Objetivos de aprendizaje

Al final de esta sección, podrá:

- Describir la interpretación estadística de la función de onda.
- Utilizar la función de onda para determinar las probabilidades.
- Calcular los valores esperados de posición, momento y energía cinética.

En el capítulo anterior vimos que las partículas actúan en algunos casos como partículas y en otros como ondas. Pero, ¿qué significa que una partícula "actúe como una onda"? ¿Qué es exactamente "ondular"? ¿Qué reglas rigen el cambio y la propagacio de esta onda? ¿Cómo se utiliza la función de onda para hacer predicciones? Por ejemplo, si la amplitud de una onda de electrón viene dada por una función de posición y tiempo, $\Psi(x,t)$, definido para toda la *x*, ¿*dónde* está exactamente el electrón? El objetivo de este capítulo es responder a estas preguntas.

Uso de la función de onda

Una pista sobre el significado físico de la función de onda $\Psi(x,t)$ la proporciona la interferencia de dos rendijas de luz monocromática (Figura 7.2). (Vea también Ondas electromagnéticas e Interferencia) La **función de onda** de una onda luminosa viene dada por *E*(*x*,*t*), y su densidad de energía viene dada por $|E|^2$, donde *E* es la intensidad del campo eléctrico. La energía de fotón individual solo depende de la frecuencia de la luz, $\varepsilon_{\text{fotón}} = hf$, así que $|E|^2$ es proporcional al número de fotones. Cuando las ondas de luz de S_1 interfieren con las ondas de luz de S_2 en la pantalla de visualización (a una distancia *D*), se produce un patrón de interferencia (parte (a) de la figura). Las franjas brillantes corresponden a puntos de interferencia constructiva de las ondas luminosas, y las franjas oscuras corresponden a puntos de interferencia destructiva de las ondas luminosas (parte (b)).

Supongamos que la pantalla no está inicialmente expuesta a la luz. Si la pantalla se expone a una luz muy débil, el patrón de interferencia aparece gradualmente (Figura 7.2(c), de izquierda a derecha). Los impactos individuales de los fotones en la pantalla aparecen como puntos. Se espera que la densidad de puntos sea grande en los lugares donde el patrón de interferencia será, en última instancia, más intenso. En otras palabras, la probabilidad (por unidad de superficie) de que un solo fotón incida en un punto concreto de la pantalla es proporcional al cuadrado del campo eléctrico total, $|E|^2$ en ese momento. En las condiciones adecuadas, se desarrolla el mismo patrón de interferencia para las partículas de materia, como los electrones.

