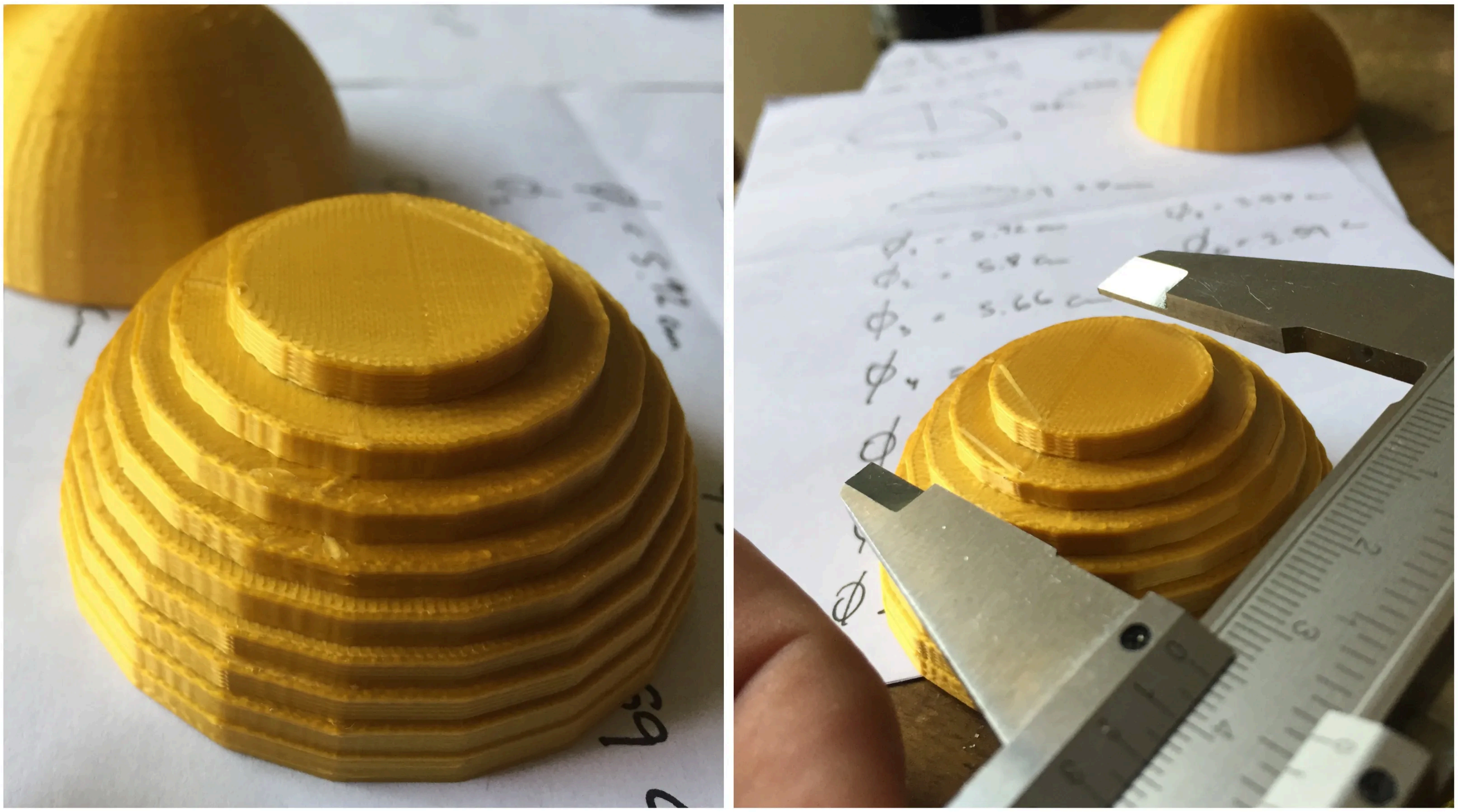


Descubriendo la integral (y de paso PI)

y de paso cosas del pensamiento matemático

Tomas de Camino Beck · Follow

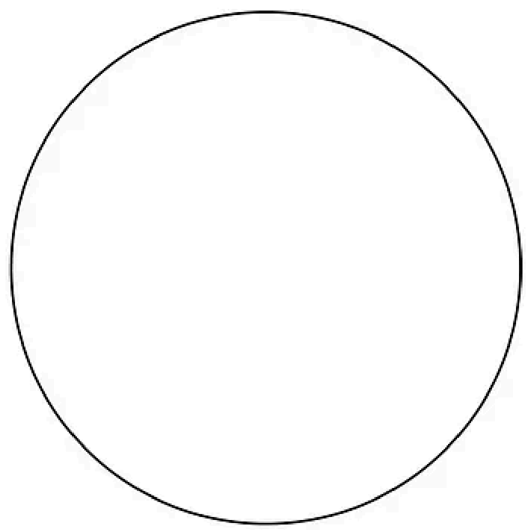
12 min read · Aug 20, 2017

Una de las maneras de cambiar la enseñanza de las matemáticas es comenzar de inmediato. No se trata de simplemente hacer aplicaciones, sino más bien de crear situaciones donde se pueden descubrir aspectos fundamentales de las matemáticas, y así, aparte de aprender, que el estudiante tenga una sensación de que es capaz de descubrir conceptos profundos por su cuenta, de pensar como Newton.

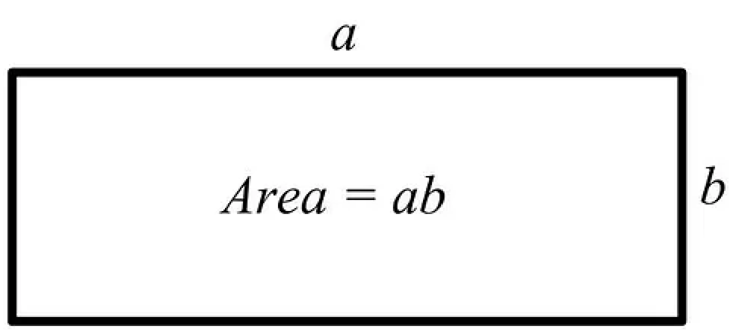
Para mostrar un ejemplo, voy a tomar el tema de cálculo integral. Hagamos un ejercicio directamente, y al final voy a describir cada elemento en el proceso, que creo será útil para instructores.

¿Cómo calculo el área de un círculo?

