



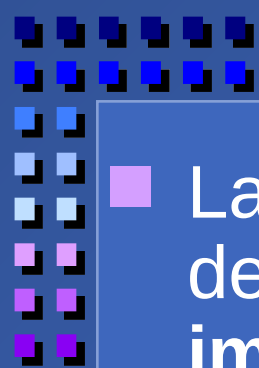

UCEMA – ITBA MEP

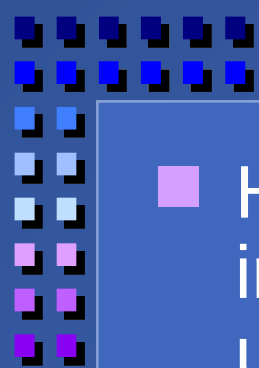

Análisis de Riesgo en Evaluación de Proyectos

Simulación MonteCarlo

Alejandro Bustamante



- 
- La **Evaluación de Riesgos** es la cuantificación de la **probabilidad de ocurrencia** y del **impacto potencial** de diferentes fuentes de riesgo.
 - El **Análisis de Riesgos** es el proceso de:
 - **identificación** de fuentes de riesgo,
 - **evaluación** cuantitativa y cualitativa del riesgo,
 - **administración** del riesgo,
 - **comunicación** a las partes interesadas de la evaluación hecha y las decisiones tomadas.
- 

- 
- Hay dos componentes que explican nuestra incapacidad para predecir en forma precisa un evento futuro:
 - **Riesgo**: es un efecto aleatorio propio del sistema bajo análisis. Se puede reducir alterando el sistema.
 - **Incertidumbre** es el nivel de ignorancia del evaluador acerca de los parámetros que caracterizan el sistema a modelar. Se puede reducir a veces con mediciones adicionales o mayor estudio, o consulta a expertos.
 - La **Variabilidad Total** es la combinación de riesgo e incertidumbre.
- 

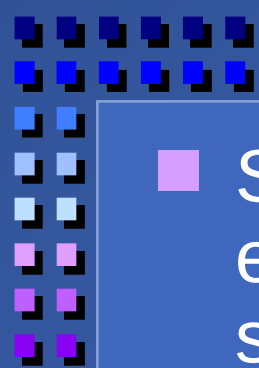


- Tanto el riesgo como la incertidumbre se describen mediante distribuciones de probabilidad.
- Por lo tanto, una distribución de probabilidad puede reflejar en parte el carácter estocástico del sistema analizado y en parte la incertidumbre acerca del comportamiento de la variable.
- Los resultados que se obtengan de un modelo de este tipo reflejarán la variabilidad total: el efecto conjunto de riesgo e incertidumbre.

Distribución de Probabilidad

- Una distribución de probabilidad describe el rango de valores que puede tomar una variable aleatoria y la probabilidad asignada a cada valor o rango de valores.

Probabilidad: Frecuentista y Subjetiva

- Para eventos repetibles y medibles, la probabilidad representa la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento.
- Para eventos que no son repetibles o mensurables, la probabilidad es la expresión del grado de creencia que tiene un individuo acerca de la ocurrencia de un evento incierto. Desde este punto de vista, las probabilidades son en última instancia subjetivas por naturaleza, y es posible que dos personas asignen diferente probabilidad de ocurrencia a un mismo evento.

- 
- Separar el riesgo de la incertidumbre permite entender qué pasos podrían tomarse que sean más efectivos para reducir la variabilidad total.
 - Si una proporción importante de la variabilidad total se debe a incertidumbre, entonces nuestra estimación acerca del futuro podría mejorarse recopilando mejor información.
 - Si una proporción importante de la variabilidad total se debiera a riesgo, la única manera de reducir la variabilidad total es modificando el sistema analizado.
- 
- 

Administración del Riesgo

- Negociar las variables negociables
- Aumentar el compromiso
- Buscar más información
- Tomar precauciones adicionales
- Compartir el riesgo
- Transferir el riesgo
- Formular planes de contingencia
- No tomar medidas, asumir el riesgo
- Cancelar el proyecto
- Administración de portfolio

Presentación de modelos

Un modelo es una herramienta de análisis y de comunicación. Como tal, debe ser entendido no solo por quien lo diseñó sino también por terceros.

- 1. Presentar claramente la estructura lógica y los supuestos empleados.
- 2. Incluir solamente las estadísticas indispensables.
- 3. Usar gráficos para transmitir conceptos.
- 4. Los resultados obtenidos deben responder a los interrogantes planteados.
- 5. No incluir en el informe más información que la necesaria. Derivar los datos de apoyo a los Anexos.