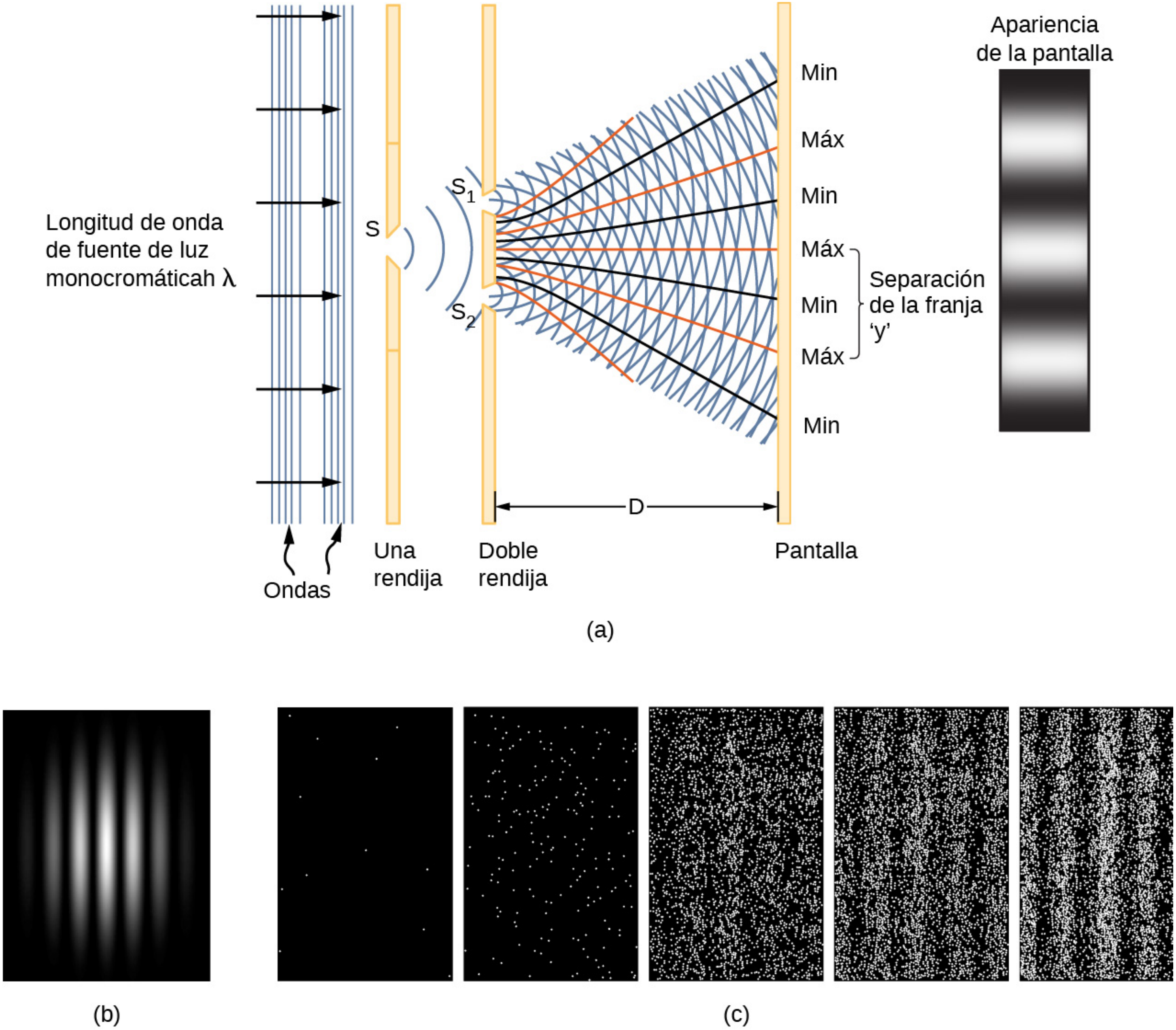

Figura 7.2 Interferencia de dos rendijas de luz monocromática. (a) Esquema de la interferencia de dos rendijas; (b) patrón de interferencia de luz; (c) patrón de interferencia construido gradualmente bajo luz de baja intensidad (de izquierda a derecha).

INTERACTIVO

Visite esta simulación interactiva para aprender más sobre la interferencia de las ondas cuánticas.

El cuadrado de la onda de materia $|\Psi|^2$ en una dimensión tiene una interpretación similar a la del cuadrado del campo eléctrico $|E|^2$. Esto da la probabilidad de que una partícula se encuentre en una posición y un tiempo determinados por unidad de longitud, lo que también se denomina **densidad de probabilidad**. La probabilidad (*P*) de que una partícula se encuentre en un intervalo estrecho (*x*, *x* + *dx*) en el tiempo *t* es, por lo tanto

$$P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx. \quad (7.1)$$

(Más adelante, definiremos la magnitud al cuadrado para el caso general de una función con "partes imaginarias") Esta interpretación probabilística de la función de onda se denomina **interpretación de Born**. En la Figura 7.3 se ofrecen ejemplos de funciones de onda y sus cuadrados para un tiempo *t* determinado.

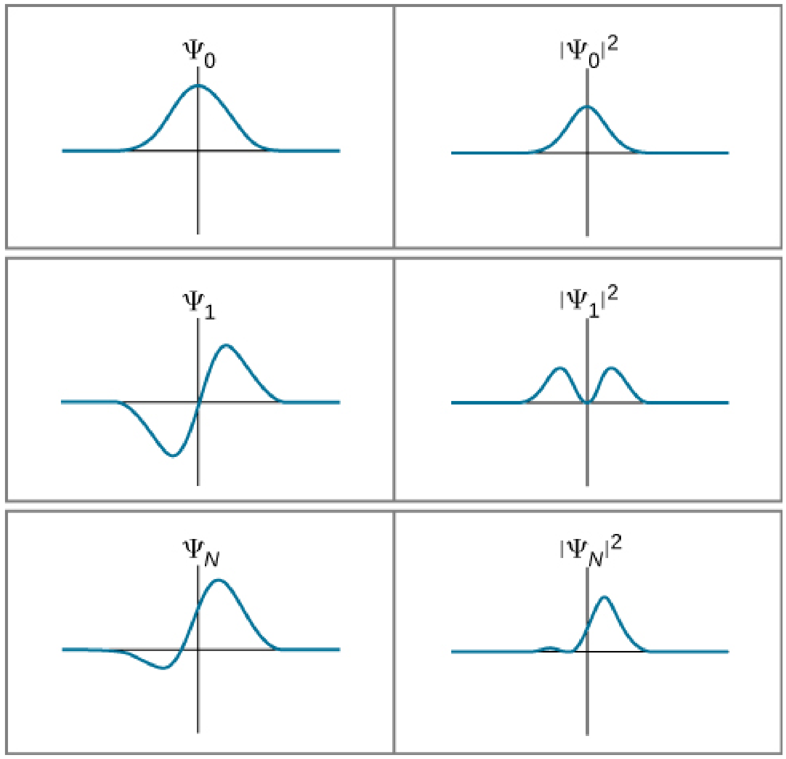

Figura 7.3 Varios ejemplos de funciones de onda y el correspondiente cuadrado de sus funciones de onda.

Si la función de onda varía lentamente en el intervalo Δx, la probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo es aproximadamente

$$P(x, x+\Delta x) \approx |\Psi(x,t)|^2 \Delta x. \tag{7.2}$$

Observe que al elevar al cuadrado la función de onda se garantiza que la probabilidad sea positiva. (Esto es parecido a elevar al cuadrado la intensidad del campo eléctrico, que puede ser positiva o negativa, para obtener un valor positivo de intensidad). Sin embargo, si la función de onda no varía lentamente, debemos integrar:

$$P(x, x+\Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx. \tag{7.3}$$

Esta probabilidad es simplemente el área bajo la función $|\Psi(x,t)|^2$ entre la *x* y $x+\Delta x$. La probabilidad de encontrar la partícula "en algún lugar" (la **condición de normalización**) es

$$P(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1. \tag{7.4}$$

Para una partícula en dos dimensiones, la integración es sobre un área y requiere una integral doble; para una partícula en tres dimensiones, la integración es sobre un volumen y requiere una integral triple. Por ahora, nos atenemos al caso unidimensional simple.