Supongamos que queremos calcular el área de un circulo como este:



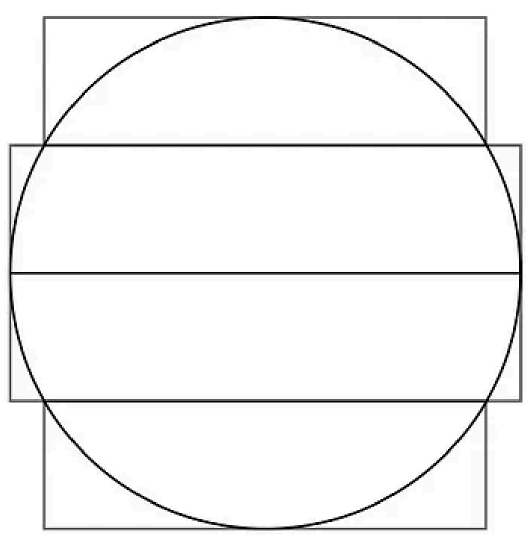
Supongamos además, que no conocemos mucho de los círculos (y que no pueden buscar la fórmula en Google), lo que si conocemos bien son los cuadrados y rectángulos. Todas las civilizaciones antiguas lograron rápidamente trabajar con cuadrados y rectángulos antes de los círculos, así que nosotros también. La forma de calcular el área de un rectángulo es directa:



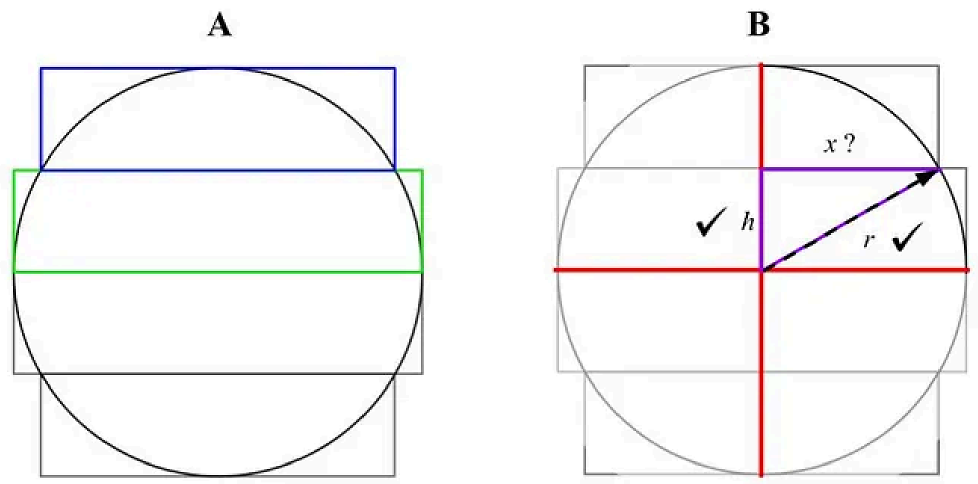
Con multiplicar lado por lado lo tenemos. La razón por la cual el área de un cuadrado es simple, es porque si escogemos un cuadrado como unidad básica (cuadrado unitario), podemos construir cualquier otro cuadrado o rectángulo agregando filas y columnas de cuadrados unitarios, y el “área” sería simplemente multiplicar el numero de filas y columnas de cuadrados unitarios, algo como esto,

De allí que es “intuitivo” usar cuadrados y rectángulos, para tratar de resolver problemas de área de otras figuras geométricas.

¿Nos servirán rectángulos para calcular el área de un círculo?, claro que si. Re-dibujemos el circulo con rectángulos y hagamos algo como esto:



Para calcular el área entonces, simplemente sumamos el área de los cuatro rectángulos, que en realidad son dos repetidos dos veces. Ocupamos ahora saber el largo de los lados de cada rectángulo. Decidimos dividir el círculo en 4 rectángulos,



Como se ve en la imagen **A**, concentrémonos en dos rectángulos. El primero, el verde, el largo de un lado es igual al diámetro, y el del segundo lado que vamos a llamar *h* (altura), es el diámetro dividido entre 4 (al meter 4 rectángulos en el círculo), o lo que es lo mismo, el radio dividido entre 2. Ahora si tratamos de meter mas rectángulos, entonces podemos generalizar la altura de *h*, de la siguiente manera,

$$h = \frac{r}{n}$$

En el ejemplo *n*=2. El área del rectángulo verde es entonces la altura h por el radio r (estamos viendo sólo el cuarto del círculo para facilitar las cosas). Para el rectángulo azul, no lo tenemos directamente, sin embargo podemos calcularlo. Como se ve en **B**, tenemos el radio *r* y *h*, ahora necesitamos calcular *x*. Lo bueno es que se forma un triángulo rectángulo, entonces podemos aplicar Pitágoras para calcular el largo del lado *x*,

$$r^2 = x^2 + h^2$$

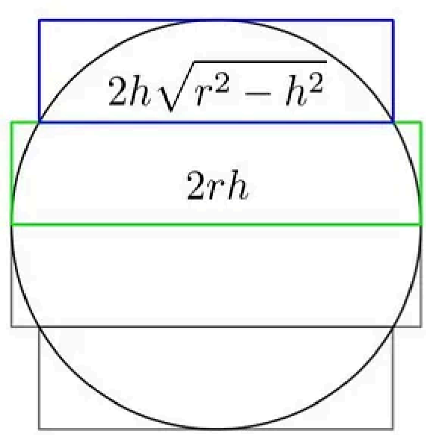
Entonces,

$$x = \sqrt{r^2 - h^2}$$

Vamos por buen camino. El área del rectángulo azul sería el lado *x*, multiplicado por *h*, es decir,

$$h\sqrt{r^2 - h^2}$$

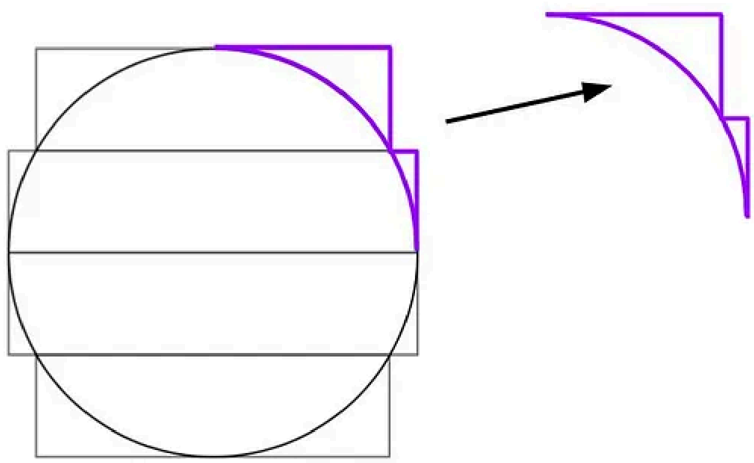
Ahora tenemos entonces las áreas de los rectángulos,



