OSCILACIONES, ONDAS Y TERMODINÁMICA

MÓDULO 1: OSCILACIONES

Figuras cedidas en parte por W.H. Freeman/Worth, que pertenecen al libro "Física, 4a. Ed.", P.A. Tipler, Ed. Reverté

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS.
(masa-muelle, péndulos,
sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS.
(masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

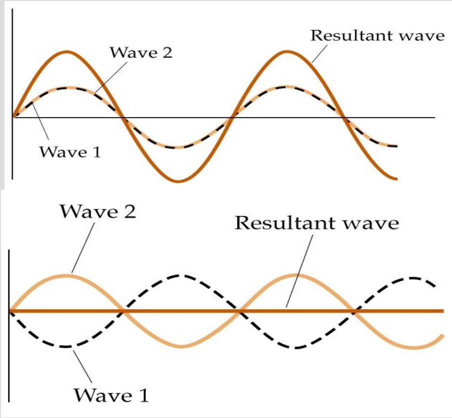
3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

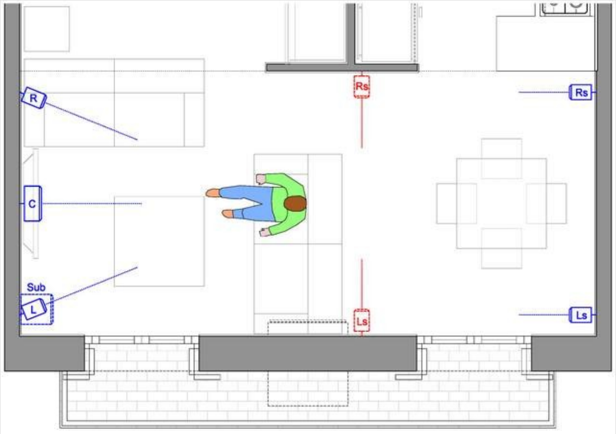
4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

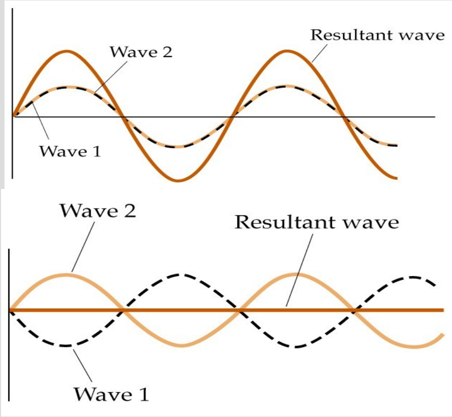
Qué pasa cuando superponemos más de un MAS?

Qué pasa cuando superponemos más de un MAS?

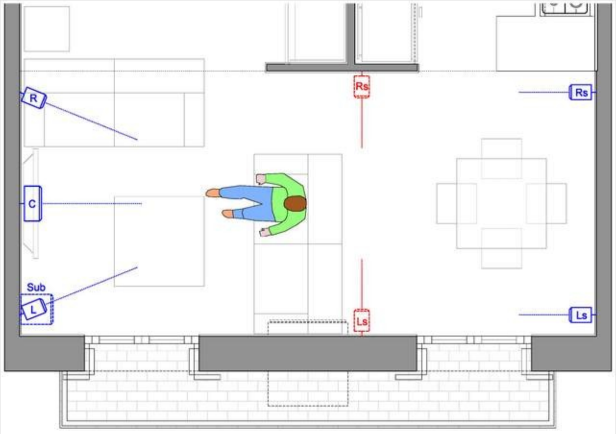


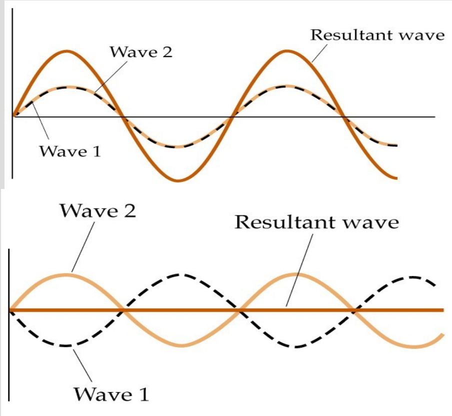
Qué pasa cuando superponemos más de un MAS?

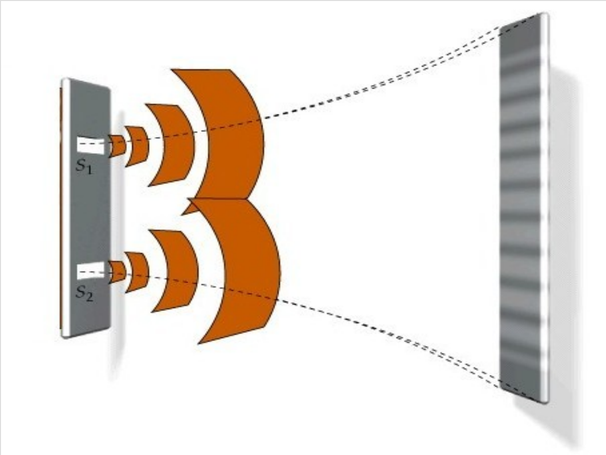




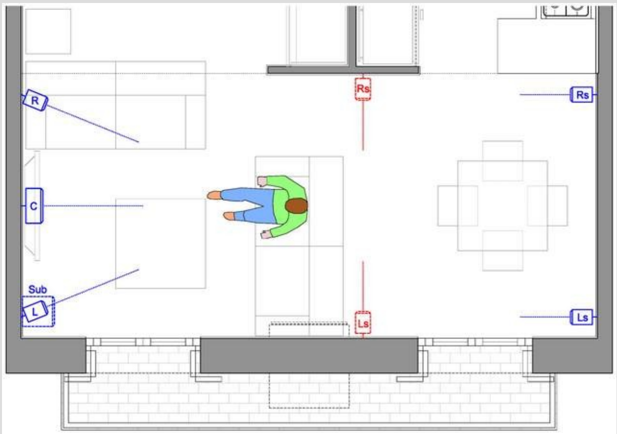
Qué pasa cuando superponemos más de un MAS?

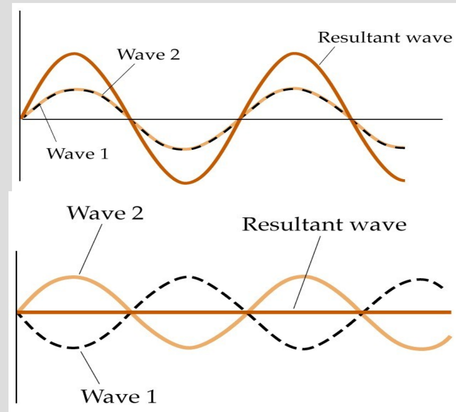


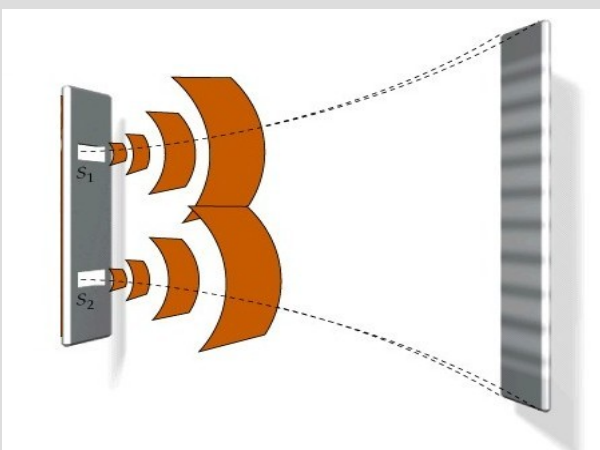


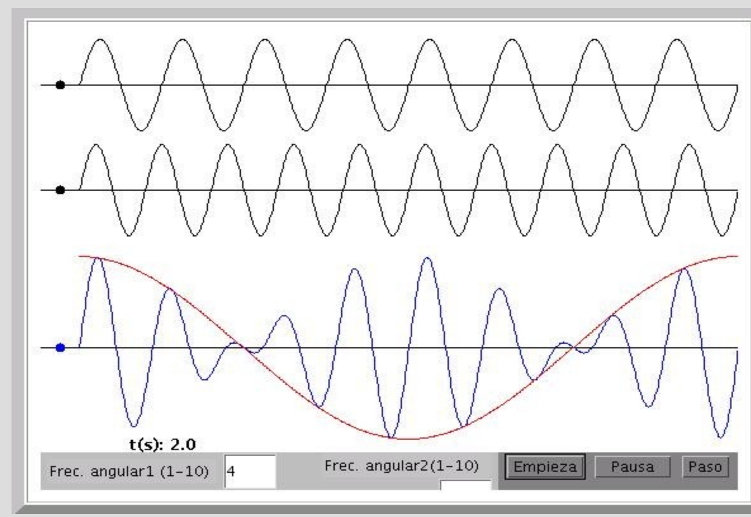


Qué pasa cuando superponemos más de un MAS?







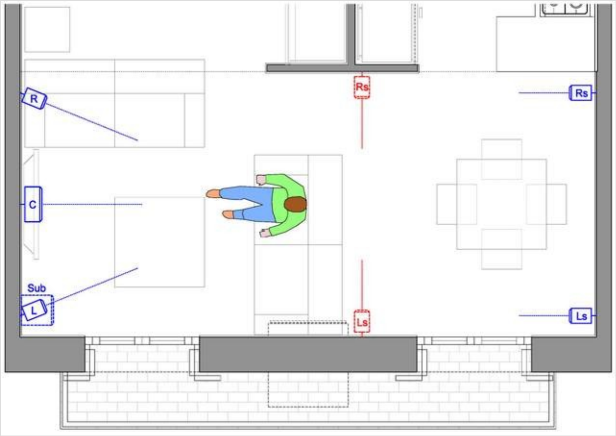


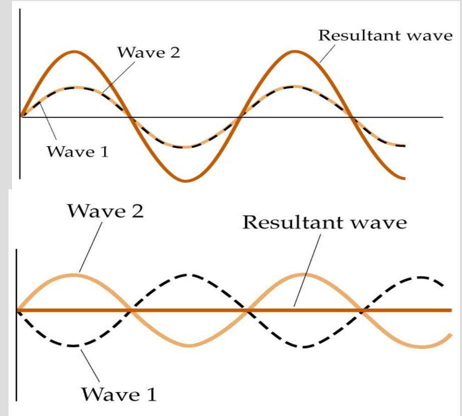
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/

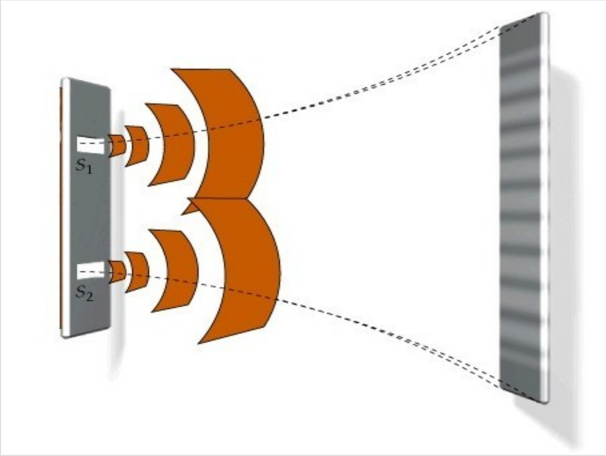
Osc. Ondas y Termodinámica

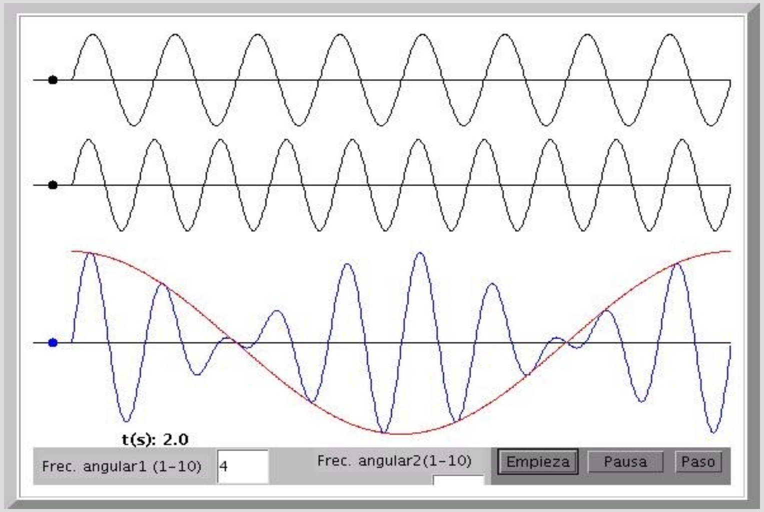
Lección 4: Superposición de varios MAS

Qué pasa cuando superponemos más de un MAS?









http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/

Osc. Ondas y Termodinámica

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega\,t)$$

Dpt. de Física i Eng. Nuclear
Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)}$$

Cuál es el mov.
si $F = F_1 + F_2$

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$

?

Principio de superposición

$$x = x_1 + x_2$$

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$?

Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Demostración

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)}$$

Cuál es el mov.
si $F = F_1 + F_2$

?

Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Demostración

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + 2\beta\,\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + \omega_0^2\,(x_1+x_2) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

4.1 Principio de superposición.

$\boxed{\text{\textit{El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.}}}$

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)}$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$?

Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Demostración

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + 2\beta\,\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + \omega_0^2\,(x_1+x_2) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\left(\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1\right) + \left(\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2\right) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)}$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$?

Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Demostración

$$\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1 = \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2 = \frac{F_2}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + 2\beta\,\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + \omega_0^2\,(x_1+x_2) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\left(\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1\right) + \left(\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2\right) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$?

Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Demostración

$$\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1 = \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2 = \frac{F_2}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + 2\beta\,\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + \omega_0^2\,(x_1+x_2) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\left(\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1\right) + \left(\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2\right) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{F_1}{m}\cos(\omega t) + \frac{F_2}{m}\cos(\omega t) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la linealidad de la ec. diferencial:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$?

Principio de superposición

$$x = x_1 + x_2$$

Demostración

$$\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1 = \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2 = \frac{F_2}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + 2\beta\,\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + \omega_0^2\,(x_1+x_2) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\left(\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1\right) + \left(\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2\right) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{F_1}{m}\cos(\omega t) + \frac{F_2}{m}\cos(\omega t) = \frac{F}{m}\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{(F_1+F_2)}{m}\cos(\omega t) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

4.1 Principio de superposición.

El movimiento resultante de aplicar dos o más fuerzas oscilantes a un oscilador, es la suma de los movimientos que produciría cada uno de los osciladores por separado.

Se debe a la lealidad de la ec. diferencial:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)}$$

Cuál es el mov. si $F = F_1 + F_2$?

Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Demostración

$$\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1 = \frac{F_1}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2 = \frac{F_2}{m}\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2) + 2\beta\,\frac{d}{dt}(x_1+x_2) + \omega_0^2\,(x_1+x_2) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\left(\ddot{x}_1 + 2\beta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2\,x_1\right) + \left(\ddot{x}_2 + 2\beta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2\,x_2\right) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{F_1 + F_2 = F}$$

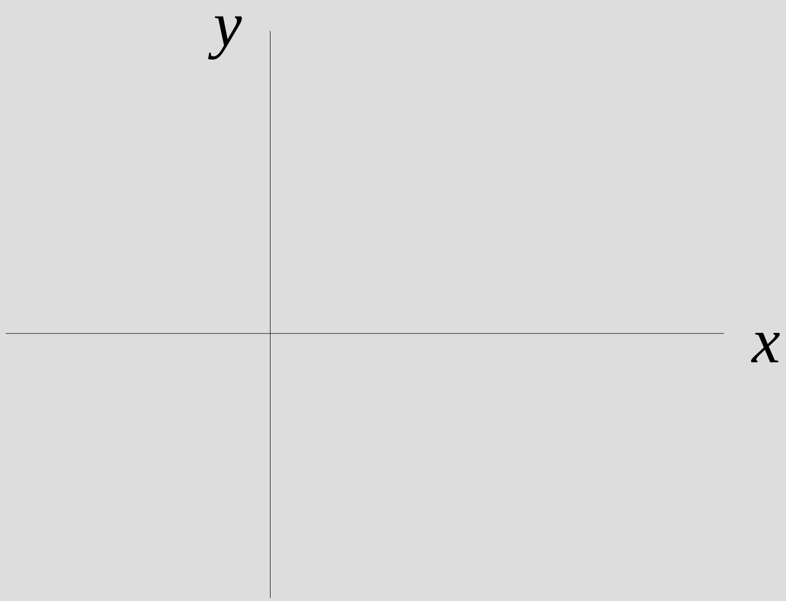
$$\frac{F_1}{m}\cos(\omega t) + \frac{F_2}{m}\cos(\omega t) = \frac{F}{m}\cos(\omega t) \Rightarrow \frac{(F_1+F_2)}{m}\cos(\omega t) = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

Representación fasorial.

Será muy útil para representar la suma de varios MAS

Representación fasorial.

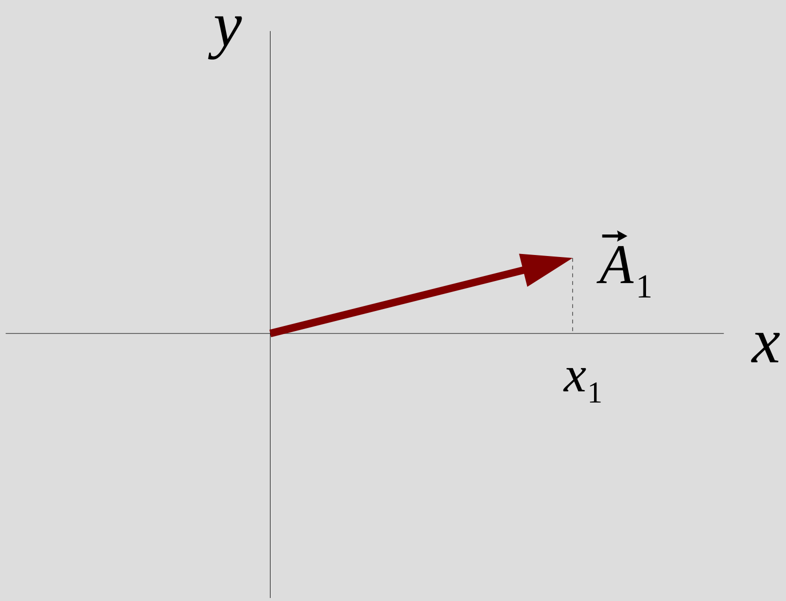
Será muy útil para representar la suma de varios MAS



4.1 Principio de superposición.

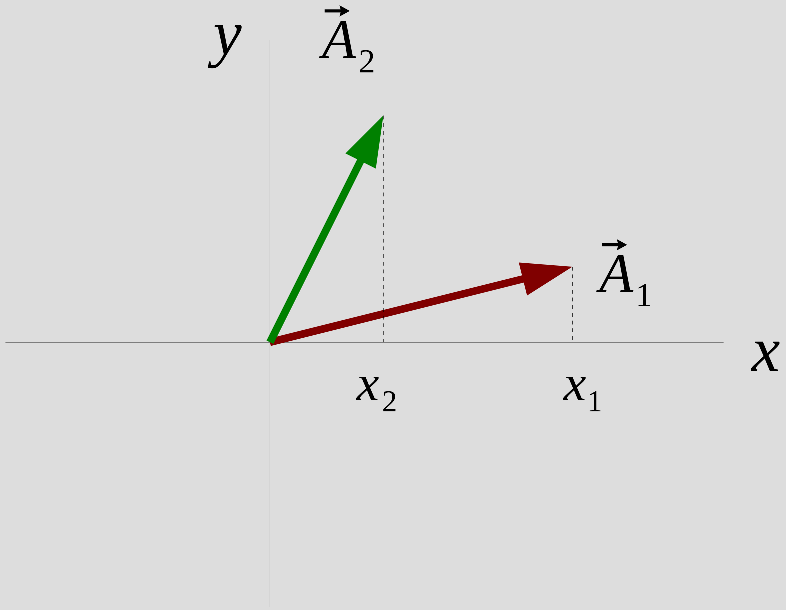
Representación fasorial.

Será muy útil para representar la suma de varios MAS



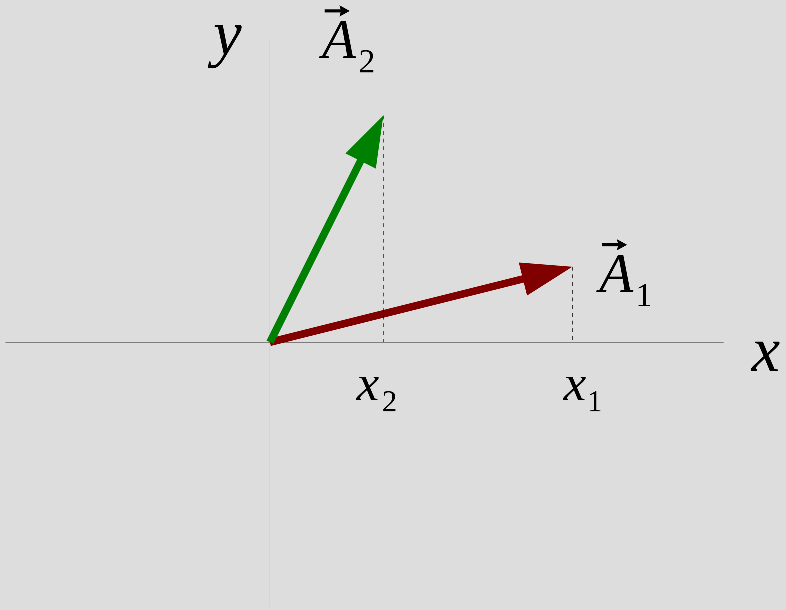
Representación fasorial.

Será muy útil para representar la suma de varios MAS



Representación fasorial.

Será muy útil para representar la suma de varios MAS



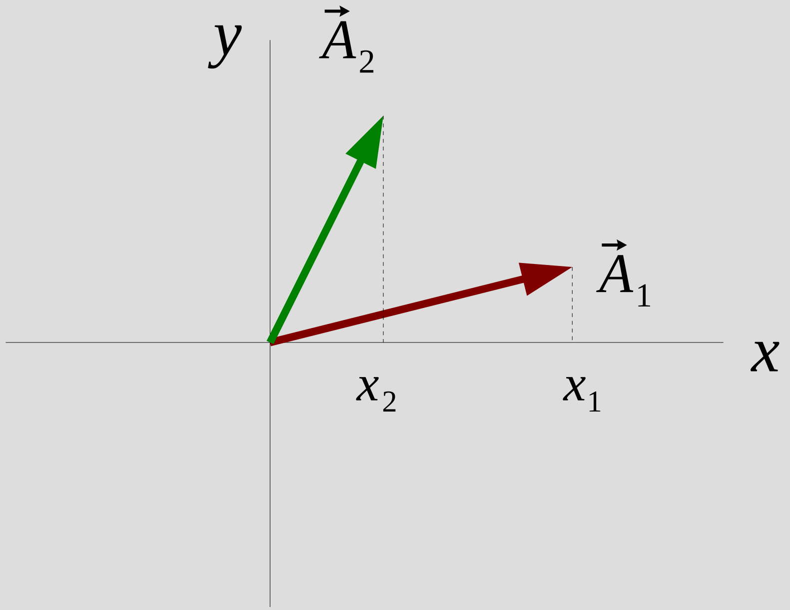
Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

4.1 Principio de superposición.

Representación fasorial.