EJEMPLO 7.1

¿Dónde está la pelota? (Parte I)

Se obliga a una pelota a moverse a lo largo de una línea dentro de un tubo de longitud *L*. La pelota tiene la misma probabilidad de encontrarse en cualquier parte del tubo en algún momento *t*. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la pelota en la mitad izquierda del tubo en ese momento? (La respuesta es el 50 %, por supuesto, pero ¿cómo obtenemos esta respuesta utilizando la interpretación probabilística de la función cuántica de la onda mecánica?)

Estrategia

El primer paso es escribir la función de onda. La pelota se encuentra igualmente en cualquier lugar de la caja, por lo que una forma de describir la pelota es con una función de onda *constante* (Figura 7.4). La condición de normalización se puede utilizar para encontrar el valor de la función y una simple integración sobre la mitad de la caja da la respuesta final.

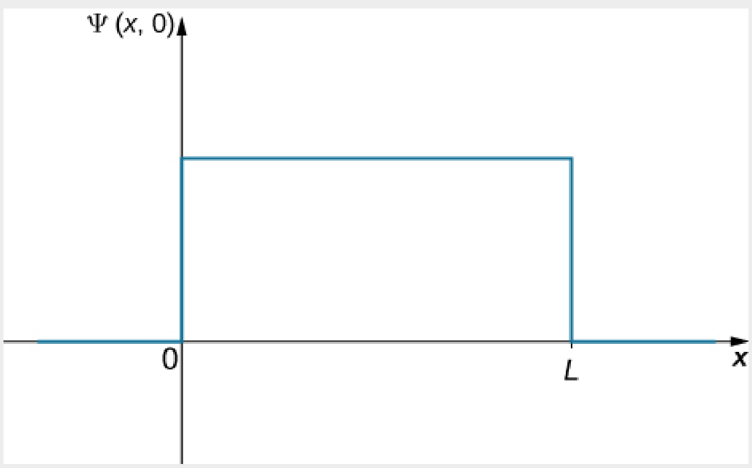

Figura 7.4 Función de onda para una pelota en un tubo de longitud *L*.

Solución

La función de onda de la pelota puede escribirse como $\Psi(x,t) = C(0 < x < L)$, donde *C* es una constante, y $\Psi(x,t) = 0$ por lo contrario. Podemos determinar la constante *C* aplicando la condición de normalización (determinamos $t = 0$ para simplificar la notación):

$$P\left(x = -\infty, +\infty\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|C\right|^2 dx = 1.$$

Esta integral puede dividirse en tres partes: (1) del infinito negativo al cero, (2) del cero a *L*, y (3) de *L* al infinito. La partícula está obligada a estar en el tubo, por lo que $C = 0$ fuera del tubo y las primeras y últimas integraciones son cero. Por lo tanto, la ecuación anterior se puede escribir

$$P\left(x = 0, L\right) = \int_{0}^{L} \left|C\right|^2 dx = 1.$$

El valor *C* no depende de *x* y puede sacarse de la integral, por lo que obtenemos

$$\left|C\right|^2 \int_0^L dx = 1.$$

La integración da

$$C = \sqrt{\frac{1}{L}}.$$

Para determinar la probabilidad de encontrar la pelota en la primera mitad de la caja $(0 < x < L)$, tenemos

$$P\left(x = 0, L/2\right) = \int_0^{L/2} \left|\sqrt{\frac{1}{L}}\right|^2 dx = \left(\frac{1}{L}\right)\frac{L}{2} = 0{,}50.$$

Importancia

La probabilidad de encontrar la pelota en la primera mitad del tubo es del 50 %, como se esperaba. Cabe destacar dos observaciones. En primer lugar, este resultado corresponde al área bajo la función constante de $x = 0$ a *L*/2 (el área de un cuadrado a la izquierda de *L*/2). En segundo lugar, este cálculo requiere una integración del *cuadrado* de la función de onda. Un error común al realizar estos cálculos es olvidar elevar al cuadrado la función de onda antes de la integración.

EJEMPLO 7.2

¿Dónde está la pelota? (Parte II)

De nuevo se obliga a una bola a moverse a lo largo de una línea dentro de un tubo de longitud *L*. Esta vez, la bola se encuentra preferentemente en el centro del tubo. Una forma de representar su función de onda es con una función coseno simple (Figura 7.5). ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la bola en el último cuarto del tubo?

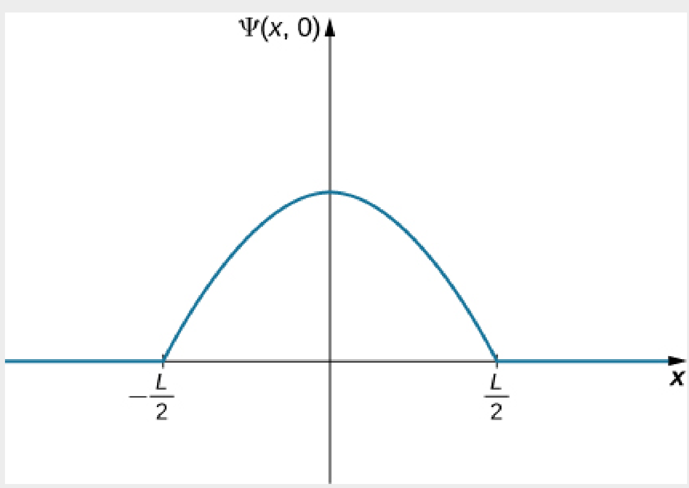

Figura 7.5 Función de onda para una pelota en un tubo de longitud *L*, donde la bola se encuentra preferentemente en el centro del tubo.

