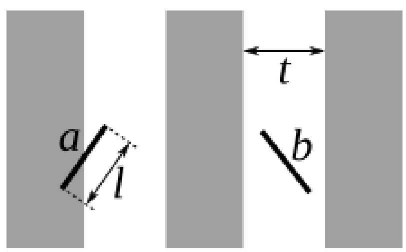
El problema de las agujas de Buffon

En teoría de la probabilidad, el **problema de la aguja de Buffon** es una pregunta planteada por primera vez en el siglo XVIII por Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon:

> Supongamos que tenemos un piso hecho de tiras paralelas de madera, cada una de la misma anchura, y dejamos caer una aguja en el suelo. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja se quede a través de una línea entre dos tiras?



El a la aguja se encuentra en una línea, mientras que la b La aguja no.

La aguja de Buffon fue el primer problema de probabilidad geométrica que se resolvió; se puede resolver usando geometría integral. La solución para la probabilidad buscada *p*, en el caso de que la longitud de la aguja l no es mayor que el ancho *t* de las tiras, es

$$p = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{t}.$$

Esto se puede utilizar para diseñar un método de Monte Carlo para aproximar el número π, aunque esa no fue la motivación original de la pregunta de De Buffon.

Solución

El problema en términos más matemáticos es: Dada una aguja de longitud *l* que se deja caer sobre un plano regido por líneas paralelas *t* unidades de separación, ¿cuál es la probabilidad de que la aguja quede a lo largo de una línea al aterrizar?

Sea *x* la distancia desde el centro de la aguja hasta la línea paralela más cercana, y sea *θ* sea el ángulo agudo entre la aguja y una de las líneas paralelas.

La función de densidad de probabilidad uniforme (PDF) de *x* entre 0 y *t*/2 es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{t} & :\ 0 \le x \le \frac{t}{2} \\ 0 & : \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Aquí, $x = 0$ representa una aguja que está centrada directamente en una línea, y $x = t/2$ representa una aguja que está perfectamente centrada entre dos líneas. La PDF uniforme supone que es igualmente probable que la aguja caiga en cualquier lugar dentro de este rango, pero no podría caer fuera de él.

La función de densidad de probabilidad uniforme de θ entre 0 y $\pi/2$ es

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} & : \ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & : \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Aquí, $\theta = 0$ representa una aguja paralela a las líneas marcadas, y $\theta = \pi/2$ radianes representa una aguja que es perpendicular a las líneas marcadas. Se supone que cualquier ángulo dentro de este rango es un resultado igualmente probable.

Las dos variables aleatorias, x y θ, son independientes, por lo que la función de densidad de probabilidad conjunta es el producto

$$f_{X,\Theta}(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{4}{t\pi} & : \ 0 \le x \le \dfrac{t}{2}, \ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & : \text{elsewhere.} \end{cases}$$

La aguja cruza una línea si

$$x \le \frac{l}{2} \sin\theta.$$

Ahora hay dos casos.

Caso 1: Aguja corta (l ≤ t)

La integración de la función de densidad de probabilidad conjunta da la probabilidad de que la aguja cruce una línea:

$$P = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta = \frac{2l}{t\pi}.$$

Caso 2: Aguja larga (l > t)

Supongamos que $l > t$. En este caso, integrando la función de densidad de probabilidad conjunta, obtenemos:

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{m(\theta)} \frac{4}{t\pi}\, dx\, d\theta,$$

donde $m(\theta)$ es el mínimo entre $l/2$ sen θ y $t/2$.

Así, realizando la integración anterior, vemos que, cuando $l > t$, la probabilidad de que la aguja cruce al menos una línea es

$$P = \frac{2l}{t\pi} - \frac{2}{t\pi}\left(\sqrt{l^2 - t^2} + t \arcsin\frac{t}{l}\right) + 1$$

o

$$P = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{t}{l} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{l}{t}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{t}{l}\right)^2}\right).$$

En la segunda expresión, el primer término representa la probabilidad de que el ángulo de la aguja sea tal que siempre cruce al menos una línea. El término correcto representa la probabilidad de que la aguja caiga en un ángulo donde su posición importa y cruce la línea.

