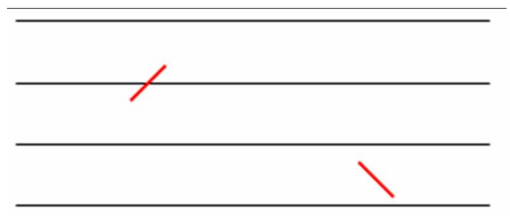
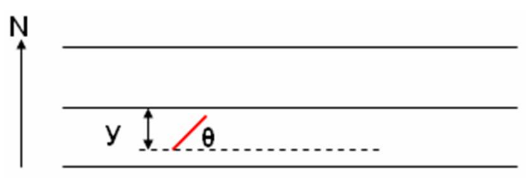
Problema de la Aguja de Buffon

Una aguja de 2 cm. de largo es arrojada al azar en un piso de tablas, cada una de 4 cm. de ancho. ¿Cual es la probabilidad de que el aguja, al caer quede cruzada sobre la hendidura entre dos tablas?



Convenimos en que, al caer la aguja al piso el extremo que quede más al sur, sea, el extremo a partir del cual midamos la aguja; si la aguja queda paralela a una hendidura, de tal manera que ninguno de sus extremos este más al sur, entonces vamos a tomar el extremo oriente de la aguja como el punto a partir del cual se va a medir la aguja.



y= distancia del extremo a partir del cual medir el aguja a la hendidura que quede al norte, más cerca.

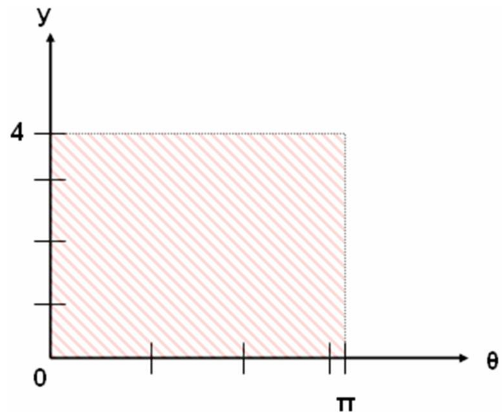
θ = ángulo formado por la agujay una línea imaginaria paralela a las hendiduras que pasa por el extremo a partir del cual mediremos la aguja.

Es claro que:

$$0 \leq y < 4$$

$$0 \leq \theta < \pi$$

Por tanto todas las posibilidades que tiene la aguja al caer al suelo quedan expresadas en la gráfica



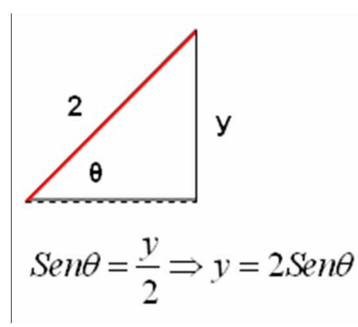
La región resctángular, es considerada en probabilidad como el .^{es}pacio de probabilidadçada posible posición en que quede la aguja, al caer al piso está representada por θ, y.

Hay dos posibilidades para la aguja al caer al piso

1.-que quede cruzada sobre una hendidura al caer al piso

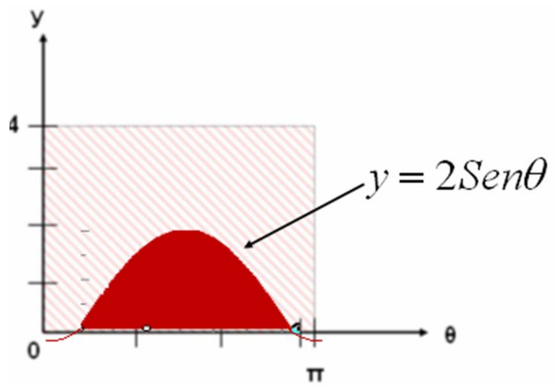
2.-la aguja no quede cruzada

Tenemos que el siguiente triángulo nos da la relación entre θ y Y.



La aguja cruza una hendidura si $y < 2Sen\theta$

Si graficamos la relación $y = 2Sen\theta$



Por lo tanto la probabilidad de que la aguja cruce una hendidura es $\frac{\acute{a}reabajolacurva}{\acute{a}reatotal}$ tenemos entonces

$$Probabilidad = \frac{A(curva)}{A(total)} = \frac{\int_0^{\pi} Sen\theta d\theta}{4\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Integral Impropia cuando los límites de integración son infinitos

Definición.-

1.- Si $f(x)$ es continua en $a < x < \infty$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

2.- Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x < b$ entonces

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

3.- Si $f(x)$ es continua en $-\infty < x < \infty$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

ejemplo.- Sea $f : [0, \infty) \to R$ definida por $f(x) = x^{\alpha}$ $\alpha \in R$ tenemos que

$$\int_1^b x^{\alpha} = \left\{ \begin{array}{cc} \text{Log(b)}, & \text{si } \alpha = -1; \\ \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}, & \text{si } \alpha \neq -1. \end{array} \right\}$$

Para $\alpha = -1$ tenemos que

$$\lim_{b\to\infty} Log(b) = \infty$$

Para $\alpha \neq -1$ tenemos que

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{b\to\infty} b^{\alpha+1} - 1$$

Si $\alpha < -1$ tenemos que

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - 1) = \frac{-1}{\alpha+1}$$

Si $\alpha > -1$ tenemos que el límite no existe

Asi obtenemos

$$\int_1^\infty x^\alpha = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{-1}{\alpha+1}$$

Para $\alpha < 1$ y no existe para $\alpha \geq -1$

Ejemplo.-Calcular $\int_{-\infty}^0 e^x dx$ tenemos que

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x|_a^0 = \lim_{a\to-\infty} e^0 - e^a = 1 - 0 = 1$$

Ejemplo.- Calcular la integral impropia

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$$

tenemos que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x^2+4x+4+5} = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b \frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{5}} Arctg(\frac{x+2}{\sqrt{5}})|_a^b = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} Arctg(\frac{b+2}{\sqrt{5}}) - Arctg(\frac{a+2}{\sqrt{5}}) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{\pi}{2}) - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

Integral impropia cuando la función es discontinua

1.-Si $f(x)$ es continua en (a,b], entonces considerando valores de $\varepsilon > 0$ definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

2.-Si $f(x)$ es continua en [a,b), entonces considerando valores de $\varepsilon > 0$ definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

3.-Si $f(x)$ es continua en [a,b], excepto en el punto x=C donde $a < c < b$ entonces considerando valores de $\varepsilon > 0$ definimos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Ejemplo.- Calcular la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ tenemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} 2\sqrt{x}|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2$$

Ejemplo.-Calcular la integral impropia $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ tenemos que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{1+\epsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{-1}{x-1}|_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{-1}{x-1}|_{1+\epsilon}^3$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} - 1 + \lim_{\epsilon \to 0} -\frac{1}{2} + \frac{1}{\epsilon} = \infty$$

Por lo tanto el límite no exite y la integral es divergente.