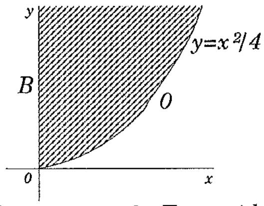
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (21–12–2009)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Resolver el siguiente problema de contorno



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, & (x,y)\in\Omega\,, \\ u(x,\frac{x^2}{4}) = 0\,, & x>0 \\ u(0,y) = B & (B \text{ cte.} > 0)\,, \\ u \text{ acotada.} \end{cases}$$

(Sug.: Utilizar el cambio de variable $\Phi(x,y) = (\xi,\eta)$ donde $\xi = x$ y $\eta = 2\sqrt{y}$, seguido de la transformación conforme $\omega = -\zeta^4$, donde $\zeta = \xi + i\eta$.)

P–2 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0\,, \\ u(1,\theta) = u(e^a,\theta) = 0\,, \quad 0\le\theta\le\pi \quad (a \text{ es una constante} > 0)\,, \\ u(r,0) = 1\,, \quad 1\le r\le e^a\,, \\ u(r,\pi) = 0\,, \quad 1\le r\le e^a\,, \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

P–3 Resolver, utilizando la transformación de Fourier, el siguiente problema

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & (x,t)\in\mathbb{R}^2_+\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & f\in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,. \end{cases}$$

(Sug.: Se resolverá primeramente el problema auxiliar

$$(1')\quad \begin{cases} (i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2_+\,, \quad u\in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2_+)\,, \\ (ii) \quad \forall t>0\,, \quad u(\cdot,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,t)\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})\,, \\ (iii) \quad f\in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}),\ f,f',f''\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \text{ y } \hat{f}\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \text{ y} \\ \qquad \lim_{t\to 0^+}\|u(\cdot,t)-f\|_1 = 0\,, \quad \lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 = 0\,, \\ (iv) \quad \forall t>0 \text{ se verifica } \lim_{\eta\to 0}\left\|\frac{u(\cdot,t+\eta)-u(\cdot,t)}{\eta} - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 = 0\,, \\ \qquad \lim_{\eta\to 0}\left\|\frac{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t+\eta)-\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)}{\eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,t)\right\|_1 = 0\,. \quad) \end{cases}$$

P–4 Resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{(\omega-i)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx\,, \qquad \omega\in\mathbb{R}\,, f\in L^1(\mathbb{R})\,,$$

utilizando la transformada de Fourier (n es un entero >1).

Nota. Cada problema se entregará por separado. Puntuación: (5; 5; 5; 5).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP (21-12-2009) (G-E)

P-1 Aplicando el cambio de variable a la ecuación del problema dado (I)

$$\phi(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) = (x, 2\sqrt{y}) = (\xi, \eta) \quad , (x,y) \in \Omega$$

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad , \quad \phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A}(\xi,\eta) = \phi'(x,y) A(x,y) \phi'(x,y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1(\xi,\eta) = \underbrace{a_{11}(x,y) \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}}_{0}(x,y) + 2\underbrace{a_{12}}_{0}(x,y) \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x \partial y} + a_{22}(\ ) \underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{a_1}_{0}(\ ) \frac{\partial\phi_1}{\partial x} + a_2(\ ) \underbrace{\frac{\partial\phi_1}{\partial y}}_{0} = 0$$

$$\tilde{a}_2(\xi,\eta) = a_{11} \underbrace{\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}}_{0} + 2a_{12} \underbrace{\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x \partial y}}_{0} + \underbrace{a_{22}}_{y} \underbrace{\frac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2}}_{-\frac{1}{2y\sqrt{y}}} + \underbrace{a_1}_{0} \frac{\partial\phi_2}{\partial x} + \underbrace{a_2}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{\partial\phi_2}{\partial y}}_{\frac{1}{\sqrt{y}}} = 0$$

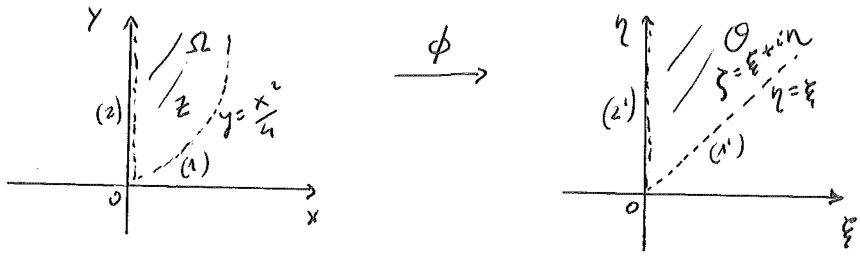
llegamos a la ecuación equivalente $\quad \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$

Veamos como se transforman las condiciones de contorno del problema (I)

$$\underset{x>0}{0 = u\left(x, \frac{x^2}{4}\right)} = v\left(\phi\left(x, \frac{x^2}{4}\right)\right) = v\left(x, 2\sqrt{\frac{x^2}{4}}\right) = v(x,x) = v(\xi,\xi) \quad , \xi > 0$$

$$\underset{y>0}{B = u(0,y)} = v(\phi(0,y)) = v(0, 2\sqrt{y}) = v(0,\eta) \quad , \eta > 0$$

($\phi(\Omega) = \Theta$: tomando por ejemplo $(1,4) = z \in \Omega \longrightarrow \phi(1,4) = (1, 2\sqrt{4}) = (1,4) \in \Theta$)



$$\begin{array}{ccc} \Omega & \overset{\phi}{\rightleftarrows} & \Theta \\ & {\scriptstyle u = v\circ\phi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle v = u \circ \phi^{-1}} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Así el nuevo problema de contorno es

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0 & \text{en } \Theta \\ v(\xi,\xi) = 0 & \xi > 0 \\ v(0,\eta) = B & \eta > 0 \\ v \text{ acotada en } \overline{\Theta} \setminus \{(0,0)\} & \end{cases}$$

Para resolver este problema de contorno, consideramos la transformación h :

DIRECCIÓN | CAMINO DE VERA, 14 APARTADO 22.012 | TELÉFONOS 96 387 76 60 96 387 70 00 - Ext. 6600 | ELECTRONIC MAIL RED EUNET DEPMAT@UPVNET.UPV.ES

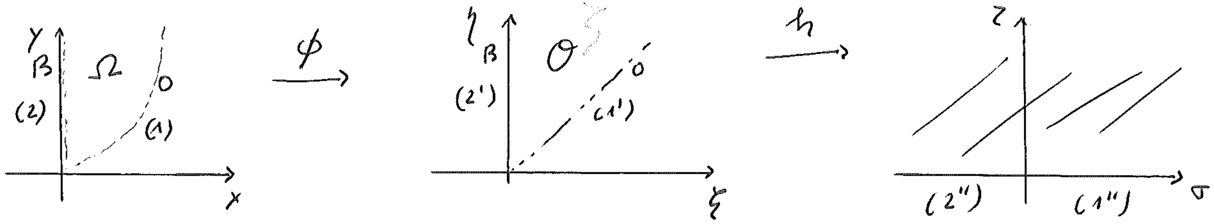
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

$h(\xi,\eta) = -(\xi+i\eta)^4 = 6\xi^2\eta^2 - \xi^4 - \eta^4 + i(4\xi\eta^3 - 4\xi^3\eta)$

$\operatorname{Im} h(\xi,\eta) = 4\xi\eta(\eta^2-\xi^2) > 0$

Si $(\xi,\eta) \in (1')$, $\xi=\eta$, $h(\xi,\eta) = 4\xi^4 > 0$

Si $(\xi,\eta) \in (2')$, $\xi = 0$, $h(0,\eta) = -\eta^4 < 0$



Consideramos el PGDL en $\mathbb{R}^2_+$ (III) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = 0 \\ \varphi(\sigma) = 0 \quad \sigma>0 \\ \varphi(\sigma) = B \quad \sigma<0 \\ \varphi \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+}\setminus\{(0,0)\} \end{cases}$

La solución de este problema viene dada por

$$\varphi(\sigma,\tau) = \frac{\tau B}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{(\sigma-t)^2+\tau^2} = \frac{B}{\pi}\left[-\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\tau} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$V(\zeta) = \varphi(-\zeta^4) = \varphi\left(6\xi^2\eta^2 - \xi^4 - \eta^4 + i4\xi\eta(\eta^2-\xi^2)\right) = \frac{B}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{6\xi^2\eta^2-\xi^4-\eta^4}{4\xi\eta(\eta^2-\xi^2)}\right]$$

$\zeta = \xi + i\eta$

es solución de (II)

$$u(x,y) = V(\phi(x,y)) = V(x, 2\sqrt{y}) = v(x+i\sqrt{y}\,2) = \frac{B}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{6x^2 4y - x^4 - 16y^2}{4x\cdot 2\sqrt{y}\,(4y-x^2)}\right]$$

es solución de (I)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP (21-12-2009) (G-E)

P-2 Sea $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ una función que cumple (i), (ii), (iv), siendo $R \in C^2[1, e^a]$, $R \not\equiv 0$, $\Theta \in C^2[0,\pi]$, $\Theta \not\equiv 0$, entonces

(i) $R''\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' + \frac{1}{r} R'\Theta = 0$

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \quad , \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad , \text{ luego}$$

$$\left.\begin{array}{lll} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 & 1 < r < e^a & \text{y } R(r) \neq 0 \\ \Theta'' + \lambda\Theta = 0 & 0 < \theta < \pi & \text{y } \Theta(\theta) \neq 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{(ii) \\ (iv)}}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \quad , \quad r \in [1, e^a] \\ R(1) = R(e^a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \quad , \quad \theta \in [0,\pi] . \\ \Theta(\pi) = 0 \end{cases}$$

Determinemos λ:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \xrightarrow{\text{Euler}} \rho(\rho-1) + \rho - \lambda = 0 \longrightarrow \rho^2 = \lambda$$

si $\lambda \geq 0 \longrightarrow$ solución trivial

Si $\lambda < 0 \quad \rho = \pm i\sqrt{-\lambda} \longrightarrow SF\{r^{i\sqrt{-\lambda}}, r^{-i\sqrt{-\lambda}}\} \longrightarrow SF\{\cos(\sqrt{-\lambda}\log r, \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\log r\}$

SG $R(r) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\log r) + B\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\log r)$

$R(1) = 0 = A$

$R(e^a) = 0 = B\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\, a) \Longrightarrow \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$

$$\underline{R_n(r) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\log r\right)}$$

$\Theta'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\Theta = 0 \quad , \quad \rho = \pm\frac{n\pi}{a} \quad , \quad \{e^{\frac{n\pi}{a}\theta}, e^{-\frac{n\pi}{a}\theta}\} \longrightarrow \{ch\left(\frac{n\pi}{a}\theta\right), sh\left(\frac{n\pi}{a}\theta\right)\}$

SG $\Theta(\theta) = A\, ch\left(\frac{n\pi}{a}\theta\right) + B\, sh\left(\frac{n\pi}{a}\theta\right)$

$$\Theta(\theta)\Big|_{\theta=\pi} = 0 = A\, ch\left(\frac{n\pi^2}{a}\right) + B\, sh\left(\frac{n\pi^2}{a}\right) \Longrightarrow B = \frac{-A\, ch\frac{n\pi^2}{a}}{sh\frac{n\pi^2}{a}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underline{\Theta_n = \left(ch\frac{n\pi\theta}{a} - \frac{ch\frac{n\pi^2}{a}}{sh\frac{n\pi^2}{a}}\, sh\frac{n\pi\theta}{a}\right)} = \frac{sh\frac{n\pi}{a}(\pi-\theta)}{sh\frac{n\pi^2}{a}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP (21-12-2009) (G-E)

Consideremos la función

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\log r\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(\pi-\theta)}{\operatorname{sh} \frac{n\pi^2}{a}}$$

Según condición (iii) $u(r,0)=1$, $1 \le r \le e^a$

$$1 = u(r,0) = \sum_{1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\log r\right) \qquad 1 \le r \le e^a \Downarrow 0 \le \log r \le a$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \sum_{1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) , \quad 0 \le \xi \le a$$

Esto sugiere considerar la función $g(\xi) = \begin{cases} 1 & 0<\xi<a \\ 0 & \xi = 0, a \\ \text{impar} & \\ 2\text{-periódica} & \end{cases}$,

$$\underset{n \ge 1}{b_n} = \frac{2}{a}\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi = 2\,\frac{\left[1-\overbrace{\cos n\pi}^{(-1)^n}\right]}{n\pi} .$$

Finalmente

$$u(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi\log r}{a}\right) \operatorname{sh}\left[\frac{(2n-1)\pi}{a}(\pi-\theta)\right]}{(2n-1)\ \operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi^2}{a}}$$

es la solución.

C-1

$\boxed{C1}$ (EDP, 21-12-2009) Clasificar la siguiente ecuación en $\mathbb{R}^4$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+2e^{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+ch(z^2+t^2+1)\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial t}=u.$$

La matriz de coeficientes es

$$A(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1+x^2 & e^{x+y} & 0 & 0\\ e^{x+y} & 1+x^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & ch(z^2+t^2+1) & 1\\ 0 & 0 & 1 & ch(z^2+t^2+1)\end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$\Delta(\lambda)=|A(x,y,z,t)-\lambda\mathbb{I}_4|=\begin{vmatrix}1+x^2-\lambda & e^{x+y} & 0 & 0\\ e^{x+y} & 1+x^2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & ch(z^2+t^2+1)-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & ch(z^2+t^2+1)-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$\underset{\text{1ª fila}}{=}(1+x^2-\lambda)\begin{vmatrix}1+x^2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & ch()-\lambda & 1\\ 0 & 1 & ch()-\lambda\end{vmatrix}-e^{x+y}\begin{vmatrix}e^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & ch()-\lambda & 1\\ 0 & 1 & ch()-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1+x^2-\lambda)^2\left((ch()-\lambda)^2-1\right)-(e^{x+y})^2\cdot\left((ch()-\lambda)^2-1\right)=$$

$$=\left[(1+x^2-\lambda)^2-(e^{x+y})^2\right]\left[(ch()-\lambda)^2-1^2\right]\underset{\text{"diferencia de cuadrados"}}{=}$$

$$=(1+x^2-\lambda-e^{x+y})(1+x^2-\lambda+e^{x+y})(ch()-\lambda-1)(ch()-\lambda+1)=$$
$$=(\lambda-(1+x^2-e^{x+y}))(\lambda-(1+x^2+e^{x+y}))(\lambda-(ch()-1))\cdot(\lambda-(ch()+1)),$$

luego los valores propios son

$$\lambda_1=1+x^2-e^{x+y}$$
$$\lambda_2=1+x^2+e^{x+y}$$
$$\lambda_3=ch(1+z^2+t^2)-1$$
$$\lambda_4=ch(1+z^2+t^2)+1$$

Como se observa,

$$\lambda_2 > 0 \;,\; \lambda_3 > 0 \;,\; \lambda_4 > 0 \quad \forall \text{ punto de } \mathbb{R}^4 ,$$

luego sólo es relevante el signo de λ_1. Como $\lambda_1 = 0$ sii $1+x^2-e^{x+y}=0$ sii $y = \log(1+x^2) - x$ entonces:

(a) $\lambda_1 > 0$ sii $y < \log(1+x^2) - x$, luego para los puntos de $\mathbb{R}^4$ que verif. la anterior desigualdad $n_+(x,y,z,t) = 4$ y la ec. es de tipo elíptico

(b) $\lambda_1 = 0$ sii $y = \log(1+x^2) - x$, en cuyo caso $n_0(x,y,z,t) = 1$, $n_+(x,y,z,t) = 3$, y la ec. es de tipo parabólico.

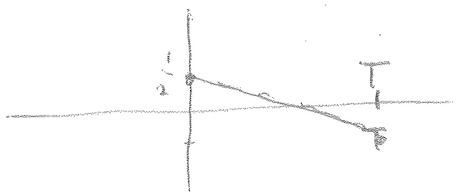
(c) finalmente, cuando $y < \log(1+x^2) - x$ la ec. es de tipo hiperbólico.

---

e-2)

$$1-\frac{t}{T}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\omega t)}{n} \qquad \omega=\frac{2\pi}{T} \qquad 0<t<T$$

Hallamos la serie de senos de $\frac{1}{2}-\frac{t}{T}$



$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{T}\right)\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T}\,dt=$$

$$\int_0^T=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{2}-\frac{t}{T}=u & du=-\frac{1}{T}dt \\ dv=\operatorname{sen}\frac{2n\pi t}{T}dt & v=-\cos\frac{2\pi n}{T}t\cdot\frac{T}{2n\pi}\end{array}\right\}=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{T}\right)\cos\frac{2n\pi t}{T}\cdot\frac{T}{2n\pi}\Big]_0^T-\frac{1}{2n\pi}\int_0^T\cos\frac{2n\pi}{T}t\,dt$$

0

$$=-\left(\frac{1}{2}-1\right)\cos 2n\pi\cdot\frac{T}{2n\pi}+\frac{1}{2}\,1\,\frac{T}{2n\pi}=\frac{T}{2n\pi} \qquad b_n=\frac{1}{n\pi}$$

Por ser la función continua y monótona decreciente en $(0,T)$, es decir continua y de variación acotada, converge puntualmente la serie de F. a $f(t)$, así que se verifica la igualdad. $\frac{1}{2}-\frac{t}{T}=\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\omega t}{n}$

Para sumar la serie $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ damos a t el valor $\frac{T}{4}$

en lo que resulta:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{T/4}{T}=\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}}{n}=\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}}{n}$$

$n=2k$ par $\quad \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}=\operatorname{sen} k\pi=0$

n impar $2k+1 \quad \operatorname{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2}=\begin{cases}k \text{ par} & 1\\ k \text{ impar} & -1\end{cases}$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{\pi}\sum\frac{(-1)^n}{2k+1}$$

$$\boxed{\sum\frac{(-1)^n}{2k+1}=\frac{\pi}{4}}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots$$

C-3

[C3] (EDP, 21-12-2009) Utilizando la tr. de Fourier hallar una solución de la ec. dif.

$$y'' - a^2 y = \chi_{[-1,1]}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \qquad (a \in \mathbb{R}),$$

sup. que $\exists\, y, y', y'' \in L^1(\mathbb{R})$ con $y, y' \in C(\mathbb{R})$, $y'' \in C(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$.