Simulación MonteCarlo

- 1. Diseñar el modelo lógico de decisión
- 2. Especificar distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias relevantes.
- 3. Incluir posibles dependencias entre variables.
- 4. Muestrear valores de las variables aleatorias
- 5. Calcular el resultado del modelo según los valores del muestreo (iteración) y registrar el resultado
- 6. Repetir el proceso hasta tener una muestra estadísticamente representativa
- 7. Obtener la distribución de frecuencias del resultado de las iteraciones
- 8. Calcular media, desvío y curva de percentiles acumulados

Ley de los Grandes Números (desigualdad de Tschebycheff)

- Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, mayor será el ajuste entre la distribución muestral y la distribución teórica sobre la que se basa la muestra.

Teorema Central del Límite (TCL)

- La media muestral de un conjunto de n variables muestreadas en forma independiente a partir de una misma distribución $f(x)$ se ajusta a una distribución aprox. Normal con los siguientes parámetros:

$$\bar{x} = \text{Normal} (\mu, \sigma / n^{1/2})$$

- En otras palabras, la distribución del promedio de un conjunto de variables aleatorias depende tanto de la cantidad de variables aleatorias promediadas como de la incertidumbre aportada por cada variable.

Teorema Central del Límite (cont.)

- La suma de n variables aleatorias independientes da como resultado una distribución aproximadamente Normal, sin importar la forma de la distribución de las variables sumadas (siempre y cuando no haya una variable cuya contribución a la variabilidad total sea dominante).
- El producto de n variables aleatorias independientes da como resultado una distribución aproximadamente Lognormal, independientemente de la forma de la distribución de las variables intervinientes.

Generación de valores muestrales

- Las computadoras son capaces de generar números aleatorios entre 0 y 1.
- Los algoritmos para generar números aleatorios comienzan con cualquier valor entre 0 y 1. Todos los números aleatorios que se generen a continuación dependerán de este valor inicial (*semilla*).

Generación de valores muestrales

- La función de Distribución Acumulada $F(x)$ de una variable aleatoria indica la probabilidad p que la variable X tome un valor menor o igual que x .

$$F(x) = p (X \leq x)$$

A toda Función de Probabilidad Acumulada $F(x)$ le corresponde una Función Inversa

$$G (F(x)) = x$$

La Función Inversa indica los valores de x asociados a distintos valores de $F(x)$

Generación de valores muestrales

- Para generar un valor muestral a partir de una distribución de probabilidad:
 - 1. Se genera un número aleatorio entre 0 y 1 a partir de una distribución Uniforme
 - 2. El valor obtenido se usa para alimentar la ecuación correspondiente a la Función Inversa de la distribución de probabilidad muestreada, de modo de generar un valor x para la variable aleatoria.

Métodos de Muestreo: MonteCarlo

- El muestreo MonteCarlo es totalmente aleatorio.
- Esto implica que si el número de iteraciones no es lo suficientemente elevado, es posible que se sobremuestreen algunos segmentos de la distribución que se quiere replicar y se submuestreen otros segmentos.

Métodos de muestreo: Hipercubo Latino

- Es un método de muestreo estratificado sin reemplazo (muestreo con memoria).
 - 1. Se segmenta la distribución de probabilidad acumulada $F(x)$ en n intervalos (donde n es el número de iteraciones a realizar)
 - 2. Se genera un número aleatorio que corresponderá a un determinado segmento de $F(x)$.
 - 3. Se genera un segundo número aleatorio para determinar el punto preciso del muestreo dentro de ese intervalo $F(x)$.

Métodos de muestreo: Hipercubo Latino

- 4. Se calcula el valor de x correspondiente a la Función Inversa $G(F(x))$.
- 5. Se repite el proceso en la segunda iteración, pero descartando el segmento ya muestreado.
- 6. Se repite el proceso hasta completar el número de iteraciones de la muestra.

Intervalo de confianza para el resultado esperado

- Para un tamaño de muestra $n > 30$ el intervalo del resultado esperado es:

$$\text{IC } 100*(1-\alpha) = \bar{x} \pm t(\alpha/2, n-1) * s/(n)^{1/2}$$

$t(\alpha, n)$ es el valor de x tal que $P(t > x) = \alpha$

$$\bar{x} - t * s/(n)^{1/2} < \bar{x} < \bar{x} + t * s/(n)^{1/2}$$

Tamaño de muestra necesario para lograr estimaciones dentro de tolerancia

- Si la estimación del valor esperado debe tener una precisión representada por una tolerancia de desvío D en valor absoluto un porcentaje $100 \cdot (1 - \alpha)$ de las veces, entonces el tamaño de la muestra n necesario es:

$$n = (z_{\alpha/2})^2 * (\sigma)^2 / (D)^2$$

$$z_{\alpha} = P(z > z_{\alpha}) = \alpha$$

Distribuciones de Probabilidad

- Fuentes de información para cuantificar la incertidumbre en variables aleatorias:
 - 1. **Series de datos**
 - 2. **Opinión de expertos**
- Cuando se procura caracterizar a una variable aleatoria a partir de los datos disponibles se parte del supuesto que los datos observados son una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad que trataremos de identificar.

