

# OSCILACIONES, ONDAS Y TERMODINÁMICA

## MÓDULO 1: OSCILACIONES

Figuras cedidas en parte por W.H. Freeman/Worth, que pertenecen al libro “Física, 4a. Ed.”, P.A. Tipler, Ed. Reverté

# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos,  
sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo  
de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones  
amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y  
sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial.  
Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía.  
Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura  
de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición.  
Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de  
direcciones perpendiculares.



# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos,  
sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo  
de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones  
amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y  
sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial.  
Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía.  
Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura  
de la resonancia.

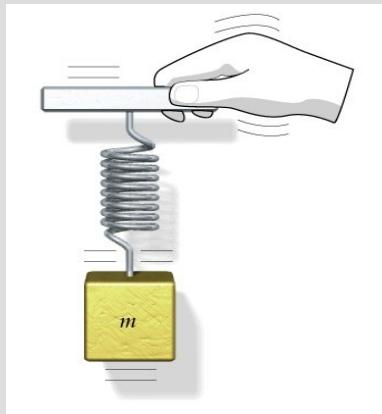
## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición.  
Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de  
direcciones perpendiculares.



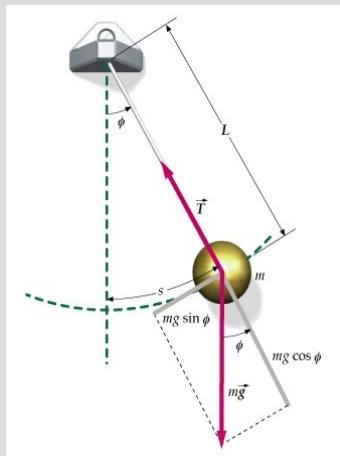
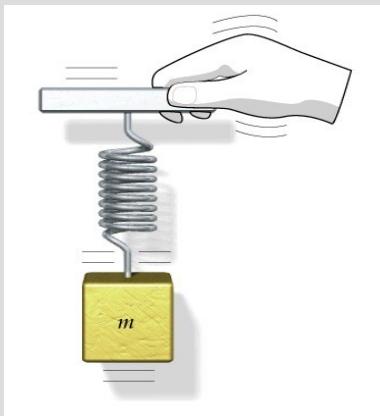
# Módulo 1: Oscilaciones

En la naturaleza hay muchos sistemas que realizan movimientos armónicos o periódicos (que se repiten):



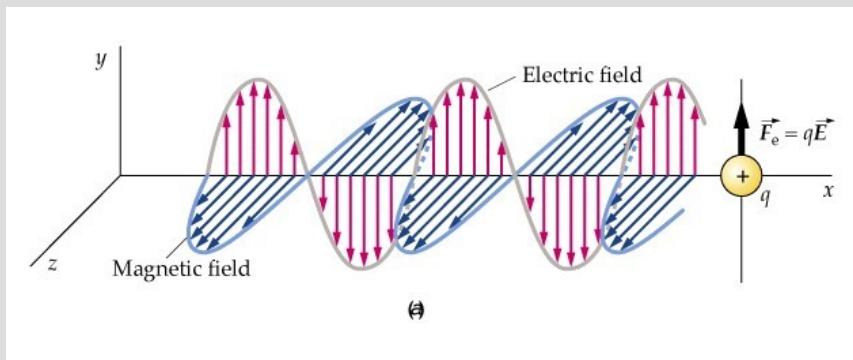
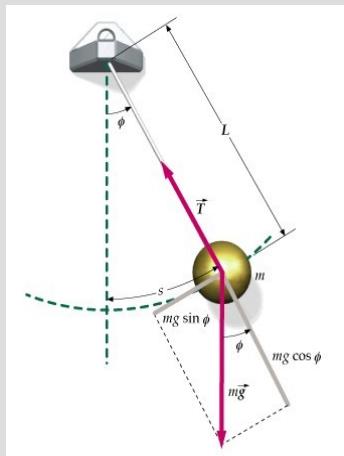
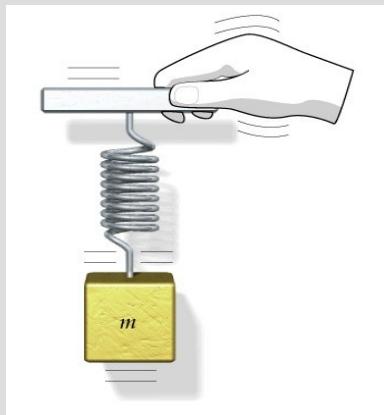
# Módulo 1: Oscilaciones

En la naturaleza hay muchos sistemas que realizan movimientos armónicos o periódicos (que se repiten):



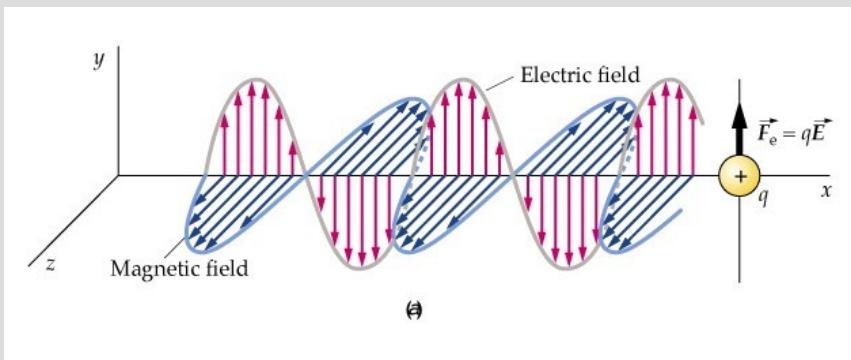
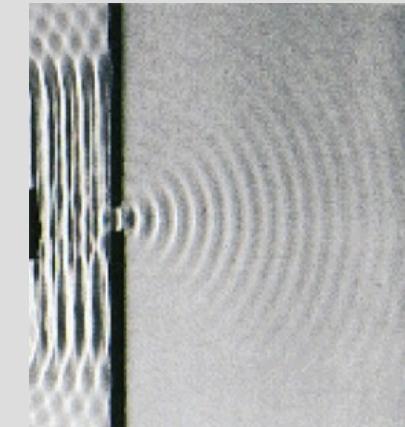
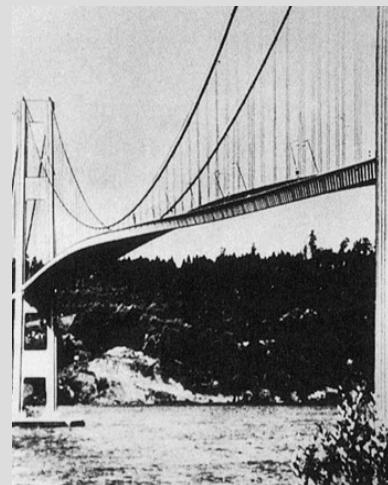
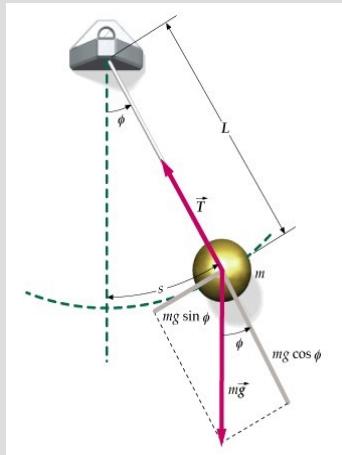
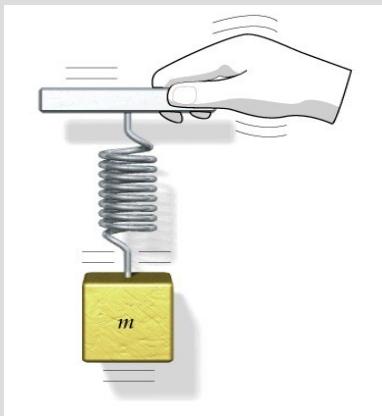
# Módulo 1: Oscilaciones

En la naturaleza hay muchos sistemas que realizan movimientos armónicos o periódicos (que se repiten):



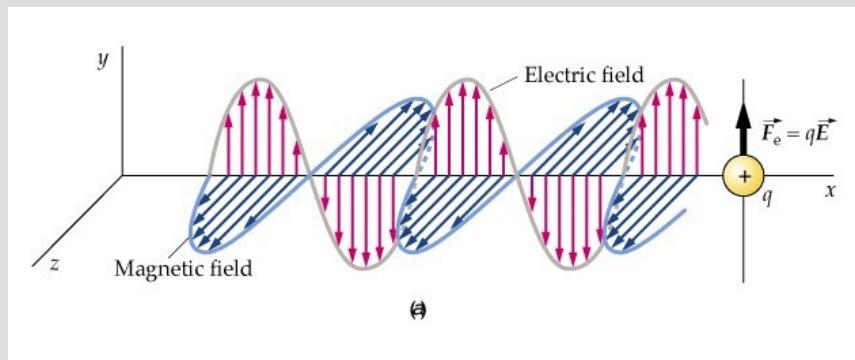
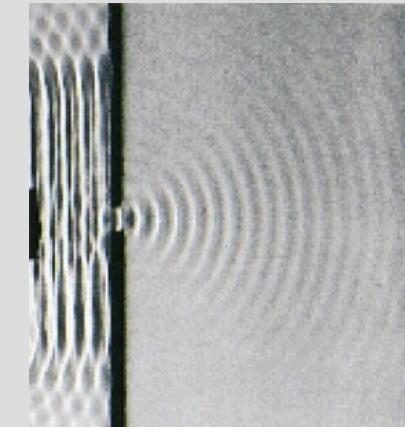
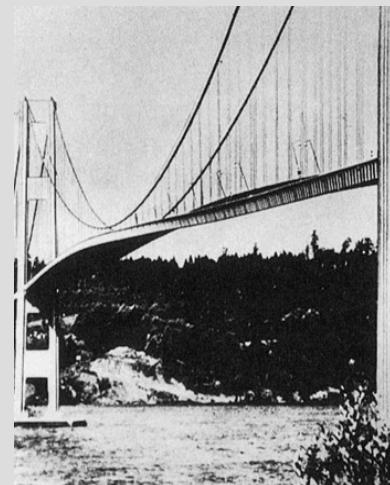
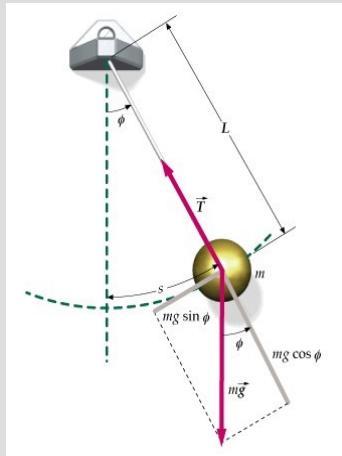
# Módulo 1: Oscilaciones

En la naturaleza hay muchos sistemas que realizan movimientos armónicos o periódicos (que se repiten):

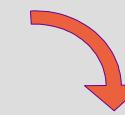


# Módulo 1: Oscilaciones

En la naturaleza hay muchos sistemas que realizan movimientos armónicos o periódicos (que se repiten):



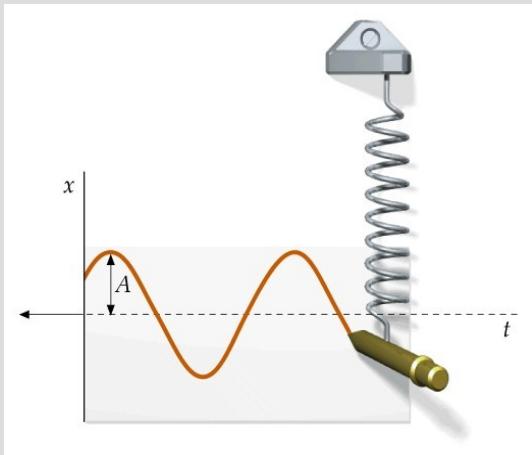
Objetivo:



Estudiar la **cinemática** (ec. del mov.)  
y la **dinámica** de estos movimientos

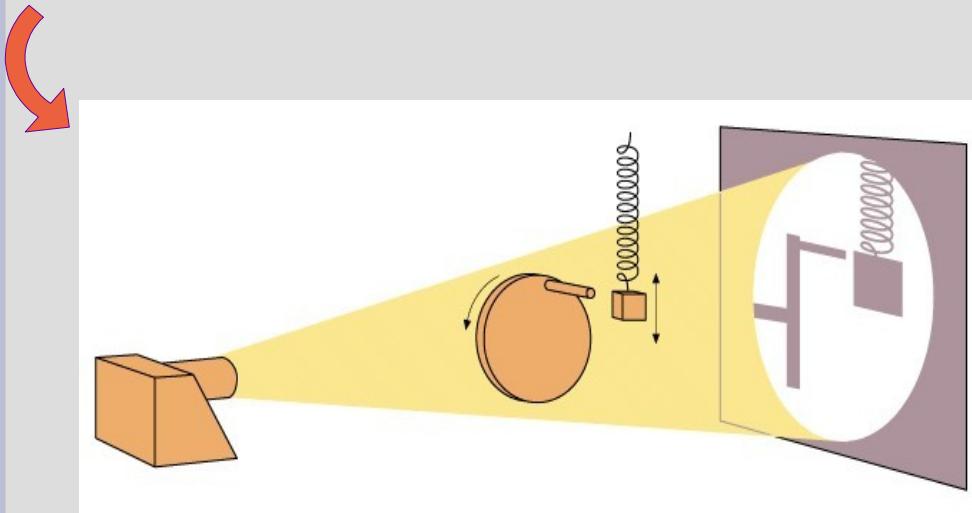
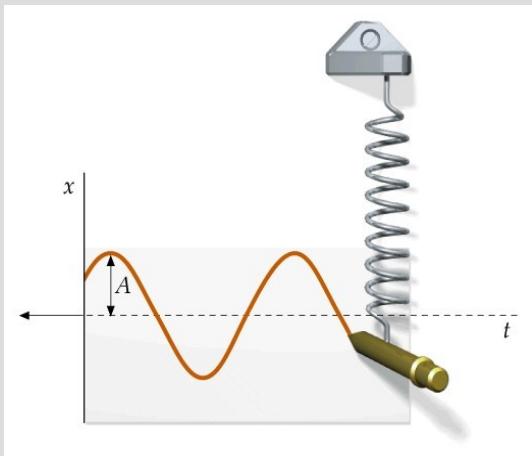
# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Quiero encontrar las ec. del movimiento ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

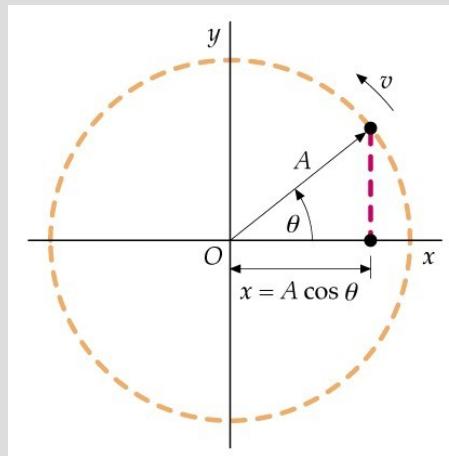
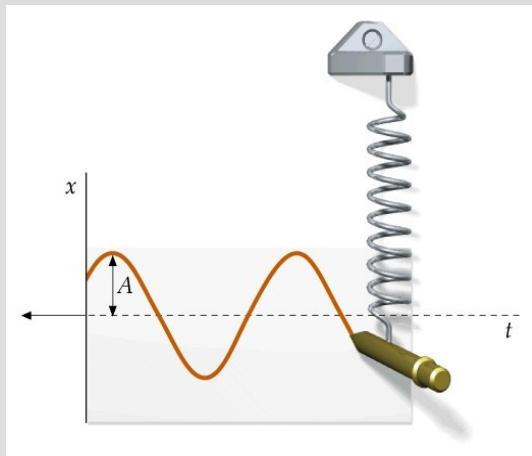
Quiero encontrar las ec. del movimiento ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )



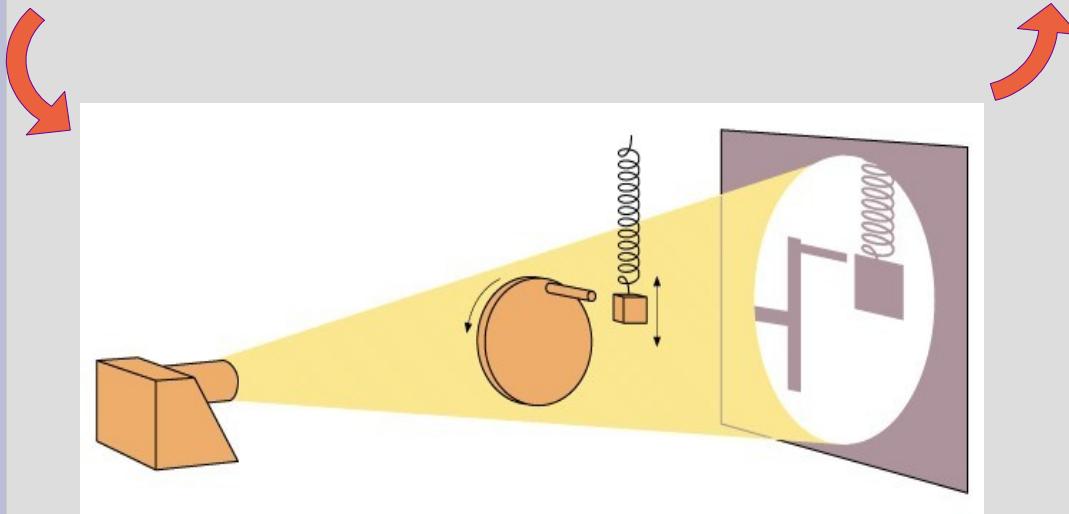
<http://www.youtube.com/v/BRbCW2MsL94&rel=1>

# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Quiero encontrar las ec. del movimiento ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )



