

Christoph Schiller

# MOTION MOUNTAIN

## La Montaña del Movimiento

LA AVENTURA DE LA FÍSICA - VOLUMEN IV

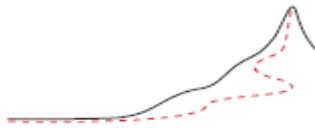
**EL CUANTO DEL CAMBIO**



Christoph Schiller  
Traducción de Jerónimo Hurtado Pérez

# Motion Mountain

## La Montaña del Movimiento



### La Aventura de la Física Volumen IV

#### El Cuanto del Cambio

Edicion 25.40, disponible libre como pdf en  
[www.motionmountain.net](http://www.motionmountain.net)

Editio vicesima quinta.

Proprietas scriptoris © Chrestophori Schiller  
secundo anno Olympiadis trigesimae.  
Omnia proprietatis iura reservantur et vindicantur.  
Imitatio prohibita sine auctoris permissione.  
Non licet pecuniam expetere pro aliqua, quae  
partem horum verborum continet; liber  
pro omnibus semper gratuitus erat et manet.  
Twenty-fifth edition.

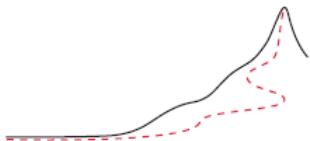
Copyright © 2012 by Christoph Schiller,  
the second year of the 30th Olympiad.  
This pdf file is licensed under the Creative Commons  
Attribution-Noncommercial-No DerivativeWorks 3.0 Germany  
Licence, whose full text can be found on the website  
[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/),  
with the additional restriction that reproduction, distribution and use,  
in whole or in part, in *any* product or service, be it  
commercial or not, is not allowed without the written consent of  
the copyright owner. The pdf file was and remains free for everybody  
to read, store and print for personal use, and to distribute  
electronically, but only in unmodified form and at no charge.

To Britta, Esther and Justus Aaron

τῷ ἐμοὶ δαίμονι

Fortalecer a las personas, aclarar las cosas

Christoph Schiller



# Mountain Motion

## La Montaña del Movimiento

### La aventura de la Física

## PREFACIO

Primum movere, deinde docere.\*<sup>\*\*</sup> Antigüedad  
*Primero mover, luego enseñar*

**E**ste libro está escrito para cualquiera que tenga curiosidad sobre la naturaleza y el movimiento. La curiosidad acerca de cómo se mueven las personas, los animales, las cosas, las imágenes y el espacio vacío nos conduce a muchas aventuras.

Este volumen presenta lo mejor de ellas en el dominio del movimiento cotidiano.

La observación cuidadosa del movimiento de todos los días nos permite deducir seis afirmaciones esenciales:

El movimiento cotidiano es continuo, conservativo, relativo, reversible, invariante por reflexión y perezoso. Sí, la naturaleza es verdaderamente perezosa: en cada uno de sus movimientos, minimiza el cambio. Este texto explora cómo se deducen estos seis resultados y cómo encajan con todas las observaciones que parecen contradecirlas.

En la estructura de la física moderna, cuya estructura se muestra en la [Figura 1](#), los resultados sobre el movimiento cotidiano forman la mayor parte de los puntos de partida en el fondo. El presente volumen -el primero de una colección de seis volúmenes sobre una visión general de la física- es el resultado de un triple objetivo perseguido desde 1990: presentar el movimiento de una manera que sea sencilla, actualizada, viva y cautivadora.

Con el fin de ser *sencillo*, el texto se centra en conceptos, mientras mantiene el uso de las matemáticas en el mínimo necesario. La comprensión de los conceptos de la física tiene prioridad sobre el uso de fórmulas en los cálculos. Todo el texto se encuentra dentro del alcance de un estudiante del primer nivel universitario.

Con el fin de estar *actualizado*, el texto se enriquece con muchas joyas - tanto teóricas como empíricas - que se encuentran dispersas a lo largo de la literatura científica.

Con el fin de ser *vivo y cautivador*, es decir para *motivar*, el texto intenta sorprender al lector tanto como sea posible. La lectura de un libro de física general debe ser como ir a un espectáculo de magia. Miramos, nos sorprende, no creemos a nuestros ojos, pensamos, y finalmente entendemos el truco.

Cuando nos fijamos en la naturaleza, a menudo tenemos la misma sensación. De hecho, cada página presenta por lo menos una sorpresa o una provocación que ponga a prueba la sagacidad del lector. Se proponen numerosos desafíos interesantes.

El lema del texto, *die Menschen starken, die Sachen klaren*, una frase famosa de Hartmut von Hentig en pedagogía, se traduce como: "Para fortalecer los hombres, aclarar las cosas". Aclarar las cosas -y adherirse sólo a la verdad- requiere coraje, ya que el cambio de los hábitos de pensamiento produce miedo, a menudo oculto tras la ira. Pero mediante la superación de los miedos, nos volvemos más fuertes. Y experimentamos entonces emociones intensas y hermosas. Todas las grandes aventuras de la vida permiten esto, y la exploración de movimiento es una de ellas. Que lo disfruten!

Munich, 18 Mayo 2013.

\*En las lenguas modernas, la cualidad de mover (el corazón) se llama la motivación; ambas palabras se derivan del mismo origen latino.

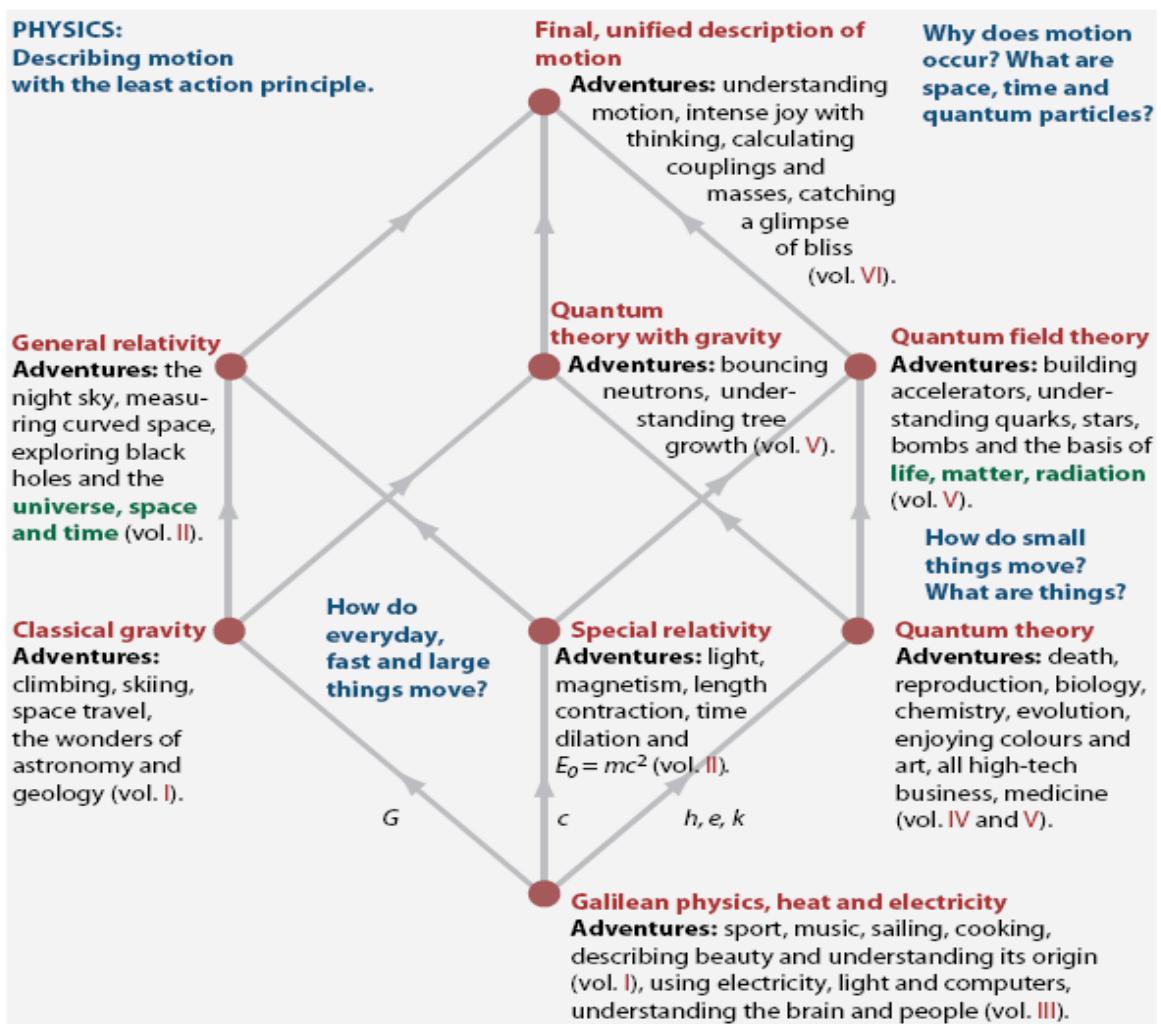


FIGURA 1 Un mapa completo de la física: las conexiones están definidas por la velocidad de la luz  $c$ , la constante gravitacional  $G$ , la constante  $h$  de Planck, la constante  $k$  de Boltzmann y la carga elemental  $e$ .

#### CONSEJOS PARA LOS ALUMNOS

El aprendizaje debe ser rápido y divertido. El método de aprendizaje más ineficiente y tedioso es utilizar un marcador para subrayar el texto: es una pérdida de tiempo, proporciona un falso confort y vuelve el texto ilegible. Nadie aprende de manera eficiente subrayando un texto ni lo está disfrutando.

En mi experiencia como estudiante y profesor, encontré un método de aprendizaje que nunca fallaba para transformar alumnos sin éxito en los más exitosos: si usted lee un libro para estudiar, resuma cada sección a medida que lee, con *sus propias palabras e imágenes, en voz alta*. Si usted es incapaz de hacerlo, lea la sección de nuevo. Repita esto hasta que pueda resumir con claridad lo que lee con sus propias palabras e imágenes, en voz alta. Usted puede hacer esto solo o con amigos, en una habitación o mientras camina. Si hace esto con todo lo que lee, usted reducirá el tiempo de aprendizaje y de lectura de manera significativa, disfrutará aprendiendo de buenos textos mucho más y odiará los malos textos mucho menos. Los expertos del método pueden utilizarlo incluso mientras escuchan una conferencia, en voz baja, evitando así tener que tomar siempre notas.

## CONSEJOS PARA PROFESORES

A un profesor le gustan su alumnos y le gusta guiarlos en la exploración el campo de conocimiento que han elegido. Su entusiasmo por el trabajo es la clave para la satisfacción en el trabajo. Si usted es un docente, antes del inicio de una lección, imagine, sienta y dígase a sí mismo cómo es su forma de disfrutar el tema de la lección; a continuación, imagine, sienta y dígase a sí mismo cómo va a llevar cada uno de sus alumnos a deleitarse con ese tema tanto como lo hace usted. Haga este ejercicio de forma consciente, cada vez. Va a minimizar problemas en su clase y maximizar su éxito en la enseñanza.

Este libro no está escrito con los exámenes en mente; está escrito para que los profesores y estudiantes *entiendan y disfruten* de la física, la ciencia del movimiento.

## UTILIZACIÓN DE ESTE LIBRO

El texto en verde, como se encuentra en muchas notas marginales, marca un enlace que se puede hacer clic en un lector de pdf (en la versión inglesa). Dichos enlaces verdes son o bien las referencias bibliográficas, notas al pie, referencias cruzadas a otras páginas, las soluciones de desafío, o punteros a sitios web.

Soluciones y consejos para los *desafíos* se presentan en el apéndice. Los Desafíos se clasifican como nivel de investigación (r), difícil (d), nivel de estudiante estándar (s) y fácil (e). Los Desafíos para los que no hay solución todavía se han incluido, sin embargo, en el libro, están marcados (ny).

Los enlaces en internet tienden a desaparecer con el tiempo. la mayoría de los enlaces se puede recuperar a través [www.archive.org](http://www.archive.org), que tiene una copia de las viejas páginas de Internet.

## EVALUACIÓN Y APOYO

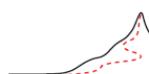
Este texto es y seguirá siendo para descargarlo gratis desde Internet. El autor estaría encantado de recibir un correo electrónico suyo en [fb@motionmountain.net](mailto:fb@motionmountain.net), especialmente en los siguientes temas:

- ¿Qué no estaba claro y debe ser mejorado? [Desafío 1 s](#)
- ¿Qué historia, tema, enigma, imagen o película faltó?
- ¿Qué se debe corregir?

Con el fin de simplificar las anotaciones, el archivo pdf permite añadir notas adhesivas amarillas en Adobe Reader. La ayuda sobre los puntos específicos que figuran en el [www.motionmountain.net / help.html](http://www.motionmountain.net/help.html) la página web sería especialmente bienvenida. Todos los comentarios se utilizarán para mejorar la próxima edición. En nombre de todos los lectores, gracias de antemano por su entrada. Para una contribución particularmente útil se le mencionará - si quiere - en los agradecimientos, recibirá una recompensa, o ambas cosas.

Su donación para beneficencia a la organización sin fines de lucro exenta de impuestos que produce, traduce y publica esta serie de libros es ¡bienvenida! Para obtener más información, consulte la página web [www.motionmountain.net/donation.html](http://www.motionmountain.net/donation.html). Si lo desea, su nombre será incluido en la lista de patrocinadores. Gracias de antemano por su ayuda, en nombre de los lectores de todo el mundo.

La versión pdf de este libro, con películas incorporadas, está disponible gratuitamente en [www.motionmountain.net](http://www.motionmountain.net). La edición impresa de este libro, impreso bajo demanda y entregado por correo a cualquier dirección de su elección, se puede pedir en [www.lulu.com / spotlight / motionmountain](http://www.lulu.com / spotlight / motionmountain). Pero, sobre todo, disfrute de la lectura!





## El cuanto de Cambio

En nuestra búsqueda para entender cómo se mueven las cosas,  
descubrimos que hay un valor mínimo para el cambio en la naturaleza,  
lo que implica que el movimiento es borroso,  
que las cajas nunca son herméticas,  
que la materia está compuesta por unidades elementales,  
y que la luz y las interacciones son flujos de partículas .  
El valor de un cambio mínimo explica por qué existe la antimateria,  
por qué las partículas son diferentes de los guantes,  
por qué no existen máquinas copiadoras,  
por qué las probabilidades son razonables  
y cómo se forman todos los colores en la naturaleza.

# ÍNDICE

<b>Capítulo 1</b>	
<b>EL CUANTO DE ACCIÓN – TEORÍA CUÁNTICA PARA POETAS</b>	<b>9</b>
Los efectos del cuanto de acción sobre el reposo♦ Las consecuencias del cuanto de acción para los objetos♦ ¿Por qué ‘cuanto’?♦ El efecto del cuanto de acción sobre el movimiento♦ Las sorpresas del cuanto de acción♦ Transformación, vida y Demócrito♦ Aleatoriedad - una consecuencia del cuanto de acción♦ Ondas – una consecuencia del cuanto de acción♦ Partículas – una consecuencia del cuanto de acción♦ La información cuántica♦ Curiosidades y divertidos desafíos sobre el cuanto de acción♦ Los peligros de comprar una lata de judías♦ Un resumen: física cuántica, la ley y el adoctrinamiento	
<b>Capítulo 2</b>	
<b>LUZ – LAS EXTRAÑAS CONSECUENCIAS DEL CUANTO DE ACCIÓN</b>	<b>27</b>
¿Cómo se comportan las luces tenues?♦ Fotones♦ ¿Qué es la luz?♦ El tamaño de los fotones♦ ¿Los fotones son numerables? - Luz comprimida♦ Las posiciones de los fotones♦ ¿Son necesarios los fotones?♦ Interferencia: ¿cómo puede una onda estar constituida de partículas?♦ Interferencia de un solo fotón♦ Reflexión y difracción deducidas de las flechas de los fotones♦ Refracción y reflexión parcial de flechas de fotones♦ ¿Puede la luz moverse más rápido que la luz? - Fotones reales y virtuales♦ Indeterminación de campos eléctricos♦ Curiosidades y divertidos desafíos sobre fotones♦ Un resumen sobre la luz: partícula y onda	
<b>Capítulo 3</b>	
<b>MOVIMIENTO DE MATERIA – MÁS ALLÁ DE LA FÍSICA CLÁSICA</b>	<b>49</b>
Vasos de vino, lápices y átomos – no reposo♦ Ninguna precisión infinita♦ Gas frío♦ Flujos y cuantización de la materia♦ Flujos de fluidos y cuantones♦ Golpeando mesas y conductividad cuantizada♦ Cuantones de materia y su movimiento – ondas de materia♦ ¿Por qué los átomos no son planos? ¿Por qué existen las formas?♦ Rotación, cuantización del momento angular, y la falta de polos norte♦ Rotación de quantones♦ La Plata, Stern y Gerlach – polarización de cuantones♦ Curiosidades y divertidos desafíos acerca de la materia cuántica♦ Primer resumen sobre el movimiento de partículas cuánticas	
<b>Capítulo 4</b>	
<b>LA DESCRIPCIÓN CUÁNTICA DE LA MATERIA Y SU MOVIMIENTO</b>	<b>60</b>
Estados y medidas♦ Visualizando la función de onda: flechas girantes (rotating arrows) y nubes de probabilidad♦ La evolución del estado– la ecuación de Schrodinger♦ Auto-interferencia de cuantones♦ La velocidad de los cuantones♦ Dispersión de cuantones♦ Efecto Túnel y límites en la memoria - amortiguamiento de los cuantos♦ La fase cuántica♦ ¿Pueden interferir dos fotones?♦ ¿Pueden interferir dos haces de electrones? ¿Hay haces de electrones coherentes?♦ El principio de mínima acción en la física cuántica♦ El movimiento de los cuantones con espín♦ Ecuaciones de onda relativistas♦ Cuantones compuestos frente a cuantones elementales♦ Curiosidades y divertidos desafíos acerca del movimiento cuántico de la materia♦ Un resumen sobre el movimiento de cuantones	
<b>Capítulo 5</b>	
<b>PERMUTACIÓN DE PARTÍCULAS – ¿SON LAS PARTÍCULAS COMO GUANTES?</b>	<b>78</b>
Distinguiendo objetos macroscópicos♦ Distinguiendo átomos♦ ¿Por qué aparece la indistinguibilidad en la naturaleza?♦ ¿Se pueden contar las partículas cuánticas?♦ ¿Qué es la simetría de permutación?♦ Indistinguibilidad y simetría de la función de onda♦ El comportamiento de los fotones.♦ Agrupamiento y antiagrupamiento♦ La dependencia energética de la simetría de permutación♦ Indistinguibilidad en la teoría cuántica de campos♦ ¿Con qué precisión se verifica la simetría de permutación?♦ Copias, clones y guantes♦ Resumen	
<b>Capítulo 6</b>	
<b>ROTACIONES Y ESTADÍSTICA – VISUALIZANDO EL ESPÍN</b>	<b>88</b>
Partículas cuánticas y simetría♦ Tipos de partículas cuánticas♦ espín 1/2 y objetos ligados♦ La extensión del truco del cinturón♦ Ángeles, el principio de exclusión de Pauli y la dureza de la materia♦ ¿Es el espín una rotación alrededor de un eje?♦ La rotación requiere antipartículas♦ ¿Por qué es imposible la esgrima con rayos láser?♦ Espín, estadísticas y composición♦ Las dimensiones y la densidad de la materia♦ Un resumen sobre el espín y la indistinguibilidad♦ Límites y preguntas abiertas de la estadística cuántica	

## Capítulo 7

### SUPERPOSICIONES Y PROBABILIDADES – TEORÍA CUÁNTICA SIN IDEOLOGÍA

101

♦ ¿Por qué las personas están vivas o muertas?♦ Superposiciones macroscópicas, coherencia e incoherencia♦ La decoherencia se debe a los baños♦ Cómo los baños conducen a la decoherencia - dispersión♦ Cómo los baños conducen a la decoherencia - relajación♦ Resumen sobre decoherencia, vida y muerte♦ ¿Qué es un sistema? ¿Qué es un objeto?♦ ¿Es la teoría cuántica no local? Un poco sobre la paradoja Einstein-Podolsky-Rosen♦ Curiosidades y divertidos desafíos acerca de superposiciones♦ ¿Por qué aparecen en las mediciones las probabilidades y colapso de la función de onda?♦ ¿Por qué se necesita  $\hbar$  para las probabilidades?♦ Variables ocultas♦ Resumen sobre probabilidades y determinismo♦ ¿Cuál es la diferencia entre espacio y tiempo?♦ ¿Somos buenos observadores?♦ ¿Qué relaciona la teoría de la información, la criptología y la teoría cuántica?♦ ¿Es el universo una computadora?♦ ¿Tiene el universo una función de onda? ¿Y condiciones iniciales?

## Capítulo 8

### COLORES Y OTRAS INTERACCIONES ENTRE LUZ Y MATERIA

121

Las causas del color♦ Usando el arco iris para determinar de qué están hechas las estrellas ♦ ¿Qué es lo que determina los colores de los átomos?♦ El tamaño de los átomos♦ La forma de los átomos♦ Hidrógeno relativista♦ Ecuaciones de onda relativistas– otra vez♦ Obteniendo una primera sensación para la ecuación de Dirac♦ Antimateria♦ Partículas virtuales♦ Curiosidades y divertidos desafíos acerca del color♦ Propiedades de los Materiales♦ La fuerza del electromagnetismo♦ Un resumen sobre colores y materiales

## Capítulo 9

### FÍSICA CUÁNTICA EN UNA CÁSCARA DE NUEZ

142

Resultados físicos de la teoría cuántica♦ Resultados sobre el movimiento de partículas cuánticas♦ Logros en exactitud y precisión♦ ¿La teoría cuántica es magia?♦ La teoría cuántica es exacta, pero puede hacer más

Apéndice A. Unidades, medidas y constantes	147
Apéndice B. Números y espacios vectoriales	166
Sugerencias a los desafío y soluciones	178
Bibliografía	184
Créditos	194

## Capítulo 1

# EL CUANTO DE ACCIÓN – TEORÍA CUÁNTICA PARA POETAS

Natura [in operationibus suis] non facit saltus. Siglo XV  
"La naturaleza [en su funcionamiento] no da saltos".<sup>ref.1</sup>

L

a escalada a la Montaña del Movimiento hasta este punto, ha completado tres patas. Nos

encontramos primero con la mecánica de Galileo (la descripción del movimiento para los niños), y luego continuamos con la relatividad de Einstein (la descripción del movimiento para los entusiastas de la ciencia-ficción), y, finalmente, exploramos la electrodinámica de Maxwell (la descripción del movimiento para las personas de negocios). Estas tres descripciones clásicas del movimiento son impresionantes, hermosas y útiles. Sin embargo, tienen un pequeño problema: son erróneas. La razón es simple: ninguna de ellas describe la vida.

Cada vez que observamos una flor o una mariposa, tales como las de la Figura 2, disfrutamos con los colores brillantes, el movimiento, el olor salvaje, la forma suave y delicada o los finos detalles de sus simetrías. Sin embargo, sabemos que:

- ▷ La física clásica no puede explicar ninguna escala característica de longitud o tiempo observada en la naturaleza.

Ahora bien, las flores y los animales – e incluso también muchos de los sistemas no vivos - tienen dimensiones características, rangos de tamaño y proporciones; y tienen ritmos característicos. En realidad, la física clásica no puede explicar su origen, porque

- ▷ las constantes clásicas de la naturaleza - la constante gravitacional  $G$ , la constante del gas ideal  $R$ , la velocidad de la luz  $c$ , la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  y la permeabilidad del vacío  $\mu_0$ - no permiten la definición de escalas de tiempo o longitud.

De hecho, las constantes clásicas no nos permite medir valores de velocidad o fuerza, aunque estas medidas sean fracciones de  $c$  y  $c^4 / G$ ; porque a fin de medir las fracciones, primero tenemos que definirlas, y la definición de las fracciones también requiere escalas de longitud o tiempo, que la física clásica no permite.

Sin medidas, incluso ¡no hay emociones! En efecto, nuestras emociones se desencadenan por medio de nuestros sentidos. Y todas las impresiones que nuestros sentidos nos proporcionan son -entre otras cosas- medidas. Dado que la física clásica no proporciona escalas de medición, sabemos que:

- ▷ la física clásica no nos permite comprender las emociones.
- La razón de todas estas limitaciones es en el siguiente nexo:
- ▷ La física clásica sola no puede ser usada para construir cualquier tipo de dispositivo de medida.

Todos los sentidos contienen dispositivos de medida. Y cada dispositivo de medida requiere una escala interna, o, más generalmente, una unidad de medida interna. Dado que la física clásica no proporciona ninguna escala , la física clásica no explica cómo funcionan los dispositivos de medición. Y en particular la física clásica no explica cómo funcionan nuestros sentidos.

Para entender las emociones, tenemos que ir más allá de la física clásica. *Desafío 2 s* Tome cualquier ejemplo de una situación agradable,\* como un hermoso cielo de la tarde, una cascada, una caricia o un niño feliz. La física clásica no es capaz de explicarla: En primer lugar, los colores, formas y tamaños implicados siguen siendo un misterio. En segundo lugar, todas las formas, tamaños y proporciones siguen siendo un misterio. En tercer lugar, la medición del tiempo y la duración de los procesos implicados no puede ser entendida. En cuarto lugar, todos los sentimientos y las emociones producidas por la situación continúan permaneciendo misteriosas. Para entender y explicar estos problemas, necesitamos la teoría cuántica. En efecto, vamos a descubrir que tanto la vida como cada tipo de placer son ejemplos del cuanto del movimiento. Nuestras emociones son procesos cuánticos.

---

\*\* La fotografía de la página 6 muestra una hembra de luciérnaga, *Lampyris noctiluca*, como se encuentra comúnmente en el Reino Unido (© John Tyler, [www.johntyler.co.uk/gwfacts.htm](http://www.johntyler.co.uk/gwfacts.htm)).

En los primeros días de la física, la imposibilidad de describir la vida y el placer no fue vista como un defecto, porque ni los sentidos ni las propiedades del material ni la escala se creía que estuvieran relacionados con el movimiento – y, de todos modos, el placer no se consideró un tema serio de investigación para un investigador respetable. Sin embargo, desde entonces hemos aprendido que nuestros sentidos del tacto, olfato y la vista son principalmente *detectores de movimiento*. Sin movimiento, no habría sentidos. Además, todos los detectores están hechos de materia. Durante la exploración sobre el electromagnetismo comenzamos a entender que todas las propiedades de la materia se deben a los movimientos de los componentes con carga. La densidad, la rigidez, el color y todas las demás propiedades del material como resultado del comportamiento electromagnético de los ladrillos de Lego de la materia: a saber, las moléculas, los átomos y los electrones. Por lo tanto, las propiedades de la materia son también consecuencias de movimiento. Por otra parte, hemos visto que estos diminutos componentes no se describen correctamente por la electrodinámica clásica. Incluso encontramos que la luz misma no se comporta de forma clásica. Por lo tanto la incapacidad de la física clásica para describir la materia, la luz y los sentidos es, en efecto, debido a sus limitaciones intrínsecas.

De hecho, cada fracaso de la física clásica se remonta a un solo descubrimiento fundamental, hecho en 1899 por Max Planck:<sup>\*ref.2</sup>

▷ *En la naturaleza, no se observan valores de acción menores que  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .*

Todos los intentos de observar valores más pequeños de acciones físicas han fallado \*\*\* En otras palabras, en la naturaleza - como en una buena película de cine - siempre hay algo de acción. La existencia de un valor de acción mínimo - el llamado *principio cuántico* - está en completo contraste con la física clásica. (*Desafío 3s* ¿Por qué?) A pesar de este contraste, el principio cuántico ha pasado un gran número de pruebas experimentales, muchos de los cuales vamos a encontrar en esta parte de nuestra ascensión a la montaña. Por encima de todo, el principio cuántico nunca ha fallado ni una sola prueba. La constante fundamental  $\hbar$ , que se pronuncia “h barrada”, se denomina el *cuanto de acción*, o alternativamente *constante de Planck*. Planck descubrió el principio cuántico cuando estudiaba las propiedades de la luz incandescente, es decir, de la luz que emana de los cuerpos calientes. Pero el principio cuántico también se aplica al movimiento de la materia, e incluso, como veremos más tarde al movimiento del espacio-tiempo.

El principio cuántico establece que ningún experimento puede medir una acción más pequeña que  $\hbar$ . Durante mucho tiempo, Einstein trató de idear experimentos para superar este límite. Pero fracasó en todos sus intentos: la naturaleza no lo permite, como Bohr demostró una y otra vez. Lo mismo fue verificado por otros investigadores.

Recordemos que en la física -como en el teatro- la acción se mide por el *cambio* producido en un sistema. El principio cuántico puede pues ser reformulado como

• ▷ *En la naturaleza, no pueden observarse cambios más pequeños que  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .*

Por lo tanto, una acción mínima implica que *hay un valor mínimo para el cambio en la naturaleza*. Si comparamos dos observaciones, siempre habrá un cambio entre ellas. Así, el cuanto de acción quizá sería mejor denominarlo el *cuanto del cambio*.

\* Max Planck (1858–1947), profesor de física en Berlín, fue una figura central en termostática. Descubrió y denominó la *constante de Boltzmann k* y el *cuanto de acción h*, frecuentemente llamada constante de Planck. Su introducción de la hipótesis cuántica significó el nacimiento de la teoría cuántica. También hizo que los trabajos de Einstein fueran conocidos en la comunidad física, y más tarde organizó un trabajo para él en Berlín. Recibió el premio Nobel de física en 1918. Fue una figura importante de la comunidad científica en Alemania; también fue uno de los muy pocos que tuvo el coraje de decirle a Adolf Hitler *a la cara* que era una mala idea disparar a los profesores judíos. (Obtuvo un estallido de ira como respuesta.) Famosamente modesto, con muchas tragedias en su vida personal, fue estimado por todos los que lo conocieron.

\*\* De hecho, esta historia es una ligera simplificación: la constante de Planck introducida originalmente era la constante (no reducida)  $h = 2\pi\hbar$ . El factor  $2\pi$  que conduce al principio cuántico final fue añadido un poco más tarde, por otros investigadores.

Esta poco convencional, pero didácticamente útil, aproximación a la teoría cuántica se debe a Niels Bohr.

Hoy en día, casi nunca se encuentra en la literatura, a pesar de su simplicidad.<sup>ref.3 ref.4</sup>

\*\*\*

Niels Bohr (b. 1885 Copenhagen, d. 1962 Copenhagen) fue una de las grandes figuras de la física moderna. Un pensador audaz y un hombre educado, que hizo de la Universidad de Copenhague el nuevo centro de desarrollo de la teoría cuántica, eclipsando Göttingen. Desarrolló la descripción del átomo en términos de la teoría cuántica, por el que recibió el Premio Nobel 1922 en Física. Tuvo que huir de Dinamarca en 1943 después de la invasión alemana, a causa de su origen judío, pero regresó después de la guerra, sin dejar de atraer a los mejores físicos de todo el mundo.

¿Puede existir realmente un cambio mínimo en la Naturaleza? Para aceptar la idea, necesitamos explorar tres puntos, detallados en la [Tabla 1](#). Necesitamos mostrar que no se *observan* cambios más pequeños en la naturaleza, que no *pueden* observarse cambios más pequeños, y mostrar *todas las consecuencias* del cambio mínimo, sin embargo por raro que pueda parecer, se aplican a la naturaleza. De hecho, esta exploración constituye la totalidad de la física cuántica. Por lo tanto, estos controles son todo lo que haremos en lo que resta de esta parte de nuestra aventura. Pero antes de explorar algunos de los experimentos que confirman la existencia de un cambio mínimo, se presentan directamente algunas de sus más sorprendentes consecuencias.

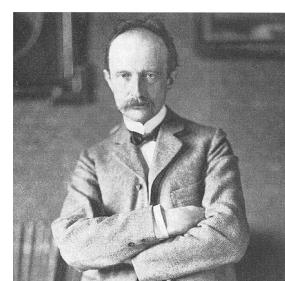


FIGURA 2 Ejemplos de máquinas cuánticas (© Linda de Volder).

FIGURA 3 Max Planck (1858–1947)



FIGURA 4 Niels Bohr (1885–1962)



**TABLA 1** Cómo convencerte a sí mismo y a los demás de que hay una acción mínima o un cambio mínimo en la naturaleza.  
Compare esta tabla con las dos tablas del volumen II, la velocidad máxima y la fuerza máxima

Aserción	Método de prueba
El valor mínimo de la acción $\hbar$ es invariante respecto del observador	Comprobar todas las observaciones
No se observan valores de cambio local o acción $<\hbar$	Comprobar todas las observaciones
Los valores de cambio o acción $<\hbar$ no son locales o no se deben al transporte de energía	Comprobar todas las observaciones
No se pueden producir valores de cambio o acción locales $<\hbar$	Comprobar todos los intentos
No se pueden imaginar valores de cambio local o acciones $<\hbar$	Resolver todas las paradojas
Un mínimo valor de cambio local o acción $\hbar$ es consistente	1.- Mostrar que todas las consecuencias, por extrañas que sean, son confirmadas por la observación 2 - deducir la teoría cuántica de ella y comprobarla

### LOS EFECTOS DEL CUANTO DE ACCIÓN SOBRE EL REPOSO

Dado que la acción es una medida de cambio, una acción mínima observable significa que dos observaciones sucesivas de un mismo sistema siempre difieren en al menos  $\hbar$ . En cada sistema, siempre hay *algo* que está ocurriendo. Como consecuencia encontramos:

- $\triangleright$  En la naturaleza *no hay nada en reposo*.

Todo se mueve, todo el tiempo, al menos un poco. *Natura facit saltus.*\* Es cierto que estos saltos son pequeños, ya que  $\hbar$  es demasiado pequeño para ser observado por cualquiera de nuestros sentidos. Sin embargo, el reposo puede ser observado sólo macroscópicamente, y sólo como una media de mucho tiempo o muchas partículas. Por ejemplo, el cuanto de acción implica que en una montaña – un arquetipo de “sistema en reposo” - todos los átomos y electrones están continuamente zumbando alrededor. En resumen,

- $\triangleright$  *hay movimiento dentro de la materia.*

Dado que hay un cuanto de acción para todos los observadores, y como no hay reposo, deducimos:

- $\triangleright$  En la naturaleza *no hay movimiento perfectamente recto o perfectamente uniforme.*

Olvide todo lo que ha aprendido hasta ahora: ¡el movimiento inercial es una aproximación! Un objeto no puede moverse en movimiento recto uniforme sino solo aproximadamente, y solo cuando se observa sobre largas distancias o durante largo tiempo. Veremos más tarde que cuanto más masivo sea el objeto, mejor es la aproximación. ([Desafío 4 s](#) ¿Puede confirmar esto?) Por lo tanto unos observadores *macroscópicos* todavía pueden hablar acerca de la simetría del espacio-tiempo; y de este modo la relatividad *especial* puede conciliarse con la teoría cuántica.

También la caída libre, o el movimiento a lo largo de una geodésica, existe sólo como un promedio a largo plazo. Por lo tanto la relatividad *general*, que se basa en la existencia de observadores en caída libre, no puede ser correcta cuando se trata de acciones del orden de  $\hbar$ . En realidad, la reconciliación del principio cuántico con la relatividad general - y por lo tanto con el espacio curvo - es un gran desafío. (La solución es simple sólo para campos cotidianos débiles). Las cuestiones en juego son tan impactantes para el pensamiento que forman un parte final separada de este ascenso de la montaña. Por eso, exploramos en primer lugar las situaciones sin gravedad.

### LAS CONSECUENCIAS DEL CUANTO DE ACCIÓN PARA LOS OBJETOS

¿Alguna vez se preguntó por qué las hojas son de color verde? Usted probablemente sabe que son de color verde, ya que absorben el azul (longitud de onda corta) y la luz roja (longitud de onda larga), mientras que permite que la luz verde (longitud de onda media) se refleje. ¿Cómo puede un sistema filtrar las longitudes

\* ‘La Naturaleza da saltos.’

de onda pequeñas y las grandes, y dejar que las medianas pasen a través? Para ello, las hojas deben *medir* de alguna manera la frecuencia. Pero hemos visto que la física clásica no permite la medición de intervalos de tiempo (o de longitud), ya que cualquier medición requiere una unidad de medida, y la física clásica no permite que se definan este tipo de unidades. Por otra parte, lleva sólo unas pocas líneas confirmar que con la ayuda del cuanto de acción  $\hbar$  (y la constante k de Boltzmann, ambas descubiertas por Planck), pueden ser definidas unidades fundamentales de *todas* las cantidades medibles, incluyendo el tiempo y por lo tanto la frecuencia. (*Desafío 5 s* ¿Puede encontrar una combinación de la velocidad de la luz c, la constante gravitacional G y el cuanto de acción  $\hbar$  que dé un tiempo? Sólo le llevará unos minutos.)

Resumiendo, las medidas son sólo posibles completamente debido a la existencia del cuanto de acción.

- ▷ Todas las medidas son *efectos cuánticos*.

Cuando Planck vio que el cuanto de acción permitía definir todas las unidades de la naturaleza, se sintió tan feliz como un niño; supo de inmediato que había hecho un descubrimiento fundamental, a pesar de que (en 1899) la teoría cuántica aún no existía. Incluso le habló de ello a su hijo Erwin de siete años de edad, mientras caminaba con él a través de los bosques alrededor de Berlín<sup>ref.5</sup>. Planck explicó a su hijo que había hecho un descubrimiento tan importante como la gravitación universal. De hecho, Planck sabía que había encontrado la clave para entender muchos de los efectos que eran entonces inexplicables.

- ▷ En la naturaleza, *todos los tiempos y todas las frecuencias se deben al cuanto de acción*.

Todos los procesos que requieren tiempo son procesos cuánticos. Si lo prefiere, ¡la *espera* es un efecto cuántico! En particular, sin el cuanto de acción, las oscilaciones y las ondas no podrían existir, luego:

- ▷ *Cada color es un efecto cuántico.*

Pero esto<sup>\*</sup> no es todo. Planck también se dio cuenta de que el cuanto de acción nos permite entender el *tamaño* de todas las cosas.

- ▷ *Cada tamaño es un efecto cuántico.*

*Desafío 7 e* ¿Puede encontrar una combinación de c, G y  $\hbar$  que proporcione una longitud? Con el cuanto de acción, finalmente fue posible determinar el tamaño máximo de las montañas, de los árboles y de los seres humanos. Planck sabía que el cuanto de acción confirma lo que Galileo ya había deducido mucho antes que él: que los tamaños se deben a la fundamental, mínima escala en la naturaleza.

El tamaño de los objetos está relacionado con el tamaño de los átomos. A su vez, el tamaño de los átomos es una consecuencia directa del cuanto de acción. *Desafío 8 s* ¿Puede derivar una aproximación para el tamaño de los átomos, a sabiendas de que está dado por el movimiento de los electrones de masa  $m_e$  y carga  $e$ , limitados por el cuanto de acción? Tal conexión, una fórmula simple, fue descubierta en 1910 por Arthur Erich Haas, 15 años antes de que se formulara la teoría cuántica.

- ▷ *Los tamaños de los átomos son efectos cuánticos.*

En ese momento, Haas fue ampliamente ridiculizado. Hoy en día, su fórmula se encuentra en todos los libros de texto, incluido éste.<sup>\*\*</sup>

Al determinar el tamaño de los átomos, el cuanto de acción tiene otra consecuencia importante:

- ▷ *Los viajes de Gulliver* son imposibles.

No hay personas diminutas ni las hay gigantes. Clásicamente, nada habla en contra de esta idea; pero el cuanto de acción la previene. *Desafío 9 s* ¿Puede aportar el argumento detallado?

Pero si el reposo no existe, ¿cómo pueden existir las *formas*? Cualquier forma de la vida cotidiana, incluyendo la de una flor, es el resultado de unas partes del cuerpo que quedan *en reposo* con respecto a otras. Ahora bien, todas las formas son el resultado de interacciones entre los constituyentes de la materia, como se muestra más claramente en las formas de las moléculas. Pero, ¿cómo puede una molécula, tal como

---

<sup>\*</sup>\* *Desafío 6 s* De hecho, es posible también definir todas las unidades de medida en términos de velocidad de la luz c, la constante gravitacional G y la carga del electrón e. ¿Por qué esto no es completamente satisfactorio?

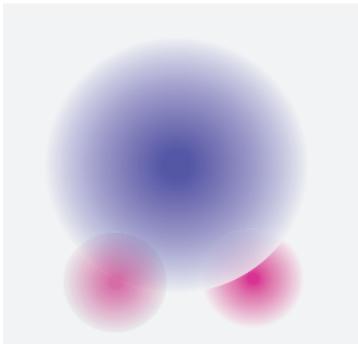
<sup>\*\*</sup>\*\* Antes del descubrimiento de  $\hbar$ , la única escala de longitud simple para el electrón fue la combinación,  $e^2/(4\pi\epsilon_0 me c^2) \approx 3 \text{ fm}$ ; esto es diez mil veces más pequeño que un átomo.

Observamos también que cualquier escala de longitud que contiene e es un efecto cuántico, y no una escala de longitud clásica, ya que e es la cuantía de la carga eléctrica.

la molécula de agua  $H_2O$ , que se muestra en la [Figura 5](#), tener una *forma*? En realidad, una molécula no tiene una forma *fija*, sino que su forma fluctúa, como sería de esperar a partir del cuanto de acción.

A pesar de las fluctuaciones, cada molécula tiene una forma *media*, debido a que diferentes ángulos y distancias corresponden a diferentes energías. Una vez más, sólo existen estos valores promedio de longitud y ángulo debido a que el cuanto de acción produce escalas de longitud fundamentales en la naturaleza. Sin el cuanto de acción, *no* habría formas en la naturaleza.

- ➤ *Todas las formas son efectos cuánticos.*



←FIGURA 5 Una impresión artística de una molécula de agua.

FIGURA 6 →Max Born (1882–1970)



Todas las formas de la vida cotidiana se deben a formas moleculares, o a sus generalizaciones.

La *masa* de un objeto es también una consecuencia del cuanto de acción, como veremos más adelante. Puesto que todas las propiedades de los materiales - tales como la densidad, el color, la rigidez o la polarizabilidad - se definen como combinaciones de longitud, tiempo y unidades de masa, encontramos:

- ➤ *Todas las propiedades materiales surgen del cuanto de acción.*

En resumen, el cuanto de acción determina el tamaño, forma, color, masa, y todas las demás propiedades de los objetos, desde las piedras a la crema batida.

**TABLA 2** Algunos sistemas pequeños en movimiento y los valores observados de acción para sus cambios.

Sistema y cambio	Acción	Movimiento
<i>Luz</i>		
Cantidad mínima de luz absorbida por una superficie coloreada	$1 \hbar$	Cuántico
Impacto mínimo cuando la luz se refleja desde el espejo	$2 \hbar$	Cuántico
Cantidad mínima visible de luz	$c. 5 \hbar$	Cuántico
Cantidad mínima de luz absorbida por un pétalo de flor	$1 \hbar$	Cuántico
Ennegrecimiento de la película fotográfica	$c. 3 \hbar$	
Flash fotográfico	$c. 10^{17} \hbar$	Clásico
<i>Electricidad</i>		
Electrón expulsado de un átomo o molécula	$c. 1\text{--}2 \hbar$	Cuántico
Electrón extraído de un metal	$c. 1\text{--}2 \hbar$	Cuántico
Movimiento de un electrón dentro de un microprocesador	$c. 2\text{--}6 \hbar$	Cuántico
Transporte de señales en los nervios, de una molécula a la siguiente	$c. 5 \hbar$	Cuántico
Flujo de corriente en el rayo	$c. 10^{38} \hbar$	Clásico
<i>Materiales</i>		
Separación violenta de dos átomos de hierro vecinos	$c. 1\text{--}2 \hbar$	Cuántico
Rotura de una barra de acero	$c. 10^{35} \hbar$	Clásico
Proceso básico en superconductividad	$1 \hbar$	Cuántico
Proceso básico en transistores	$1 \hbar$	Cuántico

Proceso básico en magnetización	$1 \ h$	Cuántico
<i>Química</i>		
Colisión de átomos en un líquido a temperatura ambiente	$1 \ h$	Cuántico
Oscilación de la forma de una molécula de agua	$c. 1 - 5 \ h$	Cuántico
Cambio de forma de las moléculas, esto es, en la reacción química	$c. 1 - 5 \ h$	Cuántico
Reacción química única que riza un pelo	$c. 2 - 6 \ h$	Cuántico
Separación de dos moléculas de mozzarella	$c. 300 \ h$	Cuántico
Oler una molécula	$c. 10 \ h$	Cuántico
Quemar combustible en una explosión promedio en un cilindro del motor de un coche	$c. 10^{37} \ h$	Clásico
<i>Vida</i>		
Molécula de aire golpeando el tímpano	$c. 2 \ h$	Cuántico
Señal de sonido mínima detectable por el oído	<i>Desafío 10 ny</i>	
Un solo paso de replicación del ADN durante la división celular	$c. 100 \ h$	Cuántico
Fertilización del óvulo	$c. 10^{14} \ h$	Clásico
El paso mínimo en un motor molecular	$c. 5 \ h$	Cuántico
Movimiento del esperma por una longitud de célula	$c. 10^{15} \ h$	Clásico
División celular	$c. 10^{19} \ h$	Clásico
Batido del ala de la mosca de la fruta	$c. 10^{24} \ h$	Clásico
Persona caminando la longitud de un cuerpo	$c. 2 \cdot 10^{36} \ h$	Clásico
<i>Núcleos y estrellas</i>		
Reacción nuclear de fusión en una estrella	$c. 1 - 5 \ h$	Cuántico
Explosión de una ráfaga de rayos gamma	$c. 10^{80} \ h$	Clásico

### ¿POR QUÉ ‘CUANTO’?

Los efectos cuánticos nos rodean por todas partes. Sin embargo, dado que el cuanto de acción es tan pequeño, sus efectos sobre el *movimiento* aparecen principalmente, pero no exclusivamente, en sistemas *microscópicos*.

El estudio de tales sistemas fue llamado *mecánica cuántica* por Max Born, uno de los principales contribuyentes a este campo.\*<sup>\*\*</sup> Más tarde, el término *teoría cuántica* se hizo más popular. La teoría cuántica se debe a la existencia de valores medibles mínimos de la naturaleza, generalizando la idea que Galileo tenía en el siglo XVII.

Como se discutió en detalle antes, fue la insistencia de Galileo en 'piccolissimi quanti' - cuantos pequeñísimos - de la materia lo que lo metió en problemas. Pronto descubriremos que la idea de un cambio mínimo es necesaria para obtener una descripción precisa y exacta de la materia y de la naturaleza en su conjunto. Por lo tanto Born adoptó el término de Galileo para la nueva rama de la física y la llamó

\*<sup>\*\*</sup>Max Born (b. 1882 Breslau, d. 1970 Göttingen) Primero estudió matemáticas, luego se pasó a la física. Profesor de la Universidad de Göttingen, convirtió a la ciudad en uno de los centros mundiales de la física. Desarrolló la mecánica cuántica con sus ayudantes Werner Heisenberg y Pascual Jordan, y luego lo aplicó a la dispersión, la física del estado sólido, la óptica y los líquidos. Fue el primero en entender que la función de estado describe una amplitud de probabilidad. Born y Wolf juntos escribieron lo que sigue siendo el principal libro de texto sobre óptica.<sup>ref.6</sup>

Born atrajo a Göttingen los talentos más brillantes de la época, recibiendo como visitantes a Hund, Pauli, Nordheim, Oppenheimer, Goeppert-Mayer, Condon, Pauling, Fock, Frenkel, Tamm, Dirac, Mott, Klein, Heitler, Teller, Wigner y docenas de otros. Siendo judío, Born perdió su trabajo en 1933, cuando los criminales asumieron el gobierno alemán. Emigró y se convirtió en profesor en Edimburgo, donde permaneció durante 20 años. La física en Göttingen nunca se recuperó de esta pérdida. Por su elucidación del significado de la función de onda recibió el Premio Nobel 1954 de Física.

'Quantentheorie' o 'teoría de los cuantos'. El idioma Inglés adoptó el singular del latín "quantum" en lugar del plural (quanta) utilizado en la mayoría de otros idiomas.

Note que el término 'cuanto' *no* implica que todos los valores de las medidas sean *múltiplos* de una más pequeña: esto es tan solo posible en unos pocos casos.

La teoría cuántica es la descripción del movimiento microscópico. La teoría cuántica es *necesaria* cada vez que un proceso produce un valor de acción del orden del cuanto de acción.

La Tabla 2 muestra que todos los procesos a escalas atómicas o moleculares; incluyendo los procesos biológicos y químicos, son procesos cuánticos. Lo mismo ocurre con los procesos de emisión de luz y absorción. Estos fenómenos *sólo* pueden ser descritos con la teoría cuántica.

La Tabla 2 también muestra que el término 'microscópico' tiene un significado diferente para un físico y para un biólogo. Para un biólogo, un sistema es 'microscópico' si se requiere un microscopio para su observación. Para un físico, un sistema es *microscópico* si su acción característica es del orden del cuanto de acción. En otras palabras, para un físico un sistema es generalmente microscópico si ni siquiera es visible en el microscopio (de luz). Para aumentar la confusión, algunos físicos cuánticos hoy en día llaman a su propia clase de sistemas microscópicos 'mesoscópicos', mientras que otros llaman a sus sistemas nanoscópicos ". Ambos términos se introdujeron sólo para atraer atención y financiación: son inútiles.

### EL EFECTO DEL CUANTO DE ACCIÓN SOBRE EL MOVIMIENTO

Hay otra manera de caracterizar la diferencia entre un sistema microscópico, o cuántico, y un sistema macroscópico, o clásico. Una acción mínima implica que la diferencia entre los valores de acción S de dos observaciones sucesivas del mismo sistema, en tiempos  $\Delta t$  separados, no puede ser nula. Tenemos

$$|S(t + \Delta t) - S(t)| = |(E \pm \Delta E)(t + \Delta t) - Et| = |E\Delta t \pm t\Delta E \pm \Delta E\Delta t| \geq \hbar/2 \quad (1)$$



FIGURA 7 Werner Heisenberg (1901–1976)

El factor 1/2 surge porque la más pequeña acción  $\hbar$  implica automáticamente una indeterminación en la acción de la mitad de su valor. Ahora los valores de la energía E y del tiempo t - pero no del (positivo)  $\Delta E$  o  $\Delta t$  - pueden ser puestos a cero si elegimos un observador adecuado. Así, la existencia de un cuanto de acción implica que en cualquier sistema la evolución está restringida por

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar / 2 \quad (2)$$

Donde E es la energía del sistema y t es su edad, de modo que  $\Delta E$  es el cambio de energía y  $\Delta t$  es el tiempo entre dos observaciones sucesivas.

*Desafío 11 e* Por un razonamiento similar, encontramos que para cualquier sistema físico la posición y el momento están limitados por

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar / 2 \quad (3)$$

donde  $\Delta x$  es la indeterminación en la posición y  $\Delta p$  es la indeterminación en la cantidad de movimiento. Estas dos famosas relaciones fueron llamadas *relaciones de indeterminación* por su descubridor, Werner

Heisenberg.\* En inglés se llaman frecuentemente ‘relaciones de incertidumbre’; sin embargo, este término es incorrecto. Las cantidades no son inciertas o dudosas, sino *indeterminadas*. Debido al cuanto de acción, los observables del sistema *no* tienen un valor definido. No hay modo de adscribir un valor preciso a la cantidad de movimiento, a la posición o cualquier otro observable de un sistema cuántico. Utilizaremos el término “relación de indeterminación” en todas partes. La costumbre de llamar “principio” a la relación es aún más equivocado.

Cualquier sistema cuya indeterminación es del orden de  $\hbar$  es un sistema cuántico; si el producto de la indeterminación es mucho más grande, el sistema es clásico, y la física clásica es suficiente para su descripción. Así, aunque la física clásica asume que *no* hay indeterminaciones de medida en la naturaleza, ¡un sistema es *clásico* sólo si sus indeterminaciones son grandes comparadas con las mínimas posibles!

En resumen, la teoría cuántica es necesaria siempre que tratamos de medir una cantidad tan precisamente como sea posible. De hecho, toda medida es en sí misma un proceso cuántico. Y la relación de indeterminación implica que la *precisión de la medición es limitada*. El cuanto de la acción demuestra que el *movimiento no puede ser observado con precisión infinita*. En otras palabras, el mundo microscópico es *difuso (aleatorio)*. Este hecho tiene muchas consecuencias importantes y extrañas. Por ejemplo, si el movimiento no puede ser observado con precisión infinita, el concepto mismo de movimiento necesita ser manejado con gran cuidado, ya que no se puede aplicar en ciertas situaciones. En cierto sentido, el resto de nuestra búsqueda es sólo una exploración de las implicaciones de este resultado.

En realidad, mientras el espacio-tiempo es *plano*, resulta que *podemos* mantener el concepto de movimiento para describir las observaciones, siempre que permanezcamos conscientes de las limitaciones implicadas por el principio cuántico.

### LAS SORPRESAS DEL CUANTO DE ACCIÓN

El cuanto de acción  $\hbar$  implica una borrosidad de todo movimiento. Tal borrosidad implica también la existencia de breves desviaciones de la conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y del momento angular en sistemas microscópicos. Para la seguridad general hay que hacer hincapié en que para tiempos de observación largos - seguramente para todos los tiempos más largos que un microsegundo - la conservación se mantiene. Pero en la primera parte de nuestro ascenso a la montaña, nos dimos cuenta de que cualquier tipo de no conservación implica la existencia de *sorpresa*s en la naturaleza. Bueno, aquí están algunas de ellas.

Puesto que el movimiento exactamente uniforme no existe, un sistema que se mueve sólo en una dimensión, como la manecilla de un reloj, siempre tiene la posibilidad de moverse un poco en sentido opuesto, lo que conduce a lecturas incorrectas. De hecho, la teoría cuántica predice que los relojes tienen limitaciones esenciales:

▷ *Los relojes perfectos no existen.*

Las profundas implicaciones de esta aserción se aclararán gradualmente.

También es imposible evitar que un objeto haga un pequeño desplazamiento lateral. En efecto, la teoría cuántica implica que, estrictamente hablando,

▷ *Tampoco existe un movimiento uniforme o unidimensional.*

También esta declaración alberga muchas sorpresas adicionales.

Las limitaciones cuánticas se aplican también a las reglas de medir o cintas métricas. Es imposible

\*\* A menudo se dice que la relación de indeterminación para la energía y el tiempo tiene un peso diferente al de cantidad de movimiento y posición. Es una idea errónea, propagada por la generación más antigua de físicos, que ha sobrevivido a través de muchos libros de texto por más de 70 años. Simplemente olvídelo. Es esencial recordar que las cuatro cantidades que aparecen en las desigualdades describen las propiedades *internas* del sistema. En particular,  $t$  es una variable de tiempo deducida de los cambios observados *dentro del sistema*, y no la coordenada del tiempo medida por un reloj exterior; De manera similar, la posición  $x$  no es la coordenada espacial externa, sino la posición que caracteriza al sistema.<sup>ref.7</sup> Werner Heisenberg (1901-1976) fue un importante físico teórico y un excelente jugador de tenis de mesa. En 1925, todavía joven, desarrolló con la ayuda de Max Born y Pascual Jordan, la primera versión de la teoría de los cuantos; de ella se deduce la relación de incertidumbre. Por estos logros recibió el Premio Nobel de Física en 1932. También trabajó en física nuclear y en la turbulencia. Durante la Segunda Guerra Mundial, trabajó en el programa de fisión nuclear. Después de la guerra, publicó varios libros de éxito sobre cuestiones filosóficas en la física, convirtiéndose lentamente en un excéntrico que intentó sin éxito - con una ayuda tibia de Wolfgang Pauli - encontrar una descripción unificada de la naturaleza basada en la teoría cuántica, la “fórmula del mundo”.

asegurar que la regla esté completamente en reposo con respecto al objeto que se mide. Así, el cuanto de acción implica de nuevo, por un lado, que las mediciones son posibles, y por otro lado:

- ▷ *La Precisión de la medida está limitada.*

También se deduce del principio del cuanto de acción que cualquier observador inercial o en caída libre debe ser *grande*, ya que sólo los grandes sistemas se aproximan al movimiento inercial.

- ▷ *Un observador no puede ser microscópico.*

Si los seres humanos no fueran macroscópicos, no podrían observar nada ni estudiar el movimiento.

¡Debido a la exactitud finita con la cual se puede observar el movimiento microscópico, el movimiento más rápido que el de la luz es posible en el dominio microscópico! La teoría cuántica predice así los *taquiones*, al menos en intervalos de tiempo cortos. Por la misma razón,

- ▷ *El movimiento hacia atrás en el tiempo es posible durante tiempos y distancias microscópicas.*

En resumen, un cuanto de acción implica la existencia de viajes en el tiempo microscópicos. Sin embargo, esto sigue siendo imposible en el dominio macroscópico, como el de la vida cotidiana.

Pero hay más. Imagínese que un coche en movimiento de repente desaparece para siempre. En tal situación, ni la cantidad de movimiento ni la energía se conservarían. El cambio de la acción para tal desaparición es grande comparado con  $\hbar$ , de modo que su observación contradiría incluso la física clásica - como usted puede desechar comprobar [Desafío 12 s](#). Sin embargo, el cuanto de la acción permite que una partícula *microscópica*, tal como un electrón, desaparezca por un corto período de tiempo, a condición de que reaparezca después.

- ▷ *El cuanto de acción implica que no hay permanencia en la naturaleza.*

El cuanto de acción también implica:

- ▷ *El vacío no está vacío.*

Si uno mira el espacio vacío dos veces, las dos observaciones están separadas por un minúsculo intervalo de tiempo, una cierta energía será observada la segunda vez. Si el intervalo de tiempo es suficientemente corto, entonces, debido al cuanto de acción, serán observadas partículas de materia. De hecho, las partículas pueden aparecer en cualquier parte de la nada y desaparecer de pronto después: el límite de acción lo requiere. En síntesis, la naturaleza muestra breves apariciones y desapariciones de la materia. En otras palabras, la idea clásica de un vacío *vacío* es correcta sólo cuando el vacío se observa durante un *tiempo largo*.

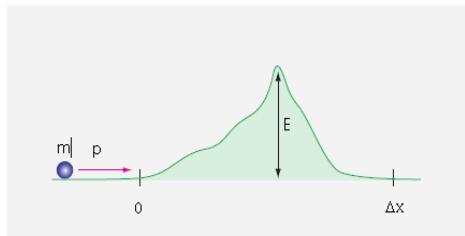
El cuanto de la acción implica que las agujas de la brújula no pueden funcionar. Si miramos dos veces en una rápida sucesión la aguja de una brújula, o incluso una casa, observamos generalmente que permanece orientada en la misma dirección. Pero como la acción física tiene las mismas dimensiones que el momento angular, un valor mínimo para la acción implica un valor mínimo para el momento angular. [Desafío 13 e](#). Incluso un objeto macroscópico tiene un valor mínimo para su rotación. En otras palabras, la teoría cuántica predice

- ▷ *Todo gira.*

Un objeto puede ser no rodante sólo aproximadamente, cuando las observaciones están separadas por largos intervalos de tiempo.

Para los sistemas microscópicos, los límites cuánticos sobre la rotación tienen efectos específicos. Si se puede observar el ángulo de rotación -como en las moléculas- el sistema se comporta como un objeto macroscópico: su posición y orientación son aleatorias. Pero para un sistema cuyo ángulo de rotación no puede ser observado, el cuanto de acción limita el momento angular a múltiplos de  $\hbar / 2$ . En particular, todos los sistemas microscópicos enlazados -como moléculas, átomos, iones o núcleos- contienen movimientos rotacionales y componentes de rotación.

**F IGURA 8** Las colinas nunca son lo suficientemente altas.



## TRANSFORMACIÓN, VIDA Y DEMÓCRITO

En el comienzo de nuestra aventura, mencionamos que los griegos distinguían tres tipos de cambios: transporte, crecimiento y transformación. También mencionamos que Demócrito había deducido que todos esos tipos de cambio – incluyendo la vida y la muerte – son, en realidad, idénticos, y debidos al movimiento de los átomos. El cuento de acción remarca exactamente este punto.

En primer lugar, una acción mínima (el cuento de acción) implica que las jaulas de los zoos son peligrosas y que los bancos no son seguros. Una jaula es un artilugio que necesita una gran cantidad de energía para poder salir de ella. Físicamente hablando, la pared de una jaula es una colina de energía, que se asemeja a la colina verdadera que se muestra en la [Figura 8](#). Imagine que una partícula con cantidad de movimiento  $p$  se aproxima a un lado de la colina, que se supone que tiene un ancho  $\Delta x$ .

En la vida diaria – y por tanto en física clásica – la partícula nunca se observará al otro lado de la colina si su energía cinética  $p^2/2m$  es menor que la altura  $E$  de la colina. Pero imagine que la cantidad de movimiento que falta para superar la colina,  $\Delta p = 2mE - p$ ,

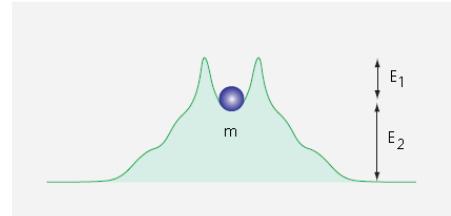
satisface  $\Delta x \Delta p \leq \hbar/2$ . La partícula tendrá la posibilidad de superar la colina, a pesar de su insuficiente energía. El cuento de acción implica así que una colina de anchura  $\Delta x$

$$\Delta x \leq \frac{\hbar/2}{\sqrt{2mE - p}} \quad (4)$$

no es obstáculo para una partícula de masa  $m$ . Pero esto no es todo. Dado que el valor de la cantidad de movimiento de la partícula  $p$  es indeterminado él mismo, una partícula puede superar la colina incluso si la colina es más ancha que el valor (4) – si bien cuanto más ancha, más baja será la probabilidad. Por tanto cualquier partícula puede superar cualquier obstáculo. Esto se llama el *efecto túnel*, por razones obvias.

Clásicamente, el efecto túnel es imposible. En teoría cuántica, la empresa es posible, porque la función de onda no se desvanece en la ubicación de la colina; hablando de forma poco rigurosa, la función de onda no es nula dentro de la colina. Así tampoco será nula detrás de la colina. Como resultado, los sistemas cuánticos pueden penetrar o “tunelar” a través de colinas.

**FIGURA 9** Saliendo de los recintos cerrados.



Dicho en pocas palabras, la acción mínima implica que no hay cajas estancas en la naturaleza. Gracias al efecto túnel,

▷ *La materia no es impenetrable.*

La penetrabilidad de toda la materia está en contraste con la observación clásica cotidiana. [Desafío 14 s](#) ¿Puede usted explicar por qué las jaulas de leones funcionan *a pesar* del cuento de acción?

Por cierto, el cuento de acción también implica que una partícula con una energía cinética mayor que la altura de la energía de una colina puede ser *reflejada* por la colina. Además, este efecto es imposible en la física clásica.

El principio de mínima acción también implica que los estantes son peligrosos. ¿Por qué? Los estantes son obstáculos para el movimiento. Un libro en un estante está en la misma situación que la masa en la [Figura 9](#): la masa está rodeada de colinas de energía que impiden su escape al mundo externo de menor energía. Pero gracias al efecto túnel, el escape es siempre posible. La misma imagen se aplica a una rama de un árbol, un clavo en una pared, o cualquier cosa unida a cualquier otra cosa. Las cosas nunca pueden fijarse de manera permanente. En particular, descubriremos que cada ejemplo de emisión de luz – incluso la radiactividad – resulta de este efecto. El cuento de acción por lo tanto implica

▷ *El Decaimiento es parte de la naturaleza.*

Note que el decaimiento a menudo aparece en la vida diaria bajo un nombre diferente: *fractura*. De hecho, toda fractura requiere del cuento de acción para su descripción [ref.8](#). Obviamente, la causa de la fractura es frecuentemente clásica, pero el *mechanismo* de fractura es siempre cuántico. Solo los objetos que obedecen la teoría cuántica se pueden romper. En resumen, no hay sistemas excitados estables en la naturaleza. Por cierto, por la misma razón ninguna memoria puede ser perfecta. ([Desafío 15 s](#) ¿Puede confirmar esto?)

Tomando una visión más general, el *envejecimiento* y la *muerte* también son consecuencia del cuanto de acción. La muerte, como el envejecimiento, es una composición de los procesos de ruptura. Al morir, los mecanismos en un ser vivo se rompen. La fractura es una forma de decaimiento, y es debida al efecto túnel. La muerte es, pues, un proceso cuántico. Clásicamente, la muerte no existe. *Desafío 16 s* ¿Podría ser esta la razón por la cual tantas personas creen en la inmortalidad o en la eterna juventud?

También descubriremos que el cuanto de acción es la razón de la importancia de la acción observable en la física clásica. De hecho, la existencia de una acción *mínima* es la razón del principio de *mínima* acción de la física clásica.

**FIGURA 10** Objetos idénticos cuyas trayectorias se cruzan.

Una acción mínima (un cuanto de acción) también implica que la materia no puede ser continua, sino que debe estar compuesta de entidades pequeñísimas. En efecto, cualquier flujo de un material verdaderamente continuo estaría en contradicción con el principio cuántico. *Desafío 17 s* ¿Puede dar el argumento preciso? Por supuesto, en este punto de nuestra aventura, la no continuidad de la materia ya no es una sorpresa. Pero el cuanto de acción implica que incluso la *radiación* no puede ser continua. Como Albert Einstein fue el primero en afirmar claramente, la luz está hecha de partículas cuánticas.

De forma aún más general, el cuanto de acción implica que en la naturaleza

- ▷ *Todos los flujos y todas las ondas están hechas de partículas microscópicas.*

El término "microscópico" (o "cuántico") es esencial, ya que tales partículas *no* se comportan como pequeñas piedras. Ya hemos encontrado varias diferencias, y pronto encontraremos otras. Por estas razones, debe haber un nombre especial para las partículas microscópicas; pero hasta ahora todas las propuestas, de las cuales *cuantón* es la más popular, no han logrado afianzarse.

El cuanto de acción tiene varias consecuencias extrañas para las partículas microscópicas. Tomemos dos partículas de la misma masa y composición. Imagínese que sus caminos se cruzan y que en el cruce se acercan muchísimo una a otra, como se muestra en la **Figura 10**. Una acción mínima implica que en tal situación, si la distancia llega a ser lo suficientemente pequeña, las dos partículas pueden intercambiar sus papeles, sin que nadie sea capaz de evitarlo, o de notarlo. Así, en un volumen de gas es *imposible* - gracias al cuento de acción - seguir a las partículas que se mueven alrededor y decir qué partícula es cuál. *Desafío 18 s* ¿Puede confirmar esta deducción, y especificar las condiciones, utilizando las relaciones de indeterminación? En resumen

- ▷ *En la naturaleza es imposible distinguir entre partículas idénticas.*

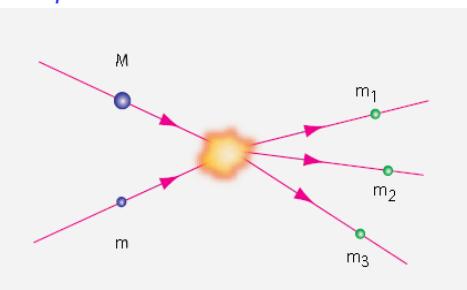
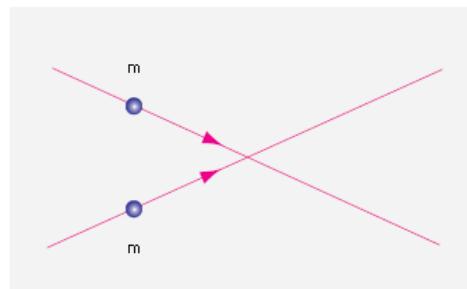
*Desafío 19 s* ¿Puede adivinar qué ocurre en el caso de la luz?

Pero la materia merece aún más atención. Imagínese de nuevo dos partículas, incluso dos diferentes, que se acercan muy de cerca, como se muestra en la **Figura 11**. Sabemos que si la distancia de aproximación es pequeña, las cosas se vuelven aleatorias, difusas. Ahora bien, el principio de acción mínima hace posible que algo suceda en ese pequeño dominio, siempre y cuando los productos salientes resultantes tengan los mismos momento lineal, momento angular y energía total que los entrantes. En realidad, descartar tales procesos implicaría que se pudieran observar acciones arbitrariamente pequeñas, eliminando así el carácter aleatorio de la naturaleza, como usted puede desear comprobar por sí mismo. *Desafío 20 e*

De forma concisa

- ▷ *El cuento de acción permite la transformación de la materia.*

**FIGURA 11** Transformación mediante la reacción.



También se dice que el cuanto de acción permite las *reacciones* de partículas. De hecho, descubriremos que *todo tipo* de reacciones en la naturaleza, incluyendo la respiración, la digestión y todas las demás reacciones químicas y nucleares, se deben sólo a la existencia del cuanto de acción.

Un tipo de proceso que nos es especialmente querido es el *crecimiento*. El cuanto de la acción implica que todo el crecimiento ocurre en pequeños pasos. En efecto,

- ▷ *Todos los procesos de crecimiento en la naturaleza son procesos cuánticos.*

Sobre todo, como ya se mencionó, el cuanto de acción explica la vida. Sólo el cuanto de acción hace posible la reproducción y la herencia. El nacimiento, la sexualidad y la muerte son consecuencias del cuanto de acción.

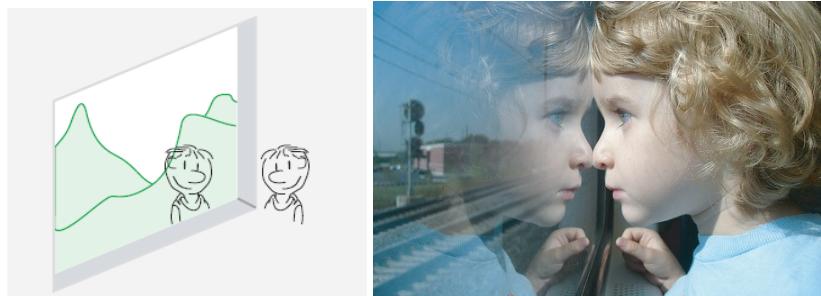
Así que Demócrito tenía razón y estaba equivocado. Tenía razón al deducir los constituyentes fundamentales de la materia y la radiación. Tenía razón al unificar todo cambio en la naturaleza -desde el transporte hasta la transformación y el crecimiento- como movimiento de partículas. Pero se equivocó al suponer que las partículas pequeñas se comportan como piedras. Las partículas más pequeñas se comportan como cuantones: se comportan al azar y se comportan en parte como ondas y en parte como partículas.

#### ALEATORIEDAD - UNA CONSECUENCIA DEL CUANTO DE ACCIÓN

¿Qué sucede si intentamos medir un cambio más pequeño que el cuánto de acción? La naturaleza tiene una respuesta simple: obtenemos *resultados aleatorios*. Si construimos un experimento que intenta producir un cambio o una acción del tamaño de un cuarto del cuanto de acción, el experimento producirá un cambio de *un* cuanto de acción en una cuarta parte de los casos y ningún cambio en tres cuartos de los casos, lo que supone un *promedio* de un cuarto de  $\hbar$ .

El cuanto de acción conduce a la aleatoriedad a nivel microscópico. Esto puede verse también de la siguiente manera. Debido a las relaciones de indeterminación, es imposible obtener valores definidos tanto para la cantidad de movimiento como para la posición de una partícula. Evidentemente, esto también es imposible para los componentes individuales de un montaje experimental o un observador.

**FIGURA 12** Un efecto cuántico famoso: ¿cómo logran las ventanas de tren mostrar dos imágenes superpuestas? (foto © Greta Mansour).



Por lo tanto, las condiciones iniciales -tanto para un sistema como para un montaje experimental- no pueden duplicarse exactamente. Una acción mínima implica, por lo tanto, que cada vez que un experimento en un sistema microscópico se realiza dos veces, los resultados serán (normalmente) diferentes. Los resultados sólo podrían ser los mismos si el sistema y el observador estuvieran exactamente en la misma configuración cada vez. Sin embargo, debido al segundo principio de la termodinámica y debido al cuanto de acción, esto es imposible. Por lo tanto,

- ▷ *Los sistemas microscópicos se comportan aleatoriamente.*

Obviamente, habrá algún resultado *promedio*; pero en todos los casos, las observaciones microscópicas son *probabilísticas*. Muchos encuentran esta conclusión de la teoría cuántica la más difícil de tragar. Pero el hecho es: el cuanto de acción implica que el comportamiento de los sistemas cuánticos es sorprendentemente diferente del de los sistemas clásicos. La conclusión es inevitable:

- ▷ *La naturaleza se comporta aleatoriamente.*

¿Podemos observar la aleatoriedad en la vida cotidiana? Sí. Cada *ventana* demuestra que la naturaleza se comporta aleatoriamente a escala microscópica. Todo el mundo sabe que se puede usar una ventana de tren para mirar el paisaje *exterior* o, concentrándose en la imagen reflejada, observar a alguna persona interesante *dentro* del vagón. En otras palabras, observaciones como la de la **Figura 12** muestran que el vidrio refleja

algunas de las partículas de luz y deja pasar a otras. Más precisamente, el vidrio refleja una selección aleatoria de partículas de luz; sin embargo, la proporción promedio es constante. Por lo tanto, la reflexión parcial es similar al efecto túnel. De hecho, la reflexión parcial de fotones en el vidrio es un resultado del cuanto de acción. De nuevo, la situación puede *describirse* por la física clásica, pero la cantidad exacta de reflexión no puede *explicarse* sin la teoría cuántica.

▷ *Los cuantones se mueven al azar.*

Sin el cuento de acción, los viajes en tren serían mucho más aburridos.

### ONDAS – UNA CONSECUENCIA DEL CUANTO DE ACCIÓN

El cuento de acción implica un resultado importante acerca de las *trayectorias* de las partículas. Si una partícula se desplaza de un punto a otro, no hay ninguna forma de decir cuál es el camino que ha tomado entre medias. De hecho, con el fin de distinguir entre dos caminos posibles, pero ligeramente diferentes, las acciones más pequeñas de  $\hbar$  tendrían que ser medidas de forma fiable. En particular, si una partícula es enviada a través de una pantalla con dos rendijas suficientemente estrechas, como se ilustra en la Figura 13, es imposible decir a través de cuál rendija pasó la partícula. Esta imposibilidad es fundamental.

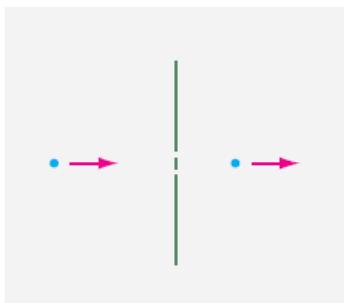


FIGURA 13 Una partícula y una pantalla con dos rendijas cercanas.

Ya conocemos fenómenos de movimiento para los cuales no es posible decir con precisión cómo se mueve algo o qué camino ha tomado tras las dos rendijas: las *ondas* se comportan de este modo. Todas las ondas están sujetas a las relaciones de indeterminación

$$\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \Delta k\Delta x \geq \frac{1}{2} \quad (5)$$

Una onda es un tipo de movimiento descrito por una *fase* que cambia en el espacio y el tiempo. Esto resulta válido para todo el movimiento. En particular, es válido para la materia.

Vimos anteriormente que los sistemas cuánticos están sujetos a

$$\Delta E\Delta t \geq \hbar/2 \quad \text{y} \quad \Delta p\Delta x \geq \hbar/2 \quad (6)$$

Llegamos así a atribuir una frecuencia y una longitud de onda al sistema cuántico:

$$E = \hbar\omega \quad \text{y} \quad p = \hbar k = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} \quad (7)$$

La relación energía-frecuencia para la *luz* y la relación equivalente cantidad de movimiento- longitud de onda fue deducida por Max Planck en 1899. En los años siguientes a 1905, Albert Einstein confirmó que las relaciones son válidas para todos los ejemplos de emisión y absorción de luz. En 1923 y 1924, Louis de Broglie \*\* predijo que la relación debería ser válida también para todas las partículas cuánticas de *materia*. La confirmación experimental llegó unos años más tarde.(Este es, por tanto, otro ejemplo de un descubrimiento que se hizo con unos 20 años de retraso.) En resumen, el cuento de acción implica:

➤ *Las partículas de materia se comportan como ondas.*

En particular, el cuento de acción implica la existencia de interferencias para los flujos de la materia.

\* Louis de Broglie (b. 1892 Dieppe, d. 1987 Paris), Físico francés y profesor de la Sorbona. La relación energía-frecuencia para la luz había hecho merecedores a Max Planck y Albert Einstein del Premio Nobel de Física, en 1918 y 1921. De Broglie amplió la relación para predecir la naturaleza ondulatoria del electrón (y de todas las demás partículas cuánticas): esto fue la esencia de su tesis doctoral. La predicción fue confirmada experimentalmente unos años más tarde, en 1927. Por la predicción de la naturaleza ondulatoria de la materia, de Broglie recibió el Premio Nobel de Física en 1929. Siendo un aristócrata, no hizo más investigaciones después de eso. Por ejemplo, fue Schrödinger el que luego escribió la ecuación de ondas, aunque de Broglie también podría haberlo hecho.

## PARTÍCULAS – UNA CONSECUENCIA DEL CUANTO DE ACCIÓN

El cuanto de acción, el cambio mínimo, implica que los flujos no pueden ser arbitrariamente débiles.

Esto se aplica a *todos* los flujos: en particular, se aplica a los ríos, a los flujos de materia sólida, a los flujos de gas, a los haces de luz, a los flujos de energía, a los flujos de entropía, a los flujos de cantidad de movimiento, a los flujos de momento angular, a los flujos de probabilidad, a las señales de todo tipo, a los flujos de carga eléctrica, a los flujos de carga de color y a los flujos de carga débil.

El flujo del agua en los ríos, como cualquier otro flujo de materia, no puede ser arbitrariamente pequeño: el cuento de acción implica que hay un flujo mínimo de materia en la naturaleza. Dependiendo de la situación, el flujo mínimo de materia es una molécula, un átomo o una partícula más pequeña. De hecho, el cuento de acción está también en el origen de la observación de una carga mínima en la corriente eléctrica. Puesto que toda materia puede fluir, el cuento de acción implica:

- ▷ *Toda la materia tiene aspectos de partículas.*

De la misma manera, el cuento de acción, el más pequeño cambio, implica que la luz no puede ser arbitrariamente tenue. Hay una iluminación mínima en la naturaleza; se llama un *fotón* o un *cuento de luz*. Ahora bien, la luz es una onda, y el razonamiento se puede hacer para cualquier otra onda también. En resumen, el cuento de acción implica, por tanto:

- ▷ *Todas las ondas tienen aspectos de partículas.*

Esto se ha demostrado para las ondas de luz, ondas de agua, rayos X, ondas sonoras, ondas de plasma, vórtices de fluido y cualquier otro tipo de onda que se haya observado. (Las ondas gravitacionales se observaron por primera vez el 14 de septiembre de 2015 por los dos detectores del Observatorio de Interferometría Láser de Ondas Gravitacionales, LIGO, por sus siglas en inglés), se espera que sus aspectos de partículas, los *gravitones*, también existan en este caso).

En resumen, el cuento de la acción dice:

- ▷ *Si algo se mueve, está hecho de partículas cuánticas, o cuantones.*

Más adelante exploraremos y especificaremos las diferencias exactas entre una partícula cuántica y una pequeña piedra o un grano de arena. Descubriremos que los cuantones de materia se mueven de manera diferente, se comportan de manera diferente bajo rotación y se comportan de manera diferente bajo el intercambio.

## LA INFORMACIÓN CUÁNTICA

En la informática, la unidad de cambio más pequeña se llama un "cambio de bit". La existencia de un cambio mínimo en la naturaleza implica que la informática -o ciencia de la información- se puede utilizar para describir la naturaleza y, en particular, la teoría cuántica. Esta analogía ha atraído mucha investigación en las últimas décadas, y ha explorado muchas cuestiones interesantes: ¿Es posible almacenar información ilimitadamente? ¿Se puede leer en voz alta y reproducir la información por completo? ¿Se puede transmitir la información manteniéndola en secreto? ¿Se puede realizar la transmisión y el almacenamiento de la información independientemente del ruido? ¿Se puede utilizar la física cuántica para fabricar nuevos tipos de computadoras? Hasta ahora, la respuesta a todas estas preguntas es negativa; pero la esperanza de cambiar la situación no está muerta todavía.

La analogía entre la teoría cuántica y la ciencia de la información es limitada: la ciencia de la información sólo puede describir el lado "software" de los dispositivos. Para un físico, el lado "hardware" de la naturaleza es central. El hardware de la naturaleza entra en la descripción siempre que el valor real  $\hbar$  del cuento de acción deba ser introducido.

Al explorar las similitudes y diferencias entre la naturaleza y la ciencia de la información, descubriremos que el cuento de la acción implica que los sistemas físicos macroscópicos no pueden ser copiados - o "clonados", como dicen los teóricos cuánticos. La naturaleza no permite copias de objetos macroscópicos. En otras palabras:

- ▷ *No existen máquinas de copiado perfectas.*

El cuento de acción hace imposible reunir y usar toda la información de una manera que permita producir una copia perfecta.

La exploración de máquinas copiadoras nos recordará nuevamente que el orden preciso en el cual se realizan las mediciones en un experimento es importante. Cuando el orden de las mediciones puede ser revertido sin afectar el resultado neto, los físicos hablan de "comutación".

El cuanto de acción implica:

- ▷ *Los observables físicos no comutan.*

También encontraremos que el cuanto de la acción implica que los sistemas no son siempre independientes, sino que pueden estar *entrelazados*. Este término, introducido por Erwin Schrödinger, describe una de las consecuencias más absurdas de la teoría cuántica. El entrelazamiento hace que todo en la naturaleza se conecte a todo lo demás. El entrelazamiento produce efectos que *parecen* (pero no son) más rápidos que la luz.

- ▷ *El entrelazamiento produce una forma (falsa) de no-localidad.*

El entrelazamiento implica que la comunicación fidedigna no puede existir.<sup>ref.9</sup>

También descubriremos que la *decoherencia* es un proceso omnipresente en la naturaleza que influye en todos los sistemas cuánticos. Por ejemplo, por un lado permite las mediciones y por el otro hace que los ordenadores cuánticos sean imposibles.

### CURIOSIDADES Y DIVERTIDOS DESAFÍOS SOBRE EL CUANTO DE ACCIÓN

Incluso si aceptamos que ningún experimento realizado hasta ahora contradice la acción mínima, aún tenemos que comprobar que la acción mínima (el cuanto de acción) no contradice a la razón. En particular, la acción mínima también debe ser compatible con todos los experimentos *imaginarios*. Esto no es evidente por sí mismo.

\* \*

¿Dónde está la escala cuántica en un reloj de péndulo?

\* \*

Cuando los campos electromagnéticos entran en juego, el valor de la acción (usualmente) depende de la elección del potencial vector  $y$ , así, de una elección de calibre (gauge). Vimos en la parte sobre electrodinámica que una elección adecuada de calibre (gauge) puede cambiar el valor de la acción sumando o restando cualquier cantidad deseada. Sin embargo, hay una acción mínima en la naturaleza. Esto es posible porque en la teoría cuántica, los cambios físicos gauge no pueden sumar o restar una cantidad cualquiera, sino solamente los múltiplos de *dos veces* el valor mínimo. Por lo tanto, no nos permiten ir por debajo de la acción mínima.

\* \*

Las plantas adultas dejan de crecer en la oscuridad. Sin luz, cesan las reacciones necesarias para el crecimiento. *Desafío 21 s* ¿Puede demostrar que se trata de un efecto cuántico, no explicable por la física clásica?

\* \*

La mayoría de los procesos cuánticos en la vida cotidiana son electromagnéticos. *Desafío 22 s* ¿Puede demostrar que el cuanto de acción también debe mantenerse incluso para procesos nucleares, es decir, para procesos que no son electromagnéticos?

\* \*

*Desafío 23 s* ¿Es el cuanto de acción independiente del observador, incluso cerca de la velocidad de la luz? Esta pregunta fue la razón por la que Planck se puso en contacto con el joven Einstein, invitándolo a Berlín, presentándolo así a la comunidad internacional de los físicos.

\* \*

El cuanto de la acción implica que la gente minúscula, tal como *Tom Tumb* (Pulgarcito), no puede existir. El cuanto de acción implica que los fractales no pueden existir en la naturaleza. El cuanto de acción implica que la "*ley de Moore*" de la electrónica de semiconductores, que establece que el número de transistores en un chip se duplica cada dos años, no puede ser correcta. *Desafío 24 s* ¿Por qué no?

\* \*

Tome una herradura. La distancia entre los dos extremos no es fija, ya que de otro modo su posición y velocidad serían conocidas al mismo tiempo, contradiciendo la relación de indeterminación. Por supuesto,

este razonamiento es también válido para cualquier otro objeto sólido. En resumen, tanto la mecánica cuántica como la relatividad especial muestran que los cuerpos rígidos no existen, aunque por diferentes razones.

\* \*

El momento angular tiene las mismas dimensiones que la acción. Una acción mínima implica que hay un momento angular mínimo en naturaleza. *Desafío 25 s* ¿Cómo puede ser esto, dado que algunas partículas tienen espín cero, es decir, no tienen momento angular?

\* \*

*Desafío 26 s* ¿Podríamos haber iniciado toda la discusión de la teoría cuántica afirmando que hay un momento angular mínimo en lugar de una acción mínima?

\* \*

Niels Bohr, además de propagar la idea de una acción mínima, era también un entusiasta del llamado *principio de complementariedad*. Esta es la idea de que ciertos pares de observables de un sistema -como posición y cantidad de movimiento- tienen una *precisión* coligada: si un observable del par se conoce con alta precisión, el otro es necesariamente conocido con baja precisión. *Desafío 27 s* ¿Puede deducir este principio de la acción mínima?

### LOS PELIGROS DE COMPRAR UNA LATA DE JUDÍAS

Otra manera de mostrar las consecuencias absurdas de la teoría cuántica está dada por la advertencia final del producto, la cual, de acuerdo con ciertos bien informados abogados debería ser impresa en cada lata de judías y con cada producto empaquetado. Eso muestra en detalle cuán profundamente nos embaula nuestra condición humana. ref.10

Atención: Tenga cuidado cuando **mire** este producto:

- Emite radiación térmica.
- La luz brillante tiene el efecto de comprimir este producto.

Advertencia: Tenga cuidado cuando **toque** este producto:

- Parte de ella podría calentarse mientras otra parte se enfriá, causando quemaduras severas.

Atención: Tenga cuidado cuando **maneje** este producto:

- Este producto consta de un mínimo de 99,999 999 999 999 % de espacio vacío.
- Este producto contiene partículas moviéndose con velocidades mayores que un millón de kilómetros por hora.
- Cada kilogramo de este producto contiene la misma cantidad de energía como la liberada por cien bombas nucleares.\*
- En el caso de que este producto se ponga en contacto con antimateria, ocurrirá una explosión catastrófica.
- En el caso de que este producto sea girado, emitirá radiación gravitacional.

Advertencia: debería tener cuidado cuando **transporte** este producto:

- La fuerza requerida depende de su velocidad, así como su peso.
- Este producto emitirá radiación adicional cuando sea acelerado.
  - Este producto atrae a todos los otros objetos que están a su alrededor, incluyendo los niños del comprador, con una fuerza que aumenta cuando la distancia disminuye.

Advertencia: debería tener cuidado cuando **almacene** este producto:

- Es imposible mantener este producto en un lugar específico y en reposo al mismo tiempo.
- Excepto cuando se almacene en el subsuelo a una profundidad de varios kilómetros, a lo largo del tiempo la radiación cósmica volverá este producto radiactivo.
- Este producto puede desintegrarse en los próximos  $10^{35}$  años.

---

\*\*Una cabeza nuclear estándar tiene un rendimiento explosivo de aproximadamente 0,2 megatonnes (donde está implícito que se trata de toneladas del explosivo estándar trinitrotolueno o TNT), aproximadamente trece veces el rendimiento de la bomba de Hiroshima, que era de 15 kilotonnes<sup>ref.11</sup>. Un megatón se define como 1Pcal = 4,2 PJ, a pesar de que el TNT proporciona aproximadamente un 5% menos de energía que este valor. En otras palabras, un megatón es el contenido de energía de unos 47 g de materia. Eso es menos que un puñado para la mayoría de los sólidos o líquidos.

- Se podría enfriar y levitar en el aire.
- Este producto deforma el espacio y el tiempo en sus proximidades, incluyendo el recipiente de almacenamiento.
- Incluso si se almacena en un recipiente cerrado, este producto está influido e influye en todos los demás objetos en el universo, incluyendo a sus suegros.
- Este producto puede desaparecer de su ubicación actual y reaparecer en cualquier lugar al azar en el universo, incluyendo el garaje de su vecino.

Advertencia: debe tener cuidado cuando se **aleje** de este producto:

- Llegará a la fecha de caducidad antes de que lo haga el comprador.

Advertencia: se debe tener cuidado al **usar** este producto:

- Cualquier uso que se haga de él aumentará la entropía del universo.
- Los constituyentes de este producto son exactamente los mismos que los de cualquier otro objeto en el universo, incluyendo los del pescado podrido.

Todas estas afirmaciones son correctas. La impresión de un cierto aspecto paranoide con la física cuántica es pura coincidencia.

#### UN RESUMEN: FÍSICA CUÁNTICA, LA LEY Y EL ADOCTRINAMIENTO

¿No parecen falsas todas las deducciones del cuanto de acción presentadas hasta ahora, o al menos descabelladas? En realidad, si usted o su abogado hace alguna de las afirmaciones sobre física cuántica en el tribunal, quizás incluso bajo juramento, ¡podría acabar en prisión!

Sin embargo, todas las afirmaciones anteriores son correctas: todas están confirmadas por los experimentos. Y hay muchas más sorpresas por venir. Usted puede haber advertido que, en los ejemplos precedentes, no hemos hecho referencia explícita a la electricidad, a las interacciones nucleares o a la gravitación. En esos dominios las sorpresas son aún más asombrosas. La observación de antimateria, la corriente eléctrica sin resistencia, el movimiento dentro de los músculos, la energía del vacío, las reacciones nucleares en las estrellas, y – tal vez pronto – la ebullición del espacio vacío, le fascinarán tanto como han fascinado, y todavía fascinan, a miles de investigadores.

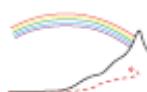
En particular, las consecuencias del cuanto de acción para el origen del universo son alucinantes. Intente ahora explorar por sí mismo sus consecuencias para el big bang. *Desafío 28 d*

Juntos, todos esos temas nos conducirán a un largo camino hacia la cima de la Montaña del Movimiento. Las consecuencias del cuanto de acción son tan extrañas, tan increíbles y tan numerosas que la física cuántica puede ser llamada correctamente la descripción del movimiento para científicos *locos*.

En cierto sentido, esto generaliza nuestra definición previa de la física cuántica como la descripción del movimiento afín al placer.

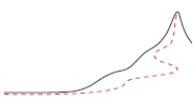
Desgraciadamente, se dice a veces que ‘nadie comprende la teoría cuántica’. Esto es falso. De hecho, es peor que falso: es adoctrinamiento y desinformación. Adoctrinamiento y desinformación son métodos que evitan que la gente utilice su propio entendimiento y disfrute de la vida. En realidad, las consecuencias del cuanto de acción pueden ser comprendidas y disfrutadas por todos. A fin de hacerlo así, nuestra primera tarea en el camino hacia la cima de la Montaña del Movimiento será usar el cuanto de acción para el estudio de nuestro estándar clásico del movimiento: el movimiento de la luz.

Nie und nirgends hat es Materie ohne  
Bewegung gegeben, oder kann es sie geben. Friedrich Engels, *Anti-Dühring*.<sup>\*</sup>  
*'Nunca y en ninguna parte ha existido materia, ni puede existir, sin movimiento.'* <sup>ref.12</sup>




---

\* \* Friedrich Engels (1820–1895) fue uno de los teóricos del marxismo.



## CAPÍTULO 2

# LUZ – LAS EXTRAÑAS CONSECUENCIAS DEL CUANTO DE ACCIÓN

Alle Wesen leben vom Lichte,  
jedes glückliche Geschöpfe. Friedrich Schiller, *Wilhelm Tell*.<sup>\*</sup>  
*"De la luz viven todas las criaturas, todas las felices criaturas."*

**D**ado que todos los colores de los materiales son efectos cuánticos, resulta imperativo estudiar las propiedades de la luz misma. Si realmente existe un cambio mínimo, entonces también debe haber una iluminación mínima de la naturaleza. Tal conclusión ya fue señalada en la antigua Grecia, por ejemplo, por Epicuro (341-271 aC), quien afirmó que la luz es un flujo de pequeñas partículas<sup>ref.13</sup>. La iluminación mínima posible sería entonces la debida a una sola partícula de luz. Hoy en día, las partículas se llaman *cuantos de luz o fotones*. Increíblemente, el propio Epicuro podría haber comprobado su predicción con un experimento.

### ¿CÓMO SE COMPORTAN LAS LUCES TENUES?

Alrededor de 1930, Brumberg y Vavilov encontraron una manera bellísima de comprobar la existencia de los fotones usando simplemente el ojo desnudo y una lámpara<sup>ref.14</sup>. Nuestros ojos no nos permiten detectar conscientemente los fotones individuales, pero Brumberg y Vavilov encontraron una manera de eludir esta limitación.

De hecho, el experimento es tan simple que podría haberse realizado muchos siglos antes; pero nadie había tenido una imaginación suficientemente audaz para intentarlo.

Brumberg y Vavilov construyeron un obturador mecánico que se podía abrir para intervalos de tiempo de 0,1 s. Desde el otro lado, en una habitación completamente oscura, iluminaron la abertura con una luz verde extremadamente débil: unos 200 aW a 505 nm, como se muestra en la **Figura 14**. A esa intensidad, cada vez que se abre el obturador, pueden pasar aproximadamente 50 fotones. Este es precisamente el umbral de sensibilidad del ojo. Para realizar el experimento, miraron repetidamente el obturador abierto. El resultado fue simple pero sorprendente. A veces observaban la luz, y a veces no. Si la observaban o no, era completamente al azar. Brumberg y Vavilov dieron la sencilla explicación de que a bajas potencias de la lámpara, debido a las fluctuaciones, el número de fotones está por encima del umbral del ojo la mitad del tiempo, y por debajo de éste la otra mitad. Las fluctuaciones son aleatorias, por lo que también lo es la detección consciente de la luz. Esto *no* sucedería si la luz fuera un flujo *continuo*: en ese caso, el ojo detectaría la luz en cada abertura del obturador. (A intensidades luminosas más altas, el porcentaje de no observaciones disminuye rápidamente, de acuerdo con la explicación dada).

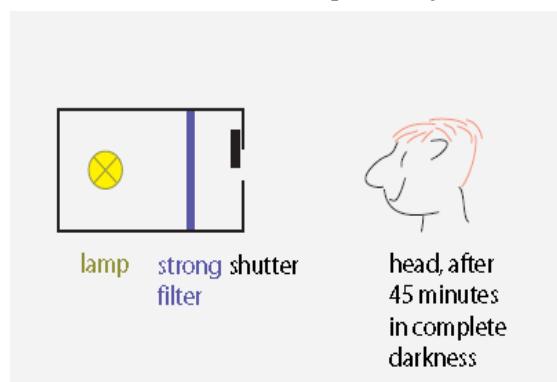
En resumen, un simple experimento demuestra:

- ▷ *La luz está hecha de fotones.*

**FIGURA 14** Cómo experimentar efectos de un solo fotón (ver texto).

Nadie sabe cómo se habría desarrollado la teoría de la luz si este simple experimento hubiera sido realizado 100 o incluso 2000 años antes.

La detección de fotones se hace más evidente si usamos dispositivos para ayudarnos. Una manera simple es comenzar con una pantalla detrás de un prisma iluminado

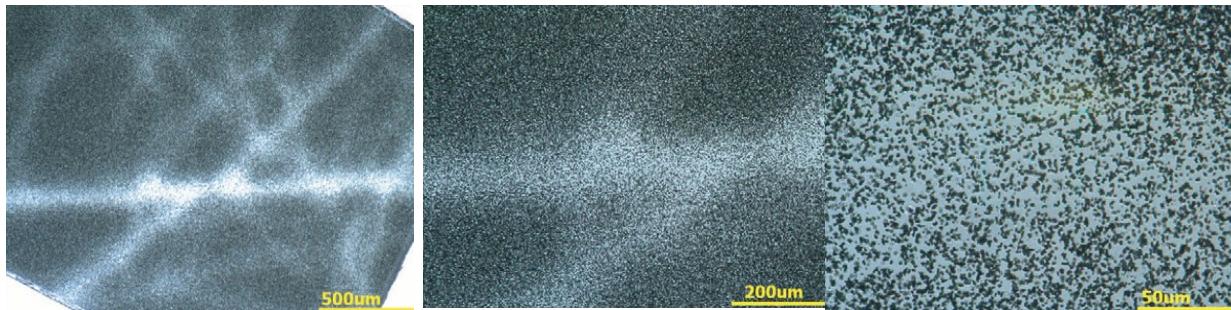
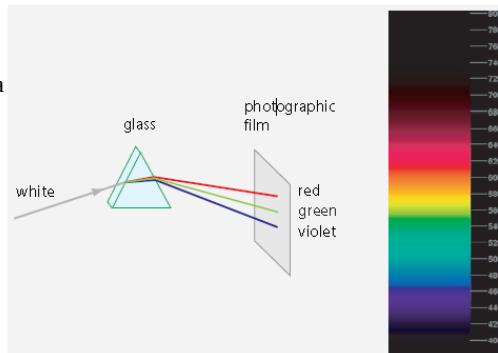


\*\* Friedrich Schiller (b. 1759 Marbach, d. 1805 Weimar), Poeta, dramaturgo e historiador alemán.

con luz blanca, como se muestra en la [Figura 15](#). La luz se divide en colores. A medida que la pantalla se coloca cada vez más lejos, la intensidad de la iluminación no puede llegar a ser arbitrariamente pequeña, ya que eso contradice la acción cuántica. Para comprobar esta predicción, sólo necesitamos una película fotográfica en blanco y negro. La película es ennegrecida por la luz del día de cualquier color; se convierte en gris oscuro a intensidades medias y gris claro en intensidades más bajas. Observando una película gris extremadamente ligera bajo el microscopio, descubrimos que, incluso bajo una iluminación uniforme, la tonalidad gris está realmente compuesta de manchas negras, dispuestas más o menos densamente. Todos estos puntos tienen el mismo tamaño, como se muestra en la [Figura 16](#). Este tamaño regular sugiere que una película fotográfica reacciona a fotones individuales. La investigación detallada confirma esta conjectura; en el siglo XX, los productores de películas fotográficas han aclarado el mecanismo subyacente en todos sus detalles.

**FIGURA 15** ¿Cómo aparece un espectro de luz blanca en distancias de pantalla extremadamente largas?

(El espectro de distancia de pantalla corta mostrado, © Andrew Young, está optimizado para visualización CRT, no para impresión en color, como se explica en [mintaka.sdsu.edu/GF/explain/optics/rendering.html](http://mintaka.sdsu.edu/GF/explain/optics/rendering.html).)



**FIGURA 16** Película fotográfica expuesta en aumento creciente (© Rich Evans).

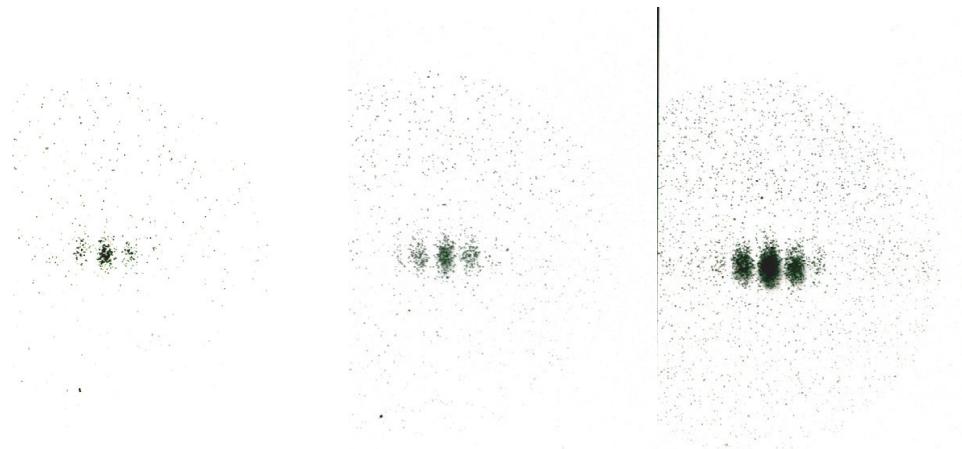
Los fotones individuales se pueden detectar de forma más elegante con dispositivos electrónicos. Tales dispositivos pueden ser fotomultiplicadores, fotodiodos, placas multicanal o células bastones en el ojo; una selección se muestra en la [Figura 17](#). Además, estos detectores muestran que la luz de baja intensidad *no* produce un color homogéneo: por el contrario, la baja intensidad produce un patrón aleatorio de puntos iguales, incluso cuando se observan fenómenos de ondas típicos tales como patrones de interferencia, como se muestra en la [Figura 18](#). Hoy en día, registrar y contar fotones individuales es un procedimiento experimental estándar. Los contadores de fotones forman parte de muchas configuraciones de espectroscopia, como las usadas para medir pequeñas concentraciones de materiales. Por ejemplo, se utilizan para detectar drogas en cabellos humanos.