Distribuciones de Probabilidad

Discretas

- Una variable aleatoria representada mediante una distribución discreta de probabilidad puede tomar un valor de entre un conjunto de valores, cada uno de los cuales tiene asignada una determinada probabilidad de ocurrencia.
- Ejemplos: Binomial, Geométrica, Poisson, Discreta.

Distribuciones de Probabilidad

Continuas

- Una variable aleatoria representada mediante una distribución continua de probabilidad puede tomar cualquier valor dentro de un rango determinado.
- Ejemplos: Normal, Lognormal, Uniforme, Triangular, Histograma

Distribuciones de Probabilidad

No Limitadas

- La variable aleatoria puede tomar valores entre $+\infty$ y $-\infty$.
- Ejemplos: Normal, Logística

Limitadas

- Los valores de la variable aleatoria quedan confinados entre dos valores extremos.
- Ejemplos: Binomial, Beta, Uniforme, Triangular, Histograma

Parcialmente Limitadas

- Los valores de la variable aleatoria quedan limitados en uno de los extremos de la distribución.
- Ejemplos: Poisson, Exponencial

Distribuciones de Probabilidad

Paramétricas

- La distribución de probabilidad se ajusta a la descripción matemática de un proceso aleatorio que cumple con determinados supuestos teóricos.
- Los parámetros que definen la distribución en general no guardan relación intuitiva con la forma de la distribución.
- Ejemplos: Normal, Lognormal, Exponencial, Beta.

Distribuciones de Probabilidad

■ Paramétricas (cont.)

■ Son de aplicación cuando:

- 1. la teoría sobre la que se fundamenta una determinada distribución es aplicable al problema.
- 2. se acepta que esa distribución da un buen ajuste de la variable aleatoria aunque no haya una teoría para explicarlo.
- 3. la distribución se ajusta aproximadamente a la opinión del experto y no se requiere mucha precisión.

Distribuciones de Probabilidad

No Paramétricas

- Los parámetros que se usan para definir estas distribuciones describen la forma de la distribución.
- No se apoyan en una teoría que describa el proceso de generación de valores aleatorios.
- Ejemplos: Triangular, Histograma, General, Uniforme, Acumulada

Distribuciones de Probabilidad

■ No Paramétricas (cont.)

- Estas distribuciones en general son más útiles cuando se busca recabar la opinión subjetiva de expertos, con las siguientes excepciones:
 - 1. el experto puede estar muy familiarizado con los parámetros que definen una distribución paramétrica.
 - 2. a veces los parámetros de una distribución paramétrica son intuitivos (p.ej. Binomial)

Distribuciones de Probabilidad

■ Subjetivas

- El uso de estas distribuciones de probabilidad es la única alternativa para describir una variable aleatoria cuando:
 - 1. No hay una base de antecedentes.
 - 2. Los datos del pasado no son relevantes.
 - 3. Los datos son escasos y no cubren todo el rango de posibles valores.
 - 4. Es demasiado caro generar datos.
 - 5. Generar valores llevaría demasiado tiempo

Distribuciones de Probabilidad

Subjetivas (cont.)

- En las estimaciones subjetivas hay dos fuentes de incertidumbre:
 - Variabilidad asociada a la variable aleatoria en sí .
 - Incertidumbre asociada a la falta de conocimiento sobre el comportamiento de la variable.
- La distribución subjetiva especificada agrega ambas fuentes de incertidumbre

Distribuciones de probabilidad a partir de Opinión de expertos

Una técnica básica para obtener distribuciones subjetivas consiste en desagregar el problema en las variables que lo componen:

- pone en evidencia la estructura lógica del problema de decisión
- las variables del problema son algo más tangible de estimar que el resultado.
- la desagregación facilita el reconocimiento de dependencias entre componentes del problema.

Distribuciones a partir de Opinión de expertos

Desagregación (cont.)

- el análisis de riesgo es menos dependiente de las estimaciones hechas para cada componente
- la estimación de la distribución del resultado del modelo a partir de la agregación de los componentes será más precisa que lo que podría haber sido de tratar de estimarla directamente
- la agregación tendrá en cuenta los efectos del TCL en forma automática.

Uniforme

- Todos los valores dentro del rango factible tienen la misma densidad de probabilidad.
- Parámetros : Uniform (**min**,**max**)
- Aplicaciones: $U(0,1)$ se usa en la generación de los valores de todas las demás distribuciones de probabilidad en el muestreo aleatorio.
- Es una aproximación muy cruda para usar como estimación de la incertidumbre percibida de un parámetro

Triangular

- Aplicaciones: estimar subjetivamente la distribución de la variable aleatoria cuando todo lo que puede precisarse de la misma es el valor mínimo, el valor más probable y el valor máximo.
- Parámetros: Triang (*min, +prob, max*)

Triangular (cont.)