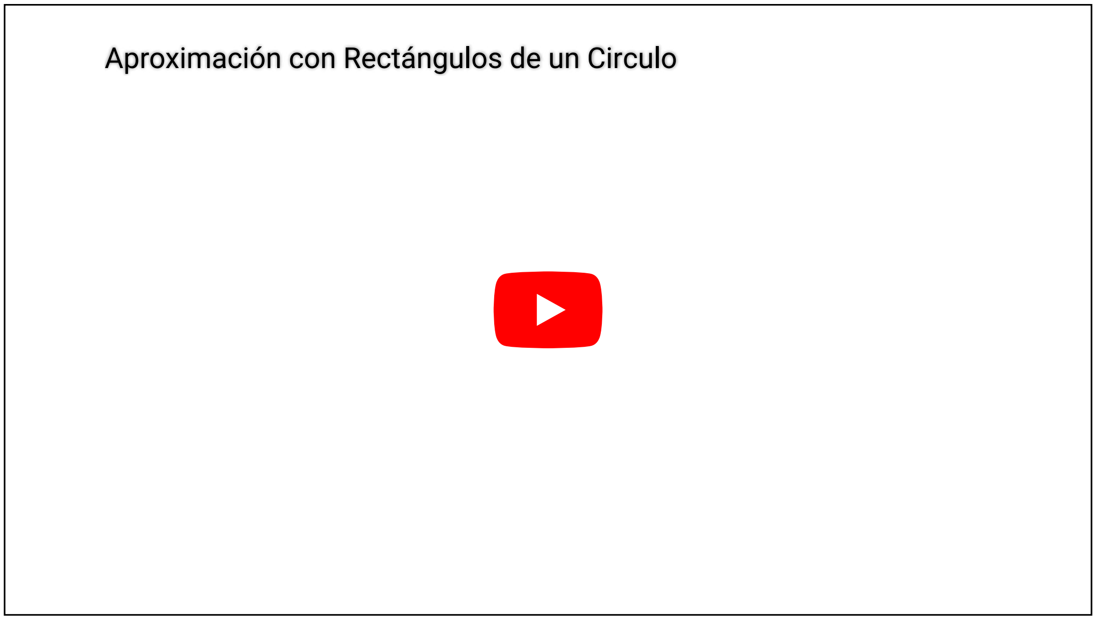
El área total entonces sería,

$$2(2h\sqrt{r^2 - h^2} + 2rh)$$

¡Listo! Bueno, nuestra primera aproximación no es tan buena. De hecho podemos ver que nuestros rectángulos sobreestiman el área, sobran unos pedazos bastante grandes,



¿Qué tal si tratamos de colocar cada vez más rectángulos?, En principio, si los hacemos más pequeños, habrá cada vez menos “retazos”. Lo que hay que cambiar es el número de rectángulos que acomodamos haciéndolos de menor altura como se ve en el siguiente video que preparé,

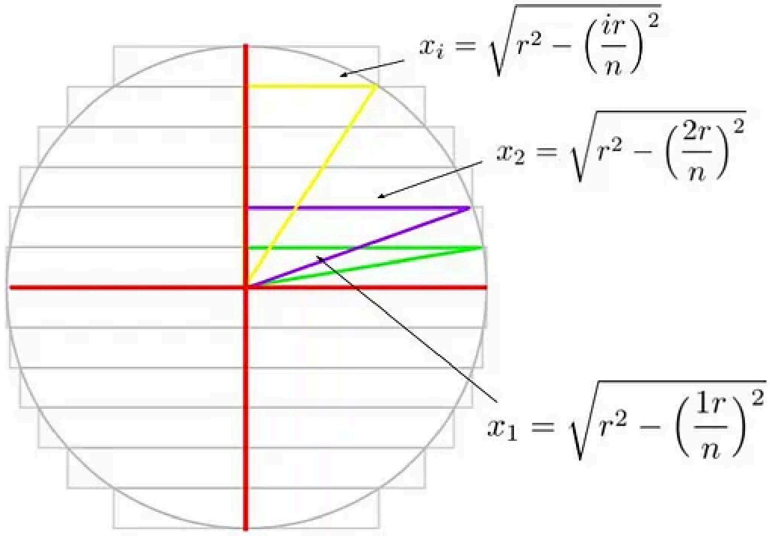


Lo que tenemos es que generalizar lo que hicimos inicalmente en nuestras fórmulas, para cuando tengamos más rectángulos, es decir vamos a generalizar un poco más el resultado.

Generalización

De lo anterior necesitamos un resultado más general, algo que nos permita obtener una fórmula para n rectángulos, de tal manera que el área sea simplemente la suma de las áreas de los n rectángulos como se ve en el video.

Lo que hicimos anteriormente se puede decir que es el paso base, es como la prueba de la idea, una primera aproximación. La intuición nos dice que tiene sentido dividir el área en rectángulos cada vez más pequeños para aproximar mejor el círculo. Partamos de una división arbitraria de n rectángulos, y utilizando lo que ya sabemos de cómo calcular el lado del rectángulo , nuestro círculo se vería algo como esto,



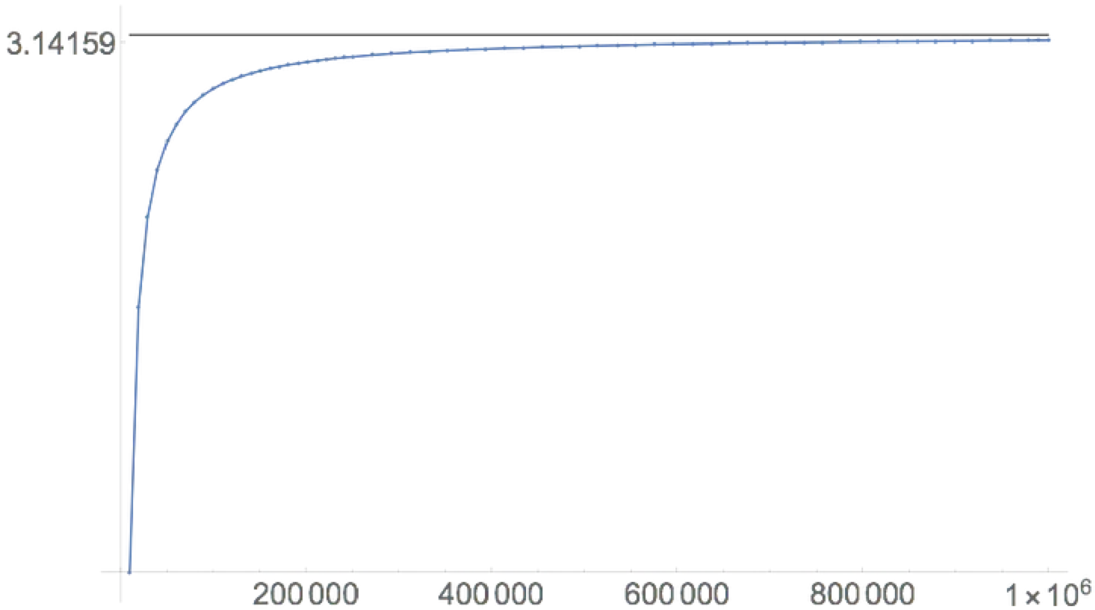
Ahora el área del círculo es la suma de áreas de los rectángulos, calculamos *x* como lo hicimos antes y es uno de los lados, y *h* o *r/n* es el otro lado. Vean que el área es una suma de todos los rectángulos. Entonces tenemos,

$$4\frac{r}{n}\left[\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{3r}{n}\right)^2} + \ldots + \sqrt{r^2 - \left(\frac{nr}{n}\right)^2}\right]$$

