



Tema 12: Movimiento ondulatorio

FISICA I, 1º, Grado en Ingeniería Electrónica, Robótica y
Mecatrónica

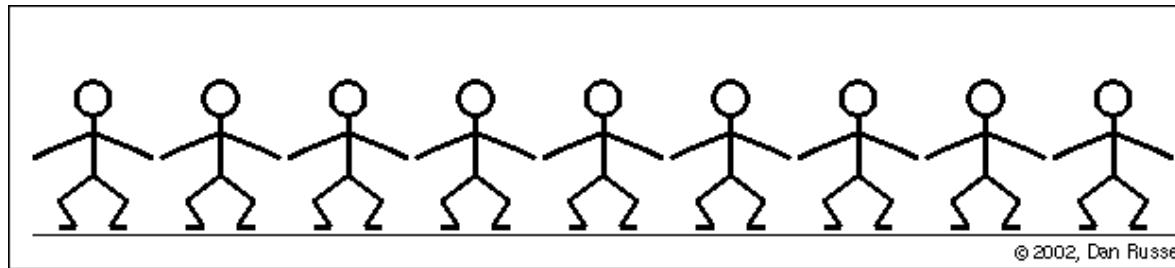
Departamento de Física Aplicada III

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- Onda: perturbación que viaja **sin transferencia de materia** pero **transportando energía**

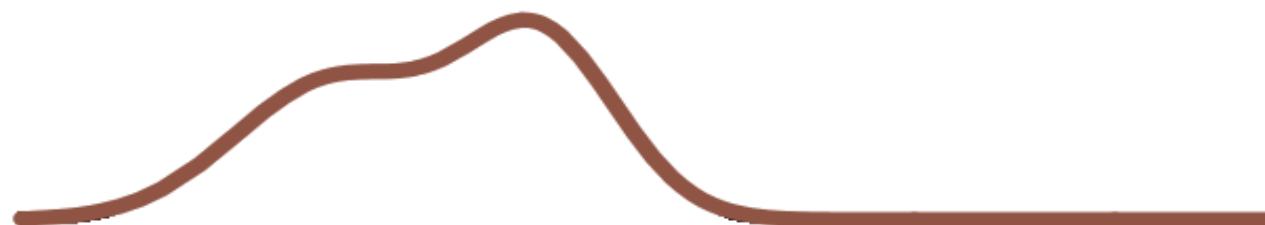


Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Clasificación según el **medio** de propagación
 - **Mecánicas:** perturbación en un medio material
 - Ondas en el agua, ondas sísmicas, de sonido, en una cuerda
 - **Electromagnéticas:** no requieren un medio material
 - Luz, rayos X, ondas de radio

- La formación de una onda mecánica requiere
 - Una fuente de perturbación
 - Una piedra que cae al agua
 - Un dedo pulsando una cuerda de guitarra
 - Un medio que pueda ser perturbado
 - El agua
 - La cuerda de la guitarra
 - Mecanismo físico de interacción entre partículas del medio
 - Fuerzas de atracción-repulsión entre las moléculas de agua
 - Fuerzas de atracción-repulsión entre las moléculas de la cuerda

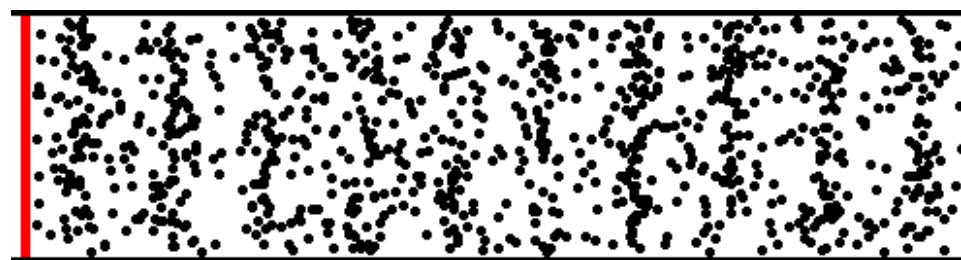
- Calificación de las ondas según la dirección del desplazamiento de las partículas del medio respecto de la dirección de propagación
 - Transversales: la dirección de la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación
 - Ondas en una cuerda, olas, electromagnéticas



- Calificación de las ondas según la dirección del desplazamiento de las partículas del medio respecto de la dirección de propagación
 - Transversales: la dirección de la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación
 - Ondas en una cuerda, olas, electromagnéticas
 - Longitudinales: la dirección de la perturbación es paralela a la dirección de propagación
 - Ondas de sonido, ondas en un muelle

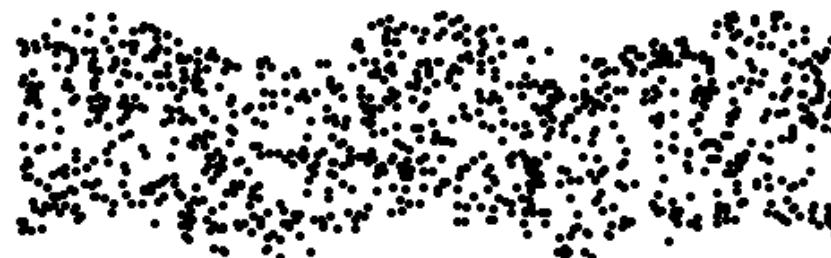
Ondas longitudinales y transversales

- Onda longitudinal



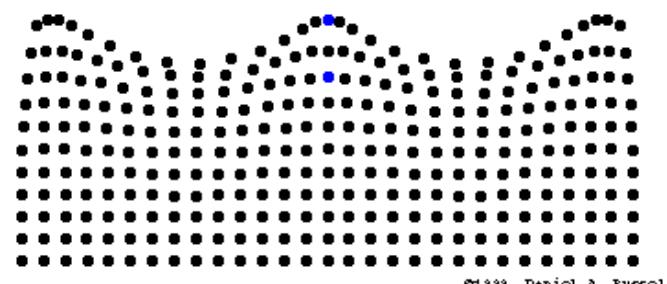
Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Onda transversal



Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Onda con componente transversal y longitudinal



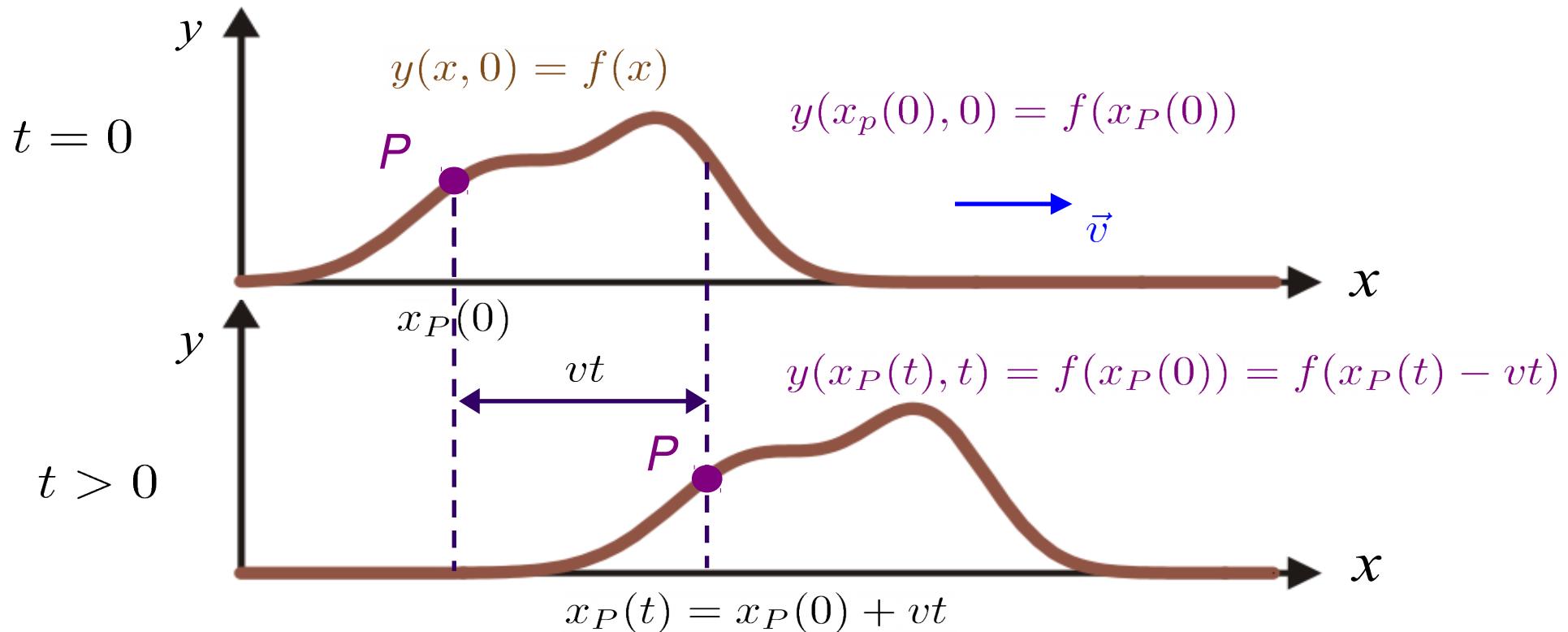
Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- ¿Como se describe matemáticamente un pulso que viaja por una cuerda?