Será muy útil para representar la suma de varios MAS



Principio de superposición

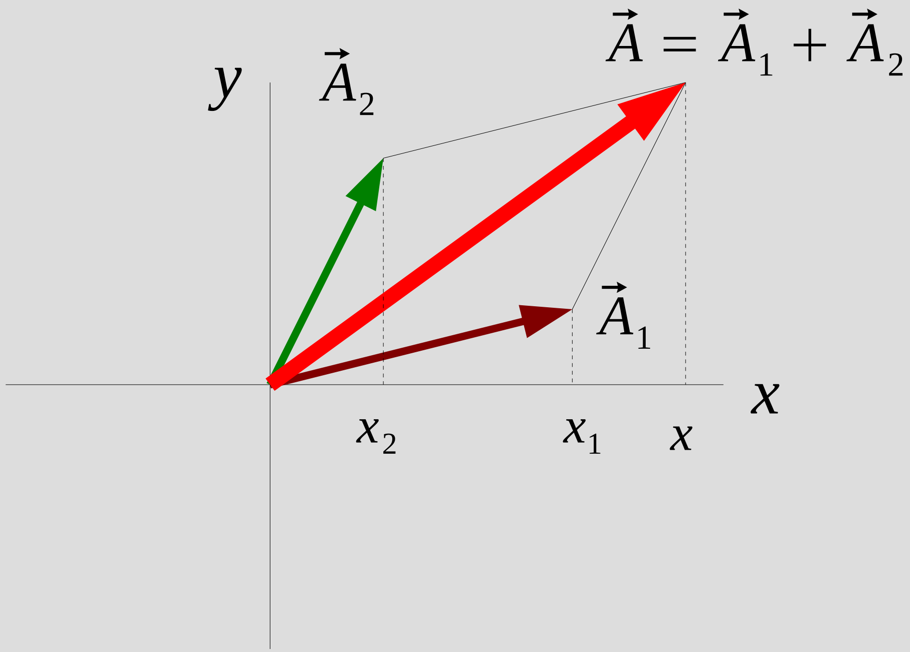
$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Es la componente x del vector $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

4.1 Principio de superposición.

Representación fasorial.

Será muy útil para representar la suma de varios MAS



Principio de superposición

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

Es la componente x del vector $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}}$$

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

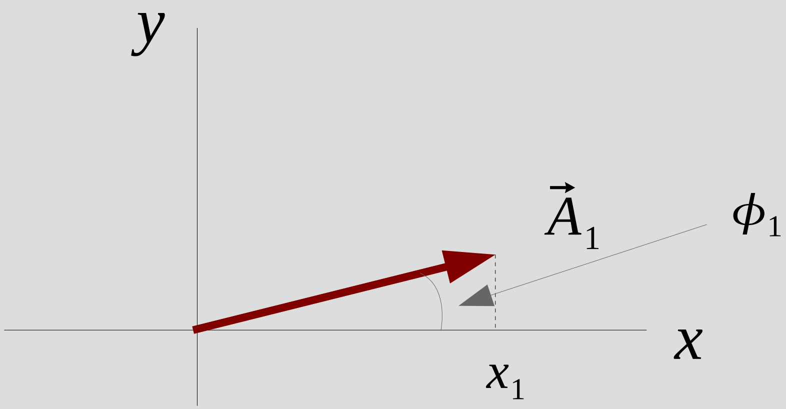
Utilizando la representación fasorial:

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:

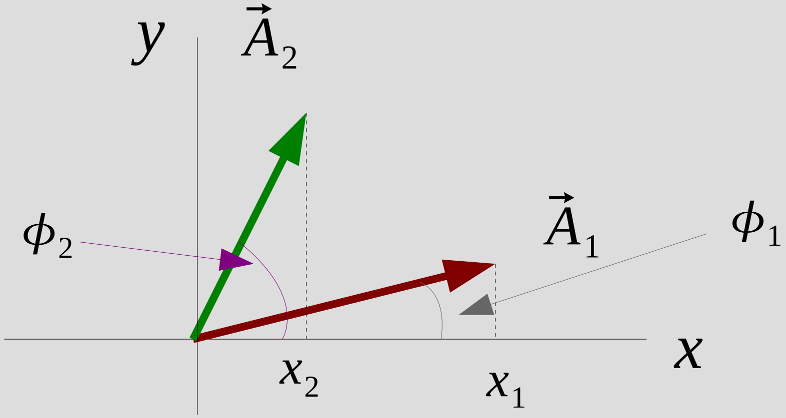


4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:

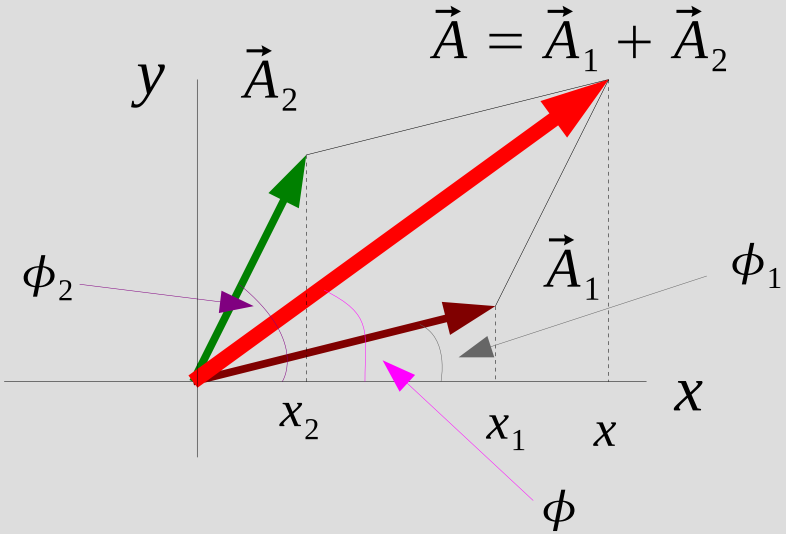


4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Superpondremos dos MAS dados por:

Utilizando la representación fasorial:



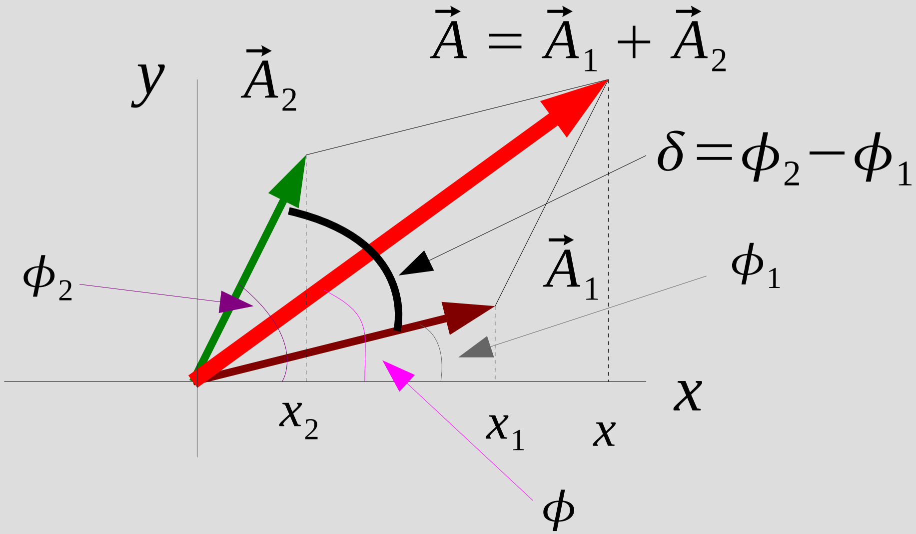
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:

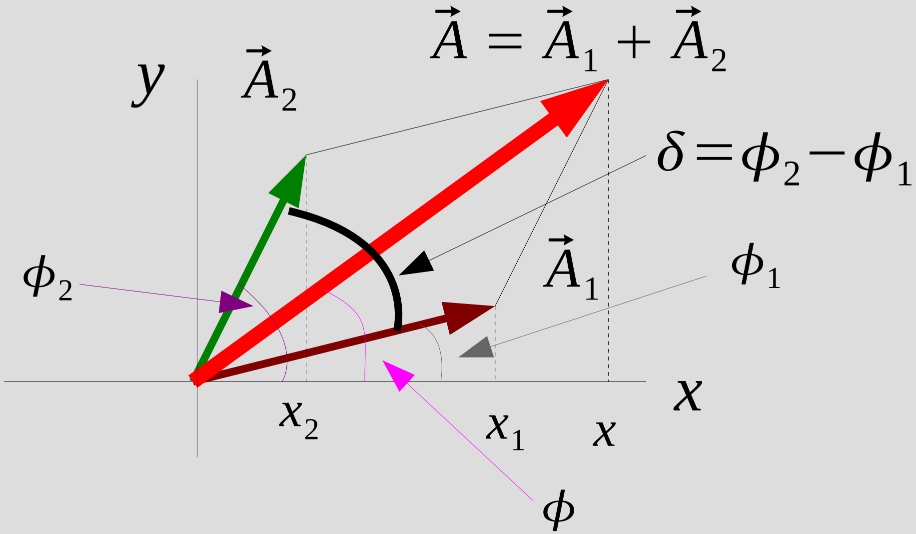


4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



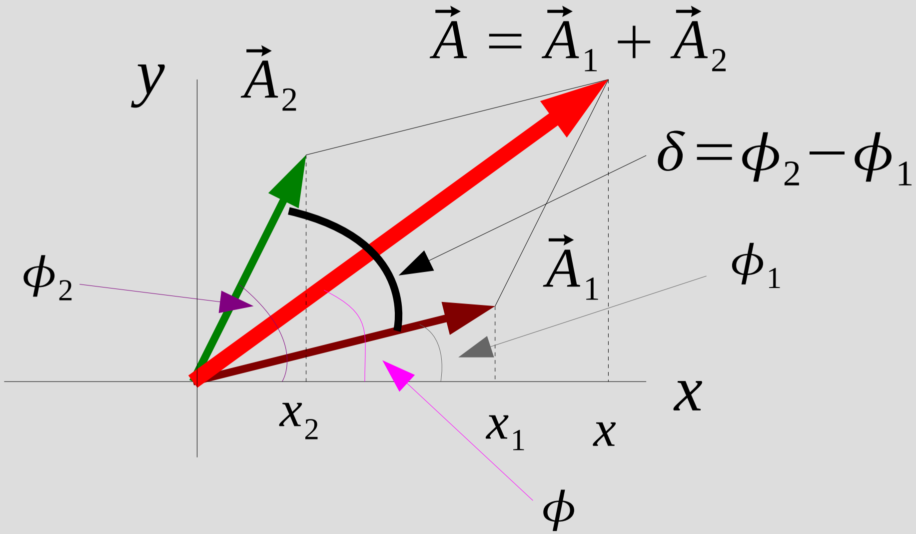
- *δ será constante.*

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}}$$

Utilizando la representación fasorial:



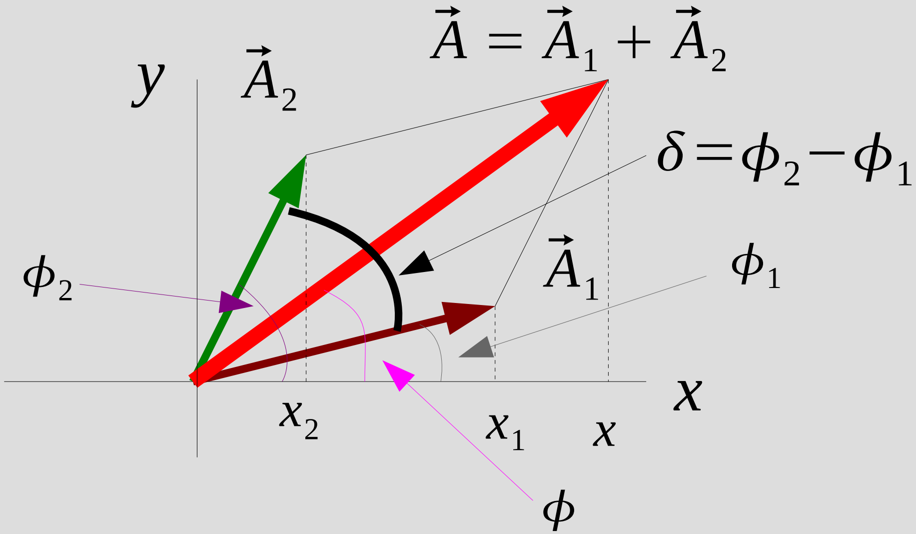
- *δ será constante.*
- *$|\vec{A}|$ será constante*

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ será constante.*
- *$|\vec{A}|$ será constante*
- *El mov. será un MAS*

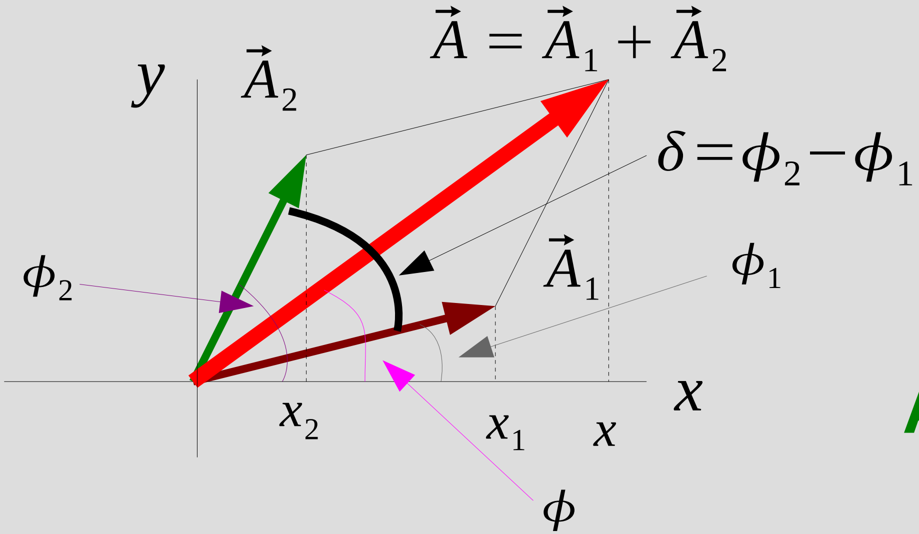
$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- δ *será constante.*
- $|\vec{A}|$ *será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

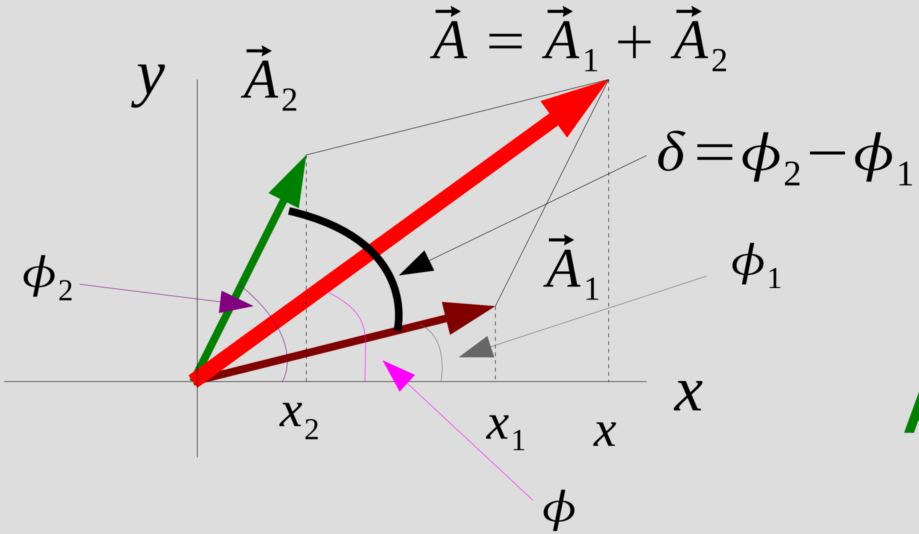
Amplitud del movimiento

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- δ *será constante.*
- $|\vec{A}|$ *será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2|$$

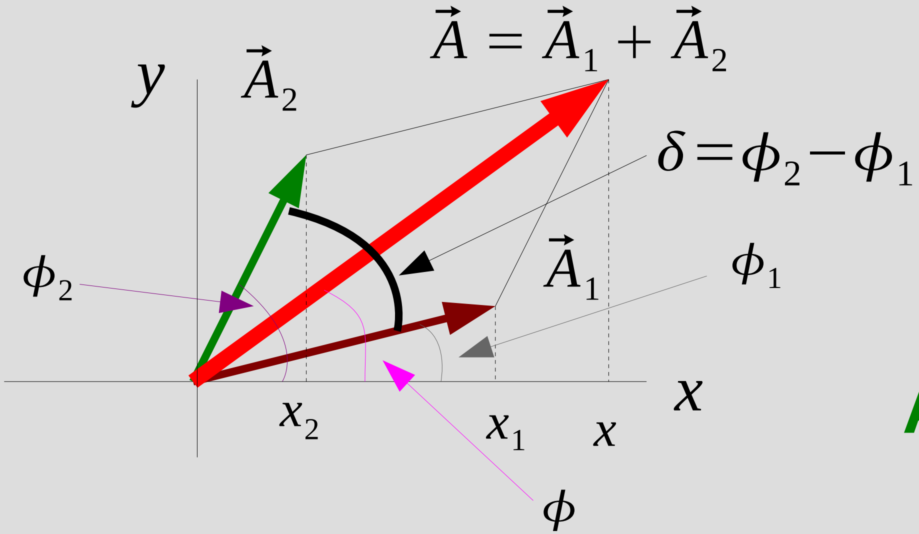
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ será constante.*
- *$|\vec{A}|$ será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

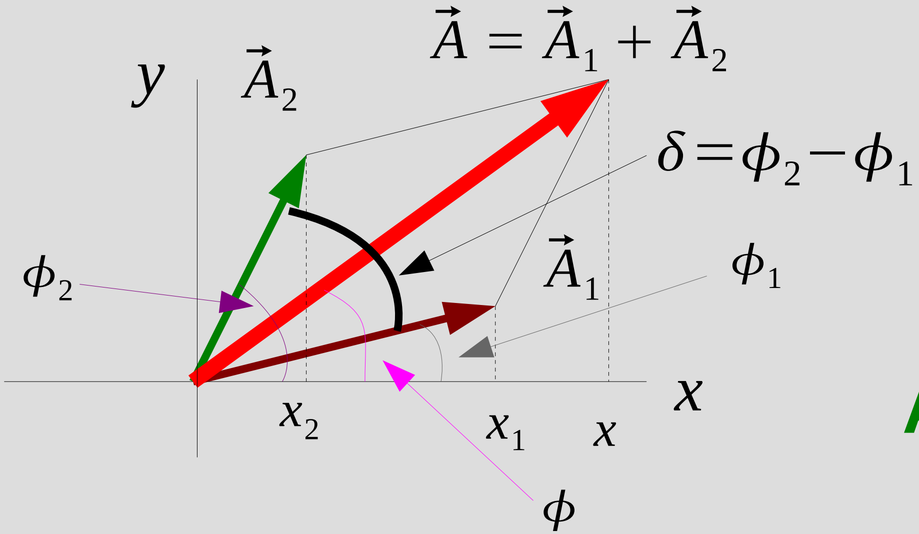
$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ será constante.*
- *$|\vec{A}|$ será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}$$

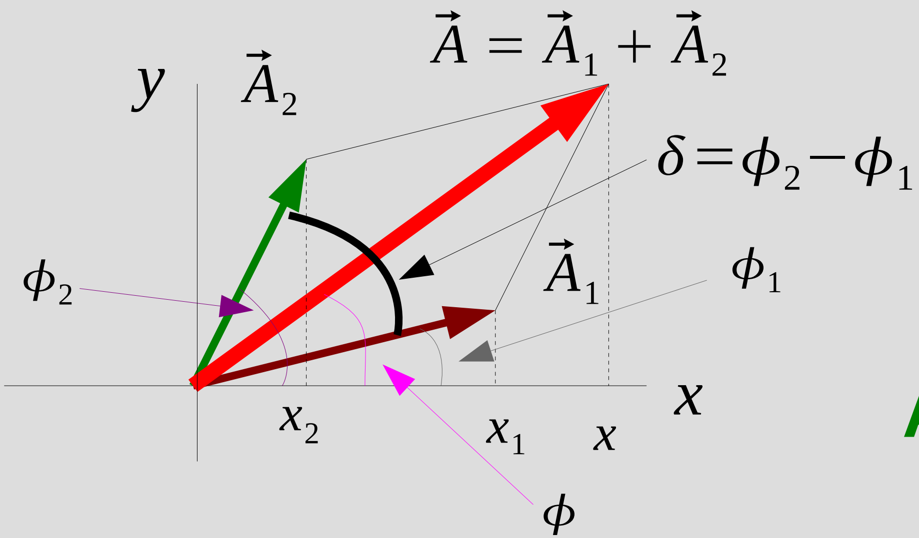
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ será constante.*
- *$|\vec{A}|$ será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}}$$

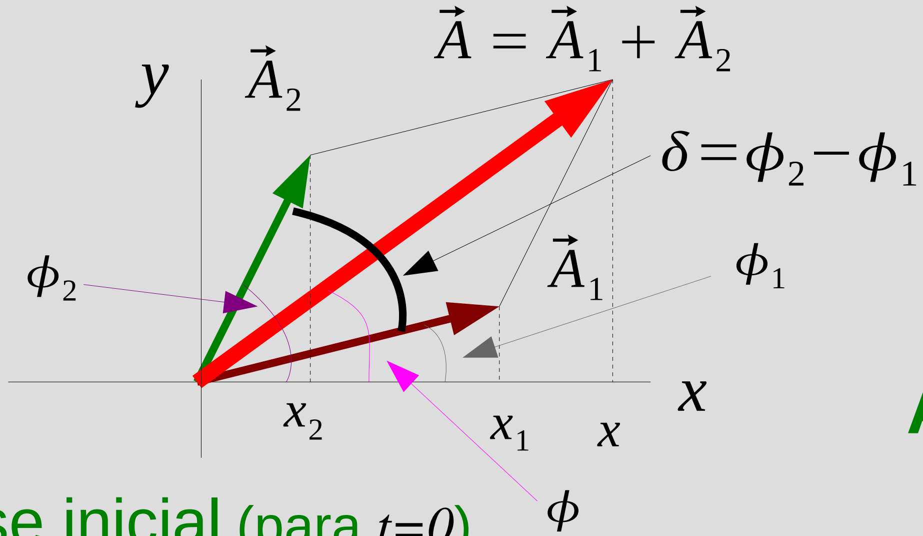
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- δ *será constante.*
- $|\vec{A}|$ *será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Fase inicial (para $t=0$)

$$\tan\phi = \frac{A_y}{A_x}$$

Amplitud del movimiento

$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}$$

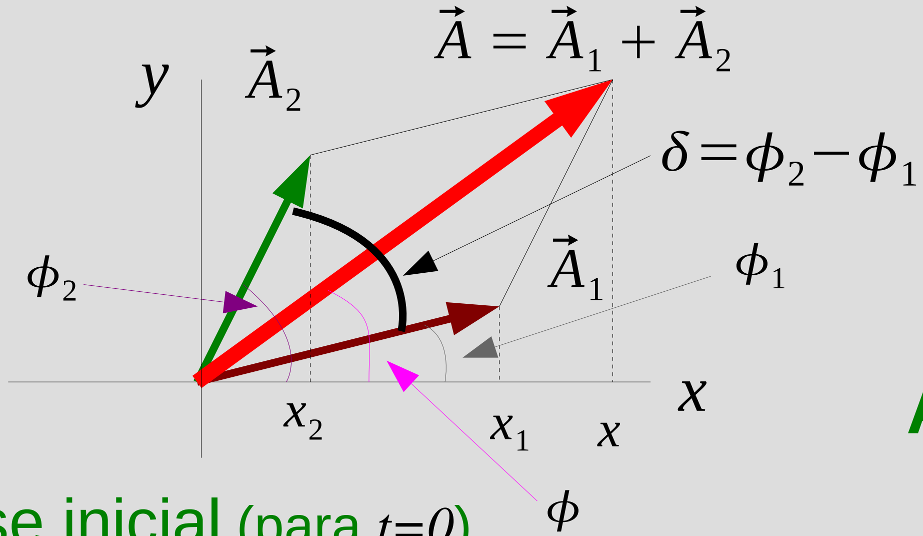
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- δ *será constante.*
- $|\vec{A}|$ *será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Fase inicial (para $t=0$)

$$\tan\phi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$$

Amplitud del movimiento

$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}$$

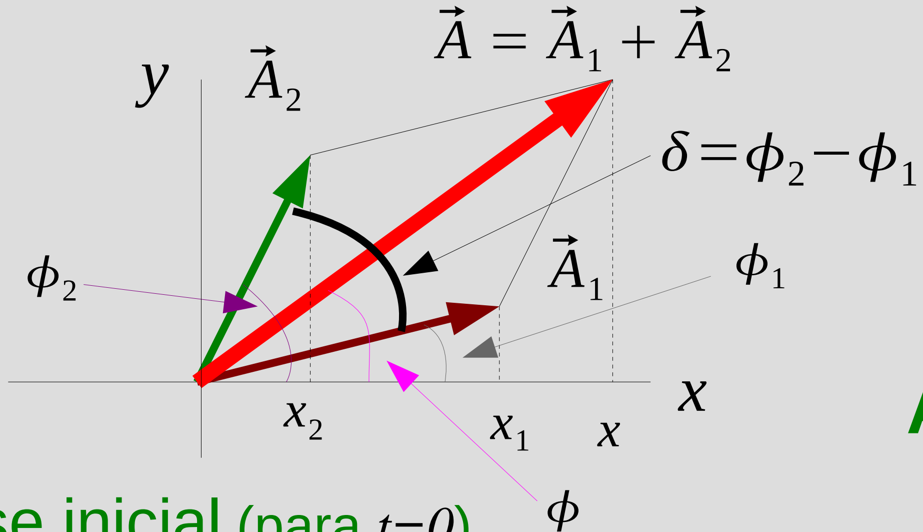
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos\delta}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ será constante.*
- *$|\vec{A}|$ será constante*
- *El mov. será un MAS*