Como alternativa, observe que siempre que θ tenga un valor tal que $l \sin\theta \le t$, es decir, en el rango $0 \le \theta \le \arcsin t/l$, la probabilidad de cruzar es la misma que en el caso de la aguja corta. Sin embargo, si $l \sin\theta > t$, es decir, $\arcsin t/l < \theta \le \pi/2$ la probabilidad es constante y es igual a 1.

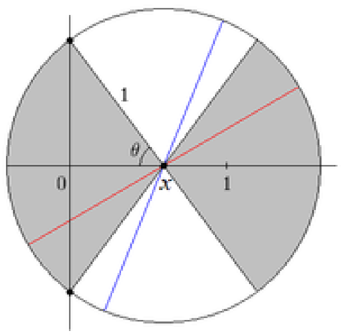
$$P = \left(\int_{\theta=0}^{\arcsin \frac{t}{l}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{t\pi} \right) + \left(\int_{\arcsin \frac{t}{l}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \right)$$
$$= \frac{2l}{t\pi} - \frac{2}{t\pi} \left(\sqrt{l^2 - t^2} + t \arcsin \frac{t}{l} \right) + 1$$

Usando cálculo elemental

La siguiente solución para la "aguja corta" El caso, aunque equivalente al anterior, tiene un sabor más visual y evita integrales iteradas.

Podemos calcular la probabilidad *P* como el producto de dos probabilidades: $P = P_1 \cdot P_2$, donde P_1 es la probabilidad de que el centro de la aguja caiga lo suficientemente cerca de una línea como para que la aguja posiblemente la cruce, y P_2 es la probabilidad de que la aguja realmente cruce la línea, dado que el centro está al alcance.

Al observar la ilustración de la sección anterior, es evidente que la aguja puede cruzar una línea si el centro de la aguja está dentro de $l/2$ unidades de cada lado de la franja. Agregando $l/2 + l/2$ desde ambos lados y dividiendo por todo el ancho *t*, obtenemos $P_1 = l/t$.



Las agujas rojas y azules están centradas en *x*. El rojo se encuentra dentro del área gris, contenida por un ángulo de 2*Silencio* en cada lado, por lo que cruza la línea vertical; el azul no. La proporción del círculo que es gris es lo que integramos como el centro *x* va de 0 a 1

Ahora, suponemos que el centro está al alcance del borde de la tira, y calculamos P_2. Para simplificar el cálculo, podemos asumir que $l = 2$.

Sean *x* y *θ< /span> será como en la ilustración de esta sección. Al colocar el centro de una aguja en x, la aguja cruzará el eje vertical si cae dentro de un rango de 2θ radianes, fuera de π radianes posibles orientaciones. Esto representa el área gris a la izquierda de x en la figura. Para un x fijo, podemos expresar θ como función de x: θ (x) = arccos(x). Ahora podemos dejar que x varíe de 0 a 1 e integrar:*

$$P_2 = \int_0^1 \frac{2\theta(x)}{\pi} \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos^{-1}(x) \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

Multiplicando ambos resultados obtenemos $P = P_1 \cdot P_2 = l/t \cdot 2/\pi = 2l/t\pi$ como arriba.

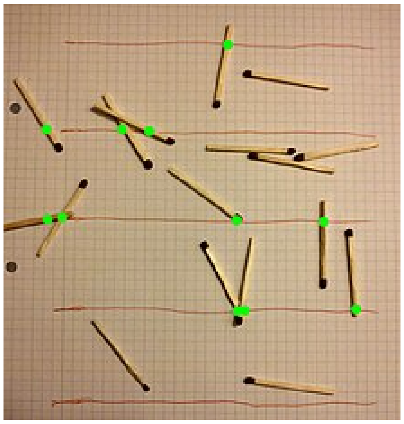
Existe un método aún más elegante y sencillo para calcular el "caso de agujas cortas". El extremo de la aguja más alejado de cualquiera de las dos líneas que bordean su región debe ubicarse dentro de una distancia horizontal (perpendicular a las líneas limítrofes) de *l* cos < i>θ (donde *θ* es el ángulo entre la aguja y la horizontal) de esta línea para que la aguja lo atraviese. Lo más que este extremo de la aguja puede alejarse de esta línea horizontalmente en su región es *t*. La probabilidad de que el extremo más alejado de la aguja esté ubicado a no más de una distancia *l* cos *θ* de la línea (y así que la aguja cruce la línea) de la distancia total *t* que puede recorrer en su región durante $0 \leq \theta \leq \pi/2$ está dado por