*El MAS es la proyección sobre un eje de un MCU*



<http://www.youtube.com/v/BRbCW2MsL94&rel=1>



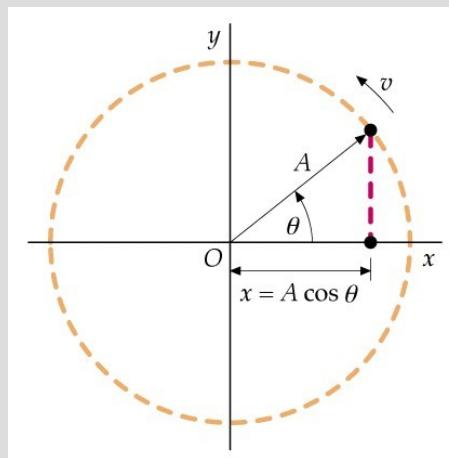
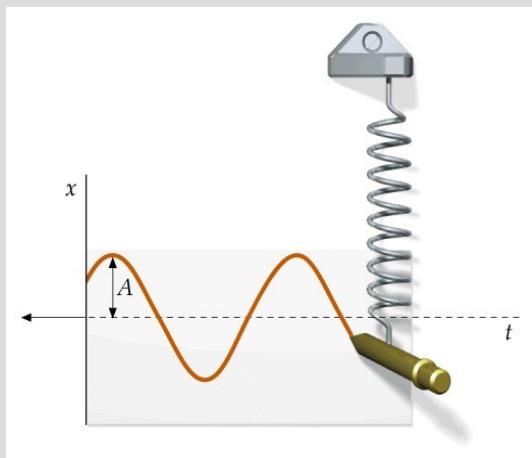
Dpt. de Física i Eng. Nuclear

Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Osc. Ondas y Termodinámica

# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

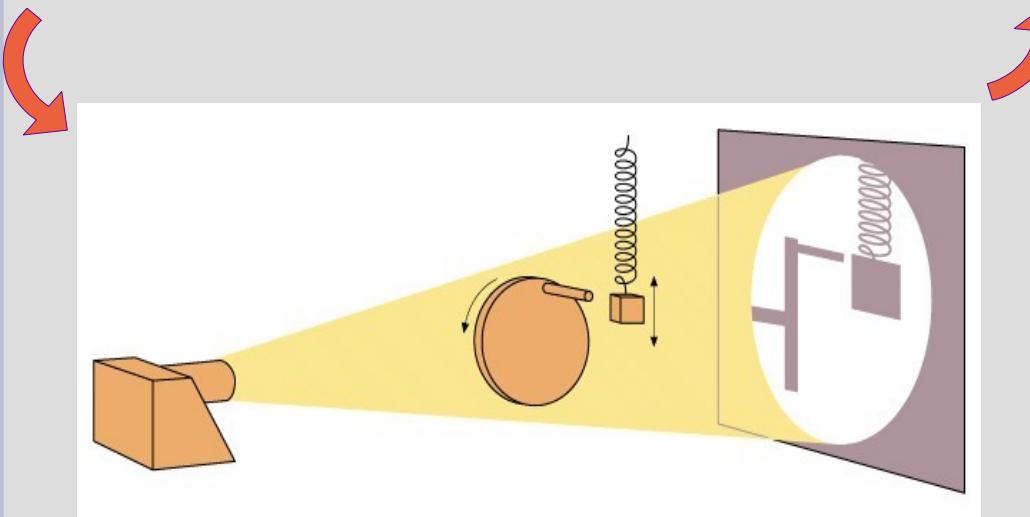
Quiero encontrar las ec. del movimiento ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )



**El MAS es la proyección sobre un eje de un MCU**

**Posición del MAS**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$



$A$  : amplitud del mov.  
 $(\omega t + \phi)$  : fase del mov.  
 $\omega$  : frecuencia angular  
 $\phi$  : fase inicial

$$f = \frac{\omega}{2\pi} : \text{frecuencia del mov.}$$

$$T = \frac{1}{f} : \text{periodo del mov.}$$

<http://www.youtube.com/v/BRbCW2MsL94&rel=1>



Dpt. de Física i Eng. Nuclear

Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Osc. Ondas y Termodinámica

# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

## Velocidad

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$v_{max}$



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

## Velocidad

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

## Aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

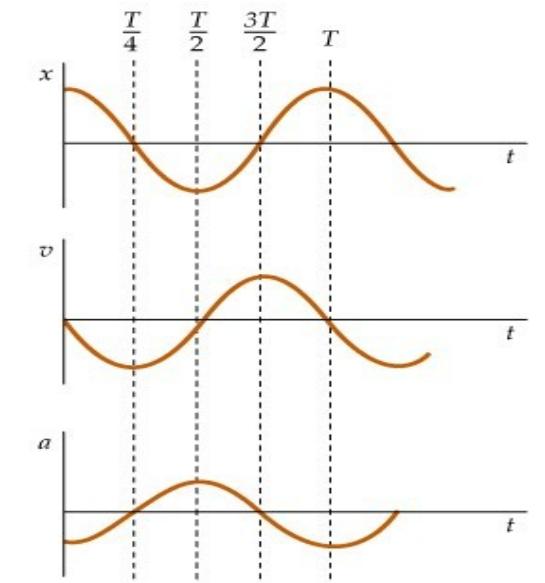
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

## Velocidad

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

## Aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

## Velocidad

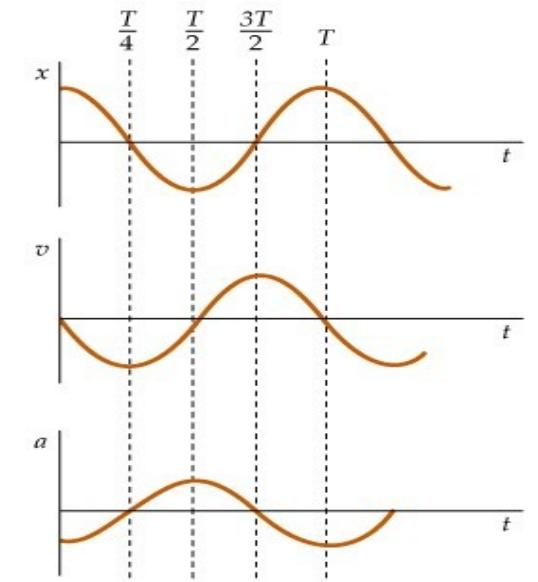
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

## Aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

*La ac. es proporcional y opuesta al desplazamiento.*



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

## Velocidad

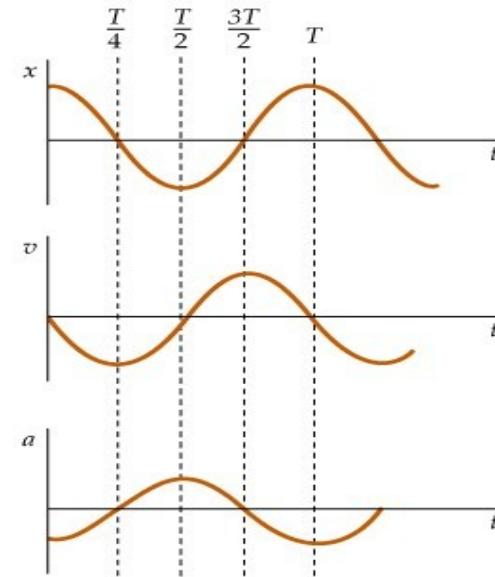
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

## Aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

La ac. es proporcional y opuesta al desplazamiento.



También se cumple que:

$$\frac{v}{-\omega A} = \sin(\omega t + \phi)$$
$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

Relación general entre  $a$ ,  $x$  y  $v$ .

# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

Posición, Velocidad y aceleración del MAS ( $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ )

## Posición

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

## Velocidad

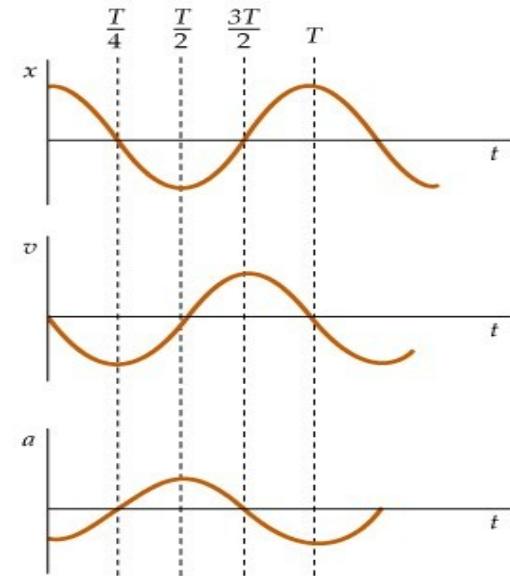
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

## Aceleración

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

La ac. es proporcional y opuesta al desplazamiento.



(para  $t=0$ )

$$\tan(\phi) = \frac{v_0}{-\omega x_0}$$

También se cumple que:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

Relación general entre  $a$ ,  $x$  y  $v$ .

# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{v_0}{-\omega x_0}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

**Ejercicio:** Una partícula realiza un MAS de amplitud  $A=5\text{m}$  y en  $t=0$  su posición es  $x_0=-3\text{m}$  y su velocidad positiva. Cuanto vale la fase inicial.

*Solución: 4.069 rad*

**Ejercicio:** Una partícula realiza un MAS y se encuentra en el origen para  $t=0$ . Si su periodo es  $T=24\text{s}$ , cuanto tiempo ha de transcurrir hasta que la elongación sea la mitad de la amplitud.

*Solución: 2 s*



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{v_0}{-\omega x_0}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

**Cuestión:** Una partícula realiza un MAS y se encuentra en la posición x. ¿El tiempo que tardará en volver a la misma posición será igual a un periodo?. Razona la respuesta.

**Cuestión:** En un MAS, ¿es cierto que en algún momento la partícula tiene velocidad y aceleración nulas?. Razona la respuesta.



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{v_0}{-\omega x_0}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

**Ejercicio:** De un MAS conocemos la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración inicial. Determina la amplitud del movimiento, su frecuencia, el periodo y la fase inicial.

**Ejercicio:** Una partícula realiza un MAS y en  $t_1 = 16\text{s}$  su posición velocidad y aceleración valen:  $x_1 = 9.80\text{cm}$ ,  $v_1 = 132\text{cm/s}$  y  $a_1 = -4743.2\text{cm/s}^2$ . Encontrar la expresión de  $x(t)$ .

*Solución:*  $x = 11.491 \cos(22t + 5.5922)$  en cm



# 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\tan(\phi) = \frac{v_0}{-\omega x_0}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -\omega^2 x$$

**Ejercicio (prob 6):** Una partícula está encima de un émbolo que realiza un MAS vertical de periodo T y amplitud A. Determinar qué condición deben cumplir T, A y g para que la partícula deje de estar en contacto con el émbolo y en qué posición pasará esto.

*Solución:*  $A > \frac{g T^2}{4\pi^2}$



# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos,  
sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo  
de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones  
amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y  
sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial.  
Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía.  
Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura  
de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición.  
Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de  
direcciones perpendiculares.



## 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

**Sabemos que:**

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$



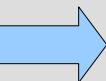
## 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

**Sabemos que:**

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

2<sup>a</sup> ley de Newton


$$F = m a = -m \omega^2 x$$



## 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

**Sabemos que:**

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

2<sup>a</sup> ley de Newton

$$F = m a = -m \omega^2 x$$

Cte.



# 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

Sabemos que:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

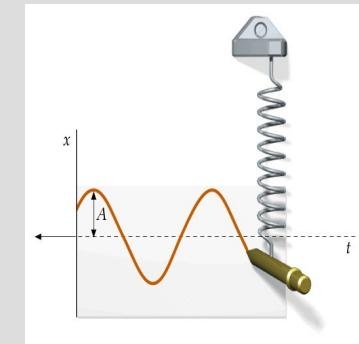
2<sup>a</sup> ley de Newton

$$F = m a = -m \omega^2 x$$

Cte.

con  $k = m \omega^2$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Fuerza recuperadora  
elástica.



## 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

Sabemos que:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

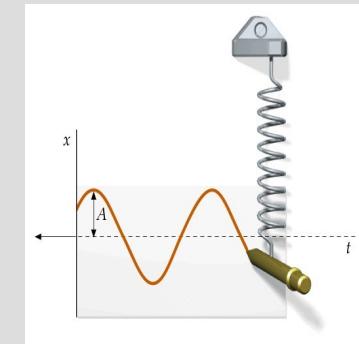
2<sup>a</sup> ley de Newton

$$F = m a = -m \omega^2 x$$

Cte.

con  $k = m \omega^2$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Fuerza recuperadora  
elástica.



La ecuación diferencial del movimiento es:

$$F = -m \omega^2 x = m \ddot{x}$$

## 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

Sabemos que:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

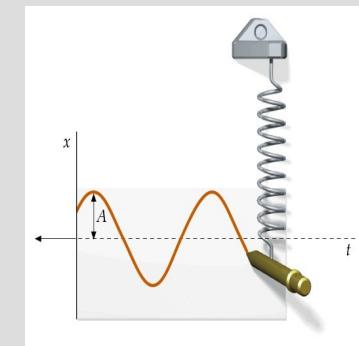
2<sup>a</sup> ley de Newton

$$F = m a = -m \omega^2 x$$

Cte.

$$\text{con } k = m \omega^2, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Fuerza recuperadora elástica.



La ecuación diferencial del movimiento es:

$$F = -m \omega^2 x = m \ddot{x}$$



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Ec. dif. del MAS



## 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.

Fuerza que da origen al MAS:

Sabemos que:

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

2<sup>a</sup> ley de Newton

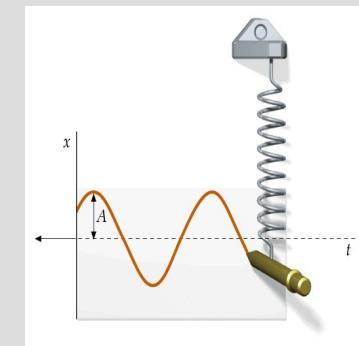
$$F = m a = -m \omega^2 x$$

Cte.

Fuerza recuperadora  
elástica.

$$F = -k x$$

con  $k = m \omega^2$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



La ecuación diferencial del movimiento es:

$$F = -m \omega^2 x = m \ddot{x}$$



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

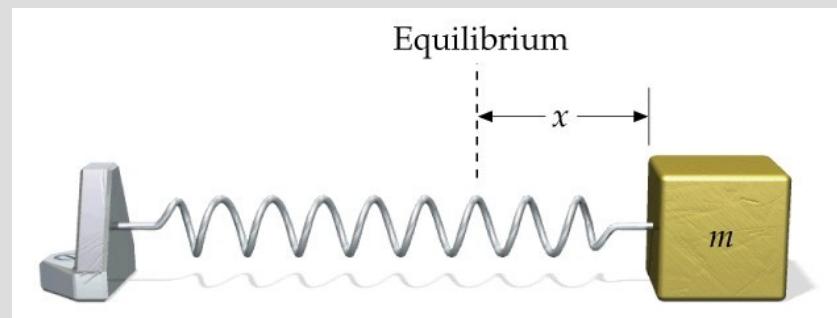
Ec. dif. del MAS

- Si al aplicar la 2<sup>a</sup> Ley de Newton sale esta ecuación, la partícula realizará un MAS.
- Su solución es:  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$
- Obteniendo esta ecuación podremos obtener la frecuencia del movimiento, que es constante.



# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: sistema masa muelle.

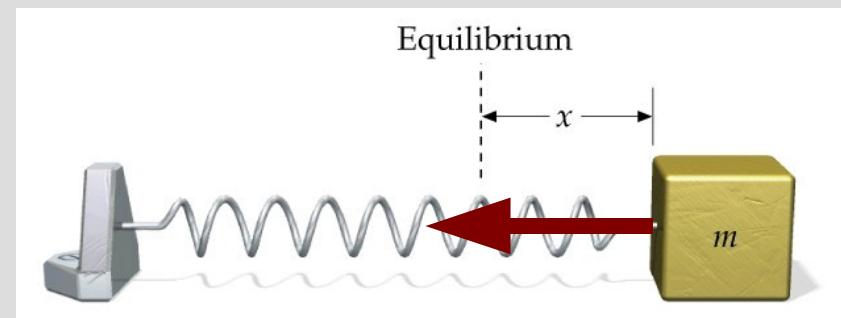


# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: sistema masa muelle.

$$F = -kx$$

*Fuerza elástica*



# 1.3 Ejemplos de MAS.

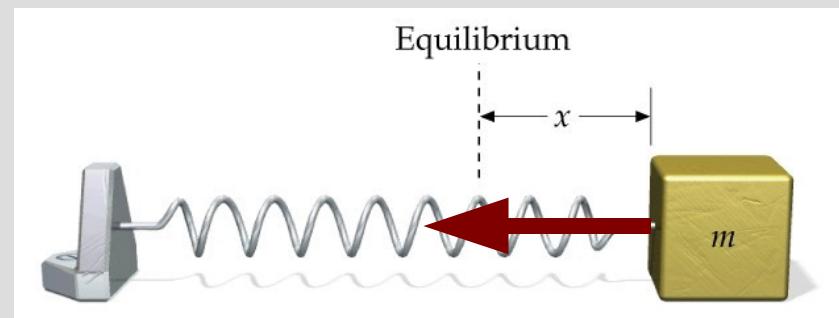
Ejemplo: sistema masa muelle.

$$F = -kx$$

*Fuerza elástica*

$$F = -kx = m\ddot{x}$$

*2<sup>a</sup> ley de Newton*



# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: sistema masa muelle.

$$F = -kx$$

*Fuerza elástica*

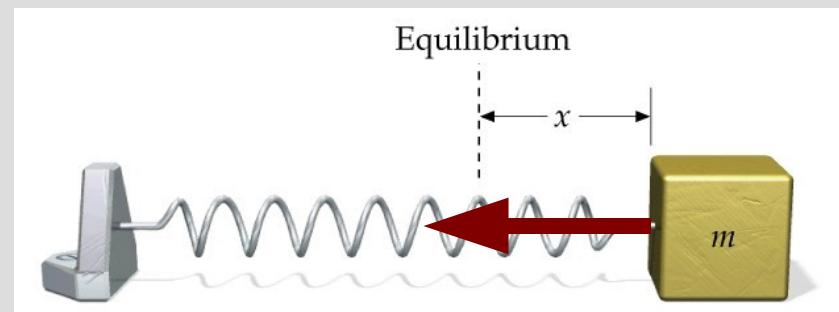
$$F = -kx = m\ddot{x}$$

*2<sup>a</sup> ley de Newton*

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

*Ecuación diferencial*

Es la ecuación de un MAS con:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