Todos los experimentos muestran el mismo resultado: cuando se construyen detectores de luz sensibles con el objetivo de "ver" con la máxima precisión posible - y por lo tanto en ambientes tan oscuros como sea posible - se encuentra que la luz se manifiesta como un flujo de *cuantos de luz*. Hoy en día suelen llamarse *fotones*, término que apareció en 1926. La luz de intensidad baja o alta corresponde a un flujo con un número pequeño o grande de fotones.

Un ejemplo particularmente interesante de una fuente de luz de baja intensidad es un solo átomo.



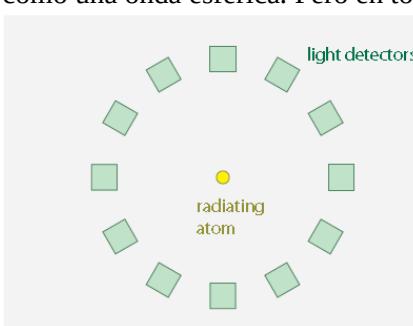
**FIGURA 17** Detectores que permiten el recuento de fotones: tubos fotomultiplicadores (izquierda), fotodiodo de avalancha (arriba a la derecha, c 1 cm) y placa multicanal (abajo a la derecha, 10 cm) (© Hamamatsu Photonics).



**FIGURA 18** Las ondas de luz están hechas de partículas: observación de fotones - puntos negros en estos negativos - en un experimento de doble hendidura de baja intensidad, con tiempos de exposición de 1, 2 y 5 s, utilizando un intensificador de imagen(© Delft University of Technology).

Los átomos son pequeñas esferas. Cuando los átomos irradian luz o rayos X, la radiación debe ser emitida como una onda esférica. Pero en todos los experimentos (vea la [Figura 19](#) para una configuración típica) la

luz emitida por un átomo *nunca* se ha encontrado que forme una onda esférica, en contraste con lo que podríamos esperar de la física cotidiana. Siempre que un átomo radiante está rodeado por muchos detectores , sólo se activa un *único* detector. Solamente el promedio sobre muchas emisiones y detecciones produce una forma esférica. Los experimentos muestran claramente que los fotones parciales no pueden ser detectados.



**FIGURA 19** Un átomo que irradia *un* fotón sólo activa un detector y retrocede en *una sola* dirección.

Todos los experimentos en luz tenue o penumbra muestran así que la descripción continua de la luz es incorrecta. Todos estos experimentos, por lo tanto, demuestran directamente que la luz es una corriente de partículas, como Epicuro había propuesto en la antigua Grecia. Mediciones más precisas confirman el papel del cuanto de acción: cada fotón conduce a la *misma* cantidad de cambio. Todos los fotones de la misma frecuencia ennegrecen una película o activan una pantalla de centelleo de la misma manera. La cantidad de cambio inducida por un solo fotón es, de hecho, la cantidad *más pequeña* de cambio que la luz puede producir.

Si no hubiera un valor mínimo de acción, la luz podría empaquetarse en cantidades arbitrariamente pequeñas. Pero la naturaleza es diferente. En términos simples: la descripción clásica de la luz por un potencial vectorial *continuo*  $A(t, x)$ , o campo electromagnético  $F(t, x)$ , cuya evolución es descrita por un principio de mínima acción, es errónea. Las funciones continuas no describen los efectos observados de las partículas. Se requiere una descripción modificada. La modificación tiene que ser significativa sólo en intensidades de luz bajas, ya que a las altas intensidades de cada día, el Lagrangiano clásico describe todas las observaciones experimentales con suficiente precisión.\*

¿A qué intensidad la luz deja de comportarse como una onda continua? La vista humana no nos permite distinguir conscientemente los fotones individuales, si bien los experimentos demuestran que el hardware del ojo es, en principio, capaz de hacerlo<sup>ref.15</sup>. Las estrellas más débiles que se pueden ver en la noche producen una intensidad tenue de cerca de  $0,6 \text{ nW / m}^2$ . Puesto que la pupila del ojo es pequeña, y no somos capaces de ver los fotones individuales, los fotones deben tener energías menores de 100 aJ. El experimento de Brumberg y Vavilov arroja un límite superior de alrededor de 20 aJ.

Un valor exacto para el cuanto de acción encontrado en la luz se debe deducir de un experimento de laboratorio. Algunos ejemplos se dan a continuación.

## FOTONES

En general, todos los experimentos muestran que un haz de luz de frecuencia  $f$  o frecuencia angular  $\omega$ , que determina su color, se describe con precisión como una corriente de fotones, cada uno con la misma energía  $E$  dada por

$$E = \hbar 2\pi f = \hbar\omega. \quad (8)$$

Esta relación fue deducida por primera vez por Max Planck en 1899. Él demostró que para la luz, la acción medible más pequeña está dada por el cuanto de acción  $\hbar$ . En resumen, el *color* es una propiedad de los fotones. Un haz de luz coloreado es una granizada de los correspondientes fotones.

El valor de la *constante de Planck* se puede determinar a partir de mediciones de cuerpos negros u otras fuentes de luz. Todas estas mediciones coinciden y producen

$$\hbar = 1,054\,571\,726(47) \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad (9)$$

un valor tan pequeño que nos permite entender por qué los fotones pasan desapercibidos para los seres humanos. Por ejemplo, un fotón verde con una longitud de onda de 555 nm tiene una energía de 0,37 aJ.

*Desafío 29 e* . De hecho, en condiciones normales de luz los fotones son tan numerosos que la aproximación continua para el campo electromagnético es muy precisa. En la oscuridad, la insensibilidad del procesamiento de señales del ojo humano - en particular, la lentitud de los receptores de luz - hace imposible el conteo de fotones<sup>ref.16</sup>. Sin embargo, el ojo no está lejos de la posible sensibilidad máxima. *Desafío 30 ny* De los números dados arriba sobre estrellas débiles, podemos estimar que los humanos son capaces de ver *conscientemente*, en condiciones ideales, flashes de aproximadamente media docena de fotones; en condiciones normales, los números son aproximadamente diez veces más altos.

Exploraremos las otras propiedades de los fotones. Principalmente, los fotones no tienen una masa medible (en reposo) y tampoco una carga eléctrica mensurable. *Desafío 31 s* ¿Puede confirmar esto? En realidad, los experimentos sólo pueden dar un límite superior para ambas cantidades. El presente límite superior experimental para la masa (en reposo) de un fotón es  $10^{-52}$  kg, y para la carga es  $5 \cdot 10^{-30}$  veces la carga electrónica<sup>ref.16</sup>. Estos límites son tan pequeños que podemos decir con seguridad que tanto la masa como la carga del fotón son nulas.

---

\* La transición del caso clásico al caso cuántico se llamaba cuantización. Este concepto, y las ideas detrás de él, son solamente de interés histórico hoy.

Sabemos que la luz intensa puede *empujar* objetos. Dado que la energía, la falta de masa y la velocidad de los fotones son conocidos, deducimos que el momento del fotón está dado por ([Desafío 32 e](#))

$$p = E/c = \hbar \cdot 2\pi/\lambda \quad \text{o} \quad p = \hbar k. \quad (10)$$

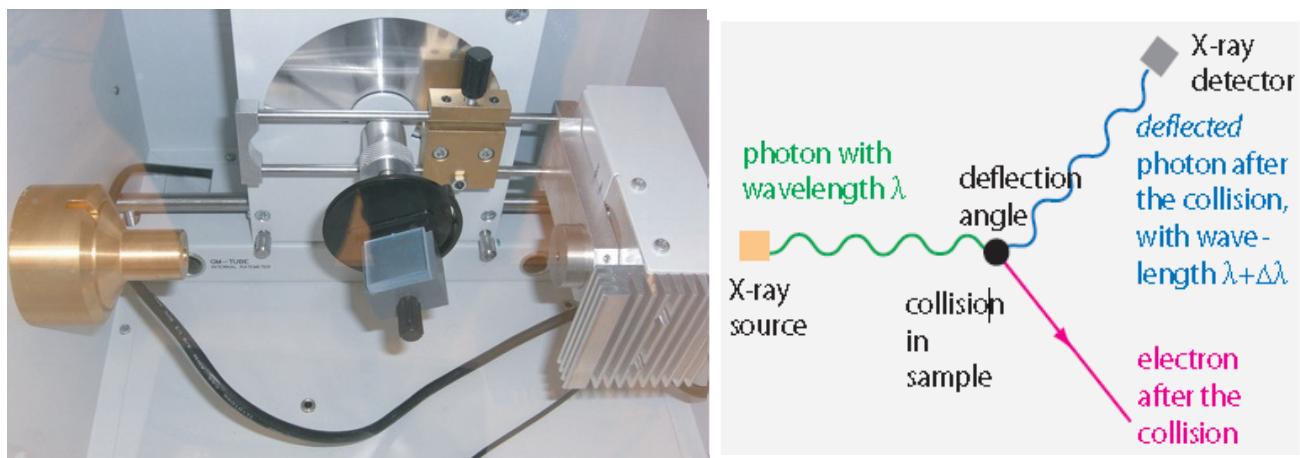
En otras palabras, si la luz está compuesta de partículas, debemos ser capaces de jugar al billar con ellas.

Realmente esto es posible, como lo demostró Arthur Compton en un famoso experimento de 1923. Dirigió rayos X, que son fotones de alta energía, sobre grafito, un material en el cual los electrones se mueven casi libremente<sup>ref.17</sup>. Encontró que cada vez que los electrones en el material son golpeados por los fotones de los rayos X, los rayos X desviados cambian de color. Su experimento se muestra en la [Figura 20](#). Como era de esperar, la fuerza del golpe está relacionada con el ángulo de deflexión del fotón. A partir del cambio de color y el ángulo de reflexión, Compton confirmó que la cantidad de movimiento de los fotones realmente satisface la expresión  $p = \hbar k$ .

Todos los demás experimentos coinciden en que los fotones tienen cantidad de movimiento. Por ejemplo, cuando un átomo *emite* luz, el átomo experimenta un *retroceso*. La cantidad de movimiento vuelve a estar dada por la expresión  $p = \hbar k$ . En resumen, el cuantos de acción determina la cantidad de movimiento del fotón.

El valor de la cantidad de movimiento de un fotón respeta el principio de indeterminación. Así como es imposible medir exactamente la longitud de onda de una onda y la posición de su cresta, también es imposible medir tanto la cantidad de movimiento como la posición de un fotón. [Desafío 33 s](#) ¿Puede confirmar esto? En otras palabras, el valor de la cantidad de movimiento del fotón es una consecuencia directa del cuantos de acción.

De nuestro estudio de la física clásica, sabemos que la luz tiene una propiedad además de su color: la luz puede ser *polarizada*. Eso es sólo una manera complicada de decir que la luz puede rotar los objetos que ilumina. En otras palabras, la luz tiene un momento angular orientado (principalmente) a lo largo del eje de propagación. ¿Qué pasa con los fotones? Las mediciones encuentran constantemente que cada cuantos de luz transporta un *momento angular* dado por  $L = \hbar$ . Se llama su *helicidad*. La cantidad es similar a la que se encuentra para partículas masivas: por lo tanto, también se puede hablar del *espín* (giro) de un fotón. En resumen, los fotones de alguna manera 'giran' - en un sentido paralelo o antiparalelo a su dirección de movimiento. Nuevamente, la magnitud de la helicidad del fotón, o espín, no es ninguna sorpresa; eso confirma la relación clásica  $L = E / \omega$  entre la energía y el momento angular que encontramos en la sección sobre electrodinámica clásica. Obsérvese que, no intuitivamente, el momento angular de un solo fotón es fijo, y por lo tanto independiente de su energía. Incluso los fotones más energéticos tienen  $L = \hbar$ . Por supuesto, el valor de la helicidad también respeta el límite dado por el cuantos de acción. Las muchas consecuencias del valor de la helicidad (espín),  $\hbar$ , se aclararán enseguida.



**FIGURA 20** Una versión moderna del experimento de Compton encaja en una mesa. El experimento muestra que los fotones tienen cantidad de movimiento: los rayos X -y por lo tanto los fotones en los que consisten- cambian de frecuencia cuando golpean a los electrones en la materia exactamente de la misma manera que se predice de las partículas que chocan (© Helene Hoffmann).

## ¿QUÉ ES LA LUZ?

La lumière est un mouvement luminaire de corps lumineux. Blaise Pascal\*  
«La luz es un movimiento luminario de los cuerpos luminosos».

En el siglo XVII, Blaise Pascal utilizó la declaración anterior sobre la luz para burlarse de ciertos físicos, ridiculizando el uso flagrante de una definición circular. Por supuesto, tenía razón: en su época, la definición era de hecho circular, ya que no se podría dar ningún significado a ninguno de los términos. Pero cuando los físicos estudian una observación con cuidado, los filósofos pierden. Todos esos términos originalmente indefinidos tienen ahora un significado definido y la definición circular queda resuelta. La luz es efectivamente un tipo de movimiento; este movimiento puede ser llamado con razón «luminario» porque, en contraste con el movimiento de los cuerpos materiales, tiene la propiedad única  $v = c$ ; los cuerpos luminosos, llamados *cuantos de luz o fotones*, se caracterizan y se diferencian de todas las demás partículas por su relación de dispersión  $E = cp$ , su energía  $E = \hbar\omega$ , su espín  $L = \hbar$ , la desaparición de todos los demás números cuánticos y la propiedad de ser los cuantos del campo electromagnético.

En resumen, la luz es un *flujo de fotones*. Es, verdaderamente, un "movimiento luminario de cuerpos luminosos". Los fotones proporcionan nuestro primer ejemplo de una propiedad general del mundo a pequeñas escalas: *todas las ondas y todos los flujos en la naturaleza están hechos de partículas cuánticas*. Un gran número de partículas cuánticas (coherentes) - o *cuantones* - se comportan y se forman como ondas. Veremos enseguida que este es el caso incluso para la materia. Los cuantones son los constituyentes fundamentales de *todas las ondas y todos los flujos*, sin excepción. Así, la descripción cotidiana de la luz continua es similar en muchos aspectos a la descripción del agua como un fluido continuo: los fotones son los átomos de la luz, y la continuidad es una aproximación válida para un gran número de partículas. Los cuantones individuales a menudo se comportan como partículas clásicas.

Los libros de Física discutieron en detalle la llamada *dualidad onda-partícula*. Seamos claros desde el principio: los cuantones, o partículas cuánticas, no son *ni* ondas clásicas *ni* partículas clásicas. En el mundo microscópico, los cuantones son los objetos fundamentales.

Sin embargo, hay mucho que aún no está claro. ¿De dónde vienen, dentro de la materia, estos fotones monocromáticos? Aún más interesante, si la luz está hecha de cuantones, todos los campos electromagnéticos, incluso los estáticos, deben estar hechos de fotones también. Sin embargo, en los campos estáticos nada fluye. ¿Cómo se resuelve esta aparente contradicción? ¿Y cuáles son las implicaciones que tiene el aspecto de partículas en estos campos estáticos? ¿Cuál es la diferencia entre los cuantones y las partículas clásicas? Las propiedades de los fotones requieren un estudio más cuidadoso.

## EL TAMAÑO DE LOS FOTONES

En primer lugar, podríamos preguntarnos: ¿De qué están hechos estos fotones? Hasta el momento, todos los experimentos realizados hasta el límite actual de unos  $10^{-20}$  m, dan la misma respuesta: "no podemos encontrar nada". Esto es consistente con una anulación de la masa y un tamaño nulo de los fotones.

De hecho, intuitivamente esperaríamos que un cuerpo con un tamaño finito tuviera una masa finita. Por lo tanto, aunque los experimentos pueden dar sólo un límite superior, es consistente afirmar que un fotón tiene un *tamaño cero*.

Una partícula de tamaño cero no puede tener ningún constituyente. Así, un fotón no se puede dividir en entidades más pequeñas: los fotones no son compuestos. Por esta razón, se llaman partículas *elementales*. Pronto daremos algunos argumentos ulteriores más fuertes para este resultado. ([Desafío 34 s](#) ¿Puede encontrar uno?) Sin embargo, la conclusión es extraña. ¿Cómo puede un fotón tener tamaño nulo, no tener constituyentes, y todavía ser *algo*? Esta es una pregunta difícil; la respuesta aparecerá sólo en el último volumen de nuestra aventura. Por el momento, simplemente tenemos que aceptar la situación tal cual es. Por lo tanto, pasamos a una pregunta más fácil.

---

\* Blaise Pascal (b. 1623 Clermont, d. 1662 Paris), important French mathematician and physicist up to the age of 26, after which he became a theologian and philosopher.

## ¿LOS FOTONES SON NUMERABLES? - LUZ COMPRIMIDA

Also gibt es sie doch. Max Planck\*  
"Así que existen después de todo."

Vimos anteriormente que la forma más sencilla de contar los fotones es distribuirlos a través de una pantalla grande y luego absorberlos. Pero este método no es del todo satisfactorio, en tanto que destruye los fotones.

¿Cómo podemos contar los fotones sin destruirlos?

Una forma es reflejar los fotones en un espejo y medir el retroceso del espejo. Parece casi increíble, pero hoy en día este efecto se está volviendo mensurable incluso para un pequeño número de fotones. Por ejemplo, debe tenerse en cuenta en relación con los espejos láser utilizados en los detectores de ondas gravitacionales, cuya posición debe medirse con alta precisión.

Otra forma de contar los fotones sin destruirlos implica el uso de cavidades especiales de láser de alta calidad. Es posible contar los fotones por el efecto que tienen sobre los átomos hábilmente colocados dentro de dicha cavidad.

En otras palabras, la intensidad de la luz puede de hecho ser medida sin absorción. Estas medidas muestran un problema importante: incluso los mejores haces de luz, de los más sofisticados láseres, *fluctúan* en intensidad. No hay haces estables. Esto no es ninguna sorpresa: si un haz de luz *no fluctuase*, observándolo dos veces produciría un valor nulo para la acción. Sin embargo, hay una acción mínima en la naturaleza, a saber  $\hbar$ . Por lo tanto, cualquier haz y cualquier flujo en la naturaleza *debe fluctuar*.

Pero hay más. Un haz de luz es descrito, en una sección transversal, por su intensidad y su fase. El cambio o acción que se produce mientras un haz se mueve viene dado por la variación en el producto de intensidad y fase. Los experimentos confirman la deducción obvia: la intensidad y la fase de un haz se comportan como la cantidad de movimiento y la posición de una partícula, en el sentido de que obedecen a una relación de indeterminación. Puede deducirlo usted mismo, de la misma manera que dedujimos las relaciones de Heisenberg. Usando como intensidad característica  $I = E / \omega$ , la energía dividida por la frecuencia angular, y llamando a la fase  $\varphi$ , obtenemos\*

$$\Delta I \Delta \varphi \geq \hbar / 2 \quad (12)$$

Equivalentemente, el producto de la indeterminación por el numero medio de fotones  $n = I/\hbar = E/\hbar \omega$  es la fase y obedece a:

$$\Delta n \Delta \varphi \geq 1/2 \quad (13)$$

Para la luz emitida por una lámpara ordinaria, la considerada *luz térmica*, el producto en el lado izquierdo de la desigualdad anterior es un numero grande. Equivalentemente, el producto de indeterminación para la acción (12) es un múltiplo muy grande del cuanto de acción.

Por otro lado, para rayos láser, es decir, haces de *luz coherente*,\*\* el producto incertidumbre está cerca de 1/2. Un ejemplo de luz coherente se da en la [Figura 22](#).

Hoy en día es posible producir luz para la cual el producto de las dos incertidumbres en la ecuación (13) está cerca de 1/2, pero cuyos dos valores *difieren* mucho entre sí (en unidades del llamado *espacio fasor* ilustrado en la [Figura 21](#)). Dicha luz se llama *no-clásica o comprimida*.

La estadística de los fotones es o hiper o sub-Poisson. Estos haces de luz requieren la participación de un laboratorio desarrollado para su producción y se utilizan en muchas aplicaciones de investigación modernas.

\*\* Max Planck, en sus últimos años, dijo esto después de permanecer en silencio, durante mucho tiempo, frente a un aparato que contaba fotones individuales produciendo un clic para cada fotón detectado. Durante gran parte de su vida, Planck se mostró escéptico con respecto al concepto de fotones, aunque sus propios experimentos y conclusiones fueron el punto de partida para su introducción.

\*\* Se supone un número de fotones grande en la expresión. Esto es obvio, ya que  $\Delta\varphi$  no puede crecer más allá de todo límite. Las relaciones exactas son

$$\Delta I \Delta \cos \varphi \geq \hbar/2 |\langle \sin \varphi \rangle|$$

$$\Delta I \Delta \sin \varphi \geq \hbar/2 |\langle \cos \varphi \rangle| \quad (11)$$

Donde  $\langle x \rangle$  denota el valor esperado del observable

\*\* La luz coherente es una luz para los que la distribución de probabilidad del número de fotones es Poissoniana; en particular, la varianza es igual a la media del número de fotones. La luz coherente se describe mejor como compuesta de fotones en estados cuánticos coherentes. Tal *estado coherente* (canónico), o *estado de Glauber*, es formalmente un estado con  $\Delta\varphi \rightarrow 1/n$  e  $\Delta n \rightarrow n$ .

La luz no clásica debe ser tratada con sumo cuidado, ya que las perturbaciones más pequeñas la transforman de nuevo en luz coherente ordinaria (o también luz térmica), en el que la estadística de Poisson (o también de Bose-Einstein) aún se mantienen. Una panorámica general de los principales tipos de haces de luz se da en la [Figura 21](#), junto con su intensidad y el comportamiento de fase. (Varias propiedades mostradas en la Figura están definidas sólo para el espacio de las fases de una sola celda.)

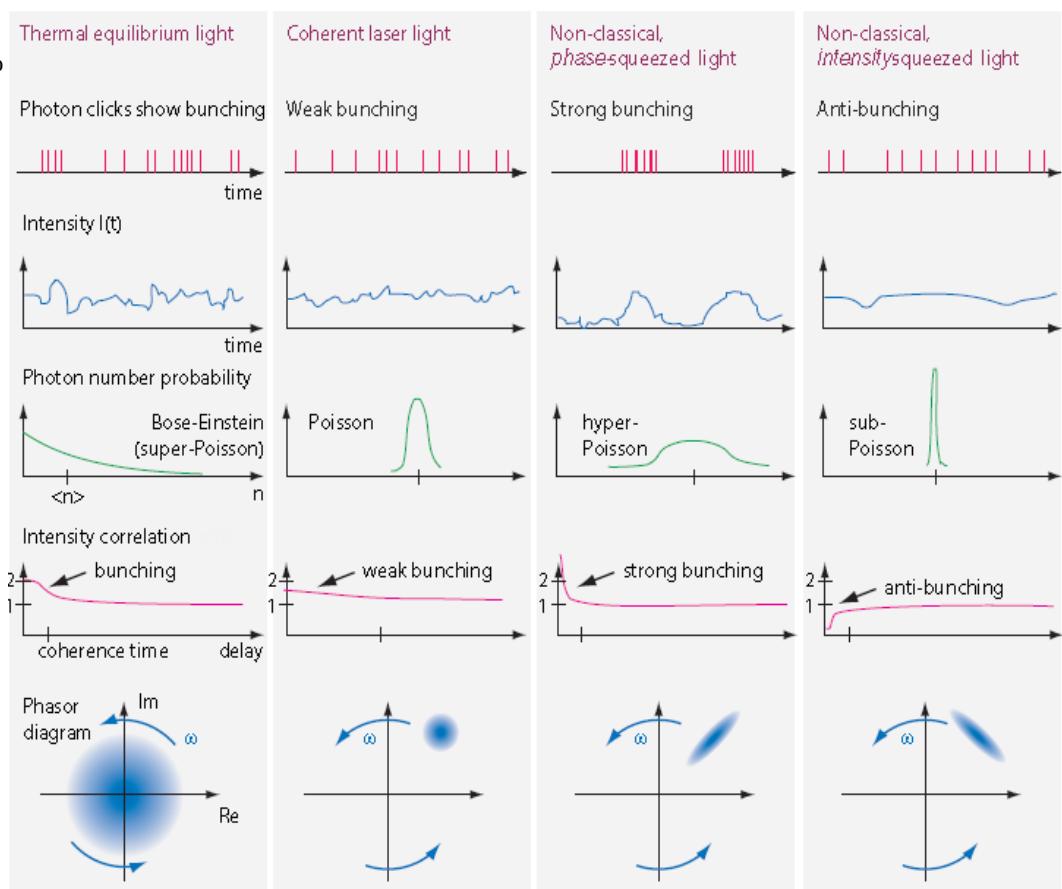
Un extremo de luz no clásica es la *luz en fase comprimida*. Puesto que un haz de luz en fase comprimida tiene una fase (casi) determinada, el número de fotones en tal haz oscila de cero a (casi) el infinito. En otras palabras, con el fin de producir luz láser coherente que se aproxima a una onda sinusoidal pura lo más perfectamente posible, tenemos que aceptar que el número de fotones sea lo más indeterminado posible.

Este haz tiene fluctuaciones de fase extremadamente pequeñas que ofrecen alta precisión en interferometría; el ruido de fase es el más bajo posible.

El otro extremo de la luz no clásica es un haz con un número dado, fijo de fotones, y por lo tanto con una muy alta indeterminación de fase. En tal *haz de luz de alta amplitud comprimido*, la fase fluctúa de manera irregular. <sup>\*\*</sup> Este tipo de luz no clásica, comprimida es ideal para mediciones de intensidad de precisión, ya que proporciona el más bajo ruido de intensidad posible. Este tipo de luz muestra anti-reagrupamiento de fotones. Para obtener una imagen más clara, podemos dibujar gráficos correspondientes a la [Figura 22](#) para luz de fase comprimida y amplitud comprimida. [Desafío 36 s](#)

Por el contrario, la luz *coherente* que se emite por los punteros láser y otros láseres se encuentra entre los dos tipos extremos de luz comprimida: las indeterminaciones de fase e intensidad de magnitud similar.

**FIGURA 21** Cuatro tipos de luz: luz térmica, luz láser y dos tipos de luz comprimida.



Las observaciones de la luz térmica, luz láser coherente y la luz no clásica muestran una importante propiedad de la naturaleza: el número de fotones en un haz de luz no es una cantidad bien definida. En general, es indeterminado, y *fluctúa*. Los fotones, a diferencia de las piedras, no pueden ser contados con

<sup>\*</sup>Los estados cuánticos más apropiados para describir esta luz se llaman *estados número*; a veces se les llama *estados de Fock*. Estos estados son estados estacionarios, y por tanto estados propios del Hamiltoniano, y contienen un número fijo de fotones.

precisión - siempre y cuando se propaguen y no se absorban. Sólo se puede determinar un número aproximado, promedio de fotones, dentro de los límites establecidos por la indeterminación.

*Desafío 37* ¿Es correcto afirmar que el número de fotones al inicio de un haz no es necesariamente el mismo que al final del haz?

Las fluctuaciones en el número de fotones son de mayor importancia a frecuencias ópticas. A frecuencias de radio, las fluctuaciones en el número de fotones son generalmente despreciables, debido a la baja energía del fotón y los habituales altos números de fotones implicados. Por el contrario, a las energías de los rayos gamma, los efectos de las ondas juegan un pequeño papel. Por ejemplo, hemos visto que el espacio intergaláctico profundo, oscuro, lejos de cualquier estrella, hay cerca de 400 fotones por centímetro cúbico; que forman la radiación cósmica de fondo.

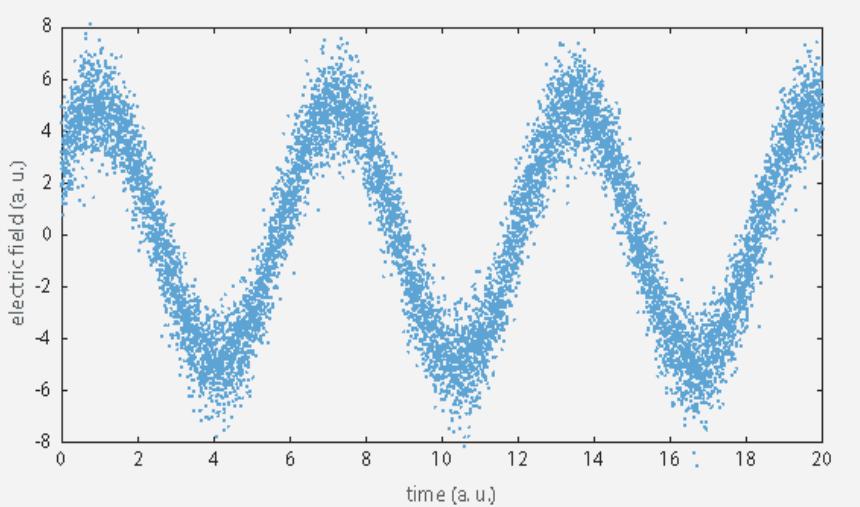
Este número de densidad de fotones, como el número de fotones en un haz de luz, tiene también una indeterminación en la medición. -*Desafío 38 s* ¿Puede estimarla?

En resumen, a diferencia de los guijarros, los *fotones son contables, pero su número no es fijo*. Y esta no es la única diferencia entre los fotones y los guijarros.

### LAS POSICIONES DE LOS FOTONES

¿Dónde está un fotón cuando se mueve en un rayo de luz? La teoría cuántica da una respuesta simple: en ninguna parte en particular. Esto se demuestra más espectacularmente mediante experimentos con interferómetros, como el interferómetro básico mostrado en la [Figura 23](#).

**FIGURA 22** Una forma sencilla de ilustrar la indeterminación de la intensidad y fase de un haz de luz: los campos eléctricos medidos de la onda electromagnética coherente con una intensidad baja, que consta de una docena de fotones. La onda sinusoidal borrosa corresponde al diagrama vectorial en la parte inferior de la segunda columna de la descripción anterior. Para un gran número de fotones, la magnitud relativa del ruido es insignificante. (© Rüdiger Paschotta)



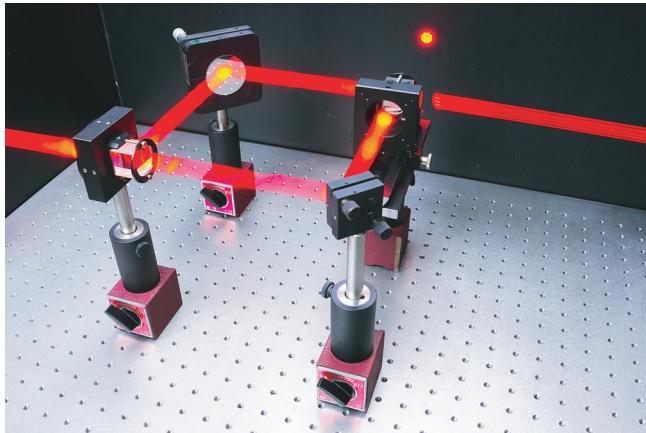
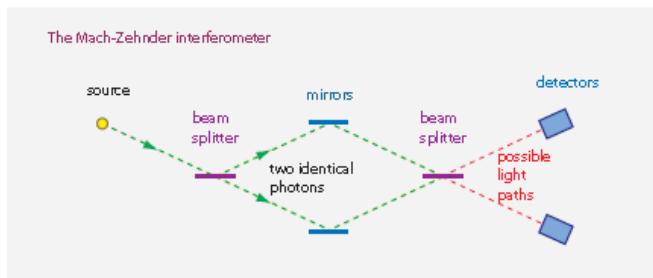
Los interferómetros muestran que incluso un haz hecho de un *solo* fotón puede ser dividido, conducido a lo largo de dos trayectorias diferentes, y luego recombinado. La interferencia resultante muestra que no se puede decir que el fotón único haya tomado ninguna de las dos trayectorias. Si uno de los dos caminos está bloqueado, el patrón de la pantalla cambia. En otras palabras, de alguna manera el fotón debe haber tomado ambos caminos al mismo tiempo.

Los fotones no pueden estar localizados: no tienen posición.\*

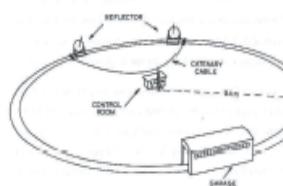
Llegamos a la conclusión de que los pulsos de luz macroscópicos tienen trayectorias, pero los fotones individuales en ellos no las tienen. Los fotones no tienen ni posición ni trayectoria. Sólo un gran número de fotones puede tener posiciones y trayectorias, y sólo aproximadamente.

Esta imposibilidad de localizar fotones puede ser cuantificada. La interferencia demuestra que es imposible localizar fotones en la dirección *transversal* al movimiento. Podría parecer menos difícil localizar los fotones a lo largo de la dirección del movimiento cuando forman parte de un pulso de luz, pero esto es un error. En este último caso, el cuanto de acción implica que la indeterminación en la posición longitudinal está dada al menos por la longitud de onda de la luz. *Desafío 36 e* ¿Puede confirmar esto?

\*\* No podemos evitar esta conclusión diciendo que los fotones se *subdividen* en el divisor de haz: si colocamos un detector en cada brazo, nos encontramos con que nunca detectan un fotón al mismo tiempo. Los fotones no se pueden dividir.



**FIGURA 23** El interferómetro Mach-Zehnder y una realización práctica, de aproximadamente 0,5 m de tamaño (© Félix Dieu and Gaël Osowiecki).



**FIGURA 24** La instalación experimental original con el que Hanbury Brown y Twiss midieron los diámetros estelares en Narrabri en Australia. La distancia entre los dos colectores de luz puede cambiarse moviendo sobre raíles. Los detectores de luz están en el extremo de los polos y cada uno de ellos, como han descrito, 'recoge la luz como la lluvia en un cubo'. (© John Davis).

Esto también está indicado en la [Figura 21](#). La imposibilidad de localizar fotones es una consecuencia del cuanto de acción. Por ejemplo, la longitud de coherencia transversal es debida a la indeterminación de la cantidad de movimiento en la dirección transversal; los valores de acción para las trayectorias que conducen a puntos separados menos de una longitud de coherencia difieren menos del cuanto de acción  $\hbar$ . Cada vez que se detecta un fotón en algún lugar, por ejemplo, por absorción, *no se puede hacer* una afirmación exacta sobre su dirección o su origen. A veces, sin embargo, en casos especiales, puede haber una alta probabilidad de una cierta dirección o fuente.

La falta de localización significa que los fotones *no pueden* ser vistos simplemente como trenes de onda corta. Por ejemplo, se puede aumentar la longitud de coherencia mediante el envío de la luz a través de un filtro estrecho. Los fotones son realmente entidades *no localizables*, específicas del mundo cuántico. Los fotones no son ni pequeñas piedras ni paquetes de ondas pequeñas. Por el contrario, el 'camino de la luz', 'la

'posición de pulso de luz' y 'coherencia' son propiedades de un conjunto de fotones, y *no* se aplica a un único fotón.

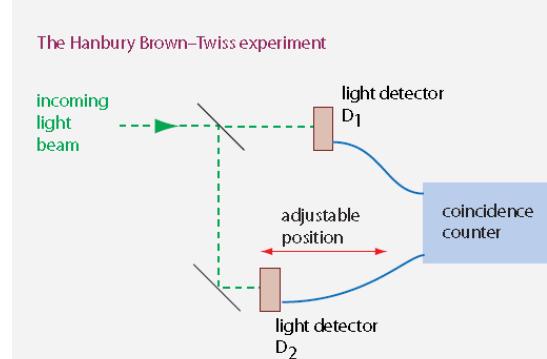
Siempre que los fotones pueden ser *casi* localizados a lo largo de la dirección del movimiento, como en la luz coherente, uno puede preguntarse si los fotones están alineados, uno tras otro, en un haz de luz. Por supuesto, hemos visto que no tiene sentido hablar de su ubicación *exacta*. Pero, ¿pueden los fotones en un rayo perfecto llegar a intervalos casi regulares?

Para vergüenza de los físicos, el estudio de esta cuestión fue iniciado por dos astrónomos, Robert Hanbury Brown y Richard Twiss, en 1956 y se enfrentaron con varios años de incredulidad<sup>ref.18</sup>. Utilizaron un método simple para medir la probabilidad de que el segundo fotón en un haz de luz llegue en un momento dado después del primero. Simplemente dividieron el haz, pusieron un detector en la primera rama y variaron la posición de un segundo detector en la otra rama transversal como se muestran en las Figuras 24 - de unos pocos 188 m - y midieron las correlaciones de intensidad entre ellos. Hanbury Brown y Twiss descubrieron que las fluctuaciones en la intensidad dentro del volumen de coherencia están correlacionadas. Por lo que los fotones mismos están correlacionados. Con este experimento, fueron capaces de medir el diámetro de numerosas estrellas lejanas.

Inspirado por el éxito de Hanbury Brown y Twiss, los investigadores desarrollaron un método sencillo para medir la probabilidad de un segundo fotón en un haz de luz para llegar en un tiempo determinado después del primero. Se limitaron a dividir el haz, colocar un detector en la primera rama, y variaban la posición de un segundo detector en el otro brazo. El dispositivo está esbozado en la Figura 25.

Este experimento se llama ahora un *experimento de Hanbury Brown Twiss*. Se tiene que, para la luz coherente dentro del volumen de coherencia, los 'clic' en los dos contadores - y por lo tanto los fotones mismos - están *correlacionados*. Este resultado es completamente contrario a la electrodinámica clásica. Para ser más precisos, estos experimentos muestran que cuando el primer fotón impacta, el segundo fotón es más probable que lo haga sólo con posterioridad. Por lo tanto, los fotones en los haces de luz están *reagrupados (amontonados)*. El reagrupamiento es uno de los muchos resultados que demuestran que los fotones son cuantones, que realmente son necesarios para describir la luz, y que son entidades no localizables. Como veremos más adelante, el resultado también implica que los fotones son bosones.

**FIGURA 23** Cómo medir las estadísticas de fotones con un contador electrónico de coincidencias, la variación se mide cambiando la posición de un detector.



Cada haz de luz tiene un límite de tiempo máximo para el reagrupamiento, llamado *tiempo de coherencia*. Para tiempos más largos que el tiempo de coherencia, la probabilidad de reagrupamiento es baja e independiente del intervalo de tiempo, como se muestra en la Figura 23. El tiempo de coherencia caracteriza cada haz de luz, o más bien cada fuente de luz. De hecho, a menudo es más fácil pensar en términos de *longitud de coherencia* de un haz de luz. Para la luz térmica, la longitud de coherencia es de sólo unos pocos micrómetros: un pequeño múltiplo de la longitud de onda. Las longitudes de coherencia más grandes, de más de 300 000 km, se obtienen con láseres de investigación que tienen una longitud de banda extremadamente estrecha de solo 1 Hz. Curiosamente, la luz coherente se encuentra incluso en la naturaleza: se han encontrado varias estrellas especiales que la emiten.<sup>ref.19</sup>

Aunque la intensidad de un buen rayo láser es casi constante, los fotones no llegan a intervalos regulares. Incluso la mejor luz láser muestra reagrupamiento, aunque con diferentes estadísticas y en menor grado que la luz de la lámpara, como se ilustra en la Figura 21. La luz cuyos fotones llegan regularmente, exhibiendo así el llamado (fotón) *anti-amontonamiento*, es obviamente no clásica en el sentido definido anteriormente; dicha luz sólo puede producirse mediante disposiciones experimentales especiales.

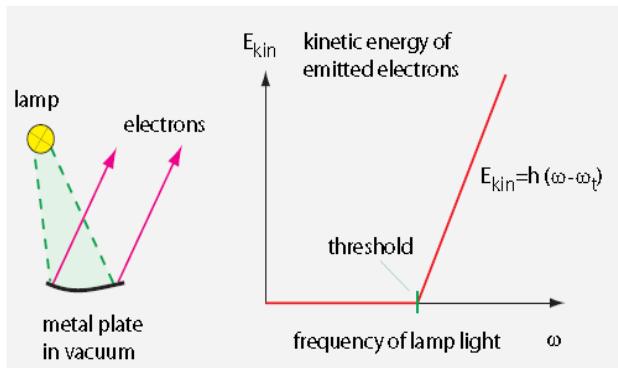


FIGURA 24 La energía cinética de los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico.

Los ejemplos extremos de este fenómeno están siendo investigados en la actualidad por varios grupos de investigación con el objetivo de construir fuentes de luz que emiten un fotón a la vez, en intervalos de tiempo regulares, tan confiablemente como sea posible. En pocas palabras, podemos afirmar que la estadística precisa de los fotones en un haz de luz depende del mecanismo de la fuente luminosa

En resumen, los experimentos nos obligan a concluir que la luz está hecha de fotones, pero también que los fotones no pueden ser localizados en los rayos de luz. No tiene sentido hablar de la posición de un fotón en general; la idea tiene sentido sólo en algunas situaciones particulares, y luego sólo aproximadamente y como un promedio estadístico.

### ¿SON NECESARIOS LOS FOTONES?

A la luz de los resultados descubiertos hasta ahora, la respuesta a la pregunta anterior es obvia. Pero el asunto es complicado. En los libros de texto, el *efecto fotoeléctrico* suele citarse como la primera y más evidente prueba experimental de la existencia de los fotones. En 1887, Heinrich Hertz observó que para ciertos metales, como el litio o el cesio, la luz ultravioleta incidente conduce a la carga del metal. Estudios posteriores del efecto mostraron que la luz provoca la emisión de electrones y que la energía de los electrones expulsados no depende de la intensidad de la luz, sino sólo de la diferencia entre  $\hbar$  veces su frecuencia y una energía umbral dependiente del material. La Figura 24 resume el experimento y las mediciones.

En física clásica, el efecto fotoeléctrico es difícil de explicar. Pero en 1905, Albert Einstein dedujo las mediciones a partir de la suposición de que la luz está hecha de fotones de energía  $E = \hbar\omega$ <sup>ref.20</sup>. Los estudios sobre el efecto mostraron que la luz provoca la emisión de electrones y que la energía de los electrones expulsados no depende de la intensidad de la luz, sino sólo de la diferencia entre  $\hbar$  veces su frecuencia y una energía umbral dependiente del material. La Figura 24 resume el experimento y las mediciones de que esta energía se utiliza en parte para llevar el electrón por encima del umbral, y en parte para darle energía cinética. Más fotones sólo conducen a más electrones, no a electrones más rápidos. En 1921, Einstein recibió el Premio Nobel por la explicación del efecto fotoeléctrico. Pero Einstein era un *genio*: dedujo el resultado correcto por un razonamiento algo incorrecto. El error (pequeño) fue la suposición de que un haz de luz clásico y continuo produciría un efecto diferente. En realidad, es fácil ver que un campo electromagnético clásico y continuo que interactúa con materia discreta, hecha de átomos discretos que contienen electrones discretos, conduciría exactamente al mismo resultado, con la condición de que el movimiento de electrones sea descrito por la teoría cuántica. Varios investigadores lo confirmaron a principios del siglo XX<sup>ref.21</sup>. El efecto fotoeléctrico por sí mismo *no* implica la existencia de fotones.

De hecho, muchos investigadores en el pasado no estaban convencidos de que el efecto fotoeléctrico demostrara la existencia de fotones. Históricamente, el argumento más importante para la *necesidad* de los cuantos de luz fue dado por Henri Poincaré. En 1911 y 1912, a la edad de 57 años y pocos meses antes de su muerte, publicó dos artículos influyentes que demuestran que la ley de radiación de los cuerpos negros - en la cual el cuant de acción había sido descubierto por Max Planck - requiere la existencia de fotones<sup>ref.22</sup>. También demostró que la cantidad de radiación emitida por un cuerpo caliente es *finita* sólo debido a la naturaleza *cuántica* de los procesos que conducen a la emisión de luz. Una descripción de estos procesos en términos de electrodinámica clásica conduciría a cantidades (casi) *infinitas* de energía radiada. Los dos

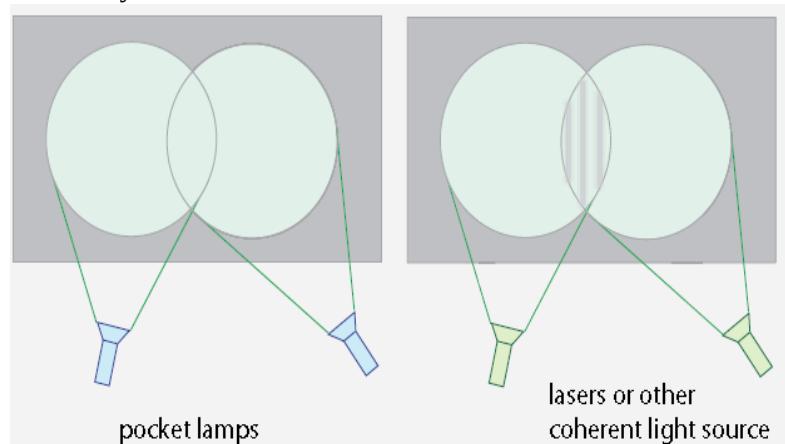
artículos influyentes de Poincaré convencieron a la mayoría de los físicos de que valdría la pena estudiar los fenómenos cuánticos con más detalle. Poincaré no conocía el límite de acción  $S \geq \hbar$ ; sin embargo, su argumento se basa en la observación de que la luz de una frecuencia dada tiene una intensidad mínima, es decir, un solo fotón. Tal haz de un fotón puede dividirse en dos haces, por ejemplo usando un espejo semireflectante. Sin embargo, en conjunto, estos dos haces nunca contienen más de un solo fotón.

Otro experimento interesante que requiere fotones es la observación de "moléculas de fotones". En 1995, Jacobson et al. predijeron que la longitud de onda de De Broglie de un *paquete* de fotones podía ser observada<sup>ref.23</sup>. Según la teoría cuántica, la longitud de onda del paquete está dada por la longitud de onda de un solo fotón dividido por el número de fotones en el paquete. El equipo argumentó que la longitud de onda del paquete podría ser observable si tal paquete pudiera ser dividido y recombinado sin destruir la cohesión dentro de él. En 1999, este efecto fue efectivamente observado por Padua y su grupo de investigación en Brasil. Utilizaron un montaje cuidadoso con un cristal no lineal para crear lo que llamaron un *bifotón*, y observaron sus propiedades de interferencia, encontrando una reducción en la longitud de onda efectiva por el factor predicho de dos. Desde entonces, se han creado y observado paquetes con tres e incluso cuatro fotones entrelazados<sup>ref.24</sup>.

Otro argumento para la necesidad de fotones es el retroceso mencionado anteriormente por los átomos que emiten luz. El retroceso medido en estos casos se explica mejor por la emisión de un fotón en una dirección particular. Por el contrario, la electrodinámica clásica predice la emisión de una onda esférica, sin dirección preferencial.

Obviamente, la observación de la *luz no clásica*, también llamada luz *comprimida (squeezed light)*, también defiende la existencia de fotones, ya que la luz comprimida demuestra que los fotones son realmente un aspecto *intrínseco* de la luz, necesario incluso cuando las interacciones con la materia no juegan ningún papel.<sup>ref.25</sup> Lo mismo es cierto para el efecto Hanbury Brown-Twiss.

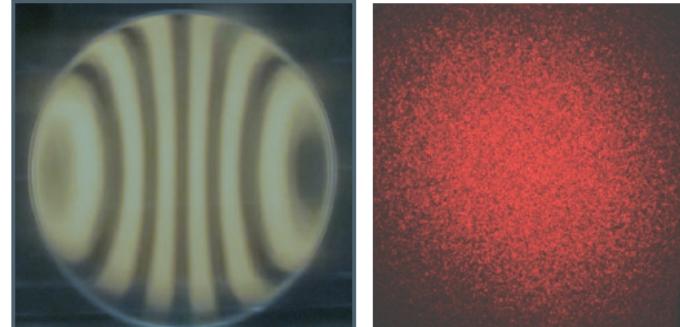
**FIGURA 25** Dos situaciones en las cuales la luz cruza la luz: fuentes de luz diversas conducen a resultados diversos.



Por último, el decaimiento espontáneo de los estados atómicos excitados también requiere la existencia de fotones. Esto no puede explicarse mediante una descripción continua de la luz.

En resumen, el concepto de fotón es realmente necesario para una descripción precisa de la luz; pero los detalles son a menudo sutiles, ya que las propiedades de los fotones son insólitas y requieren un cambio en nuestros hábitos de pensamiento. Para evitar estos problemas, la mayoría de los libros de texto dejan de hablar de los fotones después de llegar al efecto fotoeléctrico. Esto es una pena, ya que sólo entonces las cosas se ponen interesantes.

**FIGURA 26** Ejemplos de patrones de interferencia que aparecen cuando haces de luz coherente se cruzan: la interferencia producida por un telescopio de espejo parabólico DIY 27 cm de diámetro, y un láser de patrón manchas sobre una superficie rugosa (© Mel Bartels, Epzaw)..



Reflexione sobre lo siguiente. Obviamente, todos los campos electromagnéticos están hechos de fotones. En la actualidad, los fotones se pueden contar para rayos gamma, rayos X, luz ultravioleta, luz visible y luz infrarroja. Sin embargo, para frecuencias más bajas, como las ondas de radio, los fotones aún no han sido detectados. [Desafío 37 ny](#) ¿Puede imaginar qué sería necesario para contar los fotones emitidos desde una estación de radio? Esta cuestión conduce directamente a la pregunta más importante de todas:



**FIGURA 26 bis** Arriba: patrones de interferencia calculados - e indistinguibles de los observados en condiciones ideales, "libro de texto" - producido por dos ranuras paralelas estrechas ilumina con luz verde y blanco.

Abajo: dos haces Gaussianos que interfieren en ángulo (© Dietrich Zawischa, Rüdiger Paschotta).



### INTERFERENCIA: ¿CÓMO PUEDE UNA ONDA ESTAR CONSTITUIDA DE PARTÍCULAS?

Die ganzen fünfzig Jahre bewusster Grübelei haben mich der Antwort auf die Frage 'Was sind Lichtquanten?' nicht näher gebracht. Heute glaubt zwar jeder Lump er wisse es, aber er täuscht sich. Albert Einstein, escribió esto unos años antes de su muerte en una carta a Michele Besso<sup>ref.26</sup>.1951 \*

"Cincuenta años de reflexión consciente no me han acercado más a la respuesta a la pregunta «¿Qué son los cuantos de luz?» Hoy en día, cada sinvergüenza piensa que lo sabe, pero está equivocado.

Si una onda luminosa está hecha de partículas, deberíamos ser capaces de explicar todas y cada una de sus propiedades de onda en términos de fotones. Los experimentos mencionados anteriormente ya sugieren que esto es posible sólo porque los fotones son partículas *cuánticas*. Echemos un vistazo más detallado a este argumento.

La luz puede *cruzar* otra luz sin ser perturbada, por ejemplo, cuando los rayos de luz de dos linternas brillan cada una atravesando la otra. Esta observación no es difícil de explicar con los fotones; puesto que los fotones no interactúan entre sí y son puntuales, nunca se golpean entre sí. En realidad, existe una probabilidad positiva extremadamente pequeña para su interacción, como se verá a continuación, pero este efecto no es observable en la vida cotidiana.

Pero sigue habiendo un problema. Si dos haces de luz *coherente*, es decir de frecuencia idéntica y una relación de fase fija se cruzan, observamos regiones brillantes y oscuras alternando: las llamadas *franjas de interferencia*.\* El dispositivo esquemático se muestra en la [Figura 27](#). Ejemplos de interferencia real se dan en las [Figuras 26 y 26 bis](#).

¿Cómo aparecen estas franjas de interferencia? ¿Cómo puede ser que los fotones no se detecten en las regiones oscuras? Ya conocemos la única respuesta posible: el brillo en un lugar dado corresponde a la *probabilidad* de que un fotón llegue allí.

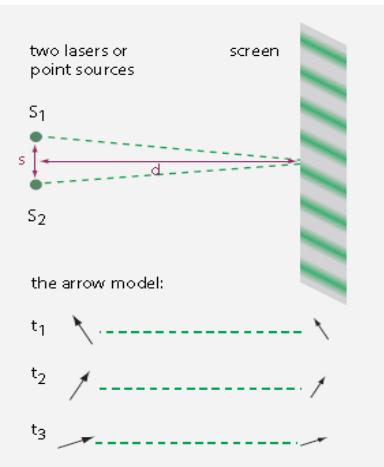
Las franjas implican:

- ▷ Los fotones se comportan como pequeñas *flechas* que se mueven.

---

\* Este experimento sólo es posible si ambos haces se derivan de un único haz por división, o si se utilizan dos láseres de alta precisión caros. ([Desafío 38 s](#) ¿Por qué?)

**FIGURA 27** Interferencia y la descripción de la luz con flechas (en tres instantes de tiempo).



Algunas reflexiones ulteriores conducen a la siguiente descripción:

- La flecha es siempre perpendicular a la dirección del movimiento.
- La dirección de la flecha permanece fija en el espacio cuando los fotones se mueven.
- La longitud de una flecha se acorta con el cuadrado de la distancia recorrida.
- *La probabilidad de que un fotón llegue a algún lugar viene dada por el cuadrado de una flecha.*
- *La flecha final es la suma de todas las flechas que llegan allí por todos los caminos posibles.*
- Los fotones emitidos por fuentes monocromáticas se emiten con flechas de longitud constante apuntando en la dirección  $\omega t$ ; en otras palabras, estas fuentes escupen fotones mediante una boca *giratoria*.
- Los fotones emitidos por fuentes térmicas incoherentes, tales como linternas de bolsillo, se emiten con flechas de longitud constante que apuntan en direcciones *aleatorias*.

Con este sencillo modelo \*\* podemos explicar el comportamiento ondulatorio de la luz. En particular, podemos describir las bandas de interferencia observadas en experimentos láser que se muestran esquemáticamente en la [Figura 25](#) y la [Figura 27](#). Puede comprobar que en algunas regiones las dos flechas que viajan a través de las dos ranuras suman cero todas las veces. No se detectan fotones allí: esas regiones son negras. En otras regiones, las flechas siempre suman el valor máximo. Estas regiones siempre son brillantes. Las regiones intermedias tienen sombras intermedias. Obviamente, en el caso de las linternas habituales, mostradas en el diagrama de la izquierda de la [figura 25](#), el brillo en la región común también se comporta como se esperaba: los promedios simplemente se suman.

**Desafío 39 s** Es posible que desee calcular la distancia entre las líneas, dada la distancia de origen  $s$ , el color y la distancia  $d$  a la pantalla. (Este experimento fue utilizado para determinar la longitud de onda de la luz por primera vez.)

Obviamente, el modelo de fotones implica que un patrón de interferencia se construye como la suma de un gran número de impactos de fotones únicos. Usando haces de baja intensidad, debemos ser capaces de ver cómo estas pequeñas manchas construyen lentamente un patrón de interferencia acumulándose en las regiones brillantes y nunca golpeando las regiones oscuras. Este es el caso, como hemos visto antes. Todos los experimentos confirman esta descripción.

En otras palabras, la interferencia es la superposición de los campos de luz coherente o, más generalmente, de los campos electromagnéticos coherentes. Los campos de luz coherente tienen un comportamiento más específico y regular de los fotones que los campos de luz incoherentes. Vamos a explorar en breve los detalles de las estadísticas de fotones de una manera más detallada.

En resumen, los fotones son partículas cuánticas. Las partículas cuánticas pueden producir patrones de interferencia y comportamientos ondulatorios, porque están descritas por una flecha cuya longitud al cuadrado da la probabilidad de su detección.

### INTERFERENCIA DE UN SOLO FOTÓN

Es importante subrayar que la interferencia entre dos haces de luz *no* es el resultado de dos fotones diferentes que se cancelan mutuamente o se agregan juntos. Tal cancelación estaría en contradicción con la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. La interferencia es un efecto aplicable a cada fotón

\* El modelo da una descripción correcta de la luz excepto que ignora la polarización. Para añadirla, es necesario combinar flechas que giran en ambos sentidos alrededor de la dirección del movimiento.

por separado -como se mostró en la sección precedente-, ya que cada fotón se extiende por todo el conjunto: Cada fotón toma todos los caminos posibles. Como subrayó Paul Dirac:

▷ *Cada fotón sólo interfiere consigo mismo.*<sup>ref.27</sup>

La interferencia de un fotón consigo mismo sólo funciona porque los fotones son cuantones, y no partículas clásicas.

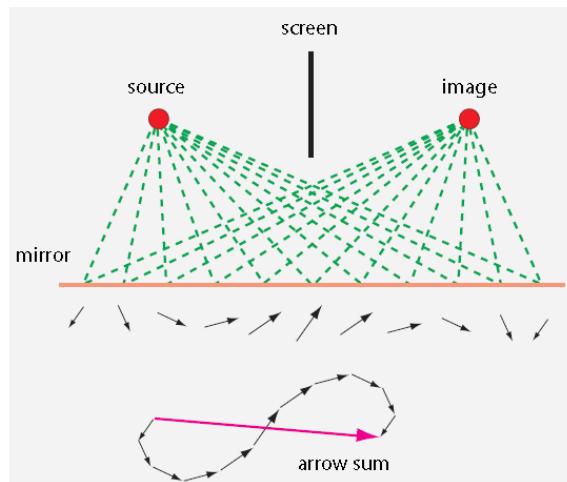
La citada afirmación de Dirac conduce a una famosa paradoja: si un fotón puede interferir sólo consigo mismo, ¿cómo pueden dos rayos láser de dos láseres diferentes interferir entre sí?

La respuesta dada por la física cuántica es simple pero extraña: en la región donde los haces interfieren, es imposible decir de qué fuente ha venido un fotón. No se puede decir que los fotones de la región de cruce provengan de una fuente específica. Los fotones en la región de interferencia son cuantones, que de hecho interfieren sólo con ellos mismos. En esa región, uno *no* puede decir realmente que la luz es un flujo de fotones. A pesar de las afirmaciones regulares en sentido contrario, la aseveración de Dirac es correcta. Es una extraña consecuencia del cuanto de acción.

Otra descripción de la situación es la siguiente:

▷ Un fotón interfiere solo en el interior de su volumen de coherencia. Y en ese volumen, es imposible distinguir los fotones.

**FIGURA 28** Luz reflejada por un espejo, y las flechas correspondientes (en un instante de tiempo).



En el volumen de coherencia formado por la coherencia longitudinal y transversal - a veces también llamado el *espacio de fases* - no podemos decir completamente que la luz es un flujo de fotones, debido a que un flujo no se puede definir en él. A pesar de que la regla dice lo contrario, la afirmación de Dirac es correcta, como veremos más adelante. Es una extraña consecuencia del cuanto de acción.

#### REFLEXIÓN Y DIFRACCIÓN DEDUCIDAS DE LAS FLECHAS DE LOS FOTONES

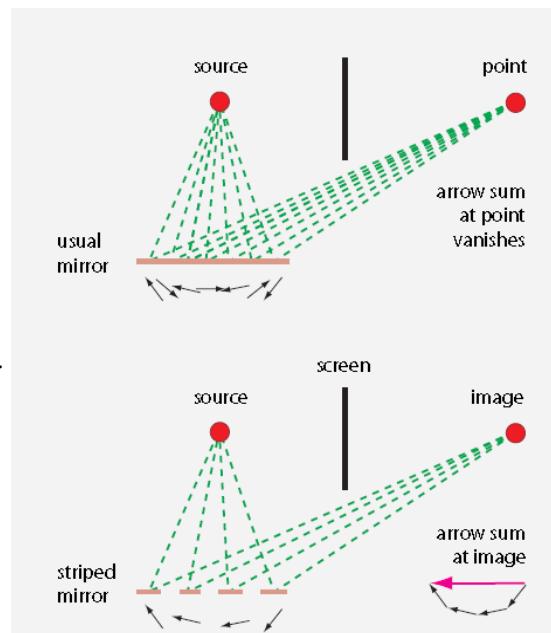
Las ondas también muestran *difracción*. La difracción es el cambio de la dirección de propagación de la luz o cualquier otra onda cerca de los bordes. Para entender este fenómeno con fotones, comencemos con un simple espejo, y estudiemos primero la *reflexión*. Los fotones (como todas las partículas cuánticas) se mueven de fuente a detector por todos los caminos posibles. Como gustaba subrayar Richard Feynman,<sup>\*2</sup> quien descubrió esta explicación, el término 'todo' tiene que tomarse literalmente. Esto no es gran cosa en la explicación de la interferencia. Pero para entender un espejo, tenemos que incluir todas las posibilidades, por locas que parezcan, como se muestra en la Figura 28.

Como se ha indicado anteriormente, una fuente de luz emite flechas giratorias. Para determinar la probabilidad de que la luz llegue a una determinada ubicación dentro de la imagen, tenemos que sumar todas

\*\* Richard ('Dick') Phillips Feynman (b. 1918 New York City, d. 1988), Físico norteamericano. Uno de los fundadores de la electrodinámica cuántica, también descubrió la reformulación de la teoría cuántica de la "suma de las historias", contribuyó de manera importante a la teoría de la interacción débil y a la gravedad cuántica, y fue coautor de un famoso libro de texto *Feynman Lectures on Physics* disponible en <http://www.feynmanlectures.info>. Es uno de esos físicos teóricos que hizo su carrera principalmente realizando cálculos complejos - pero dio marcha atrás con la edad y tuvo más éxito en sus enseñanzas y libros de física, que son todos dignos de lectura. Estaba profundamente dedicado a la física y a la ampliación del conocimiento, y era un coleccionista de sorprendentes explicaciones físicas. Ayudó a construir la bomba nuclear, escribió artículos en bares de topless, evitó asumir cualquier responsabilidad profesional y era notablemente arrogante e irrespetuoso con la autoridad. Escribió varios libros populares sobre los acontecimientos de su vida. Aunque intentó sobreponerse al genio de Wolfgang Pauli a lo largo de su vida, falló en esta empresa. Compartió el Premio Nobel de Física de 1965 por su trabajo en la electrodinámica cuántica.

las flechas que llegan al mismo tiempo en esa ubicación. Para cada trayectoria, la orientación de la flecha se muestra en la imagen - sólo por conveniencia - por debajo del segmento correspondiente del espejo.

El ángulo y la longitud de la flecha que llega dependen de la trayectoria. Tenga en cuenta que la suma de todas las flechas no desaparece: la luz realmente llega a la imagen. Por otra parte, la contribución más grande viene de los caminos cercanos al centro. Si tuviéramos que realizar el mismo cálculo para otra ubicación de la imagen, (casi) ninguna luz llegaría allí.

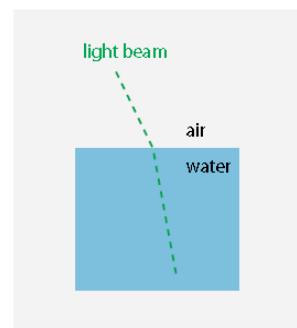


**FIGURA 29** La luz reflejada por un espejo mal colocado y por una rejilla.

Resumiendo, la regla de que la reflexión se produce con el ángulo entrante igual al ángulo saliente es una aproximación, siguiendo el modelo de flecha de la luz. De hecho, un cálculo detallado, con más flechas, muestra que la aproximación es bastante precisa: los errores son mucho más pequeños que la longitud de onda de la luz.

La prueba de que la luz realmente toma todas estas extrañas trayectorias está dada por un espejo más especializado. Como se muestra en la [Figura 29](#), podemos repetir el experimento con un espejo que refleja sólo a lo largo de ciertas franjas. En este caso, las franjas han sido elegidas cuidadosamente de modo que las longitudes de trayectoria correspondientes conduzcan a flechas con un sesgo en una dirección, esto es, a la izquierda. La adición de la flecha ahora muestra que tal espejo especializado - usualmente llamado *rejilla* - permite a la luz reflejarse en direcciones insólitas. De hecho, este comportamiento es estándar para las ondas: se llama *difracción*. En resumen, el modelo de flecha para los fotones nos permite describir esta propiedad de onda de la luz, siempre y cuando los fotones sigan el "loco" esquema de probabilidad. ¡No se enfade! Como se dijo anteriormente, la teoría cuántica es la teoría de los locos.

**Desafío 40 s** Es posible que desee comprobar que el modelo de flecha, con las aproximaciones que genera sumando sobre todos los caminos posibles, asegura automáticamente que el cuanto de acción es realmente la acción más pequeña que se puede observar.



**FIGURA 30** Si la luz estuviera hecha de pequeñas piedras, se moverían más rápido en el agua.

### REFRACCIÓN Y REFLEXIÓN PARCIAL DE FLECHAS DE FOTONES

Todas las ondas tienen una *velocidad de señal*. La velocidad de la señal también depende del medio en el que se propagan. Como consecuencia, las ondas muestran *refracción* cuando se mueven de un medio a otro con diferente velocidad de señal. Curiosamente, la ingenua imagen de partículas de fotones como pequeñas piedras implicaría que la luz es más rápida en materiales con altos índices de refracción: los llamados materiales *denses*. (Vea la [Figura 30](#).) **Desafío 41 e** ¿Puede confirmar esto?

Sin embargo, los experimentos demuestran que la luz en materiales densos se mueve más *lentamente*. La imagen de onda no tiene dificultad para explicar esta observación. **Desafío 42 e** (¿Puede confirmarlo?) Históricamente, este fue uno de los argumentos en contra de la teoría de partículas de la luz. Por el contrario, el modelo de flecha de luz presentado anteriormente es capaz de explicar correctamente la refracción. No es difícil: inténtelo. **Desafío 43 e**

Las ondas también se *reflejan parcialmente* en materiales como el vidrio. Esta es una de las propiedades de onda más difíciles de explicar con los fotones. Pero es uno de los pocos efectos que *no* se explica por una

teoría ondulatoria clásica de la luz. Sin embargo, se explica por el modelo de flechas, como veremos en breve. La reflexión parcial confirma las dos primeras reglas del modelo de flecha. La reflexión parcial muestra que los fotones se comportan de manera *aleatoria*: algunos se reflejan y otros no, sin ningún criterio de selección. La distinción es puramente estadística. Más información sobre este tema se dará en breve.

### DE FOTONES A ONDAS

En las ondas, los campos *oscilan en el tiempo y el espacio*. Una forma de mostrar cómo las ondas pueden estar hechas de partículas es mostrar cómo construir una onda sinusoidal utilizando un gran número de fotones. Una onda sinusoidal es un estado coherente de luz.<sup>ref.28</sup> La forma de construirlos fue explicada por Roy Glauber. De hecho, para construir una onda sinusoidal pura, necesitamos una superposición de un haz con un fotón, un haz con dos fotones, un haz con tres fotones, y así sucesivamente. Juntos, dan una onda sinusoidal perfecta. Como era de esperar, el número de fotones fluctúa al grado más alto posible.

Si se repite el cálculo para haces no ideales, se observa que la relación de indeterminación para la energía y el tiempo se respeta: cada haz emitido tendrá un cierto ancho espectral. La luz puramente monocromática no existe. Del mismo modo, ningún sistema que emite una onda *al azar* puede producir una onda monocromática. Todos los experimentos confirman estos resultados.

Las ondas pueden ser *polarizadas*. Hasta ahora, hemos ignorado esta propiedad. En la imagen del fotón, la polarización es el resultado de superponer cuidadosamente haces de fotones girando en sentido horario y antihorario. De hecho, sabemos que la polarización lineal puede verse como el resultado de superponer la luz circularmente polarizada de ambos signos, usando la fase apropiada. Lo que parecía una curiosidad en la óptica clásica resulta ser una justificación fundamental para la teoría cuántica.

Finalmente, los fotones son *indistinguibles*. Cuando dos fotones del mismo color se cruzan, no hay manera de decir después cuál de los dos es cuál. El cuento de acción lo hace imposible. La indistinguibilidad de los fotones tiene una consecuencia interesante. Es imposible decir qué fotón emitido corresponde al fotón que llega. En otras palabras, no hay manera de seguir el camino de un fotón, como estamos acostumbrados a seguir el camino de una pelota de billar. Los fotones son realmente indistinguibles. Además, el experimento de Hanbury Brown y Twiss implica que los fotones son bosones.<sup>ref.29</sup> Vamos a descubrir más detalles sobre la indistinguibilidad de los bosones en el futuro.

En síntesis, encontramos que las ondas de luz *pueden* ser efectivamente descritas como constituidas de partículas. Sin embargo, esto sólo es posible con la condición de que los *fotones*

- no se pueden contar de forma precisa, nunca con una precisión mejor de  $\sqrt{N}$ ,
- no son localizables, nunca con una precisión mejor que la longitud de coherencia,
- no tienen tamaño, ni carga, ni masa (en reposo),
- muestran una fase (aproximada) que aumenta con  $\omega t$ , es decir, como el producto de la frecuencia y el tiempo,
- tienen espín 1,
- a la misma frecuencia son bosones indistinguibles, en el interior del volumen de coherencia,
- puede tomar cualquier camino que sea, siempre y cuando lo permitan las condiciones de contorno,
- no tienen un origen definido, y
- tienen una probabilidad de detección dada por el cuadrado de la suma de amplitudes\* para todas las trayectorias posibles que conducen al punto de detección.

En otras palabras, la luz *sólo* puede ser descrita como hecha de partículas si estas partículas tienen propiedades *cuánticas* muy especiales. Estas propiedades cuánticas difieren de las partículas comunes y permiten a los fotones comportarse como ondas cuando están presentes en gran número.

### ¿PUEDE LA LUZ MOVERSE MÁS RÁPIDO QUE LA LUZ? - FOTONES REALES Y VIRTUALES

En el vacío, la luz puede moverse más rápido que  $c$ , así como más lento que  $c$ . El principio cuántico proporciona los detalles. Mientras este principio sea obedecido, la velocidad de un breve parpadeo de luz puede ser diferente -aunque sólo por una pequeña cantidad- del valor "oficial". *Desafío 44 ny* ¿Puede

\*La amplitud de un campo de fotones, sin embargo, no puede y no debe ser identificada con la función de onda de cada partícula masiva de spin 1.

estimar la diferencia permitida en el tiempo de llegada para un flash de luz que viene desde el principio de los tiempos?

La explicación de los fotones como flechas da el mismo resultado. Si tenemos en cuenta la loca posibilidad de que los fotones puedan moverse con cualquier velocidad, encontramos que todas las velocidades muy diferentes de  $c$  se anulan. La única variación que queda, traducida en distancias, es la indeterminación de aproximadamente una longitud de onda en la dirección longitudinal, que mencionamos anteriormente. *Desafío 45 ny*

En resumen, la luz, o los fotones reales, en realidad puede moverse más rápido que la luz, aunque sólo sea por una cantidad permitida por el cuanto de acción. Para las situaciones cotidianas, es decir, para valores altos de la acción, todos los efectos cuánticos en los medios de comunicación, incluyendo la luz y los fotones tienen velocidades diferentes de  $c$ .

No sólo la ubicación, sino también la energía de un solo fotón puede ser indefinida. [ref.30](#)

Por ejemplo, algunos materiales dividen un fotón de energía  $\hbar\omega$  en dos fotones, cuyas dos energías se suman hasta la original. La mecánica cuántica implica que la partición de la energía es conocida sólo cuando se mide la energía de uno de los dos fotones. Sólo en ese momento se conoce la energía del segundo fotón. Antes de la medición, los dos fotones tienen energías indefinidas. El proceso de fijación de energía tiene lugar *instantáneamente*, si el segundo fotón está lejos.

Vamos a explicar más adelante el fondo de éste y de otros efectos extraños, que parecen ser más rápidos que la luz. En realidad, a pesar de las apariencias, estas observaciones *no* implican la transmisión de energía o información más rápida que la luz.

Más extrañas consecuencias de la cantidad de acción aparecen cuando estudiamos los campos eléctricos *estáticos*, como el campo alrededor de una esfera metálica cargada. Obviamente, este campo también debe estar hecho de fotones. ¿Cómo se mueven?

Resulta que los campos eléctricos estáticos están hechos de fotones *virtuales*. Los fotones virtuales son fotones que no aparecen como partículas libres: Sólo aparecen durante un tiempo muy corto antes de que desaparezcan de nuevo. En el caso de un campo eléctrico estático, están polarizados *longitudinalmente*, y no transportan energía lejos. Los fotones virtuales, al igual que otras partículas virtuales, son "sombras" de partículas que obedecen

$$\Delta x \Delta p \leq \hbar/2 . \quad (13)$$

En lugar de obedecer la relación de indeterminación usual, obedecen a la relación opuesta, que expresa su brevíssima aparición.

A pesar de su vida intrínsecamente corta, y a pesar de la imposibilidad de detectarlas directamente, las partículas virtuales tienen efectos importantes. Vamos a explorar las partículas virtuales en detalle en breve.

De hecho, el potencial vectorial  $A$  permite *cuatro* polarizaciones, correspondientes a las cuatro coordenadas ( $t, x, y, z$ ). Resulta que para los fotones de los que normalmente se habla -los fotones libres o *reales*- las polarizaciones en las direcciones  $t$  y  $z$  se anulan, de modo que se observan sólo las polarizaciones  $x$  e  $y$  en los experimentos reales.

Para los fotones vinculados o *virtuales*, la situación es diferente. Las cuatro polarizaciones son posibles.

De hecho, las polarizaciones  $z$  y  $t$  de los fotones virtuales - que no aparecen para los fotones reales, es decir, por los fotones libres - son las que se puede decir que son los bloques de construcción de los campos eléctricos y magnéticos *estáticos*.

En otras palabras, los campos eléctricos y magnéticos estáticos son flujos continuos de fotones virtuales.

En contraste con los fotones reales, los fotones virtuales pueden tener masa, pueden tener direcciones de espín que no apunten a lo largo de la trayectoria del movimiento, y pueden tener cantidad de movimiento opuesto a su dirección de movimiento. El intercambio de fotones virtuales conduce a la *atracción* de cuerpos de diferente carga. De hecho, los fotones virtuales aparecen necesariamente en cualquier descripción de las interacciones electromagnéticas. Más adelante discutiremos sus efectos ulteriores - incluyendo la famosa atracción de cuerpos neutros.

Hemos visto anteriormente que los fotones virtuales, por ejemplo aquellos que son necesarios para describir las colisiones de cargas, deben ser capaces de moverse con mayor velocidad que la de la luz. Se requiere esta descripción con el fin de asegurar que la velocidad de la luz sigue siendo un límite en todos los experimentos.

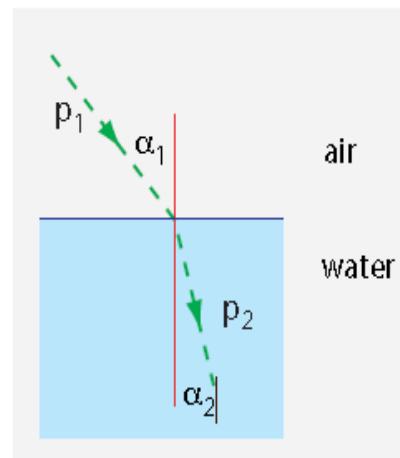
En resumen, la luz puede realmente moverse más rápido que la luz, aunque sólo por una cantidad permitida por el cuanto de acción. Para situaciones cotidianas, es decir, para valores altos de la acción, todos los efectos cuánticos promedian, incluyendo velocidades de luz diferentes de  $c$ . Podría ser intrigante observar que los fotones virtuales, a diferencia de los fotones reales, no están limitados por la velocidad de la luz; pero también es justo decir que los fotones virtuales se mueven más rápido que la luz solo en un sentido *formal*.

### INDETERMINACIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS

Hemos visto que el cuanto de acción implica una indeterminación para la intensidad de la luz. Puesto que la luz es una onda electromagnética, esta indeterminación implica límites similares, separados para campos eléctricos y magnéticos en un punto dado en el espacio. Esta conclusión fue diseñada en 1933 por Bohr y Rosenfeld.<sup>ref.31</sup> Comenzaron a partir de los efectos de los campos sobre una partícula de prueba de masa  $m$  y carga  $q$ , que se describen por:

$$ma = q(E + v \times b). \quad (14)$$

FIGURA 31 Refracción y fotones.



Dado que es imposible medir tanto la cantidad de movimiento como la posición de una partícula, dedujeron una indeterminación para el campo eléctrico (*Desafío 47 ny*), dada por

$$\Delta E = \frac{\hbar}{q \Delta x t} \quad (15)$$

Donde  $t$  es el tiempo de medición y  $\Delta x$  es la indeterminación de posición. Así, cada valor de un campo eléctrico, y similarmente de un campo magnético, posee una indeterminación. El estado del campo electromagnético se comporta como el estado de la materia en este aspecto: ambos siguen una relación de indeterminación.

### CURIOSIDADES Y DIVERTIDOS DESAFÍOS SOBRE FOTONES

¿Se puede explicar la refracción con fotones? Newton no fue capaz de hacerlo, pero hoy podemos hacerlo.

En la refracción por una superficie horizontal, como se muestra en la Figura 31, La situación es invarianta en la traslación a lo largo de la dirección horizontal. Por lo tanto, el componente de la cantidad de movimiento a lo largo de esta dirección se conserva:  $p_1 \sin \alpha_1 = p_2 \sin \alpha_2$ . La energía de fotones  $E = E_1 = E_2$  obviamente también se conserva. El índice de refracción  $n$  se define en términos de momento y energía como

$$n = \frac{cp}{E} \quad (16)$$

*Desafío 48 e* La "ley" de refracción sigue:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n \quad (17)$$

relación que se conoce desde el final de la Edad Media.

Hay una cuestión importante aquí. En un material, la velocidad de un fotón es  $v = \delta E / \delta p$

En un rayo de luz *difiere* de la velocidad de fase  $u = E / p$  que entra en el cálculo. En resumen, dentro de la materia, el concepto de fotón debe utilizarse con extremo cuidado.

\*\*

Si una onda electromagnética tiene amplitud  $A$ , la densidad de fotones  $d$  es

$$d = \frac{A^2}{\hbar \omega} \quad (18)$$

### *Desafío 49 ny* ¿Puede demostrar esto?

\*\*

Demostrar que para un pulso de láser en un vacío, el volumen de coherencia aumenta durante la propagación, mientras que el volumen ocupado en el espacio de fases se mantiene constante. Su entropía es constante, debido a que su trayectoria es reversible.

\*\*

Un efecto típico de las "leyes" cuánticas es el color amarillo de las lámparas utilizadas para la iluminación de las calles en la mayoría de las ciudades. Emiten luz amarilla pura de (casi) una sola frecuencia; por eso no se pueden distinguir otros colores en su luz. Según la Electrodinámica clásica, también deben ser emitidos los armónicos de esa frecuencia de luz. Los experimentos muestran, sin embargo, que este no es el caso; la electrodinámica clásica es, pues, errónea. *Desafío 50 s* ¿Es correcto este argumento?

**FIGURA 32** Los tonos azules del cielo y los colores de las nubes se deben a diversos grados de dispersión de Rayleigh, Mie y Tyndall (© Giorgio di Iorio).



\*\*

¿Qué sucede con los fotones que golpean un objeto pero no son absorbidos o transmitidos? En general, son dispersados. La *dispersión (scattering)* es el nombre de cualquier proceso que cambia el movimiento de la luz (o de cualquier otra onda). Los detalles del proceso de dispersión dependen del objeto; algunos procesos de dispersión sólo cambian la dirección de movimiento, otros también cambian la frecuencia.

La *Tabla 3* proporciona una visión general de los procesos que dispersan la luz.

Todas las propiedades de dispersión dependen del material que produce la deflexión de la luz.

Entre otros, el estudio de los procesos de dispersión explica muchos colores de materiales transparentes, como veremos a continuación.

*Desafío 51 e* Observamos que la curvatura de la luz debido a la gravedad no se llama dispersión. ¿Por qué?

### UN RESUMEN SOBRE LA LUZ: PARTÍCULA Y ONDA

En resumen, la luz es una corriente de cuantos de luz o fotones. Un fotón individual es la mínima intensidad de luz posible de un determinado color. Los fotones, como todos los cuantones, son absolutamente diferentes de las partículas cotidianas. En realidad, podemos argüir que el único aspecto (clásico) de partícula de los fotones es su energía cuantizada, su cantidad de movimiento y su espín. En todos los otros aspectos, los fotones *no* son como pequeñas piedras. Los fotones se mueven con la velocidad de la luz. Los fotones no pueden ser localizados en los haces de luz. Los fotones son indistinguibles. Los fotones son bosones. Los fotones no tienen masa, ni carga, ni tamaño. Es más exacto decir que los *fotones son dispositivos de cálculo para describir con precisión las observaciones sobre la luz*.

Las extrañas propiedades de los fotones son la razón por la que los intentos tempranos para describir la luz como una corriente de partículas (clásicas), tales como el intento de Newton, fallaron miserablemente, y fueron ridiculizadas con razón por otros científicos. De hecho, Newton sostuvo su teoría contra todas las evidencias experimentales – especialmente con las que atañen a las propiedades ondulatorias de la luz – lo cual es algo que un físico no debería hacer nunca. Solo después de que la gente hubiera aceptado que la luz

era una onda, y luego se descubriera y comprendiera que las partículas cuánticas son fundamentalmente diferentes de las partículas clásicas, fue cuando la descripción de los cuantones tuvo éxito.

El cuantón de acción implica que *todas las ondas son flujos de cuantones*. En realidad, todas las ondas son flujos *correlacionados* de cuantones. Esto es verdad para la luz, para cualquier forma de radiación y para todas las formas de ondas de materia.

Las relaciones de indeterminación muestran que incluso un cuantón individual puede ser visto como una onda; sin embargo, siempre que interactúa con el resto del mundo, se comporta como una partícula. De hecho, es *esencial* que todas las ondas estén hechas de cuantones: si no fuera así, entonces las interacciones serían no locales, y los objetos no podrían ser localizados en absoluto, contrariamente a la experiencia.

Para decidir si es más apropiada la descripción como onda o como partícula, podemos usar el siguiente criterio. Siempre que materia y luz interactúan, es más apropiado describir la radiación electromagnética como una onda si la longitud de onda satisface

$$\lambda \gg \frac{\hbar c}{kT} \quad (19)$$

donde  $k = 1.4 \cdot 10^{-23}$  J/K es la constante de Boltzmann. Si la longitud de onda es *mucho más pequeña* que la cantidad del lado derecho, la descripción como partícula es más apropiada. Si los dos lados tienen el mismo orden de magnitud, ambas descripciones desempeñan un papel.

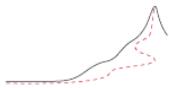
*Desafío 52 e* ¿Puede explicar este criterio?

**TABLA 3** Tipos de dispersión de la luz.

Tipo de Dispersión	Dispersor	Detalles	Ejemplos
Dispersión de Rayleigh	Átomos, moléculas	Elástico, intensidad cambia como $1/\lambda^4$ , dispersores más pequeños que $\lambda/10$	Cielo azul, cielo rojo del anochecer, humo de cigarrillo azul
Dispersión de Mie	Objetos transparentes, gotitas	Elástico, intensidad cambia como $1/\lambda^{0.5}$ , a $1/\lambda^2$ , tamaño del dispersor alrededor de $\lambda$	Cielo azul, anocheceres rojos, montañas distantes azules
Dispersión geométrica	bordes	Elástico, tamaño del dispersor mayor que $\lambda$	Mejor llamada <i>difracción</i> , usada en interferencia
Dispersión de Tyndall	Objetos no transparentes	Elástico, ángulo débil o no dependiente de la longitud de onda	Smog, nubes blancas, niebla, humo blanco de cigarrillo
Dispersión de Smekal–Raman	Átomos excitados, moléculas	Inelástico, la luz gana energía	Usado en investigaciones lidar de la atmósfera
Dispersión inversa Raman	Átomos, moléculas	Inelástico, la luz pierde energía	Usado en investigación de materiales
Dispersión de Thomson	electrones	Elástico	Usado para la determinación de la densidad electrónica
Dispersión de Compton	electrones	Inelástico, los rayos X pierden energía	Prueba la naturaleza corpuscular de la luz
Dispersión de Brillouin	Fonones acústicos, variaciones de densidad en los sólidos/fluidos	Inelástico, desplazamiento de frecuencia de pocos GHz	Usada para estudiar fonones y para diagnosticar fibras ópticas
Dispersión de Von Laue o de rayos X	Sólidos cristalinos	Elástico, debida a la interferencia en los planos del cristal	Usada para determinar la estructura de los cristales; llamada también <i>difracción de Bragg</i>



### Capítulo 3



## MOVIMIENTO DE MATERIA – MÁS ALLÁ DE LA FÍSICA CLÁSICA

All great things begin as blasphemies. George Bernard Shaw  
Todas las grandes cosas comienzan como blasfemias

**L**a existencia de la acción mínima tiene numerosas e importantes consecuencias para el movimiento de la materia. Comencemos con unos cuantos resultados experimentales que muestran que el cuanto de acción es, de hecho, la mínima acción mensurable también en el caso de la materia. Después demostraríremos que el cuanto de acción implica la existencia de una fase y, de ese modo, de las propiedades ondulatorias de la materia. Finalmente, del cuanto de acción deduciremos para el movimiento de la materia la misma descripción que ya establecimos para la luz: las partículas materiales se comportan como flechas rotatorias.

### VASOS DE VINO, LÁPICES Y ÁTOMOS – NO REPOSO

Otium cum dignitate.\* Cicero, *De oratore*.  
Reposo con dignidad

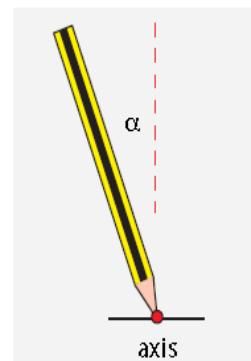
Si el cuanto de acción es el cambio observable más pequeño en un sistema físico, entonces dos observaciones del mismo sistema deben diferir siempre. Así pues no puede haber reposo perfecto en la naturaleza. ¿Es esto verdad? Los experimentos muestran que verdaderamente este es el caso.

Una simple consecuencia de la falta de perfecto reposo es la imposibilidad de llenar completamente un vaso de vino. Si llamamos “lleno” a un vaso en su máxima capacidad (incluyendo los efectos de la tensión superficial para hacer el argumento preciso), vemos inmediatamente que la situación requiere que la superficie del líquido esté completamente en reposo. Pero una superficie completamente quieta admitiría dos observaciones sucesivas que difieran en menos de  $\hbar$ . Podríamos intentar reducir todos los movimientos disminuyendo la temperatura del sistema. Pero reposo absoluto implicaría alcanzar el cero absoluto de temperatura. Los experimentos muestran que esto es imposible. (Realmente, esta imposibilidad se llama la *tercera ley de la termodinámica*, es equivalente a la existencia de una acción mínima). *No hay reposo en la naturaleza*. En otras palabras, el cuanto de acción prueba la vieja verdad de que un vaso de vino está *parcialmente vacío* y parcialmente lleno.

La ausencia de reposo microscópico, predicha por el cuanto de acción, está confirmada por muchos experimentos. Por ejemplo, un lápiz de pie sobre su punta *no puede* permanecer vertical, como muestra la Figura 33, incluso si está aislado de todas las perturbaciones, tales como vibraciones, moléculas de aire y movimientos térmicos. Esta conclusión – ciertamente muy académica – se sigue de la relación de indeterminación. De hecho, incluso es posible calcular el tiempo tras el cual un lápiz *debe* haber caído. *Desafío 53 d.* En la práctica, sin embargo, los lápices caen mucho antes, porque las perturbaciones no se pueden eliminar.

FIGURA 33 Un lápiz que cae.

Pero la consecuencia más importante de la ausencia de reposo es otra. La ausencia de reposo para los electrones dentro del átomo evita que ellos caigan en el núcleo, a pesar de su atracción mutua. Dicho brevemente, la existencia y el tamaño de los átomos y, así, de toda la materia, es una consecuencia directa de la ausencia de reposo



microscópico! Exploraremos esto con más detalle más adelante. Puesto que estamos hechos de átomos, podemos decir: solamente existimos y vivimos a acusa del cuanto de acción.

### NINGUNA PRECISIÓN INFINITA

El cuanto de acción impide la observación del reposo de muchas maneras. Para comprobar si un objeto está en reposo, necesitamos observar su posición con alta precisión. Debido a las propiedades ondulatorias de la luz, necesitamos un fotón de alta energía: sólo un fotón de alta energía tiene una longitud de onda pequeña y por lo tanto permite una medición precisa de la posición. Como resultado de esta alta energía, sin embargo, el objeto es perturbado. Peor aún, la perturbación misma no es precisamente medible; por lo que no hay manera de determinar la posición original, incluso teniendo en cuenta la perturbación. En resumen, el reposo perfecto no se puede observar ni siquiera en principio.

En efecto, todos los experimentos en los que se han observado sistemas con alta precisión confirman que no existe un reposo perfecto. La ausencia de reposo ha sido confirmada para electrones, neutrones, protones, iones, átomos, moléculas, condensados atómicos, cristales y objetos con una masa de hasta una tonelada, tal como se utiliza en ciertos detectores de ondas gravitacionales. Ningún objeto está nunca en reposo.

El mismo argumento también muestra que ninguna medida, de cualquier observable, puede jamás ser realizada con precisión infinita. Esta es otra de las consecuencias de largo alcance del cuanto de acción.

### GAS FRÍO

El cuanto de acción implica que el reposo es imposible en la naturaleza. Realmente, incluso a temperaturas extremadamente bajas, todas las partículas en el interior de la materia están en movimiento. Esta ausencia de reposo fundamental se dice que es debida a las denominadas *fluctuaciones del punto cero*. Un buen ejemplo es proporcionado por las recientes medidas de condensados de Bose-Einstein. Estos son gases atrapados, con un pequeño número de átomos (entre diez y unos cuantos millones), enfriados a temperaturas extremadamente bajas (alrededor de 1 nK). Dichos gases fríos pueden ser observados con una elevada precisión. Usando elaboradas técnicas experimentales, los condensados de Bose-Einstein pueden ser puesto en estados para los cuales  $\Delta p \Delta x$  es casi exactamente igual a  $\hbar / 2$  - aunque nunca inferior a este valor. Estos experimentos confirman directamente que no hay reposo, sino una *borrosidad* (imprecisión) fundamental en la naturaleza.

Esto conduce a un rompecabezas interesante. En un objeto normal, la distancia entre los átomos es mucho mayor que su longitud de onda de Broglie. *Desafío 54 s* (¿Puede confirmar esto?) Pero hoy en día es posible enfriar objetos a temperaturas extremadamente bajas. A temperaturas suficientemente bajas, inferiores a 1 nK, la longitud de onda de los átomos puede ser mayor que su separación. <sup>ref.33</sup> *Desafío 55 s* ¿Puede usted imaginar lo que sucede en estos casos?

### FLUJOS Y CUANTIZACIÓN DE LA MATERIA

Die Bewegung ist die Daseinsform der Materie. Friedrich Engels, *Anti-Dühring*.<sup>ref.12\*</sup>  
"El movimiento es la forma de ser de la materia".

El cuanto de acción no solamente hace imposible el reposo, también hace imposible cualquier situación que no cambie en el tiempo. Los más importantes ejemplos de situaciones (aparentemente) estacionarias son los *flujos*. El cuanto de acción implica que *ningún* flujo puede ser estacionario. Más precisamente, una pequeña acción implica que *ningún* flujo puede ser continuo. Todos los flujos fluctúan y están hechos de entidades mínimas: en la naturaleza, todos los flujos están hechos de partículas cuánticas.

Vimos arriba que esto es válido para la luz. Dos tipos simples de flujo de nuestra experiencia cotidiana confirman directamente esta consecuencia del cuanto de acción: los flujos de fluidos y los flujos de electricidad.

### FLUJOS DE FLUIDOS Y CUANTONES

El flujo de materia también exhibe unidades mínimas. Mencionamos desde el comienzo de nuestra aventura que una consecuencia de la estructura de partículas de los líquidos es que el aceite o cualquier otro líquido suave produce *ruido* cuando fluye a través incluso del más liso de los tubos. Hemos mencionado que

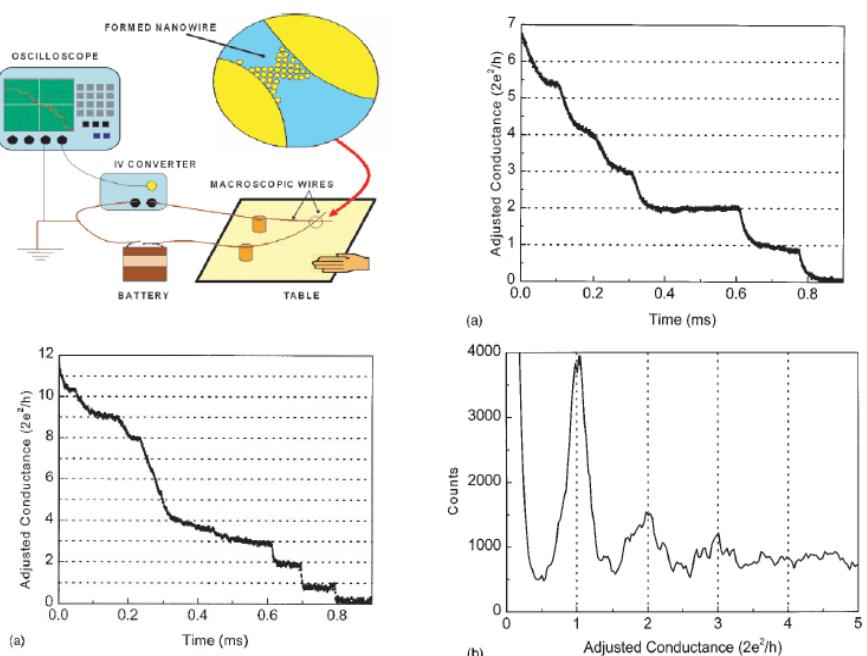
el ruido que oímos en nuestros oídos en situaciones de silencio absoluto -por ejemplo, en un paisaje nevado y sin viento en las montañas o en una cámara anecoica- se debe a la granularidad del flujo sanguíneo en las venas. Los experimentos demuestran que todos los flujos de materia producen vibraciones. Esto es una consecuencia del cuanto de acción, y de la granularidad resultante de la materia.

#### GOLPEANDO SOBRE MESAS Y CONDUCTIVIDAD CUANTIZADA

Si la corriente eléctrica fuera un flujo continuo, sería posible observar valores de acción tan pequeños como se deseara. El ejemplo más sencillo fue descubierto en 1996 por José Costa-Kramer y sus colegas.<sup>ref.35</sup> Pusieron dos hilos metálicos uno encima del otro en una mesa de cocina y conectados a una batería, un convertidor de corriente-voltaje (o simplemente una resistencia) y un osciloscopio para ellos. Luego midieron la corriente eléctrica, mientras golpeaban la mesa. Eso es todo.

El hecho de golpear sobre la mesa interrumpe el contacto entre los dos cables. En el último milisegundo antes de que los cables se separen, la conductividad y por lo tanto la corriente eléctrica disminuyó en pasos regulares de aproximadamente  $7 \mu\text{A}$ , como se puede ver fácilmente en el osciloscopio (vea la Figura 34). Este simple experimento habría podido superar, si se hubiera realizado unos años antes, una serie de otros experimentos, enormemente costosos, que descubrieron esta cuantificación a un coste de varios millones de euros cada uno, utilizando conjuntos complejos a temperaturas extremadamente bajas.

**FIGURA 34** Etapas en el flujo de electricidad en los hilos de alambre que se cruzan: el montaje, los nanocables en la base del efecto y tres resultados de medición (© José Costa-Krämer, AAPT from Ref. 35).



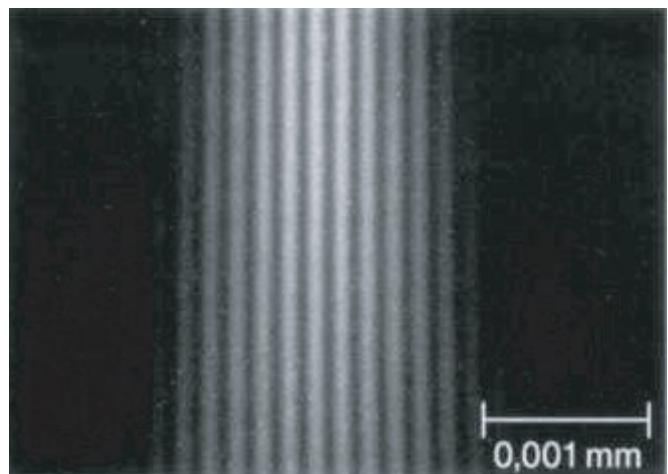
De hecho, la cuantificación de la conductividad aparece en cualquier contacto eléctrico con una pequeña sección transversal. En tales situaciones el cuanto de acción implica que la conductividad puede ser solamente un múltiplo de  $2e^2/\hbar \approx (12\,906 \Omega)^{-1}$ . *Desafío 56 e* ¿Puede confirmar este resultado? Tenga en cuenta que la conductividad eléctrica puede ser tan pequeña como se requiera; sólo la conductividad eléctrica *cuantizada* tiene el valor mínimo de  $2e^2 / \hbar$ .

Muchos experimentos más elaborados confirman la observación de los pasos de conductancia.

Tales experimentos nos obligan a concluir que hay una *mínima carga eléctrica* en la naturaleza. Esta carga mínima tiene el mismo valor que la carga de un electrón. En realidad, los electrones resultan ser parte de cada átomo, en una construcción que se explicará en breve. En los metales, un gran número de electrones puede moverse libremente: por eso los metales conducen la electricidad tan bien y funcionan como espejos.

En resumen, la materia y la electricidad fluyen en unidades mínimas. Dependiendo del material, las unidades fluidas más pequeñas de la materia pueden ser «moléculas», «átomos», «iones» o «electrones». Los electrones, iones, átomos y moléculas son *partículas cuánticas, o cuantones*. El cuanto de acción implica que la materia está hecha de cuantones. Los cuantones de la materia comparten algunas propiedades con las piedras ordinarias, pero también se diferencian de ellas de muchas maneras. Una piedra tiene posición y

cantidad de movimiento, masa y aceleración, tamaño, forma, estructura, orientación y momento angular, y color. Ahora exploraremos cada una de estas propiedades para los cuantones, y veremos cómo se relacionan con el cuánto de la acción.



**FIGURA 35** Los haces de electrones difractan e interfieren en múltiples rendijas (© Claus Jönsson).

#### CUANTONES DE MATERIA Y SU MOVIMIENTO – ONDAS DE MATERIA

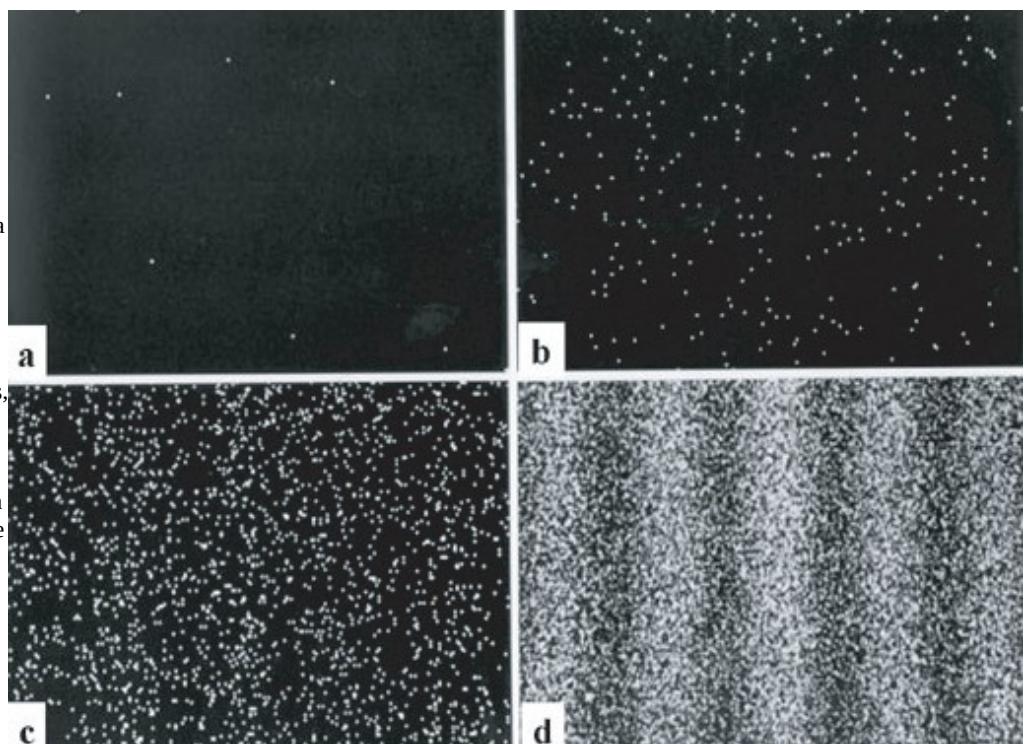
En 1923 y 1924, el influyente físico francés Louis de Broglie reflexionó sobre las consecuencias del cuantos de acción para las partículas de materia.<sup>ref.36</sup> Sabía que en el caso de la luz, el cuantos de acción conecta el comportamiento de las ondas con el comportamiento de partículas. Razonó que lo mismo debería aplicarse a la materia. Se le ocurrió que los flujos de partículas de materia con la misma cantidad de movimiento debían comportarse como ondas, al igual que los flujos de cuantos de luz. Predijo así que, como para la luz, los flujos de materia coherente deberían tener una longitud de onda y una frecuencia angular dada por

$$\lambda = 2\pi \hbar / p$$

y

$$\omega = E / \hbar,$$
(20)

donde  $p$  y  $E$  son el momento lineal y la energía respectivamente de las partículas individuales



**FIGURA 36** Formación a lo largo del tiempo del patrón de interferencia de electrones, aquí en un experimento de doble rendija de baja intensidad: (a) 8 electrones, (b) 270 electrones, (c) 2000 electrones, (d) 6000 electrones, después de 20 minutos de exposición. La última imagen corresponde a la situación mostrada en la figura anterior.

(© Tonomura Akira/Hitachi).

Equivalentemente, podemos escribir las relaciones como

$$p = \hbar k \quad \text{y} \quad E = \hbar\omega. \quad (21)$$

Estas relaciones indican que los cuantos de materia también se comportan como ondas.