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos\theta \, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, d\theta} \\
&= \frac{l}{t} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta} \\
&= \frac{l}{t} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2l}{t\pi}.
\end{aligned}
$$

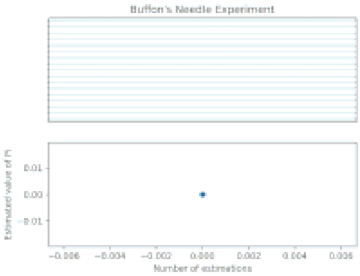
Sin integrales

El problema de la aguja corta también se puede resolver sin ninguna integración, de una manera que explica la fórmula para *p* del hecho geométrico de que un círculo de diámetro *t* cruzará la distancia *t* se elimina siempre (es decir, con probabilidad 1) exactamente en dos lugares. Esta solución fue propuesta por Joseph-Émile Barbier en 1860 y también se la conoce como "fideos de Buffon".

Estimación de π



Un experimento para encontrar π. Los partidos con la longitud de 9 plazas han sido lanzados 17 veces entre filas con la anchura de 9 plazas. 11 de los partidos han aterrizado al azar en las líneas dibujadas marcadas por los puntos verdes.
$2l \cdot n/T = 2 \times 9 \times 17/9 \times 11$ Entendido 3.1 π.



Una simulación basada en Python 3 usando Matplotlib para dibujar el experimento de aguja de Buffon con los parámetros $t = 5.0$, $l = 2.6$. Observar el valor calculado de π ()*Sí*.-eje) acercándose a 3.14 como el número de tonos (x-eje) se acerca al infinito.

En el primer caso anterior, más simple, la fórmula obtenida para la probabilidad P se puede reorganizar para

$$\pi = \frac{2l}{tP}.$$

Por lo tanto, si realizamos un experimento para estimar P, también tendremos una estimación para π.

Supongamos que soltamos n agujas y encontramos que h de esas agujas son líneas que se cruzan, por lo que P se aproxima mediante la fracción h/n. Esto lleva a la fórmula:

$$\pi \approx \frac{2l \cdot n}{th}.$$

En 1901, el matemático italiano Mario Lazzarini realizó el experimento de la aguja de Buffon. Lanzando una aguja 3.408 veces, obtuvo la conocida aproximación 355 /113 para π, con una precisión de seis decimales. El "experimento" de Lazzarini es un ejemplo de sesgo de confirmación, ya que se creó para replicar la ya conocida aproximación de 355/113 (de hecho, no existe una mejor aproximación racional con menos de cinco dígitos en el numerador y el denominador, ver también Milü), lo que arroja una "predicción" de π de lo que se esperaría a partir del número de ensayos, de la siguiente manera:

Lazzarini eligió agujas cuya longitud era 5/6 del ancho de las tiras de madera. En este caso, la probabilidad de que las agujas crucen las líneas es 5< span class="sr-only">/3π. Por lo tanto, si uno dejara caer n agujas y obtuviera x cruces, se estimaría π como

$$\pi \approx \frac{5}{3} \cdot \frac{n}{x}$$

Entonces, si Lazzarini apuntaba al resultado 355/< /span>113, necesitaba n y x tal que

$$\frac{355}{113} = \frac{5}{3} \cdot \frac{n}{x},$$

o equivalentemente,

$$x = \frac{113n}{213}.$$

Para hacer esto, se debe elegir n como múltiplo de 213, porque entonces $113n/ 213$ es un número entero; luego uno deja caer n agujas y espera exactamente $x = 113n/ 213$ éxitos. Si uno deja caer 213 agujas y obtiene 113 éxitos, entonces puede informar triunfalmente una estimación de π con una precisión de seis decimales. Si no, uno puede hacer 213 pruebas más y esperar un total de 226 éxitos; si no, simplemente repita según sea necesario. Lazzarini realizó 3,408 = 213 × 16 pruebas, lo que hace que parezca probable que esta sea la estrategia que utilizó para obtener su "estimación".