- Descripción matemática $y(x, t)$



$$y(x, t) = f(x - vt)$$

Función de onda

$$y(x, t) = f(x \mp vt)$$

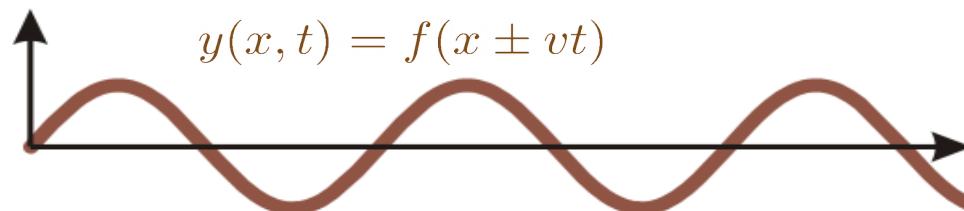
- Representa el valor de la coordenada y en cualquier punto x en un instante t
- El signo **negativo** indica una onda que viaja en sentido de x **creciente** (hacia la derecha en el diagrama)
- El signo **positivo** indica una onda que viaja en sentido de x **decreciente** (hacia la izquierda en el diagrama)
- Para un t_0 fijo la función $y(x, t_0)$ proporciona la forma geométrica del pulso: es la **forma de onda**

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- Buscamos una ecuación diferencial que identifique una onda

$$y(x, t) = f(x \pm vt) = f[\eta(x, t)]$$

$$\eta(x, t) = x \pm vt$$



Regla de la cadena

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{d\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^1 = \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{d\eta} \right) = \boxed{\frac{d^2 f}{d\eta^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{d\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^{\pm v} = \pm v \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{df}{d\eta} \right) = \boxed{v^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2}}$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \frac{d^2 f}{d\eta^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Ecuación de onda lineal

- v es la velocidad de la onda
- Si al analizar un sistema aparece esta ecuación sabemos que hay una onda

La velocidad de propagación sólo depende de las propiedades del medio

- No depende de propiedades de la fuente (velocidad, etc)
- Para ondas mecánicas en medios materiales

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica del medio}}{\text{propiedad inercial del medio}}}$$

- Cuerda tensa $v = \sqrt{F_T/\mu}$
 - F_T es la tensión de la cuerda y μ es la densidad lineal de masa
- Cuerda tensa de diámetro D $v = \sqrt{4 F_T / \pi \rho D^2}$
 - ρ es la densidad volumétrica de masa

Velocidad de propagación

- Sonido en un medio sólido

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Y es el módulo de Young y ρ es la densidad volumétrica de masa
- Hormigón: 3000 m/s (aprox), Acero: 5100 m/s (aprox)

- Sonido en un fluido (líquido o gas)

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$$

- B es el módulo de compresibilidad y ρ es la densidad volumétrica de masa
- P es la presión y la S indica que es un proceso adiabático
- Agua: 1500 m/s (aprox)

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad [\text{N/m}^2]$$

- Sonido en un gas ideal

$$v = \sqrt{\gamma RT/P_M} \propto \sqrt{T}$$

- γ : coeficiente adiabático, R :constante de los gases ideales, T : temperatura, P_M : peso molecular del gas

- Sonido en el aire alrededor de la temperatura ambiente $v = v_0 + a T_C$

$$v_0 = 331 \text{ m/s}$$

$$a = 0,600 \frac{\text{m}}{\text{s}^\circ\text{C}}$$

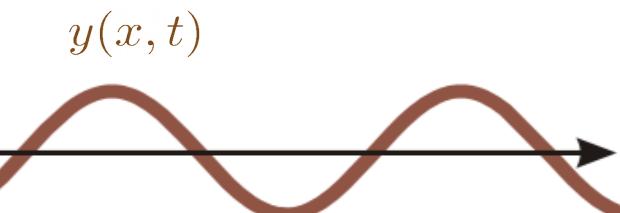
- Queremos describir la propagación de una perturbación en una cuerda

- Suposiciones

- Cuerda homogénea

- Sección uniforme

- Densidad linea de masa uniforme μ



$$\mu = \frac{m}{L}$$

- Amplitud de las oscilaciones pequeña

- Vibraciones transversales

- Cada punto de la cuerda se mueve sólo verticalmente

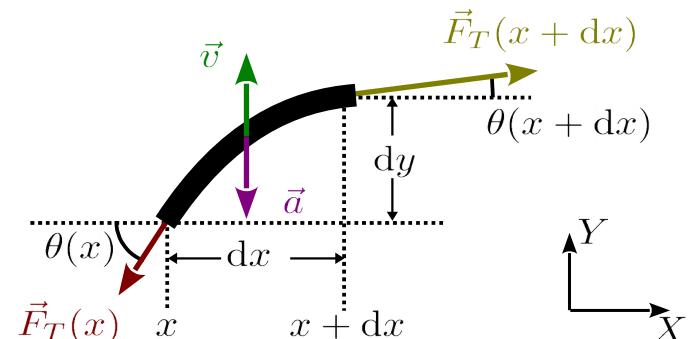
Obtención de la ecuación de onda en una cuerda

- Elemento de una cuerda

$$dm = \mu dl = \mu \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \xrightarrow{\text{(amplitud pequeña)}} \mu dx$$

$$\vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{j}$$



- Fuerza sobre el elemento

$$\vec{F}_T(x) = F_T(x)(-\cos[\theta(x)] \vec{i} - \sin [\theta(x)] \vec{j})$$

$$\vec{F}_T(x+dx) = F_T(x+dx)(\cos[\theta(x+dx)] \vec{i} + \sin [\theta(x+dx)] \vec{j})$$

- Segunda Ley de Newton sobre el elemento

$$dm \vec{a} = \vec{F}_T(x) + \vec{F}_T(x+dx)$$

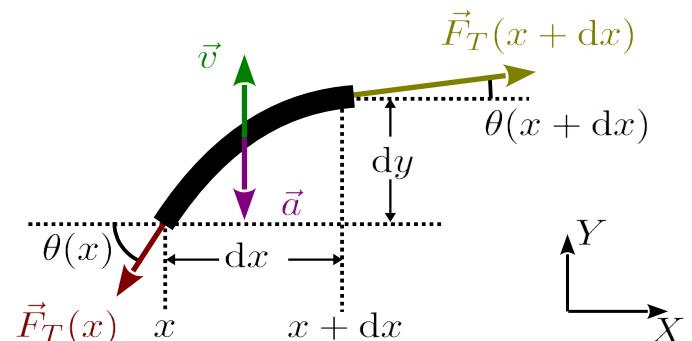
Obtención de la ecuación de onda en una cuerda

■ Componente X ($a_x = 0$)

$$0 = F_T(x + dx) \cos(\theta(x + dx)) - F_T(x) \cos(\theta(x))$$

$$\theta \ll 1 \implies \cos \theta \simeq 1$$

$$F_T(x) = F_T(x + dx) = F_T \text{ (cte)}$$



■ Componente Y

$$dm \, \textcolor{violet}{a}_y = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T (\sin [\theta(x + dx)] - \sin [\theta(x)])$$

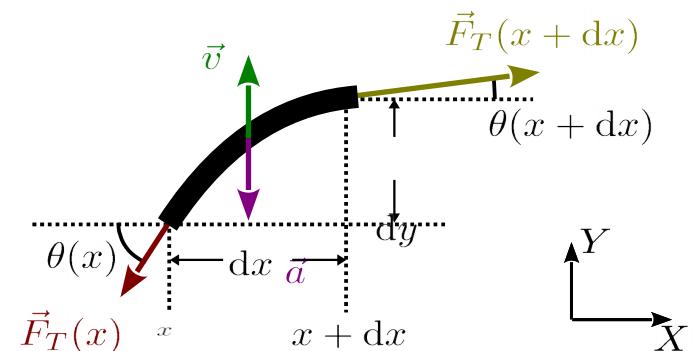
$$\theta \ll 1 \implies \sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_T}{\mu} \left(\frac{(\partial y / \partial x)_{x+dx} - (\partial y / \partial x)_x}{dx} \right) = \frac{F_T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Obtención de la ecuación de onda en una cuerda

- Ecuación de la perturbación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

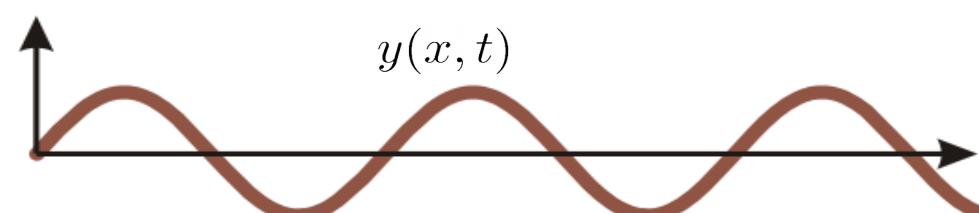


- Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Velocidad de propagación

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$



- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

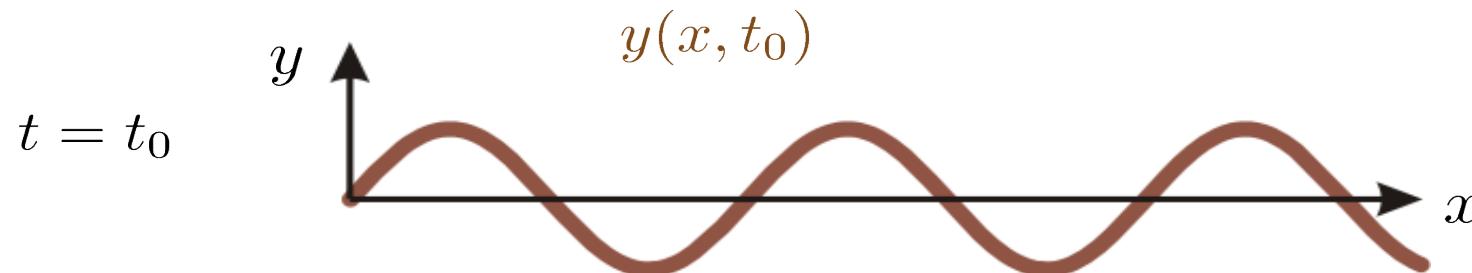
- Unimos el extremo de una cuerda a un objeto que describe un MAS (diapasón)



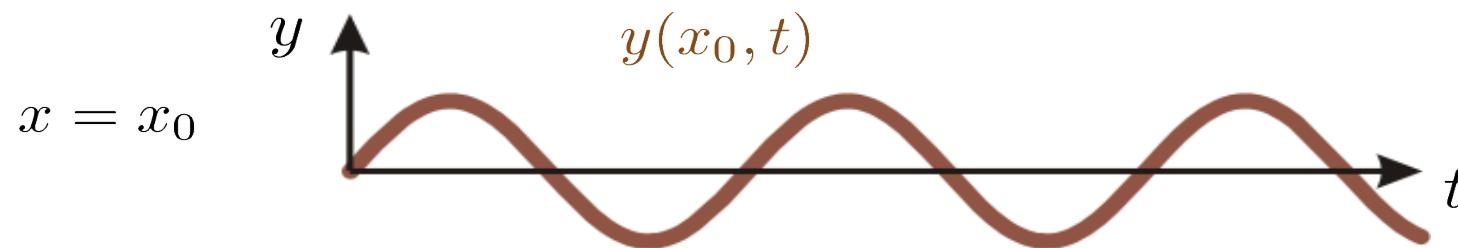
- Se produce un tren de ondas **sinusoidales** o armónicas
- Cada punto de la cuerda describe un **MAS**

