo.[11] En suma: para obtener el error estocástico asociado a un experimento dado, toda vez que hemos recolectado un buen número de medidas, la dispersión de los datos la obtendremos –sin pérdida de generalidad y por conveniencia– usando S en vez de σ.

3.4 Promedio y desviación estándar de una distribución uniforme o rectangular

En la sección 3.2 mencionamos el hecho de que al recolectar datos experimentales se dé el caso de que una variable siempre tenga el mismo valor, lo que da lugar a una distribución de Gauss particular, denominada Distribución Uniforme o Rectangular, como la que aparece en la Figura 6 donde, y en primera instancia, pensaríamos que la desviación estándar debería ser cero, es decir, $\sigma = 0$, cosa que carece de sentido. Este caso, llevado a la experimentación y estudiado por la teoría de la probabilidad y la estadística[12], nos indica que la incertidumbre está indisolublemente unida a la desviación estándar y a la precisión P del instrumento con que se efectúan las lecturas. La estadística muestra[13] que la varianza de la distribución rectangular, dentro del intervalo [0,1], está dada por:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{12}$$

10 Esto lo leemos: "n tiende a infinito".

11 Canales menciona que cuando $n \geq 30$, las desviaciones estándar del universo y de la muestra difieren poco numéricamente.

12 Ver, por ejemplo, Kreyszig, *op. cit.*, pp. 94-102, o cualquier texto de Probabilidad y estadística; también puede consultarse: https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_uniforme_continua.

13 La demostración no aparece aquí, pero si tiene curiosidad por su desarrollo, puede consultar algún texto de estadística, o bien, la dirección electrónica mencionada en el pie de página anterior.

por lo que la desviación estándar resulta ser:

$$\sigma_r = \pm\sqrt{\frac{1}{12}} \cong \pm\, 0.289 \cong \pm\, 0.3$$

y, en consecuencia, el error asociado a tal distribución es:

$$\sigma_r \cong \pm\, 0.3\ P \tag{4}$$

donde, y como ya se mencionó, P es la precisión o mínima lectura posible del instrumento que se está usando.

Ejemplo 6. En la tabla de datos referida en la Figura 6, encontramos que el espesor t de la caja (ver Figura 1) es de 1.845 cm, habiéndose repetido la medición 7 veces. Dado que la medición se llevó a cabo empleando un vernier, encontramos que la precisión (o límite de escala) del instrumento resultó ser:

$$P = \frac{1}{20}\ mm = 0.05\ mm = 0.005\ cm$$

por lo que concluimos que el espesor t se encuentra dentro del intervalo (1.840, 1.850) cm,[14] y claramente, todos los valores dentro del intervalo resultan ser equiprobables. Visto gráficamente, podríamos ilustrarlo, de manera aproximada, como aparece en la Figura 6.

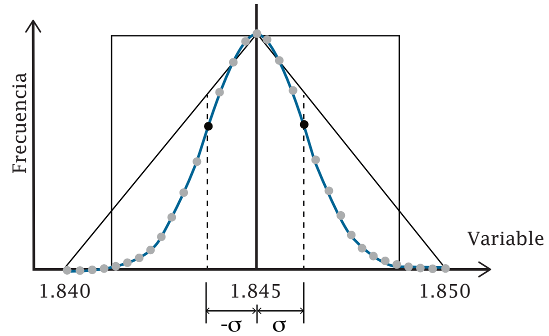


Figura 7. Curva de Gauss asociada a una distribución rectangular (no está a escala. Aparece también la curva de la distribución gaussiana como elemento de comparación). (Idea tomada de: Canales Ramos).

De lo anteriormente dicho, y dado que la precisión y el error de escala del vernier son, respectivamente: $P = 0.005\ cm$ y $\Delta E = \pm\ 0.0025\ cm$, encontramos entonces que el error asociado a la distribución –y en consecuencia, al experimento– resulta ser de:

$$\sigma_r \cong 0.3\ P = 0.3\ (0.005) cm = 0.0015\ cm = 1.5\text{x}10^{-3}\ cm$$

es decir: $\sigma_r \cong 1.5\ \text{x}10^{-3}$, cm

14 Aquí se usa la notación de un intervalo abierto, es decir: $x \in (a,b) \Rightarrow\ a < x < b$; en el caso presente, estaríamos diciendo que $1.840 < t < 1.850\ cm$, que es lo mismo.

por lo que, tentativamente, reportaríamos la medición como:

$$t \pm \delta t = 1.845 \pm 1.5\text{x}10^{-3},\ cm \cong 1.845 \pm 0.002,\ cm$$

donde introdujimos $\delta t \equiv \sigma_r$ para el error proveniente de los cálculos y para distinguirlo del error de escala ΔE. Sin embargo, no debemos olvidar que estamos hablando de una distribución con características especiales, por lo que esperamos que el dato que en primera instancia reportamos sufra correcciones posteriores, pues los datos son de una muestra y no del universo muestral.

3.5 Errores accidentales asociados al promedio

Mencionamos en las secciones precedentes que cuando llevamos a cabo un experimento dado, habitualmente recolectamos un número no demasiado grande de datos, aún cuando este número pueda consistir en miles o millones, como sucede en el análisis del conteo radiactivo o, en el caso más reciente, para validar la existencia del Bosón de Higgs. Y es que recolectar una gran cantidad de datos implica gran inversión de tiempo, lo que imposibilita contar con espacios muestrales muy numerosos y, por tanto, debemos conformarnos con pequeñas muestras representativas, conscientes que una muestra pequeña conlleva un valor promedio con menor precisión que el promedio de una muestra grande pero, a pesar de tal restricción, los resultados experimentales de ambas muestras deben coincidir en el límite. Sabemos también que el estudio de los datos –con su promedio y desviación estándar– para cada corrida del experimento pueden, incluso, dar origen a distribuciones gaussianas ligeramente desplazadas unas respecto a otras; este hecho no nos preocupa en absoluto pues, en principio, las desviaciones estándar de las muestras, y la del universo, deben ser las mismas. Podría pensarse que una muestra con pocos datos es un hándicap que demerita el proceso experimental y las conclusiones que de él emanan, toda vez que admitimos que un experimento es más confiable entre mayor sea la cantidad de datos con que cuenta –lo ideal es que el número de datos sea infinito–, pues con ello garantizamos que el valor promedio de la muestra será cada vez más parecido al valor promedio del universo (aunque este dato se desconozca). Este problema, sin solución aparente, se subsana teóricamente mediante la proposición de que si la distribución del universo de observaciones es gaussiana, la distribución de las medias de la muestra será también una gaussiana centrada "en el centro... de la distribución original de observaciones individuales[...] y siendo más estrecha que la distribución original";[15] bajo esta premisa, aseguramos que los resultados de una gaussiana para el universo son análogos a los resultados de las muestras, lo que nos permite inferir las características del universo a partir de las características muestrales; ahora, dado que las promedios de las muestras son gaussianas referidas a la gaussiana del universo, es fácil concluir que las desviaciones de los promedios de cada conjunto o espacio muestral deben referirse respecto al valor promedio del universo. En esto reside la confiabilidad de la experimentación y sus resultados.

Supongamos entonces que hemos recolectado pocos datos de un experimento y que hemos calculado el valor promedio de la muestra. Inmediatamente podemos obtener la desviación promedio del promedio, $\bar{a}$ (como lo denotamos anteriormente, vea páginas 33 y 34), para cualquier distribución (en este caso, gaussiana) como:

15 Baird, D. C. *op. cit.*, pp. 38-41.

$$\bar{d} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}| p(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx} \approx 0.8\ \sigma$$

donde $p(x)$ es la probabilidad. Si la muestra es de tamaño n (con n finita), la ecuación anterior se puede escribir como:[16]

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_i d_i}{n}$$

La confiabilidad, llamada también desviación promedio de la media o del valor medio está dada por:

$$\bar{d}_m = \frac{\bar{d}}{\sqrt{n}}$$

Cabe aquí el señalamiento de que estas tres expresiones son usadas, preferentemente, cuando deseamos hacer estimaciones de los errores con gran rapidez y no demandamos gran precisión en los cálculos.

También, establecemos una relación entre la desviación estándar neta del promedio (σ_m^2) y la desviación estándar de la pequeña muestra (S) de tamaño n, teniendo presente que la desviación estándar de los valores promedio individuales es *la incertidumbre asociada a cada uno de ellos*, resultando entonces:

$$\sigma_m^2 = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

Así, a la desviación estándar del promedio le llamamos incertidumbre del promedio y está dada en términos de la desviación estándar de la muestra. De acuerdo a esto, y por la expresión (5), reportaremos el valor promedio de un experimento en presencia de errores accidentales, residuales o de naturaleza estadística como:[17]

$$X := \bar{X} \pm \sigma_m^2 = \bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

Para el caso de una distribución rectangular, el resultado del experimento se expresará, de acuerdo a la ecuación (4), como:

$$X := \bar{X} \pm \sigma_m^2 = X_0 \pm \frac{0.3}{\sqrt{n}}\ P \tag{7}$$

con X_0 el valor medio de la muestra, que en este caso permanece constante.

---

16 Note la similitud entre estas expresiones con la definición para el valor promedio dada en el pie de página 9 de la página 33. ¿Acaso podíamos esperar otra cosa? ¡Estamos hablando de un valor medio!

17 En realidad deberíamos tener que, para grandes muestras (aquéllas en las que asumimos que $n \geq 30$), "los límites de confianza para la media poblacional vienen dados por: $\bar{X} = X_0 \pm Z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, donde Z_c depende del nivel de confianza que en cada caso se desee obtener[...] Para pequeñas muestras ($n < 30$) los límites de confianza para medias poblacionales están dados por: $\bar{X} = X_0 \pm t_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$". (Spiegel, M. R.; *Teoría y problemas de probabilidad y estadística*. Series de Compendio Schaum; McGraw – Hill; México. 1976., pp. 195-196). (nota: t_c se calcula por medio de tablas y se refiere a la distribución t de Student).

Ejemplo 7. Para ilustrar lo anteriormente dicho, remitámonos a los datos del Ejemplo 5, donde encontramos que las distancias recorridas (en metros) por un auto que viaja en línea recta, después de 10 segundos, fueron: x_1 = 81.6 m; x_2 = 78.1 m; x_3 = 80.5 m; x_4 = 85.0 m; y x_5 = 79.6 m, obteniéndose una distancia promedio de: $\bar{x} = 80.96\ m$. Ahora, de acuerdo a la ecuación (3), la desviación estándar de la muestra la encontramos así:

$$S = \left| \sum_i \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right|^{1/2} = \left| \frac{1}{(5-1)} (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2) \right|^{1/2}$$

$$= \left| \frac{1}{4} ((0.64)^2 + (-2.86)^2 + (-0.46)^2 + (4.04)^2 + (-1.36)^2) \right|^{1/2}$$

$$= \left| \frac{1}{4} (26.972) \right|^{1/2} \approx 2.597\ m$$

por lo que la distancia recorrida promedio por el vehículo, después de 10 segundos, deberá reportarse, de acuerdo a la ecuación (6), como:

$$x = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{5}} = 80.96 \pm \frac{2.597}{\sqrt{5}} \approx 80.96 \pm 1.161,\ \mathrm{m} \approx 80.96 \pm 1.16,\mathrm{m}$$

Ejemplo 8. Veamos ahora qué ocurre cuando la distribución es rectangular, y para ello, remitámonos a los datos del Ejemplo 6 y de la Figura 6. Allí, encontramos que el espesor de la caja fue: t = 1.845 cm, P = 0.005 cm y n = 7 (que fue el tamaño de la muestra), por lo que el error accidental asociado al valor 1.845 cm será, según la ecuación (7), de:

$$\pm \left[\frac{0.3}{\sqrt{n}} \right] P = \pm \left[\frac{0.3}{\sqrt{7}} \right] (0.005) \approx 0.00056 \approx 0.001,\ cm$$

después de redondear la cantidad; por lo que de acuerdo a la expresión (7), el espesor t deberá reportarse como:

$t := \bar{t} \pm dt$ = espesor de la caja $\approx 1.845 \pm 0.001,\ cm$.

La pequeña discrepancia entre el reporte de los resultados de los Ejemplos 6 y 8 para el mismo caso se da porque en el primer caso hemos pasado por alto que los datos recolectados fueron de una pequeña muestra y no hicimos el ajuste, cosa que ya contemplamos en el Ejemplo 8, que es como debemos proceder.

3.6 Propagación de errores o incertidumbres

Supongamos que deseamos encontrar de manera experimental la corriente eléctrica I en un resistor de resistencia $R \pm \delta R$ al que se le suministra un voltaje $V \pm \delta V$;[18] la resistencia ha sido medida con un multímetro en su modalidad de óhmetro y el voltaje se cuantifica con un voltímetro. De la Ley de Ohm, obtenemos que $I = V/R$, y puesto que la resistencia y el voltaje tienen una incertidumbre asociada, el problema consiste en cómo encontrar la propagación del error (o incertidumbre) asociado a la corriente

18 Aquí suponemos que: R se mide en ohms (Ω); V se mide en volts (V), e I se mide en amperes (A). La Ley de Ohm (a nivel macroscópico) se expresa como: $V = RI$.

eléctrica. Note que en este caso, I es función, o depende, de R y de V, que matemáticamente lo expresamos como: $I = f(R, V)$. En términos generales, decimos que si z depende de x y de y, entonces $z = f(x, y)$. La obtención de la propagación del error para funciones de este tipo se verá más adelante, y con más detalle.

Existen varias formas de estimar el error (propagado) y, tal y como lo hacemos para estimar el error de una variable experimental (de la forma $y = f(x)$), generalizamos los métodos para varias variables. Igual que en el caso de una variable, la estadística proporciona el método más eficaz para estimar la propagación del error, debido a las variables involucradas en la medición, aunque presenta el inconveniente de ser demasiado laborioso por la repetición de medidas, obtención de promedios, desviaciones estándar, gráficas, posibles correlaciones entre las variables,[19] etc., por cada variable involucrada en el experimento. Una manera alternativa de encontrar el error propagado es mediante aproximaciones, dado que se agilizan los cálculos y no requiere mediciones repetidas de las variables experimentales; este método está afincado en la aplicación de matemáticas un poco más avanzadas, aunque es obligatorio decir que si bien el método reduce y simplifica el tratamiento de los errores, presenta la desventaja de no garantizar una buena precisión en la magnitud del error.

No obstante, este método es el ideal para una estimación rápida y somera del error propagado. Veamos entonces cómo propagamos el error.

3.7 Errores: absoluto, relativo y porcentual

Hasta este momento, la incertidumbre que hemos definido es la del error de escala, $\pm\Delta E$, señalando que al medir una variable x, se debe especificar el error de escala porque él nos da una idea de con qué instrumento de medida se realizó la medición, por lo que es conveniente que el reporte de la lectura aparezca como $x \pm \Delta x$; de la misma manera, representaremos por el símbolo $\pm\delta x$ la incertidumbre proveniente de algún cálculo; a este error le llamaremos *incertidumbre propagada* o *error propagado*.

Un error de importancia teórica,[20] base para el desarrollo de la teoría de errores y su propagación, es la *incertidumbre real* o *error real*, E_x, de un número x –resultado de una medición o un cálculo–, definido como: la diferencia entre los valores: *real*, X, y *aproximado o medido*, x, es decir:

$$E_x = X - x \tag{8}$$

donde: X: = dato numérico obtenido mediante una medición o cálculo, pero que permanece constante durante el proceso de medida (de ahí el nombre de valor real), y

x := valor medido o valor numérico obtenido mediante un cálculo.

De la ecuación (8) notamos rápidamente que E_x puede ser positivo, negativo, o cero (aunque este caso es inviable, ya que estaríamos hablando

19 La correlación de dos (o más) variables consiste en ver cómo cambia una variable cuando la otra se modifica, es decir "a) si, de dos variables medidas, una puede considerarse como causa de la otra, pero su efecto está parcialmente encubierto por las fluctuaciones al azar, y b) si dos variables pueden considerarse como consecuencias simultáneas de una causa común cuyo efecto, como antes, está parcialmente oculto por fluctuaciones al azar." (Baird, D. C. *op. cit.*, p. 143).

20 Canales subraya la importancia de este error y, consecuentemente, del error absoluto acotado que, pese a ser de carácter eminentemente teóricos, son la base de la teoría de errores. Aquí los mencionamos por completud.

de una medida exacta); igualmente, esta definición nos deja con una elevada dosis de inquietud, pues fácilmente caemos en la cuenta de que físicamente es imposible conocer cuál es el valor verdadero de la medición (según se infiere de lo que hemos visto). Así, concluimos que este concepto, si bien es sencillo, sólo presenta utilidad teórica.

Buscando dar utilidad práctica al concepto teórico dado por (8), se considera más adecuado encontrar un número próximo al valor verdadero (en el sentido dado por la ecuación (8)), definido como *el error absoluto acotado*, o simplemente, el *error absoluto* o la *incertidumbre absoluta* Δx como: el mínimo número posible x mayor o igual que el valor absoluto de la incertidumbre real; en otras palabras:

$$|E_x| \leq \Delta x, \tag{9}$$

de esta forma, el valor real de un número estará limitado o acotado en el intervalo dado por:

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x \tag{10}$$

y, por (9), $\Delta x \geq 0$, siempre.

Un concepto aún más útil y más ampliamente usado en la experimentación es el *error relativo acotado*, o simplemente *error relativo o incertidumbre relativa* ε, definido como: el cociente de la incertidumbre absoluta Δx entre el valor medido, es decir:

$$\varepsilon = \frac{\textit{incertidumbre absoluta}}{\textit{valor medido}} = \frac{\Delta x}{x} \tag{11}$$

Observe que ε puede ser una cantidad positiva o negativa, pero dado que el error es una cantidad positiva (por la definición misma), siempre consideramos el valor absoluto de ε.

Ejemplo 9. Suponga que medimos con un flexómetro la longitud l de una varilla de aluminio, obteniendo como lectura:

$$l \pm \Delta l = 12.0 \pm 0.05,\ cm,$$

En este caso, se obtiene que $11.95 \leq l \leq 12.05\ cm$, donde $l = 12.0\ cm$ es el valor esperado, así que por (10), la incertidumbre absoluta resulta ser el error de escala, es decir, $\Delta l = 0.05\ cm$. Igualmente, al aplicar (11), tendremos que el error relativo entre Δl y l resulta ser:

$$\varepsilon = \pm \frac{0.05\ cm}{12\ cm} \cong \pm 0.0042 = 4.2 \times 10^{-3}$$

indicando que la incertidumbre Δl es tres órdenes de magnitud más pequeña que l.

Note que el error absoluto tiene las mismas unidades que las de la medida, mientras que el error relativo, además de ser una cantidad adimensional, permite establecer una comparación más objetiva y *ad hoc* entre los valores de la incertidumbre y de la medición, evitando que la incertidumbre asociada a la medición carezca por completo de sentido, pues pudiera darse el caso de que aquélla (la incertidumbre) fuera excesivamente pequeña, o bien, demasiado grande respecto de la medida (por ejemplo, si la longitud fuese de 0.1 cm y la incertidumbre se mantuviera constante ($\Delta l = 0.05\ cm$), el error relativo resultaría ser de 0.5, lo cual no nos deja del todo confiados y convencidos respecto a la veracidad de la lectura, pues el error relativo resulta ser mayor (en un orden de magnitud) que la incertidumbre, por lo que habría que evaluar, en todo caso, si es conveniente cambiar de instrumento de medida. Lo mismo ocurriría si, por ejemplo, deseáramos cuantificar con un flexómetro la separación o anchura de las líneas de un patrón de difracción (donde las líneas son sumamente angostas y están demasiado cercanas unas de otras, haciendo prácticamente imposible la medición con un flexómetro, amén de que la incertidumbre de éste es excesivamente grande comparado con la medida).

Habitualmente somos proclives a hacer estimaciones rápidas de la magnitud del error en la medición para facilitar la comprensión de los datos, y por ello, solemos proporcionar el error en términos porcentuales; así que, al multiplicar por cien el error dado por la ecuación (11), obtenemos la *incertidumbre porcentual* o el *error porcentual acotado* o, simplemente, error porcentual, como:

$$\varepsilon_{\%} = \left(\frac{\Delta x}{|x|}\right) \times 100 \tag{11a}$$

Ejemplo 10. Supóngase que el error porcentual en la medición de una resistencia eléctrica, R, es de 5% con respecto al valor nominal, que es de 100 Ω; dado que 5 Ω es el 5% de 100, esto nos indica que el valor real de la resistencia se encuentra entre 95 y 105 Ω; por tanto, concluimos que: $95 \leq R \leq 105$, Ω, que también podemos expresar como: $R \in [95, 105]$, Ω.

3.8 Propagación de errores

Cuando llevamos a cabo un experimento, es necesario efectuar algunas operaciones algebraicas relacionadas con las distintas magnitudes físicas involucradas en la medición. Como un caso simple y concreto, podemos decir que a veces es necesario sumar longitudes, o encontrar productos de ellas, por ejemplo, para obtener áreas o volúmenes de algunos cuerpos. Ahora bien, puesto que toda medición conlleva un error, sospechamos que los errores asociados a las cantidades medidas deben experimentar un proceso similar al de las cantidades mismas, por lo que presumimos que la combinación de errores producirá, de necesidad, un error mayor; dicho brevemente: los errores se propagan.