Como $\chi_{[-1,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ con

$$[\chi_{[-1,1]}(\cdot)]^\wedge(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} 1 \cdot e^{-i\lambda x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda},$$

tiene sentido tomar tr. de Fourier en la ec. dif.:

$$-\lambda^2 \hat{y}(\lambda) - a^2 \hat{y}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

luego $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\hat{y}(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{a^2+\lambda^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}.$$

(obs. que $\hat{y} \in L^1(\mathbb{R})$ ya que es producto de una f$^{\text{n}}$ acotada $\left(\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\right)$ por una f$^{\text{n}}$ $\frac{1}{a^2+\lambda^2} \in L^1(\mathbb{R})$.) Como $\frac{-1}{a^2+\lambda^2} = \left[\frac{-1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a|\cdot|}\right]^\wedge(\lambda)$ siendo $g(x) = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ y acotada en $\mathbb{R}$ entonces $g(x)$ y $\chi_{[-1,1]}$ son convolucionables y $g * \chi_{[-1,1]} \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ con

$$[g * \chi_{[-1,1]}]^\wedge(\lambda) = \hat{g}(\lambda) \cdot [\chi_{[-1,1]}]^\wedge(\lambda) = \hat{y}(\lambda),$$

luego $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = g * \chi_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\, \chi_{[-1,1]}(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a|x-t|}\, dt = -\frac{1}{2a} \int_{-1}^{+1} e^{-a|x-t|}\, dt = \{u = x-t\} =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int_{x-1}^{x+1} e^{-a|u|}\, du =$$

$$
= \begin{cases}
\text{si } x-1>0, \ (x>1) & = -\frac{1}{2a}\int_{x-1}^{x+1} e^{-au}\,du = \frac{1}{2a^2}\left[-e^{-a(x-1)} + e^{-a(x+1)}\right], \quad x>1 \\[2ex]
\text{si } x-1<0 \text{ y } x+1>0, \ (x<1 \text{ y } x>-1) & = -\frac{1}{2a}\left\{\int_{x-1}^{0} e^{au}\,du + \int_{0}^{x+1} e^{-au}\,du\right\} = \frac{1}{2a^2}\left[-2+e^{a(x-1)}+e^{-a(x+1)}\right], \quad -1\le x\le +1 \\[2ex]
\text{si } x+1<0, \ (x<-1) & = -\frac{1}{2a}\int_{x-1}^{x+1} e^{au}\,du = \frac{1}{2a^2}\left[-e^{a(x+1)} + e^{a(x-1)}\right], \quad x<-1
\end{cases}
$$

(obsérvese que $y(x)$ resulta continua en $\mathbb{R}$, que

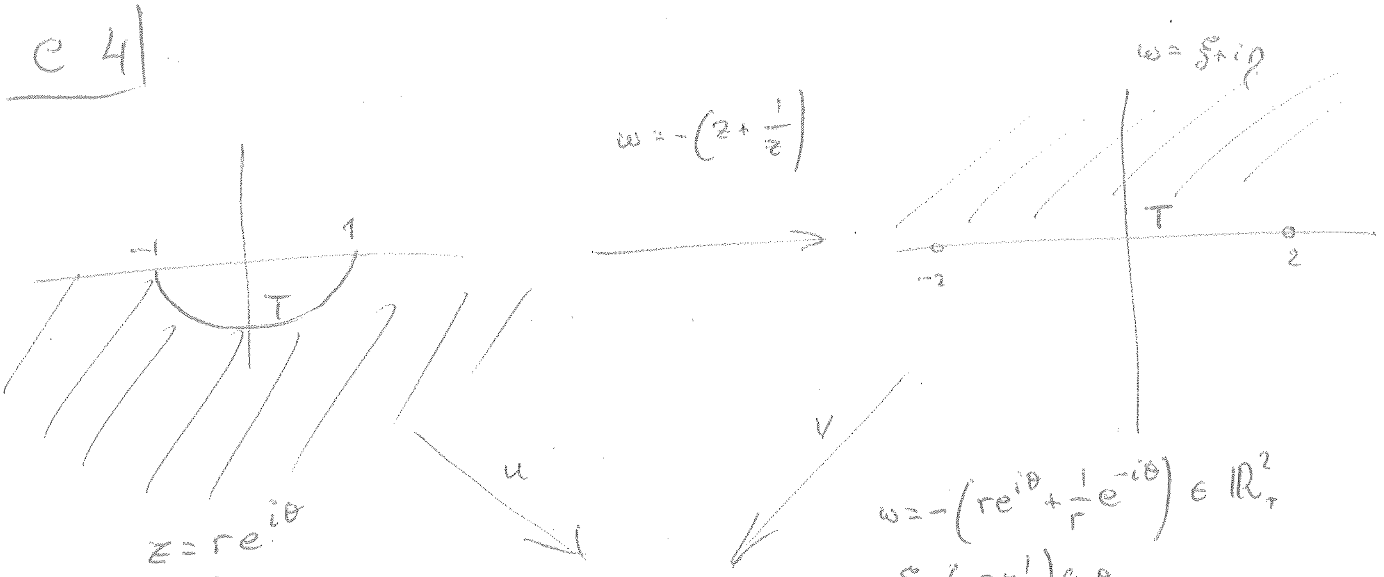
$$
\exists\ y'(x) = \frac{1}{2a}\left\{\begin{array}{ll} \left(-e^{-a(x-1)} + e^{-a(x+1)}\right), & x>1 \\ \left(e^{a(x-1)} - e^{-a(x+1)}\right), & -1\le x\le +1 \\ \left(-e^{a(x+1)} + e^{a(x-1)}\right), & x<-1 \end{array}\right\} = \frac{1}{2a}\left[e^{-a|x-1|} - e^{-a|x+1|}\right] \in C(\mathbb{R})
$$

pero

$$
y''(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} -e^{-a(x-1)} + e^{-a(x+1)}, & x>1, \\ e^{a(x-1)} + e^{-a(x+1)}, & -1<x<+1, \\ -e^{a(x+1)} + e^{a(x-1)}, & x<-1 \end{cases} \quad \exists \text{ y es continua en } \mathbb{R}\setminus\{\pm1\},
$$

con $y''(x) - a^2 y(x) = \chi_{[-1,+1]}(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.)

<u>c 4</u>



$z = re^{i\theta}$

$r > 1$

$-\pi < \theta < 0$

$w = -\left(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) \in \mathbb{R}^2_+$

$\xi = \left(-r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta$

$\eta = \left(-r + \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta > 0$

El contorno se convierte en el eje real.

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\, v(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} T\, \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt = \frac{T}{\pi}\left[-\operatorname{arctg}\frac{\xi-t}{\eta}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{T}{\pi}\left[-\operatorname{arctg}\frac{\xi-2}{\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\xi+2}{\eta}\right]$$

Con lo que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{T}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\left(-r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta + 2}{\left(-r+\frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{arctg}\frac{\left(-r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta - 2}{\left(-r+\frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta}\right]$$

P-3

B (EDP, 21-12-2009)

P–3 Resolver, utilizando la transformación de Fourier, el siguiente problema

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & (x,t) \in \mathbb{R}^2_+\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, & f \in C^2(\mathbb{R})\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,. \end{cases}$$

(Sug.: Se resolverá primeramente el problema auxiliar

$$(1')\quad \begin{cases} (i) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+\,, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^2_+)\,, \\ (ii) \quad \forall t > 0\,, \quad u(\cdot,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})\,, \\ (iii) \quad f \in C^2(\mathbb{R}),\ f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R}) \text{ y } \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ y} \\ \qquad \lim_{t\to 0^+} \|u(\cdot,t) - f\|_1 = 0\,, \quad \lim_{t\to 0^+} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 = 0\,, \\ (iv) \quad \forall t > 0 \text{ se verifica } \lim_{\eta\to 0} \left\|\frac{u(\cdot,t+\eta)-u(\cdot,t)}{\eta} - \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 = 0\,, \\ \qquad \lim_{\eta\to 0} \left\|\frac{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t+\eta)-\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)}{\eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,t)\right\|_1 = 0\,. \end{cases}$$

)

Si $u(x,t)$ es sol. de (1') def $v(\lambda,t) = [u(\cdot,t)]^\wedge(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, para $t>0$.

Tomando tr. de Fourier en (i) se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\lambda,t) = -\lambda^2 \cdot v(\lambda,t)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad t>0\,,$$

¡condición (iv)!

es decir,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \lambda^2 v = 0 \quad, t>0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La solución general de esta ec. dif. es

$$v(\lambda,t) = \begin{cases} A(\lambda)\cos(\lambda t) + B(\lambda)\operatorname{sen}(\lambda t) & , \text{si } \lambda \neq 0\,, \\ A(0) + B(0)\,t & , \text{si } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

"Tomando tr. de Fourier" en (iii) se obtienen las condiciones "iniciales"

$$\lim_{t\to 0^+} v(\lambda,t) = \hat{f}(\lambda)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\partial v}{\partial t}(\lambda,t) = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$ (nuevamente, se ha hecho uso de (iv))

luego, si $\lambda \neq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 0^+} v(\lambda,t) = A(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \\ \lim_{t\to 0^+} \frac{\partial v}{\partial t}(\lambda,t) = \lambda\, B(\lambda) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v(\lambda\neq 0,t) = \hat{f}(\lambda)\cos(\lambda t)$$

Igualmente, para $\lambda = 0$, se obtiene que $v(0,t) = \hat{f}(0)$. Luego la anterior expresión es válida $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Como $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ y $\cos(\cdot t)$ es una f^{ón} acotada, $v(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall t > 0$, con lo que (fórmula de inversión de Fourier, (xiv))

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda, t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \cos(\lambda t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \{\text{def. de } \cos z\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda(x+t)}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda(x-t)}\, d\lambda \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) \right),$$

$$\uparrow$$

$f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, con $f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow$ F.I.F. (xiv)

es decir,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t) \right), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

(i.e. dos "ondas viajeras" a izquierda y derecha).

P. 4

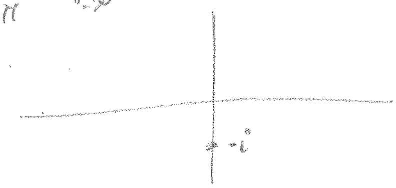
$$\frac{1}{(\omega-i)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega-i)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-\omega-i)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{, así que } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-\omega-i)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{(\omega+i)^n}$$

Dado que $\hat{f} \in L^1$, aplicamos el T. de inversión

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, VP \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega+i)^n} e^{i\omega x} d\omega = \frac{(-1)^n}{2\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega+i)^n} e^{i\omega x}$$



$$VP = \begin{cases} 0 & \text{para } x>0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(\omega+i)^n} e^{i\omega x}, -i\right) & \text{para } x<0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Res} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\omega\to -i} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \left(e^{i\omega x}\right)_{\omega=-i} = \frac{1}{(n-1)!} \left[(ix)^{n-1} e^{i\omega x}\right] = \frac{1}{(n-1)!} (ix)^{n-1} e^{x}$$

Así pues:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x>0 \\ -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} (ix)^{n-1} e^{x} = \frac{i^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{x} & \text{para } x<0 \end{cases}$$

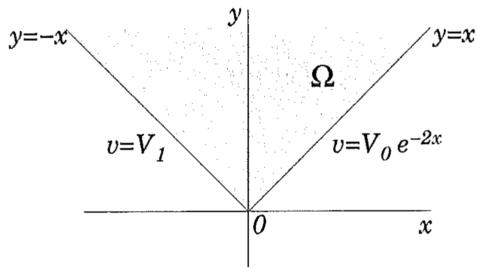
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (14–9–2009)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 ¿En qué zonas del primer cuadrante es elíptica, parabólica o hiperbólica la ecuación diferencial
$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[y+\left(1-\frac{a}{x}\right)\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\ ?$$
(a es una constante >0.)

C–2 Sea $f(x)$ la función 2–periódica que en $(-1,0)$ vale $(x+1)^\beta$ y en $(0,1)$ vale x^α ($1<\beta<\infty$ y $0<\alpha<1$). Estudiar la convergencia puntual y la convergencia uniforme de la serie de Fourier de la función $f(x)$. ¿Puede, en $x=0$, utilizarse el criterio de convergencia de Dini? Razónese la respuesta. ¿Qué forma tienen los coeficientes a_n y b_n? ¿Cómo es la serie de Fourier? (No es necesario calcular las integrales que dan los coeficientes a_n y b_n.)

C–3 Resolver el problema de contorno
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+v\right)=0\ , & (x,y)\in\Omega\ ,\\ v=V_1 \text{ en } y=-x\ ,\quad x<0\ , & \\ v=V_0e^{-2x} \text{ en } y=x\ ,\quad x>0\ , & \\ v \text{ acotada,} & \end{cases}$$
siendo Ω la región de la figura



(Sug.: Hacer primero el cambio de variable dependiente $v(x,y)=u(x,y)e^{-(x+y)}$. Después utilizar transformaciones elementales.)

C–4 Resolver el siguiente problema de contorno empleando el método de separación de variables
$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{en }]0,2\pi[^2\ ,\\ u=G & \text{en } \partial(]0,2\pi[^2)\ ,\end{cases}\quad ,\qquad G(x,y)=\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{y}{2}\ , & x=0\ ,\ 0\le y\le 2\pi\ ,\\ 0\ , & \text{en los otros lados.}\end{cases}$$

Nota. Cada cuestión se entregará por separado y ocupará un máximo de dos hojas (por una cara). Puntuación: (2; 2,5; 3; 2,5).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP (14-9-2009)

P-3 Supongamos que existe una solución $u(x,y)$ de nuestro problema. Denotando, para cada $0<x<1$, la transformada de Fourier de $u(x,\cdot)$ por $v(x,\cdot)$ y aplicando la transformación de Fourier a la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\cdot) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\cdot) = m^2 u(x,\cdot)$ obtenemos (teniendo en cuenta (iv) del enunciado y la propiedad (ix) de transformadas de Fourier)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\lambda) + (i\lambda)^2 v(x,\lambda) = m^2 v(x,\lambda) \qquad \begin{matrix}\lambda\in\mathbb{R}\\ 0<x<1\end{matrix}$$

, es decir,
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\lambda) - (\lambda^2+m^2)\, v(x,\lambda) = 0 \qquad \begin{matrix}\lambda\in\mathbb{R}\\ 0<x<1\end{matrix}$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales ordinarias, se obtiene

$$v(x,\lambda) = A(\lambda)\, ch\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\, x\right) + B(\lambda)\, sh\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\, x\right)$$

Calculemos $A(\lambda)$, $B(\lambda)$:

De (iii)
$$u(h,\cdot) \xrightarrow[h\to 0+]{\|\ \|_1} e^{-(\cdot)^2/2} \xrightarrow{\wedge\ \text{continua}} \lim_{h\to 0+} v(h,\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(h,\cdot) \xrightarrow[h\to 1-0]{\|\ \|_1} 0 \longrightarrow \lim_{h\to 1-0} \frac{\partial v}{\partial x}(h,\lambda) = 0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Por tanto

$$e^{-\lambda^2/2} = \lim_{x\to 0+} v(x,\lambda) = \lim_{x\to 0+} A(\lambda)\, ch\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\, x\right) + B(\lambda)\, sh\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\, x\right) = A(\lambda) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$0 = \lim_{x\to 1-0} \frac{\partial v}{\partial x}(x,\lambda) = A(\lambda)\sqrt{\lambda^2+m^2}\, sh\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\right) + B(\lambda)\sqrt{\lambda^2+m^2}\, ch\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\right)$$

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Se tiene entonces

$$\Rightarrow \quad B(\lambda) = -\, th\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\right)\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP (14-9-2009)

Continuación del P-3

$$v(x,\lambda) = e^{-\lambda^2/2}\left[ch\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\,x\right) - th\sqrt{\lambda^2+m^2}\; sh\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\,x\right)\right]$$

$$= e^{-\lambda^2/2}\left[\frac{ch\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\,x\right) ch\sqrt{\lambda^2+m^2} - sh\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\right) sh\left(\sqrt{\lambda^2+m^2}\,x\right)}{ch\sqrt{\lambda^2+m^2}}\right]$$

$$= e^{-\lambda^2/2}\,\frac{ch\left[\sqrt{\lambda^2+m^2}\,(1-x)\right]}{ch\sqrt{\lambda^2+m^2}}$$

Por la 2: fórmula de inversión de Fourier, puesto que

$$e^{-\lambda^2/2}\,\frac{ch\left[\sqrt{\lambda^2+m^2}\,(1-x)\right]}{ch\sqrt{\lambda^2+m^2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

ya que $\dfrac{ch[\;\;]}{ch\sqrt{\lambda^2+m^2}}$ está acotada como función de λ ya que $ch\sqrt{}\,(1-x) \le ch\sqrt{}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $0<x<1$

se tiene que

$$\underset{\substack{0<x<1\\ y\in\mathbb{R}}}{u(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\,\frac{ch\left[\sqrt{\lambda^2+m^2}\,(1-x)\right]}{ch\sqrt{\lambda^2+m^2}}\; e^{iy\lambda}\,d\lambda \,.$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

P-4 Aplicando el cambio de variable a la ecuación dada $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$:

$$\phi(x,t)=(\phi_1(x,t),\phi_2(x,t))=(x+ct,\,x-ct)=(\xi,\eta)$$
$(x,t)\in\mathbb{R}^2_+$

$$A(x,t)=\begin{pmatrix} c^2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \phi'(x,t)=\begin{pmatrix}1 & -c\\ 1 & c\end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(\xi,\eta)=\phi' A\,\phi'^T=\begin{pmatrix}0 & 2c_2\\ 2c_2 & 0\end{pmatrix},\ y$$

$$\tilde{a}_1(\xi,\eta)=a_{11}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial t}+a_{22}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+a_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+a_2\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+a=0$$

$\tilde{a}_2=0$
$\tilde{a}=\tilde{f}=0$

llegamos a la ecuación equivalente $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=0$ en la nueva zona $\xi>\eta$:

($\begin{matrix}x\geq 0\\ t=0\end{matrix}$: $(x+ct,x-ct)=(x,x)$, $\begin{matrix}x\leq 0\\ t=0\end{matrix}$: $(x+ct,x-ct)=(x,x)$

y si tomo un punto $(0,t)$, $t>0$, entonces $\phi(0,t)=(ct,-ct)$, $(c>0)$).

Finalmente como en la nueva zona la ecuación $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=0$ tiene como solución general $v(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$ donde f y g son cualesquiera funciones de clase C^2 en $\mathbb{R}$, tenemos que la solución general de la ecuación dada en el enunciado del problema es

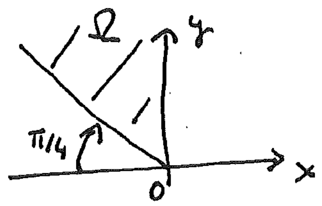
$$u(x,t)=v(\phi(x,t))=v(x+ct,x-ct)=f(x+ct)+g(x-ct)$$

$f,g\in C^2(\mathbb{R})$
$(x,t)\in\mathbb{R}^2_+$

(P-1)

$\boxed{P}$ (EDP, 14-9-2009) Resolver el siguiente problema de contorno

$$(0)\begin{cases}\Delta u=0 \text{ en } \Omega=\{z=re^{i\theta}: r>0, \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\}\\ u(z)=e^{-iaz^4} \quad \text{en } \partial\Omega\\ u \text{ acotada}\end{cases}$$

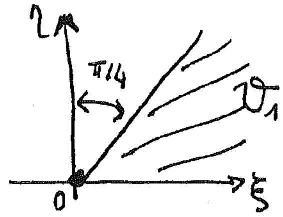


utilizando transformaciones elementales (a constante >0).

Efectuamos las siguientes transformaciones:

(1) $h_1(z)=z\,e^{-i\pi/2}=-iz=w$, con $h_1^{-1}(w)=iw=z$, rotación de ángulo $\pi/2$ en sentido horario, se obtiene el problema equivalente:

$$(\text{II})\begin{cases}\Delta v(w)=0 \quad \text{en } \mathcal{V}_1=\{w=\rho e^{i\alpha}: \rho>0, 0<\alpha<\frac{\pi}{4}\}\\ v(w)=u(h_1^{-1}(w))=e^{-ia(iw)^4}=e^{-iaw^4}, \; w\in\partial\mathcal{V}_1\\ v \text{ acotada}\end{cases}$$

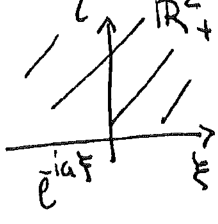


siendo $v(w)=u(h_1^{-1}(w))$.

(2) Si $z\in\mathcal{V}_1$, $w=h_2(z)=z^4\in\mathbb{R}^2_+\subset D_{\frac{\pi}{2}}$ y $h_2^{-1}(w)=e^{\frac{1}{4}\log_{\frac{\pi}{2}} w}$, $w\in\mathbb{R}^2_+$;

se obtiene el problema equivalente:

$$(\text{III})\begin{cases}\Delta\tilde{v}(w)=0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+,\\ \tilde{v}(\xi,0)=v(h_2^{-1}(\xi,0))=e^{-ia(h_2^{-1}(\xi,0))^4}=e^{-ia\xi}, \quad \xi\in\mathbb{R}\\ \tilde{v} \text{ acotada}\end{cases}$$



siendo $\tilde{v}(w)=v(h_2^{-1}(w))$.