$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \phi)}$$

Fase inicial (para *t=0*)

$$\tan\phi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}}$$

Amplitud del movimiento

$$A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en fase

$$\phi_1 = \phi_2$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \;\rightarrow\; \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \;\rightarrow\; \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos\delta}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \;\rightarrow\; \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \;\rightarrow\; \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1 A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

en componentes

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

en componentes

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

Representación gráfica

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

en componentes

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

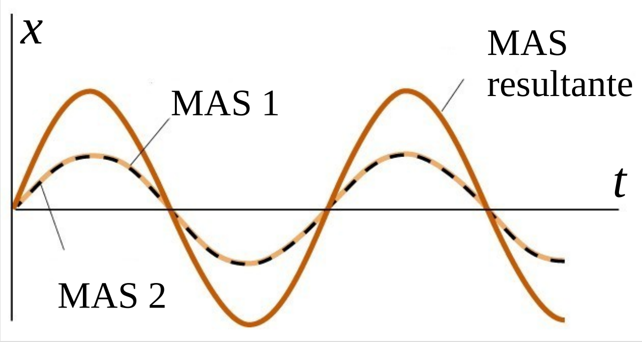
Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1+A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1+A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

Representación gráfica

Represen-tación *x(t)*



"Interferencia constructiva"

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

en componentes

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

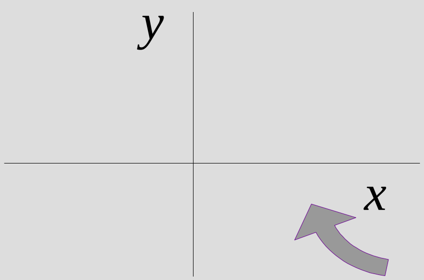
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

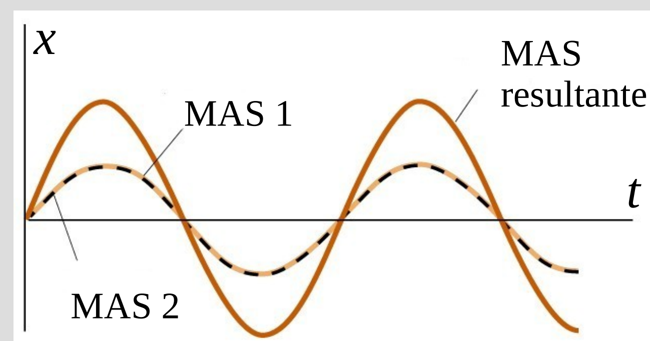
$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

Representación gráfica



Representación fasorial

Represen-tación *x(t)*



"Interferencia constructiva"

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

en componentes

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

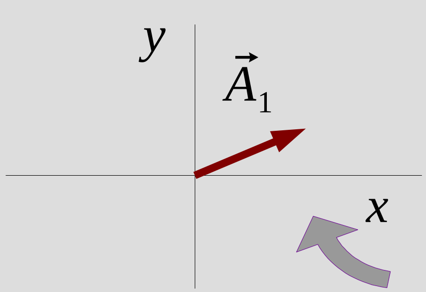
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

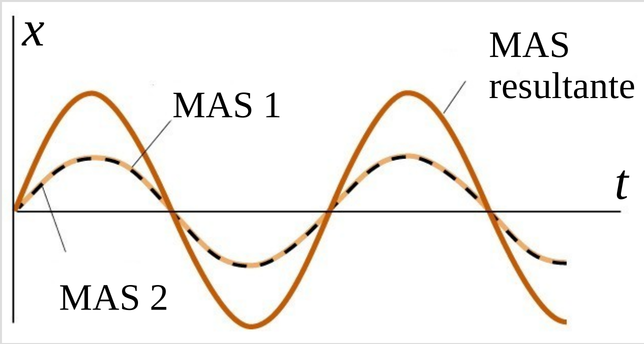
$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

Representación gráfica



Representación fasorial

Represen-tación *x(t)*



"Interferencia constructiva"

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en fase

en componentes

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

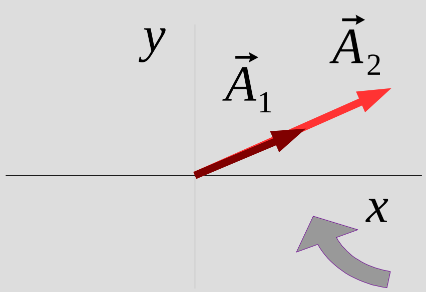
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

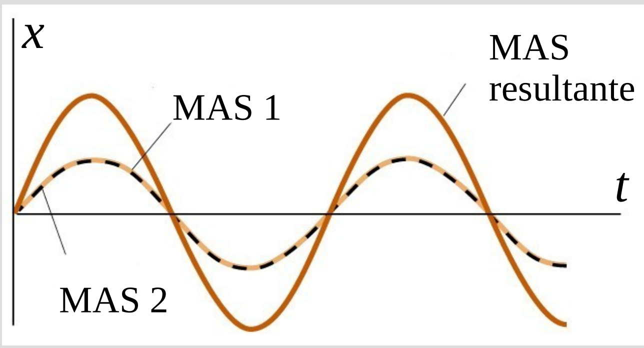
$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

Representación gráfica



Representación fasorial

Represen-tación *x(t)*



"Interferencia constructiva"

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en fase

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = 0}$$

en componentes

Movimiento resultante

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \phi)}$$

Amplitud del movimiento

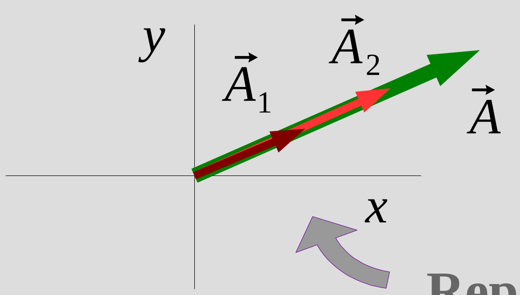
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = A_1 + A_2}$$

Fase inicial

$$\boxed{\phi = \phi_1 = \phi_2}$$

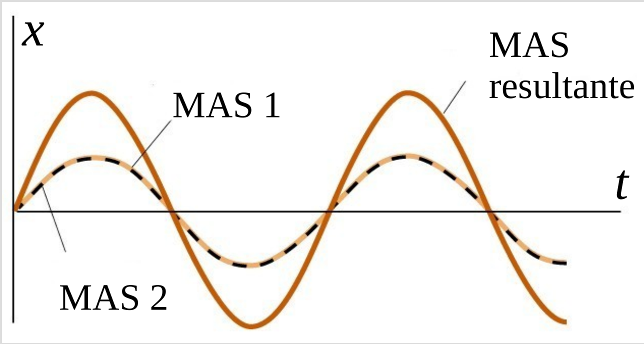
$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}} \Rightarrow \tan\phi = \frac{(A_1 + A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 + A_2)\cos(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

Representación gráfica



Representación fasorial

Represen-tación *x(t)*



"Interferencia constructiva"

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en oposición $\left(\phi_2 = \phi_1 + \pi\right)$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en oposición $\left(\phi_2 = \phi_1 + \pi\right)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en oposición $\left(\phi_2 = \phi_1 + \pi\right)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos\delta}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2\,A_1\,A_2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\ \sin(\phi_1 + \pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\ \cos(\phi_1 + \pi)}$$

Superposición de **MAS** en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1 + \pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1 + \pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$- \sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

$- \cos(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_1 + \pi)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_1 + \pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

Movimiento resultante

$$\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$$

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_2)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1 \sin(\phi_1) + A_2 \sin(\phi_1 + \pi)}{A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_1 + \pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

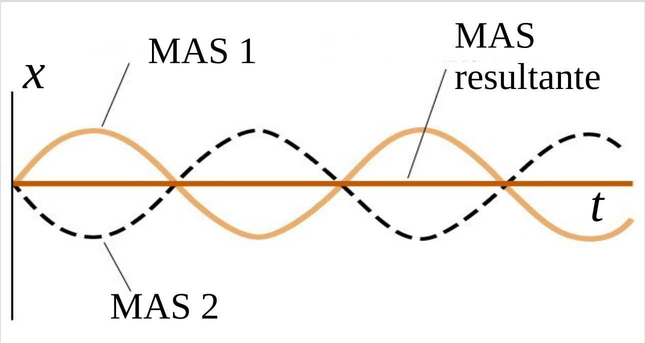
$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

Movimiento resultante

$$\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$$

Representación gráfica



Gráfica *x(t)*

"Interferencia destructiva"

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de **MAS** en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

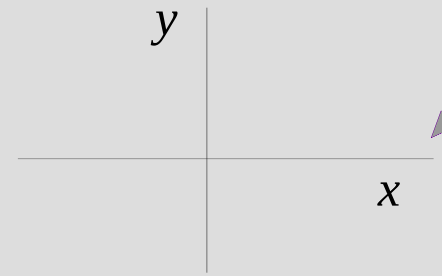
$-\cos(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

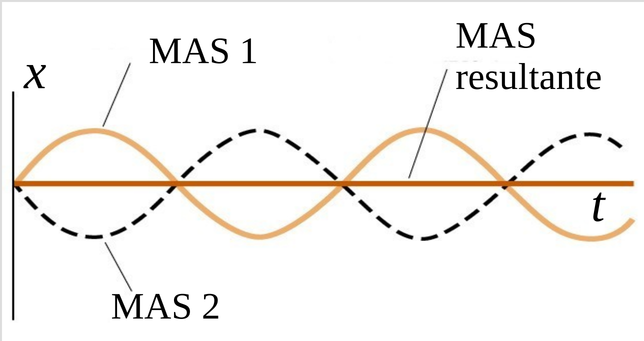
$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

Movimiento resultante $\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$

Representación gráfica



Represen-tación fasorial



Gráfica *x(t)*

"Interferencia destructiva"

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

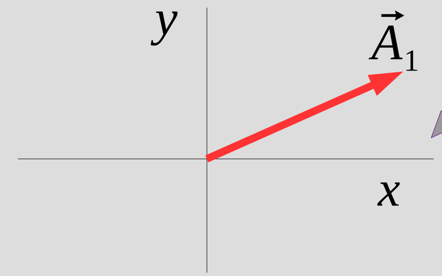
$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

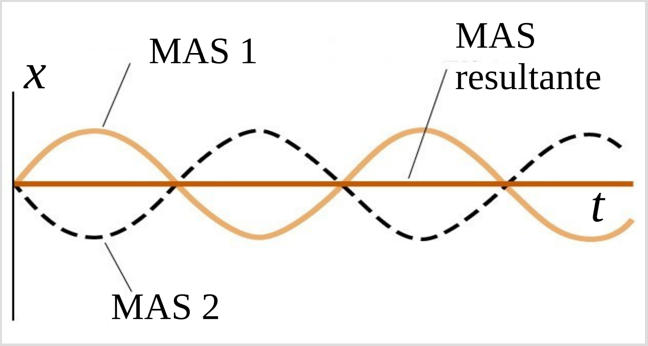
Movimiento resultante

$$\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$$

Representación gráfica



Represen-tación fasorial



Gráfica *x(t)*

"Interferencia destructiva"

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

$-\cos(\phi_1)$

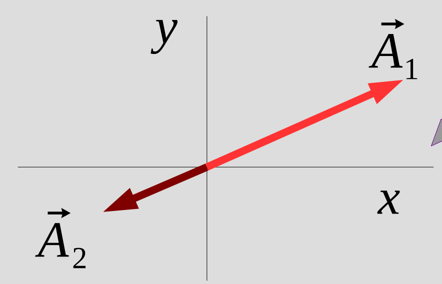
$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

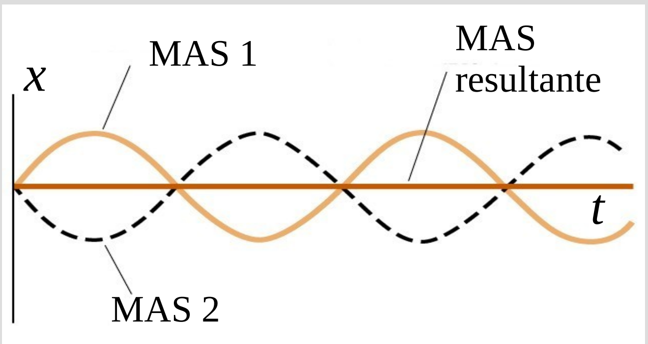
Movimiento resultante

$$\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$$

Representación gráfica



Represen-tación fasorial



Gráfica *x(t)*

"Interferencia destructiva"

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$-\sin(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

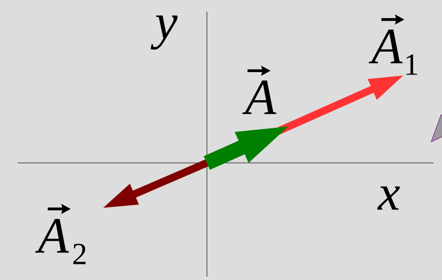
$-\cos(\phi_1)$

$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

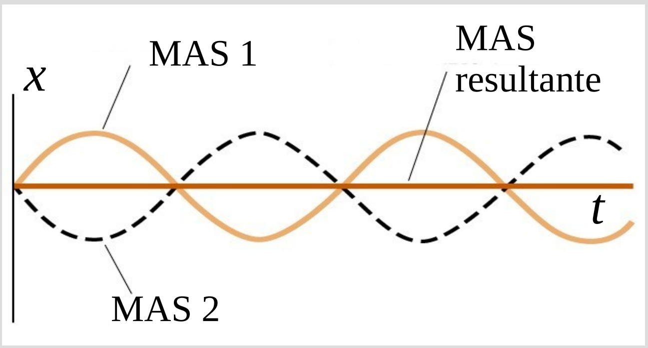
$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \quad \boxed{\phi = \phi_2}$$

Movimiento resultante $\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$

Representación gráfica



Represen-tación fasorial



Gráfica *x(t)*

"Interferencia destructiva"

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.2 Superosición MAS igual dirección y frecuencia

Superposición de MAS en oposición $(\phi_2 = \phi_1 + \pi)$

$$\boxed{\delta = \phi_2 - \phi_1 = \pi}$$

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} \Rightarrow \boxed{A = |A_1 - A_2|}$$

Fase inicial

$$\boxed{\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_2)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2)}}$$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin(\phi_1) + A_2\sin(\phi_1+\pi)}{A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_1+\pi)}$$

$- \sin(\phi_1)$

$- \cos(\phi_1)$

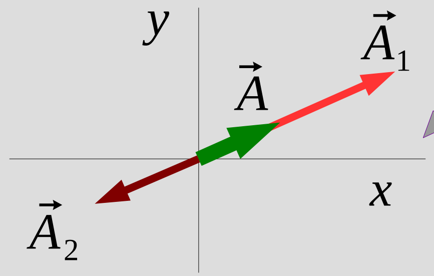
$$\tan\phi = \frac{(A_1 - A_2)\sin(\phi_1)}{(A_1 - A_2)\cos(\phi_1)}$$

$$\boxed{\tan\phi = \tan(\phi_1)} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi_1} \text{ si } A_1 > A_2 \qquad \boxed{\phi = \phi_2} \text{ si } A_1 < A_2$$

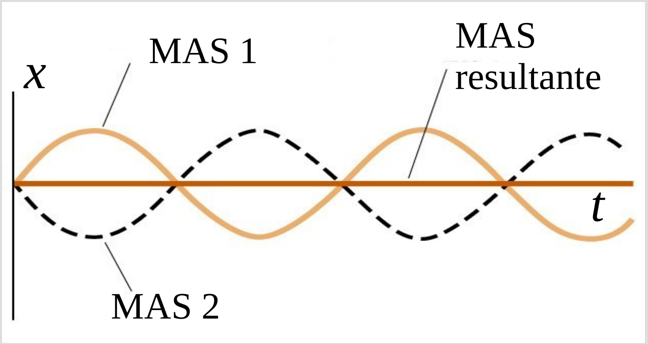
Movimiento resultante

$$\boxed{x = (A_1 - A_2)\cos(\omega t + \phi_1)}$$

Representación gráfica



Represen-tación fasorial



Gráfica $x(t)$

"Interferencia destructiva"

Ejercicios

Ejercicio: Una partícula está sometida simultáneamente a dos MAS de la misma dirección dados por (en unidades del SI):

$$x_1 = 0.60\ \cos(3\pi t) \qquad x_2 = 0.80\ \cos(\pi[3t - 1/3])$$

la amplitud del movimiento resultante de la superposición es:

(a) 0,721m, (b) 1,000 m, (c) 1,217 m, (d) 1,353 m, (e) Ninguna de las anteriores

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS.
(masa-muelle, péndulos,
sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

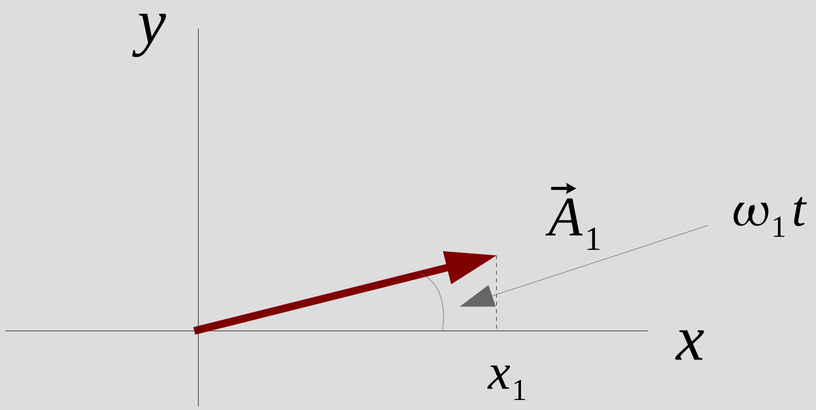
Utilizando la representación fasorial:

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Utilizando la representación fasorial:

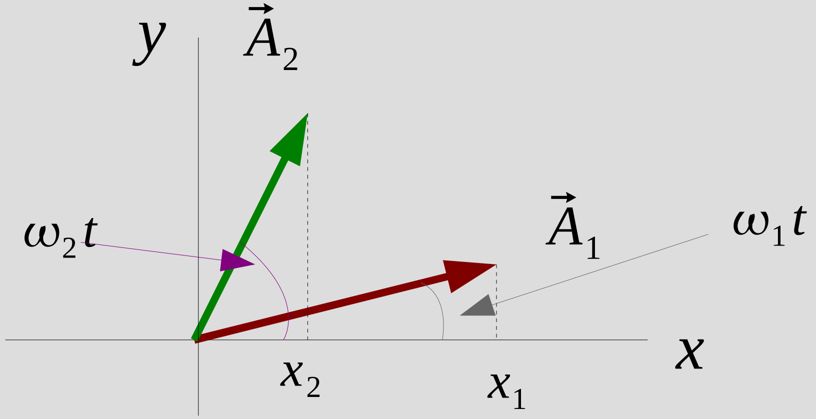


4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Utilizando la representación fasorial:



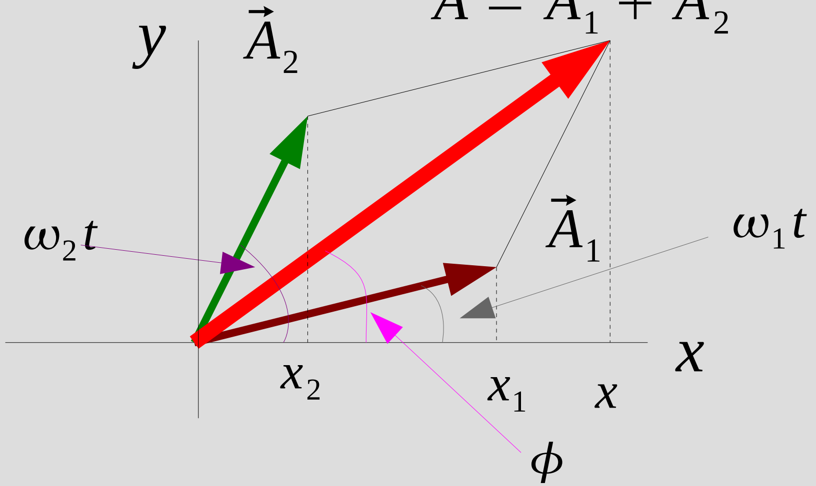
4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Utilizando la representación fasorial:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$



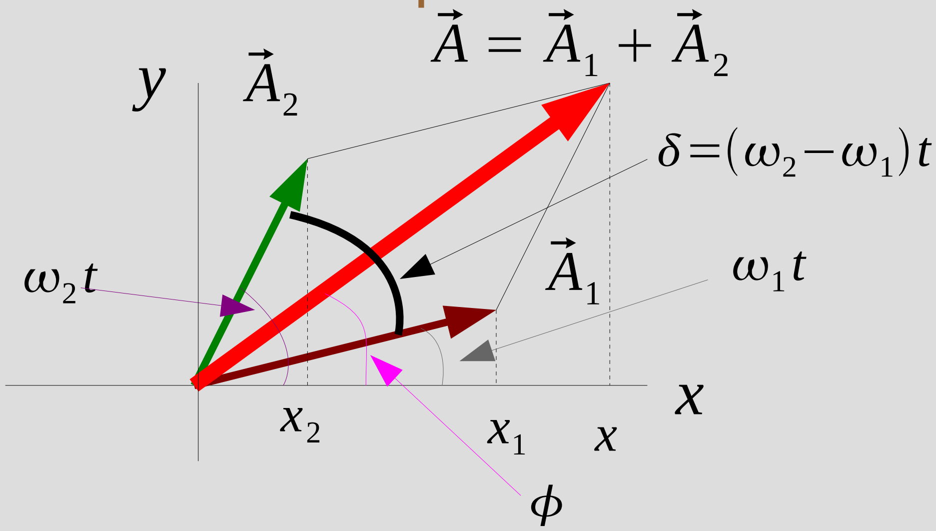
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Utilizando la representación fasorial:

