Simulación de pi.

Technical Report · February 2014

DOI: 10.13140/RG.2.2.31329.10089

2 authors:

Omar Hernandez Rodriguez
University of Puerto Rico at Rio Piedras

Jorge M. López Fernández
University of Puerto Rico at Rio Piedras

APROXIMACIÓN DE π MEDIANTE EL EMPLEO DE MÉTODOS DE MONTECARLO EN OCASIÓN DE LA CELEBRACIÓN DEL DÍA INTERNACIONAL DE π

OMAR HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ Y JORGE M. LÓPEZ

1. El conde de Buffon

La estampilla postal que se muestra, tiene la imagen de un famoso noble francés del siglo XVIII, Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, quien planteó, en el 1977 un famoso problema matemático que de inmediato pasamos a describir. El conde de Buffon propuso que se comenzara con un papel rayado con líneas rectas, las cuales distan unas de las otras por unas L unidades. La pregunta del conde fue muy sencilla. Si tiramos aleatoriamente sobre el papel rayado una aguja cuya longitud es la misma que la separación entre las rayas del papel, es decir, L, ¿con qué frecuencia se debe esperar que la aguja caiga sobre alguna de las rayas del papel? La sorprendente contestación al problema de la aguja de Buffon es que la frecuencia es $2/\pi$, de manera que el experimento de Buffon nos da la oportunidad de calcular fácilmente los primeros dígitos de la expansión decimal de π. En efecto, si f es la frecuencia observada o empírica del experimento, entonces es de esperarse que $f \approx 2/\pi$, es decir

$$\pi \approx \frac{2}{f}. \tag{1}$$

El análisis matemático del problema del Conde Buffon no reviste mayores dificultades. Si identificamos dos variables aleatorias, d la distancia más corta entre el punto medio del segmento a la raya más cercana y el ángulo $\theta \in [0, \pi)$ que hace la aguja con la horizontal; véase la Figura 3. Las variables d y θ están uniformemente distribuidas en $[0, L/2]$ y $[0, \pi)$ respectivamente. Una aguja cae sobre alguna raya si se satisface la condición

$$d \leq \frac{L}{2} \sin\theta.$$

En la Figura 4 podemos pensar que estamos tirando un dardo aleatorio que debe caer en el rectángulo que sirve de marco y que si el dardo

Date: 3 de febrero de 2014.

Figura 1. Georges Louis Leclerc, Le Compte de Buffon

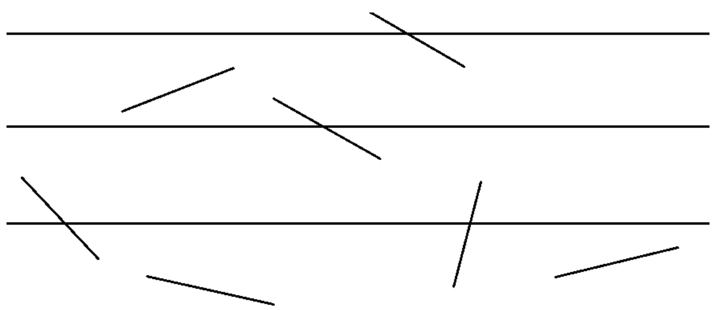

Figura 2. Agujas sobre el papel rayado

cayese en la gráfica del seno, entonces la situación corresponde a la situación el la que la aguja cae sobre una de las rayas del papel. Por ello la probabilidad de que el dardo caiga en la gráfica del seno estará en proporción al tamaño del área acotada por la gráfica del seno dividida por el área del rectángulo:

$$P = \frac{\int_0^\pi \dfrac{L}{2} \sin x \, dx}{\dfrac{\pi L}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

