Ecuaciones diferenciales Parciales
Introducción

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

8 de julio de 2025

Contenido

¿Qué son las EDPs?

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) son ecuaciones que involucran derivadas parciales de una función desconocida con dos o más variables independientes.

- Aparecen en diversos campos: física, ingeniería, finanzas, biología
- Ejemplos clásicos: ecuación del calor, ecuación de onda, ecuación de Laplace
- Python ofrece herramientas poderosas para resolverlas numéricamente

Definiendo la ecuaciones diferencia parciales (Partial Differential Ecuacions PDE) de segundo orden en su forma canonica, se tiene

$$A\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + D\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + E\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = G(x,y)$$

TABLA 1: Clasifican las PDE Lineales de Segundo Orden con dos Variables

$B^2 - 4AC$	Categoría	Ejemplo
< 0	Elíptica	Ecuación de Laplace (estado estacionario con dos dimensiones espaciales) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$
$= 0$	Parabólica	Ecuación de conducción de calor (variable de tiempo y una dimensión espacial) $\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$
> 0	Hiperbólica	Ecuación de onda (variable de tiempo y una dimensión espacial) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$

Tipo	**Ecuación**	**Comportamiento**
Parabólica	Ecuación del Calor	Difusión
Hiperbólica	Ecuación de Onda	Oscilación
Elíptica	Ecuación de Laplace	Estado estacionario

Cuadro: Clasificación de PDEs lineales

Ejemplos

- Ecuación Parabólica

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \textbf{Ecuación de Difusión}$$

- Ecuación Elíplica

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{Ecuación de Laplace}$$

- Ecuación Hiperbólica
  - Ecuación Hiperbólica de primer orden

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \textbf{Ecuación de Advección}$$

  - Ecuación Hiperbólica de segundo orden

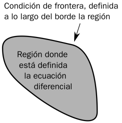
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \textbf{Ecuación de la Onda}$$

Condiciones de Frontera (C.F.)

Las condiciones de frontera o contorno describen cómo se comporta la solución en los límites del dominio espacial, son esenciales para encontrar soluciones únicas a las EDPs.

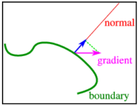
- **Condiciones de Dirichlet:** Cuando especificamos el valor de $U(x,t)$ en el límite. Un ejemplo para una cuerda vibratoria con sus extremos, en $x = 0$ y $x = L$, fijos sería

$$U(0,t) = U_0(t), \quad U(L,t) = U_L(t)$$



- **Condiciones de von Neumann:** La derivada de una función $U(x,t)$ con respecto a x define una cantidad vectorial conocida como gradiente, el cual asigna un vector a cada punto del dominio. Un ejemplo para una cuerda vibratoria con sus extremos, en $x = 0$ y $x = L$, fijos sería

$$\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = U_x(0,t) = g_0(t), \quad \left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = U_x(L,t) = g_L(t)$$

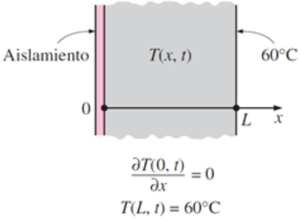


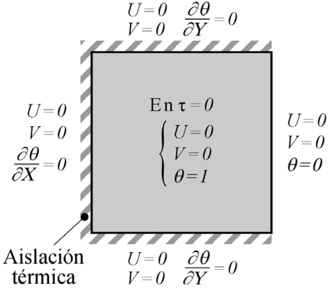
- **Condiciones de Robin o Fourier:** Por supuesto, podemos mezclar las condiciones límite de Dirichlet y von Neumann. Un ejemplo para una cuerda vibratoria con sus extremos, en $x = 0$ y $x = L$, fijos sería

$$U(0,t) + D\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = U_0(t) + \nu U_x(0,t), \quad U(L,t) + D\frac{\partial U(L,t)}{\partial x} = U_L(t) + \nu_x(L,t)$$

En ecuaciones diferenciales parciales (EDP), las condiciones iniciales especifican el estado del sistema en un instante de tiempo inicial (generalmente $t = 0$)

- Son valores conocidos de la función desconocida y/o sus derivadas en un instante inicial específico, usualmente $t = 0$.
- Definen el estado inicial del sistema que evoluciona con el tiempo descrito por la EDP.
- Por ejemplo, en una EDP que describe la propagación del calor, las condiciones iniciales podrían ser la temperatura inicial en cada punto del dominio espacial.

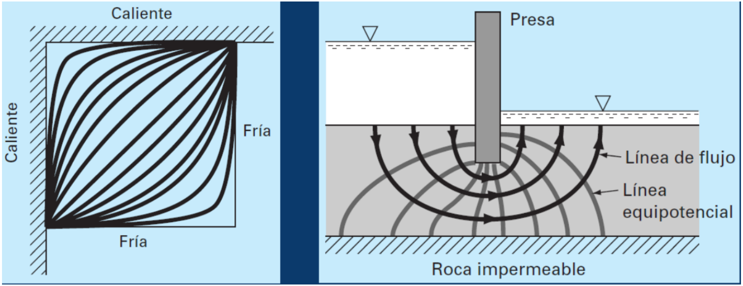




Comúnmente, las **ecuaciones elípticas** se utilizan para caracterizar sistemas en estado estacionario. Como en la ecuación de Laplace (Tabla 1). Esto se indica, por la ausencia de una derivada con respecto al tiempo.