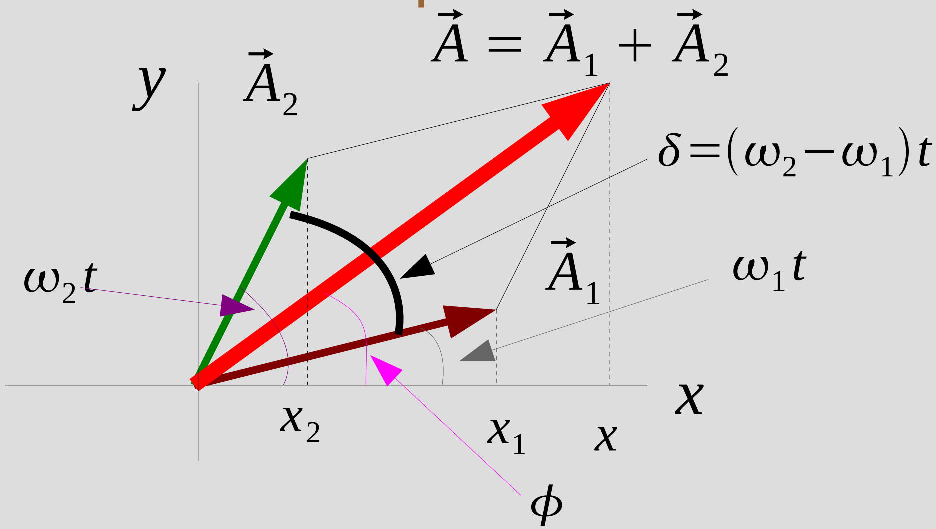


4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ ya no es constante.*

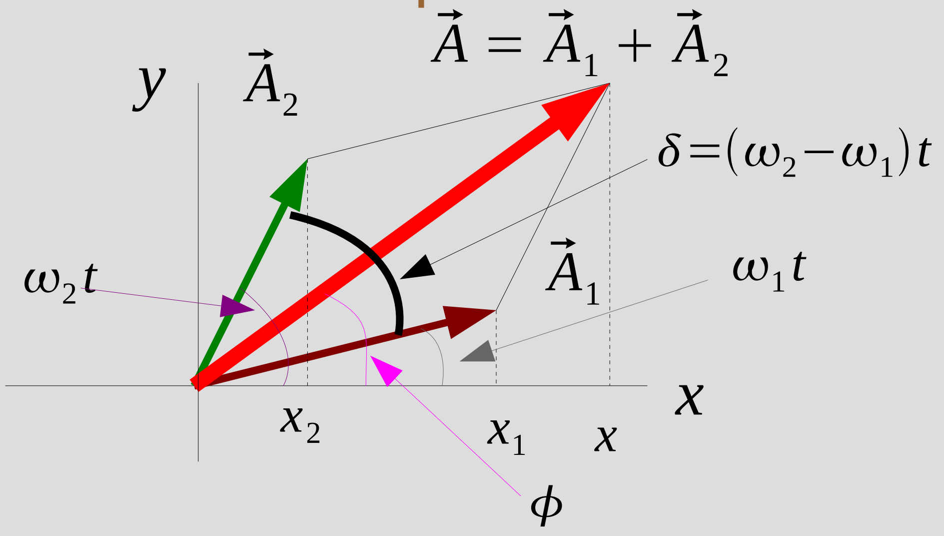
$$\delta=\omega_2 t-\omega_1 t=(\omega_2-\omega_1)t$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ ya no es constante.*

$$\boxed{\delta = \omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1) t}$$

- $|\vec{A}|$ *irá variando entre*

  ($A_1 + A_2$) y ($A_1 - A_2$)

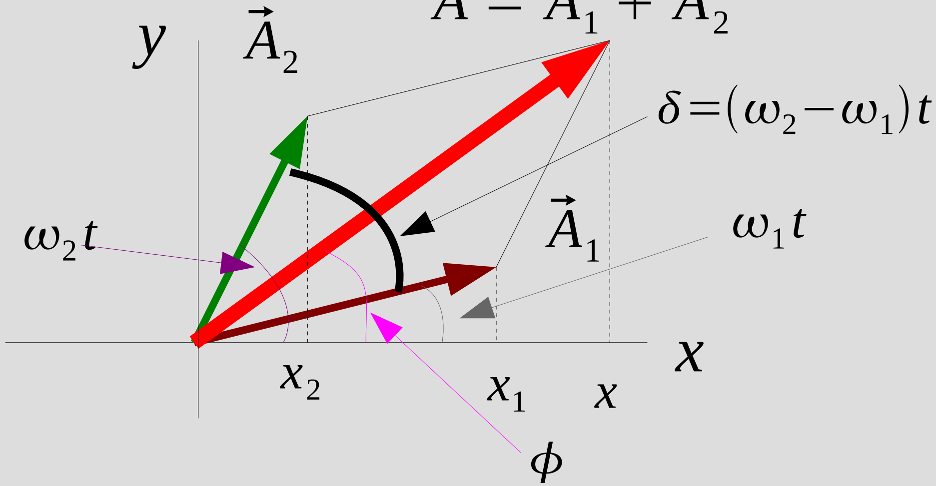
4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Utilizando la representación fasorial:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$



- *δ ya no es constante.*

$$\boxed{\delta=\omega_2 t-\omega_1 t=(\omega_2-\omega_1)t}$$

- $|\vec{A}|$ *irá variando entre*

  $(A_1 + A_2)$ y $(A_1 - A_2)$

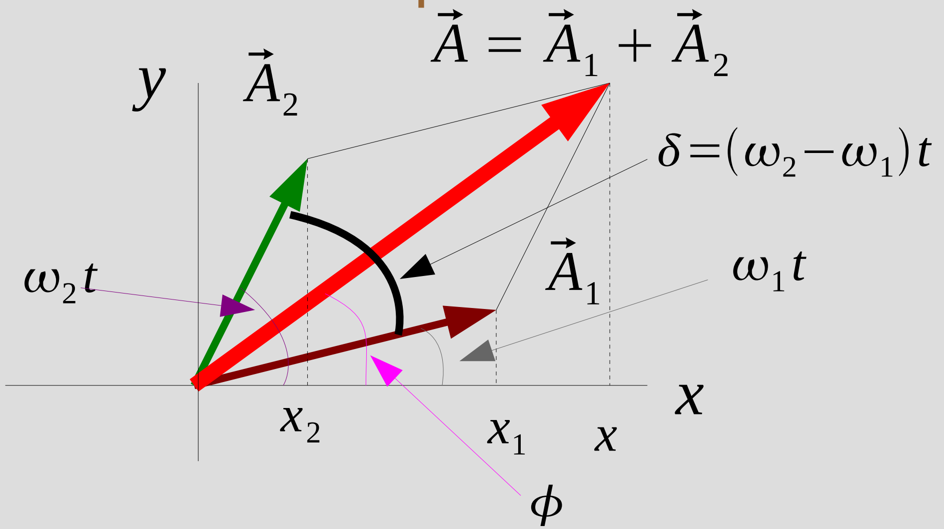
- *El movimiento no será un MAS*

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ ya no es constante.*

$$\boxed{\delta = \omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1) t}$$

- $|\vec{A}|$ *irá variando entre* $(A_1 + A_2)$ *y* $(A_1 - A_2)$
- *El movimiento no será un MAS*

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\delta)}}$$

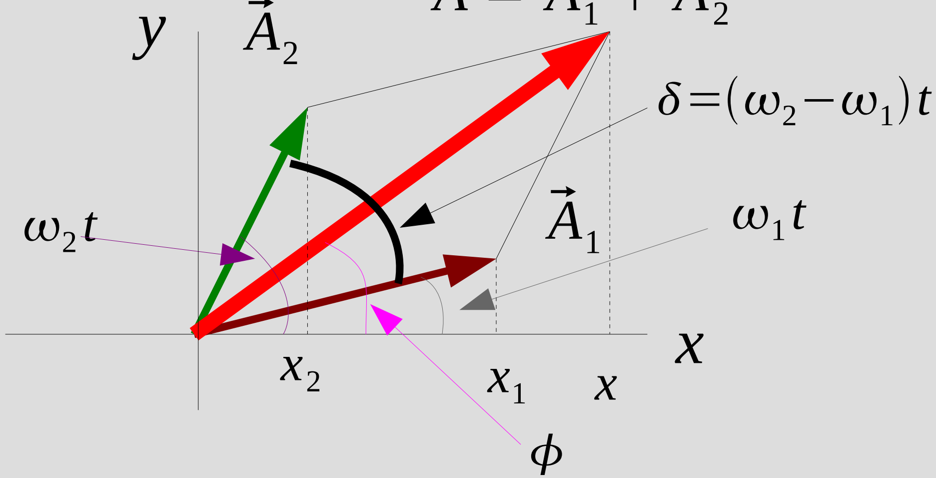
4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Utilizando la representación fasorial:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$



- *δ ya no es constante.*

$$\boxed{\delta=\omega_2 t-\omega_1 t=(\omega_2-\omega_1)t}$$

- $|\vec{A}|$ *irá variando entre* (A_1+A_2) *y* (A_1-A_2)
- *El movimiento no será un MAS*

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\delta)}}$$

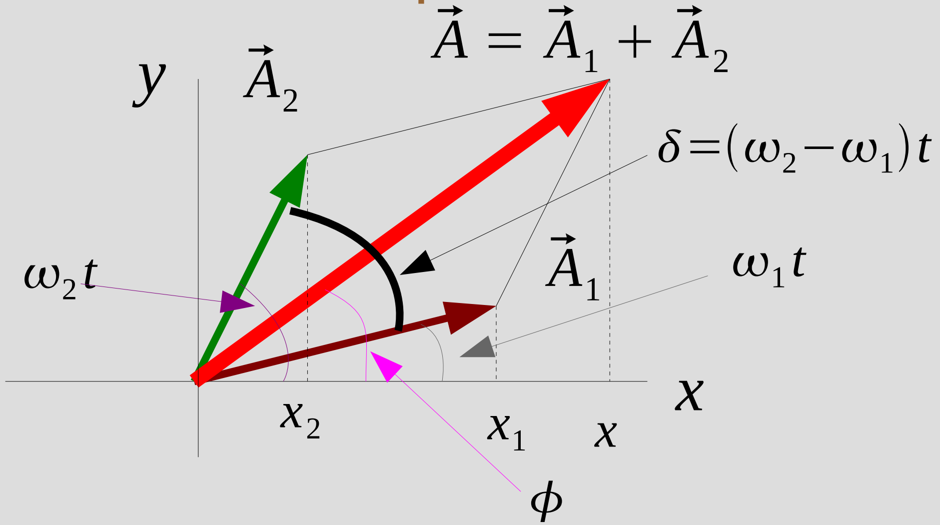
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left((\omega_1-\omega_2)t\right)}$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ ya no es constante.*

$$\boxed{\delta=\omega_2 t-\omega_1 t=(\omega_2-\omega_1)t}$$

- *$|\vec{A}|$ irá variando entre $(A_1 + A_2)$ y $(A_1 - A_2)$*
- *El movimiento no será un MAS*

Amplitud del movimiento

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta)}}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos((\omega_1-\omega_2)t)} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1+A_2}$$

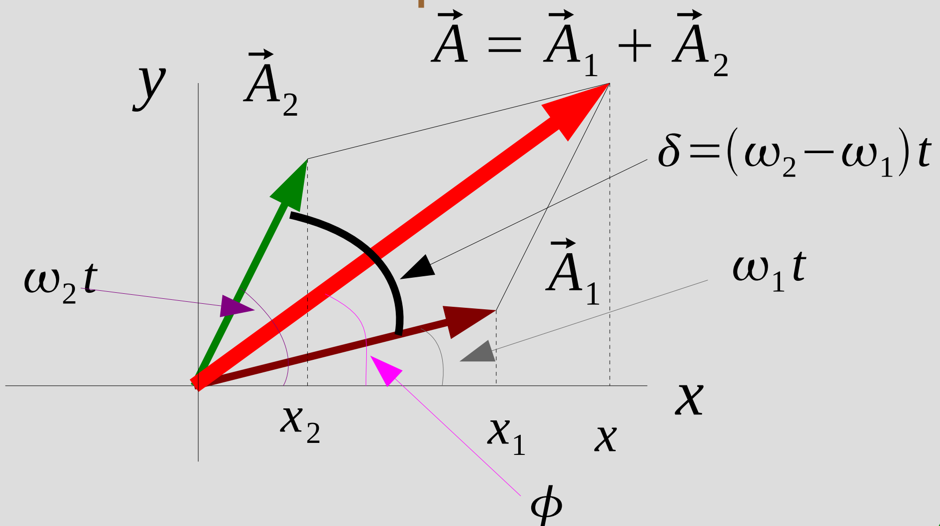
$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = A_1-A_2}$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Utilizando la representación fasorial:



- *δ ya no es constante.*

$$\delta = \omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1) t$$

- *$|\vec{A}|$ irá variando entre $(A_1 + A_2)$ y $(A_1 - A_2)$*
- *El movimiento no será un MAS*

Amplitud del movimiento

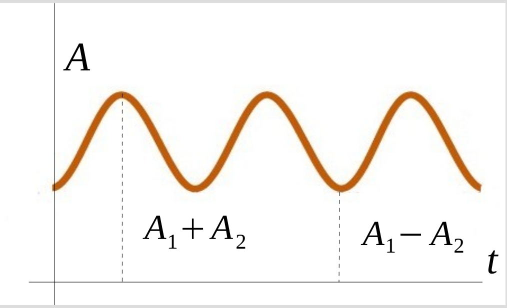
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\delta)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2) t)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2} = A_1 + A_2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2} = A_1 - A_2$$

Amplitud modulada



4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\boxed{x = 2 A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)}$$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\boxed{x = 2 A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)}$$

Amplitud modulada

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\boxed{x = 2 A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)}$$

Amplitud modulada

Movimiento oscilatorio

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

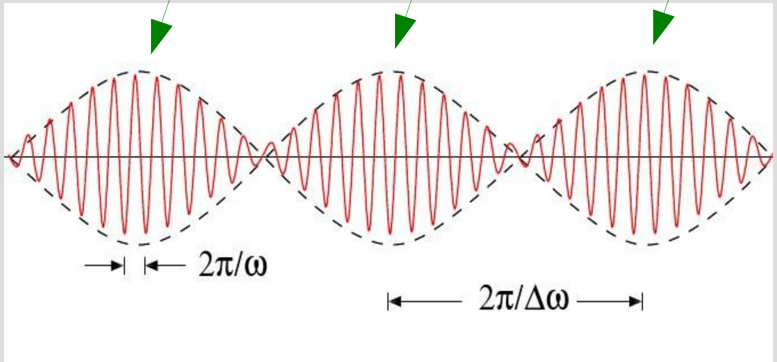
$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\boxed{x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)}$$

Amplitud modulada

Movimiento oscilatorio

Pulsaciones *(si* $\omega_1 \approx \omega_2$ *)*



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t) \end{aligned}}$$

Caso particular, si $A_1 = A_2$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_1 \cos(\omega_2 t)$$

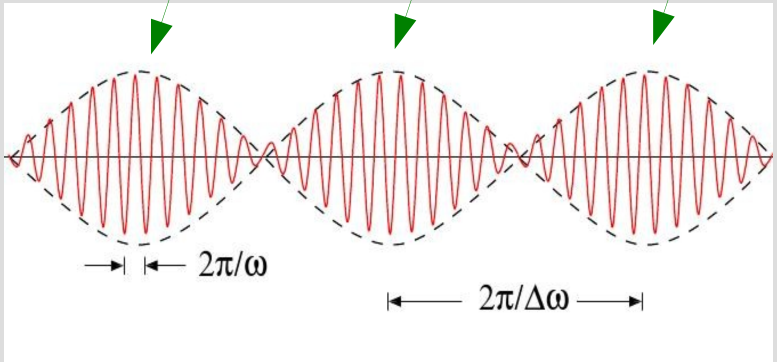
$$x = A_1 \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\boxed{x = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)}$$

Amplitud modulada

Movimiento oscilatorio

Pulsaciones *(si* $\omega_1 \approx \omega_2$ *)*



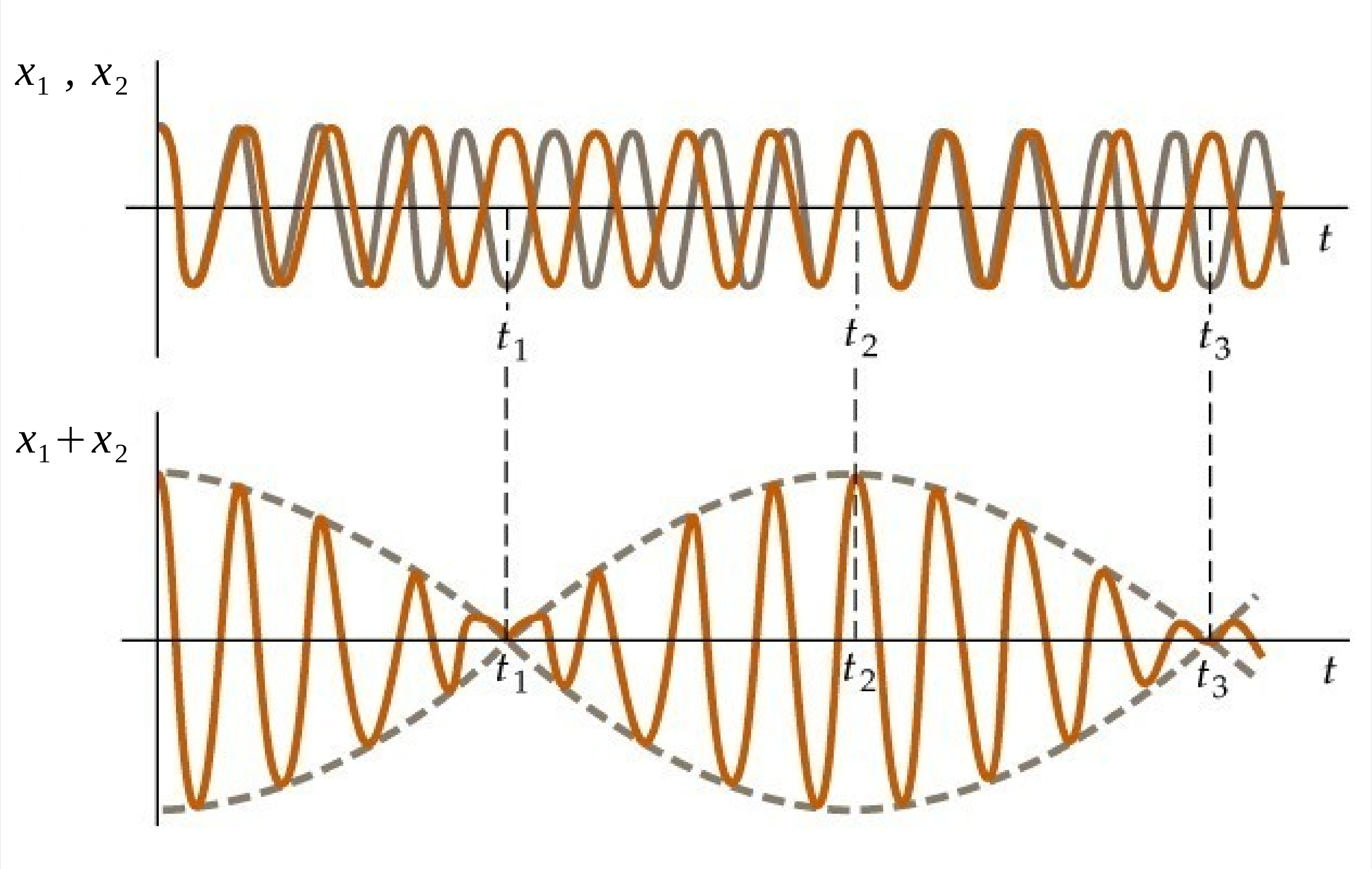
Es un movimiento '*oscilatorio*' de frecuencia $\frac{|\omega_1 + \omega_2|}{2}$

con una '*amplitud*' modulada y pulsaciones de frecuencia $\boxed{\omega_p = |\omega_1 - \omega_2|}$

4.3 Sup. MAS igual dirección, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$$



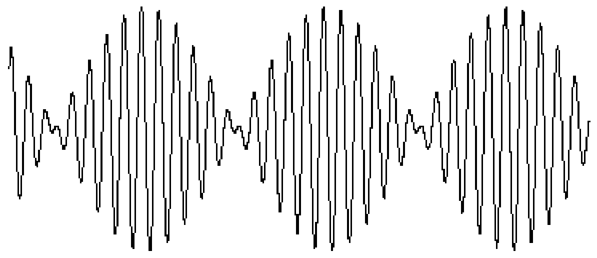
Ejercicios

Ejercicio: ¿Cuál tiene que ser la diferencia de frecuencias de dos MAS de igual amplitud para dar lugar a 2 pulsaciones por segundo?

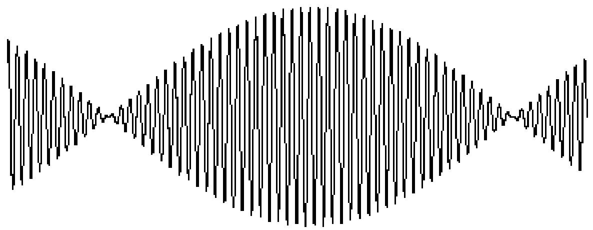
(a) 1 Hz, (b). 0.5 Hz, (c) 2 Hz, (d) 4 Hz, (e) 0.25 Hz

Ejercicio: Las siguientes gráficas muestran, en la misma escala de tiempo, pulsaciones que ocurren cuando se superponen dos pares diferentes de oscilaciones armónicas. Para cuál de los dos pares la diferencia de frecuencias entre las oscilaciones originales es más grande?

(a) caso 1,   (b) caso 2,   (c) la diferencia de frecuencia es igual en los dos casos
(d) se necesita más información para contestar a la pregunta



Caso 1.



Caso 2.

Módulo 1: Oscilaciones

Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

1.1 Cinemática del MAS.
1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
1.3 Ejemplos de MAS. (masa-muelle, péndulos, sistemas de muelles, ...)
1.4 Energía potencial elástica.
1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de energía potencial.
1.6 Método de la conservación de E.

Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

2.1 Fuerza de fricción viscosa.
2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
2.4 Energía de las oscilaciones amortiguadas. Factor de calidad.
2.5 Amortiguamiento crítico y sobreamortiguamiento.

Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
3.2 Solución de la ecuación diferencial. Estados transitorio y estacionario.
3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
3.4 Resonancia en amplitud y energía. Impedancia del oscilador.
3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
3.6 Factor de calidad y anchura de la resonancia.

Lección 4. Superposición de varios MAS

4.1 Principio de superposición. Representación fasorial.
4.2 Superposición de dos MAS: Igual dirección y frecuencia.
4.3 Superposición de dos MAS: Igual dirección diferente frecuencia.
4.4 Superposición de dos MAS de direcciones perpendiculares.