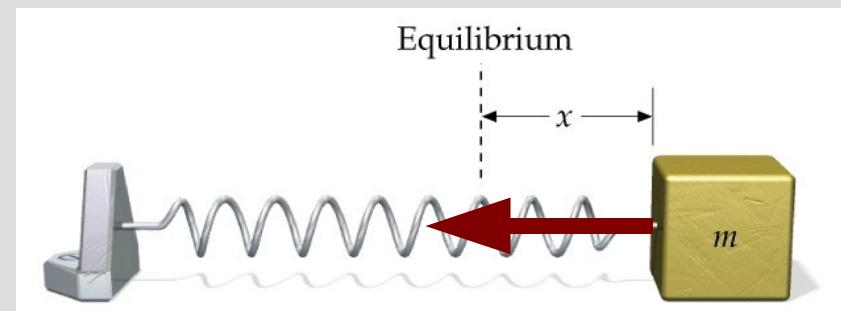
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: sistema masa muelle.

$$F = -kx \quad \text{Fuerza elástica}$$
$$F = -kx = m\ddot{x} \quad \text{2ª ley de Newton}$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{Ecuación diferencial}$$

Es la ecuación de un MAS con:



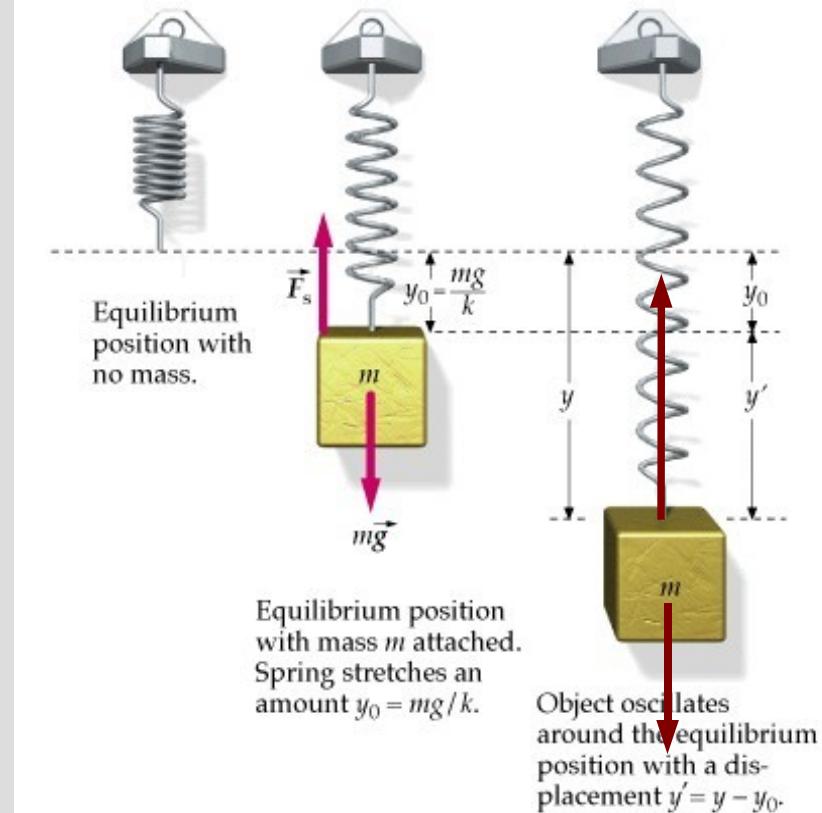
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Ejercicio:** una partícula de masa  $m=2\text{kg}$  está sujetada de un muelle de constante  $k=20\text{ N/m}$  alargado inicialmente una longitud  $x_0=5\text{cm}$ . Si en el instante inicial la partícula tiene una velocidad  $v_0=2\text{ m/s}$  hacia el origen, calcular la frecuencia, periodo, amplitud y fase inicial del movimiento.

# 1.3 Ejemplos de MAS.

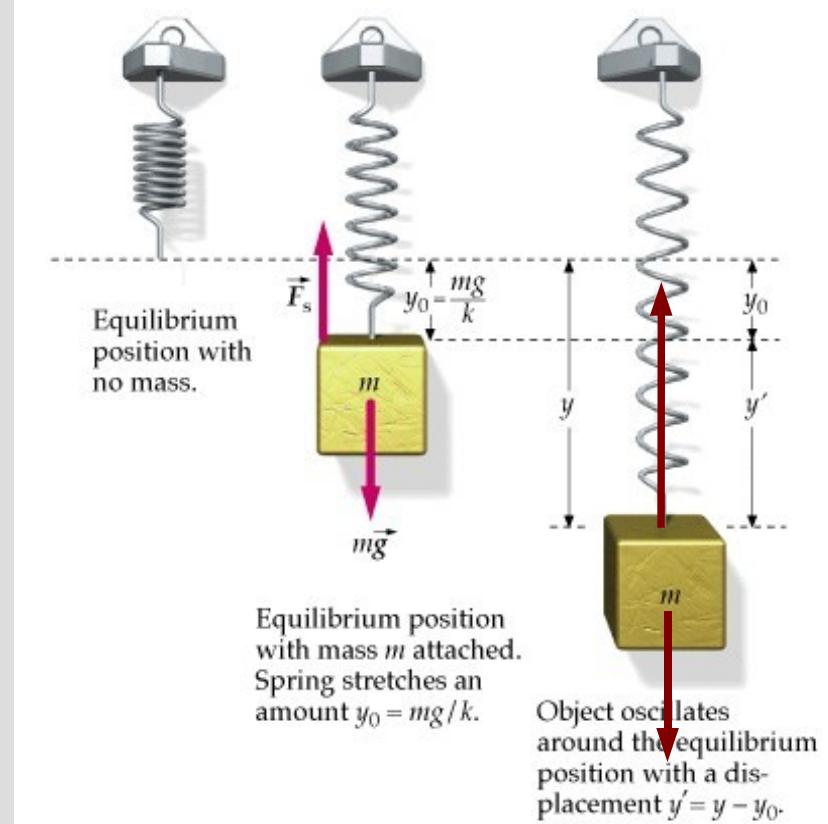
## Ejemplo: muelle vertical



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

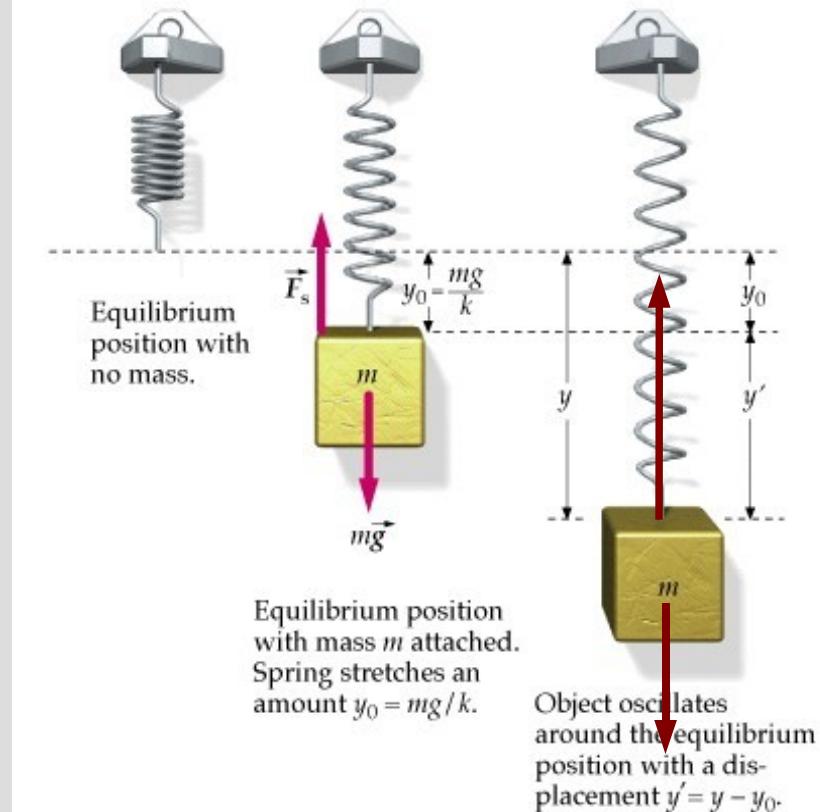


# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

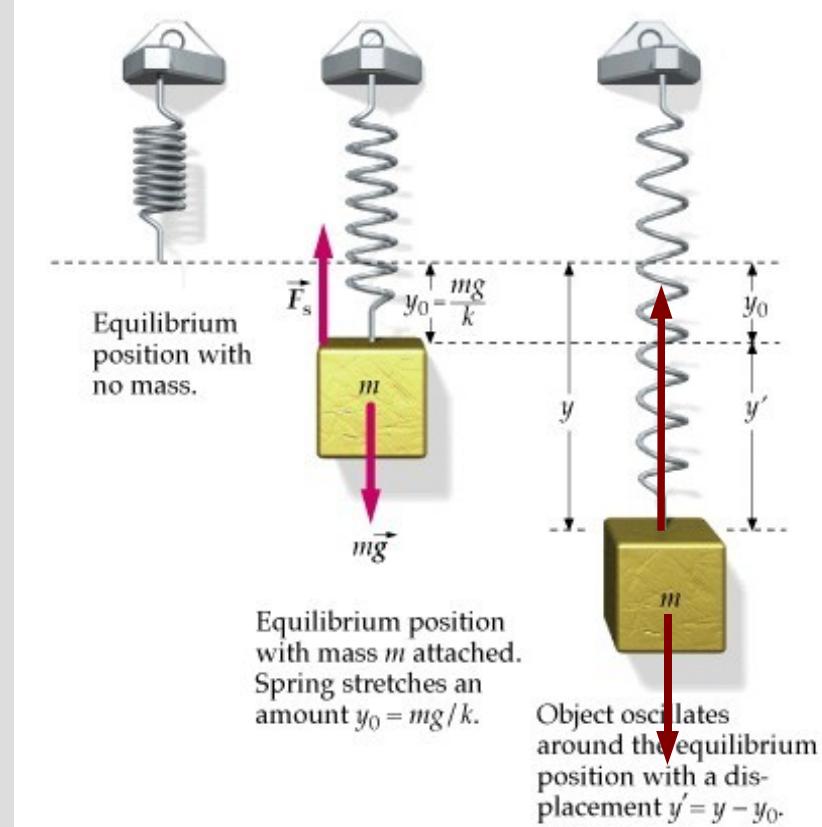
## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

Posición de equilibrio:

$$\sum F = -k y_0 + mg = 0$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

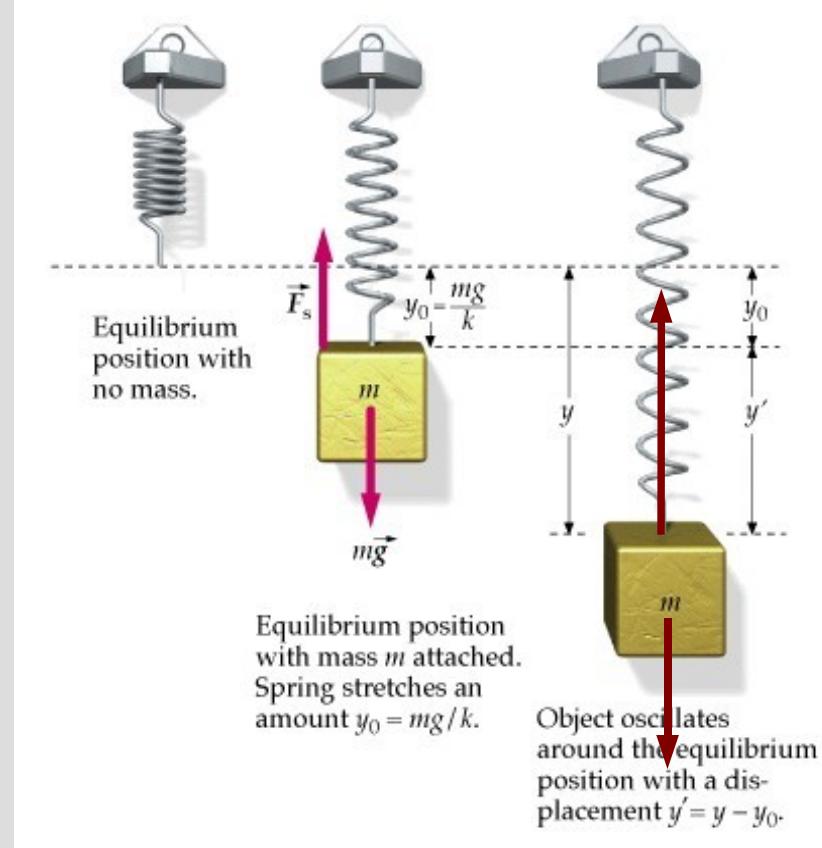
## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

Posición de equilibrio:

$$\sum F = -k y_0 + mg = 0 \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

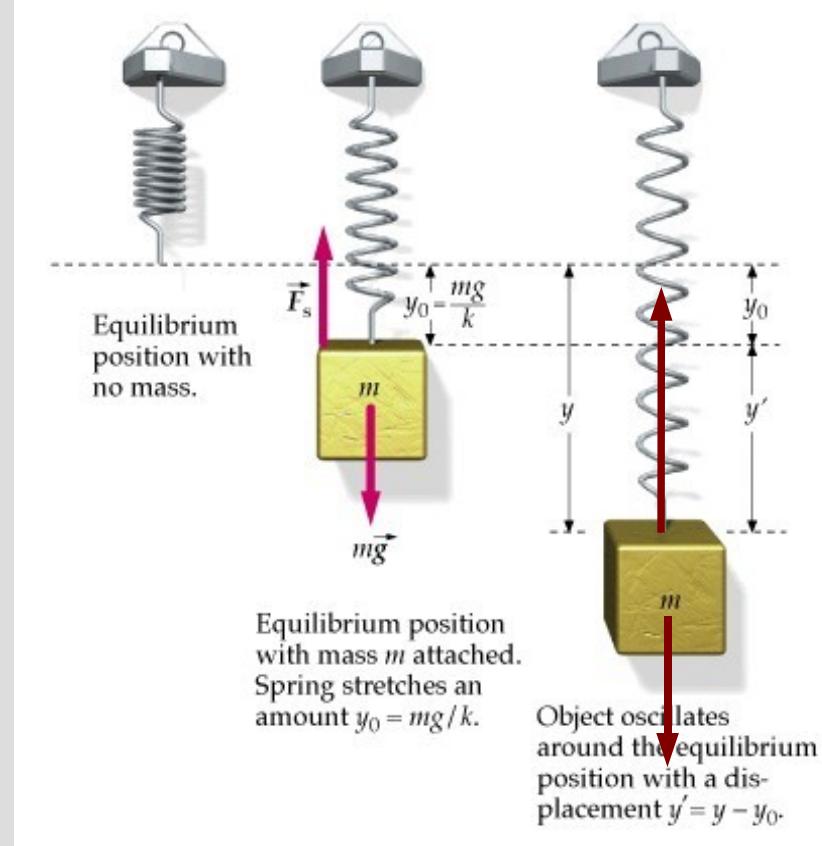
Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

Posición de equilibrio:

$$\sum F = -k y_0 + mg = 0 \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$\sum F = -k y + m g = m \ddot{y}$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

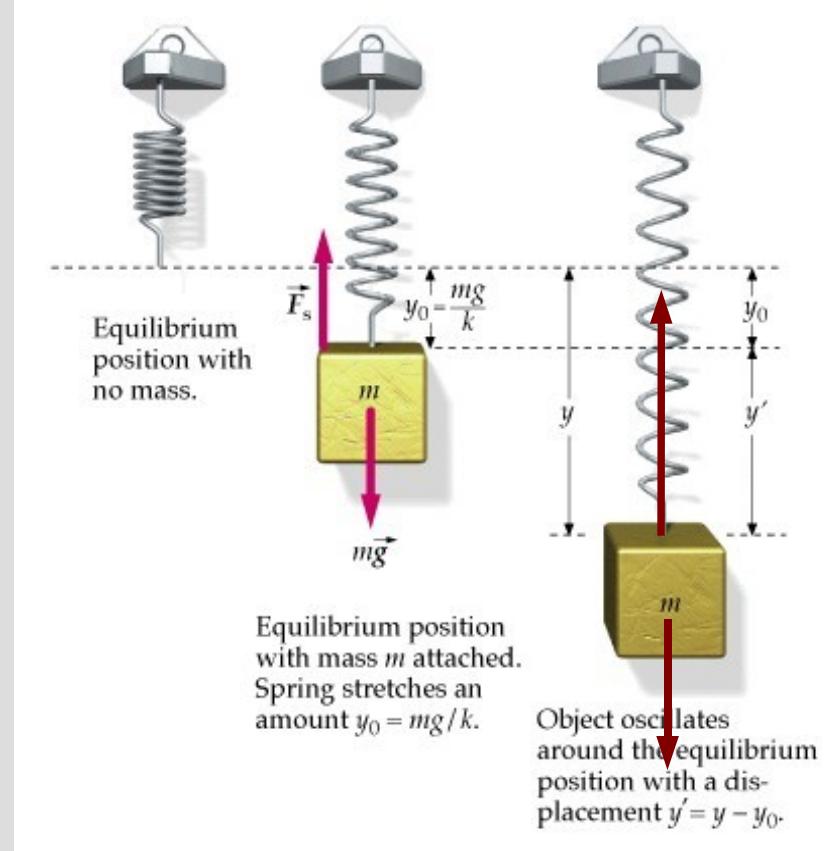
Posición de equilibrio:

$$\sum F = -k y_0 + mg = 0 \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$\sum F = -k y + m g = m \ddot{y} \quad y = y' + y_0$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}'$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

Posición de equilibrio:

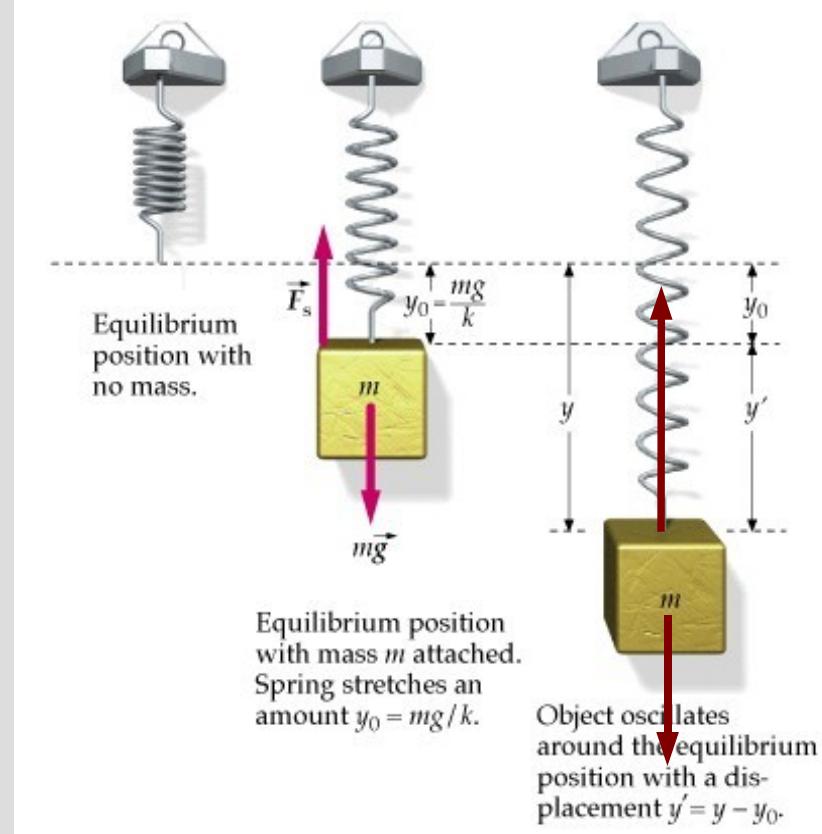
$$\sum F = -k y_0 + mg = 0 \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$\sum F = -k y + m g = m \ddot{y}$$

$$y = y' + y_0$$
$$\ddot{y} = \ddot{y}'$$

$$-k(y' + y_0) + m g = m \ddot{y}'$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

Posición de equilibrio:

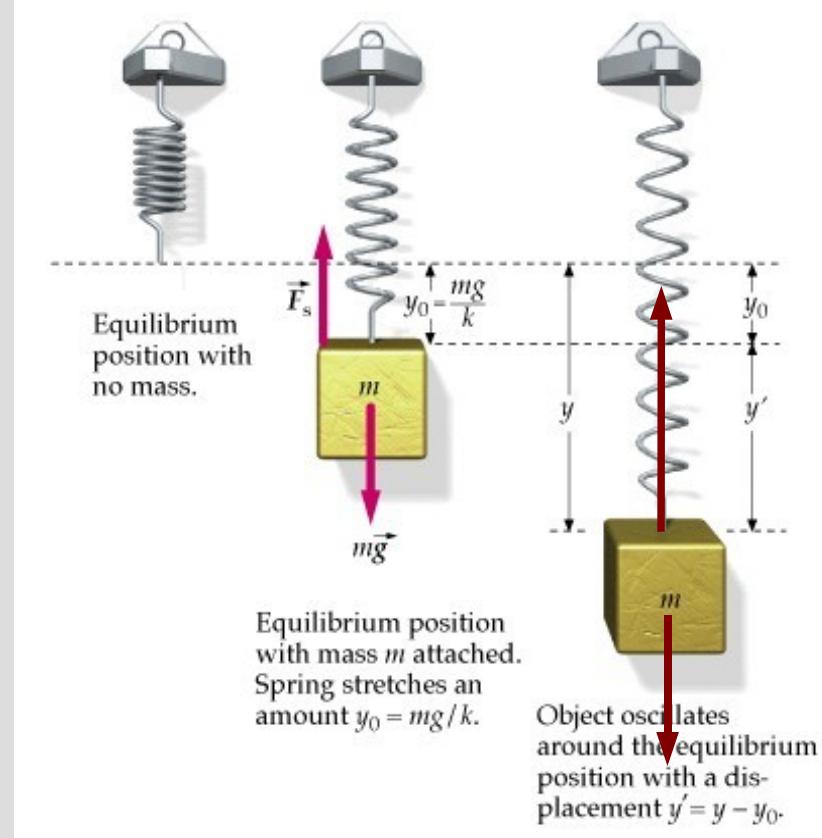
$$\sum F = -k y_0 + mg = 0 \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$\sum F = -k y + m g = m \ddot{y}$$

$$y = y' + y_0$$
$$\ddot{y} = \ddot{y}'$$

- ↷  $-k(y' + y_0) + m g = m \ddot{y}'$
- ↷  $-k y' - k y_0 + m g = m \ddot{y}'$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: muelle vertical

Sabemos que la partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio ( $y_0$ ).

Buscaré  $y_0$  y luego aplicaré la  
2<sup>a</sup> Ley de Newton en función de  $y'$

Posición de equilibrio:

$$\sum F = -k y_0 + mg = 0 \rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

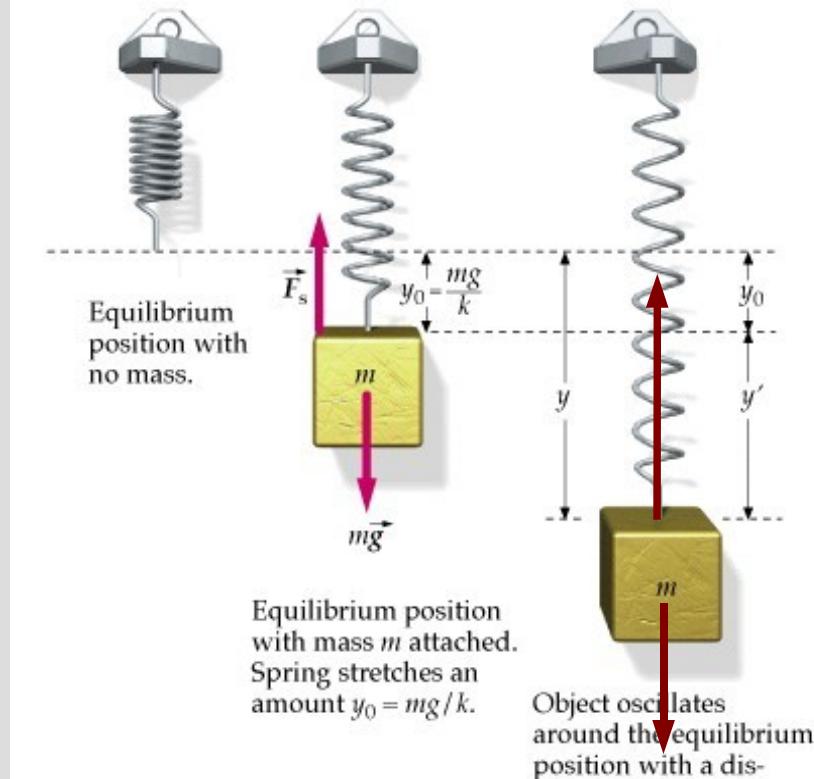
2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$\sum F = -k y + m g = m \ddot{y}$$

$$y = y' + y_0$$
$$\ddot{y} = \ddot{y}'$$

$$-k(y' + y_0) + m g = m \ddot{y}'$$
$$-k y' - k y_0 + m g = m \ddot{y}'$$

Es un MAS  
alrededor de  $y_0$



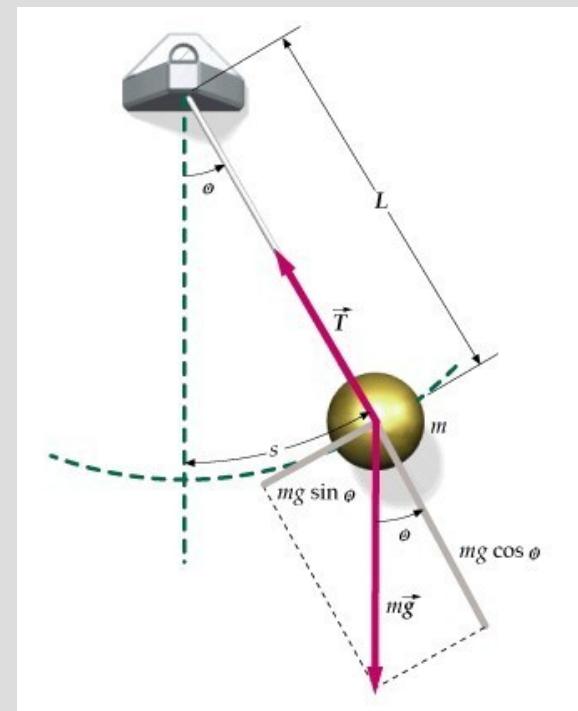
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo simple

*Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.*



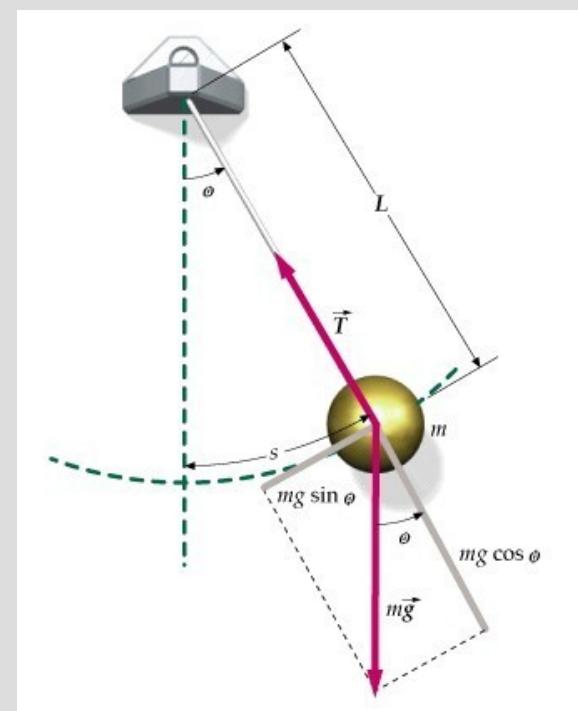
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo simple

*Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.*

**2<sup>a</sup>** Ley de Newton en la componente tangencial (angular).

$$\sum F_T = - m g \sin(\theta)$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

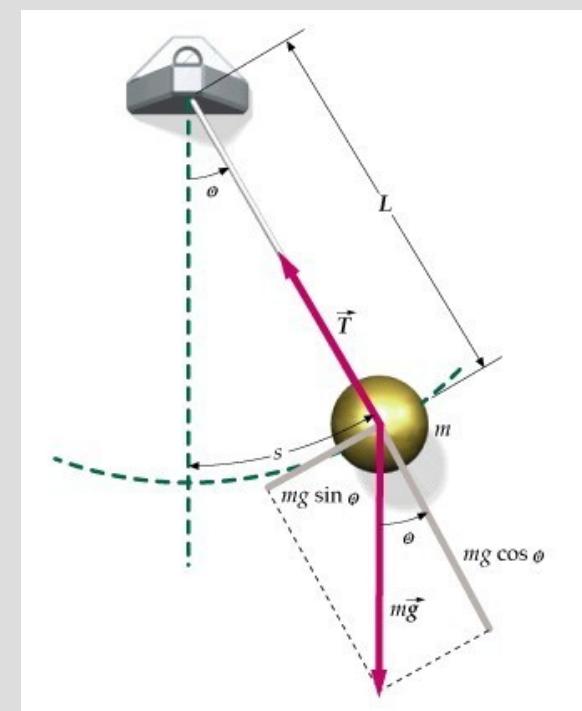
## Ejemplo: péndulo simple

Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.

2<sup>a</sup> Ley de Newton en la componente tangencial (angular).

$$\sum F_T = -mg \sin(\theta) = m L \ddot{\theta}$$

$a_T = R\alpha$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Desarrollo en serie de Taylor

## Ejemplo: péndulo simple

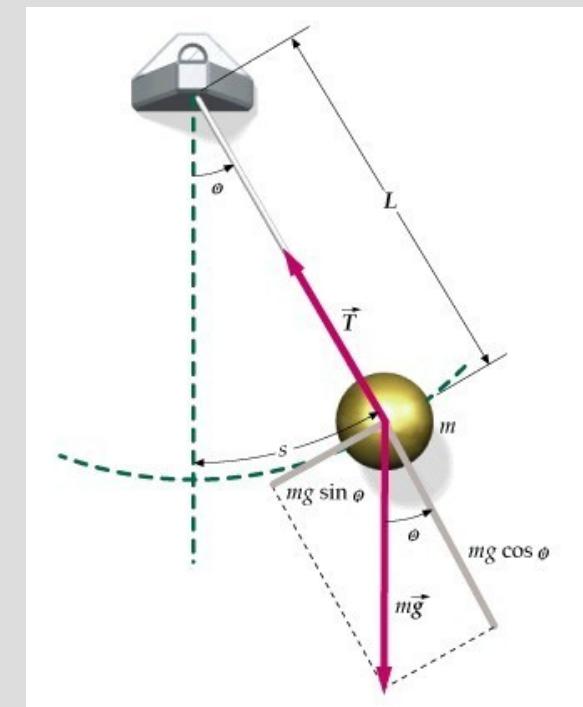
Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.

**2<sup>a</sup>** Ley de Newton en la componente tangencial (angular).

$$\sum F_T = -mg \sin(\theta) = m L \ddot{\theta}$$

$a_T = R\alpha$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Desarrollo en serie de Taylor

## Ejemplo: péndulo simple

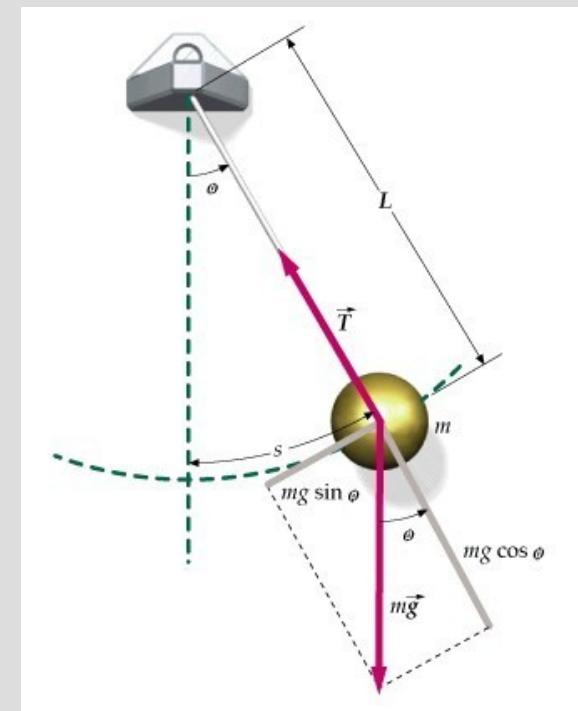
Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.

**2<sup>a</sup> Ley de Newton en la componente tangencial (angular).**

$$\sum F_T = -mg \sin(\theta) = m L \ddot{\theta}$$

$a_T = R\alpha$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Desarrollo en serie de Taylor

## Ejemplo: péndulo simple

Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.

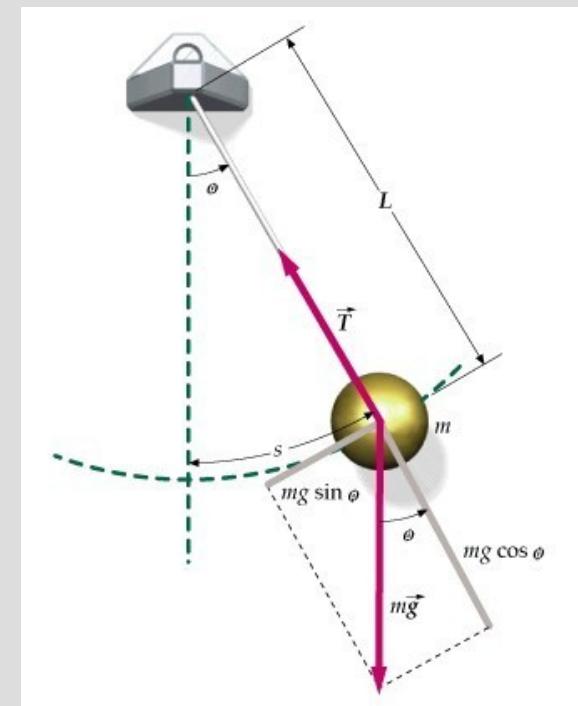
2<sup>a</sup> Ley de Newton en la componente tangencial (angular).

$$\sum F_T = -mg \sin(\theta) = m L \ddot{\theta}$$

$a_T = R\alpha$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$

$$-mg\theta = m L \ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$



Es un MAS con:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Desarrollo en serie de Taylor

## Ejemplo: péndulo simple

Está formado por una partícula sujetada de una cuerda.