Estrategia

Utilizamos la misma estrategia anterior. En este caso, la función de onda tiene dos constantes desconocidas: Una de ellas está asociada a la longitud de onda de la onda y la otra a la amplitud de la misma. Determinamos la amplitud utilizando las condiciones de frontera del problema, y evaluamos la longitud de onda utilizando la condición de normalización. La integración del cuadrado de la función de onda sobre el último cuarto del tubo da la respuesta final. El cálculo se simplifica centrando nuestro sistema de coordenadas en el pico de la función de onda.

Solución

La función de onda de la pelota se puede escribir

$$\Psi(x,0) = A\cos(kx)(-L/2 < x < L/2),$$

donde *A* es la amplitud de la función de onda y $k = 2\pi/\lambda$ es su número de onda. Más allá de este intervalo, la amplitud de la función de onda es cero porque la pelota está confinada en el tubo. Si se requiere que la función de onda termine en el extremo derecho del tubo se obtiene

$$\Psi\left(x = \frac{L}{2}, 0\right) = 0.$$

Evaluando la función de onda en $x = L/2$ da

$$A\cos(kL/2) = 0.$$

Esta ecuación se satisface si el argumento del coseno es un múltiplo entero de $\pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2,$ y así sucesivamente. En este caso, tenemos

$$\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2},$$

o

$$k = \frac{\pi}{L}.$$

Aplicando la condición de normalización se obtiene $A = \sqrt{2/L}$, por lo que la función de onda de la pelota es

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\pi x/L),\ \ -L/2 < x < L/2.$$

Para determinar la probabilidad de encontrar la pelota en el último cuarto del tubo, elevamos la función al cuadrado e integramos:

$$P(x = L/4, L/2) = \int_{L/4}^{L/2} \left|\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right|^2 dx = 0{,}091.$$

Importancia

La probabilidad de encontrar la pelota en el último cuarto del tubo es del 9,1 %. La pelota tiene una longitud de onda definida $(\lambda = 2L)$. Si el tubo tiene una longitud macroscópica $(L = 1\ \mathrm{m})$, el momento de la pelota es

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L} \sim 10^{-36}\mathrm{m/s}.$$

Este momento es demasiado pequeño para ser medido por cualquier instrumento humano.

Una interpretación de la función de onda

Ahora estamos en condiciones de empezar a responder a las preguntas planteadas al principio de esta sección. En primer lugar, para una partícula viajera descrita por $\Psi\left(x,t\right)=A\,\mathrm{sen}(kx-\omega t)$, ¿qué es "ondular"? Con base en la discusión anterior, la respuesta es una función matemática que puede, entre otras cosas, utilizarse para determinar dónde es probable que esté la partícula cuando se realice una medición de posición. En segundo lugar, ¿cómo se utiliza la función de onda para hacer predicciones? Si es necesario encontrar la probabilidad de que una partícula se encuentre en un determinado intervalo, se eleva a cuadrado la función de onda y se integra sobre el intervalo de interés. Pronto aprenderá que la función de onda también puede utilizarse para hacer muchos otros tipos de predicciones.

En tercer lugar, si una onda de materia viene dada por la función de onda $\Psi(x,t)$, ¿*dónde* está exactamente la partícula? Existen dos respuestas: (1) cuando el observador *no está* mirando (o la partícula no está siendo detectada de otra manera), la partícula es en todas partes $(x=-\infty,+\infty)$; y (2) cuando el observador *está* mirando (la partícula está siendo detectada), la partícula "salta a un estado de posición particular $(x,x+dx)$ con una probabilidad dada por $P(x,x+dx)=|\Psi(x,t)|^2\,dx$, un proceso llamad **reducción de estado** o **colapso de la función de onda**. Esta respuesta se denomina **interpretación de Copenhague** de la función de onda, o de la mecánica cuántica.

Para ilustrar esta interpretación, consideremos el caso sencillo de una partícula que puede ocupar un pequeño contenedor tanto e x_1 o x_2 (Figura 7.6). En la física clásica, suponemos que la partícula se encuentra en x_1 o x_2 cuando el observador no está mirando. Sin embargo, en la mecánica cuántica, la partícula puede existir en un estado de posición indefinido, es decir, puede est situada en x_1 *y* x_2 cuando el observador no está mirando. Se abandona la suposición de que una partícula solo puede tener un valor de posición (cuando el observador no está mirando). Se pueden hacer comentarios similares sobre otras magnitudes medibles, como el momento y la energía.