Cada término de la suma corresponde a los lados de los rectángulos desde el centro hacia arriba, y el primer término *r/n* corresponde a la altura *h* (que es igual para todos). Se multiplica por 4 pues estábamos trabajando con un cuarto de círculo. Aplicamos un poco de álgebra y acomodamos un poco los términos de la fórmula y obtenemos la siguiente fórmula,

$$r^2 \underbrace{\left[\frac{4}{n}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{n}\right)^2} + \ldots + \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)\right]}_{\mathbf{A}}$$

Noten el termino marcado, que ahora llamaremos **A**. Si hacemos un gráfico donde hacemos cada vez más grande *n* obtenemos,



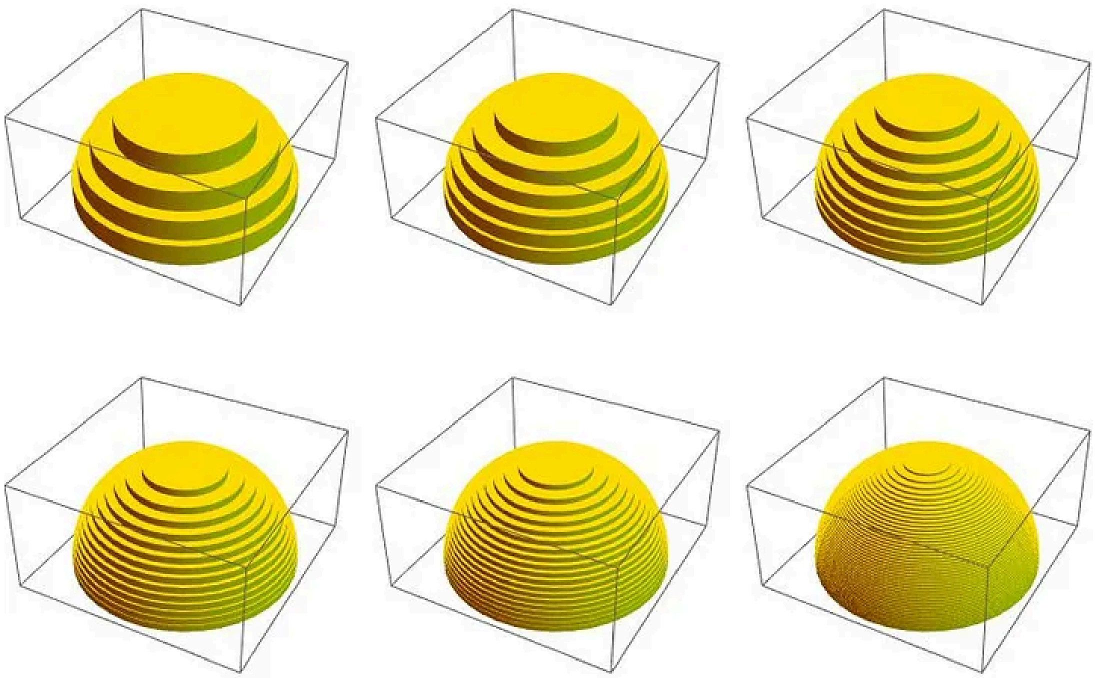
En el gráfico, en el eje horizontal cambiamos el valor de *n* desde 1 hasta un millón. ¿Qué pasa con el eje vertical? notan que el valor se aproxima cada vez más a 3.14159... ¿Qué número es ese? si, es el famoso **Pi**. Es decir al tratar de resolver con rectángulos el área de un círculo, y mientras más rectángulos tengamos, *n* se acerca a infinito, entonces el término **A** se hace igual a **Pi**. Dicho de otro modo,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}r^2 = \pi r^2$$

¡Que es precisamente la fórmula de el área de un círculo! No se ustedes, pero estas cosas a mi me emocionan. De hecho **A** es una serie que permite calcular **Pi**, y acabamos de derivar la fórmula del área de un círculo. En pocas palabras, sin saber nada de círculos, y solamente conocer de rectángulos y Pitágoras, fuimos capaces de descubrir Pi. Además nos damos cuenta de algo más general, podemos aproximar una curva utilizando rectángulos.

Ahora la esfera

Resulta que para aplicar lo mismo a un volumen es prácticamente igual. Voy a tratar de construir una esfera utilizando el mismo concepto de arriba, pero ahora en lugar de rectángulos, son cilindros. De esa manera, podemos aproximar una esfera con "discos" o cilindros cada vez más pequeños, como se ve en la siguiente figura,



La forma de llegar a la fórmula es muy similar, y se puede utilizar las misma metodología.

En este caso lo que medimos es el volumen. El volumen de un cilindro es,

$$V = \pi r^2 h$$

Noten como es el área de un círculo, multiplicado por la altura h. Del mismo modo que con los rectángulos, y como se ve en la figura, podemos colocar tantos cilindros como queramos, y entre más utilicemos para construir la esfera, mejor será nuestra aproximación.