La propagación de errores, o de incertidumbres, se asocia con la obtención de nuevos resultados a partir de un cálculo con las cantidades medidas y su respectivo error. Para lograr esto, suponemos que las incertidumbres están distribuidas simétricamente respecto al valor esperado (o medido) y que, además, son pequeñas –respecto a la cantidad medida, aunque esto pudiera no cumplirse–; estas simplificaciones, que sacrifican precisión en aras de la rapidez en los cálculos, se admiten y valoran con la finalidad de aplicar conceptos sencillos para propagar los errores, en vez de estar buscando posibles correlaciones entre las cantidades involucradas en la operación.[21]

Suponga que hemos llevado a cabo mediciones, digamos, x_1 y x_2, con incertidumbres (que pueden ser el error de escala): $\pm\Delta x_1$ y $\pm\Delta x_2$, respectivamente. Supóngase también que las medidas son función de una variable real,[22] y que cada una de ellas la podemos expresar en forma matemática como:

$$z = f(x)$$

donde x se encuentra entre los valores: $x - \Delta x$ y $x + \Delta x$ (de acuerdo a (10)) y z es el valor obtenido o calculado dentro del intervalo: $z - \delta z$ y $z + \delta z$.

Nuestra intención es encontrar cómo se propaga el error al realizar cálculos u operaciones con ambas medidas; para ello, recordemos que del cálculo diferencial de una variable, la derivada de una función $z = f(x)$ se define como:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dz}{dx} \tag{12}$$

donde h (a veces denotado por: Δx ó δx, para relacionarlo con el error) es un incremento arbitrario que experimenta la variable independiente, y que la diferencial de la función está dada por:

$$dz = f'(x)\,\Delta x = f'(x)dx \tag{13}$$

donde x está en el dominio de $f'(x)$.[23]

---

21 Así pues, bajo los supuestos anteriores, podemos obtener la incertidumbre considerando los primeros términos de la serie de Taylor de la función f, dada por

$$f(x) = f(c) + \frac{df(c)}{dx}(x\text{-}c) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f(c)}{dx^2}(x\text{-}c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n f(c)}{dx^n}(x\text{-}c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x\text{-}c)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a c. Si consideramos que el valor medido, y su respectiva incertidumbre, están dados por: $x \pm \Delta x$, con Δx (cantidad positiva), entonces la serie de Taylor puede escribirse forma compacta como:

$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\Delta x^n$. En consecuencia, la incertidumbre $\Delta f = f(x + \Delta x)\text{-}f(x)$ en el valor funcional $f(x)$ será: $\Delta f = \left|\frac{df}{dx}\Delta x\right|$ y claramente, la derivada se evalúa en el punto x. En el caso de varias variables, la serie de Taylor (de primer orden) puede expresarse como: $f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + R_1(\vec{h}, \vec{x}_0)$, donde $\frac{R_1(\vec{h},\vec{x}_0)}{\|\vec{h}\|} \to 0 \; cuando \; \vec{h} \to 0 \; en \; \mathbb{R}^n$, donde $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciable en $\vec{x}_0 \epsilon A$. Aquí, $R_1(\vec{h}, \vec{x}_0)$ es el residuo. (Marsden, J. E., Tromba, A. J.; *Cálculo Vectorial*; Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.; México. 1987, p. 173.)

22 Porque está en el conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$.

23 Aquí, tácitamente hemos supuesto que $z = f(x)$ es diferenciable –o derivable– en su dominio.

El concepto de diferencial de una función nos indica cómo cambia la variable dependiente z cuando cambia la variable independiente x;[24] gráficamente, esto lo podemos ver como:

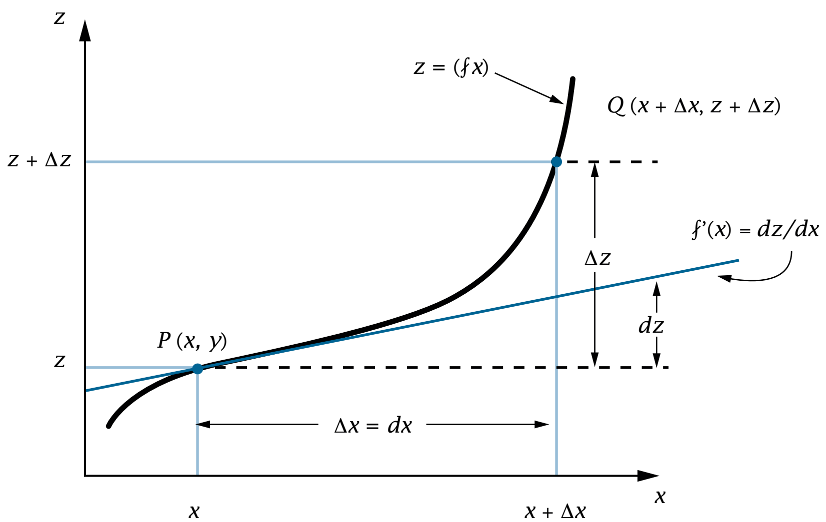


Figura 8. Se muestra la diferencial: $dz = f'(x)dx$ (note que dz es la altura u ordenada que va del punto P a la recta tangente en P, dada por $f'(x) = \frac{dz}{dy}$).

En caso de que z sea función de varias variables reales, es decir:[25]

$$z = f\,(x,\ y,\ \dots\ ,\ w)$$

generalizamos los conceptos dados por: (12) y (13), por lo que la diferencial de la variable dependiente z sería:

$$dz = f_x(x,\ y,\ \dots\ ,\ w)\ dx + f_y(x,\ y,\ \dots\ ,\ w)\ dy + \dots + f_w(x,\ y,\ \dots\ ,\ w)\ dw = \frac{\partial z}{\partial x}\ dx + \frac{\partial z}{\partial y}\ dy + \dots + \frac{\partial z}{\partial w}\ dw \qquad (14)$$

donde:

$$f_x\,(x,\ y,\ \dots,\ w) = \frac{\partial z}{\partial x}\ ;\ f_y\,(x,\ y,\ \dots,\ w) = \frac{\partial z}{\partial y}\ ;\ f_w\,(x,\ y,\ \dots,\ w) = \frac{\partial z}{\partial w}$$

24 En caso de que se desee profundizar en este tema, se recomienda consultar: Leithold, L.; *El Cálculo con Geometría Analítica, 2ª Ed.*; Editorial Harla, S. A.; México. 1973, pp. 251-254. Igualmente, se puede ver en Swokowski, E. W.; *Cálculo con Geometría Analítica;* Editorial Iberoamérica; México. 1982, pp. 107-109. En ambos casos, el tema es tratado en forma sencilla y excelente.

25 En este caso: $(x, y, \dots, w)$ son las variables independientes; cada una de ellas es una variable real, pero z está en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times \dots \times\mathbb{R}$ (n veces). Por ejemplo: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

reciben el nombre de derivadas parciales de la función f respecto a cada variable independiente,[26] y las diferenciales de las variables independientes son, al igual que en el caso de una variable: $dz,\ dy,\ \ldots\ ,\ dw$.

Ejemplo 11. Encontremos la diferencial de algunas funciones sencillas empleando incrementos y después aplicando el concepto de derivación (ecuación 12).[27]

(a) Sea $z = x$. Desarrollando mediante el incremento Δx (ó δx) que experimenta la variable independiente (supondremos que Δx (ó δx) es pequeño respecto a x), tendremos que, empleando la ecuación (12):

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$$\therefore\ \delta z = (1)\ \delta x = \delta x$$

$$\therefore\ \delta z = \delta x$$

O bien, para agilizar:

$$z \pm \delta z = x \pm \Delta x,$$

por tanto, dado que $z = x$, comparando la expresión término a término, encontramos que $\delta z = \Delta x = \delta x$.

Ahora, aplicando la derivación, encontramos que si $z = x$, entonces

$dz = (x)'dx = dx$ (ya que $(x)' = \frac{dx}{dx} = 1$); si hacemos que $\delta z = dz$ y $\delta x = dx$

$\therefore\ dz = dx = \Delta x = \delta x$, es decir: $\delta z = \Delta x$ ó $\delta z = \delta x$ que es lo que obtuvimos previamente.

(b) Sea $z = x^3$. Usando (12), tendremos que:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$$

$$\therefore\ \delta z = 3x^2\ \delta x$$

26 La derivada parcial se define de manera análoga a la derivada de una función de una variable; por ejemplo, la derivada parcial respecto a x (manteniendo a las demás variables constantes) está dada como: $f_x(x, y, \ldots, w) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, \ldots, w) - f(x, y, \ldots, w)}{h} = \frac{\partial f(x.y, \ldots, w)}{\partial x}$, y lo mismo para las demás derivadas parciales. Para una mayor comprensión de este concepto, se sugiere consultar los textos citados en el pie de página 24, excelentes textos introductorios al cálculo diferencial e integral de una y diferentes variables.

27 Para agilizar el proceso, pueden usarse fórmulas de derivación (aparecen en los textos mencionados).

O bien, simplificando, tendremos que:

$$z \pm \delta z = (x \pm \delta x)^3 = (x^3 \pm\ 3x^2 \delta x +\ 3x\ (\delta x)^2 \pm (\delta x)^3)$$

$$= (x^3 +\ 3x\,(\delta x)^2) \pm\ 3x^2\ \delta x + \delta x)^3)$$

después de reordenar los términos. Ahora bien, δx es muy pequeño respecto a x, por lo que podemos ignorar los términos que no sean lineales, ya que $(\delta x)^2$ y $(\delta x)^3$ tienden a cero más rápidamente que δx, por lo que tendremos:

$$z \pm \delta z \cong x^3 \pm 3x^2 \delta x$$

y, comparando, concluimos que:

$$\delta z = 3x^2\ \delta x.$$

Ahora bien, si derivamos (aplicando la regla de las potencias), tendremos que:

$$\delta z = (x^3)'\ \delta x = 3x^2\ \delta x$$

que es lo que obtuvimos antes.

Ejercicio: Obtenga δz si:

(i) $z = x^{1/2}$
(ii) $z = cos\ x$
(iii) $z = ln\ (x)$
(iv) $z = \bar{e}^{x}$

3.9 Fórmulas simples para propagar el error

En el ejemplo anterior se muestra cuán fácil es calcular el error propagado si la función es de una variable, reduciéndose el trabajo a encontrar únicamente la diferencial (de la función). Igual de sencillo es obtener el error propagado cuando tenemos dos o más mediciones y se realizan operaciones aritméticas o cálculos con ellas. Por ejemplo, suponga que deseamos medir la longitud de una pared muy larga pero sólo tenemos al alcance de la mano un flexómetro de 3.0 m. Es obvio lo que hacemos: (1) tomamos una medida con la cinta métrica. Marcamos sobre la pared dónde quedó el final de la cinta y registramos el dato como $a_1 \pm \delta a_1$. (2) Trasladamos la cinta de tal manera que el comienzo de ella coincida con la marca (final) anterior. Nuevamente, marcamos dónde termina el flexómetro y registramos la lectura como $a_2 \pm \delta a_2$. (3) Repetimos esto sucesivamente hasta determinar totalmente la longitud a de la pared que, evidentemente, estará dada por:

$$a \pm \delta a = (a_1 \pm \delta a_1) + (a_2 \pm \delta a_2) + \ldots + (a_n \pm \delta a_n) \qquad (15)$$

Surge la pregunta de si esto que hacemos vale para las incertidumbres. Y sí. Esto vale. Naturalmente, aplicamos los conceptos de operaciones con funciones.

Recordemos que en la gráfica de una función en el plano cartesiano la distancia (o altura) desde el eje horizontal a la gráfica de la función da el valor de $f(x)$ en ese punto, es decir, si $x = c$, tendremos entonces $f\ (c)$. Si tenemos otra gráfica, digamos de $g(x)$, vale el concepto anterior. Así es que, sumando las distancias de f y g (en el eje y), tendríamos el valor de la suma de las funciones en $x = c$; ahora, si $S(c)$ es la suma de las funciones, tendremos que

$$S(c) = f(c) + g(c)$$

donde c está en el dominio de la función. Esto puede generalizarse para cualquier x (en el dominio), resultando:

$$S(x) = f(x) + g(x) \tag{16}$$

Gráficamente, (16) lo podríamos ver así:

Ahora bien, dado que lo anterior se cumple, entonces las diferenciales

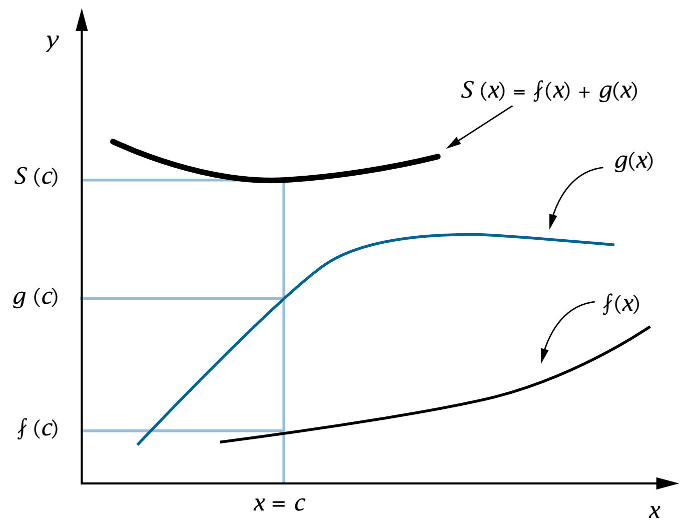


Figura 9. Suma de funciones (no está a escala).

pueden sumarse directamente (pues la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de las funciones). Por tanto, la expresión (15) quedaría como:

$$a \pm \delta a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (\delta a_1 + \delta a_2 + \ldots + \delta a_n)$$

resultando que:

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

y

$$\delta a = \delta a_1 + \delta a_2 + \ldots + \delta a_n \tag{17}$$

que era lo que esperábamos, donde, y tal como anteriormente se dijo, la diferencial de la función es el error propagado. En consecuencia, el error propagado de una suma de medidas es la suma de los errores de las medidas (ecuación 17). Para agilizar la obtención del error propagado, comúnmente empleamos algunas fórmulas del error propagado para las operaciones más usuales involucradas en un experimento, aunque, como hemos visto, en realidad estas expresiones reducidas provienen de aplicar el concepto de diferencial de una función. Veamos tales expresiones.

Sean x y y dos valores medidos con sus respectivos errores: δx y δy; y sean también: S, R, P y D, las operaciones: suma, resta, producto y división de x y y, respectivamente. Los errores propagados serán entonces:

a) Error aproximado en la adición:

$$S \pm \delta S = (x \pm \delta x) + (y \pm \delta y)$$
$$= (x + y) \pm (\delta x + \delta y)$$

$$i.e.,^{28}\ S \pm \delta S = (x + y) \pm (\delta x + \delta y)$$

$$\therefore\ \delta S = \delta x + \delta y \tag{18}$$

pues, después de igualar término a término, concluimos que $S = x + y$, y $\delta S = \delta x + \delta y$ es el error propagado;[29] note que el valor máximo de δS se obtiene sumando los errores, siempre. En consecuencia, decimos simplemente que la incertidumbre de una suma de medidas es la suma de las incertidumbres individuales relativa a cada medida.

Evidentemente, la incertidumbre relativa (dada por la ecuación (11)) quedaría como:

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y} \tag{19}$$

aunque, a fuer de ser sinceros, no se gana mayor claridad.

b) Error aproximado en la resta:

Si procedemos como en el inciso anterior, obtendremos:

$$R \pm \delta R = (x \pm \delta x) - (y \pm \delta y)$$

$$= (x - y) \pm (\delta x + \delta y)$$

$$i.e.\ R \pm \delta R = (x - y) \pm (\delta x + \delta y)$$

$$\therefore\ \delta R = \delta x + \delta y \tag{20}$$

28 La abreviatura *i.e.* corresponde a la locución latina *id est*, y significa: "es decir", u "o sea que", y se emplea con mucha frecuencia en la literatura científica.

29 Aquí podemos encontrar el error propagado de dos maneras: (*i*) suponiendo que las medidas son funciones de una variable, y mediante las reglas de derivación, encontrar la diferencial aplicando la ecuación (13). Esa suele ser la manera más socorrida. (*ii*) La otra forma de encontrar las fórmulas para la propagación del error es suponer que tenemos una función de varias variables, y aplicar (14). En algunos casos, se simplifica la obtención del error, aunque en otros suele ser más complicado. Como ejemplo, sea: $z = f(x, y) = x + y$; ahora, para encontrar el cambio de la variable dependiente cuando cambian las variables independientes obtengamos la diferencial de la función; aplicando (14): dado que $z = x + y$, entonces $\delta z = \frac{\partial(x+y)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial(x+y)}{\partial y}\delta y = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y}\right)\delta y = \delta x + \delta y$, dado que $\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$. Como se ve, este es el resultado que obtuvimos en (18), por lo que también así podemos encontrar el error. En nuestro caso, y por cuestiones didácticas y de familiaridad del lector, utilizaremos la derivación de funciones de una variable, a menos que nos veamos obligados a utilizar funciones de distintas variables.

Nuevamente, y al igual que antes, note que el valor máximo de δR se alcanza sumando las incertidumbres individuales, y también que:

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta x + \delta y}{x - y}, \text{ con } x - y \neq 0,$$

que es la incertidumbre relativa.

c) Error aproximado en el producto:

(i) Primeramente, desarrollemos como un producto de binomios, así:

$$P \pm \delta P = (x \pm \delta x)(y \pm \delta y) = x \cdot y \pm x \cdot \delta y \pm y \cdot \delta x + \delta x \cdot \delta y$$

$$= x \cdot y \pm (x \cdot \delta y + y \cdot \delta x) + \delta x \cdot \delta y$$

$$\cong x \cdot y \pm (x \cdot \delta y + y \cdot \delta x)$$

donde se ha despreciado el producto de los errores por ser pequeño respecto a los demás productos; luego, la expresión anterior resulta ser:

$$P \pm \delta P = (x \cdot y) \pm (x \cdot \delta y + y \cdot \delta x)$$

$$\therefore \delta P = x \cdot \delta y + y \cdot \delta x \tag{22}$$

(ii) Calculemos ahora la diferencial, recordando que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \text{ con: } u = f(x) \text{ y } v = g(x)$$

luego, si hacemos que $x := u$ y $y := v$, nos quedaría como:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot y) = x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{dx}{dx}$$

para tener la diferencial multipliquemos ambos lados por dx, con lo cual obtenemos (después de hacer que $\delta P = \delta(xy) := d(x \cdot y)$, $\delta x := dx$, y, $\delta y := dy$):

$$\delta P = \delta(x \cdot y) = x \cdot \delta y + y \cdot \delta x$$

que no es más que la ecuación (22); tenga en cuenta la facilidad de esta manera de encontrar el error propagado.

Ahora, para expresar la incertidumbre relativa del producto tendremos:

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{x \cdot \delta y + y \cdot \delta y}{x \cdot y} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y} \tag{23}$$

Así, y como una sencilla regla mnemotécnica, de (23) se desprende que si la cantidad deseada es el producto de dos variables, la incertidumbre relativa será la suma de las incertidumbres relativas de los valores medidos.

d) Error aproximado en la división:

Para dividir dos valores medidos, digamos: $\frac{x}{y}$, con $y \neq 0$, apliquemos la regla de derivación para un cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2}, \text{ con } u = f(x) \text{ y } v = g(x) \neq 0$$

luego, haciendo: $x := u$ y $y := v$, tendremos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x\frac{dy}{dx} - y\frac{dx}{dx}}{y^2} = \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dx}{dx},$$

para tener la diferencial multipliquemos ambos lados por dx (y cambiando el signo negativo por un signo positivo para maximizar el error), quedándonos:

$$\delta D = \delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y^2}\,\delta y + \frac{1}{y}\,\delta x, \ (^*)$$

donde hicimos:

$$\delta D := \delta\left(\frac{x}{y}\right) := d\left(\frac{x}{y}\right), \ \delta x := dx \text{ y } \delta y := dy.$$

Pero dijimos antes que la diferencial es el error, por tanto, el error de una división, δD, quedaría como:

$$D \pm \delta D = \frac{x \pm \delta x}{y \pm \delta y} = \frac{x}{y} \pm \left(\frac{\delta x}{y} + \frac{x \cdot \delta y}{y^2}\right)$$

$$\therefore \ \delta D = \frac{\delta x}{y} + \frac{x \cdot \delta y}{y^2}, \text{ siempre que } y \neq 0 \tag{24}$$

(que es lo que obtuvimos en la ecuación (*), después de ordenar los términos).

Para obtener la incertidumbre relativa, basta con obtener el cociente $\delta D/D$.

e) Error aproximado de una función compuesta del tipo $z = x^n y^m$ *(*n y m enteros o fraccionarios, *positivos o negativos)*:

Dentro de un laboratorio de física a veces se obtienen ecuaciones que implican el producto de variables elevadas a una potencia dada;[30] antes de obtener la incertidumbre de dicha función, y apelando a la sencillez, reformulemos la expresión $z = x^n y^m$, para obtener:

---

30 Por ejemplo, la expresión del periodo (del principio virtual) de un péndulo simple: P=(constante) $l^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}$, ecuación que aparece en la página 21, capítulo 2.

$$ln\ z = n\ ln\ x + m\ ln\ y \tag{25}$$

Una vez hecho lo anterior, la diferencial de (25) resulta ser:

$$\frac{\delta z}{z} = n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y} \tag{26}$$

que no es más que la incertidumbre relativa.