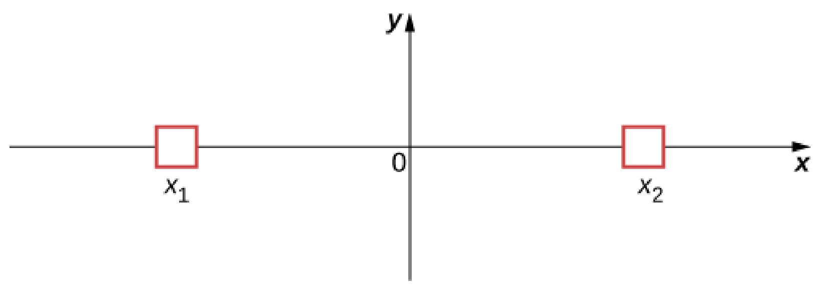

Figura 7.6 Un sistema de dos estados de posición de una partícula.

Las extrañas consecuencias de la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica se ilustran con un creativo experimento mental articulado por primera vez por Erwin Schrödinger (*National Geographic,* 2013) (Figura 7.7):

"Se coloca un gato en una caja de acero junto con un contador Geiger, un frasco de veneno, un martillo y una sustancia radiactiva Cuando la sustancia radiactiva decae, el Geiger la detecta y activa el martillo para liberar el veneno, que posteriormente mata al gato. El decaimiento radiactivo es un proceso aleatorio [probabilístico], y no hay forma de predecir cuándo ocurrirá. Los físicos afirman que el átomo existe en un estado conocido como superposición, es decir, que decae y no decae al mismo tiempo. Hasta que no se abra la caja, un observador no sabrá si el gato está vivo o muerto, porque el destino del gato está intrínsecamente ligad a si el átomo ha decaido o no, y el gato estaría [según la interpretación de Copenhague] “vivo y muerto... a partes iguales" hasta que se observe”.

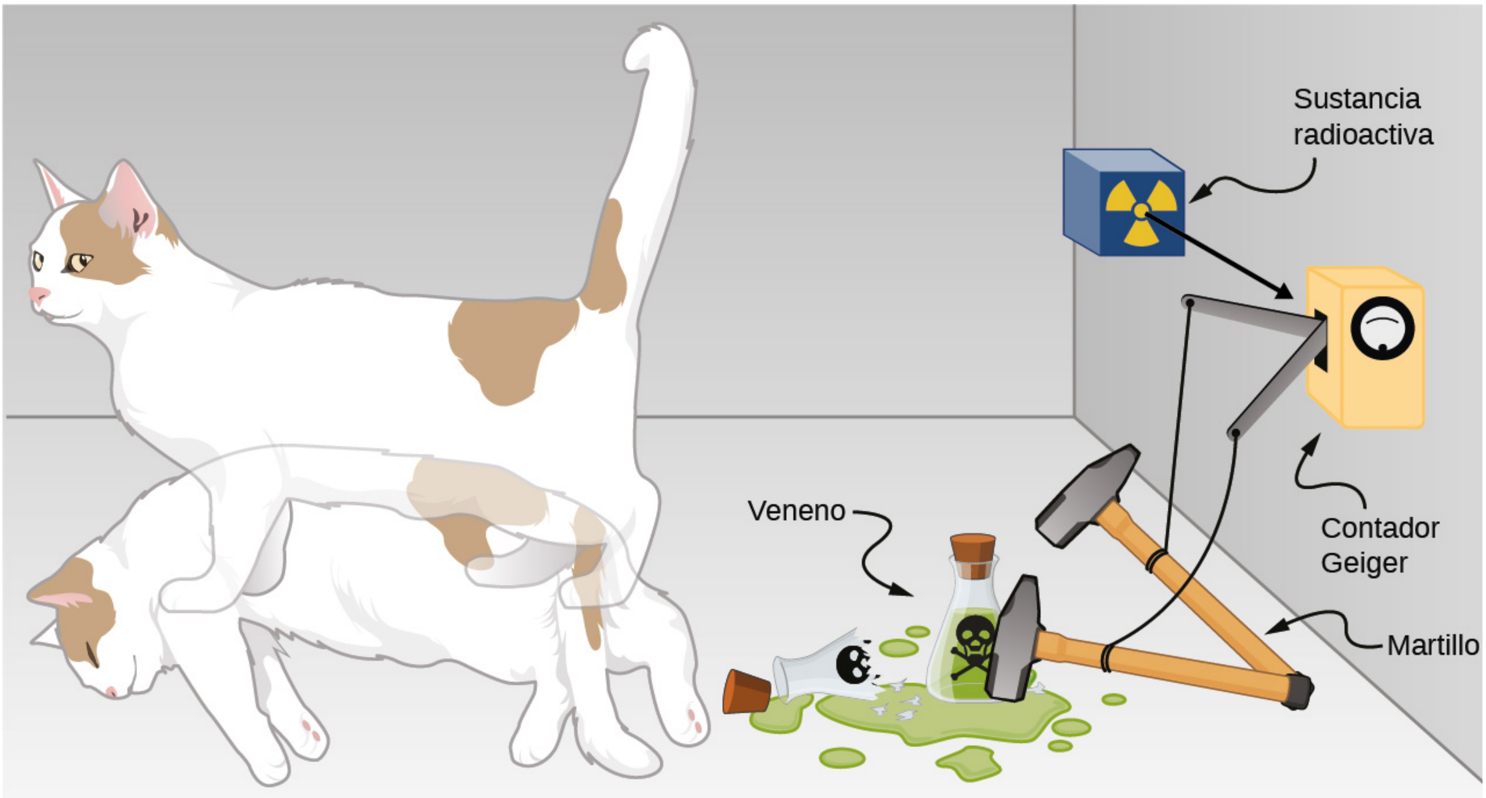

Figura 7.7 El gato de Schrödinger.