La descripción anterior de la estrategia podría incluso considerarse caritativa para Lazzarini. Un análisis estadístico de los resultados intermedios que informó para menos lanzamientos conduce a una probabilidad muy baja de lograr una concordancia tan cercana con el valor esperado durante todo el experimento. Esto hace muy posible que el "experimento" en sí nunca se realizó físicamente, sino que se basó en números inventados a partir de la imaginación para cumplir con las expectativas estadísticas, pero resulta que demasiado bien.

El periodista científico holandés Hans van Maanen sostiene, sin embargo, que el artículo de Lazzarini nunca debió tomarse demasiado en serio, ya que habría sido bastante obvio para los lectores de la revista (dirigida a profesores de escuela) que el aparato que Lazzarini dijo haber construido no puede funcionar como se describe.

Extensión de Laplace (estuche de agujas cortas)

Ahora considere el caso en el que el plano contiene dos conjuntos de líneas paralelas ortogonales entre sí, creando una cuadrícula perpendicular estándar. Nuestro objetivo es encontrar la probabilidad de que la aguja cruce al menos una línea de la cuadrícula. Sean a y b sean los lados del rectángulo que contiene el punto medio de la aguja cuya longitud es l. Dado que este es el caso de agujas cortas, $l < a$, $l < b$. Deje que (x,y) marque las coordenadas del punto medio de la aguja y deje que φ marca el ángulo formado por la aguja y la *x-eje. De manera similar a los ejemplos descritos anteriormente, consideramos x, y, φ serán variables aleatorias uniformes independientes en los rangos 0 ≤ x ≤ a, 0 ≤ y ≤ b, −π< span class="sr-only">/2 ≤ φ ≤ π/2< /span>.*

Para resolver este problema, primero calculamos la probabilidad de que la aguja no cruce ninguna línea y luego tomamos su complemento. Calculamos esta primera probabilidad determinando el volumen del dominio donde la aguja no cruza líneas y luego lo dividimos por el volumen de todas las posibilidades, *V*< /lapso>*. Podemos ver fácilmente que* $V = \pi ab$.

Ahora sea V^* el volumen de posibilidades donde la aguja no cruza ninguna línea. Desarrollado por J.V. Uspensky,

$$V^* = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\varphi)\, d\varphi$$

donde $F(\varphi)$ es la región donde la aguja no corta ninguna línea dado un ángulo φ. Para determinar $F(\varphi)$, veamos primero el caso de los bordes horizontales del límite rectángulo. La longitud total del lado es a y el punto medio no debe estar dentro de $l/2 \cos \varphi$ de cualquier punto final del borde. Por lo tanto, la longitud total permitida sin intersección es $a - 2(l/2$ porque φ) o simplemente $a - l \cos \varphi$. De manera equivalente, para los bordes verticales con longitud b, tenemos $b \pm l$ sen φ. $\pm$ representa los casos en los que φ es positivo o negativo. Tomando el caso positivo y luego sumando los signos del valor absoluto en la respuesta final para la generalidad, obtenemos

$$F(\varphi) = (a - l\cos\varphi)(b - l\sin\varphi) = ab - bl\cos\varphi - al|\sin\varphi| + \tfrac{1}{2}l^2|\sin 2\varphi|.$$

Ahora podemos calcular la siguiente integral:

$$V^* = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\varphi)\, d\varphi = \pi ab - 2bl - 2al + l^2.$$

Así, la probabilidad de que la aguja no cruce ninguna línea es

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\pi ab - 2bl - 2al + l^2}{\pi ab} = 1 - \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

Y finalmente, si queremos calcular la probabilidad, P, de que la aguja cruce al menos una línea, Necesita restar el resultado anterior de 1 para calcular su complemento, lo que da como resultado

$$P = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}.$$

Comparación de estimadores de π

Como se mencionó anteriormente, el experimento de la aguja de Buffon se puede utilizar para estimar π. Este hecho también es válido para la extensión de Laplace, ya que π también aparece en esa respuesta. Naturalmente surge entonces la siguiente pregunta, que fue discutida por E.F. Schuster en 1974. ¿Es el experimento de Buffon o el de Laplace un mejor estimador del valor de π? Dado que en la extensión de Laplace hay dos conjuntos de líneas paralelas, comparamos N gotas cuando hay una cuadrícula (Laplace), y $2N$ gotas en el experimento original de Buffon.

Sea A el evento en el que la aguja intersecta una línea horizontal (paralela a la x-axis)

Música para Estudiar ☕