Su solución es bien conocida:

$$\tilde{v}(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta}{\eta^2+(\xi-t)^2}e^{-iat}\,dt \qquad \text{para } \eta>0$$

Usando el apéndice al Tema 4 ("residuos") se puede hallar la integral. Efectuamos la integral, tal y como se realizó en un ejercicio resuelto en las notas del curso", expresándola como una integral de Fourier:

$$\tilde{v}(\xi,\eta) \underset{\eta>0}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio de variable} \\ x=t-\xi\,,\ t=\xi+x}}{\frac{1}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{\eta^2+x^2} e^{-ia(\xi+x)}\, dx = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-ia\xi} \left[\frac{\eta}{\eta^2+(\cdot)^2}\right]^{\wedge}(a) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tabla de Int. de Fourier}}}{=} \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, e^{-ia\xi} \cdot \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\, e^{-\eta|a|} \underset{\substack{\uparrow \\ a>0}}{=} e^{-\eta a} e^{-ia\xi}\,, \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2_+ .$$

$$= e^{-ia(\xi-i\eta)} = e^{-ia\overline{\omega}} \qquad \text{(ver observación 2)}$$

Luego: si $h(z) = h_2(h_1(z)) = (-iz)^4 = z^4 \in H(\mathbb{C})$ entonces:

$u(z) := \tilde{v}(h(z))$ es solución de (O),

con: si $z\in\Omega$, $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ y

$$h(z) = z^4 = r^4 e^{i4\theta} = r^4\cos 4\theta + i r^4 \operatorname{sen} 4\theta = \xi + i\eta\,,$$

por lo que la solución

$$u(re^{i\theta}) = \tilde{v}(h(re^{i\theta})) = e^{-ar^4\operatorname{sen}4\theta}\, e^{-iar^4\cos 4\theta} =$$

$$= e^{-iar^4(\cos 4\theta - i\operatorname{sen}4\theta)} \quad \left(= e^{-ia\overline{z}^4}\right)$$

Observación 1.- También se puede resolver el problema considerando directamente la composición $h(z) = h_2(h_1(z)) = (ze^{-i\pi/2})^4 = z^4 e^{-i2\pi} = z^4 = w$ y probando que si $z\in\Omega$ entonces $h(z)\in\mathbb{R}^2_+$. Téngase en cuenta que la transf. inversa $z = h^{-1}(w) = z^{1/4} := e^{\frac{1}{4}\log_{2\pi+\frac{\pi}{2}} w}$ (probar que si $w\in\mathbb{R}^2_+$ entonces $h^{-1}(w)\in\Omega$)

Observación 2. Si escribimos el problema (III) como $\left.\begin{array}{l}\Delta\tilde{v}(\omega)=0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+ \\ \tilde{v}(\omega)=e^{-ia\omega} \text{ cuando } \omega=(\xi,0)\in\partial\mathbb{R}^2_+\end{array}\right\}$

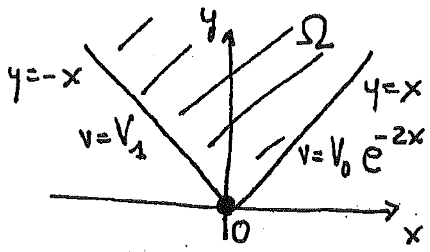
es muy fácil comprobar que $\tilde{v}(\omega) = e^{-ia\omega}$ ($\in H(\mathbb{C})$) es una solución del mismo pero no es acotada en $\mathbb{R}^2_+$; por el contrario, $\tilde{v}(\omega) = e^{-ia\overline{\omega}}$ es solución acotada en $\mathbb{R}^2_+$.

(C-3)

$\boxed{P}$ (EDP, 14-9-2009) Resolver el problema de contorno

$$
(I)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+v\right)=0 \quad , \quad (x,y)\in\Omega ,\\
v=V_1 \text{ en } y=-x ,\ x<0\\
v=V_0\, e^{-2x} \text{ en } y=x ,\ x>0\\
v \text{ acotada en } \overline{\Omega}\setminus\{0\} ,
\end{cases}
$$

siendo Ω la región de la figura



(Sug.: Realizar primero el cambio de variable dependiente $v(x,y)=u(x,y)\cdot e^{-(x+y)}$. Después utilizar transformaciones elementales.)

Sea $v(x,y)\in C^2(\Omega)$ solución de (I). Definamos $u(x,y)=v(x,y)\,e^{(x+y)}$. Veamos qué ecuación satisface u. Como $v=u\cdot e^{-(x+y)}$, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-(x+y)}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}-u\right) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-(x+y)}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}-u\right) ,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^{-(x+y)}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+u\right) ,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=e^{-(x+y)}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u\right) ,$$

luego sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$e^{-(x+y)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+u+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}+u+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}-u+\frac{\partial u}{\partial y}-u+u\right)\right)=0 ,$$

es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{en } \Omega .$$

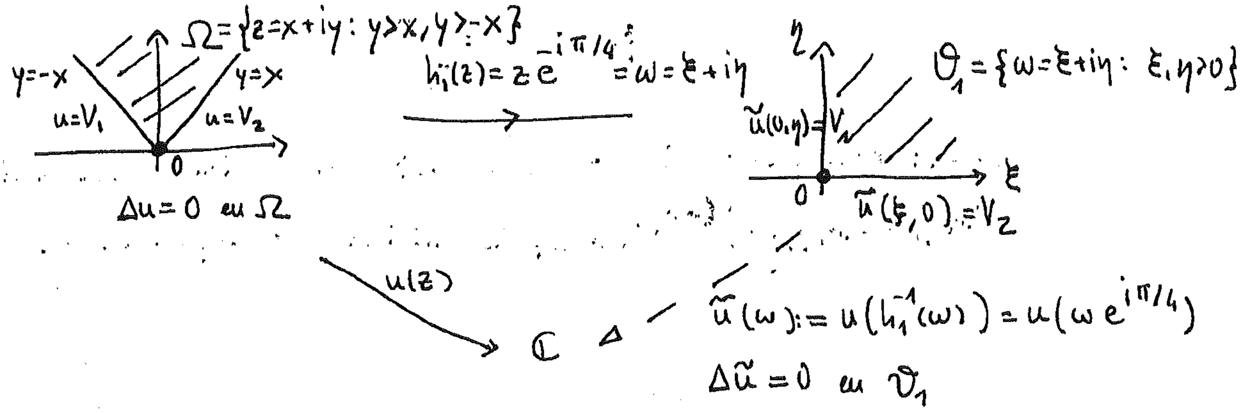
Por lo tanto, u es solución del problema

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x,-x) = V_1 & \text{en } y=-x,\ x<0, \\ u(x,x) = V_0 & \text{en } y = x,\ x>0, \\ u \text{ acotada en } \overline{\Omega}\setminus\{0\} \end{cases}$$

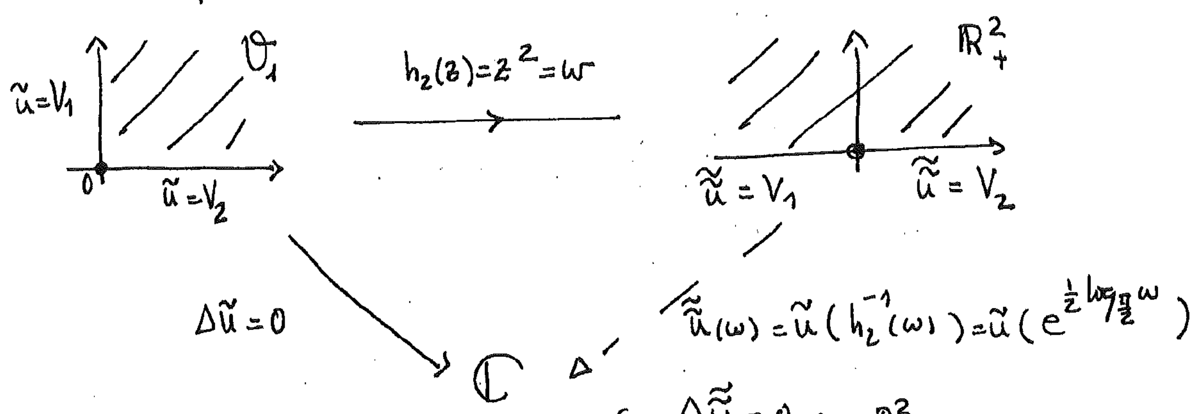
(el abierto Ω no cambia ya que no hay cambio de variable independiente)

Efectuamos ahora dos cambios de variable independiente:

(1) una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido horario, $h_1(z) = z\,e^{-i\pi/4}$:



(2) una transformación $h_2(z) = z^2$, $z \in \mathcal{O}_1$:



$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \Delta \tilde{\tilde u} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+, \\ \tilde{\tilde u}(\xi,0) = \begin{cases} V_1, & \xi < 0 \\ V_2, & \xi > 0 \end{cases} \\ \tilde{\tilde u} \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+}\setminus\{0\} \end{cases}$$

En resumen, la transformación

$$h(z) = h_2(h_1(z)) = (z\, e^{-i\pi/4})^2 = z^2 e^{-i\pi/2} = -i\, z^2, \quad z \in \Omega ,$$

da lugar al problema equivalente en el semiplano superior

$$(\mathrm{III}) \quad \begin{cases} \Delta \tilde{\tilde{u}} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ \tilde{\tilde{u}}(\xi, 0) = \begin{cases} V_1, & \xi < 0 \\ V_2, & \xi > 0 \end{cases} \\ \tilde{\tilde{u}} \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{0\} . \end{cases}$$

cuya solución es <u>bien conocida</u> .

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

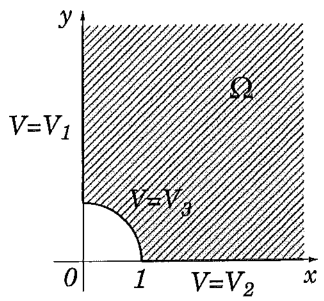
E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (9–6–2009)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^4 x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \operatorname{ch}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u\ .$$

C–2 Estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier en serie de senos de la función π–periódica $f(x)$ que vale 0 en $]0, \frac{\pi}{4}[$ y $\cos x$ en $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. ¿Cuál es la forma de los coeficientes de Fourier b_n (no es necesario calcularlos) y de la serie de Fourier de $f(x)$?

C–3 Calcular el potencial electrostático en el espacio indicado en la figura limitada por dos semiplanos y un cuarto de cilindro cuando $V = V_1$ y $V = V_2$ sobre las superficies planas y $V = V_3$ sobre la superfície curva. (Sug.: Utilizar la transformación $w = z^2 + \frac{1}{z^2}$.)



C–4 Hallar una solución de la ecuación de ondas amortiguada sin velocidad inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ , \quad t \ge 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\ , \quad 0 \le x \le \pi \\ u(x,0) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x \end{cases}$$

empleando el método de separación de variables.

Nota. Cada cuestión se entregará por separado y ocupará un máximo de dos hojas (por una cara). Puntuación: (1,5; 2,5; 3,5; 2,5).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (9–6–2009)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 a) Hallar $f \in L'^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ sabiendo que $\hat{f}(\lambda) = \lambda^2 e^{-\lambda^2/2}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Utilizando la transformada de Fourier (con respecto a la variable y) resolver el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\ , & (x,y) \in]0,a[\times\mathbb{R}\ , \\ \lim_{x\to 0+} \|u(x,\cdot)\|_1 = 0\ , \\ \lim_{x\to a-} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) - f\right\|_1 = 0\ , \end{cases}$$

siendo f la función obtenida en el apartado **a)**.

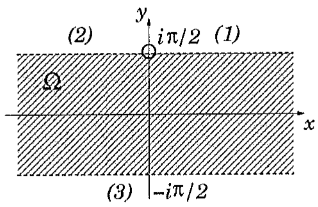
P–2 Utilizando la transformada de Fourier y el teorema de unicidad para la transformada de Fourier probar que para $a, b > 0$ y $c, d \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\exp\left[-\frac{(x-c)^2}{2a^2}\right] * \frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\exp\left[-\frac{(x-d)^2}{2b^2}\right] = \frac{1}{2\pi\delta}\exp\left[-\frac{(x-(c+d))^2}{2\delta^2}\right]$$

siendo $\delta = \sqrt{a^2+b^2}$.

P–3 Resolver el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega\ , \\ u(x+i\frac{\pi}{2}) = \cos(2\operatorname{arc\,tg} e^{-x})\ , & 0 < x < \infty\ , \\ u(x+i\frac{\pi}{2}) = 0\ , & -\infty < x < 0\ , \\ u(x-i\frac{\pi}{2}) = 0\ , & -\infty < x < \infty\ , \\ u \text{ acotada en } \bar{\Omega} \setminus \{i\frac{\pi}{2}\}\ , \end{cases}$$



utilizando la transformación $h(z) = \frac{e^z-1}{e^z+1}$. (Sug.: Para llegar al problema de contorno equivalente al dado descompóngase h en la forma $h = h_2 \circ h_1$ y aplíquese sucesivamente las transformaciones $h_1(z) = w = e^z$ y $h_2(w) = \zeta = \frac{w-1}{w+1}$. Téngase en cuenta también que $h^{-1}(e^{i\theta}) = \log_0\left(i\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right) = \log\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right) + i\frac{\pi}{2}$. Resolver entonces el nuevo problema de contorno utilizando el núcleo de Poisson para el disco unidad.)

Nota. Cada problema se entregará por separado. Puntuación: ((2; 7); 3; 8).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA

Examen EDP
9-6-2009

P-1) a) Hallar $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ sabiendo que $\hat{f}(\lambda) = \lambda^2 e^{-\lambda^2/2}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

Veamos que $\lambda \to \lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ es absolutamente integrable: Desde luego es continua (luego localmente integrable) y par. Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda = 2\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda^2/2} d\lambda = -2\int_0^{\infty} (-\lambda) e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \lambda \, d\lambda = -2\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \cdot \lambda \Big|_0^{\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda \right] = \left\{ \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\lambda}{e^{\lambda^2/2}} = 0 \right\} = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda < \infty \text{ (visto en el curso)}.$$

Por la fórmula de inversión de Fourier ((xiv) p.40 del curso) tenemos para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{ix\lambda} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-i(-x)\lambda} d\lambda = \left[(\cdot)^2 e^{-(\cdot)^2/2} \right]^\wedge (-x) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{(ix) p.39 del curso: } \left[(\cdot)^2 f(\cdot) \right]^\wedge(\lambda) = \frac{1}{(-i)^2} [\hat{f}]''(\lambda) = -[\hat{f}]''(\lambda) \text{ si } f(x), \\ x f(x),\ x^2 f(x) \text{ ab. int.} \end{array} \right\} = -\left(\left[e^{-(\cdot)^2/2} \right]^\wedge \right)''(-x) = -\left[e^{-(\cdot)^2/2} \right]''(-x) = (1-x^2) e^{-x^2/2}.$$

b) Supondremos $u \in C^4(]0,a[\times \mathbb{R})$

$u(x,\cdot),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,\cdot),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\cdot),\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,\cdot),\ \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall x \in]0,a[$

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(x+h,\cdot) - u(x,\cdot)}{h} - \frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \right\|_1 = 0 \qquad \forall x \in]0,a[$$

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x+h,\cdot) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot)}{h} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\cdot) \right\|_1 = 0 \qquad \forall x \in]0,a[$$

Sea entonces $u(x,y)$ una solución que satisface las condiciones anteriores y pongamos

$$v(x,\lambda) = u(x,\cdot)^\wedge(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-i\lambda y} dy$$

para $x \in]0,a[$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomando transformadas de Fourier con respecto a y en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\cdot) = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,\cdot) \qquad x \in]0,a[$$

y teniendo en cuenta las propiedades de u y (viii) p.39 del curso, obtenemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\lambda) = (i\lambda)^4 v(x,\lambda) = \lambda^4 v(x,\lambda) \quad , x \in]0,a[, \lambda \in \mathbb{R}$$

o bien

$$\frac{d^2 v_\lambda}{dx^2} - \lambda^4 v_\lambda = 0 \quad , x \in]0,a[\text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (aquí } v_\lambda(x) = v(x,\lambda))$$

las raíces de la ecuación característica de esta ecuación diferencial son

0 doble si $\lambda=0$ y $\pm\lambda^2$ si $\lambda\neq 0$, por lo que

$$v(x,\lambda)=\begin{cases} A(\lambda)e^{\lambda^2 x}+B(\lambda)e^{-\lambda^2 x} & ,\ \lambda\neq 0 \\ A(0)+B(0)x & ,\ \lambda=0 \end{cases}$$

Por hipótesis, $u(x,\cdot)\xrightarrow[x\to 0+]{L^1(\mathbb{R})} 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot)\xrightarrow[x\to a-]{L^1(\mathbb{R})} f$. De aquí se sigue

$$\lim_{x\to 0+} v(x,\lambda)=0,\ \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad y \quad \lim_{x\to a-}\frac{\partial v}{\partial x}(\,)=\hat{f}(\lambda)=\lambda^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2}},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

Por tanto, se tiene:

De la primera condición
$$\begin{matrix} A(\lambda)+B(\lambda)=0 & \lambda\neq 0 \\ A(0)=0 & \lambda=0 \end{matrix},$$

y de la segunda condición

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,\lambda)=\begin{cases} \lambda\neq 0 & \lambda^2 A(\lambda)e^{\lambda^2 x}-\lambda^2 B(\lambda)e^{-\lambda^2 x}=\lambda^2 A(\lambda)\left[e^{\lambda^2 x}+e^{-\lambda^2 x}\right]=2\lambda^2 A(\lambda)\operatorname{ch}\lambda^2 x \\ \lambda=0 & B(0) \end{cases}$$

se obtiene

$$\lambda^2 e^{-\lambda^2/2}=\begin{cases} 2\lambda^2 A(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda^2 a) & \lambda\neq 0 \longrightarrow A(\lambda)=\dfrac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{2\operatorname{ch}\lambda^2 a}=-B(\lambda) \\ B(0) & \lambda=0 \longrightarrow B(0)=0,\ A(0)=0 \end{cases}$$

Finalmente $v(x,\lambda)=e^{-\lambda^2/2}\dfrac{\operatorname{sh}(\lambda^2 x)}{\operatorname{ch}(\lambda^2 a)}$, $\forall x\in\,]0,a[$ y

como $v(x,\lambda)\in L^1(\mathbb{R})$ (como función de λ) ($\forall x\in\,]0,a[$) pues

$$\forall x\in\,]0,a[\quad \operatorname{sh}(\lambda^2 x)\leq \operatorname{sh}(\lambda^2 a)\longrightarrow 0\leq\frac{\operatorname{sh}(\lambda^2 x)}{\operatorname{ch}(\lambda^2 a)}\leq\frac{\operatorname{sh}(\lambda^2 a)}{\operatorname{ch}(\lambda^2 a)}\leq 1$$

tenemos por la fórmula de inversión de Fourier que, para todo $y\in\mathbb{R}$, se verifica

$$u(x,\cdot)(y)=u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\frac{\operatorname{sh}(\lambda^2 x)}{\operatorname{ch}(\lambda^2 a)}e^{iy\lambda}\,d\lambda$$

$x\in\,]0,a[$

$y\in\mathbb{R}$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura	Curso / Curs	Grupo / Grup	Nº Pg.

P.2 || Utilizamos las fórmulas

(i) $\left[e^{-ax^2}\right]^\wedge(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$ que para $a=\frac{1}{2}$ da

(ii) $\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]^\wedge = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$

(iii) $\left[h f(hx)\right]^\wedge = \hat{f}\left(\frac{\lambda}{h}\right)$ $h>0$

(iv) $\left[f(x+k)\right]^\wedge = e^{ik\lambda}\hat{f}(\lambda)$

Así resulta:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} e^{-\frac{(x-c)^2}{2a^2}}\right]^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{a} e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^2/2}\right]^\wedge \overset{(ii,\ iii\ y\ iv)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\lambda}{1/a}\right)^2}{2}} e^{-ic\lambda} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2\lambda^2}{2}} e^{-ic\lambda}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b} e^{-\frac{(x-d)^2}{2b^2}}\right]^\wedge = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2\lambda^2}{2}} e^{-id\lambda}$$

Como $[f*g]^\wedge = \hat{f}\cdot\hat{g}$, resulta:

Producto de transformadas: $\dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{(a^2+b^2)\lambda^2}{2}} e^{-i(c+d)\lambda} =$

$= \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{\delta^2\lambda^2}{2}} e^{-i(c+d)\lambda}$ que, según la fórmula anterior es precisamente la transformada de

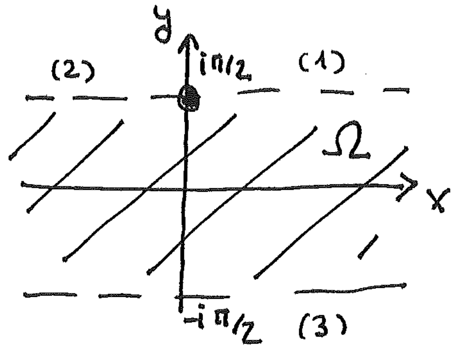
$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\delta}\, e^{-\frac{[x-(c+d)]^2}{2\delta^2}}$$

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data

P3

$\boxed{P}$ (EDP, 9-6-2009) Resolver el problema de contorno

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u(x+i\frac{\pi}{2}) = \cos(2\arctan e^{x}), \quad 0<x<+\infty, \\ u(x+i\frac{\pi}{2}) = 0, \quad -\infty<x<0, \\ u(x-i\frac{\pi}{2}) = 0, \quad -\infty<x<+\infty, \\ u \text{ acotada en } \overline{\Omega}\setminus\{i\frac{\pi}{2}\} \end{cases}$$



utilizando la transformación $h(z) = \dfrac{e^{z}-1}{e^{z}+1}$.

