Física II

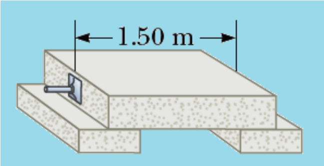
Elasticidad – Problemas Resueltos

Curso de Estudios Generales

9 de enero de 2026

Dintel de hormigón pretensado

El dintel de hormigón armado pretensado mostrado en la figura tiene una longitud $L = 1{,}50\,\text{m}$. El hormigón encierra una varilla de refuerzo de acero de área transversal $A_s = 1{,}50\,\text{cm}^2$, unida rígidamente a dos placas finales resistentes.
El área transversal del hormigón, perpendicular a la varilla, es $A_c = 50{,}0\,\text{cm}^2$, y su módulo de Young es Y_c. Una vez curado el hormigón y liberada la tensión original de la varilla, el hormigón queda sometido a una compresión σ_c.



Determinar:

a). La distancia en que el hormigón comprime a la varilla.

b). La nueva tensión en la varilla.

c). Cuánto más larga queda la varilla respecto a su longitud natural.

d). Cuánto debió estirarse inicialmente la varilla.

e). La tensión original necesaria en la varilla.

Solución

El dintel de hormigón armado pretensado tiene:

- Longitud $L = 1{,}50\,\mathrm{m}$
- Área transversal de la varilla de acero: $A_s = 1{,}50\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}50 \times 10^{-4}\ m^2$
- Área transversal del hormigón: $A_c = 50{,}0\,\mathrm{cm}^2 = 5{,}00 \times 10^{-3}\ m^2$
- Módulo de Young del hormigón: $Y_c = 30 \times 10^9\ N/m^2$
- Módulo de Young del acero: $Y_s = 200 \times 10^9\ N/m^2$
- Esfuerzo de compresión final del hormigón: $\sigma_c = 8{,}00 \times 10^6\ N/m^2$

Planteamiento físico

- El sistema está formado por **hormigón + acero**, rígidamente acoplados.
- Al liberarse la tensión inicial de la varilla, el sistema queda en equilibrio. La varilla de acero queda en **tracción** y el hormigón en **compresión**.
- Ambas partes experimentan la **misma deformación longitudinal**.
- Por equilibrio de fuerzas axiales:

$$F_s = F_c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} F_s & = & \sigma_s A_s \\ F_c & = & \sigma_c A_c \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_s = \frac{A_c}{A_s}\,\sigma_c$$

a). **Compresión del hormigón y la varilla:**
La deformación unitaria del hormigón es

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{Y_c} = \frac{8{,}00 \times 10^6}{30{,}0 \times 10^9} = 2{,}67 \times 10^{-4}$$

La compresión longitudinal del sistema es:

$$\begin{aligned} \Delta L_c &= \varepsilon_c L = (2{,}67 \times 10^{-4})(1{,}50) \\ &= 4{,}00 \times 10^{-4}\ m = 0{,}4\ mm \end{aligned}$$

Esta es la distancia con la que el hormigón comprime a la varilla.

b). **Nueva tensión en la varilla** En equilibrio, la fuerza en el hormigón (compresión) iguala la fuerza en la varilla (tracción):

$$F_c = \sigma_c \cdot A_c = (8{,}00 \times 10^6)(5{,}00 \times 10^{-3}) = 4{,}00 \times 10^4\ N$$

Por equilibrio:

$$T_2 = 4{,}00 \times 10^4\ N$$

La varilla queda sometida a una fuerte tensión de tracción.

c). **Longitud respecto a la longitud sin tensión:** El alargamiento de la varilla bajo la tensión T_2 es

$$\Delta L_2 = \frac{T_2 L}{A_s Y_s} = \frac{(4{,}00 \times 10^4)(1{,}50)}{(1{,}50 \times 10^{-4})(200 \times 10^9)} = 2{,}00\ mm$$

Donde Y_s es el módulo de Young del acero. Esta es la longitud adicional que conserva la varilla respecto a su longitud natural sin tensión.

d). **Estiramiento inicial de la varilla** Para que el sistema alcance el estado final tras liberar la tensión, la varilla debió estirarse inicialmente una distancia:

- ΔL_2 el alargamiento final de la varilla
- ΔL_c la compresión del hormigón

$$\Delta L_0 = \Delta L_2 + \Delta L_c = 2{,}00 + 0{,}40 = 2{,}40\ mm$$

e). **Tensión original en la varilla:** La deformación inicial es

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta L_0}{L} = \frac{2{,}40 \times 10^{-3}}{1{,}50} = 1{,}60 \times 10^{-3}$$

La tensión original aplicada a la varilla fue:

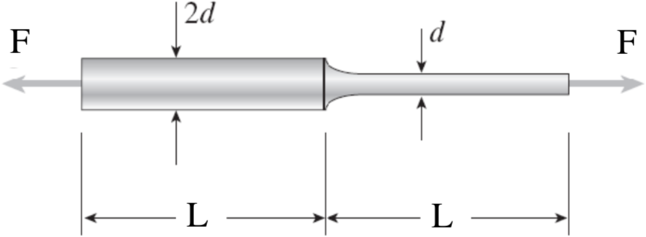
$$T_1 = Y_s A_s \varepsilon_s = (200 \times 10^9)(1{,}50 \times 10^{-4})(1{,}60 \times 10^{-3}) = 48{,}0 \times 10^3\ N$$

Este valor garantiza que, tras el curado y la liberación, el hormigón quede comprimido y el sistema en equilibrio.