Cualquier onda puede representarse como una suma de ondas armónicas

- En un instante fijo tenemos una oscilación espacial

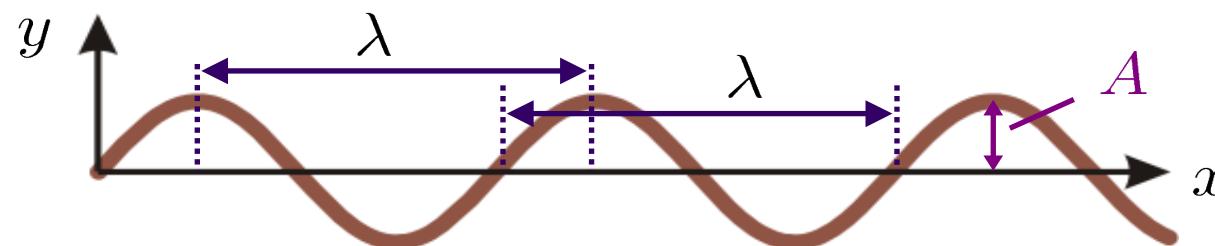


- En un punto fijo tenemos una oscilación en el tiempo



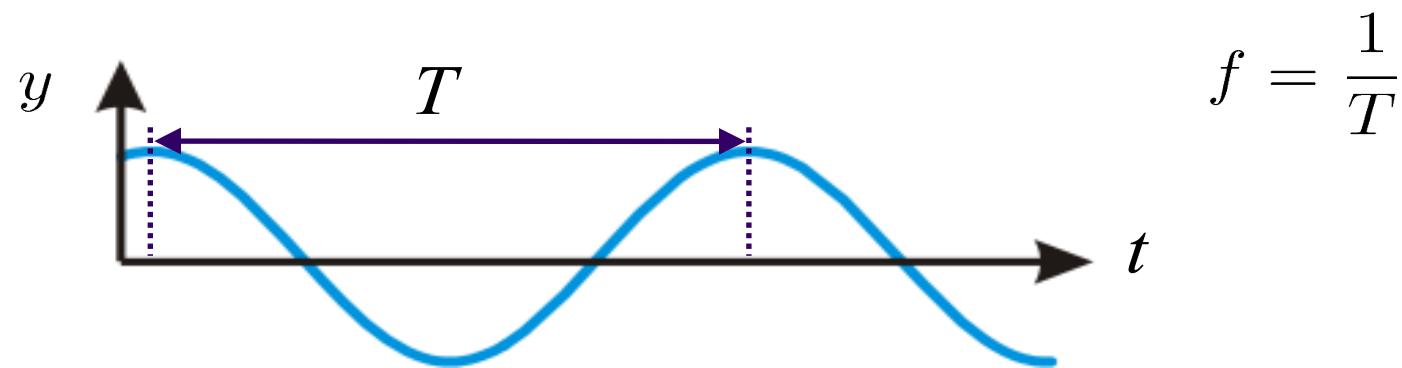
Una onda es una perturbación que se propaga en el tiempo y en el espacio

- Longitud de onda (λ): distancia mínima entre dos puntos con la misma posición (y) y velocidad (v_y)



- Amplitud (A): máximo desplazamiento de cada partícula respecto de su posición de equilibrio

- **Periodo (T)**: tiempo que tarda un punto del medio en realizar una oscilación
- **Frecuencia (f)**: frecuencia del MAS que realiza cada punto del medio

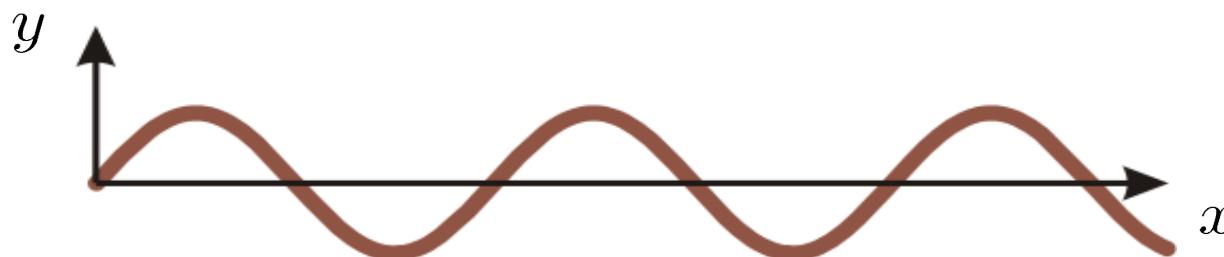


- **Velocidad de la onda**: en un tiempo T la onda recorre una distancia λ

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Cuidado: no hay que confundir v con v_y

Ondas sinusoidales: representación matemática



- En $t=0$ $y(x, 0) = A \operatorname{sen}(kx + \phi)$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \text{Número de onda (m}^{-1}\text{)}$$

$$\phi \quad \rightarrow \quad \text{Constante de fase}$$

Función sinusoidal de amplitud A que se repite cada λ y cuyo valor en $x=0$ es $A \operatorname{sen}(\phi)$

Ondas sinusoidales: representación matemática

- En el instante inicial $y(x, 0) = A \operatorname{sen}(kx + \phi)$

- En un punto cualquiera para un instante t

$$\begin{aligned}y(x, t) &= y(x - vt, 0) = A \operatorname{sen}(k(x - vt) + \phi) \\&= A \operatorname{sen}(kx - kv t + \phi)\end{aligned}$$

- Definimos

$$kv = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T} = \omega \quad \text{Frecuencia angular}$$

- Representación matemática de una onda sinusoidal

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$$

- Signo +: onda que viaja en sentido de x decreciente
- Signo -: onda que viaja en sentido de x creciente

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi) = A \operatorname{sen}\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right) + \phi\right)$$

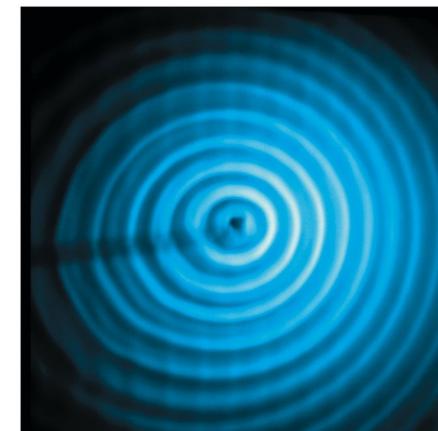
- Amplitud A
- Longitud de onda λ  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Número de onda
- Frecuencia $f = \frac{1}{T}$  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ Frecuencia angular
- Velocidad de la onda $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$

- La **velocidad** de propagación sólo depende de las propiedades del **medio** en el que se propaga la onda
 - No depende de las propiedades de la fuente de la perturbación
- La **frecuencia** de la onda es la frecuencia de oscilación de la fuente (en una onda sinusoidal)
 - La velocidad local de cada punto sí depende de la fuente de la perturbación
- La **longitud de onda** depende de las propiedades del **medio** y de la frecuencia de oscilación de la **fuente de la perturbación** (en una onda sinusoidal)

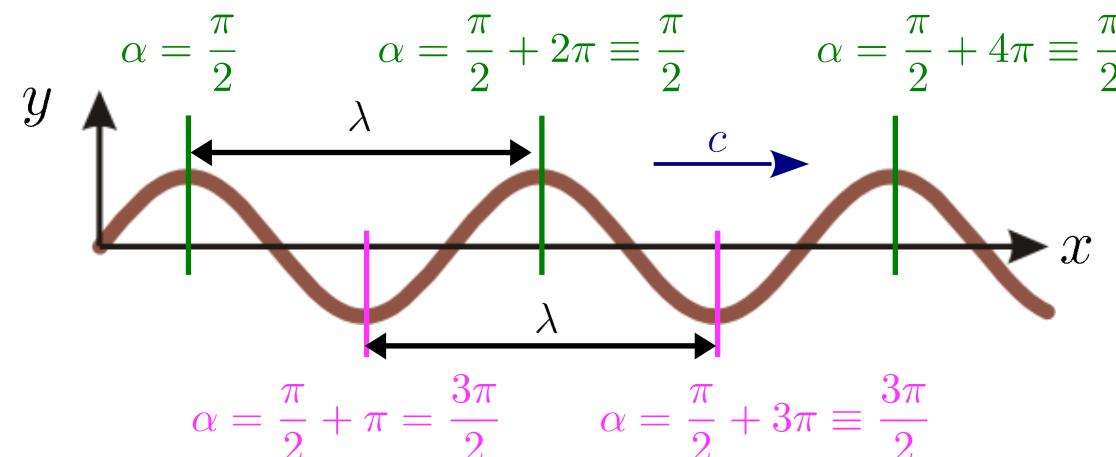
$$\lambda = v T = v/f$$

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- **Frentes de onda**
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- En la Naturaleza las perturbaciones se pueden propagar en **dos** o en **tres** dimensiones
 - Una piedra que cae en un estanque genera ondas bidimensionales
 - Un sonido se propaga en el aire en forma de onda tridimensional
- Los **frentes de onda** son superficies en las cuales el valor de la **fase** es el mismo
 - Las ondas se pueden visualizar como frente de ondas que se desplazan con la velocidad de propagación de la onda



- Onda unidimensional en una cuerda (1D) $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$
- La fase es el argumento del seno $\alpha = kx - \omega t + \phi$