Obsérvese que $h(z)$ es singular cuando $e^{z}+1=0$ sii $z = i\pi + i2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; en particular, $h(z)\in H(\Omega)$.

Escribimos $h(z) = h_2\circ h_1(z)$ con $h_1(z)=e^{z}$, $h_2(z)=\frac{z-1}{z+1}$.

Analizamos $\underline{h_1(z)=e^{z}}$. Si $z\in\Omega$, $z=x+iy$ con $x\in\mathbb{R}$, $y\in\,]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$,

$h_1(x+iy) = e^{x+iy} = w$ con $|w| = e^{x}\in\,]0,\infty[$, $\arg w = y\in\,]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$,

es decir, $\operatorname{Re} w>0$ (semiplano a la derecha).

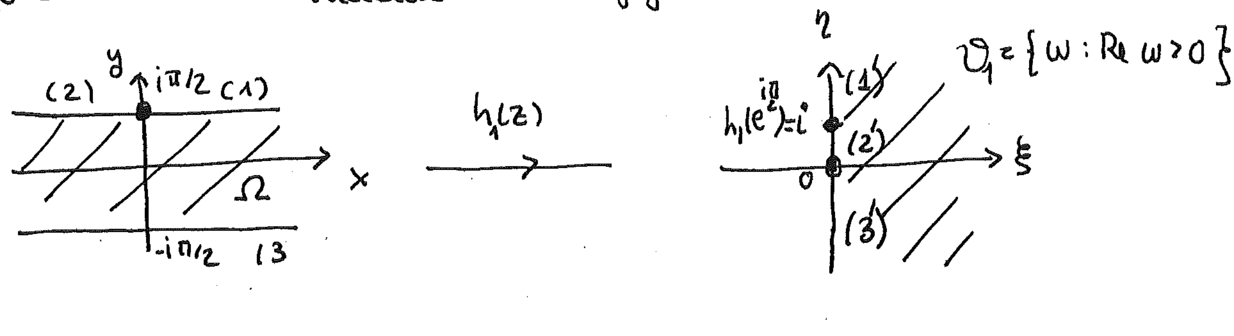
Veamos $\partial\Omega$: si $z = x+i\frac{\pi}{2}$, $x>0$,

$h_1(x+i\frac{\pi}{2}) = e^{x+i\pi/2} = ie^{x} \in \{i\eta : \eta\in\,]1,+\infty[\,\}$

si $z = x+i\frac{\pi}{2}$, $x<0$, $h_1(x+i\frac{\pi}{2}) = ie^{x} \in \{i\eta : \eta\in\,]0,1[\,\}$

si $z = x-i\frac{\pi}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, $h_1(x-i\frac{\pi}{2}) = -ie^{x} \in \{-i\eta : \eta>0\}$

Luego se tiene la situación de la figura:



Analizamos $h_2(z) = \frac{z-1}{z+1}$ cuando $z \in \overline{\mho_1}$.

Veamos que (tal y como "sugiere" la sugerencia del enunciado)

si $z \in \mho_1$ ($\mathrm{Re}\, z = x > 0$) entonces $\underline{h_2(z) \in \mathcal{U}}$ (disco unidad):

pero $|h_2(z)| < 1$ sii $|z-1|^2 < |z+1|^2$ sii $|(x-1)+iy|^2 < |(x+1)+iy|^2$,

lo que es cierto ya que $x > 0$.

Veamos $\partial\mho_1$: si $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|h_2(iy)| = \left|\frac{iy-1}{iy+1}\right| = 1, \text{ luego } \underline{h_2(iy) \in \mathbb{T}},$$

con

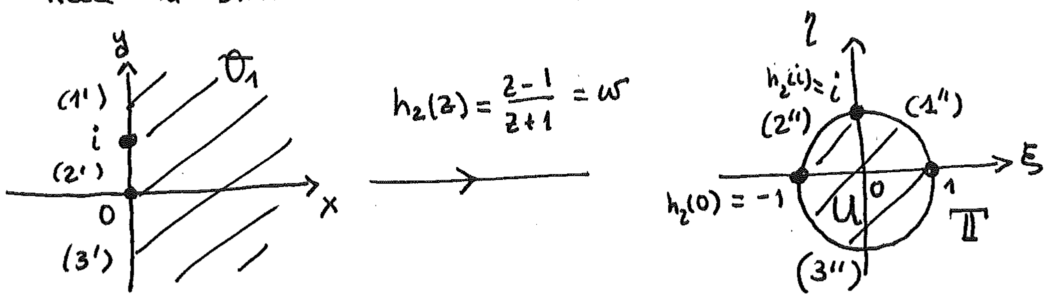
$$h_2(iy) = \frac{y^2-1}{1+y^2} + i\,\frac{2y}{1+y^2} = w = \xi + i\eta$$

luego: (i) si $y > 1$, $\mathrm{Re}\, h_2(iy) > 0$, $\mathrm{Im}\, h_2(iy) > 0$

(ii) si $0 < y < 1$, $\mathrm{Re}\, h_2(iy) < 0$, $\mathrm{Im}\, h_2(iy) > 0$

(iii) si $y < 0$, $\mathrm{Im}\, h_2(iy) < 0$

y se tiene la situación de la figura:



En resumen: si $h(z) = h_2 \circ h_1(z)$,

(a) $h(z) \in H(\Omega)$ con $h(z) \in \mathcal{U}$ si $z \in \Omega$.

(b) con respecto a $\partial\Omega$: si $z \in (1)$, $h(z) \in (1'')$,

si $z \in (2)$, $h(z) \in (2'')$,

si $z \in (3)$, $h(z) \in (3'')$.

Planteamos por tanto el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } \mathcal{U} \\ v(e^{i\theta}) = u(h^{-1}(e^{i\theta})) \text{ cuando } e^{i\theta} \in \mathbb{T} \\ v \text{ acotado en } \overline{\mathcal{U}} \setminus \{1\} \end{cases}$$

es decir:

en (1''): si $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $h^{-1}(e^{i\theta}) =$ (véase la sugerencia) $= \log\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\right) + i\frac{\pi}{2} =$

$= x + i\frac{\pi}{2}$, con $x = \log \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \in]0, +\infty[$,

$\Uparrow$

como $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[\to \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \in]0, 1[$

luego $h^{-1}(e^{i\theta}) = x + i\frac{\pi}{2} \in (1)$ y por tanto

$u(h^{-1}(e^{i\theta})) = u(x + i\frac{\pi}{2}) = \cos(2 \operatorname{arctg} e^{-x}) =$

$= \left(\text{con } x = \log\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} > 0\right) = \cos\left(2 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right) =$

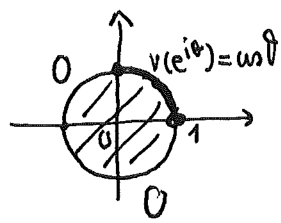
$= \cos\theta$

en (2''): si $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ entonces $h^{-1}(e^{i\theta}) \in (2)$ y $u(h^{-1}(e^{i\theta})) = 0$

en (3''): si $-\pi<\theta<0$ de la misma forma $u(h^{-1}(e^{i\theta})) = 0$.

por tanto resolvemos el problema

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \Delta v(\omega) = 0 \text{ en } \mathcal{U} \\ v(e^{i\theta}) = \begin{cases} \cos\theta, & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \\ v \text{ acot. en } \overline{\mathcal{U}} \setminus \{1\} \end{cases}$$



cuya solución es conocida: si $w=\rho e^{i\theta}$ con $0\le\rho<1$,

$$v(\rho e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}P_\rho(\theta-t)\,v(e^{it})\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-t)\right)\cos t\,dt = \text{(convergencia unif. de la serie)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos n(\theta-t)\cos t\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\cos n\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nt\cdot\cos t\,dt+\operatorname{sen} n\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} nt\cdot\cos t\,dt\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{1+2\rho\left(\cos\theta\cdot\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{1}{2}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\cos n\theta\,\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{sen} n\theta\cdot\frac{n-\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{1+\rho\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n^2-1}\left(\cos n\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+n\cdot\operatorname{sen} n\theta\right)\right\}$$

Finalmente se comprueba fácilmente que $u(z):=v(h(z))$, $z\in\Omega$, es solución de (I).

C.1)

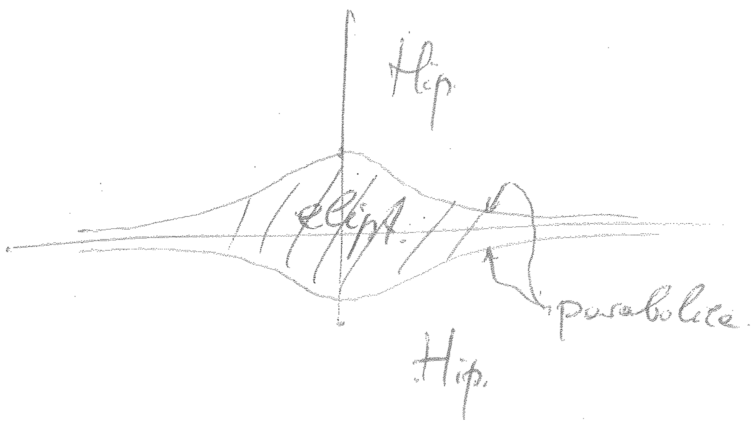
$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch^4 x} & -y \\ -y & ch^2 x \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A(x,y)) = \frac{1}{ch^2 x} - y^2$$

1. $\frac{1}{ch^2 x} - y^2 > 0$ elíptica $|y| < \frac{1}{ch\, x}$

2. $\frac{1}{ch^2 x} - y^2 < 0$ hiperbólica $|y| > \frac{1}{ch\, x}$

3. $\frac{1}{ch^2 x} - y^2 = 0$ parabólica $|y| = \frac{1}{ch\, x}$



UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Examen EDP

9-6-2009

C-3 Mediante la transformación $h(z) = z^2 + \frac{1}{z^2}$, Ω se transforma en el semiplano superior: En efecto

Si $z = re^{i\theta} \in \Omega$, $r > 1$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$h(z) = r^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = r^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{r^2} e^{-2i\theta} = \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta + i\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\operatorname{sen} 2\theta$$

$$\operatorname{Im} h(z) = \underbrace{\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)}_{>0} \underbrace{\operatorname{sen} 2\theta}_{>0} > 0, \text{ pues } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < 2\theta < \pi.$$

Frontera de Ω:

Si $x > 1$ $\quad h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 1^+]{} 2$, $\quad \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Si $y > 1$ $\quad h(iy) = -y^2 - \frac{1}{y^2} \xrightarrow[y \to 1^+]{} -2$, $\quad \xrightarrow[y \to +\infty]{} -\infty$

Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad h(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2\cos 2\theta \in \,]-2, 2[$.

Por tanto el problema equivalente es el PGDL en $\mathbb{R}^2_+$ siguiente:

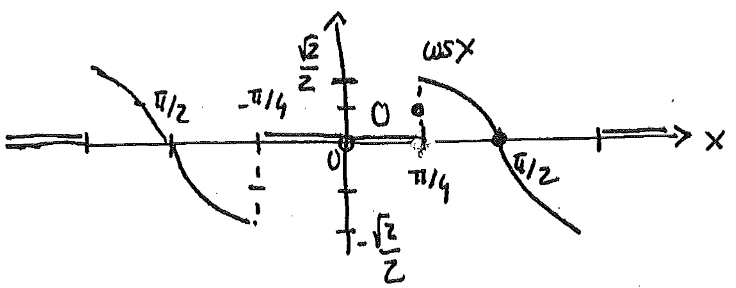
$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ V(\xi) = V_2 & \xi > 2 \\ V(\xi) = V_1 & \xi < -2 \\ V(\xi) = V_3 & -2 < \xi < 2 \\ V \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{\pm 2\} \end{cases}$$

C2

$\boxed{P}$ (EDP, 9-6-2009) Estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier en serie de senos de la f^{n} π-periódica $f(x)$ que vale 0 en $]0, \frac{\pi}{4}[$ y $\cos x$ en $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. ¿Cuál es la forma de los coeficientes de Fourier b_n y de la serie de Fourier de $f(x)$?

Definimos una función impar y π-periódica que coincide con 0 en $]0, \frac{\pi}{4}[$ y con $\cos x$ en $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & x \in [0, \pi/4[\\ \cos x , & x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\\ -f(-x) = 0, & x \in]-\frac{\pi}{4}, 0[\\ -f(-x) = -\cos x , & x \in]-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}[\end{cases} \quad , \ f \ \pi\text{-periódica}$$



Como se observa, $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \dots\})$, está acotada en $\mathbb{R}$, $f \in R_{\pi}$ y es impar: (el semiperiodo $T = \pi/2$)

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2nx) \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen} 2nx \, dx =$$

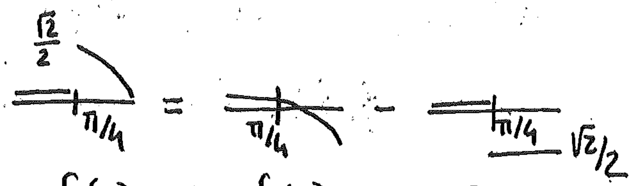
$$= \frac{4}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} 2nx \, dx , \quad n = 1, 2, \dots$$

Convergencia puntual

(i) si $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, f es constante $\equiv$ monótona en un entorno de x, luego de VA en un ent. de x: su s. de F. converge a $f(x) = 0$.

(ii) si $x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, f es monótona decreciente luego de VA en un ent. de x: su s. de F. converge a $f(x) = \cos x$ (f es continua en x).

(iii) si $x=\frac{\pi}{4}$ en un entorno del punto



$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

es diferencia de funciones monótonas, luego de VA en un entorno de $\frac{\pi}{4}$: su s. de F. converge a $\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{4}+0\right)+f\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+0\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(iv) si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[$ se razona igual que en (ii)

(v) si $x=-\frac{\pi}{4}$ idem. que (iii) .

<u>Convergencia uniforme.</u>

$f \in C\left(\left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[\right)$: sea $[c,d] \subset \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$; como f es <u>constante</u> ,

$f \in VA[c,d]$ luego su s. de F. converge uniformemente :

la serie de Fourier converge uniformemente $\forall [c,d] \subset \left]-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right[$.

$f \in C\left(\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\right)$: sea $[c,d] \subset \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$; como f es <u>monótona</u> ,

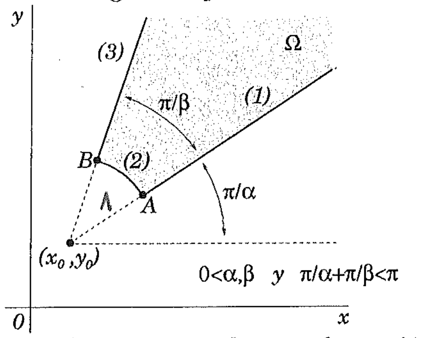
$f \in VA[c,d]$ luego su s. de F. conv. unif. :

la serie de Fourier converge unif. $\forall [c,d] \subset \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (10–6–2008)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Resolver el siguiente problema de contorno



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 10\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 26u = 0 \text{ en } \Omega \\ u(x,y) = 0 \text{ en } (1) \setminus \{A\} \text{ y en } (3) \setminus \{B\} \\ u(x,y) = e^{-5x+y} \text{ en } (2) \setminus \{A, B\} \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

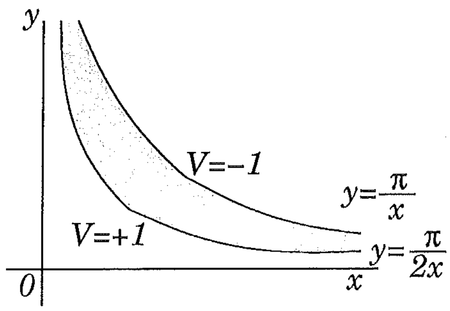
(Sug.: Utilizar primero la transformación $u(x,y) = v(x,y)e^{-5x+y}$. A continuación realizar una translación al origen ($h_1(z) = z - z_0$, siendo $z_0 = x_0 + iy_0$), después un giro y finalmente considerar la aplicación $h_3(\zeta) = \zeta^\beta + \frac{1}{\zeta^\beta}$ ($\zeta^\beta = e^{\beta \log_0 \zeta}$) para llegar al semiplano superior.)

P–2 *a*) Hallar una solución de la ecuación integral

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \ , \qquad -\infty < \lambda < \infty \ ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y es localmente de variación acotada y continua salvo en ± 1. (Sug.: Utilizar la teoría de la transformación de Fourier y el hecho de que vp $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} d\lambda = 0$.)

b) Hallar el potencial electrostático en la zona de la figura



(Sug.: Utilizar la transformación $h(z) = e^{z^2 - i\pi}$.)

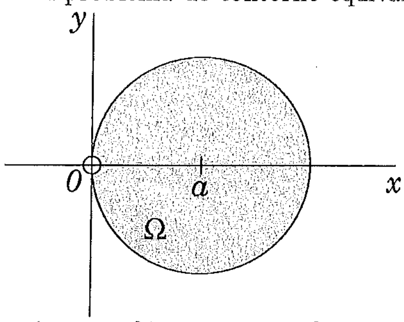
Nota. **P-1**, **P-2a** y **P-2b** se entregarán por separado. **P-1**: 4 hojas por una cara, **P-2a**: 3 hojas por una cara, **P-2b**: 3 hojas por una cara. Puntuación: (10; 4; 6).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (10–6–2008)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Sea $f(x)$ la función 1–periódica que en $]0,1]$ vale $x^{1/n}$ (n entero > 1). Estudiar la convergencia puntual y la convergencia uniforme del desarrollo de Fourier de la función $f(x)$. ¿Se puede aplicar el criterio de Dini para estudiar la convergencia del desarrollo de Fourier en los números enteros? Razonar la respuesta.

C–2 Hallar el problema de contorno equivalente al dado



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = f \text{ en } \partial\Omega \setminus \{0\} \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

(f continua en $\partial\Omega$ excepto en el origen donde tiene una discontinuidad de primera especie) vía la transformación $\omega = \frac{1}{z}$.

C–3 Hallar una solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \,, & 0 < x < 10 \,,\ t > 0 \,, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \,, & t \geq 0 \,, \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen} 2\pi x - 7 \operatorname{sen} 4\pi x \,, & 0 \leq x \leq 10 \,, \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

C–4 Clasificar la ecuación diferencial

$$\operatorname{sh}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\operatorname{sh} x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sqrt{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = x^3$$

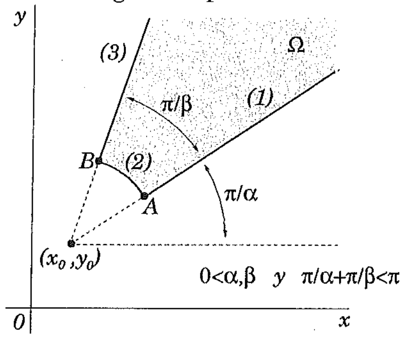
en el abierto $\Omega =]0, \infty[^2$.

