OSCILACIONES, ONDAS Y TERMODINÁMICA

MÓDULO 1: OSCILACIONES

Figuras cedidas en parte por W.H. Freeman/Worth, que pertenecen al libro "Física, 4a. Ed.", P.A. Tipler, Ed. Reverté

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS.
(masa-muelle, péndulos,
sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS. (masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

Lección 3: Movimiento armónico forzado.

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*

Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*

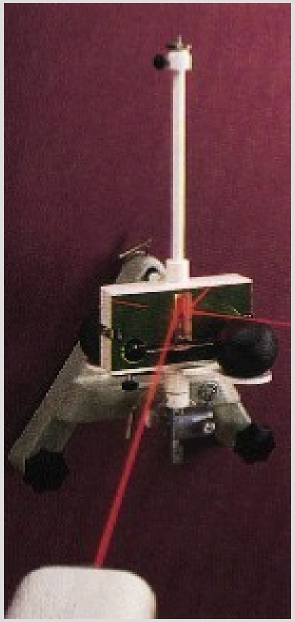
Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*

Lección 3: Movimiento armónico forzado

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

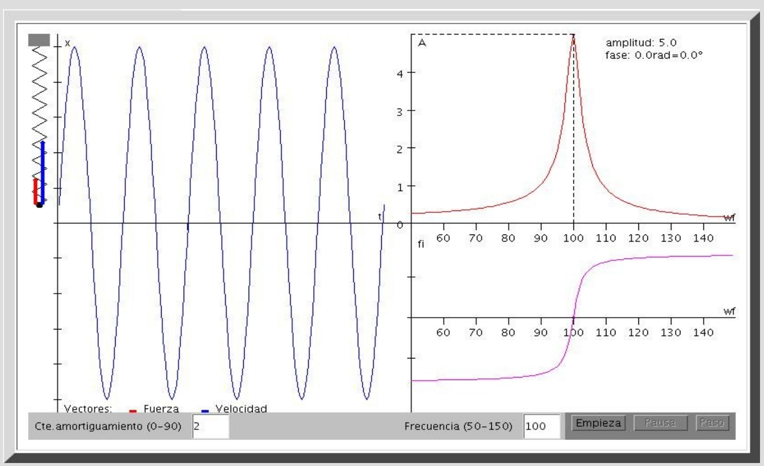
Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*

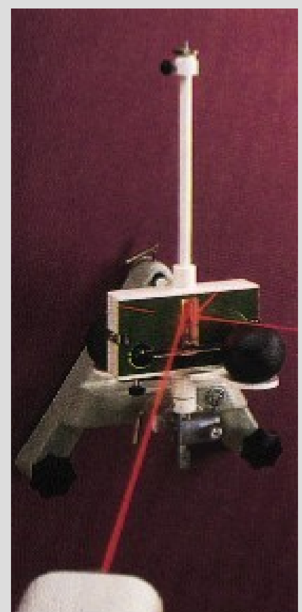


Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*





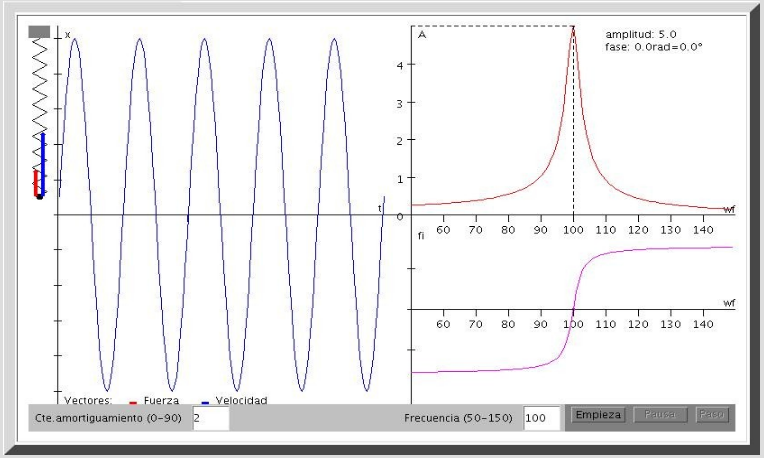
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/

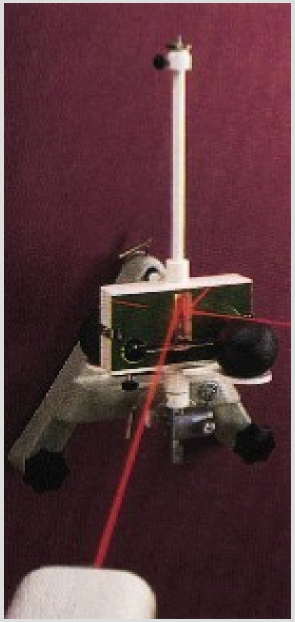
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*

http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E





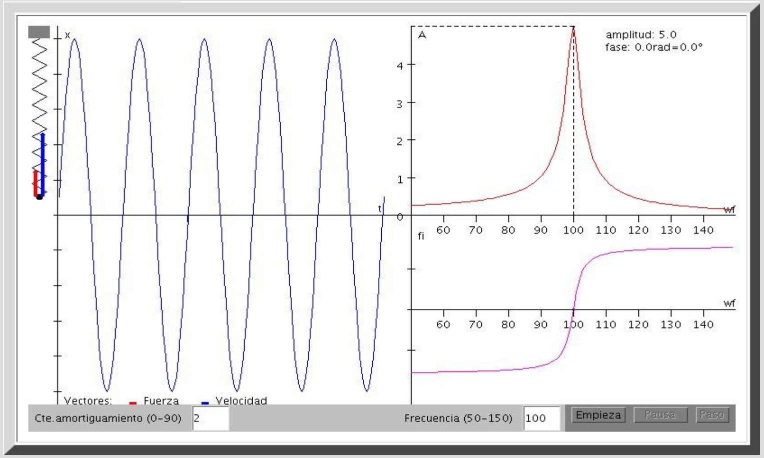
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/

Lección 3: Movimiento armónico forzado

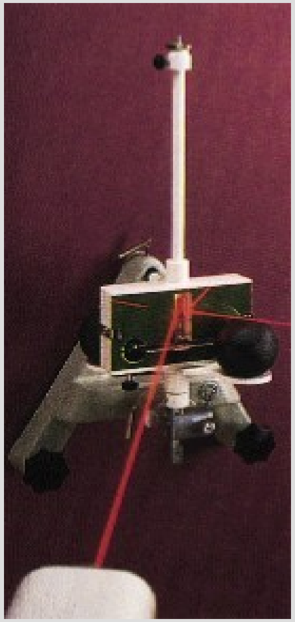
Ocurre cuando sobre un oscilador actúa una fuerza periódica

Muchas veces interesa forzar la oscilación *(sino se detendría)*

http://www.youtube.com/watch?v=17tqXgvCN0E



http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/

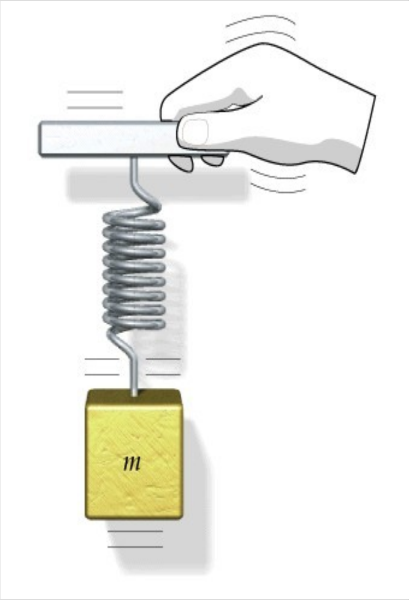


http://www.youtube.com/watch?v=6fMYqAmVGzU

Dpt. de Física i Eng. Nuclear
Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

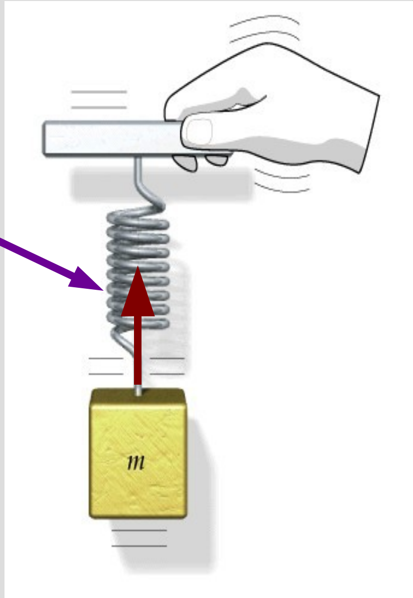
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:



3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

$$\boxed{F_{el} = -k\ x}$$

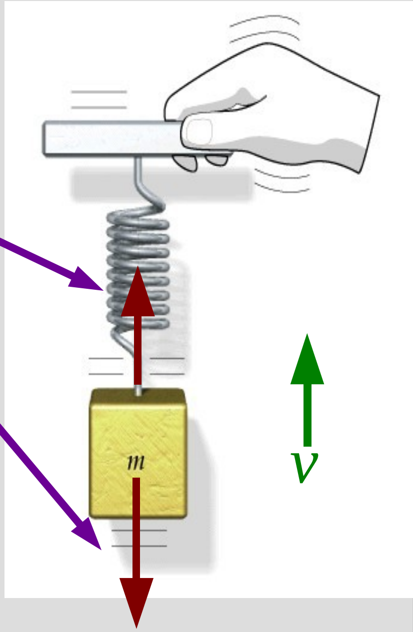


3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

$$F_{el} = -k\ x$$

$$F_r = -b\ v$$



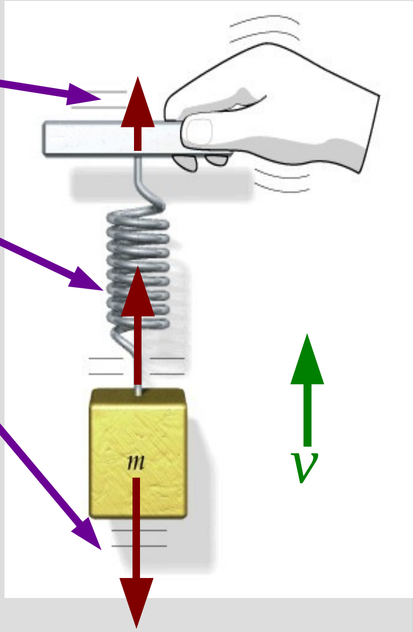
3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

$$\boxed{F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)}$$

$$\boxed{F_{el} = -k\ x}$$

$$\boxed{F_r = -b\ v}$$



3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

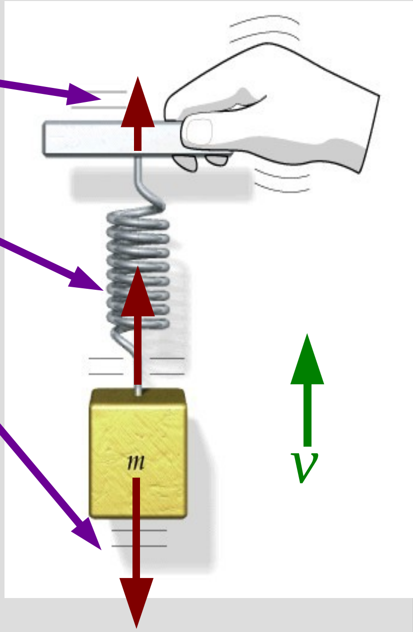
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

$$\boxed{F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)}$$

$$\boxed{F_{el} = -k\ x}$$

$$\boxed{F_r = -b\ v}$$



3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

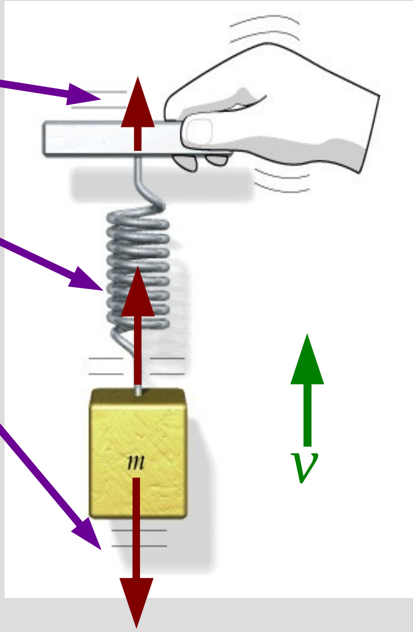
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k\ x$$

$$F_r = -b\ v$$



La 2[da] ley de Newton queda:

$$\sum F = -k\ x - b\ \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ \ddot{x}$$

3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

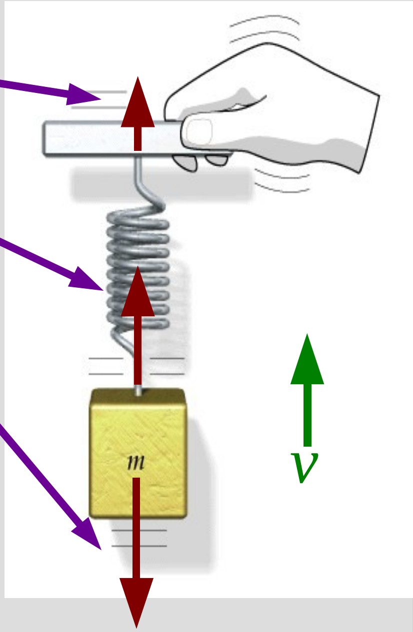
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k\ x$$

$$F_r = -b\ v$$



La 2da ley de Newton queda:

$$\sum F = -k\ x - b\ \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ \ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas

3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

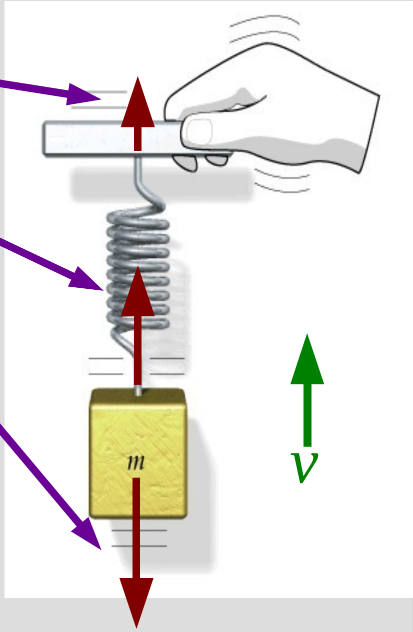
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k\ x$$

$$F_r = -b\ v$$



La 2[da] ley de Newton queda:

$$\sum F = -k\ x - b\ \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ \ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas

Donde:

*β = b/2m es el **parámetro de amortig.**.*

*ω_0^2 =k/m es la **frecuencia angular natural** del oscilador al cuadrado.*

*ω : es la **frecuencia angular de la fuerza oscilante***

3.1 Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas.