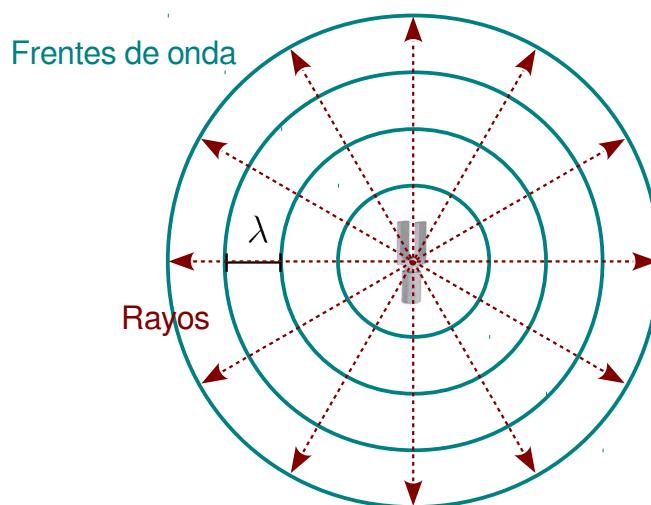
- En este caso los frentes de onda son **líneas rectas** paralelas entre sí
- Los frentes de onda están separados por una **longitud de onda**
- La dirección de propagación es **perpendicular** a los frentes de onda: **rayos**

Frentes de onda

- Vibrador en la superficie de un estanque (2D)
 - Los frentes de onda son circunferencias concéntricas con la fuente
 - Si estamos lejos de la fuente se parecen a líneas rectas: onda plana



- Sonido producido por un diapasón (3D)



- Los frentes de onda son esferas concéntricas con la fuente
- Si estamos lejos de la fuente se parecen a superficies planas: ondas planas
- Si el medio de propagación es homogéneo los rayos son líneas radiales

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

Energía transmitida por una onda sinusoidal en una cuerda

- Energía cinética total en una longitud de onda

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$y(x, 0) = A \cos(kx)$$

$$v_y(x, 0) = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)} = -A\omega \operatorname{sen}(kx)$$

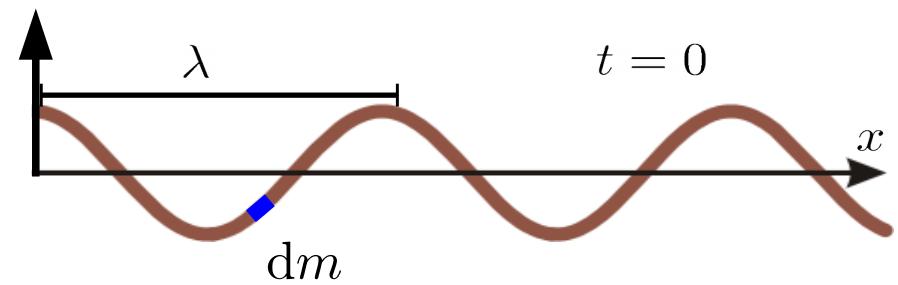
$$dE_c = \frac{1}{2} v_y^2 dm = \frac{1}{2} v_y^2 \mu dx \implies E_{c\lambda} = \int_0^\lambda dE_c = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

- Energía total en una longitud de onda

$$U_\lambda = E_{c\lambda}$$

$$E_\lambda = E_{c\lambda} + U_\lambda = 2E_{c\lambda} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda$$

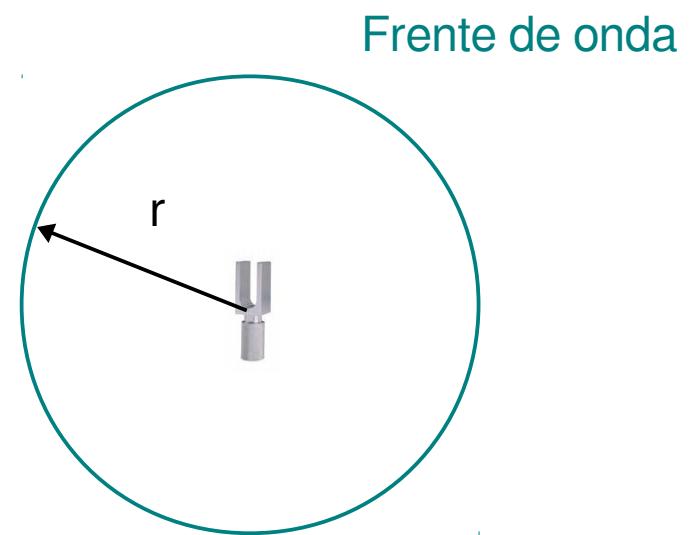
- Potencia transmitida en cada punto



$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v$$

- Si el medio de propagación es homogéneo, la **potencia** emitida por la fuente se distribuye **uniformemente** sobre la superficie del frente de onda
- La **intensidad** es la potencia media por unidad de área que está incidiendo perpendicularmente a la dirección de propagación

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \text{Onda esférica}$$



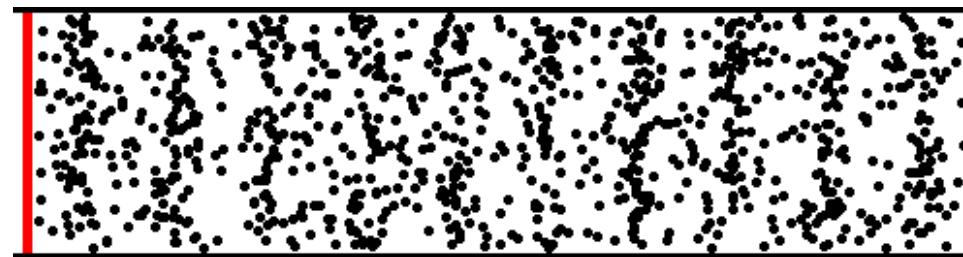
- Se relaciona con la **densidad de energía media**

$$I = \eta_m c$$

- η_m es la energía por unidad de volumen
- c es la velocidad de propagación
- Se mide en W/m^2

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- **Ondas sonoras**
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- Son ondas longitudinales
- La magnitud física que se perturba son las posiciones de equilibrio de las moléculas del medio

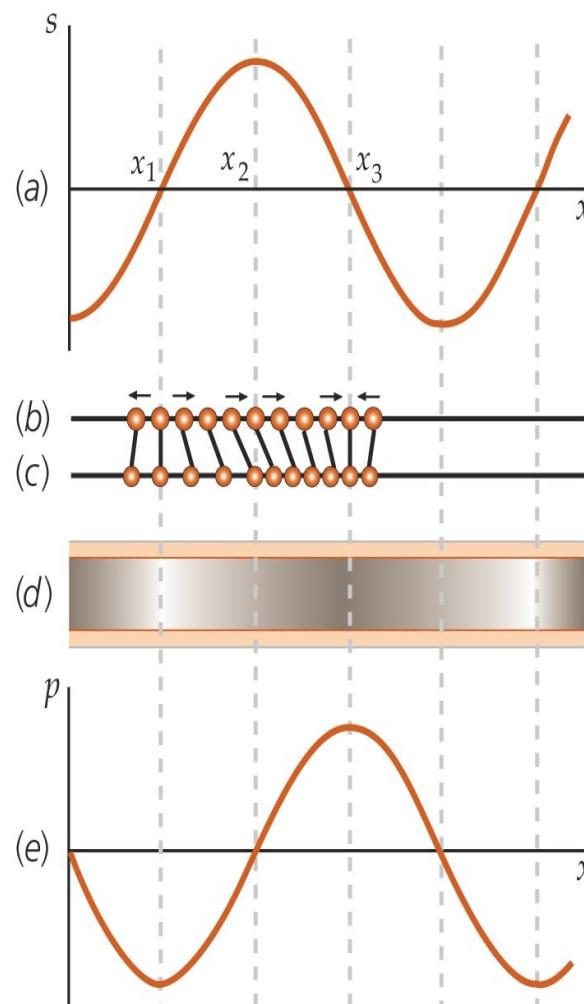


Animación cortesía
de Dan Russell,
Kettering University

- Expresión matemática para ondas sonoras sinusoidales en una dimensión

$$s(x, t) = s_{\max} \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

- El desplazamiento de las moléculas provoca variaciones de densidad y presión: ondas de densidad y presión



- La densidad y la presión son máximas donde el desplazamiento es mínimo
- Las ondas de desplazamiento y presión están desfasadas $\pi/2$

$$s(x, t) = s_{\max} \sin(kx - \omega t)$$

$$P(x, t) = \Delta P_{\max} \sin(kx - \omega t + \pi/2)$$

$$= \Delta P_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

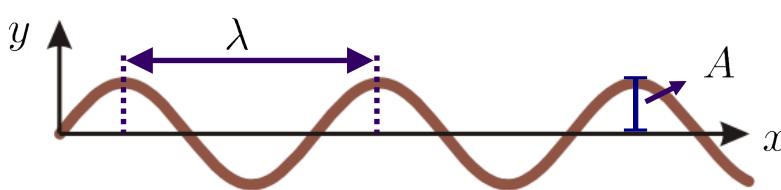
$$\rho(x, t) = \Delta \rho_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

- Relación entre el desplazamiento y la sobrepresión

$$\Delta P_{\max} = \rho c \omega s_{\max}$$

- ρ : densidad volumétrica de masa
- c : velocidad de propagación de la onda
- ωs_{\max} : velocidad longitudinal máxima

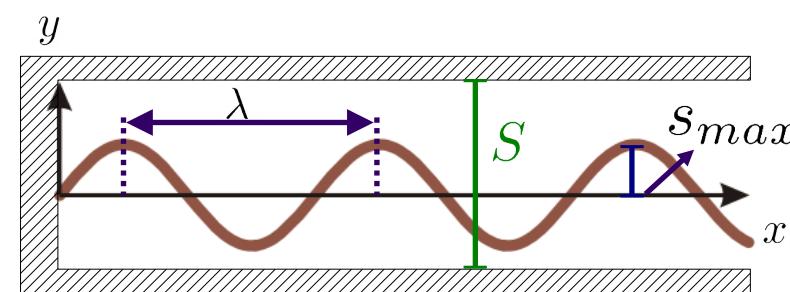
- Para ondas sonoras la intensidad se llama intensidad acústica