Aquí cabe la acotación de que, a partir de este momento, en el texto únicamente aparecerá la expresión final. En el presente caso, y para ilustrar la obtención de la fórmula, usamos el hecho de que:

$$x = e^{\ln x},$$

por lo que tendremos que

$$z = x^n y^m \Rightarrow e^{\ln z} = e^{n\ \ln x} e^{m \ln y} \Leftrightarrow e^{\ln z} = e^{n\ \ln x + m \ln y}$$
$$\Leftrightarrow \ln\ z = n \ln\ x + m \ln\ y.$$

que es lo aparece en la expresión (25), donde el logaritmo *ln*, es el logaritmo natural, logaritmo neperiano o logaritmo base *e*, aunque la fórmula se puede generalizar a un logaritmo base 10, o a uno de base *a*, recordando que:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

También podemos, mediante la derivación parcial, llegar al mismo resultado. Hagámoslo entonces.

Sabemos que: $z = x^n y^m$. La diferencial de esta función está dada por:

$$dz = \frac{\partial\,(x^n y^m)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\,(x^n y^m)}{\partial y}\ dy = y^m \frac{\partial\,(x^n)}{\partial x}\ dx + x^n \frac{\partial\,(y^m)}{\partial y}\ dy$$

$$= y^m(nx^{n-1})\ dx + x^n(my^{m-1})\ dy$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{y^m(nx^{n-1})}{x^n y^m} dx + \frac{x^n(my^{m-1})}{x^n y^m}\ dy = \frac{n}{x}\ dx + \frac{m}{y}\ dy$$

$$\therefore\ \frac{\delta z}{z} = n\ \frac{\delta x}{x} + m\ \frac{\delta y}{y},$$

que es la ecuación (26) donde, nuevamente, hicimos que $\delta z := dz$; $\delta x := dx$ y, $\delta y := dy$.

f) Error aproximado de una función experimental del tipo:

$z = \dfrac{x^p+y^q}{x^n y^m}$ = constante, con x y y cantidades medidas distintas de cero e independientes entre sí y: n, m, p y q números reales no nulos.

Usando diferenciales, podemos encontrar fácilmente el error relativo de la expresión:

$$z = k = \frac{x^p+y^q}{x^n y^m}$$

o bien, de su inverso multiplicativo. Como ejemplo, para el caso particular en que $p = q = 1$, la ecuación queda como:

$$z = k = \frac{x + y}{x^n y^m}$$

donde $z = k$ = constante que depende de x y y, con $x \neq 0$ y y $\neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$ y $n \neq m$. Luego, la incertidumbre relativa de esta última expresión puede obtenerse así:[31]

Tenemos que:

$$k = \frac{x + y}{x^n y^m}$$

entonces, la diferencial queda como:

$$\delta k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x + y}{x^n y^m}\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x + y}{x^n y^m}\right)\delta y$$

$$= \left(\frac{(x^n y^m)(1) - n(x + y)x^{n-1}y^m)}{(x^n y^m)^2}\right)\delta x$$

$$+ \left(\frac{(x^n y^m)(1) - m(x + y)x^n y^{m-1}}{(x^n y^m)^2}\right)\delta y$$

$$= \frac{(x^n y^m)(\delta x + \delta y) - (x + y)(\mathrm{n}\mathrm{x}^{n-1}\mathrm{y}^{m}\delta x + m x^n y^{m-1}\delta y)}{(x^n y^m)^2}$$

$$= \frac{\delta x + \delta y}{x^n y^m} - n\frac{(x + y)}{x^{n+1}y^m}\delta x - m\frac{(x + y)}{x^n y^{m+1}}\delta y$$

$$= \left(\frac{\delta x + \delta y}{x + y}\right) k - n\frac{k}{x}\delta x - m\frac{k}{y}\delta y\,;$$

---

31 Mostremos aquí el poder de la diferencial en la obtención de las incertidumbres; deduzcamos la expresión (27), así: tenemos que, cuando $p=1 = q$, resulta que: $c = \frac{x+y}{x^n y^m}$, entonces, la diferencial queda como:
$\delta c = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^n y^m}\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x^n y^m}\right)\delta y = \frac{(x^n y^m)\delta x\text{-}n(x+y)x^{n-1}y^m)\delta x}{(x^n y^m)^2} + \frac{(x^n y^m)\delta y\text{-}m(x+y)x^n y^{m-1}\delta y}{(x^n y^m)^2} =$
$\frac{(x^n y^m)(\delta x+\delta y)\text{-}(x+y)\left(nx^{n-1}y^m\delta x+mx^n y^{m-1}\delta y\right)}{(x^n y^m)^2} = \frac{\delta x+\delta y}{x^n y^m}\text{-}n\frac{(x+y)}{x^{n+1}y^m}\delta x\text{-}m\frac{(x+y)}{x^n y^{m+1}}\delta y = \frac{\delta x+\delta y}{x^n y^m}\text{-}n\frac{c}{x}\delta x\text{-}m\frac{c}{y}\delta y\,;$

por tanto, tomando el error relativo (al dividir entre c la expresión final):

$\frac{\delta c}{c} = \frac{\left(\frac{\delta x+\delta y}{x^n y^m}\right)}{\left(\frac{x+y}{x^n y^m}\right)}\text{-}n\frac{c}{cx}\delta x\text{-}m\frac{c}{cy}\delta y = \frac{\delta x+\delta y}{x+y}\text{-}n\frac{\delta x}{x}\text{-}m\frac{\delta y}{y}$. Cambiando los signos negativos por signos positivos tendremos: $\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta x+\delta y}{x+y} + n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y}$.

por tanto, tomando el error relativo (al dividir entre k la expresión final):

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\left(\frac{\delta x + \delta y}{x + y}\right) k}{k} - n\frac{k}{kx}\delta x - m\frac{k}{ky}\delta y = \frac{\delta x + \delta y}{x + y} - n\frac{\delta x}{x} - m\frac{\delta y}{y}$$

Si maximizamos el error (cambiando los signos negativos –que aparecen por las fórmulas de derivación– por signos positivos), tendremos entonces que:

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y} + n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y},$$

que es lo que queríamos mostrar.

Así pues, el error relativo puede obtenerse a partir de:

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y} + \left(n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y}\right), x \neq 0, y \neq 0$$

(27)

En consecuencia, tendremos que:

$$k \pm \delta k = \left(\frac{x + y}{x^n y^m}\right) \pm k\left(\frac{\delta x + \delta y}{x + y} + n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y}\right), x \neq 0, y \neq 0$$

$$= k\left[1 \pm \left(\frac{\delta x + \delta y}{x + y} + n\frac{\delta x}{x} + m\frac{\delta y}{y}\right), x \neq 0, y \neq 0\right]$$

(28)

Ejercicio: Encuentre la expresión general para encontrar la propagación del error de la ecuación:

$$z = c = \frac{x^p + y^q}{x^n y^m}$$

cuando: n, m, p y q son distintos de cero.

g) Error aproximado de una función experimental del tipo:

$$y = mx + b$$

donde: b = ordenada al origen, es una constante que se determina de una gráfica, o bien, por medio de x y y, considerando que: $b = y - mx$, donde m = pendiente de la recta. Así, tenemos que

$$\delta b = \delta y + (x \cdot \delta m + m \cdot \delta x)$$

en consecuencia:

$$b \pm \delta b = (y - mx) \pm (\delta y + [(x \cdot \delta m + m \cdot \delta x])$$

(29)

h) Error aproximado de una función experimental polinómica $y = Ax^m$, *donde A y m son constantes que se obtienen, generalmente, de gráficas en papel log-log*, y $m \neq 1$.

Así que:[32]

$$\delta m = \frac{1}{\ln x}\left(\frac{\delta y}{y} + \frac{\delta A}{A} + m\frac{\delta x}{x}\right) \tag{30}$$

y

$$\delta A = A\left(\frac{\delta y}{y} + m\frac{\delta x}{x} + \delta m \cdot \ln x\right) \tag{31}$$

donde deben conocerse o δm, o bien, δA, debido a que estas ecuaciones dependen una de la otra. Si se conocen una u otra, (30) y (31) quedarían definidas inambiguamente, por lo que la función con su respectiva incertidumbre quedaría como:

$$y \pm \delta y = (A \pm \delta A)\; x^{m \pm \delta m} \tag{32}$$

i) Error aproximado de una función tipo: $z = \mathit{sen}\, x$, con x en radianes. Nuevamente, encontramos que

$$\delta z = \cos x \;\mathit{sen}\; \delta x \tag{33}$$

y dado que sabemos que las funciones: $\mathit{sen}\, x$ y $\cos x$ se aproximan a sus valores límite si $x \to 0$ (siendo estos valores: $\cos x \to 1$ y $\mathit{sen}\, x \to x$), en consecuencia, y por lo anteriormente señalado, encontramos que:

$$z \pm \delta z = \mathit{sen}\, x \pm \cos x \;\mathit{sen}\; \delta x. \tag{34}$$

Una manera alternativa de verificar la expresión anterior, considerando que δx es pequeña (y no olvidar que medida en radianes) y tomando que $\cos \delta x \to 1$, es desarrollando:

$$z \pm \delta z = \mathit{sen}\,(x \pm \delta x) = \mathit{sen}\, x \cos \delta x \pm \mathit{sen}\, \delta x \cos x \cong \mathit{sen}\, x \pm \cos x \;\mathit{sen}\; \delta x,$$

32 Aquí la deducción es bastante simple; apliquemos la misma estrategia que usamos para obtener (25) y (26), es decir: $y = Ax^m \Rightarrow \ln y = \ln A + m \ln x$, así que la diferencial queda como: $\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta A}{A} + \delta m \ln x + \frac{m}{x}\delta x$; después de despejar (y maximizar el error de A), tendremos: $\delta A = A\left(\frac{\delta y}{y} + m\frac{\delta x}{x} + \delta m \cdot \ln x\right)$, que es lo que expresa (31); por supuesto, el mismo procedimiento de despeje se aplica para obtener (30).

por lo que, después de comparar ambos lados de la expresión, concluimos que

$$\delta z = \cos x \, sen \, \delta x$$

que es la ecuación (34). Debemos decir que el procedimiento es el mismo para las funciones trigonométricas.

j) Error aproximado de una función logarítmica del tipo: $z = \ln x$.

Nuevamente, y dado que: $z = \ln x$, entonces:

$$\delta z = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\delta x \tag{35}$$

por tanto, tendremos que:

$$z \pm \delta z = (\ln x) \pm \frac{\delta x}{x} \tag{36}$$

Igualmente, esta expresión se puede encontrar si hacemos:

$$z \pm \delta z = \ln (x \pm \delta x)$$

donde, nuevamente, consideramos que δx es pequeño (y $\delta x < 1$); realicemos ahora algunos pasos algebraicos para reexpresar la función, así:

$$z \pm \delta z = \ln (x \pm \delta x) = \ln x\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right) = \ln x + \ln\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right) \cong \ln x \pm \frac{\delta x}{x}$$

que es la ecuación (36); para llegar a ella, tomamos que:

$$\ln (1 + w) = w - \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{3} w^3 - \ldots \quad (\text{si } |w| < 1)$$

e hicimos que $w = \frac{\delta x}{x}$.

En consecuencia, concluimos que para la función logaritmo natural, el error está dado por:

$$\delta z = \frac{\delta x}{x}$$

En caso de que la función sea de la forma: $z = \log_a x$, basta recordar que:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

k) Error de una función exponencial del tipo: $z = e^x$.

Procedamos como lo hemos hecho hasta este momento, es decir, si $z = e^x$, entonces:

$$\delta z = \frac{\delta x}{x}(e^x)\, \delta x = e^x \, \delta x \tag{37}$$

por tanto, tendremos que:

$$z \pm \delta z = e^x \pm e^x \delta x \tag{38}$$

La manera alternativa de llegar a (38) es desarrollando mediante la serie:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

donde $n! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet \ldots \bullet n$ es el factorial de n, con: $0! = 1! = 1$. Así pues, tenemos que:

$$z \pm \delta z = e^{x \pm \delta x} = e^x e^{\pm \delta x} = e^x \left(1 \pm \delta x + \frac{(\delta x)^2}{2!} \pm \frac{(\delta x)^3}{3!} \pm \ldots\right)$$

$$\cong e^x (1 \pm \delta x) = e^x \pm e^x \delta x$$

que es la ecuación (38). Note que en el desarrollo, por ser δx pequeña (comparada con x, y en general, esperamos que $\delta x < 1$), hemos despreciado los términos que no son lineales. Ahora, si tenemos una función exponencial de la forma: $z = a^x$, únicamente debemos recordar que: $a^x = e^{x \ln a}$, para aplicar (37).

l) Errores asociados a las rectas adaptadas por el Método de los Mínimos Cuadrados (MMC)

Con mucha frecuencia, al graficar un conjunto de datos experimentales obtenemos una curva que bajo determinados procedimientos simplificadores pretendemos nos conduzca a una recta (expresada en su forma normal: $y = mx + b$). Las relaciones que en este apartado enumeramos –y que aparecen en cualquier texto de un curso básico de Estadística– son sumamente útiles, y ahorran trabajo, para obtener la ecuación de la curva experimental. Las expresiones (que provienen de una regresión lineal, conocida como *Método de los Mínimos Cuadrados (MMC)*) permiten obtener los parámetros relevantes del experimento, y son:[33]

Para calcular la pendiente de la recta:

$$m = \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{39}$$

Para calcular la ordenada al origen:

$$b = \frac{\Sigma x^2\,\Sigma y - \Sigma x\,\Sigma xy}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{40}$$

Y las incertidumbres respectivas están dadas por:
para la pendiente:

33 Estas fórmulas de la pendiente y la ordenada al origen se deducirán posteriormente (vea el capítulo de Introducción a la Graficación), sin embargo, aquí se enuncian para su manejo operativo y por los consecuentes errores asociados.

$$\delta m = Sy\left|\frac{n}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\right|^{1/2} \tag{41}$$

y, para la ordenada al origen

$$\delta b = Sy\left|\frac{\Sigma x^2}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\right|^{1/2} \tag{42}$$

donde

$$Sy = \left|\frac{\Sigma_{i=1}^{n}\delta yi}{n-2}\right|^{1/2} \tag{43}$$

siendo δy_i el error relativo, el error medio, o bien, la mínima lectura posible,[34] y:

$$\Sigma^{n}{}_{i=1}\, x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{44}$$

la suma de los n valores obtenidos en el experimento.

Note también que en las expresiones (35) a (39) hemos abreviado la notación, al hacer:

$$\Sigma x = \Sigma_{i=1}^{n} x_i,\ \Sigma y = \Sigma_{i=1}^{n} y_i,\ \Sigma xy = \Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \Sigma x^2 = \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2,$$

y que $(\Sigma x)^2 = (\Sigma_{i=1}^{n} x_i)^2$

34 δY_i también puede obtenerse, en caso de que sea absolutamente necesario, a partir de: $\delta Y_i = Y_i - (mX_i + b)$.

4 INTRODUCCIÓN A LA GRAFICACIÓN

Introducción

La experimentación es una parte fundamental de la ciencia al permitirnos indagar cómo se comporta el mundo que nos rodea; esta búsqueda del porqué suceden las cosas en la forma en que lo hacen se lleva a cabo bajo la observación minuciosa del acontecer natural mediante experimentos previamente planeados, repeticiones controladas y escrupulosas mediciones. La capacidad heurística de la experimentación es enorme; la escrupulosidad de su normatividad, principios y estrategias de acción son sus virtudes y fortalezas para incursionar con paso seguro en el conocimiento científico, cuya finalidad es explorar y desentrañar los misterios del mundo natural. Para lograrlo, la experimentación –y en general, el pensamiento científico– acude al causalismo (relación causa-efecto) como elemento explicativo del acontecer natural, intentando encontrar relaciones cuantitativas –o al menos, posibles correlaciones– entre las variables que se manifiestan como esenciales en la ocurrencia del fenómeno bajo estudio, todo con la firme intención de desarrollar un modelo matemático que explique, o describa, el evento observado. Hecho lo anterior, se abstrae el evento con la intención de modelarlo matemáticamente para incorporarlo a un marco teórico-conceptual más amplio. Esta proclividad de la ciencia a abstraer y teorizar, o modelar matemáticamente para soportar ideas, se debe a la estructura lógica, sencilla y objetiva que brinda el lenguaje matemático; y es este lenguaje quien, dentro de su propia esfera repleta de conceptos, ideas y objetos abstractos, motiva que muchas veces y de manera independiente, el conocimiento evolucione de manera paralela o con mayor celeridad que la experimentación misma. Como ejemplo, puede citarse la predicción teórica de la teoría estándar acerca del bosón de Higgs y los enormes esfuerzos experimentales por comprobar su existencia.[1] Por tanto, no es dable, bajo ninguna circunstancia, disociar la teoría de la experimentación, por ser aquélla quien instaura y valida los modelos o representaciones de la realidad física a los que llega la experimentación para, finalmente, predecir y explicar (o describir) cómo[2] y por qué suceden las cosas en el mundo natural. Es pues, inadmisible, pensar que la física experimental y la física teórica sean entidades inconexas entre sí.

1 El lector puede consultar el excelente libro: Herrera Corral, Gerardo; *El Gran Colisionador de Hadrones. Historias del Laboratorio más grande del Mundo*; Universidad Autónoma de Sinaloa y Ediciones Proceso. México. 2013. En el libro se dan pormenores acerca de la fascinante verificación experimental de esta predicción teórica de la teoría estándar.

2 A raíz de la aparición de la mecánica cuántica se ha desatado una controversia interesante respecto a si la ciencia es explicativa o si es descriptiva. Quien desee profundizar en estos temas, se recomienda leer algo de filosofía de la ciencia, sobre todo los argumentos de Popper en contra de la visión instrumentalista de Bohr y Heisenberg, principales representantes de la mecánica cuántica antigua.

4.1 Graficación

Dentro de la física experimental la observación es absolutamente imprescindible, por ser ella quien cuantifica y recolecta datos, los organiza y analiza para, a partir de su estudio, obtener información esencial que conduzca al modelaje matemático con la consecuente institución de leyes que gobiernan la ocurrencia y evolución del acontecer natural; finalmente, estas leyes se agrupan de acuerdo a características afines, dando pie al nacimiento de las teorías; el conjunto de teorías conforman el *corpus* teórico de la física, que posibilita la compactación, predicción y explicación (o descripción) de los sucesos en el mundo natural. No debemos perder de vista que una fórmula es una manera compacta de exponer brevemente un conjunto de ideas y conceptos acerca de los sucesos que ocurren en nuestro entorno.

Y es que, al observar un suceso y repetirlo con fines de estudio –es decir, cuando experimentamos–, lo primero que hacemos es preguntarnos qué variables resaltan en la diacronía del suceso, y cómo y con qué instrumental vamos a medir, así como cuáles otras (variables) van a permanecer constantes. Una vez seleccionadas las variables y realizado las mediciones, nos preguntamos si existe alguna relación entre ellas; para salir de dudas, lo primero que hacemos es graficarlas y ver qué forma tiene el gráfico resultante. En caso de que el gráfico sea simple, o conocido, hemos dado un gran paso, en cambio, si el resultado es adverso, debemos seguir buscando y procediendo con ingenio y sagacidad, muchas veces intuitivamente, tratando de encontrar si existe alguna relación entre las variables, o si hay alguna otra variable que no hemos considerado. Así pues, la intención de la experimentación es encontrar claramente y sin ambages (en la jerga científica se dice: "fuera de toda duda"), vía la medición y la repetición controlada de los eventos, qué relación guardan entre sí determinadas propiedades o características fundamentales, denominadas variables esenciales, del fenómeno bajo estudio; una vez que encontramos tal relación, entonces la cuantificación y relación entre variables se expresa matemáticamente,[3] es decir, el evento se matematiza.

Para encontrar la relación entre las variables, comúnmente acudimos a los métodos gráfico, analítico y estadístico, donde:

(a) *El método gráfico*. Es el método más socorrido cuando se tiene una variable independiente, pues es de gran rapidez y atractivo visual (una imagen dice más que mil palabras); plasma –bien sea en papel o en la pantalla de una computadora– el comportamiento de las variables en el plano *XY*, dejando entrever la relación entre ellas (las variables del experimento) al adaptar curvas de fácil manejo (rectas, parábolas, hipérbolas, exponenciales, etc.). Este método es sencillo y ágil, aunque sólo proporciona buenas aproximaciones, pues las curvas resultantes "son ajustadas".[4] Hay que hacer hincapié en que este método es poco práctico cuando se pretende graficar la variable dependiente como función de varias variables (independientes entre sí), pues la gráfica queda en el espacio tridimensional; igualmente, el método no es exacto y únicamente brinda aproximaciones. No obstante, el método es sumamente útil y rápido cuando se manejan pequeñas cantidades de datos, a pesar

3 Se busca establecer funciones que permitan determinar de la manera más nítida cuál es el comportamiento de una variable (llamada variable dependiente) cuando cambian las demás variables (llamadas variables independientes) involucradas en el evento; si esto no es dable, se busca si existe alguna correlación entre las variables. Evidentemente, la función más 'simple' se obtiene cuando sólo se consideran dos variables: una independiente y la otra que depende del comportamiento de ésta.