- Sus propiedades estadísticas se derivan de su forma, no de una teoría subyacente.
- Es de definición intuitiva y de gran flexibilidad en cuanto a geometrías posibles.
- La forma de la distribución usualmente lleva a sobreestimar la densidad de las colas y a subestimar la densidad en el “tronco” de la distribución.
- Se pueden definir el valor mínimo y el valor máximo como umbrales de ocurrencia práctica. En vez de tomarlos como valores absolutos, se los toma como percentiles, dejando “abiertas las colas”.

Histograma

- Aplicaciones: representar la forma de la distribución de una serie de datos o la opinión de un experto acerca de la forma de la distribución de una variable.
- Parámetros: Histogram *(min, max, {p_i}*
- Todos los intervalos de la distribución tienen el mismo “ancho”.

General

- Aplicaciones: reflejar la opinión de expertos. Es la más flexible de las distribuciones continuas. Es un histograma “estilizado”.
- Parámetros: General *(min, max, {x_j} , {p_j})*
- Es posible, aunque no es recomendable, especificar intervalos de distinto “ancho”.

Acumulada

- Aplicaciones: recabar opinión de expertos.
- Parámetros: Cumulative $(\{x_i\}, \{P_i\}, \text{min}, \text{max})$
- Puede ser de utilidad cuando se procura estimar una variable cuyo rango cubre varios órdenes de magnitud.
- Desventajas: insensibilidad de la escala de probabilidades. Es más fácil representar la variabilidad que se quiere reflejar cuando se trabaja con distribuciones de frecuencia relativa.

BetaPert

- Es una versión de la distribución Beta que usa los mismos supuestos acerca de la media de una variable aleatoria que las redes PERT.
- Parámetros: BetaPert **(a,b,c)**

BetaPert (cont.)

- 1. La media de una distribución BetaPert es cuatro veces más sensible al valor medio que a los valores extremos.
- 2. El desvío standard de una distribución BetaPert es menos sensible a los valores extremos que la distribución Triangular.

El desvío standard de una distribución BetaPert es sistemáticamente menor que el de una Triangular, particularmente cuando las distribuciones son sesgadas.

Discreta

Aplicaciones:

- 1. Describir una variable aleatoria que puede tomar uno de entre un conjunto de valores discretos.
- 2. Describir probabilidades condicionales para distintos estados de la naturaleza, donde cada estado de la naturaleza tiene una probabilidad de ocurrencia p .
- 3. Armar distribuciones de probabilidad compuestas a partir de la opinión de dos o más expertos, donde a la opinión de cada experto se le otorga una ponderación p .
- Parámetros: Discrete $(\{x_i\}, \{p_i\})$

Obtención de distribuciones de probabilidad a partir de opiniones diferentes

- Definir una distribución Discreta donde $\{x_i\}$ representa la opinión de los expertos y $\{p_i\}$ es la ponderación asignada a cada opinión.

Enfoques incorrectos:

- Tomar la opinión más conservadora (no se usa toda la información disponibles, se genera una distribución sesgada)
- Promediar los valores de las opiniones: se subestima la variabilidad (recordar TCL)

Series de datos: Selección de Distribuciones

- 1. ¿Se trata de una variable discreta o continua?
- 2. ¿Es realmente necesario ajustar los datos a una distribución de probabilidad teórica?
- 3. ¿Hay correspondencia entre el rango teórico de la variable y la distribución a ajustar?

Distribuciones empíricas: variables Discretas

- 1. Si la cantidad de datos no es muy elevada, la frecuencia de datos para cada valor de x puede ser usada directamente para definir una distribución Discreta.
- 2. Si hay muchos datos, es más fácil ordenar los datos en forma de histograma y definir entonces una distribución Acumulada con parámetros $\{x_i\}$, $\{F(x_i)\}$, \min , \max
- Se puede reintroducir el caracter discreto de la variable incluyendo la distribución Acumulada dentro de una función ROUND (redondeo)

Distribuciones empíricas: variables Continuas

- 1. Se plotea la frecuencia acumulada de los datos observados.
- 2. Se hace un ranking de los datos en orden ascendente.
- 3. Se estima un mínimo y un máximo en forma subjetiva.
- 4. Se calcula la probabilidad acumulada para cada valor de x según la fórmula:

$$F(x_i) = i / (n+1)$$

i = rango del dato observado

n = cantidad de datos observados

- $\{x_i\}$, $\{F(x_i)\}$, min , max serán parámetros que se usen para definir una distribución Acumulada

Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es un sistema de eventos que se pueden contar, en el que los eventos ocurren de acuerdo a un proceso aleatorio bien definido.