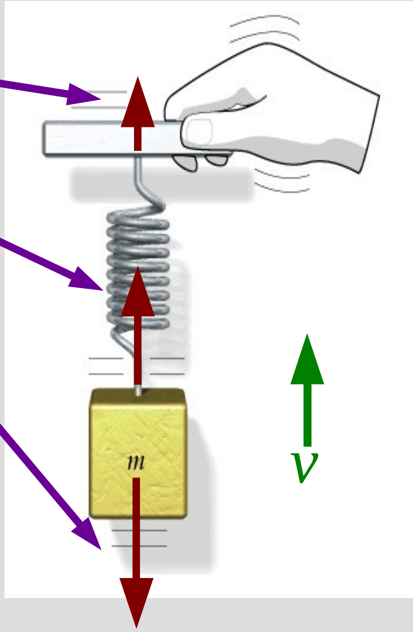
Supongamos ahora un cuerpo sometido a tres fuerzas; una **fuerza elástica**, un **rozamiento viscoso** y una **fuerza oscilante**:

- *Es una expresión sencilla*
- *Se puede generar fácilmente*

$$F_{osc} = F_0 \cos(\omega t)$$

$$F_{el} = -k\ x$$

$$F_r = -b\ v$$



La 2[da] ley de Newton queda:

$$\sum F = -k\ x - b\ \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) = m\ \ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

Ec. diferencial de las oscilaciones forzadas

*Es una ecuación diferencial de **segundo orden**, **lineal**, a **coeficientes constantes** y **no homogénea**.*

Donde:
- β *= b/2m es el **parámetro de amortig.**.*
- ω_0^2 *=k/m es la **frecuencia angular natural** del oscilador al cuadrado.*
- ω *: es la **frecuencia angular de la fuerza oscilante***

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

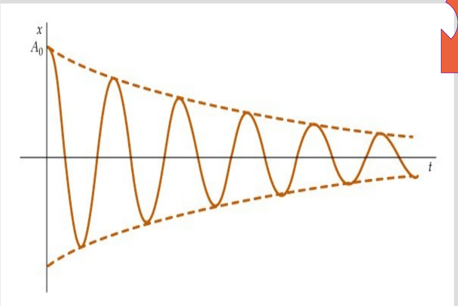
$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

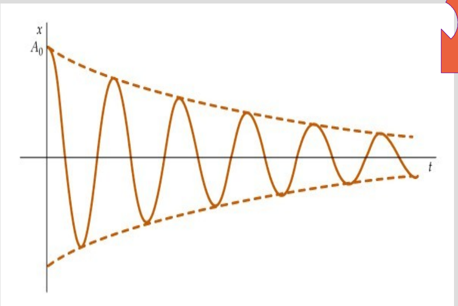
$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$



Probaremos con:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

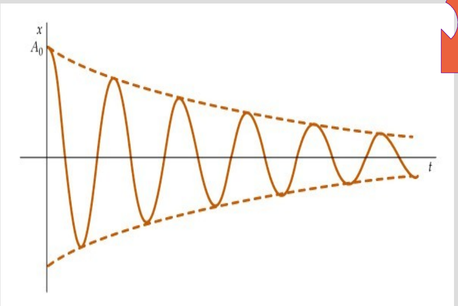
$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

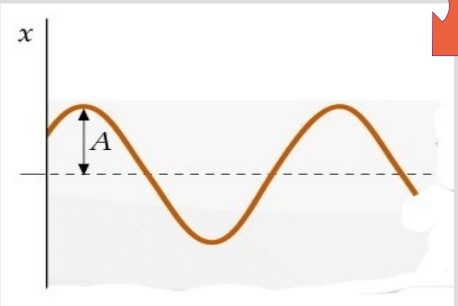
$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$



Probaremos con:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

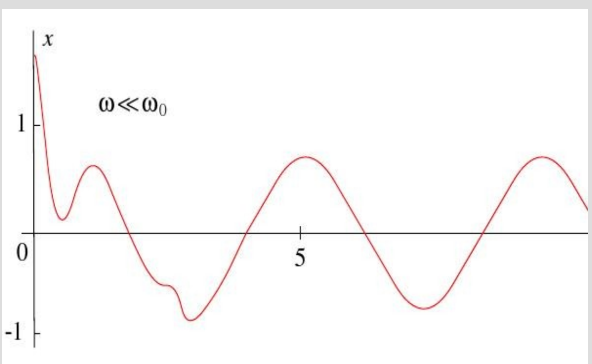
Solución general de la ec. diferencial no homogénea = *Solución de la ec. diferencial homogénea* + *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

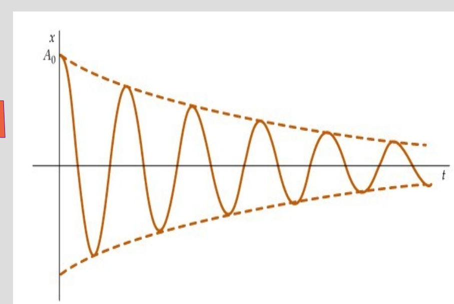
$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$

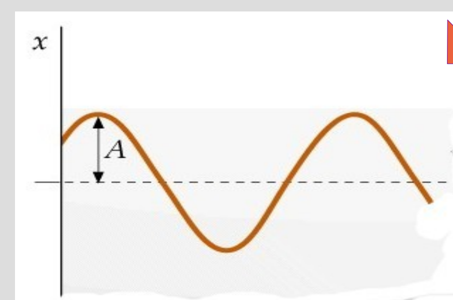
Probaremos con:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$





+



3.2 Solución de la ecuación diferencial

Busquemos la solución de la Ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos:

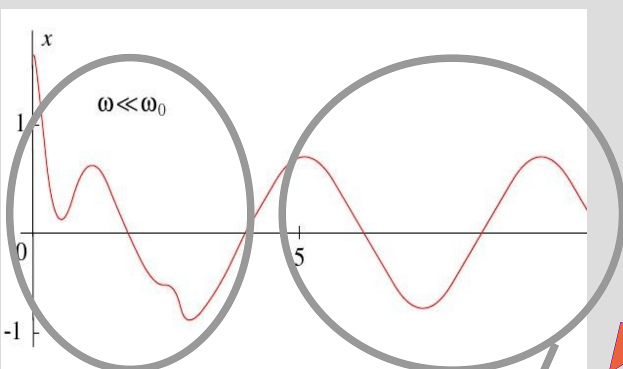
Solución general de la ec. diferencial no homogénea **=** *Solución de la ec. diferencial homogénea* **+** *Solución particular de la ec. diferencial no homogenea*

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

$$\boxed{x(t) = A\,e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \phi)}$$

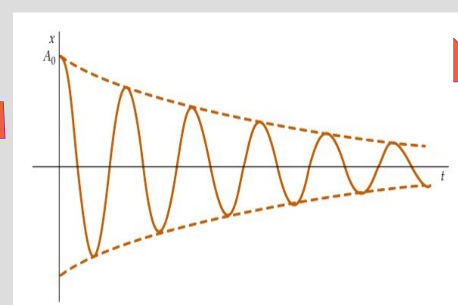
Probaremos con:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

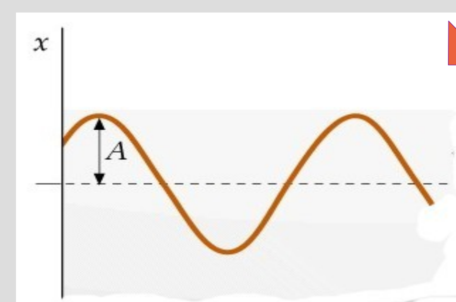


Estado transitorio

Estado estacionario

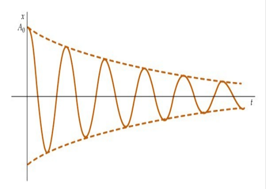


+

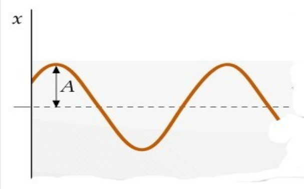


3.2 Solución de la ecuación diferencial

Estado transitorio y estado estacionario.

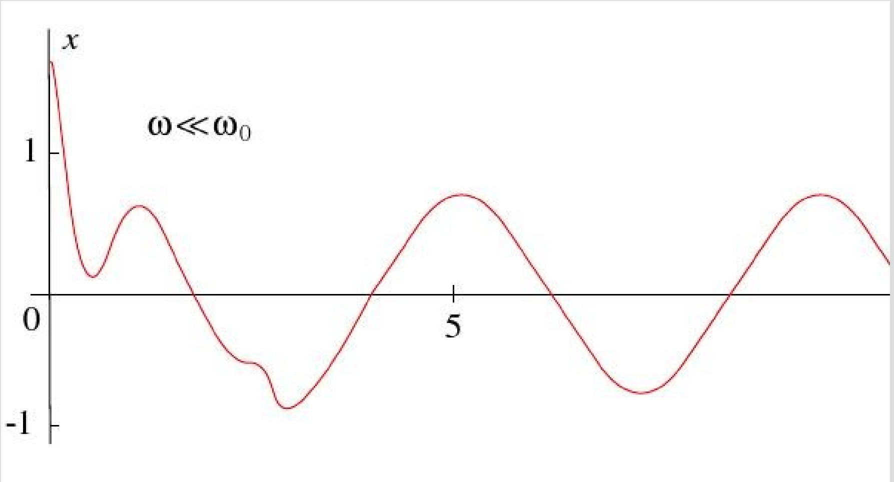


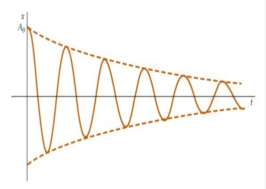
+



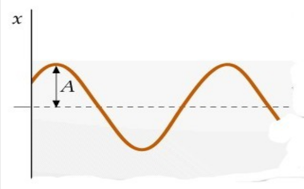
3.2 Solución de la ecuación diferencial

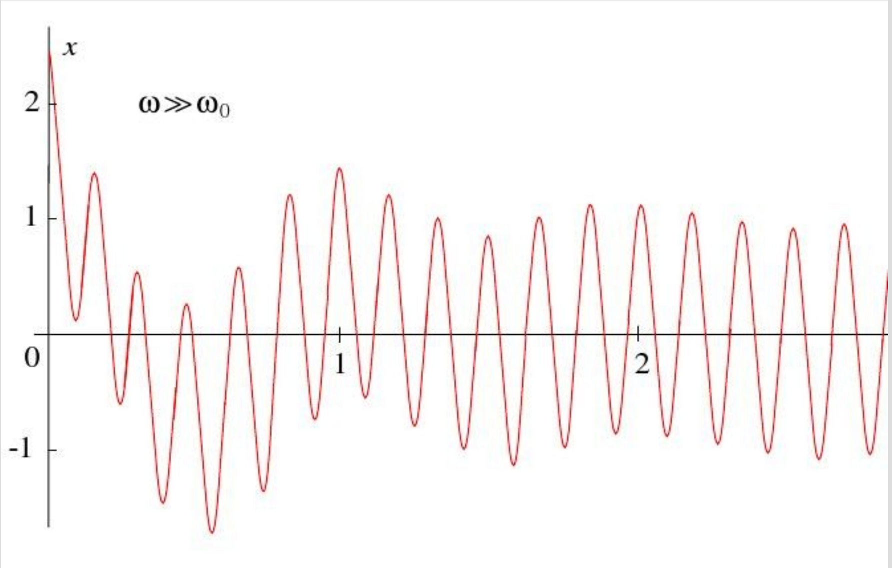
Estado transitorio y estado estacionario.





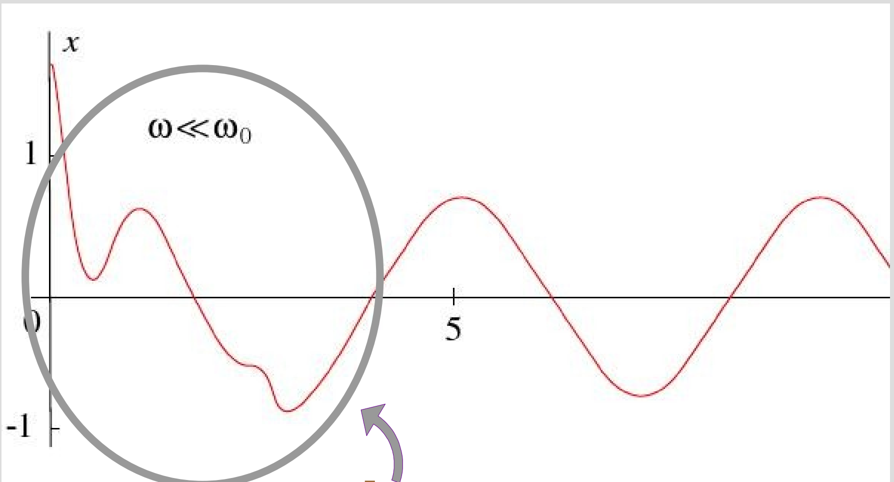
+

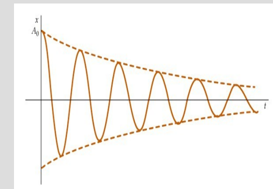


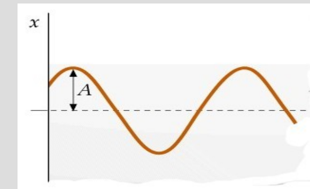


3.2 Solución de la ecuación diferencial

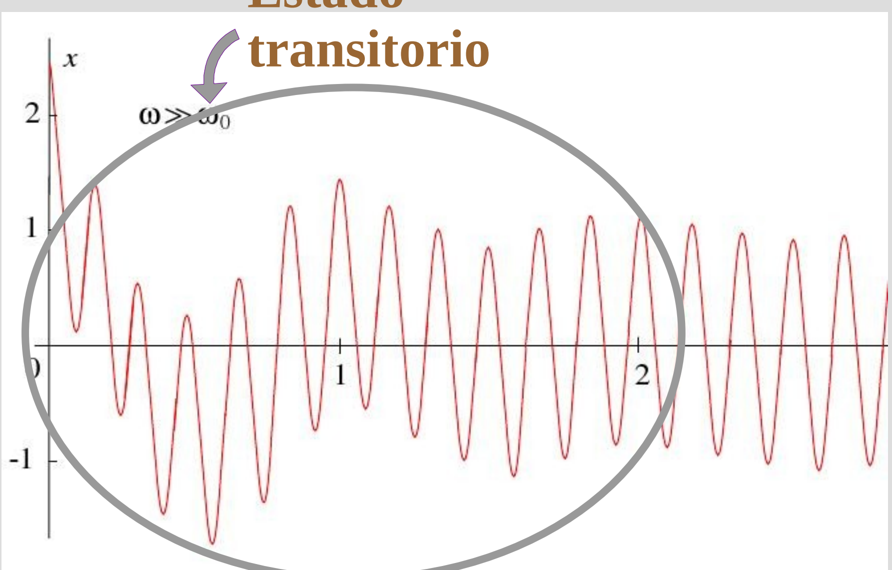
Estado transitorio y estado estacionario.





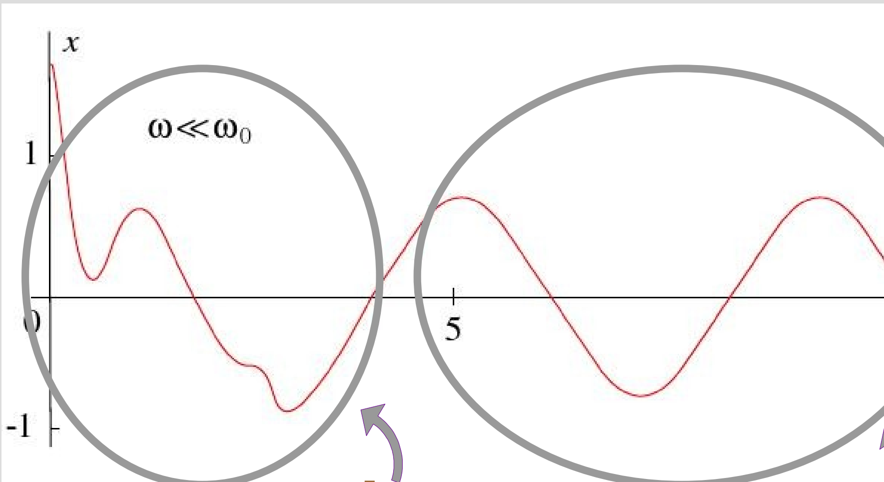


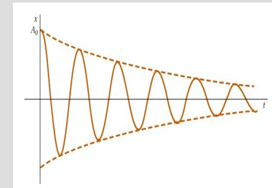
Estado transitorio



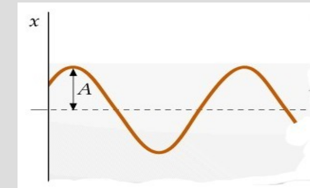
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

Estado transitorio y estado estacionario.





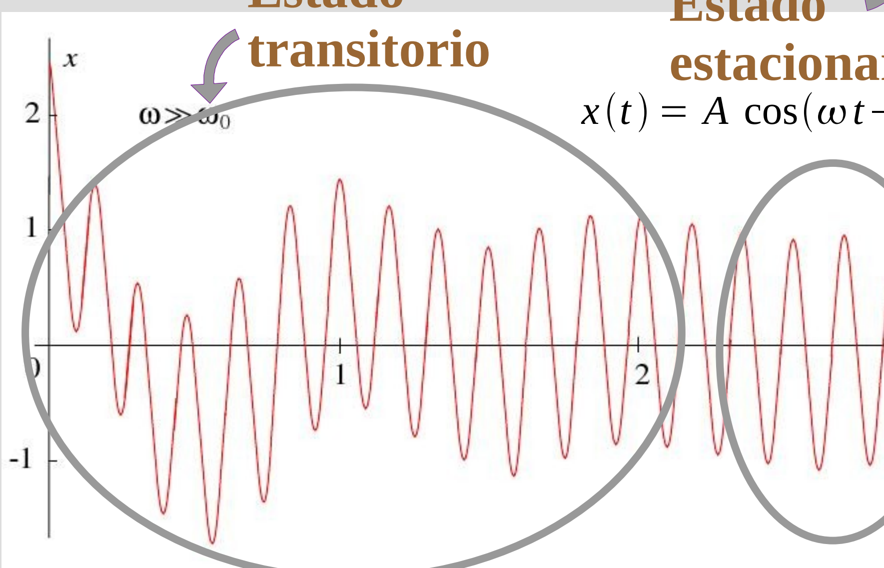
+



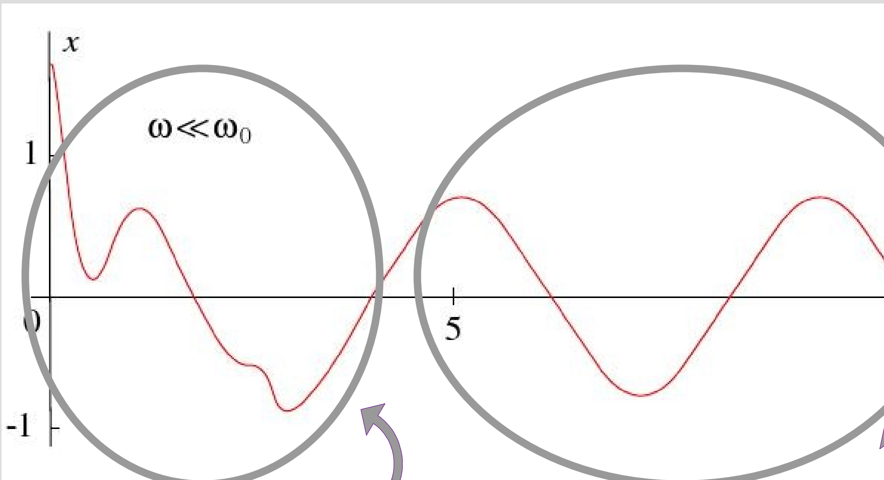
Estado transitorio

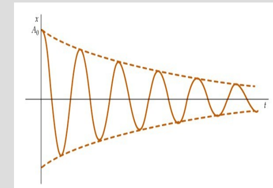
Estado estacionario

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

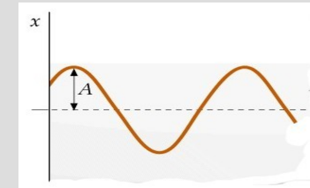


Estado transitorio y estado estacionario.