4 Significa que no todos los puntos experimentales están en la curva., sino que ésta es, si podemos llamarle así, la "mejor" curva posible (con todo lo que eso signifique). Si se desea profunidzar en este tema, se recomienda consultar un texto de estadística.

de que la gráfica se restringe al espacio físico del papel y a las escalas empleadas para la región de mapeo.

(b) *El método analítico*. Requiere de la herramienta matemática y de dispositivos que permitan el manejo aritmético o algebraico de grandes cantidades de datos (computadoras o, en su defecto, calculadoras); es un método sumamente eficaz y eficiente, amén de ser exacto. Este método es quien conduce a la instauración de los modelos físicos.

(c) *El método estadístico*. Es una conjunción de los métodos anteriores.[5] Este método es más general y se emplea cuando no es posible encontrar una relación simple entre las variables, por lo que se indaga si existen correlaciones entre las variables experimentales (que no necesariamente implican una relación causalista). La aplicación de este método fomenta el uso de computadoras y/o calculadoras debido a la gran cantidad de datos que se manejan. Los modelos resultantes suelen ser totalmente empíricos y quedan sujetos a la validación por parte de la teoría.

Los métodos anteriores son abundantemente usados dentro del área experimental de la ciencia y cada método es digno de estudiarse exhaustivamente. En nuestro caso, dado que este documento es más de carácter informativo y operativo, y con ánimo de simplificar y agilizar el análisis de los datos recolectados, centraremos nuestra atención en los dos primeros métodos.

Ambos métodos, gráfico y analítico, echan mano de expresiones matemáticas[6] conocidas con la finalidad de encontrar qué relación concuerda mejor con nuestras observaciones.[7] Muchas veces, es inevitable dudar qué método –analítico o gráfico, aunque ambos se complementen– conviene usar, o qué condiciones y circunstancias delimitan la aplicación de uno u otro. La respuesta, indudablemente, depende de los gustos, afinidades y experiencia del experimentador; no obstante, para un experimentador novel, el uso del método gráfico representa grandes ventajas al proporcionar, de manera casi inmediata y global, un panorama del comportamiento de las variables. Conforme se gana experiencia la elección del método es una potestad exclusiva del experimentador, aunque esté supeditado a los objetivos del experimento; así, si prontamente se intuye la relación de las variables, es mejor acudir, debido a la mayor precisión, al método analítico.

En nuestro caso, adoptamos como buen hábito que en toda sesión o práctica experimental donde se recolecten datos, procedamos a graficarlos, procurando que el ajuste de los datos se ciña a alguna de las relaciones siguientes:

- *Las relaciones lineales*. Comúnmente se utiliza la expresión en su forma punto y pendiente de ordenada ($y = mx + b$). Si bien es demasiado frecuente que busquemos linealizar muchas curvas, esto no siempre es admisible; se recomienda hacer un alto para ver qué tipo de curva conocida, y simple, se adapta mejor al mapeo de los datos.

---

5 Muchas personas incluyen este método dentro del método analítico. Aquí lo separamos sólo por conveniencia y por cuestiones de espacio.

6 Muchas de ellas estudiadas en geometría analítica. En caso de que se desee profundizar este tema, consúltese el excelente texto: Wooton, W., Beckenbach, E. F. & Fleming, F. J.; *Geometría Analítica Moderna, 2ª Edición en Español*; Publicaciones Cultural, S. A. México. 1978.

7 En el caso de que el objetivo del experimento sea determinar el valor de una constante que aparece en una expresión matemática dada, el análisis y la interpretación evidentemente deben simplificarse, pues prácticamente se conoce de antemano el tipo de relación que debe existe entre las variables experimentales.

- *Las relaciones polinomiales*. Cuando el gráfico comienza a partir del origen y las curvas son abiertas (o que no se cierran sobre sí mismas, como en el caso de un círculo) con profusión se usa: $Y = Ax^m$. Esta expresión implícitamente evoca varias gráficas conocidas llevándonos, por ejemplo, a una línea recta que pasa por el origen (con $m = 1$ y A = constante, por lo que: $y = Ax$); a una parábola con vértice en el origen ($y = Ax^2$, con A = constante y $m = 2$) o a una hipérbola equilátera con los ejes como asíntotas ($y = Ax^{-1}$, con A = constante y $m = -1$). Lo mismo se cumple para cuando m es fraccionaria (por ejemplo, si $m = 1/2$, es una parábola con el eje $+X$ como eje de simetría). En caso de que las curvas estén desplazadas del origen, es necesario acudir a métodos más generales, principalmente las regresiones cuadráticas del método analítico y/o estadístico para obtener la ecuación general del polinomio; por ejemplo, para una parábola cuyo vértice no está en el origen, es preciso encontrar la ecuación: $y = Ax^2 + Bx + C$, con: A, B y C, constantes por determinar (esto se verá más adelante).
- *Las exponenciales y logarítmicas*. Las expresiones del tipo exponencial son del tipo: $y = Ae^x$, con x que puede ser positiva o negativa, y A = constante;[8] las funciones logarítmicas son de la forma $y = A \log_a x$, con A = constante. Este tipo de relaciones aparecen de manera natural en los estudios de decaimiento y crecimiento exponencial, sobre todo en decaimiento radiactivo y poblaciones.
- *Las relaciones periódicas*. Tales como las funciones seno, coseno y tangente. Estas relaciones aparecen en problemas que muestran periodicidad.
- *Relaciones hiperbólicas*. Tales como las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica. Estas funciones aparecen con menor frecuencia que las funciones periódicas y se relacionan con las funciones exponenciales mediante las expresiones:
  $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ y } \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$
  Suelen aparecer en la teoría de difusión del calor, y en general, en muchos problemas de las ecuaciones diferenciales parciales.

En suma, podemos argüir que si nuestro deseo es encontrar (o validar) la relación existente entre variables experimentales, acudamos al uso del método que más nos guste o convenga, pero haciéndolo con la mayor formalidad posible. No hay que olvidar que la teoría es un juez severo que escrutará, sin el menor remordimiento y con la mayor minuciosidad posible, nuestro procedimiento para emitir un juicio imparcial que confronte y valide, o rechace, los resultados que hemos obtenido.

Enfoquemos ahora nuestra atención en el método gráfico y los requisitos que impone para obtener una buena gráfica.

4.2 Tablas de datos

En términos generales admitimos como buena costumbre, por comodidad e inteligibilidad, presentar las mediciones de un experimento en forma de "**Tabla**" que, por convención, sigue las siguientes reglas:

8 Debe ser claro que de la expresión para las relaciones polinomiales puede obtenerse la relación para las expresiones exponenciales, recordando que: $a^x = e^{x \ln a} = e^{\ln ax}$.

- Los datos deben aparecer en columnas que registran los valores correspondientes a las variables experimentales; en el caso más simple, una de las variables será la variable independiente mientras que la otra asumirá el rol de variable dependiente.[9]
- Tradicionalmente, la primera columna se destina para la variable independiente. Se sugiere mostrar los pares de datos en columnas adyacentes porque esto posee la enorme ventaja de que, casi inmediatamente, se visualiza de qué manera se relaciona la variable dependiente con la variable independiente; esto brinda rápidamente, digamos que casi "a ojo de pájaro", información del fenómeno que se está investigando.[10]
- Se exige como requisito indispensable para la presentación de los datos que el primer renglón de la tabla sea destinado para los nombres o símbolos de las variables experimentales y que vayan acompañadas por el error de escala (a menos que se especifique lo contrario al hacer la relatoría del experimento), así como de las unidades en que se midieron.
- En caso de que el error de escala sea constante, únicamente debe aparecer en el primer renglón, para agilizar la lectura de los datos; en caso contrario, cada dato o lectura irá acompañado por su error respectivo.
- Se recomienda también que los datos del primer renglón aparezcan en negritas o, en su defecto, que el renglón tenga un color diferente al de los demás renglones.
- De la misma manera, es un buen hábito que las tablas de datos se acompañen de una leyenda que dé razón de los datos tabulados.

Las Tablas IV y V exhiben una presentación tabular típica de resultados experimentales.

Tabla IV. Relación entre la masa y el volumen del agua. (La columna izquierda representa la variable independiente mientras que la columna derecha será para la variable dependiente. Note que el error de escala, que permaneció constante durante las mediciones, nada más aparece en el primer renglón).

$V \pm 0.5$, cm^3	$m \pm 0.5$, g
11.0	10.5
21.0	20.5
30.5	31.0
40.0	39,5
50.0	50.0
59.5	60.0
70.0	70.5

9 Mantenga presente lo que significan los términos: variable independiente y variable dependiente; en caso de duda, consulte las referencias 8 y 14 que aparecen en la bibliografía; en ellas, el tema se desarrolla de una manera excelente, con un tratamiento claro y sencillo.

10 Anteriormente (vea Ejemplo 4, pág. 29) se presentó una tabla análoga, dejando a criterio del lector la lectura e interpretación de la misma. Nótese que en dicha tabla se omite el error de escala que, por convención, debe aparecer asociado a toda medición.

Tabla V. Relación entre el voltaje y la corriente en un resistor. (Note que en el primer renglón sólo aparecen indicados los símbolos del error de escala, mientras que los valores de éstos aparecen asociados a las respectivas lecturas. En el caso presente, dado que el multímetro es digital, la forma de cuantificar el error es provista por el fabricante, tomando: para δI: 1.5% de la lectura ± 2 en el último dígito, mientras que para δV: 0.8% de la lectura ±1 en el último dígito. En ambos casos se redondeó la cifra resultante).

$(I \pm \delta I)$ A	$(V \pm \delta V)$ V
0.16 ± 0.003	1.00 ± 0.01
0.33 ± 0.005	2.10 ± 0.017
0.51 ± 0.008	3.01 ± 0.025
0.70 ± 0.011	4.20 ± 0.034
0.87 ± 0.013	5.10 ± 0.05
1.05 ± 0.016	6.01 ± 0.048
1.23 ± 0.019	7.00 ± 0.06
1.40 ± 0.022	8.02 ± 0.064

4.3 Cómo graficar

Las gráficas de un experimento, más que entelequias mudas y frías, son instrumentos teórico-visuales pletóricos de significado que proporcionan, bien sea por un vistazo superficial o por una inspección detenida y minuciosa, más información que muchas palabras. La construcción de una gráfica es algo bastante simple, tal como lo hicimos continuamente en la materia de geometría analítica y probablemente, mucho antes; para ello, requerimos:

- La introducción de un sistema coordenado, usualmente, el plano cartesiano que consta de dos líneas rectas mutuamente perpendiculares que tienen un origen común.[11] Estas rectas continuas se conocen como Eje x (eje horizontal o eje de las abscisas) y Eje y (eje vertical o eje de las ordenadas); el sistema coordenado recibe el nombre de *sistema coordenado bidimensional rectangular*; el punto de intersección recibe el nombre de *origen* y se representa con la letra O.
- El sentido positivo del Eje x es hacia la derecha y el sentido positivo del Eje y es hacia arriba. La positividad de los ejes suele representarse por una cabeza de flecha. Esta orientación, hay que decirlo, no es estrictamente necesario y la positividad la fija la persona que grafica, aunque, también debe satisfacerse que la perpendicularidad entre los ejes debe mantenerse.
- Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, y están numeradas como: I, II, III, y IV. En el cuadrante I, las coordenadas x y y de un punto P cualquiera (denotado: $P(x, y)$) son: $x > 0$ y $y > 0$; en la región II, las coordenadas de P son: $x < 0$ y y

11 Recordemos que el sistema coordenado permite establecer una correspondencia biunívoca entre los pares ordenados de números reales y los puntos de un plano.

> 0; en el cuadrante III, las coordenadas x y y de P son ambas negativas, y en el cuadrante IV las abscisas de P son positivas, pero las ordenadas son negativas, es decir: $x > 0$ y $y < 0$ (vea la Figura 10.a).

- Todo punto $P\ (x,\ y)$ se ubica en el plano trazando dos líneas respectivamente paralelas a cada uno de los ejes coordenados; el punto queda especificado por la intersección de estas líneas. El número x es la abscisa, o coordenada x, de P; el número y es la ordenada, o coordenada y, de P (vea Figura 10.b).
- El punto $P\ (x,\ y)$, al ser ubicado en el sistema coordenado recibe el nombre de ***gráfica*** del par ordenado de números reales $(x,\ y)$.

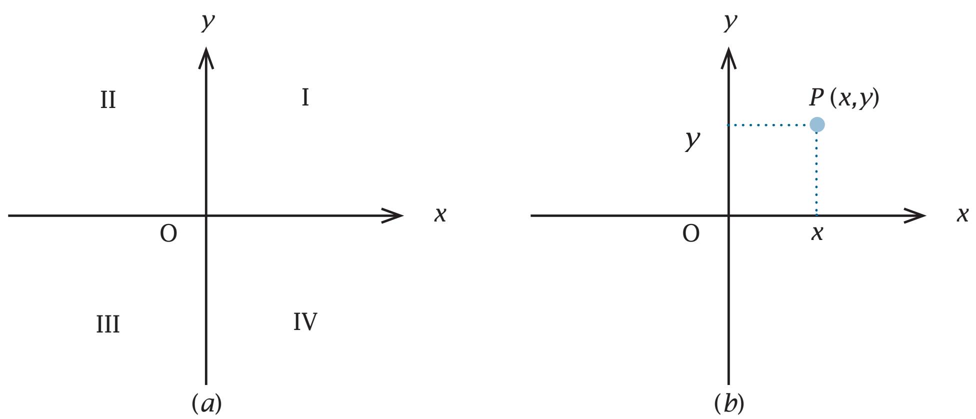


Figura 10. Sistema coordenado. (a) Sistema coordenado rectangular. O es el origen del sistema. La cabeza de flecha indica la positividad del eje. (b) Gráfica de un punto $P\ (x,\ y)$.

4.4 Reglas para graficar en papel milimétrico

Dotar a las gráficas de significancia plena exige –como con las tablas de datos– normatividad y consenso; la comunidad científica admite que una buena gráfica se apega a las reglas siguientes:

- La gráfica debe ocupar una hoja completa, es decir, la curva debe abarcar toda la hoja. Usualmente se grafica en papel milimétrico, que es una hoja tamaño carta graduada por el fabricante y cuya precisión es un milímetro (de ahí el nombre), aunque la gráfica puede ser en cualquier papel donde estén bien indicadas las escalas (de hecho, con el uso constante de la computadora, la realización de la gráfica –graficación– se ha simplificado; existen varios programas de cómputo que permiten graficar estética y fácilmente, sobra decir que el paquete predetermina la escala de la gráfica).
- La variable independiente debe aparecer en el eje de las abscisas (Eje x) y la variable dependiente en el eje de las ordenadas (Eje y).
- La escala asignada a los ejes de la gráfica deberá concordar con el número de datos (tener en cuenta el grado de aproximación de los datos).
- Señalar con claridad la división de los ejes. Es aconsejable usar escalas equidistantes (es decir, que la separación entre los valores antecedente y subsecuente sea del mismo tamaño) y que aparezcan múltiplos que sean fácilmente divisibles.
- Para cada eje, y en los espacios en blanco fuera de las escalas, deben aparecer, con mayúsculas, el nombre de la variable (o parámetro) con

unidades. Si no desea escribir el nombre de la variable, es forzoso que aparezca su símbolo y, entre paréntesis o separada por una coma, sus unidades.

- En algunos casos pudiese ocurrir que el mínimo valor graficable de una variable esté muy retirado del cero; si tal es el caso, la intersección de los dos ejes representará el origen de coordenadas (vea la Figura 11).
- Ubique cada par ordenado en la gráfica. Cada punto debe aparecer encerrado por un círculo, o bien, el punto será el centro de una cruz; tanto el círculo como los brazos de la cruz representan las incertidumbres de la medida (vea la Figura 11).
- En caso de que deban aparecer varias curvas en la misma gráfica, se considera buena costumbre usar círculos, elipses, cruces, cuadrados, triángulos, o cualquier otro símbolo para los puntos de la segunda, tercera, cuarta, etc., curvas. Esto evita confusiones y brinda la posibilidad de distinguir cuando los puntos de una curva están muy juntos a los de la otra.
- Incluya una leyenda en la parte inferior de la gráfica; en ella debe especificarse qué se grafica o a quién se refiere la gráfica.
- Por último, se considera buena costumbre incluir la ecuación de la curva –por la información que brinda– en la parte superior de la gráfica o en la leyenda de la misma (vea la Figura 11).

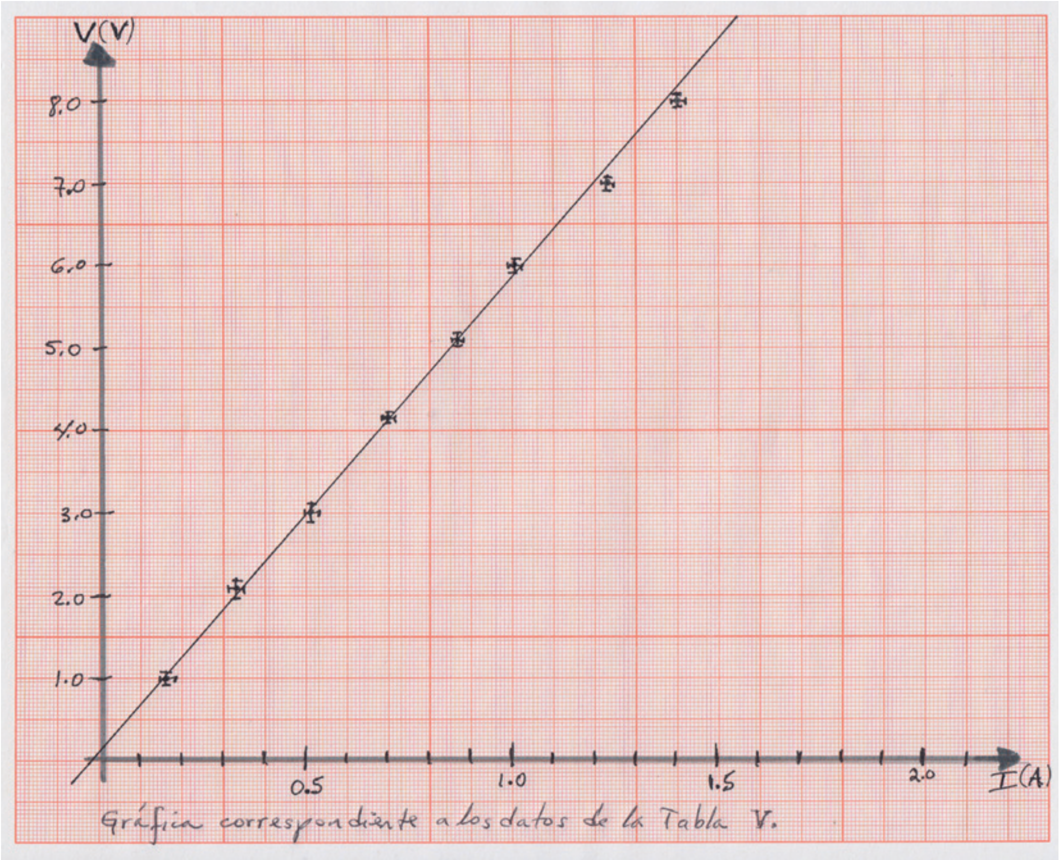


Figura 11. Gráfica en papel milimétrico. Aquí, a manera de ejemplo, se exhibe la relación (lineal) existente entre la corriente eléctrica y la diferencia de potencial en un resistor (los datos aparecen en la Tabla V). La ecuación de la recta es $V = (5.581)I + 0.195,\ V$.

4.5 Reglas para graficar en papel logarítmico (*log-log*)

Un método útil para encontrar la relación entre dos variables que intervienen en un experimento consiste en graficar sobre papel logarítmico los valores medidos de x y de y, o bien, graficar en papel milimétrico $log_a y$ versus $log_a x$, aunque graficando en papel logarítmico es más simple. Este tipo de papel es ampliamente usado cuando la gráfica de los datos en papel milimétrico no es una recta, sino que tiene forma de parábola o hipérbola; el papel permite efectuar de manera implícita un cambio de variable para linealizar la curva que aparece en el papel milimétrico y posibilita, además, obtener la ecuación empírica del experimento.