- Energía en una longitud de onda en una cuerda

$$E_\lambda = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu \lambda = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 m_\lambda$$

masa total en λ



- Energía en una longitud de onda de sonido (unidimensional)

$$E_\lambda = \frac{1}{2} s_{max}^2 \omega^2 m_\lambda = \frac{1}{2} s_{max}^2 \omega^2 \rho S \lambda$$

masa total en λ

- Densidad volumétrica de energía

$$\eta_m = \frac{E_\lambda}{\lambda S} = \frac{1}{2} \rho s_{max}^2 \omega^2$$

- Intensidad de energía

$$I = \eta_m c = \frac{E_\lambda}{ST} = \frac{1}{2} \rho s_{max}^2 \omega^2 c$$

- La **sensación sonora** es aproximadamente proporcional al **logaritmo** de la intensidad acústica de la onda (Ley de Fechner)
- Los **decibelios** se construyen con una escala logarítmica en base 10

$$L_I = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad [\text{decibelios} = \text{dB}]$$

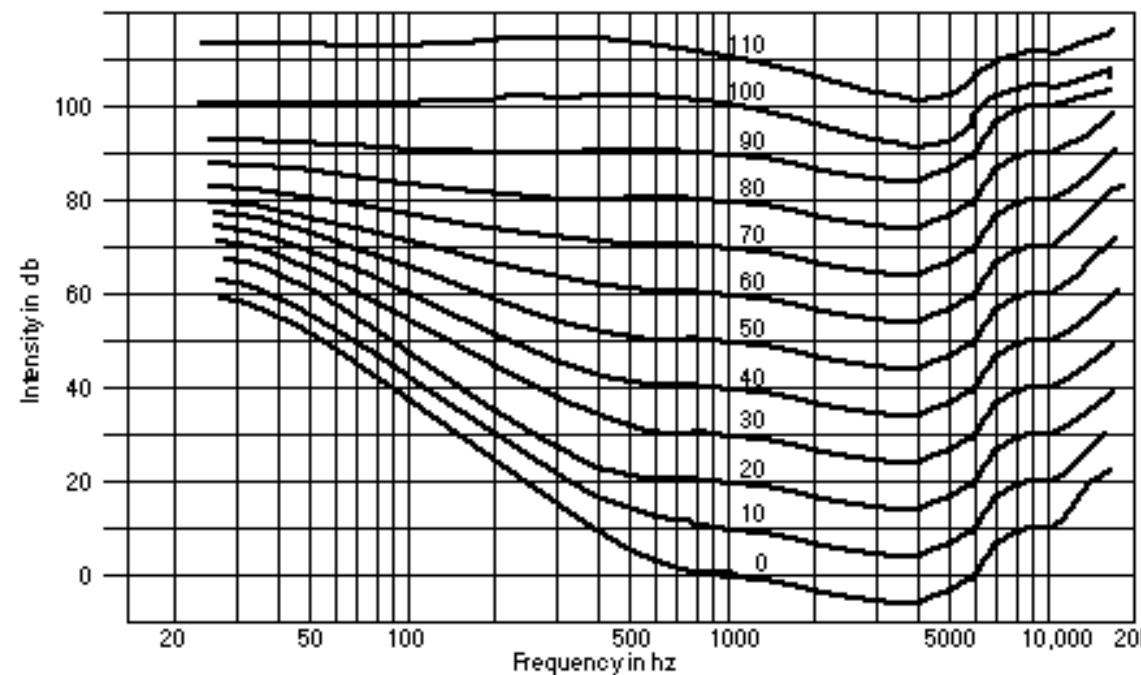
- $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ es la intensidad acústica mínima que puede percibir el oído humano para un sonido sinusoidal de 1 kHz

$$I = I_0 \times 10^{L_I/10}$$

- $L_I=100 \text{ dB}$ implica $I = 10^{10} I_0$
- Dos sonidos separados por 10 dB $L_2 = L_1 + 10 \text{ (dB)}$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{L_2}{10} - \frac{L_1}{10}} = 10^{\frac{L_1+10}{10} - \frac{L_1}{10}} = 10 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 10I_1$$

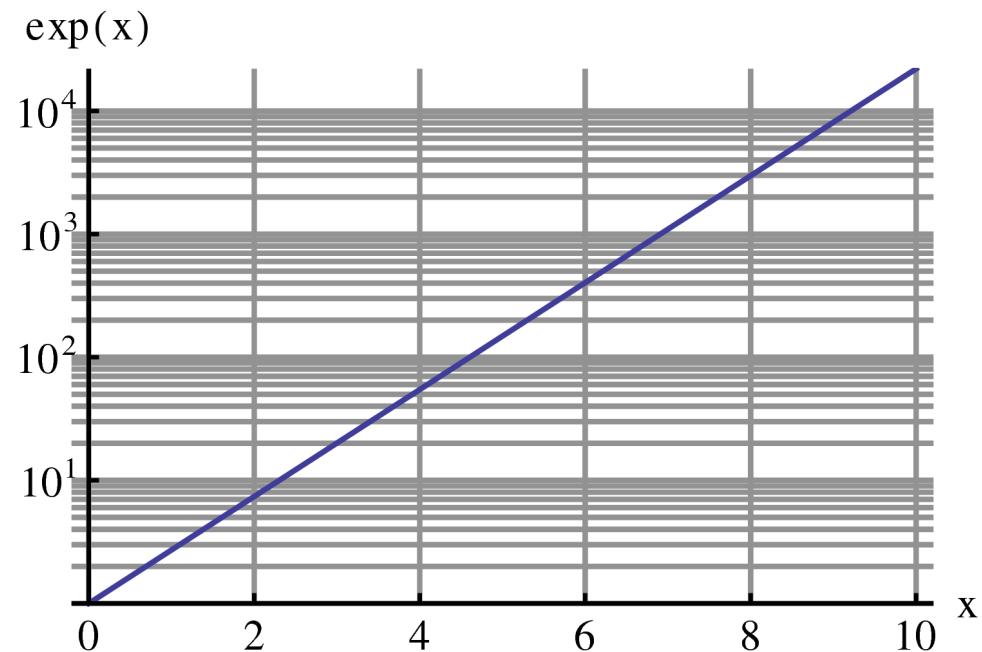
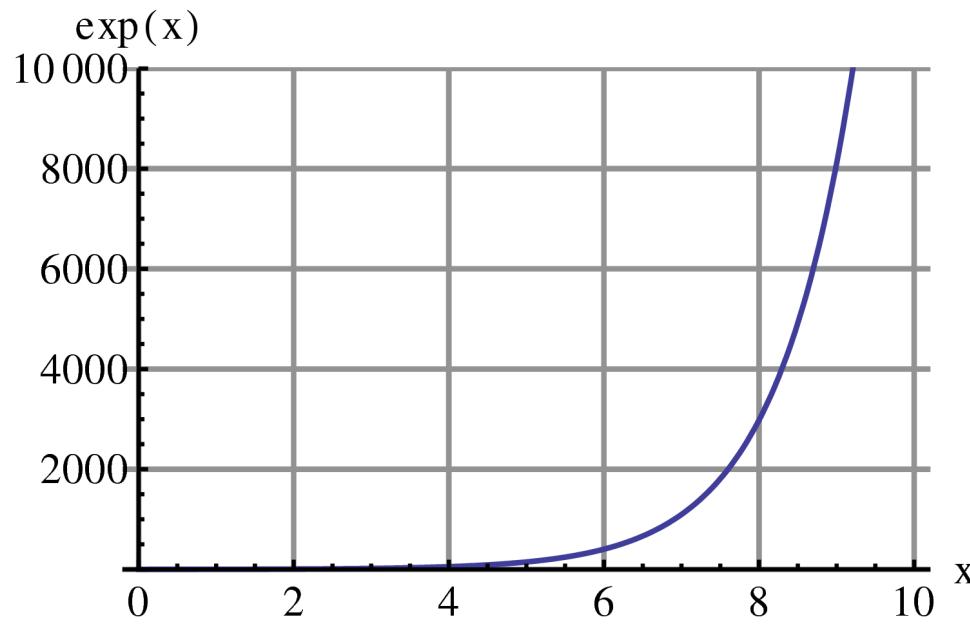
- Curvas de isosonoridad



- Los puntos de una curva corresponden a sonidos percibido por el oído con la misma intensidad
- El oído es más sensible en **frecuencias medias y medio-altas**
- La línea inferior marca el umbral de sensibilidad (0 dB)
- La línea superior marca el umbral de dolor (~ 120 dB)

- Semi-log

$$f(x) = e^x$$



- En el eje logarítmico las marcas no están equiespaciadas
- Permite cubrir un mayor rango de valores y ver la curva en diferentes escalas
- Una función exponencial da una línea recta en el gráfico semi-log