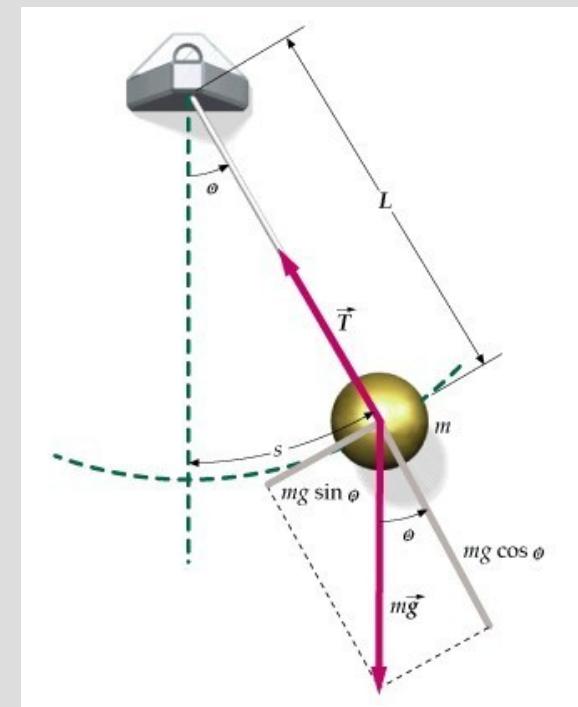
2<sup>a</sup> Ley de Newton en la componente tangencial (angular).

$$\sum F_T = -mg \sin(\theta) = m L \ddot{\theta}$$

$a_T = R\alpha$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$



Es un MAS con:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ejercicio: determinar el error relativo que se comete con la aproximación  $\sin(\theta) \approx \theta$  para  $\theta = 0.1 \text{ rad}$  ( $5.7^\circ$ ) y  $\theta = 0.8 \text{ rad}$  ( $45^\circ$ )

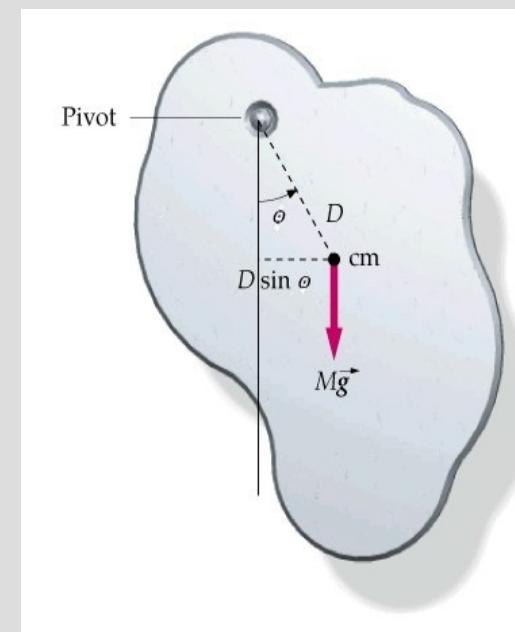
Solución: 0.17% y 12%

Osc. Ondas y Termodinámica

# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo físico (o compuesto)

*Está formado por un sólido rígido que oscila alrededor de un eje fijo ( $O$ ).*



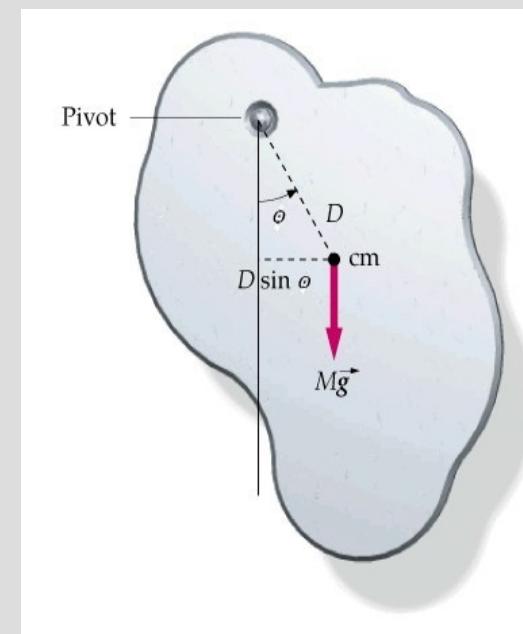
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo físico (o compuesto)

*Está formado por un sólido rígido que oscila alrededor de un eje fijo ( $O$ ).*

Ecuación dinámica de la rotación (suma de momentos).

$$\sum M_O = -mg D \sin(\theta) = I_O \alpha$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo físico (o compuesto)

Está formado por un sólido rígido que oscila alrededor de un eje fijo ( $O$ ).

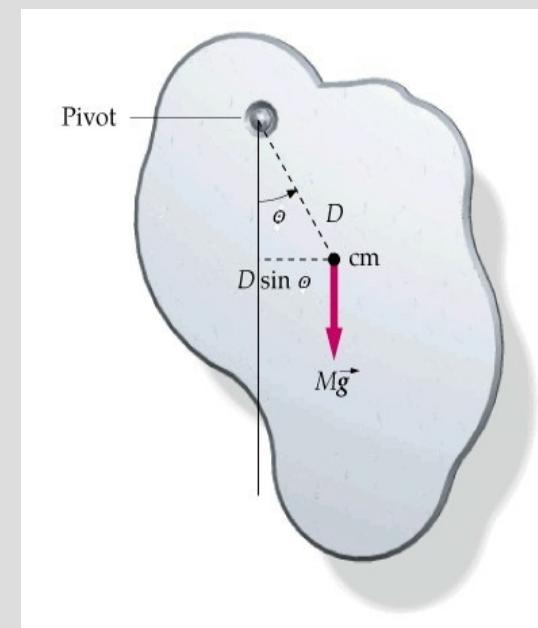
Ecuación dinámica de la rotación (suma de momentos).

$$\sum M_O = -mg D \sin(\theta) = I_O \alpha$$

↷

$$-mg D \theta = I_O \ddot{\theta}$$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$



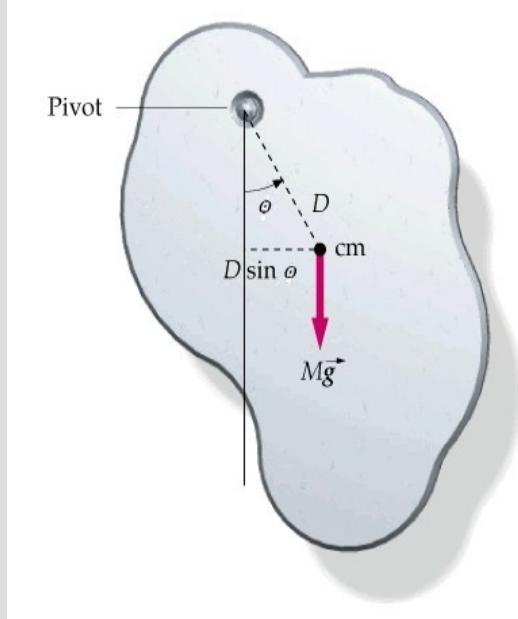
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo físico (o compuesto)

Está formado por un sólido rígido que oscila alrededor de un eje fijo ( $O$ ).

Ecuación dinámica de la rotación (suma de momentos).

$$\sum M_O = -mg D \sin(\theta) = I_O \alpha$$



$$-mg D \theta = I_O \ddot{\theta}$$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{I_O} \theta = 0$$

Es un MAS con:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgD}{I_O}} , f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgD}{I_O}} , T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgD}}$$

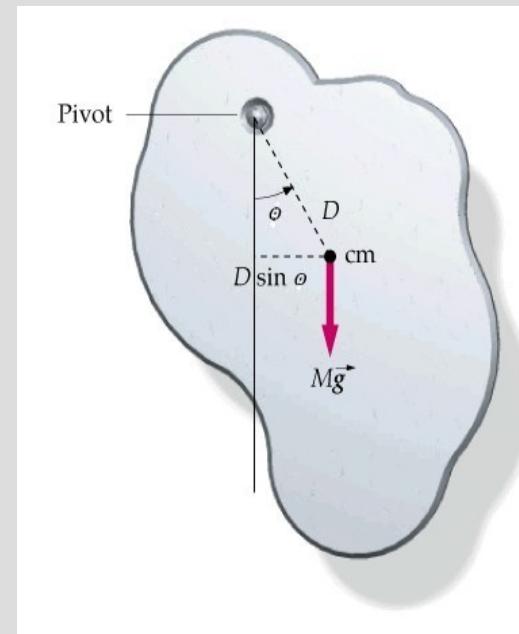
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo físico (o compuesto)

Está formado por un sólido rígido que oscila alrededor de un eje fijo ( $O$ ).

Ecuación dinámica de la rotación (suma de momentos).

$$\sum M_O = -mg D \sin(\theta) = I_O \alpha$$



$$-mg D \theta = I_O \ddot{\theta}$$

Para ángulos pequeños  
 $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{I_O} \theta = 0$$

Es un MAS con:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgD}{I_O}} , f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgD}{I_O}} , T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{mgD}}$$

Ejercicio: con qué periodo oscilará un disco de radio  $R$  y masa  $M$  que oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por su periferia?

Solución:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$

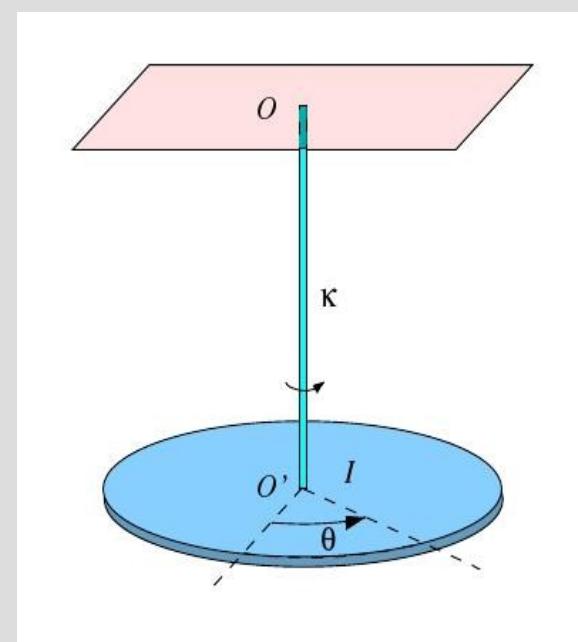
Osc. Ondas y Termodinámica



# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo de torsión

- *Está formado por un SR unido a una barra sometida a torsión (cizalla)*



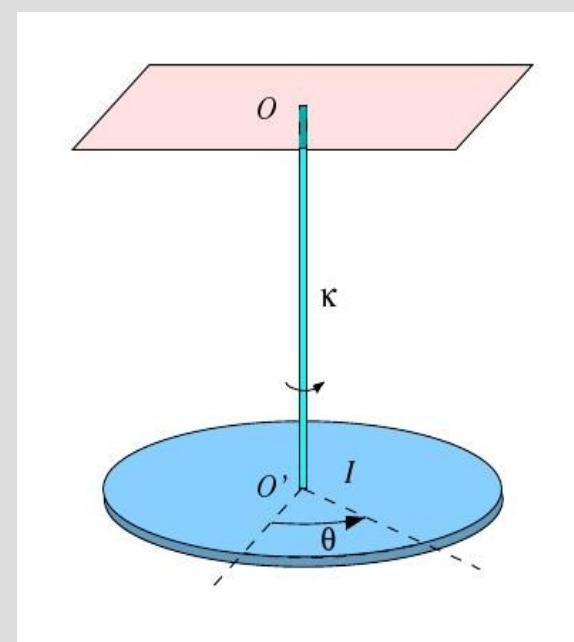
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo de torsión

- Está formado por un SR unido a una barra sometida a torsión (cizalla)
- Frente a la torsión, la barra presenta un comportamiento elástico (ley de Hooke):

$$M = -\kappa \theta$$

$\kappa$ : cte. de torsión



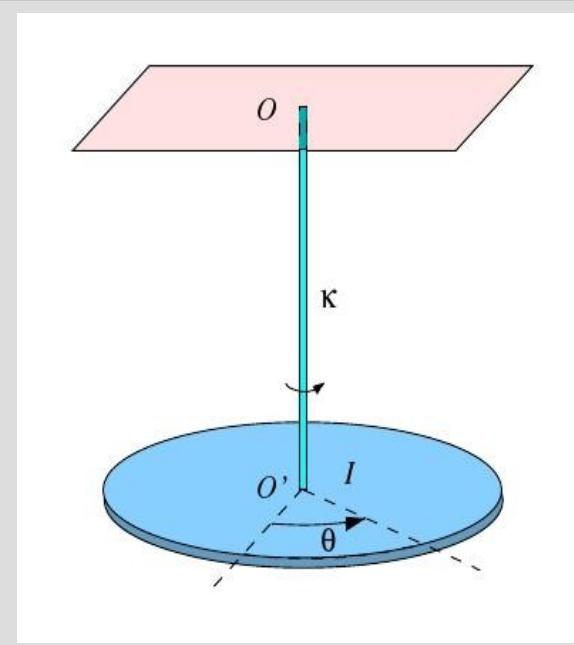
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo de torsión

- Está formado por un SR unido a una barra sometida a torsión (cizalla)
- Frente a la torsión, la barra presenta un comportamiento elástico (ley de Hooke):

$$M = -\kappa \theta$$

$\kappa$ : cte. de torsión



Ecuación dinámica de la rotación del SR  
(suma de momentos).

$$\sum M_O = -\kappa \theta = I_O \alpha = I_O \ddot{\theta}$$

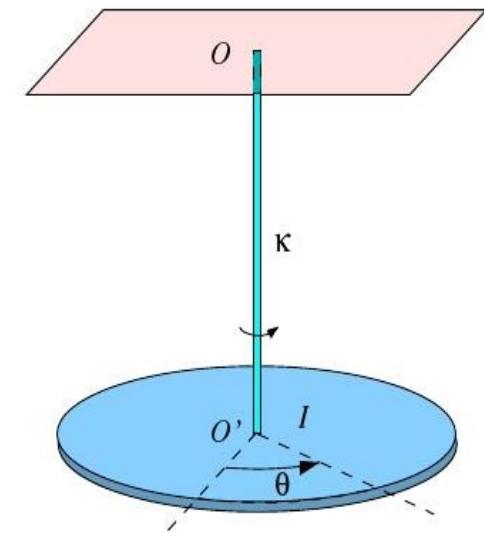
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: péndulo de torsión

- Está formado por un SR unido a una barra sometida a torsión (cizalla)
- Frente a la torsión, la barra presenta un comportamiento elástico (ley de Hooke):

$$M = -\kappa \theta$$

$\kappa$ : cte. de torsión



Ecuación dinámica de la rotación del SR  
(suma de momentos).

$$\sum M_O = -\kappa \theta = I_O \alpha = I_O \ddot{\theta}$$



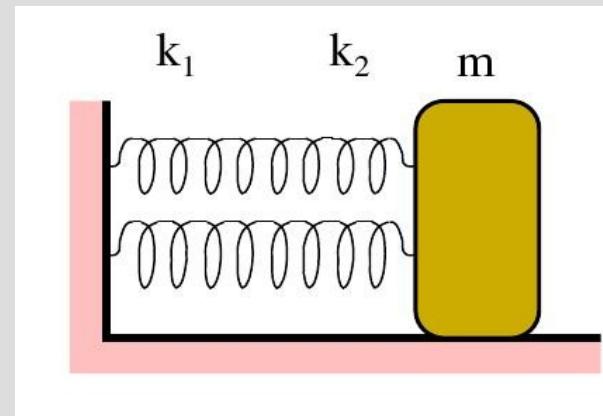
$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I_O} \theta = 0$$

Es un MAS con:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_O}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{I_O}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{\kappa}}$$

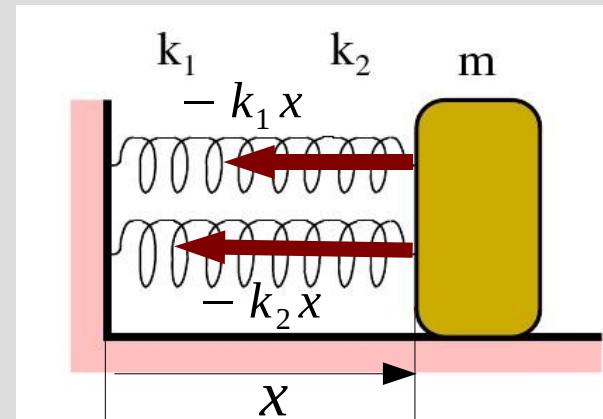
## 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).



# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).

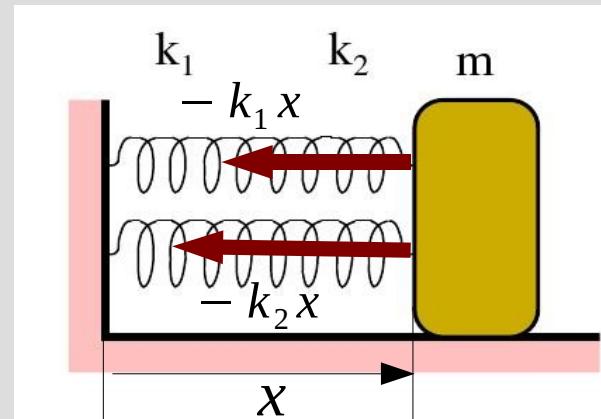


# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).

$$\sum F = -k_1 x - k_2 x = m a$$

→ 2<sup>a</sup> ley de Newton



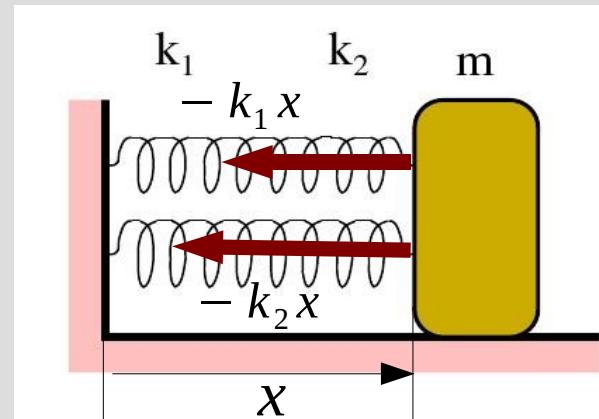
# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).

$$\sum F = -k_1 x - k_2 x = m a$$

↷  $- (k_1 + k_2) x = m \ddot{x}$

→ 2<sup>a</sup> ley de Newton



# 1.3 Ejemplos de MAS.

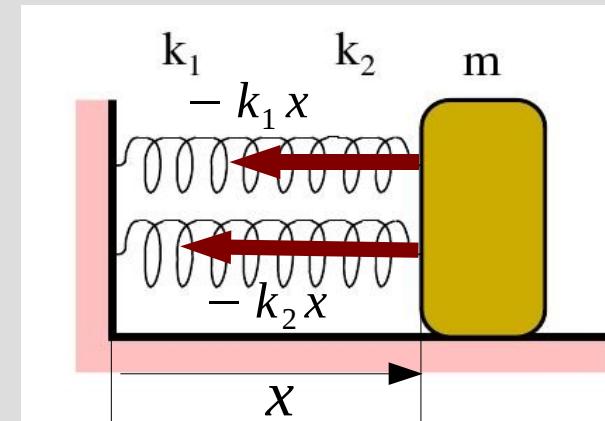
Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).

$$\sum F = -k_1 x - k_2 x = m a$$

$$-(k_1 + k_2) x = m \ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0}$$

→ 2<sup>a</sup> ley de Newton



- Se comporta como un muelle de constante equivalente  $k_{eq} = k_1 + k_2$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).