Las reglas para graficar en papel logarítmico son similares a las reglas que se imponen a las gráficas en papel milimétrico. Sólo que, el papel logarítmico, conocido simplemente como papel *log-log*, consta –como el papel milimétrico– de dos ejes graduados en escala logarítmica, que forman el sistema coordenado y permiten ubicar la posición del logaritmo de los valores que se desean graficar; la graduación del papel se da en décadas o ciclos, que van de 1 a 10, aunque hay que señalar que la base del papel debe corresponder a la base de los logaritmos que se van a trabajar. El papel comercial maneja la base 10, por lo que debemos tener en cuenta que, al graficar, el ciclo distante más alejado a la intersección de los ejes corresponde a posiciones de números que son mayores por un factor de 10 con respecto a sus correspondientes del ciclo inmediato anterior. Visto gráficamente para un eje, tendríamos:

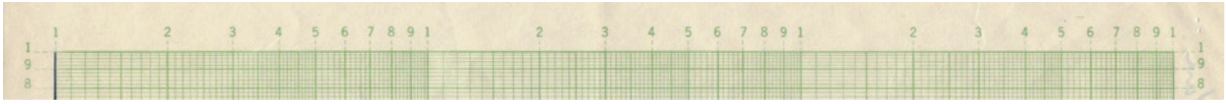


Figura 12. Escala logarítmica de un eje del papel *log-log*. Se muestran tres ciclos; por ejemplo, el primer ciclo corresponde a las unidades (de 1 a 9); el segundo ciclo es para las decenas (de 10 a 90) y el tercer ciclo correspondería a las centenas (de 100 a 900).

En la Figura 12 claramente se distinguen tres ciclos; el primer ciclo va de 1 a 10 donde, el 1 correspondiente al segundo ciclo representa la posición del $log_{10}10$ mientras que el dígito 1 del tercer ciclo representa el $log_{10}100$. Debe ser claro que estos valores dependen de los valores que deseemos manejar en la gráfica; por ejemplo, supóngase que deseamos graficar valores cuyos logaritmos se encuentran entre 10 y 10 000, entonces al 1 del primer ciclo le asignaríamos el valor de 10 (que en realidad es el $log_{10}10$), el 1 del segundo ciclo sería 100 (o $log_{10}100$) y el 1 del tercer ciclo sería 1000 (o $log_{10}1000$), por lo que el 1 del probable cuarto ciclo correspondería al 10 000 (o su respectivo logaritmo). Así, para el primer caso (cuando nuestra escala va de 1 a 1000), si deseamos ubicar el $log_{10}70$, nos situamos sobre el número 7 del segundo ciclo y a partir de allí nos moveríamos verticalmente hacia arriba (sobre el eje y, que en realidad sería el eje $log_{10}y$) hasta encontrar el valor deseado para y; el lector debe percatarse de la afirmación que hicimos líneas arriba de que el procedimiento para graficar en este papel es enteramente análogo al que desarrollamos al graficar en papel milimétrico, aunque debemos ser conscientes de que en realidad graficamos el logaritmo base 10 del valor de las variables sobre el papel. Actualmente, la graficación en papel *log-log* puede omitirse, pues los programas de cómputo simplifican enormemente este proceso al graficar directamente los logaritmos (log_a) de las variables. Sin embargo, con intención de familiarizarnos con la graficación en papel *log-log*, en la Figura 13 se grafican los datos obtenidos en un experimento de caída libre de un balín de acero.

Tabla VI. Datos obtenidos en un experimento de caída libre de un balín de acero. Con estos datos se obtendrá la Figura 13.

$(t \pm 0.0005)$ s	$(y \pm 0.05)$ cm
0.158	12
0.229	22
0.256	32
0.298	42
0.326	52
0.367	65.1

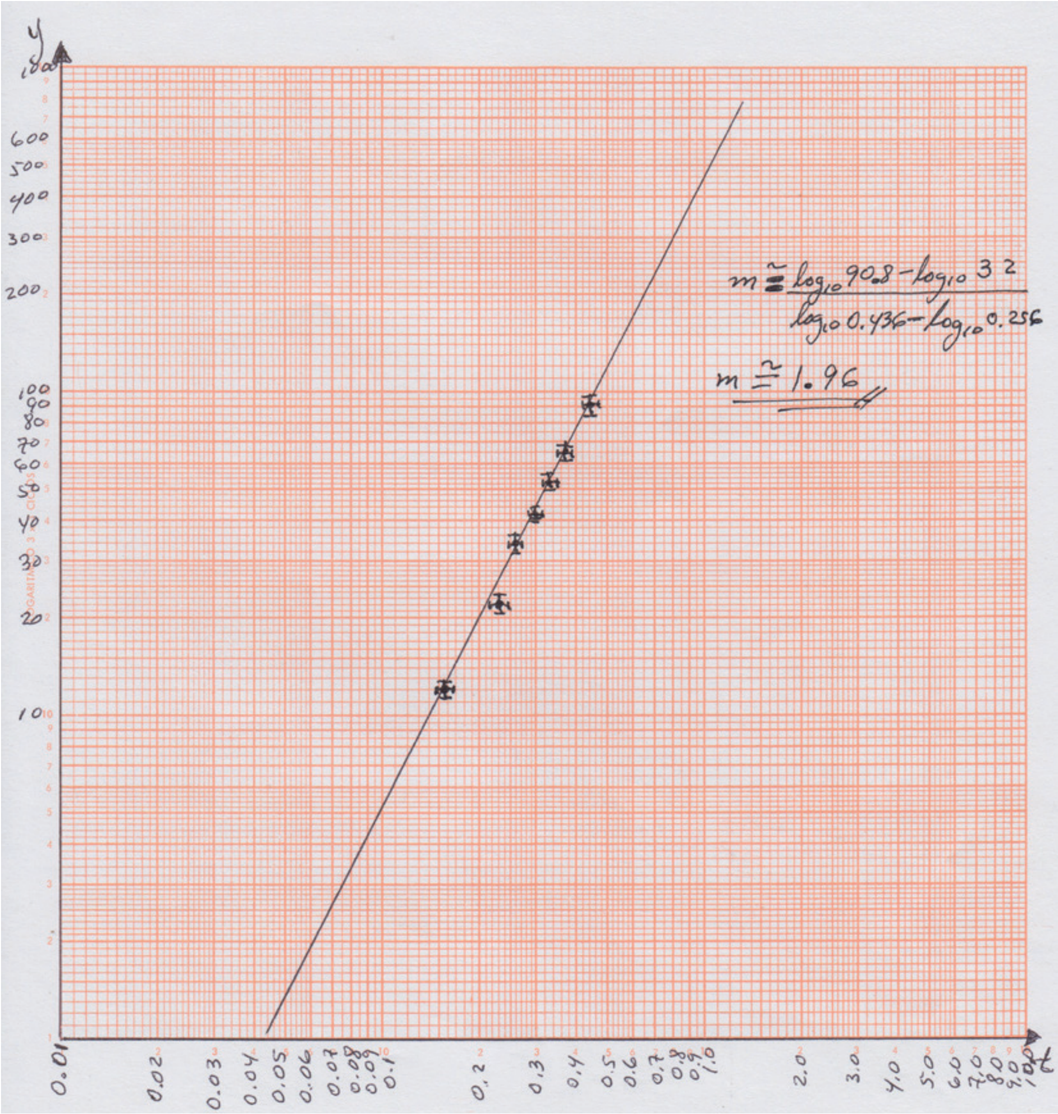


Figura 13. Gráfica en papel *log-log* (de 3x3 ciclos) que muestra los datos de un balín en caída libre. Note el comportamiento de las escalas; se grafica: t en las abscisas y y en las ordenadas. Los parámetros se manejan adimensionalmente. La gráfica muestra el valor aproximado de la pendiente de la recta.

4.6 Gráfica en papel semilogarítmico

El papel que conjunta el papel milimétrico y el papel logarítmico es el papel semilogarítmico, coloquialmente llamado papel semilog; este tipo de papel consta de un eje graduado en milímetros y otro con una graduación de la escala logarítmica, que forman entre sí un sistema coordenado, por lo que las reglas para graficar en este papel son enteramente análogas a las de la graficación en hojas de papel milimétrico y logarítmico. Tal como ocurre con el papel logarítmico, comercialmente la escala logarítmica empleada es de base 10 (la *base del papel*), aunque, en términos más amplios y de acuerdo a las necesidades del experimentador, la escala puede graduarse en una escala "*base a*". Naturalmente, la base logarítmica comienza a partir del número 1, mientras que la escala milimétrica empieza en cualquier número definido por el usuario, aunque es habitual empezar del 0. En este papel la ubicación de los puntos se lleva a cabo de manera similar a como lo hacemos en el papel milimétrico o en papel *log-log*. Por ejemplo, se desean graficar los siguientes datos en papel semilog:

Tabla VII.- Algunos datos experimentales correspondientes al enfriamiento del agua conforme trascurre el tiempo. Con estos datos se obtendrá la Figura 14.

($t \pm 0.5$) min	($T \pm 0.5$) º
0.0	93.0
2.0	88.0
4.0	81.5
6.0	76.5
8.0	73.0
10.0	69.0
12.0	66.0
14.0	64.0
16.0	61.5

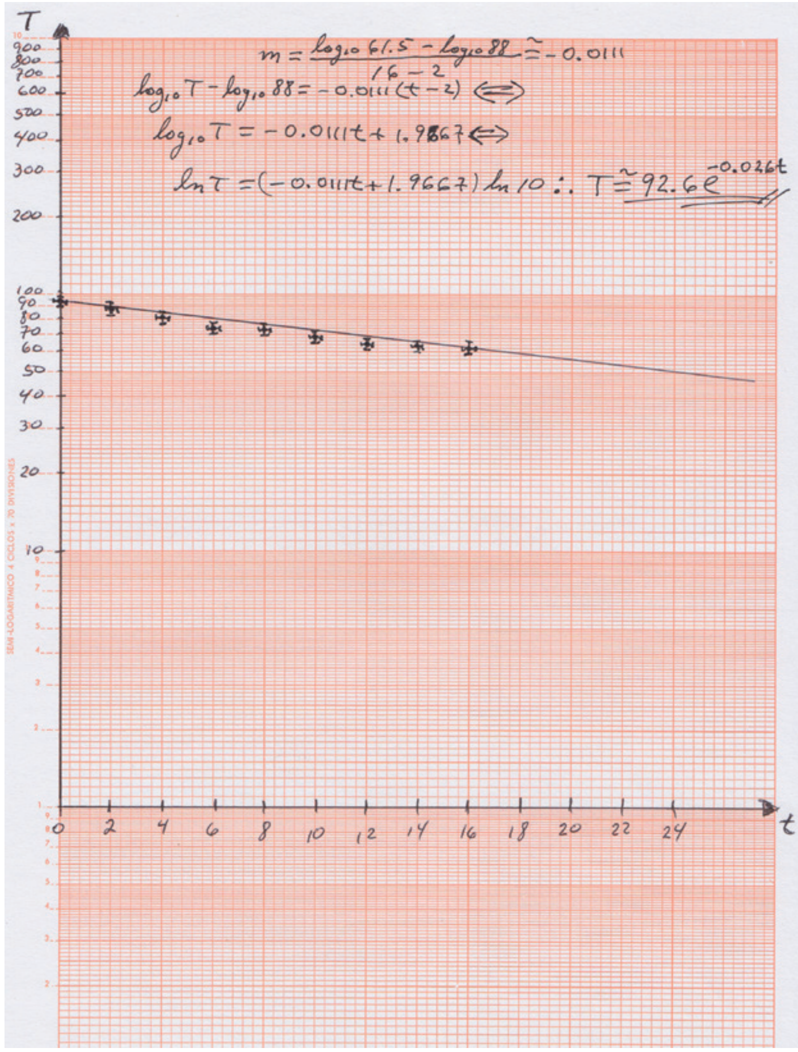


Figura 14. Gráfica en papel *semi-log* (de 4 ciclos) que muestra los datos del enfriamiento del agua al transcurrir el tiempo. Note el comportamiento de las escalas. Se grafica: t en las abscisas y T en las ordenadas. Los parámetros se manejan adimensionalmente. La gráfica muestra el valor aproximado de la pendiente de la recta y la ecuación experimental.

4.7 Gráficas más empleadas en la experimentación

De manera reiterada hemos sostenido que la experimentación, cuyo sustento es la observación y meticulosa cuantificación de los eventos naturales, es el lado empírico de la ciencia que tiene como objetivo generalizar los resultados para construir modelos y establecer leyes y teorías que, finalmente, gobiernen el acontecer natural; simultáneamente, hemos mencionado que de nuestro edificio teórico podemos aventurar hipótesis que confrontamos con la realidad; precisamente, este quehacer inductivo–deductivo constituye la columna vertebral de la ciencia.

Por su importancia en la experimentación, la graficación es un elemento esencial para el análisis y exégesis de los resultados experimentales que exhibe, sea explícitamente o sin hacerlo detalladamente, el comportamiento y posible relación que guardan entre sí las variables experimentales, permitiendo inferir –a veces mediante inspecciones someras– el comportamiento de datos deseados que no aparecen en la gráfica. Las gráficas son empleadas con demasía en todos los ámbitos de la vida en sociedad; lo mismo se usan en la investigación, la educación o la industria, que en el sector de servicios. Son infaltables en el mundo actual. Es común ver el manejo de histogramas, gráficos circulares y las gráficas de dispersión dentro de los análisis estadísticos; o bien, las curvas de calibración y los nomogramas dentro de los laboratorios de investigación, enseñanza y manufactura; e igualmente, las curvas empíricas, principalmente en los centros de investigación y los centros de enseñanza. Canales Ramos sintetiza y agrupa las gráficas en cuatro grupos, y a pesar de no ser nuestro interés principal, no está por demás mencionarlas; estas gráficas son: [12]

a) *Gráficas o curvas de calibración*. Gráficas que muestran el registro de valores observados para unos pocos puntos asociados a la calibración de un instrumento de medición. Los puntos pueden no ajustarse a alguna curva continua, en cuyo caso los puntos adyacentes se unen mediante segmentos de recta. Estas gráficas se emplean al desconocerse la relación matemática exacta de las variables experimentales. Permiten hacer correcciones a las lecturas que deben reportarse. Son ampliamente usadas en química (vea la Figura 15).

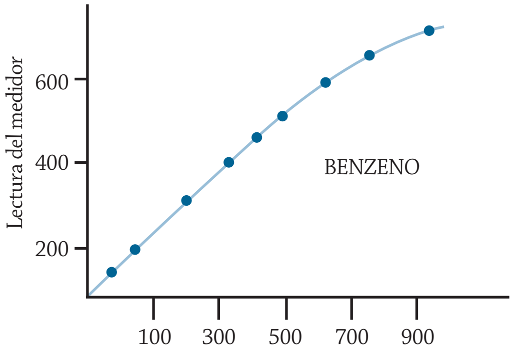


Figura 15. Curva de calibración que exhibe el potencial de ionización del benceno expuesto a luz ultravioleta. La respuesta lineal de la sustancia depende de la concentración. (Tomado de: http://www.bvsde.paho.org/tutorial1/e/monimedi/index.html).

b) *Nomogramas*. Son gráficos que se emplean para evitar los cálculos numéricos de una función complicada.[13] En estas gráficas, uno selecciona el valor de una de las variables y lo localiza en el eje correspondiente; se sigue por una curva paralela al otro eje hasta cruzar con la curva que da la relación entre las variables. A partir de la intersección se sigue por una curva paralela al primer eje hasta intersecar el segundo. En esta intersección se da el valor requerido que corresponde al

12 Aquí sólo damos sus principales características. Si se desea profundizar, puede consultarse el manual del maestro Canales *op. cit*.

13 Los casos más simples son los nomogramas relativos a la conversión de unidades o los de la Ley de Recíprocos (por ejemplo, para lentes, resistores en paralelo o capacitores en serie, entre otros). Con mayor propiedad, un nomograma es "[...] un instrumento gráfico de cálculo, un diagrama bidimensional que permite el cómputo gráfico y aproximado de una función de cualquier número de variables. En su concepción más general, el nomograma representa simultáneamente el conjunto de las ecuaciones que definen determinado problema y el rango total de sus soluciones [...]" (https://es.wikipedia.org/wiki/Nomograma).

valor de la variable del primer eje (vea la Figura 16). Todos los nomogramas siguen este procedimiento. Los hay de dos o tres sistemas de coordenadas y no necesariamente rectangulares.

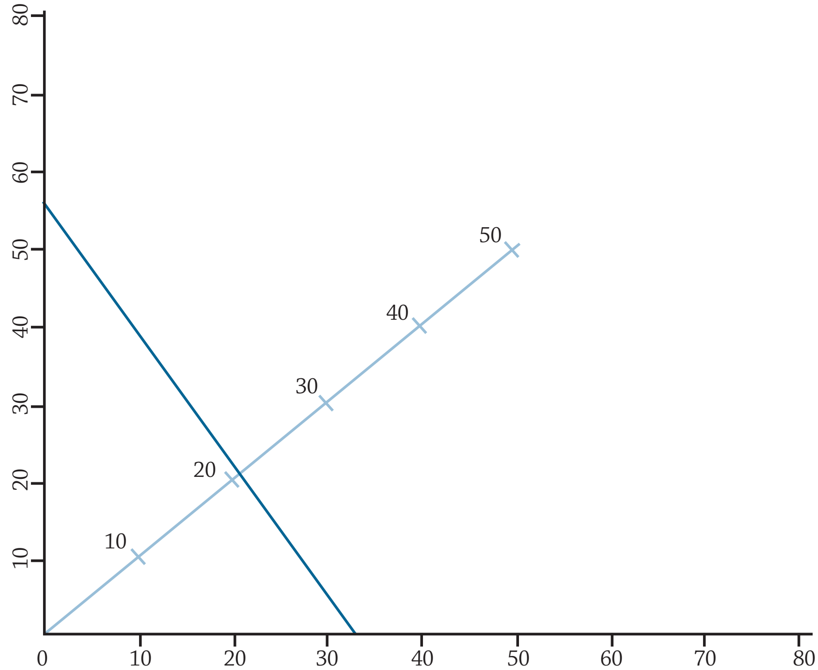


Figura 16. Nomograma para obtener la relación: $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, con x, y y z cantidades físicas. En el presente caso, y para una lente delgada positiva: la distancia focal resulta ser de: $f \cong 21$ cm (en la diagonal) si la distancia objeto, $S_o \cong 56$ cm (en el eje de las ordenadas) y la distancia imagen es, aproximadamente: $S_i \cong 33$ cm (en el eje de las abscisas), cosa que puede verificarse mediante el uso de la calculadora (ya que: $\frac{1}{f} = \frac{1}{S_o} + \frac{1}{S_i}$). (El gráfico se tomó de: https://es.wikipedia.org/wiki/Nomograma).

c) *Curvas teóricas*. Permiten visualizar de manera más o menos rápida –lo ideal es que explícitamente muestren– la relación teórica existente entre las variables; esto es, los valores de las variables[14] se obtienen por una sustitución de valores arbitrarios en una expresión matemática que expresa la relación teórica. Tales curvas obedecen a ecuaciones matemáticas conocidas. Este tipo de gráficas se utilizan con el objeto de hacer una comparación entre los resultados experimentales y los que provienen de bases teóricas. Un ejemplo de este tipo de gráficas lo ilustra la Figura 17.a, donde se muestra la relación entre el periodo de un péndulo (P) respecto al periodo virtual (P_0); P depende de la amplitud de las oscilaciones (medidas en grados) del péndulo mientras que P_0 es independiente de ellas.[15] La curva continua en color rojo muestra la relación teórica, mientras que las demás son curvas empíricas (ajustadas). Otro ejemplo más común aparece en la Figura 17.b, donde se muestra la curva

14 Sean dependientes o independientes. En el caso de estas últimas, y conociendo los valores de las variables dependientes, lo que se puede hacer es despejar y sustituir valores.

15 Recordemos que el periodo de un péndulo es una serie infinita de términos; en el principio virtual, esta serie se trunca y sólo se considera el término constante. (Vea §2.4, página 21).

teórica para la caída libre (en condiciones ideales) de un balín de acero y los datos recolectados (los datos corresponden a la Tabla VI).

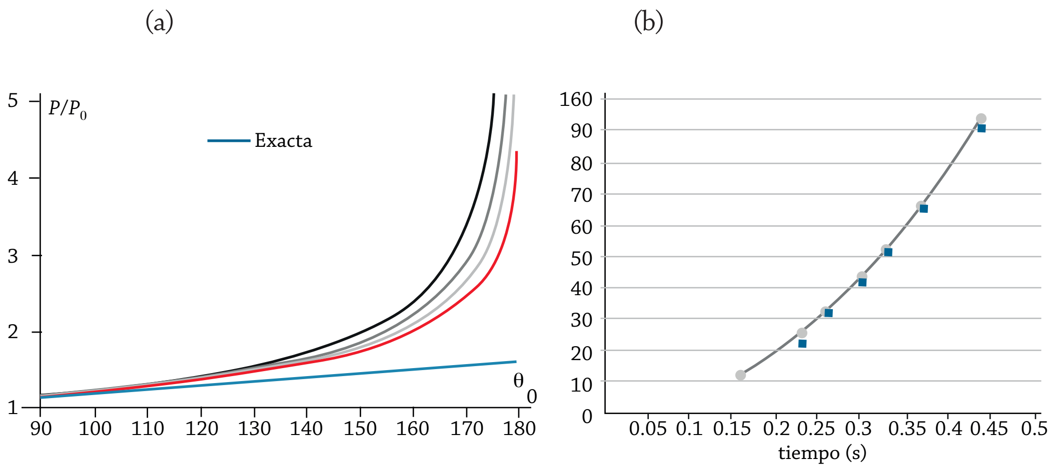


Figura 17. (a) Curva teórica para el periodo de oscilación de un péndulo (en rojo). (Tomado de http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pendulo2/pendulo2.htm). (b) Curva teórica (línea continua) para la caída de un cuerpo bajo condiciones ideales. En azul aparecen algunos datos recolectados en la Tabla VI. (Gráfica en Microsoft Excel).

d) *Curvas empíricas*. No se conoce la relación exacta entre las variables experimentales, aunque el objetivo del experimento y de la gráfica es ése: encontrar la relación matemática aproximada entre ellas. En estas gráficas, la curva debe pasar por el mayor número de puntos y dentro de los intervalos de incertidumbre; los puntos se unen mediante segmentos de recta, obteniéndose una curva continua que corresponde a una relación empírica, que no es más que *aquella curva que se obtiene a partir de datos empíricos, pero sin usar base teórica alguna*. Una de estas curvas se muestra en la Figura 18.