Comentario físico

- El pretensado introduce tensiones internas controladas que permiten que el hormigón trabaje principalmente a compresión, aumentando la resistencia y durabilidad del dintel.
- La varilla de acero actúa como un elemento elástico que almacena energía y redistribuye esfuerzos en el sistema.

Una barra de sección transversal circular tiene dos diámetros distintos, d y $2d$, tal como muestra la figura. Si el módulo de elasticidad es Y, ¿cuánto se estirará la barra?



Solución

La barra está sometida a una fuerza axial de tracción F. Como la barra tiene dos secciones con distintos diámetros, el alargamiento total es la suma de los alargamientos de cada tramo.

La elongación de un tramo sometido a tracción es:

$$\Delta L = \frac{FL}{AY}$$

donde:

- F es la fuerza aplicada,
- L la longitud del tramo,
- A el área transversal,
- Y el módulo de Young.

Cálculo de áreas
Para una sección circular:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

- Tramo 1 (diámetro d):

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

- Tramo 2 (diámetro $2d$):

$$A_2 = \frac{\pi (2d)^2}{4} = \pi d^2$$

Alargamiento de cada tramo
Sea L_1 la longitud del tramo de diámetro d y L_2 la longitud del tramo de diámetro $2d$.

Alargamiento del primer tramo:

$$\Delta L_1 = \frac{FL_1}{A_1Y} = \frac{4FL_1}{\pi d^2 Y}$$

Alargamiento del segundo tramo:

$$\Delta L_2 = \frac{FL_2}{A_2Y} = \frac{FL_2}{\pi d^2 Y}$$

Alargamiento total de la barra
El alargamiento total es la suma:

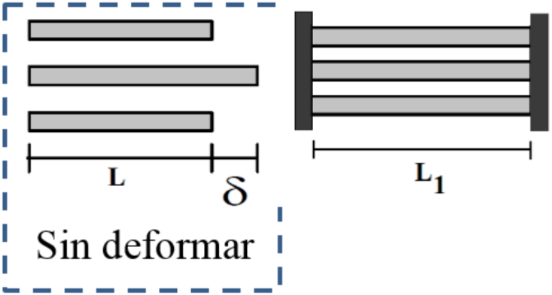
$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

$$\Delta L = \frac{4FL_1}{\pi d^2 Y} + \frac{FL_2}{\pi d^2 Y} = \frac{F}{\pi d^2 Y}\left(4L_1 + L_2\right)$$

Este es el alargamiento total de la barra.

Tres barras del mismo material con módulo elástico Y

Tres barras del mismo material con módulo elástico Y, igual área A, pero una de ellas es ligeramente más larga que las otras dos. Se fuerzan para que sus extremos permanezcan fijados (soldándolos) a dos paredes rígidas, tal como se muestra en la figura. Donde: $\delta = 0,005L$ y $L_1 = 0,98L$. Determine los módulos de las fuerzas que actúan sobre los extremos de las barras. **Datos:A, L, Y**.



Las tres barras están hechas del mismo material, con:

$$A, \quad Y \quad \text{iguales para todas}$$

Dos barras tienen longitud:

$$L$$

La tercera barra es ligeramente más corta:

$$L_1 = 0{,}98\,L$$

La separación entre las paredes rígidas es:

$$L + \delta, \qquad \delta = 0{,}005\,L$$

Al soldarse los extremos, todas las barras deben ajustarse a la misma separación, generando esfuerzos internos.

Deformaciones de las barras
Barras largas (1 y 2): Longitud original L
Elongación:

$$\Delta L = \delta = 0{,}005\,L$$

Barra corta (3): Longitud original $L_1 = 0{,}98\,L$
Elongación necesaria:

$$\begin{aligned}\Delta L_1 &= (L + \delta) - L_1 = (1{,}005L - 0{,}98L)\\ &= 0{,}025L\end{aligned}$$

Ley de Hooke en barras
La fuerza axial en una barra es:

$$F = Y A \frac{\Delta L}{L_0}$$

donde L_0 es la longitud original de la barra.

Aplicamos esta expresión a cada barra.