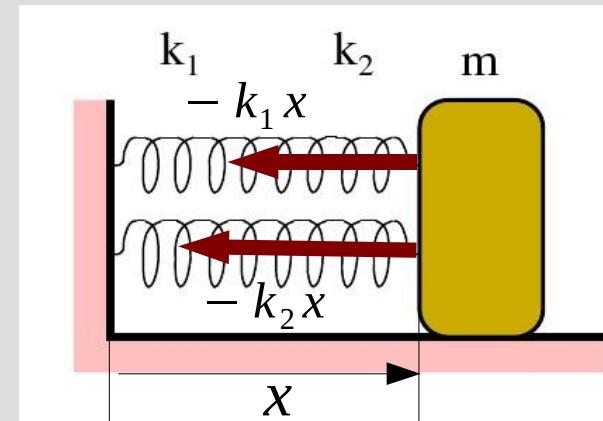
$$\sum F = -k_1 x - k_2 x = m a$$

$$-(k_1 + k_2) x = m \ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0}$$

→ 2<sup>a</sup> ley de Newton

Es un MAS con:



$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} , f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} , T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

- Se comporta como un muelle de constante equivalente  $k_{eq} = k_1 + k_2$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

Ejemplo: Asociación de muelles en paralelo (prob. 4).

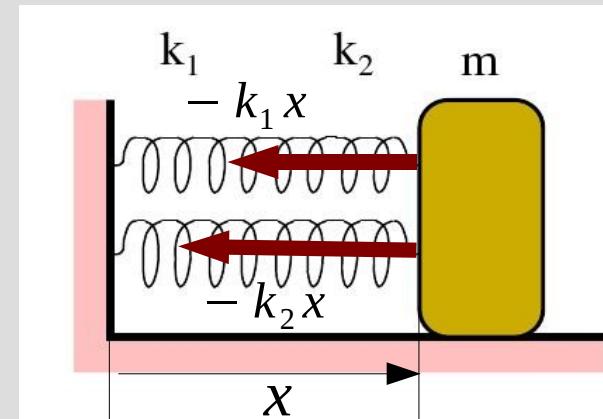
$$\sum F = -k_1 x - k_2 x = m a$$

↷  $- (k_1 + k_2) x = m \ddot{x}$

↷ 
$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0$$

2<sup>a</sup> ley de Newton

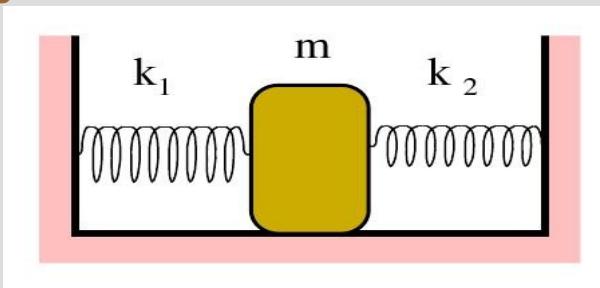
Es un MAS con:



$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

- Se comporta como un muelle de constante equivalente  $k_{eq} = k_1 + k_2$

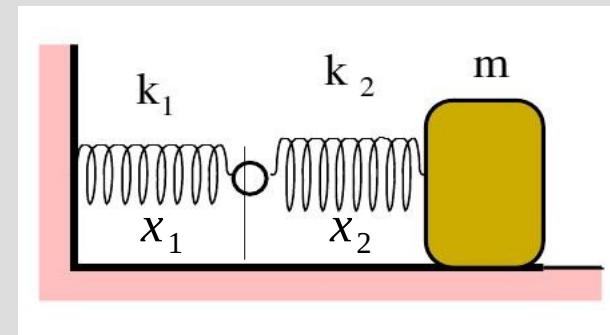
Ejercicio: Determinar la  $k_{eq}$  del sistema de muelles:



Solución:  $k_{eq} = k_1 + k_2$

## 1.3 Ejemplos de MAS.

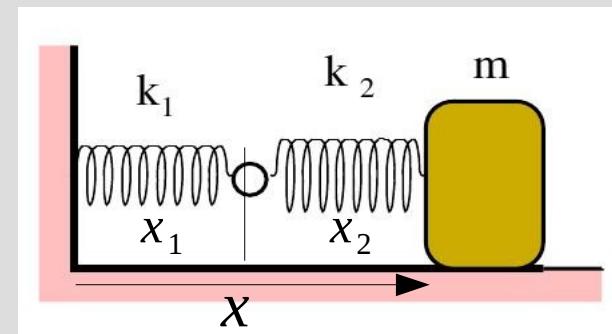
Ejemplo: Asociación de muelles en serie



# 1.3 Ejemplos de MAS.

**Ejemplo:** Asociación de muelles en serie

- *Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza*



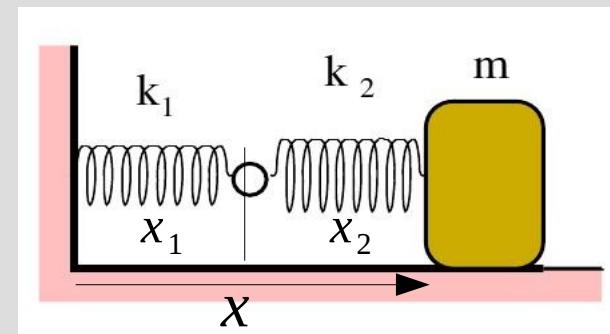
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k_1 x_1$$

$$F = -k_2 x_2$$



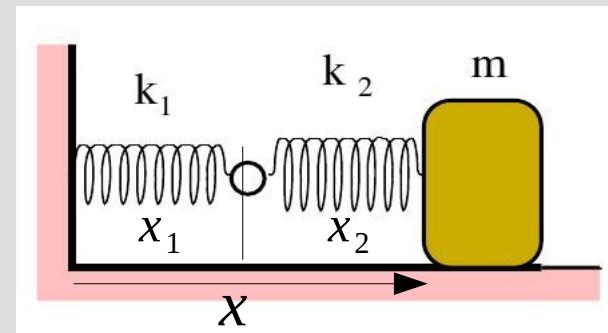
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k_1 x_1 \rightarrow x_1 = -\frac{F}{k_1}$$

$$F = -k_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{F}{k_2}$$



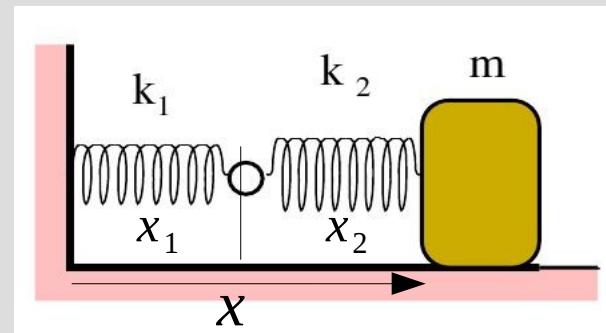
# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k_1 x_1 \rightarrow x_1 = -\frac{F}{k_1}$$
$$F = -k_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2 = -F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$



# 1.3 Ejemplos de MAS.

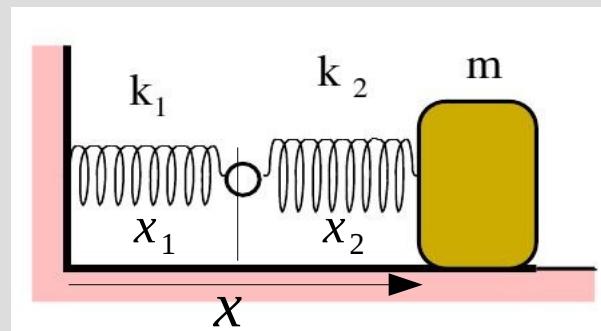
## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k_1 x_1 \rightarrow x_1 = -\frac{F}{k_1}$$
$$F = -k_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2 = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x$$



- Se comporta como un muelle de  $k_{eq}$ :

$$k_{eq} = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

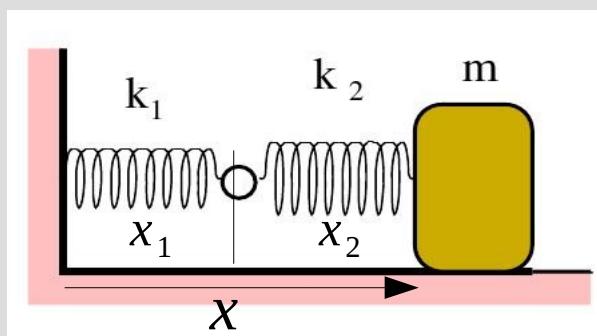
$$F = -k_1 x_1 \rightarrow x_1 = -\frac{F}{k_1}$$
$$F = -k_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2 = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x$$

- Aplicando la 2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x = m \ddot{x}$$



- Se comporta como un muelle de  $k_{eq}$ :

$$k_{eq} = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

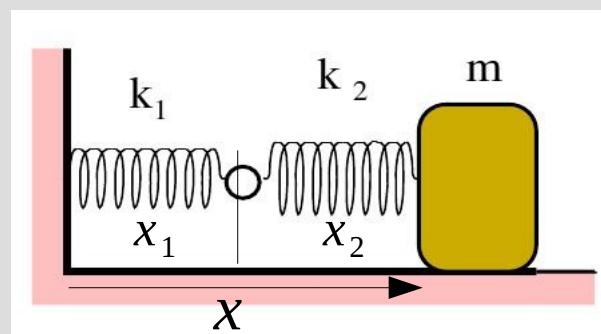
## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k_1 x_1 \rightarrow x_1 = -\frac{F}{k_1}$$
$$F = -k_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2 = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x$$



- Aplicando la 2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x = m \ddot{x}$$

**MAS**

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \left( \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) x = 0$$

- Se comporta como un muelle de  $k_{eq}$ :

$$k_{eq} = \left( \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

# 1.3 Ejemplos de MAS.

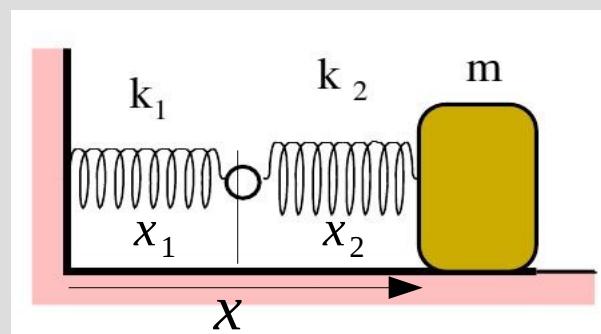
## Ejemplo: Asociación de muelles en serie

- Los dos muelles están sometidos a la misma fuerza

$$F = -k_1 x_1 \rightarrow x_1 = -\frac{F}{k_1}$$
$$F = -k_2 x_2 \rightarrow x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$x = x_1 + x_2 = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x$$



- Aplicando la 2<sup>a</sup> Ley de Newton:

$$F = -\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) x = m \ddot{x}$$

**MAS**

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \left( \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) x = 0$$

- Se comporta como un muelle de  $k_{eq}$ :

$$k_{eq} = \left( \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right)$$

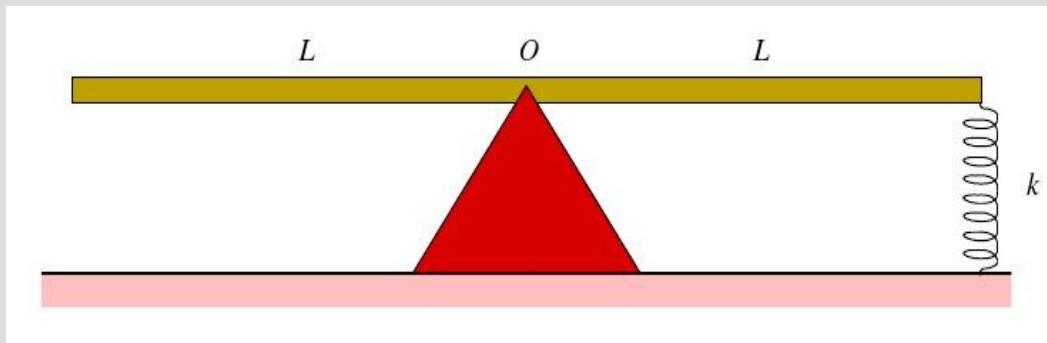
$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

**Ejercicio:** Si partimos un muelle de constante  $k$  por la mitad, la constante elástica que tendrá cada uno de los trozos es:

Sol.  $k' = 2 k$

## 1.3 Ejemplos de MAS.

**Ejercicio (prob. 12):** Una barra de masa  $m$  y longitud  $2L$  está unida a un muelle de constante  $k$  y articulada por su punto medio como muestra la figura. Si la barra está en equilibrio en la posición indicada, determinar el periodo de las pequeñas oscilaciones.



$$\text{Solución: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3k}}$$

**Ejercicio (prob. 10):** Un alambre homogéneo de masa  $m$  y longitud  $L$  se dobla por la mitad formando un codo de  $60^\circ$ . Si se coloca el codo sobre un eje horizontal de forma que el alambre realiza oscilaciones en un plano vertical, ¿cuánto valdrá el periodo del movimiento?

$$\text{Solución: } T = \frac{2\pi}{3} \sqrt{2\sqrt{3} \frac{L}{g}}$$

# Módulo 1: Oscilaciones

## Lección 1. Movimiento Armónico Simple (MAS o MHS)

- 1.1 Cinemática del MAS.
- 1.2 Fuerza elástica. Dinámica del MAS.
- 1.3 Ejemplos de MAS.  
(masa-muelle, péndulos,  
sistemas de muelles, ...)
- 1.4 Energía potencial elástica.
- 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo  
de energía potencial.
- 1.6 Método de la conservación de E.

## Lección 2. Oscilaciones amortiguadas

- 2.1 Fuerza de fricción viscosa.
- 2.2 Ec. diferencial de las osc. amort.
- 2.3 Oscilaciones débilmente amortiguadas.
- 2.4 Energía de las oscilaciones  
amortiguadas. Factor de calidad.
- 2.5 Amortiguamiento crítico y  
sobreamortiguamiento.

## Lección 3. Movimiento Armónico Forzado

- 3.1 Oscilaciones forzadas. Ec. diferencial.
- 3.2 Solución de la ecuación diferencial.  
Estados transitorio y estacionario.
- 3.3 Ejemplo: máquinas giratorias.
- 3.4 Resonancia en amplitud y energía.  
Impedancia del oscilador.
- 3.5 Potencia absorbida por el oscilador.
- 3.6 Factor de calidad y anchura  
de la resonancia.

## Lección 4. Superposición de varios MAS

- 4.1 Principio de superposición.  
Representación fasorial.
- 4.2 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección y frecuencia.
- 4.3 Superposición de dos MAS:  
Igual dirección diferente frecuencia.
- 4.4 Superposición de dos MAS de  
direcciones perpendiculares.



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$



$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$



$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía  
potencial  
elástica



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

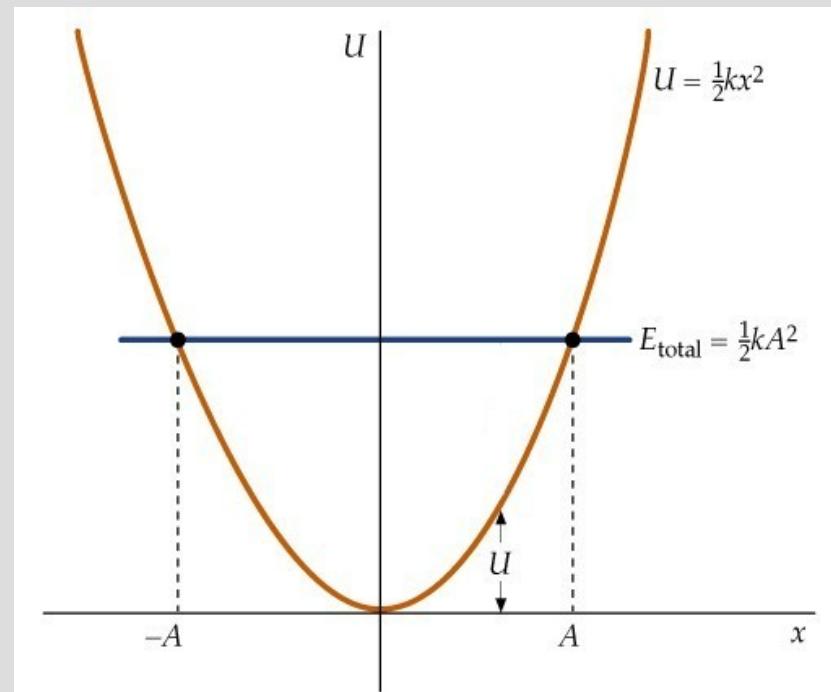
$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía  
potencial  
elástica



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

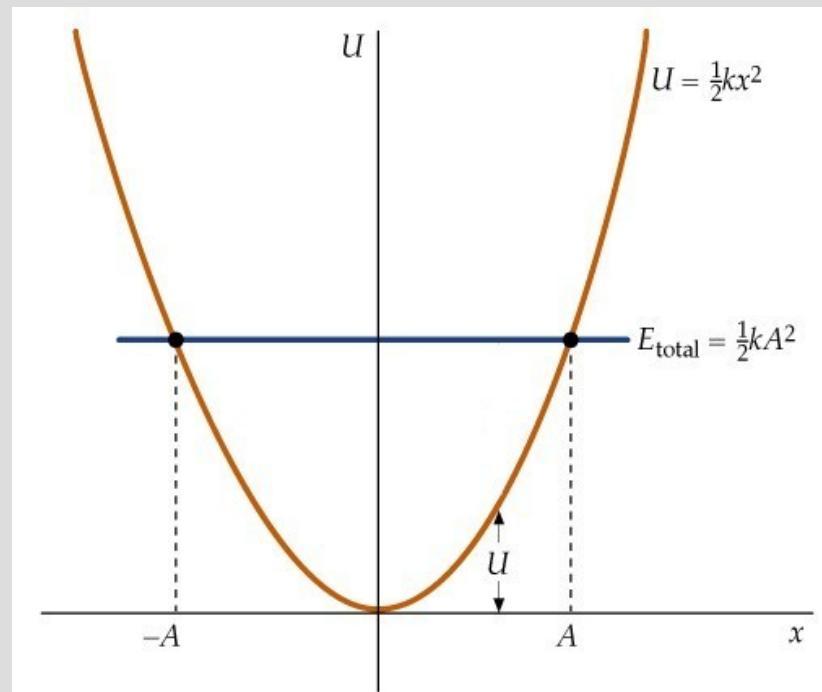
$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía  
potencial  
elástica

Y para la **energía cinética**:



## 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

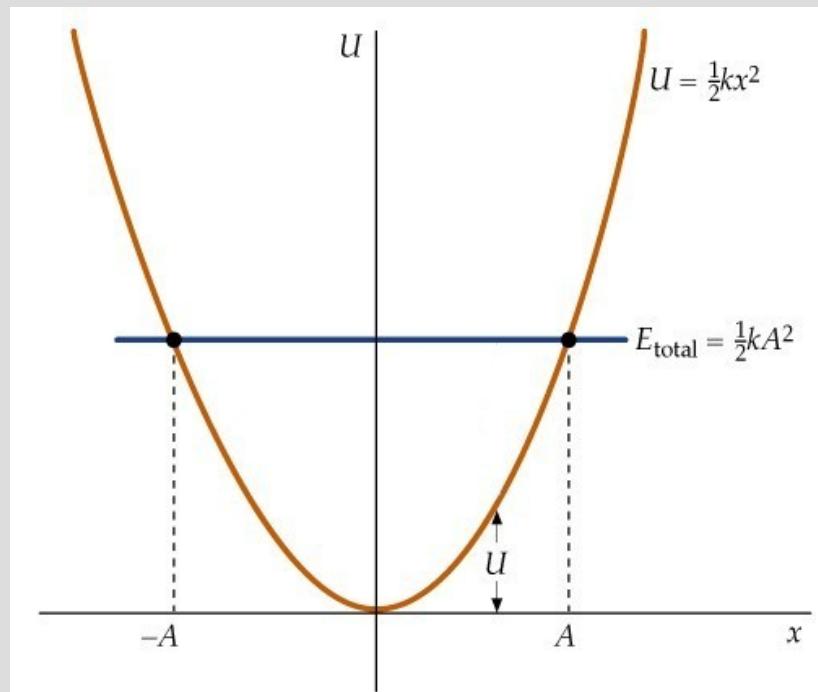
Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

**Energía  
potencial  
elástica**

Y para la **energía cinética**:

$$E = E_C + U = \frac{1}{2}kA^2$$



# 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

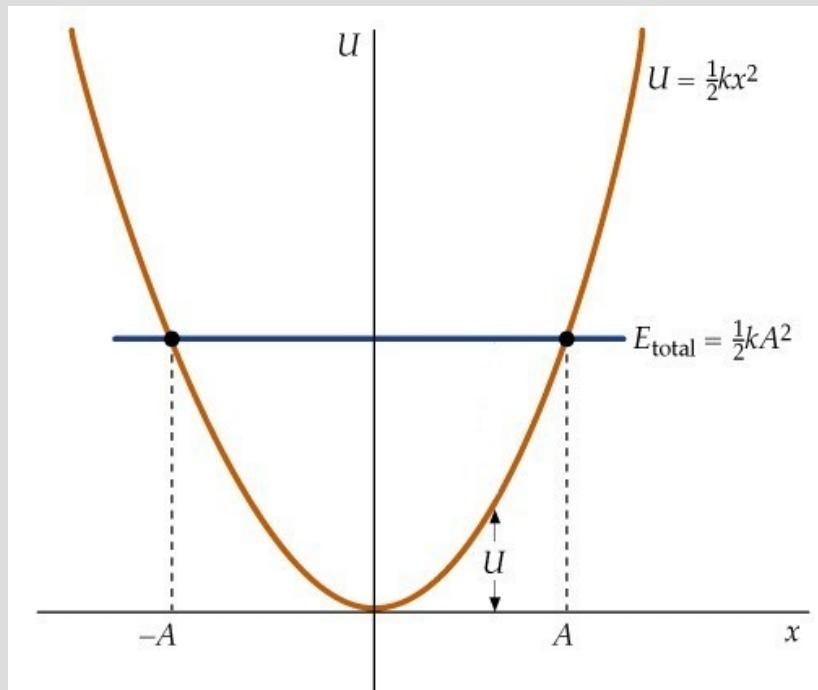
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

**Energía  
potencial  
elástica**

Y para la **energía cinética**:

$$E = E_C + U = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$



# 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía  
potencial  
elástica

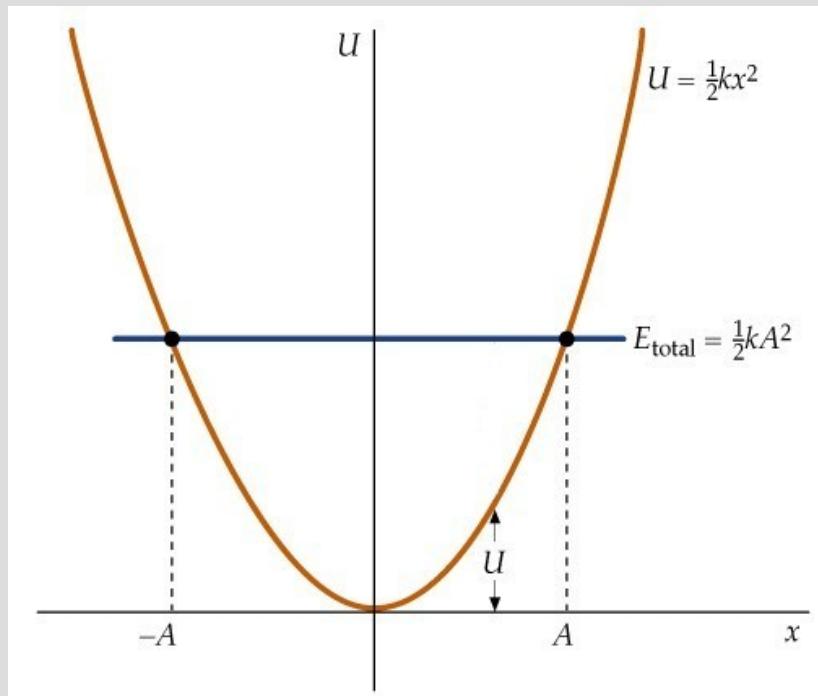
Y para la **energía cinética**:

$$E = E_C + U = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

E. cinética del MAS



# 1.4 Energía potencial elástica.

La fuerza elástica es conservativa por lo que podemos obtener su función **energía potencial**:

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

$$F = -kx = -\frac{dU}{dx}$$

$$U = \int kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Tomando  $U=0$   
para  $x=0 \rightarrow C=0$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

**Energía  
potencial  
elástica**

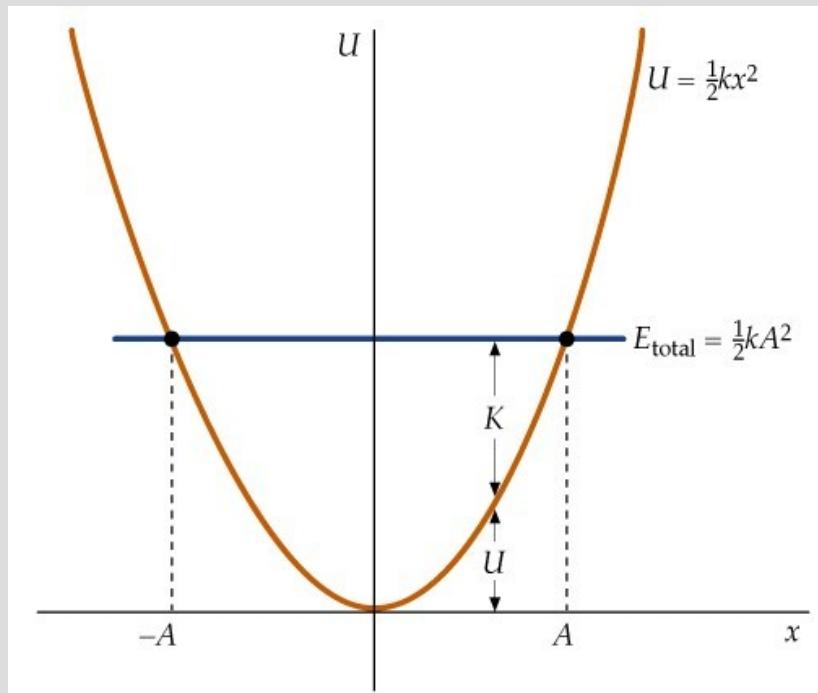
Y para la **energía cinética**:

$$E = E_C + U = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

**E. cinética del MAS**



## 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

### Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

## 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

### Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$



## 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

### Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

### Energía cinética del MAS

## 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

### Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

### Energía cinética del MAS

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$



## 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

### Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

### Energía cinética del MAS

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{orange curved arrow} \rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$



# 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

## Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

## Energía cinética del MAS

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$



$$E_C(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

# 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

## Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

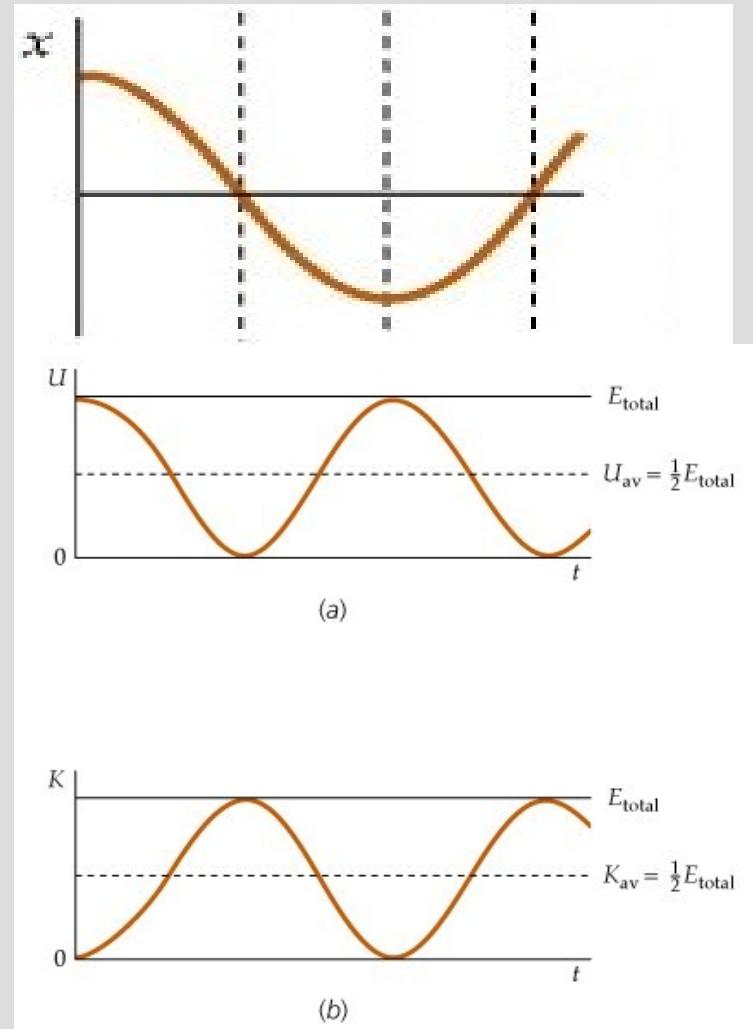
## Energía cinética del MAS

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$



$$E_C(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$



# 1.4 Energía potencial elástica.

También podemos encontrar estas energías en función del tiempo:

## Energía potencial del MAS

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$



$$U(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

## Energía cinética del MAS

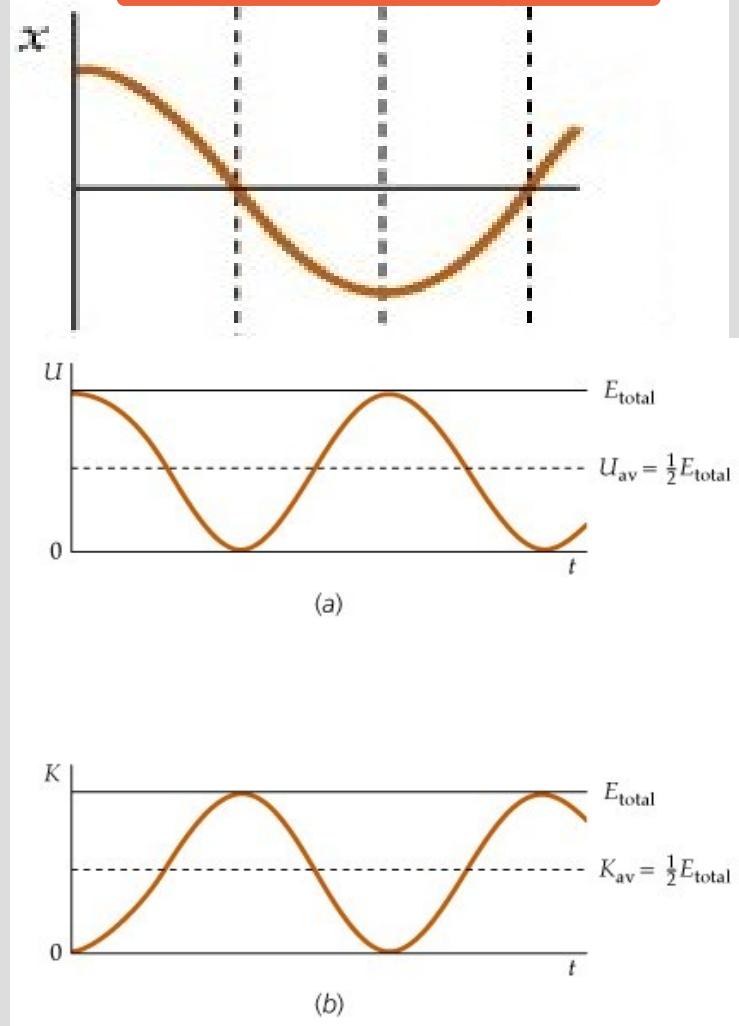
$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_C(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$



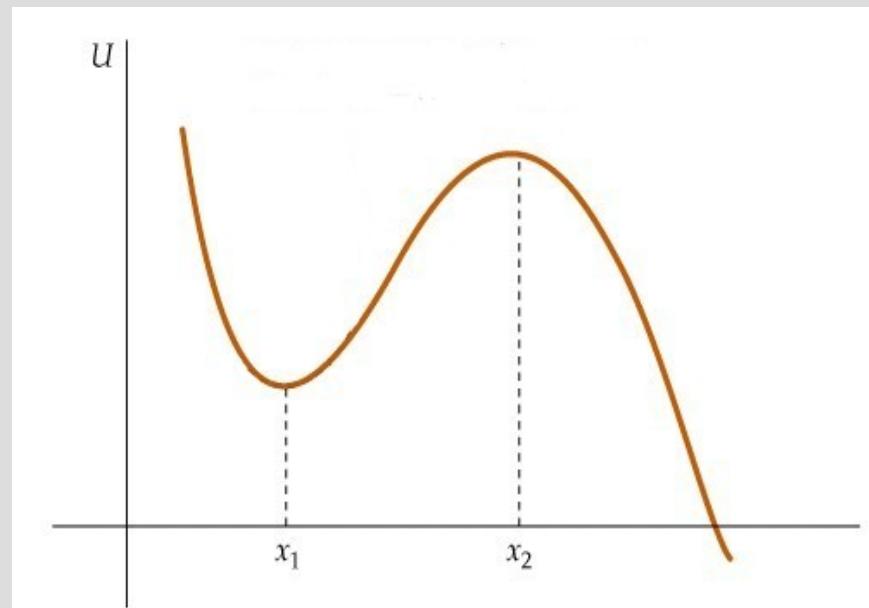
$$E_C(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$U$  y  $E_C$  oscilan con una frecuencia  $2f$



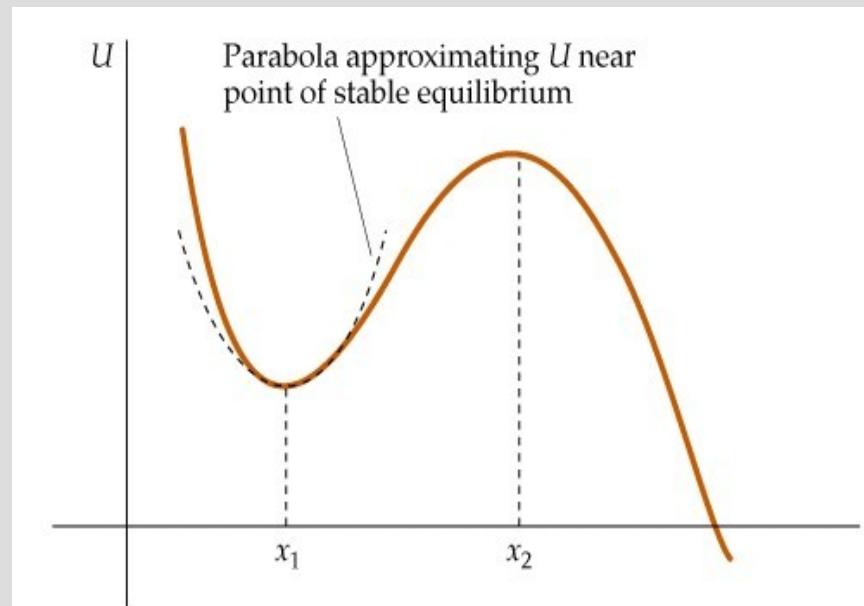
## 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).



## 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).
- Podemos aproximar  $U(x)$  cerca del mínimo por a una parábola.

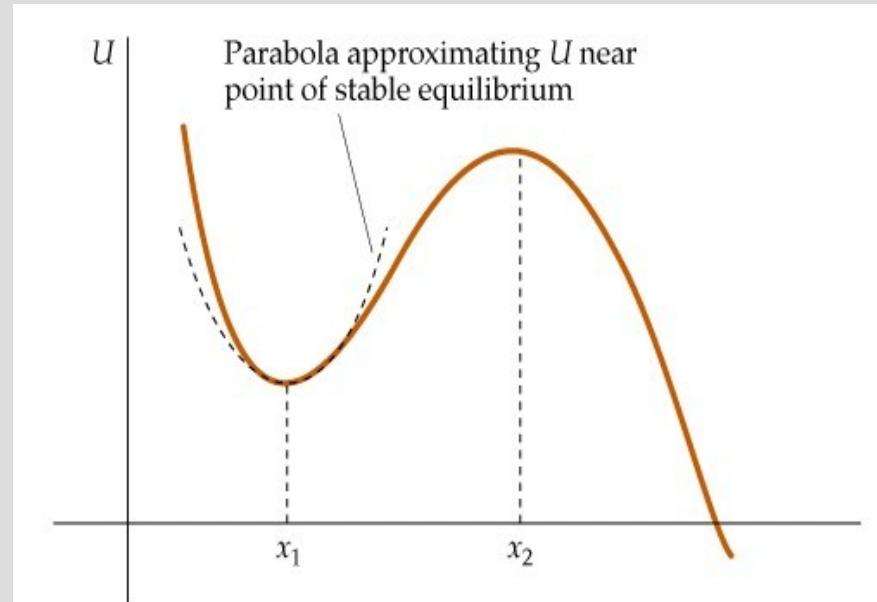


# 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).
- Podemos aproximar  $U(x)$  cerca del mínimo por a una parábola.