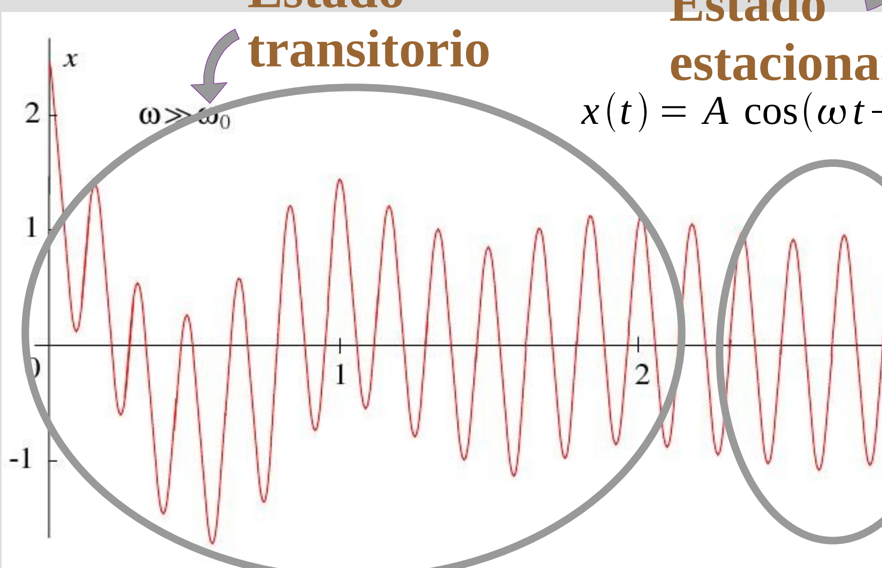
+



Estado transitorio

Estado estacionario

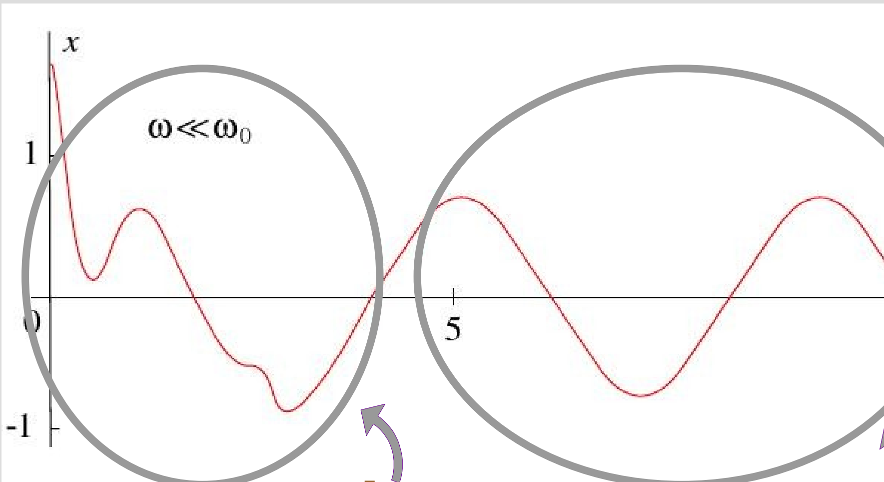
$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

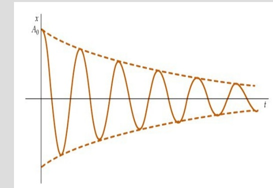


- El estado transitorio es muy complejo.

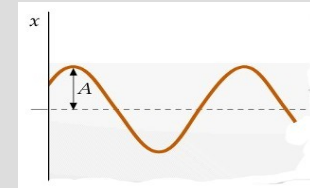
3.2 Solución de la ecuación diferencial

Estado transitorio y estado estacionario.





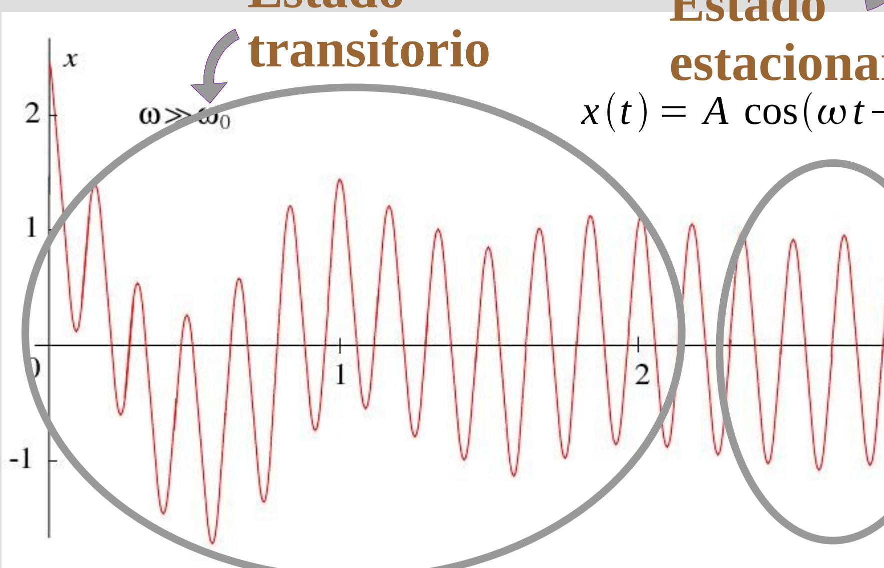
+



Estado transitorio

Estado estacionario

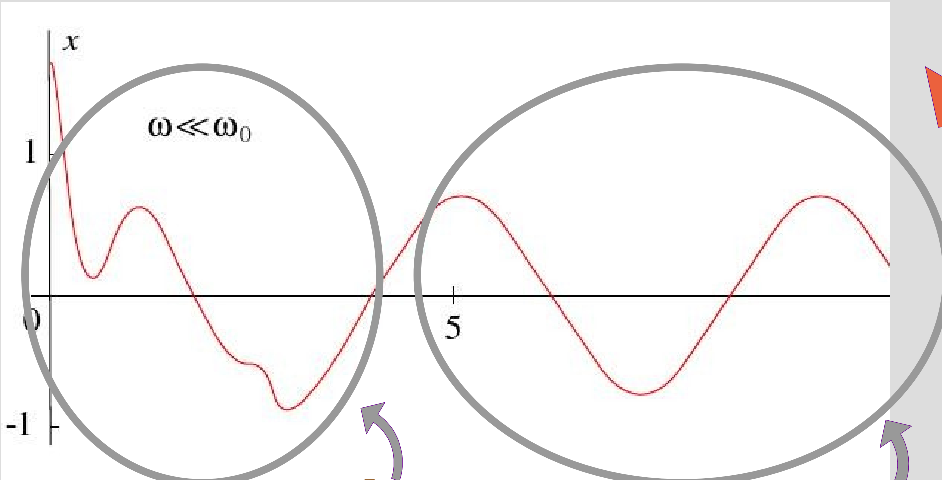
$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

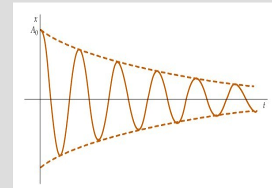


- El estado transitorio es muy complejo.
- Transcurrido un tiempo $t \approx 5\tau$ el estado transitorio desaparece y queda sólo el MAS estacionario.

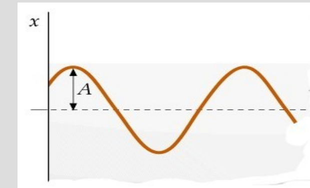
3.2 Solución de la ecuación diferencial

Estado transitorio y estado estacionario.





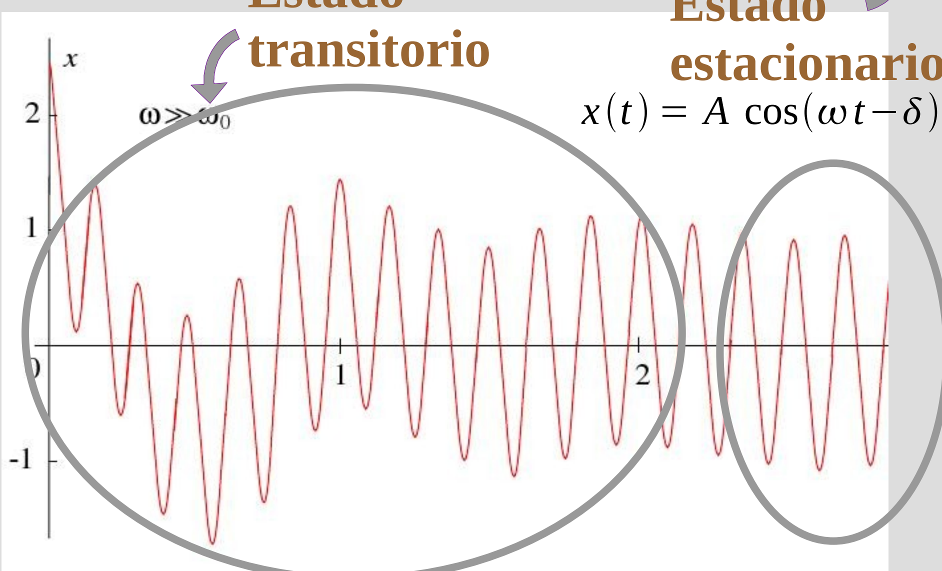
+



Estado transitorio

Estado estacionario

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$



- El estado transitorio es muy complejo.
- Transcurrido un tiempo $t \approx 5\tau$ el estado transitorio desaparece y queda sólo el MAS estacionario.
- La frecuencia del MAS estacionario es la misma que la de la fuerza oscilante.

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta) + 2\beta[-A\omega\sin(\omega t - \delta)] + \omega_0^2[A\cos(\omega t - \delta)] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$
$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta) + 2\beta[-A\omega\sin(\omega t - \delta)] + \omega_0^2[A\cos(\omega t - \delta)] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\omega t - \delta) &= \cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin(\delta)\\ \sin(\omega t - \delta) &= \sin(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t)\sin(\delta)\end{aligned}}$$

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$
$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta) + 2\beta[-A\omega\sin(\omega t - \delta)] + \omega_0^2[A\cos(\omega t - \delta)] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

usando:

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin(\delta)$$
$$\sin(\omega t - \delta) = \sin(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t)\sin(\delta)$$

se llega a:

$$\sin(\omega t)\,A\left\{(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\delta) - 2\beta\omega\cos\delta\right\} + \cos(\omega t)\left\{A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\delta) + 2A\beta\omega\sin(\delta) - \frac{F_0}{m}\right\} = 0$$

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$
$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$
$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t-\delta) + 2\beta[-A\omega\sin(\omega t-\delta)] + \omega_0^2[A\cos(\omega t-\delta)] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

usando:

$$\cos(\omega t-\delta) = \cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin(\delta)$$
$$\sin(\omega t-\delta) = \sin(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t)\sin(\delta)$$

se llega a:

$$\sin(\omega t)A\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\delta) - 2\beta\omega\cos\delta\right\} + \cos(\omega t)\left\{A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\delta) + 2A\beta\omega\sin(\delta) - \frac{F_0}{m}\right\} = 0$$

Para poder cumplir esta ecuación en todo tiempo, lo que aparece entre corchetes debe ser nulo

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t-\delta) + 2\beta[-A\omega\sin(\omega t-\delta)] + \omega_0^2[A\cos(\omega t-\delta)] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

usando:

$$\cos(\omega t-\delta)=\cos(\omega t)\cos(\delta)+\sin(\omega t)\sin(\delta)$$

$$\sin(\omega t-\delta)=\sin(\omega t)\cos(\delta)-\cos(\omega t)\sin(\delta)$$

se llega a:

$$\sin(\omega t)A\left\{(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\delta)-2\beta\omega\cos\delta\right\} + \cos(\omega t)\left\{A(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\delta)+2A\beta\omega\sin(\delta)-\frac{F_0}{m}\right\} = 0$$

$$\boxed{\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

Fase inicial del mov.

es el desfase entre F y x

Para poder cumplir esta ecuación en todo tiempo, lo que aparece entre corchetes debe ser nulo

3.2 Solución de la ecuación diferencial

La solución estacionaria del movimiento es: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$

Encontramos A y δ sustituyendo en la ec. diferencial.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t - \delta) + 2\beta[-A\omega\sin(\omega t - \delta)] + \omega_0^2[A\cos(\omega t - \delta)] = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

usando:

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin(\delta)$$

$$\sin(\omega t - \delta) = \sin(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t)\sin(\delta)$$

se llega a:

$$\sin(\omega t)\,A\left\{(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\delta) - 2\beta\omega\cos\delta\right\} + \cos(\omega t)\left\{A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\delta) + 2A\beta\omega\sin(\delta) - \frac{F_0}{m}\right\} = 0$$

$$\boxed{\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Fase inicial del mov.

es el desfase entre F y x

Para poder cumplir esta ecuación en todo tiempo, lo que aparece entre corchetes debe ser nulo

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

Amplitud del mov.

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS.
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

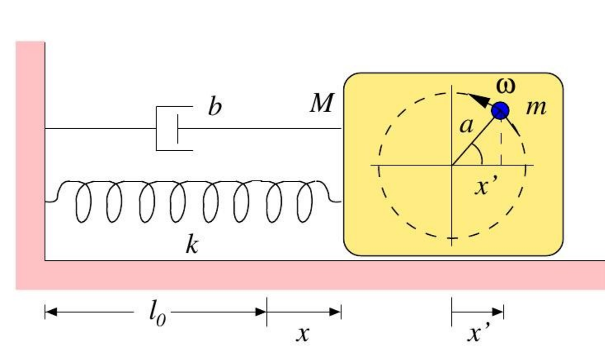
3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

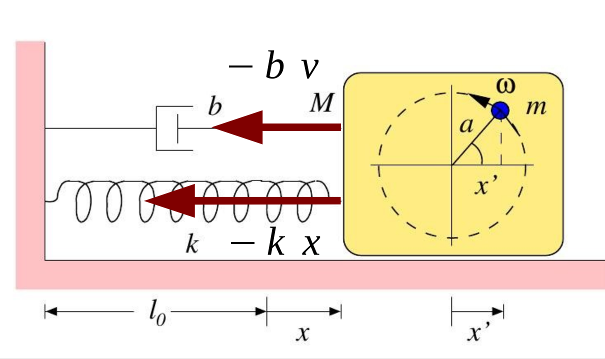
Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

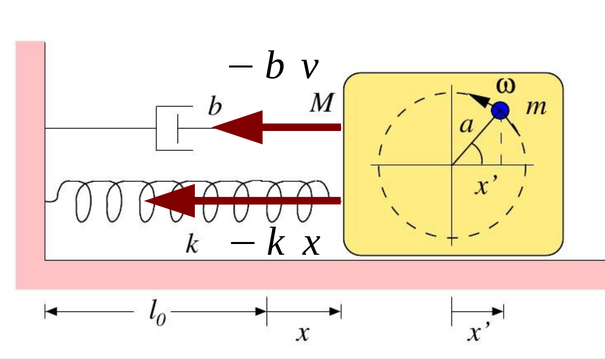
Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

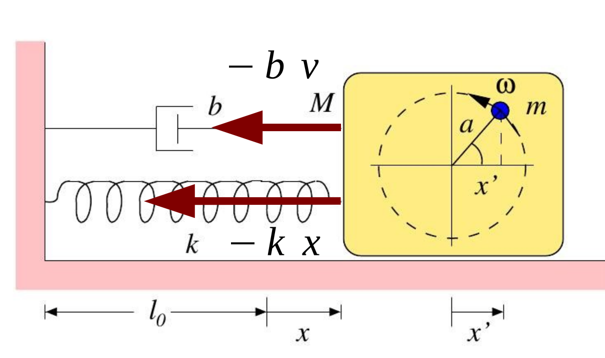
2^{da} ley de Newton

$$F = m \frac{d^2}{dt^2}\left(x + x' \right)$$

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurrre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