Poco después de la predicción de Broglie, los experimentos comenzaron a confirmar la afirmación. De hecho, se observa que los flujos de materia pueden difractarse, refractarse e interferir; las observaciones coincidían con los valores predichos por de Broglie. Debido a la pequeñez de la longitud de onda de los cuantones, se necesitan experimentos cuidadosos para detectar estos efectos. Pero una por una, todas las confirmaciones experimentales de las propiedades ondulatorias de la luz han sido repetidas para los haces de materia. Por ejemplo, así como la luz se difracta cuando pasa alrededor de un borde o a través de una rendija, la materia también se difracta en estas situaciones. Esto es cierto también para electrones, las partículas más simples de materia, como se muestra en la Figura 35.<sup>ref.37</sup>

El experimento con electrones es bastante difícil. Fue realizado por primera vez por Claus Jonsson en Tübingen en 1961; en el año 2002 fue votado como el experimento más hermoso de toda la física. Muchos años después de Jonsson, el experimento se repitió con un microscopio electrónico modificado, como se muestra en la Figura 36.

Inspirados por interferómetros de luz, los investigadores comenzaron a construir interferómetros de *materia*. Los interferómetros de materia se han utilizado en muchos hermosos experimentos, como tendremos ocasión de descubrir.<sup>ref.38</sup> Hoy en día, los interferómetros de materia trabajan con haces de electrones, nucleones, núcleos, átomos o incluso moléculas de grandes dimensiones. Así como las observaciones de la interferencia de la luz demuestran el carácter ondulatorio de la luz, los patrones de interferencia observados con haces de materia demuestran el carácter ondulatorio de la materia.

Como la luz, la materia está hecha de partículas; como la luz, la materia se comporta como una onda cuando se trata de un gran número de partículas con la misma cantidad de movimiento. Pero aunque los haces de grandes moléculas se comportan como ondas, los objetos cotidianos -como los automóviles en una autopista- no lo hacen.

Existen dos motivos principales para esto. En primer lugar, para los automóviles en una autopista la longitud de onda relevante es extremadamente pequeña. En segundo lugar, las velocidades de los coches varían demasiado: los flujos de coches con la misma velocidad no pueden hacerse coherentes.

Si la materia se comporta como una onda, podemos sacar una conclusión extraña. Para cualquier onda, la posición y la longitud de onda no pueden ser ambas claramente definidas simultáneamente: las indeterminaciones del número de onda  $k = 2\pi / \lambda$  y de la posición X obedecen a la relación

$$\Delta k \Delta X \geq 1/2. \quad (22)$$

Del mismo modo, para cada onda la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  y el instante T de su pico de amplitud no pueden ser ambos claramente definidos. Sus indeterminaciones están relacionadas por

$$\Delta \omega \Delta T \geq 1/2. \quad (23)$$

Usando las propiedades ondulatoria de la materia de de Broglie (21), tenemos

$$\Delta p \Delta X \geq \hbar/2 \quad \text{y} \quad \Delta E \Delta T \geq \hbar/2. \quad (24)$$

Estas famosas relaciones se denominan *relaciones de indeterminación de Heisenberg*. Fueron descubiertas por el físico alemán Werner Heisenberg en 1925. Son válidas para todas las partículas cuánticas, ya sean materia o radiación. Las relaciones de indeterminación afirman que no hay manera de atribuir simultáneamente una posición precisa y una cantidad de movimiento a un sistema cuántico, ni asignar simultáneamente una energía y una edad precisas. Cuanto más exactamente se conoce una cantidad, menos exacta es la otra.\*<sup>\*\*</sup> Como resultado, los cuantones de materia, casi como las piedras, pero a diferencia de los fotones, *pueden* ser localizados, pero siempre sólo aproximadamente.

Ambas relaciones de indeterminación han sido comprobadas experimentalmente con gran detalle. Todos los experimentos las confirman. De hecho, cada experimento que demuestra que la materia se comporta como una onda es una confirmación de la relación de indeterminación - y viceversa.

Cuando dos variables están vinculadas por relaciones de indeterminación, se dice que son *complementarias* entre sí. Niels Bohr exploró sistemáticamente todas las parejas posibles. También usted

\* Un policía detiene el coche conducido por Werner Heisenberg. -¿Sabe lo rápido que conducía? -No, pero sé exactamente dónde estaba.

puede hacer eso por sí mismo. *Desafío 57 s*. Bohr estaba profundamente fascinado por la existencia de un principio de complementariedad, y luego lo extendió en direcciones filosóficas. En una escena famosa, alguien le preguntó cuál era la cantidad complementaria a la precisión. Él respondió: la ‘claridad’.

Observamos que los cuantones de la materia usual, *real*, siempre se mueven más lentamente que la luz.

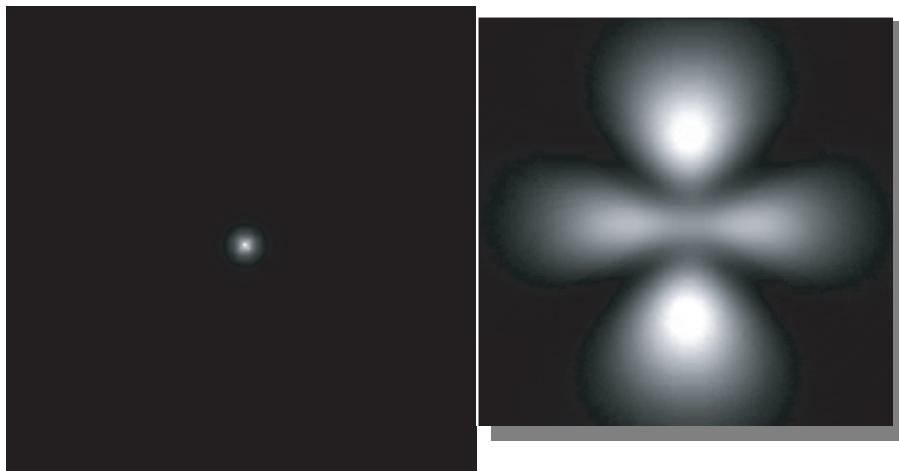
Debido a la imprecisión (aleatoriedad) inherente del movimiento cuántico, no debe sorprender que haya algunas excepciones. De hecho, en algunos casos extremadamente especiales, el cuanto de acción permite la existencia de partículas que se mueven más rápido que la luz - las llamadas partículas *virtuales* – con las que nos reuniremos más adelante.

En resumen, el cuanto de acción significa que los cuantones de materia no se comportan como piedras puntuales, sino como ondas. En particular, al igual que para las ondas, los valores de posición y cantidad de movimiento no pueden ser ambos exactamente definidos para los cuantones. Los valores son aleatorios - la posición y la cantidad de movimiento están indeterminados. Cuanto más precisamente se conoce uno de los dos, con menor precisión se conoce el otro.

### MASA Y ACELERACIÓN DE CUANTONES\*

Los cuantones de materia, como las piedras, tienen masa. De hecho, se pueden detectar los impactos realizados por los electrones individuales, los átomos o las moléculas, si se utilizan dispositivos de medición sensibles. Los cuantones también pueden acelerarse o decelerarse. Ya hemos explorado algunos de estos experimentos en la sección sobre la electrodinámica. Sin embargo, los cuantones difieren de los guijarros. Utilizando la relación de incertidumbre energía-tiempo, se puede deducir que (*Desafío 58 s*)

$$a \leq \frac{2mc^3}{\hbar} \quad (25)$$



**FIGURA 37** Nubes de probabilidad: un átomo de hidrógeno en su estado base esférico (izquierda) y en un estado excitado no esférico (derecha) visto por un observador que viaja a su alrededor (QuickTime film producido con software package de Dean Dauger ‘Atom in a Box’, disponible en [daugerresearch.com](http://daugerresearch.com)).

Así pues, hay una aceleración máxima para los cuantones. \*\*<sup>ref.39</sup> En efecto, ninguna partícula se ha observado nunca con una aceleración mayor que este valor. De hecho, nunca se ha observado en cualquier lugar ninguna partícula con una aceleración *próxima* a este valor.

---

\*Nota de traductor

cuantón: o partícula cuántica, cualquier entidad que se comporta como onda y como partícula. Según el modelo estándar de la física de partículas, es habitual interpretar a los quarks y a los leptones como cuantones elementales. El término cuantón unifica a la dudosa dualidad onda-partícula, por la cual, según como se la mire, una partícula de la mecánica cuántica es ya sea una onda clásica o una partícula clásica.

\*\*Observamos que este límite de aceleración es diferente del límite de aceleración debido a la relatividad general:

$$a \leq \frac{c^4}{4Gm} \quad (26)$$

IEn particular, el límite cuántico (25) se aplica a las partículas microscópicas, mientras que el límite general relativista se aplica a los sistemas macroscópicos. *Desafío 59 e* ¿Puede usted confirmar que en cada dominio el límite relevante es el más pequeño de los dos?

## ¿POR QUÉ LOS ÁTOMOS NO SON PLANOS? ¿POR QUÉ EXISTEN LAS FORMAS?

El cuento de acción determina todos los tamaños en la naturaleza. En particular, determina todas las *formas*. Explóremos este tema.

Los experimentos demuestran que todos los cuantones *compuestos*, tales como átomos o moléculas, tienen estructuras de tamaño finito y, a menudo con formas complejas. El tamaño y la forma de cada cuantón compuesto son debidos al movimiento de sus constituyentes. El movimiento de los constituyentes se debe al cuento de acción; pero ¿cómo se mueven?

En 1901, Jean Perrin, e independientemente, en 1904, Nagaoka Hantaro, propusieron que los átomos serían pequeños ‘sistemas solares’.<sup>ref.40</sup> En 1913, Niels Bohr usó esta idea, combinándola con el cuento de acción, y descubrió que podía predecir el tamaño y el color de los átomos de hidrógeno, dos propiedades que no habían sido comprendidas hasta entonces.<sup>ref.41</sup> Vamos a realizar los cálculos a continuación. Incluso Bohr sabía que los cálculos no eran completamente comprendidos, porque parecían suponer que los átomos de hidrógeno eran planos.

**Desafío 60 e** Se observa que este no es el caso; por otra parte, está en contradicción con el cuento de acción. De hecho, el cuento de acción implica que el movimiento de los componentes cuánticos es difuso. Por lo tanto, todos los cuantones compuestos, tales como átomos o moléculas, deben estar hechos de *nubes* de constituyentes.

En pocas palabras, el cuento de acción predice:

▷ *Los átomos son nubes esféricas.*

Experimento y teoría muestran de que la forma de cualquier átomo es debida a la nube, o distribución de probabilidad, de sus electrones. El cuento de acción por lo tanto afirma que los átomos o moléculas no son bolas duras, como Demócrito o Dalton creían, sino que son nubes. *La materia está hecha de nubes.*

Las nubes de electrones atómicas no son infinitamente duras sino que pueden, hasta cierto punto, interpenetrarse y deformarse. La región donde esto ocurre se denomina un *enlace* químico. Los enlaces conducen a moléculas, líquidos, sólidos, flores y personas. Las moléculas, que están compuestas por átomos, están compuestas de (deformadas) nubes esféricas.

Una exploración detallada muestra que todas las formas, desde las más simple moléculas a la forma de las personas, se deben a las interacciones entre los electrones y los núcleos de los átomos constituyentes. Hoy en día, las formas moleculares pueden ser calculadas con una alta precisión. Las moléculas pequeñas, como el agua, tienen formas que son bastante rígidas, aunque dotadas de un cierto grado de elasticidad. Las moléculas grandes, tales como polímeros o péptidos, tienen formas flexibles. Estos cambios de forma son esenciales para sus efectos dentro de las células y por lo tanto para nuestra supervivencia. Un gran cuerpo de investigación biofísica y bioquímica está explorando los efectos de la forma molecular.

En síntesis, el cuento de acción implica que las formas existen - y que fluctúan. Por ejemplo, si una molécula larga se mantiene fija en sus dos extremos, no puede permanecer en reposo en el medio. Tales experimentos son fáciles de realizar hoy en día, por ejemplo con ADN; confirman de nuevo que el reposo perfecto no existe, y que el cuento de acción está en la base de la química y la vida.

Todas las formas se deben al cuento de acción. Ahora, cada objeto con una forma no esférica es capaz de rotar. Explóremos qué puede decir el cuento de acción sobre la rotación.

## ROTACIÓN, CUANTIZACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR, Y LA FALTA DE POLOS NORTE

Triste e quel discepolo che non avanza il suo maestro. Leonardo da Vinci\*  
"Triste es aquel discípulo que no supera a su maestro."

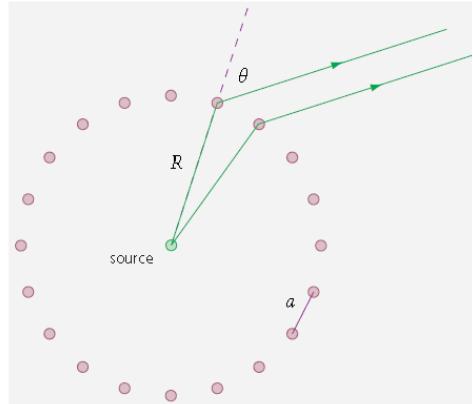
En la vida diaria, la rotación es un tipo de movimiento frecuente. Las ruedas están en todo nuestro entorno. Resulta que el cuento de acción tiene importantes consecuencias para el movimiento de rotación. En primer lugar, observamos que la acción y el momento angular tienen la misma dimensión física: Ambos se miden en Js o Nms.

Sólo se necesita pensar un poco para demostrar que si la materia o la radiación tiene una cantidad de movimiento y una longitud de onda relacionadas con el cuento de la acción, entonces el momento angular se fija en múltiplos del cuento de acción. Este famoso argumento se debe a Dicke y Wittke.<sup>ref.42</sup>

\*\* Esta frase está esculpida en letras grandes en el Aula de química de la Universidad de Roma *La Sapienza*.

Imagine una valla circular, hecha de  $N$  barras de acero espaciadas a una distancia  $a = 2\pi R / N$ , como se muestra en la [Figura 38](#). En el centro de la valla, imagine una fuente de materia o radiación que pueda emitir partículas hacia la valla en cualquier dirección elegida. La cantidad de movimiento de tal partícula es  $p = \hbar k = 2\pi\hbar / \lambda$ . En las ranuras de la cerca, la onda interferirá.

[FIGURA 38](#) La cuantización del momento angular.



Fuera de la valla, la dirección del movimiento de la partícula está determinada por la condición de interferencia positiva. En otras palabras, el ángulo  $\theta$ , que describe la dirección del movimiento fuera de la valla, está dado por un  $\sin \theta = M\lambda$ , donde  $M$  es un entero. A través de la deflexión debida al proceso de interferencia, la valla recibe un momento lineal  $p \sin \theta$ , o un momento angular  $L = pR \sin \theta$ . Usando todas estas expresiones, encontramos que el momento angular transferido a la valla es

$$L = NM\hbar. \quad (27)$$

En otras palabras, el momento angular de la valla es un múltiplo entero de  $\hbar$ . Las cercas sólo pueden tener impulsos angulares intrínsecos enteros (en unidades de  $\hbar$ ). La generalización del argumento a todos los cuerpos también es correcta. (Por supuesto, esto es sólo una sugerencia, no una prueba.)

▷ *El momento angular intrínseco medido de los cuerpos es siempre un múltiplo de  $\hbar$ .*

La teoría cuántica afirma así que el momento angular de cada objeto aumenta en pasos. El momento angular está cuantizado. Este resultado es confirmado por todos los experimentos.

Pero la rotación tiene aspectos más interesantes. Gracias al cuanto de acción, del mismo modo que la cantidad de movimiento suele ser aleatoria o difusa, así también lo es el momento angular. Existe una relación de indeterminación para el momento angular  $L$ . [ref.43](#) La variable complementaria es el ángulo de fase  $\varphi$  de la rotación. [ref.44](#) La relación de indeterminación puede expresarse de varias maneras. La aproximación más simple -y por lo tanto *no* la expresión exacta- es

$$\Delta L \Delta \varphi \geq \hbar / 2 \quad (28)$$

Esta es obviamente una aproximación: la relación sólo es válida para grandes momentos angulares.

No puede ser válido para valores pequeños, ya que  $\Delta\varphi$  por definición no puede crecer más allá de  $2\pi$ . En particular, los autoestados del momento angular tienen  $\Delta L = 0$ .\*

La indeterminación del momento angular aparece para todos los cuerpos macroscópicos, o alternativamente, para todos los casos en que se puede medir la fase angular del sistema.

La cuantización y la indeterminación del momento angular tienen importantes consecuencias. Hablando clásicamente, los polos de la Tierra son los lugares que no se mueven cuando son observados por un observador no giratorio. Por lo tanto, en esos lugares la materia tendría una posición definida y una cantidad de movimiento definido. Sin embargo, el cuanto de acción prohíbe esto. No puede haber un Polo Norte en la Tierra. Más precisamente, la idea de un eje de rotación es una aproximación, no válida en general.

### ROTACIÓN DE CUANTONES

Aún más interesantes son los efectos del cuanto de acción sobre las partículas *microscópicas*, tales como átomos, moléculas o núcleos. Observamos de nuevo que la acción y el momento angular tienen las mismas

\*\* Una formulación exacta de la relación de indeterminación para el momento angular es

$$\Delta L \Delta \varphi \geq (\hbar / 2) |1 - 2\pi P(\pi)|, \quad (29)$$

Donde  $P(\pi)$  es la probabilidad normalizada de que la posición angular tenga el valor  $\pi$ . Para un eigenstate (autoestado) de momento angular, se tiene  $\Delta\varphi = \pi / 3$  y  $P(\pi) = 1 / 2\pi$ . Esta expresión exacta ha sido probada y confirmada por experimentos. [ref.45](#)

unidades. La precisión con la que se puede medir el momento angular depende de la precisión del ángulo de rotación. Pero si una partícula *microscópica* gira, esta rotación puede ser inobservable: una situación en contraste fundamental con el caso de los objetos *macroscópicos*. Los experimentos confirman que muchas partículas microscópicas tienen ángulos de rotación inobservables. Por ejemplo, en muchos (pero no en todos) los casos, un núcleo atómico rotado por medio giro no puede distinguirse del núcleo no girado.

Si una partícula microscópica tiene un ángulo de rotación inobservable *mínimo*, el cuantos de acción implica que el momento angular de esa partícula *no puede* ser cero. Siempre debe estar girando. Por lo tanto, necesitamos comprobar, para cada partícula, cuál es su ángulo de rotación mínimo observable. Los físicos han comprobado todas las partículas de la naturaleza en experimentos y han encontrado los ángulos no observables mínimos (dependiendo del tipo de partícula) de  $0, 4\pi, 2\pi, 4\pi/3, \pi, 4\pi/5, 2\pi/3$  etc.

Tomemos un ejemplo. Ciertos núcleos tienen un ángulo de rotación mínimo inobservable de *media vuelta*. Este es el caso de un núcleo esferoidal (uno que se parece a una pelota de rugby) girando alrededor de su eje menor, como por ejemplo un ion de sodio  $^{23}\text{Na}$ . Tanto la mayor rotación observable como la indeterminación son, por lo tanto, un *cuarto* de vuelta. Puesto que el cambio, o acción, producido por una rotación es el número de vueltas multiplicado por el momento angular, encontramos que el momento angular de este núcleo es  $2 \cdot \hbar$ .

Como resultado general, deducimos de los valores de ángulo mínimo que el momento angular de una partícula microscópica puede ser  $0, \hbar/2, \hbar, 3\hbar/2, 2\hbar, 5\hbar/2, 3\hbar$  etc. En otras palabras, el momento angular intrínseco de una partícula, generalmente llamado *espín*, es un múltiplo entero de  $\hbar/2$ . El espín describe cómo se comporta una partícula bajo rotaciones. (Resulta que todas las partículas de espín-0 están compuestas de otras partículas, respetando así el cuantos de acción como límite para el movimiento de rotación en la naturaleza).

¿Cómo puede girar una partícula? En este punto, todavía no sabemos cómo *representar* la rotación.

Pero podemos *sentirla* - así como habíamos mostrado que la luz está hecha de entidades giratorias: toda materia, incluyendo los electrones, puede ser *polarizada*. Esto se muestra claramente en el famoso experimento de Stern-Gerlach.

#### LA PLATA, STERN Y GERLACH – POLARIZACIÓN DE CUANTONES

Después de un año de duro trabajo, en 1922, Otto Stern y Walther Gerlach<sup>\*\*</sup> completaron un bello experimento para investigar la polarización de los cuantones de materia. Ellos sabían que los campos magnéticos no homogéneos actúan como polarizadores para las cargas en rotación. Las cargas girantes están presentes en cada átomo. Por lo tanto, hicieron pasar un haz de átomos de plata, extraídos de un horno por evaporación, por un campo magnético no homogéneo. Encontraron que el haz se divide en dos haces separados, como se muestra en la Figura 39.<sup>ref.46</sup> No hay átomos que dejen la región del campo magnético en direcciones intermedias. Esto está en completo contraste con lo que se esperaría de la física clásica.

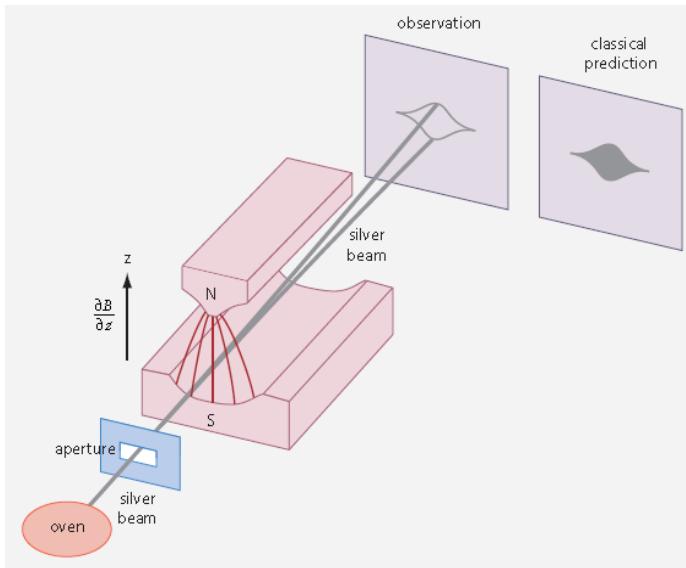
La división en dos haces es una propiedad intrínseca de los átomos de plata; hoy sabemos que es debido a su espín. Los átomos de plata tienen espín  $\hbar/2$ , y dependiendo de su orientación en el espacio, son desviados ya sea en la dirección de la inhomogeneidad del campo o en su contra. La división del haz es un efecto cuántico puro: no hay opciones intermedias. De hecho, el experimento Stern-Gerlach proporciona una de las demostraciones más claras de que la física clásica no funciona bien en el dominio microscópico. En 1922, el resultado parecía tan extraño que fue estudiado con gran detalle en todo el mundo.

Cuando uno de los dos haces, digamos el haz superior, pasa a través de un segundo montaje, todos los átomos terminan en el haz superior. La otra salida posible, el haz inferior, permanece sin usar en este caso. En otras palabras, los haces superior e inferior, en contraste con el haz original, no se pueden dividir. Esto no es sorprendente.

Pero si el segundo montaje se gira un ángulo de  $\pi/2$  con respecto al primero, nuevamente se forman dos haces - 'derecho' y 'izquierdo', y no importa si el haz entrante llega directamente del horno o desde el haz superior. Una configuración parcialmente girada produce una división parcial, desigual. Las proporciones dependen del ángulo.

\*\* Otto Stern (1888–1969) y Walther Gerlach (1889–1979), Ambos físicos alemanes, trabajaron juntos en la Universidad de Frankfurt. Por su posterior medición del momento magnético anómalo del protón, Stern recibió el Premio Nobel de Física en 1943, después de haber tenido que huir del nacionalsocialismo.

Observamos directamente que si dividimos el haz del horno primero verticalmente y luego horizontalmente, obtendremos un resultado diferente de dividir el haz en el orden opuesto. Los procesos de división no comutan. (Cuando el orden de dos operaciones da una diferencia en el resultado neto, los físicos lo llaman 'no conmutativo'). Dado que todas las mediciones son también procesos físicos, deducimos que, en general, las mediciones y los procesos en sistemas cuánticos son no conmutativos. *Desafío 61 e*



**FIGURA 39** El experimento de Stern–Gerlach.

La subdivisión de los haces depende de la dirección. Los haces de la materia se comportan casi de la misma manera que los haces de luz polarizados. En realidad, el campo magnético no homogéneo actúa sobre la materia un poco como un polarizador actúa sobre la luz. Los haces superiores e inferiores, tomados juntos, definen una dirección de polarización. De hecho, la dirección de polarización se puede girar (con la ayuda de un campo magnético *homogéneo*). Efectivamente, un haz girado en un imán no girado se comporta como un haz no girado en un imán girado.

#### CURIOSIDADES Y DIVERTIDOS DESAFÍOS ACERCA DE LA MATERIA CUÁNTICA

It is possible to walk while reading, but not to

read while walking. Serge Pahaut

*Es posible caminar mientras se lee, pero no leer mientras se camina.*

El cuento de acción implica que no hay *fractales* en la naturaleza. Cada cosa está formada por partículas. Y las partículas son nubes. La teoría cuántica requiere que todas las formas en la naturaleza sean *nubes 'difusas'*.

\* \*

¿Pueden rotar los átomos? ¿Puede un átomo que cae en el suelo rodar debajo de la mesa? ¿Pueden los átomos ser puestos en rotación a alta velocidad? La respuesta es "no" a todas estas preguntas, porque el momento angular está cuantizado. Además, los átomos no son objetos sólidos, sino nubes.<sup>ref.47</sup> El caso macroscópico de un objeto que rueda cada vez más lento hasta que se detiene no existe en el mundo microscópico. El cuento de acción no lo permite.

\* \*

La luz es refractada cuando entra en materia densa. ¿Las ondas de la materia se comportan de manera similar? Sí, lo hacen. En 1995, David Pritchard demostró esto para las ondas del sodio que entran en un gas de helio y xenón.<sup>ref.48</sup>

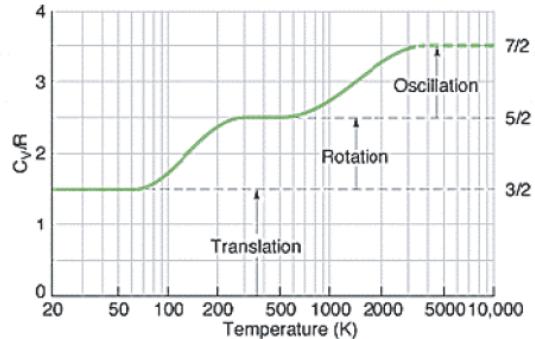
\* \*

Muchos efectos cuánticos producen curvas que muestran escalones. Un ejemplo importante es el calor molar del gas hidrógeno H<sub>2</sub>, mostrado en la Figura 40. Al aumentar la temperatura de 20 a 8 000 K, el calor molar muestra dos escalones, primero de 3R / 2 a 5R / 2, y después a 7R / 2. ¿Puede explicar la razón?

\* \*

La mayoría de los ejemplos de movimiento cuántico dados hasta ahora se deben a efectos electromagnéticos. *Desafío 62 ny* ¿Puede usted argumentar que el cuanto de acción también debe aplicarse al movimiento nuclear?

**FIGURA 40** Un gráfico idealizado de la capacidad calorífica del hidrógeno frente a la temperatura(© Peter Eyland).

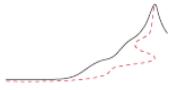


#### PRIMER RESUMEN SOBRE EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CUÁNTICAS

En resumen, la división del haz "digital" observada en el experimento de Stern-Gerlach y las propiedades ondulatorias de la materia nos obligan a repensar nuestra descripción del movimiento. En relatividad especial, la existencia de una velocidad máxima nos obligó a introducir el concepto de espacio-tiempo, y luego a refinar nuestra descripción del movimiento. En la relatividad general, la fuerza máxima nos obligó a introducir los conceptos de horizonte y curvatura, y luego refinar nuestra descripción del movimiento. En el punto presente, la existencia del cuanto de acción y el comportamiento ondulatorio de la materia nos obligan a hacer dos pasos similares: introducimos primero el concepto de función de onda y luego refinamos nuestra descripción del movimiento.



## Capítulo 4



# LA DESCRIPCIÓN CUÁNTICA DE LA MATERIA Y SU MOVIMIENTO

Die Quanten sind doch eine hoffnungslose Schweinerei!\* Max Born  
*Aquellos cuantos son un embrollo sucio sin esperanza!* '

## E

n la vida ordinaria y en Física clásica, decimos que un sistema *tiene* una posición, que *está*

orientado en una cierta dirección, que *tiene* un eje de rotación, y que *tiene* un estado con cantidad de movimiento específica. En Física clásica, podemos hablar de este modo porque el *estado* – la situación en la que está un sistema y las propiedades que un sistema tiene – y los *resultados de las mediciones* coinciden. Coincidir porque las mediciones puede imaginarse como que tienen un efecto despreciable sobre el sistema.

Debido a la existencia de la acción mínima, la interacción necesaria para realizar una medición en un sistema *no puede hacerse* arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, el cuanto de acción nos hace *imposible* seguir diciendo que un sistema *tiene* cantidad de movimiento, *tiene* posición o *tiene* un eje de rotación. Nos vemos obligados a utilizar la idea de la flecha giratoria e introducir el concepto de *función de onda* o *función de estado*. Veamos por qué y cómo.

### ESTADOS Y MEDIDAS

El experimento de Stern–Gerlach muestra que los valores medidos de la orientación del espín *no* son intrínsecos, sino que resultan del proceso de medida mismo (en este caso, de la interacción con el campo no homogéneo). Esto está en contraste con la *magnitud* espín, la cual es intrínseca e independiente del estado. En resumen, el cuanto de acción nos fuerza a distinguir tres entidades:

- el estado del sistema;
- la operación de medida;
- el resultado de la medida.

En contraste con lo clásico, o sea el caso cotidiano, el estado de un sistema cuántico (las propiedades que un sistema '*tiene*') *no* se describe por los resultados de las mediciones. La ilustración más simple de esta diferencia es el sistema hecho de una sola partícula en el experimento de Stern-Gerlach.

El experimento muestra que una medida de espín en un estado genérico de la partícula (que sale de un horno) a veces da 'up (arriba)' (digamos +1), y a veces da 'down (abajo)' (digamos -1). Así, un átomo genérico, en un estado dentro del horno, no tiene una orientación intrínseca. Sólo después de la medición, un átomo está en un estado "up" o en un estado "down". También se observa que al alimentar los estados "superiores" en el aparato de medición se obtienen estados "superiores": por lo tanto, ciertos estados especiales, llamados *estados propios*, permanecen no afectados por la medición. Finalmente, el experimento muestra que los estados pueden ser rotados por campos aplicados: tienen una dirección en el espacio.

Las observaciones experimentales pueden ser descritas de una manera directa. Dado que las medidas son operaciones que toman un estado como entrada y producen un estado de salida y un resultado de medición, podemos decir:

- ▷ Los *estados* se describen mediante flechas rotatorias.
- ▷ Las *mediciones* de observables son operaciones sobre los vectores de estado.
- ▷ Los *resultados de las mediciones* son *números reales*; y como en la física clásica, por lo general dependen del observador.

Así hemos distinguido tres cantidades que no se distinguen en la física clásica:

Estados, medición de observables y resultados de medición.

Dada esta distinción, la teoría cuántica se sigue muy sencillamente, como veremos.

Debido a que cualquier medida es una interacción con un sistema y, por tanto, una transformación de su estado, la física cuántica describe los observables físicos como operadores y, por lo tanto, como

transformaciones en el espacio de Hilbert. El experimento de Stern-Gerlach lo muestra claramente: la interacción con el campo influye en los átomos : algunos de una manera, y otros de otra manera. Los experimentos muestran así que:

- ▷ Matemáticamente, los estados son *vectores complejos*, o flechas, en un espacio abstracto. Este espacio de todos los posibles estados o flechas es un *espacio de Hilbert*.
- ▷ Matemáticamente, las mediciones son transformaciones lineales , más precisamente, se describen mediante operadores (o matrices) autoadjuntas o *hermíticas*.
- ▷ Matemáticamente, los *cambios de punto de vista* son descritos por *operadores unitarios* (o matrices) que actúan sobre estados, o flechas, y sobre operadores de medición.

Los experimentos mecánicos cuánticos también muestran que una medida de un observable sólo puede dar un resultado que es un *valor propio* de la transformación correspondiente. Los estados resultantes, aquellos estados excepcionales que *no* son influenciados cuando se mide la variable correspondiente, son los *autovectores*. En resumen, todo experto en movimiento debe saber qué es un autovalor y un autovector.

Para cualquier transformación lineal  $T$ , aquellos vectores especiales  $\psi$  que se transforman en múltiplos de sí mismos,

$$T\psi = \lambda\psi \quad (30)$$

se denominan autovectores *eigenvectors* (o autoestados *eigenstates*), y la multiplicación por un factor  $\lambda$  se llama el autovalor asociado (*eigenvalue*). Los experimentos muestran que:

- ▷ El estado del sistema *después* de una medición viene dado por el vector propio (*eigenvector*) correspondiente al valor propio medido.

En el experimento de Stern-Gerlach, los estados propios son los estados "arriba" y "abajo". En general, los estados propios son aquellos estados que no cambian cuando se mide la variable correspondiente. Los valores propios de los operadores hermitianos son siempre reales, por lo que se garantiza la coherencia: todos los resultados de las mediciones son números reales.

En resumen, el cuanto de acción nos obliga a distinguir entre tres conceptos que están mezclados juntos en la física clásica: el *estado* de un sistema, una *medida* en el sistema y el *resultado de la medición*. El cuanto de acción nos obliga a cambiar el vocabulario con el que describimos la naturaleza, y obliga a utilizar conceptos más diferenciados.

Ahora sigue el paso principal: la descripción del *movimiento* con estos conceptos. Esto es lo que usualmente se llama "teoría cuántica".

### VISUALIZANDO LA FUNCIÓN DE ONDA: FLECHAS GIRANTES (ROTATING ARROWS) Y NUBES DE PROBABILIDAD

Anteriormente, describimos el estado de un cuantón con una flecha. De hecho, esto es una aproximación; más precisamente,

- ▷ El estado de una partícula cuántica es descrito por una distribución espacial de flechas, la así llamada *función de onda*.

Para desarrollar una imagen visual de la función de ondas, primero imaginamos una partícula cuántica que esté tan localizada como sea posible. En este caso, la función de ondas para un cuantón libre puede describirse por una única flecha girante.

Cuando un cuantón *localizado* viaja a través del espacio, la flecha conectada gira. Si la partícula no es relativista y si el espín puede ser descuidado, la rotación tiene lugar en un plano perpendicular a la dirección de movimiento. El final de la flecha luego traza una *hélice* alrededor de la dirección del movimiento. En este caso, el estado en un momento dado se describe por el *ángulo de la flecha*. Este ángulo es la *fase cuántica*. La fase cuántica es responsable de las propiedades de onda de la materia, como veremos. La longitud de onda y la frecuencia de la hélice se determinan por la cantidad de movimiento y la energía cinética de la partícula.

Si la partícula *no está localizada* - pero aún no relativista y todavía con efectos de giro insignificantes - el estado o la función de onda define una flecha giratoria en *cada punto en el espacio*. La rotación todavía tiene lugar en un plano perpendicular a la dirección de movimiento. Pero ahora tenemos una distribución de

flechas que trazan hélices paralelas a la dirección del movimiento. En cada punto en el espacio y el tiempo, el estado tiene una fase cuántica y una longitud de la flecha.

La Figura 41 Muestra un ejemplo de evolución de una función de onda. La dirección de la flecha en cada punto se muestra por el color en el punto específico. La longitud de la flecha se muestra por el brillo del color. La función de onda  $\psi(t, x)$  para partículas no relativistas con efectos de espín despreciables se describe por una longitud y una fase: es un número *complejo* en cada punto en el espacio. La fase es esencial para la interferencia y muchos otros efectos de onda.

¿Qué propiedad mensurable describe la amplitud, la longitud de la flecha local? La respuesta fue dada por el físico alemán Max Born: la amplitud de la función de onda es una *amplitud de probabilidad*. El cuadrado de la amplitud, es decir, la cantidad

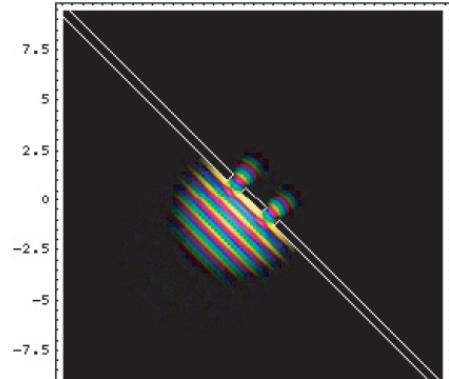
$$|\psi(t, x)|^2,$$

da la probabilidad de encontrar la partícula en el lugar  $x$  en el tiempo  $t$ .

En otros términos, una función de onda es una combinación de dos ideas. Por un lado, una función de onda es una nube. Por otra parte, en cada punto de la nube se tiene que imaginar una flecha. Con el tiempo, las flechas giran y la nube cambia de forma. Podemos aclarar aún más la situación.

▷ En cada proceso en el que la fase de la función de onda no es importante, la imagen de nube de la función de onda es suficiente y correcta.

Por ejemplo, el movimiento de átomos de moléculas en gases o líquidos puede imaginarse como el movimiento de objetos nebulosos. Hay que subrayar que las nubes en cuestión son bastante duras: se necesita mucha energía para deformar las nubes atómicas. La dureza de los cristales típicos está directamente relacionada con la dureza de las nubes atómicas que se encuentran en el interior. Los átomos son nubes extremadamente rígidas, o duras.



**FIGURA 41** El movimiento de una función de onda, el estado cuántico, a través de una hendidura doble, que muestra tanto la partícula como las propiedades ondulatorias de la materia. La densidad del estado se muestra por brillo, y la fase local se codifica en el color. (QuickTime film © Bernd Thaller)

Por otra parte,

- ▷ En cada proceso en el que la fase de la función de onda desempeña un papel, la imagen de nube de la función de onda necesita ser expandida con flechas en cada punto.

Este es el caso de los procesos de interferencia de los cuantos, pero también de la descripción precisa de los enlaces químicos. (Una descripción aproximada se puede lograr sin fases.)

Los docentes a menudo discuten la mejor manera de explicar las funciones de onda. Algunos profesores prefieren usar el modelo de nube solamente, otros prefieren no utilizar ninguna visualización en absoluto. Estos enfoques son posibles; pero el enfoque más útil y disponible es imaginar el estado o la función de onda de partículas cuánticas *no relativistas* como una flecha en cada punto del espacio.

La frecuencia de rotación de la flecha es su *energía cinética*; la longitud de onda del movimiento de la flecha - el período de la curva helicoidal que la punta de las flechas - o de la flecha media - traza durante el movimiento - es la *cantidad de movimiento* de la partícula cuántica.

Una flecha en cada punto del espacio es un *campo*; ya que el campo se concentra en la región donde se localiza la partícula, y como la amplitud del campo está relacionada con la probabilidad de encontrar la partícula, el campo de onda, la función de onda, es una *nube de flechas*.

Obsérvese que aunque la función de onda se puede ver como definiendo una flecha en cada punto del espacio, la función de onda como un todo también se puede describir como un vector único, esta vez en un espacio de Hilbert. Para las partículas libres, ¡el espacio de Hilbert es dimensionalmente infinito!

Sin embargo, no es difícil calcular en esos espacios. El producto escalar de dos funciones de onda es la integral espacial del producto del complejo conjugado de la primera función y de la segunda función (no

conjugada). Con esta definición, todos los conceptos de vectores (vectores unitarios, vectores nulos, vectores de la base, etc.) pueden aplicarse de manera significativa a las funciones de onda.

*El estado o la función de onda de una partícula cuántica es una nube giratoria, más precisamente una onda de flechas giratorias.*

Este aspecto de una nube es inusual; puesto que la nube está hecha de pequeñas flechas, cada punto de la nube se describe por una densidad local y una orientación local. Esta última propiedad no ocurre en ninguna nube de la vida cotidiana. Por lo tanto, durante muchas décadas se asumió tácitamente que no es posible una simple visualización de dicha nube.

Sólo los últimos años han demostrado que hay visualización para estas nubes; una visualización se presenta en el último volumen de esta serie.

#### LA EVOLUCIÓN DEL ESTADO— LA ECUACIÓN DE SCHRODINGER

La descripción del estado de un cuantón no relativista con efectos de espín despreciables como nube girante determina *completamente* cómo evoluciona la función de ondas en el tiempo. De hecho, para tales partículas cuánticas la evolución se sigue de la energía total, la suma de energía cinética y potencial  $T + V$ , y las propiedades de las ondas de materia:

- ▷ La tasa local de cambio del estado flecha  $\psi$  es producida por la energía total local, o hamiltoniano,  $H = T + V$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \quad (31)$$

Esta ecuación famosa es la *ecuación de movimiento de Schrödinger*. \*\* Esta ecuación de evolución se aplica a todos los sistemas cuánticos y es uno de los puntos más altos de la física moderna.

En realidad, Erwin Schrödinger había encontrado su ecuación de dos maneras diferentes<sup>ref.49</sup>. En su primer artículo, la dedujo de un principio variacional.<sup>ref.50</sup> En su segundo artículo, dedujo la ecuación de evolución directamente, haciendo una simple pregunta: ¿cómo hace el Estado para evolucionar? Sabía que el estado de un cuantón se comporta como una onda y como una partícula. Una onda es descrita por un campo, que denotó  $\psi(t, x)$ . Si el estado  $\psi$  se comporta como una onda, entonces la función de onda correspondiente debe ser una amplitud  $W$  multiplicada por un factor de fase:  $e^{ikx-\omega t}$ .

El estado puede por tanto escribirse como

$$\psi(t, x) = W(t, x) e^{ikx-\omega t}. \quad (32)$$

La amplitud  $W$  es la *longitud* de la flecha local; la fase es la *orientación* de la flecha local. Equivalentemente, la amplitud es la densidad local de la nube, y la fase es la orientación local de la nube.

FIGURA 42 Erwin Schrödinger (1887–1961)

Sabemos que la onda cuántica también debe comportarse como una partícula de masa  $m$ . En particular, la relación no-relativista entre la energía y el momento

$$E = p^2/2m + V(x)$$

— donde  $V(x)$  es el potencial en la posición  $x$  — debe cumplirse para estas ondas. Las dos relaciones de de Broglie (21) para la longitud de onda y la frecuencia de la materia entonces implican

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(\vec{x}) \Psi \quad (33)$$



Esta es la forma completa de la ecuación de onda de Schrödinger. Indica cómo la onda flecha, la función

\*\* Erwin Schrödinger (b. 1887 Viena, d. 1961 Viena) Era famoso por ser un físico bohemio que vivía siempre en un hogar con dos mujeres. En 1925 descubrió la ecuación que le dio fama internacional y el Premio Nobel de Física en 1933. También fue el primero en demostrar que la radiación descubierta por Víctor Hess en Viena venía realmente del cosmos. Dejó Alemania, y de nuevo Austria, por antipatía por el nacionalsocialismo, y fue profesor en Dublín durante muchos años. Allí publicó su famoso e influyente libro *¿Qué es la vida?* En él, estuvo cerca de predecir el entonces-desconocido ADN del ácido nucleico a partir de la perspicacia teórica solamente.

de onda  $\psi$ , asociada a una partícula, evoluciona con el tiempo. En 1926, esta *ecuación de onda* para el campo complejo  $\psi$  se hizo instantáneamente famosa cuando Schrödinger la usó, al insertar el potencial sentido por un electrón cerca de un protón, para calcular los niveles de energía del átomo de hidrógeno. En un átomo de hidrógeno, la luz es emitida por el único electrón dentro de ese átomo; por lo tanto una descripción precisa del movimiento del electrón en un átomo de hidrógeno nos permite describir las frecuencias de luz que puede emitir. (Vamos a realizar a continuación el cálculo y la confrontarlo con el experimento.)

En primer lugar, la ecuación de Schrödinger explicaba que sólo colores *discretos* son emitidos por el hidrógeno; además, se encontró que las frecuencias de la luz emitida estaban de acuerdo con la predicción de la ecuación hasta cinco cifras decimales. Este fue un resultado importante, especialmente si tenemos en cuenta que la física clásica ni siquiera puede explicar la existencia de átomos, ¡tanto menos su emisión de luz! En cambio, la física cuántica explica todas las propiedades de los átomos y sus colores con una alta precisión. En otras palabras, el descubrimiento del cuantum de acción llevó a la descripción del movimiento de la materia a un nuevo punto más elevado.

De hecho, la descripción exacta de los cuántos de la materia sólo se encuentra cuando se tienen en cuenta el espín y la relación *relativista* de la energía-cantidad de movimiento. Hacemos esto a continuación. No se han encontrado desviaciones entre los cálculos relativistas y los experimentos. E incluso hoy, las predicciones y las mediciones de los espectros atómicos siguen siendo las más precisas y exactas en todo el estudio de la naturaleza: en los casos en que la precisión experimental lo permite, los valores calculados coinciden con los experimentos hasta 13 cifras decimales.

#### AUTO-INTERFERENCIA DE CUANTONES

Las ondas interfieren. Dijimos anteriormente que todos los experimentos confirman que todas las partículas cuánticas, también los cuantones de materia, presentan interferencia. La película de la [Figura 41](#) muestra que la interferencia es una consecuencia directa de la ecuación de Schrodinger. La película muestra la solución de la ecuación de Schrodinger para una doble rendija. La película visualiza cómo una doble rendija induce difracción e interferencia.

Resulta que la ecuación de Schrodinger reproduce y explica completamente las observaciones de la interferencia de la materia, incluyendo los ejemplos mostrados en la [Figura 35](#) y la [Figura 36](#): La interferencia de los cuantones de la materia se debe a la evolución de las nubes giratorias.

Y como en todos los fenómenos de interferencia, la intensidad local del patrón de interferencia resulta ser proporcional al cuadrado  $|W|^2$  de la amplitud del estado.

Observamos que a pesar de que la función de onda se extiende por toda la pantalla de detección justo antes de que llegue a la pantalla, sin embargo, produce sólo un punto localizado en la pantalla. Este efecto, el llamado *colapso de la función de onda*, se explora en detalle a continuación.

#### LA VELOCIDAD DE LOS CUANTONES

Vamos a profundizar un poco en los detalles de la descripción dada por la ecuación de Schrodinger ([33](#)). La ecuación expresa una conexión simple: la velocidad clásica de una partícula material es la *velocidad de grupo* de la función de onda  $\psi$ . Vista desde lejos, la función de onda se mueve como se movería una partícula clásica.

Pero sabemos de la física clásica que la velocidad de grupo no está siempre bien definida:

En los casos en que el grupo se disuelve en varios picos, el concepto de velocidad de grupo no es de mucha utilidad. Estos son los casos en que el movimiento cuántico es muy diferente del movimiento clásico, como descubriremos pronto. Pero para los casos que se comportan bien, encontramos que la función de onda se mueve de la misma manera que una partícula clásica.

La ecuación de Schrodinger introduce otro punto: la velocidad y la posición de la materia no son variables independientes, y no pueden ser elegidas a voluntad. De hecho, la condición inicial de un sistema está dada solo por el valor inicial de la función de onda. Cualquier derivado tiene que *ser* (o puede ser) especificado. De hecho, los experimentos confirman que los sistemas cuánticos se describen mediante una ecuación de evolución de *primer orden*, en marcado contraste con los sistemas clásicos.

## DISPERSIÓN DE CUANTONES

Para partículas cuánticas libres, la ecuación de evolución implica *dispersión*, como se ilustra en la Figura 43. Imagine una función de onda que está localizada en torno de una determinada posición de partida.

Tal función de onda describe un sistema cuántico en reposo. Cuando el tiempo pasa, esta función de onda se *difundirá* en el espacio. En efecto, la ecuación de evolución de Schrödinger es similar, matemáticamente, a una ecuación de difusión. De la misma manera que una gota de tinta se difunde en el agua, también el estado de una partícula cuántica localizada se extenderá en el espacio. Es cierto que la posición más probable permanece invariable, pero la probabilidad de encontrar la partícula a grandes distancias de la posición inicial aumenta con el tiempo. Para las partículas cuánticas, este efecto de propagación es observado de hecho en todos los experimentos. La difusión es una consecuencia del aspecto onda de la materia, y por lo tanto del cuanto de acción  $\hbar$ . Sin embargo, para los objetos macroscópicos no se observa el efecto de propagación: los coches raramente se alejan de los espacios de aparcamiento.

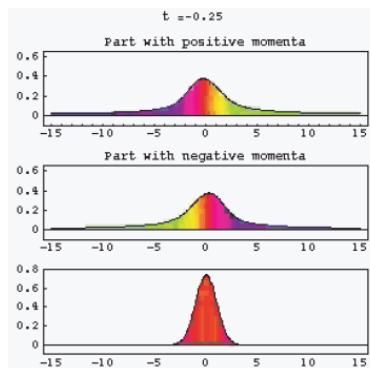


FIGURA 43 La evolución de una función de onda (curva más baja) con momento cero, y el movimiento de sus partes con momentos positivos y negativos. La fase local está codificada en el color. (QuickTime film © Bernd Thaller)

En realidad, la teoría cuántica predice que para los sistemas macroscópicos, el efecto de la propagación es insignificantemente pequeño. *Desafío 63 ny ¿Puede demostrar por qué?*

Resumiendo, el aspecto de onda de la materia conduce a la difusión de las funciones de onda. Las funciones de onda muestran dispersión.

## EFFECTO TÚNEL Y LÍMITES EN LA MEMORIA - AMORTIGUAMIENTO DE LOS CUANTOS

El "sentido común" dice que una bola lenta no puede rodar sobre una colina alta. Más precisamente, la física clásica dice que si la energía cinética  $T$  es menor que la energía potencial  $V$  que la bola tendría en la cima de la colina, entonces la bola no puede alcanzar la cima de la colina. En cambio, según la teoría cuántica, existe una probabilidad positiva de pasar la colina *cualquiera que sea* la energía de la bola.

En la teoría cuántica, las colinas y los obstáculos son descritos por barreras de potencial y los objetos por funciones de onda. Cualquier función de onda inicial se extenderá *más allá* de cualquier barrera potencial de altura y ancho finitos. La función de onda será también no nula *en* la ubicación de la barrera. En resumen, cualquier objeto puede superar cualquier colina o barrera, como se muestra en la Figura 45.

Este efecto se denomina *efecto túnel*. Está en completo contraste con la experiencia cotidiana - y con la mecánica clásica.

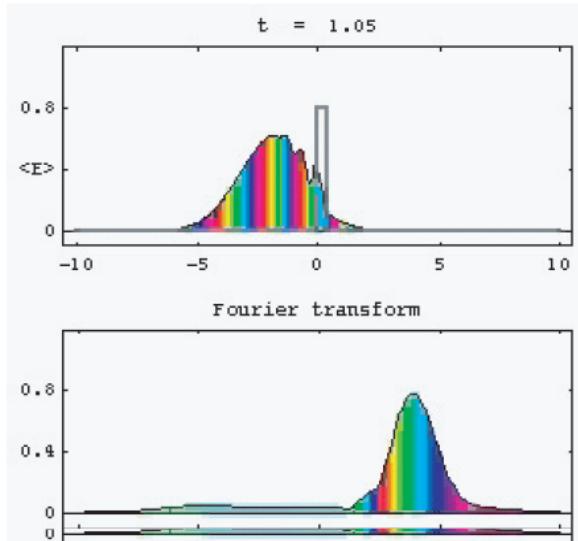


FIGURA 44 El efecto túnel de una función de onda a través de una colina de potencial (la columna rectangular): la mayor parte de la función de onda se refleja, y parte de la función de onda pasa al otro lado. La fase local está codificada en el color. (QuickTime film © Bernd Thaller)

El efecto de túnel resulta de un nuevo aspecto contenido en la descripción cuántica de las colinas: la afirmación de que todos los obstáculos en la naturaleza pueden ser superados con un esfuerzo *finito*. Ningún obstáculo es infinitamente difícil de superar. De hecho, sólo para un potencial de altura infinita la función de onda se anulará y no se extenderá al otro lado. Pero tales potenciales sólo existen como aproximaciones; en la naturaleza los potenciales son siempre de valor finito.

*Desafío 64 ny* ¿Cuán grande es el efecto de túnel? El cálculo muestra que la probabilidad de transmisión  $P$  está dada aproximadamente por

$$P \approx \frac{16 T (V - T)}{V^2} e^{-\frac{2\omega}{\hbar} \sqrt{2m(V-T)}} \quad (34)$$

Donde  $\omega$  es la anchura de la colina,  $V$  su altura, y  $m$  y  $T$  son la masa y la energía cinética de la partícula. Para un sistema de gran número de partículas, la probabilidad es el producto de las probabilidades para las diferentes partículas.

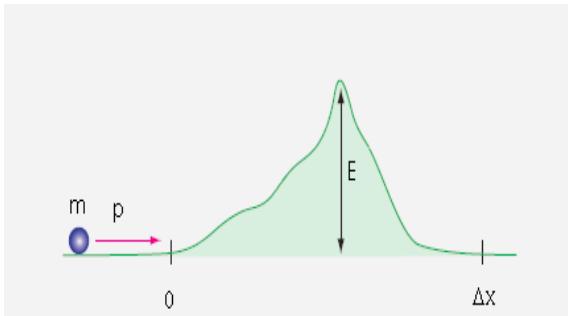


FIGURA 45 Subiendo una colina.

Tomemos el caso de un coche en un garaje, y suponemos que el coche está hecho de  $10^{28}$  átomos a temperatura ambiente. Una pared típica de garaje tiene un espesor de 0,1 m y una altura potencial de  $V = 1$  keV = 160 aJ para el paso de un átomo.

Tenemos que la probabilidad de encontrar el coche fuera del garaje es

$$P \approx (10^{10^{12}})^{10^{28}} \approx 10^{-10^{40}} \quad (35)$$

La pequeñez de este valor (sólo intente escribirlo, para convencerse *Desafío 65 e*) es la razón por la cual la policía nunca lo tiene en cuenta cuando un automóvil se denuncia como desaparecido. (En realidad, la probabilidad es incluso considerablemente menor. *Desafío 66 ny* ¿Puede nombrar al menos un efecto que se ha olvidado en este simple cálculo?)

Obviamente, el efecto túnel puede ser importante sólo para sistemas pequeños, hechos de unas pocas partículas, y para barreras delgadas, con un grosor del orden de  $\hbar / \sqrt{2m(V-T)}$ . Por ejemplo, el efecto túnel de átomos individuales se observa en sólidos a alta temperatura, pero no es importante en la vida diaria. Para los electrones, el efecto es mayor: la anchura  $\omega$  de la barrera para un efecto de túnel apreciable es

$$\omega \approx \frac{0,5 nm \sqrt{aJ}}{\sqrt{V-T}} \quad (36)$$

A temperatura ambiente, la energía cinética  $T$  es del orden de 6 zJ; aumentar la temperatura obviamente aumenta el efecto túnel. Como resultado, los electrones, por efecto túnel, pasan muy fácilmente a través de barreras que son de unos pocos átomos de ancho. En efecto, cada tubo de TV utiliza el efecto túnel a alta temperatura para generar el haz de electrones que produce la imagen. La calefacción necesaria es la razón por la cual los tubos de la televisión tardan un cierto tiempo en encenderse.

El efecto túnel de electrones también limita el tamaño físico de las memorias de la computadora. Los chips de memoria no pueden hacerse arbitrariamente pequeños. Los circuitos integrados de silicio con un terabyte de memoria de acceso aleatorio (RAM) probablemente nunca existirán. *Desafío 67 s* ¿Puede imaginar por qué? En realidad, el efecto túnel limita el funcionamiento de cualquier tipo de memoria, incluyendo la de nuestro cerebro. De hecho, si estuviéramos mucho más calientes que  $37^\circ C$ , ¡no podríamos recordar nada!

Dado que la luz está hecha de partículas, también puede atravesar barreras potenciales. Las mayores - o más altas - barreras de potencial para la luz son los espejos; los espejos tienen alturas de barrera del orden de un attojoule. El efecto túnel (tunnelling) implica que la luz *puede ser* detectada detrás de cualquier espejo.

Estas llamadas *ondas evanescentes* han sido realmente detectadas; se utilizan en varios experimentos y dispositivos de alta precisión.

### LA FASE CUÁNTICA

Vimos que la *amplitud* de la función de onda, la amplitud de probabilidad, muestra los mismos efectos que cualquier onda: dispersión y amortiguación. Exploraremos ahora la *fase* de la función de onda con más detalle.

Considerando que la amplitud de una función de onda es fácil de imaginar - basta pensar en la (raíz cuadrada de la) densidad de una nube real - la fase requiere más esfuerzo. Los estados o funciones de onda son *nubes con una fase local*: son nubes de objetos que giran y que pueden ser girados. En el caso de una nube de agua cotidiana, la rotación local de las gotitas no tiene efecto sobre la nube. Por el contrario, en la teoría cuántica, la rotación local de la nube, por lo tanto el cambio de su fase, tiene un efecto medible. Exploraremos este punto.

La fase de las ondas de la materia se comporta como la fase de los fotones: evoluciona con el tiempo, y por lo tanto aumenta a lo largo de la trayectoria de una partícula móvil. La fase puede ser representada por una pequeña flecha rotatoria. La velocidad angular con la que la fase gira está dada por la famosa relación

$$\omega = E/\hbar.$$

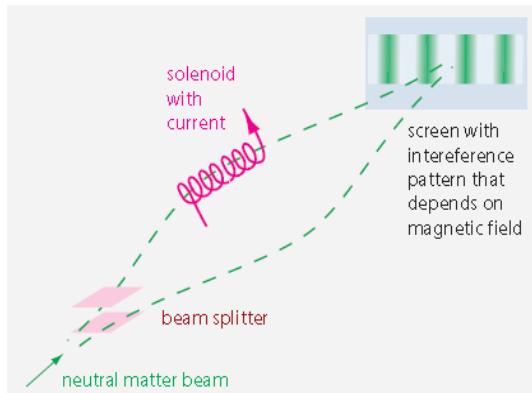
En resumen, podemos imaginar la función de onda de una partícula cuántica libre como una nube en movimiento que gira con frecuencia constante pero se dispersa al mismo tiempo.

Por encima de todo, la fase es ese aspecto de la función de onda que conduce a efectos de interferencia.

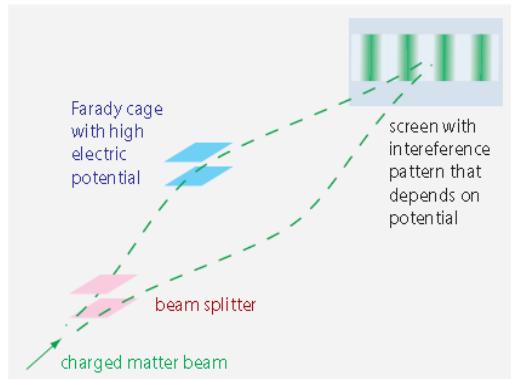
Cuando dos funciones de onda parciales se separan y recombinan después de un cambio de fase relativo, el cambio de fase determinará el patrón de interferencia. Este es el origen de las observaciones de la interferencia del haz de electrones mostradas en la Figura 35. Sin la fase cuántica, no habría extinción ni interferencia.

La fase de una función de onda puede ser influenciada de muchas maneras. La forma más sencilla es el uso de campos eléctricos. Si la función de onda de una partícula *cargada* se divide y una parte es conducida a través de una región con un campo eléctrico, se producirá un cambio de fase. La disposición se muestra en la Figura 46. Una variación periódica del potencial eléctrico produce un cambio periódico del patrón de interferencia. Esto se observa realmente.

**FIGURA 46** Un potencial eléctrico localizado en un interferómetro conduce a un cambio del patrón de interferencia.



**FIGURA 47** Los campos magnéticos cambian la fase de una partícula con espín.

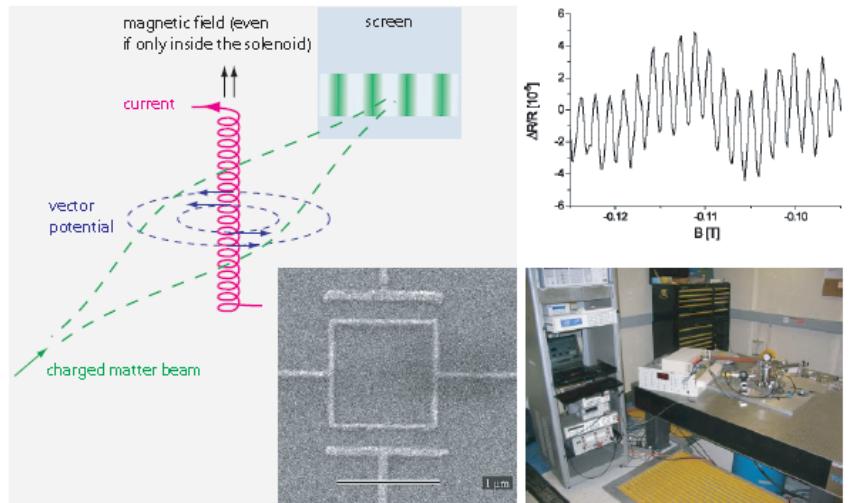


Otro caso simple de manipulación de fase se muestra en la Figura 47: también un campo magnético cambia la fase de una partícula cargada e influye así en el comportamiento de la interferencia.

Un experimento famoso muestra la importancia de la fase de una manera aún más sorprendente: el *efecto de Aharonov-Bohm*.<sup>ref.51</sup> El efecto es famoso porque es contra-intuitivo y porque fue predicho antes de que

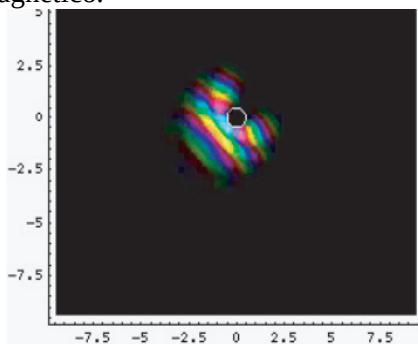
fuera observado. Mire la configuración mostrada en la [Figura 48](#). Una onda de materia de partículas cargadas se divide en dos por un cilindro - colocado en un ángulo recto respecto a la trayectoria de la materia - y la onda de materia se recombina detrás de él. Dentro del cilindro hay un campo magnético; afuera, no hay ninguno. (Una manera simple de realizar tal cilindro es un solenoide largo.) La física cuántica predice que se observará un patrón de interferencia y que la posición de las bandas dependerá del valor del campo magnético. ¡Esto sucede aunque la onda no entra en la región con el campo! El sorprendente efecto se ha observado en innumerables experimentos.

La razón del efecto de Aharonov-Bohm es simple: para una partícula cargada, la fase de una función de onda está determinada por el potencial vectorial **A**, no por el campo magnético **B**.

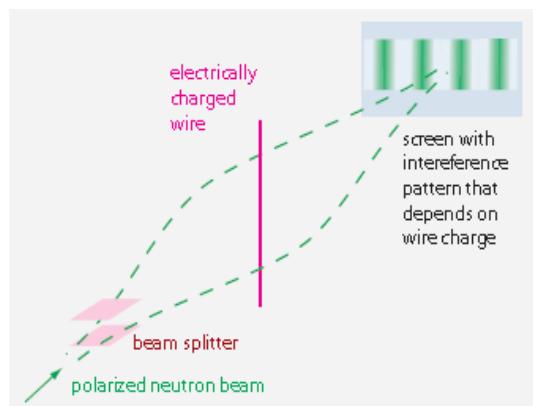


**FIGURA 48** El efecto de Aharonov-Bohm: la influencia del potencial vectorial magnético en la interferencia (izquierda) y una confirmación de medición (derecha), utilizando una muestra microscópica que transporta electrones en hilos metálicos delgados (© Doru Cuturela).

El potencial vectorial alrededor de un solenoide no desaparece, como sabemos por la sección sobre electrodinámica, sino que circula alrededor del solenoide. Esta circulación distingue los dos lados del solenoide y conduce a un desplazamiento de fase -uno que efectivamente depende del valor del campo magnético- y por lo tanto produce interferencia, aunque la partícula nunca interactúa con el campo magnético.



**FIGURA 49** El movimiento de una función de onda alrededor de un solenoide que muestra el efecto Aharonov-Bohm. La densidad del estado se muestra por brillo, y la fase local se codifica en el color. (QuickTime film © Bernd Thaller)



**FIGURA 50** El efecto de Aharonov-Casher: la influencia de la carga en la fase conduce a la interferencia incluso para los neutrones que interfieren.

Un ejemplo más para la manipulación de fase es el llamado efecto *Aharonov-Casher*, que se verifica incluso para partículas neutras, siempre y cuando tengan un momento magnético, como los neutrones. La fase de un neutrón *polarizado* será influenciada por un campo eléctrico , de manera que la disposición mostrada en la [Figura 50](#) mostrará un patrón de interferencia que depende del potencial eléctrico aplicado.

Otro caso de manipulación de fase se presentará más adelante: también pueden utilizarse campos gravitacionales para rotar las funciones de onda. En realidad, incluso la aceleración debida al movimiento de rotación puede hacerlo. De hecho, ha sido posible medir la rotación de la Tierra observando el cambio de patrones de interferencia de haz de neutrones.<sup>ref.52</sup>

Otra clase importante de experimentos que manipulan la fase de las funciones de onda son posibles con fenómenos cuánticos macroscópicos. En superconductividad y en superfluídez, la fase de la función de onda se manipula regularmente con campos magnéticos y eléctricos. Esta posibilidad tiene muchas aplicaciones técnicas importantes.

Por ejemplo, el denominado *efecto Josephson* se usa para medir las diferencias de potencial eléctrico midiendo la frecuencia de ondas de radio emitidas y los llamados *dispositivos superconductores de interferencia cuántica*, o *SQID*, se utilizan para medir campos magnéticos diminutos.

Observamos que todos estos experimentos confirman que la fase *absoluta* de una función de onda *no puede ser medida*. Sin embargo, *se pueden* medir las fases relativas - diferencias de fase o cambios de fase -. *Desafío 68 e* ¿Puede confirmar esto?

Todos los efectos de cambio de fase que acabamos de explicar se han observado en numerosos experimentos. La fase es un aspecto esencial de la función de onda: la fase conduce a la interferencia y es la razón principal para llamarla función de *onda* en primer lugar. Como en cualquier onda, la fase evoluciona con el tiempo y puede ser influenciada por diversas influencias externas. Sobre todo, los experimentos muestran que una partícula cuántica localizada - por lo tanto, cuando la difusión de la función de onda puede ser despreciada - es mejor imaginarla como una flecha giratoria; si la difusión no puede ser despreciada, la función de onda se imagina mejor como una onda de flechas que giran en cada punto en el espacio.

### ¿PUEDEN INTERFERIR DOS FOTONES?

En 1930, Paul Dirac hizo una famosa declaración ya mencionada anteriormente:

- Cada fotón interfiere solamente consigo mismo. La interferencia entre dos fotones diferentes nunca ocurre.<sup>ref.53</sup>

A menudo, esta declaración es mal interpretada en el sentido de que dos *fuentes* de fotones separados no pueden interferir. Es casi increíble cómo esta falsa interpretación se ha extendido a través de la literatura.<sup>ref.54</sup> Todo el mundo puede comprobar que esta afirmación es incorrecta con una radio: dos estaciones de radio distantes que transmiten en la misma frecuencia conducen a latidos (impulsos) en la amplitud, es decir, a *interferencia de onda*. (Esto no debe ser confundido con las *interferencias de radio* más comunes, que por lo general no es más que una superposición de intensidades.) Los transmisores de radio son fuentes de fotones coherentes, y cualquier receptor de radio muestra señales que forman dos de estas fuentes de hecho pueden interferir.

En 1949, la interferencia de dos fuentes de fotones diferentes se ha demostrado incluso con haces de *microondas*. A partir de los años cincuenta en adelante, numerosos experimentos con dos láseres e incluso con dos fuentes de luz térmica han mostrado interferencia luminosa. Por ejemplo, en 1963, Magyar y Mandel utilizaron dos láseres de rubíes que emitían pulsos de luz y una cámara de obturación rápida para producir franjas de interferencia espacial.<sup>ref.55</sup>

Sin embargo, todos estos resultados experimentales con dos fuentes no contradicen la declaración de Dirac. De hecho, dos fotones no pueden interferir por varias razones.

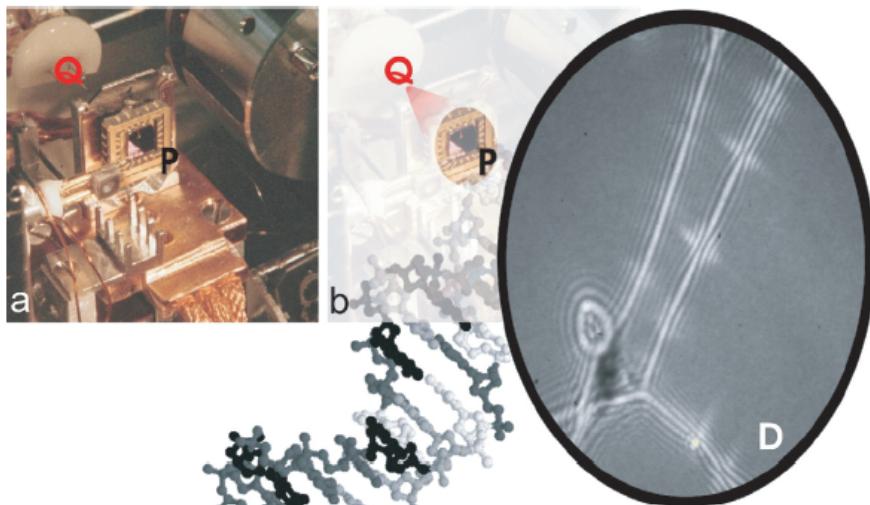
— La interferencia es el resultado de la propagación de ondas espacio-temporales; los fotones aparecen sólo cuando se utiliza la imagen de energía-cantidad de movimiento, sobre todo cuando tiene lugar la interacción con la materia. La descripción de la propagación espacio-temporal y la imagen de partículas son mutuamente excluyentes, este es un aspecto del principio de complementaridad. ¿Por qué Dirac parece mezclar los dos en su declaración? Dirac emplea el término "fotón" en un sentido muy general, como estado cuantificado del campo electromagnético. Cuando dos haces coherentes se superponen, las entidades cuantificadas, los fotones, no pueden atribuirse a ninguna de las fuentes. La interferencia resulta de la superposición de dos estados coherentes, no de dos partículas.

— La interferencia sólo es posible si uno *no puede saber* de dónde viene el fotón detectado. La descripción mecánica cuántica del campo en una situación de interferencia nunca permite adscribir fotones

del campo superpuesto a una de las fuentes. En otras palabras, si se puede decir de qué fuente proviene un fotón detectado, *no se puede* observar interferencia.

— La interferencia entre dos haces requiere una fase correlacionada o fijada entre ellos, es decir, un número indeterminado de partículas; en otras palabras, la interferencia sólo es posible si el número de fotones de cada uno de los dos haces es desconocido. Y un haz tiene un número de fotones desconocido cuando el número de indeterminación es similar en tamaño al número promedio..

Con una mejor elección de palabras se puede decir que la interferencia está siempre entre dos estados (indistinguibles), o si uno prefiere, entre dos historias posibles (indistinguibles), pero nunca entre dos partículas.



**FIGURA 51** Un holograma electrónico de moléculas de ADN (© Hans-Werner Fink/Wiley VCH).

O, como se expresa más arriba:

▷ Un fotón interfiere sólo *dentro* de su volumen de coherencia, es decir, dentro de su propia celda del espacio de fases. En el exterior, no hay interferencia. Y dentro de ese volumen, o célula, es imposible distinguir fotones, estados o historias.

El concepto de "fotón" sigue siendo profundo aún hoy en día. El modelo de consistencia de la partícula cuántica de la luz permanece fascinante hasta hoy. En resumen podemos decir: *dos diferentes rayos electromagnéticos pueden interferir, pero dos fotones diferentes no pueden*.

### ¿PUEDEN INTERFERIR DOS HACES DE ELECTRÓNESES? ¿HAY HACES DE ELECTRÓNESES COHERENTES?

¿Existen fuentes de electrones coherentes? La pregunta es difícil.

Resultados en la literatura, como la ilustrada en la **Figura 51**, indican que es posible hacer hologramas con haces de electrones.\*<sup>ref.56</sup> Sin embargo, cuando uno pregunta a estos autores sobre el significado de la coherencia, responden que la coherencia electrónica es sólo transversal, no longitudinal. La coherencia transversal está determinada por el tamaño posible de los frentes de onda con una fase dada. El límite superior de este tamaño está dado por las interacciones que un estado tiene con su entorno. Todo este comportamiento es como se esperaba para la coherencia real.

Sin embargo, el concepto de «coherencia transversal» es un término impropio. La capacidad de interferir con uno mismo, como implica el término "coherencia transversal", no es la definición correcta de coherencia. La coherencia transversal, ya sea para fotones o partículas de materia, sólo expresa la pequeñez de la fuente de partículas. Ambas lámparas pequeñas (y los láseres) pueden mostrar interferencia cuando el haz se divide y se recombinan con una longitud de trayectoria idéntica; esto no es una prueba de coherencia del campo luminoso. Un razonamiento similar demuestra que la monocromatidad tampoco es una prueba de coherencia.

\*\* En 2002, se produjeron los primeros hologramas que hicieron uso de haces de neutrones.<sup>ref.57</sup>

Un estado se llama *coherente* si posee una fase bien definida en un dominio dado del espacio o del tiempo. El tamaño de la región espacial o del intervalo de tiempo define el grado de coherencia. Esta definición proporciona longitudes de coherencia del orden del tamaño de la fuente para pequeñas fuentes "incoherentes". Incluso para una longitud de coherencia pequeña, el tamaño de un patrón de interferencia o la distancia  $d$  entre sus máximos puede ser mucho mayor que la longitud de coherencia  $l$  o el tamaño de fuente  $s$ . En resumen, un tamaño grande (o una duración persistente en el tiempo) de un patrón de interferencia por sí solo *no* es una prueba de coherencia.

Una fuente de luz es coherente si produce una onda sinusoidal aproximada sobre una cierta longitud o tiempo. Debido a la relación de indeterminación, en cualquier haz de luz coherente, el número de fotones es indeterminado. El mismo requisito se aplica a los haces de electrones coherentes: se necesita un número de electrones indeterminado para ver un patrón de interferencia macroscópico. Eso es imposible, ya que los electrones (a las energías usuales) son portadores de una carga conservada. No existen haces de electrones coherentes.

En resumen, aunque un electrón puede interferir consigo mismo, y aunque es posible producir interferencia entre dos fuentes de luz, la interferencia entre dos fuentes de electrones es imposible. De hecho, nadie ha conseguido producir interferencia entre dos fuentes de electrones. No existe un concepto convencional de coherencia para los haces de electrones.

#### EL PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN EN LA FÍSICA CUÁNTICA

En la naturaleza, el movimiento ocurre de una manera que minimiza el cambio. De hecho, en la física clásica, el principio de acción mínima indica que en la naturaleza, el movimiento de una partícula tiene lugar a lo largo de aquel camino particular -de entre todos los caminos posibles con los mismos puntos extremos- para el cual la acción es mínima.

Este principio de la pereza cósmica fue afirmado matemáticamente diciendo que en la naturaleza, la variación  $\delta S$  de la acción es cero. La minimización del cambio explica todas las ecuaciones clásicas de evolución. Ahora transferimos esta idea al dominio cuántico.

Para los sistemas cuánticos, necesitamos redefinir tanto el concepto de acción como el concepto de variación: en primer lugar, encontramos una descripción de la acción que se basa en los operadores; en segundo lugar, necesitamos definir la variación de acción sin caminos, ya que el concepto de 'camino' no existe para los sistemas cuánticos; en tercer lugar, puesto que hay una acción mínima en la naturaleza, una variación nula no es un concepto claramente definido, y debemos superar este obstáculo.

Hay dos maneras principales de lograr esto: describir el movimiento de los sistemas cuánticos como una superposición de todos los caminos posibles, o describir la acción con la ayuda de las funciones de onda. Ambos enfoques son equivalentes.

En la primera aproximación, la *formulación de la integral de trayectoria*, el movimiento de una partícula cuántica se describe como una superposición democrática de los movimientos a lo largo de todos los caminos posibles. (Lo habíamos llamado anteriormente el modelo de la "flecha"). Para cada trayecto, la evolución de la flecha está determinada y en el punto final se suman las flechas de todos los recorridos. La acción para cada trayectoria es el número de vueltas que realiza la flecha a lo largo de la trayectoria. El resultado de este ejercicio es que la trayectoria para la cual la flecha hace el número más pequeño de vueltas es generalmente (¡pero no siempre!) la trayectoria más probable. Una investigación más precisa muestra que los sistemas clásicos macroscópicos siempre siguen sólo el camino de mínima acción, mientras que los sistemas cuánticos siguen todos los caminos.

En el segundo enfoque de la física cuántica, la acción se define con la ayuda de las funciones de onda. En la física clásica definimos la acción (o cambio) como la integral del Lagrangiano entre los puntos inicial y final en el tiempo, y el propio Lagrangiano como la diferencia entre energía cinética y energía potencial. En la física cuántica, la definición más simple es la *acción cuántica* definida por Julian Schwinger. Llamemos a los estados inicial y final del sistema  $\psi_i$  y  $\psi_f$ . La acción  $S$  entre estos dos estados se define como

$$S = \langle \Psi_i | \int L dt | \Psi_f \rangle \quad (37)$$

Donde  $L$  es el (operador) Lagrangiano. Los corchetes angulares representan la "multiplicación" de estados y operadores como se define en la teoría cuántica. (Saltamos los detalles de la notación y las matemáticas

aquí.) Los estados son funciones de onda, los operadores actúan sobre estas funciones y el producto de los dos paréntesis es la integral de la función producto en el espacio. En palabras sencillas, también en la teoría cuántica, la acción - es decir, el cambio que ocurre en un sistema - es la integral del Lagrangiano. El operador Lagrangiano  $L$  se define de la misma manera que en la física clásica: el Lagrangiano  $L = T - V$  es la diferencia entre la energía cinética  $T$  y los operadores de energía potencial  $V$ . La única diferencia es que, en la teoría cuántica, las *variables* cantidad de movimiento y posición de la física clásica son reemplazadas por los operadores *correspondientes* de la física cuántica.\*

Para transferir el concepto de variación de acción  $\delta S$  al dominio cuántico, Julian Schwinger introdujo la expresión directa

$$\delta S = \langle \Psi_i | \delta \int L dt | \Psi_i \rangle \quad (38)$$

El concepto de trayectoria no es necesario en esta expresión, ya que la variación de la acción se basa en la variación de funciones de onda en lugar de variaciones de trayectorias de partículas.

El último requisito clásico para ser transferido al dominio cuántico es que, debido a que la naturaleza es perezosa, la variación de la acción debe anularse. Sin embargo, en el dominio cuántico, la variación de la acción no puede ser cero, ya que la acción observable más pequeña es el cuanto de acción. Como Julian Schwinger descubrió, sólo hay una manera posible de expresar la minimalidad de acción requerida:

$$\delta S = \langle \Psi_i | \delta \int L dt | \Psi_i \rangle = -i\hbar \delta \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle \quad (39)$$

Este es el llamado *principio de cuantificación de la acción* que describe todo el movimiento en el dominio cuántico.

Clásicamente, el lado derecho es cero -ya que  $\hbar$  se toma como cero- y entonces recuperamos el principio de acción mínima  $\delta S = 0$  de la física clásica. Pero en la teoría cuántica, cuando tratamos de lograr pequeñas variaciones, nos encontramos con el cuanto de acción y los cambios de la fase (relativa). Esto se expresa en el lado derecho de la expresión. El lado derecho es la razón por la que las ecuaciones de evolución de la función de onda - la ecuación de Schrödinger para el caso no relativista sin espín, o la ecuación de Dirac para el caso relativista con espín  $1/2$  - son válidas en la naturaleza.

Dicho de manera más simple, todo movimiento cuántico -es decir, la evolución cuántica de un estado  $\psi$  o  $|\psi\rangle$ - ocurre de tal manera que la variación de acción es igual a  $-i$  veces el cuanto de acción  $\hbar$  por la variación del producto escalar entre los estados inicial y final. En otras palabras, en el movimiento real, los estados intermedios se fijan por el requisito de que deben conducir desde el estado inicial al estado final con el número más pequeño de vueltas efectivas de la fase del estado. El factor  $-i$  expresa la dependencia de la acción respecto la rotación de la función de onda.

En resumen, el principio de mínima acción también es válido en física cuántica, siempre que se tenga en cuenta que los valores de acción inferiores a  $\hbar$  no pueden encontrarse en experimentos. El principio de mínima acción gobierna la evolución de la función de onda, y así explica el color de todas las cosas, todas las demás ciencias de los materiales, toda la química y toda la biología, como veremos a continuación.

## EL MOVIMIENTO DE LOS CUANTONES CON ESPÍN

Everything turns. Anónimo  
Todo gira

¿Cuál es el origen de la fase cuántica? La física clásica ayuda a responder a la pregunta.

Los cuantones pueden girar alrededor de un eje: hablamos de *espín* de la partícula. Pero si la partícula cuántica puede girar, deben poseer momento angular. Y de hecho, los experimentos confirman esta deducción.

En particular, los electrones tienen espín. Los detalles completos del espín del electrón se dedujeron de los experimentos de dos estudiantes holandeses, George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit, en 1925<sup>ref.58</sup>. Tuvieron el coraje de publicar lo que Ralph Kronig también había sospechado: que los electrones giran alrededor de un eje con una componente proyectada del momento angular dada por  $\hbar/2$ . En realidad, este valor - a menudo

---

\*\* Más precisamente, existe también una condición que rige el orden de los operadores en un producto mixto, de modo que se tiene en cuenta la no comutatividad de los operadores. No exploramos este tema aquí.

llamado espín 1/2 para abreviar - es válido para *todas* las partículas elementales de *materia*. (Por el contrario, todas las partículas de *radiación* elemental conocidas tienen valores espín de  $\hbar$ , o espín 1 para abreviar).

Si una partícula girante tiene momento angular, debe ser posible reajustar el eje aplicando un par, para observar la precesión, para transferir el espín en colisiones etc. Todo esto es observado realmente; de hecho, el experimento de Stern-Gerlach permite todas estas observaciones. La única diferencia entre el espín de la partícula y el momento angular clásico es que el espín de la partícula está cuantizado, como dedujimos anteriormente.

En otras palabras, el *espín* de una partícula cuántica tiene todas las propiedades de una rotación alrededor de un eje. Un resultado del espín es que las partículas cuánticas *cargadas* también actúan como pequeños dipolos magnéticos, con el imán orientado a lo largo del eje de rotación. La fuerza observada del dipolo magnético, el momento magnético, no puede deducirse de la física clásica. El *momento magnético* es proporcional al espín y al factor de conversión estándar  $-e/2m_e$ ; los efectos cuánticos se describen a continuación por el denominado *valor g*, que es un número puro:

$$\vec{\mu} = g \frac{-e}{2m_e} \vec{L} = -g \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad \text{con} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (40)$$

Para explicar los espectros ópticos observados, Uhlenbeck y Goudsmit dedujeron un valor  $g$  de 2 para el electrón con el fin de explicar los espectros ópticos. Este valor fue explicado por Llewellyn Thomas como efecto relativista unos meses más tarde. <sup>ref.59</sup>

En 2004, las técnicas experimentales se habían vuelto tan sensibles que se podía detectar el efecto magnético del espín de un solo electrón unido a una impureza (en otro material no magnético). Los investigadores ahora esperan mejorar estos llamados "microscopios de fuerza de resonancia magnética" hasta que alcancen la resolución atómica.

En 1927, el físico austriaco Wolfgang Pauli <sup>\*\*</sup> descubrió cómo incluir el espín 1/2 en una descripción cuántica-mecánica: en lugar de una función de estado descrita por un único número complejo, se necesita una función de estado con *dos* componentes complejos. La razón de esta expansión es simple. En general, la pequeña flecha giratoria que describe un estado cuántico *no* gira alrededor de un plano *fijo*, como se supone por la ecuación de Schrodinger; el *plano de rotación* también debe especificarse en cada posición en el espacio. Esto implica que se requieren dos parámetros adicionales en cada punto espacial, llevando el número total de parámetros a cuatro números reales, o, equivalentemente, dos números complejos. Hoy en día, la ecuación de Pauli es principalmente de interés conceptual, porque - al igual que la de Schrodinger - no cumple con la relatividad especial. Sin embargo, la idea de incluir el plano de rotación local sigue siendo válida. La idea fue utilizada por Dirac cuando introdujo la descripción relativista del electrón, y la idea también se usa en todas las demás ecuaciones de onda para partículas con espín.

En resumen, la descripción de un cuantón con espín implica el uso de funciones de onda que especifican *dos* números complejos en cada punto en el espacio y el tiempo.

### ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS

En 1899, Max Planck había descubierto el cuanto de acción. En 1905, Albert Einstein publicó la teoría de la relatividad especial, la cual está basada en la idea de que la velocidad de la luz  $c$  es independiente de la velocidad del observador. La primera pregunta que Planck se hacía era si el valor del cuanto de acción sería independiente de la velocidad del observador. Su interés por esta cuestión lo llevó a invitar a Einstein a Berlín. Con esta invitación hizo famoso en el mundo de la Física al oficial de la oficina patentes.

---

<sup>\*\*</sup>Wolfgang Ernst Pauli (b. 1900Vienna, d. 1958 Zürich), A la edad de 21 años, escribió uno de los mejores textos sobre relatividad especial y general. Fue el primero en calcular los niveles de energía del hidrógeno usando la teoría cuántica, descubriendo el principio de exclusión, incorporó el espín a la teoría cuántica, elucidó la relación entre el espín y la estadística, demostró el teorema CPT, y predijo el neutrino. Era admirado por su inteligencia, y temido por sus críticas mordaces, que llevaron a su apodo, 'conciencia de la física'. A pesar de esto, ayudó a muchas personas en sus investigaciones, como Heisenberg con la teoría cuántica, sin reclamar ningún crédito por sí mismo. <sup>ref.60</sup> Fue visto por muchos, incluyendo a Einstein, como la mente más grande y más aguda de la física del siglo XX. También fue famoso por el "efecto Pauli", es decir, su capacidad para desencadenar desastres en laboratorios, en máquinas y en su entorno con su sola presencia. Como veremos en breve, se puede argumentar que Pauli realmente recibió el Premio Nobel de Física en 1945 (oficialmente "por el descubrimiento del principio de exclusión") por resolver finalmente la cuestión de cuántos ángeles pueden bailar en la punta de un alfiler.

Los experimentos demuestran que el cuanto de la acción es de hecho independiente de la velocidad del observador. Todos los observadores encuentran el mismo valor mínimo. Para incluir la relatividad especial en la teoría cuántica, sólo necesitamos encontrar el Hamiltoniano cuántico correcto  $H$ .

Dado que el hamiltoniano clásico de una partícula libre y de una antipartícula está dado por

$$H = \pm \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} \quad \text{con} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (41)$$

Uno podría preguntarse: ¿cuál es el operador de Hamilton correspondiente? La respuesta más simple fue dada, en 1949 por T.D. Newton y E.P. Wigner, y en 1950, por L.L. Foldy y S.A. Wouthuysen.<sup>ref.61</sup> El operador es casi el mismo:

$$H = \beta \sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2} \quad \text{con} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Los signos que aparecen en la matriz del operador  $\beta$  distinguen entre partículas y antipartículas.

Los números +1 y -1 aparecen dos veces, para ocuparse de las dos direcciones posibles de espín para cada caso.

Con este operador hamiltoniano relativista para partículas con espín 1/2 - y con todas las demás - la función de onda se describe por *cuatro* números complejos, *dos* para partículas y *dos* para antipartículas. El hecho de que cada tipo de partículas requiera dos componentes complejos proviene del requisito de especificar en cada punto del espacio la longitud de la flecha, su fase y su plano de rotación. Hace mucho tiempo también encontramos que la relatividad automáticamente introduce la antimateria, y exploraremos el tema en detalle a continuación. Tanto la materia como la antimateria son parte de cualquier descripción relativista de los efectos cuánticos. La función de onda para una partícula tiene componentes antipartículas que se ajustan a cero, y viceversa. En total, la función de onda para sistemas relativistas de espín 1/2 tiene así cuatro componentes complejos.

El operador Hamiltoniano produce el operador de velocidad  $\mathbf{v}$  a través de la misma relación que es válida en la física clásica:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \beta \frac{\vec{p}}{\sqrt{c^4 m^2 + c^2 p^2}} \quad (43)$$

Este operador de velocidad muestra un continuo de valores propios, de menos a más la velocidad de la luz. La velocidad es una constante de movimiento, así como el momento  $\mathbf{p}$  y la energía  $E = c^4 m^2 + c^2 \mathbf{p}^2$ . (44)

También el momento angular orbital  $\mathbf{L}$  se define como en la física clásica, a través de

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}. \quad (45)$$

El momento angular orbital  $\mathbf{L}$  y el espín  $\sigma$  son constantes del movimiento separadas. Una partícula (o antipartícula) con componente de momento angular positivo (o negativo) tiene una función de onda con una sola componente no nula; las otras tres componentes se anulan.<sup>ref.62</sup>

Pero, por desgracia, la representación del movimiento relativista dada por Foldy y Wouthuysen no es la más simple cuando se trata de tener en cuenta las interacciones electromagnéticas. La simple identidad entre las descripciones clásica y cuántica-mecánica se pierde cuando se incluye el electromagnetismo.

Resolveremos este problema enseguida, cuando exploremos la ecuación de la evolución de Dirac para las funciones de onda relativistas.

### CUANTONES COMPUESTOS FRENTE A CUANTONES ELEMENTALES

¿Cuándo es un objeto compuesto, y no elemental? La teoría cuántica da varias respuestas pragmáticas. La primera es algo extraña: un objeto es compuesto cuando su relación giromagnética es diferente de la predicha por QED.<sup>ref.63</sup> La *relación giromagnética* γ se define como la relación entre el momento magnético  $\mathbf{M}$  y el momento angular  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{M} = \gamma \mathbf{L}. \quad (46)$$

La relación giromagnética γ se mide en unidades de  $s^{-1} T^{-1}$ , es decir, C / kg, y determina los niveles de energía de spinning magnético de partícula en campos magnéticos; reaparecerá más tarde en el contexto de

imágenes por resonancia magnética. Todos los candidatos a partículas elementales tienen espín 1/2. La relación giromagnética para partículas de espín -1/2, de momento magnético  $M$  y masa  $m$  puede escribirse como

$$\gamma = \frac{M}{\frac{\hbar}{2}} = g \frac{e}{2m} \quad (47)$$

El criterio para ser elemental puede ser reducido a una condición sobre el valor del número adimensional  $g$ , el denominado *factor  $g$* . (La expresión  $e\hbar / 2m$  es a menudo llamada el *magnetón* (momento magnético) de la partícula.) Si el factor  $g$  difiere del valor predicho por QED para las partículas puntuales - aproximadamente 2,0 - el objeto es *compuesto*. Por ejemplo, un ión helio  ${}^4\text{He}^+$  tiene espín 1/2 y un valor  $g$  de 14,7 10<sup>3</sup>. De hecho, el radio del ion de helio es  $3 \times 10^{-11}$  m, obviamente un valor finito, y el ion es una entidad compuesta. Para el protón, se mide un factor  $g$  de aproximadamente 5,6. De hecho, los experimentos producen un radio de protones finitos de aproximadamente 0,9 fm y demuestran que contiene varios constituyentes.

El neutrón debe ser de material compuesto, puesto que tiene un momento magnético a pesar de ser eléctricamente neutro. De hecho, su radio es aproximadamente el mismo que el del protón.

Del mismo modo, las moléculas, las montañas, las estrellas y las personas deben ser compuestas. De acuerdo con este primer criterio, las únicas partículas elementales son *leptones* (es decir, los electrones, muones, tauones y neutrinos), *quarks* y *bosones intermedios* (es decir, los fotones, bosones W, Z bosones y gluones). Más detalles sobre estas partículas se darán a conocer en los capítulos sobre el núcleo.

Otro criterio simple para el hecho de ser compuesto (*compositeness*) acaba de ser mencionado: *cualquier objeto con un tamaño medible es compuesto*. Este criterio produce la misma lista de partículas elementales que el primero. En realidad, los dos criterios están relacionados. El modelo más simple para estructuras de materiales compuestos predice que el factor  $g$  obedece<sup>ref.64</sup>

$$g - 2 = R / \lambda_c \quad (48)$$

donde  $R$  es el radio y  $\lambda_c = h/mc$  es la longitud de onda Compton del sistema. Esta expresión es sorprendentemente precisa para iones helio-4, helio-3, tritio y protones, como puede comprobar si lo desea. Las tablas en el [Apéndice B](#) en el próximo volumen introducen el mismo punto.

Un tercer criterio para la composición es más general: *cualquier objeto mayor que su longitud Compton es compuesto*. El argumento es simple. Un objeto es compuesto si se puede detectar el movimiento *interno*, es decir, el movimiento de algunos componentes. Ahora bien la acción de cualquier parte con masa  $m_{\text{part}}$  moviéndose dentro de un sistema compuesto de tamaño  $r$  obedece

$$S_{\text{part}} < 2\pi r m_{\text{part}} c < \pi r m c \quad (49)$$

Donde  $m$  es la masa del objeto *compuesto*. Por otra parte, siguiendo el principio de la teoría cuántica, esta acción, para ser observable, debe ser mayor que  $\hbar / 2$ . Al insertar esta condición, encontramos que para cualquier objeto compuesto\*

$$r > \hbar / 2\pi m c \quad . \quad (50)$$

El lado derecho difiere sólo por un factor  $4\pi^2$  de la llamada *longitud de Compton (onda)*

$$\lambda = h / m c \quad (51)$$

de un objeto. Así, cualquier objeto *mayor* que su propia longitud de onda Compton es compuesto; y cualquier objeto más pequeño que el lado derecho de la expresión (50) es elemental. De nuevo, sólo los leptones, los quarks y los bosones intermedios pasan la prueba. Todos los demás objetos son compuestos.

Este criterio produce la misma lista que los anteriores. [Desafío 71 ny](#) ¿Puede explicar por qué?

Un cuarto criterio es citado regularmente por Steven Weinberg: una partícula es elemental si aparece en el Lagrangiano del modelo estándar de la física de partículas. [Desafío 72 s](#) ¿Puede mostrar que este criterio se sigue de los anteriores?

Curiosamente, todavía no hemos terminado con este tema. Incluso las afirmaciones más extrañas sobre la composición aparecerán cuando se tenga en cuenta la gravedad. Sólo sea paciente: vale la pena.

\*[Desafío 70 ny](#) \*¿Puede encontrar el factor faltante de 2? ¿Y es válida la suposición de que los componentes siempre deben ser más ligeros que el compuesto?

## CURIOSIDADES Y DIVERTIDOS DESAFÍOS ACERCA DEL MOVIMIENTO CUÁNTICO DE LA MATERIA

Die meisten Physiker sind sehr naiv, sie glauben  
immer noch an wirkliche Wellen oder Teilchen. Anton Zeilinger.\*  
*La mayoría de los físicos son muy ingenuos; todavía creen en ondas reales o partículas reales.*

Tome el borde de cuchilla más afilado o la punta de la aguja que se pueda imaginar: el cuanto de acción implica que son todas nubes difusas.

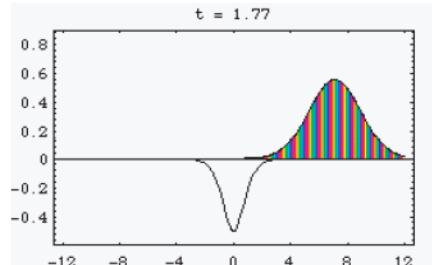
\* \*

**Desafío 73 s** ¿Existen átomos de hidrógeno? La mayoría de los tipos de átomos han sido fotografiados con microscopios, fotografiados bajo iluminación, levitados uno por uno, e incluso movidos con agujas, uno por uno, como muestra la imagen de la página 297 del volumen I. Los investigadores incluso han movido átomos individuales usando rayos láser para empujarlos. <sup>ref.65</sup> Sin embargo, ninguno de estos experimentos ha medido o representado átomos de hidrógeno. ¿Es esa una razón para dudar de la existencia de átomos de hidrógeno? Tomar este no tan serio debate de forma seria puede ser muy divertido.

\* \*

¿Es la función de onda 'real'? Más precisamente, ¿es la función de onda realmente una nube? Algunos físicos todavía dudan de esto. Este grupo de físicos en extinción, a menudo nacidos alrededor de mediados del siglo XX, han oído hablar tan a menudo - incorrectamente y generalmente de autoridades cuestionables - que una función de onda no tiene realidad que dejaron de preguntar y responder a las preguntas más simples.

**Desafío 74 e** Para disipar sus dudas, pregúntales si tienen una altura no nula o si piensan que los átomos son redondos. Si están de acuerdo, han admitido que las funciones de onda tienen algún tipo de realidad. Todos los objetos cotidianos están hechos de partículas elementales puntuales. El tamaño, la superficie y el volumen de objetos cotidianos se deben exclusivamente a las funciones de onda. Cada longitud, área y volumen es una prueba de que las funciones de onda tienen algún tipo de realidad.



**FIGURA 52** Un pozo de potencial especial que no perturba una función de onda. El color indica la fase. (QuickTime film © Bernd Thaller)

\* \*

Dos observables pueden comutar por dos razones diferentes: o son muy *similares* -como las coordenadas  $x$  y  $x^2$ - o son muy *diferentes* - como la coordenada 'x' y la cantidad de movimiento  $p_x$ . **Desafío 75 ny** ¿Puede dar una explicación para esto?

\* \*

**Desafío 76 ny** Las traslaciones de espacio y tiempo comutan. ¿Por qué entonces el operador cantidad de movimiento y el Hamiltoniano no comutan en general?

\* \*

Hay algunos potenciales que no tienen influencia sobre una función de onda. La Figura 52 muestra un ejemplo. Este potencial tiene coeficiente de reflexión cero para todas las energías; la onda dispersada no tiene parte reflejada. El pozo tiene la forma de un solitón de la ecuación de Korteweg-de Vries, que se relaciona con la ecuación de Schrödinger.

\* \*

Para un sistema ligado en un estado no relativista sin momento angular, se tiene la relación <sup>ref.66</sup>

$$\langle r^2 \rangle \langle T \rangle \geq 9 \frac{\hbar^2}{8m} \quad (52)$$

donde  $m$  es la masa reducida y  $T$  la energía cinética de los componentes, y  $r$  es el tamaño del sistema.

**Desafío 77 s** ¿Puede deducir este resultado y probarlo para el hidrógeno?

\* \*

La teoría cuántica permite que muchos estados ligados insólitos. Por lo general pensamos en estados ligados como los estados con baja energía. Sin embargo, hay situaciones en las que surgen debido al forzamiento en la oscilación. Nos hemos encontrado con una situación similar en la física clásica: el

\*Anton Zeilinger, físico de la Universidad de Viena, es bien conocido por sus experimentos sobre mecánica cuántica.

conducto vertical, péndulo invertido que permanece vertical siendo no obstante inestable. Situaciones similares se producen también en la física cuántica. Ejemplos de ello son las trampas de Paul, el átomo de helio, iones negativos, electrones troyanos y aceleradores de partículas.

\*\*

Se lee con frecuencia que el universo pudo haber nacido de una fluctuación cuántica.

*Desafío 78 ny* ¿Puede explicar por qué esta afirmación no tiene sentido?

#### UN RESUMEN SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS CUANTONES

En resumen, el movimiento de los cuantones puede ser descrito de dos maneras:

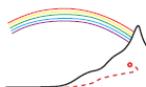
— Visto de lejos, con una ampliación baja, las partículas cuánticas móviles se comportan como avance, rotación y precesión de flechas. Los detalles de la rotación y la precesión de la flecha dependen de la energía y la cantidad de movimiento de la partícula. La longitud al cuadrado de la flecha es la probabilidad de observar una partícula. Si una partícula puede llegar saliendo de un punto de partida a un punto final de varias maneras, las flechas se suman.

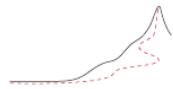
— A gran ampliación, las partículas cuánticas son descritas por funciones de onda que se mueven como el avance, rotación y precesión de las nubes. La orientación de la nube local, la fase local, sigue un movimiento de oscilación. El cuadrado de la amplitud de probabilidad, la densidad de la nube, es la probabilidad de encontrar la partícula en un punto dado.

Las flechas giratorias son el resultado de los promedios de nubes; combinan propiedades de partícula y onda.

Una rotación completa de la flecha corresponde al cuanto de acción. Esta característica central implica que una partícula no-relativista cuya rotación pueda ser despreciada sigue la ecuación de Schrödinger, y que un electrón relativista sigue la ecuación de Dirac. La ecuación de Dirac coincide con todos los experimentos conocidos. En particular, la ecuación de Dirac describe toda la química y la biología, como veremos.

Para continuar con la mayor eficiencia en nuestro camino a través de la física cuántica, exploramos tres temas importantes: la cuestión de la indistinguibilidad de varias partículas, el tema del espín, y la cuestión de la interpretación de las probabilidades.





## PERMUTACIÓN DE PARTÍCULAS – ¿SON LAS PARTÍCULAS COMO LOS GUANTES?

**¿P**

or qué somos capaces de distinguir un gemelo de otro? ¿Por qué podemos distinguir un sombrero que parece igual, como una copia de un original? Casi todos nosotros estamos convencidos de que siempre que comparamos un original con una copia, podemos encontrar una diferencia. Esta convicción viene a ser correcta, pero la conclusión no es simple.