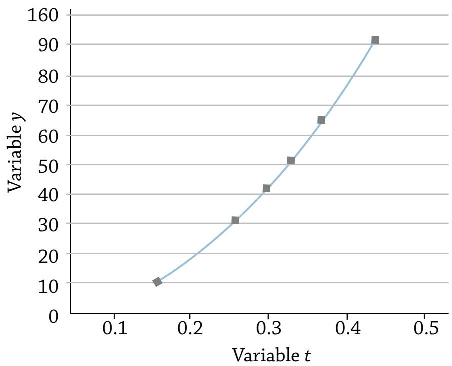


Figura 18. Curva empírica. La gráfica es con los datos de la Tabla VI.

4.8 Curvas y sus ecuaciones

Previamente hicimos una mención somera de las curvas que aparecen con mayor frecuencia en la graficación,[16] a la vez que señalamos, *grosso modo* y en términos generales, las expresiones matemáticas que las caracterizan; no obstante, vale la pena recalcar una vez más su uso. La curva más simple y de mayor uso en el análisis gráfico es la recta,[17] usándose la ecuación punto y pendiente para la ordenada, es decir:

$$y = mx + b \tag{45}$$

donde b = ordenada al origen (valor de y cuando $x = 0$); m = pendiente de la recta, obtenida a partir de los puntos: $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{46}$$

Cabe recordar que la ecuación (45) también puede obtenerse de la ecuación punto y pendiente, pues tomando cualquier punto $P(x, y)$ sobre la recta que pasa por $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, y posicionándonos en el punto $A(x_1, y_1)$, tendremos que, efectivamente m estará dada por la ecuación (46), así que tendremos:

$$y - y_1 = m(x\text{-}x_1) \Rightarrow$$

$$y = mx + (y_1 - mx_1) = mx + b \tag{47}$$

donde hemos hecho que: $b = y_1 - mx_1$, que es la ordenada al origen, pues si $x = x_1 = 0$, resulta que: $b = y_1$, y por tanto, de (47): $y = b$.

La siguiente curva en importancia es la relación cuadrática del tipo parábola. La ecuación de la parábola con su eje de simetría paralelo al Eje Y y vértice de coordenadas $V(h,k)$ en cualquier punto del plano cartesiano está dada por:

$$(y - k) = A(x - h)^2 \tag{48}$$

donde h, k y A son constantes (características de cada parábola).[18] Cuando el eje de simetría es paralelo al Eje X, la ecuación de la parábola adquiere la forma:

$$(x - h) = A(y - k)^2 \tag{49}$$

16 Ver §4.1.

17 De hecho, siempre pretendemos linealizar cualquier gráfico, es decir, buscamos cómo convertir una curva a una línea recta, y para ello, hacemos cambios de variable. Tristemente, esto no siempre es posible.

18 En este caso, el vértice de la parábola está en $V(h,k)$. Ahora bien, tal vez el lector está acostumbrado a ver la expresión de la forma: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, donde $4p$ = lado recto; si es así, note que en la expresión (48), $A = \frac{1}{4p}$. Lo mismo sucede con la ecuación (49).

Ahora bien, si el vértice de la parábola se encuentra en el origen de coordenadas, es decir, cuando $h = k = 0$, tenemos que las ecuaciones (48) y (49) se reducen a:

$$y = Ax^2 \quad \text{y} \quad x = Ay^2 \tag{50}$$

En el mismo talante encontramos la ecuación de una hipérbola con centro en $C(h, k)$ y vértice en $V(h \pm a, k,)$ dada por:

$$(y - k) = \frac{A}{(x - h)}, x \neq h \tag{51}$$

donde A es una constante característica de la hipérbola.[19] Note que si el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas, $h = k = 0$, se tiene el caso particular de una hipérbola equilátera, y la expresión (51) se reduce a:

$$y = \frac{A}{x}, x \neq 0 \tag{52}$$

Así, y por simplicidad, estos tres tipos de curvas pueden representarse por la relación polinomial mencionada en la sección (4.1), es decir:

$$y = Ax^m \quad \text{ó} \quad (y - k) = A(x - h)^m \tag{53}$$

donde debe ser claro que:

- si $m = 1$, se tiene la ecuación de una recta $((y - k) = A(x - h))$;
- si $m = 2$ ó $m = 1/2$, se tiene la ecuación de una parábola $((y - k) = A(x - h)^2$ ó $(y - k) = A(x - h)^{1/2})$, y
- si $m = -1$, se tiene una hipérbola equilátera

  $(y - k) = \frac{A}{(x - h)}, \; x - h \neq 0.$

También, como se mencionó líneas arriba, un grupo adicional de curvas frecuentes dentro del análisis gráfico está conformado por las exponenciales. La ecuación análoga a la expresión polinomial para estas curvas sería:

$$y = Aa^{kx} \tag{54}$$

con: A, k y a constantes que caracterizan la curva, y k una constante que se introduce para incluir las exponenciales positivas crecientes y decrecientes o negativas, pues si $k > 0$, la exponencial es creciente, mientras que

19 Nuevamente, al igual que con la expresión de la parábola, no debe haber problema alguno pues la ecuación (51) es el caso particular de una hipérbola cuya ecuación canónica está dada por $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$; de hecho, (51) es la expresión de una hipérbola equilátera colocada sobre el plano coordenado con los ejes coordenados como asíntotas y ubicada en los cuadrantes I y III; en este caso, se satisface que para un punto $P(x, y)$ de la curva, las distancias d_1 y d_2 a las dos asíntotas serán $|x|$ y $|y|$, respectivamente, por lo que: $d_1 d_2 = |x|\,|y| = xy =$ constante $= A$, por lo que: $y = \frac{A}{x}$.

si $k < 0$, la exponencial es decreciente. La constante a se denomina base de la exponencial y se relaciona con la base e del logaritmo natural (o neperiano) mediante: $a^x = e^{x\,ln a}$ (vea nota a pie 8). Note también que en $x = 0$, $y = A$, por lo que A resulta ser la ordenada al origen, es decir, la curva interseca al eje de las ordenadas en el punto $(0, A)$.

Estas son, pues, las curvas más simples y mayormente empleadas en el análisis gráfico.

4.9 La recta en papel *log-log*

Cuando a partir de un conjunto de datos como los de la Tabla VI construimos una gráfica en papel milimétrico y obtenemos una línea curva –en este caso, una parábola– inmediatamente buscamos linealizarla para hallar de una manera ágil y sencilla la relación empírica que existe entre las variables. La manera de convertir la parábola en línea recta es mediante un cambio de variable empleando logaritmos,[20] cosa que logramos al graficar los datos recolectados en papel *log-log*,[21] correspondiendo el eje de las abscisas al $log_{10}x$ (que es la variable independiente) y el eje de las ordenadas a la variable dependiente ($log_{10}y$)(vea la Figura 19).

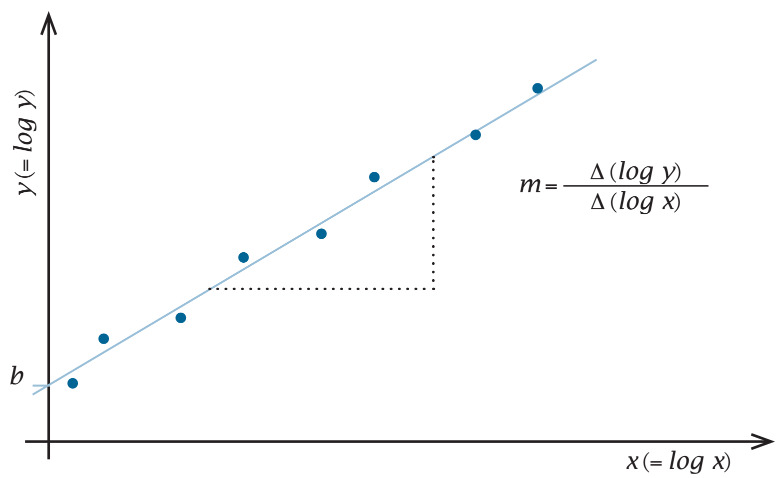


Figura 19. Gráfica en papel *log-log*. Se muestran la pendiente y la ordenada al origen.

El paso siguiente es hallar la ecuación de la recta que aparece en el papel *log-log* y para ello, procedemos tal y como lo hacemos en la geometría analítica, es decir, tomamos dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ sobre la recta para obtener la pendiente m, así:[22]

20 Recordemos que los logaritmos aparecen como un método de resolución expedita de cálculos complicados, y que sus propiedades son muy interesantes, destacándose: $log_a xy = log_a x + log_a y$, $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$, $log_a x^m = m\,log_a x$, con $x > 0$, $y > 0$, m un número real y a la base del logaritmo. Así, si graficamos en papel milimétrico y obtenemos una curva cuya potencia es 2, al aplicar el logaritmo y graficar los valores resultantes en papel milimétrico (o al graficarlo directamente en papel logarítmico), obtendremos como gráfica (logarítmica) una línea recta. Esa es la utilidad y fortaleza del papel logarítmico.

21 Hay que hacer notar que se puede trabajar log_a, siendo indistinto en qué base logarítmica se trabaje. Asimismo, y en el caso del papel comercial, no olvide que la base (del papel) es 10.

22 Para obtener la ecuación de la recta, aquí hacemos este desarrollo con ánimos didácticos en concordancia con la geometría analítica, aunque después recurriremos a una regresión lineal (Método de los Mínimos Cuadrados).

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{55}$$

ahora, empleando la ecuación punto y pendiente, tendremos:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{56}$$

donde, de acuerdo a nuestra gráfica: y_1 es el $log_{10}y_1$, y lo mismo sucede para todos los valores que aparecen en las ecuaciones (55) y (56).[23] Ahora bien, estamos acostumbrados a ver la ecuación de la recta en la forma expresada por la ecuación (47), y claramente, de (56) podemos obtenerla; así pues, hagámoslo usando –por única vez– la notación en que se ven involucrados los logaritmos que, por comodidad, serán los que aparecen en la base del papel aunque, en términos generales, pueden ser de cualesquier base. Entonces, si $P(x. y)$ es un punto cualquiera sobre la recta, de (56) obtenemos:

$$\begin{aligned} log_{10}y - log_{10}y_1 &= m\,(log_{10}x - log_{10}x_1) \Leftrightarrow \\ log_{10}y &= mlog_{10}x - mlog_{10}x_1 + log_{10}y_1 \\ &= log_{10}x^m + (log_{10}y_1 - log_{10}x_1{}^m) \\ &= log_{10}x^m + \alpha \end{aligned} \tag{57}$$

donde α (= $log_{10}y_1 - log_{10}x_1{}^m$) es un número que se ha obtenido de datos conocidos (dado que $P_1(x_1, y_1)$ es conocido). Ahora bien, fijándonos en la ecuación (57), notamos que ésta parece la ecuación de una recta, a pesar de que del lado izquierdo de la igualdad hay un logaritmo y el primer término del lado derecho (de la igualdad) también es logarítmico, pero α no lo es, así que para homogeneizar la ecuación en términos de los logaritmos –y para que la ecuación no se altere– aplicamos el logaritmo y el antilogaritmo de α (no olvide que α es un escalar) y, llamando $A = Antilog_{10}\alpha = 10^\alpha$, (57) queda como:

$$log_{10}y = log_{10}x^m + log_{10}(10^\alpha) = log_{10}x^m + log_{10}A \tag{58}$$

$$\therefore\ log_{10}y = log_{10}(Ax^m),$$

por lo que claramente se obtiene que:

$$¡¡¡\ y = Ax^m\ !!!$$

que es la ecuación polinomial que vimos anteriormente (ecuación 53), con $h = 0 = k$; evidentemente, esta ecuación es independiente de cualquier base logarítmica.

Ahora bien, para abreviar el trabajo de obtener la ecuación empírica de la curva, notemos que (57) casi es de la forma $y = mx + b$, por lo que, llevándola a la ecuación (58) y después comparándola con $y = mx + b$, encontramos que $y \equiv log_{10}y$, $mx \equiv log_{10}x^m$ y $b \equiv log_{10}A$; así que si tenemos la gráfica de una recta en papel *log-log*, inmediatamente caemos en la cuenta que la ordenada al origen nos dará el término A de la ecuación polinomial, pues

23 No olvide que en papel log-log estamos graficando el logaritmo del dato, por lo que (55) es, en realidad $m = \frac{log_{10}y_2 - log_{10}y_1}{log_{10}x_2 - log_{10}x_1}$; lo mismo vale para la ecuación (56).

$$b = log_{10} A \text{ implica que } 10^b = A$$

$$\therefore A = 10^b \tag{59}$$

donde b es la intersección de la recta con el eje y (que en realidad es el $log_{10}y$).

Caso digno de mención es cuando no podemos obtener A de la gráfica, pues la ordenada al origen no aparece explícitamente (en la gráfica); para hallar dicha constante, y habiendo encontrado la pendiente de la recta, m, recurrimos a otra estrategia: utilizamos la ecuación polinomial y un punto conocido, llamémosle $P(X, Y)$, sobre la recta ajustada; de esta manera, al sustituir el dato en la ecuación, tendremos:

$$Y = AX^m$$

por lo que:

$$A = \frac{Y}{X^m} \tag{60}$$

y la relación (53) (con $h = k = 0$) quedaría finalmente, después de sustituir (60), como:

$$y = Ax^m = \left(\frac{Y}{X^m}\right) x^m \tag{61}$$

$\forall\ (x, y)$ sobre la recta y X y Y valores conocidos.

Ejemplo 12. Consideremos los datos de la Tabla VI para la recta en papel *log-log* que aparece en la Figura 13. En la gráfica es difícil decir dónde se encuentra la ordenada al origen, por lo que aplicaremos las ecuaciones (56) y (61) para encontrar la ecuación del experimento. Encontramos entonces que si tomamos dos puntos sobre la recta, digamos P_1 $(0.256, 32)$ y P_2 $(0.436, 90.8)$, la pendiente m y la ordenada al origen A serían, aproximadamente:

$$A = ??? \text{ y } m = \frac{log_{10}90.8 - log_{10}32}{log_{10}0.436 - log_{10}0.256} \cong 1.96$$

Dado que no tenemos el valor de A, encontrémosla mediante (61), es decir:

$$A = \frac{Y}{T^m} \cong \frac{90.8}{0.436^{1.96}} \cong 462.05$$

donde tomamos P_2 $(0.436, 90.8)$ como dato conocido e hicimos el ajuste de acuerdo a los datos que graficamos, es decir, tomamos T en vez de X como dato (conocido). Por tanto, la ecuación (empírica) de la curva sería

$$y \cong 462.05 t^{1.96}$$

que es aproximadamente la ecuación de una parábola (el modelo de caída libre nos indica que la ecuación (ideal) debería ser:

$y = \frac{1}{2} gt^2 = 490.5t^2$. Por tanto, nuestro experimento es aceptable).

Debemos señalar en este instante que es frecuente, además de muy conveniente, encontrar los valores de la pendiente y la ordenada al origen de la gráfica en papel *log-log* mediante una regresión lineal (que se verá posteriormente) para tener la ecuación de la recta expresada en la forma $y = mx + b$, haciendo únicamente los ajustes necesarios sustituyendo y (en la ecuación de la recta) por el $log_{10}y$ y haciendo lo propio con x (es decir, sustituyéndola por el $log_{10}x$); una vez hecho esto, realizamos el procedimiento como en (58) para arribar a la ecuación polinomial (ecuación (53)). Inclusive, y empleando las técnicas computacionales, podemos ahorrarnos este trabajo, pues en la computadora es viable realizar, sin demérito alguno, casi todos los cálculos y gráficas que queramos, ahorrando tiempo, dinero y esfuerzo. Ejemplifiquémoslo enseguida.

Ejemplo 13. En un experimento de caída libre de un balín de acero se recolectaron los datos para las variables t y y mostrados en la Tabla VI (por comodidad, se omiten sus unidades y sus incertidumbres asociadas). Si se recuerda, con estos datos se obtuvo la Figura 13 y su respectiva ecuación. En este momento, nuestra intención es aplicar herramientas computacionales como apoyo del análisis gráfico para obtener la relación matemática entre dichas variables. El análisis se llevó a cabo en Microsoft Excel.

Tablas de datos VI. Se muestran los datos recolectados y la tabla de sus logaritmos.

t	y
0.158	12
0.221	22
0.256	32
0.298	42
0.326	52
0.367	65.1
0.436	90.8

log10(t)	*log10(y)*
-0.801	1.079
-0.656	1.342
-0.592	1.505
-0.526	1.623
-0.487	1.716
-0.435	1.814
-0.361	1.958

De la Tabla de Datos a la izquierda notamos a simple vista que la relación entre ellas es no-lineal, por lo que tomamos el logaritmo base 10 de cada dato para graficarlos en papel normal (que es como si graficáramos en papel *log-log*); estos valores aparecen a la derecha de la tabla de valores para t y y. Así, las gráficas respectivas son:

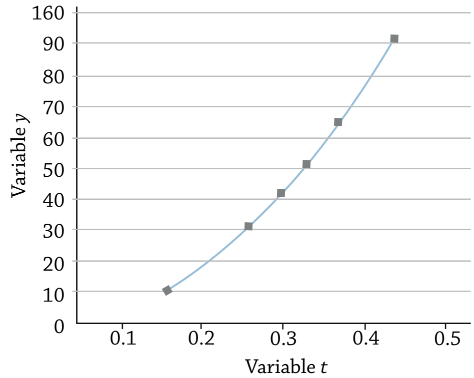


Figura 21. Gráfica de las variables t y y. Claramente se observa que la relación no es lineal.

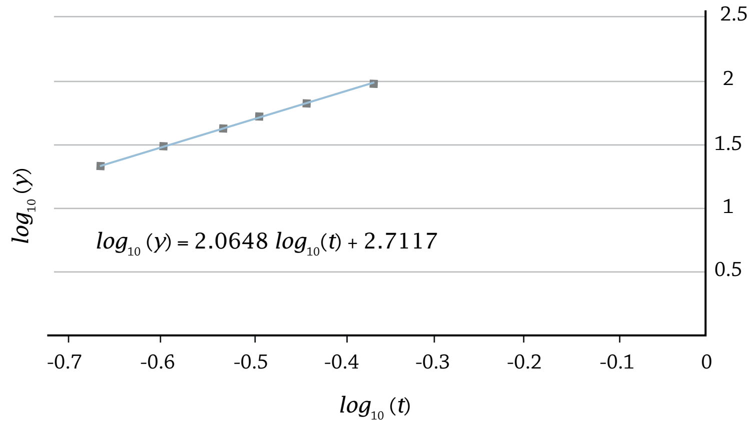


Figura 22. Gráfica de los logaritmos base 10 de las variables t y y. Se muestra la ecuación de la recta.

De la Figura 22, la ecuación de la recta resultó ser:

$$log_{10}y = 2.0648 log_{10}t + 2.7117$$

de donde se desprende, después de redondear y reordenar, y por (52), que

$$log_{10}y \cong log_{10}\,((10^{2.71})t^{2.07}) \cong log_{10}(512.86t^{2.07})$$

$$\therefore\ y \cong 512.86t^{2.07}$$

que es la ecuación empírica solicitada.[24] El lector puede constatar que los resultados para la variable y difieren poco de los valores obtenidos al aplicar la ecuación empírica a los valores de la variable t.[25]

4.10 La recta en papel *semilog*

Como el papel *log-log*, el papel *semilog* permite cambiar de variable directamente al graficar en él los datos experimentales toda vez que en papel milimétrico obtuvimos una curva exponencial. El procedimiento para hallar la relación empírica entre las variables es semejante al que llevamos a cabo para encontrar la ecuación de la recta en papel milimétrico o en papel *log-log*; es decir, si al graficar en papel milimétrico y ajustar los datos a una curva, ésta resultó ser una (función) exponencial, entonces graficamos los datos directamente sobre papel *semilog* para obtener una recta. La manera de convertir la exponencial en línea recta es, nuevamente, empleando logaritmos como nuestro cambio de variable indicado, por tal motivo, graficamos los datos recolectados en papel *semilog*, correspondiendo el eje de las abscisas a la variable x y el eje de las ordenadas a la variable dependiente $log_{10}y$ (vea la Figura 23).