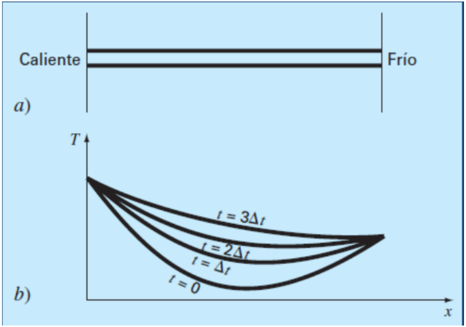
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Así, estas ecuaciones se emplean para determinar la distribución en estado estacionario de una incógnita en dos dimensiones espaciales.



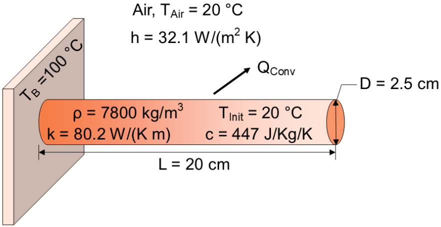
Las **ecuaciones parabólicas** determinan cómo una incógnita varía tanto en el espacio como en el tiempo, lo cual se manifiesta por la presencia de las derivadas espacial y temporal, como la ecuación de conducción de calor (Tabla 1). Tales casos se conocen como problemas de propagación, puesto que la solución se **propaga**, o cambia, con el tiempo.

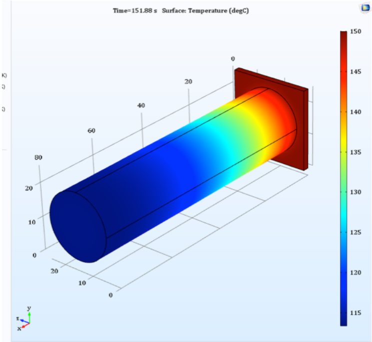
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



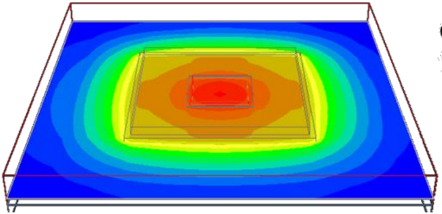
Barra que está aislada, excepto en sus extremos. La dinámica de la distribución unidimensional de temperatura a lo largo de la barra se puede describir mediante una EDP parabólica.

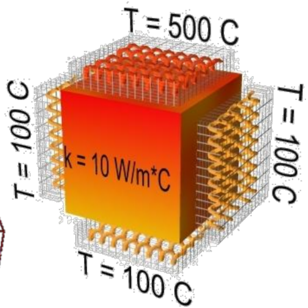
Definición





$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \textbf{Ecuación de Difusión}$$





$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k} q_{gen}$$

Ecuaciones Hiperbolica

La **categoría hiperbólica**, también tiene que ver con problemas de propagación. Sin embargo, una importante diferencia manifestada por la ecuación de onda (Tabla 1), es que la incógnita se caracteriza por una segunda derivada con respecto al tiempo. En consecuencia, la solución oscila.

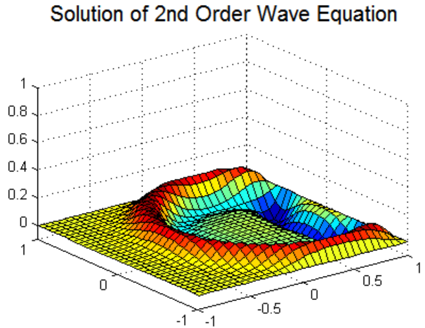
- hiperbólicade primer orden (Ecuacion de Advección)

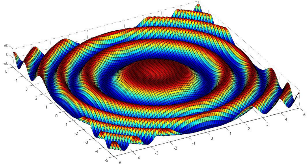
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x}$$

- hiperbólicade segundo orden (Ecuacion de Onda)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Una cuerda tensa que vibra a baja amplitud es un sistema físico simple que puede caracterizarse por una EDP hiperbólica.





$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 U \quad \textbf{Ecuación de la Onda}$$

- **Aplicaciones**
  - Problemas de conducción de calor
  - Vibraciones de cuerdas (ecuación de onda)
  - Potenciales electrostáticos (ecuación de Laplace)
- **Limitaciones del Método**
  - Solo aplica a EDPs lineales y homogéneas
  - Requiere condiciones de frontera homogéneas
  - No siempre funciona si los coeficientes no son constantes
  - A veces se necesita usar series de Fourier

¿Preguntas?