2[da] ley de Newton

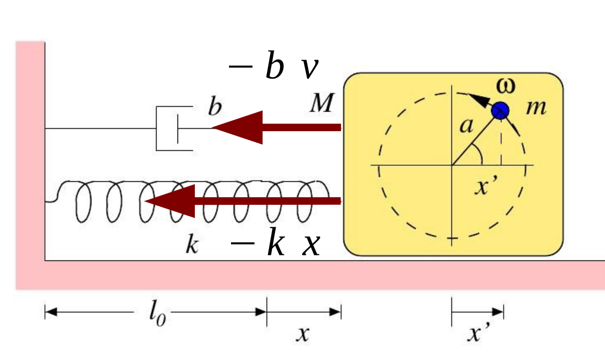
$$F = m\,\frac{d^2}{dt^2}\left(x + x'\right)$$

$$F = m\,\ddot{x} + m\,\frac{d^2}{dt^2}\left(a\cos(\omega t)\right)$$

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

2da ley de Newton

$$F = m\frac{d^2}{dt^2}(x + x')$$

$$F = m\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(a\cos(\omega t))$$

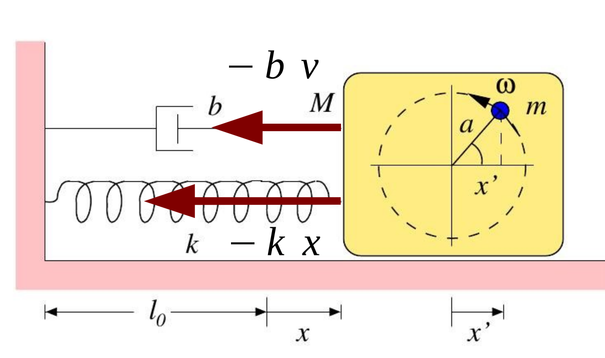
$$\boxed{F = m\ddot{x} - m a\omega^2\cos(\omega t)}$$

Fuerza de la máquina sobre m

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

2da ley de Newton

$$F = m\frac{d^2}{dt^2}(x + x')$$

$$F = m\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(a\cos(\omega t)) \Rightarrow \boxed{F = m\ddot{x} - m a\omega^2\cos(\omega t)}$$

Fuerza de la máquina sobre m

Por la 3ra ley de Newton, sobre M-m actúa una fuerza:

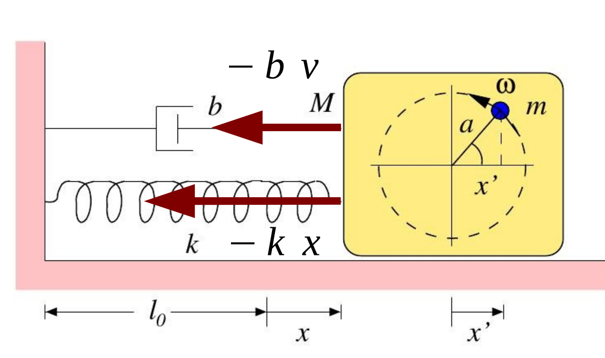
$$\boxed{-F = -m\ddot{x} + m a\omega^2\cos(\omega t)}$$

Fuerza de m ***sobre*** M-m

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

2da ley de Newton

$$F = m\,\frac{d^2}{dt^2}(x + x')$$

$$F = m\,\ddot{x} + m\,\frac{d^2}{dt^2}(a\cos(\omega t))$$

$$\boxed{F = m\,\ddot{x} - m\,a\,\omega^2\cos(\omega t)}$$

Fuerza de la máquina sobre m

Por la 3ra ley de Newton, sobre M-m actúa una fuerza:

$$\boxed{-F = -\,m\,\ddot{x} + m\,a\,\omega^2\cos(\omega t)}$$

Fuerza de m sobre M-m

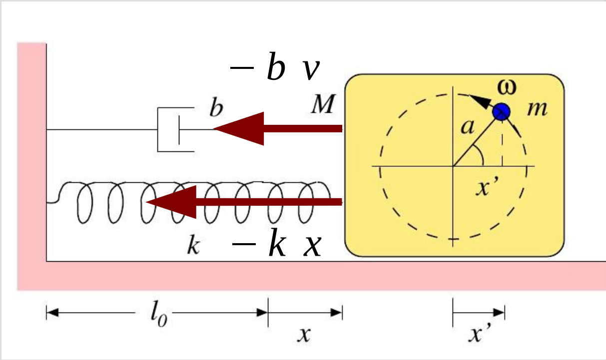
Y finalmente, la ec. diferencial del movimiento de M-m es:

$$\sum F = -\,k\,x - b\,\dot{x} + [-\,m\,\ddot{x} + m\,a\,\omega^2\cos(\omega t)] = (M-m)\,\ddot{x}$$

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurrre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

2da ley de Newton

$$F = m\frac{d^2}{dt^2}(x + x')$$

$$F = m\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(a\cos(\omega t))$$

$$\boxed{F = m\ddot{x} - m a \omega^2 \cos(\omega t)}$$

Fuerza de la máquina sobre m

Por la 3ra ley de Newton, sobre M-m actúa una fuerza:

$$\boxed{-F = -m\ddot{x} + m a \omega^2 \cos(\omega t)}$$

Fuerza de m ***sobre*** M-m

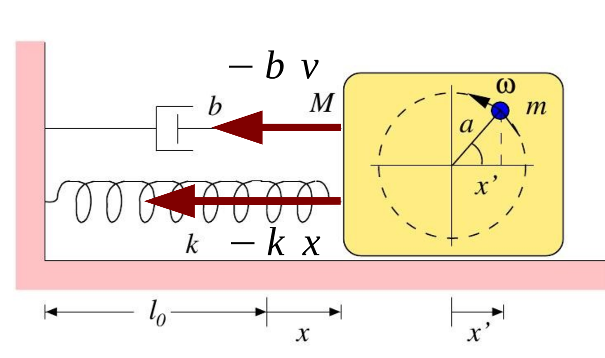
Y finalmente, la ec. diferencial del movimiento de M-m es:

$$\sum F = -k\ x - b\ \dot{x} + [-\cancel{m\ddot{x}} + m a \omega^2 \cos(\omega t)] = (M - \cancel{m})\ddot{x}$$

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ocurrre cuando en una máquina hay algún elemento que gira y **no está equlibrado** (un motor, ruedas del coche, ...).

Es equivalente a una masa m *que realiza un MCU*



La máquina, de masa total M, realiza una fuerza **F** sobre m:

2[da] ley de Newton

$$F = m\frac{d^2}{dt^2}(x + x')$$

$$F = m\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(a\cos(\omega t)) \Rightarrow \boxed{F = m\ddot{x} - m a\omega^2\cos(\omega t)}$$

***Fuerza de la máquina sobre** m*

Por la 3[ra] ley de Newton, sobre M-m actúa una fuerza: $\boxed{-F = -m\ddot{x} + m a\omega^2\cos(\omega t)}$

***Fuerza de** m **sobre** M-m*

Y finalmente, la ec. diferencial del movimiento de M-m es:

$$\sum F = -k\ x - b\ \dot{x} + [-\cancel{m}\ddot{x} + m a\omega^2\cos(\omega t)] = (M - \cancel{m})\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{m a\omega^2}{M}\cos(\omega t)}$$

- *Es una oscilación forzada con* $\boxed{F_0 = m a\omega^2}$
- M *es la masa total de la máquina*
- m *es la masa del rotor descentrado*

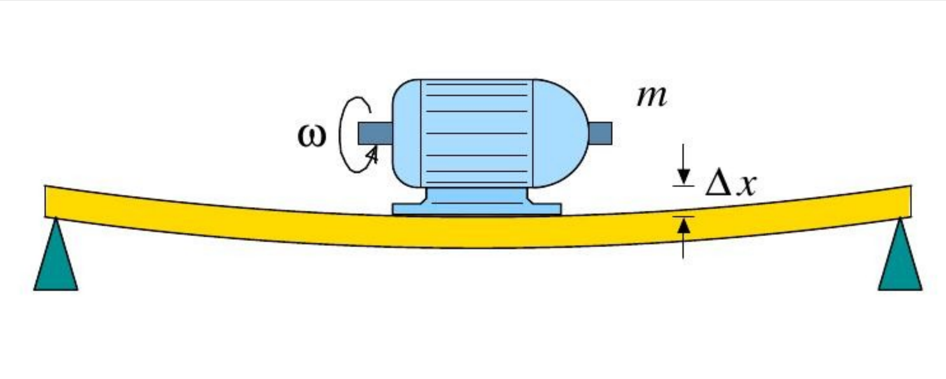
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ejercicio (prob. 27): después de colocar un motor eléctrico de masa m=18kg sobre una viga horizontal, ésta se flexiona un Δx=6mm. Determinar:

a) Velocidad angular (en rpm) que debemos evitar para que el sistema no entre en resonancia.

b) Si el rotor del motor tiene una masa M=8kg y está descentrado una distancia a=0.5cm, ¿qué amplitud tendrán las oscilaciones de la viga cuando el motor gire a 350 rpm? (suponer $\beta << \omega_0$)



Solución:

$\omega = 386\, rpm \qquad A = 1.03\, cm$

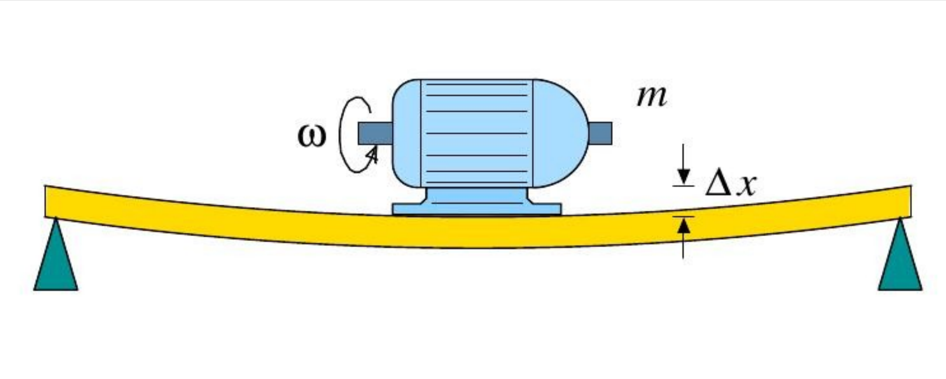
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.3 Ejemplo: 'Máquinas giratorias'

Ejercicio (prob. 27): después de colocar un motor eléctrico de masa m=18kg sobre una viga horizontal, ésta se flexiona un Δx=6mm. Determinar:

a) Velocidad angular (en rpm) que debemos evitar para que el sistema no entre en resonancia.

b) Si el rotor del motor tiene una masa M=8kg y está descentrado una distancia a=0.5cm, ¿qué amplitud tendrán las oscilaciones de la viga cuando el motor gire a 350 rpm? (suponer $\beta \ll \omega_0$)



$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$F_0 = m a \omega^2$$

Solución:

$\omega = 386\, rpm \qquad A = 1.03\, cm$

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS. (masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

$$\boxed{A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

- Para $\omega \rightarrow \infty$ tiende a cero

$$\boxed{A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

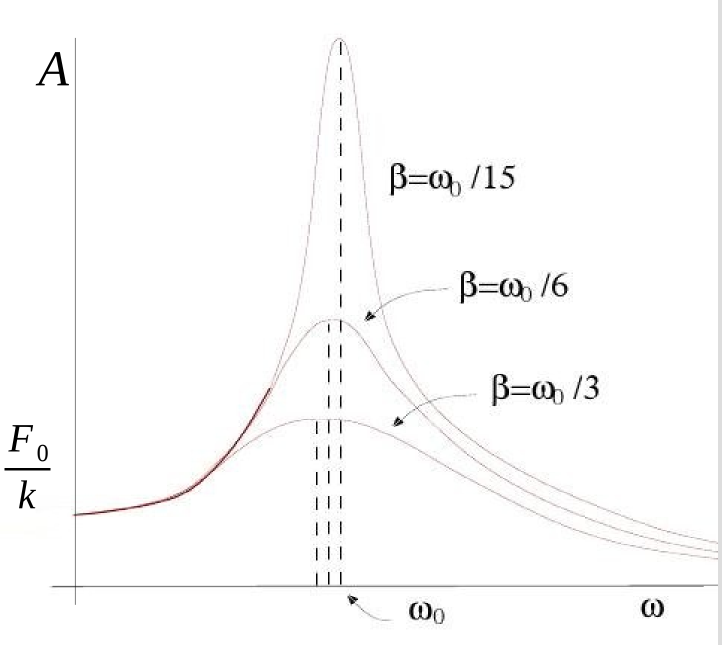
- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

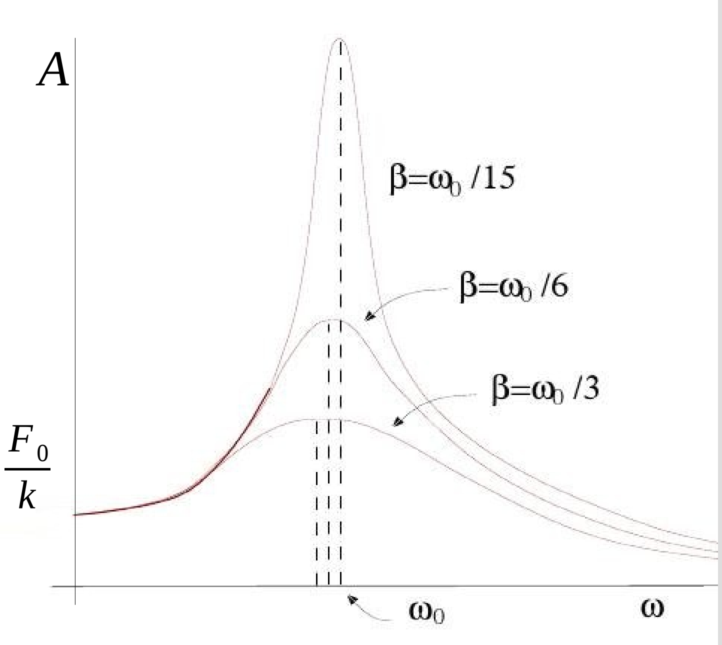
3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

Buscamos la ω que hace máxima A:



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

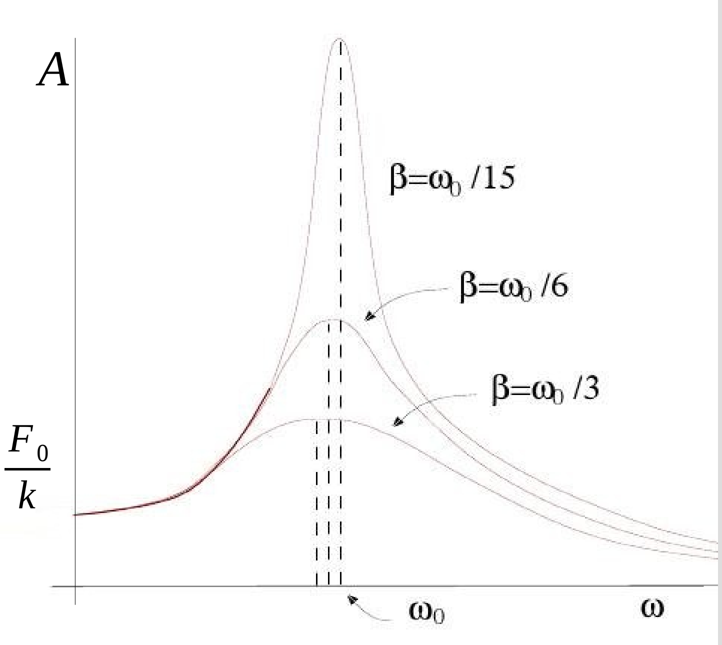
Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

Buscamos la ω que hace máxima A:

$$D^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$



3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

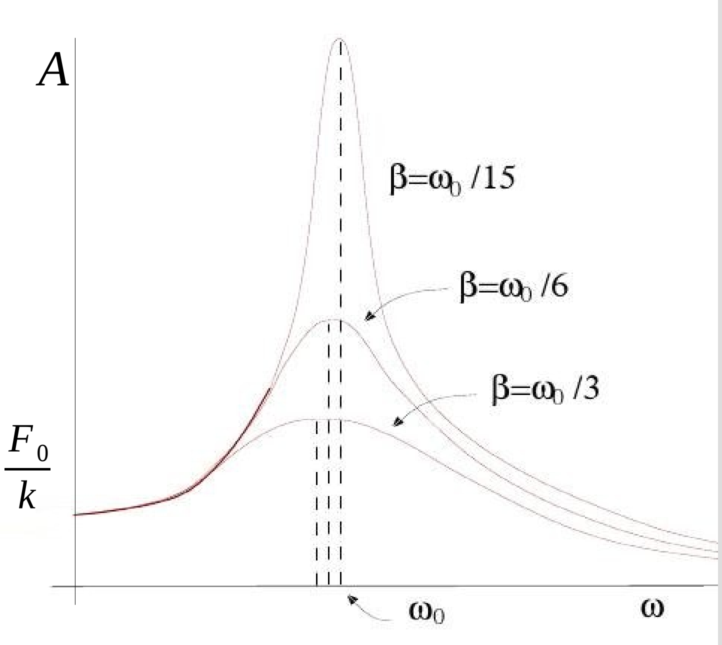
- Para $\omega \rightarrow \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \rightarrow 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

Buscamos la ω que hace máxima A:

$$D^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

$$\frac{dD^2}{d\omega} = -2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0$$