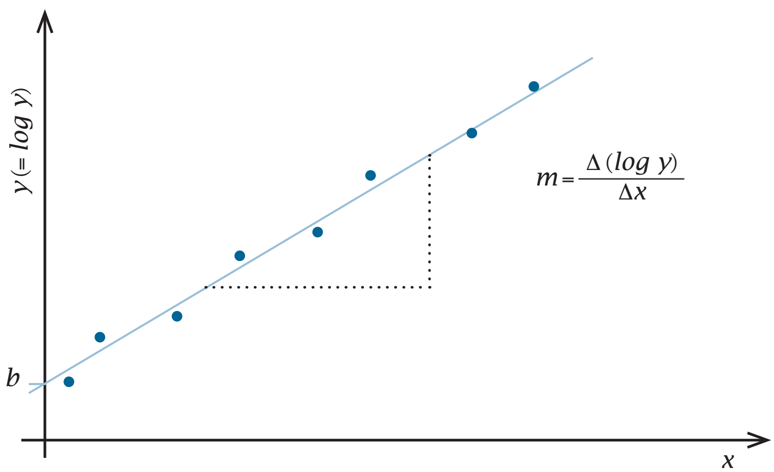


Figura 23.- Recta ajustada en papel *semilog*. El eje de las abscisas consta de una escala lineal, mientras que el eje de las ordenadas es de escala logarítmica.

---

24 Probablemente el lector recuerde que la ecuación obtenida en el Ejemplo 9 es distinta a la que se da en este ejemplo, aun cuando los datos son los mismos. Cabe señalar que en aquel ejemplo sólo se tomaron 2 puntos, y la ecuación resultante fue de $y \cong 462.05t^{1.96}$. En el caso presente, la expresión $y \cong 512.86t^{2.07}$ se obtuvo considerando todos los datos. Ahora bien, no hay que perder de vista que el modelo de un cuerpo en caída libre –tomando el valor de la aceleración de la gravedad: g = 981 cm/s^2 da como resultado $y = 1/2\ gt^2 = 490.5t^2$, en cm. Note que la aproximación de las dos ecuaciones aquí obtenidas son bastante buenas, pues el coeficiente presenta, en el primer caso, un error porcentual de 5.81%, y en el segundo el error es de 4.56%. Análogamente, para el primer caso, el exponente presenta un error de 2.0%, aproximadamente, en tanto que para el segundo caso el error es de 3.5% solamente.

25 Hay que dejar bien claro que cuando el exponente no es un entero, llegar a una ecuación simple es difícil. En el caso aquí ejemplificado el exponente no es 2, por lo que si pretendemos encontrar una ecuación cuadrática de la forma: $y = Ax^2 + Bx + C$, con A, B y C constantes, hallar el vértice y el lado recto de la parábola es sumamente complicado. Por tal motivo, siempre acudimos a la ecuación empírica, que a fin de cuentas nos conducirá a un modelo teórico.

Encontremos, mediante un procedimiento análogo a los que hemos desarrollado en esta sección, la ecuación de la recta –y su significado– en el papel *semilog*. Para ello, supongamos que la recta ajustada es parecida a la de la Figura 23, y que la recta interseca el eje y (que en realidad es $log_{10}y$) en el punto $(0, b)$; luego, para obtener la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$, consideremos dos puntos sobre ella, digamos: $P_1(x_1, log_{10}y_1)$ y $P_2(x_2, log_{10}y_2)$, y consideremos también $P(x, log_{10}y)$, un punto cualquiera (sobre la recta ajustada); así, tenemos que la pendiente de esta recta estará dada por:

$$m = \frac{log_{10}y_2 - log_{10}y_1}{x_2 - x_2} = \frac{\Delta\,(log_{10}y)}{\Delta\,x}\,,\ \Delta x \neq 0 \tag{62}$$

por lo que para obtener la ecuación de la recta tendremos:

$$\begin{aligned} log_{10}y - log_{10}y_1 &= m\,(x - x_1) \Rightarrow \\ log_{10}y &= mx - mx_1 + log_{10}y_1 \\ &= mx + \beta \end{aligned} \tag{63}$$

donde hemos hecho que

$$\beta = log_{10}y_1 - mx_1 \tag{64}$$

es un número conocido (dado que $P_1(x_1, log_{10}y_1)$ es un punto conocido y m ya se conoce). Así que al despejar y de la ecuación (63) obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= 10^{\,(mx+\beta)} = 10^{mx}10^{\beta} \\ \therefore\ y &= B10^{mx} \end{aligned} \tag{65}$$

donde queda claro que hemos aplicado las propiedades de los exponentes y que:

$$B = 10^{\beta} \tag{66}$$

Debe ser claro que las ecuaciones (65) y (66) son para un caso particular, dado que hemos estado trabajando en el logaritmo base 10, por ser la base del papel comercial; sin embargo, si manejáramos el logaritmo en cualquier otra base –digamos base a–, los ecuaciones (65) y (66) deberán modificarse, quedando como

$$y = Ba^{mx} \tag{67}$$

y

$$B = a^{\beta} \tag{68}$$

con

$$\beta = log_{a}y_1 - mx_1 \tag{69}$$

Ahora bien, note que si tomamos, en cualquier base, $P_1(x_1, log_a y_1)$ adecuadamente para encontrar la ordenada al origen, tendremos que $P_1(x_1, log_a y_1) = P_1(0, log_a y_1) = b$, por lo que $b = log_a y_1$, cosa que concuerda con las ecuaciones (64) y (69).

Ejemplifiquemos esto.

Ejemplo 14. Suponga que se ha realizado un experimento donde se obtuvieron los datos que se muestran en la Tabla de datos VIII.

Tabla de datos VIII. Datos recolectados en un experimento dado. Se busca la relación empírica entre las variables.

$(t \pm 0.5)$min	$(T \pm 0.5)$º
0.0	93.0
2.0	88.0
4.0	81.5
6.0	76.5
8.0	73.0
10.0	69.0
12.0	66.0
14.0	64.0
16.0	61.5

El lector inquisitivo ya se percató que esta tabla es la Tabla de Datos VII con que se obtuvo la gráfica en papel *semilog*. La Figura 14 muestra la recta obtenida y su ecuación, aunque lo hace en base 10, por ser la base del papel. Hagamos ahora el proceso para llevar la ecuación resultante a logaritmos naturales y, consecuentemente, a exponenciales.

Para ello, ubiquémonos en la recta de la Figura 14 y tomemos dos puntos sobre ella, siendo éstos: $P_1(2, log_{10}88)$ y $P_2(16, log_{10}61.5)$.

Ahora bien, sabemos que $log_a x = \dfrac{ln\ x}{ln\ a}$, por lo que la pendiente estará dada por:

$$m = \frac{log_{10}61.5 - log_{10}88}{16-2} = \frac{\frac{ln\ 61.5}{ln\ 10} - \frac{ln\ 88}{ln\ 10}}{16-2} = -0.0111$$

luego, para obtener la ecuación de la recta (mediante: $y - y_1 = m(x - x_1)$):

$$log_{10} T - log_{10}88 = -0.0111(t-2) \Longrightarrow$$

$$\frac{ln\ T}{ln\ 10} = -0.0111\ (t-2) + log_{10}88$$

$$= -0.0111t + 0.0222 + log_{10}88$$

$$\cong -0.0111t + 1.9667$$

así que

$$\ln T \cong (-0.0111t + 1.9667)\ln 10 = -0.0256t + 4.5285$$

$$\therefore\ T \cong e^{-0.0256t+4.5285} = 92.6195\ e^{-0.0256t}.$$

Por tanto

$$T \cong 92.62\ e^{-0.026t},\ {}^{\circ}\mathrm{C}.$$

que es la ecuación empírica.

Ejemplo 15. Ahora, acudamos al soporte que nos brinda la computación para verificar que la ecuación anterior (y que aparece también en la gráfica de la Figura 14) es muy cercana a la que se obtiene cuando se consideran todos los puntos.

Encontremos la relación empírica entre las variables tiempo, t, y Temperatura, T, echando mano a un paquete de cómputo que simula la graficación de tales variables en papel *semilog*, y en el que consideraremos logaritmos naturales en vez de logaritmos base 10; así, utilizando Microsoft Excel tendremos que (para facilitar la lectura transcribiremos la Tabla VII que aparece en la página 72 y su respectiva tabla de logaritmos naturales):

Tabla de datos VII. Datos recolectados en un experimento dado. Se busca la relación empírica entre las variables. En la tabla izquierda, los datos originales; en la tabla derecha, los logaritmos naturales de T.

t (min)	T (°C)
0	93
2	88
4	81.5
6	76.5
8	73
10	69
12	66
14	64
16	61.5

t (min)	$\ln(T)$
0	4.53
2	4.477
4	4.401
6	4.337
8	4.29
10	4.234
12	4.19
14	4.159
16	4.119

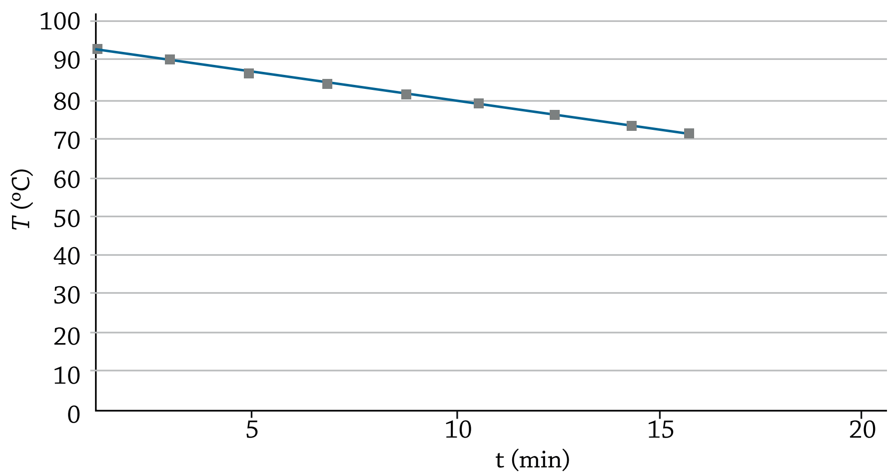
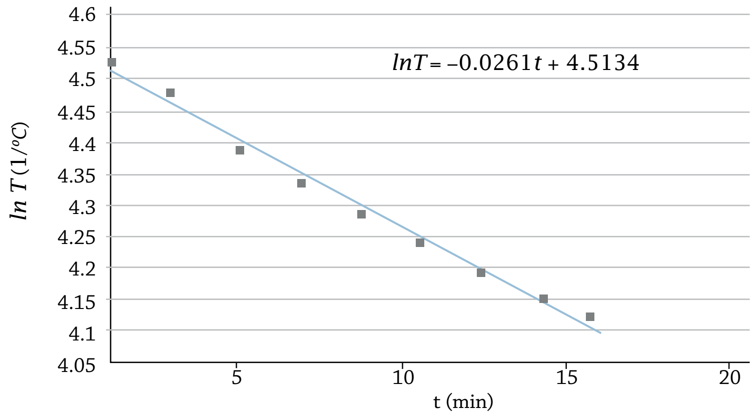


Figura 24. Gráfica que muestra la curva ajustada (con su ecuación) de los datos de la Tabla de Datos VIII. La curva no es una recta, sino una exponencial decreciente.



Por tanto:

$$T = exp\,(-\,0.026t + 4.5134) = 91.233\ exp\,(-\,0.026t)$$

Figura 25. Gráfica del logaritmo natural de la temperatura T (en las ordenadas) *vs*. el tiempo t (en las abscisas). Simula la recta ajustada en el papel *semilog*. Note que la ecuación resultante aparece al pie de esta gráfica, y es: $T = 91.233e^{-0.026t}$ en °C.

Note que las ecuaciones que aparecen en las Figuras 14 y 25, $T \cong 92.6\ e^{-\,0.0256t}$ y $T \cong 91.233\ e^{-\,0.026t}$, respectivamente, son casi idénticas y la pequeña diferencia que muestran se debe a que en el primer caso la ecuación de la recta se obtuvo sólo de dos puntos, en tanto que en el segundo caso (el de la Figura 25) ya contempla todos los puntos. Por tanto, es evidente que la ecuación de la curva obtenida en este último caso es más confiable que la obtenida en papel semilog, aun cuando las diferencias sean, prácticamente, insignificantes.

5 MÉTODO ANALÍTICO

Introducción

A pesar de que los métodos gráficos expuestos en las secciones anteriores son sumamente útiles para encontrar las ecuaciones empíricas de un gran número de experimentos (y simplificar el trabajo de obtenerlas), desafortunadamente tienen alcance muy limitado, lo que les impide gozar de funcionalidad, o validez, universal. En el caso de funciones que posean mayor grado de complejidad –e incluso de algunas funciones simples–, los métodos gráficos resultan insatisfactorios. Un ejemplo bastante simple lo proporciona una función del tipo:

$$y = Ax^2 + Bx + C, \text{ con } A, B \text{ y } C \text{ constantes} \tag{70}$$

Y es que, si pretendemos graficar esta función en papel *log-log* o, en su defecto, $log_a y$ *vs.* $log_a x$, nos encontraremos con la sorpresa de que la gráfica resultante no es una recta (a menos que $B = 0 = C$), pues los logaritmos no distribuyen bajo la suma, es decir: si

$$y = Ax^2 + Bx + C, \text{ entonces}$$

$$log_a y = log_a (Ax^2 + Bx + C)$$

$$\neq log_a Ax^2 + log_a Bx + log_a C)$$

Lo que muestra el ejemplo anterior es que los logaritmos únicamente simplifican productos y potencias, por lo que resultan ser claramente incapaces de simplificar funciones como la que aparece en (70) e, incluso, más sencillas (por ejemplo: cuando B ó C son cero, pero no ambos simultáneamente). En consecuencia, una gráfica de y *vs.* x resulta no lineal en papel *log-log* (o al graficar $log_a y$ *vs.* $log_a x$), debido al término x que aparece en la ecuación; incluso la expresión

$$y = Ax^2 + C, \text{ con } A \text{ y } C \text{ constantes}$$

es no lineal, a menos que C sea pequeña, pues en este caso, la gráfica (en *log-log*) tenderá a la linealidad conforme $x \to \infty$. Otro problema fácil de visualizar y que no se puede graficar en papel *log-log* es cuando x y y, o ambos, toman el valor cero.

De lo anteriormente expuesto salta a la vista las limitantes del método gráfico, por lo que, para tratar casos donde el método falla, conviene recurrir al método analítico (o estadístico), del cual veremos, en este documento, únicamente el caso de las regresiones.

5.1 Concepto de Regresión

A menudo encontramos que al tomar las lecturas de una situación experimental dada es posible vislumbrar, por ser evidente o por experiencia, una posible relación entre dos o más variables y nuestra intención es expresar la relación de marras en forma matemática, encontrando una ecuación que conecte las variables. Para lograrlo, el primer paso que damos, después de recolectar y tabular los datos indicando los valores correspondientes de las variables, es graficar. Por ejemplo, si x y y denotan, de manera respectiva, la estatura y el peso de una persona, entonces, una muestra de n individuos proporcionaría las estaturas: $x_1, x_2 ..., x_n$, y los pesos: $y_1, y_2 ..., y_n$. La graficación la llevamos a cabo en un sistema coordenado –habitualmente el rectangular– donde mapeamos los puntos $((x_1, y_1), (x_2, y_2)... , (x_n, y_n))$. El conjunto resultante de puntos en el sistema coordenado suele denominarse *diagrama de dispersión*.

El diagrama de dispersión posibilita visualizar con nitidez el comportamiento de los datos, conduciéndonos a intentar ajustar una *curva que se aproxime a ellos*; dicha curva recibe el nombre de *curva de aproximación*. Por ejemplo, en la Figura 26.a se observa que los datos se aproximan bien a una recta, así que decimos que existe una *relación lineal* entre las variables x y y. La Figura 26.b muestra que, a pesar de que existe una relación entre las variables, ésta no es lineal, por lo que decimos que *la relación es no lineal* o que *no existe relación lineal* entre x y y. Por su parte, la Figura 26.c exhibe un diagrama de dispersión en el que no existe relación alguna entre las variables.

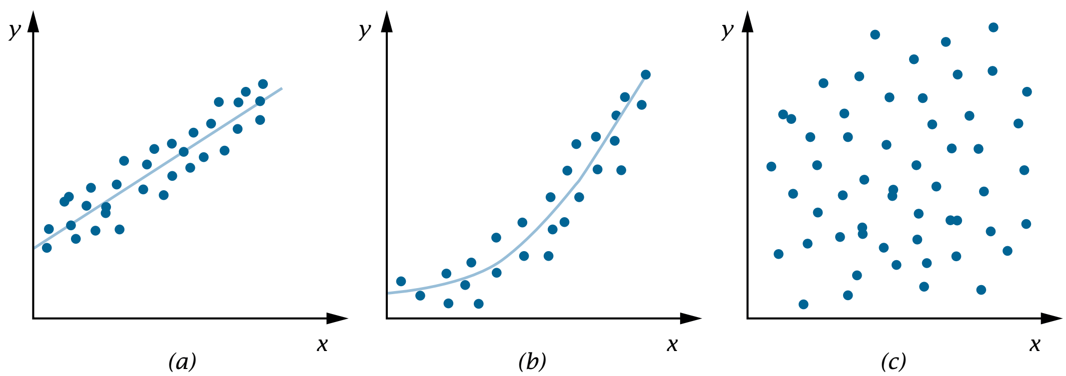


Figura 26. Diagramas de dispersión y la respectiva curva de aproximación entre las variables x y y. (a) Relación lineal. (b) Relación no lineal. (c) No hay relación alguna entre x y y.

El problema general de hallar la ecuación de la curva de aproximación que se ajuste al conjunto de datos graficados se denomina *curva de ajuste*; en la práctica, el tipo de ecuación usualmente es sugerido por el diagrama de dispersión. Por ejemplo, para la Figura 26.a el gráfico resultante es una recta y su ecuación está dada por la expresión (45), en tanto que para la Figura 26.b intentaríamos aplicar la ecuación (70) por ser la expresión de una parábola.

La intencionalidad de trazar una curva de ajuste es patente: buscamos estimar una de las variables (generalmente la variable dependiente) como función de la otra (la variable independiente); este proceso de estimación recibe el nombre de *regresión*. Además, si y es estimada u obtenida a partir de x por medio de alguna ecuación, la ecuación recibe el nombre de *ecuación de regresión de y sobre x* (o simplemente, *ecuación de regresión*), y a la curva correspondiente la denominamos *curva de regresión de y sobre x* o, abreviadamente, *curva de regresión*.

5.2 Método de Mínimos Cuadrados (MMC)

Generalmente, cuando vemos un diagrama de dispersión solemos pensar que hay más de un tipo de curva que ajusta al conjunto de datos. Esto puede ser cierto, empero, buscando evitar en la medida de lo posible juicios individuales y subjetivos en la construcción de una curva de aproximación (rectas, parábolas u otras curvas), definimos lo que se conoce como *"la mejor curva de ajuste"* (es decir: "*la mejor recta de ajuste*", "*mejor parábola de ajuste*", *"la mejor hipérbola de ajuste"*, etc.). Para ello, consideremos la Figura 27, en la cual los datos son $(x_1, y_1), (x_2, y_2)..., (x_n, y_n)$. Para un valor dado de x, por ejemplo x_1, habrá una diferencia entre el valor medido y_1 y el valor y correspondiente sobre la curva C; esta diferencia, denotada por d y conocida como *desviación, error* o *residuo*, puede ser positiva, negativa o cero. De modo similar, y para cada uno de los valores $x_1, x_2 ..., x_n$, obtenemos las desviaciones $d_1, d_2 ..., d_n$ (también denotadas como $\delta y_1, \delta y_2 ..., \delta y_n$), correspondientes a las diferencias entre los valores $y_1, y_2 ..., y_n$ y los valores de las ordenadas sobre la curva C (como lo muestra la Figura 27).

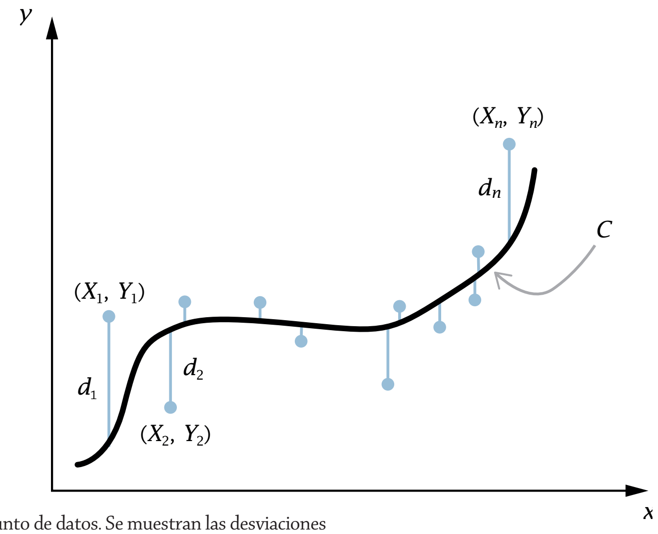


Figura 27. Curva de ajuste C de un conjunto de datos. Se muestran las desviaciones de los puntos a la curva "ajustada".

Una medida de la "bondad del ajuste" entre el conjunto de datos y la curva C la suministra la cantidad $d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2$.[1] Si la suma es pequeña, el ajuste es bueno; en cambio, si es grande, el ajuste será malo. Esto nos conduce a la siguiente

1 El lector recordará el por qué de elevar las distancias al cuadrado. Esto se vio cuando hablamos de la desviación estándar.