Schrödinger tomó las absurdas implicaciones de este experimento mental (un gato vivo y muerto simultáneamente) como argumento contra la interpretación de Copenhague. Sin embargo, esta interpretación sigue siendo el punto de vista más enseñad de la mecánica cuántica.

Los sistemas de dos estados (izquierda y derecha, átomo que decae y no decae, etc.) se utilizan a menudo para ilustrar los principios de la mecánica cuántica. Estos sistemas tienen muchas aplicaciones en la naturaleza, como el espín de los electrones y los estados mixtos de las partículas, los átomos e incluso las moléculas. Los sistemas de dos estados también están encontrand aplicación en la computadora cuántica, como se mencionó en la introducción de este capítulo. A diferencia de una computadora digital, que codifica la información en dígitos binarios (ceros y unos), una computadora cuántica almacena y manipula los datos e forma de bits cuánticos, o cúbits. En general, un cúbit no está en un estado de cero o uno, sino en un estado mixto de cero *y* uno Si se coloca un gran número de cúbits en el mismo estado cuántico, la medición de un cúbit individual produciría un cero con una probabilidad *p*, y un uno con una probabilidad $q = 1 - p$. Muchos científicos creen que las computadoras cuánticas son el futur de la industria informática.

Conjugados complejos

Más adelante en esta sección, verá cómo utilizar la función de onda para describir partículas que están "libres" o unidas por fuerzas a otras partículas. La forma concreta de la función de onda depende de los detalles del sistema físico. Una peculiaridad d la teoría cuántica es que estas funciones suelen ser **funciones complejas**. Una función compleja es aquella que contiene uno o más números imaginarios $(i = \sqrt{-1})$. Las mediciones experimentales solo producen números reales (no imaginarios), por lo que el procedimiento anterior para utilizar la función de onda debe modificarse ligeramente. En general, la probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo estrecho (*x*, *x* + *dx*) en el tiempo *t* viene dada por

$$P(x, x + dx) = |\Psi(x, t)|^2 dx = \Psi^* (x, t)\, \Psi\, (x, t)\, dx, \tag{7.5}$$

donde $\Psi^* (x, t)$ es el conjugado complejo de la función de onda. El conjugado complejo de una función se obtiene sustituyendo cada ocurrencia de $i = \sqrt{-1}$ en esa función con $-i$. Este procedimiento elimina los números complejos en todas las prediccion porque el producto $\Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)$ es siempre un número real.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.1

Si $a = 3 + 4i$, ¿cuál es el producto $a^* a$?

Consideremos el movimiento de una partícula libre que se mueve a lo largo de la dirección de la *x*. Como su nombre indica, una partícula libre no experimenta ninguna fuerza y, por tanto, se mueve con una velocidad constante. Como veremos en una sección posterior de este capítulo, un tratamiento mecánico cuántico formal de una partícula libre indica que su función de onda tiene partes reales *y* complejas. En particular, la función de onda viene dada por

$$\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + iA\,\mathrm{sen}(kx - \omega t),$$

donde *A* es la amplitud, *k* es el número de onda y ω es la frecuencia angular. Usando la fórmula de Euler, $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\,\mathrm{sen}(\phi)$, esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{i\phi},$$

donde ϕ es el ángulo de fase. Si la función de onda varía lentamente en el intervalo Δx, la probabilidad de encontrar la partícula ese intervalo es

$$P(x, x+\Delta x) \approx \Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)\,\Delta x = \left(Ae^{i\phi}\right)\left(A^* e^{-i\phi}\right)\Delta x = (A^* A)\Delta x.$$

Si *A* tiene partes reales y complejas $(a + ib$, donde *a* y *b* son constantes reales), entonces

$$A^* A = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2.$$

Observe que los números complejos han desaparecido. Así,

$$P(x, x+\Delta x) \approx |A|^2 \Delta x$$

es una cantidad real. La interpretación de $\Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)$ como densidad de probabilidad garantiza que las predicciones de la mecánica cuántica puedan comprobarse en el "mundo real".

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.2

Supongamos que una partícula con energía *E* se mueve a lo largo del eje de la *x*y está confinada en la región entre 0 y *L*. Una posible función de onda es

$$\psi(x,t) = \begin{cases} Ae^{-iEt/\hbar}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{L}, & \text{cuando } 0 \le x \le L \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}.$$

Determine la constante de normalización.

Valores esperados

En la mecánica clásica, la solución de una ecuación de movimiento es una función de una cantidad medible, como *x*(*t*), donde *x* e la posición y *t* es el tiempo. Observe que la partícula tiene un solo valor de posición para cualquier tiempo *t*. Sin embargo, en la mecánica cuántica, la solución de una ecuación de movimiento es una función de onda, $\Psi\left(x,t\right)$. La partícula tiene muchos valores de posición para cualquier tiempo *t*, y solo la densidad de probabilidad de encontrar la partícula, $\left|\Psi(x,t)\right|^2$, puede conocerse. Se espera que el valor promedio de la posición para un gran número de partículas con la misma función de onda sea

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} xP\left(x,t\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x\Psi^*\left(x,t\right)\Psi\left(x,t\right)dx. \tag{7.6}$$

Esto se denomina **valor esperado** de la posición. Normalmente se escribe

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(x,t\right)x\Psi\left(x,t\right)dx, \tag{7.7}$$

donde la *x* está intercalada entre las funciones de onda. La razón de esto se hará evidente pronto. Formalmente, la *x* se llama el **operador de posición**.

