

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

Fís. Carlos Adrián Jiménez Carballo
Escuela de Física
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Objetivos

Al finalizar esta sección el estudiante deberá ser capaz de

- Identificar un movimiento periódico.
- Identificar las principales características físicas del movimiento periódico
- Identificar diferentes fenómenos físicos que cumplen con el MAS.
- Identificar las causas del movimiento armónico simple (MAS).
- Interpretar la ecuación diferencial del MAS.
- Interpretar la solución de la ecuación diferencial del MAS.
- Extraer información de gráficos de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo de distintos fenómenos físicos.
- Construir las ecuaciones de las funciones de posición, velocidad y aceleración a partir de la información extraída de las gráficas.

Conocimientos previos

Para esta sección los estudiantes deben tener conocimientos previos en

- Matemática básica.
- Cálculo diferencial, principalmente los conceptos de derivada e integral
- Física general, principalmente los conceptos de mecánica clásica, como por ejemplo las leyes de newton, los conceptos de posición, distancia, velocidad y aceleración, las definiciones de energía cinética, energía potencial y energía mecánica.

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Movimiento periódico

Un movimiento periódico es aquel que después de cierto tiempo se vuelve a repetir de nuevo el ciclo o recorrido de una partícula

Figura: Movimiento periódico de la luna alrededor de la tierra

Ejemplos: Movimiento periódico

- La oscilación de una masa acoplada a un resorte
- El movimiento de un péndulo
- Las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical
- La rotación de la Tierra
- Las ondas electromagnéticas tales como ondas de luz y de radio
- La corriente eléctrica en los circuitos de corriente alterna

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Amplitud de movimiento

- Se denotada con la letra A y se define como la magnitud máxima del desplazamiento con respecto al equilibrio; es decir, el valor máximo de $|x|$ y siempre es positiva.
- El rango global del movimiento es $2A$.
- Las unidades de A depende del fenómeno físico que estemos trabajando.

Periodo y frecuencia

El **periodo** se denota con la letra T y se define como el tiempo que tarda en cumplirse un ciclo.

La unidad del periodo en el *SI* es el segundo, aunque a veces se expresa como segundos por ciclo.

La **frecuencia** se denota con la letra f , y se define como el número de ciclos por la unidad de tiempo que realiza un movimiento periódico.

La frecuencia se relaciona con el periodo mediante la siguiente relación

$$f = 1/T.$$

La unidad de la frecuencia en el SI es el hertz
($1 \text{ Hz} = \text{ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$).

Frecuencia angular

La frecuencia angular se denota con la letra ω , y se define

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

La frecuencia angular representa la rapidez de cambio de una cantidad angular la cual se mide en radianes, de modo que sus unidades son rad/s

Contenido

Movimiento periódico

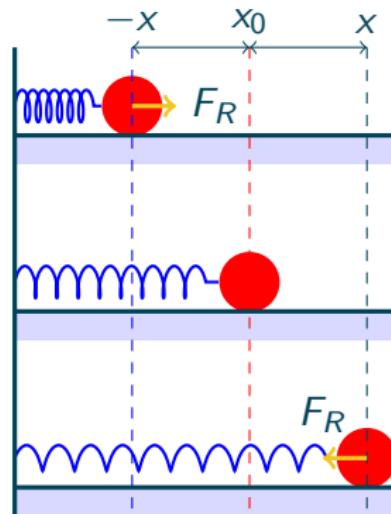
Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Movimiento Armónico simple

El Movimiento Armónico Simple (MAS) es el movimiento periódico más sencillo que se puede analizar, el cual sucede cuando existe una fuerza de restitución F_R , la cual es directamente proporcional al desplazamiento x con respecto a un punto equilibrio.