*Desafío 79 s* El cuanto de acción tiene muchas implicaciones para las copias y sus diferencias del original. Piense sobre cualquier método que le permita distinguir objetos: encontrará que se halla en un aprieto para partículas puntuales. Por lo tanto, en el dominio cuántico algo debe cambiar sobre nuestra habilidad para distinguir partículas y objetos.

Se podría argüir que las diferencias entre un objeto original y una copia siempre puede hacerse desaparecer: sería suficiente usar el mismo número y tipo de átomos. Sin embargo, el cuanto de acción muestra que esto no es suficiente, ¡incluso cuando todos los átomos del mismo tipo son de hecho, copias indistinguibles unos de otros! En lo que sigue exploraremos las más importantes consecuencias sobre el movimiento de la indistinguibilidad de los átomos y de la distinguibilidad de los objetos macroscópicos.

### DISTINGUIENDO OBJETOS MACROSCÓPICOS

Un cierto número de importantes propiedades de los objetos son evidenciados mediante el estudio de un rompecabezas combinatorio: el *problema del guante*. Se pregunta:

¿Cuántos guantes quirúrgicos (para la mano derecha) son necesarios si  $m$  doctores han de operar  $\omega$  pacientes de un modo higiénico, de suerte que nadie entre en contacto con los fluidos corporales de otro cualquiera?

El mismo problema aparece en otros contextos. Por ejemplo, también se aplica al los ordenadores, interfaces y virus de ordenador o a profilácticos, hombres y mujeres – y se llama entonces el *problema del condón*.<sup>ref.67</sup> Para ser claro, el número óptimo de guantes no es el producto  $m\omega$ .

De hecho, el problema tiene tres sub-casos.

*Desafío 80 s* — El caso simple  $m = \omega = 2$  ya proporciona las ideas más importantes necesarias. ¿Es usted capaz de encontrar la solución óptima y el procedimiento?

— En el caso  $\omega = 1$  y  $m$  impar o el caso  $m = 1$  y  $\omega$  impar, la solución es  $(m + 1) / 2$  guantes

*Desafío 81 e* . Esta es la solución óptima, como usted puede comprobar fácilmente por sí mismo.

— Una solución con un procedimiento simple para todos los demás casos está dada por  $[2\omega / 3 + m / 2]$  guantes, donde [x] significa el entero más pequeño mayor o igual a x.<sup>ref.68</sup> Por ejemplo, para dos médicos y tres pacientes esto sólo da tres guantes. (Sin embargo, esta fórmula no siempre da la solución óptima, sino que existen mejores valores en ciertos subcasos.) *Desafío 82 e*

Disfrute del rompecabezas.

Dos propiedades básicas de los guantes determinan la solución al rompecabezas. En primer lugar, los guantes tienen dos lados, uno interior y otro exterior, que se pueden distinguir entre sí.

En segundo lugar, los guantes girados dentro y fuera, intercambian la izquierda y la derecha. En tercer lugar, los guantes también se pueden distinguir uno de otro. ¿Estas tres propiedades también se aplican a las partículas cuánticas?

Discutiremos el problema de la doble lateralidad de las partículas cuánticas en la última parte del ascenso de la montaña. De hecho, la cuestión de si las partículas pueden volverse del revés será de importancia para su descripción y su movimiento. También discutiremos la diferencia entre partículas de mano derecha y mano izquierda en nuestra aventura. En el presente capítulo nos centraremos en el tercer tema, a saber, si los objetos y las partículas siempre pueden distinguirse de las copias. En realidad, las partículas *elementales* no se comportan como guantes, sino de una manera aún más sorprendente.

En la vida cotidiana, la distinción de objetos macroscópicos se puede lograr de dos maneras. Somos capaces de distinguir objetos -o personas- unos de otros porque difieren en sus *propiedades intrínsecas*, tales como su masa, color, tamaño o forma. Además, también somos capaces de distinguir objetos si tienen las *mismas* propiedades intrínsecas. Cualquier juego de billar sugiere que siguiendo el camino de cada bola, podemos distinguirlo del de las otras bolas. En resumen, los objetos con propiedades idénticas también se pueden distinguir usando su *estado*.

El estado de una bola de billar se da por su posición y cantidad de movimiento. En el caso de las bolas de billar, el estado permite distinguir las bolas porque el error de medida para la posición de cada bola es mucho menor que el tamaño de la bola en sí. Sin embargo, en el dominio microscópico este no es el caso. Tomemos átomos individuales. Los átomos del mismo tipo tienen las mismas propiedades intrínsecas. Para distinguirlos en colisiones, tendríamos que hacer un seguimiento de su movimiento. Pero no tenemos ninguna posibilidad de lograrlo. Ya en el siglo XIX se demostró experimentalmente que incluso la propia naturaleza ¡no es capaz de hacerlo! Este profundo resultado fue descubierto estudiando sistemas que incorporan un gran número de átomos del mismo tipo colisionando: los *gases*.

### DISTINGUIENDO ÁTOMOS

El cálculo de la entropía  $S$  de un gas simple, hecho de  $N$  partículas simples de masa  $m$  moviéndose en un volumen  $V$ , da

$$\frac{S}{kN} = \ln \left[ \frac{V}{\Lambda^3} \right] + \frac{3}{2} + \frac{\ln \alpha}{N} \quad (53)$$

Donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $\ln$  el logaritmo natural,  $T$  la temperatura, y  $\Lambda = 2\pi\hbar^2 / mkT$  es la longitud de onda térmica (aproximadamente la longitud de onda de Broglie de las partículas que componen el gas). En esta fórmula, el número puro  $\alpha$  es igual a 1 si las partículas son distinguibles como bolas de billar e igual a  $1/N!$  si no se distinguen en absoluto. Medir la entropía nos permite determinar  $\alpha$  y por lo tanto probar experimentalmente si las partículas son distinguibles. Resulta que sólo el segundo caso describe la naturaleza. *Desafío 83 e* Esto se puede comprobar fácilmente sin siquiera realizar la medición: sólo en el segundo caso,  $\alpha = 1/N!$  hace que la entropía de dos volúmenes de idéntico gas se sume.\* El resultado, a menudo llamado la *paradoja de Gibbs*, \*\* demuestra así que los componentes microscópicos de la materia son *indistinguibles*<sup>ref.69</sup>: en un sistema de partículas cuánticas - sean electrones, protones, átomos o moléculas pequeñas - no hay forma de decir qué partícula es cuál.



FIGURA 53 Willard Gibbs (1839–1903)

La indistinguibilidad es una propiedad experimental de la naturaleza. \*\*\* Dado que  $\hbar$  aparece en la expresión de la entropía, la indistinguibilidad es un efecto cuántico. Por otra parte, la indistinguibilidad no juega ningún papel si los efectos cuánticos son insignificantes. Pero en la práctica, toda la materia cotidiana - plasma, gases, líquidos y sólidos - muestra fuertes efectos cuánticos.

\* En realidad los valores de entropía observados experimentalmente para un gas monoatómico, están dados por la llamada ley de Sackur - Tetrode

$$\frac{S}{kN} = \ln \left[ \frac{V}{N \Lambda^3} \right] + \frac{5}{2} \quad (55)$$

que se sigue cuando  $\alpha = 1/N!$  se inserta arriba. Ha sido deducido independientemente por el físico alemán Otto Sackur (1880–1914) y el físico holandés Hugo Tetrode (1895–1931). Tenga en cuenta que el parámetro clave es la relación entre  $V/N$ , el volumen por partícula, y  $\Lambda^3$ , el volumen de Broglie de una partícula.

\*\* Josiah Willard Gibbs (1839–1903), físico estadounidense que fue con Maxwell y Planck, uno de los tres fundadores de la mecánica estadística y la termodinámica; introdujo el concepto de *conjunto* y el término *fase termodinámica*.

\*\*\* Cuando se descubrió la radioactividad, la gente pensaba que contradecía la indistinguibilidad de los átomos, debido a que el decaimiento parecía identificar ciertos átomos respecto a otros. Pero entonces la teoría cuántica ha demostrado que este no es el caso y que incluso los átomos y las moléculas son indistinguibles.

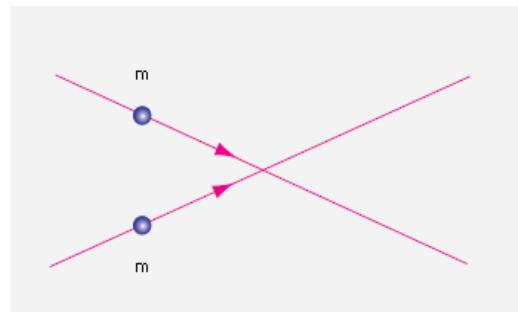
Las propiedades de la materia serían completamente diferentes sin la indistinguibilidad. Por ejemplo, descubriremos que sin ella, los cuchillos y las espadas no cortarían. Además, el suelo no nos sostendría; caeríamos a través de él. Para aclarar el tema con más detalle, exploramos la siguiente pregunta.

### ¿POR QUÉ APARECE LA INDISTINGUIBILIDAD EN LA NATURALEZA?

Tomemos dos partículas cuánticas con la misma masa, la misma composición y la misma forma, tales como dos átomos. Imagínese que sus caminos se cruzan, y que se acercan a pequeñas distancias en el cruce, como se muestra en la Figura 54. En un gas, son ejemplos tanto una colisión de átomos como un tiro errado pero muy cercano. Ahora, todos los experimentos realizados hasta ahora muestran que a pequeñas distancias es imposible decir si los dos cuantones han cambiado de roles o no.

- ▷ Es *imposible* en un gas seguir partículas cuánticas moviéndose próximas y determinar cuál es cuál.

FIGURA 54 Objetos idénticos con trayectorias de cruce.



La imposibilidad de distinguir partículas cercanas es una consecuencia directa del cuanto de acción. Para una trayectoria que lleva a dos partículas a aproximarse muy cerca una de otra, un cambio de rol requiere solamente una pequeña cantidad de cambio, es decir, solamente una pequeña acción (física).

Sin embargo, sabemos que hay una acción observable mínima en la naturaleza. Hacer un seguimiento de cada partícula cuántica a pequeñas distancias requeriría valores de *acción menores* que la acción más pequeña observada en la naturaleza. Por lo tanto, la existencia de una acción mínima hace imposible el seguimiento de partículas cuánticas cuando se acercan demasiado entre sí.

Toda descripción de sistemas con varios cuantones debe tener en cuenta que después de un encuentro cercano, es imposible decir cuál es cuál.

Si recordamos que la teoría cuántica describe los cuantos como nubes, la indistinguibilidad parece más natural. Siempre que dos nubes se paran y se alejan otra vez, es imposible decir qué nube es cuál. Por otra parte, si dos partículas se mantienen lo suficientemente distantes, se tiene una distinguibilidad efectiva; la indistinguibilidad aparece tan sólo cuando las partículas se acercan.

En resumen, la indistinguibilidad es una consecuencia natural e inevitable de la existencia de un valor mínimo de acción en la naturaleza. Este resultado conduce inmediatamente a la siguiente pregunta:

### ¿SE PUEDEN CONTAR LAS PARTÍCULAS CUÁNTICAS?

En la vida cotidiana, los objetos pueden ser contados porque pueden ser distinguidos. Dado que las partículas cuánticas no siempre pueden distinguirse, necesitamos un poco de cuidado para determinar cómo contarlas. El primer paso para contar partículas es la definición de lo que significa una situación sin ninguna partícula en absoluto. Esto parece una cosa fácil de hacer, pero más adelante encontraremos situaciones donde ya este paso se encuentra con dificultades. En cualquier caso, el primer paso es, por lo tanto, la *especificación del vacío*. Cualquier método de conteo requiere que la situación sin partículas esté claramente separada de situaciones con partículas.

El segundo paso es la especificación de un observable útil para determinar el número de partículas cuánticas. La forma más sencilla es elegir uno de esos cuantificadores que se suman en la composición, tal como la carga eléctrica. \*\* El conteo se realiza entonces midiendo la carga total y dividiendo por la carga unitaria.

\*\* En la vida cotidiana, el peso o masa se utiliza comúnmente como observable. Sin embargo, no se puede utilizar en el dominio cuántico, excepto en casos simples. *Desafío 85 s* ¿Puede dar al menos dos razones, una de relatividad especial y otra de relatividad general?

Este método tiene varias ventajas. En primer lugar, no es importante si las partículas son distinguibles o no; el conteo siempre funciona. En segundo lugar, las partículas virtuales no se cuentan. Este es un estado de cosas bienvenido, como veremos, porque para partículas virtuales, es decir, partículas para las cuales  $E^2 \neq p^2c^2 + m^2c^4$ , no hay manera de definir un número de partículas de todos modos. Este es el mejor método de conteo de partículas posible.

El efecto colateral del método de recuento es que las antipartículas cuentan ¡negativamente! También esta consecuencia es el resultado del cuanto de acción. Vimos anteriormente que el cuanto de acción implica que incluso en el vacío, los pares de partícula-antipartícula se observan a energías suficientemente altas. Como resultado, una antipartícula debe contar como menos una partícula. En otras palabras, cualquier forma de contar partículas cuánticas puede producir un error debido a este efecto. En la vida cotidiana esta limitación no juega ningún papel, ya que no hay antimateria a nuestro alrededor. Sin embargo, la cuestión tiene un papel en las energías más altas. Resulta que no hay forma general de contar el número exacto de partículas y antipartículas separadamente; sólo se puede definir la suma. En resumen, la teoría cuántica demuestra que el conteo de partículas nunca es perfecto.

En resumen, la naturaleza proporciona una forma de contar las partículas cuánticas, incluso si no pueden distinguirse, aunque sólo para las condiciones cotidianas y de baja energía; debido al cuanto de acción, las antipartículas cuentan negativamente. Las antipartículas proporcionan así un límite para el recuento de partículas a altas energías, cuando la equivalencia masa-energía llega a ser importante.

### ¿QUÉ ES LA SIMETRÍA DE PERMUTACIÓN?

Puesto que las partículas cuánticas son contables pero indistinguibles, existe una simetría de la naturaleza para sistemas compuestos de varios cuantos idénticos. La *simetría de permutación*, también llamada *simetría de intercambio*, es la propiedad de la naturaleza de que las observaciones no cambian bajo el intercambio de partículas idénticas. La simetría de permutación forma uno de los cuatro pilares de la teoría cuántica, junto con la simetría espacio-tiempo, la simetría de gauge (calibre) y la simetría de renormalización aún no encontrada. La simetría de permutación es una propiedad de sistemas *compuestos*, es decir, de sistemas hechos de muchos subsistemas (idénticos). Sólo para tales sistemas la indistinguibilidad desempeña un papel.

En otras palabras, "indistinguible" no es lo mismo que "idéntico". Dos partículas cuánticas del mismo tipo no son las *mismas*; son más como una *copia* de los demás. Por otra parte, la experiencia de la vida cotidiana nos muestra que siempre se pueden distinguir dos copias bajo una estrecha inspección, de modo que el término «copia» tampoco es totalmente apropiado.

- ▷ Los cuantones, partículas cuánticas, son numerables (contables) y completamente indistinguibles.\*  
\* Las partículas cuánticas son copias *perfectas* unas de otras.

Siendo copias perfectas, ni siquiera la naturaleza puede distinguir las partículas, y aparece la simetría de permutación.

En el próximo capítulo, descubriremos que la permutación es una rotación parcial. Por lo tanto, la simetría de permutación es una simetría bajo rotaciones parciales. *Desafío 86 e* ¿Puede averiguar por qué?

### INDISTINGUIBILIDAD Y SIMETRÍA DE LA FUNCIÓN DE ONDA

La indistinguibilidad de las partículas cuánticas conduce a conclusiones importantes sobre la descripción de su estado de movimiento. Esto sucede porque es imposible formular una descripción del movimiento que incluya la indistinguibilidad desde el principio. (*Desafío 87 s* ¿Puede confirmar esto?) Necesitamos describir un estado de n-partículas con un estado  $\Psi_{1\dots i\dots j\dots n}$  asumiendo que la distinción sea posible, tal como se expresa por los índices ordenados en la notación, y después introduciremos la indistinguibilidad.

La indistinguibilidad, o simetría de permutación, significa que el intercambio de dos partículas cuánticas da como resultado las mismas observaciones físicas.\* Ahora bien, dos estados cuánticos tienen las mismas propiedades físicas si difieren a lo sumo por un factor de fase; la indistinguibilidad requiere

$$\Psi_{1\dots i\dots j\dots n} = e^{ia} \Psi_{1\dots j\dots i\dots n} \quad (55)$$

---

\*\* La palabra "indistinguible" es tan larga que muchos físicos descuidadamente hablan de partículas "idénticas". Sin embargo ponga atención.

\*

para algún ángulo desconocido  $\alpha$ . Aplicando esta expresión dos veces, intercambiando el mismo par de índices de nuevo, nos permite concluir que  $e^{2ia} = 1$ . Esto implica que

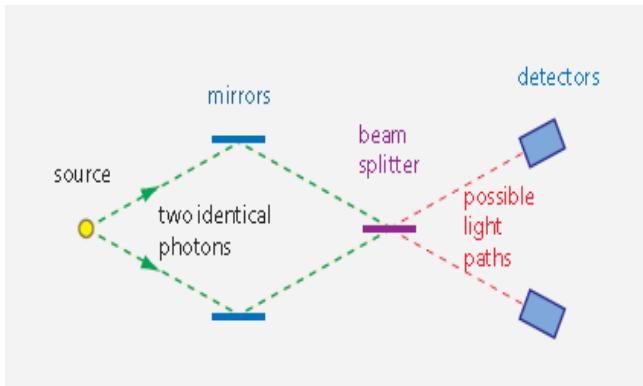
$$\Psi_{1\dots i\dots j\dots n} = \pm \Psi_{1\dots j\dots i\dots n}, \quad (56)$$

En otras palabras, una función de onda es *simétrica* o *antisimétrica* bajo intercambio de índices. (También se puede decir que el autovalor para el operador de intercambio es +1 o -1.)\*

▷ *La teoría cuántica predice así que las partículas cuánticas pueden ser indistinguibles en una de dos maneras distintas.*\*\*

▷ Las partículas que corresponden a las funciones de onda *simétrica* - las que se transforman bajo el intercambio de partículas con un '+' en la ecuación (56) – se llaman\*\*\* *bosones*.

▷ Las partículas que corresponden a las funciones de onda *antisimétrica* - las que se transforman bajo el intercambio de partículas con un '-' en la ecuación (56) – se llaman\*\*\*\* *fermiones*.



**FIGURA 55**

Dos fotones de emisión e interferencia: ambos fotones siempre se encuentran llegando juntos, en el mismo detector.

Los experimentos muestran que el comportamiento de intercambio depende del *tipo* de partícula. Los fotones son bosones. Por otra parte, los electrones, los protones y los neutrones son fermiones. También se observa que cerca de la mitad de los átomos se comportan como bosones (a energías moderadas), la otra mitad son fermiones. Para determinar el tipo de átomo, tenemos que tener en cuenta el espín del electrón y el del núcleo.

De hecho, un compuesto de un número *par* de fermiones (a energías moderadas) - o de cualquier número de bosones (a cualquier energía) - resulta ser un bosón; un compuesto de un número *ímpar* de fermiones es (siempre) un fermión. Por ejemplo,  ${}^4\text{He}$  es un bosón,  ${}^3\text{He}$ , un fermión. Incluso los isótopos naturales  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{41}\text{K}$ ,  ${}^{85}\text{Rb}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$  y  ${}^{133}\text{Cs}$  son bosones, debido a que tienen un número impar de electrones y nucleones; por el contrario,  ${}^{40}\text{K}$  y  ${}^{134}\text{Cs}$  son fermiones (y, en este caso, también radioactivo).

También casi todas las moléculas conocidas son bosones (electrónicamente hablando).

Las moléculas fermiónicas son bastante especiales e incluso tienen un nombre especial en la química; se llaman *radicales* y son conocidos por su afán de reaccionar y formar moléculas bosónicas normales. Dentro del cuerpo humano, demasiados radicales pueden tener efectos adversos sobre la salud; es bien sabido que la vitamina C es importante porque es eficaz en la reducción del número de radicales.

\* Por lo tanto, tenemos la misma situación que ya encontramos varias veces: una *sobreespecificación más de la descripción matemática*, aquí el orden explícito de los índices, *implica una simetría de esta descripción*, que en nuestro caso es una simetría bajo intercambio de índices, es decir, con el intercambio de partículas.

\*\* Esta conclusión se aplica solamente al espacio tridimensional. En dos dimensiones hay más posibilidades.

\*\*\* Los 'bosones' toman el nombre del físico indio Satyendra Nath Bose (n. 1894 Calcuta, m. 1974 Calcuta) quien fue el primero que describió las propiedades estadísticas de los fotones. <sup>ref.70</sup> El trabajo fue más tarde ampliado por Albert Einstein, así que se habla de estadística de Bose-Einstein.

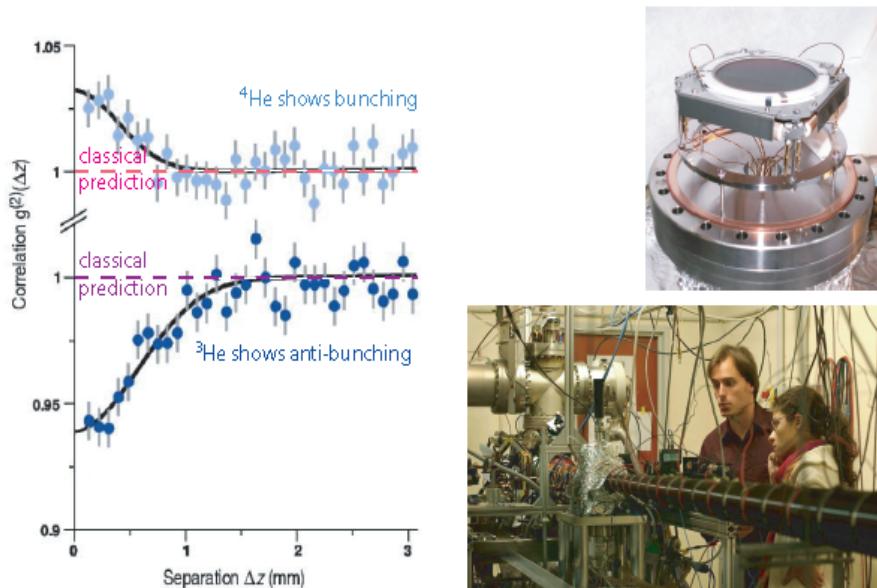
\*\*\*\* El término 'fermión' deriva del nombre del físico italiano y ganador del premio Nobel Enrico Fermi (b. 1901 Roma, d. 1954 Chicago) famoso por su genio que abarcaba todo en física teórica y experimental. Trabajó principalmente en física de partículas nucleares y elementales, sobre espín y sobre estadística. Por su trabajo experimental fue llamado 'ingeniero cuántico'. Es también famoso por sus lecciones, que han sido publicadas con su propia escritura manual, y su brillante aproximación a problemas físicos. Sin embargo, su Premio Nobel más que merecido fue uno de los pocos casos en que se le dio el premio a un descubrimiento que se ha demostrado era incorrecto. Abandonó Italia a causa de los malos tratos sufridos por su esposa judía y emigró a los Estados Unidos. Fermi trabajó en el Proyecto Manhattan para construir las primeras bombas atómicas. Despues de la Segunda Guerra Mundial, organizó uno de los mejores departamentos de física en el mundo, en la Universidad de Chicago, donde fue admirado por todos los que trabajaron con él.

**Desafío 88 s** ¿A qué clase de partículas pertenecen las pelotas de tenis, las personas, los árboles, las montañas y todos los demás objetos macroscópicos?

### EL COMPORTAMIENTO DE LOS FOTONES.

Un experimento simple, mostrado en la Figura 55, permite observar el comportamiento de los fotones bajo intercambio. Tome una fuente que emita dos fotones de idéntica frecuencia y polarización al mismo tiempo. El par de fotones está entonces en un estado entrelazado (correlacionado). En el laboratorio, una fuente de este tipo se puede realizar con un convertidor de bajada, un material que convierte un fotón de frecuencia  $2\omega$  en dos fotones de frecuencia  $\omega$ . Ambos fotones entrelazados, después de haber recorrido exactamente la misma distancia, se introducen en los dos lados de un divisor de haz (por ejemplo, un espejo semiplateado). En las dos salidas del divisor de haz hay dos detectores.<sup>ref.71</sup> Los experimentos muestran que ambos fotones siempre se detectan juntos en el *mismo* lado, y nunca por separado en lados opuestos. Este resultado muestra que los fotones son bosones. Los Fermiones se comportan exactamente de la manera opuesta; dos fermiones siempre se detectan por separado en lados *opuestos*, nunca juntos en el mismo lado. Esto es porque las dos opciones en el que uno de los fotones se transmite y el otro se refleja interferen destructivamente. (La discusión anterior anterior también se aplica aquí: a pesar de que dos fotones están involucrados, también en este caso, cuando se estudian los detalles, solamente un fotón interfiere con sí mismo.)

El experimento demuestra que los fotones son *bosones*. De hecho, en el mismo experimento, los fermiones se comportan de modo exactamente opuesto; dos fermiones siempre se registran por separado en lados *opuestos*, nunca juntos en el mismo lado.



y el experimento (de [atomoptic.iota.u-psud.fr/research/helium/helium.html](http://atomoptic.iota.u-psud.fr/research/helium/helium.html), photo © Denis Boiron, Jerome Chatin).

**FIGURA 56** Bunching (arracimado) y antibunching de átomos de helio  $^3\text{He}$  y  $^4\text{He}$ : el resultado de la medición, el detector

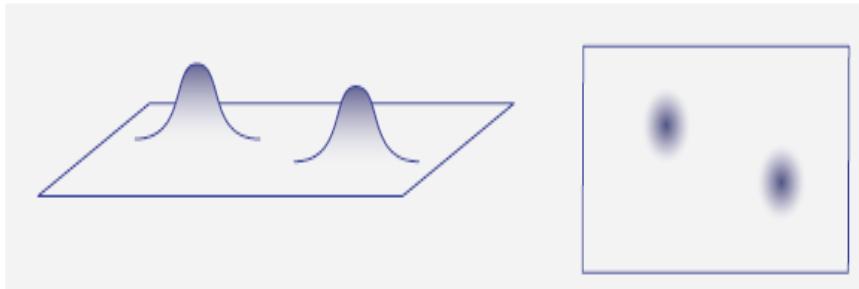
### AGRUPAMIENTO Y ANTIAGRUPAMIENTO

Otra forma de probar el carácter de intercambio de una partícula es el experimento de Hanbury Brown-Twiss descrito anteriormente. En primer lugar, este hermoso experimento muestra que las partículas cuánticas se comportan de manera diferente a las partículas clásicas. Además, en comparación con las partículas clásicas, los fermiones muestran antiagrupamiento - debido al principio de exclusión de Pauli - y los bosones muestran agrupamiento. Hanbury Brown y Twiss realizaron el experimento con fotones, que son bosones.

En 2005, una colaboración de investigación franco-holandesa realizó el experimento con átomos.<sup>ref.72</sup> Utilizando un gas de helio extremadamente frío a 500 nK y un inteligente principio detector, pudieron medir las curvas de correlación típicas para el efecto. Los resultados, mostrados en la Figura 56, confirman que  $^3\text{He}$  es un fermión y  $^4\text{He}$  es un bosón, como se predice de la regla de composición de las partículas cuánticas.

## LA DEPENDENCIA ENERGÉTICA DE LA SIMETRÍA DE PERMUTACIÓN

Si los experimentos nos obligan a la conclusión de que nadie, ni siquiera la naturaleza, pueden distinguir entre dos partículas del mismo tipo, se deduce que no forman dos entidades separadas, sino una especie de unidad. Por tanto, nuestro sentido clásico ingenuo de partículas como entidades separadas del resto del mundo es una descripción incorrecta del fenómeno "partículas". En realidad, ningún experimento puede rastrear partículas con propiedades intrínsecas idénticas de tal manera que se puedan distinguir con certeza. Esta imposibilidad ha sido comprobada experimentalmente con todas las partículas elementales, con núcleos, con átomos y con numerosas moléculas.



**FIGURA 57** Imaginando partículas como excitaciones localizadas (izquierda) o nubes (derecha).

¿Cómo encaja esto con la vida cotidiana, es decir, con la física clásica? Los fotones no nos preocupan mucho aquí. Concentremos la discusión en las partículas de la materia. Sabemos ser capaces de distinguir electrones apuntando al alambre en el que fluyen, y podemos distinguir nuestra nevera de la de nuestro vecino. Mientras que el cuanto de acción hace imposible la distinción, la vida cotidiana lo permite.

La explicación más simple para ambas observaciones es imaginar una partícula microscópica, especialmente una elemental, como un *bulbo*, es decir, como una excitación localizada del vacío, o como una nube diminuta. La [Figura 57](#) muestra dos de tales protuberancias y dos nubes que representan partículas.

Es evidente que si las partículas están demasiado cerca unas de otras, no tiene sentido distinguirlas; No podemos ya más decir cuál es cuál.

La imagen de protuberancia muestra que ya sea para distancias grandes o para paredes de alto potencial que las separan, la distinción de partículas idénticas se hace posible. En tales situaciones, existen mediciones que permiten rastreárlas independientemente como sabemos de la vida diaria. En otras palabras, podemos especificar un límite de energía en la que la simetría de permutación de objetos o partículas separadas por una distancia  $d$  es importante. Eso está dado por

$$E = \frac{c\hbar}{d} \quad (57)$$

*Desafío 89 e* ¿Puede confirmar la expresión? Por ejemplo, a temperaturas cotidianas *podemos* distinguir átomos dentro de un sólido entre sí, ya que la energía así calculada es mucho más alta que la energía térmica de los átomos. *Desafío 90 e* Para divertirse, es posible que desee determinar en qué energía dos gemelos humanos verdaderamente idénticos se vuelven indistinguibles. La estimación de a qué energías se hará evidente el carácter estadístico de los árboles o frigoríficos es entonces sencilla.

En resumen, en la vida cotidiana somos capaces de distinguir objetos y por lo tanto personas por dos razones: porque están hechas de *muchas partes*, y porque vivimos en un ambiente de *baja energía*. La imagen de bultos de las partículas proporciona la idea de que existe una distinción entre los objetos en la vida cotidiana, pero no en las partículas del dominio microscópico.

La cuestión de la energía añade inmediatamente un nuevo aspecto a la discusión. ¿Cómo podemos describir fermiones y bosones en presencia de partículas virtuales y de antipartículas?

## INDISTINGUIBILIDAD EN LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

La teoría cuántica de campos, como veremos en breve, simplemente pone la idea de bulbo nebuloso de la [Figura 57](#) en lenguaje matemático. Una situación sin bulbo se denomina *estado de vacío*.

La teoría cuántica de campos describe todas las partículas de un tipo dado como *excitaciones* de un único campo fundamental. Las partículas son indistinguibles porque cada partícula es una excitación del mismo sustrato básico y cada excitación tiene las mismas propiedades. Una situación con una partícula es entonces

descrita por una condición de vacío actuado por un *operador de creación*. La adición de una segunda partícula se describe añadiendo un segundo operador de creación y la sustracción de una partícula añadiendo un *operador de aniquilación*; Este último resulta ser el adjunto del primero.

La teoría cuántica de campos estudia cómo los operadores de creación y aniquilación deben comportarse para describir las observaciones. \*\* Se llega a las siguientes conclusiones:

- Los campos con espín medio-entero son fermiones e implican anticomutación (local).
- Los campos con espín entero son bosones e implican comutación (local).
- Para todos los operadores de campo en separaciones espaciales, el conmutador, y el respectivo anticomutador, se anulan.
- Las antipartículas de fermiones son fermiones, y las antipartículas de bosones son bosones.
- Las partículas virtuales se comportan bajo el intercambio como sus contrapartes reales.

Estas conexiones están en la base de la teoría cuántica de campos. Describen cómo las partículas son idénticas, más precisamente, cómo se comportan bajo permutación.

Pero, ¿por qué las partículas cuánticas son idénticas? ¿Por qué todos los electrones son idénticos? La teoría de campos cuánticos describe los electrones como excitaciones idénticas del vacío, y como tales, idénticas por construcción. Por supuesto, esta respuesta es sólo parcialmente satisfactoria. Encontraremos una mejor sólo en la parte final de nuestro ascenso de montaña.

### ¿CON QUÉ PRECISIÓN SE VERIFICA LA SIMETRÍA DE PERMUTACIÓN?

¿Son los electrones fermiones *perfectos*? En 1990, Ramberg y Snow realizaron un experimento simple pero efectivo que probó su comportamiento como fermiones. <sup>ref.73</sup> Envieron una corriente eléctrica de 30 A a través de un hilo de cobre durante un mes y buscaron emisión de rayos X. No encontraron ninguna. Llegaron a la conclusión de que los electrones están siempre en un estado antisimétrico, con un componente simétrico de menos de

$$2 \cdot 10^{-26} \quad \text{del estado total.} \quad (60)$$

En resumen, los electrones están siempre en un estado antisimétrico: son fermiones.

El razonamiento detrás de este elegante experimento es el siguiente. Si los electrones no fueran siempre fermiones, de vez en cuando un electrón podría caer en el nivel de energía más bajo de un átomo de cobre, lo que conduce a la emisión de rayos X. La falta de tales rayos X implica que los electrones son fermiones con una precisión muy elevada. Los rayos X sólo podían ser emitidos si fueran bosones, al menos parte del tiempo. De hecho, dos electrones, siendo fermiones, no pueden estar en el mismo estado cuántico: esta restricción se llama el *principio de exclusión de Pauli*. Se aplica a todos los fermiones y es el argumento del próximo capítulo.

### COPIAS, CLONES Y GUANTES

¿Pueden los sistemas clásicos ser indistinguibles? Pueden: las moléculas grandes son ejemplos - siempre que estén hechas de exactamente los mismos isótopos. ¿Pueden estar los *grandes* sistemas clásicos, hechos de un mol o más partículas indistinguibles? Esta simple cuestión en sustancia pregunta si es posible una copia *perfecta*, o *clon* (físico), de un sistema físico.

Se podría argumentar que cualquier fábrica de bienes producidos en masa, como aquella que produce botones de camisa o clips, muestra que las copias son posibles. Pero la apariencia es engañosa. En un microscopio suele haber alguna diferencia. ¿Es este siempre el caso? En 1982, el físico holandés Dennis Dieks e independientemente, los físicos estadounidenses -Wootters y Zurek- publicaron pruebas sencillas de que los sistemas cuánticos no pueden ser copiados. Este es el famoso teorema de *no-clonación*. <sup>ref.74</sup>

\*\*Siempre que la relación

$$[b, b^\dagger] = bb^\dagger - b^\dagger b = 1 \quad (58)$$

se pone entre el operador de creación  $b^\dagger$  y el operador de aniquilación  $b$ , los operadores describen un *bosón*. Por lo tanto, la cruz se puede ver como describiendo el funcionamiento de los adjuntos; Una cruz doble es equivalente a ninguna cruz.

Si los operadores para la creación de partículas y la aniquilación anticomutaran

$$\{d, d^\dagger\} = dd^\dagger + d^\dagger d = 1 \quad (59)$$

entonces describen un fermión. El corchete (llave o paréntesis) así definido se llama *corchete anticomutador*.

Una *máquina copiadora* es una máquina que toma un original, lee sus propiedades y produce una copia, dejando el original sin cambios. Esta definición parece sencilla. Sin embargo, sabemos que si extraemos información de un original, tenemos que interactuar con él. Como resultado, el sistema cambiará en al menos un cuanto de acción. Por lo tanto, esperamos que debido a la teoría cuántica, copias y originales nunca pueden ser idénticos.\*

La teoría cuántica demuestra que las máquinas copiadoras son imposibles. Una máquina copiadora es descrita por un operador que mapea el estado de un sistema original al estado de la copia. En otras palabras, una máquina copiadora es lineal. Esta linealidad conduce a un problema.

En pocas palabras, si una máquina copiadora pudiera copiar originales en el estado  $|A\rangle$  o en el estado  $|B\rangle$ , no podría funcionar si el estado del original fuera una superposición  $|A\rangle + |B\rangle$ . Veamos por qué.

Una máquina copiadora es un dispositivo descrito por un operador  $U$  que cambia el estado de inicio  $|s\rangle_c$  de la copia de la siguiente manera:

- Si el original está en el estado  $|A\rangle$ , una copiadora actúa sobre la copia  $|s\rangle_c$  como

$$U|A\rangle|s\rangle_c = |A\rangle|A\rangle_c. \quad (61)$$

- Si el original está en estado  $|B\rangle$ , una copiadora actúa sobre la copia  $|s\rangle_c$  como

$$U|B\rangle|s\rangle_c = |B\rangle|B\rangle_c. \quad (62)$$

Como resultado de estos dos requisitos, un original en el estado  $|A + B\rangle$  es tratado por la copiadora como

$$U|A + B\rangle|s\rangle_c = |A\rangle|A\rangle_c + |B\rangle|B\rangle_c. \quad (63)$$

Esto está en contraste con lo que queremos, que sería

$$U_{\text{wanted}}|A + B\rangle|s\rangle_c = (|A\rangle + |B\rangle)(|A\rangle_c + |B\rangle_c). \quad (64)$$

En otras palabras, una máquina copiadora no puede copiar completamente un estado.\* \* Este es el denominado *teorema de no-clonación*.

La imposibilidad de copiar está implícita en la teoría cuántica. Si pudiéramos clonar sistemas, podríamos medir una variable de un sistema y una segunda variable en su copia. Podríamos así vencer la relación de indeterminación en ambas copias. Esto es imposible. Dicho brevemente, las copias son imperfectas.

La falta de copiadoras mecánicas cuánticas es decepcionante. Tales máquinas de ciencia ficción podrían ser alimentadas con dos insumos diferentes, como un león y una cabra, y producir una superposición: una quimera. La teoría cuántica demuestra que todos estos seres o situaciones imaginarios no pueden realizarse.

Otros investigadores exploraron entonces cómo puede llegarse cerca de la perfección para una copia, especialmente en el caso de los sistemas clásicos.<sup>ref.75</sup> Para hacer corta una larga historia, estas investigaciones muestran que también la copia o clonación de sistemas macroscópicos es imposible. En palabras sencillas, *las máquinas copiadoras no existen*. Las copias siempre se pueden distinguir de los originales si se hacen observaciones con suficiente cuidado. En particular, este es el caso de los clones biológicos; los clones biológicos son gemelos idénticos nacidos después de embarazos separados. Difieren en sus huellas dactilares, escaneo del iris, recuerdos físicos y emocionales, estructuras cerebrales, y en muchos otros aspectos.

(*Desafío 92 s* ¿Puede especificar algunos más?) En resumen, los clones biológicos, como los gemelos idénticos, no son copias entre sí.

En resumen, los objetos de la vida cotidiana tales como fotocopias, bolas de billar o gemelos son siempre distinguibles. Hay dos razones: primero, los efectos cuánticos no juegan ningún papel en la vida cotidiana, de modo que no hay peligro de intercambio inobservable; En segundo lugar, los clones perfectos de los sistemas

\*\*Esto parece proporcionar una solución contra las falsificaciones de billetes de banco. De hecho, Steve Wiesner propuso utilizar la teoría cuántica ya en 1970; Imaginó usar polarizaciones de fotones individuales almacenados como bits de números de serie. *Desafío 91 ny* ¿Puede explicar por qué esto no puede funcionar?

\*\* El teorema de no-clonación pone severas limitaciones en las computadoras cuánticas, ya que los cálculos a menudo necesitan copias de los resultados intermedios. El teorema también muestra que la comunicación más rápida que la luz es imposible en los experimentos EPR. En compensación, la criptografía cuántica es posible - al menos en el laboratorio.

De hecho, el teorema de no-clonación muestra que nadie puede copiar un mensaje cuántico sin ser notado.

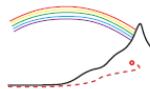
Las formas específicas de utilizar este resultado en la criptografía son el protocolo 1984 de Bennett-Brassard y el protocolo Ekert de 1991.

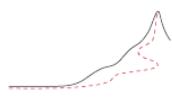
clásicos no existen de todos modos, de modo que siempre hay pequeñas diferencias entre dos objetos cualesquiera, aunque parezcan idénticos a primera vista. Los guantes, siendo sistemas clásicos, pueden ser siempre distinguidos.

### RESUMEN

Como consecuencia del cuanto de acción  $\hbar$ , las partículas cuánticas son *indistinguibles*.

Esto sucede de dos maneras: o son bosones o fermiones. A pesar de la indistinguibilidad de los cuantones, el estado de los sistemas físicos no puede ser copiado a un segundo sistema con el mismo contenido de partículas. Por lo tanto, los clones perfectos no existen en la naturaleza.





## Capítulo 6

# ROTACIONES Y ESTADÍSTICA – VISUALIZACIÓN DEL ESPÍN

# E

spín es la observación de que los haces de materia pueden ser *polarizados*: los rayos pueden ser girados. El espín describe así cómo se comportan las partículas bajo rotaciones. Por lo tanto, las partículas no implican que sean puntiformes: las partículas cuánticas pueden girar alrededor de un eje. Esta rotación apropiada se llama *espín*; como la rotación macroscópica, se describe por un momento angular.

En lo que sigue, recordamos que la rotación de los cuantones se cuantifica en unidades de  $\hbar/2$ . Luego mostramos un resultado profundo: el valor del giro determina si una partícula cuántica, y cualquier sistema cuántico general, es un bosón o un fermión.

### PARTÍCULAS CUÁNTICAS Y SIMETRÍA

El marco general para la aparición de la rotación fue clarificado por Eugene Wigner en 1939. <sup>\*ref.76\*</sup> Comenzó recapitulando que cualquier partícula cuántica, si es *elemental*, debe comportarse como una *representación irreducible* del conjunto de todos los cambios de puntos de vista. Este conjunto de cambios de puntos de vista forma el grupo de simetría de espacio-tiempo plano, el denominado *grupo de Lorentz no homogéneo*. ¿Por qué?

Habíamos visto en el capítulo sobre la simetría en el primer volumen de esta aventura que la simetría de cualquier sistema compuesto conduce a ciertos requisitos para los componentes del sistema. Si los componentes no siguen estos requisitos, no pueden construir una composición simétrica.

Sabemos de la vida cotidiana y de experimentos precisos que todos los sistemas físicos son simétricos bajo traslación en el tiempo y en el espacio, bajo rotaciones en el espacio, bajo impulsos, y - en muchos casos - bajo reflexión especular, intercambio de materia-antimateria e inversión del movimiento. Sabemos que estas simetrías son conocidas de la vida cotidiana; por ejemplo, la utilidad de lo que llamamos "experiencia" en la vida cotidiana es simplemente una consecuencia de la simetría de la traslación del tiempo. El conjunto de todas estas simetrías comunes, más precisamente, de todas estas transformaciones de simetría, se llama el *grupo de Lorentz no homogéneo*.

Estas *simetrías*, es decir, estos cambios de puntos de vista, conducen a ciertos requisitos para los componentes de sistemas físicos, es decir, para las partículas cuánticas elementales. En lenguaje matemático, el requisito se expresa diciendo que las *partículas elementales* deben ser *representaciones irreducibles* de la simetría del grupo.\*

Cada libro de texto sobre la teoría cuántica lleva a cabo este razonamiento con detalle sistemático. Comenzando con el grupo de Lorentz, se obtiene una lista de todas las posibles representaciones irreducibles, en otras palabras, una lista de todas las formas posibles en que las partículas elementales pueden comportarse.\*

Catalogando las posibilidades, se encuentra, en primer lugar, que cada partícula elemental se describe por *cuadri-cantidades de movimiento*, nada nuevo hasta ahora, por un momento angular interno, el *espín* y por un conjunto de *paridades*.

— La Cuadri-cantidad de movimiento resulta de la traducción de simetría de la naturaleza. El valor de la cantidad de movimiento describe cómo se comporta una partícula bajo traslación, o sea, bajo desplazamiento de los puntos de vista de la posición y del tiempo. La magnitud de la cuadri-cantidad de movimiento es una

\* Eugene Wigner (n. 1902 Budapest, f. 1995 Princeton), Físico teórico húngaro-estadounidense, recibió el Premio Nobel de física en 1963. Escribió más de 500 artículos sobre muchos aspectos de la simetría en la naturaleza. También fue famoso por ser el físico más educado del mundo.

\*\* Para ser de relevancia física para la teoría cuántica, las representaciones tienen que ser *unitarias*. La lista completa de representaciones *irreducibles* y unitarias de los cambios de puntos de vista proporciona así el rango de posibilidades para cualquier partícula que quiera ser elemental.

propiedad invariante para la masa, mientras que su orientación en el espacio-tiempo es libre.

— El espín resulta de la simetría de rotación de la naturaleza. El valor de espín describe cómo se comporta un objeto bajo rotaciones en tres dimensiones, es decir, bajo cambio de orientación de puntos de vista.\* La magnitud de la rotación es una propiedad invariante, y su orientación tiene varias posibilidades con respecto a la dirección del movimiento. En particular, la rotación de las partículas cuánticas masivas se comporta de forma diferente a la de las partículas cuánticas sin masa.

Para las partículas cuánticas *masivas*, el grupo de Lorentz inhomogéneo implica que la magnitud invariante de espín es  $\sqrt{J(J+1)} \hbar$ , a menudo escrita, por simplificación excesiva, como  $J$ . Por tanto, es costumbre decir y escribir 'espín  $J$ ' en lugar del engorroso "espín  $\sqrt{J(J+1)} \hbar$ ". Dado que el valor del número cuántico  $J$  especifica la magnitud del momento angular, da la representación para las rotaciones de un determinado tipo de partícula. La exploración muestra que el número cuántico espín  $J$  puede ser cualquier múltiplo de  $1/2$ , es decir, puede tomar los valores  $0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$ , etc. Como se resume en la [Tabla 4](#), los experimentos muestran que los electrones, protones y neutrones tienen espín  $1/2$ , las partículas  $W$  y  $Z$  espín  $1$  y los átomos de helio espín  $0$ . Además, la representación de espín  $J$  es  $2J+1$  dimensional, lo que significa que la orientación espacial del espín tiene  $2J+1$  valores posibles. Para los electrones, con  $J = 1/2$ , existen así dos posibilidades; por lo general se llaman "arriba" y "abajo". El espín sólo toma valores *discretos*. Esto contrasta con la cantidad de movimiento lineal, cuyas representaciones son dimensionalmente infinitas y cuyos valores posibles forman un rango *continuo*.

También las partículas cuánticas *sin masa* se caracterizan por el valor de su espín. Puede tomar los mismos valores que en el caso masivo. Por ejemplo, los fotones y los gluones tienen espín  $1$ . Para las partículas sin masa, las representaciones son unidimensionales, de modo que las partículas sin masa se describen completamente por su *helicidad*, definida como la proyección del espín sobre la dirección del movimiento. Las partículas sin masa pueden tener helicidad positiva o negativa, a menudo también llamada polarización diestra y zurda. No hay otra libertad para la orientación de espín en el caso sin masa.

— Para completar la lista de propiedades de las partículas, se deben incluir las demás simetrías discretas del grupo de Lorentz no homogéneo. Puesto que la *inversión de movimiento, la paridad espacial y la inversión de carga* son paridades, cada partícula elemental tiene que ser descrita por tres números adicionales, llamados  $T$ ,  $P$  y  $C$ , cada uno de los cuales solo puede tomar los valores  $+1$  o  $-1$ . Siendo paridades, estos números deben ser *multiplicados* para obtener el valor de un sistema compuesto.

**TABLA 4** Espín de la partícula como representación del grupo de rotación.

ESPÍN	SISTEMA no cargado después de una rotación de	Elementales con masa	Ejemplos de compuestos	Elementales sin masa	Ejemplos
0	Cualquier ángulo	Bosón de Higgs	Mesones, nucleones, átomos	Ninguna <sup>a</sup>	
1/2	2 giros	$e, \mu, \tau, q, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$	Núcleos, átomos, moléculas, radicales	Ninguna ya que los neutrinos tienen una masa minúscula	
1	1 giro	$W, Z$	Mesones, nucleones, átomos, moléculas,	$g, \gamma$	
3/2	$\frac{2}{3}$ giro	ninguna <sup>a</sup>	Bariones, núcleos, átomos	ninguna <sup>a</sup>	
2	$\frac{1}{2}$ giro	ninguna	núcleos	gravitones <sup>b</sup>	
5/2	$\frac{2}{5}$ giro	ninguna	núcleos	ninguna	
3	$\frac{1}{3}$ giro	ninguna	núcleos	ninguna	
Etc. <sup>c</sup>	Etc. <sup>c</sup>	Etc. <sup>c</sup>	Etc. <sup>c</sup>	Etc. <sup>c</sup>	

*a.* Supersimetría, una simetría conjeturada en el siglo XX, predice partículas elementales en esa y otras casillas.

*b.* El gravitón aún no ha sido observado.

*c.* Existen núcleos con espín de valores de al menos  $101/2$  y  $51$  (en unidades de  $\hbar$ ). [ref.77](#)

\* \* El grupo de rotaciones físicas también se denomina SO (3), ya que matemáticamente se describe por el grupo de matrices Ortogonales Especiales 3 por 3.

En resumen, la simetría en la naturaleza conduce a la clasificación de todas las partículas cuánticas elementales mediante su masa, su cantidad de movimiento, su espín y sus paridades P, C y T.

### TIPOS DE PARTÍCULAS CUÁNTICAS

Los valores de espín observados para todas las partículas cuánticas en la naturaleza se dan en la [Tabla 4](#). Las paridades y todas las propiedades intrínsecas conocidas de las partículas elementales se dan en la [Tabla 5](#). El espín y las paridades conjuntamente se llaman *números cuánticos*. Todas las demás propiedades intrínsecas de los cuantones están relacionadas con interacciones, tales como masa, carga eléctrica o isoespín. Los exploraremos en el próximo volumen.

**TABLA 5** Propiedades de las partículas elementales.

Partícula	Masa m <sup>a</sup>	Vida media $\tau$ , Ancho de la energía <sup>b</sup> , Modos de Decadencia principal	Isoespín I, espín J, <sup>c</sup> paridad P, carga de paridad C	Carga isoespín, extrañeza, <sup>c</sup> encanto, belleza, <sup>d</sup> superioridad	Números Leptónicos <sup>e</sup> y bariónicos <i>L B</i> <i>QISCBT</i>
<b>Radiación elemental (bosones)</b>					
Foton $\gamma$	0 (<10 <sup>-53</sup> kg)	estable	$I(J_{PC}) = 0, 1(1--)$	000000	0, 0
$W^\pm$	80.398(25) GeV/c <sup>2</sup> 67.60(27)% hadrons, 32.12(36)% $l+l-$	2.124(41) GeV	$J = 1$	$\pm 100000$	0, 0
Z	91.1876(21) GeV/c <sup>2</sup> o 2.4952(23) GeV/c <sup>2</sup> 69.91(6)% hadrones, 10.0974(69)% $l+l-$	$2.65(2) \cdot 10^{-25}$ s	$J = 1$	000000	0, 0
gluon	0	estable	$I(J_P) = 0(1-)$	000000	0, 0
<b>Materia elemental (fermiones): leptones</b>					
electrón e <sup>-</sup>	$9.109\ 382\ 15(45) 10^{-31}$ kg = 81.871 0438(41) $pJ/c^2 = 0.510\ 998$ $910(13)\ MeV/c^2 =$ 0.000 548 579 909 43(23) u -1.001 159 652 1811(7)	$>13 \cdot 10^{30}$ s	$J = 1/2$	-100 000	1, 0
muon $\mu$	0.188 353 130(11) yg = 105.658 3668(38) MeV/ $c^2 = 0.113\ 428\ 9256(29)$ u razón giromagnética $\mu_\mu/(e\hbar/2m_\mu) = -1.001$ 165 9208(6)	2.197 03(4) $\mu$ s 99% $e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$	$J = 1/2$	-100000	1, 0
tau $\tau$	1.776 84(17) GeV/c <sub>2</sub>	290.6(1.0) fs	$J = 1/2$	-100000	1, 0
Neutrino el.			$J = 1/2$		1, 0
$\nu_e$					
Neutrino muónico $\nu_\mu$	< 2 eV/c <sup>2</sup>		$J = 1/2$		1, 0
Neutrino tau	< 2 eV/c <sup>2</sup>		$J = 1/2$		1, 0
$\nu_\tau$					

### Materia elemental (fermiones): quarks

Up (arriba) <i>u</i>	1,5 a 3,3MeV/ $c^2$	Ver protón	$I(J^P) = \frac{1}{2} (1/2^+)$	+2/3+1/2 0000	0, 1/3
down (abajo) <i>d</i>	3.5 a 6MeV/ $c^2$	Ver protón	$I(J^P) = \frac{1}{2} (1/2^+)$	.-1/3-1/2 0000	0, 1/3
Extrañeza <i>s</i>	70 a 130MeV/ $c^2$		$I(J^P) = 0 (1/2^+)$	-1/3 0 -1 0000	0, 1/3
encanto <i>c</i>	1.27(11) GeV/ $c^2$		$I(J^P) = 0 (1/2^+)$	-1/3 00 +1 00	0, 1/3
bottom <i>b</i>	4,20(17) GeV/ $c^2$	$\tau = 1.33(11)$ ps	$I(JP) = 0(1/2^+)$	-1/3 000-10	0, 1/3
top <i>t</i>	171.2(2.1) GeV/ $c^2$		$I(JP) = 0(1/2^+)$	+2/3 0000+1	0, 1/3

### Bosón elemental obsevado

Bosón de Higgs	126GeV/ $c^2$	$J = 0$
----------------	---------------	---------

Notas:

a. Vea también la tabla de los prefijos del SI en [pág. 192](#). Sobre la unidad de masa eV/ $c^2$ , vea [page 196](#).

b La amplitud de *energía*  $\Gamma$  de una partícula está ligada a su duración o vida media  $\tau$  mediante la relación de indeterminación  $\Gamma\tau = \hbar$ . Hay una diferencia entre la semivida  $t_{1/2}$  y la duración  $\tau$  de una partícula: están relacionadas mediante  $t_{1/2} = \tau \ln 2$ , donde  $\ln 2 \approx 0,693\ 147\ 18$ ; la semivida es por lo tanto más breve que la vida media. La *unidad de masa atómica* unificada se define como 1/12 de la masa de un átomo de carbono-12 en reposo y en su estado fundamental. Se tiene que  $1u = 1/12m(^{12}\text{C}) = 1,660\ 5402(10)$  yg.

c. . Para mantener corta la tabla, su cabecera explícitamente no menciona el *color*, la carga de la interacción fuerte. Esto debe añadirse a la lista de las propiedades básicas del objeto. Los números cuánticos que contienen la palabra paridad son multiplicativos; todos los demás son aditivos.

La paridad de tiempo T (que no debe confundirse con Topness -superioridad- T), mejor llamada paridad de inversión del movimiento, es igual a CP en todas las partículas conocidas. El isospín I (o  $I_z$ ) se define sólo para los quarks arriba y abajo y sus compuestos, tales como el protón y el neutrón. En la literatura también se puede ver las referencias a la llamada paridad G, definida como  $G = (-1)^{IC}$ .

La cabecera de la tabla tampoco menciona la *carga débil* de las partículas. Los detalles de la carga débil g, o, más precisamente, sobre el isospín débil, un número cuántico asignado a todos los fermiones zurdos (y antifermiones diestros), pero a ningún fermión diestro (y antifermión zurdo), se indican en el apartado de interacciones débiles.

d. ‘Belleza’ se llama ahora comúnmente *bottomness*; similarmente, ‘verdad’ se llama ahora comúnmente *topness*.

Los signos de los números cuánticos *S, I, C, B, T* pueden ser definidos de diferentes maneras. En la asignación estándar mostrada aquí, el signo de cada número cuántico no nulo está dada por el signo de la carga del quark correspondiente.

e. Si existiera supersimetría, habría que añadir la paridad R a esta columna. La paridad R es un número cuántico multiplicativo relacionado con el número de leptones L, el número de bariones B y el espín J a través de la definición  $R = (-1)^{3B + L + 2J}$ . Todas las partículas del modelo estándar son R-pares, mientras que sus partículas compañeras supersimétricas conjeturadas serían R-impar.

f. Para la definición precisa y el significado de las masas de quarks, vea el volumen V.

### ESPÍN 1/2 Y OBJETOS LIGADOS

Un resultado central de la teoría cuántica es que el espín 1/2 es una posibilidad en la naturaleza, a pesar de que este valor no aparece en la vida cotidiana. Para un sistema tener espín 1/2 significa que para tal sistema sólo una rotación de dos vueltas es equivalente a ninguna en absoluto, mientras que una rotación de *una* vuelta no lo es. No existen sistemas simples con esta propiedad en la vida cotidiana, pero estos sistemas sí existen en los sistemas microscópicos: electrones, neutrinos, átomos de plata y radicales moleculares tienen espín 1/2. La [Tabla 4](#) da una lista más extensa.

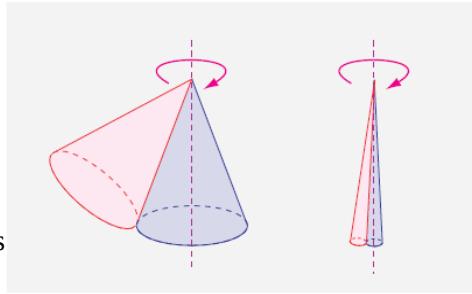
El matemático Hermann Weyl utilizó una simple imagen explicando la conexión entre el espín 1/2 y la invariancia bajo la rotación de  $4\pi$ . Tome dos conos, tocándose uno al otro en sus puntas, así como a lo largo de una línea, como se muestra en la [Figura 58](#). Sostenga un cono y ruede el otro alrededor de él. Cuando el cono de rodadura, después de un giro completo alrededor del otro cono, ha vuelto a la posición original, ha

girado un cierto ángulo. Si los conos son grandes, el ángulo de rotación es pequeño. Si los conos son muy finos, como las agujas, el cono en movimiento ha girado en (casi) 720 grados. Una rotación de 720 grados es así similar a una de 0 grados. Si imaginamos que el ángulo del cono varía continuamente, esta visualización también muestra que una rotación de 720 grados puede ser deformada continuamente en una rotación de 0 grados, mientras que una rotación de 360 grados no puede.

**FIGURA 58** Un argumento que muestra por qué las rotaciones de  $4\pi$  son equivalentes a ninguna rotación en absoluto.

Hay sistemas en la vida cotidiana que se comportan como el espín 1/2, pero no son simples:

Todos estos sistemas están ligados. El sistema más conocido es el cinturón. La [Figura 59](#) y la [Figura 60](#) muestran que una rotación de  $4\pi$  de una hebilla de cinturón es equivalente a ninguna rotación en absoluto:

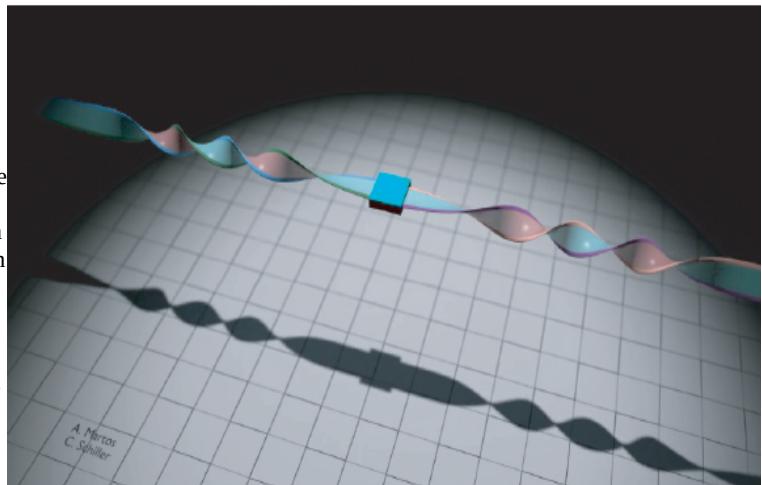


Esto se consigue fácilmente moviendo la correa alrededor. Es posible que desee repetir el proceso por sí mismo, utilizando un cinturón real o una tira de papel, con el fin de obtener una sensación de eso. [Desafío 93 e](#). El proceso de desenredar se llama a menudo *truco de la correa*, pero también *truco de la tijera*, *truco de la placa*, *truco de la secuencia*, *danza filipina del vino* o *danza de la candela Balinesa*. A veces se atribuye incorrectamente a Dirac, porque lo utilizó ampliamente en sus conferencias.

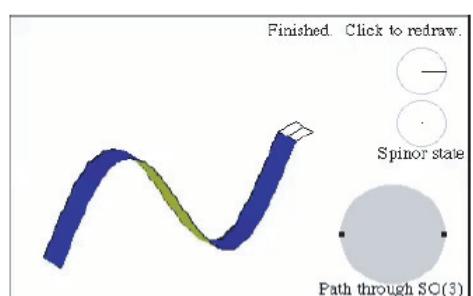
El cuerpo humano tiene un cinturón incorporado: el brazo. Simplemente tome su mano, ponga un objeto sobre ella para mayor claridad, como una taza, y gire la mano y el objeto  $2\pi$  radianes girando el brazo.

Después de una segunda rotación, todo el sistema se desenredará de nuevo, como se muestra en la [Figura 61](#). El truco es aún más impresionante cuando se usan *muchos* brazos. [Desafío 94 e](#) Usted puede poner sus dos manos (si usted eligió la posición de partida correcta) debajo de la taza o usted puede tomar un amigo o dos que tengan cada uno una mano unida a la taza junto con usted. El truco del cinturón todavía se puede realizar, y todo el sistema se desenreda después de dos vueltas completas. [Desafío 95 e](#)

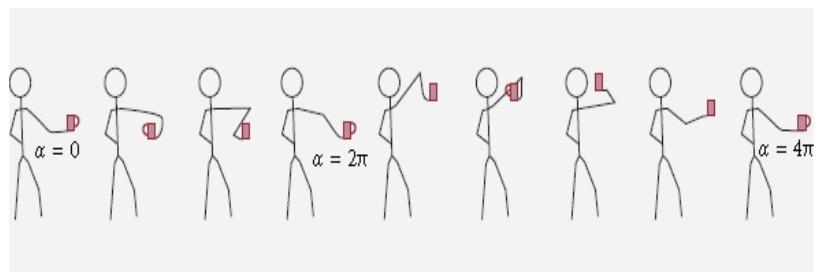
**FIGURA 59** Supongamos que el cinturón no puede ser observado, pero el objeto cuadrado puede, y que representa una partícula. La animación entonces muestra que tal partícula (el objeto cuadrado) puede volver a la posición inicial después de la rotación por  $4\pi$  (y no después de  $2\pi$ ). Esta partícula 'ceñida' cumple así la propiedad definitoria de una partícula 1/2 de espín: girarla por  $4\pi$  es equivalente a ninguna rotación en absoluto. La correa, por tanto, representa la función de onda espínora; Por ejemplo, una rotación de  $2\pi$  conduce a un giro; Esto significa un cambio del signo de la función de onda. Una rotación de  $4\pi$  no influye en la función de onda. Puede repetir el truco en casa, con una tira de papel. La equivalencia se muestra aquí con dos correas adjuntas, pero el truco funciona con cualquier número positivo de correas! (QuickTime film © Antonio Martos)



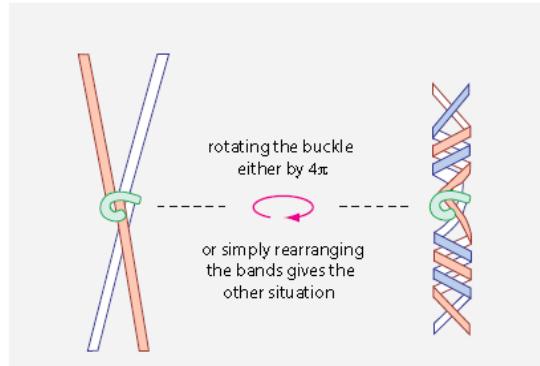
**FIGURA 60** El truco de cinturón con una correa simple: una doble rotación de la hebilla del cinturón es equivalente a ninguna rotación. (QuickTime film © Greg Egan)



**FIGURA 61** El brazo humano como espín 1/2 modelo. Girando la hebilla o por  $4\pi$  o simplemente reorganizando las bandas da la otra situación



**FIGURA 62** El truco de cinturón generalizado, que modela el comportamiento de rotación de una partícula de espín 1/2: independientemente del número de bandas o tubos o cuerdas unidas, las dos situaciones pueden ser transformadas entre sí, ya sea girando el objeto central por  $4\pi$  o manteniendo el objeto central fijado y moviendo las bandas a su alrededor.

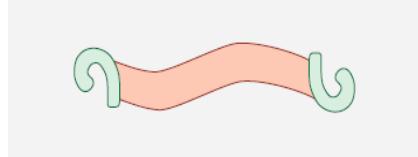


Esto nos lleva a la forma más general de mostrar la conexión entre el pegado o atado y el espín 1/2. Simplemente pegue cualquier número de hilos, correas o tubos, digamos medio metro de largo, a algún objeto, como se muestra en la Figura 62. (Con muchas de esas correas, ya no es apropiado llamarla hebilla de cinturón.) Al igual que el brazo de un ser humano, cada banda se supone que llega al infinito espacial y se unen allí. Si el objeto, que representa la partícula, es girado en  $2\pi$ , aparecen torceduras en sus colas. Si el objeto es girado por un giro adicional, hasta un total de  $4\pi$ , todos los giros y enredos pueden hacerse desaparecer, sin mover o girar el objeto. Realmente tienes que experimentar esto para creerlo. Y el proceso realmente funciona con *cualquier* número de bandas pegadas al objeto. El sitio web [www.evl.uic.edu/hypercomplex/html/dirac.html](http://www.evl.uic.edu/hypercomplex/html/dirac.html) proporciona una animación que muestra este proceso con cuatro cinturones juntos.

Dicho brevemente, todas estas animaciones muestran que las hebillas de cinturón, y de hecho todos los sistemas (suficientemente) ligados, vuelven a su estado original sólo después de rotaciones de  $4\pi$  radianes y no después de rotaciones de  $2\pi$  solamente. Los *objetos ligados* se comportan como partículas de espín 1/2. De hecho, los objetos ligados, tales como las hebillas de cinturón, son los únicos sistemas que reproducen las propiedades de espín 1/2 *Desafío 96 e*. En la última parte de nuestra aventura descubriremos la profunda razón subyacente de la equivalencia entre las partículas espín 1/2 y los sistemas ligados.

Explorando las simetrías de las funciones de onda, la teoría cuántica muestra que las rotaciones *requieren* la existencia de espín para todas las partículas cuánticas. Una investigación de la función de onda muestra que las funciones de onda de las partículas de materia elementales se comportan bajo rotación como objetos ligados. Por ejemplo, una función de onda cuyo equivalente ligado está correlacionado adquiere un signo negativo.

**FIGURA 63** Dos hebillas de cinturón conectadas por un cinturón, una forma de visualizar dos partículas de espín 1/2.



En resumen, la teoría cuántica implica la existencia del valor ligeramente contra-intuitivo del espín 1/2. En particular, aparece para partículas de materia elemental.

#### LA EXTENSIÓN DEL TRUCO DEL CINTURÓN

Pero, ¿por qué los experimentos demuestran que todos los fermiones tienen un espín semientero y que todos los bosones tienen un espín de número entero? En particular, ¿por qué los electrones obedecen al principio de exclusión de Pauli? A primera vista, no está claro qué tiene que ver el valor de espín con las

propiedades estadísticas de una partícula. En realidad, hay varias maneras de demostrar que las rotaciones y las estadísticas están conectadas.

La primera prueba, debida a Wolfgang Pauli, usaba los detalles de la teoría cuántica y era tan complicada que sus ingredientes esenciales quedaron ocultos.<sup>ref.80</sup> Se tardó varias décadas en convencer a todo el mundo de que una nueva observación sobre los cinturones era la parte central de la prueba.<sup>ref.81</sup>

Partiendo del modelo de bultos de las partículas cuánticas mostrado en la [Figura 57](#), Podemos imaginar un tubo que conecta dos partículas, similar a un cinturón que conecta dos hebillas, como se muestra en la [Figura 63](#). Las hebillas representan las partículas. El tubo mantiene un seguimiento de su orientación relativa. Si una partícula/hebilla es girada en  $2\pi$  a lo largo de cualquier eje, se inserta una torsión en la correa. Como se muestra, si la misma hebilla es girada por otro  $2\pi$ , llevando el total a  $4\pi$ , el doble giro resultante se puede deshacer fácilmente sin mover o girar las hebillas.

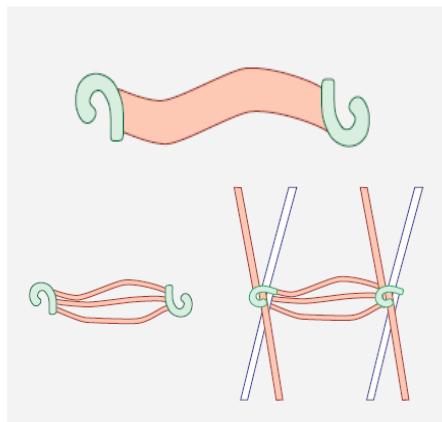
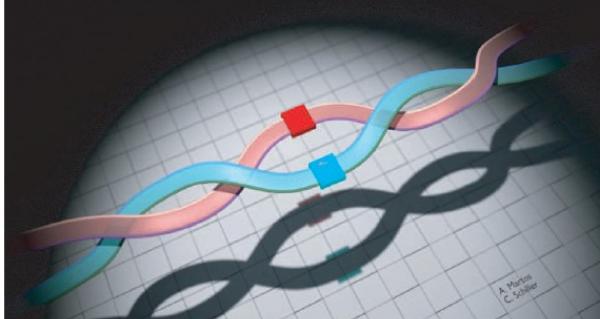
Ahora veamos de nuevo la [Figura 63](#). Si tomamos las dos hebillas y simplemente *cambiamos* sus posiciones, se introduce un giro en el cinturón. Si los cambiamos de nuevo, el giro desaparecerá.

En resumen, dos hebillas de cinturón conectadas vuelven a su estado original sólo después de un intercambio doble, y no después de un solo intercambio.

En otras palabras, si tomamos cada hebilla para representar una partícula y una torsión para significar un factor -1, la correa describe exactamente el comportamiento de fase de las funciones de onda de espín 1/2, tanto bajo rotación como bajo intercambio. En particular, vemos que la *rotación* y el comportamiento de *intercambio* están relacionados.

Del mismo modo, también el truco de cinturón en sí puede extenderse al intercambio. Tome dos hebillas que están conectadas con muchas bandas o hilos, como en la [Figura 64](#) o en la [Figura 65](#). La banda puede conectar las partículas, o ir al infinito espacial, o ambas cosas. Un intercambio de las dos hebillas produce un enredo bastante enmarañado. Pero casi increíblemente, en todos los casos, un segundo intercambio vuelve a la situación original, si las correas están adecuadamente reorganizadas. [Desafío 97 e](#) Es posible que desee probar por sí mismo que el comportamiento también es válido si están involucradas partículas adicionales, siempre y cuando se intercambien siempre las mismas dos partículas dos veces.

**FIGURA 64** Modelos de cinturón extendido para dos partículas de espín 1/2.



**FIGURA 65** Supongamos que las correas no pueden ser observadas,

pero los objetos cuadrados sí se pueden, y que representan partículas. Sabemos que las hebillas con cinturón se comportan como partículas de espín 1/2. La animación muestra que dos partículas de este tipo vuelven a la situación original si se cambian en posición dos veces (pero no una vez). Tales partículas cumplen así la propiedad definitoria de los *fermiones*. (Para el caso opuesto, el de los bosones, un intercambio simple llevaría a la situación idéntica.) Usted puede repetir el truco en casa usando tiras de papel. La equivalencia se muestra aquí con dos correas por partícula, pero el truco funciona con cualquier número positivo de correas unidas a cada hebilla. Esta animación es la parte esencial de la prueba de que espín 1/2 partículas son fermiones. Esto se llama el *teorema espín-estadística*. (QuickTime film © Antonio Martos)

Concluimos que los objetos ligados se comportan como fermiones bajo intercambio. Estas observaciones en conjunto forman el teorema de espín-estadística para espín 1/2 partículas: *el espín y el comportamiento de intercambio están relacionados*. En efecto, estos argumentos casi "experimentales" pueden ser puestos en

lenguaje matemático exacto estudiando el comportamiento del espacio de configuración de las partículas.<sup>ref.82</sup>  
Estos resultados de las indagaciones incluirán las siguientes afirmaciones

- ▷ *Los objetos de espín 1/2 son fermiones.*\*<sup>\*</sup>
- ▷ *El intercambio y la rotación de partículas de espín 1/2 son procesos similares.*

En resumen, los objetos que se comportan como espín 1/2 partículas bajo rotaciones también se comportan como fermiones bajo intercambio. Y viceversa. El comportamiento de intercambio de las partículas determina sus propiedades estadísticas; el comportamiento de rotación determina su espín. Al extender el truco de cinturón a varias hebillas, cada una con varias correas, visualizamos el teorema de espín-estadísticas para los fermiones. Tenga en cuenta que todos estos argumentos requieren tres dimensiones del espacio, porque no hay enredos (o nudos) en menos o más dimensiones.\*<sup>\*</sup> Y de hecho, las rotaciones sólo existen en tres dimensiones espaciales.

El truco del cinturón lleva a puzzles interesantes. Vimos que un objeto espín 1/2 puede ser modelado imaginando un cinturón, que conduce al infinito espacial, unido a él. Si queremos modelar el comportamiento de espín con *cuerdas* unidimensionales adjuntas en lugar de bandas, ¿cuál es el número mínimo de cuerdas que necesitamos? *Desafío 99 s* Más difícil es el siguiente rompecabezas: *Desafío 100 d*  
¿Se puede realizar el truco del cinturón si la hebilla está pegada en un colchón, con lo que el colchón actúa como "infinitos" cinturones?

### ÁNGELES, EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI Y LA DUREZA DE LA MATERIA

¿Por qué somos capaces de llamar a una puerta? ¿Por qué las piedras no pueden volar atravesando los troncos de los árboles? ¿Cómo se sostiene la montaña sobre la que estamos caminando? ¿Por qué no podemos atravesar las paredes? En la física clásica, evitamos esta cuestión, tomando la solidez como una propiedad definitoria de la materia. Pero ya no podemos hacerlo: hemos visto que la materia consiste principalmente en nubes de electrones de baja densidad. Así, el cuanto de acción nos obliga a *explicar* el cuanto de la materia.

La explicación de la impenetrabilidad de la materia es tan importante que condujo a un premio Nobel de física: la interpenetración de cuerpos es imposible por el *principio de exclusión de Pauli* entre los electrones dentro de los átomos. El principio de exclusión de Pauli dice:

- ▷ *Dos fermiones no pueden ocupar el mismo estado cuántico.*

Todos los experimentos conocidos confirman la afirmación.

¿Por qué los electrones y otros fermiones obedecen al principio de exclusión de Pauli? La respuesta se puede dar con un argumento bellamente simple.<sup>ref.83</sup> Sabemos que el intercambio de dos fermiones produce un signo menos en la función de onda total. Imaginemos que estos dos fermiones están, como diría un físico clásico, situados en el mismo lugar, o como diría un físico cuántico, en el mismo estado. Si eso fuera posible, un intercambio no cambiaría nada en el sistema. Pero un intercambio de fermiones debe producir un signo menos para el estado total. Ambas posibilidades - no hay cambio en absoluto, así como un signo menos - no se pueden realizar al mismo tiempo. Sólo hay una salida: dos fermiones deben evitar estar siempre en el mismo estado. Este es el principio de exclusión de Pauli.

El principio de exclusión es la razón por la que dos piezas de materia en la vida cotidiana no pueden penetrarse entre sí, sino que se tienen que *repeler* mutuamente. Por ejemplo, tomemos una campana. Una campana no funcionaría si las piezas que chocan y que producen el sonido se interpenetraran. Pero en cualquier ejemplo de dos piezas que se interpenetraran, los electrones de diferentes átomos tendrían que estar en el mismo lugar: tendrían que estar en los mismos estados. Esto está prohibido. El principio de exclusión de Pauli prohíbe la interpenetración de la materia. Las campanas sólo funcionan debido al principio de exclusión.

\*\* *Desafío 98 e* Un observable matemático que se comporta como una partícula de espín 1/2 no es ni un vector ni un tensor, como usted puede querer comprobar. Se necesita un concepto adicional; tal observable se llama *espinor*. Lo presentaremos en detalle más adelante.

\*\* Por supuesto, los nudos y enredos existen en las dimensiones superiores. En vez de considerar las líneas monodimensionales anudadas, se pueden considerar planos anudados o hiperplanos de mayor dimensión anudados. Por ejemplo, los planos deformables pueden estar anudados en cuatro dimensiones y espacios deformables de tres dimensiones en cinco dimensiones. Sin embargo, las dimensiones efectivas que producen el nudo son siempre tres.

¿Por qué no caemos a través del pavimento, a pesar de que la gravedad nos hace caer, sino que permanecemos de pie en su superficie? Una vez más, la razón es el principio de exclusión de Pauli. ¿Por qué el mismo suelo no cae? No cae, porque la materia de la Tierra no puede interpenetrarse y los átomos no pueden acercarse unos a otros más allá de una distancia mínima. En otras palabras, el principio de exclusión de Pauli no permite que la materia atómica pueda ser comprimida indefinidamente, ya que en un cierto punto aparece una *presión de Pauli* efectiva, de modo que se produce un límite de compresión. Por esta razón, por ejemplo, los planetas hechos de materia atómica -o las estrellas de neutrones, hechas de neutrones que tienen también espín  $\frac{1}{2}$  y que obedecen igualmente el principio de exclusión- no colapsan bajo su propia gravedad.

El principio de exclusión es la razón por la que los átomos son nubes *extensas* de electrones. De hecho, el principio de exclusión obliga a los electrones en átomos a formar conchas o capas. Cuando se añaden electrones a un núcleo y cuando se llena una capa, se inicia una siguiente. Este es el origen del sistema periódico de los elementos.

El tamaño de cualquier átomo es el tamaño de su última capa. Sin el principio de exclusión, los átomos serían tan pequeños como un átomo de hidrógeno. En realidad, la mayor parte de los átomos son considerablemente más grandes. Lo mismo se aplica a los núcleos: su tamaño está dado por la última concha de nucleones. Sin el principio de exclusión, los núcleos serían tan pequeños como un solo protón. De hecho, son aproximadamente 100 000 veces más grandes.

El principio de exclusión también responde a una vieja pregunta: ¿Cuántos *ángeles* pueden bailar en la punta de un alfiler? *Desafío 101 s* (Obsérvese que los ángeles, si los hay, deben estar hechos de fermiones, como se podría deducir de la información conocida sobre ellos, y que la parte superior de un alfiler es un único punto en el espacio.) Tanto la teoría como el experimento confirman la respuesta ya dada por Tomás de Aquino en la Edad Media: ¡Sólo *un* ángel!<sup>ref.84</sup> El principio de exclusión de los fermiones también podría llamarse «principio de exclusión de los ángeles». Para permanecer en el tema, el principio también muestra que los *fantasmas* no pueden ser objetos, ya que se supone que los fantasmas son capaces de atravesar las paredes.

Resumamos. Exagerando un poco, el principio de exclusión mantiene las cosas a nuestro alrededor con forma; sin él, no habría objetos tridimensionales. Sólo el principio de exclusión fija el diámetro de las nubes atómicas, evita que estas nubes de la naturaleza se hundan, y las mantiene separadas. Esta repulsión está en el origen del tamaño del jabón, de los planetas y de las estrellas de neutrones. Todas las formas de sólidos y fluidos son una consecuencia directa del principio de exclusión. En otras palabras, cuando golpeteamos una mesa o una puerta, probamos experimentalmente que ambos objetos están hechos de fermiones.

Hasta ahora, sólo hemos considerado partículas de espín  $\frac{1}{2}$  (fermiones). No hablaremos mucho acerca de sistemas con espín impares de mayor valor, como  $3/2$  o  $5/2$ . Tales sistemas pueden ser vistos como compuestos por entidades espín  $1/2$ . *Desafío 102 e* ¿Puede confirmar esto?

No hablaremos tampoco de espín por debajo de  $1/2$ . Un teorema famoso indica que un valor de espín entre 0 y  $1/2$  es imposible, porque el ángulo más grande que se puede medir en tres dimensiones es  $4\pi$ . No hay manera de medir un ángulo más grande; \*\* el cuánto de la acción lo hace imposible. Por lo tanto, no puede haber ningún valor de espín entre 0 y  $1/2$  en la naturaleza.

### ¿ES EL ESPÍN UNA ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE?

El espín de una partícula se comporta experimentalmente como un momento angular intrínseco, se suma como el momento angular, se conserva como parte del momento angular, se describe como momento angular y tiene un nombre sinónimo de momento angular. A pesar de todo esto, durante muchas décadas un mito extraño y falso se extendió en muchos cursos de física y libros de texto alrededor del mundo: "espín  $1/2$ , a pesar de su nombre, *no* es una rotación sobre un eje".

Es hora de terminar con este ejemplo de pensamiento incorrecto.

Los electrones tienen espín  $1/2$  y están cargados. Los electrones y todas las demás partículas cargadas con espín  $1/2$  tienen un momento magnético.\*\* Se espera un momento magnético para cualquier carga giratoria.

\* Esta declaración, al igual que todas las afirmaciones acerca de espín  $1/2$ , está ligada a la tridimensionalidad del espacio. En dos dimensiones, son posibles otros ángulos mayores y otros valores 'espín'.

\*\* Este momento magnético se puede medir fácilmente en un experimento; sin embargo, no en uno del tipo Stern-Gerlach. *Desafío 103 ny* ¿Por qué no?

En otras palabras, el espín 1/2 se comporta como la rotación. Sin embargo, suponiendo que una partícula consiste en una distribución de carga *continua* en movimiento de rotación se obtiene un valor incorrecto para el momento magnético. En los inicios del siglo XX, cuando los físicos todavía estaban pensando en términos clásicos, llegaron a la conclusión de que las partículas cargadas de espín ½ no pueden girar. Este mito ha sobrevivido a través de muchos libros de texto. La deducción correcta, sin embargo, es que la suposición de distribución de carga continua es incorrecta. De hecho, la carga está cuantizada; nadie espera que la carga elemental se extienda continuamente por el espacio, ya que eso contradice su cuantificación.

La otra razón del falso mito es la rotación misma. El mito se basa en el pensamiento clásico y sostiene que cualquier objeto giratorio debe tener un número de espín *entero*. Dado que el espín de medio entero no es posible en la física clásica, se argumenta que este espín no es debido a la rotación. Pero recordemos lo que es la rotación. Tanto el truco de cinturón para el espín 1/2 como el caso de espín completo nos recuerdan: una rotación de un cuerpo alrededor del otro es una fracción o un múltiplo de un intercambio. Lo que llamamos un cuerpo rotatorio en la vida cotidiana es un cuerpo que cambia continuamente las posiciones de sus componentes. La rotación y el intercambio son lo mismo.

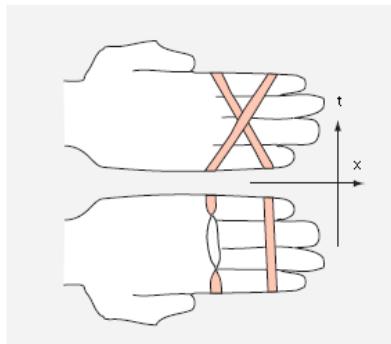
Ahora, apenas habíamos encontramos que precisamente el espín es el comportamiento de intercambio. Dado que la rotación es intercambio y el espín es intercambio, se sigue que

▷ *Espín es rotación.*

Dado que deducimos el espín, como Wigner, de la invariancia de rotación, esta conclusión no es una sorpresa. Además, el modelo de cinturón de una partícula espín 1/2 nos dice que una partícula de este tipo puede girar continuamente sin ningún obstáculo. También el momento magnético entonces adquiere su valor correcto. En resumen, se nos permite mantener que el giro es la rotación alrededor de un eje, sin ninguna contradicción con las observaciones, incluso para el espín 1/2.

En síntesis, el modelo de cinturón muestra que también el espín 1/2 es rotación, siempre que supongamos que sólo se puede observar la hebilla, no la (s) correa (s), y que la carga elemental no se distribuye continuamente en el espacio.\*ref.85\*

**FIGURA 66** Equivalencia de intercambio y rotación en el espacio-tiempo.



Dado que las propiedades de permutación y las propiedades espín de los fermiones están tan bien descritas por el modelo del cinturón, podríamos llegar a la conclusión de que estas propiedades habrían de ser realmente consecuencia de tales conexiones tipo cinturón entre las partículas y el mundo exterior.

Tal vez por alguna razón sólo observamos las hebillas del cinturón, no las correas mismas. En la parte final de esta caminata vamos a descubrir si esta idea es correcta.

### LA ROTACIÓN REQUIERE ANTIPARTÍCULAS

La conexión entre la rotación y las antipartículas puede ser la conclusión más sorprendente de los experimentos que muestran la existencia de espín. Hasta ahora, hemos visto que la rotación requiere la existencia del espín, que el espín aparece cuando la relatividad se introduce en la teoría cuántica, y que la relatividad requiere antimateria. Tomando estas tres declaraciones en conjunto, la conclusión del título ya no es sorprendente: la rotación requiere antipartículas. Curiosamente, hay un argumento simple que hace el mismo punto con el modelo de cinturón, si se extiende desde el espacio solo al *espacio-tiempo* completo.

Para aprender a pensar en el espacio-tiempo, tomemos una partícula y reduzcámosla a dos breves colas, de modo que la partícula sea un breve segmento de línea. Cuando se mueve en un espacio-tiempo de 2 + 1

\*\* Obviamente, la estructura exacta del electrón sigue siendo *poco clara* en este punto. Cualquier momento angular  $S$  es dado clásicamente por  $S = \Theta\omega$ ; Sin embargo, ni el momento de inercia  $\Theta$ , conectado al radio de rotación y la masa de electrones, ni la velocidad angular  $\omega$  son conocidos en este punto. Tenemos que esperar un buen rato, hasta la parte final de nuestra aventura, para saber más.

dimensiones, se describe mediante una cinta. Jugar con cintas en el espacio-tiempo, en lugar de cinturones en el espacio, ofrece muchas conclusiones interesantes. Por ejemplo, la Figura 66 muestra que envolver una cinta de caucho alrededor de los dedos puede demostrar, de nuevo, que una rotación de un cuerpo en  $2\pi$  en presencia de un segundo cuerpo es lo mismo que intercambiar las posiciones de los dos cuerpos.\* Ambos lados de la mano transforman la misma condición inicial, en un borde de la mano, a la misma condición final en el otro borde. De este modo, hemos extendido exitosamente un resultado conocido del espacio al espacio-tiempo: la rotación y el intercambio son equivalentes.

Si piensa que la Figura 66 no es una explicación satisfactoria, tiene razón. Una explicación más satisfactoria debe incluir una secuencia regular de pasos realizando la equivalencia entre la rotación y el intercambio. Esto se muestra en la Figura 67. Asumimos que cada partícula es descrita por un segmento; en la figura, los dos segmentos se encuentran horizontalmente. El diagrama más a la izquierda muestra dos partículas: una en reposo y otra en rotación de  $2\pi$ . La deformación de las cintas muestra que este proceso es equivalente al intercambio en posición de dos partículas, que se muestra en el diagrama más a la derecha.

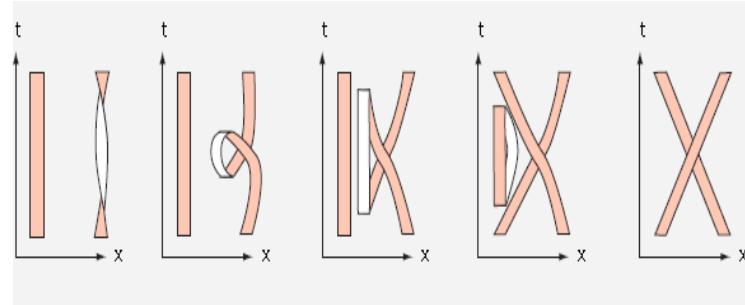


FIGURA 67 Cinturones en espacio-tiempo:  
rotación y antipartículas.

Pero el punto esencial lo hacen los diagramas intermedios. Observamos que la secuencia que muestra la equivalencia entre la rotación y el intercambio requiere el uso de un lazo. ¡Pero tal lazo en espacio-tiempo describe la apariencia de un par de partícula-antipartícula! En otras palabras, sin antipartículas, la equivalencia de rotación e intercambio no se mantendría. En resumen, la rotación en el espacio-tiempo requiere la existencia de antipartículas.

### ¿POR QUÉ ES IMPOSIBLE LA ESGRIMA CON RAYOS LÁSER?

Cuando una espada se acerca peligrosamente, podemos detenerla con una segunda espada. Muchas películas viejas usan tales escenas. Cuando un rayo láser se acerca, es imposible rechazarlo con un segundo haz, a pesar de que todas las películas de ciencia ficción lo muestran así. Golpear dos rayos láser uno contra otro es imposible. La explicación anterior del teorema espín-estadística muestra por qué.

Los electrones de las espadas son fermiones y obedecen al principio de exclusión de Pauli. Los fermiones hacen la materia impenetrable. Por otro lado, los fotones en los rayos láser son bosones. Dos bosones pueden estar en el mismo estado; los bosones permiten la interpenetración. La materia es impenetrable porque en el nivel fundamental está compuesta de fermiones. La radiación está compuesta de bosones; los rayos de luz pueden cruzarse entre sí. La distinción entre fermiones y bosones explica por qué los objetos pueden ser tocados mientras que las imágenes no pueden serlo. En la primera parte de nuestro ascenso de montaña empezamos notando esta diferencia; ahora sabemos su origen.

### ESPÍN, ESTADÍSTICAS Y COMPOSICIÓN

Bajo rotaciones, las partículas espín entero se comportan de forma diferente a las partículas de espín semientero. Las partículas espín entero no muestran los extraños cambios de signo bajo rotaciones de  $2\pi$ . En el imaginario cinturón, las partículas de espín entero no necesitan de ningún vínculo. En particular, una partícula espín 0 corresponde obviamente a una esfera. Los modelos para otros valores espín importantes se muestran en la Figura 68. Explorando sus propiedades de la misma manera que arriba, llegamos al *teorema espín -estadística* completo o *teorema de la correspondencia entre espín y estadística*:

- ▷ *Intercambio y rotación de objetos son procesos similares.*

---

\*<sup>\*\*</sup>Obviamente, el argumento completo tendría que comprobar el modelo completo espín  $\frac{1}{2}$  de la Figura 62 en el espacio-tiempo cuatridimensional. *Desafío 105 ny* Pero hacer esto no es una tarea fácil; Todavía no hay una buena visualización.

- ▷ Los objetos de espín semientero son fermiones. Obedecen al principio de exclusión de Pauli.
- ▷ Los objetos de espín entero son bosones.

**Desafío 106 e** Puede probar por sí mismo que esto basta para mostrar la siguiente regla:

- ▷ Los compuestos de bosones, así como los compuestos de un número par de fermiones (a baja energía), son bosones; Los compuestos de un número impar de fermiones son fermiones.\*

Estas conexiones expresan características básicas del mundo tridimensional en el que vivimos.

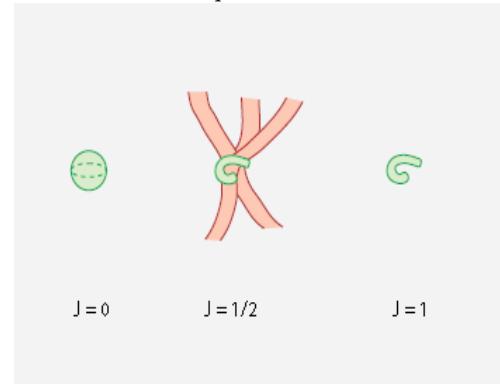


FIGURA 68 Algunas visualizaciones de representaciones de espín.

### LAS DIMENSIONES Y LA DENSIDAD DE LA MATERIA

Las tres dimensiones espaciales tienen muchas consecuencias para los sistemas físicos. Sabemos que toda la materia está hecha de fermiones, como los electrones, protones y neutrones. El principio de exclusión tiene una consecuencia interesante para los sistemas hechos de N fermiones *idénticos*; tales sistemas obedecen a la expresión:

$$\Delta p \cdot \Delta l \leq \sqrt{3} \cdot N \hbar \quad (64-b)$$

**Desafío 106-b** ¿Puede derivarlo? Esta *relación de indeterminación* proporciona un modo sencillo para estimar las dimensiones espaciales de los sistemas de materia. En particular, la relación de indeterminación extendida implica que la energía media por cuantón aumenta con la densidad de los cuantones. **Desafío 106-c** ¿Puede demostrarlo?

La relación de indeterminación extendida implica que los sistemas de materia cuya extensión es debida a los electrones -y por lo tanto, todos los sistemas de materia condensada- esencialmente tienen densidad de materia y energía similares. La relación de indeterminación extendida implica también que los núcleos, que están compuestos de protones y neutrones, tienen todos la misma densidad de materia.

Para los bosones, y los componentes de la radiación, no hay relación de indeterminación extendida puesto que el número de componentes N en un estado cuántico particular no tienen ningún efecto o límite. La relación de indeterminación por lo tanto no limita la densidad de potencia de la luz láser; de hecho, la densidad de potencia de los rayos láser varía mucho más que la densidad de la materia sólida.

La relación pone en evidencia una ulterior diferencia entre materia y radiación. Un sistema de N bosones idénticos, por ejemplo un haz láser, obedece a una indeterminación entre el número y la fase que se deriva fácilmente a partir de la relación de indeterminación energía-tiempo. La relación fase número puede ser escrita, aproximadamente, como

$$\Delta N \cdot \Delta \varphi \geq 1 \quad (64-c)$$

Esta relación es importante en el uso de láseres en los experimentos de precisión. La relación limita cómo un sistema puede llegar a una onda sinusoidal pura; de hecho, para una onda sinusoidal pura, el producto de indeterminación sería cero.

Para los fermiones, donde el número máximo en el mismo estado es 1, la relación de incertidumbre de fase-número se reduce a una incertidumbre total en la fase. En otras palabras, no podemos tener haces de fermiones que se comporten como ondas. No hay ondas de fermiones clásicos en la naturaleza.

\***Desafío 107 ny** \*Esta regla implica que espín 1 y superior también se puede lograr *con colas*; ¿Puede usted encontrar tal representación?

Obsérvese que los fermiones compuestos pueden ser bosones sólo hasta esa energía en la cual la composición se descompone. De lo contrario, al empaquetar fermiones en bosones, podríamos tener fermiones en el mismo estado.

## UN RESUMEN SOBRE EL ESPÍN Y LA INDISTINGUIBILIDAD

El cuanto de acción implica que los sistemas físicos están formados por dos tipos de partículas cuánticas indistinguibles: los *bosones* y los *fermiones*. Los dos posibles comportamientos de intercambio están relacionados con el valor de espín de las partículas, porque el intercambio está relacionado con la rotación. La conexión entre el espín y la rotación implica la existencia de antipartículas. También implica que el espín es intrínsecamente un fenómeno tridimensional.

Los experimentos muestran que la radiación está hecha de partículas elementales que se comportan como bosones. Los bosones tienen espín entero. Dos o más bosones, como dos fotones, pueden *compartir el mismo estado*. Esta compartición hace que la luz láser sea posible.

Los experimentos muestran que la materia está hecha de partículas elementales que se comportan como fermiones. Los fermiones tienen un espín semientero. Obedecen al principio de exclusión de Pauli: dos fermiones *no pueden estar en el mismo estado*. El principio de exclusión entre electrones explica la estructura y (en parte) el tamaño de los átomos, así como el comportamiento químico de los átomos, como veremos más adelante. Junto con la repulsión electrostática de electrones, el principio de exclusión explica la incompresibilidad de la materia y su falta de impenetrabilidad.

Los fermiones hacen que la materia sea 'dura', los bosones permiten que los haces de luz se entrecruzen.

## LÍMITES Y PREGUNTAS ABIERTAS DE LA ESTADÍSTICA CUÁNTICA

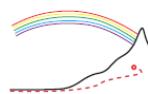
El tema de las estadísticas de partículas cuánticas sigue siendo un campo de investigación en física teórica y experimental. En particular, los investigadores han buscado y siguen buscando generalizaciones de los posibles comportamientos de intercambio de partículas.

En dos dimensiones espaciales, el resultado de un intercambio de la función de onda no es descrito por un signo sino por una fase continua. Los objetos cuánticos bidimensionales se llaman «*anyons*»\* porque pueden tener 'cualquier' espín. Los anyons aparecen como quasi-partículas en varios experimentos en la física del estado sólido, porque la disposición es a menudo realmente bidimensional.

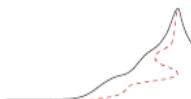
*El efecto Hall cuántico fraccionario*, tal vez el descubrimiento más interesante de la física experimental moderna, ha empujado a los «anyones» hacia el escenario de la investigación moderna.

Otros teóricos generalizaron el concepto de fermiones de otras maneras, introduciendo los parafermiones, parabosones, plektones y otros conceptos hipotéticos. <sup>ref.86</sup> Oscar Greenberg ha pasado la mayor parte de su vida profesional trabajando sobre este tema. Su conclusión es que en un espacio-tiempo de 3 + 1 dimensiones, existen sólo fermiones y bosones. (*Desafío 108 s* ¿Puede demostrar que esto implica que los fantasmas que aparecen en los cuentos escoceses no existen?)

Desde un punto de vista diferente, el modelo del cinturón de espín 1/2 invita a estudiar el comportamiento de trenzas, lazos abiertos y nudos. (En matemáticas, las trenzas y los lazos abiertos están hechos de cuerdas que se extienden hasta el infinito.) Esta fascinante parte de la física matemática se ha vuelto importante con las modernas teorías unificadas, que afirman que las partículas, especialmente a altas energías, no son entidades puntuales sino entidades extensas. La misión es entender lo que sucede con la simetría de permutación en una teoría unificada de la naturaleza. Un vistazo de las dificultades ya aparece arriba: ¿cómo se pueden conciliar y combinar las *Figuras 57, 62 y 67*? Vamos a resolver este problema en la parte final de nuestro ascenso de montaña.



\*Nota del traductor: No confundir con anión. Un anyon es una generalización del concepto de bosones y fermiones; es un tipo de partícula que se encuentra únicamente en sistemas de dos dimensiones, como el grafeno.



## SUPERPOSICIONES Y PROBABILIDADES – TEORÍA CUÁNTICA SIN IDEOLOGÍA

The fact that an adequate philosophical presentation has been so long delayed is no doubt caused by the fact that Niels Bohr brainwashed a whole generation of theorists

into thinking that the job was done fifty years ago. Murray Gell-Mann <sup>ref.87</sup>

*El hecho de que una presentación filosófica adecuada se haya demorado tanto está, sin duda, causada por el hecho de que Niels Bohr lavó el cerebro a toda una generación de teóricos para que pensaran que el trabajo fue hecho hace cincuenta años.*

**P**or qué esta famosa cuestión física suscita emociones tan fuertes? En particular, ¿quién había hecho el lavado de cerebro, Gell-Mann, el descubridor de los quarks, o la mayoría de los físicos del mundo que trabajan en la teoría cuántica y que siguen la opinión de Niels Bohr?

En el siglo XX, la mecánica cuántica ha lanzado a muchos a la confusión. La mecánica cuántica no nos es familiar por dos razones: permite *superposiciones* y conduce a *probabilidades*. Vamos a explorar y aclarar estos dos temas.

Superposiciones y probabilidades aparecen porque el cuanto de acción cambió radicalmente los dos conceptos más básicos de la física clásica: estado y sistema. El *estado* ya no se describe por los valores específicos tomados de posición y cantidad de movimiento, sino por la función de onda específica 'tomada' de los operadores de posición y cantidad de movimiento.\* Ademáis, en la física clásica se describió un *sistema* como un conjunto de aspectos permanentes de la naturaleza; la permanencia se define como una interacción insignificante con el medio ambiente. La mecánica cuántica muestra que esta definición también tiene que ser modificada.

Es esencial aclarar la aparición de las superposiciones, del origen de las probabilidades y de los conceptos de estado y sistema. Queremos evitar perdernos en nuestro camino hacia la cima de la Montaña del Movimiento, como le sucedió a un buen número de personas desde que apareció la teoría cuántica, incluyendo a Gell-Mann.

### ¿POR QUÉ LAS PERSONAS ESTÁN VIVAS O MUERTAS?

La ecuación de evolución de la mecánica cuántica es *lineal* en la función de onda; la linealidad refleja la existencia de superposiciones. Por lo tanto, podemos imaginar e intentar construir sistemas donde el estado  $\psi$  es una superposición de dos situaciones radicalmente distintas, como las de un gato muerto y de un gato vivo. Este famoso animal de ficción se llama *gato de Schrödinger* por el creador del ejemplo. ¿Es posible reproducirlo? ¿Y cómo evolucionaría en el tiempo? Podemos hacer las mismas dos preguntas en otras situaciones. Por ejemplo, ¿podemos producir una superposición de un estado donde un coche está dentro de un garaje cerrado con un estado donde el coche está afuera? ¿Qué pasa entonces?

**FIGURA 69** La impresión de un artista de una superposición macroscópica es imposible. *Desafío 109 s*

Cada "impresión artística" está equivocada.  
 (¿Por qué?)