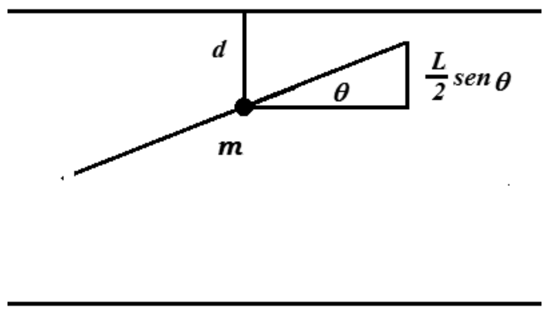

FIGURA 3. Planteamiento matemático del problema

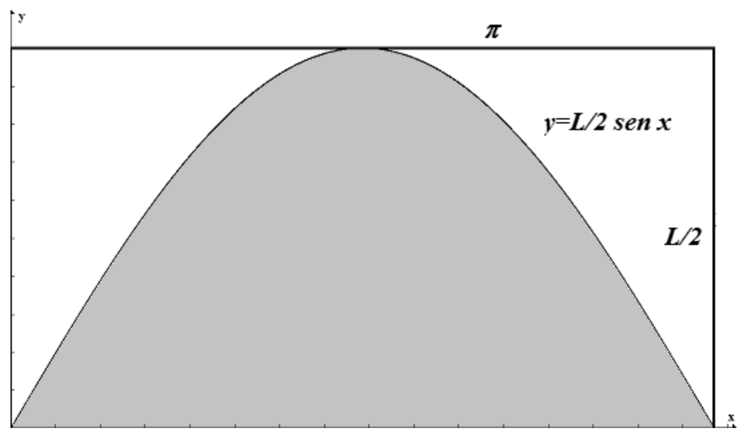

FIGURA 4. Método de Montecarlo:
Probabilidad $= L/2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx / \pi L/2 = 2/\pi$

2. Un método alternativo

La gran desventaja del método empleado para calcular la probabilidad del experimento de Buffon es que ello requiere la integración de la gráfica de $y = f(x)$. Ahora presentamos un método de Montecarlo que no requiere tal integración. En la Figura 5 se muestra un cuadriculado sobre el cual se tira una moneda que se puede inscribir en cualquier cuadrado de tal cuadriculado. En la figura se pueden apreciar dos posiciones de la moneda, en un caso la moneda tapa una de las esquinas de un cuadriculado y en otro caso no lo hace. La pregunta es parecida a la que postulamos en el caso del experimento de Buffon: ¿Con qué frecuencia tapa la moneda la esquina de algún cuadrado el cuadriculado? En la Figura 5 vemos algunas de las formas en que puede caer la moneda sobre el cuadriculado. Una de las posiciones no toca vértice

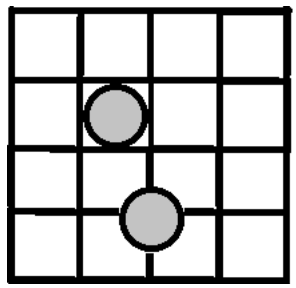

FIGURA 5. ¿Cón qué frecuencia tapa una moneda la esquina de un cuadrado del cuadriculado?

del cuadriculado alguno pero otra de las posiciones representadas en el gráfico muestra una moneda tapando una esquina del cuadriculado. Ahora pesemos que el centro de la moneda C cae sobre un cuadrado del cuadriculado; véase la Figura 6; en este análisis supondremos que la posición del centro de la moneda está uniformemente distribuida en el cuadrado del cuadriculado donde cae. Es menester observar que es posible que el centro de la moneda caiga en más de un cuadrado del cuadriculado, y en el caso que así fuere, escogemos a cualquiera de los dos cuadrados para el análisis que haremos a continuación.

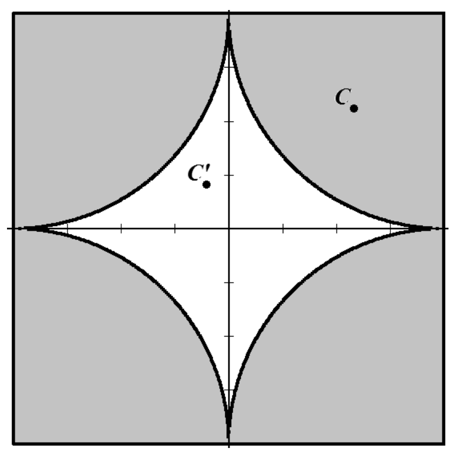

FIGURA 6. ¿Cuándo cae el centro de la moneda sobre uno de los vértices del cuadrado?

En la Figura 6 se observan dos posiciones C y C' de la moneda. Como el radio de la moneda, por hipótesis, es la mitad del lado de cualquier cuadrado del cuadriculado, vemos que la moneda en la posición C' no alcanzará a tocar ninguno de los vértices del cuadrado donde cae ya que al dibujar desde el centro C' el radio de la moneda, todos los vértices quedan al descubierto. Sin embargo al dibujar la moneda desde el centro C en la figura, se aprecia que la moneda al caer ocultará el vértice en el extremo superior izquierdo del cuadrado de la Figura 6. Así pues, la moneda tapará algún vértice del cuadriculado si su centro cae sobre una de las áreas de los cuatro cuadrantes de la circunferencia de una moneda. Como la probabilidad P es la razón del área total de los cuadrantes ($4\pi R^2/4 = \pi R^2$) dividida por el área del cuadrado, tenemos,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi R^2}{(2R)^2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Referencias

Departmento de Matemática, UPRRP
E-mail address: jorgemar.lopez@gmail.com

Departamento de Estudios Graduados de la Faultad de Educación, UPRRP
E-mail address: omar.hernandez4@upr.edu
URL: http://historiadelaintegral.blogspot.com/