MAS: Sistema masa-resorte

El caso mas común es la fuerza que experimenta un partícula de masa m atada a un resorte, donde dicha fuerza se define como

$$F_R = -kx.$$

donde el signo ($-$) en la ecuación se debe a la fuerza restauradora que tiene sentido contrario al desplazamiento. La fuerza se opone o se resiste a la deformación

Oscilador armónico

- Un cuerpo que describe un MAS se denomina *oscilador armónico*.
- El movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

Ecuación diferencial del MAS

- Si se considera el sistema masa-resorte y se aplica la segunda ley de Newton a la masa m

$$\sum F_x = -kx = ma.$$

- Usando la definición de aceleración se tiene

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

- Finalmente se obtiene la ecuación diferencial general del MAS

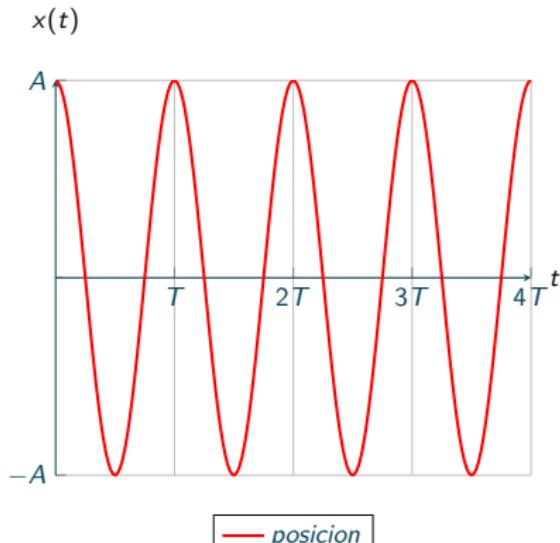
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

donde la frecuencia angular del sistema se define como
 $\omega = \sqrt{k/m}$.

La solución de dicha ecuación diferencial es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

donde x describe la posición de la masa y la constante ϕ es el ángulo de fase, el cual sirve para encontrar las condiciones iniciales ($x(0)$, $v_x(0)$ y $a_x(0)$) del movimiento del oscilador



Características MAS: Sistema masa-resorte

Para un sistema **masa-resorte que describe un MAS** las características del movimiento quedan definidas en términos de ω , como por ejemplo

- Periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- Frecuencia

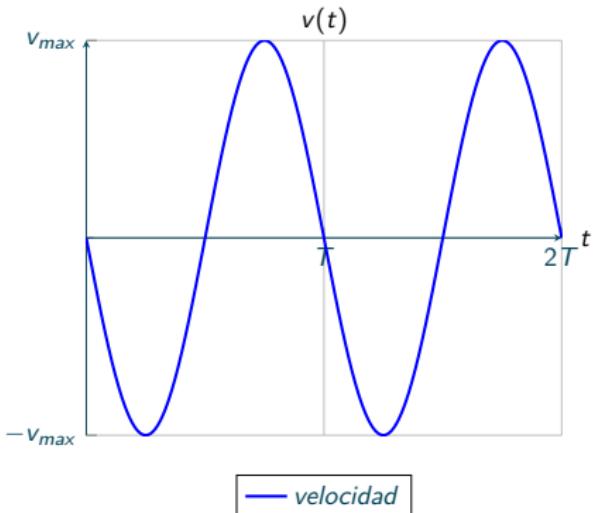
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

De lo anterior se puede ver que en el MAS descrito por un sistema masa-resorte, el periodo y la frecuencia no dependen de la amplitud.