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t + \delta) \end{aligned}}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- δ *es la diferencia de fase entre ambos MAS*

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

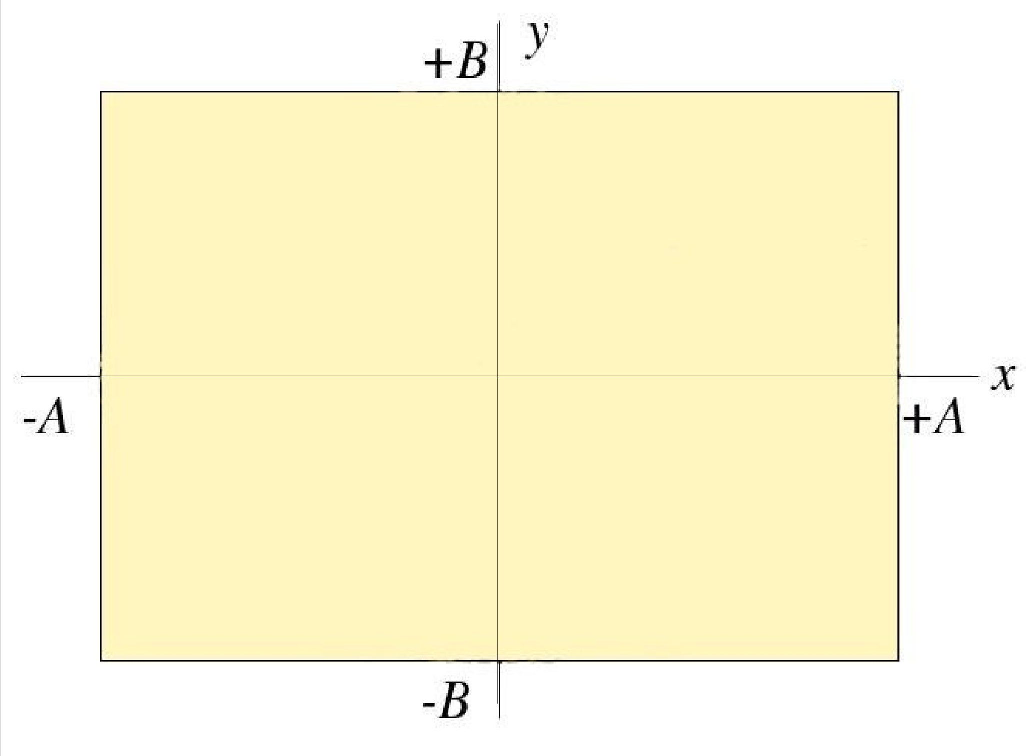
- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- δ *es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- δ *es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x=\pm A$, $y=\pm B$

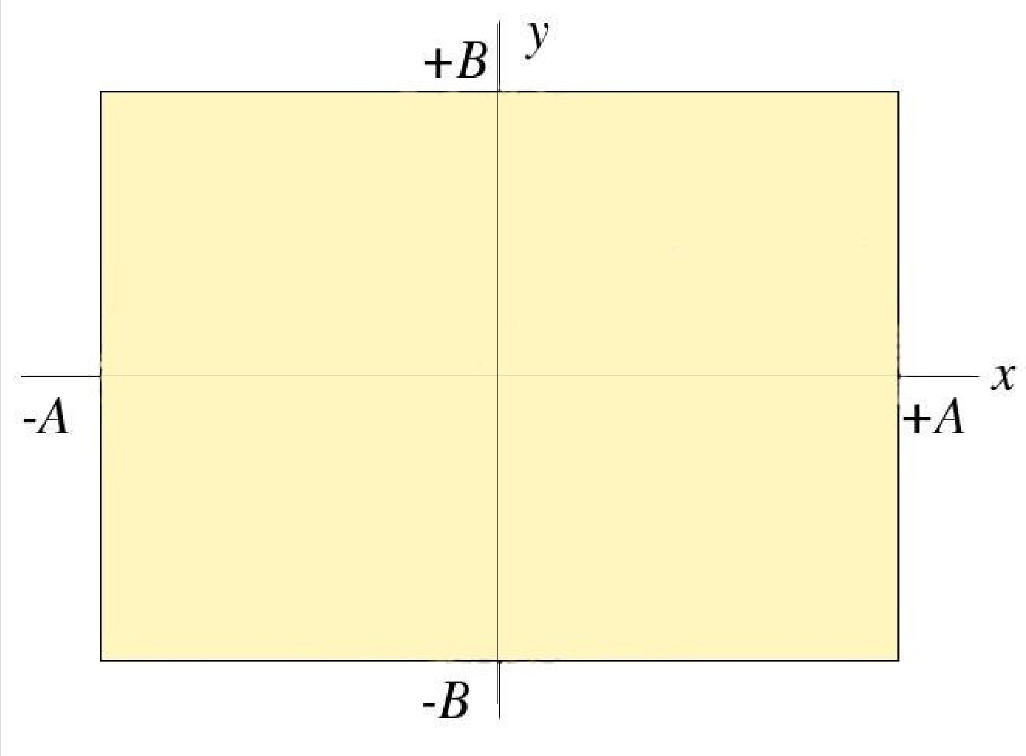


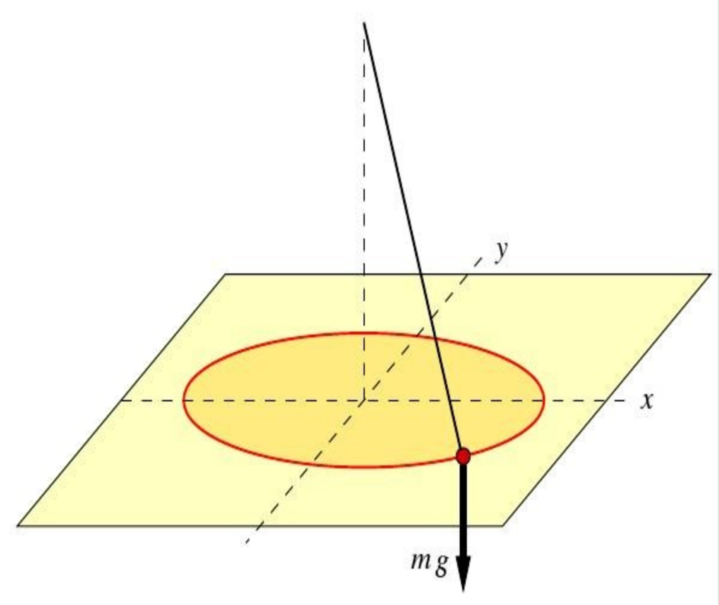
4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- δ *es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$





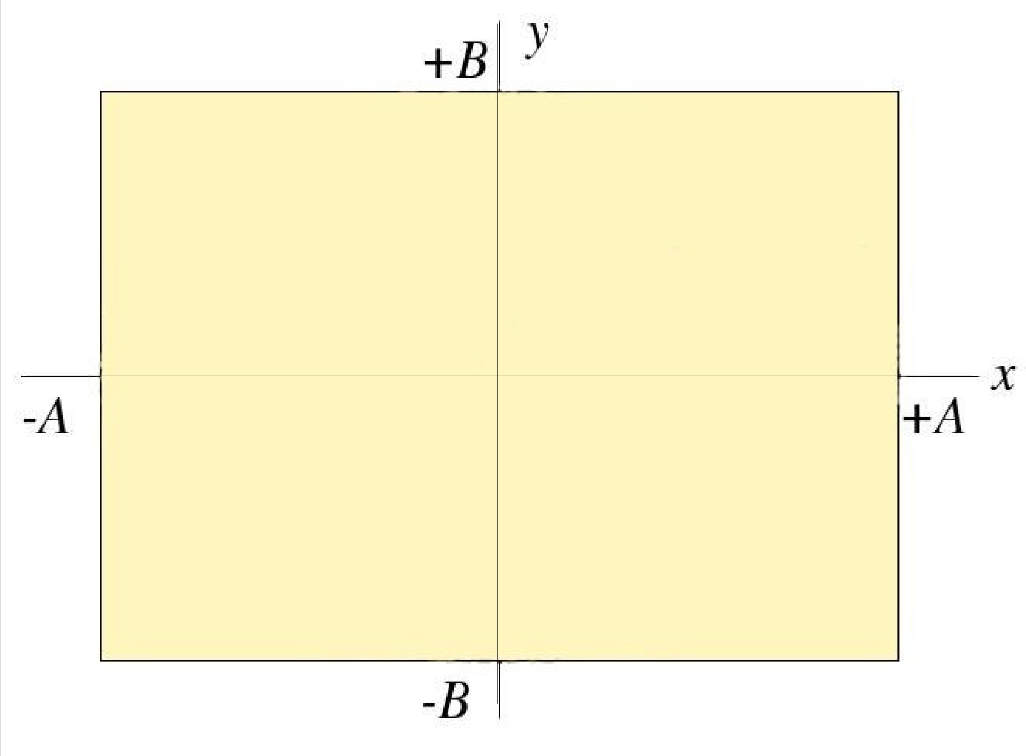
Ver que es un:
Péndulo que se puede mover en el plano x,y

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso ***δ=0***

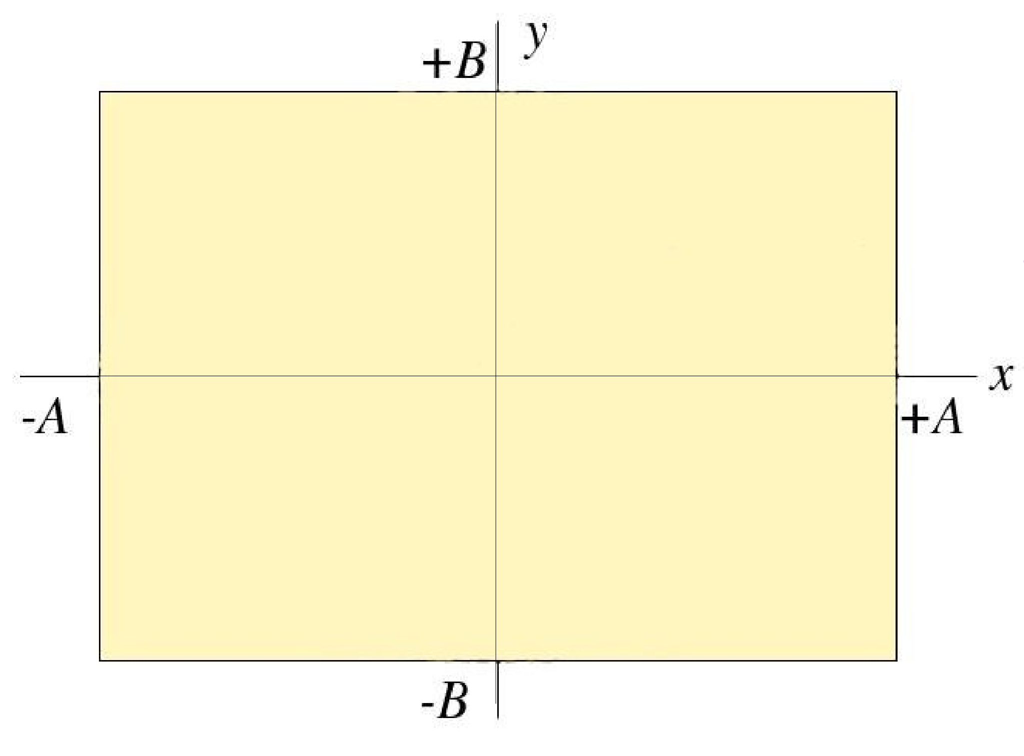
$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta = 0$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

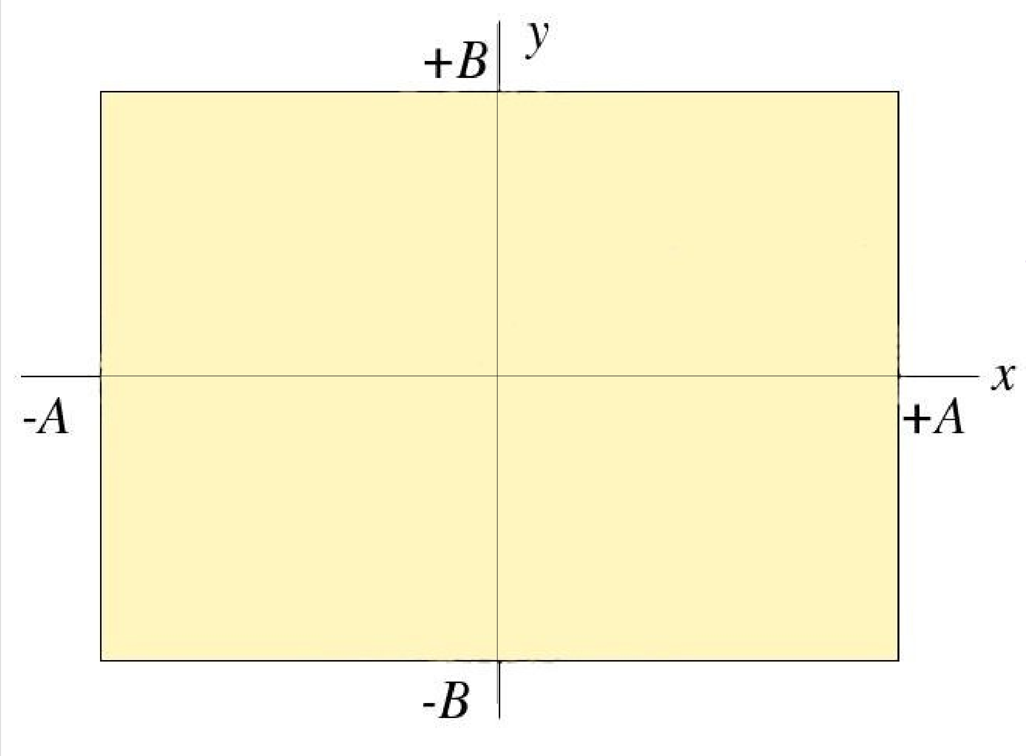
$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso δ=0

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$$

Ecuación de una recta

$$\boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

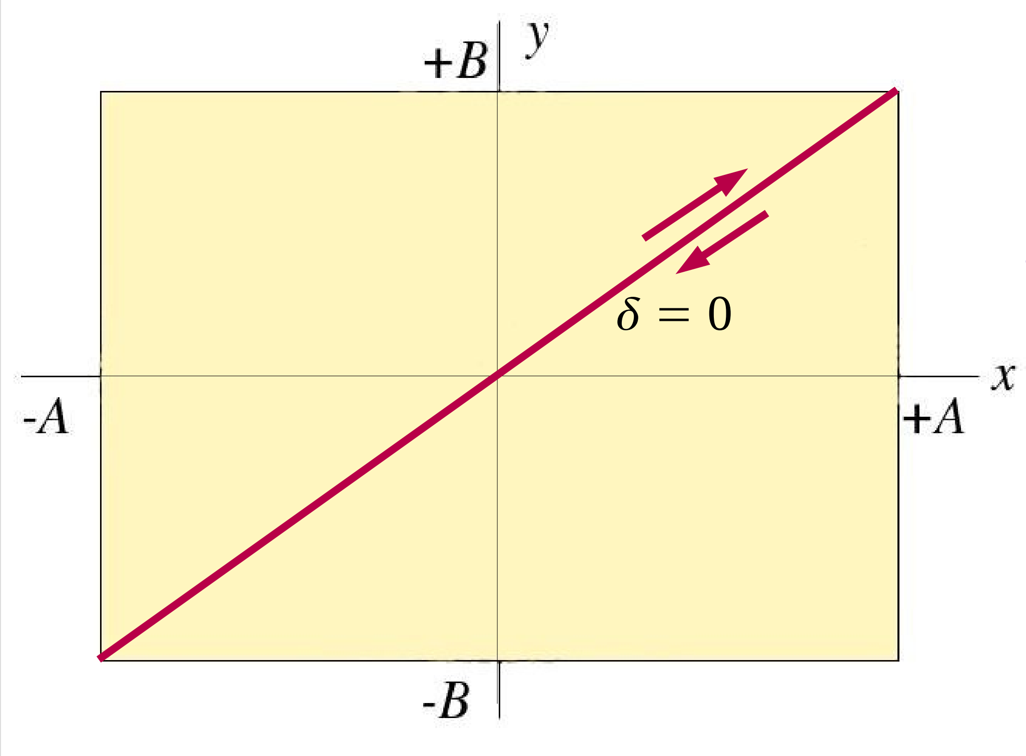
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta = 0$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

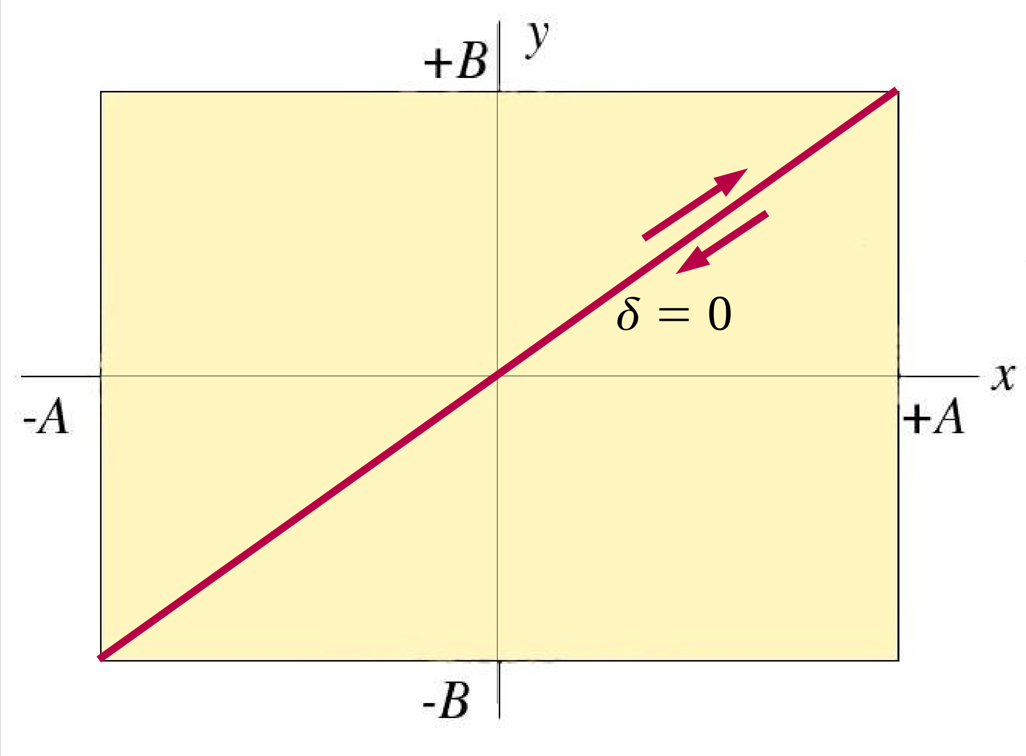
Ecuación de una recta

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\boldsymbol{\delta=0}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

Ecuación de una recta

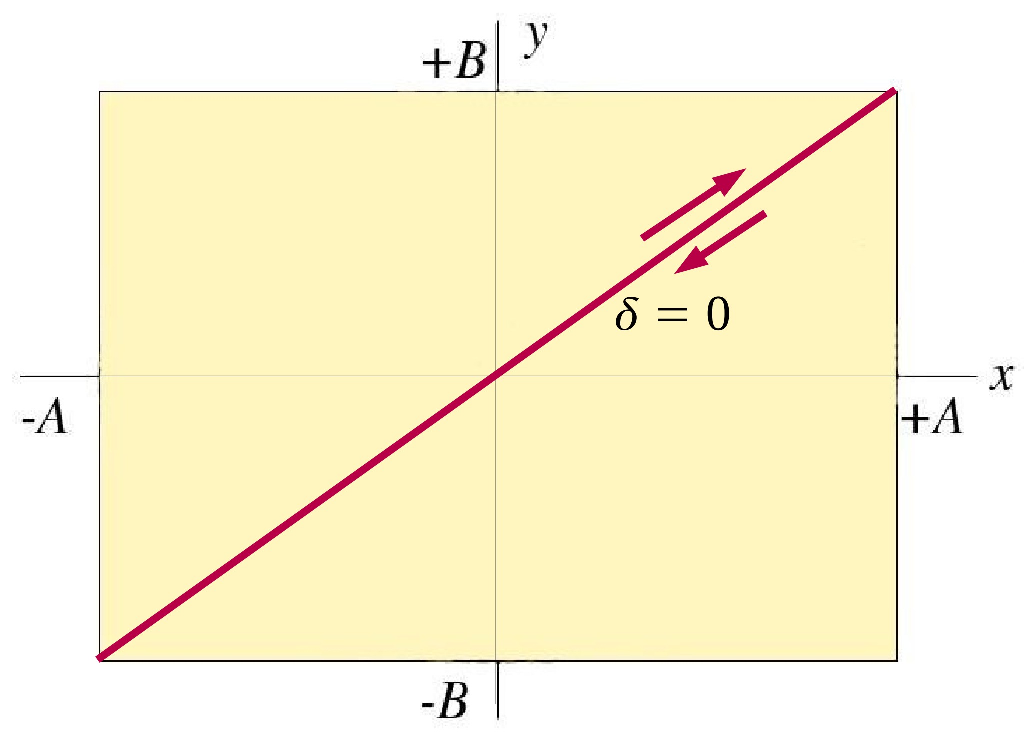
De hecho es un MAS:

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso *δ=0*

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t) \end{aligned}}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

Ecuación de una recta

De hecho es un MAS:

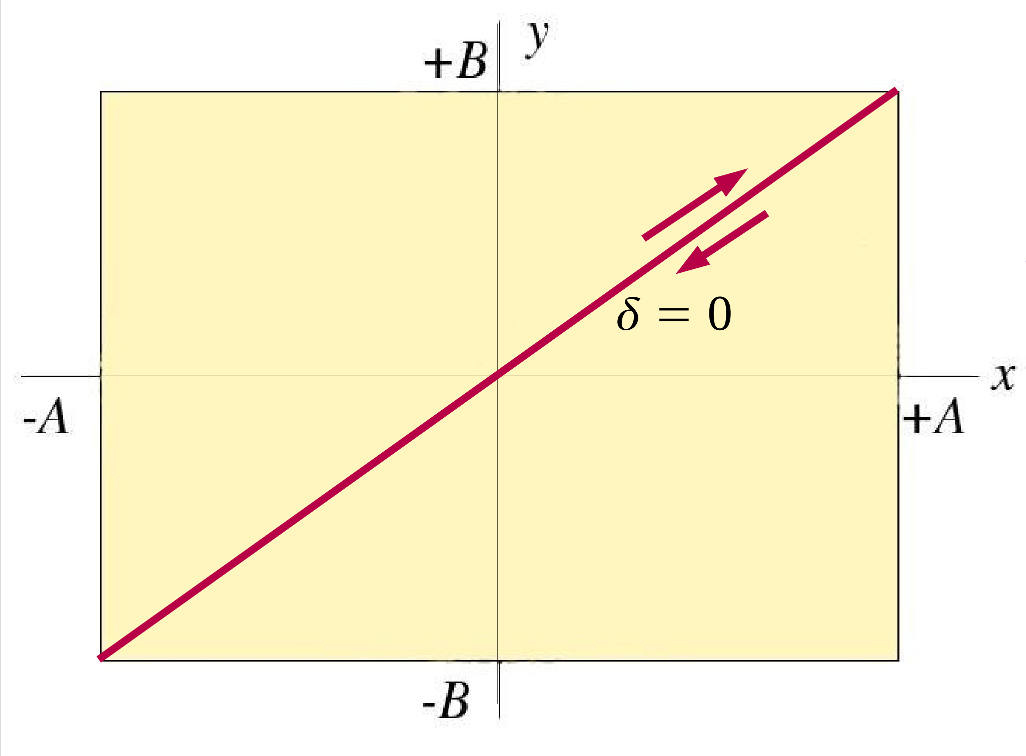
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso *δ=0*