El radio de cada cilindro, que vamos a llamar x, de hecho lo calculamos exactamente igual a lo que hicimos antes. Recuerden que obtuvimos esta fórmula para calcular el largo del lado del rectángulo, que ahora es el radio de nuestro cilindro,

$$x_i = \sqrt{r^2 - \left(\frac{ir}{n}\right)^2}$$

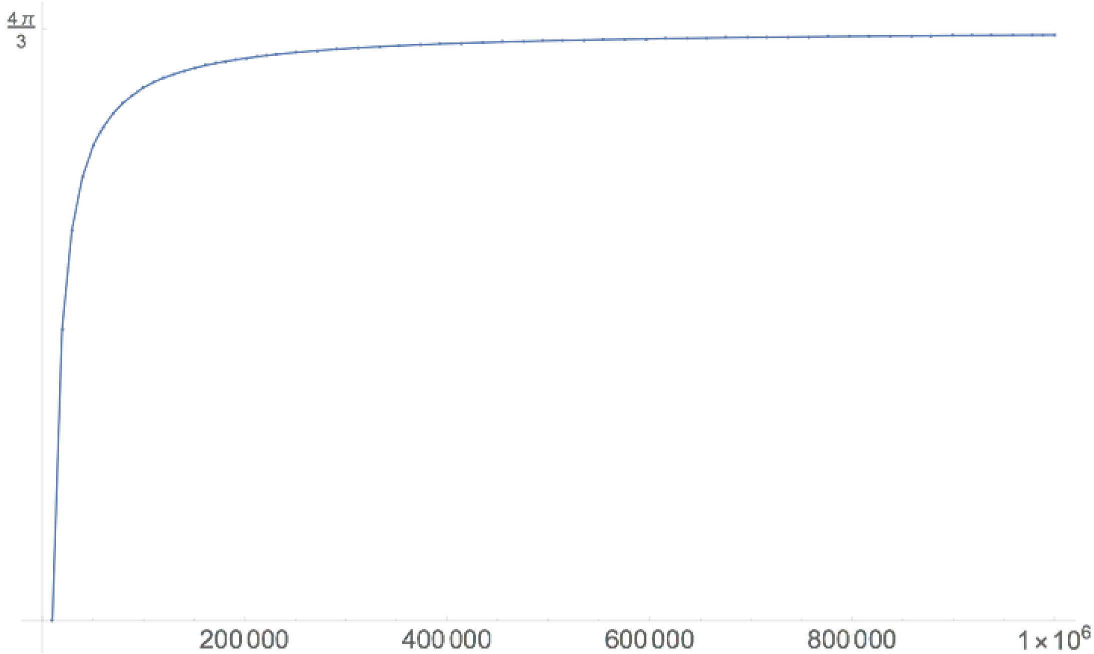
Donde r, es ahora el radio de la esfera, y tenemos n cilindros con i entre 1 y n. Sumamos todos los volúmenes de los n cilindros y obtenemos,

$$\underbrace{\pi \left[\overbrace{r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}^{\substack{\text{Radio del cilindro}\\ \text{(al cuadrado)}}}\right] \overbrace{\frac{r}{n}}^{\text{Altura del cilindro}}}_{\text{Volumen cilindro 1}} + \underbrace{\pi \left[r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2\right] \frac{r}{n}}_{\text{Volumen cilindro 2}} + \underbrace{\pi \left[r^2 - \left(\frac{3r}{n}\right)^2\right] \frac{r}{n}}_{\text{Volumen cilindro 3}} + \ldots + \underbrace{\pi \left[r^2 - \left(\frac{nr}{n}\right)^2\right] \frac{r}{n}}_{\text{Volumen cilindro } n}$$

Con esto tenemos el volumen de **media esfera**, así que lo tenemos que hacer es multiplicar todo por 2. Haciendo eso y con un poco de álgebra y factorizando **Pi** y r, esto se puede acomodar,

$$\pi r^3 \frac{2}{n}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^2+1-\left(\frac{2}{n}\right)^2+1-\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

¡Listo! Si hacemos un gráfico para ver que tan buena es la aproximación con respecto a una esfera de radio 1,



Como ven, al igual que lo anterior, mientras más cilindros utilicemos mejor es la aproximación del volumen, que con la fórmula de volumen debería dar 4/3 **Pi.** De hecho la serie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^2+1-\left(\frac{2}{n}\right)^2+1-\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]=\frac{4}{3}$$

Lo cual nos lleva a la formula del volumen de una esfera,

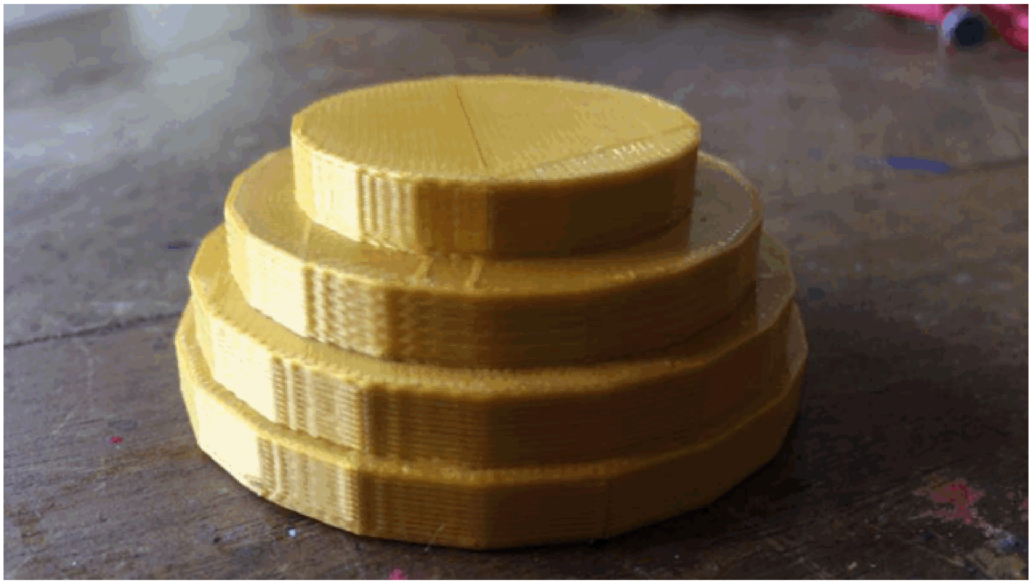
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Existen otras maneras de estimar el volumen, incluso de derivar de forma exacta la fórmula de volumen, como en este video, o este otro. Acá además podríamos derivar la fórmula de el volumen, integrando sobre los cilindros, pero eso se los dejo a ustedes, pues hay que saber algo de cálculo integral para hacerlo.