Fuerzas en las barras largas
Para las barras 1 y 2:

$$F_1 = F_2 = YA\frac{0{,}005L}{L} = 0{,}005\,YA$$

Ambas barras están sometidas a **tracción**.
Fuerza en la barra corta
Para la barra 3:

$$F_3 = YA\frac{0{,}025L}{0{,}98L} = 0{,}0255\,YA$$

Esta barra experimenta una **tracción mayor** debido a su menor longitud inicial.

Resultado final
Los módulos de las fuerzas que actúan sobre los extremos son:

$$\boxed{\begin{aligned} &F_1 = F_2 = 0{,}005\,YA \\ &F_3 \approx 0{,}0255\,YA \end{aligned}}$$

La barra más corta soporta una fuerza aproximadamente

$$\frac{F_3}{F_1} \approx 5{,}1$$

veces mayor que las otras.

Problema

De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta:

a). ¿Se ha rebasado el límite de elasticidad?

b). ¿Se romperá el alambre?

c). En caso de que las respuestas anteriores sean negativas, ¿cuál es su alargamiento?

Datos:

- Módulo de Young: $Y = 12 \times 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$
- Límite de elasticidad: 3×10^7 a $12 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$
- Límite de ruptura: 20×10^7 a $50 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$

Solución

a). El radio del alambre es:

$$r = \frac{2}{2} = 1\,\mathrm{mm} = 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

El área de la sección transversal:

$$A = \pi r^2 = \pi (10^{-3})^2 = 3{,}14 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

La fuerza aplicada es:

$$F = Mg = 8 \times 9{,}8 = 78{,}4\,\mathrm{N}$$

El esfuerzo producido:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{78{,}4}{3{,}14 \times 10^{-6}} = 2{,}49 \times 10^{7}\,\mathrm{N/m}^2$$

b). Este valor es **menor** que el límite inferior de elasticidad y de ruptura.

c). Alargamiento: El alargamiento se calcula mediante:

$$\Delta L = \frac{FL}{YA}$$

Sustituyendo valores:

$$\Delta L = \frac{78{,}4 \times 1{,}5}{12 \times 10^{10} \times 3{,}14 \times 10^{-6}} = 3{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

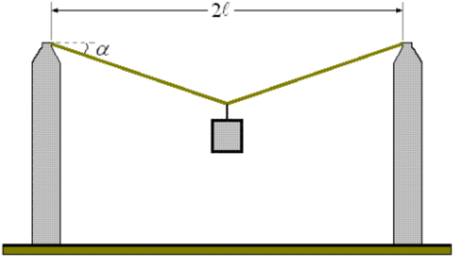
Resultado final

a). El esfuerzo no supera el límite de elasticidad.

b). El alambre no se rompe.

c). El alargamiento del alambre es de **0.3 mm**.

Entre dos columnas se tiende un alambre de longitud total $2l$. En su punto medio se cuelga un farol de masa M. El alambre tiene sección transversal A y módulo de Young Y. Se pide determinar el ángulo de pandeo α, suponiéndolo pequeño.



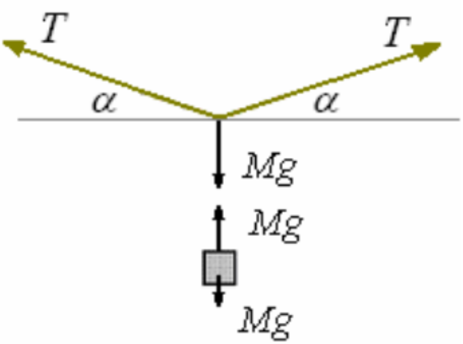
Solución

Equilibrio de fuerzas: Por condición de equilibrio vertical

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2T\sin\alpha - Mg = 0$$

De donde:

$$T = \frac{Mg}{2\sin\alpha}$$



Ley de Hooke: La tensión en el alambre viene dada por la ley de Hooke

$$T = YA\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$$

Igualando ambas expresiones de la tensión:

$$YA\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = \frac{Mg}{2\sin\alpha}$$

Solución

Relación geométrica: De la geometría del sistema

$$l' = \frac{l}{\cos\alpha}, \qquad l' = l + \Delta l$$

Por tanto:

$$\Delta l = l\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{\cos\alpha} - 1$$

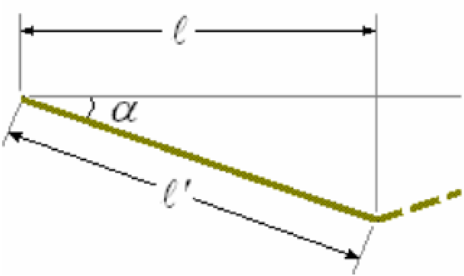
Aproximación de ángulo pequeño: Para $\alpha \ll 1$

$$\sin\alpha \approx \alpha, \qquad \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Luego:

$$\frac{1}{\cos\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Sustituyendo:



Resultado final: Simplificando

$$\alpha^3 = \frac{Mg}{YA}$$

Finalmente, el ángulo de pandeo es:

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{Mg}{YA}\right)^{1/3}}$$