3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

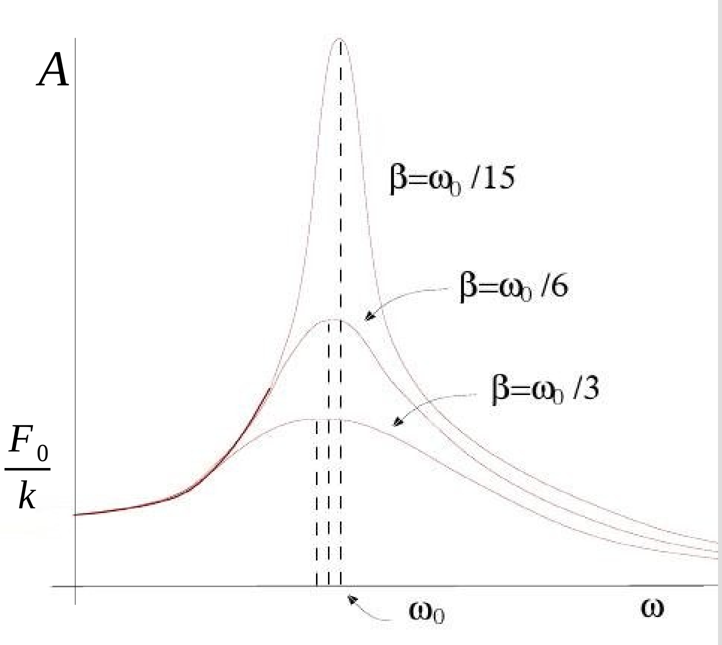
- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

Buscamos la ω que hace máxima A:

$$D^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

$$\frac{dD^2}{d\omega} = -2(\omega_0^2 - \omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

$$-(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta^2 = 0$$



3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

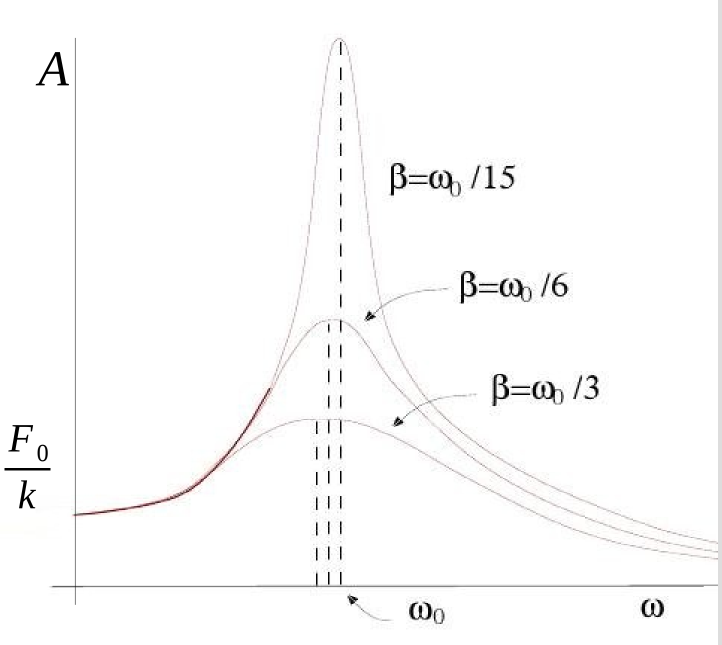
Buscamos la ω que hace máxima A:

$$D^2 = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

$$\frac{dD^2}{d\omega} = -2(\omega_0^2-\omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

$$-(\omega_0^2-\omega^2) + 2\beta^2 = 0$$

$$\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$



3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Analicemos la ecuación que nos da la amplitud del movimiento

- Para $\omega \to \infty$ tiende a cero
- Para $\omega \to 0$ tiende a $F_0/m\omega_0^2 = F_0/k$
- Tiene que existir un máximo cuando el denominador (o su cuadrado) se hace mínimo
- Si β disminuye, el máximo debe crecer

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

Buscamos la ω que hace máxima A:

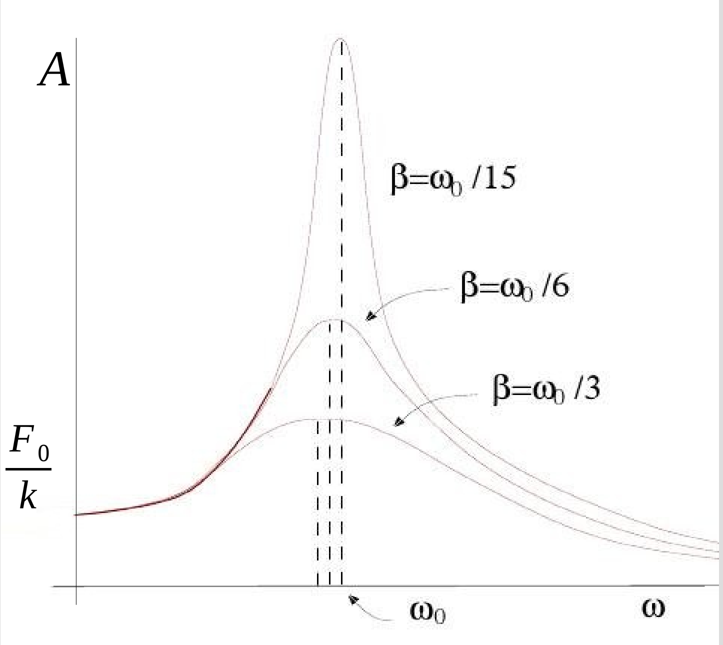
$$D^2 = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

$$\frac{dD^2}{d\omega} = -2(\omega_0^2-\omega^2)2\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

$$-(\omega_0^2-\omega^2) + 2\beta^2 = 0$$

$$\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

- Frecuencia para la que A es máxima.
  (resonancia en amplitud)
- Si $\beta \ll \omega_0 \to \omega_{max} \approx \omega_0$



UPC
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

ϵ

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\ A\omega\ \sin(\omega t - \delta)$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

Velocidad del MAF

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - \underbrace{(\delta - \pi/2)}_{\epsilon})$$

siendo

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

Velocidad del MAF

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

ϵ

siendo

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

- ϵ es el desfase entre F y v

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

Velocidad del MAF

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

ϵ

siendo

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

- ϵ es el desfase entre F y v

Ver que además se cumple:

$$\tan(\epsilon) = \tan\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

Velocidad del MAF

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - \underbrace{(\delta - \pi/2)}_{\epsilon})$$

siendo

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

- ϵ es el desfase entre F y v

Ver que además se cumple:

$$\tan(\epsilon) = \tan\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\delta)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

ϵ

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

siendo

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

- ϵ es el desfase entre F y v

Velocidad del MAF

Ver que además se cumple:

$$\tan(\epsilon) = \tan\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\delta)}$$

$$\boxed{\tan(\epsilon) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

ϵ

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

siendo

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

- ϵ es el desfase entre F y v

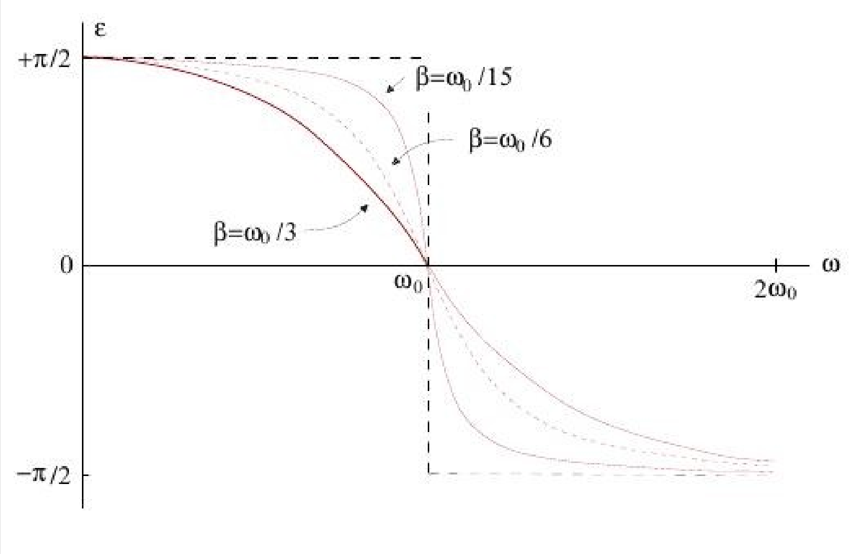
Velocidad del MAF

Ver que además se cumple:

$$\tan(\epsilon) = \tan\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\delta)}$$

$$\boxed{\tan(\epsilon) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Para la velocidad del MAF tenemos:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t - \delta)$$

$$-\sin(a) = +\cos(a + \pi/2)$$

$$-\sin(\omega t - \delta) = +\cos(\omega t - (\delta - \pi/2))$$

ϵ

siendo

$$\boxed{\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{v(t) = A\omega\cos(\omega t - \epsilon)}$$

Velocidad del MAF

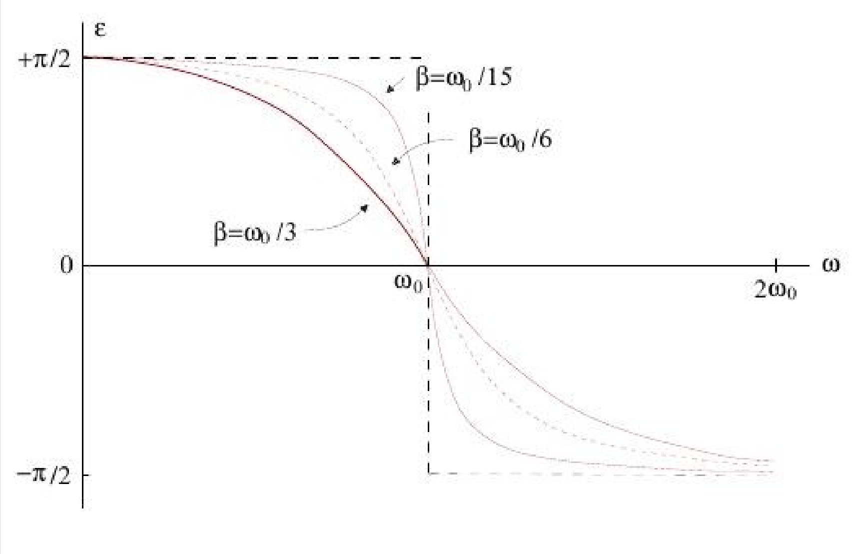
- ϵ es el desfase entre F y v
- ϵ es cero si $\omega = \omega_0$

Ver que además se cumple:

$$\tan(\epsilon) = \tan\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\delta)}$$

$$\boxed{\tan(\epsilon) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$E = \frac{1}{2} m v_0^2$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0 v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}}$$

Definimos: ***Impedancia del oscilador***

$$\boxed{Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0 v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}}$$

Definimos: ***Impedancia del oscilador***

$$\boxed{Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}} \qquad \boxed{Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}}$$

ejercicio: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{b}{m}$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}}$$

$$\boxed{v_0 = \frac{F_0}{Z}}$$

Definimos: ***Impedancia del oscilador***

$$\boxed{Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}}$$

$$\boxed{Z = \sqrt{\left(m\omega^2-\frac{k}{\omega}\right)^2+b^2}}$$

ejercicio: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{b}{m}$

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}}$$

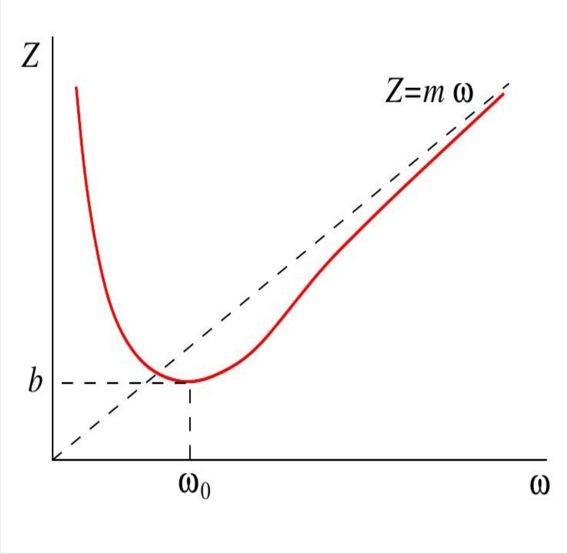
$$\boxed{v_0 = \frac{F_0}{Z}}$$

Definimos: ***Impedancia del oscilador***

$$\boxed{Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}}$$

$$\boxed{Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}}$$

ejercicio: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{b}{m}$



3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2$$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t) = A\omega \cos(\omega t - \epsilon)}$$

v_0

$$v_0 = A\omega = \frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}} \qquad \boxed{v_0 = \frac{F_0}{Z}}$$

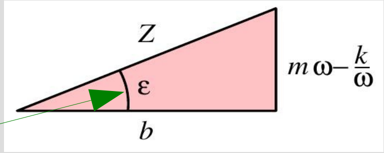
Definimos: ***Impedancia del oscilador***

$$\boxed{Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}} \qquad \boxed{Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}}$$

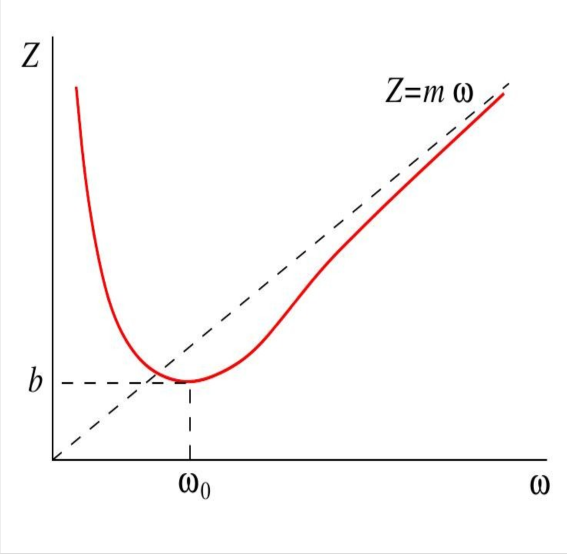
ejercicio: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\beta = \frac{b}{m}$

Z Tiene un mínimo para $\omega = \omega_0$ $(Z_{min} = b)$

Además se cumple:



ejercicio



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

$E=\frac{1}{2}m v_0^2$

La energía del MAF se puede analizar a partir de la v^2_{max} (v^2_0)

$$\boxed{v(t)=A\omega\cos(\omega t-\epsilon)}$$

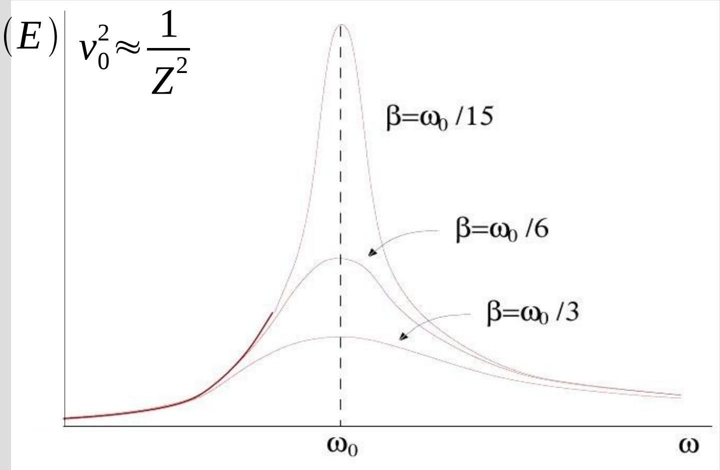
v_0

$$v_0=A\omega=\frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$v_0=\frac{F_0}{m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}}$$

$$\boxed{v_0=\frac{F_0}{Z}}$$

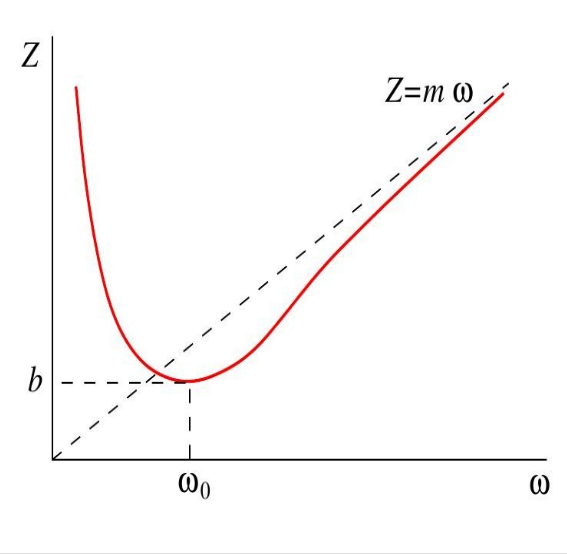
v_0 es máximo cuando $\omega=\omega_0$



Definimos: ***Impedancia del oscilador***

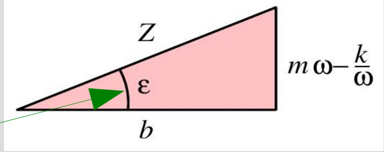
$$\boxed{Z=m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}}\qquad\boxed{Z=\sqrt{\left(m\omega^2-\frac{k}{\omega}\right)^2+b^2}}$$

ejercicio: $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, $2\beta=\frac{b}{m}$