Nota. Cada cuestión se entregará por separado y ocupará un máximo de dos hojas (por una cara). Puntuación: (2.5; 3; 3; 1.5).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (10–6–2008)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Resolver el siguiente problema de contorno



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 10\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 26u = 0 \text{ en } \Omega \\ u(x,y) = 0 \text{ en } (1) \setminus \{A\} \text{ y en } (3) \setminus \{B\} \\ u(x,y) = e^{-5x+y} \text{ en } (2) \setminus \{A, B\} \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

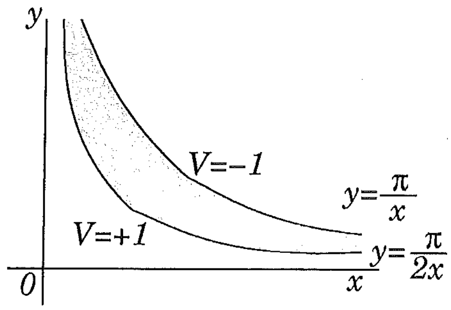
(Sug.: Utilizar primero la transformación $u(x,y) = v(x,y)e^{-5x+y}$. A continuación realizar una translación al origen ($h_1(z) = z - z_0$, siendo $z_0 = x_0 + iy_0$), después un giro y finalmente considerar la aplicación $h_3(\zeta) = \zeta^\beta + \frac{1}{\zeta^\beta}$ ($\zeta^\beta = e^{\beta \log_0 \zeta}$) para llegar al semiplano superior.)

P–2 *a*) Hallar una solución de la ecuación integral

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \ , \qquad -\infty < \lambda < \infty \ ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y es localmente de variación acotada y continua salvo en ± 1. (Sug.: Utilizar la teoría de la transformación de Fourier y el hecho de que vp $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} d\lambda = 0$.)

b) Hallar el potencial electrostático en la zona de la figura



(Sug.: Utilizar la transformación $h(z) = e^{z^2 - i\pi}$.)

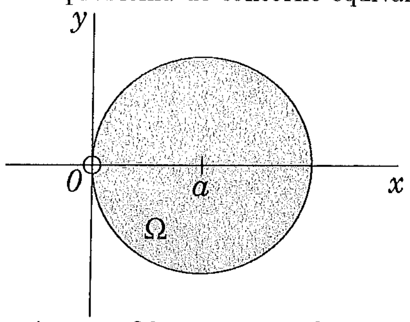
Nota. **P-1**, **P-2a** y **P-2b** se entregarán por separado. **P-1**: 4 hojas por una cara, **P-2a**: 3 hojas por una cara, **P-2b**: 3 hojas por una cara. Puntuación: (10; 4; 6).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (10–6–2008)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Sea $f(x)$ la función 1–periódica que en $]0,1]$ vale $x^{1/n}$ (n entero >1). Estudiar la convergencia puntual y la convergencia uniforme del desarrollo de Fourier de la función $f(x)$. ¿Se puede aplicar el criterio de Dini para estudiar la convergencia del desarrollo de Fourier en los números enteros? Razonar la respuesta.

C–2 Hallar el problema de contorno equivalente al dado



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = f \text{ en } \partial\Omega \setminus \{0\} \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

(f continua en $\partial\Omega$ excepto en el origen donde tiene una discontinuidad de primera especie) vía la transformación $\omega = \frac{1}{z}$.

C–3 Hallar una solución del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \,, & 0 < x < 10 \,,\ t > 0 \,, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \,, & t \geq 0 \,, \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen} 2\pi x - 7 \operatorname{sen} 4\pi x \,, & 0 \leq x \leq 10 \,, \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

C–4 Clasificar la ecuación diferencial

$$\operatorname{sh}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\operatorname{sh} x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sqrt{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = x^3$$

en el abierto $\Omega =]0,\infty[^2$.

Nota. Cada cuestión se entregará por separado y ocupará un máximo de dos hojas (por una cara). Puntuación: (2.5; 3; 3; 1.5).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DMA DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA

EDP (10-6-2008)

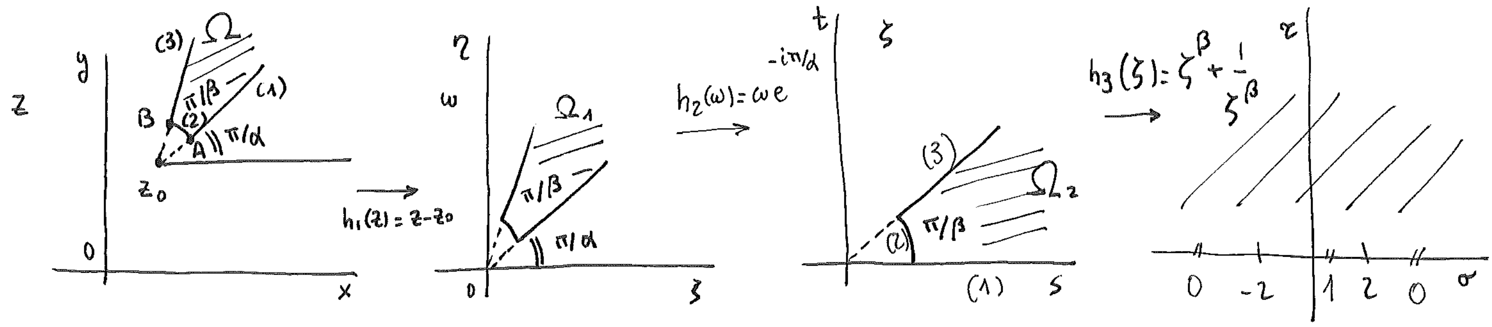
P-1

Mediante la transformación $u(x,y) = v(x,y)\, e^{-5x+y}$ la ecuación dada toma la forma
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno del problema inicial, llegamos al siguiente problema de contorno

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega \\ v=0 & \text{en } (1)\setminus A \\ v=0 & \text{en } (3)\setminus B \\ v(x,y)=1 & \text{en } (2)\setminus \{A,B\} \\ v \text{ acotada} \end{cases}$$

Realizando a continuación las transformaciones que nos han sugerido en el enunciado



llegamos al problema de contorno

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ T(\sigma)=1 & \text{si } \sigma\in\,]-2,2[\\ T(\sigma)=0 & \text{si } \sigma<-2 \text{ o } \sigma>2 \\ T \text{ acotada} \end{cases}$$

Comprobemos que $h_3(\zeta)\in\mathbb{R}^2_+$ cuando $\zeta\in\Omega_2$: $\zeta = re^{i\theta}$ con $r>1$ y $\theta\in\,]0,\pi/\beta[$ y así

$$h_3(\zeta) = \left(re^{i\theta}\right)^\beta + \frac{1}{\left(re^{i\theta}\right)^\beta} = \left\{ \left(re^{i\theta}\right)^\beta = e^{\beta \log(re^{i\theta})} = e^{\beta[\log r + i\theta]} = r^\beta e^{i\theta\beta} \right\}$$

$$= r^\beta e^{i\theta\beta} + \frac{1}{r^\beta} e^{-i\theta\beta} = \left(r^\beta + \frac{1}{r^\beta}\right)\cos(\theta\beta) + i\left(r^\beta - \frac{1}{r^\beta}\right)\operatorname{sen}(\theta\beta).$$

Entonces $\operatorname{Im} h_3(\zeta) = \left(r^\beta - \frac{1}{r^\beta}\right)\operatorname{sen}(\theta\beta) > 0$ pues $r>1$ y $0<\theta\beta<\pi$.

Camí de Vera, s/n, Edifici 7A. 46022 VALENCIA • Tel. 96 387 76 60 - 96 387 70 00 Ext. 76600 • Fax 96 387 76 69 • http://www.dma.upv.es • E-mail: depmat@upvnet.upv.es

Si $\zeta \in (1)$, $\zeta = s > 1$ luego $h_3(s) = s^\beta + \dfrac{1}{s^\beta} \underset{s\to 1+}{\longrightarrow} 2$, $\underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, es decir, $h_3((1)) =]2,\infty[$

Si $\zeta = e^{i\theta} \in (2)$ con $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\beta}$, $h_3(e^{i\theta}) = e^{i\theta\beta} + e^{-i\theta\beta} = 2\cos(\theta\beta) \in]-2,2[$

Si $\zeta = r e^{\frac{i\pi}{\beta}} \in (3)$, $r>1$, $h_3\left(re^{\frac{i\pi}{\beta}}\right) = \left(re^{\frac{i\pi}{\beta}}\right)^\beta + \dfrac{1}{\left(re^{\frac{i\pi}{\beta}}\right)^\beta}$ $= \left\{ \left(re^{\frac{i\pi}{\beta}}\right)^\beta = e^{\beta \log_0\left(re^{\frac{i\pi}{\beta}}\right)} = e^{\beta\left[\log r + i\frac{\pi}{\beta}\right]} = r^\beta e^{i\pi} = -r^\beta \right\}$

$$= -r^\beta - \frac{1}{r^\beta} \underset{r\to 1+}{\longrightarrow} -2, \quad \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$h_3((3)) =]-\infty,-2[$.

La sol. de (II) es

$$T(\sigma,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} \frac{\tau}{(\sigma-l)^2+\tau^2}\,dl = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2-\sigma}{\tau}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2+\sigma}{\tau}\right)\right].$$

Por tanto, la solución del problema (I) es

$$v = T \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1:$$

$v \in C(\bar{\Omega} \setminus \{A,B\})$ por composición de continuas, v es armónica en Ω porque $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ es holomorfa en Ω y T armónica en $\mathbb{R}^2_+$. v es acotada por serlo T.

Finalmente la solución del problema inicial en Ω es:

$$u(x,y) = v(x,y)\, e^{-5x+y}$$

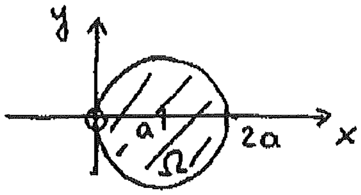
siendo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ z = x+iy \in \Omega}}{v(x,y)} = T(h_3(h_2(h_1(z)))) = T(h_3(h_2(z-z_0))) = T\left(h_3\left((z-z_0)e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}\right)\right) =$$

$$= T\left[\left((z-z_0)e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}\right)^\beta + \frac{1}{\left((z-z_0)e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}\right)^\beta}\right] = T(\sigma + i\tau) = T(\sigma,\tau)$$

Examen de EDP, 10-6-2008

C-2 Hallar el probl. equivalente al dado vía la transf. $h(z)=w=\frac{1}{z}$.



$$(1)\begin{cases}\Delta u=0 \text{ en } \Omega,\\ u=f \text{ en } \partial\Omega\setminus\{0\},\ f\in C(\partial\Omega\setminus\{0\})\\ u \text{ acot.}\end{cases}$$

Obs. que $h(z)=\frac{1}{z}\in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$. Ω es el disco ab. de centro a y radio a:

(i) $\quad \Omega=D(a,a) \Rightarrow z\in\Omega$ sii $(x-a)^2+y^2<a^2$ sii $0<x^2+y^2<2ax$

y asimismo su frontera excepto el origen

(ii) $\quad \partial\Omega\setminus\{0\}=\{z=x+iy : 0\neq x^2+y^2=2ax\}$ sii $y=\pm\sqrt{2ax-x^2}$, $x\in\,]0,2a]$

Si $z=x+iy\neq 0$ entonces $h(z)=\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

Si $\underline{z\in\partial\Omega\setminus\{0\}}$ entonces $h(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\{\text{usando (ii)}\}=$

$$=\frac{1}{2a}\mp i\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{2ax}=\frac{1}{2a}\mp i\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{x}-1},\ x\in\,]0,2a],$$

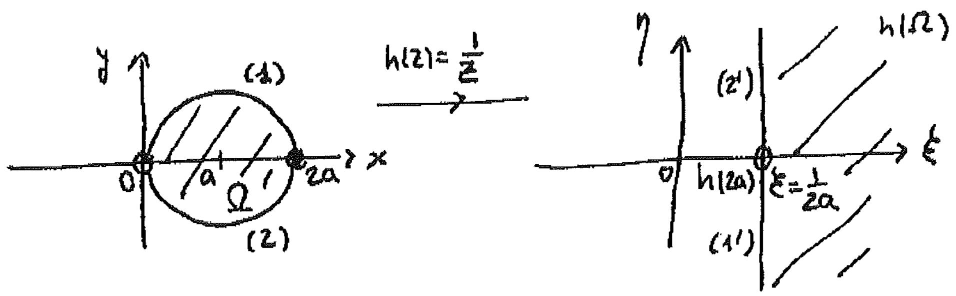
Luego $\xi=\operatorname{Re}h(z)=\frac{1}{2a}$, $\eta=\operatorname{Im}h(z)=\mp\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{x}-1}$. Luego:

(a) si $y>0$, $\eta=-\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{x}-1}\in\,]-\infty,0[$ cuando $x\in\,]0,2a[$

(b) si $y<0$, $\eta=+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2a}{x}-1}\in\,]0,\infty[$ cuando $x\in\,]0,2a[$

(y $h(2a)=\frac{1}{2a}+i\cdot 0$). Es decir, $\partial\Omega\setminus\{0\}$ se transforma en la vertical

$\xi=\frac{1}{2a}$, ver figura adjunta:



Si $\underline{z \in \Omega}$ entonces

$$h(z=x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} = \omega = \xi + i\eta$$

siendo $\xi = \dfrac{x}{x^2+y^2} > \dfrac{1}{2a}$ teniendo en cuenta (i), luego $w = h(z)$ está <u>a la derecha</u> de $\xi = \frac{1}{2a}$.

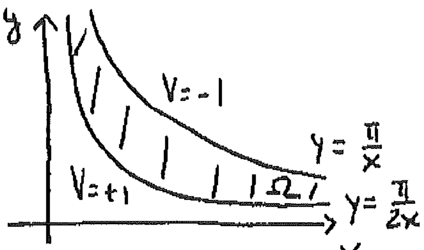
Obtenemos entonces el problema

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta v(\omega) = 0 & \text{en } \mathcal{O} = \{\omega : \operatorname{Re}\omega > \frac{1}{2a}\} \\ v(\omega) = f(h^{-1}(\omega)) & \text{para } \omega = \frac{1}{2a} + i\eta,\ \eta \in \mathbb{R} \\ v \text{ acot.} \end{cases}$$

Si $v(\omega)$ es sol. de (2), def. $u(z) = v(h(z))$ que es sol. de (1)

($h \in H(\Omega)$ y $v \in h(\mathcal{O})$ con $h(\Omega) \subset \mathcal{O}$, luego $u \in h(\Omega)$; si $z \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ entonces $u(z) = v(h(z)) = f(h^{-1}(h(z))) = f(z)$; u acot. porque v acot.)

P2 b Hallar el pot. electrostático en la zona de la figura



Usar la transf. $h(z)=e^{z^2 x^2 - i\pi}$.

Se trata del problema

$$(1)\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega = \{z = x+iy : \ y > \frac{\pi}{2x},\ y < \frac{\pi}{x}\} = \{z : 0 < 2xy - \pi < \pi\} \\ u = -1 \quad \text{si } y = \frac{\pi}{x} \\ u = +1 \quad \text{si } y = \frac{\pi}{2x} \\ u \text{ acot.} \end{cases}$$

Sea la transf. $h(z) = e^{z^2 - i\pi} \in H(\mathbb{C})$.

Si $z = x+iy \in \Omega$ $(0 < 2xy - \pi < \pi)$ entonces

$$h(z) = e^{x^2 - y^2 + i(2xy - \pi)} = w \quad \Rightarrow \begin{cases} |w| = e^{x^2 - y^2} > 0 \\ \arg w = 2xy - \pi \in \,]0, \pi[\end{cases}$$

luego $w \in \mathbb{R}^2_+$.

Si $z \in \partial\Omega$:

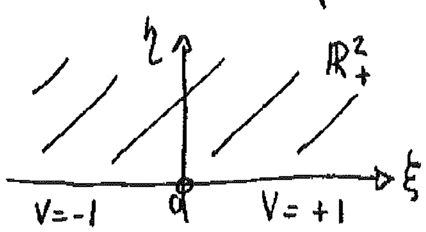
(i) si $z = x+iy$ con $y = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 2xy - \pi = \pi$, luego

$$h(z) = e^{x^2 - \frac{\pi^2}{x^2}} e^{i\pi} = -e^{x^2 - \frac{\pi^2}{x^2}} \in \,]-\infty, 0[\quad \text{cuando } x \in \,]0, \infty[$$

(ii) si $y = \frac{\pi}{2x}$ entonces $2xy - \pi = 0$ y

$$h(z) = e^{x^2 - \frac{\pi^2}{4x^2}} \in \,]0, \infty[\quad \text{cuando } x \in \,]0, \infty[$$

Obtenemos entonces el problema



$$(2)\begin{cases} \Delta v(w) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ v(\xi, 0) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ -1, & \xi < 0 \end{cases} \\ v \text{ acot.} \end{cases}$$

cuya solución es conocida:

$$v(\xi,\eta) \underset{\eta>0}{=} \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}(-1)\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}(+1)\,dt \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta} \underset{\eta>0}{=} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arg_0 w\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\arg_0 w$$

Luego la solución de (1) es

$$\underset{z\in\Omega}{u(z)} = v(h(z)) = 1 - \frac{2}{\pi}(2xy - \pi)$$

//

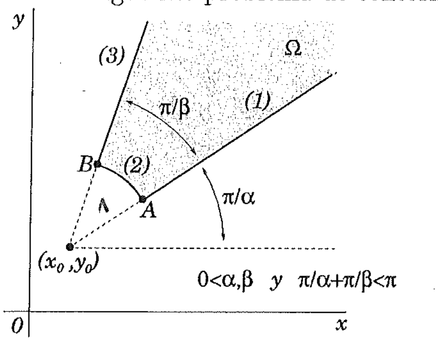
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales

Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (10–6–2008)

2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Resolver el siguiente problema de contorno



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 10\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 26u = 0 \text{ en } \Omega \\ u(x,y) = 0 \text{ en } (1) \setminus \{A\} \text{ y en } (3) \setminus \{B\} \\ u(x,y) = e^{-5x+y} \text{ en } (2) \setminus \{A, B\} \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

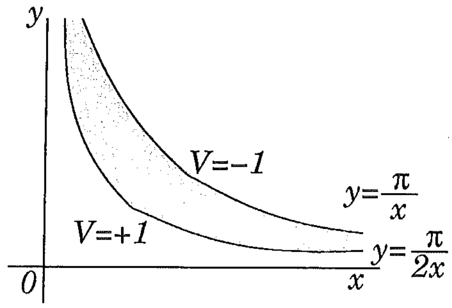
(Sug.: Utilizar primero la transformación $u(x,y) = v(x,y)e^{-5x+y}$. A continuación realizar una translación al origen ($h_1(z) = z - z_0$, siendo $z_0 = x_0 + iy_0$), después un giro y finalmente considerar la aplicación $h_3(\zeta) = \zeta^\beta + \frac{1}{\zeta^\beta}$ ($\zeta^\beta = e^{\beta \log_0 \zeta}$) para llegar al semiplano superior.)

P–2 *a*) Hallar una solución de la ecuación integral

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \ , \qquad -\infty < \lambda < \infty \ ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y es localmente de variación acotada y continua salvo en ± 1. (Sug.: Utilizar la teoría de la transformación de Fourier y el hecho de que vp $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} d\lambda = 0$.)

b) Hallar el potencial electrostático en la zona de la figura



(Sug.: Utilizar la transformación $h(z) = e^{z^2 - i\pi}$.)

Nota. **P-1**, **P-2a** y **P-2b** se entregarán por separado. **P-1**: 4 hojas por una cara, **P-2a**: 3 hojas por una cara, **P-2b**: 3 hojas por una cara. Puntuación: (10; 4; 6).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (16–1–2008)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

en el abierto $\Omega = \{x > 0, y < 0\}$.

C–2 Sea $f(x)$ la función 2-periódica que coincide con $|\operatorname{sh} x|$ en el intervalo $[-1, 1]$.

a) Representar gráficamente $f(x)$.

b) Estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de $f(x)$.

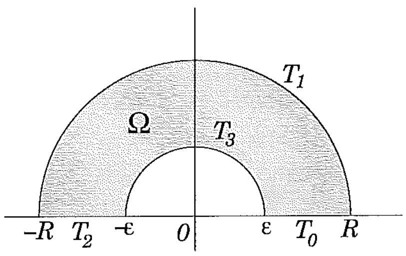
c) Hallar su serie de Fourier.