*Desarrollo en serie de Taylor*

$$U(x) \approx U(x_1) + \left( \frac{dU}{dx} \right)_{x_1} (x - x_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} (x - x_1)^2 + \dots$$



# 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

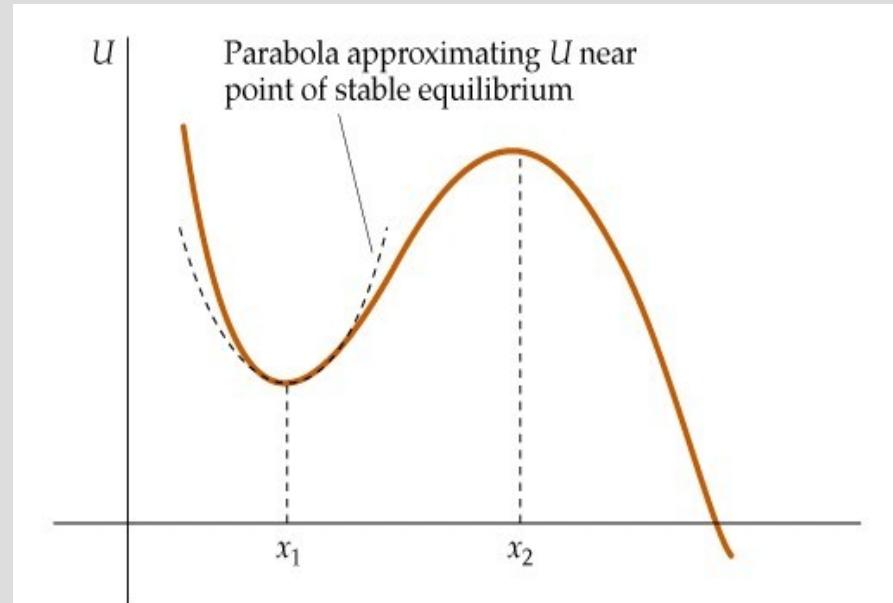
- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).
- Podemos aproximar  $U(x)$  cerca del mínimo por a una parábola.

Desarrollo en serie de Taylor

$$U(x) \approx U(x_1) + \left( \frac{dU}{dx} \right)_{x_1} (x - x_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} (x - x_1)^2 + \dots$$

*x<sub>1</sub> es un mínimo*

$k = Cte > 0$



# 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).
- Podemos aproximar  $U(x)$  cerca del mínimo por a una parábola.

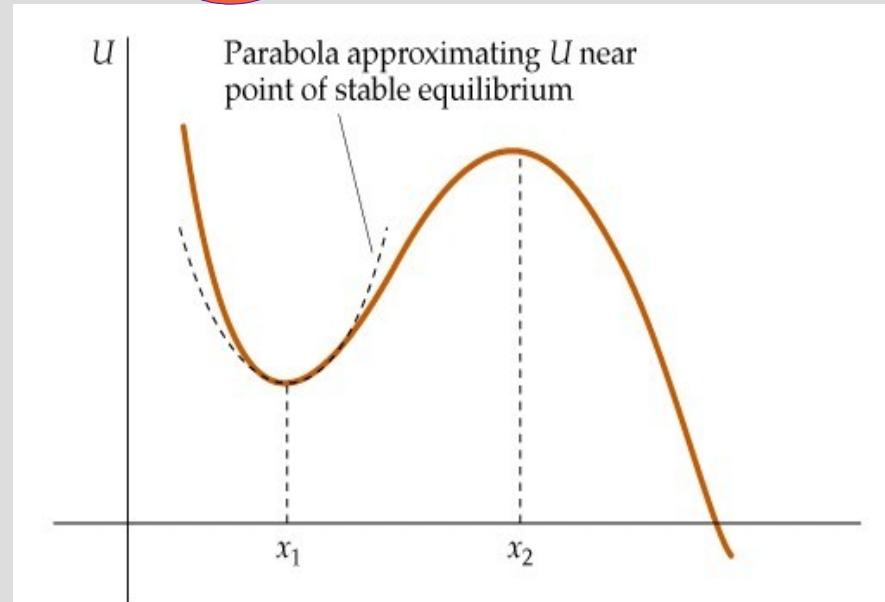
Desarrollo en serie de Taylor

$$U(x) \approx U(x_1) + \left( \frac{dU}{dx} \right)_{x_1} (x - x_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} (x - x_1)^2 + \dots$$

*x<sub>1</sub> es un mínimo*

$k = Cte > 0$

$U(x) \approx U(x_1) + \frac{1}{2} k(x - x_1)^2$



# 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).
- Podemos aproximar  $U(x)$  cerca del mínimo por a una parábola.

Desarrollo en serie de Taylor

$$U(x) \approx U(x_1) + \left( \frac{dU}{dx} \right)_{x_1} (x - x_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} (x - x_1)^2 + \dots$$

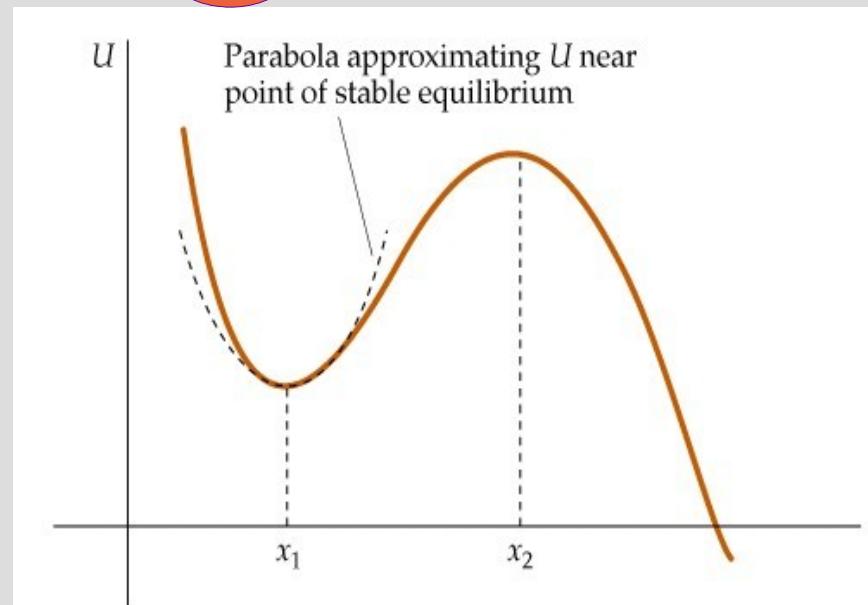
*x<sub>1</sub> es un mínimo*

$k = Cte > 0$

$U(x) \approx U(x_1) + \frac{1}{2} k(x - x_1)^2$

- Por lo tanto, la fuerza cerca del mínimo se puede aproximar por:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1)$$



# 1.5 Oscilaciones alrededor de un mínimo de $U$ .

- Dada una fuerza conservativa, su curva de  $U(x)$  puede presentar mínimos locales (posiciones de equilibrio estable).
- Podemos aproximar  $U(x)$  cerca del mínimo por a una parábola.

Desarrollo en serie de Taylor

$$U(x) \approx U(x_1) + \left( \frac{dU}{dx} \right)_{x_1} (x - x_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1} (x - x_1)^2 + \dots$$

*x<sub>1</sub> es un mínimo*

$k = Cte > 0$

$U(x) \approx U(x_1) + \frac{1}{2} k(x - x_1)^2$

- Por lo tanto, la fuerza cerca del mínimo se puede aproximar por:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1)$$

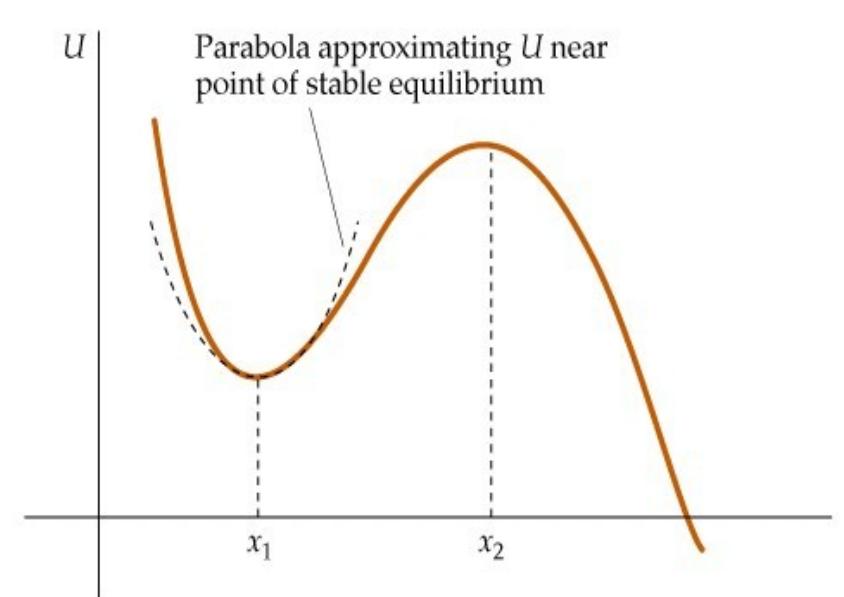


El movimiento  
será un MAS con:



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{con: } k = \left( \frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_1}$$



## 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

**Ejemplo:** sistema masa-muelle



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

**Ejemplo: sistema masa-muelle**

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$


$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

**Ecuación  
dinámica  
del MAS**



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

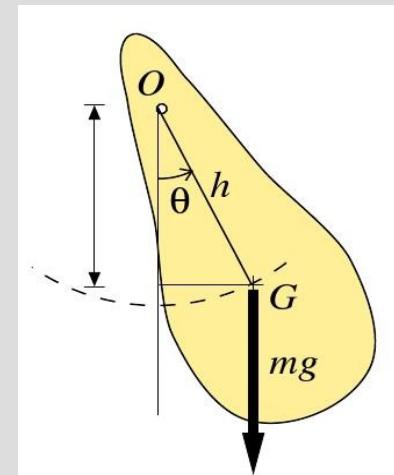
(red arrow)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

(red arrow)

**Ecuación  
dinámica  
del MAS**

## Ejemplo: péndulo físico



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$

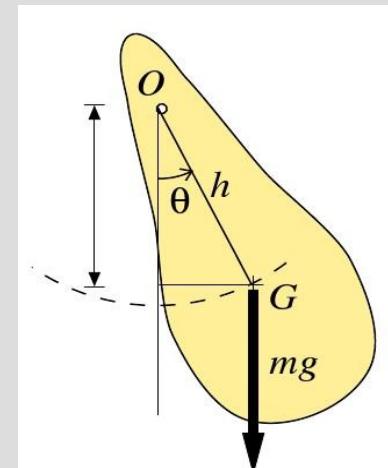
Ec rot. del SR

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

**Ecuación  
dinámica  
del MAS**

## Ejemplo: péndulo físico

$$E = -m g h \cos(\theta) + \frac{1}{2} I_O \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

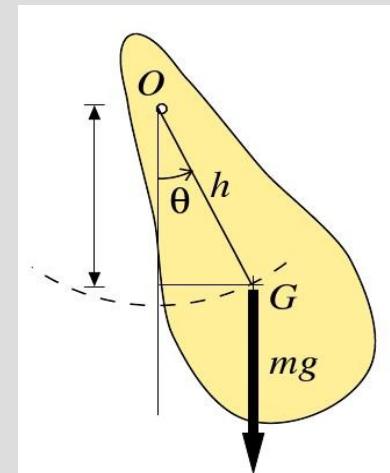
Ec rot. del SR

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

**Ecuación  
dinámica  
del MAS**

## Ejemplo: péndulo físico

$$E = -m g h \cos(\theta) + \frac{1}{2} I_O \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$
$$\frac{dE}{dt} = m g h \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} I_O 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^2}{dt^2} = 0$$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Ec rot. del SR

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

**Ecuación  
dinámica  
del MAS**

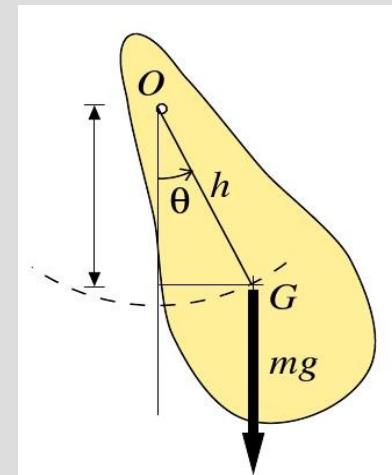
## Ejemplo: péndulo físico

$$E = -m g h \cos(\theta) + \frac{1}{2} I_O \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Ec rot. del SR

$$\frac{dE}{dt} = m g h \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} I_O 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^2}{dt^2} = 0$$

$\approx \theta$



# 1.6 Método de la conservación de la energía.

En algunos casos puede ser más fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento estableciendo la conservación de la energía:  $\left( \frac{dE}{dt} = 0 \right)$

## Ejemplo: sistema masa-muelle

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

$\frac{1}{2} m v^2$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} k 2 x \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} m 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

Ec rot. del SR

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

**Ecuación dinámica del MAS**

## Ejemplo: péndulo físico

$$E = -m g h \cos(\theta) + \frac{1}{2} I_O \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

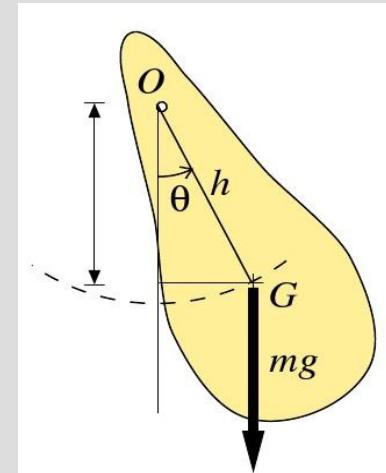
Ec rot. del SR

$$\frac{dE}{dt} = m g h \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} I_O 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\theta^2}{dt^2} = 0$$

$\approx \theta$

**Ec. dinámica del MAS**

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{I_O} \theta = 0$$



# Ejemplos de MAS.

**Ejercicio:** con qué periodo oscilará un anillo de radio R y masa M que oscila alrededor de un eje horizontal que pasa por su interior?

*Solución:*  $T=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

**Ejercicio:** la curva de energía potencial de una fuerza en unidades del S.I es:

$$U=5x^3-3x^2+2$$

Determinar si existe una posición de equilibrio estable y el periodo de las pequeñas oscilaciones que realizaría una partícula de masa m=2kg alrededor de esta posición.

*Solución:*  $x_0=0.4m$      $T=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}s$

**Ejercicio (prob. 10):** Un alambre homogéneo de masa m y longitud L se dobla por la mitad formando un codo de 60º. Si se coloca el codo sobre un eje horizontal de forma que el alambre realiza oscilaciones en un plano vertical, ¿cuánto valdrá el periodo del movimiento?. Calcularlo usando el método de la conservación de la energía.

*Solución:*  $T=\frac{2\pi}{3}\sqrt{2\sqrt{3}\frac{L}{g}}$

Osc. Ondas y Termodinámica



# Lección 1: Cuestiones MAS (contesta razonadamente).

1. Para un MAS es cierto que la energía cinética de la partícula es proporcional a la elongación al cuadrado.
2. Si en un MAS,  $v$  es la velocidad de la partícula y  $a$  y  $x$  su aceleración y elongación respectivamente, se cumple que:  $v = \sqrt{2ax}$
3. La frecuencia de un MAS disminuye si aumenta su amplitud.
4. Una partícula no puede realizar un MAS alrededor de un mínimo de energía potencial ya que la fuerza es nula.
5. La energía cinética y la energía potencial de un MAS están desfasadas  $\pi$  radianes entre sí.
6. La energía mecánica de un MAS es proporcional a su amplitud al cuadrado.
7. Toda partícula sometida a una fuerza conservativa realiza un MAS
8. Si una partícula realiza un MAS y en el instante inicial se encuentra en el origen, su fase inicial es nula.
9. Al cortar un muelle en dos trozos, la constante elástica de cada trozo será mayor que la constante del muelle original.



Dpt. de Física i Eng. Nuclear

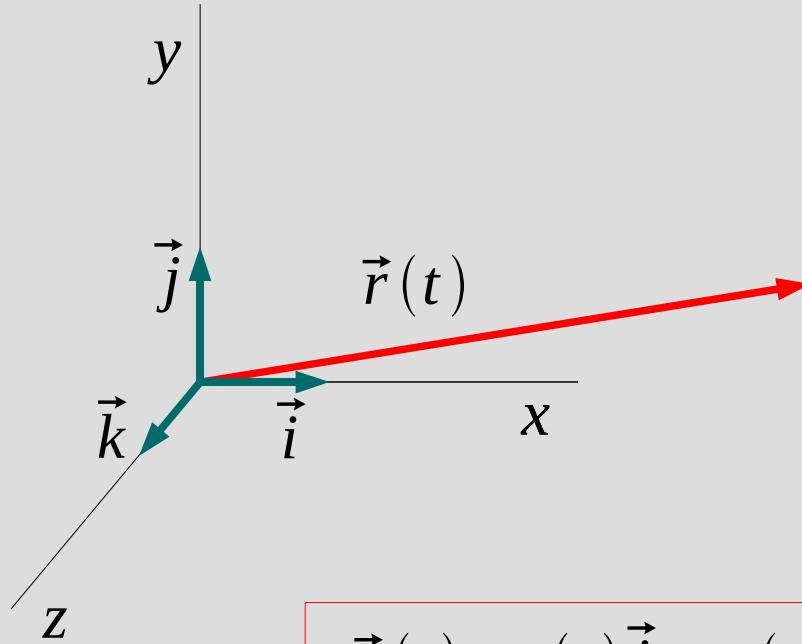
Secció de Física Aplicada del Vallès (ETSEIAT)

Osc. Ondas y Termodinámica

## 5.1. Conceptos básicos

### Vector velocidad

- La velocidad nos indica cómo cambia la posición de la partícula dividido entre en el tiempo empleado
- En una dimensión:



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$