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

Ecuación de una recta

De hecho es un MAS:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

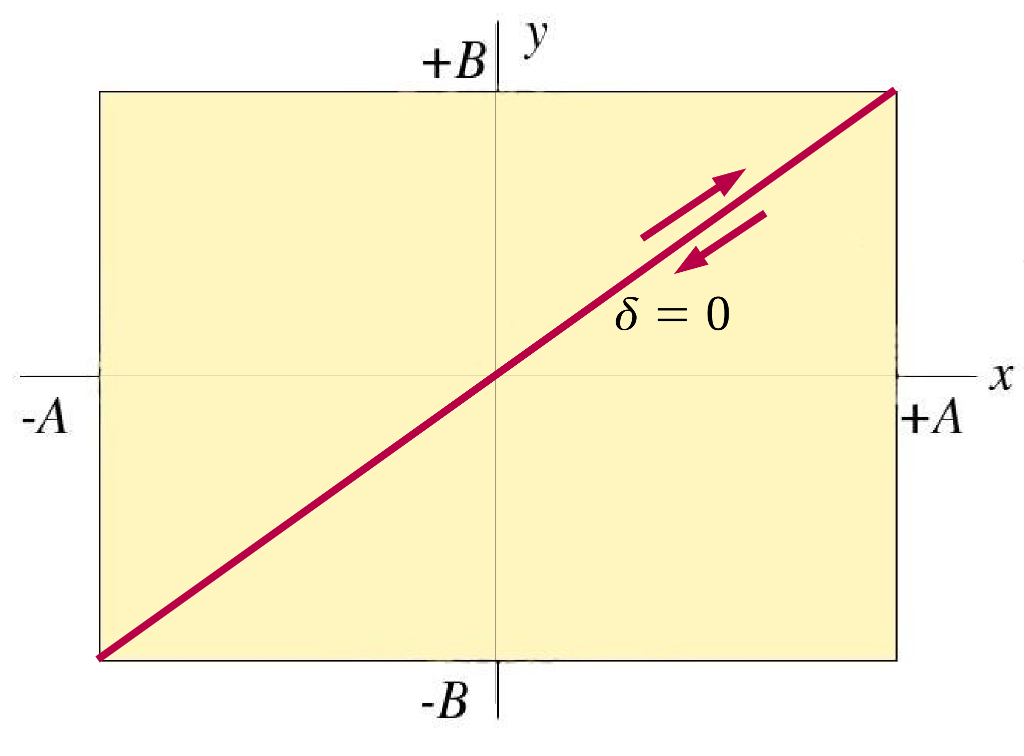
$$r = \sqrt{(A^2 + B^2)\cos^2(\omega t)}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t+\delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso δ=0

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

Ecuación de una recta

De hecho es un MAS:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$r = \sqrt{(A^2+B^2)\cos^2(\omega t)}$$

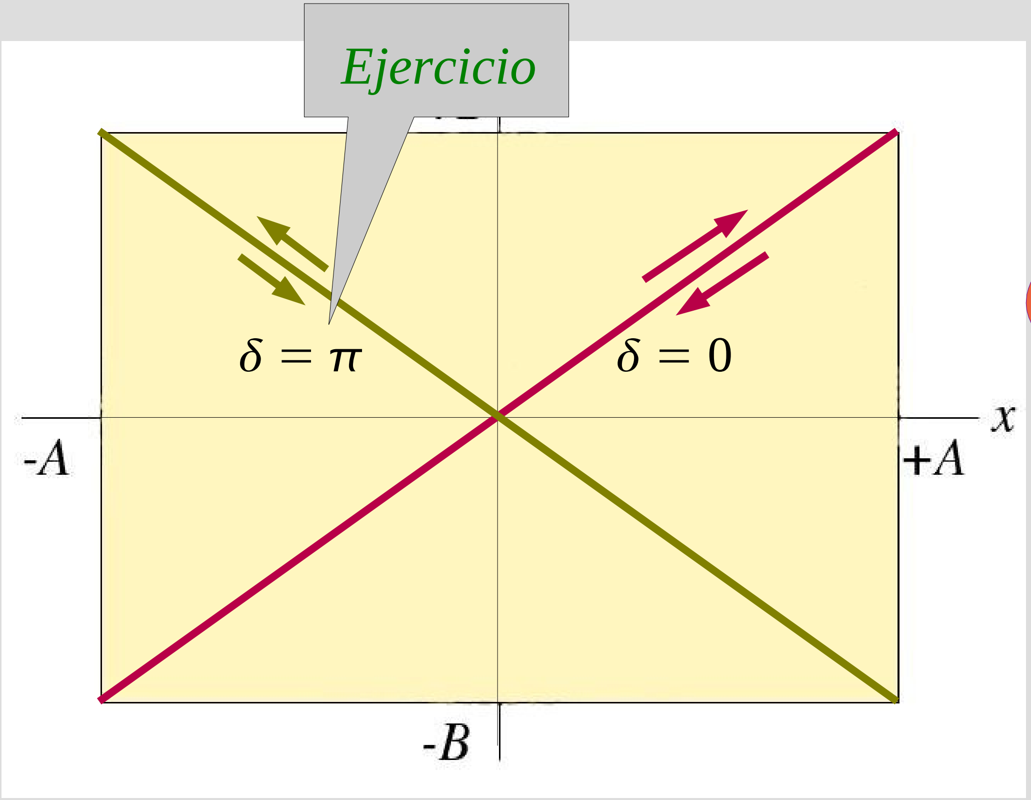
$$\boxed{r = \sqrt{(A^2+B^2)}\cos(\omega t)}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso *δ=0*

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \Rightarrow \boxed{y = \frac{B}{A}x}$$

Ecuación de una recta

De hecho es un MAS:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(A^2 + B^2)\cos^2(\omega t)}$$

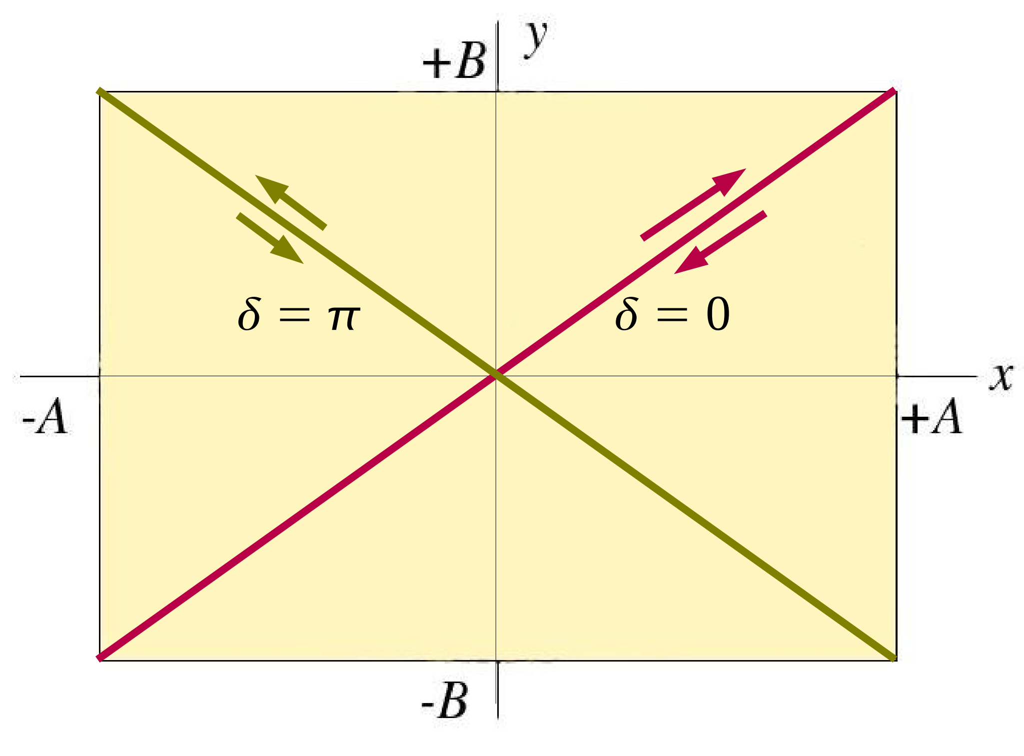
$$\boxed{r = \sqrt{(A^2 + B^2)}\cos(\omega t)}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta = \pi/2$

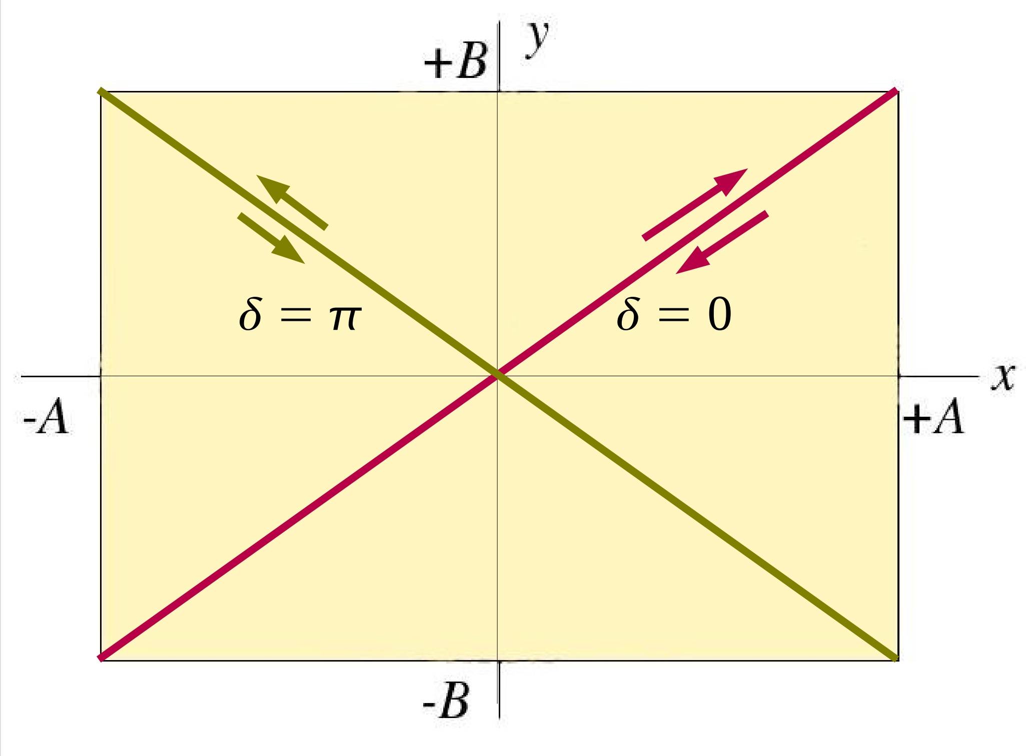
$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi/2)$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- δ *es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta = \pi/2$

$-\sin(\omega t)$

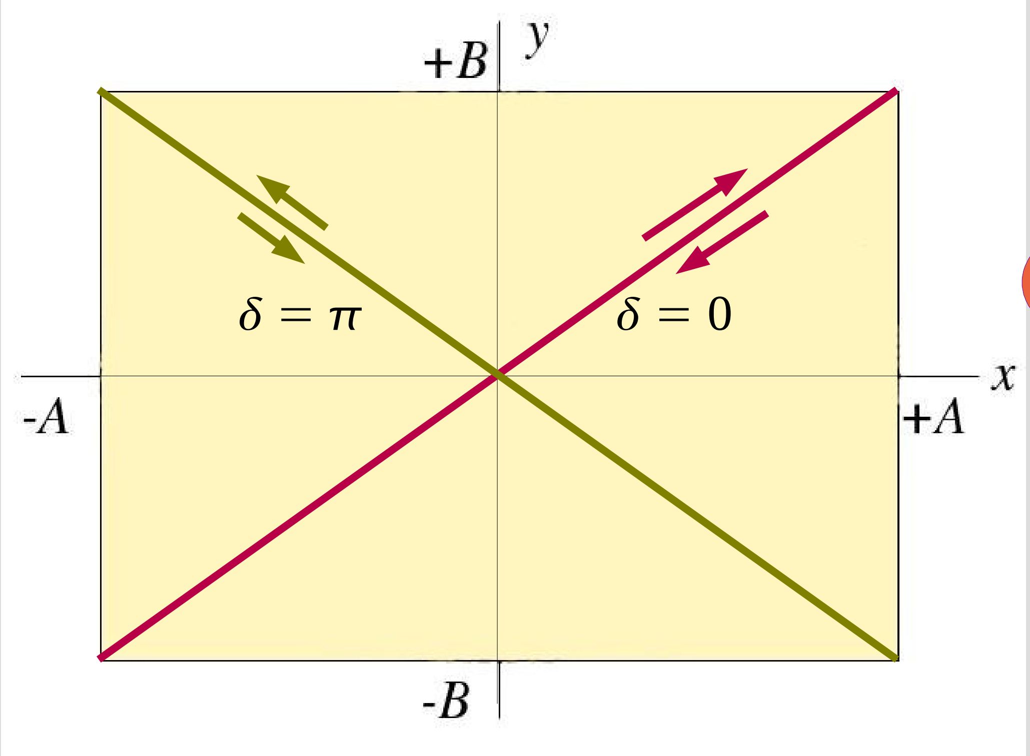
$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi/2)$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta = \pi/2$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi/2)$$

$-\sin(\omega t)$

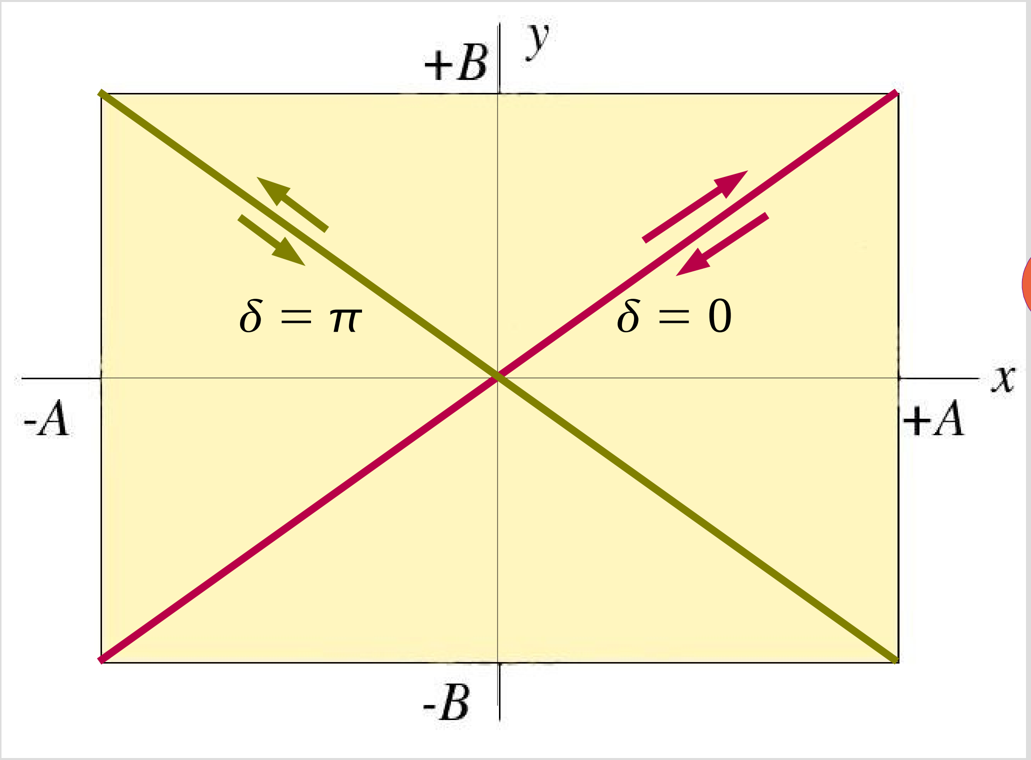
$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t)$$
$$\frac{y}{B} = -\sin(\omega t)$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t+\delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x=\pm A$, $y=\pm B$



Caso $\delta=\pi/2$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t+\pi/2)$$

$-\sin(\omega t)$

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t)$$
$$\frac{y}{B} = -\sin(\omega t)$$

$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$

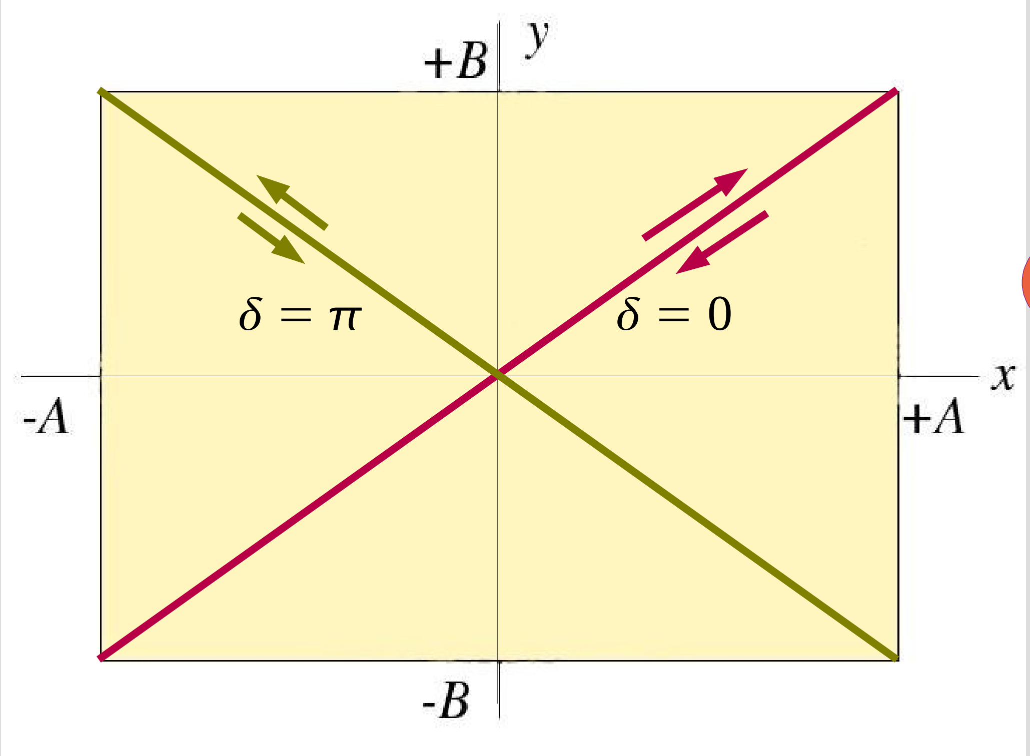
Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta = \pi/2$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi/2)$$

$-\sin(\omega t)$

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t)$$
$$\frac{y}{B} = -\sin(\omega t)$$

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1}$$

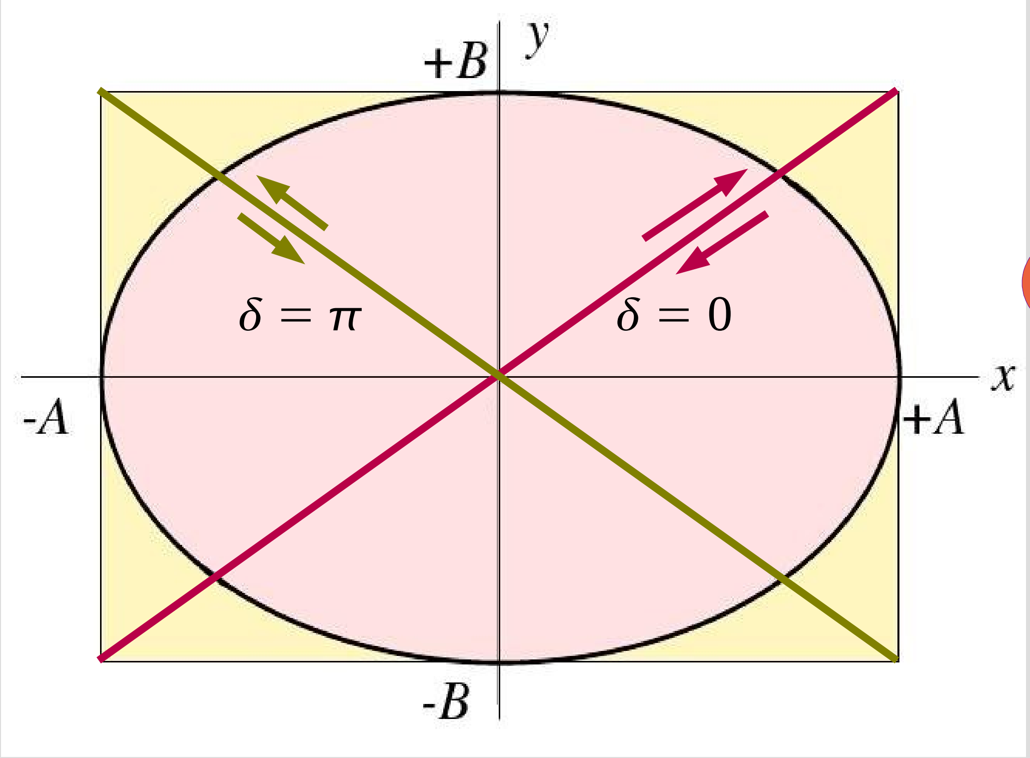
Ecuación de una elipse

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t+\delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por $x = \pm A$, $y = \pm B$*



Caso **δ=π/2**

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi/2)$$

$-\sin(\omega t)$

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t)$$
$$\frac{y}{B} = -\sin(\omega t)$$

$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1}$$

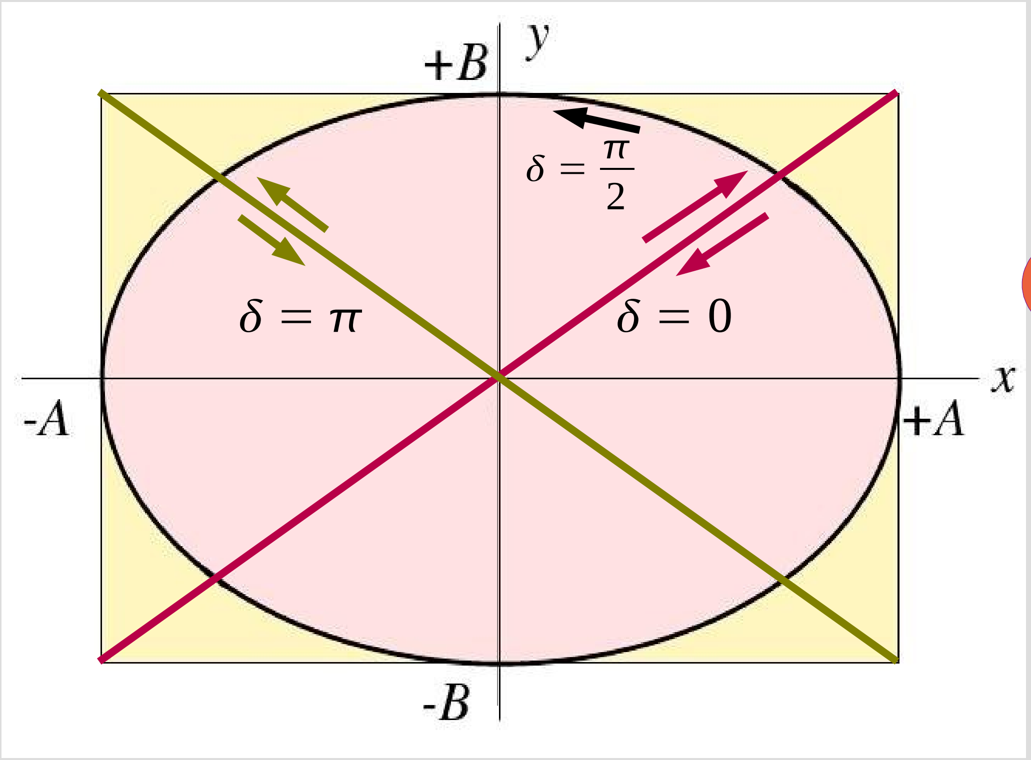
Ecuación de una elipse

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- *δ es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x=\pm A$, $y=\pm B$