Fabricación Digital

Se puede construir físicamente las aproximaciones de esferas. Para eso, los modelos tridimensionales los convierto a archivos de 3D, los cuales se pueden imprimir con cualquier impresora 3D para obtener algo como esto,

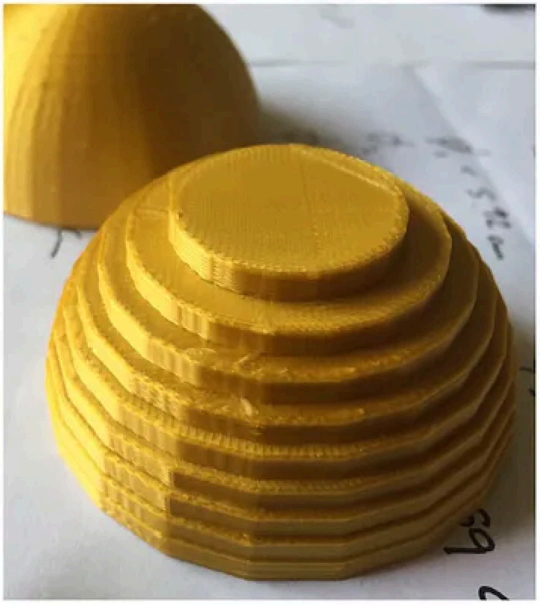
Se ve claramente como nos vamos acercando a la (media) esfera. Para hacerlo más evidente, veamos la animación,



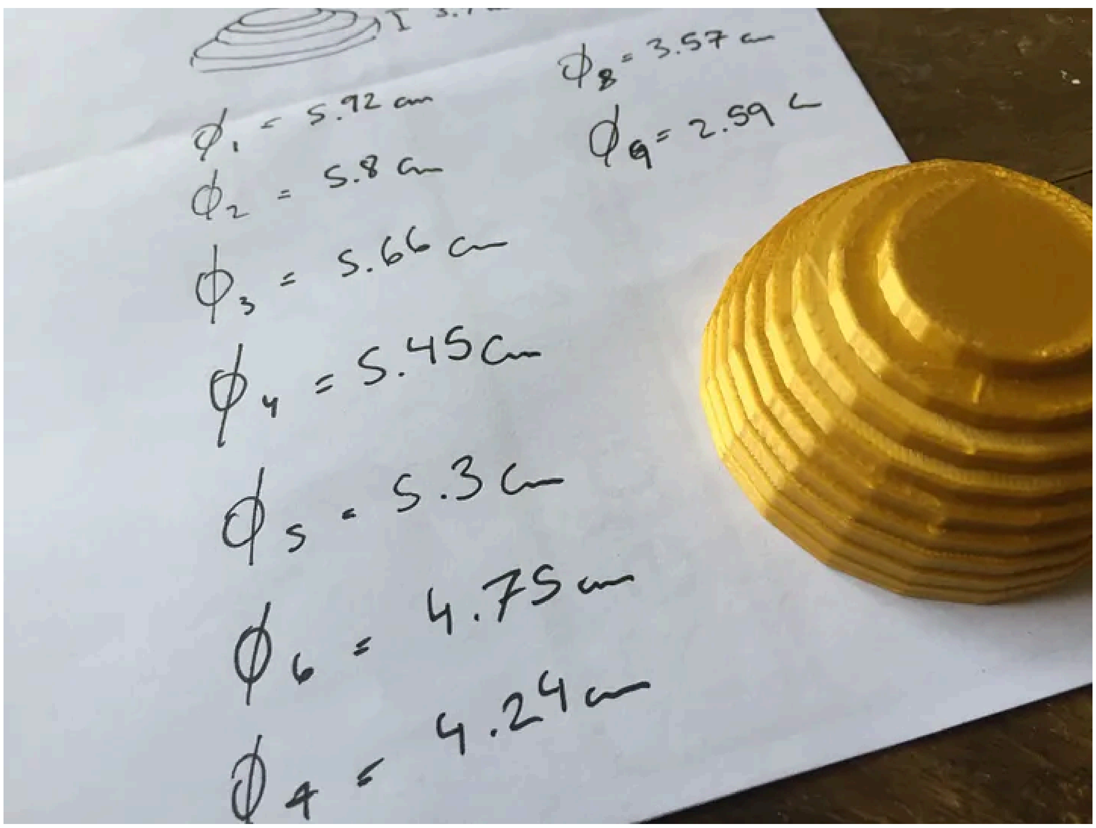
Los archivos digitales de las medias esferas las pueden descargar de mi cuenta en Thingiverse.com.

Ahora bien, vamos a medir los cilindros que forman los modelos aproximados de esfera. Acá voy a comparar el modelo con 6 cilindros, con el de 115 cilindros que construye la impresora 3D (las impresoras 3D van imprimiendo por capas). Al modelo de media esfera de 115 capas solamente voy a medir el radio, para calcular su volumen usando la fórmula, y así tenerlo de referencia. El modelo de media esfera tiene un radio de 3cm lo que nos da un volumen de 113.09 cm cúbicos.

Ahora medimos el radio de los cilindros con un Vernier como se ve en esta foto,



En total son 9 cilindros y sus diámetros son,



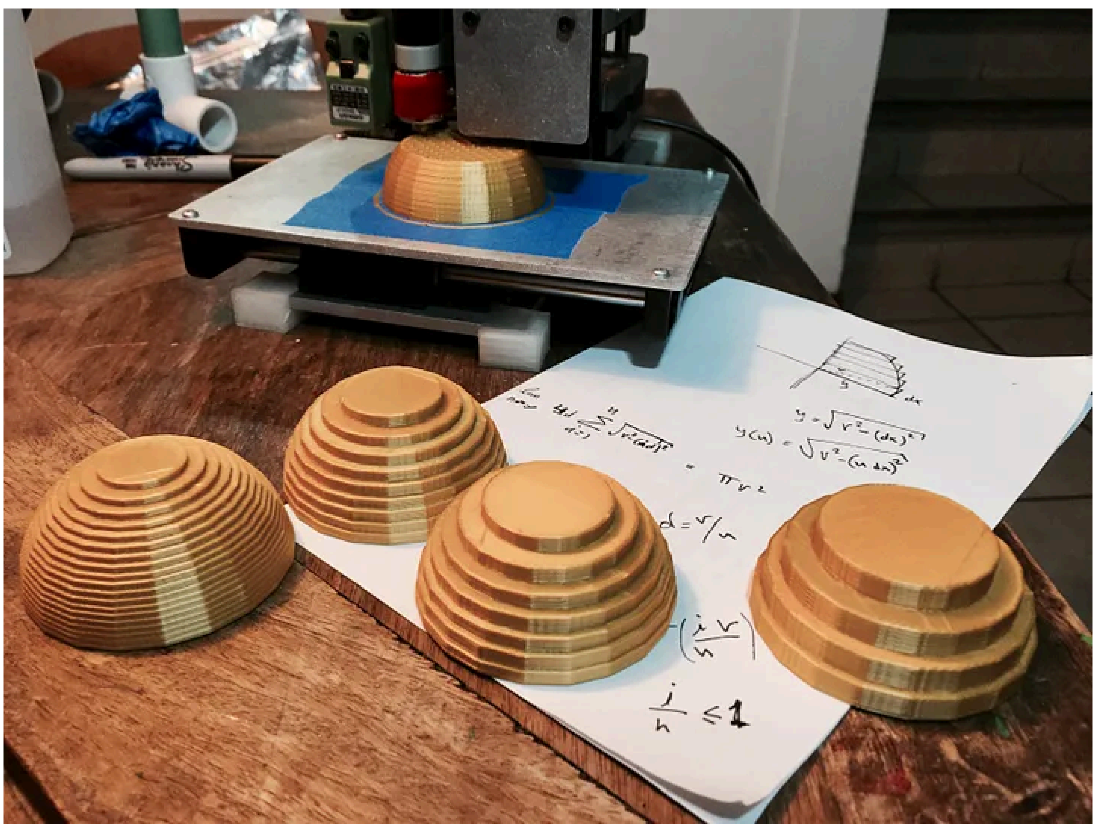
La altura de cada cilindro es de 0,37 cm, ahora es nada más sumar el volumen de cada cilindro,