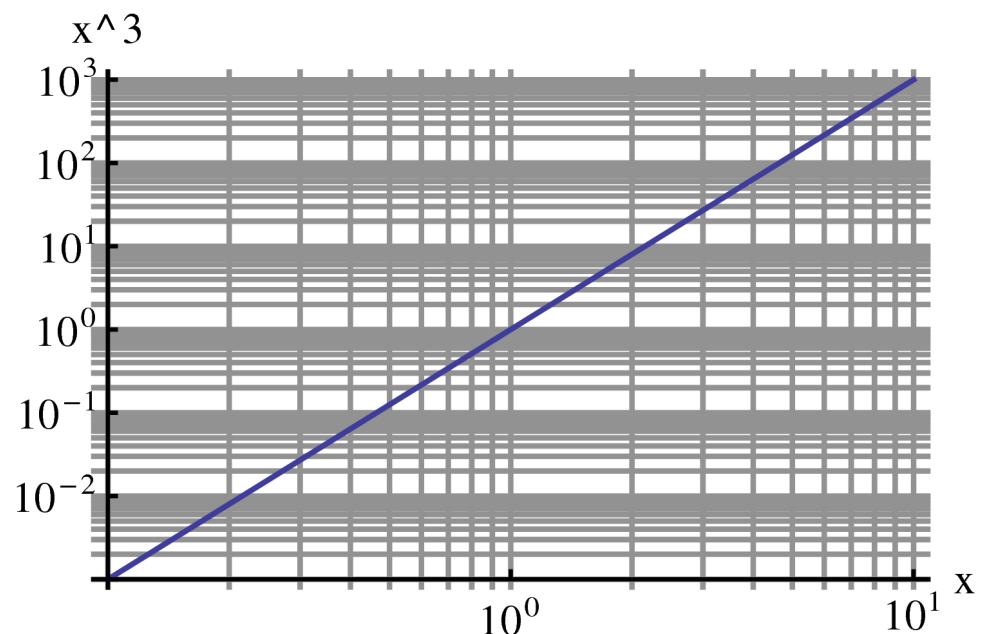
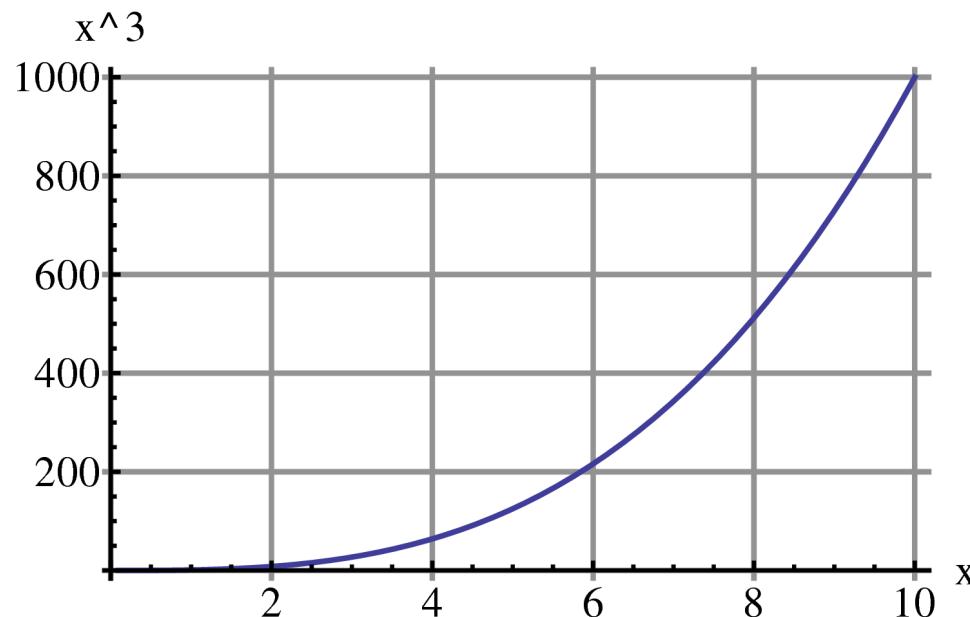
$$y = C e^{x/a}$$



$$\ln y = \ln C + \frac{1}{a}x$$

- Log-log

$$f(x) = x^3$$



- En los ejes logarítmicos las marcas no están equiespaciadas
- Permite cubrir un mayor rango de valores y ver la curva en diferentes escalas
- Una función potencial da una línea recta en el gráfico log-log

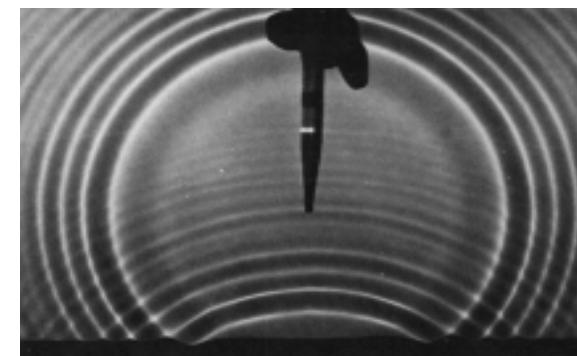
$$y = Cx^a$$



$$\log y = \log C + a \log x$$

- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- **Reflexión y transmisión**
- Superposición de ondas

- Hasta ahora hemos estudiado la transmisión de ondas en un medio **infinito**
- Vamos a analizar lo que ocurre cuando una onda alcanza la **frontera** que separa dos medios de propiedades distintas
- Fenómenos relacionados
 - Reflexión: onda que regresa
 - Ejemplo: eco
 - Transmisión: onda que se propaga en el nuevo medio
 - Ejemplo: luz en el agua



- Reflexión total: onda en una cuerda
 - Cuerda con un extremo fijo



El pulso es reflejado con la misma forma que el pulso incidente, pero invertido

- Reflexión total: onda en una cuerda
 - Cuerda con un extremo libre



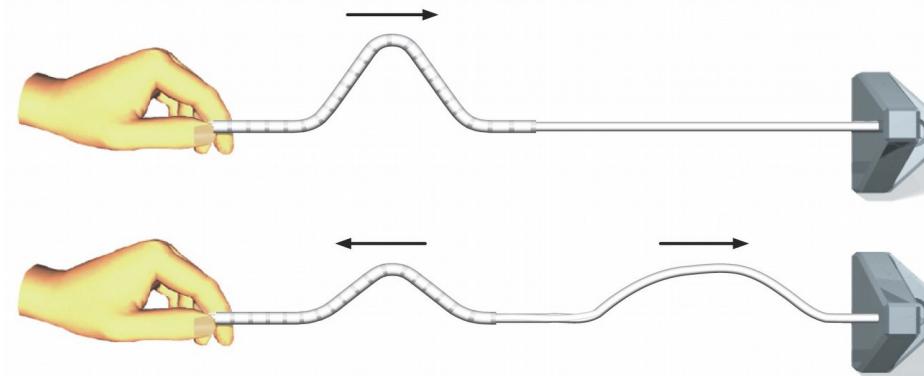
El pulso es reflejado con la misma forma que el pulso incidente

- Cuando una onda llega a una frontera entre dos medios en los cuales su velocidad es diferente, es **parcialmente transmitida** y parcialmente reflejada
- Si las velocidades son parecidas **la transmisión es dominante**
 - Oído interno de los peces
- Si las velocidades son muy diferentes **la reflexión es dominante**
 - Onda en un cuerda que llega a una pared

- Reflexión y transmisión: onda en una cuerda

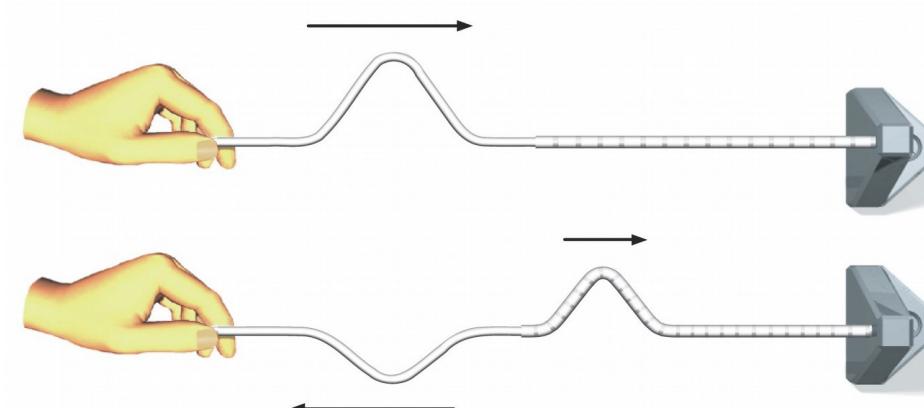
- Cuerda pesada unida a otra más ligera

La onda reflejada no se invierte



- Cuerda ligera unida a otra más pesada

La onda reflejada es invertida



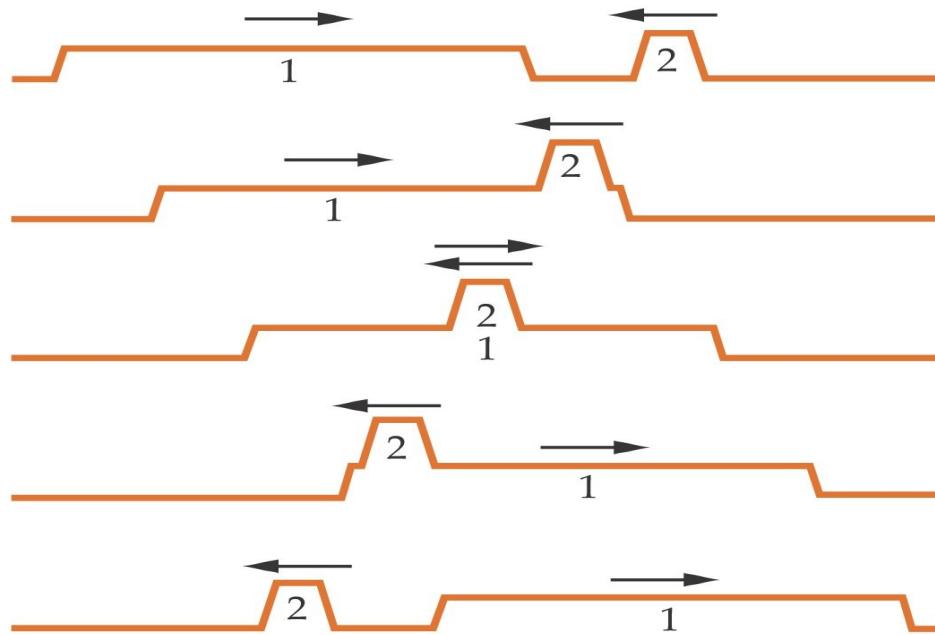
- Introducción
- Función de onda
- Ecuación de onda lineal
- Ondas sinusoidales
- Frentes de onda
- Energía transmitida por una onda sinusoidal
- Ondas sonoras
- Reflexión y transmisión
- Superposición de ondas

- En un medio pueden propagarse varias ondas simultáneamente
 - Ej: varias personas hablando a la vez
- **Principio de superposición**

Cuando dos o más ondas se combinan en un determinado punto, la perturbación resultante es la suma de las perturbaciones provocadas por cada onda

- Se deduce de la linealidad de la ecuación de ondas
- Válido para ondas lineales (amplitud pequeña)

Superposición de ondas



- Consecuencia del Principio de Superposición: dos ondas pasan una a través de la otra sin ser destruidas ni modificadas

Interferencia: fenómeno ondulatorio que se presenta cuando dos o más ondas se superponen

- Consecuencia del Principio de Superposición: dos ondas pasan una a través de la otra sin ser destruidas ni modificadas