Caso **δ=π/2**

$-\sin(\omega t)$

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\pi/2) \end{aligned}$$

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t)$$
$$\frac{y}{B} = -\sin(\omega t)$$

$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1}$$

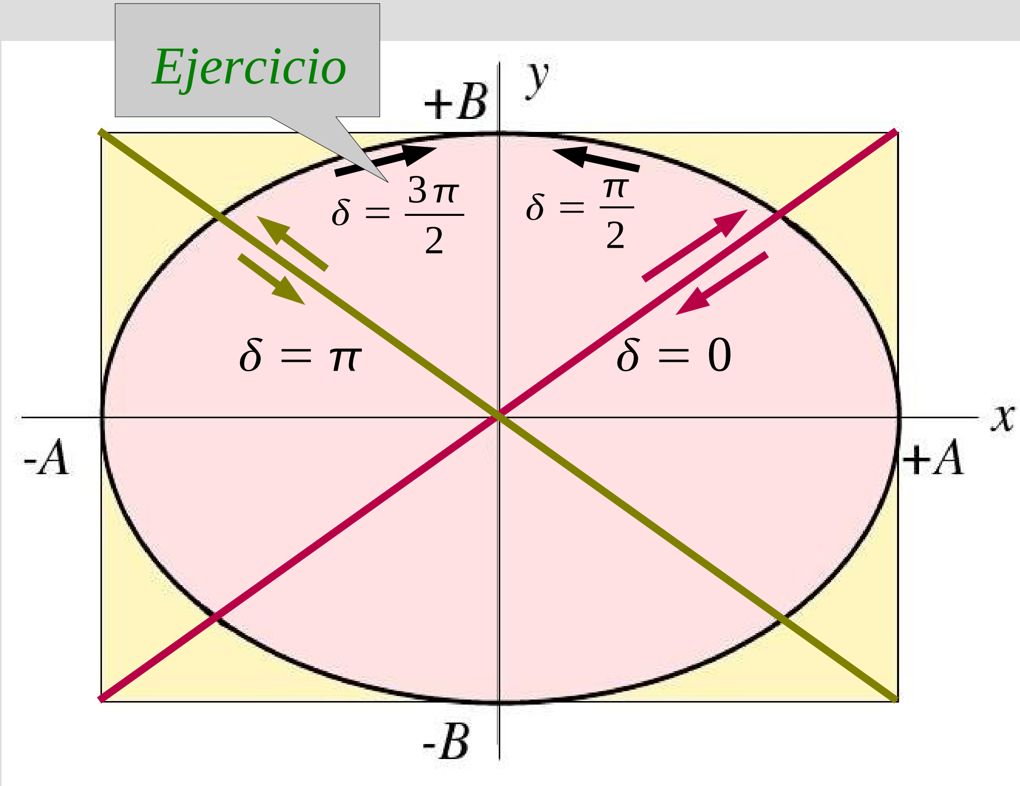
Ecuación de una elipse

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \delta)$$

- *Ambos tienen la misma frecuencia*
- δ *es la diferencia de fase entre ambos MAS*
- *El movimiento de la partícula debe estar limitado por* $x = \pm A$, $y = \pm B$



Caso $\delta=\pi/2$

$-\sin(\omega t)$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi/2)$$

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t)$$
$$\frac{y}{B} = -\sin(\omega t)$$

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1}$$

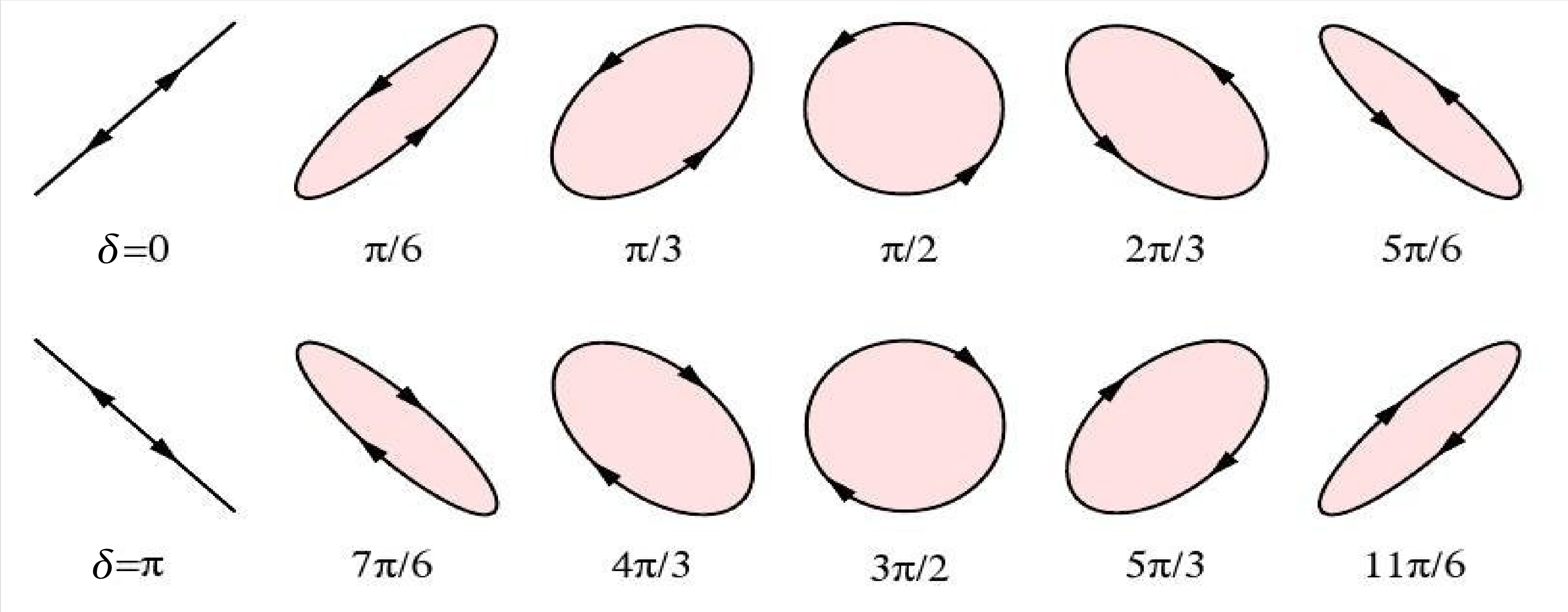
Ecuación de una elipse

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, misma frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t+\delta) \end{aligned}}$$

Movimiento resultante para diferentes valores de ***δ***



4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_x t+\phi) \\ y &= B\cos(\omega_y t+\varphi) \end{aligned}}$$

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_x t+\phi) \\ y &= B\cos(\omega_y t+\varphi) \end{aligned}}$$

- *En este caso las trayectorias pueden ser muy complejas.*

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$x = A\cos(\omega_x t + \phi)$$
$$y = B\cos(\omega_y t + \varphi)$$

- *En este caso las trayectorias pueden ser muy complejas.*
- *El movimiento sólo es periódico si* ω_x/ω_y *es un número racional.*

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_x t+\phi) \\ y &= B\cos(\omega_y t+\varphi) \end{aligned}}$$

- *En este caso las trayectorias pueden ser muy complejas.*
- *El movimiento sólo es periódico si* ω_x/ω_y *es un número racional.*
- *El periodo será el mínimo común múltiplo del periodo de los dos MAS*

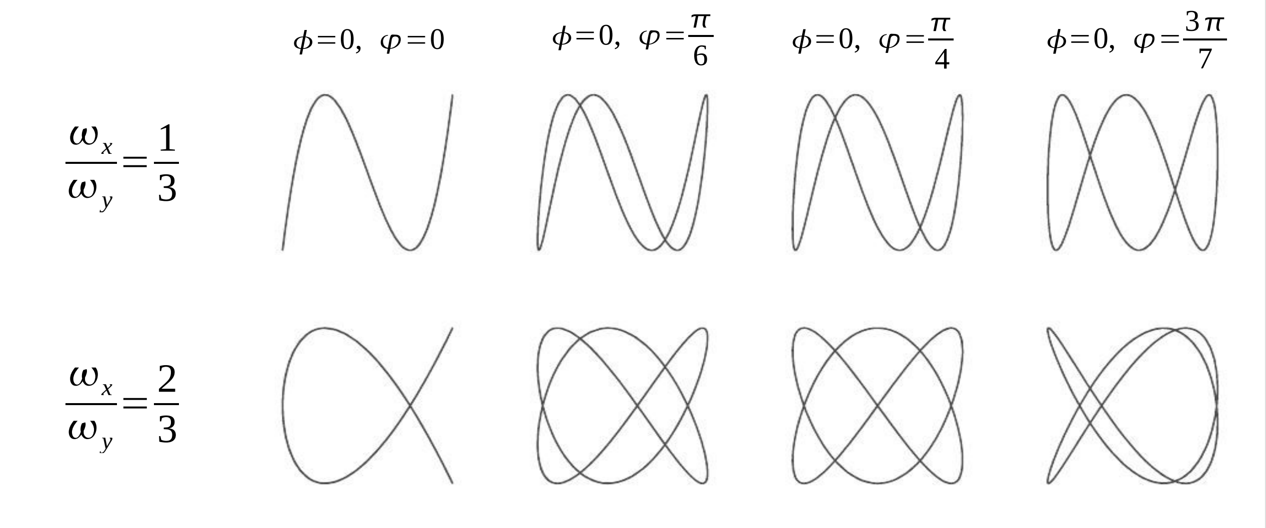
4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Superpondremos dos MAS dados por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_x t+\phi) \\ y &= B\cos(\omega_y t+\varphi) \end{aligned}}$$

- *En este caso las trayectorias pueden ser muy complejas.*
- *El movimiento sólo es periódico si* ω_x/ω_y *es un número racional.*
- *El periodo será el mínimo común múltiplo del periodo de los dos MAS*
- *Las trayectorias de los movimientos periódicos se llaman:*

Figuras de Lissajous



4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(2t) \\ y &= B\cos(3t-\pi/4) \end{aligned}}$$

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(2t) \\ y &= B\cos(3t-\pi/4) \end{aligned}}$$

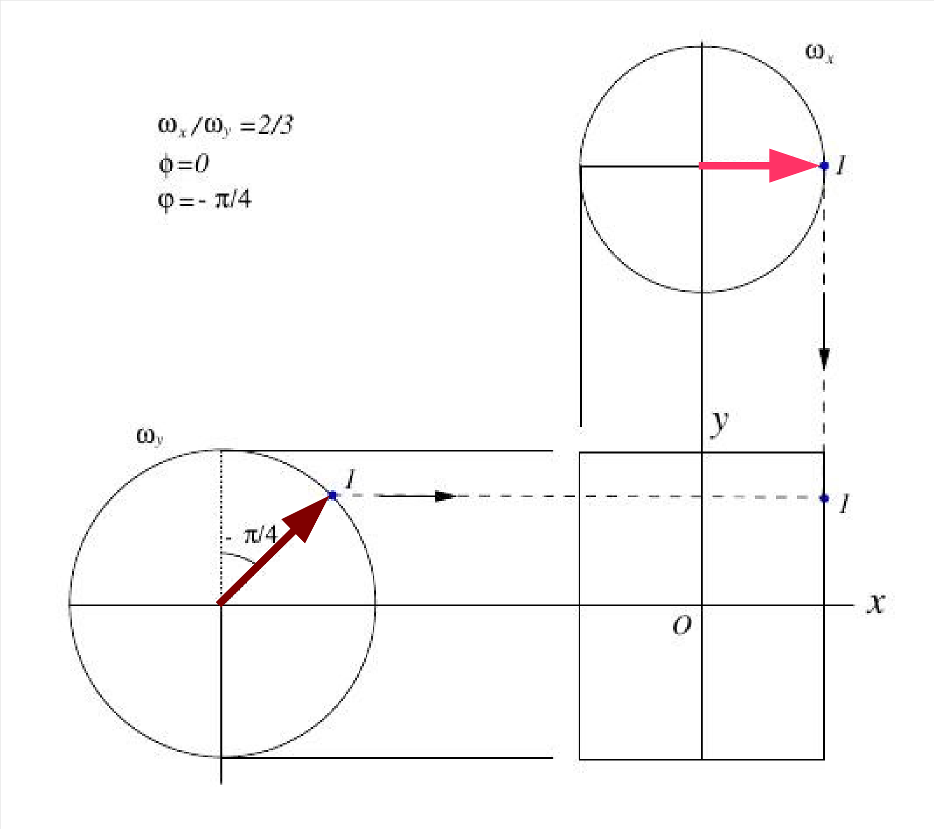
- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS



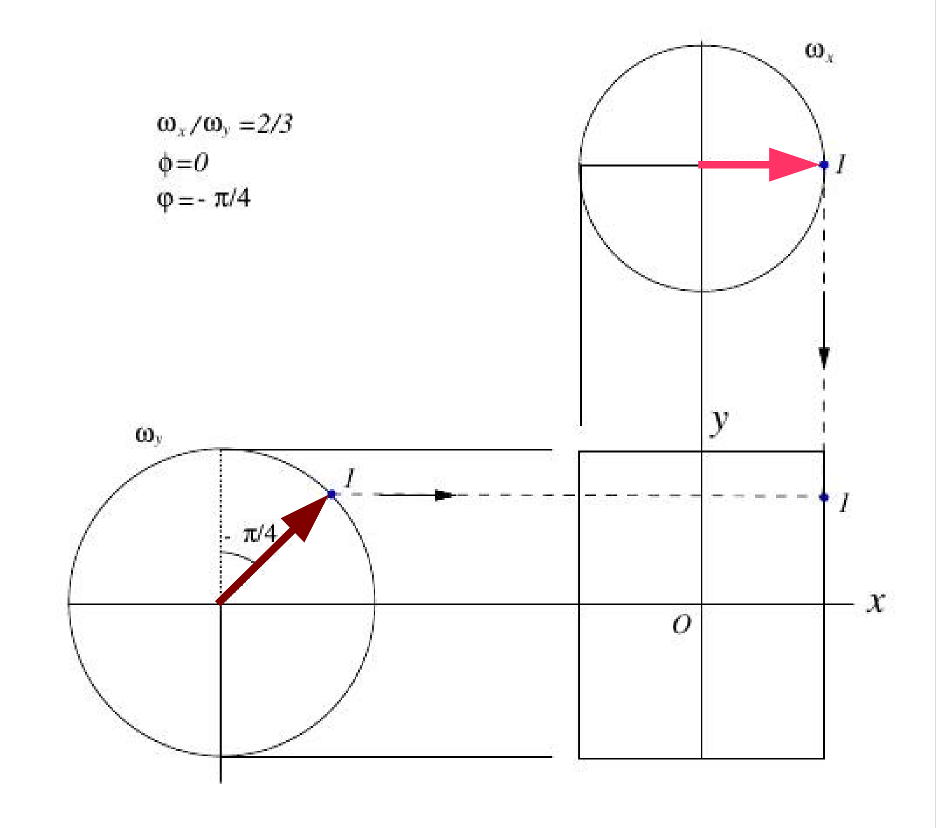
4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia.

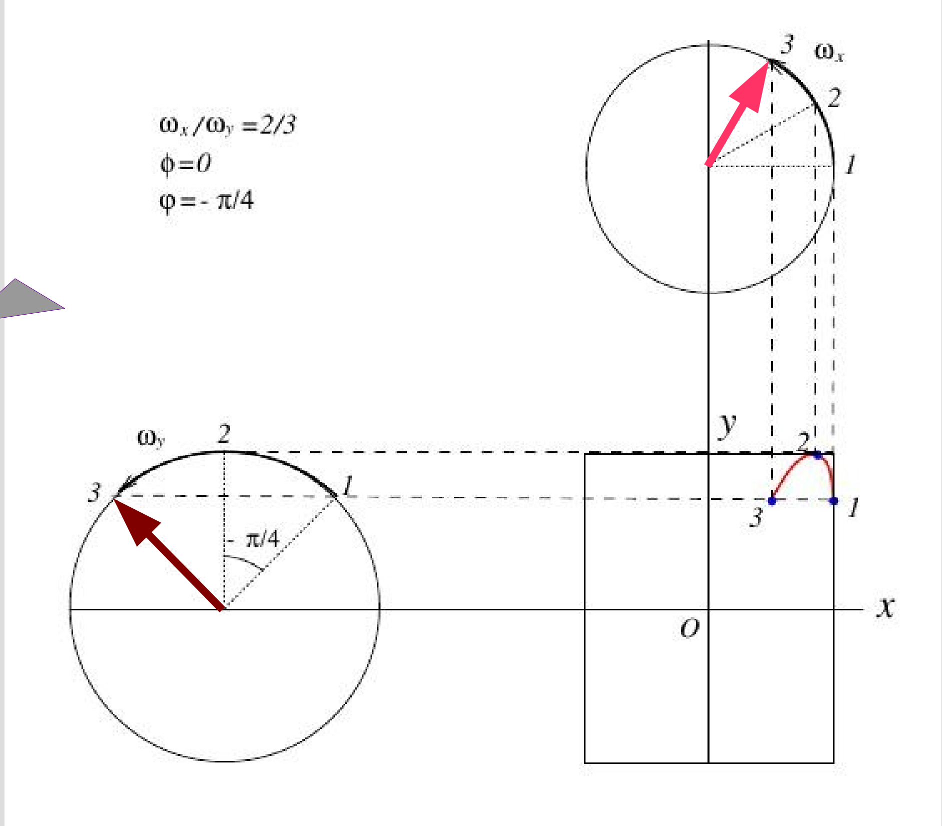


4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS
- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

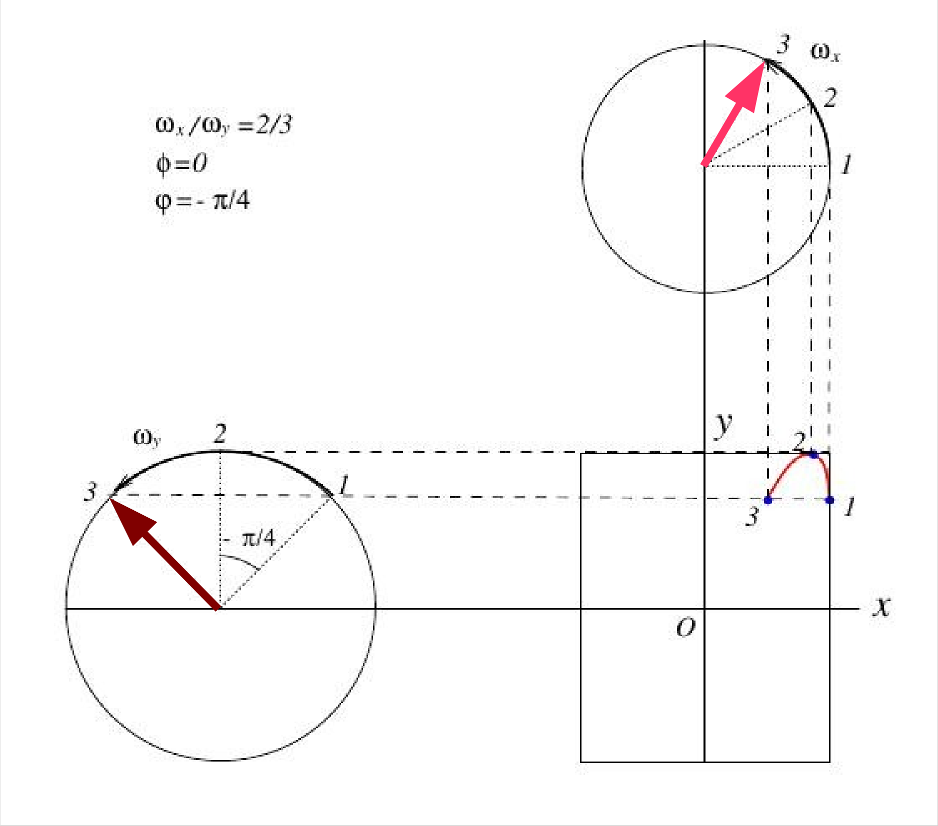
Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(2t) \\ y &= B\cos(3t-\pi/4) \end{aligned}}$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).

- Finalmente se completa la figura



4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

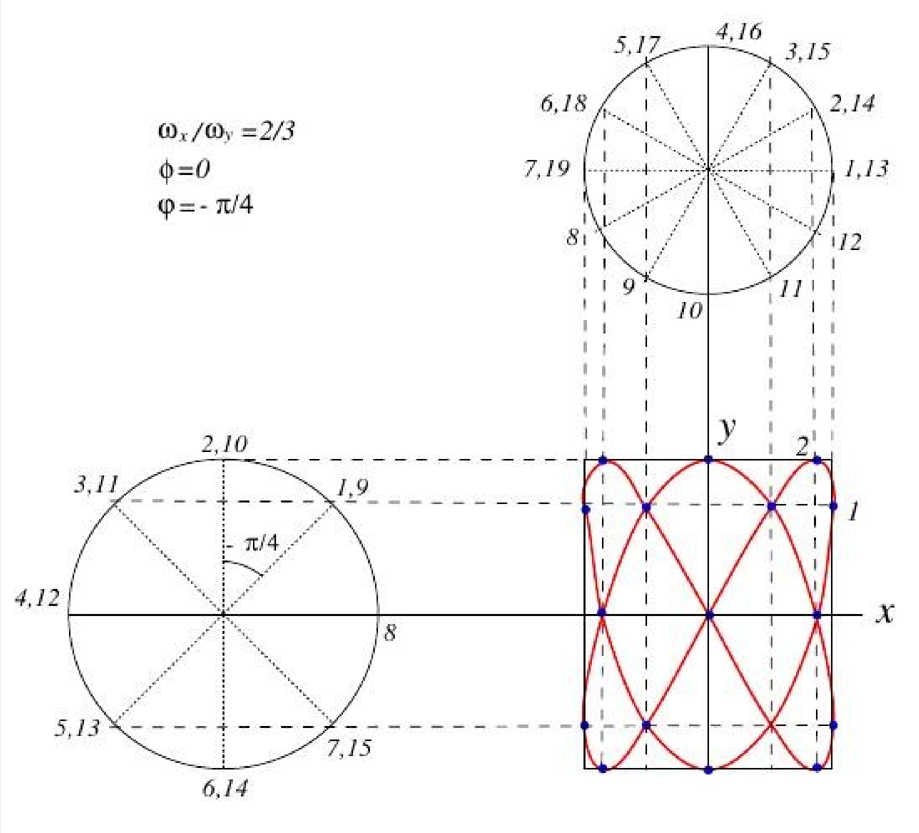
Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).