Z Tiene un mínimo para $\omega=\omega_0$ $(Z_{min}=b)$

Además se cumple:



ejercicio

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

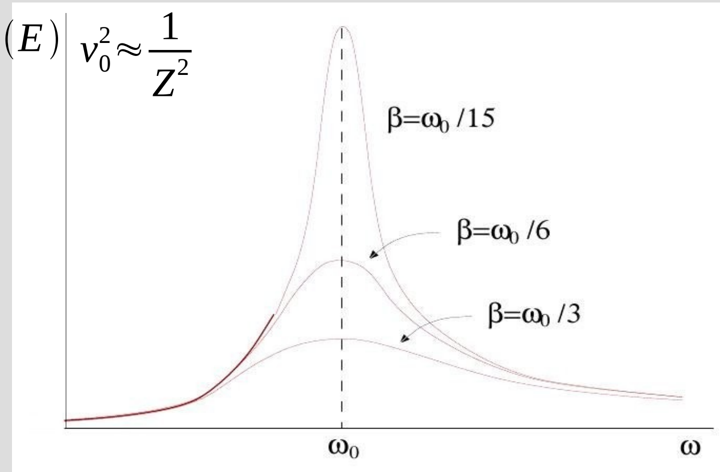
$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



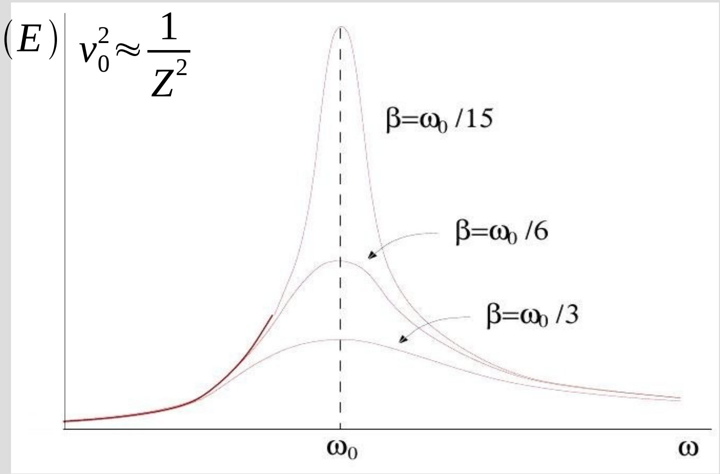
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$



En resonancia se cumple:

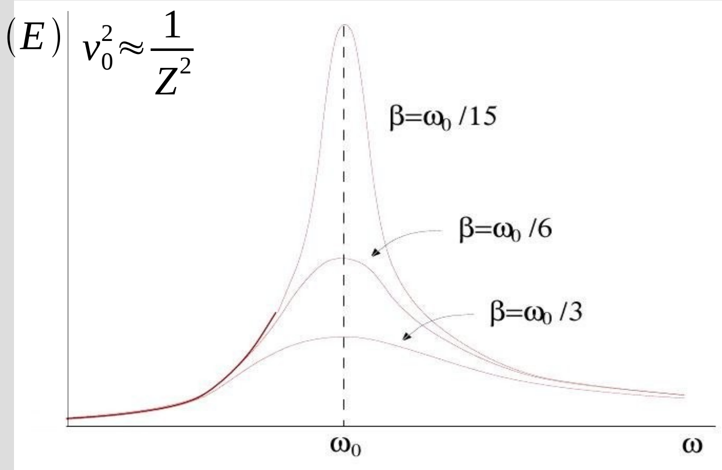
$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

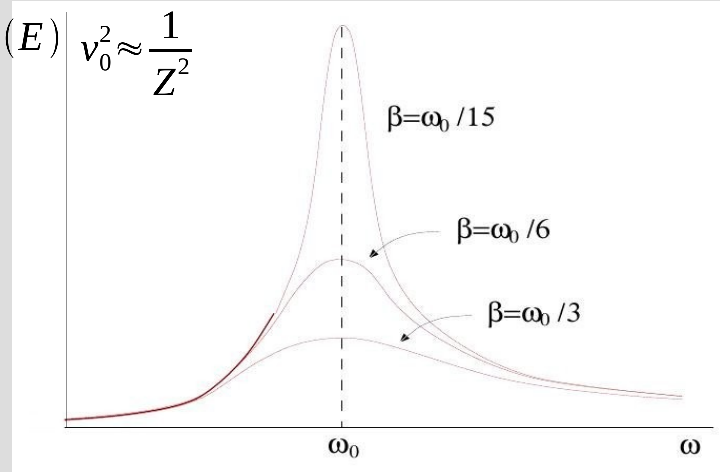
$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

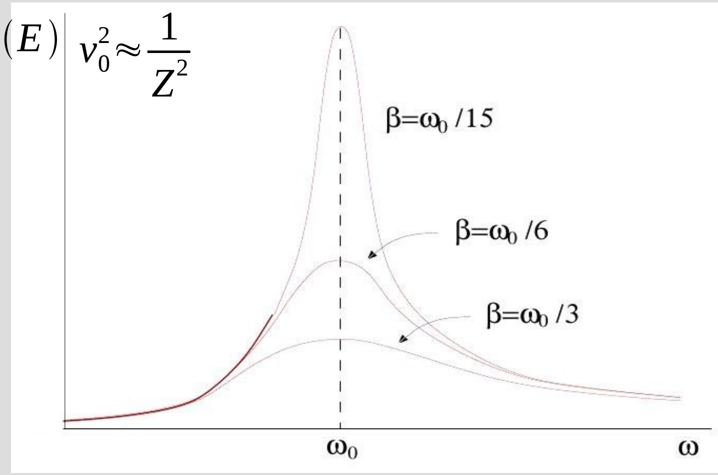
$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

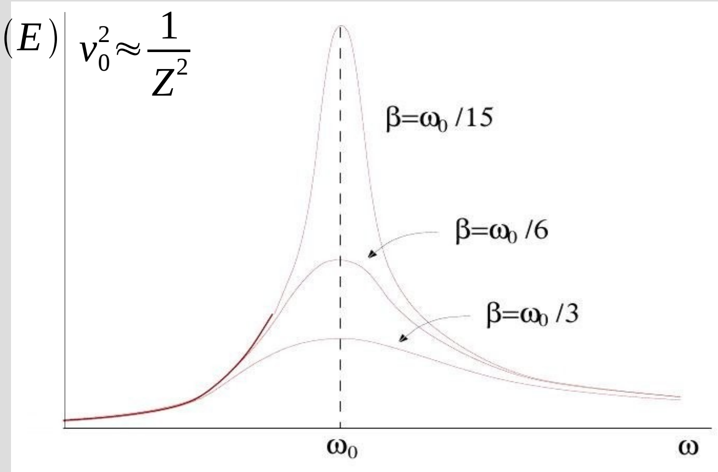
$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora } = \omega_0}$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

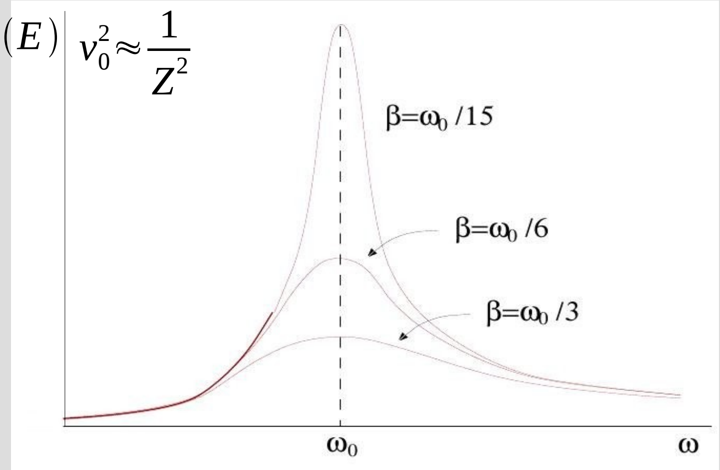
$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m 2\beta = b}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

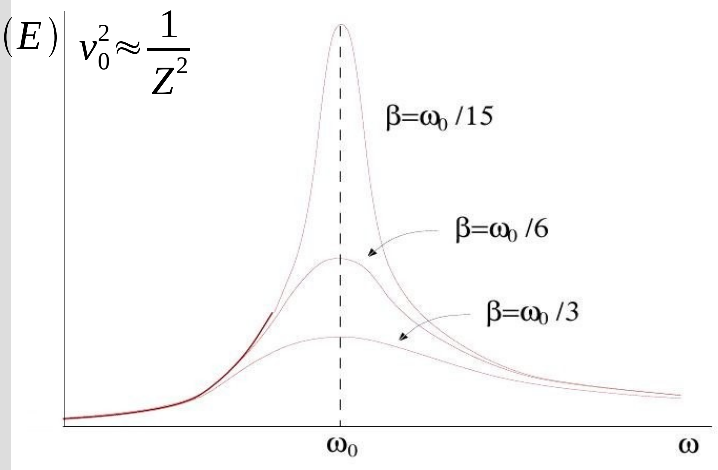
$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

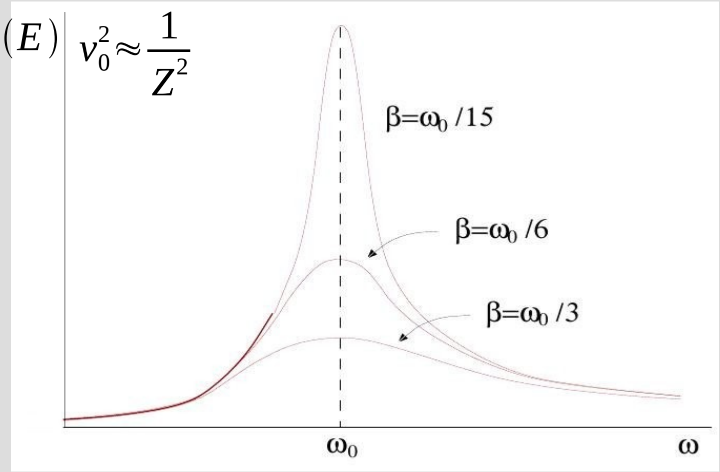
$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\epsilon = 0}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía



$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$

En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\epsilon = 0}$$

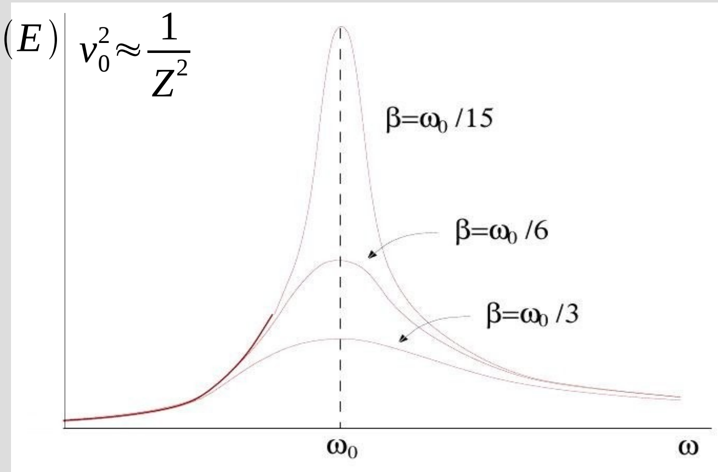
$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t - \epsilon)$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \qquad \boxed{\omega = \omega_0} \qquad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \qquad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\epsilon = 0}$$

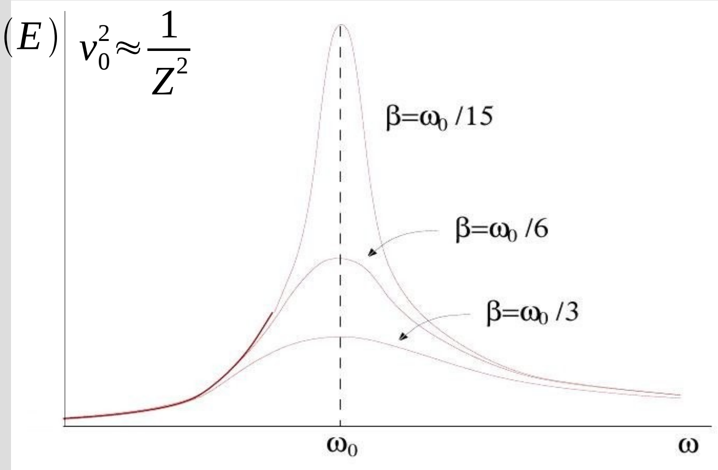
$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t - \epsilon) \qquad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

ω de la fuerza impulsora = ω_0



En resonancia se cumple:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\epsilon = 0}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon)$$

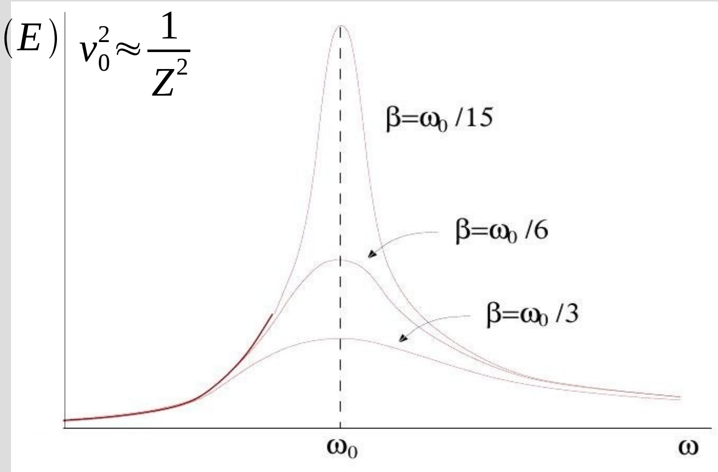
$$\boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\epsilon = 0}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t - \epsilon)$$

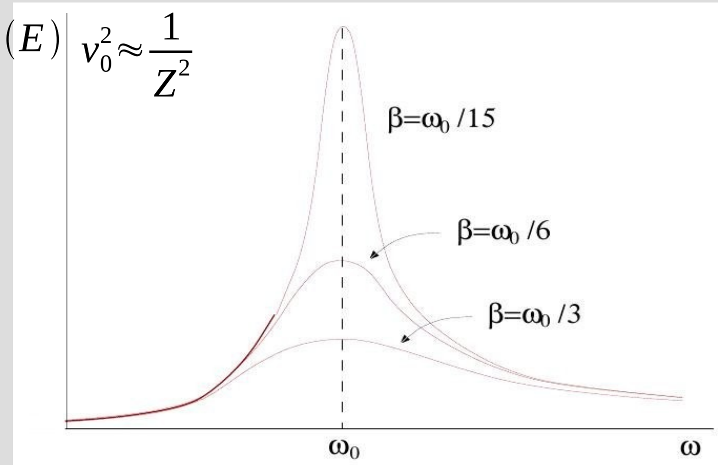
$$\boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \qquad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}} \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$x = A\cos(\omega t-\delta)$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \qquad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\epsilon = \delta-\frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\epsilon = 0}$$

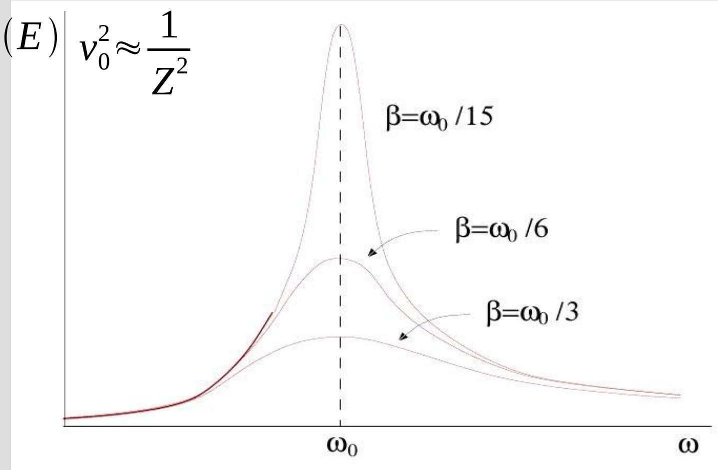
$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \qquad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \quad\rightarrow\quad \boxed{\omega = \omega_0} \quad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}} \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \quad\rightarrow\quad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$x = A\cos(\omega t-\delta) \quad\rightarrow\quad \boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\epsilon = \delta-\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \boxed{\epsilon = 0}$$

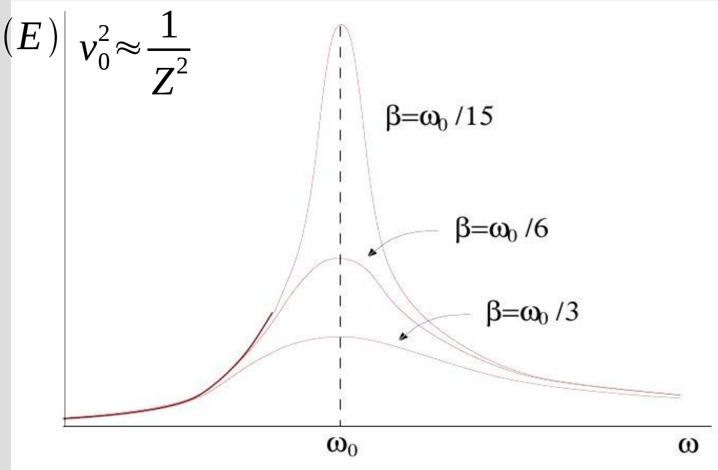
$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \quad\rightarrow\quad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \quad\rightarrow\quad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}} \quad\leftarrow\quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \quad\rightarrow\quad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)} \quad\leftarrow\quad x = A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \boxed{\epsilon = 0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