$$\pi(0.37)\left[\left(\frac{5.92}{2}\right)^2+\left(\frac{5.8}{2}\right)^2+\left(\frac{5.66}{2}\right)^2+\left(\frac{5.45}{2}\right)^2+\left(\frac{5.3}{2}\right)^2+\left(\frac{4.75}{2}\right)^2+\left(\frac{4.24}{2}\right)^2+\left(\frac{3.57}{2}\right)^2+\left(\frac{2.59}{2}\right)^2\right]$$

Lo cual nos da un volumen de 63.5 cm cúbicos, lo cual, como era de esperar, es una considerable subestimación. Pueden repetir el proceso con modelos con más cilindros a ver como les va. Yo lo hice con uno de 30 cilindros y el área aproximada fue de 110.35 cm cúbicos.

Otra forma de hacerlo, es sumergir los modelos en agua en un contenedor marcado, y así se darán cuenta como cada vez se van acercando más al volumen real de una (media) esfera.

La ventaja de crear modelos físicos en 3d de la esfera, es que se pueden medir también con Vernier los cilindros y comparar las medidas de cada modelo. No se que hubieran hecho Arquimides o Liebnitz si hubieran tenido impresoras 3D… bueno, en realidad estarían haciendo lo que nosotros estamos haciendo, fue así precisamente que el cálculo se descubrió, y de hecho varias veces en la historia de las matemáticas.



Comentarios finales

Unas recomendaciones para instructores. La idea es que los estudiantes descubran todo esto solos. Noten además como el procedimiento consiste en:

1. **Replantear el problema**, es decir, pasamos de el área de un círculo a entender el área a través de rectángulos. Pasamos de un dominio desconocido a uno que conocemos y planteamos el problema en esos términos.
2. **Comenzar con el caso simple**. En este caso hicimos un caso muy sencillo de pocos rectángulos. Eso permite ver patrones y entender pasos matemáticos sencillos. Permite visualizar el resultado.
3. **Generalizar**. Una vez entendido el caso simple, se generaliza para aplicarlo a un caso más general. En este ejemplo ya no nos interesaban 2 rectángulos, sino n rectángulos, y por eso aplicamos el mismo procedimiento, pero esta vez pensando en muchos rectángulos
4. **Verificar**. En este caso sabemos que tenemos que llegar a la fórmula del área de un circulo, así que si estamos en lo correcto deberíamos poder llegar a ese resultado

Estas reglas se puede aplicar a la resolución de cualquier problema.

En este ejercicio, estoy evitando de forma deliberada el utilizar directamente conceptos de cálculo integral, exceptuando el concepto de límite. Mi intención es crear la “necesidad” de generalizar, y es allí donde aparecen las integrales y todas las herramientas de cálculo que nos permiten hacer las cosas más rigurosamente y con herramientas bastante prácticas.

Para que los estudiantes disfruten la experiencia, aprender a imprimir las figuras geométricas en 3D, aunque en realidad no es necesario matemáticamente, permite una conexión con algo real, algo tangible. Los matemáticos de la antigüedad tendían incluso a probar cómo se podían construir ciertas figuras geométricas con herramientas como compas y regla. Ahora con impresión 3D, se pueden descubrir varias propiedades topológicas, además de tangibilizar la matemática.

Lo que muestro acá de ninguna manera tiene el rigor necesario para las teorías matemáticas, pero eso no es lo que quiero enseñar. El rigor matemático viene como una necesidad, como un reto cuando se trata de comunicar las ideas con otras personas. Todas las grandes ideas comienzan así, como conceptos, y luego se pueden hacer cada vez más rigurosas, y a veces, si la idea es muy buena, y nosotros no tenemos tiempo, serán otros los que hagan ese trabajo…

La belleza del cálculo, no está en su complejidad sino su simpleza… Y recuerden la matemática es fascinante, no porque se pueden crear cosas complejas, sino por que se puede de-construir en cosas extremadamente simples.

Nada más para terminar ¿Por qué reglas de cálculo?

La ventaja de hacerlo con las herramientas de cálculo es que lo podemos hacer más rápido. Volvamos a pensar en nuestra esfera construida por cilindros, pero ahora en lugar de cilindros, pensemos en esferas, desde una muy pequeña, casi cero en el centro, que va siendo cubierta, como un cebolla, por esferas más grandes hasta la esfera de radio *r*. Piensen en una de esas muñecas rusas (Matrioshka), donde hay una muñeca adentro de otra, si tuviéramos que calcular el volumen, podríamos medir su superficie y el espesor de cada capa, y el volumen sería la suma de todas.

Entonces, el volumen es simplemente la suma de la superficie de cada una de las esferas anidadas, multiplicadas por su grosor. Dicho matemáticamente,

$$\sum_{0}^{r} 4\pi r^2 dr$$

Mientras más delgadas sean las capas, más capas tendremos y más nos acercamos al volumen, es decir, dejamos que *dr* (el groso de cada capa) se acerque cada vez más a cero, y escribimos la integral,

$$4\pi \int_0^r r^2 dr$$

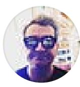
Noten como 4 **Pi**, es constante y sale de la integral. Resolvemos esta integral definida y quedamos con,

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

Que es precisamente la fórmula del volumen de una esfera.

Lo podemos hacer así de rápido, porque tenemos información sobre esferas, y porque utilizamos herramientas de cálculo integral, lo cual definitivamente nos ahorra tiempo. Conocer reglas de derivación e integración, facilita el cómputo de cualquier cosa, así que no está de más aprendérselas, no de memoria, sino en saber donde buscarlas, y luego, cómo y cuando aplicarlas.