Tales situaciones extrañas no suelen observarse en la vida cotidiana. La razón de esta excepcionalidad es un aspecto importante de lo que a menudo se llama la "interpretación" de la mecánica cuántica. En realidad,

\*\*Es equivalente, pero quizás conceptualmente más claro, decir que el estado es descrito por un conjunto completo de operadores que commutan. De hecho, la discusión es algo simplificada en el cuadro de Heisenberg. Sin embargo, aquí estudiamos la cuestión en la imagen de Schrödinger, utilizando las funciones de onda.

tales situaciones extrañas son posibles, y la superposición de estados macroscópicamente distintos se ha observado en algunos casos, aunque no para gatos, personas o coches. Para tener una idea de las restricciones, vamos a especificar la situación con más detalle.\*

### SUPERPOSICIONES MACROSCÓPICAS, COHERENCIA E INCOHERENCIA

El objeto de la discusión son superposiciones lineales del tipo  $\psi = a\psi_a + b\psi_b$ , donde  $\psi_a$  y  $\psi_b$  son estados macroscópicamente distintos del sistema en discusión, y donde  $a$  y  $b$  son algunos coeficientes complejos. Los estados se denominan *macroscópicamente distintos* cuando cada estado corresponde a una situación macroscópica diferente, es decir, cuando los dos estados se pueden distinguir usando los conceptos o métodos de medición de la física clásica. En particular, esto significa que la acción física necesaria para transformar un estado en el otro debe ser mucho mayor que  $\hbar$ . Por ejemplo, dos posiciones diferentes de un cuerpo compuesto por un gran número de moléculas son macroscópicamente distintas.

Por tanto, una superposición de estados macroscópicamente distintos es una situación "extraña". Resumamos claramente la esencia de tales superposiciones macroscópicas. Dado dos estados macroscópicamente distintos  $\psi_a$  y  $\psi_b$ , una superposición del tipo  $\psi = a\psi_a + b\psi_b$  se denomina *estado puro*. Puesto que los estados  $\psi_a$  y  $\psi_b$  pueden interferir, también se habla de una *superposición coherente (de fase)*. En el caso de una superposición de estados macroscópicamente distintos, el producto escalar  $\psi_a^\dagger \psi_b$  es obviamente cero. En el caso de una superposición coherente, el producto del coeficiente  $a^* b$  es diferente de cero. Este hecho también puede expresarse con la ayuda de la *matriz de densidad*  $\rho$  del sistema, definida como  $\rho = \psi \otimes \psi^\dagger$ . En el presente caso,

$$\begin{aligned} \rho_{\text{pure}} &= \psi \otimes \psi^\dagger = |a|^2 \psi_a \otimes \psi_a^\dagger + |b|^2 \psi_b \otimes \psi_b^\dagger + a b^* \psi_a \otimes \psi_b^\dagger + a^* b \psi_b \otimes \psi_a^\dagger = \\ &= (\Psi_a, \Psi_b) \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^* b & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_a^\dagger \\ \Psi_b^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

Podemos decir entonces que siempre que el sistema esté en un estado puro o coherente, entonces su matriz de densidad, o *densidad funcional*, contiene términos fuera de la diagonal del mismo orden de magnitud que los diagonales\*\*. Esta matriz de densidad corresponde a estas situaciones extrañas que no observamos en la vida diaria. Ahora demos una mirada a la situación opuesta, una matriz de densidad para estados macroscópicos distintos con elementos fuera de la diagonal que son cero. Para dos estados, el ejemplo

$$\rho_{\text{mixed}} = |a|^2 \psi_a \otimes \psi_a^\dagger + |b|^2 \psi_b \otimes \psi_b^\dagger = (\Psi_a, \Psi_b) \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_a^\dagger \\ \Psi_b^\dagger \end{pmatrix} \quad (67)$$

describe un sistema que *no* posee ninguna coherencia de fase en absoluto. (Aquí,  $\otimes$  denota el producto diádico no commutativo o producto tensorial que produce un tensor o matriz a partir de dos vectores). Dicha matriz de densidad diagonal no puede ser la de un estado puro; la matriz de densidad describe un sistema que está en el estado  $\psi_a$  con probabilidad  $|a|^2$  y que está en el estado  $\psi_b$  con probabilidad  $|b|^2$ . Dicho sistema se dice que está en un *estado mixto*, porque su estado *no se conoce*, o equivalentemente, está en una *superposición incoherente (de fase)*, porque los efectos de interferencia no pueden ser observados en tal situación. Un sistema descrito por un estado mixto siempre está en el estado  $\psi_a$  o en el estado  $\psi_b$ . En otras palabras, una matriz de densidad diagonal para estados macroscópicamente *distintos* no está en contraste, sino de acuerdo con la experiencia cotidiana. En la imagen de las matrices de densidad, los elementos no diagonales contienen la diferencia entre superposiciones normales, es decir, incoherentes y las superposiciones inusuales, es decir, coherentes.

\*\* La mayor parte de lo que se puede decir sobre este tema ha sido dicho por dos personas: John von Neumann, quien en los años treinta hizo hincapié en las diferencias entre la evolución y la decoherencia,<sup>ref.88</sup> y por Hans Dieter Zeh, quien en los años setenta subrayó la importancia de los baños y del ambiente en el proceso de decoherencia.<sup>ref.89</sup>

\*\* Usando la matriz de densidad, podemos reescribir la ecuación de evolución de un sistema cuántico:

$$\dot{\psi} = -iH\psi \quad \text{se convierte en} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho] \quad (66)$$

Ambos son completamente equivalentes. (La nueva expresión a veces también se llama la *ecuación de von Neumann*.) En realidad, no haremos cálculos aquí. Las expresiones se dan para que las reconozca cuando las encuentre en otra parte.

La situación experimental está clara: para los estados macroscópicamente distintos, (casi) sólo se observan matrices de densidad diagonal en la vida cotidiana. Casi todos los sistemas en una superposición macroscópica coherente de alguna manera pierden sus elementos de matriz fuera de la diagonal. ¿Cómo ocurre este proceso de *decoherencia*\*? La propia matriz de densidad muestra el camino.

### LA DECOHERENCIA SE DEBE A LOS BAÑOS

En termodinámica, la matriz de densidad para un sistema grande se utiliza para la definición de su entropía y de todas sus otras magnitudes termodinámicas.<sup>ref.90</sup> *Desafío 110 ny* Estos estudios muestran que

$$S = -k \operatorname{tr} (\rho \ln \rho) \quad (68)$$

Donde  $\operatorname{tr}$  denota la *traza*, es decir, la suma de todos los elementos diagonales. También recordamos que un sistema con entropía grande y constante se denomina *baño*. En términos físicos simples, un baño es un sistema al que podemos atribuir una temperatura. Más precisamente, un *baño (físico)*, o *reservorio (termodinámico)*, es cualquier sistema grande para el cual se pueda definir el concepto de *equilibrio*. Los experimentos muestran que en la práctica, esto es equivalente a la condición de que un baño consista en muchos subsistemas que interactúan. Por esta razón, todas las cantidades macroscópicas que describen el estado de un baño muestran pequeñas *fluctuaciones irregulares*, una propiedad que será de importancia central en breve.

Un baño cotidiano es también un baño físico: de hecho, un baño termodinámico es similar a un baño de agua tibia extremadamente grande, uno para el cual la temperatura no cambia aunque se le añada un poco de agua fría o caliente. Ejemplos de baños físicos son un campo magnético intenso, una gran cantidad de gas, o un sólido grande. (El significado de “intenso” y “grande” naturalmente depende del sistema estudiado). El concepto físico de baño (o reservorio, o depósito) es, por lo tanto, una abstracción y una generalización del concepto cotidiano de baño.

Es fácil ver a partir de la definición (68) de la entropía que la pérdida de elementos fuera de la diagonal corresponde a un aumento de la entropía. Y se sabe que cualquier aumento de entropía de un sistema reversible, tal como el sistema mecánico cuántico en cuestión, se debe a una interacción con un baño.

### *Desafío 111 s*

En resumen, la *decoherencia se debe a la interacción con un baño*. Ahora demostraremos que los baños están por todas partes, que la decoherencia tiene lugar por todas partes y en todo momento, y que por lo tanto, las superposiciones macroscópicas (casi) nunca son observadas.

### CÓMO LOS BAÑOS CONDUCEN A LA DECOHERENCIA - DISPERSIÓN

¿Dónde está interactuando el baño con un sistema típico? El baño debe estar fuera del sistema del que se habla, es decir, en su *entorno*. De hecho, sabemos experimentalmente que un entorno típico es grande y está caracterizado por una temperatura. Algunos ejemplos se enumeran en la *Tabla 6*. Cualquier ambiente, por lo tanto, es un baño. Incluso podemos ir más lejos: para cada situación experimental, hay un baño *interactuando* con el sistema bajo estudio. En efecto, todo sistema que se puede observar no está aislado, ya que obviamente interactúa al menos con el observador; y cada observador por definición contiene un baño, como mostraremos con más detalle en breve.

Por lo general, sin embargo, los baños más importantes que tenemos que tener en cuenta son la atmósfera alrededor de un sistema, la radiación o campos electromagnéticos que interactúan con el sistema, o, si el sistema mismo es lo suficientemente grande como para tener una temperatura, aquellos grados de libertad que no están implicados en la superposición objeto de investigación.

Puesto que cada sistema está en contacto con un baño, cada matriz de densidad de una superposición macroscópica perderá eventualmente sus elementos diagonales. A primera vista, esta dirección del pensamiento no es convincente. Las interacciones de un sistema con su entorno pueden hacerse extremadamente pequeñas usando configuraciones experimentales inteligentes; eso implicaría que el tiempo para la decoherencia puede hacerse muy grande. Por lo tanto, tenemos que comprobar cuánto tiempo necesita una superposición de los estados para ser decoherente. Resulta que hay dos formas estándar de estimar el *tiempo de decoherencia*: Ya sea modelando el baño como gran número de partículas que colisionan, o

---

\*\* En ciertos contextos, la decoherencia se denomina *disentanglement (desentrañamiento)*, como veremos más adelante.

modelándolo como un campo continuo.

**TABLA 6** Baños comunes y menos comunes con sus propiedades principales.

Tipo de baño	Temperatura <i>T</i>	Longitud de onda $\lambda_{\text{eff}}$	Flujo de partículas $\varphi$	Sección transversal (átomo) $\sigma$	Tiempo de impacto $1/\sigma\varphi$ para átomo <sup>a</sup> bola <sup>a</sup>
<b>Baños de materia</b>					
Sólido, líquido	300K	10 pm	$10^{31} \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-19} \text{ m}^2$	$10^{-12}\text{s } 10^{-25} \text{ s}$
aire	300K	10 pm	$10^{28} \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-19} \text{ m}^2$	$10^{-9}\text{s } 10^{-22} \text{ s}$
Vacío de laboratorio	50mK	10 $\mu\text{m}$	$10^{18} \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-19} \text{ m}^2$	$10 \text{ s } 10^{-12} \text{ s}$
<b>Baños de fotones</b>					
Luz del Sol	5800K	900nm	$10^{23} \text{ /m}^2\text{s}$		$10^{-4}\text{s } 10^{-17} \text{ s}$
oscuridad	300K	20 $\mu\text{m}$	$10^{21} \text{ /m}^2\text{s}$		$10^{-2}\text{s } 10^{-15} \text{ s}$
Fondo cósmico de microondas	2.7K	2mm	$10^{17} \text{ /m}^2\text{s}$		$10^2\text{s } 10^{-11} \text{ s}$
Ondas de radio terrestres efecto Casimir					Muy grande
Radiación Unruh de la Tierra	40 zK				Muy grande
<b>Baños de radiación nuclear</b>					
radiaoactividad		10 fm	$1 \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-25} \text{ m}^2$	$10^{25}\text{s } 10^{12} \text{ s}$
Radiación cósmica	>1000K	10 fm	$10^{-2} \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-25} \text{ m}^2$	$10^{27}\text{s } 10^{14} \text{ s}$
Neutrinos solares	$\approx 10\text{MK}$	10 fm	$1011 \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-47} \text{ m}^2$	$10^{36}\text{s } 10^{15} \text{ s}$
Neutrinos cósmicos	2,0K	3mm	$10^{17} \text{ /m}^2\text{s}$	$10^{-62} \text{ m}^2$	$10^{45}\text{s } 10^{24} \text{ s}$
<b>Baños gravitacionales</b>					
Radiación gravitacional	$5 \cdot 10^{31}\text{K}$	$10^{-35} \text{ m}$			Muy grande

a. Los valores son estimados. La esfera macroscópica se asume que tiene un tamaño de 1mm

Si el baño se describe como un conjunto de partículas que golpean al azar al sistema microscópico, se caracteriza mejor por la longitud de onda efectiva  $\lambda_{\text{eff}}$  de las partículas y por el intervalo medio  $t_{\text{hit}}$  entre dos impactos. [Desafío 112 ny](#). Un cálculo directo demuestra que el tiempo de decoherencia  $t_d$  es en todos los casos inferior a este intervalo de tiempo de modo que

$$t_d \leq t_{\text{hit}} = \frac{1}{\varphi \sigma} \quad (69)$$

donde  $\varphi$  es el flujo de partículas y  $\sigma$  la sección transversal para el impacto. Los valores típicos se dan en la [Tabla 6](#). Notamos fácilmente que para los objetos macroscópicos, los tiempos de decoherencia son extremadamente cortos. (También observamos que los efectos nucleares y gravitacionales conducen a grandes tiempos de decoherencia y por lo tanto pueden ser despreciados)\*. La dispersión conduce a una

*decoherencia rápida de los sistemas macroscópicos.*

Sin embargo, para los átomos o sistemas más pequeños, la situación es diferente, como se esperaba.

Observamos que el cuanto de acción  $\hbar$  aparece en la expresión para el tiempo de decoherencia, tal como aparece en el área  $\sigma$ . La decoherencia es un proceso cuántico.

### CÓMO LOS BAÑOS CONDUCEN A LA DECOHERENCIA - RELAJACIÓN

Un segundo método para estimar el tiempo de decoherencia es también común. Cualquier interacción de un sistema con un baño se describe por un tiempo de relajación  $t_r$ . El término *relajación* designa cualquier proceso que conduce al retorno al estado de equilibrio. Los términos *amortiguación* y *fricción* también se utilizan. En el presente caso, el tiempo de relajación describe el retorno al equilibrio de la combinación del baño y del sistema. La relajación es un ejemplo de una evolución irreversible.

Un proceso se llama *irreversible* si el proceso inverso, en el cual cada componente se mueve en dirección opuesta, es de muy baja probabilidad.\* \*\*

Por ejemplo, es usual que un vaso de vino que se vierte en un tazón de agua coloree el agua entera; muy raramente se observa que el vino y el agua se separan de nuevo, ya que la probabilidad de que todas las moléculas de agua y vino cambien de dirección al mismo tiempo es bastante baja, un estado de cosas que hace la felicidad de los productores y la desesperación de los consumidores de vino.

Ahora vamos a simplificar la descripción del baño. Lo aproximamos por un campo escalar único, no especificado, que interactúa con el sistema cuántico. Debido a la continuidad del espacio, este campo tiene una infinidad de grados de libertad. Se les considera un modelo de los muchos grados de libertad del baño. Se supone que el campo está en un estado inicial donde sus grados de libertad son excitados en una forma descrita por una temperatura  $T$ . La interacción del sistema con el baño, que está en el origen del proceso de relajación, se puede describir mediante la transferencia repetida de pequeñas cantidades de energía  $E_{hit}$  hasta que se completa el proceso de relajación.

Los objetos de interés en esta discusión, como el gato, la persona o el coche mencionados, se describen por una masa  $m$ . Su característica principal es la energía máxima  $E_r$  que puede ser transferida del sistema al ambiente. Esta energía describe las interacciones entre el sistema y el ambiente. Las superposiciones de estados macroscópicos que nos interesan son soluciones de la evolución hamiltoniana de estos sistemas.

La coherencia inicial de la superposición, tan perturbadora en contraste con nuestra experiencia cotidiana, desaparece exponencialmente dentro de un *tiempo de decoherencia*  $t_d$  dado por<sup>ref.93\*</sup>\*

$$t_d = t_r \frac{E_{hit}}{E_r} \frac{e^{E_{hit}/KT} - 1}{e^{E_{hit}/KT} + 1} \quad (73)$$

Donde  $k$  es la *constante de Boltzmann* y como arriba,  $E_r$  es la energía máxima que puede ser transferida del sistema al ambiente. Tenga en cuenta que uno siempre tiene  $t_d \leq t_r$ .

\* El tiempo de decoherencia se deriva estudiando la evolución de la matriz densidad  $\rho(x, x')$  de objetos localizados en dos puntos  $x$  y  $x'$ . Se cree que los elementos fuera de la diagonal siguen  $\rho(x, x', t) = \rho(x, x', 0)e^{-\Lambda t((x, x')^2)}$ , donde la tasa de localización  $\Lambda$  está dada por

$\Lambda = k^2 \varphi \sigma_{eff}$  (72) donde  $k$  es el número de onda,  $\varphi$  el flujo y  $\sigma_{eff}$  la sección trasversal de la colisión, es decir, por lo general el tamaño del objeto macroscópico.<sup>ref.91</sup>

También se encuentra el sorprendente resultado de que un sistema golpeado por una partícula de energía  $E_{hit}$  colapsa, la matriz de densidad de alrededor de la longitud de onda de De Broglie (o longitud térmica de Broglie) de las partículas que golpean. Ambos resultados en conjunto dan la fórmula anterior.<sup>ref.92</sup>

\* Tenga cuidado con otras definiciones que intentan hacer algo más profundo del concepto de irreversibilidad, como las afirmaciones de que "irreversible" significa que el proceso invertido no es en absoluto posible. Muchas de las llamadas «contradicciones» entre la irreversibilidad de los procesos y la reversibilidad de las ecuaciones evolutivas se deben a esta interpretación equivocada del término «irreversible».

\*\*\*Este resultado se deriva como en el caso anterior. Un sistema que interactúa con un baño siempre tiene una evolución dada por la forma general<sup>ref.94</sup>  $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] - \frac{1}{2t_0} \sum_j [V_j \rho, V_j^T] + [V_j, \rho V_j^T]$ , (71)

Donde  $\rho$  es la matriz de densidad,  $H$  el hamiltoniano,  $V$  la interacción, y al tiempo característico de la interacción. *Desafío 113 ny* ¿Puede ver por qué? Resolviendo esta ecuación, se encuentra para los elementos lejos de la diagonal  $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/t_0}$ . En otras palabras, desaparecen con un tiempo característico. En la mayoría de las situaciones se tiene una relación de la forma

$t_0 = t_r E_{hit} / E_r = t_{hit}$  O algunas variaciones de la misma, como en el ejemplo anterior.

Después de transcurrido el tiempo de decoherencia  $t_d$ , el sistema ha evolucionado desde la superposición de estados coherentes a incoherentes, o, en otras palabras, la matriz de densidad ha perdido sus términos fuera de la diagonal. También se dice que la coherencia de fase de este sistema ha sido destruida.

Así, después de un tiempo  $t_d$ , el sistema se encuentra en el estado  $\psi_a$  o en el estado  $\psi_b$ , respectivamente con la probabilidad  $|a|^2$  o  $|b|^2$ , y ya no más en una superposición coherente que estaría en contradicción con nuestra experiencia diaria. El estado final que es seleccionado depende del estado preciso del baño, cuyos detalles fueron eliminados del cálculo tomando una *media* sobre los estados de sus constituyentes microscópicos.

El resultado importante es que para todos los objetos macroscópicos, el tiempo de decoherencia  $t_d$  es extremadamente pequeño. Para ver esto con mayor claridad, podemos estudiar un caso especial simplificado. Se supone que un objeto macroscópico de masa  $m$ , como el gato o coche mencionados, está al mismo tiempo en dos lugares separados por una distancia  $l$ , es decir, en una superposición de los dos estados correspondientes. Supongamos además que la superposición es debida al objeto en movimiento como un oscilador mecánico cuántico con frecuencia  $\omega$  entre las dos localizaciones; Este es el sistema más simple posible que muestra superposiciones de un objeto situado en dos posiciones diferentes. La energía del objeto es dada entonces por  $E_r = m\omega^2 l^2$ , y la más pequeña transferencia de energía  $E_{hit} = \hbar\omega$  es la diferencia entre los niveles del oscilador. En una situación macroscópica, esta última energía es mucho menor que  $kT$ , de modo que a partir de la expresión precedente obtenemos<sup>ref.95</sup>

$$t_d = t_r \frac{E_{hit}^2}{2 E_r kT} = t_r \frac{\hbar^2}{2 mkTl^2} = t_r \frac{\lambda_T^2}{l^2} \quad (74)$$

en la que la frecuencia  $\omega$  ha desaparecido. La cantidad  $\lambda_T = \hbar / (2mkT)^{1/2}$  se llama la *longitud de onda térmica de Broglie* de una partícula.

Observemos de nuevo que el cuanto de acción  $\hbar$  aparece en la expresión para el tiempo de decoherencia. La decoherencia es un proceso cuántico.

Es fácil ver que para prácticamente todos los objetos macroscópicos el típico tiempo de decoherencia  $t_d$  es extremadamente corto. Por ejemplo, poniendo  $m = 1$  g,  $l = 1\text{mm}$  y  $T = 300\text{K}$  obtenemos  $t_d / t_r = 1,3 \cdot 10^{-39}$ . Incluso si la interacción entre el sistema y el entorno fuera tan débil que el sistema tuviera como tiempo de relajación la edad del universo, que es aproximadamente  $4 \cdot 10^{17}$  s, el tiempo  $t_d$  todavía sería más breve que  $5 \cdot 10^{-22}$  s, Que es más de un millón de veces más rápido que el tiempo de oscilación de un haz de luz (alrededor de 2 fs para la luz verde). Para el gato de Schrodinger, el tiempo de decoherencia sería aún más corto. Estos tiempos son tan cortos que ni siquiera podemos esperar *preparar* la superposición inicial coherente, y mucho menos observar su decadencia o medir su vida útil.

Sin embargo, para los sistemas microscópicos, la situación es diferente. Por ejemplo, para un electrón en un sólido enfriado a la temperatura del helio a líquido, tenemos  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, y típicamente  $l = 1\text{ nm}$  y  $T = 4\text{ K}$ ; obtenemos ahora  $t_d \approx t_r$  y por lo tanto el sistema puede permanecer en una superposición coherente hasta que se relaje, lo que confirma que para este caso se pueden observar efectos coherentes si el sistema se mantiene aislado. Un ejemplo típico es el comportamiento de electrones en materiales superconductores.<sup>ref.96</sup> Mencionaremos algunos más abajo.

En 1996 la primera medida real del tiempo de decoherencia fue publicada por un equipo de París dirigido por Serge Haroche.<sup>ref.97</sup> Confirmó la relación entre el tiempo de decoherencia y el tiempo de relajación, mostrando así que los dos procesos tienen que ser distinguidos a escala microscópica. Mientras tanto, otros experimentos confirmaron el proceso de decoherencia con su ecuación de evolución, tanto para valores pequeños como grandes de  $t_d / t_r$ .<sup>ref.98</sup> Un experimento particularmente hermoso se realizó en 2004, donde se observó la desaparición de la interferencia de doble rendija para las moléculas de  $C_{70}$  cuando un baño interactúa con ellas.<sup>ref.99</sup>

## RESUMEN SOBRE DECOHERENCIA, VIDA Y MUERTE

Nuestra exploración demostró que la *decoherencia resulta del acoplamiento con un baño en un ambiente*. La decoherencia es un efecto estadístico, termodinámico. La decoherencia se deriva de la teoría cuántica y ha sido confirmada experimentalmente.

Las estimaciones de los tiempos de decoherencia en la vida cotidiana nos dijeron que tanto la preparación

como la supervivencia de superposiciones de estados macroscópicamente diferentes se hace imposible por la interacción con cualquier baño que se encuentre en el ambiente. Este es el caso incluso si la medida habitual de esta interacción, dada por la fricción del movimiento del sistema, es muy pequeña. Incluso si un sistema macroscópico está sujeto a una fricción extremadamente baja, lo que conduce a un tiempo de relajación muy largo, su tiempo de decoherencia es aún muy corto. Sólo los sistemas de laboratorio cuidadosamente diseñados y caros pueden alcanzar tiempos de decoherencia sustanciales.

Nuestro ambiente cotidiano está lleno de baños. Por lo tanto, las *superposiciones coherentes de estados macroscópicamente distintos nunca aparecen en la vida cotidiana*. Los coches no pueden entrar y salir de un garaje al mismo tiempo. Y no podemos estar muertos y vivos al mismo tiempo. De acuerdo con la explicación, las superposiciones coherentes de los estados macroscópicos aparecen en algunas situaciones especiales de laboratorio.

### ¿QUÉ ES UN SISTEMA? ¿QUÉ ES UN OBJETO?

En física clásica, un sistema es una parte de la naturaleza que puede ser aislada de su entorno.

Sin embargo, la mecánica cuántica nos dice que los sistemas aislados no existen, ya que las interacciones no pueden hacerse desaparecer. La contradicción se puede resolver con los resultados anteriores: nos permiten definir el concepto de sistema con mayor precisión.

▷ Un *sistema* es cualquier parte de la naturaleza que interactúa *incoherentemente* con su entorno.

En otras palabras:

▷ Un *objeto* es una parte de la naturaleza que interactúa con su entorno sólo a través de baños.

En particular, obtenemos

▷ Un sistema se llama *microscópico o mecánico cuántico* y se puede describir por una función de onda  $\psi$  cuando

— Está casi aislado, con  $t_{\text{evol}} = \hbar / \Delta E < t_r$ , y

— Está en interacción *incoherente* con su entorno. ref.100

En resumen, un sistema microscópico o mecánico cuántico puede ser descrito por una función de onda solamente si interactúa de forma incoherente y débilmente con su entorno. (Para un sistema de este tipo, la indeterminación de energía  $\Delta E$  es mayor que la energía de relajación.) Por el contrario, un baño nunca se aísla en el sentido dado, ya que el tiempo de evolución de un baño es siempre mucho mayor que su tiempo de relajación. Puesto que todos los cuerpos macroscópicos están en contacto con los baños - o incluso contienen uno - no pueden ser descritos por una función de onda. En particular, es imposible describir cualquier aparato de medición con la ayuda de una función de onda.

De este modo concluimos:

▷ Un *sistema macroscópico* Es un sistema con un tiempo de decoherencia más corto que cualquier otro tiempo de evolución de sus constituyentes.

Obviamente, los sistemas macroscópicos también interactúan incoherentemente con su entorno. Así, los gatos, los coches y los locutores de noticias de televisión son todos sistemas macroscópicos.

Una posibilidad se deja entre las dos definiciones: ¿qué ocurre en la situación en la que las interacciones con el entorno son *coherentes*? En breve encontraremos algunos ejemplos. Siguiendo la definición, no son ni sistemas microscópicos ni macroscópicos.

▷ Un «sistema» en el que la interacción con su entorno es coherente se denomina *correlacionado o entrelazado*.

Tales "sistemas" no son descritos por una función de onda, y estrictamente hablando, no son sistemas. En estas situaciones, cuando la interacción es coherente, se habla de *correlación o entrelazamiento*. Por ejemplo, se dice que una partícula o conjunto de partículas está *entrelazada* con su entorno.

Los sistemas entrelazados y que interactúan coherente mente se pueden dividir, pero deben desentrelazarse al hacerlo. El acto de división conduce a entidades separadas; las entidades separadas interactúan incoherentemente. La teoría cuántica demuestra que la naturaleza no está hecha de entidades separadas, sino que está hecha de entidades *separables*. En la teoría cuántica, el criterio de separación es la incoherencia de la interacción. Las superposiciones coherentes implican la sorprendente consecuencia de que hay sistemas

que, aunque parecen estar hechos de partes separadas, no lo están. La correlación supone un límite para la separación. Todas las propiedades sorprendentes de la mecánica cuántica, como el gato de Schrödinger, son consecuencias del prejuicio clásico de que un sistema hecho de dos o más partes puede obviamente desprenderse en dos subsistemas sin perturbación. Pero las superposiciones coherentes, o sistemas entrelazados, no permiten la separación sin perturbación. Cada vez que asumimos ser capaces de separar sistemas entrelazados obtenemos conclusiones extrañas o no correctas, como por ejemplo, propagación aparente más veloz que la de la luz, o, como se dice hoy, comportamiento no local. Echemos una ojeada a algunos ejemplo típicos.

Las situaciones entrelazadas se observan en muchos experimentos. Por ejemplo, cuando un electrón y un positrón se aniquilan en dos fotones, las polarizaciones de estos dos fotones están entrelazadas, como se midió ya en 1949. También cuando un átomo excitado se descompone en etapas, emitiendo dos fotones, las polarizaciones de los fotones están entrelazadas, mostrada por primera vez en 1966 con la ayuda de los átomos de calcio. De manera similar, cuando la molécula en un estado singlete, es decir, en un estado espín cero, se desintegra, los espines de los desechos están entrelazados, como se observó en los años setenta. Además, la conversión paramétrica espontánea de fotones produce entrelazamiento. Cuando, en un material óptico no lineal, un fotón se convierte en dos fotones cuyas energías añadidas corresponden a la energía del fotón original, los dos fotones se entrelazan tanto en su polarización como en su dirección. En 2001, los espines de dos muestras de gas de cesio extremadamente frías, con millones de átomos cada una y localizadas a pocos milímetros de distancia han sido entrelazadas. También se ha observado regularmente entrelazamiento de posición, por ejemplo, para iones estrechamente espaciados en el interior de trampas iónicas.

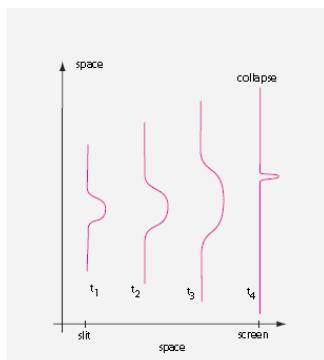
### ¿ES LA TEORÍA CUÁNTICA NO LOCAL? UN POCO SOBRE LA PARADOJA EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN

[Mr. Duffy] lived a little distance away from his body ... James Joyce, *A Painful Case* (*Un caso doloroso*)  
 [El señor Duffy] vivía a poca distancia de su cuerpo

A menudo se sugiere, incorrectamente, que el colapso de la función de onda o la teoría cuántica son no locales.\* El problema necesita aclaración.

Empezamos imaginando un electrón golpeando una pantalla después de pasar una rendija. Siguiendo la descripción que acabamos de deducir, el proceso de colapso procede esquemáticamente como se representa en la Figura 70. Una película del mismo proceso -inspirado en el experimento ideado por Bohm- se puede ver en las esquinas inferiores izquierdas en estas páginas, a partir de la página 105. El proceso tiene un aspecto sorprendente: debido al corto tiempo de decoherencia, durante este (y cualquier otro) colapso de la función de onda el máximo de la función de onda por lo general cambia la posición más rápidamente que la luz. ¿Es esto razonable?

Una situación se denomina *acausal* o *no local* si la energía se transporta más rápidamente que la luz. *Desafío 114 s* Usando la Figura 70 se puede determinar la velocidad de la energía involucrada, utilizando los resultados sobre la propagación de la señal. El resultado es un valor menor que c. Un máximo de función de onda que se mueve más rápido que la luz *no* implica que la energía se mueva más rápido que la luz.



**FIGURA 70** Movimiento mecánico cuántico: una función de onda electrónica (en realidad su módulo al cuadrado) desde el momento en que pasa una hendidura hasta que llega a una pantalla.

En otras palabras, la teoría cuántica contiene velocidades mayores que la luz, pero ninguna velocidad de energía mayor que la luz.<sup>ref.101</sup> En la electrodinámica clásica, lo mismo sucede con el escalar y los potenciales vectoriales si se utiliza el indicador de Coulomb. También hemos encontrado

\* Esto continúa un tema que ya conocemos: hemos explorado un tipo diferente de no-localidad, en la relatividad general, antes.

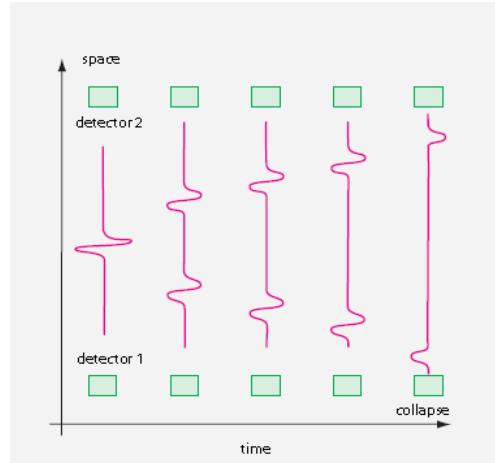
velocidades más rápidas que la de la luz en el movimiento de las sombras y en muchas otras observaciones. Cualquier físico ahora tiene dos opciones: puede ser correcto, y decir que no hay no-localidad en la naturaleza; o puede ser menos correcto, y afirmar que existe. En este último caso, debe afirmar que incluso la física clásica no es local. Sin embargo, nadie osa afirmar esto. Por otra parte, existe un peligro en este uso más provocador del término ‘no local’: un pequeño porcentaje de los que dicen que el mundo es no local después de un tiempo empiezan a creer que realmente en la naturaleza hay transportes de energía más rápidos que la luz. Estas personas se vuelven prisioneras de su pensamiento confuso. Por otra parte, el pensamiento confuso ayuda a leer más fácilmente en los periódicos. En resumen, aunque la definición de no-localidad no es unánime, aquí nos atenemos a la más estricta, y definimos la no-localidad como transporte de *energía* más rápido que la luz.

Un experimento mental a menudo citado que muestra los peligros de la no-localidad fue propuesto por Bohm \*\* en la discusión alrededor de la así llamada paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen. <sup>ref.103</sup> En el famoso documento EPR los tres autores tratan de encontrar una contradicción entre la mecánica cuántica y el sentido común. Bohm tradujo su artículo bastante confuso a un claro experimento mental. Se muestra esquemáticamente en la Figura 71. Cuando dos partículas en un estado espín 0 se separan, medir la orientación espín de una partícula implica un colapso *inmediato* también del espín de la otra partícula, es decir, en la dirección exactamente opuesta.

Esto ocurre instantáneamente en toda la distancia de separación; no se obedeció ningún límite de velocidad. En otras palabras, el entrelazamiento parece conducir a una comunicación más rápida que la luz.

Sin embargo, en el experimento de Bohm, ninguna energía es transportada más rápidamente que la luz. Ninguna no-localidad está presente, a pesar de numerosas afirmaciones de lo contrario por ciertos autores. Los dos electrones entrelazados pertenecen a un único sistema: suponer que están separados sólo porque la función de onda tiene dos máximos distantes es un error conceptual. De hecho, no se puede transmitir ninguna señal con este método; la decoherencia es un caso de predicción que parece una señal sin serlo. El experimento de Bohm, como cualquier otro experimento de tipo EPR, no permite la comunicación más rápida que la luz. Ya hemos discutido estos casos en la sección sobre electrodinámica.

**FIGURA 71** Experimento pensado de Bohm.



El experimento de Bohm se ha realizado efectivamente. La primera y más famosa realización se debió, en 1982, a Alain Aspect; utilizó fotones en vez de electrones. <sup>ref.104</sup> Como todas las últimas pruebas, ha confirmado plenamente la mecánica cuántica.

De hecho, experimentos como el de Aspect confirman que es imposible tratar a cualquiera de las dos partículas como un sistema por sí mismo; es imposible atribuir ninguna propiedad física, como una orientación de espín, a cualquiera de ellas. (La imagen de Heisenberg expresaría esta restricción aún más claramente). Sólo los dos electrones juntos forman un sistema físico, debido a que sólo la pareja interactúa incoherente con el medio ambiente.

Los dos ejemplos mencionados de aparente no-localidad pueden ser descartados con la observación de que, puesto que obviamente no hay flujo de energía más rápido que la luz, no aparecen problemas con la causalidad. Por lo tanto, el siguiente ejemplo es más interesante. Tome dos átomos idénticos, uno en estado excitado, otro en estado fundamental, y llame  $l$  a la distancia que los separa. El sentido común dice que si el primer átomo vuelve a su estado fundamental emitiendo un fotón, el segundo átomo sólo puede excitarse después de transcurrido un tiempo  $t = l/c$ , es decir, después de que el fotón ha viajado al segundo átomo.

\*\* David Joseph Bohm (1917-1992) físico americano-británico. Ha descubierto el efecto Aharonov-Bohm; pasó gran parte de su vida posterior investigando las conexiones entre la física cuántica y la filosofía.

Sorprendentemente, esta conclusión es errónea. El átomo en su estado fundamental tiene una probabilidad no nula de excitarse en el mismo momento en que el primero está desexcitado. Esto ha sido demostrado más simplemente por Gerhard Hegerfeldt.<sup>ref.105</sup> Este resultado también ha sido confirmado experimentalmente.

Estudios más cuidadosos muestran que el resultado depende del tipo de superposición de los dos átomos en el inicio: coherente o incoherente. Para superposiciones incoherentes, el resultado intuitivo es correcto; el resultado contra-intuitivo aparece sólo para superposiciones coherentes. Una vez más, una discusión cuidadosa muestra que ninguna verdadera no localidad de la energía está involucrada.

En resumen, las velocidades más rápidas que la luz en el colapso de la función de onda no contradicen el límite de la velocidad de la energía de la relatividad especial. Las velocidades de colapso son velocidades de fase. En la naturaleza, las velocidades de fase son ilimitadas; las velocidades de fase ilimitadas nunca implican un transporte de energía más rápido que la luz. Además, recuperamos el resultado de que los sistemas físicos se definen claramente sólo si interactúan incoherentemente con su entorno.

#### CURIOSIDADES Y DIVERTIDOS DESAFÍOS ACERCA DE SUPERPOSICIONES

*Desafío 115 s* ¿Puede una fotografía mostrar un objeto en dos lugares diferentes al mismo tiempo?

\* \*

En algunos casos, la superposición de diferentes estados macroscópicos puede observarse realmente bajando la temperatura a valores suficientemente pequeños y escogiendo cuidadosamente las masas o distancias adecuadamente pequeñas. Dos ejemplos bien conocidos de superposiciones coherentes son los observados en los detectores de ondas gravitacionales y en las uniones de Josephson.<sup>ref.95</sup> En el primer caso se observa una masa tan pesada como 1000 kg en una superposición de estados situados en diferentes puntos del espacio: la distancia entre ellos es del orden de  $10^{-17}$  m. En el segundo caso, en los anillos superconductores, se han producido superposiciones de un estado en el que una corriente macroscópica del orden de 1 pA fluye en el sentido de las agujas del reloj con una que fluye en sentido contrario a las agujas del reloj.<sup>ref.106</sup>

\* \*

También se han observado superposiciones de magnetización en dirección ascendente y descendente al mismo tiempo para diversos materiales.<sup>ref.107</sup>

\*\*

Algunas personas afirman erróneamente que un átomo que está en una superposición de estados centrados en diferentes posiciones ha sido fotografiado. (Esta falsedad es usada por algunas sectas para atraer creyentes) *Desafío 116 s* ¿Por qué no es verdad?

\* \*

Desde los años noventa, el deporte de encontrar y jugar con nuevos sistemas en superposiciones macroscópicas coherentes ha despegado en todo el mundo.<sup>ref.108</sup> Los Desafíos se encuentran en los limpios experimentos necesarios. Los experimentos con átomos individuales en superposiciones de estados se encuentran entre los más populares.<sup>ref.109</sup>

\*\*

En 1997, ondas atómicas coherentes fueron extraídas de una nube de átomos de sodio.<sup>ref.110</sup>

\* \*

Los objetos macroscópicos por lo general se encuentran en estados incoherentes. Esta es la misma situación que para la luz. El mundo está lleno de luz "macroscópica", es decir, luz incoherente: la luz del día, y toda la luz de las lámparas, del fuego y de los gusanos de luz es incoherente. Sólo fuentes muy especiales y cuidadosamente construidas, como el láser o fuentes puntuales pequeñas, emiten luz coherente. Sólo estas fuentes permiten el estudio de los efectos de interferencia. De hecho, los términos 'coherente' e 'incoherente' se originaron en la óptica, ya que para la luz la diferencia entre los dos, a saber, la capacidad de interferir, había sido observada siglos antes que en el caso de la materia.

La coherencia y la incoherencia de la luz y de la materia se manifiestan de manera diferente porque la materia puede permanecer en reposo, pero la luz no puede y porque la materia está hecha de fermiones, mientras que la luz está hecha de bosones. La coherencia se puede observar fácilmente en sistemas compuestos por bosones, como la luz, el sonido en los sólidos, o pares de electrones en los superconductores. La coherencia se observa menos fácilmente en los sistemas de fermiones, como los sistemas de átomos con sus nubes de electrones. Sin embargo, en ambos casos se puede definir un tiempo de decoherencia. En

ambos casos se observa la coherencia en muchos sistemas de partículas mejor si todas las partículas están en el mismo estado (la superconductividad, la luz láser) y en ambos casos la transición desde coherente a incoherente se debe a la interacción con un baño. Un rayo es, por tanto incoherente si sus partículas llegan al azar en tiempo y en frecuencia. En la vida cotidiana, la rareza de la observación de superposiciones coherentes en la materia tiene el mismo origen que la rareza de la observación de la luz coherente.

\* \*

Vamos a discutir la relación entre el entorno y el *decaimiento* de los sistemas inestables más adelante. El fenómeno se describe completamente por los conceptos que se dan aquí.

\* \*

*Desafío 117 ny* ¿Puede encontrar un método para medir el *grado* de correlación? ¿Puede hacerlo para un sistema compuesto de muchas partículas?

\* \*

*Desafío 118 ny* El estudio del entrelazamiento conduce a una simple conclusión: el *teletransporte* contradice el entrelazamiento. ¿Puede confirmar la afirmación?

\* \*

*Desafío 119 s* ¿Son ejemplos de interferencia las imágenes fantasma en televisores, a menudo debido a reflexiones espurias?

\*\*

*Desafío 119bis s*. Las imágenes fantasma en la televisión, a menudo debido a reflejos falsos, ¿son ejemplos de interferencia?

\* \*

*Desafío 120 d* ¿Qué sucede cuando dos electrones monocromáticos se superponen?

\* \*

Algunas personas dicen que la teoría cuántica podría ser utilizada para la computación cuántica, mediante el uso de superposiciones coherentes de las funciones de onda.<sup>ref.111</sup> *Desafío 121 s* ¿Puede dar una razón general que hace que este objetivo sea muy difícil -aunque no imposible- incluso sin saber cómo podría funcionar un ordenador cuántico o qué podrían ser los llamados *qubits*?

### ¿POR QUÉ APARECEN EN LAS MEDICIONES LAS PROBABILIDADES Y COLAPSO DE LA FUNCIÓN DE ONDA?

Las mediciones de la mecánica cuántica también son desconcertantes porque conducen a los estados en los que aparecen las *probabilidades*. Por ejemplo, se habla de la probabilidad de encontrar un electrón a una cierta distancia desde el núcleo de un átomo. Este tipo de declaraciones pertenecen al tipo general “cuando se mide el observable A, la probabilidad de encontrar el resultado *a* es *p*”. Enseguida vamos a demostrar que las probabilidades en tales declaraciones son inevitables para cualquier medición, ya que, como veremos, (1) cualquier medida y cualquier observación es un caso especial de la decoherencia o proceso de entrelazamiento y (2) todos los procesos de decoherencia implican el cuanto de acción. (Históricamente, el proceso de medición se estudió *antes* de que el proceso más general de la decoherencia. Eso explica en parte por qué el argumento es tan confuso en las mentes de muchas personas.)

¿Qué es una medida? Como ya se mencionó anteriormente, una medición es cualquier interacción que produce un registro o una memoria. (Cualquier efecto de la vida cotidiana es un registro, pero esto no es cierto en general. *Desafío 122 s* ¿Puede dar algunos ejemplos de efectos que son registros y algunos efectos que no lo son?) Las mediciones pueden ser realizadas por máquinas; cuando son realizadas por personas, se llaman *observaciones*. En la teoría cuántica, el proceso de medición no es tan sencillo como en la física clásica. Esto se ve más sorprendentemente cuando un sistema cuántico, como un solo electrón, primero se hace pasar una rendija de difracción, o mejor - para hacer evidente su aspecto de onda - una doble rendija y luego se hace golpear una placa fotográfica, para hacer también aparecer su aspecto de partícula. El experimento muestra que el punto ennegrecido, el punto donde el electrón ha golpeado la pantalla, no se puede determinar de antemano. (Lo mismo es cierto para los fotones o cualquier otra partícula.)

Sin embargo, para un gran número de electrones, la distribución espacial de los puntos negros, el llamado *patrón de difracción*, se puede calcular con antelación con alta precisión.

El resultado de los experimentos sobre sistemas microscópicos nos obliga a utilizar probabilidades para la descripción de microsistemas. Encontramos que la distribución de probabilidad *p* (*x*) de los puntos en la placa fotográfica se puede calcular a partir de la función de onda  $\psi$  del electrón en la superficie de la pantalla

y está dada por  $p(x) = |\psi(x)\psi(x)|^2$ . Este es, de hecho, un caso especial de la *primera propiedad general de las mediciones cuánticas*:

- ▷ La medición de un observable A para un sistema en un estado  $\psi$  da como resultado uno de los autovalores  $a$ , y la probabilidad  $P_n$  para obtener el resultado  $a_n$  está dada por

$$P_n = |\phi_n^\dagger \psi|^2, \quad (75)$$

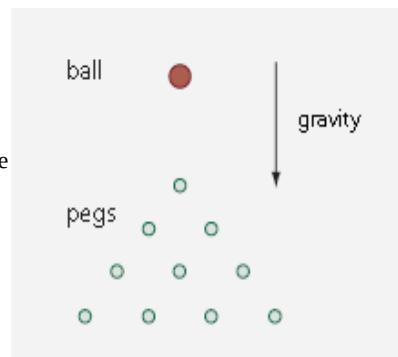
Donde  $\phi_n$  es la función propia del operador A correspondiente al valor propio  $a_n$ .\*

Los experimentos también muestran *una segunda propiedad de las mediciones cuánticas*:

- ▷ Despues de una medición, el sistema cuántico observado está en el estado  $\phi_n$  correspondiente al valor propio medido  $a_n$ . También se dice que durante la medición, la función de onda ha colapsado de  $\psi$  a  $\phi_n$ .<sup>ref.112</sup>

Estas dos propiedades experimentales también pueden generalizarse en casos generales con autovalores degenerados y continuos.

**FIGURA 72** Un sistema que muestra el comportamiento probabilístico: bola que cae a través de una matriz de clavijas.



Obviamente, estos resultados experimentales requieren una explicación. A primera vista, el tipo de probabilidades encontradas en la teoría cuántica son diferentes de las probabilidades que encontramos en la vida cotidiana. Tomemos la ruleta, los dados, el sistema mostrado en la Figura 72, las máquinas pachinko (similar al pinballs) o la dirección en la que cae un lápiz sostenido en su punta: todos han sido medidas experimentalmente resultando ser aleatorios (suponiendo que no hay engaño por parte del diseñador u los operadores) con un alto grado de precisión. Estos sistemas cotidianos no nos engañan. Supusimos inconscientemente que el resultado aleatorio es debido a las variaciones pequeñas, pero incontrolables de las condiciones de partida o del ambiente cada vez que se repite el experimento.\*

Ahora bien, los sistemas microscópicos parecen ser diferentes. Las dos propiedades de las mediciones cuánticas que acabamos de mencionar expresan lo que los físicos observan en cada experimento, incluso si las condiciones iniciales se toman para que sean *exactamente* las mismas cada vez. Pero, ¿por qué no es predecible la posición de un solo electrón, o la mayoría de los otros observables de los sistemas cuánticos?

En otras palabras, ¿qué sucede durante el colapso de la función de onda? ¿Cuánto dura el colapso? En el comienzo de la teoría cuántica, hubo la percepción de que la impredecibilidad observada se debe a la falta de información sobre el estado de la partícula. Esto llevó a muchos a buscar las llamadas 'variables ocultas'. Sin embargo, todos estos intentos estaban condenados al fracaso. Llevó algún tiempo el que la comunidad científica se diera cuenta de que la imprevisibilidad *no* se debe a la *falta* de información sobre el estado de la partícula, que de hecho se describe *completamente* por el vector de estado  $\psi$ .

Para descubrir el origen de las probabilidades, recordemos la naturaleza de una medida, o mejor, de una observación general. *Cualquier observación es la producción de un registro*. El registro puede ser una memoria visual o auditiva en nuestro cerebro, o un registro escrito en papel, o una grabación en cinta, o cualquier tipo de objeto. Como se explicó en el volumen anterior, un objeto es un registro si no puede haber surgido o desaparecido por casualidad. Para evitar la influencia del azar, todos los registros tienen que ser

---

\*\* Todas las transformaciones lineales transforman algunos vectores especiales, llamados *eigenvectores* o vectores propios (de la palabra alemana *eigen* que significa 'auto') en múltiplos de sí mismos. En otras palabras, si  $T$  es una transformación, e un vector, y  $T(e) = \lambda e$  (76)

Donde  $\lambda$  es un escalar, entonces el vector  $e$  se llama un *autovector* (*Eigenvector*) de  $T$ , y  $\lambda$  se asocia al valor propio. El conjunto de todos los valores propios de una transformación  $T$  se denomina *espectro* de  $T$ .

\* \* Para tener una idea de las limitaciones de estos supuestos inconscientes, es posible que desee leer la ya mencionada historia de los físicos que construyeron una máquina que podía predecir el resultado de una bola de ruleta a partir de la velocidad inicial impartida por el croupier.

protegidos tanto como sea posible del mundo exterior; p. ej., típicamente se ponen los archivos en edificios seguros contra terremotos con protección contra incendios, se mantienen los documentos en un lugar seguro, se evitan lesiones cerebrales tanto como sea posible, etc.

Además de esto, los registros tienen que ser protegidos de sus fluctuaciones *internas*. Estas fluctuaciones internas se deben a los muchos componentes de que está hecho cualquier dispositivo de grabación. Si las fluctuaciones fueran demasiado grandes, harían imposible distinguir entre los posibles contenidos de una memoria. Ahora bien, las fluctuaciones disminuyen con el tamaño creciente de un sistema, típicamente con la raíz cuadrada del tamaño. Por ejemplo, si una escritura manual es demasiado pequeña, es difícil de leer si el papel se vuelve frágil; si las pistas magnéticas en las cintas son demasiado pequeñas, se desmagnetizan y pierden la información almacenada. En otras palabras, un registro se hace estable frente a las fluctuaciones internas haciéndolo de tamaño suficiente. Cada registro consta así de muchos componentes y muestra pequeñas fluctuaciones.

La importancia del tamaño puede expresarse de otra manera: cada sistema con memoria, es decir, cada sistema capaz de producir un registro, contiene un *baño*. En síntesis, la afirmación de que cualquier observación es la producción de un registro se puede expresar más precisamente como:

*Cualquier observación de un sistema es el resultado de una interacción entre ese sistema y un baño en el aparato de grabación.*\*<sup>\*\*</sup>

Además, cualquier observación que mida una cantidad física utiliza una interacción *dependiente* de esa misma cantidad. Con estas observaciones aparentemente triviales, podemos describir con más detalle el proceso de observación, o, como suele llamarse en la teoría cuántica, el proceso de medida.

Cualquier *aparato* de medida, o *detector*, se caracteriza por dos aspectos que se muestran en la Figura 73:<sup>ref.113</sup> La interacción que tiene con el sistema microscópico, y el baño que contiene para producir el registro. Cualquier descripción del proceso de medición es, por lo tanto, la descripción de la evolución del sistema microscópico y del detector; así pues se necesita el Hamiltoniano para la partícula, el Hamiltoniano de la interacción , y las propiedades del baño (como el tiempo de relajación  $t_r$ ). La interacción específica que se mide y el baño producen la memoria.

Sabemos que sólo los sistemas termodinámicos clásicos pueden ser irreversibles; los sistemas cuánticos no lo son. Por lo tanto concluimos: un sistema de medición *debe* ser descrito clásicamente: de lo contrario no tendría memoria y no sería un sistema de medición: ¡no produciría un registro! La memoria es un efecto clásico. (Más precisamente, la memoria es un efecto que sólo aparece en el límite clásico.) Sin embargo, veamos qué sucede si describimos el sistema de medida mecánico-cuántico.

Llamemos  $A$  al observable que se mide en el experimento y sus funciones propias  $\varphi_n$ . Describimos el sistema cuántico mecánico bajo observación - a menudo una partícula - por un estado  $\psi$ . El estado completo del sistema puede escribirse siempre como

$$\psi = \psi_p \psi_{\text{other}} = \sum_n c_n \varphi_n \psi_{\text{other}}. \quad (77)$$

Aquí,  $\psi_p$  es el aspecto del estado (partícula o sistema) que queremos medir, y  $\psi_{\text{other}}$  representa todos los otros grados de libertad, es decir, aquellos no descritos – *medidos*, en lenguaje matemático – por el operador  $A$  correspondiente al observable que queremos medir. Los números  $c_n = |\varphi_n \psi_p|$  dan la expansión del estado  $\psi_p$ , que se toma para ser normalizado, en términos de la base  $\varphi_n$ . Por ejemplo, en una medición de la posición típica, las funciones  $\varphi_n$  serían funciones propias de posición y  $\psi_{\text{other}}$  deben contener la información sobre la cantidad de movimiento, el espín y todas las demás propiedades de la partícula.

¿A qué se asemeja a la interacción sistema - detector? Llamamos al estado del aparato previo a la medida  $\chi_{\text{start}}$ . El mismo aparato de medición, por definición, es un dispositivo que, cuando es golpeado por una partícula en el estado  $\varphi_n \psi_{\text{other}}$ , pasa del estado  $\chi_{\text{start}}$  al estado  $\chi_n$ . Se dice entonces que el aparato ha *medido* el autovalor  $a_n$  correspondiente a la autofunción  $\varphi_n$  del operador  $A$ . El índice  $n$  es así la grabación de la medida; se le llama índice *puntero* o variable. Este índice nos dice en qué estado el sistema microscópico estaba antes de la interacción.

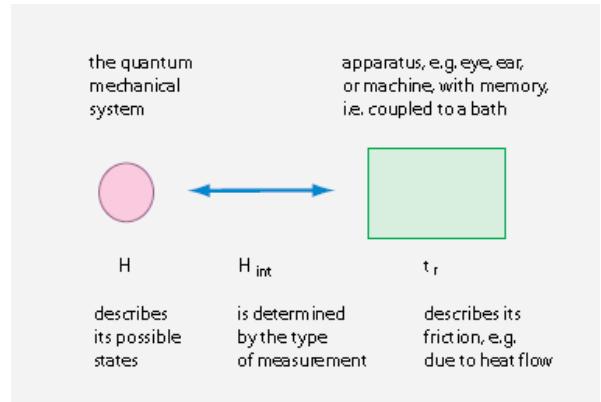
\* Dado que los baños implican fricción, también podemos decir que la memoria necesita de la fricción.

\*\* ¿Cómo aparece la interacción matemáticamente? A partir de la descripción que acabamos de dar, especificamos el estado final para cada estado inicial. Dado que las dos matrices de densidad están ligadas por  $\rho_f = T\rho_i T^\dagger$  (78) podemos deducir el hamiltoniano de la matriz  $T$ . *Desafío 123 ny* ¿Puede ver cómo?

Por otro lado, se puede decir en general que un aparato que mide un observable  $A$  tiene un hamiltoniano de interacción del sistema que depende de la variable puntera  $A$ , y para el cual se tiene:  $[H + H_{\text{int}}, A] = 0$ . (79)

El punto importante, extraído de nuestra discusión precedente, es que los estados  $\chi_n$ , siendo registros, son macroscópicamente distintos, precisamente en el sentido de la sección anterior. De lo contrario no serían grabaciones, y la interacción con el detector no sería una medida.

**FIGURA 73** Los conceptos usados en la descripción de las medidas.



Por supuesto, durante la medida, el aparato sensible a  $\varphi_n$  cambia la parte  $\psi_{other}$  del estado de la partícula de alguna otra situación  $\psi_{other,n}$ , que depende de la medida y del aparato; no tenemos necesidad de especificarlo en la discusión que sigue.\*\* Pero buscamos tener un control

intermedio de nuestro razonamiento. ¿Existen aparatos como los que hemos descrito? Sí, los hay. Por ejemplo, cualquier placa fotográfica es un detector de la posición de las partículas ionizantes. Una placa, y en general cualquier aparato que mide la posición, hace esto cambiando su cantidad de movimiento en una forma dependiente de la posición medida: los electrones en una placa fotográfica son detenidos. En este caso,  $\chi_{start}$  es una placa blanca  $\varphi_n$  sería una partícula localizada en un punto  $n$ ,  $\chi_n$  es la función que describe una placa ennegrecida en el punto  $n$  y  $\psi_{other,n}$  describe la cantidad de movimiento y el espín de la partícula después que haya golpeado la placa fotográfica en el punto  $n$ .

Ahora estamos listos para ver el proceso de medición en sí. Por el momento, no tengamos en cuenta el baño en el detector, y vamos a describirlo con un estado también, que llamamos  $\chi_{start}$ . En el tiempo antes de la interacción entre la partícula y el detector, el sistema combinado (incluido el detector) estaba en el estado inicial  $\psi_i$  dado simplemente por

$$\psi_i = \psi_p \chi_{start} = \sum_n c_n \varphi_n \psi_{other,n} \chi_{start}, \quad (80)$$

Donde  $\psi_p$  es el estado (partícula o sistema). Después de la interacción, usando las características conocidas experimentalmente del aparato, el estado combinado  $\psi_a$  es

$$\psi_a = \sum_n c_n \varphi_n \psi_{other,n} \chi_n. \quad (81)$$

Esta evolución de  $\psi_i$  a  $\psi_a$  se deriva de la ecuación de evolución aplicada a la combinación de partículas y detector. Ahora, el estado combinado  $\psi_a$  es una superposición de estados macroscópicamente distintos: es una superposición de estados macroscópicos distintos del detector. En nuestro ejemplo  $\psi_a$  podría corresponder a una superposición de un estado en el que un punto en la esquina superior izquierda está ennegrecido en una placa por otra parte blanca con otro estado donde un punto en la esquina inferior derecha de la placa por otra parte blanca está ennegrecido. Tal situación nunca se observa. Veamos por qué.

La matriz de densidad  $\rho_a$  del estado combinado  $\psi_a$  después de la medición, dada por

$$\rho_a = \psi_a \otimes \psi_a^\dagger = \sum_{n,m} c_n c_m^* (\varphi_n \psi_{other,n} \chi_n) \otimes (\varphi_m \psi_{other,m} \chi_m)^\dagger, \quad (82)$$

contiene grandes términos no diagonales, es decir, términos para  $n \neq m$ , cuyos coeficientes numéricos son diferentes de cero.

Ahora vamos a tomar el baño de nuevo. En la sección anterior sabíamos el efecto de un baño sobre una tal superposición macroscópica. Hemos encontrado que una matriz de densidad como  $\rho_a$  tiene una decoherencia extremadamente rápida. Asumimos aquí que el tiempo de decoherencia es insignificantemente pequeño.\* Despues de la decoherencia, los términos fuera de la diagonal se anulan, y sólo queda la matriz de densidad diagonal final  $\rho_f$ , dada por

$$\rho_f = \sum_n |c_n|^2 (\varphi_n \psi_{other,n} \chi_n) \otimes (\varphi_n \psi_{other,n} \chi_n)^\dagger \quad (83)$$

\*Tenga en cuenta, sin embargo, que un tiempo de decoherencia *exactamente* cero, significaría un número *estRICTAMENTE* infinito de grados de libertad del baño o del medio ambiente, está en contradicción con la ecuación de evolución, y en particular con la unitariedad, localidad y causalidad. Es esencial en todo este asunto no confundir las consecuencias lógicas de un extremadamente pequeño tiempo de decoherencia con la de un tiempo de decoherencia *exactamente* cero.

permanece y tiene relevancia experimental. Como se explicó anteriormente, tal matriz de densidad describe un estado mixto, y los números  $P_n = |c_n|^2 = |\varphi_n^\dagger \psi_p|^2$  Dan la probabilidad de medir el valor  $a_y$  de encontrar la partícula en el estado  $\varphi_n \psi_{\text{other}, n}$  así como el detector en el estado  $\chi_n$ . Pero esto es precisamente lo que dicen las dos propiedades de las medidas cuánticas.

Por lo tanto, encontramos que al describir una medición como una evolución de un sistema cuántico que interactúa con un detector macroscópico, que contiene un baño en sí mismo, podemos deducir las dos propiedades de las medidas cuánticas, los resultados probabilísticos y el colapso de la función de onda, a partir de la ecuación de evolución cuántica mecánica. El tiempo de decoherencia  $t_d$  de la sección anterior se convierte en el tiempo de colapso para el caso de una medición; además encontramos

$$t_{\text{colapso}} = t_d < t_r. \quad (84)$$

En otras palabras, el tiempo de colapso es siempre menor que el tiempo de relajación del baño.

Tenemos así una fórmula para el tiempo necesario para el colapso de la función de onda. Todas las mediciones experimentales del tiempo de colapso han confirmado este resultado. [ref.114](#)

### ¿POR QUÉ SE NECESA $\hbar$ PARA LAS PROBABILIDADES?

A primera vista, se podría argumentar que las dos propiedades de las mediciones cuánticas no contienen  $\hbar$ , y por lo tanto no son consecuencias de la teoría cuántica. Sin embargo, este argumento es incorrecto.

La decoherencia es un proceso cuántico, porque  $\hbar$  aparece en la expresión del tiempo de decoherencia. Dado que el colapso de la función de onda se basa en la decoherencia, también es un proceso cuántico. También las probabilidades se deben al cuanto de acción  $\hbar$ .

Además, hemos visto que el concepto de función de onda aparece sólo porque el cuanto de acción  $\hbar$  no es cero. Las funciones de onda, su colapso y probabilidades se deben al cuanto de cambio  $\hbar$ .

Estos resultados recuerdan una declaración hecha anteriormente: las probabilidades aparecen siempre que un experimento intente detectar cambios, es decir, valores de acción, menores que  $\hbar$ . [Desafío 124 e](#) La mayoría de los rompecabezas en torno a la medida se deben a tales tentativas. Sin embargo, la naturaleza no permite tales mediciones; Por lo tanto, aparecen las probabilidades.

### VARIABLES OCULTAS

Un gran número de personas no están satisfechas con la explicación de probabilidades. Ellas anhelan más misterio en la teoría cuántica. No les gusta la idea de que las probabilidades se deben a los baños y al cuanto de acción. El prejuicio más famoso que estas personas cultivan es la idea de que las probabilidades se deben a algún aspecto oculto de la naturaleza que todavía es desconocido para los seres humanos. Tales aspectos imaginados, desconocidos, se llaman *variables ocultas*.

Lo bonito de la mecánica cuántica es que permite tanto pruebas conceptuales como experimentales sobre si tales variables ocultas existen sin necesidad de conocerlas. Por supuesto, las variables ocultas que controlan la evolución del sistema microscópico estarían en contradicción con el resultado de que los valores de acción por debajo de  $\hbar$  no pueden ser detectados. Este valor mínimo de acción observable es la razón del comportamiento aleatorio de los sistemas microscópicos. Una acción mínima *excluye* así las variables ocultas. Pero añadamos algunos argumentos más detallados.

Históricamente, el primer argumento contra las variables ocultas fue dado por John von Neumann. [\\*ref.115](#)

Kochen y Specker publicaron un nuevo teorema de prohibición (“no go”) para variables ocultas en 1967 (e independientemente por Bell en 1969). El teorema establece que las variables ocultas no contextuales son imposibles, si el espacio de Hilbert tiene una dimensión igual o mayor que tres. El teorema se refiere a variables no contextuales, es decir, sobre variables ocultas *dentro* del sistema mecánico cuántico. El teorema de Kochen-Specker indica así que no existe un modelo de variables ocultas no contextuales, porque la matemática lo prohíbe. Este resultado elimina esencialmente todas las posibilidades de variables ocultas, porque los sistemas mecánicos cuánticos usuales tienen dimensiones espaciales de Hilbert mayores de tres.

---

\*János von Neumann (b. 1903 Budapest, d. 1957 Washington DC) Influyente matemático húngaro. Una de las más grandes y más claras mentes del siglo XX, ya había resuelto muchas cuestiones, especialmente en las matemáticas aplicadas y la teoría cuántica, con las que otros todavía luchan día de hoy. Trabajó en la bomba atómica y de hidrógeno, en misiles balísticos y en problemas generales de defensa. En otro proyecto famoso, él construyó la primera computadora norteamericana, construida mediante su extensión de las ideas de Konrad Zuse.

Por supuesto, no se puede evitar notar que no existen teoremas restrictivos sobre variables *contextuales* ocultas, es decir, variables en el entorno y, en particular, en los baños contenidos en él. De hecho, su necesidad fue mostrada arriba.

También el sentido común elimina variables ocultas, sin ningún recurso a las matemáticas, con un argumento simple. Si un sistema mecánico cuántico tuviera variables ocultas internas, el aparato de medición tendría zillones\* de ellas (una infinidad). Y esto significaría que no podría funcionar como un sistema de medición.

A pesar de todos los argumentos, los investigadores han buscado pruebas experimentales sobre variables ocultas. La mayoría de las pruebas se basan en la famosa *desigualdad* de Bell, una relación bellamente simple publicada por John Bell\*\* en los años sesenta.

La idea inicial es distinguir la teoría cuántica y las teorías localmente realistas usando variables ocultas midiendo las polarizaciones de dos fotones entrelazados. La teoría cuántica dice que la polarización de los fotones se fija sólo en el momento en que se mide, mientras que los modelos realistas locales -el tipo más directo de modelos de variables ocultas- afirman que ya está fijado por una variable oculta. Curiosamente, los experimentos pueden ser utilizados para decidir qué enfoque es correcto.

Imaginemos que la polarización se mide en dos puntos distantes *A* y *B*. Cada observador puede medir bien 1 o bien -1 en cada una de sus direcciones favoritas. Deje que cada observador elija dos direcciones, 1 y 2, y llame a sus resultados  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . Puesto que todos los resultados de la medición son 1 o -1, el valor de la expresión específica  $(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2$  tiene siempre el valor  $\pm 2$ .

Imaginemos que se repite el experimento muchas veces, suponiendo que las variables ocultas aparecen estadísticamente.<sup>ref.116</sup> *Desafío 125 e* Entonces puede deducir (un caso especial de) la desigualdad de Bell para dos variables ocultas; se predice que

$$|(a_1b_1) + (a_2b_1) + (a_2b_2) - (a_1b_2)| \leq 2 . \quad (85)$$

Aquí, las expresiones entre paréntesis son los promedios de los productos de medición sobre un gran número de muestras. Esta predicción de variables ocultas se mantiene independientemente de las direcciones de los polarizadores involucrados.

Por otro lado, para el caso de que los polarizadores 1 y 2 en la posición A y los correspondientes en la posición B sean elegidos con ángulos de  $\pi / 4$ , la teoría cuántica predice que

$$|(a_1b_1) + (a_2b_1) + (a_2b_2) - (a_1b_2)| = 2\sqrt{2} > 2 . \quad (86)$$

Esta predicción está en completa contradicción con el resultado de la variable oculta.

Todos los controles experimentales de la ecuación de Bell han confirmado la mecánica cuántica estándar. No existen excepciones.

Greenberger, Horn y Zeilinger han predicho otra contradicción mensurable entre la teoría cuántica y las teorías localmente realistas en sistemas con tres partículas entrelazadas.<sup>ref.117</sup> De nuevo, la teoría cuántica se ha confirmado en todos los experimentos.

En resumen, no se ha encontrado ninguna evidencia de variables ocultas. Por supuesto, esto no es realmente sorprendente. La búsqueda de variables ocultas se basa en un malentendido de la mecánica cuántica o en los deseos personales sobre cómo debe ser el mundo, en lugar de tomarlo como es: hay un valor de acción medible mínimo,  $\hbar$ , en la naturaleza.

## RESUMEN SOBRE PROBABILIDADES Y DETERMINISMO

Geometric demonstramus quia facimus; si  
physics demonstrare possemus, faceremus. Giambattista Vico\*\*  
*Podemos demostrar cosas geométricas porque las hacemos;  
si pudiéramos demostrar cosas físicas, seríamos capaces de hacerlas.*

A partir de los argumentos presentados aquí sacamos una serie de conclusiones que necesitamos para el resto de nuestro ascenso a la montaña. Tenga en cuenta que estas conclusiones, aunque de acuerdo con los experimentos, ¡no son aún compartidos por todos los físicos! Todo el tema es un problema para las personas que prefieren la ideología a los hechos.

\*Lo que lleva a la siguiente definición: un zillion es  $10^{23}$ .

\*\* John Stewart Bell (1928–1990), Físico teórico que trabajó principalmente en los fundamentos de la teoría cuántica.

\*\*\* Giovanni Battista Vico (b. 1668 Napoli, d. 1744 Napoli) Importante filósofo y pensador italiano. En esta famosa sentencia señala una distinción fundamental entre la matemática y la física.

— Las probabilidades no aparecen en las medidas debido a que el estado del sistema cuántico sea desconocido o difuso, sino porque el estado detallado del baño en el ambiente es desconocido. *Las probabilidades mecánicas cuánticas son de origen estadístico y se deben a baños en el ambiente (o en el aparato de medición), en combinación con el cuanto de acción  $\hbar$ .* Las probabilidades se deben al gran número de grados de libertad contenidos en cualquier baño. Estos números grandes hacen que el resultado de los experimentos sea impredecible. Si se conociera el estado del baño, se podría predecir el resultado de un experimento. Las probabilidades de la teoría cuántica son de origen "termodinámico".

En otras palabras, *no* hay probabilidades fundamentales en la naturaleza. Todas las probabilidades en la naturaleza se deben a la decoherencia; en particular, todas las probabilidades se deben a las estadísticas de muchas partículas - algunas de las cuales pueden ser virtuales - que forman parte de los baños en el medio ambiente.

Modificando las palabras bien conocidas de Albert Einstein, «la naturaleza realmente no juega a los dados». Por lo tanto, hemos llamado a  $\psi$  *función de onda* en lugar de «amplitud de probabilidad», como suele hacerse. Un nombre aún mejor sería *función de estado*.

— Cualquier observación en la vida cotidiana es un caso especial de decoherencia. Lo que normalmente se llama el "colapso de la función de onda" es un proceso de decoherencia debido a la interacción con los baños presentes en el ambiente o en el aparato de medición. Debido a que los seres humanos son de sangre caliente y tienen memoria, los seres humanos son, por lo tanto, aparatos de medición. El hecho de que nuestra temperatura corporal es de 37 ° C es, por tanto, la razón por la que vemos sólo un solo mundo, y no hay superposiciones. (En realidad, hay muchas razones adicionales; *Desafío 126 s* ¿Puede nombrar algunas?)

- Una medición es completa cuando el sistema microscópico ha interactuado con el baño en el aparato de medición. La teoría cuántica como descripción de la naturaleza no requiere detectores; la ecuación de evolución describe todos los ejemplos de movimiento. Sin embargo, las mediciones requieren la existencia de *detectores*. Los detectores, que son máquinas que registran observaciones, tienen que incluir un baño, es decir, tienen que ser clásicos, objetos macroscópicos. En este contexto se habla también de un *aparato clásico*. Esta necesidad del aparato de medida de ser clásico ya se había subrayado en las primeras etapas de la teoría cuántica.

— Todas las mediciones, siendo procesos de decoherencia que implican interacciones con baños, son procesos irreversibles y aumentan la entropía.

— Una medida es un caso especial de evolución mecánica cuántica, a saber, la evolución de la combinación de un sistema cuántico, un detector macroscópico y el entorno. Dado que la ecuación de evolución es relativisticamente invariante, no aparecen problemas de causalidad en las mediciones; tampoco aparecen problemas de localidad o problemas lógicos.

— Puesto que tanto la ecuación de evolución como el proceso de medición no involucran cantidades distintas del espacio-tiempo, hamiltonianos, baños y funciones de onda, ninguna otra cantidad juega un papel en la medición. En particular, ningún observador humano ni ninguna conciencia está involucrada o es necesaria. Cada medición se completa cuando el sistema microscópico ha interactuado con el baño en el aparato. La decoherencia inherente en cada medición tiene lugar incluso si nadie está mirando. Esta consecuencia trivial está en consonancia con las observaciones de la vida cotidiana, por ejemplo con el hecho de que la Luna está orbitando en la Tierra aunque nadie la vea.\*\* De la misma manera, un árbol que cae en medio de un bosque hace ruido aunque nadie escuche. La decoherencia es independiente de la observación humana, de la mente humana y de la existencia humana.

— En cada medición el sistema cuántico interactúa con el detector. Puesto que hay un valor mínimo para la magnitud de la acción, cada *observación influye en lo observado*. Por lo tanto, cada medida *perturba* el sistema cuántico. Toda descripción precisa de las observaciones debe incluir también la descripción de esta perturbación. En la presente sección la perturbación fue modelada por el cambio del estado del sistema de  $\psi_{\text{other}}$  a  $\psi_{\text{other},n}$ . Sin un cambio de estado, sin una perturbación del sistema cuántico, una medición es imposible.

— Dado que la medición completa es descrita por la mecánica cuántica, la unitariedad es y sigue siendo la propiedad básica de la evolución. No hay procesos no unitarios en la mecánica cuántica.

---

\*El punto de vista opuesto es a veces erróneamente atribuido a Niels Bohr. La Luna está, obviamente, en contacto con muchos baños de radiación. *Desafío 127 s* ¿Puede nombrar algunos?

— La descripción del colapso de la función de onda como un proceso de decoherencia es una explicación exactamente en el sentido en que el término "explicación" se definió anteriormente; describe la relación entre una observación y todos los demás aspectos de la realidad, en este caso el baño en el detector o el entorno. El colapso de la función de onda se ha medido, calculado y *explicado*. El colapso no es una cuestión de "interpretación", es decir, de opinión, como desafortunadamente a menudo se sugiere.\*

— No es útil especular si la evolución de una *única* medida cuántica podría determinarse si se conociera el estado del entorno alrededor del sistema. Las mediciones necesitan de los baños. Pero un baño es, con excelente aproximación, irreversible y por lo tanto no puede ser descrito por una función de onda, que se comporta de manera reversible.\*

Dicho brevemente:

- ▷ La mecánica cuántica es determinista.
- ▷ Los baños son probabilísticos.

En realidad, los baños son probabilísticos debido al cuanto de acción.

En resumen, *no* hay irracionalidad en la teoría cuántica. Quien usa la teoría cuántica como argumento para las supersticiones, el comportamiento irracional, las creencias de la nueva era o las ideologías es culpable de desinformación. La declaración de Gell-Mann al comienzo de este capítulo es, por tanto, un ejemplo. Otra es la siguiente declaración bien conocida pero incorrecta de Richard Feynman:

... nadie comprende la mecánica cuántica. ref.119

Obviamente, los Premios Nobel no impiden puntos de vista distorsionados por la ideología. La afirmación correcta es:

- ▷ La decoherencia y el cuanto de acción son la clave para entender la teoría cuántica.

De hecho, estos dos conceptos permiten aclarar muchas otras cuestiones. Exploramos algunas entre las más interesantes.

### ¿CUÁL ES LA DIFERENCIA ENTRE ESPACIO Y TIEMPO?

El espacio y el tiempo difieren. Los objetos se localizan en el espacio pero no en el tiempo. ¿Por qué es este el caso?

En la naturaleza, la mayoría de las interacciones sistema - baño están mediadas por un potencial. Todos los potenciales dependen por definición de la posición. Por lo tanto, todo potencial, que es una función de la posición  $\mathbf{x}$ , commuta con la posición observable (y por lo tanto con la interacción hamiltoniana). La decoherencia inducida por los baños -excepto que específicamente se ponga particular atención- destruye en primer lugar los elementos no diagonales para cada superposición de estados centrados en diferentes lugares. En resumen, *los objetos están localizados porque interactúan con los baños mediante potenciales*.

Por la misma razón, los objetos también tienen una sola orientación espacial a la vez. Si la interacción entre el sistema y el baño depende del espín, el baño conduce a una "localización" en la variable de espín. Esto ocurre para todos los sistemas microscópicos que interactúan con los imanes. Como resultado, casi nunca se observan superposiciones macroscópicas de magnetización. Dado que los electrones, los protones y los neutrones tienen un momento magnético y un espín, esta conclusión también puede extenderse: los objetos de uso cotidiano nunca se ven en superposiciones de diferentes estados de rotación porque sus interacciones con los baños son dependientes del espín.

Como contraejemplo, la mayoría de los sistemas no están localizados en el tiempo, sino que por el contrario existen durante tiempos muy largos, porque prácticamente todas las interacciones entre el sistema y el baño *no* commutan con el tiempo.

De hecho, esta es la forma en que para empezar se define un baño. Resumiendo, *los objetos son permanentes porque interactúan con los baños*.

*Desafío 128 s* ¿Es capaz de encontrar una interacción que dependa de la cantidad de movimiento en lugar de depender de la posición? ¿Cuál es la consecuencia para los sistemas macroscópicos?

\* Esto implica que la llamada interpretación de los "muchos mundos" es una ilusión. La conclusión se confirma al estudiar los detalles de este enfoque religioso. Es un sistema de creencias, no basado en hechos. ref.118

\*\*Este tipo de determinismo muy fuerte será muy contestado en la última parte de este texto, en el que se demostrará que el tiempo no es un concepto fundamental, y por lo tanto que el debate sobre el determinismo pierde la mayor parte de su interés.

En otras palabras, en contraste con la relatividad general, la teoría cuántica produce una distinción entre el espacio y el tiempo. En realidad, podemos *definir* la posición como el observable que conmuta con los hamiltonianos de interacción. Esta distinción entre el espacio y el tiempo se debe a las propiedades de la materia y sus interacciones. No podríamos haber deducido esta distinción en la relatividad general.

### ¿SOMOS BUENOS OBSERVADORES?

¿Son los humanos aparatos clásicos? Sí lo son.

Aunque varios físicos prominentes afirman que el libre albedrío y las probabilidades están relacionados, una investigación detallada muestra que esto no es así.<sup>ref.120</sup> Nuestros sentidos son máquinas clásicas porque obedecen a su definición: Los sentidos humanos registran las observaciones por interacción con un baño. Nuestro cerebro también es un aparato clásico: las neuronas están incrustadas en los baños. Las probabilidades cuánticas *no* juegan un papel determinante en el cerebro.

Cualquier entidad en observación, ya sea una máquina o un ser humano, necesita un baño y una memoria para registrar sus observaciones. Esto significa que los observadores deben estar hechos de materia; un observador no puede estar hecho de radiación. Nuestra descripción de la naturaleza es, por tanto, muy sesgada: la describimos desde el punto de vista de la materia. Esto es un poco como describir las estrellas colocando a la Tierra en el centro del universo: colocamos siempre la materia en el centro de nuestra descripción. *Desafío 129 e* ¿Podemos eliminar este antropomorfismo básico? Lo averiguaremos a medida que continuemos.

### ¿QUÉ RELACIONA LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN, LA CRIPTOLOGÍA Y LA TEORÍA CUÁNTICA?

Física significa hablar de observaciones de la naturaleza. Como cualquier observación, también las mediciones producen información. Así pues, es posible traducir gran parte (pero no toda) de la teoría cuántica al lenguaje de la teoría de la información. En particular, la existencia de un mínimo valor de cambio en la naturaleza implica que la información sobre un sistema físico nunca puede ser completa, que el transporte de información tiene sus límites y que la información nunca puede ser plenamente fiel. Los detalles de estos estudios constituyen una fascinante manera de mirar el mundo microscópico.

La analogía entre la teoría cuántica y la teoría de la información se vuelve aún más interesante cuando las enunciaciones se traducen al lenguaje de la criptografía.<sup>ref.121</sup> La criptología es la ciencia de transmitir mensajes ocultos que sólo el destinatario receptor puede descifrar. En nuestros tiempos modernos de vigilancia constante, la criptología es una herramienta importante para proteger la libertad personal.\*

El cuanto de acción implica que los mensajes pueden ser enviados de una manera (casi) segura. Escuchar un mensaje es un proceso de medición. Puesto que hay una acción mínima, se puede detectar si alguien ha intentado escuchar un mensaje enviado. Un hombre en pleno ataque- alguien que finge ser el receptor y luego envía una copia del mensaje al receptor real, previsto - puede ser evitado mediante el uso de sistemas entrelazados como señales para transmitir la información. Por lo tanto, los criptólogos cuánticos suelen utilizar sistemas de comunicación basados en fotones entrelazados.

El principal problema de la *criptología cuántica*, un gran campo de investigación moderno, es el problema de distribución de la clave. Toda comunicación segura se basa en una clave secreta que se utiliza para descifrar el mensaje. Incluso si el canal de comunicación es de la más alta seguridad - como fotones entrelazados - uno todavía tiene que encontrar una manera de enviar al socio de comunicación la clave secreta necesaria para el descifrado de los mensajes. Encontrar estos métodos es el aspecto principal de la criptología cuántica. Sin embargo, investigaciones más precisas muestran que todos los métodos de intercambio de claves están limitados en su seguridad.

En resumen, debido al cuanto de acción, la naturaleza proporciona límites a la posibilidad de enviar mensajes encriptados. La afirmación de estos límites es (casi) equivalente a la afirmación de que el cambio en la naturaleza está limitado por el cuánto de la acción.

---

\*La criptología consiste en el campo de la *criptografía*, el arte de codificar mensajes, y el campo del *criptoanálisis*, el arte de descifrar los mensajes cifrados. Para una buena introducción a la criptología, vea el texto de Albrecht Beutelspacher, Jörg Schwenk & Klaus-Dieter Wolfenstätter, *Moderne Verfahren der Kryptographie*, Vieweg 1995.

## ¿ES EL UNIVERSO UNA COMPUTADORA?

El cuanto de acción proporciona un límite para asegurar el intercambio de información. Esta conexión nos permite dejar de lado varias afirmaciones incorrectas que se encuentran a menudo en los medios de comunicación. Afirmar que "el universo es información" o que "el universo es una computadora" es tan razonable como decir que el universo es una observación o un dispensador de chicles. Cualquier experto en movimiento debe tener cuidado con estas y similares afirmaciones ambiguas; las personas que las usan se engañan o tratan de engañar a otras.

## ¿TIENE EL UNIVERSO UNA FUNCIÓN DE ONDA? ¿Y CONDICIONES INICIALES?

La función de onda del universo se invoca con frecuencia en las discusiones sobre la teoría cuántica. Muchos deducen conclusiones de esta idea, por ejemplo sobre la irreversibilidad del tiempo, sobre la importancia de las condiciones iniciales, sobre los cambios necesarios para la teoría cuántica y muchas más. ¿Son correctos estos argumentos?

Lo primero que debemos aclarar es el significado del "universo". Como ya se ha explicado, el término puede tener dos significados: la colección de toda la materia y la radiación, o esta colección *más* todo el espacio-tiempo. Recordemos también el significado de «función de onda»: describe el *estado* de un sistema. El estado distingue dos sistemas por lo demás idénticos; por ejemplo, la posición y la velocidad distinguen dos bolas de marfil, por lo demás idénticas, sobre una mesa de billar. Alternativamente y de manera equivalente, el estado describe cambios en el tiempo.

¿Tiene el universo un estado? Si tomamos el significado más amplio del universo, no es así. Hablar del estado del universo es una contradicción: por definición, el concepto de estado, definido como los aspectos no permanentes de un objeto, es aplicable solamente a *parte* del universo.

Entonces podemos tomar el sentido más restringido de "universo" - la suma de toda la materia y la radiación solamente - y hacer la pregunta de nuevo. Para determinar el estado de toda materia y radiación, necesitamos una posibilidad de medirla: necesitamos un ambiente. Pero el ambiente de la materia y la radiación es sólo el espacio-tiempo; las condiciones iniciales no se pueden determinar ya que necesitamos mediciones para hacer esto, y por lo tanto un aparato. Un aparato es un sistema material con un baño unido a él; sin embargo, no existe tal sistema fuera del universo.

En resumen, la teoría cuántica no permite mediciones del universo; Por lo tanto, el universo no tiene estado. Cuidado con cualquiera que afirme saber algo sobre la función de onda del universo. Simplemente hágale la pregunta de Wheeler: Si conoces la función de onda del universo, ¿por qué no eres rico?

A pesar de esta conclusión, varios físicos famosos han propuesto ecuaciones de evolución para la función de onda del universo. (La más conocida es, irónicamente, la ecuación de Wheeler-DeWitt.)<sup>ref.122</sup> Parece una tontería, pero ninguna predicción de estas ecuaciones se ha comparado con el experimento; los argumentos que acabamos de exponer lo hacen imposible en principio. Explorar tales ecuaciones, tan interesantes como pueden parecer a primera vista, debe, por lo tanto, ser evitado si queremos alcanzar la cima de la montaña del movimiento y evitar el sentirse perdido en creencias falsas.

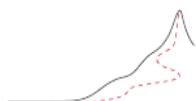
Hay muchos giros adicionales a esta historia. Uno de estos giros es que el espacio-tiempo en sí, incluso sin materia, podría ser un baño. Esta especulación se demostrará que es correcta en el último volumen de esta aventura. El resultado parece permitir hablar de la función de onda del universo. Pero, de nuevo, resulta que el tiempo *no está definido* en las escalas donde el espacio-tiempo es un baño efectivo; esto implica que el concepto de estado no es aplicable allí.

Una falta de 'estado' para el universo es una declaración fuerte. También implica una falta de condiciones iniciales. Los argumentos son precisamente los mismos. Este es un resultado difícil. Estamos tan acostumbrados a pensar que el universo tiene condiciones iniciales que nunca cuestionamos el término. (Incluso en este texto el error puede aparecer de vez en cuando.) Pero no hay condiciones iniciales para el universo.

Podemos retener como resumen, válido incluso a la luz de las últimas investigaciones: el universo no es un sistema, *no* tiene función de onda *ni* condiciones iniciales, independientemente de lo que se entienda por "universo".



## Capítulo 8



# COLORES Y OTRAS INTERACCIONES ENTRE LUZ Y MATERIA

Rem tene; verba sequentur.\*<sup>\*\*</sup> Cato  
"Conoce el tema y las palabras seguirán".

## L

as piedras y todos los otros objetos tienen colores. ¿Por qué? En otras palabras, ¿cuál es la forma específica en la que las partículas cuánticas cargadas que se encuentran dentro de las piedras y dentro de todos los otros objetos interactúan con los campos electromagnéticos? En este capítulo, daremos primero una visión general de las diversas formas en que los colores en la naturaleza resultan del cuanto de acción, es decir, de la interacción entre los cuantos de la materia y los fotones. Luego exploraremos el sistema más simple: mostraremos cómo el cuanto de acción conduce a los colores de los átomos de hidrógeno. Después de esto, descubriremos que la interacción entre la materia y la radiación conduce a otros efectos sorprendentes, especialmente cuando se tiene en cuenta la relatividad especial.

### LAS CAUSAS DEL COLOR

La teoría cuántica explica todos los colores en la naturaleza. De hecho, todos los colores que observamos son debidos a partículas cargadas. Más precisamente, los colores se deben a las interacciones de partículas cargadas con fotones. Así pues, todos los colores son efectos cuánticos.

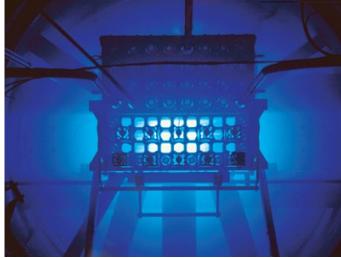
Las partículas cargadas que están en la base de la mayoría de los colores son electrones y núcleos, incluyendo sus compuestos, desde iones, átomos y moléculas hasta fluidos y sólidos. Muchas cuestiones de color siguen siendo tema de investigación. Por ejemplo, hasta hace poco no estaba claro por qué exactamente el asfalto es negro. La estructura exacta de los compuestos químicos, los *asfaltenos*, que producen el color marrón muy oscuro era desconocida.<sup>ref.124</sup> Sólo una investigación reciente ha resuelto esta cuestión. Además, el desarrollo de nuevos colorantes y efectos de color es una parte importante de la industria moderna.

Una panorámica de los mecanismos específicos que generan los colores se da en la tabla que sigue.<sup>ref.123</sup> La tabla incluye todos los colores que aparecen en nuestra vida diaria. (*Desafío 130 s* ¿Puede encontrar uno que falta?)

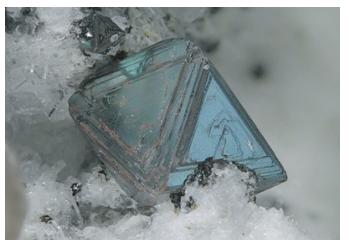
TABLA 7 Causas del color.

Tipo de color	Ejemplo	Detalles
<b>Clase I: Colores debidos a simples excitaciones</b>		
	<b>1. Incandescencia y radiación de la carga libre</b> Lámpara de arco de carbón, acero caliente, hilo de bombilla incandescente, muchas estrellas, magma, lava, fundidos calientes.	Los colores se deben al espectro continuo emitido por toda la materia caliente; La secuencia de colores, dada por la regla de Wien, es negra, roja, naranja, amarilla, blanca, azul-blanca (plomo fundido y plata © Graela)

\*\* Marcus Porcius Cato, (234–149 bce) o Catón el Viejo, político Romano famoso por sus discursos y su integridad.

Tipo de color	Ejemplo	Detalles
	<p>Fuego de madera, velas y leña Las llamas de madera y cera son de color amarillo debido a la incandescencia son ricas en carbono y pobres en oxígeno</p>	<p>Debido a la quema de metales a óxido a alta temperatura, como el magnesio, zinc, hierro, aluminio o zirconio (sparkler © Sarah Domingos)</p>
	<p>Fuegos artificiales blancos, lámparas de flash, centellas</p>	<p>Reactores nucleares, fuentes de luz de sincrotrón, láser de electrones libres</p> <p>Debido a las cargas rápidas libres: la radiación Vavilov-Čerenkov es debida a una velocidad de la partícula más grande que la velocidad de la luz en la materia, Bremsstrahlung se debe a la desaceleración de las partículas cargadas (núcleo del reactor nuclear bajo el agua, cortesía NASA)</p>
	<p><b>2. Excitaciones de gases atómicos</b> Lámpara roja de neón, lámpara azul de argón, lámpara ultravioleta de mercurio, lámparas amarillas de las calles de sodio, la mayoría de láseres de gas, láseres de vapores metálicos, algunas fluorescencias</p>	<p>Los colores se deben a transiciones entre los niveles de energía atómica (descargas de gas© Pslawinski)</p>
	<p>Aurora, triboluminescencia en cinta adhesiva, cristaloluminescencia en bromato de estroncio</p>	<p>En el aire, los colores azul y rojo se deben a los niveles de energía atómica y molecular del nitrógeno, mientras que los colores verde, amarillo y naranja se deben al oxígeno (aurora © Jan Curtis)</p>
	<p>Relámpagos, arcos, chispas, fuegos artificiales coloreados, la mayor parte de las llamas coloreadas,</p>	<p>Algunas electroluminiscencias y colores son debidas a los niveles de energía de átomos altamente excitados (llamas de K, Cu, Cs, B, Ca © Philip Evans)</p>
	<p><b>3. Vibraciones y rotaciones de moléculas</b> Agua azulada, el hielo azul cuando es claro, violeta del iodo, bromo rojo-marrón, cloro amarillo verdoso, llamas rojas de CN o llamas verde-azules de CH, algunos láseres de gas, azul del ozono que conduce a cielos de atardeceres azul y gris</p>	<p>Colores debidos a niveles cuantizados de rotaciones y vibraciones de moléculas (iceberg azul© Marc Shandro)</p>

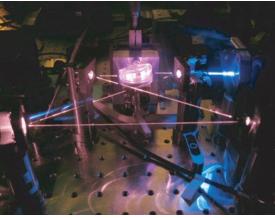
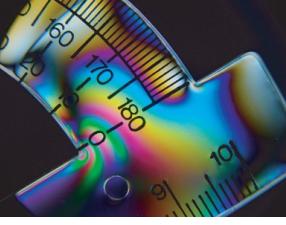
Tipo de color	Ejemplo	Detalles
<b>Clase II: Colores debidos a efectos de campo de los ligandos</b>		
	<b>4. Compuestos de metales de transición</b> Malaquita verde $\text{Cu}_2\text{CO}_3(\text{OH})_2$ , óxido de cobalto azul, azurita $\text{Cu}_3(\text{CO}_3)_2(\text{OH})_2$ , hematita $\text{Fe}_2\text{O}_3$ roja marrón, $\text{MnO}$ verde, blanco $\text{Mn}(\text{OH})_2$ , manganita marrón, cromo $\text{Cr}_2\text{O}_3$ verde, praseodimio verde, europio rosa y samario amarillo compuestos, piezocrómico y thermocrómico $\text{Cr}_2\text{O}_3 - \text{Al}_2\text{O}_3$ UV y fósforos electrónicos, centelleos, algunas fluorescencias, algunos láseres	Los colores son debidos a los estados electrónicos de los iones; los fósforos se usan en tubos catódicos para pantallas de TV/computadoras y en tubos de lámparas de tubos fluorescentes (malaquita verde casolita amarillo, un mineral de uranio, figura de 5mm, encontrada en Kolwezi, Zaire/Congo, © Stephan Wolfsried, foto de pantalla de televisión photo © Planemad)
	<b>5. Impurezas de metales de transición</b> Rubí, esmeralda, alejandrita, perovskitas, láseres correspondientes	Estados electrónicos de iones de metales de transición son excitados por la luz y así absorbe longitudes de onda específicas (rubí en calcita de Mogok, Myanmar, tamaño de la figura 3 cm, © Rob Lavinsky)
<b>Clase III: Colores debido a orbitales moleculares</b>		
	<b>6. Compuestos orgánicos</b> Rojo hemoglobina en sangre, azul sangre de hemocianina, verde clorofila en plantas, amarillo o naranja carotenos en zanahorias, flores y hojas otoñales amarillas, rojo o púrpura antocianinas en bayas, flores y hojas rojas otoñales, azul indigo, rojo licopeno en tomates, rojo carne de mioglobina que contiene hierro, marrón glucosamina en la costra de alimentos cocinados, marrón taninos, negro eumelanina en piel humana, cabello y ojo, variación rica de hierro feomelanina en pelirrojo, negro melanina también en manzanas cortadas y bananas como en los sacos móviles en camaleones, marrón-negro asfalto, algunas fluorescencias, quimiluminescencia, fosforescencia, halocromismo, electrocromismo y termocromismo, láseres de color	Los colores se deben a enlaces $\pi$ -conjugados, es decir que alternan enlaces sencillo y dobles en moléculas; pigmentos florales son casi todos antocianinas, betalaínas o carotenos; usados en colorantes para comidas y cosméticos, en textiles coloreados, en monitores electrocrómicos, en tintas para impresoras a color, en fotosensibilizantes (narciso © Thomas Lüthi, sangre en un dedo © Ian Humes, berries © NathanWall, hair courtesy dusdin)
		
		
		

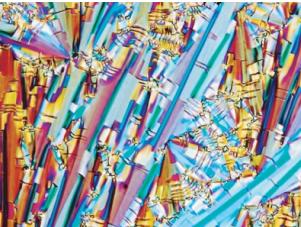
Tipo de color	Ejemplo	Detalles
	Luciérnagas, algunas bacterias y hongos, la mayoría de peces abisales, pulpos, medusas, y otros animales abisales	Bioluminiscencia se debe a moléculas excitadas, generalmente llamadas <i>luciferinas</i> (pez sapo, longitud 4.5 cm, © SteveHaddock)
		
	<b>7. Transferencia inorgánica de carga</b> Zafiro azul, lapislázuli azul, amazonita verde, magnetita marrón-negra, Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> y la mayoría de minerales de hierro (coloración basalto negro, marrón botellas de cerveza, amarillo arena de cuarzo, y muchas otras rocas con tonos marrón o rojo), grafito negro, permanganato púrpura, dicromato de potasio naranja, molibdato amarillo, hematita Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> rojo, algunas fluorescencias	La luz induce cambios de posición de un electrón de una átomo a otro; por ejemplo, en el zafiro azul la transición es entre impurezas Ti y Fe; muchos pigmentos de pintura usan colores por transferencia de carga; reactivos analíticos fluorescentes se usan en medicina molecular y biología (magnetita encontrada en Laach, Germany, figura de 10mm, © StephanWolfsried, arena de desierto Evelien Willemsen)

#### Clase IV: Colores debidos a efectos de banda de energía

	<b>8. Bandas Metálicas</b> Oro (verde en transmisión), pirita, hierro, latón, aleación, plata, cobre, vidrio rubí	Colores en reflexión y en transmisión se deben a transiciones de electrones entre bandas superpuestas (saxofón © Selmer)
	<b>9. Bandas de semiconductores puros</b> Silicio, GaAs, galena negra PbS, cinabrio rojo HgS, amarillo cadmio CdS, negro CdSe, rojo CdS <sub>x</sub> Se <sub>1-x</sub> , blanco ZnO, naranja bermellón HgS, diamantes incoloros, negro a oro piezocrómico SmS	Los colores se deben a transiciones electrónicas entre bandas separadas; la serie de color es negro, rojo, naranja, amarillo, blanco/incoloro; algunos son usados como pigmentos (óxido de zinc cortesía Walkerma)
	<b>10. Bandas de semiconductores dopados</b> Diamante azul, amarillo, verde y negro; LEDs; láseres semiconductor; células solares; ZnS y Zn <sub>x</sub> Cd <sub>1-x</sub> S based and other phosphors	Los colores se deben a transiciones entre dopantes y bandas de semiconductores (por ejemplo, diamante azul: aceptores de boro, diamante: donadores de nitrógeno) (puntos cuánticos © Andrey Rogach)

Tipo de color	Ejemplo	Detalles
	<b>11. Centros de color</b> Amatista, cuarzo ahumado, fluorita, diamante verde, azul, amarillo y topacio marrón, sal marrón, color púrpura de vidrios irradiados que contienen $Mn^{2+}$ , lio.luminescencia, algunas fluorescencias, láseres F-centro (de centros de color)	Los colores se deben a centros de color, es decir, a electrones o huecos enlazados a vacante de cristal; centros de color son usualmente creados por radiación (amatista © Rob Lavinsky)
	Algunas gafas de sol fotodependientes	El coloreado fotocrómico se debe a centros de color formados por la luz UV del Sol
	<b>12. Refracción dispersiva y polarización</b> corte diamante, corte circonita, halos y parhelios formados por cristales de hielo en el aire	Descomposición espectral (chispas o 'fuegos' de las piedras preciosas) se debe a la dispersión en los cristales (circonita foto © Gregory Phillips)
	Arco iris  Flash verde	Los colores de arco primario y del arco secundarios son debido a la dispersión en gotas agua. En el aire, los colores azul y rojo se deben a los niveles de energía atómica y molecular del nitrógeno, mientras que los colores verde, amarillo y naranja se deben al oxígeno la dispersión en la atmósfera mueve los colores del sol
	<b>13. Dispersión</b> Cielo azul, color azul de montañas distantes, atardecer rojo; intensificación de color por polución;	La luz azul es más dispersada que la luz roja, dispersión de Rayleigh, cuando los difusores (moléculas, polvo) son más pequeños que la longitud de onda de la luz (Tokyo sunset © Altus Plunkett, blue quartz © David Lynch)
	cuarzo azul	El color blanco es debido a difusión de Mie independiente de la longitud de onda, es decir, dispersión por partículas más grandes que la longitud de onda de la luz (muñeco de nieve © Andreas Kostner)
 	Color blanco de las canas, leche, espuma de cerveza, nubes, niebla, humo de cigarrillo que sale de los pulmnes, nieve, nata montada, champú, estrellas en gemas  Azul de la piel humana en tiempo frío, ojos azules y verdes en humanos, Piel azul de los simios, azul en el cuello de los pavos, la mayoría de los peces azules, reptiles azules, humo azul de cigarrillo	Los colores azules se deben a la dispersión de Tyndall por pequeñas partículas frente a un fondo oscuro (rana venenosa azul <i>Dendrobates azureus</i> © LeeHancock)

Tipo de color	Ejemplo	Detalles
	Vidrio rubí	<p>El color rojo del vidrio de Murano se debe a la dispersión de minúsculas partículas de oro coloidal inclusas en el vidrio en combinación con la estructura de bandas del oro (vidrio rubí © <a href="http://murano-glass-shop.it">murano-glass-shop.it</a>)</p>
	No linearidades, efecto Raman, dihidrógeno fosfato potásico (KDP)	<p>Dispersión de la frecuencia de deslizamiento, generación de segundo armónico y otras no-linealidades de algunos materiales cambian el color de la luz por interferencia con láser de doble circuito a elevada intensidad de frecuencia (800 nm to 400 nm frequency doubling ring laser © Jeff Sherman)</p>
	<b>14. Interferencia (sin difracción)</b>	<p>Nácar, películas de aceite, burbujas de jabón, revestimiento de lentes en cámaras de fotos, ojos de gato en la oscuridad, alas de moscas y libélulas, escamas de peces, algunas serpientes, perlas, colores en el templado del acero</p>
	La polarización de los colores de las sutiles capas delgadas de cristales birrefringentes o el color de las capas gruesas de polímeros sometidos a tensiones	<p>Los colores se deben a interferencia, como se demuestra por la dependencia del espesor (fotoelasticidad cortesía Nevit Dilmen)</p>
	Arco iris supernumerarios (vea el volumen III)	<p>Debido a la interferencia, como muestra la dependencia del tamaño de la gota</p>
	Escarabajos iridescentes, mariposas y plumas de pájaros, colores iridescentes en billetes de banco y automóviles	<p>Debido a la dispersión en pequeñas estructuras o nanopartículas, como muestra la dependencia angular del color (pato salvaje © Simon Griffith)</p>
	<b>15. Difracción (con interferencia)</b> Ópalo	<p>Los colores son debidos a las esferas pequeñas incluidas en el agua dentro del ópalo; los colores pueden cambiar si el opalo se seca (ópalo brasileño pulido © Opalsnopal)</p>

Tipo de color	Ejemplo	Detalles
	Aureola, gloria, corona	Los colores se deben a la difracción en minúsculas gotas de niebla (nube iridiscente de condensación en un aeroplano © Franz Kerschbaum)
	Rejillas de difracción, CDs, discos de vinilo, algunos coleópteros y serpientes	Los colores se deben a difracción e interferencia en hoyuelos diminutos regulares (CD iluminados por lámparas de flash © Alfons Reichert)
	Cristales fotónicos: Un tema de investigación moderna. Cristales líquidos colestéricos, algunos coleópteros	Los colores se deben a difracción e interferencia en capas de materiales internos (colores de cristal líquido © Ingo Dierking)

### Clase VI: Colores debidos a limitaciones del ojo

Colores de Fechner, como en <a href="http://lite.bu.edu/vision/applets/Color/Benham/Benham.html">lite.bu.edu/vision/applets/Color/Benham/Benham.html</a>	Rueda de Benham o superior	Los colores se deben a la diferente velocidad de respuesta de los diferentes fotorreceptores
Producción interna de colores cuando los ojos son estimuladosI	Fosfenos	Ocurre a través de presión (frotamiento, estornudos), o mediante campos eléctricos y magnéticos
Colores de Polarización	Cepillo de Haidinger	Vea volumen III
Ilusiones de color, como en <a href="http://www.psy.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/color9e.html">www.psy.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/color9e.html</a>	Aparición y desaparición de colores	Los efectos se deben a la combinación de limitaciones de los procesos del cerebro y del ojo
Falso resultado de color del ojo como se describe en el volumen III	La luz roja puede ser percibida como verde	Observable con óptica adaptativa, si la luz roja se concentra sobre un cono sensible al verde
Ceguera al color o personas 'daltónicas', vea volumen III, con una reducida gama del espectro de color	Protanopia, deutanopia o tritanopia	Cada tipo limita la percepción del color de una manera diferente

Los colores fascinan. Fascinación siempre significa negocio; de hecho, una gran parte de la industria química se dedica a la síntesis de colorantes para pinturas, tintas, ropa, alimentos y cosméticos. También la evolución utiliza la fascinación de los colores para su propio negocio, es decir, la propagación de la vida. Los especialistas en este campo son las plantas con flores. La química de la producción de color en las plantas

está muy involucrada y es al menos tan interesante como la producción de colores en las fábricas.