***Definición**. De todas las curvas de aproximación de un conjunto de puntos de datos dado, la curva que tenga la propiedad de que*

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \text{mínimo} \tag{71}$$

es la mejor curva de ajuste.[2]

Una curva con esta propiedad decimos que ajusta los datos en el sentido de *mínimos cuadrados* y se denomina *curva de regresión de mínimos cuadrados* o simplemente *curva de mínimos cuadrados*, y al hecho de aplicar este método para encontrar el ajuste se denomina Método de los Mínimos Cuadrados (MMC); así, una recta con esta propiedad se conoce como *recta de mínimos cuadrados,* una parábola con esta propiedad se denomina *parábola de mínimos cuadrados*, etcétera.

5.3 Recta de Mínimos Cuadrados

Empleemos la definición dada en la sección previa para encontrar la recta que mejor ajusta al conjunto de datos, luego, de las expresiones (45) y (71) obtengamos la pendiente m y la ordenada al origen b de la recta, teniendo que:

$$y = mx + b$$

y, tomando la desviación δy_i entre el valor medido y_i y el valor de y (obtenido como $mx_i + b$) para cada valor de x, tendremos:

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b) \tag{72}$$

Luego, para aplicar el criterio dado en (71) debemos derivar e igualar a cero (recuerde que es una condición necesaria para encontrar un mínimo o un máximo) por lo que

$$\sum [y_i - (mx_i + b)]^2 = \textit{mínimo} = M$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial b} = 0 \tag{73}$$

Al derivar obtenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left[\sum [y_i - (mx_i + b)]^2\right] = \sum \frac{\partial}{\partial m}[y_i - (mx_i + b)]^2 =$$

$$\sum 2(y_i - (mx_i + b))(-x_i) = 0$$

análogamente

2 El que sea mínimo entraña el concepto de diferenciación (o derivación) y cómo obtener los máximos y mínimos de una función. Recuerde que con la primer derivada encontramos la monotonía o comportamiento de la función (si es creciente o decreciente), mientras que la segunda derivada nos permite encontrar: concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos (relativos) de la función.

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\sum [y_i - (mx_i + b)]^2\right] = \sum \frac{\partial}{\partial b}[y_i - (mx_i + b)]^2 =$$

$$\sum 2(y_i - (mx_i + b))(-1) = 0$$

que inmediatamente nos conduce a

$$\sum x_i (y_i - mx_i - b) = 0 \quad \text{y} \quad \sum (y_i - mx_i - b) = 0$$

que no es más que[3]

$$\sum xy = m \sum x^2 + b \sum x \quad \text{y} \quad \sum y = m \sum x + nb$$

(74)

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante (ecuaciones (74))[4] obtenemos las ecuaciones (39) y (40), que transcribimos aquí:

$$m = \frac{n\,\Sigma xy - \Sigma x\,\Sigma y}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x^2)} \tag{39}$$

$$b = \frac{\Sigma x^2\,\Sigma y - \Sigma x\,\Sigma xy}{n\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \tag{40}$$

Estas son pues, nuestras ecuaciones de recurrencia para obtener la pendiente de la recta y la ordenada al origen, respectivamente.

Por otra parte, si llamamos S_m y S_b a las desviaciones estándar de la pendiente y la ordenada al origen respectivamente, calculadas a partir de la distribución de distancias o diferencias δy respecto de la mejor línea de ajuste, denotada por S_y y dada por

$$S_y = \left|\frac{\Sigma \delta y_i}{n-2}\right|^{1/2}$$

entonces S_m y S_b resultan ser:

$$S_m = S_y \left|\frac{n}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\right|^{1/2}$$

y

$$S_b = S_y \left|\frac{\Sigma x^2}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\right|^{1/2}$$

que son las expresiones (41), (42) y (43) que anteriormente vimos.[5]

---

3 Note que por simplicidad hemos utilizado Σx, Σy, Σxy y Σx^2 en vez de: $\Sigma_{i=1}^{n} x_i$, $\Sigma_{i=1}^{n} y_i$, $\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i$ y $\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2$ respectivamente. A partir de aquí emplearemos, por comodidad, esta abreviatura en la notación.

4 Este sistema de ecuaciones se resuelve fácilmente utilizando, por ejemplo, la Regla de Cramer o, si se quiere, cualquier otro método (igualación, sustitución de variables, etc) de los que se ven al resolver sistemas de ecuaciones.

5 Vea sección 3.9.

Una manera alternativa, y sencilla, de obtener los resultados anteriores es la siguiente: asumamos como válida la definición de que la recta que mejor aproxima al conjunto de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)\dots, (x_n, y_n)$ tiene como expresión:

$$y = mx + b$$

donde hay que encontrar las constantes m y b al solucionar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \sum y = m \sum x + bn \\ \sum xy = m \sum x^2 + b \sum x \end{array}\right\} \tag{75}$$

conocidas como las *ecuaciones normales para la recta de mínimos cuadrados*.

Las ecuaciones normales, (75), pueden recordarse fácilmente si se observa que la primera ecuación se obtiene formalmente sumando ambos lados de la ecuación (45), mientras que la segunda ecuación (de (75)) es obtenida después de multiplicar (45) por x, y sumando después. Lógicamente esta no es una derivación de las ecuaciones normales sino sólo un medio para recordarlas.

Así pues, resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (75), obtenemos los valores de m y b, dados por las expresiones (39) y (40), y vistos líneas arriba.

5.4 Parábola de Mínimos Cuadrados

Las ideas vertidas en la sección anterior se amplían fácilmente. Como ejemplo, la parábola de mínimos cuadrados que ajusta un conjunto de puntos muestrales está dada por la ecuación (70) que, por conveniencia y para simplificar los cálculos, reescribiremos en forma de un polinomio creciente (ordenado del término independiente al término elevado a la potencia n-ésima), es decir:

$$y = a + bx + cx^2 \tag{76}$$

donde a, b y c son constantes que hay que determinar; mediante un procedimiento equivalente al empleado para obtener la recta por mínimos cuadrados (MMC), obtenemos las ecuaciones normales:

$$\left.\begin{array}{r} \sum y = na + b \sum x + c \sum x^2 \\ \sum xy = a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 \\ \sum x^2 y = a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 \end{array}\right\} \tag{77}$$

Estas ecuaciones, al igual que en el apartado anterior, se obtienen formalmente sumando ambos lados de (76) después de multiplicar sucesivamente por 1, x y x^2, respectivamente.

Para encontrar la ecuación de una parábola mediante este método, bastará encontrar los valores de a, b y c resolviendo el sistema de ecuaciones (77) y sustituyendo tales valores en la expresión (76). Así, aplicando este método simplificador, encontramos fácilmente la ecuación empírica de una parábola. Ilustremos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16. Deseamos obtener la ecuación de la curva para un experimento dado, en el que se obtienen los desplazamientos de una partícula en función del tiempo. Los datos aparecen en la Tabla IX.

Tabla IX. Se muestran los desplazamientos de una partícula conforme transcurre el tiempo.

t (s)	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	6.0	7.0	9.0	10.0
y (cm)	3.0	4.5	5.5	6.8	7.7	7.0	6.5	4.4	3.1

Para aplicar las ecuaciones normales (73), calculemos las sumas (o sumatorias) de los términos que aparecen involucrados en tales expresiones. Así, si realizamos los cómputos apoyándonos en una tabla (como se ilustra en la Tabla X, donde, adecuando las variables al experimento –un tiro parabólico– hicimos que $t \equiv x$, y, en vez de x usaremos y) buscando con ello simplificar el trabajo y no perdernos en las operaciones aritméticas, tendremos (omitiendo el manejo de las unidades):

Tabla X. Cálculos para encontrar la ecuación empírica asociada a los datos de la Tabla IX.

t	y	t^2	t^3	t^4	$t\,y$	t^2y
0.5	3.0	0.25	0.13	0.06	1.50	0.75
1.0	4.5	1.00	1.00	1.00	4.50	4.50
2.0	5.5	4.00	8.00	16.00	11.00	22.00
3.0	6.8	9.00	27.00	81.00	20.40	61.20
5.0	7.7	25.00	125.00	625.00	38.50	192.50
6.0	7.0	36.00	216.00	1296.00	42.00	252.00
7.0	6.5	49.00	343.00	2401.00	45.50	318.50
9.0	4.4	81.00	729.00	6561.00	39.60	356.40
10.0	3.1	100.00	1000.00	10 000.00	31.00	310.00
$\Sigma t =$ 43.5	$\Sigma y =$ 48.5	$\Sigma t^2 =$ 305.25	$\Sigma t^3 =$ 2449.13	$\Sigma t^4 =$ 20981.06	$\Sigma ty =$ 234.00	$\Sigma t^2 y =$ 1517.85

Puesto que $n = 8$, las ecuaciones normales (dadas por la ecuación 77) se convierten en:

$$9a + 43.50b + 305.25c = 48.50$$

$$43.50a + 305.25b + 2449.13c = 234.00$$

$$305.25a + 2449.13b + 20981.06c = 1517.85$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (utilizando el paquete Matlab 5.3) encontramos que los valores de las constantes es, respectivamente:[6]

$$a = 2.4433,\ b = 1.9418 \text{ y } c = -0.1899$$

Por lo tanto, al sustituir estos valores en la expresión (76), obtenemos que la ecuación empírica del movimiento está dada por:

$$x = 2.4433 + 1.9418t - 0.1899t^2 \tag{78}$$

Claramente, y de lo aducido, esta expresión (ecuación (78)) no puede obtenerse empleando logaritmos (como cambio de variable) asociados a las técnicas de graficación. Por eso recurrimos al método analítico. Ahora bien, para verificar que la ecuación encontrada es correcta acudamos a las técnicas computacionales, usando, nuevamente, Microsoft Excel. Para ello, reescribamos en la manera convencional (forma vertical) la Tabla IX para graficar los datos, quedándonos como se muestra en la Figura 28.

t(s)	y(cm)
0.5	3
1	4.5
2	5.5
3	6.8
5	7.7
6	7
7	6.5
9	4.4
10	3.1

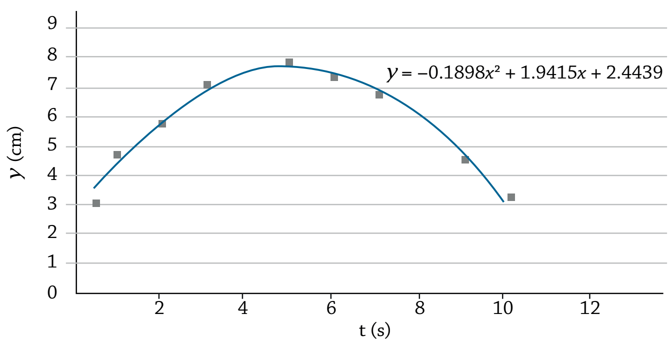


Figura 28. Graficación de los datos de la Tabla IX. Observe que la ecuación que aparece en la gráfica es la expresión (78), sólo que aquélla utiliza redondeo de las cifras.

Claramente observamos que la ecuación que proporciona Excel es igual que la ecuación (78), ¡y claro! ¡Esto era lo que esperábamos! Así que podemos sentirnos con plena confianza de que las ecuaciones asociadas a las gráficas (ecuaciones empíricas) pueden obtenerse bien sea utilizando técnicas computacionales –que cada vez son más utilizadas por su rapidez y eficiencia– o hacer el trabajo en forma rudimentaria y artesanal. Dicho de otra manera: una computadora agiliza la obtención de las cosas, pero carecer de ella no debe ser óbice o pretexto para llevar a cabo el trabajo, pues éste lo podemos realizar arrastrando el lápiz, con plena certeza que los resultados que obtengamos serán los mismos –excepto quizá por las cifras significativas– que los obtenidos empleando recursos tecnológicos más avanzados.

6 Vea el Apéndice A.

La manera en que encontramos la regresión cuadrática da pie para generalizar el método a una regresión múltiple que incluya más variables; así, si tenemos que la variable dependiente, digámosle z, es función de las variables x y y, independientes entre sí (es decir: $z = f(x, y)$), y si la relación es lineal y tiene la forma[7]

$$z = a + bx + cy \tag{79}$$

(denominada *regresión* de z sobre x y y, o más brevemente, *plano de regresión*), entonces, al aplicar el MMC a (79) se obtienen las ecuaciones normales:

$$\left.\begin{aligned} \sum z &= na + b\sum x + c\sum y \\ \sum xz &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xy \\ \sum yz &= a\sum y + b\sum xy + c\sum y^2 \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Y el trabajo se reduce a solucionar el sistema de ecuaciones (80). Esta forma de extender la regresión a funciones más complejas es fácil de recordar y de llevar a la práctica; por ejemplo, para llegar a (80) a partir de la expresión (79), inferimos que debemos multiplicar por 1, x y y, respectivamente, y sumar (es decir, considerar la sumatoria). Para el caso de ecuaciones aún más complicadas, como aquellas que representan superficies tridimensionales (esferas, elipsoides, paraboloides, sillas de montar, etc.), se procede de la misma manera.

En suma, ha quedado de manifiesto que el método analítico es el método más eficaz dentro del ámbito experimental, a pesar de que puede no ser tan llamativo como el método gráfico. No obstante, su elección para trabajar con él es potestad única y exclusiva del experimentador y nadie podrá reprocharle nada. Y eso, también es parte del quehacer científico.

7 Note que es la ecuación de un plano. Por dicho motivo esta regresión se denomina *plano de regresión*.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

Alonso, M. & Finn, E. J.; *Física, Volumen I: Mecánica*; Addison-Wesley Iberoamericana; USA. 1986.
Baird, D. C.; *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*; Prentice - Hall Hispanoamericana, S. A. México. 1991.
Canales Ramos, J.; *Manual de Experimentación*; Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, U. N. A. M.; México. 1985.
Draper, N. R & Smith, H.; *Applied Regression Analysis, 3ª ed*; John Wiley & Sons; New York. 1998.
Herrera Corral Gerardo, *El Gran Colisionador de Hadrones. Historias del Laboratorio más grande del Mundo*; Universidad Autónoma de Sinaloa y Ediciones Proceso; México. 2013
Kreyszig, E.(1970); *Introducción a la Estadística Matemática. Principios y Métodos*; Ed. Limusa, S. A; México. 1981
Lea, S. M. & Burke, J. R.; *Física. La naturaleza de las cosas. Vol I*; International Thomson Editores, S. A. de C. V.; México. 1999.
Leithold, L.; *El cálculo con Geometría Analítica, 2ª Ed.*; Editorial Harla. S. A.; México. 1973.
Marsden, J. E., Tromba, A. J.; *Cálculo Vectorial*; Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.; México. 1987.
Meiners, H. F., Eppenstein, W. & Moore, K. H.; *Experimentos de Física*; Ed. Limusa-Wiley; México. 1980.
Mendenhall, W., Wackerly, D. D. & Scheaffer, R. L.; *Estadística matemática con aplicaciones;* Grupo Editorial Iberoamérica, S. A.; México. s/a.
Resnick, R., Halliday, D. & Krane, K. S.; *Física, Volumen I. 4ª Edición*; CECSA.; México. 1996.
Spiegel, M. R.; *Teoría y problemas de Probabilidad y Estadística. Series de Compendio Schaum*; McGraw – Hill; México. 1976.
Swokowski, E. W.; *Cálculo con Geometría Analítica;* Editorial Iberoamérica; México. 1982.
Taylor, H. E. & Wade, T. L.; *Geometría Analítica Bidimensional. Subconjuntos del Plano*; Ed. Limusa S. A; México. 1977.
Wooton, W., Beckenbach, E. F. & Fleming, F. J.; *Geometría Analítica Moderna, 2ª Edición en Español*; Publicaciones Cultural, S. A; México. 1978.

Sitios web

https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_uniforme_continua
https://es.wikipedia.org/wiki/Nomograma
http://www.bvsde.paho.org/tutorial1/e/monimedi/index.html
Paquetería de cómputo: Microsoft Excel, Matlab 5.3, Derive 5.0

Apéndice A. Solución del sistema de ecuaciones

$$9a + 43.50b + 305.25c = 48.50$$

$$43.50a + 305.25b + 2449.13c = 234.00$$

$$305.25a + 2449.13b + 20981.06c = 1517.85$$

que aparece en el Ejemplo 16 empleando el paquete de cómputo Matlab 5.3. Este sistema se resolverá por teoría de matrices, pues sabemos que si A es una matriz cuadrada(n x n) y X es una matriz de n x p, entonces, del sistema $AX = B$ resulta que B es una matriz de n x p. Ahora, si A es no singular, es inversible, por lo que la matriz solución está dada por $X = A^{-1} B$. Así pues, tenemos que:

i. Se introducen las matrices de coeficientes y la del vector solución:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 43.5 & 305.25 \\ 43.5 & 305.25 & 2449.13 \\ 305.25 & 2449.13 & 20981.06 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 48.5 \\ 234 \\ 1517.85 \end{bmatrix},$$

$$\text{dado que } X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Así, en Matlab se introduce:

A = [9 43.5 305.25;43.5 305.25 2449.13; 305.25 2449.13 20981.06]

Lo que el paquete regresa como:

A =

1.0e+004 *

0.0009 0.0044 0.0305
0.0044 0.0305 0.2449
0.0305 0.2449 2.0981

ii. Se introduce B

» B = [48.5 234 1517.85]

B =

1.0e + 003 *

0.0485 0.2340 1.5178

iii. Se obtiene la transpuesta de B (para que el producto de matrices sea válido). Esta matriz se llamó C.

» $C = B'$

$C =$

1.0e + 003 *

0.0485
0.2340
1.5178

(Note que C en realidad es el vector solución del sistema de ecuaciones dado, al que antes de introducir al paquete de cómputo se le llamó B).

iv. Se obtiene la inversa de A (a la que se llamó D)

» D = inv (A)

D =

0.7344	−0.2984	0.0242
−0.2984	0.1729	−0.0158
0.0242	−0.0158	0.0015

v. Se obtiene el producto de $E = D * C$ para obtener el valor de la matriz X

» $E = D * C$

$E =$

2.4433
1.9418
−0.1899

vi. Se verifica que D es la inversa, pues $F = A * D$ debe ser la matriz identidad.

» $F = A * D$

$F =$

1.0000	0	0
0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0	1.0000

vii. Y aquí concluye la obtención de los valores de las constantes a, b, y c resultando (de 5) que:

$$a = 2.4433,\ b = 1.9418 \text{ y } c = -0.1899$$

Apéndice B. Relaciones de uso frecuente en la propagación de errores

Error	Expresión
Error de escala	$\Delta E = \pm \frac{1}{2} P$, ($P$ = Precisión o mínima lectura posible)
Desviación Estándar	$\sigma = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \right\|^{1/2} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{n} - (\bar{x})^2 \right\|^{1/2}$
Desviación Estándar de la muestra	$S = \left\| \sum_{i} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right\|^{1/2} = \left\| \sum_{i} \frac{{x_i}^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} (\bar{x})^2 \right\|^{1/2}$
Desviación Estándar de una distribución rectangular	$\sigma_r \cong \pm 0.3\ \mathrm{P}$
Incertidumbre relativa porcentual o error porcentual	$\varepsilon_{\%} = \left(\frac{\Delta x}{\|x\|} \right) \times 100$
Sean x y y dos valores medidos con sus respectivos errores: δx y δy; los errores asociados son:	
Error de una suma S	$S \pm \delta S = (x + y) \pm (\delta x + \delta y)$
Error de una resta R	$R \pm \delta R = (x - y) \pm (\delta x + \delta y)$
Error de un Producto P	$P \pm \delta P = (x \cdot y) \pm (x \cdot \delta y + y \cdot \delta x)$
Error de una división D	$D \pm \delta D = \frac{x \pm \delta x}{y \pm \delta y} = \frac{x}{y} \pm \left(\frac{\delta x}{y} + \frac{x \cdot \delta y}{y^2} \right), \quad y \neq 0$
Error de una función logarítmica $z = ln\ x$	$z \pm \delta z = \ln x \pm \frac{\delta x}{x}$
Error de una función exponencial $z = e^x$	$z \pm \delta z = e^x \pm e^x \delta x$
Error de una función $z = x^n y^m, n$ y m enteros	$z \pm \delta z = x^n y^m \left[1 \pm (n \frac{\delta x}{x} + m \frac{\delta y}{y}) \right]$

Error	Expresión
Rectas adaptadas por Mínimos Cuadrados (MMC)	
Pendiente de la recta	$m = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$
Ordenada al origen	$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$
Error de la Pendiente	$\delta_m = S_y \left\lvert \frac{n}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \right\rvert^{1/2}$
Error de la ordenada al origen	$\delta_b = S_y \left\lvert \frac{\sum x^2}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \right\rvert^{1/2}$

donde: $S_y = \left\lvert \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta y_i}{n-2} \right\rvert^{1/2} S_y = \left\lvert \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta y_i}{n-2} \right\rvert^{1/2}$ y $\delta Y_i = Y_i - (mX_i + b)$,

o bien, δy_i = error de escala (en caso de permanecer constante).

Breve introducción a la teoría de errores y la graficación

Primera edición 2017

El cuidado de la edición estuvo a cargo
del Departamento Editorial de la Dirección
General de Difusión y Vinculación
de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.