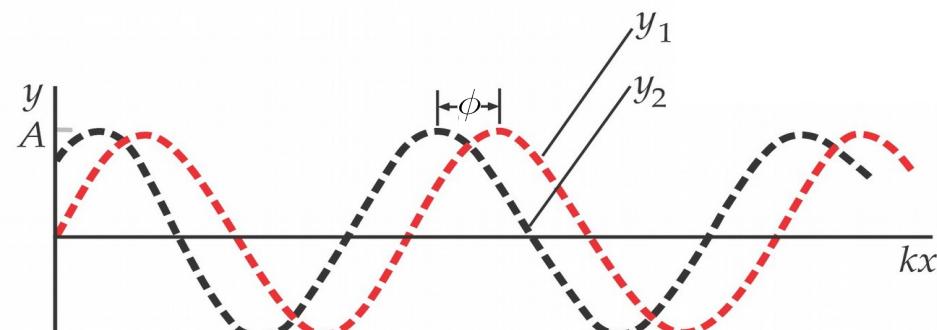
Interferencia: fenómeno ondulatorio que se presenta cuando dos o más ondas se superponen

Interferencia de ondas armónicas viajando en el mismo sentido

- Dos ondas con la misma amplitud, misma λ y una diferencia de fase ϕ

$$y_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$$



$$y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Donde hemos usado $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- Onda resultante con la misma f y λ
- La amplitud depende de ϕ

Interferencia de ondas armónicas viajando en el mismo sentido

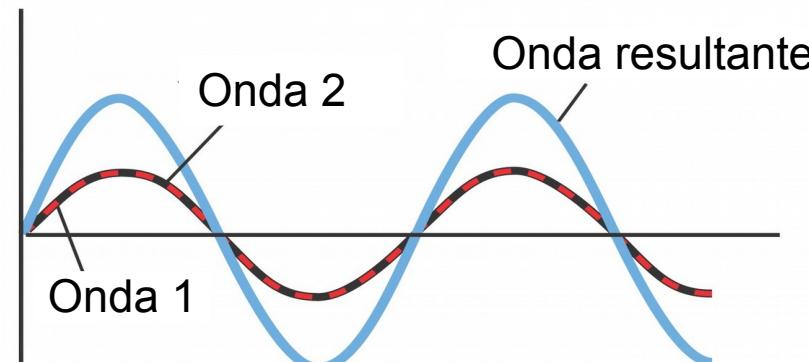
- Dependencia de la amplitud con la diferencia de fase

$$y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(kx - \omega t + \frac{\phi}{2})$$

A' ←

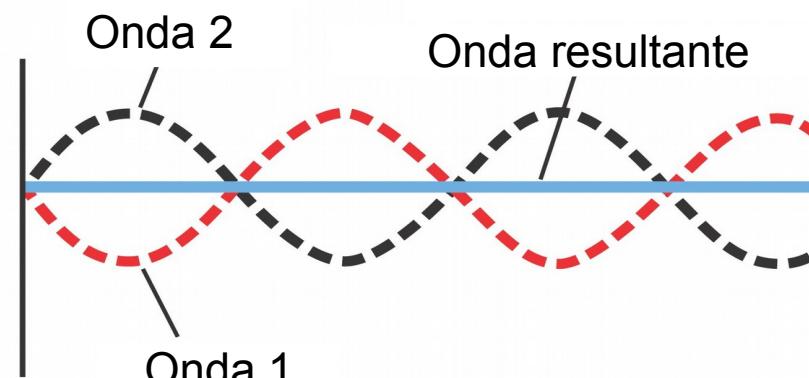
- $\phi=0, \cos(\phi/2)=1$ y $A'=2A$

Interferencia constructiva



- $\phi=\pi, \cos(\phi/2)=0$ y $A'=0$

Interferencia destructiva



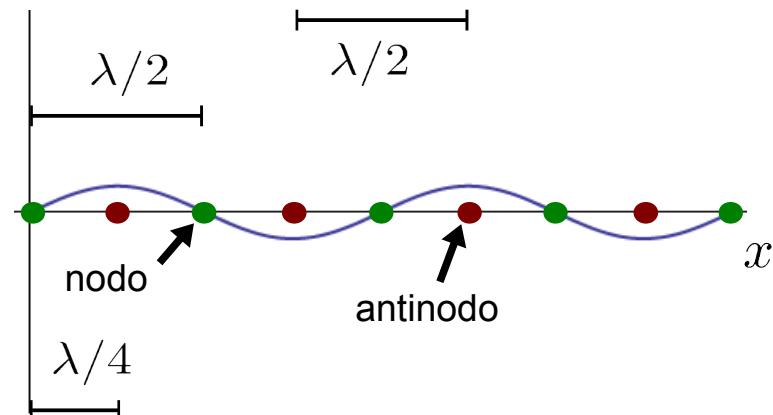
Onda estacionaria en un medio infinito

- Dos ondas con misma amplitud, ω , k y constante de fase pero **sentidos contrarios**

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

$$y_1 + y_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$



Donde hemos usado

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

Nodos

$$\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

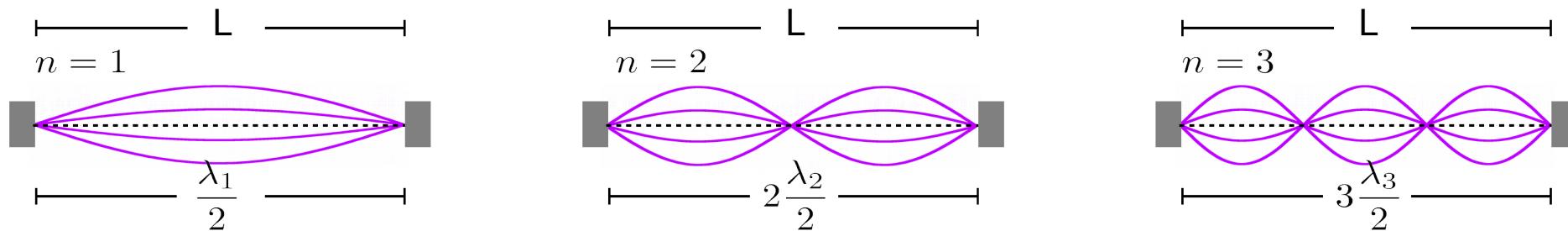
Antinodos

$$\sin(kx) = 1 \Rightarrow kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$$

Onda estacionaria en un medio finito

- Al sujetar una cuerda por sus extremos, se impone una **condición de contorno**
- Sólo son posibles las vibraciones en las que los extremos son nodos

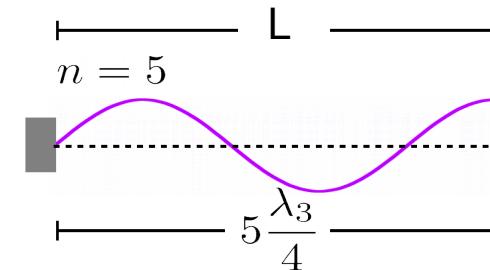
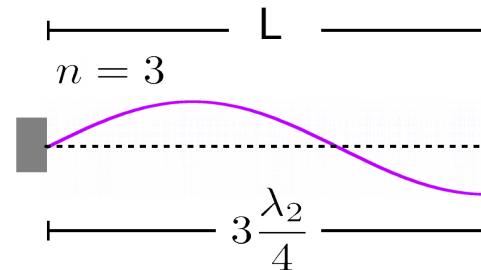
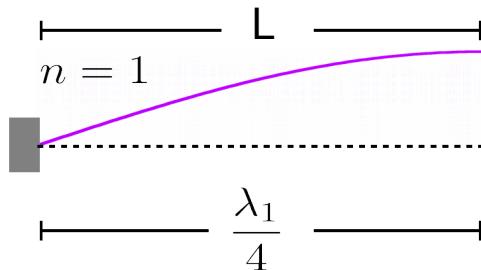


- Para el modo n $L = n \frac{\lambda_n}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3 \dots$
- La frecuencia es $f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = n f_1$
- f_1 es la **frecuencia fundamental**
- Cada uno de los modos es un **armónico**, y el conjunto de frecuencias es el **espectro**

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Onda estacionaria en un medio finito

- ¿Qué ocurre si uno de los extremos está libre? (ondas sonoras en un órgano)
- El extremo fijo es un nodo y el libre es un antinodo

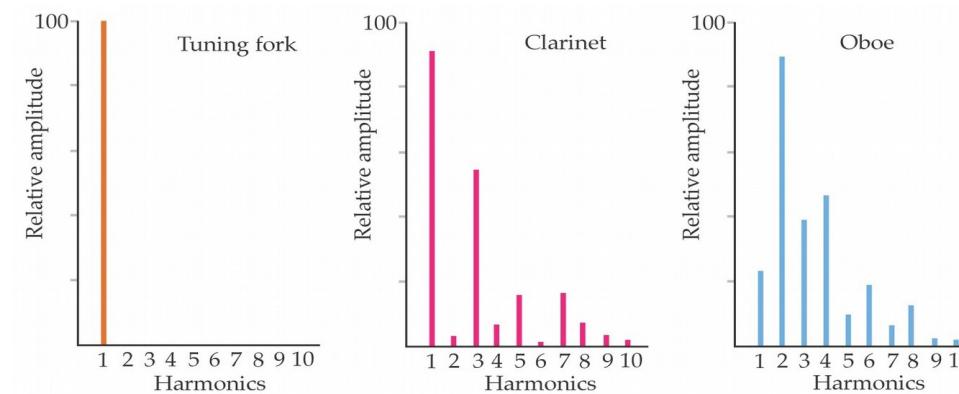
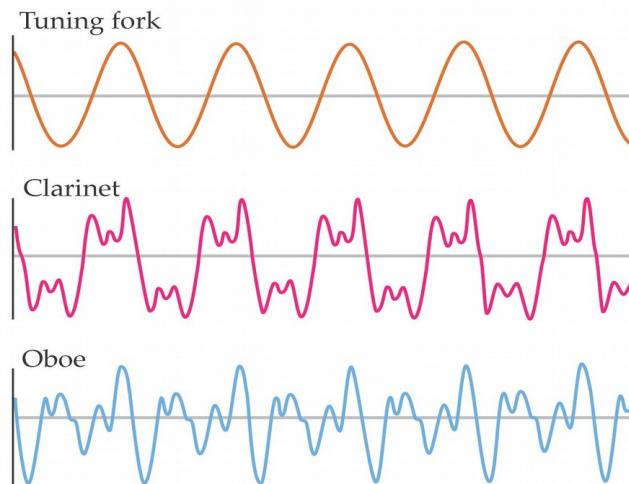