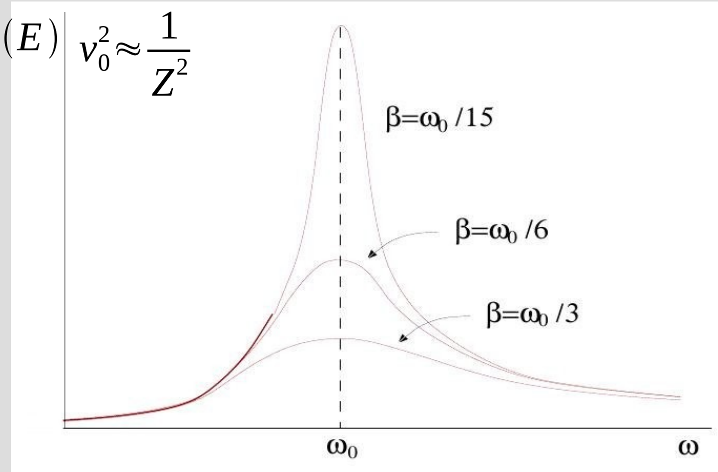
$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t - \epsilon) \quad\rightarrow\quad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{A=\frac{F_0}{m2\beta\omega_0}=\frac{F_0}{b\omega_0}} \quad \leftarrow \quad A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

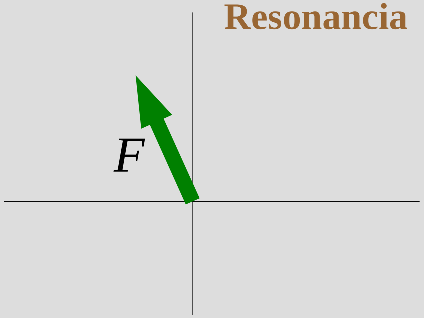
$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)} \quad \leftarrow \quad x = A\cos(\omega t-\delta)$$

$$\epsilon = \delta-\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\epsilon = 0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$



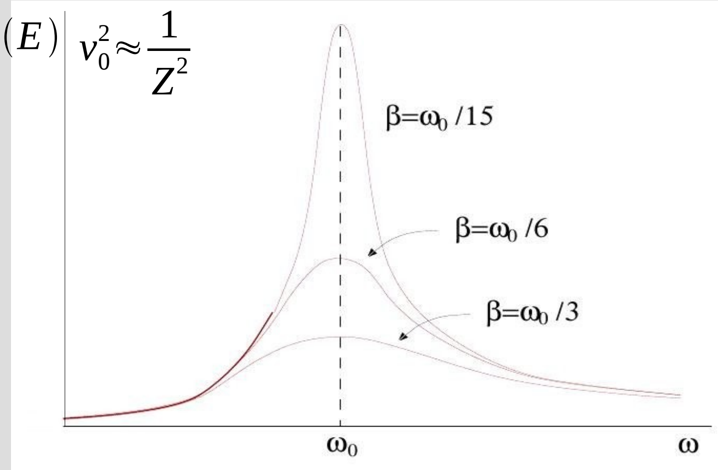
Representación fasorial

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}}$$

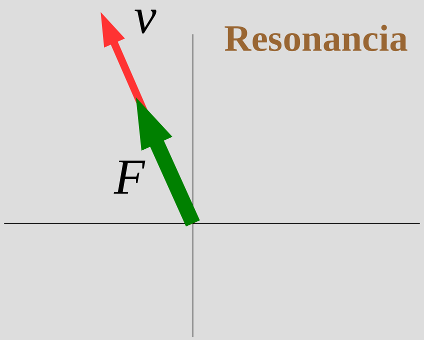
$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \quad \rightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$x = A\cos(\omega t-\delta) \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\epsilon = \delta-\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\epsilon = 0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$



Representación fasorial

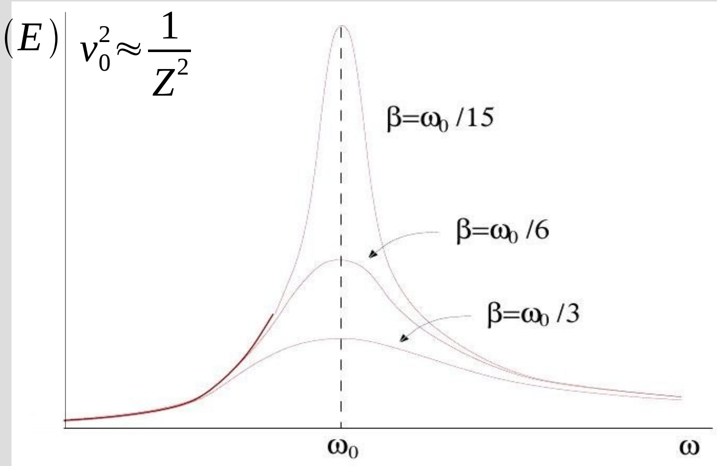
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \qquad \boxed{\omega = \omega_0} \qquad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}} \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

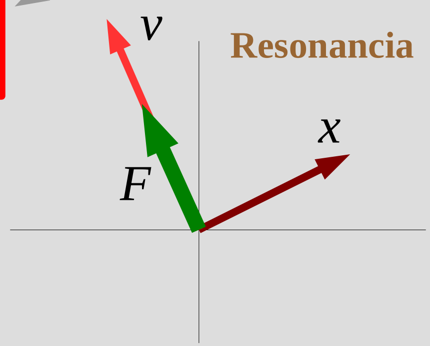
$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \qquad \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$x = A\cos(\omega t-\delta) \qquad \boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\epsilon = \delta-\frac{\pi}{2} \qquad \boxed{\epsilon = 0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \qquad \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

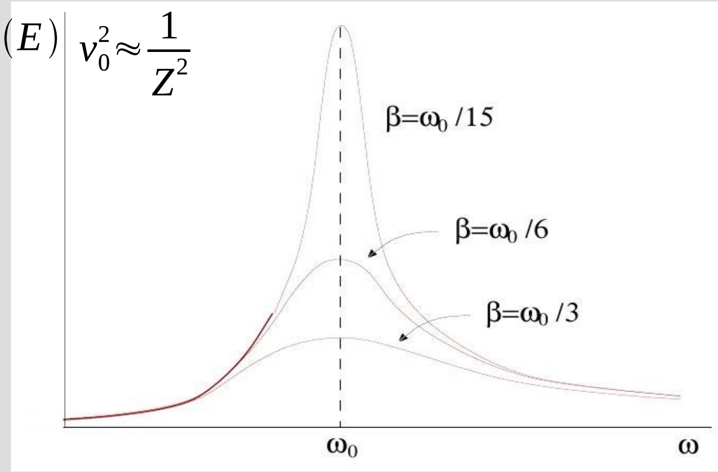


3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora } = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty$$

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$x = A\cos(\omega t - \delta)$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2}$$

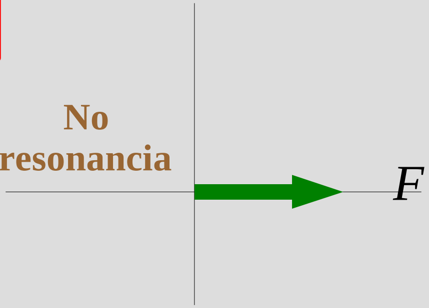
$$\boxed{\epsilon = 0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t - \epsilon)$$

$$\boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

No resonancia

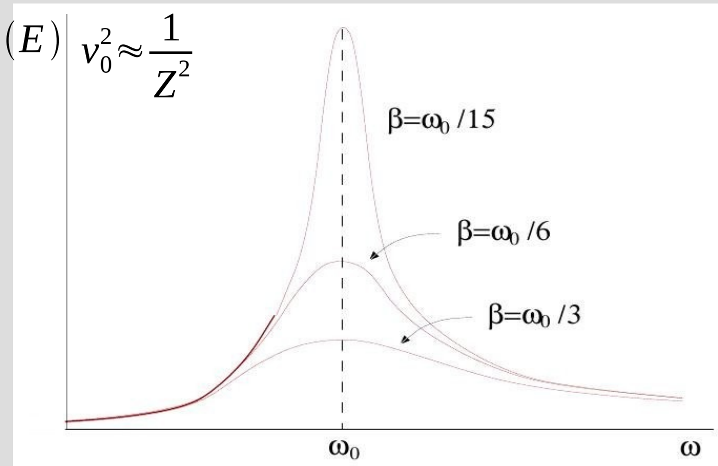


3.4 Resonancia en amplitud y energía.

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \quad\rightarrow\quad \boxed{\omega=\omega_0} \quad \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{A=\frac{F_0}{m2\beta\omega_0}=\frac{F_0}{b\omega_0}} \quad\leftarrow\quad A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

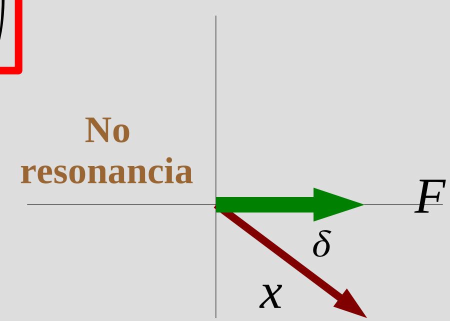
$$\tan(\delta)=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=\infty \quad\rightarrow\quad \boxed{\delta=\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{x=\frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)} \quad\leftarrow\quad x = A\cos(\omega t-\delta)$$

$$\epsilon=\delta-\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad \boxed{\epsilon=0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

$$v=\frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \quad\rightarrow\quad \boxed{v=\frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

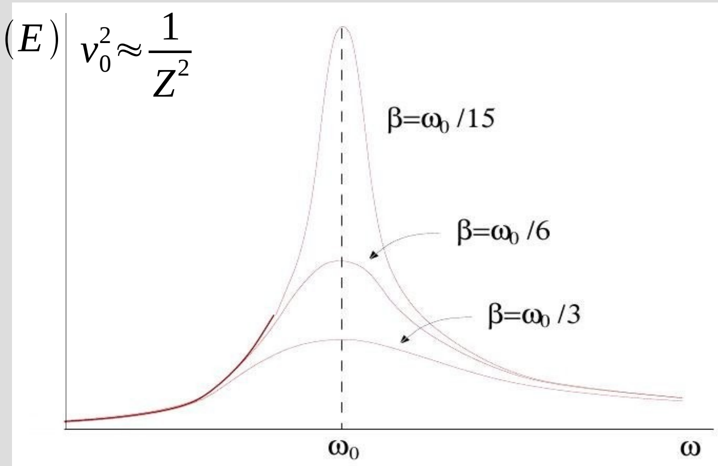


Representación fasorial

Resonancia *(en energía)*

Decimos que un oscilador armónico forzado está en resonancia si oscila a la frecuencia para la que éste tiene la máxima energía

$$\boxed{\omega \text{ de la fuerza impulsora} = \omega_0}$$



En resonancia se cumple:

$$Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega}+4\beta^2} \rightarrow \boxed{Z = m2\beta = b}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{b\omega_0}} \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \infty \rightarrow \boxed{\delta = \frac{\pi}{2}}$$

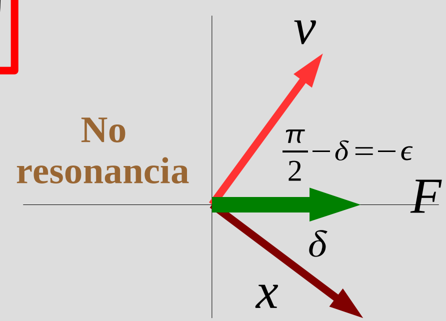
$$\boxed{x = \frac{F_0}{b\omega_0}\cos\left(\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)} \leftarrow x = A\cos(\omega t-\delta)$$

$$\epsilon = \delta-\frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{\epsilon = 0}$$

$$\boxed{F = F_0\cos(\omega_0 t)}$$

$$v = \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon) \rightarrow \boxed{v = \frac{F_0}{b}\cos(\omega_0 t)}$$

No resonancia



Representación fasorial

Ejercicios

Ejercicio: un objeto de masa m=2kg oscila sujeto a un muelle de constante k=800 N/m y con un parámetro de amortiguamiento β=0.1 s^{-1}. Si aplicamos al sistema una fuerza oscilante F(t)=25cos(10t) (en unidades SI.), calcular:

La amplitud, velocidad máxima, frecuencia de resonancia y desfase entre x y F:

Solución:

$A=0.042m$

$v_0=0.42\ m/s$

$\omega_{RES} = 20\ rad/s$

$\delta=6.67 \cdot 10^{-3}\ rad$

$$F = F_0 \cos(\omega t) \qquad x = A \cos(\omega t - \delta)$$

$$v = \omega A \cos(\omega t - \epsilon) \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \qquad \tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$v_0 = \omega A = \frac{F_0}{Z}$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2 b}{2Z^2} \qquad Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}$$

$$\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \qquad Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS.
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia suministrada al oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La F_{roz} disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La* $\boldsymbol{F}_{roz}$ *disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

Potencia suministrada al oscilador:

$$P_s = F \cdot v$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La* $\boldsymbol{F}_{roz}$ *disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

Potencia suministrada al oscilador:

$$P_s = F\cdot v = F_0 \cos(\omega t)\cdot \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon)$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La* $\boldsymbol{F}_{roz}$ *disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

Potencia suministrada al oscilador:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$P_s = F \cdot v = F_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{F_0}{Z} \cos(\omega t - \epsilon)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z} \left(\cos(\epsilon)\cos^2(\omega t) + \sin(\epsilon)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La* F_{roz} *disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

Potencia suministrada al oscilador:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$P_s = F\cdot v = F_0\cos(\omega t)\cdot\frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon)$$

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos(\epsilon)\cos^2(\omega t)+\sin(\epsilon)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos(\epsilon)\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}+\sin(\epsilon)\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right)$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La $\boldsymbol{F}_{roz}$ disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

Potencia suministrada al oscilador:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$P_s = F\cdot v = F_0\cos(\omega t)\cdot\frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}\\ \sin(2a)=2\,\sin(a)\,\cos(a)\end{array}}$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos(\epsilon)\cos^2(\omega t) + \sin(\epsilon)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos(\epsilon)\,\frac{1+\cos(2\omega t)}{2} + \sin(\epsilon)\,\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{2Z}\left(\cos(\epsilon) + \cos(\epsilon)\cos(2\omega t) + \sin(\epsilon)\sin(2\omega t)\right)$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

- *En el estado estacionario la energía del oscilador es cte.*
- *La $\boldsymbol{F}_{roz}$ disipa toda la potencia de la fuerza impulsora*

Potencia suministrada al oscilador:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$P_s = F\cdot v = F_0\cos(\omega t)\cdot \frac{F_0}{Z}\cos(\omega t-\epsilon)$$

$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos(\epsilon)\cos^2(\omega t) + \sin(\epsilon)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos(\epsilon)\,\frac{1+\cos(2\omega t)}{2} + \sin(\epsilon)\,\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\right)$$

$$P_s = \frac{F_0^2}{2Z}\left(\cos(\epsilon) + \cos(\epsilon)\cos(2\omega t) + \sin(\epsilon)\sin(2\omega t)\right)$$

Potencia suministrada al oscilador por unidad de tiempo

$$\boxed{P_s = \frac{F_0^2}{2Z}\left(\cos(\epsilon) + \cos(2\omega t-\epsilon)\right)}$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

La magnitud realmente interesante es la

Potencia promedio *suministrada al oscilador:*

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

La magnitud realmente interesante es la
Potencia promedio *suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z} \left(\cos(\epsilon) + \cos(2\omega t - \epsilon) \right) dt$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

La magnitud realmente interesante es la
Potencia promedio *suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z} \left(\cos(\epsilon) + \cos(2\omega t - \epsilon) \right) dt$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \frac{F_0^2}{2Z} \left[\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\epsilon)\, dt + \int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t - \epsilon)\, dt \right]$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

La magnitud realmente interesante es la ***Potencia promedio*** *suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z}\left(\cos(\epsilon) + \cos(2\omega t - \epsilon)\right) dt$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{F_0^2}{2Z}\left[\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\epsilon)\, dt + \int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t - \epsilon)\, dt\right]$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{F_0^2 \cos(\epsilon)}{2Z}\int_0^{2\pi/\omega} dt$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

La magnitud realmente interesante es la ***Potencia promedio*** *suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z} \left(\cos(\epsilon) + \cos(2\omega t - \epsilon) \right) dt$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \frac{F_0^2}{2Z} \left[\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\epsilon)\, dt + \int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t - \epsilon)\, dt \right]$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \frac{F_0^2 \cos(\epsilon)}{2Z} \int_0^{2\pi/\omega} dt$$

$$\boxed{\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2 \cos(\epsilon)}{2Z}}$$