Distribuciones de probabilidad para Procesos Discretos

- Un Proceso Discreto se caracteriza por una probabilidad p de ocurrencia de un evento discreto en cada prueba.

Una vez que se tiene una estimación de p , se pueden estimar:


- 1. Distribución de la cantidad s de ocurrencia de un evento en n pruebas: **Binomial (n, p)**
- 2. Distribución de la cantidad de pruebas hasta que ocurra un evento por primera vez : **1 + Geométrica (p)**
- 3. Distribución de la cantidad de pruebas hasta que ocurran s eventos: **s + Negbin (s, p)**

Distribuciones de probabilidad para Procesos Discretos


- Para que las distribuciones de probabilidad mencionadas sean de aplicación se debe cumplir el supuesto que el sistema a estudiar tiene las características de un Proceso Binomial.
- **Proceso Binomial:** la probabilidad de ocurrencia de un evento es constante e independiente de la cantidad o proximidad en el tiempo de eventos ya ocurridos.

Beta

- Aplicaciones: estimar la probabilidad de ocurrencia p de un evento, a partir de la observación de s eventos en n pruebas.
- Parámetros: Beta (***alfa1, alfa2***)
alfa 1 : s+1 alfa2: n-s+1
- La distribución Beta puede tomar muchas formas, según los valores de *alfa1* y *alfa2*.
- A medida que aumenta n , se gana precisión en la estimación de p (la distribución de p se comprime)



Dada la gran variedad de formas que puede asumir según los valores asignados a los parámetros, la distribución Beta también se usa para describir datos empíricos.

- Si los valores de ambos parámetros son iguales, Beta es simétrica.
 - Si α_1 es menor que α_2 , la distribución está sesgada hacia la derecha.
 - Si α_1 es mayor que α_2 , la distribución está sesgada hacia la izquierda
- 

Binomial

- Aplicaciones: estimar la distribución de la cantidad s de ocurrencias de un evento en n pruebas, cuando hay una probabilidad p de ocurrencia del evento en cada prueba.
- Parámetros: Binomial (n, p)
- Para $n > 30$ o cuando p es alta, la distribución Binomial puede ser aproximada por una distribución Normal $((np), (npq)^{1/2})$.

Condiciones subyacentes a una distribución Binomial

- En cada prueba sólo hay dos resultados posibles
- Las pruebas son independientes (lo que ocurre en la primera prueba no afecta a la segunda, y sucesivamente).
- La probabilidad de ocurrencia del evento se mantiene constante a través de las pruebas (no hay un proceso de aprendizaje)

Geométrica

- Aplicaciones: estimar la cantidad n de pruebas necesarias hasta la ocurrencia del primer evento, cuando la probabilidad p de ocurrencia de un evento se mantiene constante en el tiempo.
- Parámetros: $n = 1 + \text{Geometric}(p)$
- La distribución Geométrica es análoga a la distribución Exponencial: Geométrica se aplica a variables discretas, Exponencial se aplica a variables continuas.

Condiciones subyacentes de una distribución Geométrica

- La cantidad de eventos no está prefijada.
- Se continúa con las pruebas hasta lograr el primer éxito.
- La probabilidad de éxito p es constante a través de las pruebas.

Binomial Negativa

- Aplicaciones: estimar la distribución de la cantidad n de pruebas hasta que ocurran s eventos, cuando la probabilidad p de ocurrencia de un evento es constante en el tiempo.
- Parámetros: $n = s + \text{Negbin}(s, p)$
 s es el parámetro que le da la forma a la distribución.

Condiciones subyacentes de una distribución Binomial Negativa

- La cantidad de pruebas no está prefijada.
- Se continúa con las pruebas hasta que se observa la cantidad de eventos (s) buscada.
- La probabilidad de éxito p es constante de prueba a prueba.

Distribución Hipergeométrica

- Al igual que la distribución Binomial, esta distribución describe la cantidad de ocurrencias de un evento en una cantidad de pruebas.
- La diferencia con la distribución Binomial es que a medida que se avanza con las pruebas cambia la probabilidad de ocurrencia del evento: pruebas sin reemplazo.

Condiciones subyacentes de una distribución Hipergeométrica

- La cantidad total de elementos de una población es finita.
- La muestra representa una porción de la población.
- La probabilidad de ocurrencia del evento en la población es conocida y cambia ligeramente luego de cada prueba.