Prácticamente todos los colorantes florales, del blanco, amarillo, naranja, rojo al azul, son de tres clases químicas: los *carotenoides*, las *antocianinas* (flavonoides) y las *betalainas*. Estos colorantes se almacenan en pétalos dentro de contenedores dedicados a ello, las *vacuolas*. Hay muchos buenos artículos de revistas que proporcionan los detalles. [ref.125](#)

Aunque los colores son comunes en plantas y animales, la mayoría de los animales superiores no producen muchos colorantes ellos mismos. Por ejemplo, los seres humanos sólo producen un colorante: *melanina*. (la *Hemoglobina*, que colorea la sangre roja, no es un colorante propiamente dicho, sino que transporta el oxígeno de los pulmones a través del cuerpo. Tampoco la mioglobina rosa en los músculos tiene la función de colorante.) Muchos animales superiores, como las aves, necesitan *comer* los colorantes que son tan característicos para su apariencia. El color amarillo de las patas de las palomas es un ejemplo. Se ha demostrado que la conexión entre el color y la nutrición es usada regularmente por los compañeros potenciales para juzgar por los colores del cuerpo si un socio que se declara es suficientemente sano y, por tanto, suficientemente atractivo. [ref.126](#)

Sobre todo, la tabla anterior distingüía seis clases entre las causas de los colores.

Como se mencionó, fue el estudio de la primera clase, los colores de incandescencia, lo que llevó a Max Planck a descubrir el cuanto de acción. Por otra parte, la investigación ha confirmado que en cada clase, los colores se deben al cuanto de acción  $\hbar$ . La relación entre el cuanto de acción y las propiedades materiales de átomos, moléculas, líquidos y sólidos es tan bien conocida que los colorantes pueden ahora ser diseñados en el ordenador.

En resumen, una exploración de las causas de los colores encontrados en la naturaleza confirma que todos los colores son debidos a efectos cuánticos. Demostramos esto explorando el ejemplo más simple: los colores de las excitaciones atómicas del gas.

#### USANDO EL ARCO IRIS PARA DETERMINAR DE QUÉ ESTÁN HECHAS LAS ESTRELLAS

Hacia el inicio del siglo XVIII, el fabricante de instrumentos bávaro Joseph Fraunhofer\* y el físico inglés William Wollaston señalaron que el arco iris carece de ciertos colores. Estos colores aparecen como líneas negras cuando el arco iris se extiende en suficiente amplitud. La [Figura 74](#) Muestra las líneas en detalle; hoy se llaman las *líneas de Fraunhofer*. En 1860, Gustav Kirchhoff y Robert Bunsen demostraron que los colores que *faltaban* en el arco iris eran exactamente los colores que ciertos elementos *emiten* cuando se calientan. De esta manera lograron demostrar que el sodio, el calcio, el bario, el níquel, el magnesio, el zinc, el cobre y el hierro están presentes en el Sol. Mirar el arco iris nos dice así de qué está hecho el Sol.

De las 476 líneas de Fraunhofer que Kirchhoff y Bunsen observaron, 13 no correspondían a ningún elemento conocido. En 1868, Jules Janssen y Joseph Lockyer predijeron de forma independiente que estas líneas desconocidas eran de un elemento desconocido. El elemento fue finalmente encontrado en la Tierra, en un mineral de uranio llamado Cleveita, en 1895. El nuevo elemento fue llamado helio, de la palabra griega ἥλιος 'helios' - Sol. Hoy sabemos que es el segundo ingrediente más difundido del Sol y del universo, después del hidrógeno.

A pesar de ser tan común, el helio es raro en la Tierra porque es un gas noble ligero que no forma compuestos químicos. Por lo tanto, el helio tiende a elevarse en la atmósfera y escapar al espacio.

En 1925, con una ecuación desarrollada por Saha y Langmuir, la joven físico Cecilia Payne (b. 1900 Wendover, Inglaterra, d. 1979 Cambridge, Massachusetts) enseñó al mundo cómo deducir el porcentaje de masa de cada elemento del espectro de luz de una estrella. Lo hizo en su brillante tesis de doctorado. Sobre

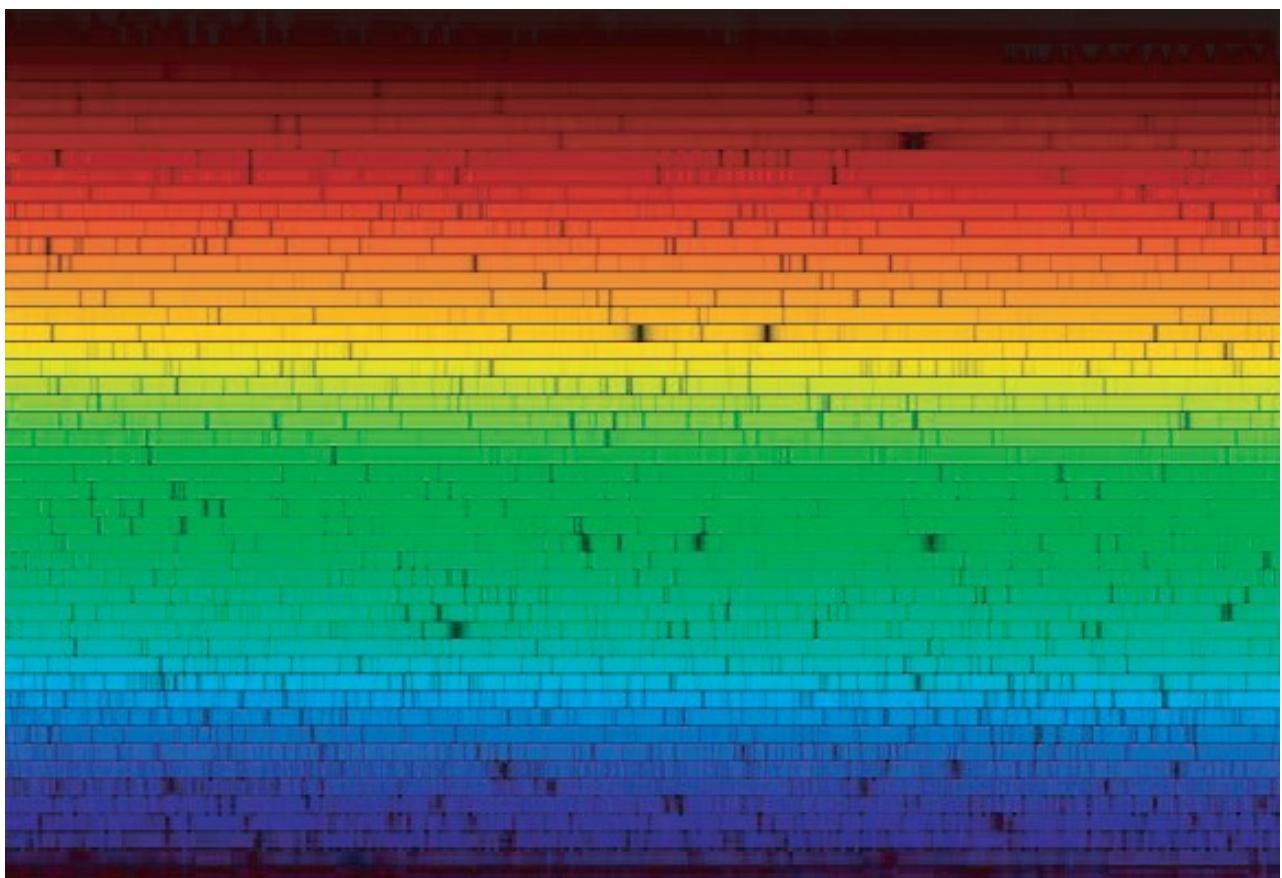
\*\* Joseph Fraunhofer (b. 1787 Straubing, d. 1826 München). Bávaro. Habiendo sido huérfano a la edad de 11 años, aprendió a pulir las lentes. Autodidacta de la óptica que aprendió de los libros. Entró en una empresa de óptica a la edad de 19 años, asegurando el éxito del negocio mediante la producción de las mejores lentes, telescopios, micrómetros, rejillas ópticas y sistemas ópticos disponibles de su tiempo. Inventó el espectroscopio y el heliómetro. Descubrió y contó 476 líneas en el espectro del Sol; estas líneas ahora llevan su nombre. (Hoy en día, las líneas de Fraunhofer todavía se usan como estándares de medición: el segundo y el metro se definen en términos de ellos.) Físicos de todo el mundo le comprarían su equipo, le visitarían y pedirían copias de sus publicaciones. Incluso después de su muerte, sus instrumentos permanecieron insuperables durante generaciones. Con sus telescopios, en 1837 Bessel fue capaz de hacer la primera medida de paralaje de una estrella, y en 1846 Johann Gottfried Galle descubrió Neptuno. Fraunhofer se convirtió en profesor en 1819. Murió joven, por las consecuencias de los años que pasó trabajando con plomo y polvo de vidrio.

todo encontró que el hidrógeno y el helio eran los dos elementos más abundantes en el Sol, en las estrellas y, por tanto, en todo el universo. Esto estaba totalmente en contra de las ideas de la época, pero ahora es de conocimiento común. Payne había completado sus estudios de física en Cambridge, Reino Unido, pero no había recibido un título universitario allí porque era una mujer. Así que se fue a los Estados Unidos, donde la situación era un poco mejor, y donde trabajó en su tesis doctoral; por último, se convirtió en profesora de la Universidad de Harvard, y más tarde jefe de su departamento de astronomía.

Por encima de todo, Payne se convirtió en un importante modelo para muchas mujeres científicas.

La comprensión de las líneas de color producidas por cada elemento había comenzado a ser interesante ya antes del descubrimiento del helio; pero luego el interés aumentó aún más, gracias al creciente número de aplicaciones del conocimiento del color en química, física, tecnología, cristalografía, biología y láser. Los colores son un gran negocio, como la industria de la moda, los medios de comunicación y el espectáculo de negocios de publicidad.

En síntesis los colores son frecuencias de luz específicas. La luz es una onda electromagnética y es emitida por las cargas móviles. Para un físico, los colores resultan de la interacción de la materia cargada con el campo electromagnético. Ahora, las líneas de color nítidas no pueden ser explicadas por la electrodinámica clásica. De hecho, sólo la teoría cuántica puede explicarlos.



**FIGURA 74** El espectro de la luz solar diurna: imagen apilada de un arco iris extendido, mostrando sus líneas Fraunhofer(© Nigel Sharp, NOAO, FTS, NSO, KPNO, AURA, NSF).

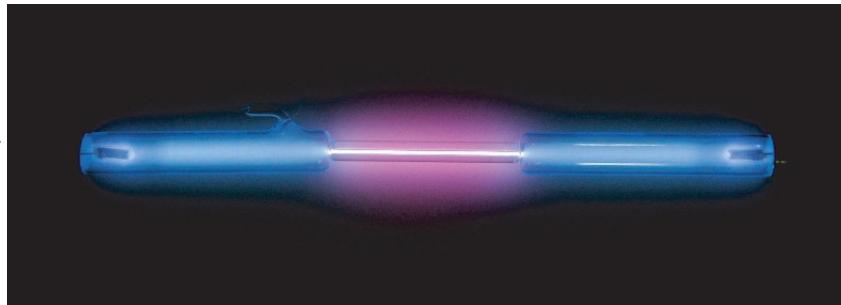
### ¿QUÉ ES LO QUE DETERMINA LOS COLORES DE LOS ÁTOMOS?

Los colores más simples a estudiar son las líneas de color nítidas emitidas o absorbidas por átomos individuales. Los átomos individuales se encuentran principalmente en los gases. El átomo más simple a estudiar es el del hidrógeno. El gas hidrógeno caliente, mostrado en la Figura 75, emite luz que consiste en un puñado de líneas espectrales nítidas, como se muestra a la izquierda de la Figura 76.

Ya en 1885, el maestro suizo Johann Balmer (1828-1898) había descubierto que las longitudes de onda de las líneas de hidrógeno visibles obedecen a la fórmula:

$$\frac{1}{\lambda_m} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{para } m = 3, 4, 5, \dots \quad (87)$$

**FIGURA 75** Una descarga de hidrógeno a baja presión en un tubo de vidrio largo (© Jürgen Bauer at [www.smart-elements.com](http://www.smart-elements.com)).



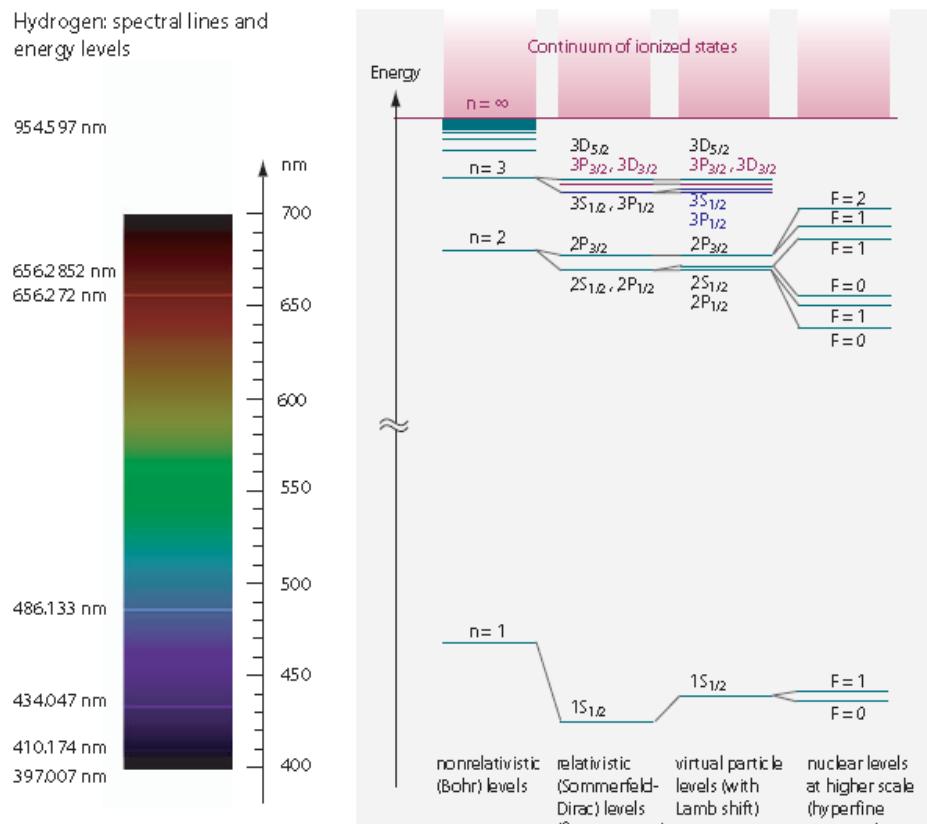
Mediciones cuidadosas, que incluyeron las líneas espectrales de hidrógeno en el infrarrojo y en el ultravioleta, permitieron a Johannes Rydberg (1854-1919) generalizar esta fórmula para:

$$\frac{1}{\lambda_m} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (88)$$

Donde  $n$  y  $m > n$  son enteros positivos, y la llamada *constante de Rydberg R* tiene el valor  $10,97 \mu\text{m}^{-1}$ ; Más fácil de recordar, el valor inverso es  $1 / R = 91,16 \text{ nm}$ . Todas las líneas de color emitidas por el hidrógeno satisfacen esta fórmula simple. La física clásica no puede explicar este resultado en absoluto. Así, la teoría cuántica tiene un desafío claramente definido aquí: explicar la fórmula y el valor de  $R$ .

**FIGURA 76** Hidrógeno atómico: el espectro visible del hidrógeno (NASA) y sus niveles de energía calculados en cuatro aproximaciones de precisión creciente.

¿Puede asociar las líneas visibles a las transiciones de nivel adecuados?



Incidentalmente, la transición  $\lambda_{21}$  para el hidrógeno se llama la línea de *Lyman-alfa*. Su longitud de onda, 121,6 nm, se encuentra en el ultravioleta. Se observa fácilmente con telescopios, ya que la mayoría de las estrellas visibles constan de hidrógeno excitado. La línea de Lyman-alfa se utiliza rutinariamente para determinar la velocidad de las estrellas o galaxias distantes, ya que el efecto Doppler cambia la longitud de onda cuando la velocidad es grande.<sup>ref.127</sup> El récord en 2004 fue una galaxia con una línea Lyman-alfa desplazada a 1337 nm. *Desafío 131 ny* ¿Puede calcular la velocidad con la que se aleja de la Tierra?

Desde el principio, estaba claro que los colores del hidrógeno son debidos al movimiento de su electrón. (¿Por qué? [Desafío 132 e](#)). La primera manera de deducir la fórmula de Balmer de la acción mínima fue encontrada por Niels Bohr en 1903. Bohr entendió que, en contraste con los planetas que rodean al Sol, el electrón que se mueve alrededor del protón sólo tiene un número discreto de posibles estados de movimiento: El momento angular del electrón está cuantizado. Suponiendo que el momento angular del electrón es un múltiplo entero de  $\hbar$  se obtiene la fórmula de Balmer y se explica el valor numérico de la constante de Rydberg  $R$ . Este cálculo es tan famoso que se encuentra en muchos libros de texto de escuela secundaria. El resultado también reforzó la decisión de Bohr de dedicar su vida a la exploración de la estructura del átomo. [Desafío 133 e](#)

Veinte años más tarde, en 1926, Erwin Schrödinger resolvió su ecuación de movimiento para un electrón que se mueve en el potencial electrostático  $V(r) = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  de un protón puntiforme. Al hacerlo, Schrödinger reprodujo el resultado de Bohr, dedujo la fórmula de Balmer y se hizo famoso en el mundo de la física. Sin embargo, este importante cálculo es largo y complejo.

Para entender los colores de hidrógeno, no es necesario resolver una ecuación de movimiento para el electrón; basta con comparar las energías de los estados inicial y final del electrón. Esto se puede hacer más fácilmente observando que una forma específica de la acción debe ser un múltiplo de  $\hbar/2$ . Este enfoque, una generalización de la explicación de Bohr, fue desarrollado por Einstein, Brillouin y Keller, y ahora lleva el nombre de ellos. Se basa en el hecho de que la acción  $S$  de cualquier sistema cuántico obedece<sup>ref.128</sup>

$$S = \frac{1}{2\pi} \oint dq_i p_i = \left( n_i + \frac{\mu_i}{4} \right) \hbar \quad (89)$$

para cada coordenada  $q_i$  y su momento conjugado  $p_i$ . La expresión refleja la similitud entre el momento angular y la acción. Aquí,  $n_i$  puede ser cero o cualquier número entero positivo, y  $\mu_i$  es el denominado *índice de Maslov*, un entero par, que en el caso de los átomos tiene el valor 2 para las coordenadas radiales y azimutales  $r$  y  $\theta$  y 0 para el ángulo de rotación  $\varphi$ . La integral debe tomarse a lo largo de una órbita completa. En palabras sencillas, *la acción  $S$  es un múltiplo semientero del cuanto de acción*. Este resultado puede utilizarse para calcular los niveles de energía de los sistemas cuánticos periódicos, como los átomos de hidrógeno.

Cualquier movimiento de rotación en un potencial esférico  $V(r)$  se caracteriza por una energía constante  $E$  y momentos angulares constantes  $L$  y  $L_z$ . [Desafío 134 ny](#) Por lo tanto, las cantidades de movimiento conjugados para las coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$  son

$$p_r = \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} \quad ; \quad p_\theta = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} \quad ; \quad p_\varphi = L_z. \quad (90)$$

Usando estas expresiones en la ecuación (89) y el ajuste  $n = n_r + n_\theta + n_\varphi + 1$ , obtenemos\* el resultado

$$E_n = \frac{-1}{n^2} \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = \frac{-Rhc}{n^2} = \frac{-c^2 m \alpha^2}{2n^2} \approx \frac{-2,19 \text{ aJ}}{n^2} \approx \frac{-13,6 \text{ eV}}{n^2} \quad (93)$$

Estos *niveles energéticos*  $E_n$ , los niveles no-relativistas de Bohr, se muestran en la [Figura 76](#).

Utilizando la idea de que un átomo de hidrógeno emite un único fotón cuando su electrón cambia del estado  $E_n$  a  $E_m$ , obtenemos exactamente la fórmula deducida de las observaciones por Balmer y Rydberg. [Desafío 136 e](#) La coincidencia entre la observación y el cálculo es de unos cuatro dígitos. Por (casi) primera vez, una propiedad material, el color de los átomos de hidrógeno, se había explicado a partir de un principio fundamental de la naturaleza. La clave de esta explicación fue el cuanto de acción  $\hbar$ . (Toda esta discusión supone que los electrones en átomos de hidrógeno que emiten luz están en estados propios).

[Desafío 137 s](#) ¿Puede argumentar por qué este es el caso?)

\*[Desafío 135 ny](#) El cálculo es sencillo. Después de la inserción de  $V(r) = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$  en la ecuación (90) es necesario realizar la integración (complicada). Usando el resultado general

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{dz}{z} \sqrt{Az^2 + 2Bz - C} = -\sqrt{C} + \frac{B}{\sqrt{-A}} \quad (91)$$

se tiene  $\left( n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar + L = n \hbar = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{m}}{-2E}$  (92), esto lleva a la fórmula de la energía (93)

En resumen, el cuento de acción implica que sólo se permiten ciertos valores de energía específicos para un electrón dentro de un átomo. El nivel de energía más bajo, para  $n = 1$ , se llama *estado fundamental*. Su valor energético 2,19 aJ es la *energía de ionización* del hidrógeno; si tal energía se añade al estado fundamental, el electrón ya no está unido al núcleo. La energía de ionización desempeña así el mismo papel para los electrones alrededor de los átomos que la *velocidad de escape*, o mejor, la *energía de escape* para los satélites o cohetes disparados desde los planetas.

De la misma manera que el cuento de acción determina los colores del átomo de hidrógeno, determina los colores de todos los demás átomos. Todas las líneas de Fraunhofer, ya sean observadas en el infrarrojo, visible y ultravioleta, se deben al cuento de acción. De hecho, todos los colores de la naturaleza se deben a una superposición de líneas de color, de modo que todos los colores, también los de los sólidos y los líquidos, están determinados por el cuento de la acción.

### EL TAMAÑO DE LOS ÁTOMOS

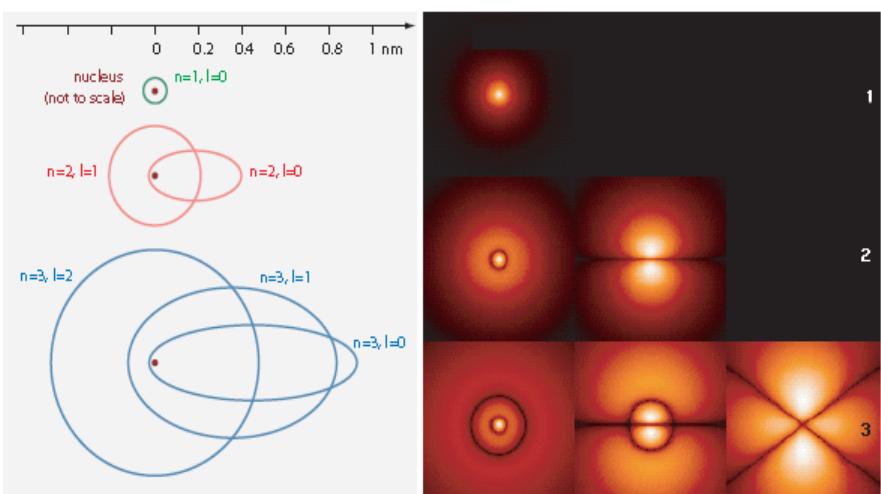
El cálculo que se acaba de realizar también produce el radio efectivo de la órbita del electrón en el hidrógeno. Está dado por

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4 \pi \epsilon_0}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{m_e c \alpha} = n^2 a_0 \approx n^2 52,918,937 \text{ pm} \quad , \quad \text{con } n=1, 2, 3, \dots \quad (94)$$

Vemos de nuevo que, en contraste con la física clásica, la teoría cuántica sólo permite ciertas órbitas específicas alrededor del núcleo. (Para más detalles acerca de la constante de estructura fina  $\alpha$ , véase más adelante.) El valor más pequeño, 53 pm para  $n = 1$ , se denomina el *radio de Bohr*, y se denotan con  $a_0$ .<sup>ref.129</sup> Para ser más precisos, estos radios son los tamaños medios de las nubes de electrones que rodean el núcleo.

En un gas de átomos de hidrógeno, la mayoría de los átomos están en el estado fundamental descrito por  $r_1 = a_0$  y  $E_1$ . Por otro lado, la teoría cuántica implica que un átomo de hidrógeno excitado al nivel  $n = 500$  es de un tamaño de aproximadamente 12  $\mu\text{m}$ : ¡más grande que muchas bacterias! Tales átomos inflados, usualmente llamados *átomos de Rydberg*, han sido efectivamente observados en el laboratorio, aunque son extremadamente sensibles a las perturbaciones.

**FIGURA 77** Las órbitas de electrones imaginadas, pero no existentes y por lo tanto falsas, del modelo de Bohr-Sommerfeld del átomo de hidrógeno (izquierda) y la descripción correcta, utilizando la densidad de probabilidad del electrón en los diversos estados (derecha) (© Wikimedia).



Resumiendo, el cuento de la acción determina el tamaño de los átomos. El resultado confirma así la predicción de Arthur Erich Haas de 1910.

En 1915, Arnold Sommerfeld comprendió que la analogía del movimiento de los electrones con el movimiento orbital podría continuar de dos maneras. En primer lugar, los electrones pueden moverse, en promedio, en elipses en lugar de círculos.

La cuantización del momento angular implica entonces que sólo son posibles ciertas excentricidades seleccionadas. Cuanto mayor sea el momento angular, mayor será el número de posibilidades: las primeras se muestran en la Figura 77. La mayor excentricidad corresponde al valor mínimo  $l = 0$  del llamado número cuántico azimutal, mientras que el caso  $l = n-1$ .<sup>ref.131</sup> Corresponden a órbitas circulares. Además, las elipses pueden tener diferentes orientaciones en el espacio.

El segundo punto que Sommerfeld observó fue que las velocidades del electrón en el hidrógeno son ligeramente relativistas: los valores de velocidad no son despreciables en comparación con la velocidad de la luz. De hecho, la frecuencia orbital de los electrones en el hidrógeno es

$$f_n = \frac{1}{n^3} \frac{e^4 m_e}{4 \pi \epsilon_0 h^3} = \frac{1}{n^3} \frac{m_e c^2 \alpha^2}{h} = \frac{6,7}{n^3} \text{ PHz} \quad (95)$$

Y la velocidad del electrón es

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar} = \frac{\alpha c}{n} \approx \frac{2.2}{n} \text{ Mm/s} \approx \frac{0.007}{n} c \quad (96)$$

Como era de esperar, cuanto más lejos está la órbita del electrón del núcleo, más lentamente se mueve.

Este resultado también puede comprobarse por experimento: el intercambio del electrón por un muón nos permite medir la dilatación del tiempo de su vida útil. Las mediciones están en excelente acuerdo con los cálculos. [ref.130](#)

En resumen, Sommerfeld señaló que el cálculo de Bohr no tuvo en cuenta los efectos relativistas. Y de hecho, las medidas de alta precisión muestran leves diferencias entre los niveles de energía no relativista de Bohr y los medidos. El cálculo debe ser mejorado.

### LA FORMA DE LOS ÁTOMOS

Los átomos libres son esféricos. Los átomos en campos externos se deforman. Sea cual sea la situación, la forma de los átomos es debido a la forma de la función de onda. El caso más simple es el átomo de hidrógeno. Sus funciones de onda - más precisamente, las funciones propias de los primeros niveles de energía - se ilustran en el lado derecho de las [Figuras 77](#). Estas funciones fueron calculadas por Erwin Schrödinger ya en 1926 y se encuentran en todos los libros de texto. No vamos a realizar el cálculo aquí, y sólo mostraremos los resultados.

El cuadrado de la función de onda es la densidad de probabilidad del electrón. Esta densidad disminuye rápidamente al aumentar la distancia desde el núcleo. Al igual que con una nube real, la densidad no es cero, incluso a grandes distancias. Por lo tanto, se podría argumentar que todos los átomos tienen dimensión infinita; en la práctica, sin embargo, los enlaces químicos o la disposición de los átomos en los sólidos muestran que es mucho más apropiado imaginar los átomos como nubes de dimensiones finitas.

Sorprendentemente, la primera medición de la función de onda de un átomo se remonta tan sólo al año 2013; fue realizado con una técnica de fotoionización inteligente por Aneta Stodolna y su equipo. El magnífico resultado experimental se muestra en la [Figura 78](#). Los datos confirman que las funciones de onda, a diferencia de la densidad de probabilidad, tienen nodos, es decir, líneas - o mejor, superficies - en los que su valor es cero.

Sintetizando lo dicho, todos los experimentos confirman que el electrón en el átomo de hidrógeno forma funciones de onda exactamente en el modo previsto por la teoría cuántica. En particular, también la forma de los átomos se encuentra de acuerdo con el cálculo de la mecánica cuántica.

### HIDRÓGENO RELATIVISTA

Es posible medir los niveles de la energía atómica con una precisión mucho mayor de la medida de las funciones de onda. En particular, sólo medir el nivel de energía nos permite la observación de los efectos relativistas.

También en el caso relativista, la acción de EBK tiene que ser un múltiplo de  $\hbar / 2$ . De la expresión relativista de la energía cinética del electrón en un átomo de hidrógeno [ref.128](#)

$$E + c^2 m = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} \quad (97)$$

*Desafío 138 ny* obtenemos la expresión

$$p_r^2 = 2 m E \left( 1 + \frac{E}{2 c^2 m} \right) + \frac{2 m e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{E}{c^2 m} \right) . \quad (98)$$

Introducimos ahora, por conveniencia, la llamada *constante de estructura fina*, como

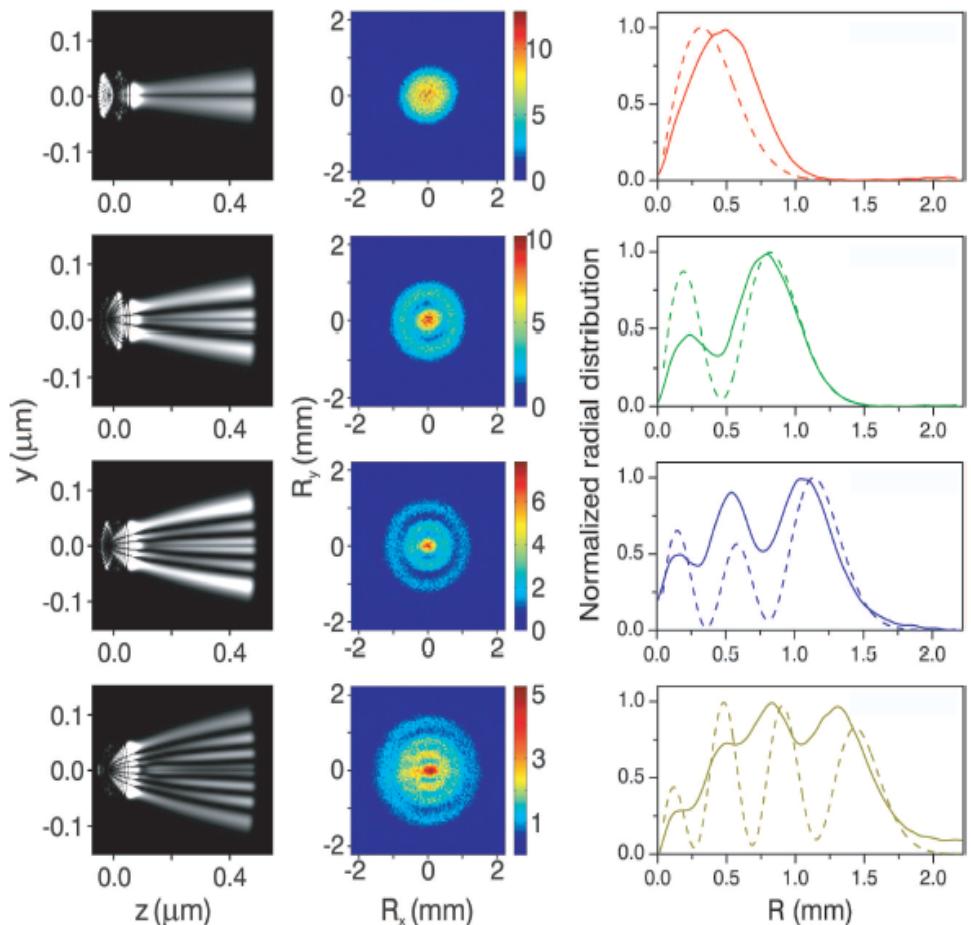
$$\alpha = e_2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 4\pi\hbar R/mc \approx 1/137,036.$$

( $\alpha$  es una constante sin dimensiones;  $R = 10,97\mu\text{m}^{-1}$  es la constante de Rydberg.) [Desafío 139 ny](#) La acción radial EBK implica entonces que

$$E_{nl} + c^2 m = c^2 \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(n - l - \frac{1}{2} + \sqrt{(l + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2}\right)^2}}} \quad (99)$$

Este resultado, encontrado por primera vez por Arnold Sommerfeld en 1915, es correcto para electrones puntiformes, es decir, no rotativos.

**FIGURA 77b** La figura muestra el cálculo y la estructura nodal medida del átomo de hidrógeno en un campo eléctrico externo débil, amplificado por una lente electrostática. Los modelos son sombras bidimensionales de interferencia de funciones de onda. Columna de la izquierda: cómo la función de onda se proyecta por los átomos en la pantalla macroscópica; Columna central: la estructura nodal medida; columna de la derecha: la comparación de la densidad de electrones medida (sólido) y calculada (de trazos). (© Aneta Stodolna/APS, da Ref. 137).



En realidad, el electrón tiene espín 1/2; los niveles correctos de energía relativista aparecen cuando se establece  $l = j \pm 1/2$  en la fórmula anterior. El resultado puede ser aproximado por

$$E_{nj} = -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right) \quad . \quad (100)$$

Se reproduce así el espectro de hidrógeno con una precisión extremadamente alta. Si comparamos el resultado con el no relativista, observamos que cada nivel no relativista  $n$  está subdividido en  $n$  niveles diferentes. Esta división se ilustra en la [Figura 76](#). En experimentos de precisión, la subdivisión de las líneas del espectro de hidrógeno es visible como la denominada *estructura fina*. La magnitud de la estructura fina depende de  $\alpha$ , una constante fundamental de la naturaleza. Dado que Arnold Sommerfeld descubrió la importancia de esta constante fundamental en este contexto, el nombre que eligió, la *constante de estructura fina*

fina, ha sido adoptado en todo el mundo. La constante de estructura fina describe la *intensidad* de la interacción electromagnética; la constante de estructura fina es la constante de acoplamiento electromagnético.



FIGURA 78 Paul Dirac (1902–1984)

Los experimentos modernos de alta precisión muestran efectos adicionales que modifican los colores del hidrógeno atómico. También se ilustran en la Figura 76. Los efectos de partículas virtuales y el acoplamiento del espín del protón proporcionan correcciones adicionales. Pero eso no es todo: los efectos isotópicos, el corrimiento Doppler y los cambios de nivel debido a campos eléctricos o magnéticos ambientales también influyen en el espectro de hidrógeno. Discutiremos el desplazamiento de Lamb más adelante.

#### ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS— OTRA VEZ

The equation was more intelligent than I was.

Paul Dirac sobre su ecuación, repitiendo una declaración hecha por Heinrich Hertz.

*La ecuación era más inteligente de lo que yo era*

¿Cuál es la ecuación de evolución de la función de onda en el caso de que se tengan en cuenta la relatividad, el espín y las interacciones con el campo electromagnético? Podemos tratar de generalizar la representación del movimiento relativista dada por Foldy y Wouthuysen al caso de partículas con interacciones electromagnéticas. Lamentablemente, esto no es una cuestión sencilla. La simple identidad entre la descripción clásica y la mecánica cuántica se pierde si se incluye el electromagnetismo.

Las partículas cuánticas *cargadas* son descritas mejor por otra representación equivalente del hamiltoniano, que fue descubierta mucho antes, en 1926, por el físico británico Paul Dirac.\*<sup>\*</sup> Dirac encontró un truco elegante para tomar la raíz cuadrada que aparece en el operador de energía relativista. En la representación de Dirac, el operador de Hamilton está dado por

$$H_{\text{Dirac}} = \beta m + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}. \quad (101)$$

Las cantidades  $\beta$  y los tres componentes  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \boldsymbol{\alpha}$  resultan matrices complejas  $4 \times 4$ .

En la representación de Dirac, el operador de posición  $x$  no es la posición de una partícula, sino que tiene términos adicionales; su operador de velocidad sólo tiene los valores propios más o menos la velocidad de la luz; el operador de velocidad no está relacionado simplemente con el operador cantidad de movimiento; la ecuación del movimiento contiene el famoso término "Zitterbewegung"; el momento angular orbital y el espín no son constantes separadas del movimiento.

Entonces, ¿por qué usar este Hamiltoniano horrible? Debido a que sólo el Hamiltoniano de Dirac se puede utilizar fácilmente para partículas cargadas. De hecho, se transforma en el Hamiltoniano acoplado al campo electromagnético por el denominado *acoplamiento mínimo*, es decir, por la sustitución

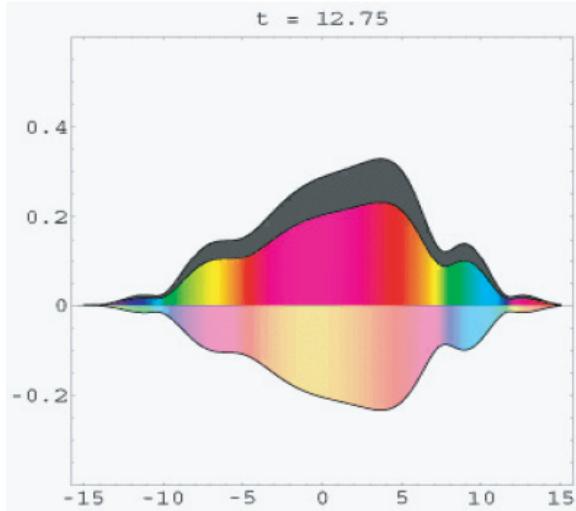
$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}, \quad (102)$$

que trata la cantidad de movimiento electromagnética como la cantidad de movimiento de las partículas. Con esta prescripción, el Hamiltoniano de Dirac describe el movimiento de partículas cargadas que interactúan con un campo electromagnético  $\boldsymbol{A}$ . La sustitución del acoplamiento mínimo no es posible en el Hamiltoniano de Foldy-Wouthuysen. En la representación de Dirac, las partículas son cargas eléctricas puras,

---

\* Paul Adrien Maurice Dirac (b. 1902Bristol, d. 1984 Tallahassee), Físico británico, hijo de un inmigrante francófono suizo. Estudió electrotécnica en Bristol, luego fue a Cambridge, donde más tarde se convirtió en profesor, poseyendo la cátedra que Newton había poseído una vez. En los años de 1925 a 1933 publicó un torrente de artículos, de los cuales varios valían un Premio Nobel; lo recibió en 1933. Unificó la relatividad especial y la teoría cuántica, predijo la antimateria, trabajó en espín y estadísticas, predijo los monopolos magnéticos, especuló sobre la ley de grandes números, y más aún. Su controversia, cordialidad y timidez, y su profundo conocimiento de la naturaleza, combinado con una dedicación a la belleza en la física teórica, lo convirtieron en una leyenda en todo el mundo durante su vida. Durante la última mitad de su vida trató, sin éxito, de encontrar una alternativa a la electrodinámica cuántica, de la que fue fundador, al ser repelido por los problemas de los infinitos. Murió en Florida, donde vivió y trabajó después de su retiro de Cambridge.

puntuales, sin estructura; en la representación de Foldy-Wouthuysen adquieren un radio de carga y una interacción de momento magnético. (Llegaremos a las razones más adelante, en la sección sobre QED.)<sup>ref.132</sup>



**FIGURA 79** El famoso Zitterbewegung: la superposición de los estados de energía positiva y negativa conduce a una oscilación alrededor de un valle medio. El color indica la fase; Se muestran dos curvas de color, ya que la ecuación de Dirac en una dimensión tiene sólo dos componentes (no cuatro); La curva gris es la densidad de probabilidad. (QuickTime film © Bernd Thaller)

Zitterbewegung (del alemán, *Bewegung*, 'movimiento' y *zitter*, 'tembloroso') es un movimiento de vibración ultrarrápido alrededor de la trayectoria clásica de una partícula cuántica, específicamente de los electrones y otras partículas de spin 1/2, que obedecen la ecuación de Dirac.

Más detalladamente, la descripción más simple de un electrón (o de cualquier otra partícula elemental, estable y cargada eléctricamente de espín 1/2) viene dada por la acción S y Lagrangiana

$$S = \int L_{QED} d^4x \quad \text{donde} \quad L_{QED} = \bar{\Psi} (i \hbar c \not{D} - c^2 m) \Psi - \frac{1}{4 \mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (103)$$

$$\text{y} \quad \not{D}_\mu = \gamma \mu (\partial_\mu - ieA_\mu)$$

El primer término en cuestión en el Lagrangiano conduce a la ecuación de Dirac: describe cómo las partículas elementales, cargadas, de espín 1/2 son movidas por campos electromagnéticos. El segundo término de radiación conduce a las ecuaciones de Maxwell y describe cómo los campos electromagnéticos son movidos por la función de onda de la partícula cargada. Junto con unos cuantos trucos de cálculo, estas ecuaciones describen lo que normalmente se llama *electrodinámica cuántica*, o QED para abreviar.

Hasta donde se conoce hoy, la descripción relativista del movimiento de la materia cargada y de los campos electromagnéticos dados por el Lagrangiano QED (103) es *perfecta*: no se han encontrado diferencias entre la teoría y el experimento a pesar de las intensas búsquedas y a pesar de una alta recompensa para cualquiera que las encontrara. Todas las predicciones conocidas se corresponden completamente con las mediciones. En los casos más espectaculares, la correspondencia entre teoría y medida se extiende a más de trece dígitos. Pero aún más interesante respecto a la precisión de QED son algunas de sus características que faltan en la electrodinámica clásica. Vamos a dar una rápida vuelta.

### OBteniendo una primera sensación para la ecuación de Dirac

El Lagrangiano QED que la función de onda de una partícula cargada en un potencial sigue la ecuación de Dirac:

$$i\hbar\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi = mc\psi. \quad (104)$$

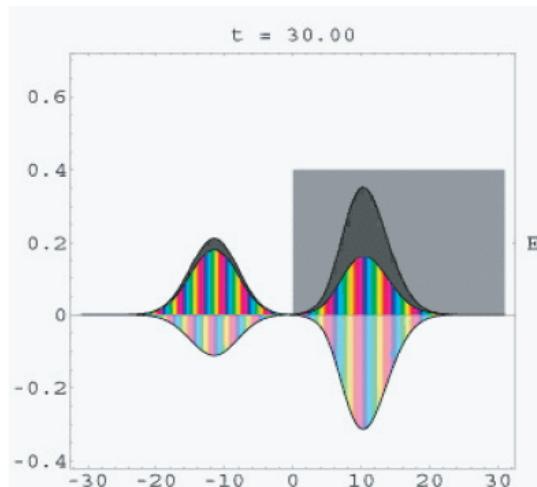
Los muchos índices no deben hacernos olvidar que esta ecuación simplemente indica que el autovalor del operador de energía-cantidad de movimiento es la masa de reposo (multiplicado por la velocidad de la luz  $c$ ). En otras palabras, la ecuación indica que la onda  $\psi$  se mueve con una velocidad de fase  $c$ .

La función de onda  $\psi$  tiene cuatro componentes complejos. Dos describen el movimiento de las partículas, y dos el movimiento de las antipartículas. Cada tipo de partícula necesita dos componentes complejos, porque la ecuación describe el espín y la densidad de partículas. El espín es una rotación, y una rotación requiere tres parámetros reales. Espín y densidad requieren así cuatro parámetros reales; se pueden combinar en dos números complejos, tanto para las partículas como para las antipartículas.

Cada uno de los cuatro componentes de la función de onda de una partícula relativista girante sigue la ecuación relativista de Schrödinger-Klein-Gordon [Desafío 140 e](#). Esto significa que la relación energía-momento relativista es seguida por cada componente por separado.

La función de onda relativista  $\psi$  tiene la importante propiedad de que una rotación de  $2\pi$  cambia su signo. Sólo una rotación de  $4\pi$  deja la función de onda sin cambios. *Desafío 141 e* Este es el comportamiento típico de partículas con espín 1/2. Por esta razón, los cuatro componentes de la función de onda de una partícula con espín 1/2 se llama *espinor*.

**FIGURA 80** La paradoja de Klein: el movimiento de una función de onda relativista que encuentra un potencial muy empinado. Parte de la función de onda se transmite; Esta parte es antimateria, como el componente inferior más grande muestra. (QuickTime film © Bernd Thaller)



#### ANTIMATERIA

“Antimateria” es ahora un término familiar. Curiosamente, el concepto apareció *antes* de que hubiera ninguna evidencia experimental para ello. La expresión relativista para la energía  $E$  de un electrón con carga  $e$  en el campo de una carga  $Q$  es

$$E + \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0 r} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad . \quad (105)$$

Esta expresión también permite soluciones con *energía negativa* y carga opuesta  $-e$ , si se utiliza la raíz negativa. La teoría cuántica demuestra que esta es una propiedad general, y estas soluciones se corresponde con lo que se llama *antimateria*.

En efecto, el compañero de antimateria del electrón fue predicho en la década de 1920 por Paul Dirac a partir de su ecuación (104), que se basa en la relación de energía relativista anterior (105). Ignorante de esta predicción, Carl Anderson descubrió el antielectrón en 1932, y lo llamó *positrón*. (El nombre correcto habría sido 'positón', sin la 'r'. Esta forma correcta se usa en el idioma francés.) Anderson estaba estudiando los rayos cósmicos, y notó que algunos 'electrones' estaban girando en la dirección equivocada respecto al campo magnético que había aplicado a su aparato. Comprobó a fondo su aparato y finalmente dedujo que había encontrado una partícula con la misma masa que el electrón pero con carga eléctrica positiva.

La existencia de positrones tiene muchas implicaciones extrañas. Ya en 1928, antes de su descubrimiento, el teórico sueco Oskar Klein había señalado que la ecuación de Dirac para los electrones hace una extraña predicción: cuando un electrón golpea una pared de potencial suficientemente elevada, el coeficiente de reflexión es *mayor* que la unidad. Tal muro reflejará *más* de lo que se le lanza. Además, una gran parte de la función de onda se transmite a través de la pared. En 1935, después del descubrimiento del positrón, Werner Heisenberg y Hans Euler explicaron la paradoja.<sup>ref.133</sup> Encontraron que la ecuación de Dirac predice que cada vez que un campo eléctrico excede el valor crítico de

$$E_c = \frac{m_e c^2}{e \lambda_e} = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} = 1,3 \text{ EV/m} \quad (106)$$

el vacío generará espontáneamente pares de electrones-positrones, los cuales serán separados por el campo. Como resultado, se reduce el campo original. Esta llamada *polarización del vacío* es la razón para el coeficiente de reflexión mayor que la unidad encontrada por Klein. En realidad, los potenciales escarpados corresponden a campos eléctricos altos.

La polarización del vacío muestra que, en contraste con la vida cotidiana, el *número* de partículas no es una constante en el dominio microscópico. Solamente la *diferencia* entre el número de partículas y el número de antipartículas resulta ser conservada. ¡La polarización del vacío limita así nuestra posibilidad de contar las partículas en la naturaleza!

La polarización del vacío es un efecto débil. Sólo se ha observado en colisiones de partículas de alta energía. En esos casos, el efecto incluso aumenta la constante de estructura fina! Más adelante describiremos ejemplos verdaderamente gigantescos de polarización del vacío que se postulan alrededor de los agujeros negros cargados.

Por supuesto, la generación de pares de electrones-positrones no es una *creación* de la nada, sino una *transformación* de la energía en materia. Estos procesos forman parte de toda descripción relativista de la naturaleza. Desafortunadamente, los físicos tienen el hábito de llamar a esta transformación "creación de pares", confundiendo así un poco la cuestión. La transformación viene descrita por la teoría del campo cuántico, que exploraremos en el próximo volumen.

### PARTÍCULAS VIRTUALES

A pesar de lo que hemos dicho anteriormente, valores de acción más pequeños que el valor de acción mínimo tienen un papel que desempeñar. Ya hemos encontrado un ejemplo: en una colisión entre dos electrones, hay un intercambio de fotones virtuales. Aprendimos que el fotón virtual intercambiado no puede ser observado. En efecto, la acción  $S$  para este intercambio obedece

$$S \leq \hbar. \quad (107)$$

En resumen, las partículas *virtuales* aparecen sólo como mediadores en las interacciones. No pueden ser observadas. Las partículas virtuales, en contraste con las partículas reales ordinarias, no obedecen a la relación  $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ . Por ejemplo, la energía cinética puede ser negativa. De hecho, las partículas virtuales son opuestas a las partículas "libres" o reales. Pueden observarse en el vacío si el tiempo de medición es muy corto. Son intrínsecamente de corta duración.

Los fotones virtuales son la causa de los potenciales electrostáticos, para los campos magnéticos, para el efecto Casimir, para la emisión espontánea, para la fuerza de van der Waals y para el desplazamiento de Lamb en los átomos. Un tratamiento más detallado demuestra que en cada situación con fotones virtuales también hay, con una probabilidad aún menor, electrones virtuales y positrones virtuales.

Las partículas virtuales masivas son esenciales para la polarización del vacío, para el límite en el número de elementos, para la radiación del agujero negro y para la radiación de Unruh. Las partículas virtuales masivas también juegan un papel en la interacción fuerte, donde mantienen los nucleones juntos en los núcleos y en la interacción nuclear débil, donde explican por qué ocurre el decaimiento (o decadencia) beta y por qué brilla el Sol.

En particular, los pares de partícula-antipartícula virtuales de materia y las partículas de radiación virtual forman conjuntamente lo que llamamos el *vacío*. Además, las partículas de radiación virtual forman lo que se suele llamar campos estáticos. Las partículas virtuales son necesarias para una descripción completa de todas las interacciones. En particular, las partículas virtuales son responsables de todo proceso de decaimiento.

### CURIOSIDADES Y DIVERTIDOS DESAFÍOS ACERCA DEL COLOR

¿Dónde está el mar más azul? El agua del mar, como el agua dulce, es azul porque absorbe la luz verde y roja. La absorción se debe a una banda vibratoria de la molécula de agua que se debe a una combinación de tramos moleculares simétricos y asimétricos.<sup>ref.134</sup> La absorción es débil, pero evidente. A 700 nm (rojo), la longitud de absorción 1/e de agua es de 1 m.

El agua de mar también puede ser de color brillante si el fondo del mar refleja la luz. Además, el agua de mar puede ser verde, cuando contiene partículas pequeñas que dispersan o absorben la luz azul. Muchas veces, estas partículas son suelo o plancton. (Los satélites pueden determinar el contenido de plancton a partir del "verdor" del mar). Así, el mar es especialmente azul si es profundo, tranquilo y frío; en ese caso, el fondo está lejano, el suelo no se mezcla en el agua, y el contenido del plancton es bajo. El mar de los Sargazos tiene 5 km de profundidad, es tranquilo y frío durante la mayor parte del año. A menudo se le llama el *más bello azul* de las aguas de la tierra.

Los lagos también pueden ser azules si contienen partículas minerales pequeñas. Las partículas dispersan la luz y llevan a un color azul por razones similares al color azul del cielo. Estos lagos azules se encuentran en muchos lugares de la Tierra.

\* \*

En las modernas mediciones de alta precisión de los espectros de hidrógeno, escuche al indiscutible maestro del campo: disfrute de la charla de 2012 de Theodor Hansch, que ha dedicado gran parte de su vida al tema, al [www.mediatheque.lindau-nobel.org](http://www.mediatheque.lindau-nobel.org).

\* \*

Si los átomos contienen electrones en órbita, la rotación de la Tierra, a través de la aceleración de Coriolis, debería tener un efecto sobre su movimiento, y por lo tanto sobre el color de los átomos. Esta hermosa predicción se debe a Mark Silverman; el efecto es tan pequeño, sin embargo, que aún no se ha medido. [ref.130](#)

\* \*

La luz es difractada por las rejillas o retículos de materiales. ¿Puede la materia ser difractada por rejillas de luz? Sorprendentemente, en realidad puede, como predijo Dirac y Kapitza en 1937. Esto se logró por primera vez en 1986, utilizando átomos. [ref.135](#) Para los electrones libres, la hazaña es más difícil; la confirmación más clara se produjo en 2001, cuando se utilizó una nueva tecnología láser para realizar una hermosa medición de los máximos típicos de difracción para electrones difractados por una rejilla de luz.

\* \*

La luz se refleja totalmente cuando se dirige a un material denso con un ángulo suficientemente grande para que no pueda entrar en el material. Un grupo de físicos rusos ha demostrado que si el material denso es excitado, la intensidad del haz totalmente reflejado puede *amplificarse*. No está claro si esto alguna vez conducirá a aplicaciones.

\* \*

Las maneras en que la gente maneja átomos individuales con campos electromagnéticos proporcionan muchos ejemplos hermosos de moderna Tecnología Aplicada. Hoy en día es posible levitar, atrapar, excitar, fotografiar, desexcitar y mover átomos individuales iluminándolos con luz. En 1997, el Premio Nobel de Física fue otorgado a quienes originaron este campo, Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William Phillips. [ref.136](#)

\* \*

Dado dos espejos y unos pocos fotones, es posible capturar un átomo y mantenerlo flotando entre los dos espejos. [ref.137](#) Esta hazaña, una de las varias maneras de aislar los átomos individuales, es ahora una práctica estándar en los laboratorios. *Desafío 142 ny* ¿Imagina cómo se hace?

\* \*

Un ejemplo de investigación moderna es el estudio de átomos *huecos*, es decir, átomos en los que ha desaparecido un número de electrones internos. Ellos han sido descubiertos en 1990 por J.P. Briand y su grupo. Aparecen cuando un átomo completamente ionizado, es decir, uno sin electrones, se pone en contacto con un metal. Los electrones adquiridos orbitan entonces en el exterior, dejando las capas internas vacías, en marcado contraste con los átomos habituales. Tales átomos huecos pueden formarse también por irradiación intensa con un láser. [ref.138](#)

\*\*

Los efectos relativistas cuánticos pueden ser vistos. Los dos más importantes conciernen al oro y al mercurio. El color amarillo del oro - que tiene el número atómico 79 - se debe a la energía de transición entre los electrones 5d y 6s, que absorben la luz azul. Sin efectos relativistas, esta transición se encuentra en el ultravioleta, similar a la transición de electrones 4d y 5s para la plata, y el oro sería incoloro. El color dorado es así un efecto relativista.

El Mercurio - que tiene el número atómico 80 - tiene una capa 6s llena. Debido a los mismos efectos relativistas que aparecen en el oro, estas capas están contraídas y no les gusta formar enlaces. Por esta razón, el mercurio sigue siendo líquido a temperatura ambiente, a diferencia de todos los demás metales. Por consiguiente, la relatividad es la razón por la que el mercurio es líquido, y que los termómetros funcionan.

\*\*

¿El fósforo es fosforescente?

\*\*

Se puede detectar el paso de un solo fotón a través de un dispositivo sin absorberlo. ¿Cómo se puede hacer esto?

## PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Igual que el tamaño de los átomos de hidrógeno, también el tamaño de todos los otros átomos está fijado por el cuanto de acción.

De hecho, el cuanto de acción determina las interacciones entre electrones. De esta manera, el cuanto del cambio determina todas las interacciones entre los átomos en la materia cotidiana y, por tanto, determina todas las demás propiedades materiales. La elasticidad, la plasticidad, el brillo, las propiedades magnéticas y eléctricas de los materiales están igualmente fijadas por el cuanto de acción. Solamente  $\hbar$  hace posible la electrónica. Estudiaremos algunos ejemplos de propiedades materiales en el próximo volumen. Varios detalles de la conexión general entre  $\hbar$  y las propiedades de los materiales son todavía un tema de investigación, aunque ninguno está en contradicción con el cuanto de acción. La investigación sobre los materiales es uno de los campos más importantes de la ciencia moderna, y la mayoría de los avances en el nivel de vida resultan de ella. Exploraremos algunos aspectos en el próximo volumen.

En resumen, la ciencia de los materiales ha confirmado que la física cuántica es también la descripción correcta de todos los materiales; la física cuántica ha confirmado que todas las propiedades materiales de la vida cotidiana son de origen electromagnético; y la física cuántica ha confirmado que todas las propiedades materiales de la vida cotidiana se deben a interacciones que implican electrones.

## LA FUERZA DEL ELECTROMAGNETISMO

El gran físico Wolfgang Pauli acostumbraba decir que después de su muerte, la primera cosa que preguntaría a Dios sería que le explicara la constante de estructura fina de Sommerfeld. (Otros solían comentar que después de que Dios se lo hubiera explicado, él pensaría un poco y luego chasquearía un: ¡Erróneo!')

La *constante de estructura fina*, introducida por Arnold Sommerfeld, es la constante sin dimensiones de la naturaleza cuyo valor medido es<sup>ref.139</sup>

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137,035\,999\,679(94)} \approx 0,007\,297\,352\,5376(50) \quad (108)$$

Este número primero aparece en las explicaciones de la estructura fina de los espectros de colores atómicos; de aquí su extraño nombre. Sommerfeld fue el primero en comprender su importancia general. Es fundamental en electrodinámica cuántica por varias razones.

En primer lugar, la constante de estructura fina describe la *fuerza del electromagnetismo*. El número  $\alpha$  resulta de la interacción de dos cargas eléctricas  $e$ . Escribiendo la relación de Coulomb para la fuerza  $F$  entre dos electrones como

$$F = \alpha \frac{\hbar c}{r^2} \quad (109)$$

resulta claro que la constante de estructura fina describe la fuerza del electromagnetismo.

Un valor más alto de la constante de estructura fina  $\alpha$  significaría una atracción o repulsión más fuerte entre cuerpos cargados. Así, el valor de  $\alpha$  determina el tamaño de los átomos y, de hecho, el de todas las cosas, al igual que todos los colores en la naturaleza.

En segundo lugar, es únicamente debido a que la constante de estructura fina  $\alpha$  es tan pequeña por lo que somos capaces de hablar acerca de partículas. Efectivamente, sólo porque la constante de estructura fina es mucho menor que 1 es posible distinguir las partículas unas de otras. Si el número  $\alpha$  fuera próximo o más grande que 1, las partículas interaccionarían tan fuertemente que no sería posible observarlas separadamente o hablar sobre partículas en absoluto.

Esto conduce a la tercera razón de la importancia de la constante de estructura fina. Puesto que es un número sin dimensiones, ello implica que hay algún mecanismo aún desconocido que fija su valor. El descubrimiento de este mecanismo es uno de los desafíos que quedan en nuestra aventura.

En tanto que el mecanismo permanezca desconocido – como era el caso en 2007 – ;no comprenderemos el color y el tamaño de una sola cosa alrededor nuestro!

Cambios pequeños en la fuerza de atracción electromagnética entre electrones y protones tendrían numerosas e importantes consecuencias.

*Desafío 143 s* ¿Podría describir lo que sucedería con el tamaño de la gente, con el color de los objetos, con el color del Sol o con el funcionamiento de las computadoras, si la fuerza se duplicara? ¿Y si fuera cayendo gradualmente a la mitad de su valor habitual?

Desde los años siguientes a 1920, la explicación del valor de  $\alpha$  ha sido visto como uno de los más difíciles desafíos que afronta la física moderna. Esta es la razón de la fantasía de Pauli. En 1946, durante su conferencia de recepción del premio Nobel, repitió la afirmación que una teoría que no determine este número no puede ser completa.<sup>ref.140</sup> Desde entonces, los físicos parecen haber caido en dos clases: los que no se atrevieron a asumir el Desafío, y los que no tenían ni idea. Esta fascinante historia todavía nos espera.

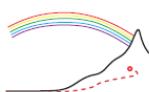
El problema de la constante de la estructura fina es tan profundo que conduce a muchos extravíos. Por ejemplo, a veces se afirma que es imposible cambiar las unidades físicas de tal manera que  $\hbar$ ,  $c$  y  $e$  son iguales a 1 al mismo tiempo, porque al hacerlo cambiaría el número  $\alpha = 1/137,036....$

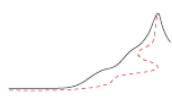
*Desafío 144 s* ¿Puede demostrar que este argumento es erróneo?

#### UN RESUMEN SOBRE COLORES Y MATERIALES

En síntesis, el cuanto de acción  $\hbar$ , junto con la interacción entre el campo electromagnético y los electrones dentro de la átomos, moléculas, líquidos y sólidos, determina el tamaño, la forma, el color y las propiedades materiales de todas las cosas a nuestro alrededor.

La fuerza de la interacción electromagnética es descrita por la constante de estructura fina  $\alpha \approx 1/137,036$ . Su valor continúa todavía inexplicado.





## Capítulo 9

# FÍSICA CUÁNTICA EN UNA CÁSCARA DE NUEZ

## C

omparada con la física clásica, la teoría cuántica es definitivamente más compleja. La idea básica, sin embargo, es simple: en la naturaleza hay un cambio mínimo, o una acción mínima, con el siguiente valor  $\hbar = 1,1 \cdot 10^{-34}$  Js. El valor de la acción mínima, conduce a todas las extrañas observaciones hechas en el dominio microscópico, tales como el comportamiento ondulatorio de la materia, las relaciones de indeterminación, la decoherencia, la aleatoriedad en las medidas, la indistinguibilidad, la cuantización del momento angular, el efecto túnel, la creación de pares, el decaimiento y las reacciones de las partículas.

La esencia de la teoría cuántica es así la ausencia de un cambio infinitamente pequeño. Las matemáticas de la teoría cuántica son abstractas y complicadas, sin embargo. ¿Mereció la pena esta parte de nuestra caminata? Lo mereció: los resultados son profundos, y la exactitud de la descripción es *completa*. En primer lugar daremos una visión general de estos resultados y luego pasaremos a las preguntas que todavía están abiertas.

### RESULTADOS FÍSICOS DE LA TEORÍA CUÁNTICA

Deorum offensae diis curae. Tiberio, según lo informado por Tácito.  
Los delitos de los dioses están al cuidado de los dioses

Toda la teoría cuántica puede resumirse en una frase:

▷ *En la naturaleza, no se observan acciones o cambios más pequeños que  $\hbar = 1,1 \cdot 10^{-34}$  Js .*

La existencia de la mínima acción en la naturaleza directamente conduce a la principal lección que aprendemos acerca del movimiento en la parte cuántica de nuestra aventura:

▷ *Si se mueve, está hecho de cuantones, o partículas cuánticas.*

Esta frase se aplica a cada sistema físico, así pues a todos los objetos y a todas las imágenes, es decir, a toda la materia y toda la radiación. Todo material que se mueve está hecho de *cuantones*. Piedras, ondas de agua, luz, ondas de sonido, terremotos, gelatina y cualquier cosa que pueda interaccionar con otra están hechas de partículas cuánticas.

Antes nos preguntábamos: ¿qué es la materia y qué son las interacciones? Ahora respondemos: están compuestas de partículas cuánticas elementales. Una *partícula cuántica elemental* es una entidad numerable que es más pequeña que su propia longitud de onda Compton. Todas las partículas elementales son descritas por la energía-cantidad de movimiento, masa, giro, C, P y paridad T. Sin embargo, como veremos en el próximo volumen, esto no es todavía la lista completa de las propiedades de las partículas. Acerca de las propiedades *intrínsecas* de las partículas cuánticas, es decir, aquellas que no dependen del observador, la teoría cuántica hace una simple afirmación:

▷ *En la naturaleza, todas las propiedades intrínsecas – con la excepción de la masa – tales como carga eléctrica, espín, carga fuerte, paridades, etc., aparecen como números enteros de una unidad básica. Dado que todos los sistemas físicos están formados de cuantones, todas las propiedades intrínsecas –con excepción de la masa\* – o se adicionan o se multiplican.*

Resumiendo, todas las entidades que se mueven están hechas de partículas cuánticas descritas por propiedades intrínsecas *discretas*. Para ver cuán profundo es este resultado, se puede aplicar a todas aquellas entidades en movimiento de las que solemos olvidarnos, como fantasmas, espíritus, ángeles, ninfas, demonios, demonios, dioses, diosas y almas. *Desafío 145 e* Usted puede comprobar por sí mismo qué sucede cuando su naturaleza particular se toma en consideración.

\*Más precisamente, junto con la masa, también los ángulos de mezcla no se cuantifican. Estas propiedades se definen en el siguiente volumen.

## RESULTADOS SOBRE EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CUÁNTICAS

Los cuantones, o partículas cuánticas, difieren de las partículas cotidianas: las partículas cuánticas *interfieren*: Se comportan como una mezcla de partículas y ondas.

Esta propiedad se deriva directamente de la existencia de  $\hbar$ , la acción mínima en la naturaleza. De la existencia de  $\hbar$ , la teoría cuántica deduce todas sus afirmaciones sobre el movimiento de partículas cuánticas. Resumimos las principales.

No hay *receso* en la naturaleza. Todos los objetos obedecen al principio de indeterminación, que establece que las indeterminaciones en la posición  $x$  y la cantidad de movimiento  $p$  siguen

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \text{ con } \hbar = 1,1 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (110)$$

y hacen del reposo una imposibilidad. El estado de las partículas cuánticas se define por los mismos observables que en la física clásica, con la diferencia de que los observables no comutan.

La física clásica aparece en el límite que la constante de Planck  $\hbar$  puede efectivamente establecerse en cero.

La teoría cuántica introduce un *elemento probabilístico* en el movimiento. Resulta del valor mínimo de acción a través de las interacciones con los baños que forman parte del entorno de todo sistema físico. De manera equivalente, las probabilidades aparecen en cualquier experimento que pretende llevar a cabo un cambio que sea más pequeño que el cuanto de acción.

Las partículas cuánticas se *comportan como ondas*. La longitud de onda de Broglie asociada,  $\lambda$ , viene dada de la cantidad de movimiento  $p$  a través de

$$\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p \quad (111)$$

tanto en el caso de la materia como de la radiación. Esta relación es el origen del comportamiento ondulatorio de la luz y la materia. Las partículas de luz se llaman fotones; su observación es ahora una práctica estándar. La teoría cuántica afirma que las ondas de partículas, como todas las ondas, interfieren, se refractan, se dispersan, se amortiguan, pueden ser amortiguadas y pueden ser polarizadas. Esto se aplica a fotones, electrones, átomos y moléculas. Todas las ondas estando hechas de partículas cuánticas, pueden ser vistas, tocadas y movidas. La luz, por ejemplo, se puede "ver" en la dispersión fotón-fotón en el vacío a altas energías, puede ser "tocada" usando el efecto Compton, y puede ser "movida" por la curvatura gravitacional. Las partículas de la materia, tales como moléculas o átomos, se pueden ver en microscopios electrónicos y pueden ser tocadas y movidas con microscopios de la fuerza atómica. La interferencia y difracción de las partículas de onda se observa diariamente en el microscopio electrónico.

Las ondas de materia se pueden imaginar como nubes que *giran localmente*. En el límite del tamaño insignificante de la nube, las partículas cuánticas se pueden imaginar como pequeñas flechas giratorias. Equivalentemente los cuantones tienen una *fase*.

Las partículas *no pueden estar encerradas eternamente*. Aunque la materia es impenetrable, la teoría cuántica demuestra que no existen cajas estancas u obstáculos insuperables. La vallas no son para siempre. Esperando lo suficiente siempre se nos permite superar cualquier confinamiento, ya que hay una probabilidad finita de superar cualquier obstáculo. Este proceso se llama efecto túnel cuando se ve desde el punto de vista espacial y se llama decaimiento cuando se ve desde el punto de vista temporal. El efecto túnel (tunneling) explica el funcionamiento de los tubos de televisión, así como el decaimiento radiactivo.

Todas las partículas y todos los haces de partículas *pueden ser rotados*. Las partículas poseen un momento angular intrínseco llamado *espín*, que especifica su comportamiento bajo rotaciones. Los bosones tienen espín entero, los fermiones tienen espín semientero. Un número par de fermiones unidos o cualquier número de bosones enlazados dan un bosón compuesto; un número impar de fermiones ligados que interactúan producen un fermión de baja energía. Los sólidos son impenetrables debido al carácter de fermión de sus electrones en los átomos.

Las partículas idénticas son *indistinguibles*. La radiación está formada por partículas indistinguibles llamadas bosones, la materia por fermiones. Bajo intercambio de dos fermiones en separaciones tipo espacial, la función de onda cambia de signo, mientras que para dos bosones la función de onda permanece invariada. Todas las demás propiedades de las partículas cuánticas son las mismas que para las partículas clásicas, a saber, numerabilidad, interacción, masa, carga, momento angular, energía, cantidad de movimiento, posición, así como la impenetrabilidad para la materia y la penetrabilidad para la radiación. No existen máquinas de copiado perfectas.

En las colisiones, las partículas *interactúan localmente*, a través del intercambio de otras partículas. Cuando las partículas de materia chocan, interactúan a través del intercambio de bosones virtuales, es decir, de bosones fuera de la capa. Por lo tanto, el cambio de movimiento se debe al intercambio de partículas. El intercambio de bosones de espín par sólo media en interacciones atractivas. El intercambio de bosones de espín impar media las interacciones repulsivas.

Las propiedades de las colisiones implican la no conservación del número de partículas. En las colisiones, las partículas pueden aparecer - es decir, pueden ser 'creadas' - o desaparecer - es decir, pueden ser "aniquiladas". Esto es cierto tanto para los bosones como para fermiones.

Las propiedades de las colisiones implican la existencia de *antipartículas*, que se observan regularmente en experimentos. Los fermiones elementales, en contraste con muchos bosones elementales, difieren de sus antipartículas; pueden ser creados y aniquilados sólo en parejas. Los fermiones elementales tienen masa no nula y se mueven más lentamente que la luz.

Las partículas pueden *decaer y ser transformadas*. Investigaciones exhaustivas demuestran que las colisiones implican la no conservación del tipo de partícula. En las colisiones, las partículas seleccionadas pueden cambiar sus propiedades intrínsecas. Estas observaciones se detallarán en el siguiente volumen. De manera equivalente, el cuanto de acción implica que las cosas se *rompan* y los seres vivos *mueran*.

Las imágenes, hechas de radiación, son descritas por las mismas propiedades que la materia: posición, fase, velocidad, masa, cantidad de movimiento, etc. incluso si sus valores y relaciones difieren. Las imágenes sólo pueden localizarse con una precisión de la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación que las produce.

La aparición de la constante de Planck  $\hbar$  implica que en la naturaleza existen las *escalas de longitud* y las *escalas de tiempo*. La teoría cuántica introduce una fluctuación (jitter) fundamental en cada ejemplo de movimiento. Así, lo infinitamente pequeño se elimina. De esta manera, aparecen límites inferiores a las dimensiones estructurales y a muchas otras cantidades medibles. En particular, la teoría cuántica demuestra que es imposible que en los electrones de un átomo pequeñas criaturas vivan de la misma manera que los seres humanos viven en la Tierra que gira alrededor del Sol. La teoría cuántica muestra la imposibilidad de Lilliput.

Los relojes y las reglas de medir tienen *precisión finita*, debido a la existencia de una acción mínima y debido a sus interacciones con los baños. Por otra parte, todos los aparatos de medición deben contener baños, ya que de otro modo no serían capaces de registrar resultados.

La física cuántica no deja espacio para la fusión fría, la astrología, la teletransportación, la telequinesis, los fenómenos sobrenaturales, los universos múltiples o los fenómenos más veloces que la luz, no obstante la paradoja EPR.<sup>ref.141</sup>

### LOGROS EN EXACTITUD Y PRECISIÓN

A parte de los cambios conceptuales, la teoría cuántica mejoró la exactitud de las predicciones de unos pocos dígitos, si es que hay alguno, comunes en la mecánica clásica al número completo de dígitos, a veces trece, que se pueden medir hoy.

La limitada precisión por lo general no se da por la incorrección de la teoría, se da por la exactitud de la medición. En otras palabras, el acuerdo sólo está limitado por la cantidad de dinero que el experimentador esté dispuesto a gastar. La Tabla 8 muestra esto con más detalle.

Observamos que los valores predichos no difieren de los medidos. Si recordamos que la física clásica no nos permite calcular ninguno de los valores medidos, tenemos una idea del progreso alcanzado por la física cuántica. Este avance en la comprensión se debe a la introducción del cuanto de acción  $\hbar$ . De manera equivalente, podemos decir: ninguna descripción de la naturaleza es completa sin el cuanto de acción.

En resumen, la teoría cuántica es precisa y exacta. En el dominio microscópico la teoría cuántica está en correspondencia *perfecta* con la naturaleza; a pesar de las perspectivas de fama y riqueza, a pesar del mayor número de investigadores de la historia, no se ha encontrado todavía ninguna contradicción entre la observación y la teoría.

Por otro lado, explicar el valor medido de la constante de estructura fina,  $\alpha = 1 / 137,035\,999\,074$  (44), sigue siendo un problema abierto de la interacción electromagnética.

**TABLA 8** Comparaciones seleccionadas entre la física clásica, la teoría cuántica y el experimento.

Observable	Predicción clásica	Predicción de la teoría cuántica <sup>a</sup>	Medida	Coste estimado
<b>Movimiento simple de los cuerpos</b>				
Indeterminación	0	$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$	$(1 \pm 10^{-2}) \hbar/2$	10 k€
Longitud de onda de la materia	ninguna	$\lambda p = 2\pi\hbar$	$(1 \pm 10^{-2}) \hbar$	10 k€
Longitud de onda Compton	ninguna	$\lambda_c = h/m_e c$	$(1 \pm 10^{-3}) \lambda$	20 k€
Tasa de creación de pares	0	$\sigma E$	acuerdo	100 k€
Tiempo en el decaimiento radioactivo del hidrógeno	ninguna	$\tau \sim 1/n^3$	$(1 \pm 10^{-2})$	5 k€
Mínimo momento angular	0	$\hbar/2$	$(1 \pm 10^{-6}) \hbar/2$	10 k€
Efecto Casimir/presión	0	$p = (\pi_2 \hbar c)/(240 r^4)$	$(1 \pm 10^{-3})$	30 k€
<b>Colores de los objetos</b>				
Espectros de objetos calientes	diverge	$\lambda_{\max} = hc/(4.956 kT)$	$1 \pm 10^{-4} \Delta\lambda$	10 k€
Desplazamiento Lamb	ninguna	$\Delta\lambda = 1057.86(1) \text{MHz}$	$(1 \pm 10^{-6}) \Delta\lambda$	50 k€
Constante de Rydberg	ninguna	$R_\infty = m_e c^2/2h$	$(1 \pm 10^{-9}) R_\infty$	50 k€
Constante de Stephan-Boltzmann	ninguna	$\sigma = \pi^2 k^4 / 60 \hbar^3 c^2$	$(1 \pm 3 \cdot 10^{-8}) \sigma$	20 k€
Constante de desplazamiento de Wien	ninguna	$b = \lambda_{\max} T$	$(1 \pm 10^{-5}) b$	20 k€
Índice de refracción del agua	ninguna	1,34	Unos pocos %	1 k€
Dispersión fotón-fotón	0	De QED: finito	De acuerdo	50M€
Razón giromagnética del electrón	1 o 2	2,002319304365(7)	2,002319304361 53(53)	30M€
Momento magnético anómalo del muón	0	$1,16591827(63) 10^{-11}$	$116592080(60) 10^{-11}$	100 M€
<b>Propiedades de la materia compuesta</b>				
Duración de la vida de un átomo	$\approx 1 \mu s$	$\infty$	$> 10^{20} \text{ a}$	1 €
División hiperfina del muonio	ninguna	$4463302$ $542(620) \text{Hz}$	$4463302765(53) \text{Hz}$	1 €
Tamaño molecular y forma	ninguna	De QED	Dentro de $10^{-3}$	20 k€

a. Todas las predicciones están calculadas a partir de las constantes físicas básicas dadas en el [Apéndice A](#).

### ¿ES MAGIA LA TEORÍA CUÁNTICA?

Estudiar la naturaleza es como experimentar la magia. La Naturaleza frecuentemente parece diferente de lo que es. Durante un acto de magia somos engañados – pero solo si olvidamos nuestras propias limitaciones.

Una vez comenzamos a vernos nosotros mismos como parte del juego, comenzamos a entender los trucos. Esto es lo divertido de la magia. Lo mismo sucede en física.

\* \*

*La Naturaleza parece irreversible*, aun cuando no lo es. Nunca recordamos el futuro. Somos engañados porque somos macroscópicos.

\* \*

*La Naturaleza parece decoherente*, aun cuando no lo es. Somos engañados de nuevo porque somos macroscópicos.

\* \*

*No hay relojes* en la naturaleza. Somos engañados por los de la vida cotidiana porque estamos rodeados de un enorme número de partículas.

\* \*

*Con frecuencia el movimiento pequeño parece desaparecer*, aun cuando es eterno. Somos engañados de nuevo porque nuestros sentidos no pueden experimentar el dominio microscópico.

\* \*

*Los objetos parecen distinguibles*, aun cuando las propiedades estadísticas de sus componentes muestran que no lo son. Somos engañados porque vivimos a bajas energías.

\* \*

*La materia parece continua*, aun cuando no lo es. Somos engañados a causa de las limitaciones de nuestros sentidos.

\* \*

*El movimiento parece determinista en el sentido clásico*, a pesar de que es al azar. Somos engañados otra vez porque somos macroscópicos.

\*\*

En pocas palabras, nuestra condición humana nos engaña permanentemente. La respuesta a la cuestión del título es: la física clásica es como magia, pero los trucos son descubiertos por la teoría cuántica. Esta es su principal atracción.

### LA TEORÍA CUÁNTICA ES EXACTA, PERO PUEDE HACER MÁS

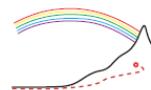
Podemos resumir esta parte de nuestra aventura con una simple frase: *la física cuántica es la descripción de la materia y la radiación sin el concepto de lo infinitamente pequeño*. Todo cambio en la naturaleza es descrito por cantidades finitas, sobre todo, por el mínimo cambio posible en la naturaleza, el cuanto de acción  $\hbar = 1,054\,571\,726(47) \cdot 10^{-34}$  Js.

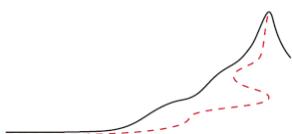
Todos los experimentos, sin excepción, muestran que el cuanto de acción  $\hbar$  es el cambio observable más pequeño. La descripción de la naturaleza con el cuanto de acción es de esta forma *exacta* y *definitiva*. La acción medible más pequeña  $\hbar$ , como la velocidad máxima de la energía  $c$ , es una propiedad fundamental de la naturaleza. Se les podrían llamar *verdades fundamentales*.

Puesto que la teoría cuántica se sigue lógica y completamente de la mínima acción medible  $\hbar$ , la manera más simple - y la única manera - de refutar la teoría cuántica es encontrar una observación que contradiga el a valor de cambio mínimo  $\hbar$ . *Desafío 146* ¡Inténtelo!

Pero aunque hemos deducido una propiedad fundamental de la naturaleza, si volvemos al comienzo de nuestra exploración de la teoría cuántica, no podemos esconder una cierta decepción. Sabemos que la física clásica no puede explicar la vida. Buscando los detalles del movimiento microscópico, nos encontramos con tantos aspectos interesantes pero aún no hemos logrado la explicación de la vida. Por ejemplo, sabemos lo que determina la velocidad de los electrones en los átomos, pero no sabemos qué determina la velocidad de funcionamiento de un atleta. En realidad, ni siquiera hemos hablado de las propiedades de ningún sólido o líquido, y mucho menos de las estructuras más complejas como los seres vivos.

En otras palabras, después de esta introducción a la teoría cuántica, todavía tenemos que conectarla a nuestro mundo cotidiano. Por lo tanto, el tema del próximo volumen será la exploración del movimiento de los seres vivos y del movimiento dentro de toda la materia, incluyendo los sólidos y las estrellas, Utilizando el cuanto de acción como fundamento.





## UNIDADES, MEDIDAS Y CONSTANTES

**L**

as medidas son comparaciones con patrones. Los patrones o estándares están basados en *unidades*.

Muchos sistemas de unidades diferentes han sido usados en todo el mundo a lo largo de la historia.

La mayoría de estos estándares confieren poder a la organización que está a cargo de ellos. Tal poder puede ser mal utilizado, lo que es el caso hoy en día, por ejemplo en la industria de la computación, y así fue en el lejano pasado. La solución es la misma en ambos casos: organizar una norma estándar independiente y global. Para las unidades de medida, esto ocurrió en el siglo XVIII: a fin de evitar el mal uso por parte de instituciones autoritarias, para eliminar los problemas con patrones diferentes, cambiantes e irreproducibles, y - esto no es una broma - para simplificar la recaudación de impuestos y para hacerla más justa, un grupo de científicos, políticos y economistas acordaron un conjunto de unidades . Se llama el *Sistema Internacional de Unidades* , abreviado SI, y se define por un tratado internacional , la "Convention du Metre". Las unidades son gestionadas por una organización internacional, la "Conférence Général de Poids et Mesures", y sus organizaciones hijas, la " Comisión Internacional de Pesas y Medidas " y la "Oficina Internacional de Pesas y Medidas " ( BIPM ) . Todo se originó en la época inmediatamente anterior a la revolución francesa. [ref.142](#)

### UNIDADES DEL SI

Todas las unidades del SI se construyen a partir de siete *unidades básicas*, cuyas definiciones oficiales, traducidas del francés, se indican a continuación , junto con las fechas de su formulación:

- El **segundo** es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. (1967) \*
- El **metro** es la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de  $1/299\,792\,458$  de segundo. '( 1983 ) \*
- El **kilogramo** es la unidad de masa; es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. (1901) \*
- El **amperio** es la corriente constante que, circulando en dos conductores paralelos, rectilíneos , de longitud infinita , de sección circular despreciable y separados 1 metro en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual a  $2 \cdot 10^{-7}$  newton por metro de longitud. (1948) \*
- El **kelvin** , unidad de temperatura termodinámica , es la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. (1967) \*
- El **mol** es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12. (1971) \*
- La **candela** es la intensidad luminosa, en una dirección dada , de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia  $540 \cdot 10^{12}$  hercios y tiene una intensidad radiante en esa dirección de ( 1/683 ) watt por estereorradián. (1979)\*\*

Notemos que las unidades de tiempo y longitud se definen como ciertas propiedades de un ejemplo de

---

\*\* Los símbolos respectivos son s, m, kg, A, K, mol y cd. El prototipo internacional es un cilindro de platino-iridio conservado en el BIPM en Sèvres, Francia. Para obtener más detalles sobre los niveles de cesio, consulte un libro sobre física atómica. [ref.143](#) El rango de temperatura y temperatura Celsius es como:  $y \theta^{\circ} C = T / K - 273,15$ ; observe la pequeña diferencia con el número que aumenta en la definición de kelvin. SI también dice: 'Cuando se usa el mol, las entidades elementales deben especificarse y ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o agrupaciones específicas de tales partículas. En la definición de mol, se entiende que los átomos de carbono 12 están libres, en reposo y en su estado básico. En la definición de la candela, la frecuencia de la luz corresponde a 555,5 nm, es decir, al color verde, alrededor de la longitud de onda donde el ojo es más sensible.'

movimiento estándar, es decir, la luz. En otras palabras, también la Conferencia General de Pesas y Medidas remarca que la observación del movimiento es un *requisito previo* para la definición y construcción del tiempo y el espacio. *El movimiento es el fundamento de toda observación y de toda medición.* Por cierto, el uso de la luz en las definiciones fue propuesto ya en 1827 por Jacques Babinet.\*

A partir de estas unidades básicas, se definen todas las demás unidades por multiplicación y división. Por lo tanto, todas las unidades del SI tienen las siguientes propiedades:

- Las Unidades del SI forman un sistema con la *precisión del estado de la técnica en cada momento*: todas las unidades se definen con una precisión que es mayor que la precisión de las medidas de uso común. Por otra parte, regularmente se mejora la precisión de las definiciones. La presente incertidumbre relativa de la definición del segundo es de alrededor de  $10^{-14}$ , para el metro sobre  $10^{-10}$ , para el kilogramo cerca de  $10^{-9}$ , para el amperio  $10^{-7}$ , para el mol menos de  $10^{-6}$ , para el kelvin  $10^{-6}$  y para la candela  $10^{-3}$ .
- Las Unidades del SI forman un sistema *absoluto*: todas las unidades se definen de tal manera que puedan ser reproducidos en cada laboratorio equipado adecuadamente, de forma independiente, y con alta precisión. Esto evita en lo posible cualquier uso indebido de la agencia de certificación. (El kilogramo, siendo definido con la ayuda de un artefacto, es la última excepción a este requisito, una amplia investigación está en marcha para eliminar este artefacto de la definición - una carrera internacional que llevará unos cuantos años más. Hay dos enfoques: contar partículas, o la fijación de  $\hbar$ . El primero se puede lograr en los cristales, y el segundo utilizando cualquier fórmula en la que aparezca  $\hbar$ , tal como la fórmula de la longitud de onda de De Broglie o el efecto Josephson.)
- Las Unidades del SI forman un sistema *práctico*: las unidades básicas son cantidades de magnitudes cotidianas. Las Unidades utilizadas con frecuencia tienen nombres y abreviaturas estándar. La lista completa incluye las siete unidades básicas que acabamos de dar, las unidades suplementarias, las unidades derivadas y las unidades admitidas.

Las unidades SI *suplementarias* son dos: la unidad de ángulo (plano), definida como la relación de la longitud del arco al radio, es el *radian* (rad). Para el ángulo sólido, definido como la relación entre el área subtendida al cuadrado del radio, la unidad es el *estereoradián* (sr).

Las unidades derivadas con nombres especiales, en su ortografía oficial, es decir, sin letras mayúsculas ni acentos, son los siguientes:

NOMBRE	ABREVIATURA	NOMBRE	ABREVIATURA
hertz	Hz = 1/s	newton	N = kgm/s <sup>2</sup>
pascal	Pa = N/m <sup>2</sup> = kg/ms <sup>2</sup>	joule	J = Nm = kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
watt	W = kgm <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	coulomb	C = A·s
volt	V = kgm <sup>2</sup> /As <sup>3</sup>	farad	F = As/V = A <sup>2</sup> s <sup>4</sup> /kgm <sup>2</sup>
ohm	Ω = V/A = kgm <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> s <sup>3</sup>	siemens	S = 1/Ω
weber	Wb = Vs = kgm <sup>2</sup> /As <sup>2</sup>	tesla	T = Wb/m <sup>2</sup> = kg/As <sup>2</sup> = kg/Cs
henry	H = Vs/A = kgm <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> s <sup>2</sup>	grado Celsius	°C (ver definición de kelvin)
lumen	lm = cd sr	lux	lx = lm/m <sup>2</sup> = cd sr/m <sup>2</sup>
becquerel	Bq = 1/s	gray	Gy = J/kg = m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
sievert	Sv = J/kg = m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	katal	kat = mol/s

Notemos que en todas las definiciones de las unidades, el kilogramo sólo aparece para las potencias de 1, 0 y -1. *Desafío 147 s* ¿Puede intentar encontrar la razón?

Las unidades ajenas al SI *admitidas* son:

*minutos, horas, días* (para el tiempo),

el grado  $1^\circ = \pi/180$  rad, el minuto  $1' = \pi/10\ 800$  rad, segundo  $1'' = \pi/648\ 000$  rad (para ángulos),

\*Jacques Babinet (1794-1874), físico francés que publicó un importante trabajo en óptica.

el *litro* y la *tonelada*.

Cualesquiera otras unidades deben ser evitadas.

Todas las unidades SI se hacen más prácticas gracias a la introducción de nombres y abreviaturas estándar para las potencias de diez, los llamados *prefijos*<sup>\*</sup>:

POTENCIA	NOMBRE	POTENCIA	NOMBRE	POTENCIA	NOMBRE	POTENCI A	NOMBRE
$10^1$	deca da	$10^{-1}$	deci d	$10^{21}$	Zetta Z	$10^{-21}$	zepto z
$10^2$	hecto h	$10^{-2}$	centi c	$10^{24}$	Yotta Y	$10^{-24}$	yocto y
$10^3$	kilo k	$10^{-3}$	milí m	Prefijos no oficiales			
$10^6$	Mega M	$10^{-6}$	micro μ	$10^{27}$	Xenta X	$10^{-27}$	xenno x
$10^9$	Giga G	$10^{-9}$	nano n	$10^{30}$	Wekta W	$10^{-30}$	weko w
$10^{12}$	Tera T	$10^{-12}$	pico p	$10^{33}$	Vendekta V	$10^{-33}$	vendeko v
$10^{15}$	Peta P	$10^{-15}$	femto f	$10^{36}$	Udeka U	$10^{-36}$	udeko u
$10^{18}$	Exa E	$10^{-18}$	atto a				

- Las Unidades del SI forman un sistema *completo* : abarcan de manera sistemática el conjunto *completo* de observables de la física. Por otra parte , fijan las unidades de medida de todas las otras ciencias puras también.
- Las Unidades del SI-forman un sistema *universal* que se puede utilizar en el comercio, en la industria, en el comercio, en casa, en educación y en investigación. incluso podría ser utilizado por las civilizaciones extraterrestres, si existieran.
- Las Unidades del SI forman un sistema *autoconsistente*: el producto o cociente de dos unidades del SI es también una unidad del SI. Esto significa que, en principio, la misma abreviatura, por ejemplo, 'SI', podría ser utilizado para cada unidad.

Las unidades del SI no son el único conjunto posible que pueda cumplir con todos estos requisitos, pero es el único sistema existente, que lo hace. \*\* En un futuro próximo, el BIPM tiene previsto utilizar el cubo de las constantes físicas, que se muestran en la Figura 1, para definir las unidades del SI. Esto implica la fijación de los valores de E y K, además de la ya fijado valor de c. La única excepción será la fijación de una unidad de tiempo básica con la ayuda de una transición atómica, no con la constante G, porque esta constante no se puede medir con alta precisión.

## EL SIGNIFICADO DE LA MEDICIÓN

Cada medición es una comparación con un patrón estándar. Por lo tanto, cualquier medición requiere

\*\* Algunos de estos nombres son inventados ( yocto suene similar al latín octo 'ocho' , zepto por sonar de manera similar al latín septem , yotta y zetta a parecerse a ellos, y exa peta a suenan como las palabras griegas ἔξακις y πεντάκις para ' seis veces "y" cinco veces ", los no oficiales al sonido similar a las palabras griegas para nueve, diez, once y doce ) , algunos son de danés / noruego ( atto de atten « dieciocho » , femto de femten « quince » ) ; algunos son del latín (de mille ' mil ' , de centum ' cien ' , de decem ' diez ' , de nanus ' enano ' ) , algunos son del italiano (de piccolo "pequeño" ) , algunos son griego (micro es de μικρός ' pequeño ' , deca / deka de δέκα ' diez ' , hecto de ἑκατόν ' cien ' , el kilo de χίλιοι ' mil ' mega de μέγας ' grande ' , giga de γίγαντας ' gigante ' , tera de τέρας ' monstruo ' ).

*Desafío 150 e* Traducir : Estaba atrapado en un atasco de tráfico , tal que necesitaba un microsiglo para recorrer un picoparsec y el consumo de combustible del mi coche era dos décimas de un milímetro cuadrado.

\*\* Aparte de las unidades internacionales, también hay unidades *provinciales*. La mayoría de las unidades provinciales aún en uso son de origen romano. La milla viene de *milia passum*, que solía ser mil pasos (doble) de unos 1480 mm cada uno; hoy una milla náutica, una vez definida como minuto de arco en la superficie de la Tierra, es exactamente 1852 m).

La pulgada viene de *uncia / onzia* (una duodécima parte de un pie). La libra (en español) del latín *libra*, balanza y por extensión libra de peso, que es el origen de su abreviatura lb; en inglés, de *pondere* 'pesar'). Incluso el hábito de Contar en docenas en lugar de decenas es de origen romano. Estas y todas las demás unidades divertidas, como el sistema en el que todas las unidades comienzan con f, y que utiliza furlong / quincena como su unidad de velocidad, ahora se definen oficialmente como múltiplos de unidades SI.

*materia* para realizar el patrón (incluso para un patrón estándar de la velocidad), y *radiación* para lograr la comparación.

El concepto de la medición por lo tanto asume que existen materia y radiación y se puede separar claramente una de otra.

Cada medición es una comparación. La medición de este modo implica que existen espacio y el tiempo, y que se diferencian uno de otro.

Cada medida produce un resultado de la medición. Por lo tanto, cada medición implica el *almacenamiento* del resultado. El proceso de la medición de este modo implica que la situación antes y después de la medición se puede distinguir. En otros términos, todos los procesos de medición son procesos *irreversibles*.

Cada medición es un proceso. Así, cada medición requiere una cierta cantidad de tiempo y una cierta cantidad de espacio.

Todas estas propiedades de las mediciones son sencillas pero importantes. Tenga cuidado con cualquiera que lo niegue.

### LAS UNIDADES NATURALES DE PLANCK

Puesto que la forma exacta de muchas ecuaciones depende del sistema de unidades utilizado, los físicos teóricos usan a menudo sistemas unitarios optimizados para producir ecuaciones simples. Las unidades escogidas y los valores de las constantes de la naturaleza están relacionados. En física microscópica, el sistema de *unidades naturales de Planck* se utiliza con frecuencia. Se definen haciendo

$$c = 1, \hbar = 1, G = 1, k = 1, \varepsilon_0 = 1/4\pi \text{ y } \mu_0 = 4\pi.$$

Las unidades de Planck se definen así a partir de combinaciones de constantes fundamentales; la correspondencia con las unidades SI fundamentales se dan en la [Tabla 10.\\*](#) La tabla también es útil para convertir las ecuaciones escritas en unidades naturales de nuevo en unidades SI: solo sustituya cada cantidad  $X$  por  $X/X_{\text{Pl}}$ .

**TABLA 10** Unidades naturales de Planck (sin corregir).

NOMBRE	DEFINICIÓN	VALOR
<b>Unidades básicas</b>		
Longitud de Planck	$l_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar G/c^3}$	= 1,6160(12) · 10 <sup>-35</sup> m
Tiempo de Planck	$\sqrt{\hbar G/c^5}$	= 5,390 6(40) · 10 <sup>-44</sup> s
Masa de Planck	$\sqrt{\hbar c/G}$	= 21,767(16) µg
Corriente de Planck	$\sqrt{4\pi \varepsilon_0 c^6/G}$	= 3,479 3(22) · 10 <sup>25</sup> A
Temperatura de Planck	$\sqrt{\hbar c^5/Gk^2}$	= 1,417 1(91) · 10 <sup>32</sup> K
<b>Unidades triviales</b>		
Velocidad de Planck	$v_{\text{Pl}} = c$	= 0,3Gm/s
Momento angular de Planck	$L_{\text{Pl}} = \hbar$	= 1,1 · 10 <sup>-34</sup> Js
Acción de Planck	$S_{\text{aPl}} = \hbar$	= 1,1 · 10 <sup>-34</sup> Js
Entropía de Planck	$S_{\text{ePl}} = k$	= 13,8 yJ/K
<b>Unidades compuestas</b>		
Densidad de masa de Planck	$\rho_{\text{Pl}} = c^5/G^2\hbar$	= 5,2 · 10 <sup>96</sup> kg/m <sup>3</sup>
Energía de Planck	$E_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c^5/G}$	= 2,0GJ = 1,2 · 10 <sup>28</sup> eV

\* Las unidades naturales  $x_{\text{Pl}}$  que se dan aquí son las que se usan comúnmente en la actualidad, es decir, aquellas definidas usando la constante  $\hbar$ , y no, como originalmente lo hizo Planck, usando la constante  $h = 2\pi\hbar$ . Las unidades electromagnéticas también se pueden definir con otros factores además de  $4\pi\varepsilon_0$  en las expresiones: por ejemplo, usar  $4\pi\varepsilon_0\alpha$ , con la constante de estructura fina  $\alpha$ , da  $q_{\text{Pl}} = e$ . Para la explicación de los números entre paréntesis, vea más adelante

Cantidad de movimiento de Planck	$p_{pl} = \sqrt{\hbar c^3/G}$	= 6,5Ns
Potencia de Planck	$P = c^5/G$	= $3,6 \cdot 10^{52} W$
Fuerza de Planck		= $1,2 \cdot 10^{44} N$
Presión de Planck		= $4,6 \cdot 10^{113} Pa$
Aceleración de Planck		= $5,6 \cdot 10^{51} m/s^2$
Frecuencia de Planck		= $1,9 \cdot 10^{43} Hz$
Carga eléctrica de Planck		= $1,9 aC = 11.7 e$
Voltaje de Planck		= $1,0 \cdot 10^{27} V$
Resistencia de Planck		= $30,0 \Omega$
Capacitancia de Planck		= $1,8 \cdot 10^{-45} F$
Inductancia de Planck		= $1,6 \cdot 10^{-42} H$
Campo eléctrico de Planck		= $6,5 \cdot 10^{61} V/m$
Densidad de flujo magnético de Planck		= $2,2 \cdot 10^{53} T *$

Las unidades naturales son importantes por otra razón: siempre que se diga descuidadamente de una cantidad que es 'infinitamente pequeña (o grande)', la expresión correcta es 'tan pequeña (o tan grande) como la correspondiente unidad de Planck corregida'. Como se explica a lo largo del texto, y especialmente en la parte final, esta sustitución es posible porque casi todas las unidades de Planck proporcionan, dentro de un factor de corrección de orden 1, el valor extremo para el observable correspondiente, algunos dando un límite superior y otros inferior.

Desafortunadamente, estos factores de corrección todavía no se conocen ampliamente. El valor extremal exacto para cada carácter observable se obtiene cuando G se sustituye por  $4G$  y  $4\pi\epsilon_0$  por  $4\pi\epsilon_0\alpha$  en todas las cantidades de Planck. Estos valores extremos, o unidades de Planck corregidas, son las verdaderas unidades naturales. Exceder los valores extremos solo es posible para algunas cantidades extensas. (*Desafío 151 s* ¿Puede averiguar cuáles?)

#### OTROS SISTEMAS DE UNIDADES

Un objetivo central de la investigación en física de altas energías es el cálculo de la fuerza de todas las interacciones; por lo tanto, no es práctico establecer la constante gravitatoria G en la unidad, como en el sistema de unidades de Planck. Por esta razón, los físicos de alta energía a menudo solo establecen  $c = \hbar = k = 1$  y  $\mu_0 = 1 / \epsilon_0 = 4\pi$ , \*\* dejando solo la constante gravitacional G en las ecuaciones.