Velocidad para una masa que describe un MAS

Usando la definición de velocidad se obtiene

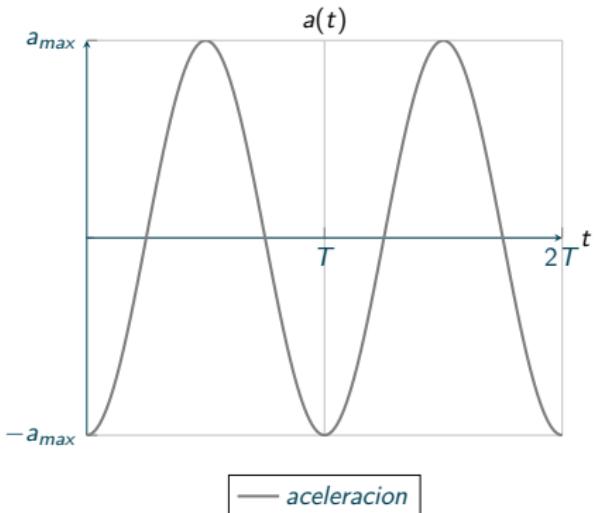
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$



Aceleración para una masa que describe un MAS

Usando la definición de aceleración se obtiene

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

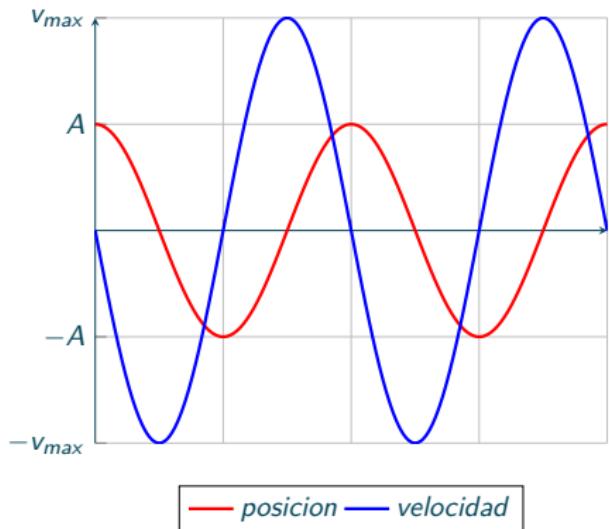


Ecuaciones de posición, velocidad y aceleración

Resumen

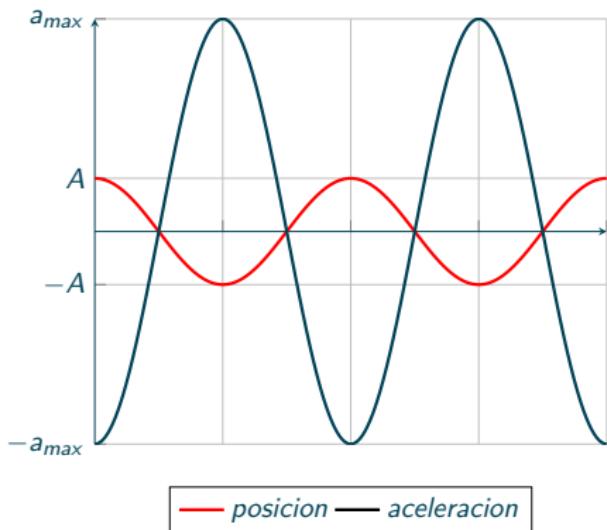
Cantidad física	definición	Ecuación	Máximo
Posición		$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$	$x_{max} = A$
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	$v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$	$v_{max} = A\omega$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt}$	$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$	$a_{max} = A\omega^2$

Posición vs velocidad



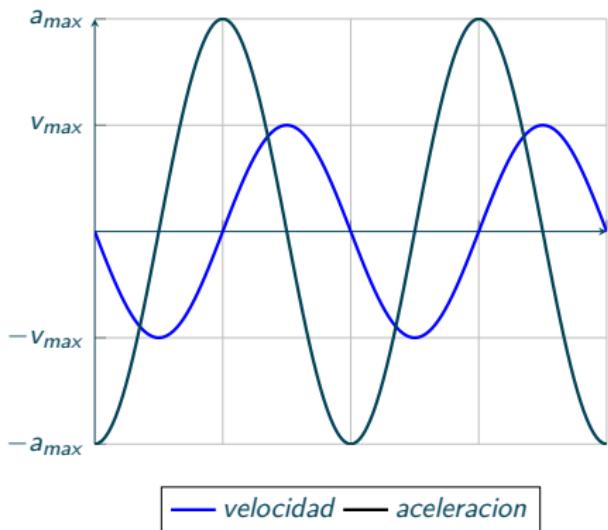
- La velocidad es máxima o mínima en el punto de equilibrio
- La velocidad es cero en los extremos de la oscilación