Distribuciones de probabilidad para Procesos Continuos

- Un Proceso Continuo se caracteriza por un Intervalo Medio de *Tiempo* entre Eventos (*beta*).
- Una vez que se tiene una estimación de *beta*, se puede estimar también:
 - 1. Distribución de la cantidad de eventos por unidad de tiempo: **Poisson (λ)**
 - 2. Distribución de Tiempo hasta la ocurrencia del próximo evento: **Exponencial (β)**
 - 3. Distribución de Tiempo hasta que ocurran n eventos: **Gamma (n, β)**

Distribuciones de probabilidad para Procesos Continuos (cont.)

- Para que estas distribuciones sean aplicables se debe cumplir el supuesto que el sistema estudiado tiene las características de un Proceso tipo Poisson.
- **Proceso tipo Poisson**: la probabilidad de ocurrencia de un evento por unidad de exposición es constante e independiente de la cantidad o proximidad de eventos ocurridos.
- La unidad de exposición puede ser cualquier variable continua (tiempo, distancia, etc)

Estimación del Intervalo Medio de Tiempo entre Eventos (*beta*)

- *beta* es el intervalo de exposición promedio entre n eventos observados.
- El verdadero valor de *beta* puede ser estimado a partir de n eventos observados valiéndose del TCL:
- ***beta*** = Normal (***t***, ***sigma***/ **$(n-1)^{1/2}$**)
 t = promedio de los $n-1$ intervalos contiguos
 σ = desvío standard de los t_i intervalos.
- La precisión de la estimación de *beta* aumenta a medida que aumenta n .

Poisson

- Aplicaciones: estimar la cantidad N de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo T cuando el tiempo medio entre eventos sucesivos (β) se ajusta a un proceso tipo Poisson.
- Parámetros: $N = \text{Poisson}(\lambda * t)$
$$\lambda = 1 / \beta$$
- λ se puede interpretar como la cantidad promedio de ocurrencias del evento por unidad de exposición.

Condiciones subyacentes a una distribución Poisson

- La cantidad de eventos por unidad de exposición no está limitada a un valor discreto.
- Los eventos son independientes entre sí (el número de eventos en un intervalo de exposición no afecta al número de eventos en otro intervalo de exposición).
- La cantidad promedio de eventos se mantiene constante de intervalo a intervalo.

Exponencial

- Aplicaciones: estimar la distribución del (tiempo) entre ocurrencias sucesivas de un evento que tiene una probabilidad de ocurrencia p constante por unidad de (tiempo).
- Parámetros: Expon (**beta**)
- Si la probabilidad p de ocurrencia del evento es constante a través del tiempo, la estimación del tiempo que medie hasta la ocurrencia del próximo evento es independiente del tiempo que haya transcurrido desde la última ocurrencia.

Gamma

- Aplicaciones: estimar la distribución del tiempo requerido para la ocurrencia de *alfa* eventos, cuando los eventos se ajustan a un Proceso tipo Poisson con tiempo medio de ocurrencia entre eventos *beta*.
- Esta distribución se usa bastante en meteorología, seguros y teoría de colas.
- Parámetros: Gamma (*alfa*, *beta*)

Condiciones subyacentes de una distribución Gamma

- La cantidad de posibles ocurrencias de un evento en cualquier unidad de medida no está limitada a valores discretos.
- La ocurrencia de los eventos es independiente entre sí.
- La cantidad promedio de ocurrencias del evento se mantiene constante entre intervalos sucesivos.

Patrones lógicos comunes a Procesos Discretos y Continuos

- En un Proceso Binomial, el parámetro descriptivo clave es p , probabilidad de ocurrencia del evento en cada prueba, que se asume constante para todas las pruebas
- En un proceso Poisson, el parámetro descriptivo clave es λ (cantidad media de eventos que ocurren por unidad de exposición) que se asume es constante sobre el período total de exposición.

Weibull

- La distribución **Weibull** (**alfa**, **beta**) asume que la probabilidad p de ocurrencia del evento cambia con el transcurso del tiempo.

- alfa = 1 probabilidad constante (Exponencial)
- alfa > 1 probabilidad creciente
- alfa < 1 probabilidad decreciente.

alfa es el parámetro de forma, beta es el parámetro de ubicación.

El parámetro *beta* permite representar una distribución exponencial con valor mínimo distinto de 0.

Normal

- Aplicaciones: una variedad de situaciones, como se desprende del Teorema Central del Límite.
- Es útil en finanzas pues la suma o diferencia de distribuciones Normales resulta también en una distribución Normal con parámetros que pueden ser determinados a partir del TCL.
- Parámetros: Normal (***mu, sigma***)

Estimación subjetiva de los parámetros de una Normal

- Media: Valor más probable
- Desvío: el intervalo $\pm 2 \cdot \sigma$ contiene el 95% de los valores, por lo tanto:
Sigma: $(\text{máximo} - \text{más probable}) / 2$
- La distribución Normal se extiende de $-\infty$ a $+\infty$, aunque si $CV < 1/3$ la probabilidad de que ocurra un valor negativo es menor que 0.14%.