En este sistema, solo existe una unidad fundamental, pero su elección es libre. A menudo se elige una longitud estándar como unidad fundamental, siendo la longitud el arquetipo de una cantidad medida. Los observables físicos más importantes se relacionan luego por

$$\begin{aligned} 1/[l^2] &= [E]^2 = [F] = [B] = [E_{electric}] , \\ 1/[l] &= [E] = [m] = [p] = [a] = [f] = [I] = [U] = [T] , \\ 1 &= [v] = [q] = [e] = [R] = [S_{acción}] = [S_{entropía}] = \hbar = c = k = [\alpha] , \\ [l] &= 1/[E] = [t] = [C] = [L] \quad y \\ [l]^2 &= 1/[E]^2 = [G] = [P] \end{aligned} \tag{112}$$

donde escribimos [x] para la unidad de cantidad x. Sin embargo, usar la misma unidad para tiempo, capacitancia e inductancia no es del gusto de todos, y por lo tanto los electricistas no usan este sistema. \*\*\*

\* \* Otras definiciones de las constantes de proporcionalidad en electrodinámica conducen al sistema de unidades gaussianas que a menudo se usa en los cálculos teóricos, el sistema de unidades Heaviside-Lorentz, el sistema de unidades electrostáticas y el sistema de unidades electromagnéticas, entre otros. [ref.145](#)

\*\*\* En la lista, l es longitud, E energía, F fuerza,  $E_{electric}$  el campo eléctrico y B el campo magnético, m la masa, p la cantidad de movimiento, a la aceleración, f la frecuencia, I la corriente eléctrica, U el voltaje, T la temperatura, v la velocidad, q la carga, R la

A menudo, para obtener una impresión de las energías necesarias para observar un efecto en estudio, se elige una energía estándar como unidad fundamental. En la física de partículas, la unidad de energía más común es el electrónvoltio (eV), definido como la energía cinética adquirida por un electrón cuando es acelerada por una diferencia de potencial eléctrico de 1 voltio ('protonvoltio' sería un nombre mejor). Por lo tanto, uno tiene  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , o aproximadamente

$$1 \text{ eV} \approx 1/6 \text{ aJ} \quad (113)$$

que se puede recordar fácilmente. La simplificación  $c = \hbar = 1$  produce  $G = 6,9 \cdot 10^{-57} \text{ eV}^{-2}$  y permite usar la unidad eV también para masa, cantidad de movimiento, temperatura, frecuencia, tiempo y longitud, con las respectivas correspondencias  $1 \text{ eV} \equiv 1,8 \cdot 10^{-36} \text{ kg} \equiv 5,4 \cdot 10^{-28} \text{ Ns} \equiv 242 \text{ THz} \equiv 11,6 \text{ kK}$  y  $1 \text{ eV}^{-1} \equiv 4,1 \text{ fs} \equiv 1,2 \mu\text{m}$ . *Desafío 152 e*

Para sentir algo de emoción por la unidad eV, las siguientes relaciones son útiles. La temperatura ambiente, generalmente tomada como  $20^\circ \text{C}$  o  $293 \text{ K}$ , corresponde a una energía cinética por partícula de  $0,025 \text{ eV}$  o  $4,0 \text{ zJ}$ . La mayor energía de partículas medida hasta ahora pertenece a un rayo cósmico con una energía de  $3 \cdot 10^{20} \text{ eV}$  o  $48 \text{ J}$ .<sup>ref.146</sup> Aquí en la Tierra, se ha construido un acelerador capaz de producir una energía de aproximadamente  $105 \text{ GeV}$  o  $17 \text{ nJ}$  para electrones y antielectrones, y uno capaz de producir una energía de  $14 \text{ TeV}$  o  $2,2 \mu\text{J}$  para protones se terminará pronto.

Ambos son propiedad de CERN en Ginebra y tienen una circunferencia de 27 km.

La temperatura más baja medida hasta ahora es de  $280 \text{ pK}$ , en un sistema de núcleos de rodio dentro de un sistema de refrigeración especial.<sup>ref.147</sup> El interior de ese criostato puede ser el punto más frío del universo. La energía cinética por partícula correspondiente a esa temperatura es también la más pequeña jamás medida: corresponde a  $24 \text{ feV}$  o  $3,8 \text{ vJ} = 3,8 \cdot 10^{-33} \text{ J}$ .

Para partículas aisladas, el registro parece ser para neutrones: se han alcanzado energías cinéticas tan bajas como  $10^{-7} \text{ eV}$ , que corresponden a longitudes de onda de De Broglie de 60 nm.

### CURIOSIDADES Y DESAFÍOS DIVERTIDOS ACERCA DE LAS UNIDADES

La longitud de Planck es aproximadamente la longitud de onda de De Broglie de un hombre caminando confortablemente,  $\lambda_B = h/mv$  ( $m = 80 \text{ kg}$ ,  $v = 0,5 \text{ m/s}$ ); por lo tanto, este movimiento se llama acertadamente el "paseo de Planck".<sup>ref.148</sup>

\* \*

La masa de Planck es igual a la masa de alrededor de  $10^{19} \text{ protones}$ . Esta es aproximadamente la masa de un embrión humano a los diez días de edad.

\* \*

Las cantidades más precisamente medidas en la naturaleza son las frecuencias de ciertos pulsares de milisegundos, la frecuencia de ciertas transiciones atómicas estrechas y la constante de Rydberg del hidrógeno atómico, que se pueden medir con la misma precisión con que se define el segundo.<sup>ref.149</sup>

La transición de cesio que define el segundo tiene un ancho de línea finito que limita la precisión alcanzable: el límite es de aproximadamente 14 dígitos.

\* \*

El reloj más preciso jamás construido, usaba microondas, tenía una estabilidad de  $10^{-16}$  durante un tiempo de ejecución de 500 s.<sup>ref.150</sup> Para períodos de tiempo más largos, el registro en 1997 fue de unos  $10^{-15}$ , pero valores de alrededor de  $10^{-17}$  parecen estar al alcance tecnológico.<sup>ref.151</sup> La precisión de los relojes está limitada a cortos tiempos de medición por el *ruido*, y para medidas de tiempos más largos por *derivadas*, es decir, por los efectos sistemáticos. La región de máxima estabilidad depende del tipo de reloj, por lo general se encuentra entre 1 ms para relojes ópticos y 5 000 s para el láser. Los pulsares son el único tipo de reloj para el que esta región no se conoce todavía, ciertamente se encuentra en más de 20 años, el tiempo transcurrido desde su descubrimiento hasta el momento de la escritura de este texto.

\* \*

---

resistencia, P la potencia, G la constante gravitacional.

La página web [www.chemie.fu-berlin.de/chemistry/general/units\\_en.html](http://www.chemie.fu-berlin.de/chemistry/general/units_en.html) proporciona una herramienta para convertir unas unidades en otras. Los investigadores en relatividad general a menudo usan otro sistema, en el cual el *radio de Schwarzschild rs = 2Gm / c²* se usa para medir masas, al establecer  $c = G = 1$ . En este caso, la masa y la longitud tienen la *misma* dimensión, y  $\hbar$  tiene la dimensión de un área,

Los tiempos más cortos medidos son las vidas de ciertas partículas "elementales". En particular, la vida útil de ciertos mesones D se ha medido resultando menos de  $10^{-23}$  s.<sup>ref.152</sup> Dichos tiempos se miden usando una cámara de burbujas, donde su traza es fotografiada. *Desafío 153 s* ¿Puede estimar cuánto mide la traza? (Esta es una pregunta capciosa: si su longitud no puede observarse con un microscopio óptico, ha cometido un error en su cálculo).

\* \*

Los tiempos más largos que se encuentran en la naturaleza son la vida útil de ciertos radioisótopos, más de  $10^{15}$  años, y el límite inferior de ciertas desintegraciones de protones, más de  $10^{32}$  años. Estos tiempos son, por lo tanto, mucho mayores que la edad del universo, que se estima en catorce mil millones de años.<sup>ref.153</sup>

\* \*

Las variaciones de cantidades a menudo son mucho más fáciles de medir que sus valores. Por ejemplo, en los detectores de ondas gravitacionales, la sensibilidad lograda en 1992 fue  $\Delta l / l = 3 \cdot 10^{-19}$  para longitudes del orden de 1 m.<sup>ref.154</sup> En otras palabras, para un bloque de aproximadamente un metro cúbico de metal es posible medir cambios de longitud aproximadamente 3000 veces más pequeños que un radio de protón.

Estas configuraciones ahora están siendo reemplazadas por interferómetros de anillo. Ya se han construido interferómetros de anillo que miden diferencias de frecuencia de  $10^{-21}$ ; y aún están siendo mejorados.<sup>ref.155</sup>

## LA PRECISIÓN Y LA EXACTITUD DE LAS MEDICIONES

Las medidas son la base de la física. Toda medida tiene un *error*. Los errores son debido a la falta de precisión o a la falta de exactitud. La *precisión* significa lo bien que se reproduce un resultado cuando se repite la medición; *exactitud* es el grado en que una medición corresponde al valor real.

La falta de precisión se debe a errores accidentales o al *azar*, estos se miden mejor por la *desviación estándar*,  $\sigma$  normalmente abreviada, que se define a través

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (114)$$

donde  $x$  es el promedio de la  $x_i$  mediciones. (*Desafío 154 s* ¿Se imagina por qué se utiliza  $n - 1$  en la fórmula en lugar de  $n$ ?)

Para la mayoría de los experimentos, la distribución de los valores de medición tiende a una distribución normal, también llamada *distribución gaussiana*, cuando se aumenta el número de mediciones. La distribución, que se muestra en la [Figura 81](#), se describe por la expresión

$$N(x) \approx e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

El cuadrado  $\sigma^2$  de la desviación estándar es también llamada la *varianza*. *Desafío 155 e* Para una distribución gaussiana de los valores de medición,  $2,35\sigma$  es la anchura a media altura.

La falta de precisión se debe a *errores sistemáticos*, éstos, por lo general, sólo se pueden estimar. Esta estimación se añade a menudo a los errores aleatorios para producir un error experimental total, a veces también llamada la *incertidumbre total*.<sup>ref.156</sup> El error *relativo* o la incertidumbre es la relación entre el error y el valor medido.

Por ejemplo, una medida profesional dará un resultado como  $0,312 (6)$  m. El número entre paréntesis es la desviación típica  $\sigma$ , en unidades de los últimos dígitos.

*Desafío 156 e* Igual que antes, se supone una distribución de Gauss de los resultados de medición. Por lo tanto, un valor de  $0,312 (6)$  m implica que se espera que el valor real a medir

- dentro  $1\sigma$  con 68,3% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,006$  m;
- dentro de  $2\sigma$  con 95,4% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,012$  m;
- Dentro de  $3\sigma$  con 99,73% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,018$  m;
- Dentro de  $4\sigma$  con 99,9937% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,024$  m;
- Dentro de  $5\sigma$  con 99,999 943% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,030$  m;
- Dentro de  $6\sigma$  con 99.999 999 80% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,036$  m;
- Dentro de  $7\sigma$  con 99,999 999 999 74% de probabilidad, por tanto, en este ejemplo, dentro de  $0,312 \pm 0,041$  m.

### Desafío 157 s (¿Los últimos números tienen sentido?)

Tenga en cuenta que las desviaciones estándar tienen un dígito, usted tendría que ser un experto mundial para usar dos, y un tonto para usar más. Si no se da una desviación estándar, se supone un (1). Como resultado, entre los profesionales, 1 km y 1000 m *no* son la misma longitud!

¿Qué sucede con los errores cuando se suman o restan dos valores de medición A y B?

Si todas las mediciones son independientes - o no correlacionadas - la desviación estándar de la suma y de la diferencia está dada por

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

Tanto para el producto o cociente de dos valores medidos y no correlacionados C y D, el resultado es

$$\rho = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2}, \text{ donde los términos } \rho \text{ son las desviaciones estándar relativas.}$$

Desafío 158 s Suponga que usted mide un objeto que se mueve 1,0 m en 3,0 s: ¿cuál es el valor de la velocidad medida?

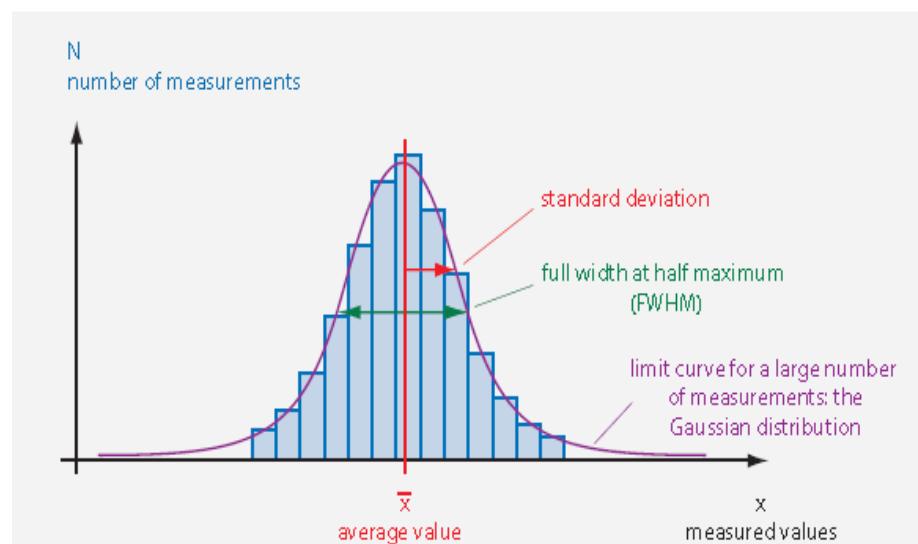


FIGURA 81 Un experimento de precisión y su distribución de medición. La precisión es alta si el ancho de la distribución es estrecho; la precisión es alta si el centro de distribución está de acuerdo con el valor real.

### LÍMITES A LA PRECISIÓN

¿Cuáles son los límites de la exactitud y precisión? No hay manera, incluso en principio, de medir una longitud x con una *precisión* mayor que alrededor de 61 dígitos, porque en la naturaleza, la relación entre la mayor y la más pequeña longitud medible es  $\Delta x / x > L_{\text{Planck}} / d_{\text{horizonte}} = 10^{-61}$ .

(Desafío 159 e) ¿Es esta relación válida también para la fuerza o para el volumen? ) En el volumen final de nuestro texto, el estudio de los relojes y metros rígidos fortalece este límite teórico.

Pero no es difícil deducir límites prácticos más estrictos. Ninguna máquina imaginable puede medir cantidades con una precisión superior a la medición del diámetro de la Tierra entre la longitud más pequeña jamás medida, sobre  $10^{-19}$  m, es decir cerca de 26 dígitos de precisión.

El uso de un límite más realista de una máquina de tamaño 1000 m implica un límite de 22 dígitos.

Si, como se predijo anteriormente, medidas de tiempo realmente lograron 17 dígitos de precisión, entonces se acercan al límite práctico, ya que además de tamaño, existe una restricción práctica adicional: el costo. De hecho, un dígito adicional en la precisión de medición a menudo significa un dígito adicional en el coste del equipo.

### LAS CONSTANTES FÍSICAS

En la física, las observaciones de carácter general se deducen de las más fundamentales. Como consecuencia de ello, muchas mediciones se pueden deducir de las más fundamentales. Las medidas más fundamentales son las de las constantes físicas.

Las siguientes tablas muestran los mejores valores del mundo de las constantes físicas más importantes y propiedades físicas de las partículas - en las unidades del SI y en algunas otras unidades comunes - publicados en las referencias estándar. <sup>ref.157</sup> Los valores son los promedios mundiales de las mejores

mediciones realizadas hasta el presente. Como de costumbre, los errores experimentales, incluyendo los errores sistemáticos, tanto aleatorios como estimados, se expresan dando la desviación estándar en los últimos dígitos. De hecho, detrás de cada uno de los números en las siguientes tablas hay una larga historia digna de ser contada, pero para las que no hay suficiente espacio aquí.<sup>ref.158</sup>

**TABLA 11** Constantes físicas básicas

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALORES EN UNIDADES SI	INCERTIDUMBRE <sup>a</sup>
<b>Constantes que definen las unidades de medida SI</b>			
Velocidad de la luz en el vacío <sup>c</sup>	$c$	299 792 458 m/s	0
Permeabilidad del vacío <sup>c</sup>	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m = 1,256 637 061 435 $\mu$ H/m	0
Permitividad del vacío <sup>c</sup>	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8, 854 187 817 620 ... pF/m	0
Constante de Planck original	$h$	6, 626 069 57(52) · $10^{-34}$ Js	$4,4 \cdot 10^{-8}$
Constante de Planck reducida, cuarto de acción	$\hbar$	1, 054 571 726(47) · $10^{-34}$ Js	$4,4 \cdot 10^{-8}$
Carga del positrón	$e$	0,160 217 656 5(35) aC	$2, 2 \cdot 10^{-8}$
Constante de Boltzmann	$k$	1,380 6488(13) · $10^{-23}$ J/K	$9,1 \cdot 10^{-7}$
Constante gravitacional	$G$	6,673 84(80) · $10^{-11}$ Nm <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>	$1, 2 \cdot 10^{-4}$
Constante de acoplamiento gravitacional	$\kappa = 8\pi G/c^4$	2,076 50(25) · $10^{-43}$ s <sup>2</sup> /kgm	$1, 2 \cdot 10^{-4}$
<b>Constantes fundamentales (de origen desconocido)</b>			
Número de dimensiones espacio-temporales		3+1	0 <sup>b</sup>
Constante de estructura fina <sup>d</sup> o constante de acoplamiento	$\alpha = e^2/4\pi\mu_0\hbar c$	1/137, 035 999 074(44) = 0,0072973525698 $= g_{em} (m_e^2 c^2)$	$3, 2 \cdot 10^{-10}$
Constante de acoplamiento de Fermi <sup>d</sup> o constante de acoplamiento débil	$G_F/(\hbar c)^3$ $\alpha_w(M_Z) = g_w^2/4\pi$	1, 166 364(5) · $10^{-5}$ GeV <sup>-2</sup> 1/30,1(3)	$4,3 \cdot 10^{-6}$
Ángulo de mezcla débil	$\sin^2 \theta_W(\overline{MS})$	0, 231 24(24)	$1, 0 \cdot 10^{-3}$
Constante de acoplamiento fuerte	$\alpha_s(M_Z) = g_s^2 / 4\pi$	0, 118(3)	$25 \cdot 10^{-3}$
Matriz de mezcla de quark CKM	$ V $	(0, 97428(15) 0, 2253(7) 0, 00347(16) 0, 2252(7) 0, 97345(16) 0, 0410(11) 0, 00862(26) 0, 0403(11) 0,999152(45))	
Invariante Jarlskog	$J$	2,96(20) · $10^{-5}$	
Matriz de mezcla de neutrinos PMNS	$P$	0, 82 0, 55 -0, 15 + 0, 038i -0,36 + 0,020i 0, 70 + 0, 013i 0,61 0, 44 + 0, 026i -0, 45 + 0, 017i 0,77	
<b>Masa de partículas elementales (de origen desconocido)</b>			
Masa de electrón	$m_e$	9,109 38291(40) · $10^{-31}$ kg 5, 485 799 0946(22) · $10^{-4}$ u 0, 510 998 928(11) MeV	$4, 4 \cdot 10^{-8}$ $4, 0 \cdot 10^{-10}$ $22,2 \cdot 10^{-8}$
Masa de muón	$m_\mu$	1, 883 531 475(96) · $10^{-28}$ kg 0, 113 428 9267(29) u 105, 658 3715(35) MeV	$5, 1 \cdot 10^{-8}$ $5, 1 \cdot 10^{-8}$ $3,4 \cdot 10^{-8}$

Masa Tau	$m_\tau$	1, 776 82(16)GeV/c <sup>2</sup>	$4,4 \cdot 10^{-8}$
Masa neutrino electrónico	$m_\nu$	< 2 eV/c <sup>2</sup>	
Masa neutrino muónico	$m_\nu$	< 2 eV/c <sup>2</sup>	
masa neutrino tau	$m_\nu$	< 2 eV/c <sup>2</sup>	
Masa quark up	u	1,8 a 3,0 MeV/c <sup>2</sup>	
Masa quark down	d	4,5 a 5,5 MeV/c <sup>2</sup>	
Masa quark extraño	s	95(5) MeV/c <sup>2</sup>	
Masa quark encanto	c	1, 275(25) GeV/c <sup>2</sup>	
Masa quark bottom	b	4, 18(17) GeV/c <sup>2</sup>	
Masa quark top	t	173, 5(1, 4) GeV/c <sup>2</sup>	
Masa del fotón	$\gamma$	< 2 · 10 <sup>-54</sup> kg	
Masa bosón W	$W^\pm$	80.385(15) GeV/c <sup>2</sup>	
Masa bosón Z	$Z^0$	91.1876(21) GeV/c <sup>2</sup>	
Masa de Higgs	H	126(1) GeV/c <sup>2</sup>	
Masa del gluón	$g_{1\dots 8}$	c. 0 MeV/c <sup>2</sup>	
Masa de partículas compuestas			
Masa del protón	$m_p$	1, 672 621 777(74) · 10 <sup>-27</sup> kg 1, 007 276 466 812(90) u 938, 272 046(21) MeV	$4,4 \cdot 10^{-8}$ $8,9 \cdot 10^{-11}$ $2,2 \cdot 10^{-8}$
Masa del neutrón	$m_n$	1, 674 927 351(74) · 10 <sup>-27</sup> kg 1, 008 664 916 00(43) u 939, 565 379(21) MeV	$4,4 \cdot 10^{-8}$ $4,2 \cdot 10^{-10}$ $2,2 \cdot 10^{-8}$
Unidad de masa atómica	$m_u = m^{12}\text{C}/12$ = 1 u	1,660 538 921(73) yg	$4,4 \cdot 10^{-8}$

a. Incertidumbre: desviación estándar de los errores de medición.

b. Sólo se mide a partir de  $10^{-19}$  m hasta  $10^{26}$  m.

c. Definición constante.

d. Todas las constantes de acoplamiento dependen de la transferencia de 4-momento, como se explica en el apartado de renormalización. *Constante de estructura fina* es el nombre tradicional para la constante de acoplamiento electromagnético  $g_{em}$  en el caso de una transferencia de 4-momento de  $Q^2 = c^2 m_e^2$ , que es la más pequeña posible. A mayores transferencias de momento tiene valores más grandes, por ejemplo,  $g_{em}(Q^2 = c^2 m_W^2) \approx 1/128$ . Por el contrario, la constante de acoplamiento fuerte tiene valores más bellos a mayores transferencias de momento, por ejemplo,  $\alpha_s(34\text{GeV}) = 0,14$  (2).

En principio, todas las propiedades cuantitativas de la materia se pueden calcular con la teoría cuántica y los valores de ciertas constantes físicas. Por ejemplo, el color, la densidad y la propiedad elástica se pueden predecir usando las ecuaciones de la física de partículas del modelo estándar y los valores de las constantes básicas.

¿Por qué todas estas constantes fundamentales tienen los valores que tienen? Para cualquier constante básica *con una dimensión*, tales como el cuarto de acción  $\hbar$  el valor numérico sólo tiene significado histórico. Es  $1,054 \cdot 10^{-34}$  Js debido a la definición SI del julio y del segundo.

La pregunta de por qué el valor de una constante dimensional no es más grande o más pequeño, por lo tanto requiere siempre comprender el origen de algunos números adimensionales que da la relación entre la constante y la *unidad natural* correspondiente que es definida con  $c$ ,  $G$ ,  $\hbar$  y  $\alpha$ . Más detalles y los valores de las unidades naturales se darán posteriormente. Comprender el tamaño de los átomos, las personas, los árboles y las estrellas, la duración de los procesos moleculares y atómicos, o la masa de núcleos y montañas,

implica la comprensión de la relación entre estos valores y la correspondiente unida natural. La clave para entender la naturaleza por lo tanto es la comprensión de todas las relaciones, y por tanto todas las constantes adimensionales. La búsqueda de la comprensión de todos las relaciones, incluyendo la constante de estructura fina  $\alpha$ , se completa sólo en el volumen final de nuestra aventura.

Las constantes básicas producen las siguientes observaciones útiles de alta precisión.

**TABLA 12** Costantes físicas derivadas.

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALOR EN UNIDADES SI	INCERTIDUMBRE
Resistencia onda en el vacío	$Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$	376,730 313 461 77... $\Omega$	0
Número de Avogadro	$N_A$	6, 022 141 29(27) $\cdot 10^{23}$	$4, 4 \cdot 10^{-8}$
Número de Loschmidt a 273,15 K y 101 325 Pa	$N_L$	2, 686 7805(24) $\cdot 10^{23}$	$9, 1 \cdot 10^{-7}$
Costante de Faraday	$F = N_A e$	96 485, 3365(21) C/mol	$2, 2 \cdot 10^{-8}$
Costante universal de los gases	$R = N_A k$	8, 314 4621(75) J/mol K	$9, 1 \cdot 10^{-7}$
Volume molar de un gas ideal a 273,15 K y 101 325 Pa	$V = RT/p$	22, 413 968(20) l/mol	$9, 1 \cdot 10^{-7}$
Constante de Rydberg <sup>a</sup>	$R\infty = m_e c \alpha^2 / 2\hbar$	10 973 731, 568 539(55) m <sup>-1</sup>	$5 \cdot 10^{-12}$
Conductancia cuántica	$G_0 = 2e^2/\hbar$	77, 480 917 346(25) $\mu S$	$3.2 \cdot 10^{-10}$
Flujo magnético cuántico	$\phi_0 = \hbar/2e$	2,067 833 758(46) pWb	$2, 2 \cdot 10^{-8}$
Razón de frecuencia de Josephson	$2e/\hbar$	483, 597 870(11) THz/V <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Costante de Von Klitzing	$\hbar/e^2 = \mu_0 c / 2\alpha$	25 812.807 4434(84) $\Omega$	$3, 2 \cdot 10^{-10}$
Magnetón de Bohr	$\mu_0 B = e\hbar / 2me$	9, 274 009 68(20) yJ/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Radio clásico del electrón	$r_e = e^2 / 4\pi\mu_0 c^2 m_e$	2,817 940 3267(27) fm	$9, 7 \cdot 10^{-10}$
Longitud de onda Compton del electrón	$\lambda_C = \hbar/m_e c$	2, 426 310 2389(16) pm	$6, 5 \cdot 10^{-10}$
	$\lambda_C = \hbar/mec = re/a$	0, 386 159 268 00(25) pm	$6, 5 \cdot 10^{-10}$
Radio de Bohr <sup>a</sup>	$a_\infty = re/a^2$	52, 917 721 092(17) pm	$3, 2 \cdot 10^{-10}$
Cuento de circulación	$\hbar/2m_e$	3.636 947 5520(24) $\cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup> /s	$6.5 \cdot 10^{-10}$
Carga específica del positrón	$e/m_e$	1, 758 820 088(39) $\cdot 10^{11}$ C/kg <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Frecuencia ciclotrón del electrón	$fc/B = e/2\pi m_e$	27, 992 491 10(62) GHz/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Momento magnético electrónico	$\mu_e$	-9, 284 764 30(21) $\cdot 10^{-24}$ J/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
	$\mu_e / iB$	-1, 001 159 652 180 76(27)	$2, 6 \cdot 10^{-13}$
	$\mu_e / iN$	-1, 838 281 970 90(75) $\cdot 10^3$	$4, 1 \cdot 10^{-10}$
Factor-g del electrón	$g_e$	-2, 002 319 304 361 53(53)	$2, 6 \cdot 10^{-13}$
Razón de masa muón-electrón	$m_\mu/m_e$	206, 768 2843(52)	$2, 5 \cdot 10^{-8}$
Momento magnético muón	$\mu_\mu$	-4, 490 448 07(15) $\cdot 10^{-26}$ J/T	$3, 4 \cdot 10^{-8}$
Factor-g del muón	$g_\mu$	-2, 002 331 8418(13)	$6, 3 \cdot 10^{-10}$
Razón de masa protón-electrón	$m_p/m_e$	1 836,152 672 45(75)	$4, 1 \cdot 10^{-10}$
Carga específica protón	$e/m_p$	9, 578 833 58(21) $\cdot 10^7$ C/kg <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$

Longitud de onda Compton del protón	$\lambda_{C,p} = \hbar/m_p c$	1, 321 409 856 23(94) fm	7, 1 · 10 <sup>-10</sup>
Magnetón nuclear	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	5, 050 783 53(11) · 10 <sup>-27</sup> J/T <sup>2</sup>	2 · 10 <sup>-8</sup>
Momento magnético del protón	$\mu_p$	1, 410 606 743(33) · 10 <sup>-26</sup> J/T <sup>2</sup>	4 · 10 <sup>-8</sup>
	$\mu_p/\mu_B$	1, 521 032 210(12) · 10 <sup>-3</sup>	8, 1 · 10 <sup>-9</sup>
	$\mu_p/\mu_N$	2,792 847 356(23)	8, 2 · 10 <sup>-9</sup>
Razón giromagnética protón	$\gamma_p = 2\mu_p/\hbar$	2, 675 222 005(63) · 10 <sup>8</sup> Hz/ T <sup>2</sup>	4 · 10 <sup>-8</sup>
Factor-g protón	$g_p$	5, 585 694 713(46)	8, 2 · 10 <sup>-9</sup>
Razón de masa neutrón–electrón	$m_n/m_e$	1 838 683 6605(11)	5, 8 · 10 <sup>-10</sup>
Razón de masa neutrón–protón	$m_n/m_p$	1, 001 378 419 17(45)	4, 5 · 10 <sup>-10</sup>
Longitud de onda Compton neutrón	$eC_{,n} = \hbar/m_n c$	1, 319 590 9068(11) fm	8, 2 · 10 <sup>-10</sup>
Momento magnético neutrón	$\mu_n$	-0, 966 236 47(23) · 10 <sup>-26</sup> J/T <sup>2</sup>	4 · 10 <sup>-7</sup>
	$\mu_n/\mu_B$	-1, 041 875 63(25) · 10 <sup>-3</sup>	2, 4 · 10 <sup>-7</sup>
	$\mu_n/\mu_N$	-1, 913 042 72(45)	2, 4 · 10 <sup>-7</sup>
Constante de Stefan–Boltzmann	$\sigma = \pi^2 k^4 / 60 \hbar^3 c^2$	56, 703 73(21) nW/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>	3, 6 · 10 <sup>-6</sup>
Constante de desplazamiento de Wien	$b = \lambda_{max} T$	2,897 7721(26) mmK 58, 789 254(53) GHz/K	9, 1 · 10 <sup>-7</sup>
Electron-volt	eV	1, 602 176 565(35) 10 <sup>-19</sup> J <sup>2</sup>	2 · 10 <sup>-8</sup>
cost. conversión bit a entropía	$k \ln 2$	10 <sup>23</sup> bit = 0, 956 994 5(9) J/K	9, 1 · 10 <sup>-7</sup>
TNT contenido energía	c,	T a 4,0 MJ/kg	4 · 10 <sup>-2</sup>

a: para una masa infinita del núcleo

Algunas propiedades útiles de nuestro medio ambiente local se dan en la siguiente tabla.

**TABLA 13** Costantes astronómicas

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALOR
Año trópico 1900 <sup>a</sup>	a	31 556 925,974 7 s
Año trópico 1994	a	31 556 925,2 s
Día sideral medio	d	23h 56' 4, 090 53"
Distancia media Tierra-Sol <sup>b</sup>		149 597 870,691(30) km
Unidad astronómica <sup>b</sup>	AU	149 597 870 691 m
Año luz basado en el año juliano	al	9,460 730 472 5808 Pm
Parsec	pc	30, 856 775 806 Pm = 3, 261 634 al
Masa de la Tierra	M <sub>⊕</sub>	5, 973(1) · 10 <sup>24</sup> kg
Constante gravitacional geocéntrica	GM	3, 986 004 418(8) · 10 <sup>14</sup> m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>
Longitud gravitacional de la Tierra	l <sub>⊕</sub> = 2GM/c <sup>2</sup>	8,870 056 078(16) mm
Radio ecuatorial de la Tierra <sup>c</sup>	R <sub>⊕eq</sub>	6378, 1366(1) km

Radio polar de la Tierra	$R_{\odot}^{\oplus} p$	6356, 752(1) km
Distancia ecuador-polo		10 001, 966 km (media)
Aplanamiento terrestre	$e_{\odot}^{\pm}$	1/298, 25642(1)
Densidad media de la Tierra	$\rho_{\odot}^{\pm}$	5,5Mg/m <sup>3</sup>
Edad de la Tierra	$T_{\odot}^{\pm}$	4, 50(4)Ga = 142(2) Ps
Gravedad normal de la Tierra	$g$	9,806 65m/s <sup>2</sup>
Presión atmosférica estándar de la Tierra	$p_0$	101 325 Pa
Radio de la Luna	$R_{\odot}^{\triangleleft} v$	1738 km en dirección de la Tierra
Radio de la Luna	$R_{\odot}^{\triangleleft} h$	1737,4 km en las otras dos direcciones
Masa de la Luna	$M_{\odot}^{\triangleleft}$	$7,35 \cdot 10^{22}$ kg
Distancia media a la Luna	$d_{\odot}^{\triangleleft}$	384 401 km
Distancia a la Luna en el perigeo		363 Mm, mínimo histórico 359 861 km
Distancia a la Luna en el apogeo		404 Mm, máximo histórico 406 720 km
Dimensión angular de la Luna		media $0,5181^{\circ} = 31,08'$ , mínimo $0,49^{\circ}$ , máximo $0,55^{\circ}$
Densidad media de la Luna	$\rho_{\odot}^{\triangleleft}$	3,3 Mg/m <sup>3</sup>
Gravedad superficial en la Luna	$g_{\odot}^{\triangleleft}$	1,62m/s <sup>2</sup>
Presión atmosférica en la Luna	$p_{\odot}^{\triangleleft}$	de $10^{-10}$ Pa (noche) a $10^{-7}$ Pa (día)
Masa de Júpiter		$1,90 \cdot 10^{27}$ kg
Radio ecuatorial de Júpiter		71,398 Mm
Radio polar de Júpiter		$1(1)Mm$
Distancia media de Júpiter al Sol		778 412 020 km
Gravedad superficial en Júpiter		24,9 m/s <sub>2</sub>
Presión atmosférica en Júpiter		de 20 kPa a 200 kPa
Masa del Sol	$M_{\odot}$	$1,988\ 43(3) \cdot 10^{30}$ kg
Longitud gravitacional del Sol	$2GM_{\odot}/c^2$	2, 953 250 08(5) km
Constante gravitacional heliocéntrica	$GM_{\odot}$	$132,712\ 440\ 018(8) \cdot 10^{18}$ m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>
Luminosidad del Sol	$L_{\odot}$	384, 6 YW
Radio ecuatorial del Sol	$R_{\odot}$	695, 98(7) Mm
Dimensión angular del Sol		0, 53° media; mínima el cuarto de julio (afelio) 1888'', máxima el cuarto de enero (perihelio) 1952''
Densidad media del Sol		1,4 Mg/m <sup>3</sup>

Edad del Sol	4,6 Ga
Velocidad solar en torno al centro de la galaxia	220(20) km/s
Velocidad solar contra la radiación cósmica de fondo	370, 6(5) km/s
Gravedad superficial del Sol	274 m/s <sup>2</sup>
Presión inferior en la fotosfera del Sol	15 kPa
Distancia al centro de la Vía Láctea	8,0(5) kpc = 26,1(1, 6) kal
Edad de la Vía Láctea	13.6 Ga
Dimensión de la Vía Láctea	c. 10 <sup>21</sup> m o 100 kal
Masa de la Vía Láctea	10 <sup>12</sup> masas solares, c. 2 · 10 <sup>42</sup> kg
La mayor parte del grupo de galaxias lejanas SXDF-XCLJ	9,6 · 10 <sup>9</sup> al

a. Definición constante desde equinoccio de primavera a equinoccio de primavera; una vez se utilizó para definir el segundo. (Recuerde: π segundos es alrededor de un nanosiglo.) El valor de 1990 e aproximadamente 0, 7 s o menos, que corresponde a una ralentización de alrededor de 0, 2 ms / a. (Ojo: ¿por qué?) *Desafío 163-b s* También hay una fórmula empírica para la variación de la duración del año en el tiempo. <sup>ref.159</sup>

b. La realmente sorprendente precisión de tan sólo 30 m en la distancia media Tierra-Sol es el promedio de tiempo de las señales enviadas desde las órbitas de Viking y Mars tomadas durante un período de más de 20 años. Tenga en cuenta que la 'Unión Astronómica Internacional distingue a la distancia media Tierra-Sol de la unidad astronómica en sí; esta última se define como una longitud fija y precisa. Incluso el año luz es una unidad definida como un número exacto de la UAI. Para obtener más información, consulte [www.iau.org/public/measuring](http://www.iau.org/public/measuring).

c. La forma de la Tierra se describe con mayor precisión con el Sistema Geodésico Mundial. La última edición fue publicada en la 1984\|. Para una presentación completa de sus antecedentes y sus detalles, véase la página web [www.wgs.\.com](http://www.wgs.\.com). La Unión Astronómica Internacional afinó los datos en 2000. Los radios y los datos de aplanamiento aquí son los del 'sistema de marea media'. Se diferencian de los del 'sistema de marea cero' y otros sistemas en aproximadamente 0, 7 m. Los detalles son una ciencia en sí misma.

d. Medida de centro a centro. Para encontrar la posición exacta de la Luna en el cielo en una cierta fecha, ver la página [www.fourmilab.ch/earthview/moon\\_ap\\_per.html](http://www.fourmilab.ch/earthview/moon_ap_per.html). Para los planetas, ver la página [www.fourmilab.ch/solar/solar.html](http://www.fourmilab.ch/solar/solar.html) e y las otras páginas del mismo sitio.

e. Los ángulos son definidos como sigue: 1 grado = 1° = π/180 rad, 1 (primo) minuto = 1' = 1°/60, 1 segundo = 1'' = 1' /60. Las unidades antiguas 'un tercio diminuto' y 'un cuarto diminuto', cada uno 1/60 -un sesentésimo-del precedente, ya no están en uso. ('Minuto' significa originariamente 'muy pequeño', como se hace todavía en inglés moderno)

Las constantes básicas producen las siguientes observaciones útiles de alta precisión.

**TABLA 55** Costantes físicas derivadas.

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALOR EN UNIDADES SI	INCERTIDUMBRE
Resistencia onda en el vacío	$Z_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}$	376,730 313 461 77... Ω	0
Número de Avogadro	$N_A$	6, 022 141 29(27) · 10 <sup>23</sup>	4, 4 · 10 <sup>-8</sup>
Número de Loschmidt a 273,15 K y 101 325 Pa	$N_L$	2, 686 7805(24) · 10 <sup>23</sup>	9, 1 · 10 <sup>-7</sup>
Costante de Faraday	$F = N_A e$	96 485, 3365(21) C/mol	2, 2 · 10 <sup>-8</sup>
Costante universal de los gases	$R = N_A k$	8, 314 4621(75) J/mol K 9	1 · 10 <sup>-7</sup>
Volume molar de un gas ideal a 273,15 K y 101 325 Pa	$V = RT/p$	22, 413 968(20) l/mol	9, 1 · 10 <sup>-7</sup>
Constante de Rydberg <sup>a</sup>	$R_\infty = m_e c^2 / 2\hbar$	10 973 731, 568 539(55) m <sup>-1</sup>	5 · 10 <sup>-12</sup>

Conductancia cuántica	$G_0 = 2e^2/h$	77, 480 917 346(25) $\mu\text{S}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$
Flujo magnético cuántico	$\varphi_0 = h/2e$	2,067 833 758(46) pWb	$2, 2 \cdot 10^{-8}$
Razón de frecuencia de Josephson	$2e/h$	483, 597 870(11) THz/V <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Costante de Von Klitzing	$\hbar/e^2 = \mu_0 c/2\alpha$	25 812.807 4434(84) $\Omega$	$3, 2 \cdot 10^{-10}$
Magnetón de Bohr	$\mu_0 B = e\hbar/2me$	9, 274 009 68(20) yJ/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Radio clásico del electrón	$r_e = e^2/4\pi u_0 c^2 m_e$	2,817 940 3267(27) fm	$9, 7 \cdot 10^{-10}$
Longitud de onda Compton del electrón	$\lambda_C = \hbar/m_e c$	2, 426 310 2389(16) pm	$6, 5 \cdot 10^{-10}$
	$\lambda_C = \hbar/mec = re/a$	0, 386 159 268 00(25) pm	$6, 5 \cdot 10^{-10}$
Radio de Bohr <sup>a</sup>	$a_\infty = re/a^2$	52, 917 721 092(17) pm	$3, 2 \cdot 10^{-10}$
Cuanto de circulación	$\hbar/2m_e$	3.636 947 5520(24) $\cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup> /s	$6.5 \cdot 10^{-10}$
Carga específica del positrón	$e/m_e$	1, 758 820 088(39) $\cdot 10^{11}$ C/kg <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Frecuencia ciclotrón del electrón	$fc/B = e/2\pi m_e$	27, 992 491 10(62) GHz/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Momento magnético electrón	$\mu_e$	-9, 284 764 30(21) $\cdot 10^{-24}$ J/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
	$\mu_e /iB$	-1, 001 159 652 180 76(27)	$2, 6 \cdot 10^{-13}$
	$\mu_e /iN$	-1, 838 281 970 90(75) 10 <sup>3</sup>	$4, 1 \cdot 10^{-10}$
Factor-g del electrón	$g_e$	-2, 002 319 304 361 53(53)	$2, 6 \cdot 10^{-13}$
Razón de masa muón-electrón	$m_\mu/m_e$	206, 768 2843(52)	$2, 5 \cdot 10^{-8}$
Momento magnético muón	$\mu_\mu$	-4, 490 448 07(15) $\cdot 10^{-26}$ J/T	$3, 4 \cdot 10^{-8}$
Factor-g del muón	$g_\mu$	-2, 002 331 8418(13)	$6, 3 \cdot 10^{-10}$
Razón de masa protón-electrón	$m_p/m_e$	1 836,152 672 45(75)	$4, 1 \cdot 10^{-10}$
Carga específica protón	$e/m_p$	9, 578 833 58(21) $10^7$ C/kg <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Longitud de onda Compton del protón	$\lambda_{C,p} = \hbar/m_p c$	1, 321 409 856 23(94) fm	$7, 1 \cdot 10^{-10}$
Magnetón nuclear	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	5, 050 783 53(11) $\cdot 10^{-27}$ J/T <sup>2</sup>	$2 \cdot 10^{-8}$
Momento magnético del protón	$\mu_p$	1, 410 606 743(33) $\cdot 10^{-26}$ J/T <sup>2</sup>	$4 \cdot 10^{-8}$
	$\mu_p/\mu_B$	1, 521 032 210(12) $\cdot 10^{-3}$	$8, 1 \cdot 10^{-9}$
	$\mu_p/\mu_N$	2,792 847 356(23)	$8, 2 \cdot 10^{-9}$
Razón giromagnética protón	$\gamma_p = 2\mu_p/\hbar$	2, 675 222 005(63) $\cdot 10^8$ Hz/ T <sup>2</sup>	$4 \cdot 10^{-8}$
Factor-g protón	$g_p$	5, 585 694 713(46)	$8, 2 \cdot 10^{-9}$
Razón de masa neutrón-electrón	$m_n/m_e$	1 838 683 6605(11)	$5, 8 \cdot 10^{-10}$
Razón de masa neutrón-protón	$m_n/m_p$	1, 001 378 419 17(45)	$4, 5 \cdot 10^{-10}$
Longitud de onda Compton neutrón	$eC_{,n} = \hbar/m_n c$	1, 319 590 9068(11) fm	$8, 2 \cdot 10^{-10}$
Momento magnético neutrón	$\mu_n$	-0, 966 236 47(23) $\cdot 10^{-26}$ J/T <sup>2</sup>	$4 \cdot 10^{-7}$

$\mu_n/\mu_B$	-1, 041 875 63(25) · 10 <sup>-3</sup>	2, 4 · 10 <sup>-7</sup>
$\mu_n/\mu_N$	-1, 913 042 72(45)	2, 4 · 10 <sup>-7</sup>
Constante de Stefan–Boltzmann	$\sigma = \pi^2 k^4 / 60 \hbar^3 c^2$	56, 703 73(21) nW/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>
Constante de desplazamiento de Wien	$b = \lambda_{max} T$	2,897 7721(26) mmK 58, 789 254(53) GHz/K
Electron-volt	eV	1, 602 176 565(35) 10 <sup>-19</sup> J <sup>2</sup>
cost. conversión bit a entropía	$k \ln 2$	10 <sup>23</sup> bit = 0, 956 994 5(9) J/K
TNT contenido energía	c,	T a 4,0 MJ/kg
a: para una masa infinita del núcleo		4 · 10 <sup>-2</sup>

Algunas propiedades útiles de nuestro medio ambiente local se dan en la siguiente tabla.

**TABLA 12** Costantes astronómicas

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALOR
Año trópico 1900 <sup>a</sup>	a	31 556 925,974 7 s
Año trópico 1994	a	31 556 925,2 s
Día sideral medio	d	23h 56' 4, 090 53"
Distancia media Tierra-Sol <sup>b</sup>		149 597 870,691(30) km
Unidad astronómica <sup>b</sup>	AU	149 597 870 691 m
Año luz basado en el año juliano	al	9,460 730 472 5808 Pm
Parsec	pc	30, 856 775 806 Pm = 3, 261 634 al
Masa de la Tierra	M <sub>⊕</sub>	5, 973(1) · 10 <sup>24</sup> kg
Constante gravitacional geocéntrica	GM	3, 986 004 418(8) · 10 <sup>14</sup> m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>
Longitud gravitacional de la Tierra	l <sub>⊕</sub> = 2GM/c <sup>2</sup>	8,870 056 078(16) mm
Radio ecuatorial de la Tierra <sup>c</sup>	R <sub>⊕</sub> eq	6378, 1366(1) km
Radio polar de la Tierra	R <sub>⊕</sub> p	6356, 752(1) km
Distancia ecuador-polo		10 001, 966 km (media)
Aplanamiento terrestre	e <sub>⊕</sub>	1/298, 25642(1)
Densidad media de la Tierra	ρ <sub>⊕</sub>	5,5Mg/m <sup>3</sup>
Edad de la Tierra	T <sub>⊕</sub>	4, 50(4)Ga = 142(2) Ps
Gravedad normal de la Tierra	g	9,806 65m/s <sup>2</sup>
Presión atmosférica estándar de la Tierra	p <sub>0</sub>	101 325 Pa
Radio de la Luna	R <sub>☾</sub> v	1738 km en dirección de la Tierra
Radio de la Luna	R <sub>☾</sub> h	1737,4 km en las otras dos direcciones
Masa de la Luna	M <sub>☾</sub>	7,35 · 10 <sup>22</sup> kg
Distancia media a la Luna	d <sub>☾</sub>	384 401 km
Distancia a la Luna en el perigeo		363 Mm, mínimo histórico 359 861 km
Distancia a la Luna en el apogeo		404 Mm, máximo histórico 406 720 km

Dimensión angular de la Luna		media $0,5181^\circ = 31,08'$ , mínimo $0,49^\circ$ , máximo $0,55^\circ$
Densidad media de la Luna	$\rho_{\text{L}}$	$3,3 \text{ Mg/m}^3$
Gravedad superficial en la Luna	$g_{\text{L}}$	$1,62 \text{ m/s}^2$
Presión atmosférica en la Luna	$p_{\text{L}}$	de $10^{-10}$ Pa (noche) a $10^{-7}$ Pa (día)
Masa de Júpiter		$1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Radio ecuatorial de Júpiter		$71,398 \text{ Mm}$
Radio polar de Júpiter		$1(1)\text{Mm}$
Distancia media de Júpiter al Sol		$778\ 412\ 020 \text{ km}$
Gravedad superficial en Júpiter		$24,9 \text{ m/s}^2$
Presión atmosférica en Júpiter		de 20 kPa a 200 kPa
Masa del Sol	$M_{\odot}$	$1,988\ 43(3) \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Longitud gravitacional del Sol	$2GM_{\odot}/c^2$	$2,953\ 250\ 08(5) \text{ km}$
Constante gravitacional heliocéntrica	$GM_{\odot}$	$132,712\ 440\ 018(8) \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Luminosidad del Sol	$L_{\odot}$	$384,6 \text{ YW}$
Radio ecuatorial del Sol	$R_{\odot}$	$695,98(7) \text{ Mm}$
Dimensión angular del Sol		0,53° media; mínima el cuatro de julio (afelio) 1888", máxima el cuatro de enero (perihelio) 1952"
Densidad media del Sol		$1,4 \text{ Mg/m}^3$
Edad del Sol		$4,6 \text{ Ga}$
Velocidad solar en torno al centro de la galaxia		$220(20) \text{ km/s}$
Velocidad solar contra la radiación cósmica de fondo		$370,6(5) \text{ km/s}$
Gravedad superficial del Sol		$274 \text{ m/s}^2$
Presión inferior en la fotosfera del Sol		15 kPa
Distancia al centro de la Vía Láctea		$8,0(5) \text{ kpc} = 26,1(1, 6) \text{ kal}$
Edad de la Vía Láctea		$13,6 \text{ Ga}$
Dimensión de la Vía Láctea		c. $10^{21} \text{ m}$ o $100 \text{ kal}$
Masa de la Vía Láctea		$10^{12} \text{ masas solares, c. } 2 \cdot 10^{42} \text{ kg}$
La mayor parte del grupo de galaxias lejanas SXDF-XCLJ		$9,6 \cdot 10^9 \text{ al}$

a. Definición constante desde equinoccio de primavera a equinoccio de primavera; una vez se utilizó para definir el segundo. (Recuerde:  $\pi$  segundos es alrededor de un nanosiglo.) El valor de 1990 e aproximadamente 0,7 s o menos, que corresponde a una ralentización de alrededor de 0,2 ms / a. (Ojo: ¿por qué?) *Desafío 163-b s* También hay una fórmula empírica para la variación de la duración del año en el tiempo.

b. La realmente sorprendente precisión de tan sólo 30 m en la distancia media Tierra-Sol es el promedio de tiempo de las señales enviadas desde las órbitas de Viking y Mars tomadas durante un período de más de 20 años. Tenga en cuenta que la Unión Astronómica Internacional distingue a la distancia media Tierra-Sol de la unidad astronómica en sí; esta última se define como una longitud fija y precisa. Incluso el año luz es una unidad definida como un número exacto

de la UAI. Para obtener más información, consulte [www.iau.org/public/measuring](http://www.iau.org/public/measuring).

c. La forma de la Tierra se describe con mayor precisión con el Sistema Geodésico Mundial. La última edición fue publicada en la 1984<sup>a</sup>. Para una presentación completa de sus antecedentes y sus detalles, véase la página web [www.wgs84.com](http://www.wgs84.com). La Unión Astronómica Internacional afinó los datos en 2000. Los radios y los datos de aplanamiento aquí son los del 'sistema de marea media'. Se diferencian de las del 'sistema de marea cero' y otros sistemas en aproximadamente 0,7 m. Los detalles son una ciencia en sí misma.

d. Medida de centro a centro. Para encontrar la posición exacta de la Luna en el cielo en una cierta fecha, ver la página [www.fourmilab.ch/earthview/moon\\_ap\\_per.html](http://www.fourmilab.ch/earthview/moon_ap_per.html). Para los planetas, ver la página [www.fourmilab.ch/solar/solar.html](http://www.fourmilab.ch/solar/solar.html) e [www.fourmilab.ch/solar/solar.html](http://www.fourmilab.ch/solar/solar.html) y las otras páginas del mismo sitio.

e. Los ángulos son definidos como sigue: 1 grado =  $1^\circ = \pi/180$  rad, 1 (primo) minuto =  $1' = 1^\circ/60$ , 1 segundo =  $1'' = 1'/60$ . Las unidades antiguas 'un tercio diminuto' y 'un cuarto diminuto', cada uno  $1/60$  -un sesentésimo-del precedente, ya no están en uso. ('Minuto' significa originariamente 'muy pequeño', como se hace todavía en inglés moderno)

Algunas propiedades de la naturaleza en general se enumeran en la siguiente tabla. (*Desafío 161 s Si quiere un reto, ¿puede determinar si una propiedad del universo, no viene en la lista?*)

**TABLA 13** Costantes cosmológicas.

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALOR
Constante cosmológica	$\Lambda$	$c \cdot 1 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}$
Edad del Universo <sup>a</sup> (Determinado por el espacio-tiempo, a través de la expansión, utilizando la relatividad general)	$t_0$	$4,333(53) \cdot 10^{17} \text{ s} = 13,8(0,1) \cdot 10^9 \text{ a}$
Edad del Universo <sup>a</sup> (determinada de la materia, vía galaxias y estrellas, usando la teoría cuántica)	$t_0$	Alrededor de $3,5(4) \cdot 10^{17} \text{ s} = 11,5(1,5) \cdot 10^9 \text{ a}$
Parámetro de Hubble	$H_0$	$2,3(2) \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = 0,73(4) \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1} = \hbar_0 \cdot 100 \text{ km/sMpc} = \hbar_0 \cdot 1,0227 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$
Parámetro de Hubble reducido	$h_0$	0,71(4)
Parámetro de deceleración <sup>a</sup>	$q_0 = -(a'/a)_0 / H_0^2$	-0,66(10)
Distancia horizonte Universo <sup>a</sup>	$d_0 = 3ct_0$	$40,0(6) \cdot 10^{26} \text{ m} = 13,0(2) \text{ Gpc}$
Topología universo		Trivial hasta $10^{26} \text{ m}$
Número de dimensiones espaciales		3 para distancias hasta $10^{26} \text{ m}$
Densidad crítica	$\rho_c = 3H_0^2 / 8\pi G$	$\hbar^2 \cdot 1,878 \cdot 82(24) \cdot 10^{-26} \text{ kg/m}^3$ $= 0,95(12) \cdot 10^{-26} \text{ kg/m}^3$
Del universo		
Parámetro de densidad (total)	$\Omega_0 = \rho_0 / \rho_c$	1,02(2)
Parámetro de densidad barión	$\Omega_{B0} = \rho_{B0} / \rho_c$	0,044(4)
Parámetro de densidad materia oscura fría	$\Omega_{CDM0} = \rho_{CDM0} / \rho_c$	0,23(4)
Parámetro de densidad neutrino	$\Omega_{\nu 0} = \rho_{\nu 0} / \rho_c$	0,001 a 0,005
Parámetro de densidad materia oscura	$\Omega_{X0} = \rho_{X0} / \rho_c$	
Parámetro de estado energía oscura	$w = p_x / \rho_x$	-1,0 (2)
Masa barión	$m_b$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $0,25(1) / \text{m}^3$
Número densidad bariones		
densidad materia luminosa		$3,8(2) \cdot 10^{-28} \text{ kg/m}^3$
Estrellas en el universo	$n_s$	$10^{22 \pm 1}$
Bariones en el universo	$n_b$	$10^{81 \pm 1}$

Temperatura del fondo de microondas <sup>b</sup>	$T_0$	2, 725(1)K
Fotones en el universo	$n_a$	$10^{89}$
Densidad de energía de los fotones	$n_a = \pi^2 k^4 / 15 T^4$	$4, 6 \cdot 10^{-31} \text{ kg/m}^3$
Densidad número de fotones		$410, 89 / \text{cm}^3 \text{ or } 400 / \text{cm}^3 (T_0 / 2.7 \text{ K})^3$
Amplitud perturbación densidad		$5, 6(1, 5) \cdot 10^{-6}$
Amplitud onda gravitacional		$< 0, 71$
Fluctuación de masa		8Mpc o8
Indice escalar	$n$	0,93(3)
Índice de ejecución escalar	$dn/d \ln k$	-0, 03(2)
Longitud de Planck	$l_{Pl} = (\hbar G/c^3)^{1/2}$	$1, 62 \cdot 10^{-35} \text{ m}$
Tiempo de Planck	$t_{Pl} = (\hbar G/c^5)^{1/2}$	$5, 39 \cdot 10^{-44} \text{ s}$
Masa de Planck	$m_{Pl} = (\hbar c/G)^{1/2}$	$21, 8 \mu\text{g}$
Instantes en la historia <sup>a</sup>	$t_0/t_{Pl}$	$8, 7(2, 8) \cdot 10^{60}$
Puntos espacio-temporales en el horizonte interno	$N_0 = (R_0/l_{Pl})^3$ $\cdot (t_0/t_{Pl})$	$10^{244 \pm 1}$
Masa en el horizonte interno	$M$	$10^{54 \pm 1} \text{ kg}$

a. El índice 0 indica valores de hoy.

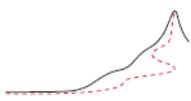
b. La radiación **originada** cuando el universo tenía 380 000 años y poseía una temperatura de alrededor de 3000 K; las fluctuaciones  $\Delta T_0$  que condujeron a la formación de las galaxias son hoy unos  $16 \pm 4 \mu\text{K} = 6(2) \cdot 10^{-6} T_0$ .

## NÚMEROS ÚTILES<sup>REF.160</sup>

$\pi$	3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 375105
$e$	2, 71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 699959
$\gamma$	0, 57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 939923
$\ln 2$	0, 69314 71805 59945 30941 72321 21458 17656 80755 00134 360255
$\ln 10$	2, 30258 50929 94045 68401 79914 54684 36420 76011 01488 628772
$\sqrt{10}$	3,16227 76601 68379 33199 88935 44432 71853 37195 55139 325216

Si el número  $\pi$  es *normal*, es decir, si todos los dígitos y combinaciones de dígitos en su expansión decimal aparecen con la misma frecuencia límite, entonces todo texto escrito o todavía por escribir, así como cualquier palabra que se haya hablado o que se diga, puede encontrarse codificado en su secuencia. La propiedad de la normalidad no ha sido aún probada, aunque se sospecha que se mantiene. ¿Significa esto que toda la sabiduría está codificada en el simple círculo? No. La propiedad no es nada especial: también se aplica al número 0.123456789101112131415161718192021 ... y muchos otros. *Desafío 162* s ¿Puede especificar algunos ejemplos?

Por cierto, en el gráfico de la función exponencial  $e^x$ , el punto  $(0, 1)$  es el único punto con dos coordenadas racionales. Si te imaginas pintando en azul todos los puntos del plano con dos coordenadas racionales, el plano parecería bastante azulado. Sin embargo, la gráfica pasa por sólo uno de estos puntos y logra evitar todos los demás.



## Apéndice B

# NÚMEROS Y ESPACIOS VECTORIALES

Un matemático es una máquina que transforma café en teoremas.  
Paul Erdős (b. 1913 Budapest, d. 1996 Warsaw)

Los conceptos matemáticos pueden expresarse en términos de "conjuntos" y "relaciones".

Muchos conceptos fundamentales fueron presentados en el último capítulo. ¿Por qué la matemática, dada esta simple base, se convierte en una pasión para ciertas personas? ¿Cómo pueden conjuntos y relaciones convertirse en el centro de la vida de una persona?

Las siguientes páginas presentan algunos conceptos más avanzados de la manera más simple y vívida posible, para todos aquellos que quieren oler la pasión por las matemáticas. [ref.161](#)

En particular, en este apéndice introduciremos las estructuras algebraicas más simples. El apéndice del próximo volumen presentará algunas estructuras *algebraicas* más complicadas y las estructuras *topológicas* más importantes; El tercer tipo básico de estructuras matemáticas, estructuras de *orden*, no son tan importantes en la física.

Los matemáticos se preocupan no sólo de la exploración de conceptos, sino también de su *clasificación*. Cada vez que se introduce un nuevo concepto matemático, los matemáticos tratan de clasificar todos los casos y tipos posibles. Esto se ha logrado de manera más espectacular para los diferentes tipos de números, para grupos simples finitos y para muchos tipos de espacios y variedades.

## NÚMEROS COMO ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

*Desafío 163 ny* Una persona que puede resolver  $x^2 - 92y^2 = 1$  en menos de un año es matemática.  
Brahmagupta (nacido en 598 Sind, 668) (implícito: resolver en números enteros)

Comenzaremos con una breve introducción al vocabulario. Los niños lo saben: los números son entidades que se pueden adicionar y multiplicar. Los matemáticos son más exigentes. Cualquier sistema matemático con las mismas propiedades básicas que las que poseen los números *naturales* se denomina *semianillo*. Cualquier sistema matemático con las mismas propiedades básicas que los *enteros* se llama *anillo*. (El término se debe a David Hilbert. Ambas estructuras pueden ser tanto finitas como infinitas). Más precisamente, un *anillo* ( $R, +, \cdot$ ) es un conjunto  $R$  de elementos con dos operaciones binarias, llamadas *adición* y *multiplicación*, generalmente escritas  $+$  y  $\cdot$  (la última puede simplemente sobreentenderse, sin notación explícita:  $a \cdot b \rightarrow ab$ ), para el cual las siguientes propiedades son válidas para todos los elementos  $a, b, c \in R$ :

-  $R$  es un grupo conmutativo con respecto a la suma, es decir,

$a+b \in R$ ,  $a+b = b+a$ ,  $a+0 = a$ ,  $a+(-a) = a-a = 0$  y  $a+(b+c) = (a+b)+c$ ;

—  $R$  es cerrado bajo la multiplicación, o lo que es lo mismo, la multiplicación es una operación interna, o sea,  $ab \in R$ ;

— la multiplicación es asociativa, es decir,  $a(bc) = (ab)c$ ;

— cumple la propiedad distributiva, esto es:  $a(b+c) = ab + ac$  and  $(b+c)a = ba + ca$ .

Muchos autores añaden el axioma

— existe el elemento neutro de la multiplicación, es decir,  $1a = a1 = a$ .

Las propiedades definitorias como estas se llaman *axiomas*. Nótese que los axiomas *no* son creencias básicas, como se afirma a menudo; los axiomas son las propiedades básicas utilizadas en la definición de un concepto: en este caso, de un anillo. Con el último axioma, se habla también de un *anillo unitario*.

Un *semianillo* es un conjunto que satisface todos los axiomas de un anillo, excepto que la existencia de elementos neutros y negativos para la suma se reemplaza por el requisito más débil de que si  $a + c = b + c$  entonces  $a = b$ . De forma poco rigurosa, un semianillo es un anillo 'sin' elementos negativos.

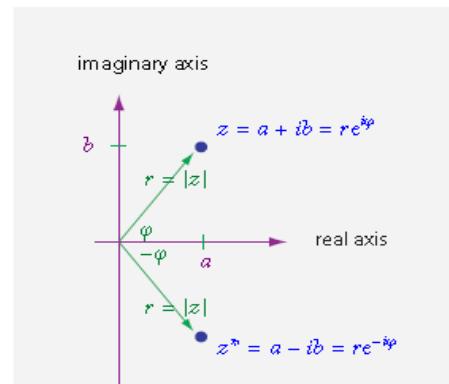
Para incorporar la división y definir los números racionales, necesitamos otro concepto. Un *cuerpo*  $K$  es un anillo con

— un elemento neutro de la multiplicación 1, tal que todos los elementos  $a$  obedecen  $1a = a$ ;

— al menos hay un elemento diferente de cero; y más importante

— para cada elemento  $a \neq 0$ , existe un inverso (de multiplicación)  $a^{-1}$ .

Se dice que un anillo o cuerpo es *comutativo* si la multiplicación es comutativa. Un cuerpo no comutativo también se denomina en inglés *skew field*. Los cuerpos pueden ser finitos o infinitos. (Un cuerpo o un anillo se caracteriza por su *característica*  $p$ . Esta es la cantidad más pequeña de veces que uno tiene que sumar 1 consigo mismo para dar cero. Si no hay tal número, la característica se establece en 0.  $p$  es siempre un número primo o cero.) Todos los cuerpos finitos son comutativos. En un cuerpo, todas las ecuaciones del tipo  $cx = b$  y  $xc = b$  ( $c \neq 0$ ) tienen soluciones para  $x$ ; hay una solución única si  $b \neq 0$ . Para resumir de forma poco rigurosa, al centrarse en la propiedad más importante, un cuerpo es un conjunto de elementos para los cuales, junto con la suma, la resta y la multiplicación, también está definida una división (para elementos distintos de cero). Los *números racionales* son el cuerpo más simple que incorpora los enteros.

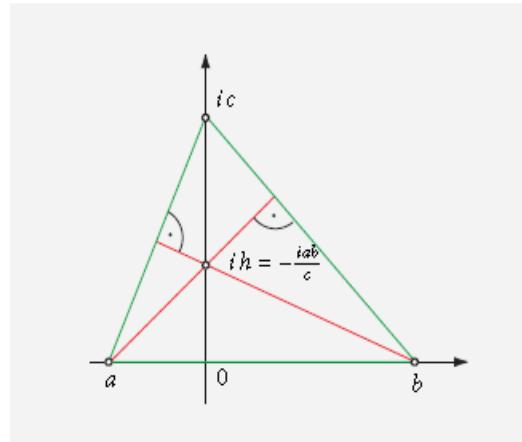


**FIGURA 82** Los números complejos son puntos del plano bidimensional.

El sistema de los *números reales* es la extensión mínima de los racionales, que está completa y totalmente ordenada.\* \* *Desafío 163 bis* ¿Puede demostrar que  $\sqrt{2}$  es un número real, pero no racional?

En la física clásica y la teoría cuántica, siempre se hace hincapié en que los resultados de medición son y deben ser números reales. Pero, ¿son los resultados de la medición todos los posibles números reales? En otras palabras, ¿todos los resultados de medición son solo un subconjunto de números reales? *Desafío 163 c*

Sin embargo, el concepto de 'número' no se limita a estos ejemplos. Se puede generalizar de varias maneras.<sup>ref.162</sup> La generalización más simple se logra al extender los números reales a 'variedades' de más de una dimensión.



**FIGURA 82 -b** Una propiedad de triángulos fácilmente demostrable con números complejos.

\* \* \* Un conjunto está matemáticamente *completo* si los físicos lo llaman continuo. Más precisamente, un conjunto de números es *completo* si cada subconjunto no vacío que está delimitado arriba tiene un límite superior mínimo.

Un conjunto está *totalmente ordenado* si existe una relación binaria  $\leq$  entre pares de elementos de manera que para todos los elementos  $a$  y  $b$

- si  $a \leq b$  y  $b \leq c$ , entonces  $a \leq c$ ;
- si  $a \leq b$  y  $b \leq a$ , entonces  $a = b$ ;
- se tiene que  $a \leq b$  o  $b \leq a$ .

En resumen, un conjunto está totalmente ordenado si existe una relación binaria que permite decir acerca de dos elementos cualesquiera cuál de ellos es el que precede al otro de forma consistente.

## NÚMEROS COMPLEJOS

En la naturaleza, los números complejos son un modo útil para describir en forma compacta sistemas y situaciones que contengan una fase. Por tanto los números complejos son útiles para describir ondas de cualquier tipo.

Los números complejos forman una variedad bidimensional. Un número complejo está definido por  $z = a + ib$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales, e  $i$  es un nuevo símbolo, la denominada *unidad imaginaria*. Bajo la multiplicación, los generadores de los números complejos, 1 e  $i$ , obedecen

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & i \\ \hline 1 & 1 & i \\ i & i & -1 \end{array} \quad (116)$$

a menudo resumido como  $i = \sqrt{-1}$ . En un número complejo  $z = a + ib$ ,  $a$  se llama la parte real, y  $b$  la parte compleja. Se ilustra en la Figura

El *complejo conjugado*  $z^*$ , también escrito  $\bar{z}$ , de un número complejo  $z = a + ib$  se define como  $z^* = a - ib$ . El valor *absoluto*  $|z|$  de un número complejo se define como  $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{z^*z} = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Esto define una *norma* en el espacio vectorial de los números complejos.

De  $|\omega z| = |\omega| |z|$  se sigue el *teorema de los dos cuadrados*

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \quad (117)$$

válido para todos los números reales  $a_i, b_i$ . Ya era conocido, en su versión para enteros, por Diofanto de Alejandría.

Los números complejos también se pueden escribir como pares ordenados  $(a, A)$  de números reales, con la adición definida como  $(a, A) + (b, B) = (a + b, A + B)$  y la multiplicación definida como  $(a, A) \cdot (b, B) = (ab - AB, ab + BA)$ . Esta notación nos permite identificar los números complejos con los *puntos* en un plano o, si lo preferimos, flechas en un plano. *Desafío 164 e* Traducir la definición de multiplicación en lenguaje geométrico nos permite probar rápidamente ciertos teoremas geométricos, como el de la Figura 82.

Los números complejos  $a + ib$  pueden representarse también como matrices  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \quad (118)$$

La suma y la multiplicación de la matriz corresponden a la suma y multiplicación complejas.

De esta forma, los números complejos pueden representarse mediante un tipo especial de matriz real.

*Desafío 165 s* Qué es  $|z|$  en lenguaje matricial?

El conjunto  $\mathbb{C}$  de números complejos con la suma y multiplicación como se definió arriba, forma un cuerpo conmutativo bidimensional y un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . En el campo de los números complejos, las ecuaciones cuadráticas  $az^2 + bz + c = 0$  para una  $z$  desconocida siempre tienen dos soluciones (para  $a \neq 0$  y contando la multiplicidad). *Desafío 166 e*.

Los números complejos se pueden usar para describir los puntos de un plano. Una rotación alrededor del origen puede describirse por multiplicación por un número complejo de longitud unidad. Otras cantidades bidimensionales también se pueden describir con números complejos. Los ingenieros eléctricos usan números complejos para describir cantidades con fases, como corrientes alternas o campos eléctricos en el espacio.

Escribir números complejos de longitud de unidad como  $\cos \theta + i \sin \theta$  es un método útil para recordar fórmulas de adición de ángulos. *Desafío 167 e* Como se tiene  $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)n$ , podemos deducir fácilmente fórmulas como  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  y  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ .

La función exponencial compleja es periódica en  $2\pi i$ ; en otras palabras, tenemos

$$e^1 = e^{1+2\pi i}. \quad (119)$$

que muestra la propiedad que esperamos de un ángulo de fase. Si se usa esta ecuación dos veces, se obtiene

$$e^1 = e^{1+2\pi i} = (e^{1+2\pi i})^{1+2\pi i} = e^{(1+2\pi i)(1+2\pi i)} = e^{1-4\pi^2+4\pi i} = e^{1-4\pi^2}. \quad (120)$$

*Desafío 168 e* Vaya, eso implicaría  $\pi = 0!$  ¿Qué está mal aquí?

Por cierto, hay exactamente tantos números complejos como números reales.

*Desafío 169 s* ¿Puede demostrar esto?

*Desafío 170 e* Los números complejos unidad forman el grupo  $\text{SO}(2)=\text{U}(1)$ .

El amor es complejo: tiene parte real y parte imaginaria. Anónimo

## CUATERNIONES

Las posiciones de los puntos en una línea se pueden describir por números reales. Los números complejos se pueden utilizar para describir las posiciones de los puntos de un plano. Es natural tratar de generalizar la idea de un número en espacios de dimensiones superiores. Sin embargo, resulta que no se puede definir un sistema numérico útil para el espacio *tridimensional*. Se puede construir un nuevo sistema numérico, los cuaterniones, que corresponde a los puntos del espacio *cuadridimensional*, pero sólo si se sacrifica la conmutatividad de la multiplicación. No se puede definir un sistema de números útiles para las dimensiones distintas de 1, 2 y 4.

Los cuaterniones fueron descubiertos por algunos matemáticos en el siglo diecinueve, Entre ellos Hamilton\*, que los estudió durante gran parte de su vida. De hecho, la teoría de Maxwell de la electrodinámica se formuló en términos de cuaterniones antes de utilizar vectores tridimensionales.<sup>ref.163</sup>

Bajo la multiplicación, los cuaterniones  $\mathbb{H}$  forman un álgebra 4-dimensional sobre los reales con una base 1,  $i, j, k$  que satisface

	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

(121)

Estas relaciones también se escriben a menudo  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = -ji = k$ ,  $jk = -kj = i$ ,  $ki = -ik = j$ .

Los cuaterniones 1,  $i, j, k$  se llaman también *unidades básicas* o *generadores*. La falta de simetría en la diagonal de la tabla muestra la no conmutatividad de la multiplicación cuaternónica. Con los cuaterniones, la idea de un producto no conmutativo apareció por primera vez en las matemáticas. Sin embargo, la multiplicación de cuaterniones es *asociativa*.

Como consecuencia de la no conmutatividad, las ecuaciones polinomiales en cuaterniones tienen muchas más soluciones que en números complejos: simplemente busque todas las soluciones de la ecuación  $X^2 + 1 = 0$  para convencerte de ello. *Desafío 171 s*

Todo cuaternión puede escribirse en la forma

$$X = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k = x_0 + \mathbf{v} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \mathbf{v}), \quad (122)$$

donde  $x_0$  se denomina la parte *escalar* y  $\mathbf{v}$  la parte *vectorial*. La multiplicación se define así como  $(x, v)(y, w) = (xy - vw, xv + yw + v \times w)$ . La multiplicación de dos cuaterniones generales se puede escribir como

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2). \quad (123)$$

El cuaternión conjugado  $X$  se define como  $\bar{X} = x_0 - \mathbf{v}$ , así que  $XY = Y\bar{X}$ . La *norma*  $|X|$  de un cuaternión  $X$  se define como  $|X|^2 = X\bar{X} = \bar{X}X = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2 + \mathbf{v}^2$ . La norma es multiplicativa, es decir,

$$|XY| = |X| |Y|.$$

A diferencia de los números complejos, cada cuaternión está relacionado con su conjugado complejo por

$$\bar{X} = -1/2(X + iXi + jXj + kXk). \quad (124)$$

No existe relación de este tipo para números complejos. En el lenguaje de la física, un número complejo y su conjugado son variables independientes; para los cuaterniones, este no es el caso.

\*\* William Rowan Hamilton (b. 1805 Dublin, d. 1865 Dunsink), Niño prodigo irlandés y matemático famoso, denominó los cuaterniones tomándolos de una expresión de la Vulgata (Actos. 12: 4).

Como resultado, las funciones de cuaterniones son menos útiles en física que las funciones de variables complejas.

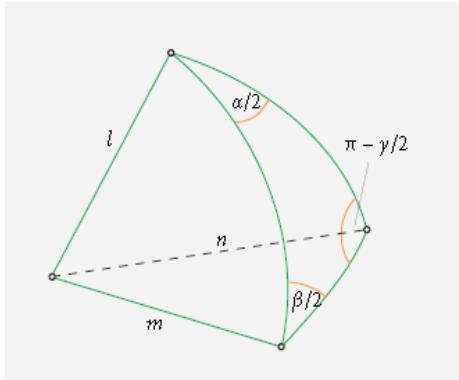


FIGURA 83 Combinaciones de rotaciones.

La relación  $|XY| = |X| |Y|$  implica el *teorema de los cuatro cuadrados*

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \\ & = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4)^2 + \\ & + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)^2 \end{aligned} \quad (125)$$

válido para todos los números reales  $a_i$  y  $b_i$ , y por lo tanto también para cualquier conjunto de ocho enteros. Fue descubierto en 1748 por Leonhard Euler (1707-1783) cuando intentaba demostrar que cada número entero es la suma de cuatro cuadrados. (El último hecho fue probado solo en 1770, por Joseph Lagrange.)

Hamilton pensó que un cuaternion con parte escalar cero, que simplemente llamó un vector (un término inventado por él), podría identificarse con un vector de traslación tridimensional ordinario; pero esto es erróneo. Tal cuaternion se llama *ahora puro*, *u homogéneo*, o cuaternion *imaginario*. El producto de dos cuaterniones puros  $V = (0, \mathbf{v})$  y  $W = (0, \mathbf{w})$  está dado por  $vw = (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$ , donde  $\cdot$  denota el producto escalar y  $\times$  indica el producto vectorial. Tenga en cuenta que cualquier cuaternion se puede escribir como la relación de dos cuaterniones puros.

En realidad, un cuaternion puro  $(0, \mathbf{v})$  no se comporta como un vector de traslación bajo transformaciones de coordenadas; de hecho, un cuaternion puro representa una *rotación* por el ángulo  $\pi$  o  $180^\circ$  alrededor del eje definido por la dirección  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . *Desafío 172 ny.*

Resulta que en el espacio tridimensional, una rotación *general* sobre el origen puede describirse mediante un cuaternion unidad  $Q$ , también llamada cuaternion normado, para el cual  $|Q| = 1$ .

Tal cuaternion se puede escribir como  $(\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$ , donde  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  es el vector normado que describe la dirección del eje de rotación y  $\theta$  es el ángulo de rotación.

Tal cuaternion unidad  $Q = (\cos \theta/2, \mathbf{n} \sin \theta/2)$  gira un cuaternion puro  $V = (0, \mathbf{v})$  en otro cuaternion puro  $W = (0, \mathbf{w})$  dado por

$$W = QVQ^*. \quad (126)$$

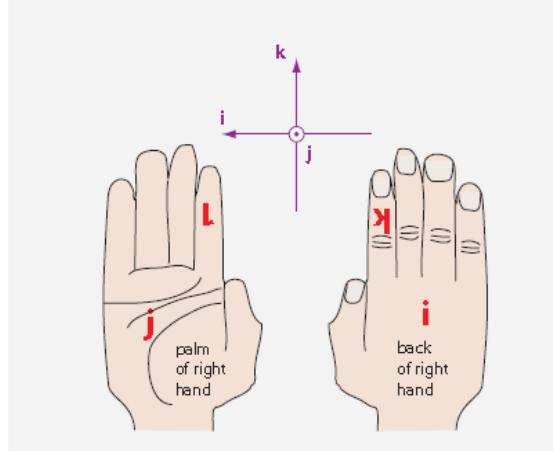


FIGURA 84 La parte superior y posterior de la mano derecha, y los cuaterniones.

Por lo tanto, si usamos cuaterniones puros como  $V$  o  $W$  para describir las posiciones, podemos usar cuaterniones unidad para describir rotaciones y calcular cambios de coordenadas.

La concatenación de dos rotaciones viene dada por el producto de los cuaterniones unidad correspondientes. De hecho, una rotación en un ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $I$  seguido de una rotación por un ángulo  $\beta$  sobre el eje  $m$  da una rotación por un ángulo  $y$  sobre el eje  $n$ , con los valores determinados por

$$(\cos y/2, \sin y/2n) = (\cos \beta/2, \sin \beta/2m)(\cos \alpha/2, \sin \alpha/2I). \quad (127)$$

Una forma de mostrar el resultado gráficamente se da en la [Figura 83](#). Al dibujar un triángulo en una esfera de unidad, y teniendo cuidado de recordar el factor  $1/2$  en los ángulos, la combinación de dos rotaciones se puede determinar sencillamente.

La interpretación de los cuaterniones como rotaciones también se ilustra, de una manera algo diferente, en el movimiento de cualquier mano.<sup>ref.164</sup> Para ver esto, tome un marcador verde y escriba las letras  $1$ ,  $i$ ,  $j$  y  $k$  en su mano como se muestra en la [Figura 84](#). Definiendo los tres posibles ejes de rotación de  $180^\circ$  como se muestra en la figura y tomando la concatenación como multiplicación, el movimiento de la mano derecha sigue las mismas "leyes" que las de cuaterniones unidad puros. [Desafío 173 e](#) (Uno necesita distinguir  $+i$  y  $-i$ , y lo mismo para las otras unidades, por el sentido del giro del brazo).

Y el resultado de una multiplicación es esa letra que puede leer una persona que está frente a usted).

[Desafío 174 s](#) Puede mostrar que  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ , que  $i^4 = 1$  y todas las demás relaciones de cuaterniones).

El modelo también muestra que el ángulo de rotación del brazo es la mitad del ángulo de rotación del cuaternion correspondiente. En otras palabras, los cuaterniones se pueden usar para describir el truco de la correa, si se considera que la multiplicación  $VW$  de dos cuaterniones significa que la rotación  $V$  se realiza después de la rotación  $W$ . Los cuaterniones, al igual que las manos humanas, se comportan así como una partícula de espín  $1/2$ . Los cuaterniones y espinores son isomórficos.

La razón del comportamiento del medio ángulo de las rotaciones se puede especificar de manera más precisa mediante el lenguaje matemático. Las rotaciones en tres dimensiones alrededor de un punto forman el "grupo ortogonal especial" en tres dimensiones, que se llama  $SO(3)$ . Pero los movimientos de una mano unida a un hombro a través de un brazo forman un grupo diferente, isomorfo al grupo de Lie  $SU(2)$ . La diferencia se debe a la aparición de medios ángulos en la parametrización de rotaciones; de hecho, las parametrizaciones anteriores implican que una rotación de  $2\pi$  corresponde a una multiplicación por  $-1$ . Sólo en el siglo XX se observó que existen observables físicos fundamentales que se comportan como manos unidas a los brazos: se llaman *espinores*. Más en espinores se pueden encontrar en la sección en la simetría de permutación, en donde las correas se utilizan como una analogía, así como brazos. En suma, el grupo  $SU(2)$  formado de cuaterniones unitarios es la *doble cobertura* del grupo de rotación  $SO(3)$ .<sup>ref.165</sup>

La representación simple de rotaciones y posiciones con cuaterniones es utilizada en programas de computadora en robótica, en astronomía y en simulación de vuelo. En el software utilizado para crear imágenes tridimensionales y animaciones, software de visualización, los cuaterniones a menudo se utilizan para calcular el camino que toman los rayos de luz reflejados repetidamente y así dar a las superficies un aspecto realista.

El álgebra de los cuaterniones es el único álgebra normada asociativa, no comutativa y de dimensión finita con una identidad sobre el cuerpo de los números reales. Los cuaterniones forman un cuerpo no conmutativo, es decir, un cuerpo oblicuo, en el que el inverso de un cuaternion  $X$  es  $\bar{X} / |X|$ . Por lo tanto, podemos definir la división de cuaterniones (teniendo cuidado de distinguir  $XY^{-1}$  e  $Y^{-1}X$ ). Por lo tanto, se dice que los cuaterniones forman un *álgebra de división*. De hecho, los cuaterniones  $\mathbb{H}$ , los números complejos  $\mathbb{C}$  y los reales  $\mathbb{R}$  son las únicas tres álgebras de división asociativa finidimensional. En otras palabras, el campo oblicuo de los cuaterniones es el único álgebra no comutativa asociativa real de dimensión finita sin divisores de cero. El *centro* de los cuaterniones, es decir, el conjunto de cuaterniones que commutan con todos los demás cuaterniones, es solo el conjunto de números reales.

Los cuaterniones se pueden representar como matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B' & A' \end{pmatrix} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{C} \text{ esto es } A = a + ib, B = c + id, \quad (128)$$

o, alternativamente, como

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (129)$$

donde el cuaternion  $X$  entonces está dado como  $X = A + Bj = a + ib + jc + kd$ . La suma y multiplicación matricial corresponde a la adición y multiplicación cuaterniónica.

Los generadores de los cuaterniones se pueden realizar como

$$1 : \sigma_0, i : -i\sigma_1, j : -i\sigma_2, k : -i\sigma_3 \quad (130)$$

donde  $\sigma_n$  son las matrices espín de Pauli.\*

Las representaciones reales  $4 \times 4$  no son únicas, como muestra la representación alternativa

$$\begin{pmatrix} a & b & -d & -c \\ -b & a & -c & d \\ d & c & a & b \\ c & -d & -b & a \end{pmatrix} \quad (132)$$

No es posible la representación de cuaterniones por matrices  $3 \times 3$ . [Desafío 175 ny](#). Estas matrices contienen elementos reales y complejos, que no plantean problemas especiales.

Por el contrario, cuando se construyen matrices con elementos cuaterniónicos, se debe tener cuidado, ya que la multiplicación cuaterniónica no es comutativa, por lo que las relaciones simples como  $\text{tr}AB = \text{tr}BA$  generalmente *no* son válidas.

¿Qué podemos aprender de los cuaterniones sobre la descripción de la naturaleza? En primer lugar, vemos que las rotaciones binarias son similares a las posiciones, y por lo tanto a las traslaciones: todas están representadas por 3 vectores. ¿Son las rotaciones las operaciones básicas de la naturaleza? ¿Es posible que las traslaciones sean solo 'sombras' de rotaciones? La conexión entre las traslaciones y las rotaciones se investiga en el último volumen de nuestro ascenso a la montaña.

Cuando Maxwell escribió sus ecuaciones de electrodinámica, utilizó la notación de cuaternion (ver Vol. III.). (La notación de tres vectores ahora habitual fue introducida más tarde por Hertz y Heaviside.) Las ecuaciones se pueden escribir de varias maneras utilizando cuaterniones. La más simple se logra cuando se mantiene una distinción entre  $\sqrt{-1}$  y las unidades  $i, j, k$  de los cuaterniones. <sup>ref.163</sup> [Desafío 176 s](#) Entonces se puede escribir toda la electrodinámica en una sola ecuación:

$$dF = \frac{-Q}{\epsilon_0} \quad (133)$$

donde  $F$  es el campo electromagnético generalizado y  $Q$  la carga generalizada. Estos están definidos por

$$\begin{aligned} F &= E + \sqrt{-1} cB \\ E &= iE_x + jE_y + kE_z \\ B &= iB_x + jB_y + kB_z \\ d &= \delta + \sqrt{-1} \partial t/c \\ \delta &= i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z \\ Q &= \rho + \sqrt{-1} J/c \end{aligned} \quad (134)$$

donde los campos  $E$  y  $B$  y las distribuciones de carga  $\rho$  y  $J$  tienen los significados usuales.

El contenido de la ecuación (133) para el campo electromagnético es exactamente el mismo que el de la formulación habitual.

A pesar de su encanto y su tetradimensionalidad, los cuaterniones no parecen estar listos para la reformulación de la relatividad especial; la razón principal de esto es el signo en la expresión de su norma.

Por lo tanto, relatividad y espacio-tiempo generalmente se describen utilizando números reales. Y a pesar de que los cuaterniones fueron útiles, no proporcionaron más conocimientos sobre la física o la naturaleza.

\* \*Las matrices espín de Pauli son matrices hermíticas complejas

$$\sigma_0 = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (131)$$

cuyos valores propios son todos  $\pm 1$ ; satisfacen las relaciones  $[\sigma_i, \sigma_k] = 2 \delta_{ik}$  y  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_l$ . Las combinaciones lineales  $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm \sigma_2)$  también se usan con frecuencia. Por cierto, otra representación posible de los cuaterniones es  $i: i\sigma_3, j: i\sigma_2, k: i\sigma_1$ .

## OCTONIONES

De la misma manera que los cuaterniones se construyen a partir de números complejos, los *octoniones* se pueden construir a partir de cuaterniones. Fueron investigados en primer lugar por Arthur Cayley (1821-1895). Bajo la multiplicación, los *octoniones* (u *octetos*) son los elementos de un álgebra de ocho dimensiones sobre los reales cuyos generadores  $1, \dots, i_n$  donde  $n = 1 \dots 7$ , satisfacen

	1	$i_1$	$i_2$	$ii_3$	$ii_4$	$ii_{5i}$	$ii_6$	$i_7$
1	1	$ii_1$	$i_2$	$ii_3$	$ii_4$	$ii_5$	$ii_6$	$i_7$
$ii_1$	$ii_1$	-1	$ii_3$	$-i_2$	$ii_5$	$-i_4$	$i_7$	$-i_6$
$ii_2$	$i_2$	$-i_3$	-1	$ii_1$	$-i_6$	$i_7$	$ii_4$	$-i_5$
$ii_3$	$ii_3$	$i_2$	$-i_1$	-1	$ii_7$	$ii_6$	$-i_5$	$-i_4$
$ii_4$	$ii_4$	$-i_5$	$ii_6$	$-i_7$	-1	$ii_1$	$-i_2$	$ii_3$
$ii_5$	$ii_5$	$ii_4$	$-i_7$	$-i_6$	$-i_1$	-1	$ii_3$	$i_2$
$ii_6$	$ii_6$	$-i_7$	$-i_4$	$ii_5$	$i_2$	$-i_3$	-1	$ii_1$
$i_7$	$i_7$	$ii_6$	$ii_5$	$ii_4$	$-i_3$	$-i_2$	$-i_1$	-1

(135)

De hecho, otras 479 tablas de multiplicación equivalentes también son posibles. Este álgebra se llama *álgebra de Cayley*; tiene una identidad y una división única. El álgebra es no conmutativa y también no asociativa. Es, sin embargo, *alternativa*, lo que significa que para todos los elementos  $x$  e  $y$ , se tiene  $x(xy) = x^2y$ ,  $y(xy) = xy^2$ : una propiedad algo más débil que la asociatividad. Es el único álgebra alternativa real de 8 dimensiones sin divisores cero.

Debido a que no es asociativo, el conjunto  $\mathbb{O}$  de todos los octoniones no forman un cuerpo, ni siquiera un anillo, por lo que se ha abandonado la antigua designación de "números de Cayley". Los octonions son los 'números' hipercomplejos más generales cuya norma es multiplicativa.

Sus generadores obedecen  $(i_n i_m) i_l = \pm i_n (i_m i_l)$ , donde el signo menos, que muestra la no asociatividad, es válido para combinaciones de índices que no son cuaterniónicos, como 1-2-4.

Los Octoniones se pueden representar como matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \text{donde } A, B \in \mathbb{H}, \text{ o como matrices reales de } 8 \times 8. \quad (136)$$

La multiplicación de matrices da el mismo resultado que la multiplicación octonómica.

La relación  $|wz| = |w| \cdot |z|$  permite deducir el impresionante *teorema de ocho cuadrados*

$$\begin{aligned}
 & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 + b_8^2) = \\
 & = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4 - a_5 b_5 - a_6 b_6 - a_7 b_7 - a_8 b_8)^2 + \\
 & + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3 + a_5 b_6 - a_6 b_5 + a_7 b_8 - a_8 b_7)^2 + \\
 & + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_5 b_7 + a_6 b_8 + a_7 b_5 - a_8 b_6)^2 + \\
 & + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_8 + a_6 b_7 - a_7 b_6 - a_8 b_5)^2 + \\
 & + (a_1 b_5 - a^2 b^6 + a^3 b^7 - a^4 b^8 + a^5 b^1 + a^6 b^2 - a^7 b^3 + a^8 b^4)^2 + \\
 & + (a_1 b_6 + a_2 b_5 - a_3 b_8 - a_4 b_7 - a_5 b_2 + a_6 b_1 + a_7 b_4 + a_8 b_3)^2 + \\
 & + (a_1 b_7 - a_2 b_8 - a_3 b_5 + a_4 b_6 + a_5 b_3 - a_6 b_4 + a_7 b_1 + a_8 b_2)^2 + \\
 & + (a_1 b_8 + a_2 b_7 + a_3 b_6 + a_4 b_5 - a_5 b_4 - a_6 b_3 - a_7 b_2 + a_8 b_1)^2
 \end{aligned} \quad (137)$$

válido para todos los números reales  $a_i$  y  $b_i$  y por lo tanto, en particular, también para todos los enteros. (Hay muchas variaciones de esta expresión, con diferentes combinaciones de signos posibles.) El teorema fue descubierto en 1818 por Carl Ferdinand Degen (1766-1825), y luego redescubierto en 1844 por John Graves y en 1845 por Arthur Cayley. No hay generalización a un mayor número de cuadrados, un hecho probado por Adolf Hurwitz (1859-1919) en 1898.

Los octoniones se pueden usar para mostrar que un producto vectorial se puede definir en más de tres dimensiones. Un *producto vectorial* o *producto cruz* es una operación  $\times$  que satisface

$$\begin{array}{ll} u \times v = -v \times u & \text{anticommutatividad} \\ (u \times v) w = u(v \times w) & \text{regla de cambio. (138)} \end{array}$$

Usando la definición

$$X \times Y = \frac{1}{2} (XY - YX), \quad (139)$$

Los productos vectoriales de cuaterniones imaginarios, es decir, del tipo  $(0, \mathbf{u})$ , son de nuevo imaginarios, y corresponden al producto vectorial tridimensional habitual, cumpliendo así (138). <sup>ref.162</sup> Curiosamente, también es posible utilizar la definición (139) para *octoniones*. *Desafío 177 e* En ese caso, el producto de octoniones imaginarios también es imaginario, y nuevamente se satisfacen las propiedades (138).

De hecho, este es el único otro ejemplo no trivial de un producto vectorial. En resumen, *un producto vectorial existe solo en tres y en siete dimensiones*. Muchos estudiosos han hipotizado que esta relación está relacionada con una posible naturaleza de diez dimensiones; sin embargo, estas especulaciones no han tenido éxito.

Las simetrías de fuerzas en la naturaleza conducen a una pregunta bien conocida. Las unidades de los números complejos forman el grupo Lie U (1) y las unidades de cuaterniones el grupo de Lie SU (2).

*Desafío 178 s* ¿Las unidades octoniones forman el grupo de Lie SU (3)?

#### OTROS TIPOS DE NÚMEROS

El proceso de construir nuevos sistemas de 'números' hipercomplejos o álgebras reales 'duplicando' uno dado puede continuarse hasta el infinito. Sin embargo, octoniones, *sedeniones* y todas las duplicaciones siguientes no son ni anillos ni cuerpos, sino solo álgebras no asociativas con unidad. También se pueden definir otras álgebras de dimensión finita con elementos unitarios sobre los reales, una vez llamados 'números' hipercomplejos: incluyen los denominados 'números duales', 'números dobles', 'números de Clifford-Lifshitz', etc. No desempeñan ningún papel en física.

Los matemáticos también han definido campos numéricos que tienen dimensiones de "uno y un bit", como cuerpos de números algebraicos. También hay una generalización del concepto de enteros para el dominio complejo: los *enteros gaussianos*, definidos como  $n + im$ , donde  $n$  y  $m$  son números enteros ordinarios. <sup>ref.166</sup> Gauss incluso definió lo que ahora se conoce como primos Gaussianos. (*Desafío 178 s* ¿Puede averiguar cómo?) No se usan en la descripción de la naturaleza, pero son importantes en la teoría de los números.

Los físicos solían llamar a los operadores mecano-cuánticos 'números q'. Pero este término ha pasado de moda en la actualidad.

Otra forma en que los números naturales se pueden extender es incluir números más grandes que los números infinitos <sup>ref.167</sup>. Las clases más importantes de este tipo de *números transfinitos* son los *ordinales*, los *cardinales* y los *surreales* (Vol. III). Los ordinales son esencialmente una extensión de los enteros más allá del infinito, mientras que los surreales son una extensión continua de los reales, también más allá del infinito. En términos generales e imprecisos, entre los transfinitos, los ordinales tienen un papel similar al que tienen los enteros entre los reales; los surreales completan todos los huecos entre los ordinales, como lo hacen los reales para con los enteros. Curiosamente, muchas series que divergen en  $\mathbb{R}$  convergen en los surreales.

*Desafío 179 ny* ¿Puede encontrar un ejemplo?

Los surreales incluyen números infinitamente pequeños, al igual que los números de *análisis no estándar*, también llamados *hiperreales*. <sup>ref.162</sup> En ambos sistemas numéricos, en contraste con los números reales, los números 1 y 0,999 999 9 ... (donde está implicada una cadena infinita, pero hiperfinita de nueves) no coinciden, sino que están separados por una infinidad de otros números. Los surreales fueron explorados anteriormente en Vol. III.

#### DE ESPACIOS VECTORIALES A ESPACIOS DE HILBERT

Los espacios vectoriales, también llamados *espacios lineales*, son generalizaciones matemáticas de ciertos aspectos del espacio tridimensional intuitivo. Un conjunto de elementos, dos de los cuales se pueden sumar juntos y cualquiera de los cuales se puede multiplicar por un número, se denomina espacio vectorial, si el resultado está nuevamente en el conjunto y se cumplen las reglas habituales de cálculo.

Más precisamente, un *espacio vectorial* sobre un cuerpo numérico K es un conjunto de elementos, llamados *vectores*, para los cuales se define una suma vectorial y una *multiplicación escalar*, de modo que para todos los vectores a, b, c y para todos los números s y r de K se tiene

$$\begin{array}{ll} (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c & \text{asociatividad de la adición vectorial} \\ n + a = a & \text{existencia del vector nulo} \\ (-a) + a = n & \text{existencia de vectores negativos (140)} \\ 1a = a & \text{regularidad de la multiplicación escalar} \\ (s + r)(a + b) = sa + sb + ra + rb & \text{distributividad completa de la multiplicación escalar} \end{array}$$

Si el cuerpo K, cuyos elementos se llaman *escalares* en este contexto, es el de los números reales (o complejos, o cuaterniónicos), se habla de un espacio vectorial real (o complejo, o cuaterniónico). Los espacios vectoriales también se llaman *espacios vectoriales lineales* o simplemente *espacios lineales*.

Los números complejos, el conjunto de todas las funciones reales definidas en la recta real, el conjunto de todos los polinomios, el conjunto de matrices con un número dado de filas y columnas, todos forman espacios vectoriales. En matemáticas, un vector es, por lo tanto, un concepto más general que en física.

*Desafío 180 s* (¿Cuál es el espacio vectorial matemático más simple posible?)

En física, el término 'vector' está reservado para elementos de un tipo más especializado de espacio vectorial, a saber, espacios de productos internos normados. Para definir esto, primero necesitamos el concepto de un espacio métrico.

Un *espacio métrico* es un conjunto con una métrica, es decir, una forma de definir distancias entre elementos. Una función real  $d(a, b)$  entre elementos se denomina una métrica si

$$\begin{array}{ll} d(a, b) \geq 0 & \text{positividad de la métrica} \\ d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c) & \text{desigualdad triangular (141)} \\ d(a, b) = 0 \quad \text{si y solo si } a = b & \text{regularidad de la métrica} \end{array}$$

Un ejemplo no trivial es el siguiente. Definimos una distancia especial d entre ciudades. Si las dos ciudades se encuentran en una línea que atraviesa París, usamos la distancia habitual. En todos los demás casos, definimos la distancia d por la distancia más corta de uno a otro viajando por París. *Desafío 181 s* Este extraño método define una métrica entre todas las ciudades de Francia, la llamada *distancia del ferrocarril francés*.

Un espacio vectorial *normado* es un espacio lineal con una norma, o 'longitud', asociada a cada vector. Una *norma* es un número no negativo  $\|a\|$  definido para cada vector a con las propiedades

$$\begin{array}{ll} \|ra\| = |r| \|a\| & \text{linearidad de la norma} \\ \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| & \text{desigualdad triangular (142)} \\ \|a\| = 0 \quad \text{solo si } a = 0 & \text{regularidad} \end{array}$$

*Desafío 182 yo* Por lo general, hay muchas formas de definir una norma para un espacio vectorial dado. Tenga en cuenta que una norma siempre se puede usar para definir una métrica estableciendo

$$d(a, b) = \|a - b\| \quad (143)$$

de modo que todos los espacios normados son también espacios métricos. Esta es la definición de distancia *natural* (en contraste con las no naturales como las de las ciudades francesas mencionadas anteriormente).

La norma a menudo se define con la ayuda de un producto interno. De hecho, la clase más especial de espacios lineales son los *espacios de productos internos*. Estos son espacios vectoriales con un *producto interno*, también llamado *producto escalar* '·' (que no debe confundirse con la multiplicación escalar!) Este producto asocia un número a cada par de vectores. Un espacio de producto interno sobre  $\mathbb{R}$  satisface

$$\begin{array}{ll} a \cdot b = b \cdot a & \text{commutatividad del producto escalar} \\ (ra) \cdot (sb) = rs(a \cdot b) & \text{bilinearidad del producto escalar} \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{distributividad por la izquierda del producto escalar} \\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c & \text{distributividad por la derecha del producto escalar} \end{array} \quad (144)$$

$$a \cdot a \geq 0 \quad \text{positividad del producto escalar}$$

$$a \cdot a = 0 \text{ si y solo si } a = 0 \quad \text{regularidad del producto escalar}$$

para todos los vectores  $a, b, c$  y todos los escalares  $r, s$ . Un espacio de producto interno *real* de dimensión finita también se denomina espacio vectorial *euclíadiano*. El conjunto de todas las velocidades, el conjunto de todas las posiciones o el conjunto de todas las cantiades de movimiento posibles forman tales espacios.

Un espacio de producto interno sobre  $\mathbb{C}$  satisface\*\*

$a \cdot b = \overline{b \cdot a} = \overline{b} \cdot \overline{a}$	<i>propiedad hermítica</i>
$(ra) \cdot (sb) = rs(a \cdot b)$	<i>sesquilinearidad del producto escalar</i>
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	<i>distributividad por la izquierda del producto escalar</i>
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	<i>distributividad por la derecha del producto escalar</i>
$a \cdot a \geq 0$	<i>positividad del producto escalar</i>
$a \cdot a = 0 \text{ si y solo si } a = 0$	<i>regularidad del producto escalar</i>

(145)

para todos los vectores  $a, b, c$  y todos los escalares  $r, s$ . Un espacio de producto interior *complejo* (de dimensión finita) también se denomina espacio vectorial *unitario* o *hermítico*. Si el espacio interno del producto está *completo*, se llama, especialmente en el caso complejo de dimensión infinita, un *espacio de Hilbert*.

El espacio de todos los estados posibles de un sistema cuántico forma un espacio de Hilbert.

Todos los espacios de productos internos son también espacios métricos, y por lo tanto espacios normados, si la métrica está definida por

$$d(a, b) = \sqrt{(a - b) \cdot (a - b)}. \quad (146)$$

Solo en el contexto de un producto interno podemos hablar de ángulos (o diferencias de fase) entre vectores, como estamos acostumbrados en física. Por supuesto, al igual que en los espacios normados, los espacios de productos internos también nos permiten hablar sobre la longitud de los vectores y definir una base, el concepto matemático necesario para definir un sistema de coordenadas.

La *dimensión* de un espacio vectorial es el número de vectores de una base que son linealmente independientes.

*Desafío 183 s* ¿Puede definir estos términos con precisión?

Un *espacio de Hilbert* es un espacio de producto interior real o complejo que es también un espacio métrico *completo*. En otros términos, en un espacio de Hilbert, las distancias varían continuamente y se comportan de la manera ingenuamente esperada. Los espacios de Hilbert pueden tener un número infinito de dimensiones.

*Desafío 184 s* ¿Qué espacios vectoriales son de importancia en física?

### CURIOSIDADES MATEMÁTICAS Y DESAFÍOS DIVERTIDOS

Las matemáticas proporcionan muchos resultados contraintuitivos. Leer un libro sobre el tema, como el de BERNARD R. GELBAUM & JOHN M. H. OLMSTED, *Theorems and Counterexamples in Mathematics*, Springer, 1993, puede ayudar a agudizar su mente y a saborear la belleza de la matemática aún más.