- Finalmente se completa la figura



Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

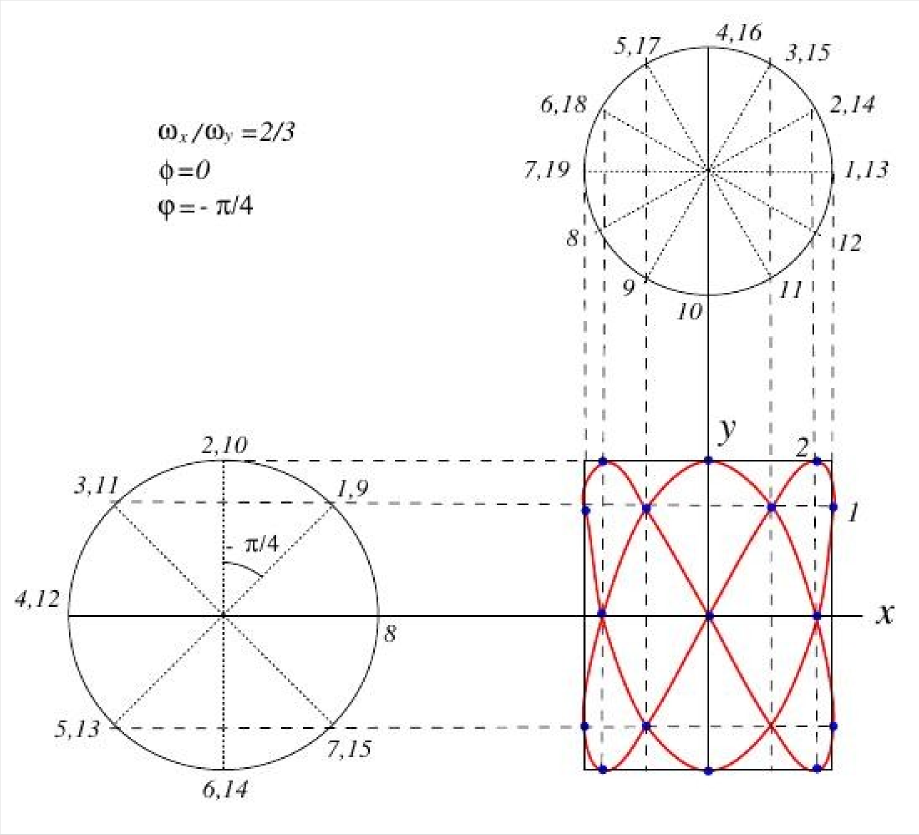
Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A\cos(2t) \\ y &= B\cos(3t-\pi/4) \end{aligned}}$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).

- Finalmente se completa la figura



Observar que si trazamos dos lineas a través de la figura se cumple:

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}}$$

N: número de veces que corta la figura

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

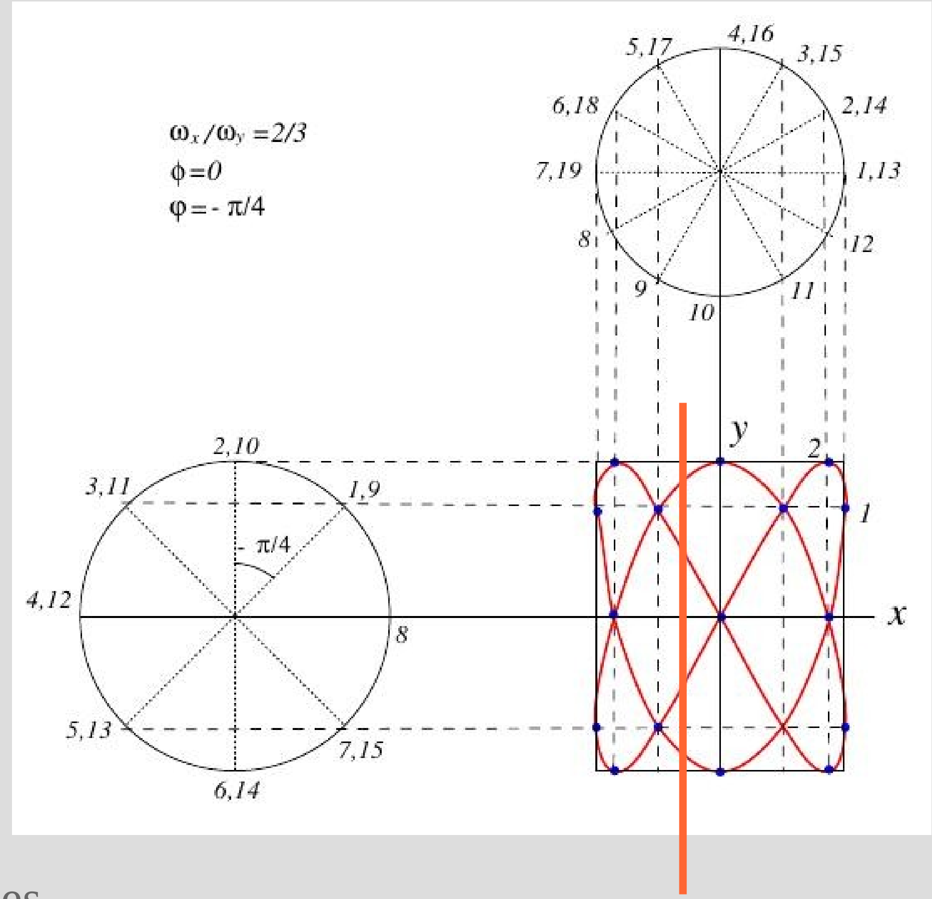
Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).

- Finalmente se completa la figura



Observar que si trazamos dos lineas a través de la figura se cumple:

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}}$$

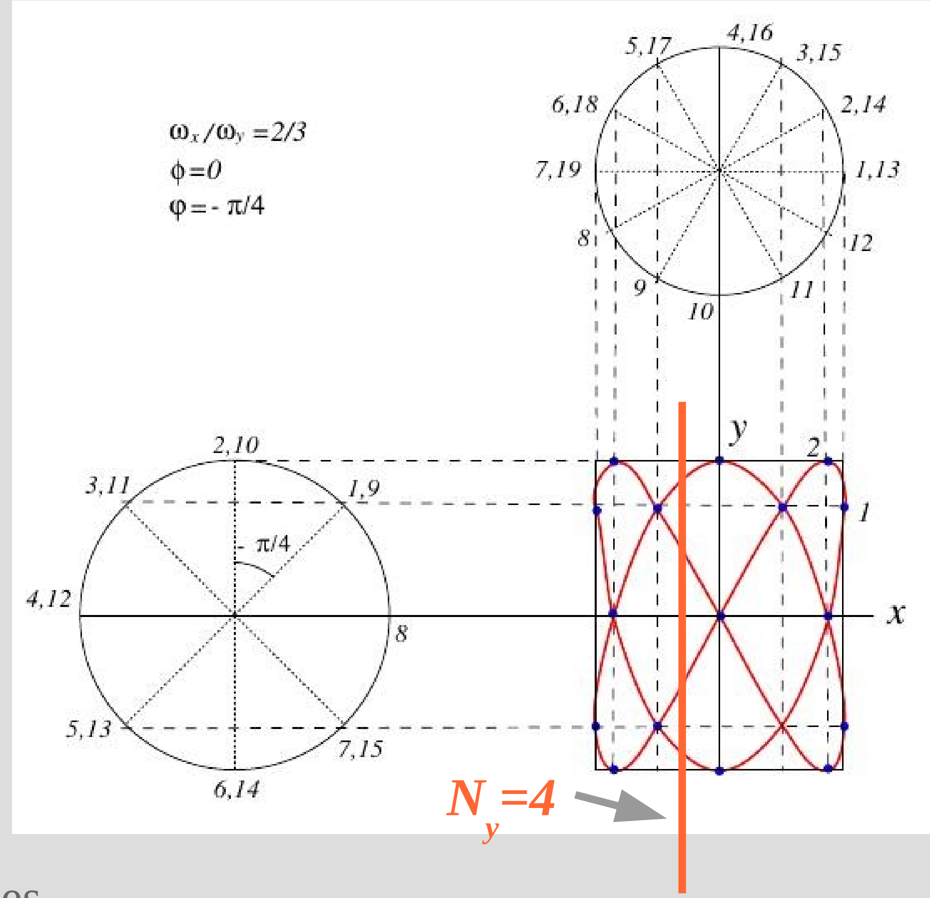
N: número de veces que corta la figura

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS
- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).
- Finalmente se completa la figura



Observar que si trazamos dos lineas a través de la figura se cumple:

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}}$$

N: número de veces que corta la figura

4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

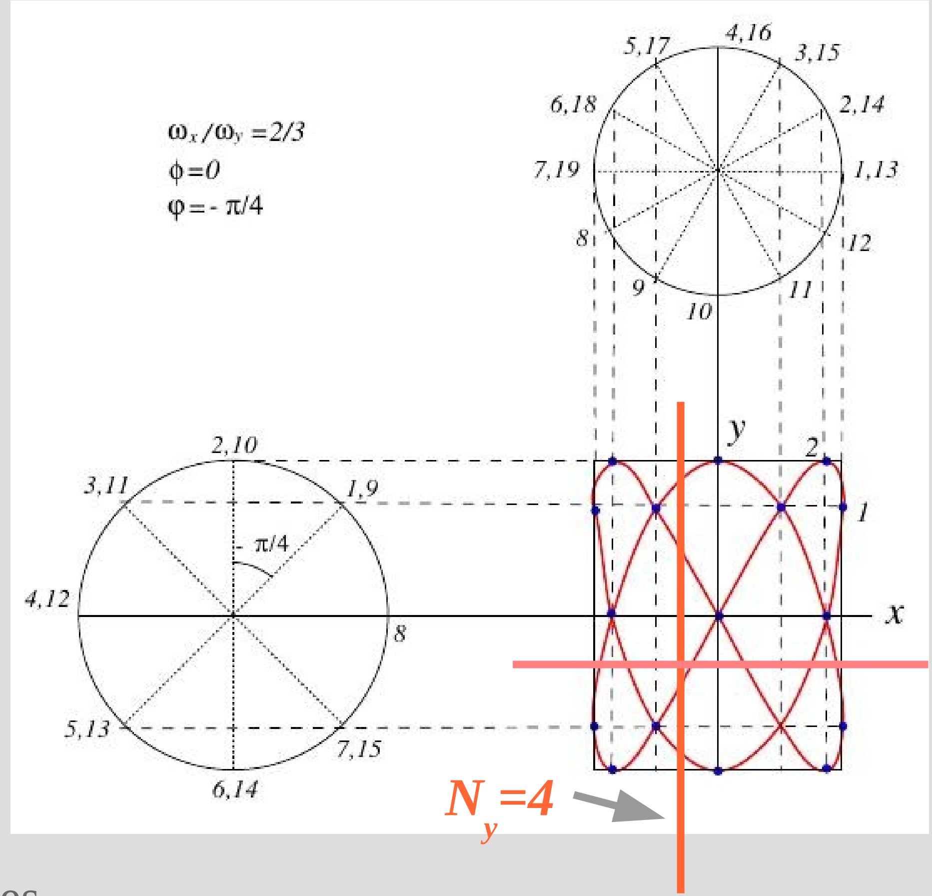
Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t-\pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).

- Finalmente se completa la figura



Observar que si trazamos dos lineas a través de la figura se cumple:

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}}$$

$N_y=4$

N: número de veces que corta la figura

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

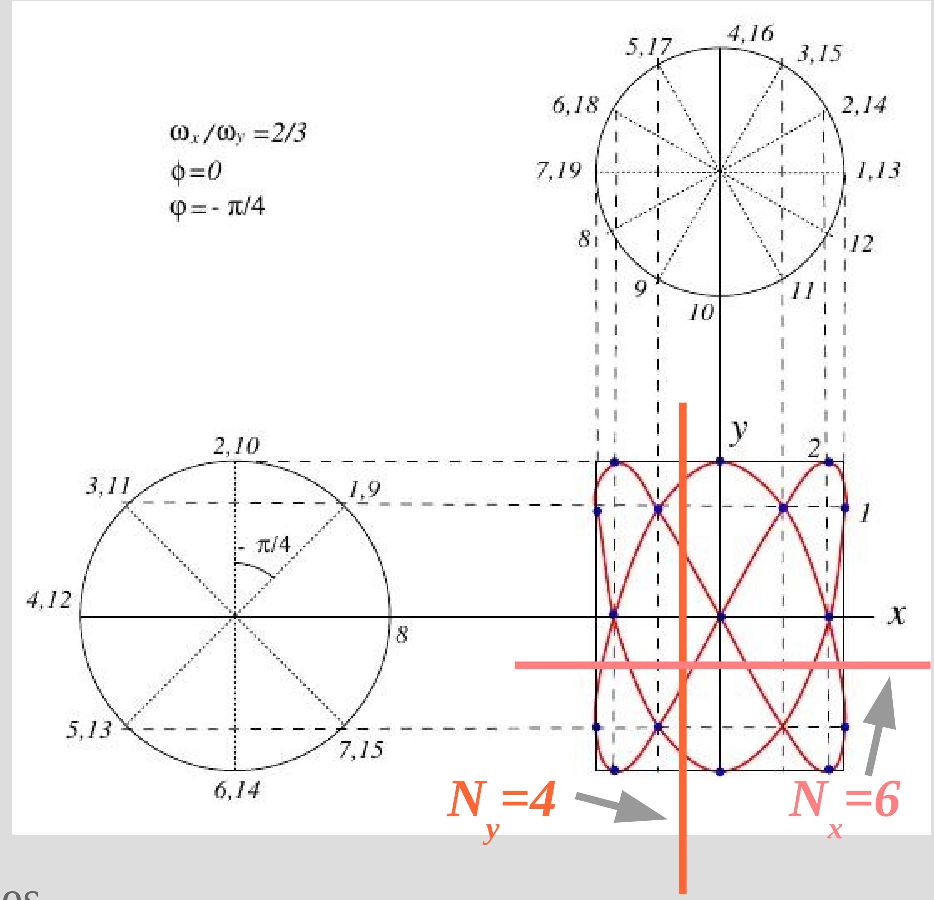
$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS
- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).
- Finalmente se completa la figura

Observar que si trazamos dos lineas a través de la figura se cumple:

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}}$$

N: número de veces que corta la figura



4.3 Superposición de dos MAS
Direcciones perpendiculares, diferente frecuencia

Ejemplo: dibujar la Figura de Lissajous de

$$x = A\cos(2t)$$
$$y = B\cos(3t - \pi/4)$$

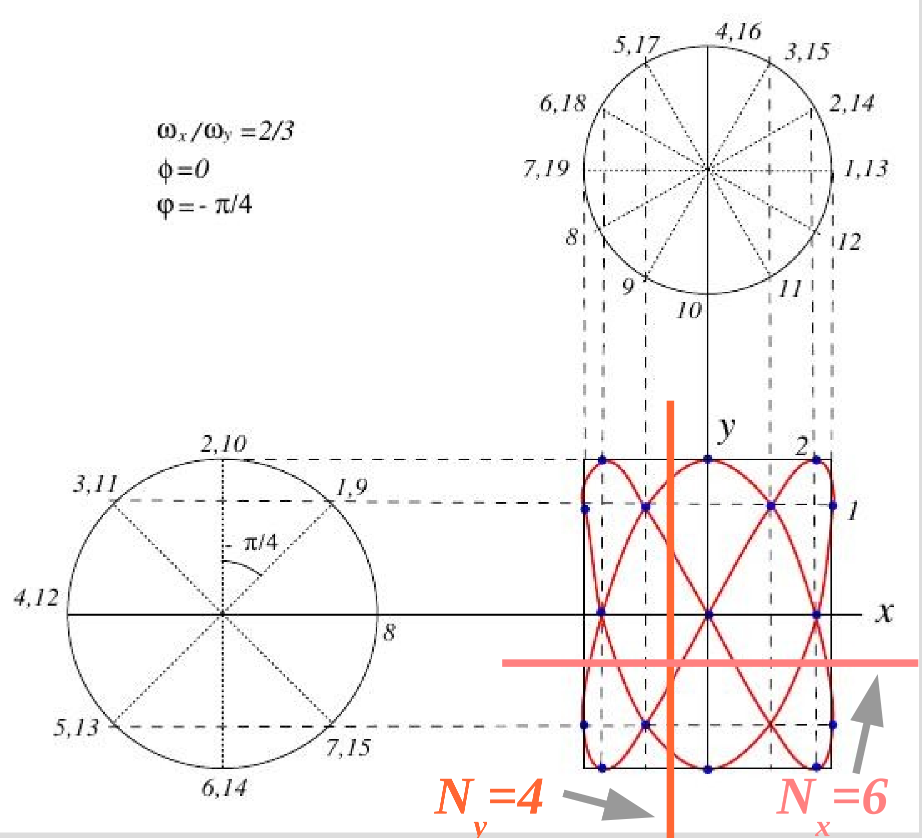
- Se hace la representación fasorial de cada uno de los MAS

- Se buscan unos puntos '*adecuados*' en cada circunferencia (1, 2, 3, ...).

- Finalmente se completa la figura

Observar que si trazamos dos lineas a través de la figura se cumple:

$$\boxed{\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{N_y}{N_x}} \Rightarrow \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



$N_y=4$ $N_x=6$

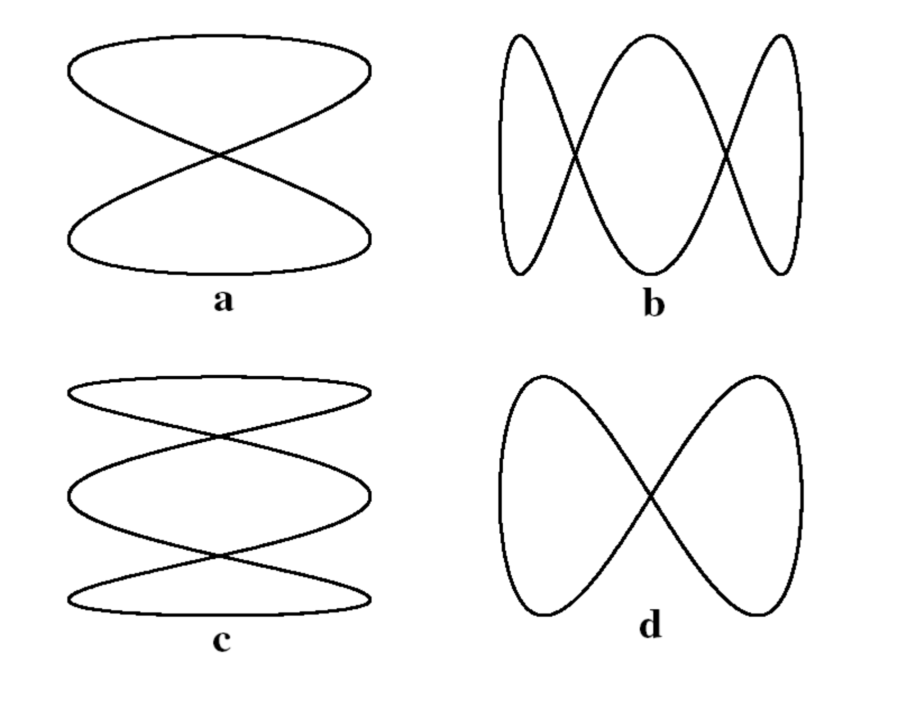
N: número de veces que corta la figura

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Ejercicios

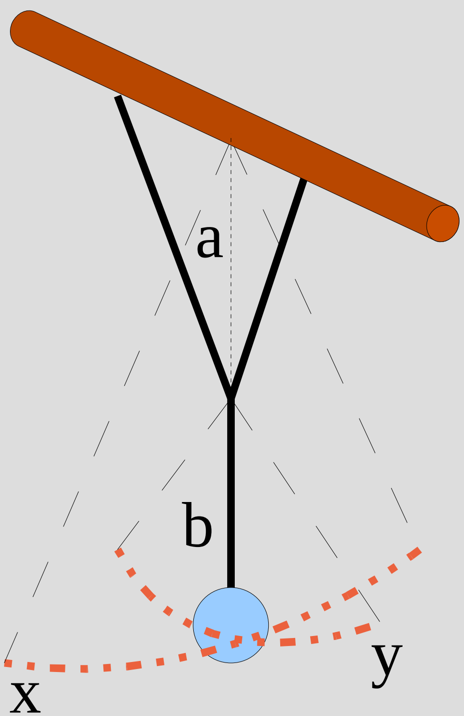
Ejercicio: Se superponen dos oscilaciones armónicas perpendiculares de tal manera que la oscilación horizontal tiene una frecuencia doble que la vertical.

¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a esta situación?



Ejercicios

Ejercicio: ¿Qué movimiento cabe esperar del siguiente péndulo formado por una partícula de masa m y el sistema de cuerdas mostrado en la figura? (las cuerdas son únicamente las lineas sólidas). ¿Cuál debe ser la relación entre 'a' y 'b' para que que la relación de frecuencias ω_y/ω_x sea 2/1?



Solución:

a/b = 3

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Valles (ETSEIAT)

Ejercicios

Ejercicio: un objeto de masa m=2kg oscila sujeto a un muelle de constante k=800 N/m y con un parámetro de amortiguamiento $\beta=0.1\ s^{-1}$. Si aplicamos al sistema una fuerza oscilante F(t)=25cos(10t) (en unidades SI.), calcular:

La amplitud, velocidad máxima, frecuencia de resonancia, desfase entre x y F, factor de calidad y anchura de la resonancia:

$$F = F_0 \cos(\omega t) \qquad x = A \cos(\omega t - \delta)$$

$$v = \omega A \cos(\omega t - \epsilon) \qquad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \qquad \tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$v_0 = \omega A = \frac{F_0}{Z}$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2\, b}{2Z^2} \qquad Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}$$

$$\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \qquad Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

Solución:

A=0.042m

v_0=0.42 m/s

ω_{RES} = 20 rad/s

δ=6.67 · 10^{-3} rad

Q=100

$\Delta\omega$=0.2 rad

Ejercicios

Ejercicio: un péndulo simple está formado por una masa m=3kg y un cuerda de longitud l=1m. El sistema está amortiguado siendo β=0.001 s^{-1}. Si queremos mantener el péndulo oscilando con su frecuencia natural y con una amplitud de de 2º, determinar el valor F_0 de la fuerza oscilante que debemos aplicar y la potencia disipada por el sistema.

Solución:

$F_0 = 6.55 \cdot 10^{-4}\ N$

$\langle P_s \rangle = 3.6 \cdot 10^{-5}\ W$

$$F = F_0 \cos(\omega t) \qquad x = A \cos(\omega t - \delta)$$

$$v = \omega A \cos(\omega t - \epsilon) \qquad A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\epsilon = \delta - \frac{\pi}{2} \qquad \tan(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$v_0 = \omega A = \frac{F_0}{Z}$$

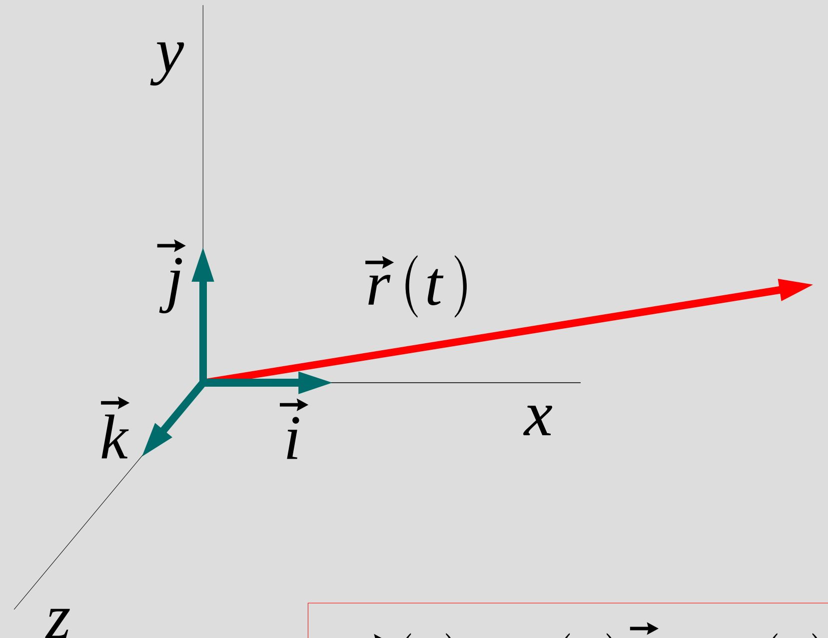
$$\langle P_s \rangle = \frac{F_0^2 b}{2 Z^2} \qquad Z = \sqrt{\left(m\omega^2 - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}$$

$$\Delta\omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \qquad Z = m\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega} + 4\beta^2}$$

5.1. Conceptos básicos

Vector velocidad

- La velocidad nos indica cómo cambia la posición de la partícula dividido entre en el tiempo empleado
- **En una dimensión:**



$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}}$$

Dpt. de Fisica i Eng. Nuclear
Secció de Fisica Aplicada del Vallès (ETSEIAT)