Lognormal

- Aplicaciones: modelizar variables que son el ***producto*** de una cantidad de otras variables aleatorias que ocurren naturalmente.

Generalmente brinda una buena representación de variables que se extienden de 0 a $+\infty$ y que tienen un sesgo positivo.

- Parámetros: Lognormal (**mu,sigma**)

Se usan como parámetros la media aritmética y el desvío standard de los datos disponibles.

Condiciones subyacentes de una distribución Lognormal

- La variable aleatoria puede tomar valores que aumentan sin límites pero no puede tomar valores negativos.
- La variable aleatoria tiene un sesgo positivo ($\text{modo} < \text{media}$) con la mayor parte de los valores cerca del límite inferior.
- El logaritmo natural de la variable se ajusta a una distribución Normal.

Pareto

- Aplicaciones: modelar cualquier variable que tenga un valor mínimo (que también es el más probable) para la cual la densidad de probabilidad decrece geométricamente hacia cero.
- Parámetros : Pareto (**tita**, **a**)
a = valor mínimo y modal

Valor Extremo (Gumbel)

- Se usa para describir valores extremos de una variable en un período de tiempo (caudales, precipitaciones, fuerza de rotura de materiales, etc).
- Parámetros : modo, parámetro de escala.
- Los datos usados para ajustar los parámetros de la distribución pueden provenir de una submuestra de tamaño $2 \times (n)^{1/2}$ que incluya los valores de un extremo de la muestra.

Ajuste de los datos a una distribución teórica

Los parámetros de la distribución que permitan lograr el mejor ajuste a los datos se determinan usualmente mediante alguno de los siguientes dos métodos:

- **1. Estimadores de Máxima Verosimilitud:**
maximizan la probabilidad que la distribución definida con estos parámetros sea capaz de generar los datos observados.
- **2. Minimización de las diferencias absolutas** entre los valores de probabilidad acumulada observados y los derivados de la distribución teórica (usando programas de optimización)

Indicadores de Bondad de Ajuste

Los indicadores estadísticos de Bondad de Ajuste más usados son 3:

- 1. Para distribuciones discretas y continuas, tanto numéricas como no numéricas: **Chi cuadrado**. Es el indicador menos potente.
- 2. Para distribuciones continuas: **Kolmogorov-Smirnov (K-S)**. No es muy sensible para detectar discrepancias en las colas de la distribución.
- 3. **Anderson-Darling** (versión sofisticada de K-S), pone más énfasis en las colas.

Indicadores de Bondad de Ajuste

- Cuanto menor sea el valor de cada indicador, mayor será el ajuste aparente entre la distribución teórica y los datos observados.
- Los valores standard de K-S y A-D son de uso limitado para comparar valores críticos cuando hay menos de 30 observaciones. Esto se puede corregir usando K-S y A-D modificados.
- Hay muchas distribuciones que tienen formas similares y que pueden ser capaces de generar los datos observados.

Dependencia y Correlación

- Una relación de Dependencia ocurre cuando el valor muestreado de una variable (independiente) tiene una relación estadística que determina aproximadamente el valor que va a ser generado para la otra variable (dependiente).
- La diferencia principal entre Dependencia y Correlación es que la primera presupone una relación causal, mientras que la segunda no (puede haber un factor externo que afecta a ambas variables).

Correlación Lineal (Pearson)

- El coeficiente r da una medida de la covarianza entre dos conjuntos de datos.
- r puede tomar valores desde -1 a +1
- Al dividir por los desvíos standard de cada conjunto de datos se logra un índice de covarianza que no depende de las unidades de medida en que están expresados los datos.
- Supuestos: la relación entre variables es de tipo lineal.

Correlación por orden de rango (Spearman)

- Es un método no paramétrico para cuantificar la relación entre variables.
- r puede tomar valores desde -1 a +1
- Ventajas:
 - 1. Las variables se correlacionan de acuerdo al rango de valores generados en cada distribución. Esto significa que todas las distribuciones correlacionadas preservan su forma original.
 - 2. Como no depende de supuestos acerca de la relación matemática de las variables a correlacionar, puede ser aplicable a cualquier tipo de relación entre distribuciones (lineal, no lineal).

- El coeficiente de correlación de Pearson mide la intensidad de la relación lineal entre variables.
- Si dos variables aleatorias no tienen la misma distribución de probabilidad, es improbable que se relacionen en forma lineal, por lo que el coeficiente de correlación tendrá poco significado.
- Si se toman los valores según rangos y no según valores absolutos, el coeficiente de correlación así calculado tiene sentido incluso para variables con diferentes distribuciones.