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

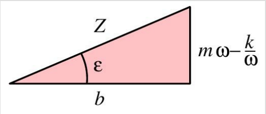
La magnitud realmente interesante es la
***Potencia promedio** suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z}\left(\cos(\epsilon)+\cos(2\omega t-\epsilon)\right)\,dt$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{F_0^2}{2Z}\left[\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\epsilon)\,dt+\int_0^{2\pi/\omega}\cos(2\omega t-\epsilon)\,dt\right]$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\,\frac{F_0^2\cos(\epsilon)}{2Z}\int_0^{2\pi/\omega} dt$$

$$\boxed{\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2\cos(\epsilon)}{2Z}}$$



$\cos(\epsilon) = b/Z$

$$\boxed{\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2\, b}{2Z^2}}$$

Potencia promedio

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

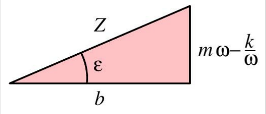
La magnitud realmente interesante es la ***Potencia promedio*** *suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z} \left(\cos(\epsilon) + \cos(2\omega t - \epsilon) \right) dt$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \frac{F_0^2}{2Z} \left[\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\epsilon)\, dt + \int_0^{2\pi/\omega} \cos(2\omega t - \epsilon)\, dt \right]$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \frac{F_0^2 \cos(\epsilon)}{2Z} \int_0^{2\pi/\omega} dt$$

$$\boxed{\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2 \cos(\epsilon)}{2Z}}$$

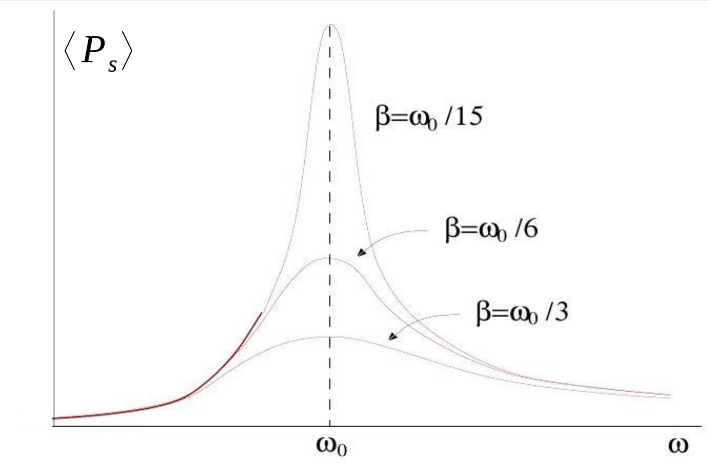


$$\cos(\epsilon) = b/Z$$

$$\boxed{\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2\, b}{2Z^2}}$$

Potencia promedio

El comportamiento de $<P_s>$ es similar al de la E



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

3.5 Potencia suministrada al oscilador.

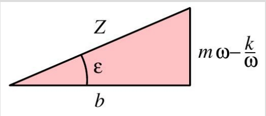
La magnitud realmente interesante es la
Potencia promedio *suministrada al oscilador:*

$$\langle P_s\rangle = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{F_0^2}{2Z}\left(\cos(\epsilon)+\cos(2\omega t-\epsilon)\right) dt$$

$$\langle P_s\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\frac{F_0^2}{2Z}\left[\int_0^{2\pi/\omega}\cos(\epsilon)\,dt+\int_0^{2\pi/\omega}\cos(2\omega t-\epsilon)\,dt\right]$$

$$\langle P_s\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\frac{F_0^2\cos(\epsilon)}{2Z}\int_0^{2\pi/\omega} dt$$

$$\boxed{\langle P_s\rangle = \frac{F_0^2\cos(\epsilon)}{2Z}}$$



$\cos(\epsilon) = b/Z$

$$\boxed{\langle P_s\rangle = \frac{F_0^2\, b}{2Z^2}}$$

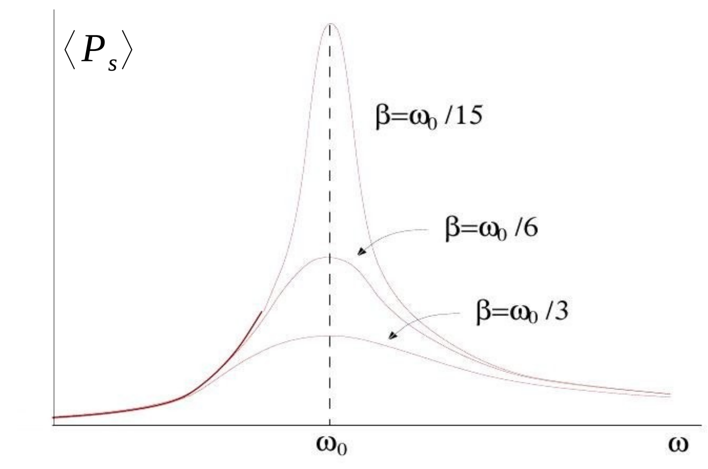
Potencia promedio

En resonancia $\langle P_s\rangle$ es máxima

$$\boxed{\langle P_s\rangle = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{b}}$$

$(Z = b\ ,\ \epsilon=0)$

El comportamiento de $<P_s>$ es similar al de la E



3.6 Anchura de la resonancia.

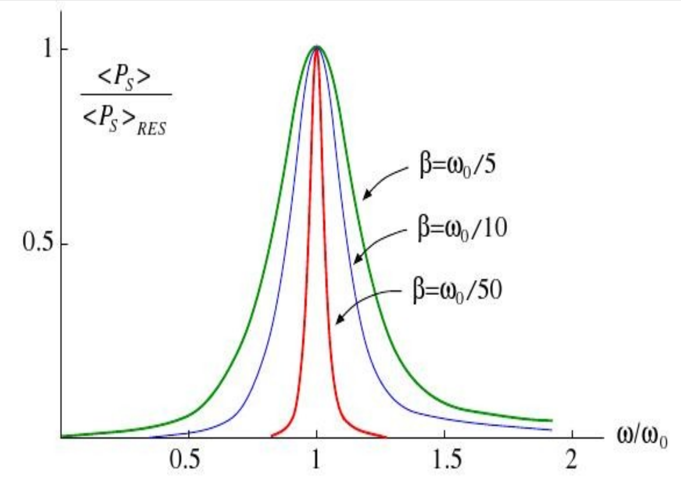
Podemos representar $\langle P_s \rangle$ normalizada.

$\langle P_s \rangle_{RES}$ es máxima $\Rightarrow$ $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}}$ estará normalizada

3.6 Anchura de la resonancia.

Podemos representar $\langle P_s \rangle$ normalizada.

$\langle P_s \rangle_{RES}$ es máxima → $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}}$ estará normalizada

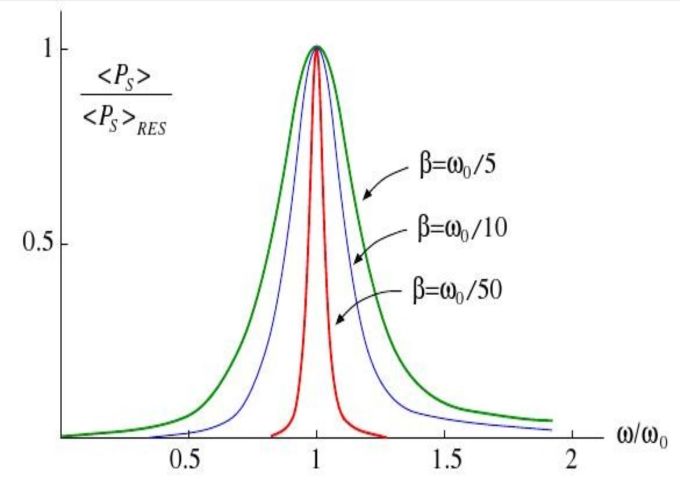


Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

3.6 Anchura de la resonancia.

Podemos representar $\langle P_s \rangle$ normalizada.

$\langle P_s \rangle_{RES}$ es máxima → $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}}$ estará normalizada

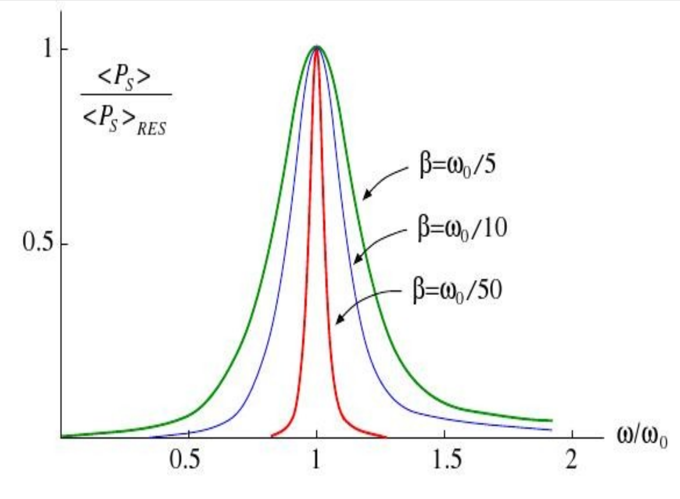


A medida que disminuye β *la resonancia se hace más 'estrecha'*

3.6 Anchura de la resonancia.

Podemos representar $\langle P_s \rangle$ normalizada.

$\langle P_s \rangle_{RES}$ es máxima ⟹ $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}}$ estará normalizada



A medida que disminuye β la resonancia se hace más 'estrecha'

Anchura de la resonancia

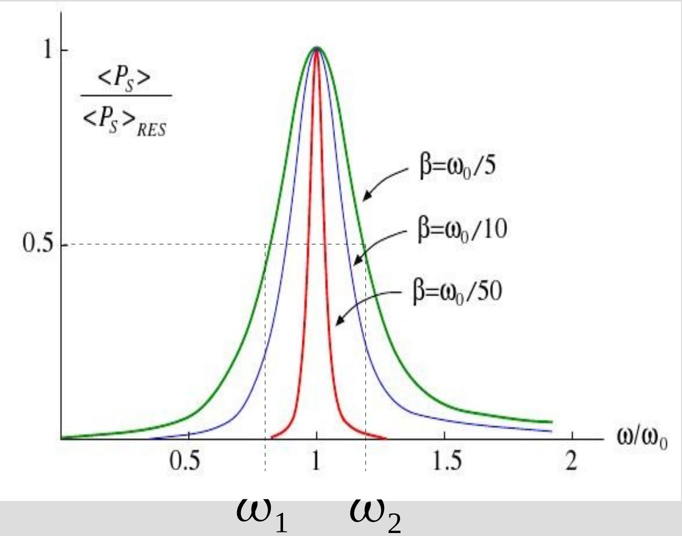
Es la anchura del pico para $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}} = 0.5$

3.6 Anchura de la resonancia.

Podemos representar $\langle P_s \rangle$ normalizada.

$\langle P_s \rangle_{RES}$ es máxima $\Rightarrow$ $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}}$ estará normalizada

A medida que disminuye β la resonancia se hace más 'estrecha'



Anchura de la resonancia

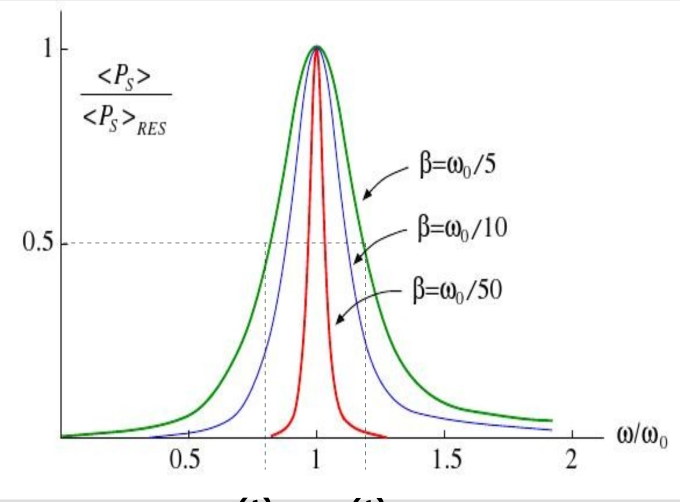
$\boxed{\text{Es la anchura del pico para } \dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}} = 0.5}$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

3.6 Anchura de la resonancia.

Podemos representar $\langle P_s \rangle$ normalizada.

$\langle P_s \rangle_{RES}$ es máxima → $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}}$ estará normalizada



ω_1 ω_2

A medida que disminuye β *la resonancia se hace más 'estrecha'*

Anchura de la resonancia

Es la anchura del pico para $\dfrac{\langle P_s \rangle}{\langle P_s \rangle_{RES}} = 0.5$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Se puede demostrar si $\beta << \omega_0$

$$\boxed{\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q}}$$

Donde Q es el **factor de calidad** del oscilador

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\beta}}$$

Ejercicios

Ejercicio: un objeto de masa m=2kg oscila sujeto a un muelle de constante k=800 N/m y con un parámetro de amortiguamiento β=0.1 s^{-1}. Si aplicamos al sistema una fuerza oscilante F(t)=25cos(10t) (en unidades SI.), calcular:

La amplitud, velocidad máxima, frecuencia de resonancia, desfase entre x y F, factor de calidad y anchura de la resonancia:

Solución:

$A=0.042m$

$v_0=0.42\ m/s$

$\omega_{RES} = 20\ rad/s$

$\delta=6.67 \cdot 10^{-3}\ rad$

$Q=100$

$\Delta\omega=0.2\ rad$

$$F = F_0 \cos(\omega t) \qquad x = A \cos(\omega t - \delta)$$

$$v = \omega A \cos(\omega t - \epsilon) \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \qquad \tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$v_0 = \omega A = \frac{F_0}{Z}$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2 b}{2Z^2} \qquad Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}$$

$$\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \qquad Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

Ejercicios

Ejercicio: un péndulo simple está formado por una masa m=3kg y un cuerda de longitud l=1m. El sistema está amortiguado siendo β=0.001 s^{-1}. Si queremos mantener el péndulo oscilando con su frecuencia natural y con una amplitud de de 2º, determinar el valor F_0 de la fuerza oscilante que debemos aplicar y la potencia disipada por el sistema.

Solución:

$F_0 = 6.55 \cdot 10^{-4}$ N

$\langle P_s \rangle = 3.6 \cdot 10^{-5}$ W

$$F = F_0 \cos(\omega t) \qquad x = A \cos(\omega t - \delta)$$

$$v = \omega A \cos(\omega t - \epsilon) \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \qquad \tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$v_0 = \omega A = \frac{F_0}{Z}$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2 b}{2Z^2} \qquad Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}$$

$$\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \qquad Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

Cuestiones (contesta razonadamente).

1. En régimen estacionario de un oscilador forzado, la energía perdida por el amortiguamiento es igual a la introducida por la fuerza oscilante.

2. La potencia media suministrada a un oscilador forzado decae exponencialmente con el tiempo.

3. El hecho de romper una copa de vidrio por la acción del sonido es un ejemplo de oscilador resonante.

4. Si $\omega_0 < \beta$ la frecuencia de oscilación de un oscilador forzado será mayor que ω_0.

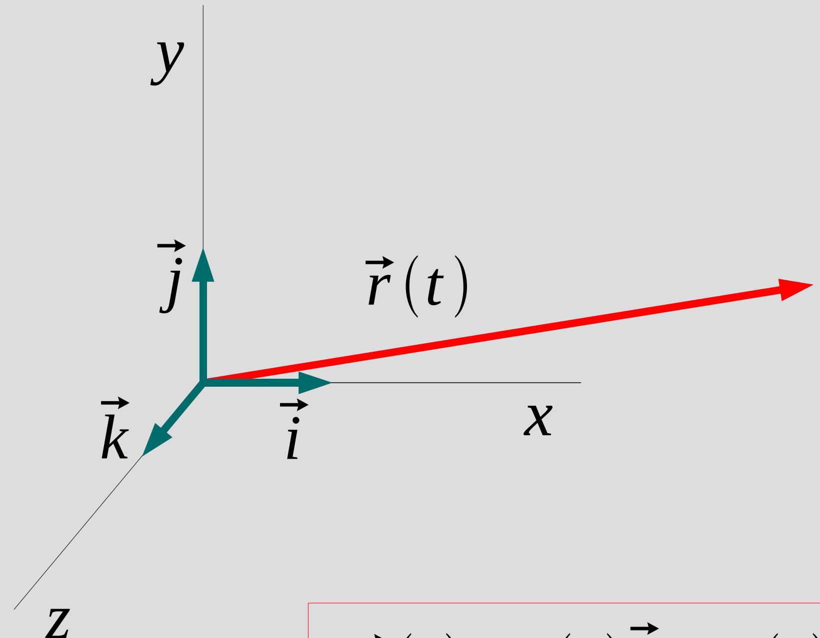
5. Después de un periodo transitorio, la frecuencia de oscilación de un oscilador forzado es $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

6. Las unidades del factor de calidad de un oscilador son las mismas que la de la frecuencia angular.

7. En el estado estacionario, si ω tiende a ω_0 el desfase entre la fuerza impulsora y la velocidad tiende a cero.

Vector velocidad

- La velocidad nos indica cómo cambia la posición de la partícula dividido entre en el tiempo empleado
- **En una dimensión:**



$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$