STEM Mathematics Education Education Reform



Written by Tomas de Camino Beck

Follow

1K Followers · 540 Following

Professor Math, Computer, Science, Music & Creative Thinking. Fundación Costa Rica para la Innovación

---

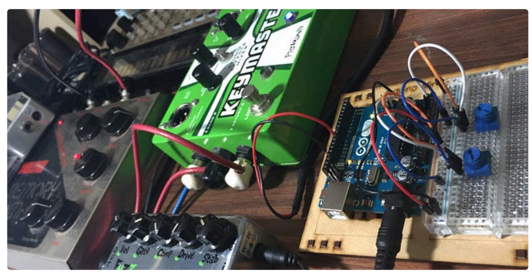
More from Tomas de Camino Beck

Tomas de Camino Beck

El método científico según Richard Feynman

Por allí del 2005 tuve la oportunidad de leer el libro "La Conferencia Perdida de Feynman",...

Sep 6, 2016 4

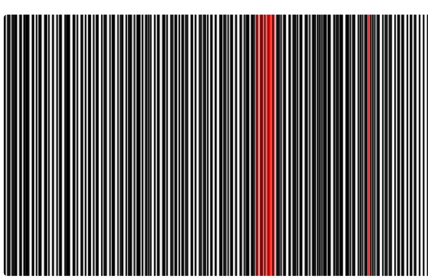


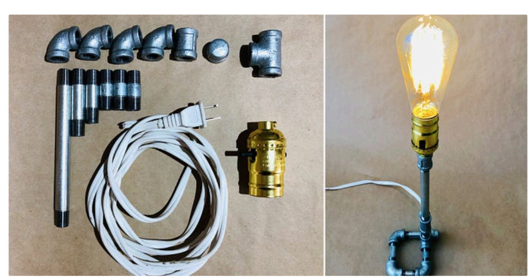
Tomas de Camino Beck

La liberación del lo humano: arte, mate y compu

Con la generación de ruidos y sonido, cualquiera puede experimentar con la...

Mar 13, 2016 6





Tomas de Camino Beck

La matemática de las congestiones de tráfico

Las congestiones de tráfico son una pesadilla para todos, no solamente porque llegamos...

Dec 26, 2016 · 16 · 1

Tomas de Camino Beck

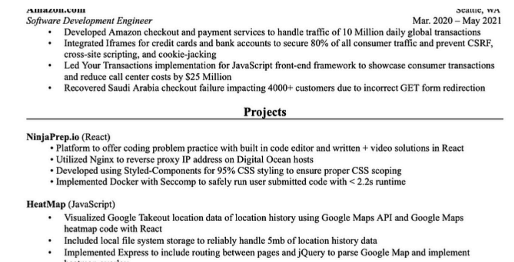
El Nuevo Manifiesto #Maker

El proceso natural de evolución de las tecnologías nos lleva no solamente a más...

Apr 30, 2019 · 8

See all from Tomas de Camino Beck

Recommended from Medium



Software Development Engineer — Mar. 2020 – May 2021

- Developed Amazon checkout and payment services to handle traffic of 10 Million daily global transactions
- Integrated Iframes for credit cards and bank accounts to secure 80% of all consumer traffic and prevent CSRF, cross-site scripting, and cookie-jacking
- Led Your Transactions implementation for JavaScript front-end framework to showcase consumer transactions and reduce call center costs by $25 Million
- Recovered Saudi Arabia checkout failure impacting 4000+ customers due to incorrect GET form redirection

Projects

NinjaPrep.io (React)

- Platform to offer coding problem practice with built in code editor and written + video solutions in React
- Utilized Nginx to reverse proxy IP address on Digital Ocean hosts
- Developed using Styled-Components for 95% CSS styling to ensure proper CSS scoping
- Implemented Docker with Seccomp to safely run user submitted code with < 2.2s runtime

HeatMap (JavaScript)

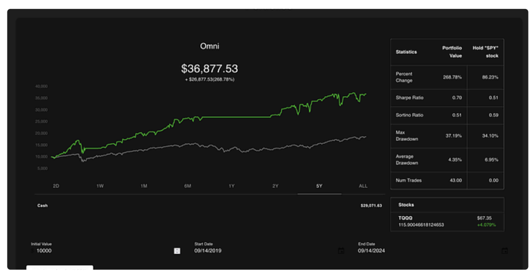
- Visualized Google Takeout location data of location history using Google Maps API and Google Maps heatmap code with React
- Included local file system storage to reliably handle 5mb of location history data
- Implemented Express to include routing between pages and jQuery to parse Google Map and implement heatmap overlay

In Level Up Coding by Alexander Nguyen

The resume that got a software engineer a $300,000 job at Google.

1-page. Well-formatted.

Jun 1 · 25K · 502



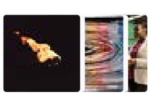
In DataDrivenInvestor by Austin Starks

I used OpenAI's o1 model to develop a trading strategy. It is...

It literally took one try. I was shocked.

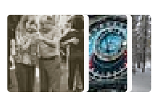
Sep 15 · 5.9K · 150

Lists



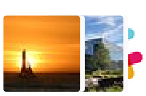
How to Find a Mentor

11 stories · 736 saves



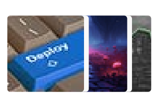
Stories to Help You Live Better

22 stories · 3407 saves



Stories to Help You Level-Up at Work

19 stories · 863 saves



Predictive Modeling w/ Python

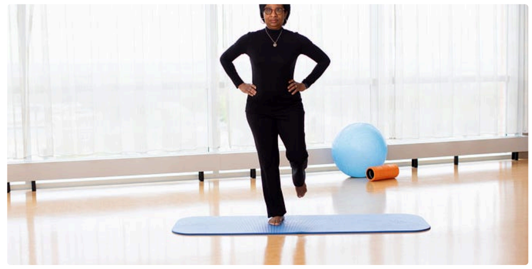
20 stories · 1662 saves

In Stackademic by Abdur Rahman

Python is No More The King of Data Science

5 Reasons Why Python is Losing Its Crown

Oct 22 5.5K 24



F. Perry Wilson, MD MSCE

How Old Is Your Body? Stand On One Leg and Find Out

According to new research, the time you can stand on one leg is the best marker of...

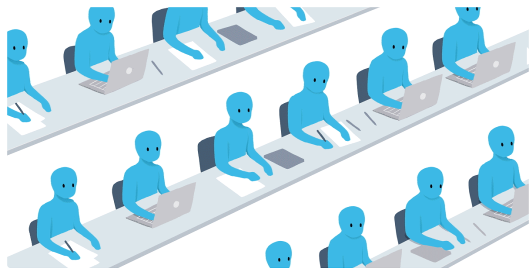
Oct 23 11.5K 244

Mark Manson

40 Life Lessons I Know at 40 (That I Wish I Knew at 20)

Today is my 40th birthday.

Sep 23 25K 553



In Human Parts by Devon Price

Laziness Does Not Exist

Psychological research is clear: when people procrastinate, there's usually a good reason

Mar 23, 2018 331K 1795

See more recommendations