Posición vs aceleración



- La aceleración es cero en el punto de equilibrio
- La aceleración es máxima o mínima en los extremos de la oscilación

Aceleración vs velocidad



- Cuando la velocidad es máxima o mínima la aceleración es cero
- Cuando la aceleración es máxima o mínima la velocidad es cero

Amplitud y ángulo de fase

- Una forma de determinar la amplitud de movimiento de una masa unida a un resorte que describe un MAS es

$$A = \sqrt{(x(t))^2 + \left(\frac{v(t)}{\omega}\right)^2}$$

- Una forma para determinar el ángulo de fase es

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v(t)}{\omega x(t)}\right) - \omega t$$

Le queda a usted como ejercicio demostrar dichas expresiones pues para efectos de examen eso se evalúa

Contenido

Movimiento periódico

Características del movimiento periódico

Movimiento armónico simple (MAS)

Energía de una masa unida a un resorte que describe un MAS

Energía cinética de una masa un MAS

La energía cinética se define como:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv_x^2,$$

donde para el caso de una masa puntual que describe un MAS

$$K = \frac{1}{2}m(-A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi))^2.$$

Usando la definición de ω

$$K = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi).$$

Energía cinética

La energía potencial de un resorte se calcula como:

$$U = \frac{1}{2} kx^2,$$

donde para el caso de una masa puntual que describe un MAS

$$U = \frac{1}{2} k (A \cos(\omega t + \phi))^2.$$

Energía mecánica

La energía mecánica se define como:

$$E \equiv K + U,$$

donde usando los resultados anteriores se obtiene la energía mecánica de una masa que describe un MAS

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi).$$

donde simplificando se obtiene la energía mecánica de una masa unida a un resorte la cual describe un MAS

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

donde se puede ver que E es constante en el tiempo.

Velocidad de una masa unida a un resorte

Con el resultado anterior se puede determinar la velocidad de la partícula en cualquier momento. A partir de la expresión de la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

se despeja v_x y se obtiene

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2} kx^2 \right)},$$

donde se encuentra finalmente la velocidad de la masa en términos de su posición

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}.$$

De lo anterior se puede ver que velocidad máxima se obtiene para $x = 0$ y se determina $v_{x\max} = \omega A$

Variación de las energías en el MAS

- La energía potencial U es máxima en los extremos del movimiento (A y $-A$).
- La energía cinética K es máxima en la posición de equilibrio (x_0).
- La energía mecánica E es constante en todo el movimiento.

Fórmulas MAS primer examen parcial

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Todas las fórmulas que no aparecen aquí deben ser demostradas en el examen

Bibliografía

- Sears, F.W., Zemansky, M.W., Young, H.D., Freedman, R.A. (2013). *Física Universitaria*. Volumen I. Décimo tercera edición. México: Pearson Education.
- Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. (2013). *Física*. Volumen I. Quinta edición. México: Grupo Editorial Patria.
- Serway, R.A. y Jewett, J.W. (2008). *Física Para Ciencias e Ingeniería*. Volumen I. Sétima edición. México: Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Wilson, J.D., Buffa, A.J. y Lou, B. (2007). *Física*. 6ta Edición. México: Pearson educación.

Créditos

- Vicerrectoría de Docencia
- CEDA - TEC Digital
- Proyecto de Virtualización 2016-2017
- Física General III
- Fís. Carlos Adrián Jiménez Carballo (profesor)
- Ing. Paula Morales Rodríguez (coordinadora de diseño)
- Andrés Salazar Trejos (Asistente)