En este punto, es importante destacar que una función de onda puede escribirse también en términos de otras cantidades, como velocidad (*v*), el momento(*p*) y la energía cinética (*K*). El valor esperado del momento, por ejemplo, puede escribirse

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(p,t\right)p\Psi\left(p,t\right)dp, \tag{7.8}$$

Donde *dp* se utiliza en lugar de *dx* para indicar un intervalo infinitesimal en el momento. En algunos casos, conocemos la función de onda en posición, $\Psi\left(x,t\right)$, pero buscamos la expectativa del momento. El procedimiento para hacerlo es

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\left(x,t\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\Psi\left(x,t\right)dx, \tag{7.9}$$

donde la cantidad entre paréntesis, intercalada entre las funciones de onda, se denomina **operador de momento** en la *dirección de la x*. [Se dice que el operador de momento en la Ecuación 7.9 es la representación de la posición en el espacio del operador de momento] El operador de momento debe actuar (operar) sobre la función de onda de la derecha, y luego el resultado debe multiplicarse por el conjugado complejo de la función de onda de la izquierda, antes de la integración. El operador de momento e la dirección de la *x* se denota a veces como

$$\left(p_x\right)_{\text{op}}=-i\hbar\frac{d}{dx}, \tag{7.1}$$

Los operadores de momento para las direcciones de la *y* y la *z* se definen de forma similar. Este operador y muchos otros se derivan en un curso más avanzado de física moderna. En algunos casos, esta derivación es relativamente sencilla. Por ejemplo, e operador de energía cinética es simplemente

7.1

$$(K)_{\text{op}} = \frac{1}{2}m(v_x)^2_{\text{op}} = \frac{(p_x)^2_{\text{op}}}{2m} = \frac{\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d}{dx}\right).$$

Así, si buscamos el valor esperado de la energía cinética de una partícula en una dimensión, se requieren dos derivadas ordinarias sucesivas de la función de onda antes de la integración.

Los cálculos del valor esperado suelen simplificarse aprovechando la simetría de las funciones de onda. Las funciones de onda simétricas pueden ser pares o impares. Una **función par** es una función que satisface

$$\psi(x) = \psi(-x). \qquad \text{7.1}$$

En cambio, una **función impar** es la que satisface

$$\psi(x) = -\psi(-x). \qquad \text{7.1}$$

Un ejemplo de funciones pares e impares se muestra en la Figura 7.8. Una función par es simétrica con respecto al eje de la *y*. Es función se produce al reflejar $\psi(x)$ para $x > 0$ sobre el eje vertical de la *y*. Por comparación, una función impar se genera reflejand la función sobre el eje de la *y* y luego sobre el eje de la *x*. (Una función impar también se denomina **función antisimétrica**).

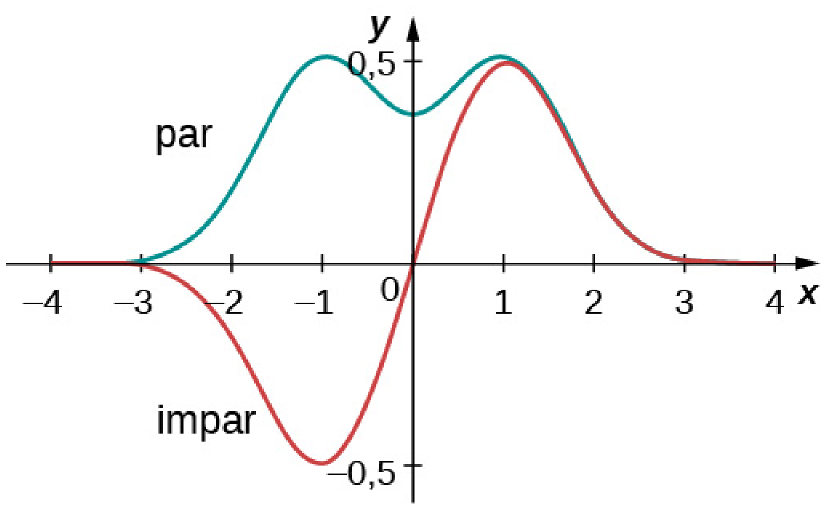

Figura 7.8 Ejemplos de funciones de onda pares e impares.

En general, una función par por una función par produce una función par. Un ejemplo sencillo de función par es el producto x^2e^{-} (el par por par da par). Del mismo modo, una función impar por una función impar produce una función par, como *x* sen *x* (impar por impar es par). Sin embargo, una función impar por una función par produce una función impar, como xe^{-x^2} (impar por par da impar). La integral de todo el espacio de una función impar es cero, porque el área total de la función por encima del eje de la *x* anula el área (negativa) por debajo. Como muestra el siguiente ejemplo, esta propiedad de las funciones impares es muy útil.

EJEMPLO 7.3

Valor esperado (Parte I)

La función de onda normalizada de una partícula es

$$\psi(x) = e^{-|x|/x_0}/\sqrt{x_0}.$$

Encuentre el valor esperado de la posición.