- Para el modo n $L = n \frac{\lambda_n}{4} \rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{n} \quad n = 1, 3, 5 \dots$
- La frecuencia es $f_n = n f_1 \quad n = 1, 3, 5 \dots$
- Sólo aparecen los armónicos impares

$$f_1 = \frac{v}{4L}$$

Onda estacionaria en un medio finito

- Los armónicos de un instrumento es lo que hace que si dos instrumentos tocan la misma nota fundamental el sonido que producen sea distinto



- Series armónicas distintas dan **timbres** distintos

- Dos ondas con frecuencias distintas

$$y_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

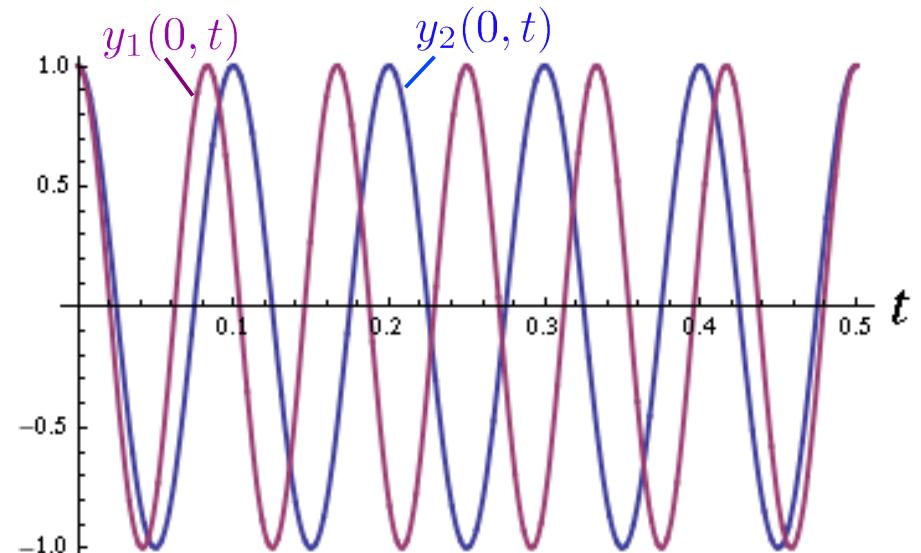
- Observamos la superposición en un punto

$$y_1(0, t) = A \cos(\omega_1 t) = A \cos(2\pi f_1 t)$$

$$y_2(0, t) = A \cos(\omega_2 t) = A \cos(2\pi f_2 t)$$

- Principio de Superposición en el punto $x=0$

$$y(0, t) = y_1(0, t) + y_2(0, t)$$



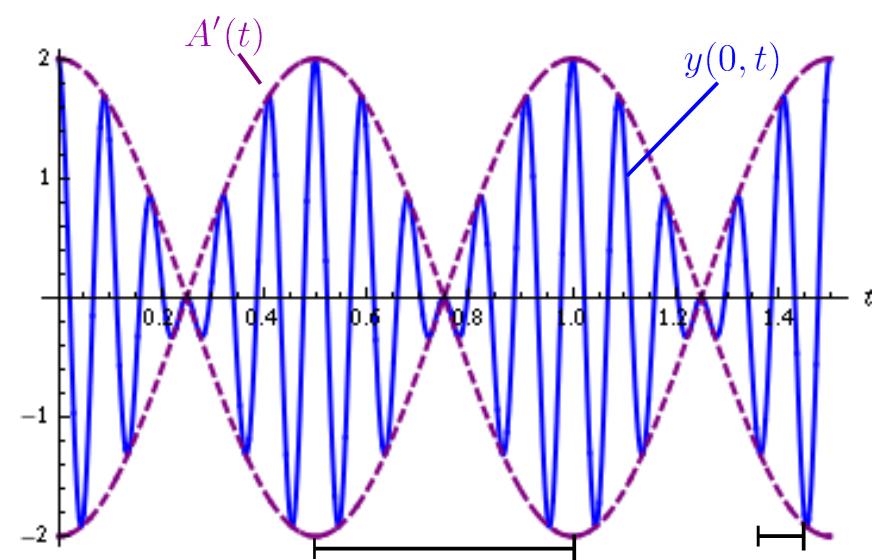
- El resultado es una oscilación con amplitud variable en el tiempo

$$A'(t) \quad y(0, t) = \boxed{2A \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \right]} = A'(t) \cos \left[2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \right]$$

Si $f_1 \simeq f_2 \implies \frac{f_1 - f_2}{2} \ll \frac{f_1 + f_2}{2}$

- La frecuencia que percibe el oído es
- $$f_0 = (f_1 + f_2)/2$$
- La variación de la amplitud se percibe como una pulsación con frecuencia de batido

$$f_{bat} = |f_1 - f_2|$$



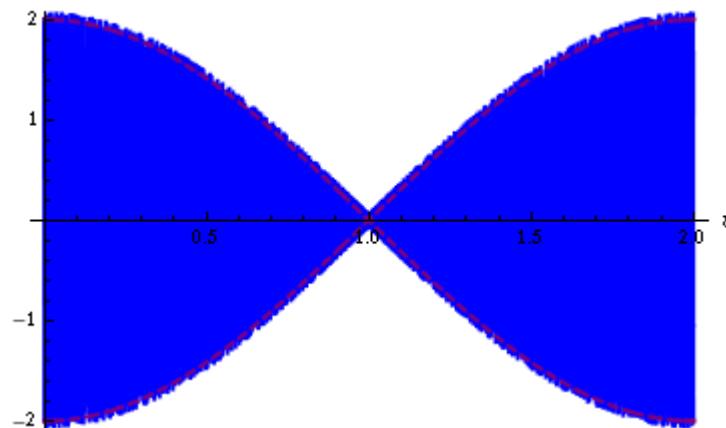
$$T_{bat} = \frac{1}{f_{bat}}$$

$$T_0 = \frac{2}{f_1 + f_2}$$

Interferencias temporales

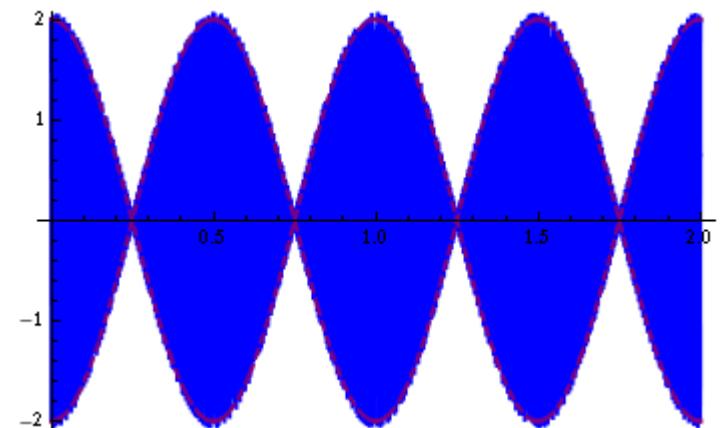
$$f_0 = 440 \text{ Hz}$$

$$f_{bat} = 0.5 \text{ Hz}$$



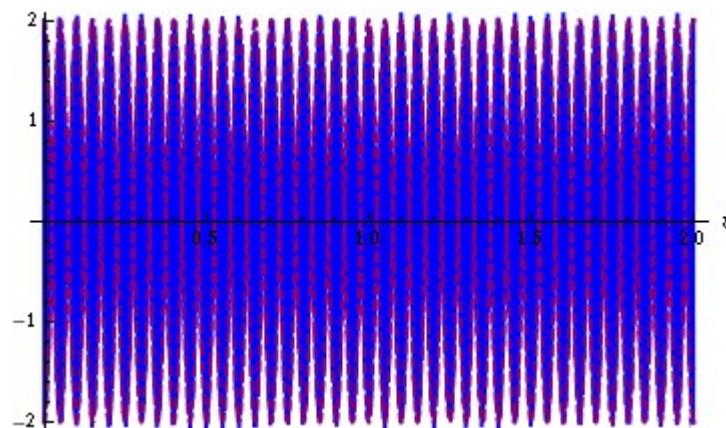
$$f_0 = 440 \text{ Hz}$$

$$f_{bat} = 2 \text{ Hz}$$



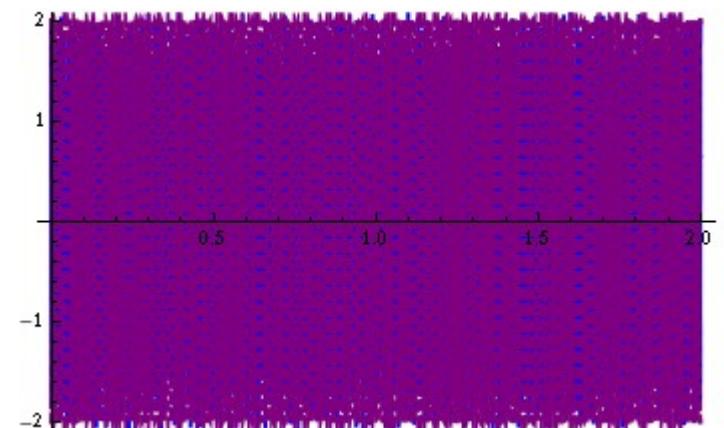
$$f_0 = 440 \text{ Hz}$$

$$f_{bat} = 20 \text{ Hz}$$



$$f_0 = 440 \text{ Hz}$$

$$f_{bat} = 100 \text{ Hz}$$



- Una onda es una perturbación que viaja sin transferencia de materia pero transportando energía
 - Ondas mecánicas o electromagnéticas
 - Ondas longitudinales y transversales
- Función de onda: descripción matemática
- Ecuación de onda: todas las funciones de onda cumplen la ecuación de ondas
 - Onda en una cuerda: velocidad $v = \sqrt{F_T/\mu}$
- Frentes de onda: superficies con la misma fase
 - Descripción de ondas en dos y tres dimensiones

- Ondas sinusoidales
 - Amplitud, periodo, frecuencia, longitud de onda, número de onda
 - Velocidad de la onda
- La velocidad de propagación sólo depende del medio, no de la fuente
- Energía transmitida por una onda
- Reflexión y transmisión
- Superposición: Principio de Superposición
 - Interferencia constructiva o destructiva
 - Ondas estacionarias