Desventajas de correlacionar variables mediante el coeficiente Spearman

- 1. Es difícil estimar el coeficiente de correlación entre dos distribuciones de formas diferentes.
- 2. El mismo coeficiente de correlación puede resultar en diferentes gráficos de puntos para diferentes distribuciones correlacionadas. Esto puede ser aún más marcado si las distribuciones a correlacionar son diferentes.

Recomendaciones respecto al uso de coeficientes de correlación de Spearman

- 1. Usar estos coeficientes para correlacionar variables que tengan un impacto menor sobre los resultados del modelo.
- 2. Tratar de restringir su uso a correlacionar distribuciones de geometría similar.
- 3. Si se correlacionan distribuciones de geometría diferente, antes de aceptar el coeficiente observar el gráfico de puntos resultante.
- 4. Evitar correlacionar distribuciones cuando no haya una razón lógica que permita suponer una correlación.

Matrices de Correlación

- Permiten correlacionar varias distribuciones de probabilidad mediante coeficientes de Spearman.
- Como la fórmula de los coeficientes de correlación por orden de rango es simétrica, los elementos de la matriz son simétricos alrededor de la diagonal.
- Tiene que haber una cierta lógica en los coeficientes ingresados (p.ej. condición transitiva)

Efectos de la correlación sobre los resultados del modelo

El efecto es función de:

- Relación entre las variables correlacionadas y el resultado.
- Forma de las distribuciones correlacionadas.

Efecto de la correlación sobre el resultado de la Suma de dos variables correlacionadas (modelos aditivos)

- El valor esperado del resultado no se ve afectado por la presencia de correlación.
- El desvío standard del resultado aumenta a medida que aumenta r (si las variables correlacionadas “tiran” el resultado para el mismo lado).

Efecto de la correlación sobre el resultado del producto de dos variables correlacionadas (modelos multiplicativos)

- El valor esperado del resultado aumenta a medida que aumenta r (toda la distribución se desplaza hacia la derecha a medida que aumenta r).
- No se pueden hacer generalizaciones respecto al desvío standard, aunque en general aumenta a medida que aumenta r .

Coeficientes de correlación a partir de la opinión de expertos

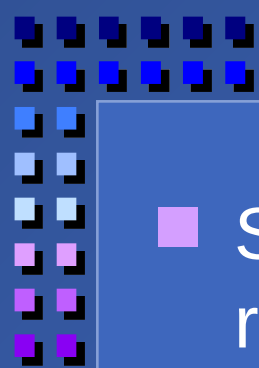
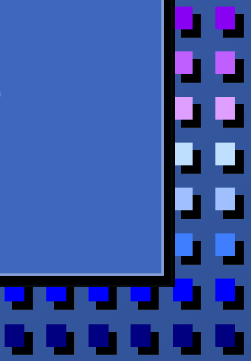
- 1. Determinar la lógica de la relación entre las variables a correlacionar
- 2. Determinar cuál es la variable independiente
- 3. Definir la distribución de la variable independiente
- 4. Seleccionar varios valores de la variable independiente (incluyendo mínimo, máximo y al menos otros dos puntos relevantes)

Coeficientes de correlación a partir de la opinión de expertos (cont.)

- 5. Preguntar al experto por algunos valores de interés de la variable dependiente (mínimos, máximos, más probable) que estima se corresponderían con cada valor de la variable independiente.
- 6. Plotear estos valores y encontrar las ecuaciones que unan cada conjunto de valores.
- 7. Usar estas ecuaciones en una distribución Triangular o BetaPert para definir la variable dependiente.


Determinación de la contribución relativa de cada variable a la variabilidad del resultado

- Los coeficientes de correlación entre el resultado y las variables dan una idea de la influencia de cada variable, pero no cuantifican esta influencia.

- 
- Si el modelo es **aditivo**, la contribución relativa de cada variable a la variabilidad total puede estimarse de la siguiente manera:
 - 1. Calcular el coeficiente de correlación entre cada variable y el resultado.
 - 2. Calcular la suma de estas correlaciones.
 - 3. Dividir cada coeficiente por la suma. Las fracciones resultantes representan aproximadamente la contribución relativa de cada variable a la variabilidad total.
- 



■ Cuando el modelo no es aditivo y/o las variables no son independientes:

- 1. Correr una simulación inicial, con todas las variables especificadas.
 - 2. Correr luego varias simulaciones, en cada una de las cuales se “congela” una variable en su valor esperado.
 - 3. Anotar el desvío standard del resultado de cada simulación.
 - 4. Calcular la reducción en la variabilidad del resultado para cada simulación en la cual se haya “congelado” una variable.
 - 5. Normalizar dividiendo el valor absoluto de la reducción por la suma de todas las reducciones. Las fracciones resultantes darán una estimación de la contribución porcentual de cada variable a la variabilidad total.
- 
- 