\* \*

Es posible dibujar una curva que coincide con todos los puntos de un cuadrado o con todos los puntos de un cubo. Esto se muestra en el texto HAN SAGAN, *Space Filling Curves (Curvas de relleno de espacio)*, Springer Verlag, 1994. Como resultado, la distinción entre una, dos y tres dimensiones se difumina en las matemáticas puras.

*Desafío 185 e*. En física, sin embargo, las dimensiones están claras y bien definidas; cada objeto en la naturaleza tiene tres dimensiones.

\* \*

---

\*\* Existen dos formas inequivalentes del axioma de sesquilinearidad. El otro es  $(ra) \cdot (sb) = rs(a \cdot b)$ . El término sesquilineal se deriva del latín y significa 'uno y medio lineal'.

Demuestre que dos operadores A y B obedecen

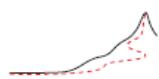
$$e^A e^B = \exp(A + B + \frac{1}{2} [A, B]) \quad (147)$$

$$+ \frac{1}{12} [[A, B], B] - \frac{1}{12} [[A, B], A] \quad (148)$$

$$- \frac{1}{48} [B, [A, [A, B]]] - \frac{1}{48} [A, [B, [A, B]]] \quad (149)$$

$$+ \dots \quad (150)$$

para la mayoría de los operadores A y B. Este resultado a menudo se llama *fórmula Baker-Campbell-Hausdorff* o *fórmula BCH*.



# SUGERENCIAS A LOS DESAFÍOS Y SOLUCIONES

Never make a calculation before you know the answer.

Lema de John Wheeler

Nunca haga un cálculo si antes no conoce la respuesta.

**Desafío 1**, pág 5: No dude en ser exigente y estricto. La próxima edición del texto se beneficiará de ello.

**Desafío 2**, page 9: La física clásica falla al explicar cualquier propiedad material, como el color o la suavidad. Las propiedades materiales resultan de las interacciones de la naturaleza; son inevitablemente cuánticos. Las explicaciones de las propiedades del material requieren, sin excepción, el uso de partículas y sus propiedades cuánticas.

**Desafío 3**, page 10: La física clásica permite que cualquier observable cambie *suavemente* con tiempo. En la física clásica, no hay un valor mínimo para cualquier cantidad física observable.

**Desafío 4**, page 12: Cuanto mayor sea la masa, menor será la sensación de movimiento inducida por el cuento de acción, porque la acción es la masa multiplicada por la velocidad multiplicada por la distancia: Para una masa grande, las variaciones de velocidad y distancia son pequeñas.

**Desafío 5**, page 13: El tiempo más simple es  $\sqrt{G\hbar/c^5}$ . El factor numérico no es obviamente fijo; se cambia más adelante. Usando 4G en lugar de G el tiempo se convierte en el tiempo más corto medible en la naturaleza.

**Desafío 6**, page 13: La carga de los electrones es especial para las interacciones electromagnéticas; no tiene en cuenta las interacciones nucleares o la gravedad. No está claro por qué la longitud definida con la carga elemental e debe ser importante para los sistemas neutros o para el vacío. Por otra parte, el cuento de acción  $\hbar$  es válido para *todas* las interacciones y *todas* las observaciones. Sin embargo, también podemos argumentar que las dos opciones para definir una longitud fundamental -con el cuento de acción y con la cantidad de carga- no son demasiado diferentes, ya que la carga de electrones está relacionada con el cuento de acción por  $e = \sqrt{4\pi\epsilon_0\alpha\cdot c\cdot\hbar}$ . Dos escalas de longitud definidas por las dos opciones difieren sólo por un factor cercano a 11,7.

**Desafío 8**, page 13: Por motivos puramente dimensionales, el radio de un átomo debe ser

$$r \approx \frac{\hbar 4 \pi \epsilon_0}{m_e e^2} , \quad (151)$$

Que es de aproximadamente 53 nm. De hecho, esta conjetura es excelente: es sólo el radio de Bohr.

**Desafío 9**, page 13: Debido al cuento de acción, los átomos en todas las personas, ya sean gigantes o enanos, tienen el mismo tamaño. Esto implica que los gigantes no pueden existir, como ya lo demostró Galileo. El argumento se basa en la fuerza dada de los materiales; y una misma fuerza en todas partes es equivalente a las mismas propiedades de los átomos en todas partes. Que los enanos no pueden existir es debido a una razón similar; la naturaleza no es capaz de hacer las personas más pequeñas de lo habitual (incluso en el útero difieren marcadamente de los adultos), ya que esto requeriría átomos más pequeños.

**Desafío 12**, page 18: Una desaparición de una masa m en un tiempo  $\Delta t$  es un cambio de acción  $c^2 m \Delta t$ . Eso es mucho más grande que  $\hbar$  para todos los objetos de la vida cotidiana.

**Desafío 14**, page 19: El efecto túnel de un león implicaría valores de acción S del orden de  $S = 100 \text{ kgm}^2/\text{s} \gg \hbar$ . Esto no puede ocurrir espontáneamente.

**Desafío 15**, page 19: Cada memoria, ya sea la memoria humana o una memoria electrónica de la computadora, debe evitar el decaimiento. Y el decaimiento sólo puede evitarse a través de paredes altas y bajas tasas de efecto túnel.

**Desafío 16**, page 20: ¡Sí! Muchas creencias y mitos - de la lotería a los fantasmas - se deben a la ignorancia de los efectos cuánticos.

**Desafío 17**, page 20: El flujo perfectamente continuo está en contraste con la borrosidad del movimiento inducido por el cuánto de la acción.

**Desafío 18**, page 20: La imposibilidad de seguir dos partículas a lo largo de su trayectoria aparece cuando su distancia mutua d es menor que su indeterminación de posición debido a su momento relativo p, por lo tanto cuando  $d < \hbar/p$ . Compruebe los números con electrones, átomos, moléculas, bacterias, personas y galaxias.

**Desafío 19**, page 20: También los fotones son indistinguibles. Vea [page 59](#).

**Desafío 21**, page 24: El crecimiento no es proporcional a la intensidad de la luz o a la frecuencia de la luz,

pero muestra ambos umbrales de intensidad y frecuencia. Eso es un efecto cuántico.

**Desafío 22,** page 24: Todos los efectos mencionados anteriormente, como el túnel, la interferencia, la desintegración, la transformación, la no vacuidad del vacío, la indeterminación y la aleatoriedad, también se observan en el dominio nuclear.

**Desafío 23,** page 24: Esto no es evidente de lo que se dijo hasta ahora, pero resulta ser correcto. De hecho, no hay otra opción, como verá cuando intente encontrar uno.

**Desafío 24,** page 24: Pulgarcito (Tom Thumb) es supuestamente tan inteligente como un ser humano normal. Pero un cerebro no puede ser reducido. Los fractales contradicen la existencia de la longitud de Planck, y la ley de Moore contradice la existencia de los átomos.

**Desafío 25,** page 25: El momento angular total cuenta, incluyendo el momento angular orbital. El momento angular orbital  $\mathbf{L}$  se da, usando el radio y el momento lineal,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

El momento angular total es un múltiplo de  $\hbar$ .

**Desafío 26,** page 25: ¡Sí, podríamos haberlo hecho!

**Desafío 27,** page 25: Esa es propiamente la relación de indeterminación. Bohr amplió esta idea a todo tipo de otros pares de conceptos, más en el dominio filosófico, como la claridad y la precisión de las explicaciones: ambas no pueden ser altas al mismo tiempo.

**Desafío 28,** page 26: El big bang no puede haber sido un evento, por ejemplo.

**Desafío 31,** page 30: Los fotones cargados serían desviados por los campos eléctricos y magnéticos; en particular, no pasarían sin perturbaciones. Esto no se observa. Los fotones masivos serían desviados por masas, como el Sol, mucho más de lo que se observa.

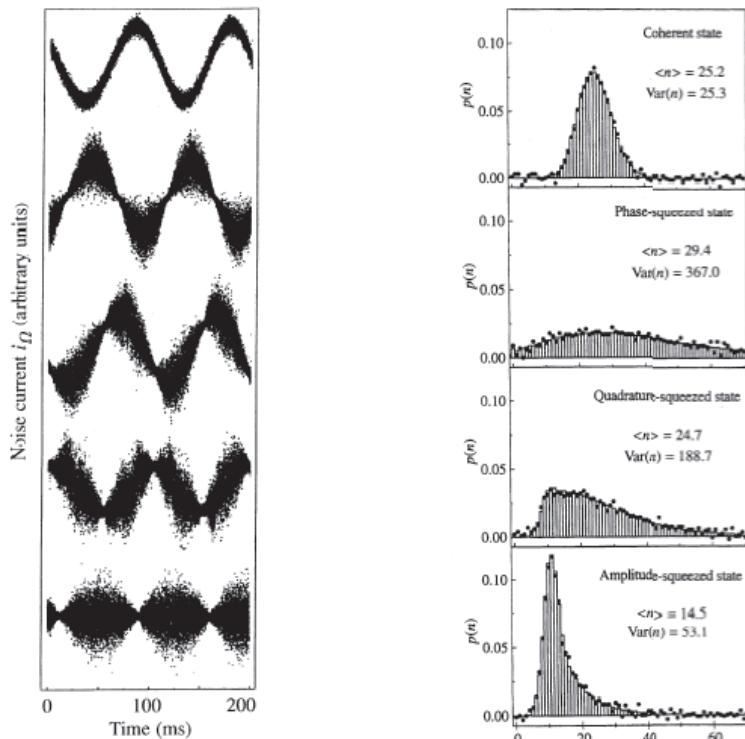
**Desafío 33,** page 31: Para medir el momento, necesitamos un dispositivo de medición espacialmente extendido; Para medir la posición, necesitamos un dispositivo de medición localizado.

**Desafío 34,** page 32: Los fotones son elementales porque se dan cuenta de la acción mínima, porque no pueden decaer, porque no pueden deformarse o partirse, porque no tienen masa, ni carga eléctrica ni otro número cuántico, y porque aparecen en el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica.

**Desafío 36,** page 34 : Los campos eléctricos medidos y la distribución de fotones se muestran en los famosos gráficos reproducidos en la [Figura 84b](#).

**Desafío 38,** page 35: Para ser observables al ojo, las franjas de interferencia necesitan ser visibles por alrededor de 0,1 s. Esto implica una diferencia de frecuencia máxima entre los dos haces de alrededor de 10Hz. Esto sólo es posible si un solo haz se divide en dos o si los dos haces proceden de láseres estabilizados de alta precisión.

**FIGURA 84b** Izquierda, de arriba a abajo: el campo eléctrico y la aleatoriedad medidos para un estado consistente para el estado de vacío comprimido, para un estado de fase comprimida, para un estado de cuadratura comprimido y para un estado de amplitud comprimido, todo con una pequeña cantidad de fotones Derecha: la distribución correspondiente de la cantidad de fotones para los cuatro estados más altos. (© G. Breitenbach/Macmillan, da [Ref. 19](#))



**Desafío 39**, page 41: La distancia  $l$  entre las líneas de un patrón de interferencia viene dada por  $l = \lambda d / s$ , donde  $d$  es la distancia a la pantalla y  $s$  es la separación de la fuente.

**Desafío 40**, page 43: Implícito en el modelo de flecha es la idea de que una partícula cuántica se describe por una flecha.

**Desafío 46**, page 46: A pesar de un gran número de intentos y la promesa de la fama eterna, esta es la conclusión sobria.

**Desafío 50**, page 47: Sí, el argumento es correcto. De hecho, discusiones más detalladas muestran que la electrodinámica clásica está en contradicción con *todos* los colores observados en la naturaleza.

**Desafío 53**, page 49: El cálculo no es fácil, pero tampoco demasiado difícil.<sup>ref.168</sup> Para una orientación inicial cercana a la vertical, el tiempo de caída  $T$  resulta ser

$$T = \frac{7}{2\pi} T_0 \ln \frac{8}{\alpha} \quad (152)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo inicial y se asume un ángulo de caída  $\pi$ . Aquí  $T_0$  es el tiempo de oscilación del lápiz para ángulos pequeños. (¿Puede determinarlo?) La relación de indeterminación para la punta del lápiz produce un ángulo inicial *mínimo*, porque la indeterminación del momento no puede ser arbitrariamente grande. Usted debe ser capaz de proporcionar un límite superior. Una vez que se conoce este ángulo, se puede calcular el tiempo máximo.

**Desafío 54**, page 50: Utilice la temperatura para calcular la energía cinética media, y por lo tanto la velocidad media de los átomos.

**Desafío 55**, page 50: A temperaturas tan bajas los átomos no pueden ser completamente distinguidos; forman un estado de materia con propiedades peculiares, llamado *condensado*. El condensado tampoco está en reposo; pero debido a su gran masa, sus fluctuaciones se reducen considerablemente, en comparación con las de un solo átomo.

**Desafío 57**, page 54: Sólo las variables cuyo producto tiene las mismas unidades que la acción física -  $Js$  - pueden ser complementarias entre sí.

**Desafío 58**, page 54: Use  $\Delta E < E$  y  $a \Delta t < c$ .

**Desafío 59**. El cuanto de acción no solo se aplica a las mediciones, se aplica al movimiento en sí, y en particular a todos los movimientos. Los efectos de las fuerzas nucleares, de las partículas nucleares y la radiación de partículas nucleares también deben cumplir con el límite. Y los experimentos muestran que realmente lo hacen. De hecho, si esto no fuera así, el cuanto de acción en las situaciones electrodinámicas podría eludirse, como puede verificarse.

**Desafío 60**. pág 55. En el exterior del garaje, todos los átomos deben formar la misma estructura sólida de nuevo.

**Desafío 67**, page 66: Los chips de Terabyte tendrían que tener pequeñas células de memoria. Las células pequeñas implican barreras delgadas. Las barreras delgadas implican altas probabilidades de túneles. El túnel implica falta de memoria.

**Desafío 72**, page 75: Si una partícula no fuera elemental, sus componentes estarían unidos por una interacción. Pero no hay interacciones conocidas fuera de las del modelo estándar.

**Desafío 73**, page 75: Las dificultades para ver los átomos de hidrógeno se deben a su pequeño tamaño ya su pequeño número de electrones. Como resultado, los átomos de hidrógeno producen sólo contrastes débiles en las imágenes de rayos X. Por las mismas razones es difícil imaginarlos usando electrones; El radio de Bohr del hidrógeno es sólo ligeramente mayor que la longitud de onda Compton del electrón.

Por primera vez, en 2008, un equipo de investigación afirmó haber fotografiado átomos de hidrógeno adsorbidos sobre el grafeno con la ayuda de un microscopio electrónico de transmisión. Para obtener más información, consulte J. C. Meyer, C. O. Grit, M. F. Crommle & A. Zetti, *Imaging and dynamics of light atoms and molecules on graphene*, Nature **454**, pp. 319–322, 2008. Sin embargo, parece que el informe aún no ha sido confirmado por otro grupo.

**Desafío 75**. pág. 76. Esto no es fácil! Se puede utilizar el concepto de acción para demostrar que es de hecho una diferencia fundamental entre operadores muy similares y muy diversos.

**Desafío 77**, page 76:  $r = 86$  pm, por tanto  $T = 12$  eV. Esto se compara con el valor real de 13,6 eV. El truco para la derivación de la fórmula es usar  $\langle \psi | r^2_x | \psi \rangle = 1/3 \langle \psi | rr | \psi \rangle$ , Una relación válida para estados sin momento angular orbital. Es válido para todas las coordenadas y también para los tres observables

momentum, siempre y cuando el sistema sea no-relativista.

**Desafío 78, pág. 76.** El universo para existir requeriría una fluctuación cuántica. Estas declaraciones, regularmente presentes en la prensa, son totalmente absurdas.

**Desafío 79,** page 78: Las partículas puntuales no pueden ser marcadas; las partículas puntiformes cercanas no se pueden distinguir, debido al cuanto de la acción.

**Desafío 80,** page 78: La solución son *dos* guantes. En otras palabras, si dos hombres y dos mujeres quieren hacer el amor sin peligro solo necesitan dos profilácticos. Puede deducir el procedimiento por sí mismo.

**Desafío 84,** page 80: La fórmula Sackur-Tetrode se deduce mejor de la siguiente manera. Comenzamos con un gas monoatómico ideal de volumen V, con N partículas y energía total U. En el espacio de fase, *la suma de estado Z* viene dada por

$$Z = \frac{V^N}{N!} \frac{1}{\Lambda^{3N}} \quad (153)$$

Utilizamos la aproximación de Stirling  $N! \approx N^N / e^N$ , y la definición de la entropía como  $S = \partial (kT \ln Z) / \partial T$ . Insertando la definición de  $\Lambda$ , esto da la ecuación de Sackur-Tetrode.

**Desafío 85,** page 81: Para un gran número de partículas, la energía de interacción introducirá errores. Para números muy grandes, la energía de unión gravitatoria lo hará también.

**Desafío 87,** page 81: Para escribir dos partículas en el papel, hay que distinguirlas, incluso si la distinción es arbitraria.

**Desafío 88,** page 81: Los árboles, como todos los objetos macroscópicos, tienen un valor espín que depende de su momento angular. Siendo objetos clásicos cuya fase se puede observar, el valor espín es incierto. No tiene sentido preguntar si los objetos macroscópicos son bosones o fermiones.

**Desafío 90,** pag. 84. La idea, también llamada dinero cuántico, no es compatible con las dimensiones y la duración requerida para los billetes de banco reales.

**Desafío 92,** page 86: Los gemelos difieren en la forma en que sus intestinos están doblados, en las líneas de sus manos y otros pliegues cutáneos. A veces, pero no siempre, características como puntos negros en la piel son especulares en los dos gemelos.

**Desafío 99,** page 95: Tres.

**Desafío 100,** page 95: No para un colchón. Esto no es fácil de imaginar.

**Desafío 101,** page 96: Los ángeles pueden distinguirse por su nombre, pueden hablar y pueden cantar; Por lo tanto están hechos de un gran número de fermiones. De hecho, muchos ángeles son de tamaño humano, por lo que ni siquiera caben en la punta de un alfiler.

**Desafío 108,** page 100: Los fantasmas, como los ángeles, se pueden distinguir por el nombre, pueden hablar y pueden ser vistos; Por lo que contienen fermiones. Sin embargo, pueden pasar a través de las paredes y son transparentes; así que no pueden ser hechos de fermiones, sino que deben ser imágenes, hechas de bosones. Eso es una contradicción.

**Desafío 109,** page 101: Las superposiciones macroscópicas no pueden ser dibujadas, porque la observación implica la interacción con un baño, que destruye la superposición macroscópica.

**Desafío 111,** page 103: La pérdida de elementos no diagonales conduce a un aumento de los elementos diagonales, y por tanto de la entropía.

**Desafío 114,** page 108: La velocidad de la energía viene dada por el avance de las dos colas externas; por lo que la velocidad nunca es mayor que la velocidad de la luz.

**Desafío 115,** page 110: No, ya que tomar una foto implica una interacción con un baño, lo que destruiría la superposición.

**Desafío 116,** page 110: Una fotografía requiere iluminación; la iluminación es un campo electromagnético macroscópico; Un campo macroscópico es un baño; Un baño implica decoherencia; La decoherencia destruye las superposiciones.

**Desafío 119,** page 111: Depende. Pueden ser debidos a interferencias o a sumas de intensidad. En el caso de la radio el efecto es más claro. Si en una frecuencia particular las señales cambian periódicamente de una estación a otra, uno tiene un efecto de interferencia genuino.

**Desafío 120,** page 111: Ellos interfieren. Pero esta es una pregunta trampa; ¿Qué es un electrón monocromático? ¿Ocurre en el laboratorio?

**Desafío 121,** page 111: Tal ordenador requiere relaciones de fase claras entre componentes; Tales relaciones

de fase son extremadamente sensibles a las perturbaciones externas. En la actualidad, no tienen más de un microsegundo, mientras que los programas informáticos largos requieren minutos y horas para ejecutarse.

**Desafío 122**, page 111: Un registro es un efecto de un proceso que debe ser difícil de revertir o anular.

Las huellas de un huevo roto son fáciles de limpiar en un plato de vidrio grande, pero duro en la lana de una oveja. Los dientes rotos, las ropas rasgadas, o los rasguños en superficies grandes son buenos registross. Los científicos forenses saben muchos ejemplos adicionales.

**Desafío 126**, page 117: Cualquier otro baño también hace el truco, como por ejemplo la atmósfera, las vibraciones sonoras, campos electromagnéticos, etc.

**Desafío 127**, page 117: La Luna está en contacto con los baños como el viento solar, los meteoritos que caen, la radiación electromagnética de fondo del universo profundo, el flujo de neutrinos del Sol, la radiación cósmica, etc.

**Desafío 128**, page 118: Los potenciales espacialmente periódicos tienen la propiedad. La decoherencia conduce entonces a la diagonalización de la cantidad de movimiento.

**Desafío 130**, page 121: Si es así, avise al autor.

**Desafío 132**, page . El valor del corrimiento al rojo es  $z = 9,9995$ . De la fórmula para el desplazamiento Doppler longitudinal obtenemos  $v/c = ((z+1)^2 - 1)/((z+1)^2 + 1)$ ; esto produce 0,984 en el presente caso. Luego la galaxia se mueve desde la Tierra con el 98.4% de la velocidad de la luz.

**Desafío 137**, page 132 Los átomos de hidrógeno están en autoestados por las razones explicadas en el capítulo sobre superposiciones y probabilidades: en un gas, los átomos son parte de un baño, y por lo tanto casi siempre en estados energéticos propios.

**Desafío 141**, pag.137. No, a pesar del nombre, el fósforo no es fosforescente sino quimiluminiscente.

**Desafío 143**, page 141: Esta es una pregunta con trampa. Un cambio en  $\alpha$  requiere un cambio en  $c$ ,  $\hbar$ , e o  $\epsilon_0$ .

Ninguno de estos cambios es posible o observable, ya que todos nuestros aparatos de medición están basados en estas unidades. Las especulaciones sobre el cambio de  $\alpha$ , a pesar de su frecuencia en la prensa y en revistas científicas, son charlas inútiles.

**Desafío 144**, page 141: Un cambio de unidades físicas tales que  $\hbar = c = e = 1$  cambiaría el valor de  $\epsilon_0$  de tal manera que  $4\pi\epsilon_0 = 1/\alpha \approx 137,036$ .

**Desafío 147**, page 148: La masa es una medida de la cantidad de energía. El "cuadrado de la masa" no tiene sentido.

**Desafío 151**, page 151: Los límites de Planck pueden ser excedidos para observables extensos para los cuales muchos sistemas de partícula pueden exceder los límites de partículas individuales, tales como la masa, el momento, la energía o la resistencia eléctrica.

**Desafío 153**, page 153: No olvide la dilatación relativista del tiempo.

**Desafío 154**, page 153: La fórmula con  $n - 1$  es un ajuste mejor. ¿Por qué?

**Desafío 157**, page 153: ¡No! Son demasiado precisos para tener sentido. Sólo se dan como ilustración del comportamiento de la distribución gaussiana. Las distribuciones de medida reales no son Gaussianas a la precisión implícita en estos números.

**Desafío 158**, page 154: Alrededor de 0,3 m / s. ¡No es 0,33m / s, no es 0,333m / s y no es ninguna secuencia más de tres!

**Desafío 160**, page 156: La desaceleración va *cuadráticamente* con el tiempo, porque cada nueva desaceleración se suma a la antigua!

**Desafío 161**, page 156: No, sólo se enumeran las propiedades de partes del universo. El universo en sí no tiene propiedades, como se muestra en el último volumen.

**Desafío 162**, page 165: El doble de ese número, el número formado por la secuencia de todos los números pares, etc.

**Desafío 162**, pag. 165 Encontraremos en el último volumen que todas las mediciones de valores tienen límites superior e inferior. También descubriremos que dos resultados de medición física no pueden diferir solo de, por ejemplo, el dígito decimal 300-sima en adelante. De hecho, todos los resultados de la medición son números reales, pero no al revés. Debe enfatizarse que para la teoría cuántica, para la relatividad y también para la física galileana, esta limitación no tiene consecuencias en absoluto.

**Desafío 165**, page 168:  $|z|^2$  es el *determinante* de la matriz  $z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

**Desafío 169**, page 168: Use el argumento de la diagonal de Cantor, como en el Desafío 251.

**Desafío 171**, page 169: Cualquier quaternion  $X = ai + bj + ck$  con  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  Resuelve la ecuación  $X^2 + 1 = 0$ ; Las soluciones puramente imaginarias  $+i$  y  $-i$  son así aumentadas por una esfera continua de soluciones en el espacio cuaterniónico.

**Desafío 174**, page 171. Cualquier rotación de un ángulo  $2\pi$  se describe por  $-1$ . Sólo una rotación de  $4\pi$  se describe con  $+1$ ; Los cuaterniones describen espinores.

**Desafío 176**, page 172: Simplemente compruebe el resultado componente a componente. Véase también la mencionada referencia.

**Desafío 177**, pag. No. Debido a que los octoniones unitarios no son asociativos, no forman un grupo en absoluto. A pesar de su encanto superficial, esta línea de razonamiento no ha llevado a ninguna comprensión de las interacciones fundamentales de la naturaleza.

**Desafío 178**, page 174: Para que un entero gaussiano  $n + im$  sea primo, el entero  $n^2 + m^2$  debe ser primo y, además, debe satisfacerse una condición en  $n \bmod 3$ ; ¿Cuál y por qué?

**Desafío 180**, page 175: El conjunto que contiene sólo el vector cero.

**Desafío 181**, page 175: La métrica es regular, definida positiva y obedece a la desigualdad triangular.

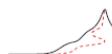
**Desafío 182**, pag. Básicamente solo los espacios vectoriales listados en el apéndice (o en el libro).

**Desafío 183**, page 176: Si no puede, culpe a su profesor de matemáticas en la escuela secundaria, y luego buscar las definiciones. No es un tema difícil.

**Desafío 184**, page 176: Esencialmente sólo los espacios vectoriales listados.

**Desafío 187**, page 176: Esto podría ser solucionable con un truco similar a los utilizados en la irracionalidad de cada uno de los dos términos de la suma, pero nadie ha encontrado uno.

**Desafío 188**, page 176: Todavía hay descubrimientos en la matemática moderna, especialmente en topología, teoría numérica y geometría algebraica. Las matemáticas tienen futuro.



# BIBLIOGRAFÍA

“Ningún hombre, sino un imbécil, ha escrito alguna vez, excepto por el dinero”

Samuel Johnson

“Tan pronto como escriba, ya no le quedará más tiempo para leer.”

Anónimo

1 Giuseppe Fumagalli, *Chi l'ha detto?*, Hoepli, Milano, 1983. Citado en la pág. 15.

2 El cuanto de acción fue introducido por Max Planck, en *Über irreversible Strahlungsvorgänge*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin pp. 440–480, 1899. En el artículo, Planck usó la letra *b* para lo que hoy en día denominamos *h*. Citado en la pág. 16.

3 Bohr explicó la indivisibilidad del cuanto de acción en su famosa conferencia de Como. Vea N. Bohr, *Atomtheorie und Naturbeschreibung*, Springer, 1931. En la página 16 escribió: ‘Ya no es probable que los conceptos fundamentales de las teorías clásicas lleguen a ser superfluos para la descripción de la experiencia física. El reconocimiento de la indivisibilidad de la cantidad de acción y la determinación de su magnitud no solo dependen de un análisis de mediciones basado en conceptos clásicos, sino que continúa siendo solo la aplicación de estos conceptos lo que permite relacionar el simbolismo de la teoría cuántica a los datos de la experiencia.’ Él también escribió: ‘...el postulado fundamental de la indivisibilidad del cuanto de acción es en sí mismo, desde el punto de vista clásico, un elemento irracional que inevitablemente nos obliga a renunciar a un modo causal de descripción y que, debido al acoplamiento entre los fenómenos y su observación, nos fuerza adoptar un nuevo modo de descripción designado como complementario en el sentido de que cualquier aplicación dada de conceptos clásicos excluye el uso simultáneo de otros conceptos clásicos que en una conexión diferente son igualmente necesarios para la elucidación de los fenómenos ...’ y ‘...la magnitud finita del cuanto de acción impide por completo una distinción clara entre un fenómeno y la agencia por la cual se observa, una distinción que subyace al concepto consuetudinario de observación y, por lo tanto, forma la base de las ideas clásicas del movimiento.’ Otras declaraciones acerca de la indivisibilidad del cuanto de acción puede encontrarse en N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*, Science Editions, 1961. Vea también Max Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley, first edition, 1974, pp. 90–91. Citado en la pág. 16.

4 Para algunas de las raras publicaciones modernas que hacen hincapié en el cuanto de acción, véase M. B. Mensky, *The action uncertainty principle and quantum gravity*, Physics Letters A **162**, p. 219, 1992, and M.B.Mensky, *The action uncertainty principle in continuous quantum measurements*, Physics Letters A **155**, pp. 229–235, 1991. El principio del cuanto de acción de Schwinger es usado en Richard F.W. Bader, *Atoms in Molecules – A Quantum Theory*, Oxford University Press, 1994. Existe una gran cantidad de libros de texto generales sobre teoría cuántica. Hay uno para cada gusto. Una bien conocida introducción conceptual es Jean-Marc Lévy-Leblond & Françoise Balibar, *Quantique – Rudiments*, Masson, 1997, traducido al inglés como *Quantics*, North-Holland, 1990.

Uno de los más hermosos libros es Julian Schwinger, *Quantum Mechanics – Symbolism of Atomic Measurements*, edited by Berthold-Georg Englert, Springer Verlag, 2001.

Una aproximación moderna con una bella introducción es Max Schubert & Gerhard Weber, *Quantentheorie – Grundlagen und Anwendungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 1993.

Un texto estándar para principiantes es C. Cohen-Tannoudji, B. Diu & F. Laloë, *Mécanique quantique I et II*, Hermann, Paris, 1977. También está disponible en varias traducciones.

Un buen texto es el de Asher Peres, *Quantum Theory – Concepts and Methods*, Kluwer, 1995. Para un enfoque animado, vea Vincent Icke, *The Force of Symmetry*, Cambridge University Press, 1994.

Nuevos libros de texto son publicados con regularidad alrededor del mundo. Citado en la pág. 16.

5 La mejor fuente para la historia del paseo en el bosque de Planck con su hijo Erwin es Hans Roos & Armin Hermann, editors, *Max Planck – Vorträge, Reden, Erinnerungen*, Springer, 2001, page 125. Como explica el texto, Erwin Planck contó la historia a al menos dos personas diferentes. El propio Erwin Planck fue parte de la trama fallida de 1944 contra Hitler y fue ahorcado en enero de 1945.. Citado en la pág. 19.

6 Max Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge (vorläufige Mitteilung)*, Zeitschrift für Physik **37**, pp. 863–867, 1926, Max Born, *Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Zeitschrift für Physik **38**, pp. 803–827, 1926. Citado en la pág. 23.

7 Vea por ejemplo los artículos de Jan Hilgevoord, *The uncertainty principle for energy and time*, American Journal of Physics **64**, pp. 1451–1456, 1996, y de Paul Busch, *On the time-energy uncertainty relation, parts 1 & 2*, Foundations of Physics **20**, pp. 1–43, 1990. A classic is the paper by Eugene P. Wigner, *On the time-energy uncertainty relation*, in Abdus Salam & Eugene P. Wigner, editors, *Aspects of Quantum Theory*, Cambridge University Press, 1972. Citado en la pág. 24.

8 Vea también el folleto de Claus Mattheck, *Warum alles kaputt geht – Form und Versagen in Natur und Technik*, Forschungszentrum Karlsruhe, 2003. Citado en la pág. 28.

9 R. Clifton, J. Bub & H. Halvorson, *Characterizing quantum theory in terms of information-theoretic constraints*,

[arxiv.org/abs/quant-ph/0211089](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0211089). Citado en la pág. 34.

10 Esta forma de ver las latas de frijoles remite al texto de Susan Hewitt & Edward Subitzky, *A call for more scientific truth in product warning labels*, Journal of Irreproducible Results **36**, nr. 1, 1991. Citado en la pág. 36.

11 J. Malik, *The yields of the Hiroshima and Nagasaki nuclear explosions*, Technical Report LA-8819, Los Alamos National Laboratory, September 1985. Citado en la pág. 36.

12 Las citas sobre el movimiento se encuentran en el capítulo VI de F. Engels, *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft*, Verlag für fremdsprachliche Literatur, 1946. El libro es conocido comúnmente como *Anti-Dühring*. Citado en la pág.s 38 and 67.

13 Rodney Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford University Press, 2000. Citado en la pág. 39.

14 E.M. Brumberg & S. I. Vavilov, Izvest. Akad. Nauk. Omen Ser. 7, p. 919, 1933. Citado en la pág. 39.

15 F. Rieke & D. A. Baylor, *Single-photon detection by rod cells of the retina*, Reviews of Modern Physics **70**, pp. 1027–1036, 1998. También mencionan que el ojo generalmente funciona con flujos de fotones entre  $10^8 / \mu\text{m}^2$ s (luz solar) y  $10^{-2} / \mu\text{m}^2$ s (luz estelar). Los conos, en la retina, detectan, en color, intensidades de luz en las últimas siete u ocho décadas, mientras que los bastones detectan, en blanco y negro, las intensidades de luz más bajas. Citado en la pág. 43.

16 E. Fischbach, H. Kloor, R. A. Langel, A. T. Y. Lui & M. Peredo, *New geomagnetic limit on the photon mass and on long-range forces coexisting with electromagnetism*, Physical Review Letters **73**, pp. 514–517, 1994. Citado en la pág. 44.

17 A. H. Compton, *The scattering of X-rays as particles*, American Journal of Physics **29**, pp. 817–820, 1961. Esta es una presentación pedagógica de los descubrimientos que hizo en 1923. Citado en la pág. 44.

18 El famoso artículo es R. Hanbury Brown & R. Q. Twiss, Nature **178**, p. 1046, 1956. Obtuvieron la idea de medir la luz de esta manera de su trabajo anterior, que utilizó el mismo método con ondas de radio: R. Hanbury Brown & R. Q. Twiss, Nature **177**, p. 27, 1956, Citado en la pág. 50.

19 J. Glanz, *First light from a space laser*, Science 269 p. 1336, 8 September 1995. Citado en la pág. 50.

20 A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Umwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Standpunkt*, Annalen der Physik **17**, pp. 132–184, 1905. Citado en la pág. 51.

21 Vea el resumen de P.W. Milonni, *Answer to question 45: What (if anything) does the photoelectric effect teach us?*, American Journal of Physics **65**, pp. 11–12, 1997. Citado en la pág. 51.

22 Para una información detallada, vea J. J. Prentis, *Poincaré's proof of the quantum discontinuity of nature*, American Journal of Physics **63**, pp. 339–350, 1995. Los artículos originales son Henri Poincaré, *Sur la théorie des quanta*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) **153**, pp. 1103–1108, 1911, y Henri Poincaré, *Sur la théorie des quanta*, Journal de Physique (Paris) **2**, pp. 5–34, 1912. Citado en la pág. 52.

23 J. Jacobson, G. Björk, I. Chang & Y. Yamamoto, *Photonic de Broglie waves*, Physical Review Letters **74**, pp. 4835–4838, 1995. La primera medida fue publicada por E. J. S. Fonseca, C. H. Monken & S. de Pádua, *Measurement of the de Broglie wavelength of a multiphoton wave packet*, Physical Review Letters **82**, pp. 2868–2671, 1995. Citado en la pág. 52.

24 Para el estado de tres fotones, vea M.W. Mitchell, J. S. Lundeen & A.M. Steinberg, *Super-resolving phasemeasurements with a multiphoton entangled state*, Nature **429**, pp. 161–164, 2004, y para el estado de cuatro fotones vea, en la misma edición, P. Walther, J. -W. Pan, M. Aspelmeyer, R. Ursin, S. Gasparoni & A. Zeilinger, *De Broglie wavelength of a non-local four-photon state*, Nature **429**, pp. 158–161, 2004. Citado en la pág. 52.

25 Para una introducción a la luz comprimida, vea L. Mandel, *Non-classical states of the electromagnetic field*, Physica Scripta T **12**, pp. 34–42, 1986. Citado en la pág. 52.

26 Friedrich Herneck, *Einstein und sein Weltbild: Aufsätze und Vorträge*, BuchverlagDer Morgen, 1976, page 97. Citado en la pág. 53.

27 La famosa cita sobre la interferencia de un solo fotón se encuentra en la página 9 de P. A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, 1930. También se discute en el artículo de H. Paul, *Interference between independent photons*, Reviews of Modern Physics **58**, pp. 209–231, 1986, de una manera algo confusa, pero por lo demás informativo . Citado en la pág. 55.

28 Los artículos originales sobre estados coherentes son tres: R. J. Glauber, *The quantum theory of optical coherence*, Physical Review **130**, pp. 2529–2539, 1963, J.R. Klauder, *Continuous representation theory*, I and II, Journal of Mathematical Physics **4**, pp. 1055–1058, 1963, y E. C. G. Sudarshan, *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams*, Physical Review Letters **10**, p. 227, 1963. Citado en la pág. 58.

Vea, por ejemplo el estupendo texto Richard P. Feynman, *QED -The Strange Theory of Light and Matter*, pp. 73–75, Princeton University Press, 1988, or Richard P. Feynman & Steven Weinberg, *Elementary Particles and the Laws of Physics*, p. 23, Cambridge University Press 1987. Citado en la pág. 59.

30 Wolfgang Tittel, J. Brendel, H. Zbinden & N. Gisin, *Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart*, Physical Review Letters **81**, pp. 3563–3566, 26 October 1998. Citado en la pág. 60.

31 N. Bohr & L. Rosenfeld, *Zur Frage der Meßbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen*, Mat.-fys. Medd. Danske

Vid. Selsk. **12**, p. 8, 1933. Los resultados fueron publicados más tarde en inglés como N. Bohr & L. Rosenfeld, *Field and charge measurements in quantum electrodynamics*, Physical Review **78**, pp. 794–798, 1950. Citado en la pág. **60**.  
**32** R. Kidd, J. Aedini & A. Anton, *Evolution of the modern photon*, American Journal of Physics **57**, pp. 27–35, 1989, Citado en la pág. **64**.

**33** Todo el racimo de átomos se comporta como una sola molécula; se habla de un condensado de Bose-Einstein. Las primeras observaciones, dignas de un premio Nobel, fueron por. Las primeras observaciones, dignas de un premio Nobel, fueron de M.H. Anderson & al., *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapour*, Science **269**, pp. 198–201, 1995, C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett & R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions*, Physical Review Letters **75**, pp. 1687–1690, 1995, K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D.M. Kurn & W. Ketterle, *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Physical Review Letters **75**, pp. 3969–3973, 1995. Para una simple introducción, vea W. Ketterle, *Experimental studies of Bose-Einstein condensation*, Physics Today pp. 30–35, December 1999. Citado en la pág. **67**.

**34** J. L. Costa-Krämer, N. Garcia, P. García-Mochales & P. A. Serena, *Nanowire formation in macroscopic metallic contacts: a universal property of metals*, Surface Science Letters **342**, pp. L1144–L1152, 1995. Vea también J. L. Costa-Krämer, N. Garcia, P. A. Serena, P. García-Mochales, M. Marqués & A. Correia, *Conductance quantization in nanowires formed in macroscopic contacts*, Physical Review B p. 4416, 1997. Citado en la pág. **67**.

**35** TLos hermosos experimentos de pregrado posibilitados por este descubrimiento se describen en E. L. Foley, D. Candela, K. M. Martini & M. T. Tuominen, *An undergraduate laboratory experiment on quantized conductance in nanocontacts*, American Journal of Physics **67**, pp. 389–393, 1999. Citado en la pág.s **67** and **68**.

**36** L. de Broglie, *Ondes et quanta*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences **177**, pp. 507–510, 1923. Citado en la pág. **70**.

**37** C. Jönsson, *Interferenz von Elektronen am Doppelspalt*, Zeitschrift für Physik **161**, pp. 454–474, 1961, C. Jönsson, *Electron diffraction at multiple slits*, American Journal of Physics **42**, pp. 4–11, 1974. Debido a la carga de electrones, este experimento no es fácil de realizar: cualquier parte de la configuración que sea aislante se carga y distorsiona la imagen. Es por eso que el experimento se realizó mucho más tarde con electrones que con átomos, neutrones y moléculas. Citado en la pág. **70**.

**38** M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw & A. Zeilinger, *Wave-particle duality of C<sub>60</sub> molecules*, Nature **401**, pp. 680–682, 14 October 1999. Vea también la observación de tetrafenileprofirina y C<sub>60</sub>F<sub>48</sub> por el mismo equipo, publicado como L. Hackermüller & al., *Wave nature of biomolecules and fluorofullerenes*, Physical Review Letters **91**, p. 090408, 2003. Ningún fenómeno de la teoría cuántica ha sido estudiado experimentalmente tanto como la interferencia cuántica. También se ha explorado la transición de la interferencia a la no interferencia, como en P. Facchi, A. Mariano & S. Pascazio, *Mesoscopic interference*, Recent Developments in Physics **3**, pp. 1–29, 2002. Citado en la pág. **70**.

**39** G. Papini, *Shadows of a maximal acceleration*, arxiv.org/abs/gr-qc/0211011. Citado en la pág. **72**.

**40** J. Perrin, *Nobel Prize speech*, found at [www.nobel.se](http://www.nobel.se), and H. Nagaoka, *Kinetics of a system of particles illustrating the line and the band spectrum and the phenomena of radioactivity*, Philosophical Magazine S6, 7, pp. 445–455, March 1904. Citado en la pág. **72**.

**41** N. Bohr, *On the constitution of atoms and molecules: Introduction and Part I – binding of electrons by positive nuclei*, Philosophical Magazine **26**, pp. 1–25, 1913, *On the constitution of atoms and molecules: Part II – systems containing only a single nucleus*, ibid., pp. 476–502, *On the constitution of atoms and molecules: Part III*, ibid., pp. 857–875. Citado en la pág. **72**.

**42** Robert H. Dicke & James P. Wittke, *Introduction to Quantum Theory*, Addison- Wesley, Reading, Massachusetts, 1960. See also Stephen Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, 1974. Citado en la pág. **73**.

**43** P. Carruthers & M. M. Nieto, *Phase and angle variables in quantum mechanics*, Review of Modern Physics **40**, pp. 411–440, 1968. Citado en la pág. **74**.

**44** La relación de indeterminación para el movimiento de rotación está bien explicada por W. H. Louisell, *Amplitude and phase uncertainty relations*, Physics Letters **7**, p. 60, 1963. Citado en la pág. **74**.

**45** S. Franke-Arnold, S.M. Barnett, E. Yao, J. Leach, J. Courtial & M. Padgett, *Uncertainty principle for angular position and angular momentum*, New Journal of Physics **6**, p. 103, 2004. Este es un diario en línea de acceso libre. Citado en la pág. **75**.

**46** W. Gerlach & O. Stern, *Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms*, Zeitschrift für Physik **8**, p. 110, 1921. Vea también la explicació pedagógica de M. Hannout, S. Hoyt, A. Kryowonos & A. Widom, *Quantum measurement and the Stern-Gerlach experiment*, American Journal of Physics **66**, pp. 377–379, 1995. Citado en la pág. **76**.

**47** J. P. Woerdman, G. Nienhuis, I. Kuščer, *Is it possible to rotate an atom?*, Optics Communications **93**, pp. 135–144, 1992. Estamos hablando de átomos que giran alrededor de su centro de masa; los átomos pueden, por supuesto, rotar alrededor de otros cuerpos, según lo discutido por M. P. Silverman, *Circular birefringence of an atom in uniform*

- rotation: the classical perspective*, American Journal of Physics **58**, pp. 310–317, 1990. Citado en la pág. 77.
- 48** J. Schmiedmayer, M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T. D. Hammond, S. Wehinger & D. E. Pritchard, *Index of refraction of various gases for sodium matter waves*, Physical Review Letters **74**, p. 1043-1046, 1995. Citado en la pág. 78.
- 49** E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem I*, Annalen der Physik **79**, pp. 361–376, 1926, and *Quantisierung als Eigenwertproblem II*, Annalen der Physik **79**, pp. 489–527, 1926. Citado en la pág. 83.
- 50** C. G. Gray, G. Karl & V. A. Novikov, *From Maupertius to Schrödinger. Quantization of classical variational principles*, American Journal of Physics **67**, pp. 959–961, 1999. Citado en la pág. 83.
- 51** Y. Aharonov & D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Physical Review **115**, pp. 485–491, 1959. Citado en la pág. 90.
- 52** R. Colella, A.W. Overhauser & S. A. Werner, *Observation of gravitationally induced quantum interference*, Physical review Letters **34**, pp. 1472–1474, 1975. Citado en la pág. 91. Vea el famoso, bello, pero difícil libro de texto P. A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Clarendon Press, 1930, page 9. Citado en la pág. 92.
- 54** Las declaraciones engañosas se dan en la introducción y en la conclusión de la revisión por H. Paul, *Interference between independent photons*, Review of Modern Physics **58**, pp. 209–231, 1986. Sin embargo, en la mayor parte del artículo, el autor en la práctica retracta la declaración, por ej. en la página 221. Citado en la pág. 92.
- 55** G. Magyar & L. Mandel, *Interference fringes produced by superposition of two independent maser light beams*, Nature **198**, pp. 255–256, 1963. Citado en la pág. 92.
- 56** El resultado que marcó tendencia y que inició esta exploración fue Hans-Werner Fink & al., *Atomic resolution in lens-less low-energy electron holography*, Physical Review Letters **67**, pp. 1543–1546, 1991. Citado en la pág. 93.
- 57** L. Cser, Gy. Török, G. Krexner, I. Sharkov & B. Faragó, *Holographic imaging of atoms using thermal neutrons*, Physical Review Letters **89**, p. 175504, 2002. Citado en la pág. 93.
- 58** G. E. Uhlenbeck & S. Goudsmit, *Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons*, Naturwissenschaften **13**, pp. 953–954, 1925. Citado en la pág. 96.
- 59** L. Thomas, *The motion of the spinning electron*, Nature **117**, p. 514, 1926. Citado en la pág. 96.
- 60** K. von Meyenn & E. Schucking, Wolfgang Pauli, Physics Today pp. 43–48, February 2001. Citado en la pág. 97.
- 61** T. D. Newton & E. P. Wigner, *Localized states for elementary systems*, Review of Modern Physics **21**, pp. 400–406, 1949. L. L. Foldy & S. A. Wouthuysen, *On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its nonrelativistic limit*, Physical Review **78**, pp. 29–36, 1950. Ambos son artículos clásicos. Citado en la pág. 98.
- 62** J. P. Costella & B. H. J. McKellar, *The Foldy–Wouthuysen transformation*, American Journal of Physics **63**, pp. 1119–1121, 1995. Citado en la pág. 98.
- 63** Para una descripción de la primera medida del factor g del electrón, vea H. R. Crane, *How we happened to measure g-2: a tale of serendipity*, Physics in Perspective **2**, pp. 135–140, 2000. La parte más interesante es cómo los experimentadores tuvieron que superar la convicción de casi todos los teóricos de que la medición era imposible en principio. Citado en la pág. 99.
- 64** Los factores  $\delta$  para núcleos compuestos se explican brevemente en [en.wikipedia.org/wiki/Nuclear\\_magnetic\\_moment](http://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_magnetic_moment) y los valores medidos se encuentran en [www-nds.iaea.org](http://www-nds.iaea.org). Vea también H. Dehmelt, *Is the electron a composite particle?*, Hyperfine Interactions **81**, pp. 1–3, 1993. Citado en la pág. 99.
- 65** TLo más cerca que alguien ha llegado a una imagen de un átomo de hidrógeno se encuentra en A. Yazdani, *Watching an atom tunnel*, Nature **409**, pp. 471–472, 2001. Los experimentos con condensados de Bose-Einstein también son candidatos para imágenes de átomos de hidrógeno. La compañía Hitachi hizo el ridículo en 1992 al afirmar en un comunicado de prensa que su microscopio electrónico más nuevo podía visualizar átomos de hidrógeno. Citado en la pág. 100.
- 66** A. M. Wolsky, *Kinetic energy, size, and the uncertainty principle*, American Journal of Physics **42**, pp. 760–763, 1974. Citado en la pág. 101.
- 67** Vea el artículo de Martin Gardner, *Science fiction puzzle tales*, Clarkson Potter, **67**, pp. 104–105, 1981, o su libro *Aha! Insight*, Scientific American & W.H. Freeman, 1978. La historia del conejo es de A. Hajnal & P. Lovász, *An algorithm to prevent the propagation of certain diseases at minimum cost*, in *Interfaces Between Computer Science and Operations Research*, edited by J. K. Lenstra, A.H. G. Rinnooy Kan & P. Van Emde Boas, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1978, mientras que el eufemismo de la computadora es utilizado por A. Orlitzky & L. Shepp, *On curbing virus propagation*, Technical memorandum, Bell Labs 1989. Citado en la pág. 103.
- 68** Una discusión completa del problema se puede encontrar en el capítulo 10 de Ilan Vardi, *Computational Recreations in Mathematica*, Addison Wesley, 1991. Citado en la pág. 103.
- 69** Sobre la paradoja de Gibbs, vea su texto favorito sobre termodinámica o mecánica estadística. Vea también W. H. Zurek, *Algorithmic randomness and physical entropy*, Physical Review A **40**, pp. 4731–4751, 1989. Zurek muestra que la fórmula Sackur-Tetrode puede derivarse del consideraciones de entropía algorítmica. Citado en la pág. 105.
- 70** S. N. Bose, *Planck's Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Zeitschrift für Physik **26**, pp. 178–181, 1924. La teoría fue

explicada después por A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **22**, pp. 261–267, 1924, A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **23**, pp. 3–14, 1925, A. Einstein, *Zur Quantentheorie des idealen Gases*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **23**, pp. 18–25, 1925. Citado en la pág. 108.

71 C. K. Hong, Z. Y. Ou & L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Physical Review Letters **59**, pp. 2044–2046, 1987. Citado en la pág. 109.

72 M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, C. I. Westbrook & A. Aspect, *Hanbury Brown Twiss effect for ultracold quantum gases*, Science **310**, p. 648, 2005, preprint at [arxiv.org/abs/cond-mat/0508466](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0508466). J. Viana Gomes, A. Perrin, M. Schellekens, D. Boiron, C. I. Westbrook & M. Belsley, *Theory for a Hanbury Brown Twiss experiment with a ballistically expanding cloud of cold atoms*, Physical Review A **74**, p. 053607, 2006, preprint at [arxiv.org/abs/quant-ph/0606147](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0606147). T. Jeltes, J. M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect & C. I. Westbrook, *Comparison of the Hanbury Brown-Twiss effect for bosons and fermions*, Nature **445**, p. 402, 2007, preprint at [arxiv.org/abs/cond-mat/0612278](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0612278). Citado en la pág. 110.

73 El experimento se describe en E. Ramberg & G. A. Snow, *Experimental limit on a small violation of the Pauli principle*, Physics Letters **B238**, pp. 438–441, 1990. Otras pruebas experimentales son revisados en O.W. Greenberg, *Particles with small violations of Fermi or Bose statistics*, Physical Review **D43**, pp. 4111–4120, 1991. Citado en la pág. 112.

74 El teorema original de no clonación es de D. Dieks, *Communication by EPR devices*, Physics Letters A **92**, pp. 271–272, 1982, and by W. K. Wootters & W. H. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature **299**, pp. 802–803, 1982. Para una discusión sobre la clonación de fotones y multipartículas, véase N. Gisin & S. Massar, *Optimal quantum cloning machines*, Physics Review Letters **79**, pp. 2153–2156, 1997. El tema completo ha sido presentado en detalle por V. Bužek & M. Hillery, *Quantum cloning*, Physics World **14**, pp. 25–29, November 2001. Citado en la pág. 113.

75 Los resultados experimentales y teóricos más recientes sobre la clonación física se describen en A. Lamas-Linares, C. Simon, J. C. Howell & D. Bouwmeester, *Experimental quantum cloning of single photons*, Science **296**, pp. 712 – 714, 2002, D. Collins

& S. Popescu, *A classical analogue of entanglement*, preprint [arxiv.org/abs/quant-ph/0107082](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0107082), 2001, and A. Daffertshofer, A. R. Plastino & A. Plastino, *Classical no-cloning theorem*, Physical Review Letters **88**, p. 210601, 2002. Citado en la pág. 114.

76 E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Annals of Mathematics **40**, pp. 149–204, 1939. Este famoso artículo resume el trabajo que más tarde le dio el Premio Nobel de Física. Citado en la pág. 115.

77 Para una lista completa de isótopos, véase R. B. Firestone, *Table of Isotopes, Eighth Edition, 1999 Update*, with CDROM, John Wiley & Sons, 1999. Citado en la pág. 117.

78 Testo se deduce de las  $\partial - 2$  medidas, como explicó en sus conferencias del premio Nobel Hans Dehmelt, *Experiments with an isolated subatomic particle at rest*, Reviews of Modern Physics **62**, pp. 525–530, 1990, y en Hans Dehmelt, *Is the electron a composite particle?*, Hyperfine Interactions **81**, pp. 1–3, 1993. No citations.

79 G. Gabrielse, H. Dehmelt & W. Kells, *Observation of a relativistic, bistable hysteresis in the cyclotron motion of a single electron*, Physical Review Letters **54**, pp. 537–540, 1985. No citations.

80 Wolfgang Pauli, *The connection between spin and statistics*, Physical Review **58**, pp. 716–722, 1940. Citado en la pág. 123.

81 El truco del cinturón ha sido popularizado por Dirac, Feynman y muchos otros. Un ejemplo es R. P. Feynman, *The reason for antiparticles*, in *Elementary Particles and the Laws of Physics: The 1986 Dirac Memorial Lectures*, Cambridge University Press, 1987. El truco del cinturón es también explicado, por ejemplo, en la página 1148 en C.W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, 1973. Es llamado el *truco de las tijeras* en page 43 of volume 1 of R. Penrose & W. Rindler, *Spinors and Spacetime*, 1984. It is also cited and discussed by R. Gould, *Answer to question #7*, American Journal of Physics **63**, p. 109, 1995. Aún así, a algunos físicos no les gusta la imagen de truco de cinturón para partículas de espín 1/2; para un ejemplo, ver I. Duck & E. C. G. Sudarshan, *Toward an understanding of the spin-statistics theorem*, American Journal of Physics **66**, pp. 284–303, 1998. Citado en la pág. 123.

82 M. V. Berry & J. M. Robbins, *Indistinguishability for quantum particles: spin, statistics and the geometric phase*, Proceedings of the Royal Society in London A **453**, pp. 1771–1790, 1997. Vea también los comentarios a este resultado de J. Twamley, *Statistics given a spin*, Nature **389**, pp. 127–128, 11 September 1997. Sus más recientes resultados son M. V. Berry & J. M. Robbins, *Quantum indistinguishability: alternative constructions of the transported basis*, Journal of Physics A (Letters) **33**, pp. L207–L214, 2000, and M. V. Berry & J. M. Robbins, in *Spin–Statistics*, eds. R. Hilborn & G. Tino, American Institute of Physics, 2000, pp. 3–15. Vea también la página de Michael Berry en [www.phy.bris.ac.uk/people/berry\\_mv](http://www.phy.bris.ac.uk/people/berry_mv). Citado en la pág. 125.

83 R.W. Hartung, *Pauli principle in Euclidean geometry*, American Journal of Physics **47**, pp. 900–910, 1979. Citado en la pág. 125.

**84** El tema es tratado en su *SummaTheologica*, en la cuestión 52 de la primera parte. El texto completo, de algunos cientos de páginas, puede encontrarse en [www.newadvent.org](http://www.newadvent.org) website. Citado en la pág. 126.

**85** El punto de que el espín puede verse como una rotación ya fue hecho por F. J. Belinfante, *On the spin angular momentum of mesons*, *Physica* **6**, p. 887, 1939, and taken up again by Hans C. Ohanian, *What is spin?*, *American Journal of Physics* **54**, pp. 500–505, 1986. See also E. Duran & A. Erschow, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion* **12**, p. 466, 1937. Citado en la pág. 127.

**86** Las generalizaciones de bosones y fermiones se revisan en el documento (¡serio!) de O.W. Greenberg, D.M. Greenberger & T. V. Greenbergest, (*Para*)bosons, (*para*)fermions, quons and other beasts in the menagerie of particle statistics, at [arxiv.org/abs/hep-th/9306225](http://arxiv.org/abs/hep-th/9306225). Un resumen más reciente es O.W. Greenberg, *Theories of violation of statistics*, electronic preprint available at [arxiv.org/abs/hep-th/0007054](http://arxiv.org/abs/hep-th/0007054). Citado en la pág. 131.

**87** Gell-Mann wrote this for the 1976 Nobel Conference (no para el discurso del Nobel; él es el único ganador que nunca lo publicó.) M. Gell-Mann, *What are the building blocks of matter?*, in D. Huff & O. Prewitt, editors, *The Nature of the Physical Universe*, New York, Wiley, 1979, p. 29. Citado en la pág. 132.

**88** Vea por ejemplo las reimpresiones de sus artículos en la colección estándar de John A. Wheeler & Wojciech H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press, 1983. Citado en la pág. 133.

**89** H. D. Zeh, *On the interpretation of measurement in quantum theory*, *Foundations of Physics* **1**, pp. 69–76, 1970. Citado en la pág. 133.

**90** Linda Reichl, *AModern Course in Statistical Physics*, Wiley, 2nd edition, 1998. Una excelente introducción a la termodinámica. Citado en la pág. 134.

**91** E. Joos & H. D. Zeh, *The emergence of classical properties through interactions with the environment*, *Zeitschrift für Physik B* **59**, pp. 223–243, 1985. Vea también Erich Joos, *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*, Springer Verlag, 2003. Citado en la pág. 136.

**92** M. Tegmark, *Apparent wave function collapse caused by scattering*, *Foundation of Physics Letters* **6**, pp. 571–590, 1993, preprint at [arxiv.org/abs/gr-qc/9310032](http://arxiv.org/abs/gr-qc/9310032). Vea también su artículo que muestra que el cerebro no es una computadora cuántica, M. Tegmark, *The importance of quantum decoherence in brain processes*, *Physical Review E* **61**, pp. 4194–4206, 2000, preprint at [arxiv.org/abs/quant-ph/9907009](http://arxiv.org/abs/quant-ph/9907009). Citado en la pág. 136.

**93** El tiempo de decoherencia está ligado desde arriba por el tiempo de relajación. Vea A. O. Caldeira & A. J. Leggett, *Influence of damping on quantum interference: an exactly soluble model*, *Physical Review A* **31**, 1985, pp. 1059–1066. Esta es la referencia principal sobre los efectos de la decoherencia para un oscilador armónico. El enfoque general para relacionar la decoherencia con la influencia del medio ambiente se debe a Niels Bohr, y ha sido investigado en detalle por Hans Dieter Zeh. Citado en la pág. 138.

**94** G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical subgroups*, *Communications in Mathematical Physics* **48**, pp. 119–130, 1976. Citado en la pág. 138.

**95** Wojciech H. Zurek, *Decoherence and the transition from quantum to classical*, *Physics Today* pp. 36–44, October 1991. Un artículo fácil pero algo confuso. Su réplica a las numerosas cartas de respuesta en *Physics Today*, April 1993, pp. 13–15, and pp. 81–90, expone sus ideas de una manera más clara y da una idea de las acaloradas discusiones sobre este tema. Citado en la pág.s 138 and 144.

**96** John Bardeen, explicó esto regularmente en las charlas de análisis que dio al final de su vida, como la que el autor escuchó en Tokio en 2000. Citado en la pág. 139.

**97** La primera medición de decoherencia fue realizada por M. Brune & al., *Observing progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement*, *Physical Review Letters* **77**, pp. 4887–4890, 9 December 1996. Citado en la pág. 139.

**98** Los experimentos posteriores que confirmaban las predicciones numéricas de la decoherencia fueron publicados por C. Monroe, D.M. Meekhof, B. E. King & D. J. Wineland, A “Schrödinger cat” superposition state of an atom, *Science* **272**, pp. 1131–1136, 1996, W. P. Schleich, *Quantum physics: engineering decoherence*, *Nature* **403**, pp. 256–257, 2000, C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W.M. Itano, C. Monroe & D. J. Wineland, *Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs*, *Nature* **403**, pp. 269–273, 2000. Vea también el resumen de W. T. Strunz, G. Alber & F. Haake, *Dekohärenz in offenen Quantensystemen*, *Physik Journal* **1**, pp. 47–52, November 2002. Citado en la pág. 139.

**99** L. Hackermüller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger & M. Arndt, *Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation*, *Nature* **427**, pp. 711–714, 2004. Citado en la pág. 139.

**100** K. Baumann, *Quantenmechanik und Objektivierbarkeit*, *Zeitschrift für Naturforschung* **25a**, pp. 1954–1956, 1970. Citado en la pág. 140.

**101** Vea por ejemplo D. Styer, *Physics Today* p. 11, September 2000. Citado en la pág. 141.

**102** David Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, 1951, pp. 614–622. Citado en la pág. 142.

**103** A. Einstein, B. Podolsky & N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of reality be considered complete?*, *Physical Review* **48**, pp. 696–702, 1935. Citado en la pág. 142.

**104** A. Aspect, J. Dalibard & G. Roger, *Experimental tests of Bell’s inequalities using timevarying analyzers*, *Physical*

Review Letters **49**, pp. 1804–1807, 1982, Citado en la pág. 143.

**105** G. C. Hergerfeldt, *Causality problems for Fermi's two-atom system*, Physical Review Letters **72**, pp. 596–599, 1994. Citado en la pág. 143.

**106** Se realizó una medición experimental de las superposiciones de corrientes de flujo izquierdas y derechas con  $10^{10}$  electrones J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. H. van der Wal & S. Lloyd, *Josephson persistent-current qubit*, Science **285**, pp. 1036–1039, 1999. In the year 2000, superpositions of 1  $\mu\text{A}$  clockwise and anticlockwise have been detected; for more details, see J.R. Friedman & al., *Quantum superposition of distinct macroscopic states*, Nature **406**, p. 43, 2000. Citado en la pág. 144.

**107** En la superposición de la magnetización en las direcciones arriba y abajo hay numerosos documentos.

Experimentos recientes sobre el tema de la tunelización cuántica en sistemas magnéticos se describen en D. D. Awschalom, J. F. Smith, G. Grinstein, D. P. DiVicenzo & D. Loss, *Macroscopic quantum tunnelling in magnetic proteins*, Physical Review Letters **88**, pp. 3092–3095, 1992, and in C. Paulsen & al., *Macroscopic quantum tunnelling effects of Bloch walls in small ferromagnetic particles*, Europhysics Letters **19**, pp. 643–648, 1992. Citado en la pág. 144.

**108** Por ejemplo, se han observado superposiciones en uniones de Josephson por R. F. Voss & R. A. Webb, *Macroscopic quantum tunnelling in 1 mm Nb Josephson junctions*, Physical Review Letters **47**, pp. 265–268, 1981, Citado en la pág. 144.

**109** S. Haroche, *Entanglement, decoherence and the quantum-classical transition*, Physics Today **51**, pp. 36–42, July 1998. Un experimento que ponía átomo en dos lugares a la vez, distante unos 80 nm, fue publicado por C. Monroe, C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King & D. J. Wineland, *A 'Schroedinger Cat' Superposition of an Atom*, Science **272**, pp. 1131–1136, 1996. Citado en la pág. 144.

**110** M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. -J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn & W. Ketterle, *Observations of interference between two Bose condensates*, Science **275**, pp. 637–641, 31 January 1997. Vea también la página web [www.aip.org/physnews/special.htm](http://www.aip.org/physnews/special.htm). Citado en la pág. 144.

**111** Se puede encontrar una discusión clara en S. Haroche & J. -M. Raimond, *Quantum computing: dream or nightmare?*, Physics Today **49**, pp. 51–52, 1996, así como los comentarios en Physics Today **49**, pp. 107–108, 1996. Citado en la pág. 145.

**112** La referencia más famosa sobre el colapso de la función de onda es el capítulo IV del libro de Kurt Gottfried, *Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1966. Era la referencia favorita de Victor Weisskopf, y citada por él en cada ocasión que habló sobre el tema. Citado en la pág. 147.

**113** La predicción de que el efecto túnel cuántico podría ser observable cuando la interacción disipativa con el resto del mundo fuera lo suficientemente pequeña fue hecha por Leggett; el tema es revisado en A. J. Leggett, S. Chahrvarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg & W. Zwerger, *Dynamics of dissipative 2-state systems*, Review of Modern Physics **59**, pp. 1–85, 1987. Citado en la pág. 148.

**114** Los tiempos de colapso han sido medidos por primera vez por el grupo de Serge Haroche in Paris. See M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond & S. Haroche, *Observing the progressive decoherence of the "meter" in a quantum measurement*, Physical Review Letters **77**, pp. 4887–4890, 1996. Vea también C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J. -M. Raimond & S. Haroche, *Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting*, Nature **448**, pp. 889–893, 2007. Citado en la pág. 151.

**115** S. Kochen & E. P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics **17**, pp. 59–87, 1967. Citado en la pág. 152.

**116** J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony & R. A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Physical Review Letters **23**, pp. 880–884, 1969. El más general y original resultado fue encontrado por J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1**, p. 195, 1964. Citado en la pág. 152.

**117** D. M. Greenberger, M. A. Horne & A. Zeilinger, *Going beyond Bell's theorem*, postprint of the 1989 paper at [arxiv.org/abs/0712.0912](https://arxiv.org/abs/0712.0912). La primera observación fue de D. Bouwmeester, J. -W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter & A. Zeilinger, *Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement*, preprint at [arxiv.org/abs/quant-ph/9810035](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9810035). Citado en la pág. 153.

**118** Bryce de Witt & Neill Graham, eds., *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1973. Esta interpretación se refiere a entidades que no se pueden observar, a saber, los muchos mundos, y a menudo supone que existe la función de onda del universo. Ambos hábitos son creencias y en contraste con los hechos. Citado en la pág. 155.

**119** 'Por otro lado, creo que puedo decir con seguridad que nadie entiende la mecánica cuántica.' De Richard P. Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge, 1965, p. 129. Él repetidamente hizo esta declaración, p. ej. en la introducción de su excelente *QED: the Strange Theory of Light and Matter*, Penguin Books, 1990. Citado en la pág. 155.

**120** M. Tegmark, *The importance of quantum decoherence in brain processes*, Physical Review D **61**, pp. 4194–4206,

- 2000, o también [arxiv.org/abs/quant-ph/9907009](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9907009). Citado en la pág. 156.
- 121 Las conexiones entre la teoría cuántica y la teoría de la información se pueden seguir en el International Journal of Quantum Information. Citado en la pág. 157.
- 122 J. A. Wheeler, pp. 242–307, in *Batelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*, C. DeWitt & J. A. Wheeler, editors, W.A. Benjamin, 1968. Para una explicación pedagógica, vea John W. Norbury, *From Newton's laws to the Wheeler-DeWitt equation*, [arxiv.org/abs/physics/980604](https://arxiv.org/abs/physics/980604) or European Journal of Physics **19**, pp. 143–150, 1998. Citado en la pág. 158.
- 123 El más fascinante libro sobre el tema es el de Kurt Nassau, *The Physics and Chemistry of Color – the Fifteen Causes of Color*, 1983, y el excelente [webexhibits.org/causesofcolour](http://webexhibits.org/causesofcolour) website. Citado en la pág. 160. Y. Ruiz-Morales & O. C. Mullins, *Measured and Simulated Electronic Absorption and Emission Spectra of Asphaltenes*, Energy & Fuels **23**, pp. 1169–1177, 2009. U. Bergmann, H. Groenzin, O. C. Mullins, P. Glatzel, J. Fetzer & S. P. Cramer, *Carbon K-edge X-ray Raman spectroscopy supports simple, yet powerful description of aromatic hydrocarbons and asphaltenes*, Chemical Physics Letters **369**, pp. 184–191, 2003. Citado en la pág. 160.
- 125 Dos excelentes revistas con numerosas fotografías son E. Grotewohl, *The genetics and biochemistry of floral pigments*, Annual Reviews of Plant Biology **57**, pp. 761–780, 2006, and Y. Tanaka, N. Sasaki & A. Ohmiya, *Biosynthesis of plant pigments: anthocyanins, betalains and carotenoids*, The Plant Journal **54**, pp. 733–749, 2008. Citado en la pág. 168.
- 126 L. Pérez-Rodríguez & J. Vinuda, *Carotenoid-based bill and eye coloration as honest signals of condition: an experimental test in the red-legged partridge (*Alectoris rufa*)*, Naturwissenschaften **95**, pp. 821–830, 2008, Citado en la pág. 168.
- 127 R. Pello, D. Schaefer, J. Richard, J. -F. Le Borgne & J. -P. Kneib, *ISAAC/VLT observations of a lensed galaxy at z=10.0*, Astronomy and Astrophysics **416**, p. L35, 2004. Citado en la pág. 171.
- 128 Una introducción pedagógica se da en L. J. Curtis & D. G. Ellis, *Use of the Einstein–Brillouin–Keller action quantization*, American Journal of Physics **72**, pp. 1521–1523, 2004. Vea también la introducción de A. Klein, *WKB approximation for bound states by Heisenberg matrix mechanics*, Journal of Mathematical Physics **19**, pp. 292–297, 1978. Citado en la pág.s 172 and 175.
- 129 J. Neukammer & al., *Spectroscopy of Rydberg atoms at n ~ 500*, Physical Review Letters **59**, pp. 2947–2950, 1987. Citado en la pág. 173.
- 130 Mark P. Silverman, *And Yet It Moves: Strange Systems and Subtle Questions in Physics*, Cambridge University Press 1993. Un hermoso libro hecho por un experto en movimiento. Citado en la pág.s 175, 181, y 182.
- 131 Esto es explicado por J.D. Hey, *Mystery error in Gamow's Tompkins reappears*, Physics Today pp. 88–89, May 2001. Citado en la pág. 174.
- 132 L. L. Foldy, *The electromagnetic properties of Dirac particles*, Physical Review **83**, pp. 688–693, 1951. L. L. Foldy, *The electron–neutron interaction*, Physical Review **83**, pp. 693–696, 1951. L. L. Foldy, *Electron–neutron interaction*, Review of Modern Physics **30**, pp. 471–481, 1952. Citado en la pág. 177.
- 133 H. Euler & B. Kockel, *Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie*, Naturwissenschaften **23**, pp. 246–247, 1935, H. Euler, *Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie*, Annalen der Physik **26**, p. 398, 1936, W. Heisenberg & H. Euler, *Folgerung aus der Diracschen Theorie des Electrons*, Zeitschrift für Physik **98**, pp. 714–722, 1936. Citado en la pág. 180.
- 134 Vea la sencilla explicación de L. J. F. Hermans, *Blue skies, blue seas*, Europhysics News **37**, p. 16, 2006, y la explicación detallada de C. L. Braun & S. N. Smirnov, *Why is water blue?*, Journal of Chemical Education **70**, pp. 612–614, 1993. Citado en la pág. 181.
- 135 Para el caso atómico, vea P. L. Gould, G.A. Ruff & D.E. Pritchard, *Diffraction of atoms by light: the near resonant Kapitza–Dirac effect*, Physical Review Letters **56**, pp. 827–830, 1986. Muchos de los primeros intentos experimentales para observar la difracción de electrones por la luz, en particular los realizados en la década de 1980, fueron controvertidos, la mayoría mostró solo la desviación de electrones, como es explicado por H. Batelaan, Contemporary Physics **41**, p. 369, 2000. Más tarde, él y su grupo realizaron el más nuevo y espectacular experimento, demostrando la difracción real, incluidos los efectos de interferencia; se describe en D. L. Freimund, K. Aflatooni & H. Batelaan, *Observation of the Kapitza–Dirac effect*, Nature **413**, pp. 142–143, 2001. Citado en la pág. 181.
- 136 Un láser de un solo átomo fue construido en 1994 by K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari & M. S. Feld, *Microlaser: a laser with one atom in an optical resonator*, Physical Review Letters **73**, p. 3375, 1994. Citado en la pág. 182.
- 137 Una introducción se da por P. Pinkse & G. Rempe, *Wie fängt man ein Atom mit einem Photon?*, Physikalische Blätter **56**, pp. 49–51, 2000. Citado en la pág. 182.
- 138 J.P. Briand & al., *Production of hollow atoms by the excitation of highly charged ions in interaction with a metallic surface*, Physical Review Letters **65**, pp. 159–162, 1990. See also G. Marowsky & C. Rhodes, *Hohle Atome und die Kompression von Licht in Plasmakanälen*, Physikalische Blätter **52**, pp. 991–994, Oktober 1996. Citado en la pág. 182.
- 139 G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio & B. Odom, *New determination of the fine structure constant from the electron g value and QED*, Physical Review Letters **97**, p. 030802, 2006. Citado en la pág. 183.

- 140** Wolfgang Pauli, *Exclusion principle and quantummechanics*, Nobel lecture, 13 December 1946, in *Nobel Lectures, Physics*, Volume 3, 1942–1962, Elsevier, 1964. Citado en la pág. 183.
- 141** Una cuenta informativa del mundo de la psicoquinesia y lo paranormal es la dada por el famoso mago profesional James Randi, *Flim-flam!*, Prometheus Books, Buffalo1987, así como en muchos de sus otros libros. Vea también la página web [www.randi.org](http://www.randi.org). Citado en la pág. 187.
- 142** *Le Système International d'Unités*, Bureau International des Poids et Mesures, Pavillon de Breteuil, Parc de Saint Cloud, 92310 Sevres, France. Todos los nuevos desarrollos relacionados con las unidades del SI se publican en la revista Metrologia, editada por el mismo organismo. Mostrando la lentitud de una institución antigua, el BIPM lanzó un sitio web solo en 1998; ahora es disponible en [www.bipm.fr](http://www.bipm.fr). Vea también la página web [www.utc.fr/~tthomass/Themes/Unites/index.html](http://www.utc.fr/~tthomass/Themes/Unites/index.html); esta incluye las biografías de las personas que han dado su nombre a varias unidades. La página británica equivalente es, [www.npl.co.uk/npl/reference](http://www.npl.co.uk/npl/reference), es mucho mejor; proporciona muchos detalles, así como la versión en inglés de las definiciones de unidad SI. Citado en la pág. 191.
- 143** La Biblia en el campo de la medición del tiempo es el trabajo en dos volúmenes de J. Vanier & C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Adam Hilge, 1989. Un reporte popular es el de Tony Jones, *Splitting the Second*, Institute of Physics Publishing, 2000. La página [opdaf1.obspm.fr/www/lexique.html](http://opdaf1.obspm.fr/www/lexique.html) da un glosario de términos usados en el campo. Para mediciones de precisión de longitud, las herramientas de elección son los láseres especiales, como los láseres en modo bloqueado y los peines de frecuencia. Hay una gran cantidad de literatura sobre estos temas. Igualmente grande es la literatura sobre mediciones de corriente eléctrica de precisión; Hay una carrera para la mejor manera de hacerlo: contando cargas o midiendo fuerzas magnéticas. El problema sigue abierto. En mediciones de masa y de masa atómica, consulte Volume II, on page 66. On high-precision temperature measurements, see Volume I, on page 476. Citado en la pág. 192.
- 144** Los prefijos no oficiales se propusieron por primera vez en la década de 1990 por Jeff K. Aronson de la Universidad de Oxford, y podrían entrar en uso general en el futuro. Citado en la pág. 193.
- 145** Para obtener más detalles sobre los sistemas de unidades electromagnéticas, consulte el texto estándar de John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, Wiley, 1998. Citado en la pág. 196.
- 146** D.J. Bird & al., *Evidence for correlated changes in the spectrum and composition of cosmic rays at extremely high energies*, Physical Review Letters **71**, pp. 3401–3404, 1993. Citado en la pág. 197.
- P. J. Hakonen, R. T. Vuorinen & J. E. Martikainen, Nuclear antiferromagnetism in rhodium metal at positive and negative nanokelvin temperatures*, Physical Review Letters **70**, pp. 2818–2821, 1993. Vea también su artículo en Scientific American, January 1994. Citado en la pág. 197.
- 148** A. Zeilinger, *The Planck stroll*, American Journal of Physics **58**, p. 103, 1990. *Desafío 186 s* ¿Puede encontrar otro ejemplo similar? Citado en la pág. 197.
- 149** Una visión general de este fascinante trabajo está dada por J. H. Taylor, *Pulsar timing and relativistic gravity*, Philosophical Transactions of the Royal Society, London A **341**, pp. 117–134, 1992. Citado en la pág. 197.
- 150** El reloj más preciso construido en 2004, un reloj con fuente de cesio, tenía una precisión de una parte en  $10^{15}$ . Se ha pronosticado una mayor precisión pronto, entre otros por M. Takamoto, F. -L. Hong, R. Higashi & H. Katori, *An optical lattice clock*, Nature **435**, pp. 321–324, 2005. Citado en la pág. 197.
- 151** J. Bergquist, ed., *Proceedings of the Fifth Symposium on Frequency Standards and Metrology*, World Scientific, 1997. Citado en la pág. 197.
- 152** Vea la información en  $D_{\pm}$  s mesones del grupo de datos de partículas en [pdg.web.cern.ch/pdg](http://pdg.web.cern.ch/pdg). Citado en la pág. 198.
- 153** Acerca de la larga vida del tantalio 180, vea D. Belic & al., *Photoactivation of <sup>180</sup>Ta<sub>m</sub> and its implications for the nucleosynthesis of nature's rarest naturally occurring isotope*, Physical Review Letters **83**, pp. 5242–5245, 20 December 1999. Citado en la pág. 198.
- 154** Vea la revista de L. Ju, D. G. Blair & C. Zhao, *The detection of gravitational waves*, Reports on Progress in Physics **63**, pp. 1317–1427, 2000. Citado en la pág. 198.
- 155** Vea el claro y extenso artículo de G. E. Stedman, *Ring laser tests of fundamental physics and geophysics*, Reports on Progress in Physics **60**, pp. 615–688, 1997. Citado en la pág. 198.
- 156** Los diversos conceptos son incluso objeto de una norma internacional separada, ISO 5725, con el título *Accuracy and precision of measurement methods and results*. Una buena introducción es John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: the Study of Uncertainties in Physical Measurements*, 2nd edition, University Science Books, Sausalito, 1997. Citado en la pág. 199.
- 157** P. J. Mohr, B. N. Taylor & D. B. Newell, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010*, preprint at [arxiv.org/abs/1203.5425](http://arxiv.org/abs/1203.5425). Este es el conjunto de constantes resultantes de un ajuste internacional y recomendado para uso internacional por el Comité de Datos para Ciencia y Tecnología (CODATA), un organismo del Consejo Internacional de Uniones Científicas, que reúne a la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada. (IUPAP), la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC) y otras organizaciones. El sitio web de la IUPAC es [www.iupac.org](http://www.iupac.org). Citado en la pág. 200.
- 158** Algunas de las historias se pueden encontrar en el texto de N.W.Wise, *The Values of Precision*, Princeton University

Press, 1994. TEI campo de mediciones de alta precisión, del que se derivan los resultados en estas páginas, es un mundo en sí mismo. Una bella introducción a esto es J. D. Fairbanks, B. S. Deaver, C.W. Everitt & P. F. Michelson, eds., *Near Zero: Frontiers of Physics*, Freeman, 1988. Citado en la pág. 200.

159 Los detalles se dan en la conocida referencia astronómica, P. Kenneth Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 1992. Citado en la pág. 206.

160 Para obtener información sobre el número  $\pi$ , y sobre algunas otras constantes matemáticas, el sitio web [oldweb.cecm.sfu.ca/pi/pi.html](http://oldweb.cecm.sfu.ca/pi/pi.html) proporciona la información más extensa y referencias.

También tiene un enlace a muchos otros sitios sobre el tema, incluida la descripción general en [mathworld.wolfram.com/Pi.html](http://mathworld.wolfram.com/Pi.html). Fórmulas sencillas para  $\pi$  son

$$\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(2n)} \quad (154)$$

o la hermosa fórmula descubierta en 1996 por Bailey, Borwein y Plouffe

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left( \frac{4}{8n+1} - \frac{1}{8n+4} - \frac{4}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \quad (155)$$

El sitio mencionado también explica los métodos recientemente descubiertos para calcular dígitos binarios específicos de  $\pi$  sin tener que calcular todos los anteriores. Los dígitos conocidos de  $\pi$  pasan todas las pruebas de aleatoriedad, como la página web [mathworld.wolfram.com/PiDigits.html](http://mathworld.wolfram.com/PiDigits.html) explica.

Sin embargo, esta propiedad, llamada *normalidad*, nunca se ha probado; es la pregunta abierta más grande sobre  $\pi$ . Es posible que la teoría de la dinámica caótica conduzca a una solución de este rompecabezas en los próximos años.

Otro método para calcular  $\pi$  y otras constantes fue descubierto y publicado por D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA) **86**, pp. 8178–8182, 1989. Los hermanos Chudnovsky han construido una supercomputadora en el apartamento de Gregory por unos 70 000 euros, y durante muchos años tuvo el récord de calcular la mayor cantidad de dígitos de  $\pi$ . Ellos han luchado durante décadas con Kanada Yasumasa, que tenía el récord en 2000, calculado en una supercomputadora industrial. Sin embargo, el número récord de dígitos (consecutivos) en 2010 se calculó en 123 días en un simple PC por Fabrice Bellard, usando la fórmula Chudnovsky. Bellard calculó alrededor de 2,7 billones de dígitos, como dice en [bellard.org](http://bellard.org).

Nuevas fórmulas para calcular  $\pi$  todavía se descubren ocasionalmente.

Para el cálculo de la constante de Euler, vea también D.W. DeTemple, *A quicker convergence to Euler's constant*, The Mathematical Intelligencer, pp. 468–470, May 1993. Tenga en cuenta que se sabe poco sobre las propiedades básicas de algunos números; por ejemplo, [Desafío 187 r](#) aún no se sabe si  $\pi + e$  es un número racional o no. ¿lo es? (Se cree que no lo es) [Desafío 188 s](#) ¿Quiere convertirse en un matemático? Citado en la pág. 207.

161 Una buena referencia es la *Encyclopedia of Mathematics*, en 10 volúmenes, Kluwer Academic Publishers, 1988–1993. Explica la mayoría de los conceptos utilizados en matemáticas. Pasar una hora con la búsqueda de palabras clave relacionadas es una forma eficiente de obtener una introducción a cualquier parte de las matemáticas, especialmente en el vocabulario y las principales conexiones. El enfoque opuesto, para hacer las cosas lo más complicadas posible, se toma en el delicioso texto de Carl E. Linderholm, *Mathematics Made Difficult*, 1971. Citado en la pág. 209.

162 Una excelente introducción a los sistemas numéricos en matemáticas, incluyendo números hiperreales (o no estándar), cuaterniones, octoniones, números p-ádicos y números surreales, es el libro H. -D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel & R. Remmert, *Zahlen*, 3rd edition, Springer Verlag, 1993. También está disponible en inglés, bajo el título *Numbers*, Springer Verlag, 1990. Para un libro que explica cómo usar los números hiperreales en la escuela secundaria, vea Helmut Wunderling, *Analysis als Infinitesimalrechnung*, Duden Paetec Schulbuchverlag, 2007. Citado en la pág.s 210, 219, and 220.

163 A. Waser, *Quaternions in Electrodynamics*, 2001. El texto puede descargarse desde varios sitios websites. Citado en la pág.s 212 and 217.

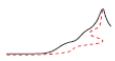
164 S. L. Altman, *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Clarendon Press, 1986, y también S. L. Altman, *Hamilton, Rodriguez and the quaternion scandal*, Mathematical Magazine **62**, pp. 291–308, 1988. Vea también J. C. Hart, G. K. Francis & L. H. Kauffman, *Visualizing quaternion rotation*, ACM Transactions on Graphics **13**, pp. 256–276, 1994. Este último se puede descargar en varios lugares a través de Internet. Citado en la pág. 215.

165 Vea el buen libro de Louis H. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific, 2nd edition, 1994, que da una introducción clara y visual a las matemáticas de los nudos y sus principales aplicaciones a la física. Citado en la pág. 216.

166 Los enteros gaussianos son explorados por G. H. Hardy & E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Clarendon Press, Oxford, 1979, en las secciones 12.2 ‘The Rational Integers, the Gaussian Integers, and the Integers’, pp. 178–180, and 12.6 ‘Properties of the Gaussian Integers’ pp. 182–183. Para cambios relativos a los enteros gaussianos, mire en [www.mathpuzzle.com/Gaussians.html](http://www.mathpuzzle.com/Gaussians.html). Citado en la pág. 220.

**167** Acerca de números transfinitos, vea el delicioso libro en rústica de Rudy Rucker, *Infinity and the Mind – the Science and Philosophy of the Infinite*, Bantam, 1983. Citado en la pág. 220.

**168** E. I. Butikov, *The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model*, European Journal of Physics **20**, pp. 429–441, 1999. Citado en la pág. 226.



## CRÉDITOS

Muchas personas que han conservado vivo su don de la curiosidad han ayudado a que este proyecto se haga realidad. Sobre todo, Saverio Pascazio ha sido, presente o no, una referencia constante para este proyecto Fernand Mayné, Anna Koolen, Ata Masafumi, Roberto Crespi, Serge Pahaut, Luca Bombelli, Herman Elswijk, Marcel Krijn, Marc de Jong, Martin van der Mark, Kim Jalink, my parents Peter and Isabella Schiller, Mike vanWijk, Renate Georgi, Paul Tegelaar, Barbara y Edgar Augel, M. Jamil, Ron Murdock, Carol Pritchard, Richard Hoffman, Stephan Schiller y, sobre todo, mi esposa Britta me ha brindado valiosos consejos y aliento.

Muchas personas han ayudado con el proyecto y la recolección de material. Lo más útil fue la ayuda de Mikael Johansson, Bruno Barberi Gnecco, Lothar Beyer, las numerosas mejoras por Bert Sierra, las detalladas sugerencias de Claudio Farinati, las muchas mejoras Eric Sheldon, las sugerencias detalladas por Andrew Young, la ayuda y consejo continuos de Jonatan Kelu, las correcciones de Elmar Bartel, y en particular la ayuda extensa, apasionada y concienzuda de Adrian Kubala.

Material importante fue proporcionado por Bert Peeters, Anna Wierzbicka, William Beaty, Jim Carr, John Merrit, John Baez, Frank DiFilippo, Jonathan Scott, Jon Thaler, Luca Bombelli, Douglas Singleton, George McQuarry, Tilman Hausherr, Brian Oberquell, Peer Zalm, Martin van der Mark, Vladimir Surdin, Julia Simon, Antonio Fermani, Don Page, Stephen Haley, Peter Mayr, Allan Hayes, Norbert Dragon, Igor Ivanov, Doug Renselle, Wim de Muynck, Steve Carlip, Tom Bruce, Ryan Budney, Gary Ruben, Chris Hillman, Olivier Glassey, Jochen Greiner, squark, Martin Hardcastle, Mark Biggar, Pavel Kuzin, Douglas Brebner, Luciano Lombardi, Franco Bagnoli, Lukas Fabian Moser, Dejan Corovic, Paul Vannoni, John Haber, Saverio Pascazio, Klaus Finkenzeller, Leo Volin, Jeff Aronson, Roggie Boone, Lawrence Tuppen, Quentin David Jones, Arnaldo Uguzzoni, Frans van Nieuwpoort, Alan Mahoney, Britta Schiller, Petr Danecek, Ingo Thies, Vitaliy Solomatin, Carl Offner, Nuno Proença, Elena Colazingari, Paula Henderson, Daniel Darre, Wolfgang Rankl, John Heumann, Joseph Kiss, Martha Weiss, Antonio González, Antonio Martos, André Slabber, Ferdinand Bautista, Zoltán Gácsi, Pat Furrie, Michael Reppisch, Enrico Pasi, Thomas Köppe, Martin Rivas, Herman Beeksma, Tom Helmond, John Brandes, Vlad Tarko, Nadia Murillo, Ciprian Dobra, Romano Perini, Harald van Lintel, Andrea Conti, François Belfort, Dirk Van deMoortel, Heinrich Neumaier, Jarosław Królikowski, John Dahlman, Fathi Namouni, Paul Townsend, Sergei Emelin, Freeman Dyson, S.R. Madhu Rao, David Parks, Jürgen Janek, Daniel Huber, Alfons Buchmann, William Purves, Pietro Redondi, Damoon Saghian, más una cantidad de personas que querían permanecer sin nombre.

Las herramientas de software fueron refinadas con extensa ayuda en fuentes y composición tipográfica por Michael Zedler and Achim Blumensath y con el apoyo repetido y valioso de Donald Arseneau; la ayuda vino también de Ulrike Fischer, Piet van Oostrum, GerbenWierda, Klaus Böhncke, Craig Upright, Herbert Voss, Andrew Trevorrow, Danie Els, Heiko Oberdiek, Sebastian Rahtz, Don Story, Vincent Darley, Johan Linde, Joseph Hertzlinger, Rick Zaccone, John Warkentin, Ulrich Diez, Uwe Siart, Will Robertson, Joseph Wright, Enrico Gregorio, Rolf Niepraschk and Alexander Grahn. También agradezco a los legisladores y a los contribuyentes en Alemania, quienes, a diferencia de la mayoría de los demás países del mundo, permiten a los residentes utilizar las bibliotecas universitarias locales.

El diseño tipográfico y de libros se debe a la asesoría profesional de Ulrich Dirr. La tipografía se mejoró con la ayuda de Johannes Küster. El diseño del libro y su sitio web también deben mucho a las sugerencias y el apoyo de mi esposa Britta.

Desde mayo de 2007, la edición electrónica y la distribución del texto de Motion Mountain cuentan con el generoso respaldo de la Fundación Klaus Tschira.

### Créditos de las películas

La imagen orbital de hidrógeno y la animación de la página 72 se produjeron con una copia patrocinada del paquete de software de Dean Dauger. *Atom in a Box*, disponible en [daugerresearch.com](http://daugerresearch.com). Las animaciones coloreadas de las funciones de onda en [page 82](#), [page 86](#), [page 87](#), [page 90](#), [page 101](#), [page 177](#) y [page 179](#) son propiedad intelectual y cortesía de Bernd Thaller; se pueden encontrar en su espléndido sitio web [vqm.uni-graz.at](http://vqm.uni-graz.at) y en los CD que vienen con sus dos hermosos libros, Bernd Thaller, *Visual Quantum Mechanics* Springer, 2000, and Bernd Thaller, *Advanced Visual Quantum Mechanics* Springer, 2004. Estos libros son los mejores que se pueden leer para obtener una comprensión intuitiva de las funciones de onda y su evolución. La animación del truco de la correa en la página 121 es propiedad intelectual y cortesía de Greg Egan; se puede encontrar en su sitio web [www.gregegan.net/APPLETS/21/21.html](http://www.gregegan.net/APPLETS/21/21.html). La bella animación del truco del cinturón en la página 121 y la maravillosa y hasta ahora única animación del intercambio de fermiones en la página 124 están protegidos por derechos de autor y son cortesía de Antonio Martos. Se pueden encontrar en [vimeo.com/62228139](http://vimeo.com/62228139) y [vimeo.com/62143283](http://vimeo.com/62143283).

### Créditos de las Imágenes

La fotografía del lado este del pico Langtang Lirung en el Himalaya nepalés, que se muestra en la portada, es cortesía y copyright de DaveThompson y solía estar en su sitio web, [www.daveontrek.co.uk](http://www.daveontrek.co.uk). La fotografía de un gusano de luz en la página 14 está protegida por derechos de autor y cortesía de John Tyler, y se encuentra en su hermoso sitio web en [www.johntyler.co.uk/gwfacts.htm](http://www.johntyler.co.uk/gwfacts.htm). La fotografía de una mariposa de cristal en la página 16 está protegida por derechos de autor (copyright) y cortesía de Linda de Volder y se encuentran en su página web [www.flickr.com/photos/lindadevolder](http://www.flickr.com/photos/lindadevolder). La fotografía de la ventana de un tren en la página 31 está protegida por derechos de autor y cortesía de Greta Mansour y se encuentra en su sitio web, [www.flickr.com/photos/wireful/](http://www.flickr.com/photos/wireful/). Los gráficos del espectro de color en la página 40 están protegidos por derechos de autor y cortesía de Andrew Young y explicados en su sitio web [mintaka.sdsu.edu/GF/explain/optics/rendering.html](http://mintaka.sdsu.edu/GF/explain/optics/rendering.html). Las imágenes de la película fotográfica en la página 41 están protegidas por derechos de autor (copyright) y cortesía de Rich Evans. Las imágenes de los fotomultiplicadores en la página 41 están protegidas por derechos de autor (copyright) y cortesía de Hamamatsu Photonics. Las imágenes del experimento de interferencia de fotones de baja intensidad de la página 42 son propiedad de la Universidad de Tecnología de Delft, cortesía de Silvania Pereira, y se encuentran en el sitio web, [www.optica.tn.tudelft.nl/education/photon.asp](http://www.optica.tn.tudelft.nl/education/photon.asp). La fotografía del aparato de efecto Compton en la página 45 fue tomada por Helene Hoffmann y es cortesía de Arne Gerdes de la Universidad de Göttingen; se encuentra en el sitio web de enseñanza de física [lp.uni-goettingen.de](http://lp.uni-goettingen.de). La fotografía del interferómetro Mach-Zehnder en la página 49 está protegida por derechos de autor y cortesía de Félix Dieu y Gaël Osowiecki y se encuentra en sus sitios web, [www.flickr.com/photos/felixdieu/sets/72157622768433934/](http://www.flickr.com/photos/felixdieu/sets/72157622768433934/) y [www.flickr.com/photos/gaeloso/sets/72157623165826538/](http://www.flickr.com/photos/gaeloso/sets/72157623165826538/). La fotografía del cielo azul en la página 62 es cortesía y copyright de Giorgio di Iorio, y se encuentra en su sitio web [www.flickr.com/photos/gioischia/](http://www.flickr.com/photos/gioischia/). Las imágenes sobre el experimento de contacto con cables en la página 62 son cortesía y derechos de autor de José Costa-Krämer y AAPT. La famosa fotografía de difracción de electrones en la página 69 está protegida por derechos de autor y cortesía de Claus Jönsson. La imagen casi igualmente famosa que muestra la acumulación de difracción de electrones en la página 69 es cortesía y copyright de Tonomura Akira / Hitachi: se encuentra en [www.hqrd.hitachi.co.jp/em/doubleslit.cfm](http://www.hqrd.hitachi.co.jp/em/doubleslit.cfm) website. El gráfico de hidrógeno en la página 78 es cortesía y copyright de Peter Eyland. Las fotografías del efecto Aharonov-Bohm en la página 90 están protegidas por copyright y cortesía de Doru Cuturela. Las imágenes de las moléculas de ADN en la página 93 están protegidas por derechos de autor y cortesía por Hans-Werner Fink y se usan con el permiso de Wiley VCH. Las imágenes del experimento del agrupamiento y reintegro de  $^3\text{He}$  y  $^4\text{He}$  en la página 110 provienen del sitio web [atomoptic.iota.u-psud.fr/research/helium/helium.html](http://atomoptic.iota.u-psud.fr/research/helium/helium.html) cortesía y copyright de Denis Boiron y Jerome Chatin. La fotografía del pez duende en la página 136 es cortesía y copyright de Tamara Frank, y se encuentra en su sitio web [www.flickr.com/photos/gioischia/](http://www.flickr.com/photos/gioischia/). La fotografía de metal fundido en la página 161 es cortesía y copyright de Graela y se encuentra en [flickr.com/photos/alaig](http://flickr.com/photos/alaig). La fotografía de la bengala en la página 161 es cortesía y copyright de Sarah Domingos y se encuentra en ella [flickr.com](http://flickr.com) website. La fotografía del núcleo del reactor en la página 161 es cortesía de la NASA y se encuentra en [grin.hq.nasa.gov](http://grin.hq.nasa.gov) website. Las fotografías de la lámpara de descarga en la página 161 son cortesía y derechos de autor de Pslawinski y se encuentran en [www.wikimedia.org](http://www.wikimedia.org). La fotografía de la aurora en la página 161 es cortesía y copyright de Jan Curtis y se encuentra en su [climate.gi.alaska.edu/Curtis/curtis.html](http://climate.gi.alaska.edu/Curtis/curtis.html) website. La fotografía de llamas coloreadas en [page 161](#) es cortesía y copyright de Philip Evans y se encuentra en su [community.webshots.com/user/hydrogen01](http://community.webshots.com/user/hydrogen01) website. La fotografía del iceberg en la página 162 es cortesía y copyright de Marcus Shandro y se encontró en su [flickr.com/photos/mshandro](http://flickr.com/photos/mshandro) website. La fotografía de la máscara de sombra en la página 162 es cortesía y copyright de Planemad y se encuentra en el [www.wikimedia.org](http://www.wikimedia.org) website. El narciso

fotografiado en pag. 163 es cortesía y copyright de Thomas Lüthi y se encuentra en su [www.tiptom.ch/album/blumen/](http://www.tiptom.ch/album/blumen/). La fotografía con un dedo con sangre en la página 163 es cortesía y copyright de Ian Humes y se encuentra en su sitio web [www.flickr.com/photos/ianhumes](http://www.flickr.com/photos/ianhumes). La fotografía de las bayas en la página 163 es cortesía y copyright de Nathan Wall y se encuentra en su sitio web. [www.flickr.com/photos/ozboi-z](http://www.flickr.com/photos/ozboi-z). La fotografía de una mujer pelirroja en la página 163 es por dusdin y cortesía de Wikimedia. La rara fotografía de un pez pescador viviente en la página 163 es cortesía y copyright de Steve Haddock y se encuentra en su sitio web. [www.lifesci.uscb.edu/~biolum/](http://www.lifesci.uscb.edu/~biolum/). TLa fotografía del desierto en la página 164 es propiedad de Evelien Willemsen, cortesía de Raf Verbeelen y se encuentra en [www.flickr.com/photos/verbeelen](http://www.flickr.com/photos/verbeelen). La fotografía del saxofón tenor en la página 164 es cortesía y copyright de Selmer en [www.selmer.fr](http://www.selmer.fr). La fotografía de una mujer pelirroja en la página 164 es de Walkerma y cortesía de Wikimedia. La fotografía de punto cuántico fluorescente en la página 164 es cortesía y copyright de Andrey Rogach, Centro de Nanociencia, München. La fotografía de zirconia en la página 165 es cortesía y copyright de Gregory Phillips y se encuentra en el [commons.wikimedia.org](http://commons.wikimedia.org) website. El atardecer de Tokio en la página 165 es cortesía y copyright de Altus Plunkett y se encontró en su [www.flickr.com/photos/altus](http://www.flickr.com/photos/altus) website. La fotografía de cuarzo azul en la página 165 es cortesía y copyright de Andreas Kostner y se encontró en su [www.thulescientific.com](http://www.thulescientific.com) website. La fotografía del muñeco de nieve en la página 166 es cortesía y copyright de Altus Plunkett y se encuentra en su [www.flickr.com/photos/bytesinmotion](http://www.flickr.com/photos/bytesinmotion) website. La fotografía de rana venenosa azul en peligro en la página 166 es cortesía y copyright de Lee Hancock y se encuentra en el [www.treewalkers.org](http://www.treewalkers.org) website. La fotografía de cristal de rubí en la página 166 es cortesía y tiene copyright de Murano Glass Shop y se encuentra en su [murano-glass-shop.it](http://murano-glass-shop.it) website. La fotografía de un anillo láser con generación de segunda armónica en la página 166 es cortesía y copyright de Jeff Sherman y se encuentra en su [flickr.com/photos/fatllama](http://flickr.com/photos/fatllama) website. TLa fotografía de abulón (*Haliotis corrugata*) en la página 166 es cortesía y copyright de Anne Elliot y se encuentra en ella [flickr.com/photos/annkelliot](http://flickr.com/photos/annkelliot) website. El patrón de cristal líquido en la página 167 es cortesía y copyright de Ingo Dierking y Wiley / VCH; se encuentra en su maravilloso libro. [www.pbase.com/simon2005](http://www.pbase.com/simon2005) website. La fotografía de ópalo en la página 167 es cortesía y copyright de Opalsnopals y se encuentra en su [www.flickr.com](http://www.flickr.com) website. La fotografía de condensación del avión en la página 167 es cortesía y copyright de Franz Kerschbaum y se encuentra en el [epod.usra.edu](http://epod.usra.edu) website. La fotografía del CD en la [page 167](#) es cortesía y copyright de Alfons Reichert y se encuentra en su página web [www.chemiephysikskripte.de/artikel/cd.htm](http://www.chemiephysikskripte.de/artikel/cd.htm) website. El patrón de cristal líquido en la página 167 es cortesía y copyright de Ingo Dierking y Wiley / VCH; se encuentra en su maravilloso libro Ingo Dierking, *Textures of Liquid Crystals*, Wiley-VCH, 2003. See also his website [reynolds.ph.man.ac.uk/people/staff/dierking/gallery](http://reynolds.ph.man.ac.uk/people/staff/dierking/gallery). El espectro de color medido en la página 169 está protegido por derechos de autor y cortesía de Nigel Sharp, NOAO, FTS, NSO, KPNO, AURA y NSF. La fotografía de una descarga de hidrógeno en la página 170 está protegida por derechos de autor y cortesía de Jürgen Bauer y se encuentra en el hermoso sitio web [www.smart-elements.com](http://www.smart-elements.com). Los retratos históricos de los físicos en el texto son de dominio público, excepto en los casos mencionados. La fotografía en la contraportada, de un basilisco que corre sobre el agua, es cortesía y copyright del grupo belga TERRA vzw y se encuentra en su sitio web [www.terra.vzw.org](http://www.terra.vzw.org). Todos los dibujos tienen copyright de Christoph Schiller. Si sospecha que sus derechos de autor no se han otorgado u obtenido correctamente, esto no se ha hecho a propósito; por favor contáctame en este caso.