C–3 Resolver la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = e^{-\pi|\omega|} , \qquad -\infty < \omega < \infty ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

C–4 Hallar el problema de Dirichlet equivalente al siguiente



$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \text{ en } \Omega , \\ \Phi(r) = T_0 , \quad \varepsilon < r < R , \\ \Phi(Re^{i\theta}) = T_1 , \quad 0 < \theta < \pi , \\ \Phi(r) = T_2 , \quad -R < r < -\varepsilon , \\ \Phi(\varepsilon e^{i\theta}) = T_3 , \quad 0 < \theta < \pi , \end{cases}$$

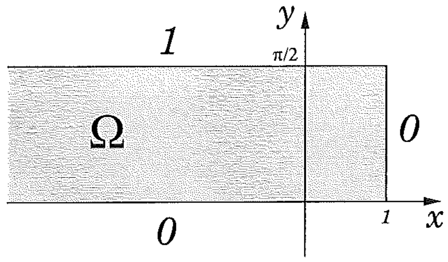
utilizando la transformación $\omega = -\log_{\frac{\pi}{2}} z$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (1.5; 3; 2.5; 3).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (16–1–2008)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 *a*) Calcular el potencial electrostático en la zona indicada por la figura

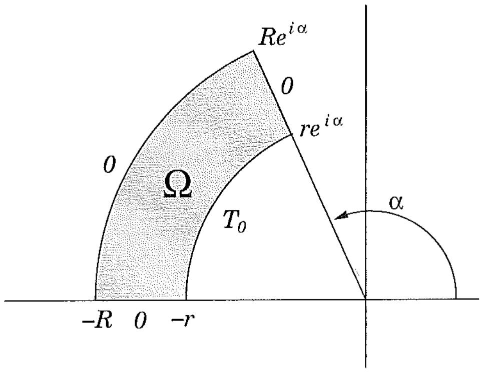


La solución al problema se obtendrá tras aplicar las siguientes transformaciones: $h_1(z) = e^z$, $h_2(z) = z^2$, $h_3(z) = z + \frac{1}{z}$.

b) 1) Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$. En el transcurso de los cálculos se tendrá en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

2) Calcular $f * f$, siendo $f(x)$ la función anterior.

P–2 Determinar la distribución estacionaria de temperatura en una barra cuya sección transversal es un rectángulo curvilíneo como muestra la figura. Se supone que la temperatura de la superficie curva interior es T_0 mientras que las otras caras se mantienen a temperatura 0.



(Sug.: Utilizar la transformación $\omega(z) = \log_\pi(z)$, efectuar después una translación y finalmente aplicar las fórmulas de la pág. 32 del curso, que son válidas en situaciones como las de este ejercicio, aún en presencia de discontinuidades.)

Nota. P-1, **P-2a** y **P-2b** se entregará por separado. Puntuación: (6; 4; 10).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (16–1–2008)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

en el abierto $\Omega = \{x > 0, y < 0\}$.

C–2 Sea $f(x)$ la función 2-periódica que coincide con $|\operatorname{sh} x|$ en el intervalo $[-1, 1]$.

a) Representar gráficamente $f(x)$.

b) Estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de $f(x)$.

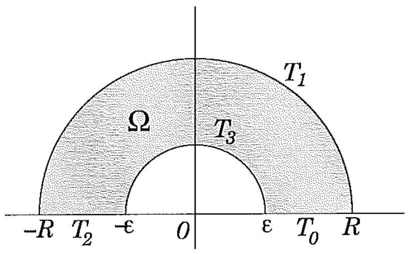
c) Hallar su serie de Fourier.

C–3 Resolver la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx = e^{-\pi|\omega|}, \qquad -\infty < \omega < \infty,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

C–4 Hallar el problema de Dirichlet equivalente al siguiente



$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \text{ en } \Omega, \\ \Phi(r) = T_0, \quad \varepsilon < r < R, \\ \Phi(Re^{i\theta}) = T_1, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \Phi(r) = T_2, \quad -R < r < -\varepsilon, \\ \Phi(\varepsilon e^{i\theta}) = T_3, \quad 0 < \theta < \pi, \end{cases}$$

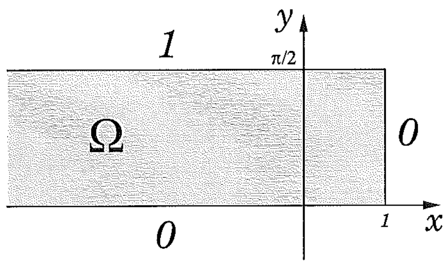
utilizando la transformación $\omega = -\log_{\frac{\pi}{2}} z$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (1.5; 3; 2.5; 3).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (16–1–2008)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 *a*) Calcular el potencial electrostático en la zona indicada por la figura

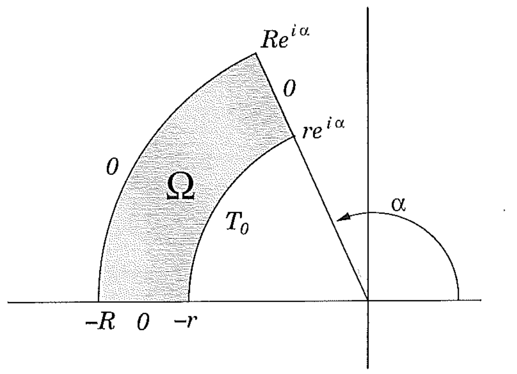


La solución al problema se obtendrá tras aplicar las siguientes transformaciones: $h_1(z) = e^z$, $h_2(z) = z^2$, $h_3(z) = z + \frac{1}{z}$.

b) 1) Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$. En el transcurso de los cálculos se tendrá en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

2) Calcular $f * f$, siendo $f(x)$ la función anterior.

P–2 Determinar la distribución estacionaria de temperatura en una barra cuya sección transversal es un rectángulo curvilíneo como muestra la figura. Se supone que la temperatura de la superficie curva interior es T_0 mientras que las otras caras se mantienen a temperatura 0.



(Sug.: Utilizar la transformación $\omega(z) = \log_\pi(z)$, efectuar después una translación y finalmente aplicar las fórmulas de la pág. 32 del curso, que son válidas en situaciones como las de este ejercicio, aún en presencia de discontinuidades.)

Nota. **P-1**, **P-2a** y **P-2b** se entregará por separado. Puntuación: (6; 4; 10).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (1–9–2008)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Utilizando la transformación de Fourier resolver el siguiente problema:

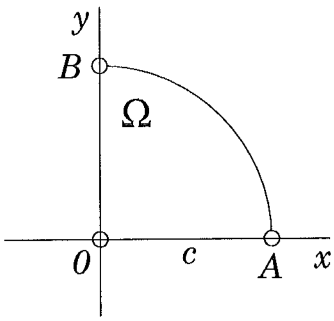
$$\begin{cases} (i) & u(x,t+h) - 2h\,u(x,t) + u(x,t-h) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\ , \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2\ ,\ h = \text{cte.} > 0 \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{R},\ u(x,\cdot)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \text{ y } \lim \left\| \frac{u(x+\eta,\cdot)-u(x,\cdot)}{\eta} - \frac{\partial u}{\partial x}(x,\cdot) \right\|_1 = 0 \\ (iii) & u(0,t) = g(t)\ ,\ t \in \mathbb{R},\quad g \text{ y } \hat{g} \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

(Sug.: Utilizar la transformada de Fourier con respecto a la variable t).

P–2 Resolver el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \qquad (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = 0\ , \qquad 0 < x < c\ ,\ (c = \text{cte.} > 0) \\ u(0,y) = 0\ , \qquad 0 < y < c\ , \\ u(x,y) = \left(\operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{y}) - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{y})\ , \qquad x^2+y^2 = c^2\ ,\ x,y > 0 \\ u \text{ acotada,} \end{cases}$$

en la zona Ω de la figura adjunta



(Sug.: Utilizar la transformación $\Phi(x,y) = \left(\ln\left(\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right)$ $(\Phi^{-1}(s,t) = (ce^{-s}\operatorname{sen} t, ce^{-s}\cos t))$ y resolver el problema equivalente en la nueva zona $\Phi(\bar{\Omega} \setminus \{0, A, B\})$ utilizando el método de separación de variables. En el cálculo de las condiciones de contorno del problema equivalente se necesitará la identidad $\operatorname{arc\,tg}\xi + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\xi} = \frac{\pi}{2}$, $\xi \in (0,\infty)$.)
Nota: No es necesario calcular los coeficientes de Fourier en la expresión que da la solución del problema de contorno equivalente.

Nota. Cada problema se entregará por separado. Puntuación: (P1: **6 puntos**) (P2: Obtención detallada de la nueva zona **3 puntos**, Ecuación diferencial equivalente **3 puntos**, Nuevo problema de contorno **3 puntos**, Resolución por separación de variables del nuevo problema de contorno **4 puntos**, Solución explícita del problema inicial **1 punto**).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (1–9–2008)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\sqrt{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

en el abierto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} r_k$ (aquí r_k es la recta $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$).

C–2 Sea $f(x)$ la función 2–periódica que en $]0,1[$ vale $x^{1/5}$ y en $]-1,0[$ vale $1 - x^{1/3}$ ($x^{1/3} = -e^{1/3\log(-x)}$). Representar gráficamente la función $y = f(x)$ y estudiar la convergencia puntual y la convergencia uniforme del desarrollo de Fourier de esta función.

C–3 Calcular la distribución estacionaria de temperatura en una barra cuya sección transversal es el semicírculo de radio a y centro el origen (y situado en el semiplano superior). Se supone que la temperatura de la superfície curva $r = a$ es de 0 grados mientras que la cara plana se mantiene la mitad izquierda a T_0 grados y la otra mitad a 0 grados. (Sug.: Utilizar la transformación $\omega = \left(\frac{a+z}{a-z}\right)^2$).

C–4 Resolver la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega^2 e^{-|\omega|}\ , \qquad -\infty < \omega < \infty\ ,$$

sabiendo que $f \in L'^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$. (Sug.: Utilizar la transformación de Fourier).

Nota. Puntuación: (1,5; 3; 3,5; 2). Cada cuestión debe entregarse por separado. C1 y C2 deben ocupar un máximo de dos hojas (por una cara) y C3 y C4 un máximo de tres hojas (por una cara).

C.1

Basta con ver el signo del determinante de la matriz simétrica

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos x} & \sqrt{y} \\ \sqrt{y} & \cos^2 x \end{pmatrix}$$

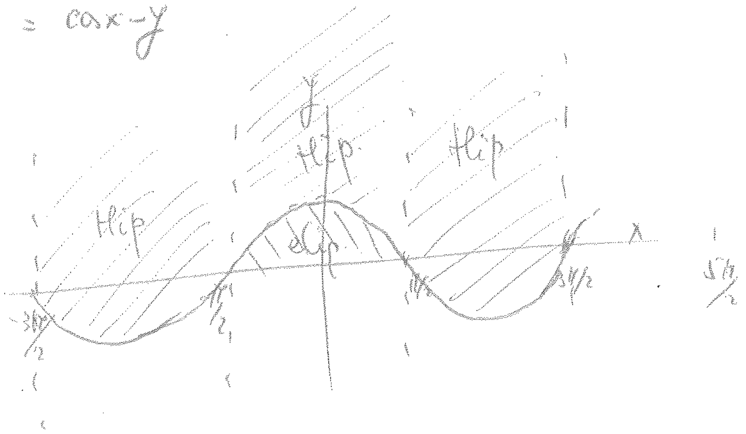
$$\mathrm{Det}(A) = \frac{1}{\cos x}\cdot \cos^2 x - \left(\sqrt{y}\right)^2 = \cos x - y$$

Así resulta:

$\cos x - y < 0$: Hiperbólica.

$\cos x - y = 0$: parabólica.

$\cos x - y > 0$: elíptica



Examen de EDP, 1-9-2008

$\boxed{C2}$ Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, & x \in \,]0,1[\\ 1-x^{1/3}, & x \in \,]-1,0[\end{cases}, \quad f \text{ 2-periódica.}$$

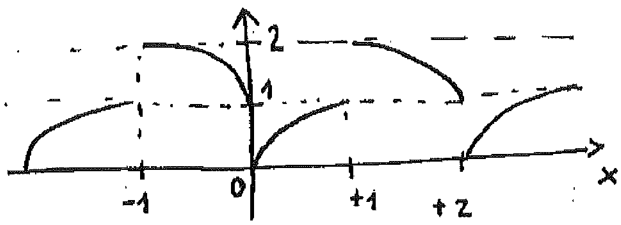
Siendo $x^{\frac{1}{3}} := -e^{\frac{1}{3}\log(-x)}$ para $x \in \,]-1,0[$ (de hecho, para $x<0$). Representamos gráficamente $f(x)$:

límites: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{3}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x^{\frac{1}{3}} = 1$

$\lim\limits_{x\to(-1)+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+} (1+e^{\frac{1}{3}\log(-x)}) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (1+e^{\frac{1}{3}\log(-x)}) = 1$

si $x \in \,]0,1[$, $f(x) \in C\,]0,1[$ y $\exists$ $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} > 0$ para $x \in \,]0,1[$

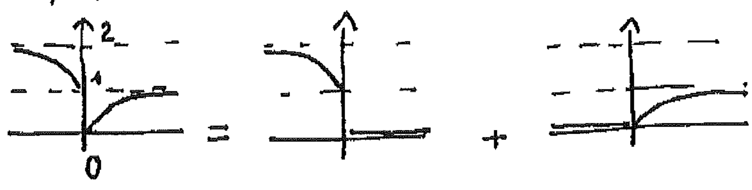
si $x \in \,]-1,0[$, $f(x) \in C\,]-1,0[$ y $\exists$ $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-1} e^{\frac{1}{3}\log(-x)} < 0$ para $x \in \,]-1,0[$



Conv. Puntual: como f es 2-per. nos limitamos a puntos $x \in \,]-1,+1]$.

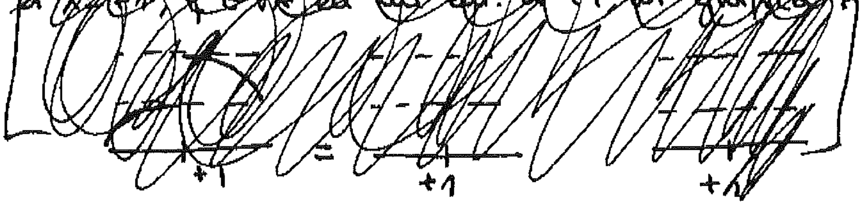
Si $x \in \,]-1,0[$ ó $x \in \,]0,1[$ como $f \in C^1$, $f \in VA[x-\delta, x+\delta]$ y por el crit. de Jordan su s. de F. converge en x a $f(x)$.

Si $x=0$, $f \in VA$ en un entorno de 0, ver gráfica:



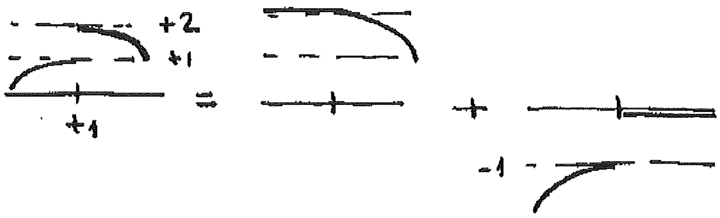
f es suma de funciones monótonas. Luego (crit. de Jordan) su s. de F.

~~Si x=+1, f ∈ VA en un ent. de +1 ver gráfica:~~



conv. en $x=0$ a $\dfrac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Si $x=1$ entonces $f \in VA$ en un ent. de 1, ver gráfica:



f es suma de f^{ns} monótonas. Luego (Crit. de Jordan) su s. de F. conv.

en $x=+1$ a $\dfrac{f(1+0)+f(1-0)}{2} = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$

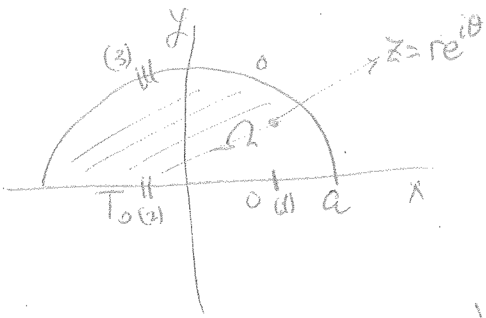
<u>Conv. Uniforme</u>. Como $f \in C]0,1[$ y $f \uparrow$, $f \in VA[c,d]$ $\forall [c,d] \subset]0,1[$, luego su s. de F. c.u. en $[c,d]$ (Crit. de Jordan):

"$\forall [c,d] \subset]0,1[$ la serie de F. conv. unif.".

Análogamente se razona si tomamos el intervalo $]-1,0[$.

C. 3

El problema original es el siguiente:



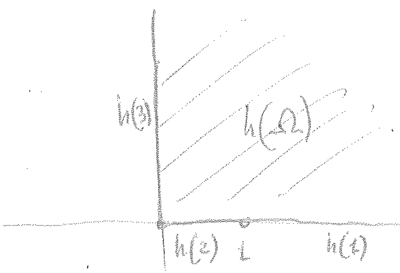
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega = \{z \mid z = re^{i\theta}, 0<r<a, 0<\theta<\pi\} \\ u(re^{0}) = 0 & 0<r<a \\ u(re^{i\pi}) = T_0 & 0<r<a \\ u(ae^{i\theta}) = 0 & 0<\theta<\pi \end{cases}$$

Vamos a aplicar la transformación $\omega = \left(\frac{a+z}{a-z}\right)^2$ en dos etapas: 1ª Etapa:

$h(z) = \varsigma = \frac{a+z}{a-z}$

$$\varsigma = h(z) = \frac{a+z}{a-z} = \frac{a+re^{i\theta}}{a-re^{i\theta}} = \frac{a+r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta}{a-r\cos\theta-ir\,\mathrm{sen}\,\theta} =$$

$$= \frac{(a+r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta)(a-r\cos\theta+ir\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(a-r\cos\theta)^2+r^2\mathrm{sen}^2\theta} = \frac{a^2-r^2+2iar\,\mathrm{sen}\,\theta}{a^2+r^2-2ar\cos\theta}$$



Tanto la parte real como la parte imaginaria de $h(z)$ son positivas para los $z\in\Omega$

Hagamos un seguimiento del contorno:

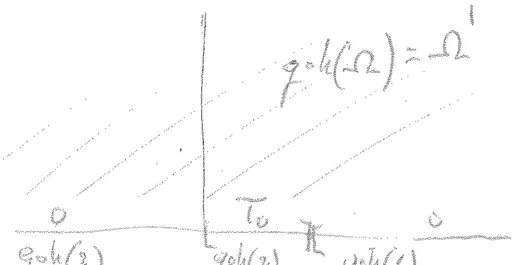
$h(1)$: $z = x \quad 0<x<a \qquad h(x) = \frac{a+x}{a-x} \quad \begin{cases} h(0) = 1 \\ h(a) = +\infty \end{cases}$

$h(2)$: $z = -x \quad 0<x<a \qquad h(x) = \frac{a-x}{a+x} \quad \begin{cases} h(0) = 1 \\ h(-a) = 0 \end{cases}$

$g(\varsigma) = \omega = \varsigma^2$

$h(3)$: $z = ae^{i\theta}, 0<\theta<\pi, \quad h(z) = \frac{a+ae^{i\theta}}{a-ae^{i\theta}} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} =$

$$= \frac{1+\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{0}{2(1-\cos\theta)} + i\,\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{2(1-\cos\theta)}$$



2ª Etapa Del 1er cuadrante pasamos al semi plano superior.

Llegamos así al problema equivalente:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } \Omega' = \mathbb{R}^2_+ \\ v(\xi) = 0 & x>1 \\ v(\xi) = T_0 & 0<x<1 \\ v(\xi) = 0 & x<0 \end{cases}$$

Solución:

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 T_0 \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt = \frac{T_0}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-\xi}{\eta}\right)\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{T_0}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{\eta} - \operatorname{arctg}\frac{-\xi}{\eta}\right] = \frac{T_0}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta} - \operatorname{arctg}\frac{\xi-1}{\eta}\right] =$$

$$= \frac{T_0}{\pi}\left[\arg(\omega-1) - \arg\omega\right] = \frac{T_0}{\pi}\arg\frac{\omega-1}{\omega}$$

Solución del prob. original:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{T_0}{\pi}\arg\frac{\left(\frac{a+re^{i\theta}}{a-re^{i\theta}}\right)^2-1}{\left(\frac{a+re^{i\theta}}{a-re^{i\theta}}\right)^2}$$

Nota: Hay muchas más formas de poner el resultado

$\boxed{P1}$ Supongamos que $u(x,t)$ es solución del problema y def.