Estrategia

Sustituya la función de onda en la Ecuación 7.7 y evalúe. El operador de posición solo introduce un factor multiplicativo, por lo que no es necesario "intercalar" el operador de posición.

Solución

Primero multiplique, luego integre:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \left| \frac{e^{-|x|/x_0}}{\sqrt{x_0}} \right|^2 = \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x e^{-2|x|/x_0} = 0.$$

Importancia

La función en el integrando $\left(xe^{-2|x|/x_0}\right)$ es impar ya que es el producto de una función impar (*x*) y una función par $\left(e^{-2|x|/x_0}\right)$. La integral desaparece porque el área total de la función alrededor del eje de la *x* anula el área (negativa) por debajo de él. El resultado $(\langle x \rangle = 0)$ no es sorprendente ya que la función de densidad de probabilidad es simétrica respecto a $x = 0$.

EJEMPLO 7.4

Valor esperado (Parte II)

La función de onda dependiente del tiempo de una partícula confinada en una región entre 0 y *L* es

$$\psi(x,t) = Ae^{-i\omega t}\text{sen}(\pi x/L)$$

donde *ω* es la frecuencia angular y *E* es la energía de la partícula. (*Nota:* La función varía como un seno debido a los límites (0 a *L*). Cuando $x = 0$, el factor sinusoidal es cero y la función de onda es cero, en consonancia con las condiciones de frontera). Calcule los valores esperados de posición, momento y energía cinética.

Estrategia

Primero debemos normalizar la función de onda para encontrar *A*. Luego usamos los operadores para calcular los valores esperados.

Solución

Cálculo de la constante de normalización:

$$1 = \int_0^L dx \psi^*(x)\psi(x) = \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}\right)\left(Ae^{-i\omega t}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}\right) = A^2 \int_0^L dx\,\text{sen}^2\frac{\pi x}{L} = A^2\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

El valor esperado de la posición es

$$\langle x \rangle = \int_0^L dx \psi^*(x) x \psi(x) = \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}\right) x \left(Ae^{-i\omega t}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}\right) = A^2 \int_0^L dx x\,\text{sen}^2\frac{\pi x}{L} = A^2\frac{L^2}{4} = \frac{L}{2}.$$

El valor esperado del momento en la dirección de la *x* también requiere una integral. Para establecer esta integral, el operador asociado debe, por regla general, actuar a la derecha sobre la función de onda $\psi(x)$:

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}Ae^{-i\omega t}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L} = -i\frac{Ah}{2L}e^{-i\omega t}\cos\frac{\pi x}{L}.$$

Por lo tanto, el valor esperado del momento es

$$\langle p\rangle = \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}\right)\left(-i\frac{Ah}{2L}e^{-i\omega t} \cos \frac{\pi x}{L}\right) = -i\frac{A^2 h}{4L}\int_0^L dx \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} = 0.$$

La función en la integral es una función senoidal con una longitud de onda igual a la anchura del pozo, *L*, una función impar de $x = L/2$. Como resultado, la integral desaparece.

El valor esperado de la energía cinética en la dirección *x*requiere que el operador asociado actúe sobre la función de onda:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}Ae^{-i\omega t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} = -\frac{\hbar^2}{2m}Ae^{-i\omega t}\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} = \frac{Ah^2}{8mL^2}e^{-i\omega t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}.$$

Por lo tanto, el valor esperado de la energía cinética es

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= \int_0^L dx \left(Ae^{+i\omega t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}\right)\left(\frac{Ah^2}{8mL^2}e^{-i\omega t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{A^2h^2}{8mL^2}\int_0^L dx \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{L} = \frac{A^2h^2}{8mL^2}\frac{L}{2} = \frac{h^2}{8mL^2}.\end{aligned}$$

Importancia

La posición media de un gran número de partículas en este estado es *L*/2. El momento medio de estas partículas es cero porque una partícula dada tiene la misma probabilidad de moverse a la derecha o a la izquierda. Sin embargo, la partícula no está en reposo porque su energía cinética media no es cero. Finalmente, la densidad de probabilidad es

$$|\psi|^2 = (2/L)\operatorname{sen}^2(\pi x/L).$$

Esta densidad de probabilidad es mayor en la ubicación *L*/2 y es cero en $x = 0$ y en $x = L$. Observe que estas conclusiones no dependen explícitamente del tiempo.

COMPRUEBE LO APRENDIDO 7.3

Para la partícula del ejemplo anterior, encuentre la probabilidad de situarla entre las posiciones 0 y *L*/4

La mecánica cuántica hace muchas predicciones sorprendentes. Sin embargo, en 1920, Niels Bohr (fundador del Instituto Niels Bohr de Copenhague, de donde procede el término "interpretación de Copenhague") afirmó que las predicciones de la mecánica cuántica y la mecánica clásica deben coincidir para todos los sistemas macroscópicos, como los planetas en órbita, las pelotas que rebotan, las mecedoras y los resortes. Este **principio de correspondencia** es ahora generalmente aceptado. Sugiere que las reglas de la mecánica clásica son una aproximación de las reglas de la mecánica cuántica para sistemas con energías muy grandes. La mecánica cuántica describe tanto el mundo microscópico como el macroscópico, pero la mecánica clásica solo