$v(x,\lambda) = [u(x,\cdot)]^\wedge(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Teniendo en cuenta (ii) y la propiedad $[f(\cdot+h)]^\wedge(\lambda) = e^{i\lambda h}\hat{f}(\lambda)$, $h\in\mathbb{R}$, calculamos la tr. de F. de (i): fijado x,

$$e^{i\lambda h} v(x,\lambda) - 2h\cdot v(x,\lambda) + e^{-i\lambda h} v(x,\lambda) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

esto es,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + (2h \underbrace{- e^{i\lambda h} - e^{-i\lambda h}}_{2\cos\lambda h}) v = 0 ,$$

que es una EDO de orden 1 (coefs. ctes) con resp. a x: su sol. general es

$$v(x,\lambda) = C(\lambda)\, e^{-2(h-\cos\lambda h)\cdot x}$$

Teniendo en cuenta (iii), $v(0,\lambda) = \hat{g}(\lambda) = C(\lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, luego

$$[u(x,\cdot)]^\wedge(\lambda) = v(x,\lambda) = \hat{g}(\lambda)\, e^{-2hx}\, e^{2x\cdot\cos\lambda h}$$

Obs. ahora que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ por (iii) y que, como $\cos x \in [-1,1]$, entonces $e^{2x\cos\lambda h} \in [e^{-2x}, e^{2x}]$ por lo que $v(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall x$: podemos hacer uso de la fórmula de inv. de Fourier (xiv)

$$\forall t\in\mathbb{R} \;(x\in\mathbb{R}) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2hx} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\lambda)\, e^{2x\cos\lambda h}\, e^{i\lambda t}\, dt$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Examen 1-9-2008

EDP

P-2 Obtención de la nueva zona

Si $z \in (1)$
$z = x$, $0 < x < c$ $\quad \phi(x,0) = \left(\ln \frac{c}{\sqrt{x^2}}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[x \to 0+]{} \left(+\infty, \frac{\pi}{2}\right)$
$\xrightarrow[x \to c-]{} \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Si $z \in (3)$
$z = iy$, $0 < y < c$ $\quad \phi(0,y) = \left(\ln \frac{c}{\sqrt{y^2}}, 0\right) \xrightarrow[y \to 0+]{} (+\infty, 0)$
$\xrightarrow[y \to c-]{} (0,0)$

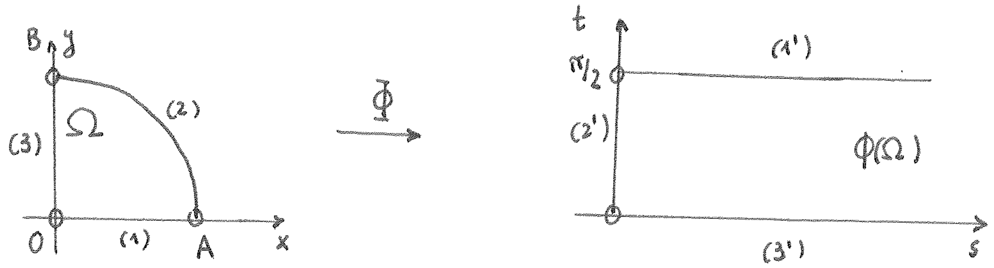
Si $z \in (2)$
$z = x + iy$
$x^2 + y^2 = c^2$, $0 < x < c$, $0 < y < c$

$\phi(x,y) = \left(\ln \frac{c}{c}, \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = \left(0, \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) \xrightarrow[\substack{x \to c \\ y \to 0}]{} \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ A$

$\xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ y \to c}]{} (0,0) \ B$

Si $z \in \Omega$ p.e. $z = \frac{c}{2} + i\frac{c}{2}$, $\phi(z) = \left(\ln \frac{c}{\sqrt{c^2/4 + c^2/4}}, \operatorname{arctg} 1\right) = \left(\ln \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$,

por tanto



Ecuación diferencial equivalente

$$\phi(x,y) = \left(\ln \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}, \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$$

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} , \quad A(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(s,t) = \phi'(x,y)\, A(x,y)\, \phi'(x,y)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = a_{11} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = -1$$

$$\tilde{a}_2 = a_{11} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0$$

, y así la ecuación equivalente es

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial s} \qquad (s,t) \in \phi(\Omega)$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Nuevo problema de contorno

(3') $V(s,0) = u(\phi^{-1}(s,0)) = u(0, ce^{-s}) = 0$
$0 < s < \infty$
$\phi^{-1}(s,t) = (ce^{-s}\operatorname{sen} t, ce^{-s}\cos t)$

(1') $V(s,\frac{\pi}{2}) = u(\phi^{-1}(s,\frac{\pi}{2})) = u(ce^{-s},0) = 0$
$0 < s < \infty$

(2') $V(0,t) = u(\phi^{-1}(0,t)) = u(c\operatorname{sen} t, c\cos t) = f(c\operatorname{sen} t, c\cos t) =$
$0 < t < \frac{\pi}{2}$
$f(x,y) = \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

$$= \left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} - \frac{\pi}{2}\right]\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = (t-\tfrac{\pi}{2})t$$

Resolución por MSV del nuevo problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial v}{\partial s} \\ V(s,0) = V(s,\frac{\pi}{2}) = 0 \\ V(0,t) = t(t-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Calculemos primero las soluciones elementales de la ecuación diferencial que satisfacen las condiciones de contorno nulas:

$v = ST$

$\begin{cases} T'' - \lambda T = 0, & t \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ T(0) = T(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} S' - \lambda S = 0, & s > 0 \end{cases}$

$r^2 = \lambda \qquad \lambda = 0,\ \lambda > 0 \longrightarrow T \equiv 0$

Si $\lambda < 0$, SF $\{\cos\sqrt{-\lambda}\, t, \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\, t\}$, $T(t) = A\cos\sqrt{-\lambda}\, t + B\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\, t$
$T(0) = T(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\Rightarrow$ $A = 0$, $\lambda = -4n^2, n = 1,2,\ldots$
$T(t) = B\operatorname{sen} 2nt$

y $S(s) = Ce^{-4n^2 s}$ $\Longrightarrow$ $V(s,t) = De^{-4n^2 s}\operatorname{sen} 2nt$

$$V(s,t) = \sum_1^\infty D_n e^{-4n^2 s}\operatorname{sen} 2nt$$

$$V(0,t) = \sum_1^\infty D_n \operatorname{sen} 2nt \overset{?}{=} t(t-\tfrac{\pi}{2})$$

Consideremos la función π-periódica que resulta de extender $g(t) = t(t-\frac{\pi}{2})$ a $]-\frac{\pi}{2},0[$ de forma impar y a toda la recta con periodo π. Entonces $g(t) = \sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} 2nt$ siendo $b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\operatorname{sen} 2nt\, dt$. Finalmente la solución del problema dado es

$$u(x,y) = v\left(\ln\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}, \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = \sum_1^\infty b_n e^{-4n^2 \ln\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}}}\operatorname{sen}\left(2n\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (19–12–2008)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 *a*) Utilizando la transformación de Fourier resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{(\omega^2 - 2i\omega + 8)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \ , \qquad -\infty < \omega < \infty \ ,$$

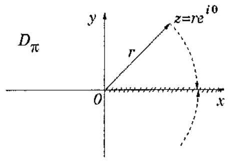
sabiendo que $f \in L'^1(\mathbb{R})$.

b) Utilizar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de Cauchy–Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in (-\pi,\pi) \times (-\infty,\infty) \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos \frac{7}{2}x \end{cases}$$

P–2 *a*) Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ , & z \in D_\pi \ , \\ \lim_{\theta \to 0+} u(re^{i\theta}) = g_1(r) \ , & g_1(0+) \text{ finito} \ , \\ \lim_{\theta \to 2\pi -} u(re^{i\theta}) = g_2(r) \ , & g_2(0+) \text{ finito} \ , \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$



$(g_1(r), g_2(r) \in C(]0,\infty[) \cap L^\infty(]0,\infty[))$ Sug.: Hacer el cambio de variable $\omega = \sqrt{z}$ y probar que se obtiene el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+ \ , \\ v(r) = g_1(r^2) \ , & r > 0 \ , \\ v(r) = g_2(r^2) \ , & r < 0 \ , \\ v \text{ acotada} \ . \end{cases}$$

b) Hallar la solución explícita del anterior problema de contorno en el caso $g_1(r) = 1$, $g_2(r) = -1$.

Nota. Cada problema se entregará por separado. Puntuación: (5; 5; 10).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (19–12–2008)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2e^y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ , \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ .$$

C–2 Demostrar que

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)\ , \qquad 0\le x\le\pi\ ,$$

utilizando la teoría de las series de Fourier.

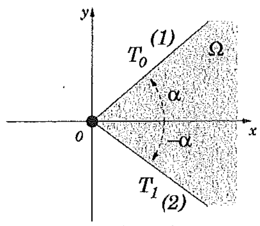
C–3 Resolver el siguiente problema (h es un parámetro real)

$$\begin{aligned} u(x+h,t)&=\frac{\partial u}{\partial t}\ , && (x,t)\in\mathbb{R}^2\ ,\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)&=e^{-|x|}\ , && x\in\mathbb{R}\ ,\end{aligned}$$

utilizando la transformada de Fourier.

C–4 ¿Cual es el problema de contorno equivalente al siguiente

$$\begin{aligned}&\Delta u=0 \text{ en } \Omega\\ &u=T_0 \text{ en } (1)\\ &u=T_1 \text{ en } (2)\\ &u \text{ acotada}\end{aligned}$$



mediante la transformación $h(z)=(ze^{i\alpha})^{\frac{\pi}{2\alpha}}$? El parámetro $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Nota. Puntuación: (2,5; 2,5; 2,5; 2,5). Cada cuestión debe entregarse por separado. Cada cuestión deben ocupar un máximo de dos hojas (por una cara).

$$X(x) = C \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n}{2}x\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \right) = C \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{n}{2}(\pi + x)\right], \quad C \neq 0.$$

Resolvemos entonces (II) con $\lambda = -\left(\frac{n}{2}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$ La ec. dif.

$T'' + \left(\frac{n}{2}\right)^2 T = 0$ posee como sol. general $T(t) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}t\right) + B \cos\left(\frac{n}{2}t\right)$,

A, B ctes. Si $T(0) = 0$, entonces

$$T(0) = B = 0$$

luego

$$T(t) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}t\right), \quad A \neq 0.$$

Por lo tanto las funciones "elementales"

$$D \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}t\right) \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{n}{2}(\pi + x)\right], \quad D \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

verifican (i), (ii) y (iii). La derivada de una de estas funciones elementales con respecto a t, en $t = 0$, es

$$D \cdot \frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{n}{2}(\pi + x)\right] = \frac{n}{2} D \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \cdot \cos\frac{n}{2}x + \cos\frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{nx}{2} \right)$$

que, comparando con (iv), coincide con $\cos\frac{7}{2}x$ tomando $n = 7$ y $\frac{7}{2}D = 1$ (obs: que $\cos\frac{7\pi}{2} = 0$ y $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2} = 1$). Luego la función

$$u(x, t) = \frac{2}{7} \operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}t\right) \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{7}{2}(\pi + x)\right]$$

verifica (i), (ii), (iii) y (iv), luego es <u>solución</u> del problema.

EDP, 19-12-2008

P1b Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ (x,t) \in (-\pi,\pi)\times(-\infty,+\infty) \ , \\ \text{(ii)} & u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t \in \mathbb{R} \\ \text{(iii)} & u(x,0) = 0 \quad , x \in [-\pi,\pi] \\ \text{(iv)} & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(\frac{7}{2}x) \quad , x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$$

Busquemos funciones de la forma $X(x)\cdot T(t)$ ($X \in C^2[0,\pi]$, $T \in C^2(\mathbb{R})$, no id. nulas) que verifican (i), (ii) y (iii). Sustituyendo en (i) obtenemos

$$X(x)\cdot T''(t) = X''(x)\cdot T(t) \longrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \text{ constante}.$$

Sustituyendo en (ii) y (iii) obtenemos que $X(-\pi) = X(+\pi) = 0$ y $T(0) = 0$. Luego $X(x)$, $T(t)$ satisfacen

$$(\mathrm{I})\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(-\pi) = X(+\pi) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases}$$

(λ constante). Resolvemos (I). La ec. dif. es de coefs. ctes. y su polinomio característico es $p(z) = z^2 - \lambda$. Luego:

(a) si $\lambda > 0$, la sol. general es $X(x) = A\,e^{\sqrt{\lambda}x} + B\,e^{-\sqrt{\lambda}x}$, A, B ctes.
Pero $X(-\pi) = 0$, $X(+\pi) = 0$ implican que $A = B = 0$, luego $X \equiv 0$.

(b) si $\lambda = 0$, la sol. general es $X(x) = A + B\cdot x$. Otra vez, $X(-\pi) = 0$, $X(+\pi) = 0$ implican que $A = B = 0$.

(c) Si $\lambda < 0$, la sol. general es $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x)$.
Entonces

$$X(-\pi) = 0 = A\cos(-\pi\sqrt{-\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(-\pi\sqrt{-\lambda})$$
$$X(+\pi) = 0 = A\cos(\pi\sqrt{-\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{-\lambda})$$

y el determinante de la matriz de coeficientes ($\tau = \pi\sqrt{-\lambda} > 0$)

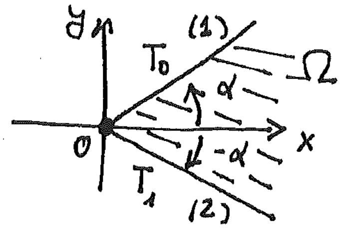
$$\begin{vmatrix} \cos\tau & -\mathrm{sen}\,\tau \\ \cos\tau & \mathrm{sen}\,\tau \end{vmatrix} = 2\cos\tau\cdot\mathrm{sen}\,\tau = \mathrm{sen}(2\tau) = 0 \text{ sii } \underline{2\tau = n\pi,\ n = 1,2,\ldots}$$

luego $\lambda = -\left(\frac{n}{2}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, y existen soluciones no triviales:

ETSII., EXAMEN DE EDP
19-12-2008

C-4 ¿Cuál es el problema de contorno equivalente al siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = T_0 \text{ en } (1) \\ u = T_1 \text{ en } (2) \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$



mediante la transformación $h(z) = (ze^{i\alpha})^{\frac{\pi}{2\alpha}}$? $(\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}))$

Sea el problema de contorno

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega = \{z = re^{i\theta} : r > 0, -\alpha < \theta < +\alpha\} \\ u(re^{i\alpha}) = T_0, \ r > 0 \\ u(re^{-i\alpha}) = T_1, \ r > 0 \qquad (T_0 \neq T_1) \\ u \text{ acot. en } \overline{\Omega} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Sea $w = h(z) = (ze^{i\alpha})^{\frac{\pi}{2\alpha}} := e^{\frac{\pi}{2\alpha}\log_0(ze^{i\alpha})}$ $\underline{\in H(\Omega)}$ (ya que si $z \in \Omega$ y como $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ entonces $ze^{i\alpha} \in D_0$ (más concretamente, en el semiplano superior))

y si $z = re^{i\theta} \in \Omega$ $(r > 0, \ \theta \in (-\alpha, +\alpha))$, entonces

$$h(re^{i\theta}) = (re^{i\theta} e^{i\alpha})^{\pi/2\alpha} = e^{\frac{\pi}{2\alpha}\log_0(re^{i(\theta+\alpha)})} = e^{\frac{\pi}{2\alpha}(\log r + i(\theta+\alpha))} =$$

$$= r^{\pi/2\alpha} \cdot e^{i(\theta+\alpha)\frac{\pi}{2\alpha}} = w,$$

con $\operatorname{Re} w = r^{\pi/2\alpha} \cos\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\theta+\alpha)\right]$

$\operatorname{Im} w = r^{\pi/2\alpha} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2\alpha}(\theta+\alpha)\right] > 0$ ya que como $\theta \in (-\alpha, +\alpha)$ entonces $\frac{\pi}{2\alpha}(\theta+\alpha) \in]0, \pi[$,

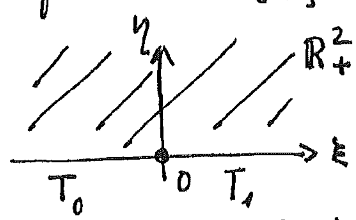
luego $\underline{h(z) \in \mathbb{R}^2_+ \text{ cuando } z \in \Omega}$.

si $z = re^{i\alpha}, r > 0$, $h(re^{i\alpha}) = r^{\pi/2\alpha} e^{i\pi} = -r^{\pi/2\alpha} \in]-\infty, 0[$.

si $z = re^{-i\alpha}, r > 0$, $h(re^{-i\alpha}) = r^{\pi/2\alpha} e^{0} = r^{\pi/2\alpha} \in]0, \infty[$.

Sea por tanto el problema de contorno equivalente a (I):

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \Delta v(w) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+ \\ v(\xi, 0) = \begin{cases} T_1, & \xi > 0 \\ T_0, & \xi < 0 \end{cases} \\ v \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{0\} \end{cases}$$



Si $v(w)$ es solución de (II) entonces $u(z) = v(h(z))$ es solución de (I).

EDP, 19-12-2008

P1a Utilizando la transformación de Fourier resolver la ec. integral

$$\frac{1}{(\omega^2-2i\omega+8)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad , \ -\infty < \omega < +\infty ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

El problema es equivalente al siguiente: hallar $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega^2-2i\omega+8)^2} .$$

Obsérvese que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ya que

$$|(\omega^2-2i\omega+8)^2| = |\omega^2-2i\omega+8|^2 \underset{\omega\in\mathbb{R}}{=} (\omega^2+8)^2+4\omega^2 \underset{\text{por ejemplo}}{\geq} 4+4\omega^2 ,$$

luego

$$\hat{f}(\omega) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{4} \frac{1}{1+\omega^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Podemos hacer uso por tanto de la fórmula de Fourier (xiv):
si f es continua en x,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}\, e^{i\omega x}\, d\omega ,$$

con $P(z)=1$, $Q(z) = (z^2-2iz+8)^2 = ((z-i)^2+9)^2 = (z-\lambda_1)^2(z-\lambda_2)^2$ con

$\lambda_1 = 4i$, $\lambda_2 = -2i$. Luego $\mathrm{Res}_{\lambda_1} = \lim_{z\to\lambda_1} \frac{d}{dz}\left[(z-\lambda_1)^2 \frac{P(z)}{Q(z)} e^{izx}\right] =$
$k_1 = 2$, $k_2 = 2$

$= \lim_{z\to\lambda_1} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{izx}}{(z-\lambda_2)^2}\right] = -\frac{i}{36}\left(\frac{1}{3}+x\right)e^{-4x}$, $\mathrm{Res}_{\lambda_2} = \frac{i}{36} e^{2x}\cdot\left(\frac{1}{3}-x\right)$; por lo

tanto

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{i\omega x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\cdot \begin{cases} 2\pi i\, \mathrm{Res}_{\lambda_1} = \frac{1}{18} e^{-4x}\left(\frac{1}{3}+x\right), & \text{si } x>0 \\ -2\pi i\, \mathrm{Res}_{\lambda_2} = \frac{1}{18} e^{2x}\left(\frac{1}{3}-x\right), & \text{si } x<0 \\ \pi i\,(\mathrm{Res}_{\lambda_1} - \mathrm{Res}_{\lambda_2}) = \frac{1}{3\cdot 18}, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

y

$$f(x) = \frac{1}{36\pi}\left(e^{-4x}\left(\frac{1}{3}+x\right)\cdot \chi_{[0,+\infty[}(x) + e^{2x}\left(\frac{1}{3}-x\right)\cdot \chi_{]-\infty,0[}(x) \right) \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

EDP, 19-12-2008

<u>Pb</u> Utilizar el método de separación de variables para resolver el problema de Cauchy-Dirichlet

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in]-\pi,\pi[\times]-\infty,+\infty[, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in [-\pi,+\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos\frac{7}{2}x, & x \in [-\pi,+\pi] \end{cases}$$

Efectuemos en primer lugar la traslación

$$x \in (-\pi,\pi) \underset{x=s-\pi}{\overset{s=x+\pi}{\rightleftarrows}} s \in (0,2\pi).$$

Entonces (I) es equivalente a

$$(II)\quad \begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} \quad \text{en }]0,2\pi[\times\mathbb{R} \\ (ii)\ v(0,t) = v(2\pi,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ (iii)\ v(s,0) = 0, \quad s \in [0,2\pi] \\ (iv)\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(s,0) = \cos\left[\frac{7}{2}(s-\pi)\right] = \operatorname{sen}\frac{7}{2}s, \quad s \in [0,2\pi] \end{cases}$$

donde $v(s,t) := u(x(s),t) = u(s-\pi,t)$, siendo u solución de (I).

Busquemos funciones de la forma $X(s)T(t)$ ($X \in C^2[0,2\pi]$, $T \in C^2(\mathbb{R})$, no id. nulas) que verifiquen (i), (ii) y (iii). Sustituyendo en (i),

$$X(s)T''(t) = X''(s)T(t) \rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(s)}{X(s)} = \lambda \text{ constante}$$

Luego

$$(*1)\begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ T(0) = 0 & \text{(usando (iii))} \end{cases} \qquad (*2)\begin{cases} X''(s) - \lambda X(s) = 0, & s \in [0,2\pi] \\ X(0) = X(2\pi) = 0 & \text{(usando (ii))} \end{cases}$$

Resolvemos (*2) en primer lugar. Este problema de contorno ya está resuelto en las Notas del Curso (ver Tema 3): sólo existe solución no trivial cuando

$$\lambda = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

con $X(s) = B \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} s\right)$, $B \neq 0$.

Resolvemos entonces $(*1)$ con $\lambda = -\left(\frac{n}{2}\right)^2$. La solución general es

$$T(t) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} t\right) + B \cos\left(\frac{n}{2} t\right) , \quad A, B \text{ ctes}.$$

Si $T(0) = 0$, entonces $B = 0$. Luego las funciones "elementales"

$$C \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} t\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} s\right) , \quad C \neq 0 , \; n = 1, 2, \ldots$$

verifican (i), (ii) y (iii). La derivada temporal en $t = 0$ de una de estas funciones es

$$\frac{n}{2} C \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} s\right).$$

Comparando con (iv), tomando $n = 7$ y $\frac{7}{2} C = 1$ se satisface esta última condición. Luego la función

$$v(s, t) = \frac{2}{7} \operatorname{sen} \frac{7}{2} t \cdot \operatorname{sen} \frac{7}{2} s$$

satisface (i)-(iv) y es solución de (II). Por lo tanto, la función

$$u(x, t) = v(x + \pi, t) = \frac{2}{7} \operatorname{sen}\left[\frac{7}{2} t\right] \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{7}{2} (x + \pi)\right]$$

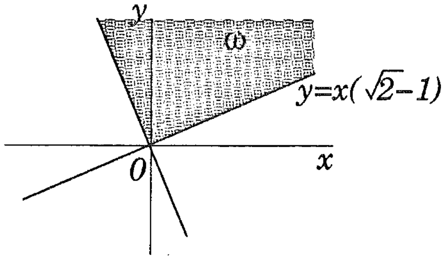
es solución de (I).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (8–6–2007)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Resolver el siguiente problema de contorno

$$(1)\quad \begin{cases} 3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{4}U = 0 & \text{en } \Omega \\ U(x,y) = \exp\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}x\right), & 0 < x \ , \ y = x(\sqrt{2}-1) \\ U(x,y) = 0 \ , \quad x < 0 \ , \ y = -x(\sqrt{2}+1) & \\ U \text{ acotada en } \bar{\Omega} \setminus \{(0,0)\} & \end{cases}$$



a) Aplicando el cambio de variable $\xi = \frac{x+(\sqrt{2}-1)y}{2}$, $\eta = \frac{-x+(\sqrt{2}+1)y}{2}$ probar que (1) es equivalente al problema de contorno

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1}{4}V = 0 \\ V(\xi,0) = \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi\right) \ , \quad \xi > 0 \\ V(0,\eta) = 0 \ , \quad \eta > 0 \\ V \text{ acotada} \end{cases}$$

b) Transformar el problema de contorno (2) en otro problema de contorno ((3)) mediante el cambio de función incógnita $V(\xi,\eta) = W(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}(\xi+\eta)\right]$.

c) Resolver el problema de contorno (3) pasando al semiplano superior.

d) Finalmente dar la solución de (1).

P–2 Resolver la ecuación integral

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\,y(t)\,dt = f(x) \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

sabiendo que $K \in L^1(\mathbb{R})$, está acotada, $\hat{K}(\lambda) \neq -1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) y $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\frac{\hat{f}(\lambda)}{1+\hat{K}(\lambda)} \in L^1(\mathbb{R})$.
En esta ecuación integral se sabe que la función incógnita $y(x)$ es absolutamente integrable y continua en $\mathbb{R}$.
Resolver la ecuación en el caso $K(x) = \sqrt{2\pi}\, e^x \chi_{]-\infty,0]}(x)$, $f(x) = \sqrt{2\pi}\,(e^x - e^{2x})\chi_{]-\infty,0]}(x)$.

Nota. **P-1**: Cada apartado en 2 hojas (por una cara). **P-2**: 3 hojas (por una cara). Puntuación: ((6; 3; 3; 2); 6).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (8–6–2007)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

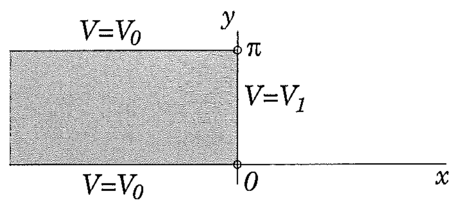
C–1 Representar gráficamente la función π–periódica que en el intervalo $(0,\pi)$ coincide con $\operatorname{sen} x + \cos x$ y estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de dicha función.

C–2 Hallar la solución (continua y absolutamente integrable) de la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \begin{cases} \pi - \omega\ , & 0 \le \omega \le \pi\ , \\ \pi + \omega\ , & -\pi \le \omega \le 0\ , \\ 0\ , & |\omega| \ge \pi\ , \end{cases}$$

utilizando la teoría de la transformación de Fourier.

C–3 Calcular el potencial electrostático en la zona indicada en la figura limitada por tres planos, siendo $V = V_0$ sobre los planos horizontales y $V = V_1$ sobre el plano vertical ($V_0 \neq V_1$).



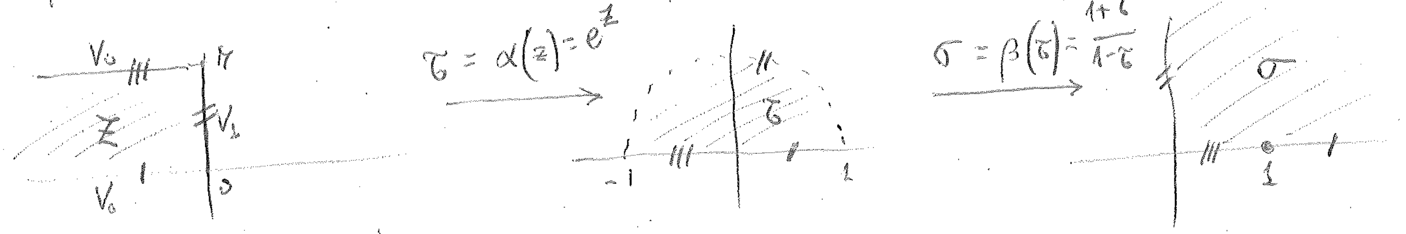
(Sug.: Utilizar la transformación $\omega = \left(\frac{1+e^z}{1-e^z}\right)^2$.)

C–4 Resolver el siguiente problema de contorno empleando el método de separación de variables

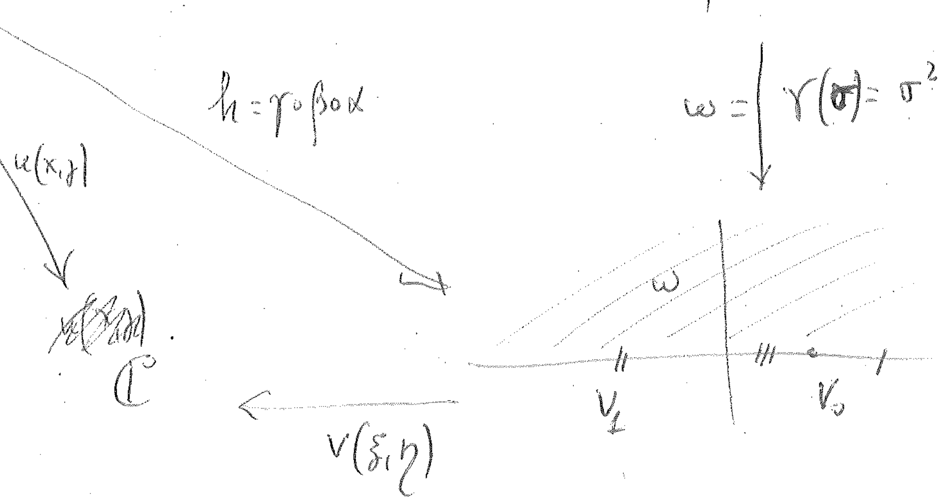
$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en }]0,\pi[^2 \\ u = G \text{ en } \partial]0,\pi[^2 \end{cases} \qquad G(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen} y\ , & x = \pi\ ,\ 0 \le y \le \pi \\ 0 & \text{en los otros lados} \end{cases}$$

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (2.5; 2; 3; 2.5).

C3|| Descomponemos la aplicación $\omega = \left(\frac{1+e^z}{1-e^z}\right)^2 = h(z)$ en tres funciones conformes:



α: $z = x+iy$ $\begin{cases} x<0 \\ y \in]0,\pi[\end{cases}$



$\alpha(z) = \tau = e^x(\cos y + i \sin y)$

para $y=0$ $x<0$

$\tau = e^x \cdot 1$ $\quad \tau \in]0,1[$

para $x=0$, $0<y<\pi$

$\tau = 1(\cos y + i \sin y)$, $|\tau| = 1$

La semibanda infinita se ha transformado en el semicírculo unidad superior

para $x<0$, $y=\pi$

$\tau = e^x(-1)$ $\quad \tau \in]-1,0[$

β: $\tau = \rho e^{i\theta}$ $\quad |\rho|<1, \; 0<\theta<\pi$

$$\sigma = \beta(\tau) = \frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}} = \frac{1+\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta - i\rho\sin\theta} = \frac{1-\rho^2 + i2\rho\sin\theta}{|1-\rho e^{i\theta}|^2}$$

$1-\rho^2>0$, $2\rho\sin\theta>0$, así que $\sigma \in 1^{er}$ cuadrante

Veamos en qué se transforma la frontera:

si $\tau \in]0,1[$ $\quad \sigma = \frac{1+\tau}{1-\tau} \in]1,\infty[$

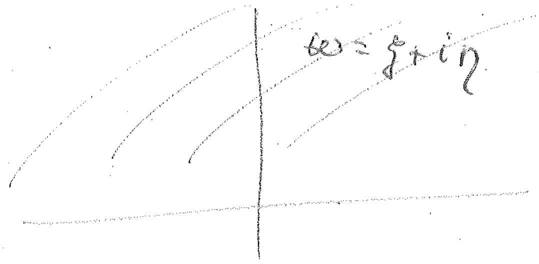
si $\tau \in]-1,0[$ $\quad \sigma \in]0,1[$

si $\tau = e^{i\theta}$ $\quad \sigma = \frac{0 + i2\sin\theta}{|1-e^{i\theta}|^2}$

$\sigma \in$ eje imaginario positivo.

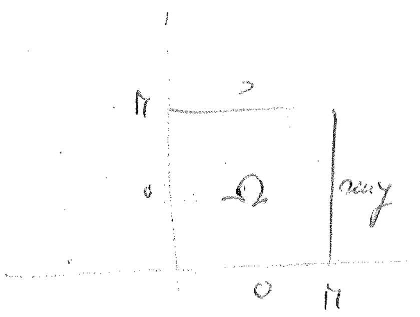
La tercera aplicación γ abre el 1er cuadrante al semiplano superior, con lo cual el problema equivalente es:

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ V(\xi,0) = V_0 & \text{para } \xi>0 \\ V(\xi,0) = V_1 & \text{"} \quad \xi<0 \end{cases}$$



Asignatura / Assignatura	Curso / Curs	Grupo / Grup	Nº Pg.

C4) $\Delta u = 0$ en $\Omega =]0,\pi[\times]0,\pi[$
$u = G$ en $\partial\Omega$



Hip. de sep. variables:

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

Resulta $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{-Y''}{Y} = \lambda$ (cte)

De aquí obtenemos el problema de contorno

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

y el problema inicial

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos en primer lugar el problema de contorno buscando soluciones no triviales. Sólo hay soluciones no triviales para $\lambda > 0$ que son de la forma

$$Y(y) = A \cos\sqrt{\lambda}\, y + B \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\, y$$

Al imponer las condiciones de contorno resulta: $\begin{cases} Y(0) = A\cdot 1 + B \cdot 0 \Rightarrow A = 0 \\ Y(\pi) = B \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \end{cases}$

$\lambda = n^2$ tal que $Y(y) = B \operatorname{sen} ny$

Resolvemos ahora la segunda ecuación (problema inicial)

$$X''(x) - n^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = C \operatorname{ch} nx + D \operatorname{sh} nx$$
$$X(0) = 0 = C\cdot 1 + D \cdot 0 \Rightarrow C = 0$$

Luego $X(x) = D \operatorname{sh} nx \Rightarrow u(x,y) = B \operatorname{sh} nx \operatorname{sen} ny$

Para $x = \pi$: $\operatorname{sen} y = B \operatorname{sh} nx \operatorname{sen} ny \Rightarrow n = 1$, $B = \dfrac{1}{\operatorname{sh}\pi}$

Así pues $u(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\pi} \operatorname{sen} y$

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP Junio 2007

P-1 Aplicando el cambio de variable ϕ a la ecuación del problema (1)

$\boxed{a}$

$$\phi(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) = \left(\frac{x+(\sqrt{2}-1)y}{2} , \frac{-x+(\sqrt{2}+1)y}{2} \right) = (\xi,\eta)$$

$(x,y)\in\Omega$

$$\phi^{-1}(\xi,\eta) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\xi + \frac{\sqrt{2}-2}{2}\eta , \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} \right) = (x,y)$$

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 1/2 & \frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}(\xi,\eta) = \phi' A \phi'^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = a_{11}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}}_{0} + 2a_{12}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial y}}_{0} + a_{22}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2}}_{0} + a_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + a_2\frac{\partial\phi_1}{\partial y} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tilde{a}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} , \quad \tilde{a} = \frac{1}{4}$$

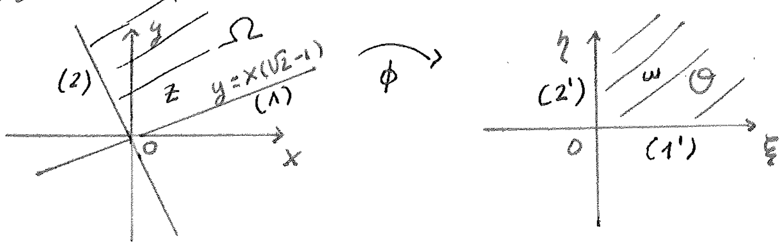
llegamos a la ecuación equivalente $\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial V}{\partial\xi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial V}{\partial\eta} + \frac{1}{4}V = 0$

Veamos como se transforman las demás condiciones del problema de contorno (1)

Si $z=(x,y)$, $x>0$, $y=x(\sqrt{2}-1)$ $\quad \phi(x,y) = (x(2-\sqrt{2}),0)$ luego $\phi((1)) =]0,\infty[$

Si $z=(x,y)$, $x<0$, $y=-x(\sqrt{2}+1)$ $\quad \phi(x,y) = (0,-x(2+\sqrt{2}))$ luego $\phi((2)) = \{i\eta : \eta>0\}$

Si $z\in\Omega$ entonces $\phi(z)\in\Theta$ (tomando por ejemplo $z=(0,1)$, $\phi(0,1) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$)



Por otra parte

$$V(\xi,0) = U(\phi^{-1}(\xi,0)) = U\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\xi, \frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}\xi} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\xi}$$

$$V(0,\eta) = U(\phi^{-1}(0,\eta)) = U\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\eta, \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Así llegamos al problema de contorno (2) con V acotada en $\overline{\Theta}\setminus\{(0,0)\}$

$\boxed{b}$ Mediante el cambio de función incógnita $V(\xi,\eta) = W(\xi,\eta)e^{-\sqrt{2}/4(\xi+\eta)}$

llegamos a la ecuación $\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2} = 0$ junto con las condiciones

$$W(\xi,0) = V(\xi,0)e^{\frac{\sqrt{2}}{4}\xi} = 1$$
$$W(0,\eta) = V(0,\eta)e^{\frac{\sqrt{2}}{4}\xi} = 0$$

y así el nuevo problema de contorno es

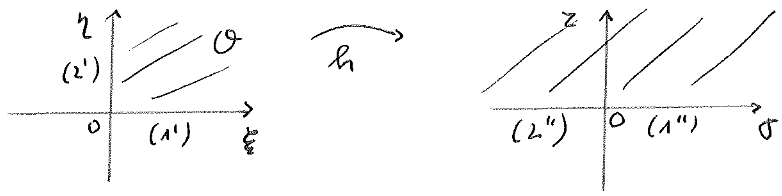
DIRECCIÓN
CAMINO DE VERA, 14
APARTADO 22.012
46071 VALENCIA (SPAIN)
TELÉFONOS 96 387 76 60
96 387 70 00 - Ext. 6600
FAX 96 387 76 69
ELECTRONIC MAIL
RED EUNET DEPMAT@UPVNET.UPV.ES
TELEX 62.808 UPV

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP Junio 2007

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta W = 0 \\ W(\xi,0) = 1 \ , \ \xi > 0 \\ W(0,\eta) = 0 \ , \ \eta > 0 \\ W \text{ acotada en } \overline{\theta} \setminus \{(0,0)\} \end{cases}$$

$\boxed{c}$ Para resolver el problema de contorno (3), consideramos la transformación $h(\omega) = \omega^2$



$$h(\xi,\eta) = (\xi + i\eta)^2 = \xi^2 - \eta^2 + i 2\xi\eta = (\sigma,\tau) \qquad \operatorname{Im} h(z) = \tau = 2\xi\eta > 0$$
$\xi > 0, \eta > 0$

además $h((1')) = (1'')$ $\quad\left(\text{si } \xi \in (1') \quad h(\xi) = \xi^2 \right.$
$\qquad\quad h((2')) = (2'')$ $\quad\left. \text{si } i\eta \in (2) \quad h(i\eta) = -\eta^2 \right)$

Consideramos el PGDL en $\mathbb{R}^2_+$

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta \Psi = 0 \\ \Psi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma > 0 \\ 0 & \sigma < 0 \end{cases} \\ \Psi \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{(0,0)\} \end{cases}$$

La solución de este problema viene dada por

$$\Psi(\sigma,\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{(\sigma - t)^2 + \tau^2}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) \qquad \text{y así}$$

la solución de (3) es $W = \Psi \circ h$ pues W es continua en $\overline{\theta} \setminus \{(0,0)\}$ por composición de continuas, es armónica en θ por compuesta de una holomorfa y una armónica, está acotada en $\overline{\theta} \setminus \{(0,0)\}$ por estarlo Ψ, y viene dada por la expresión

$$W(\xi,\eta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\xi^2 - \eta^2}{2\xi\eta}$$
$\xi > 0, \eta > 0$

$\boxed{d}$

Finalmente la solución del problema (1) es

$$U(x,y) = V(\phi(x,y)) = V\left(\frac{x + (\sqrt{2}-1)y}{2} , \frac{-x + (\sqrt{2}+1)y}{2} \right) =$$
$(x,y) \in \Omega$

$$= W\left(\frac{x + (\sqrt{2}-1)y}{2} , \frac{-x + (\sqrt{2}+1)y}{2} \right) e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x + (\sqrt{2}-1)y}{2} + \frac{-x + (\sqrt{2}+1)y}{2} \right)} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}\,(xy - y^2)}{y^2 - x^2 + 2xy} \right) e^{-y/2} \qquad \text{pues} \qquad \begin{aligned} \xi + \eta &= \sqrt{2}\, y \\ \xi \cdot \eta &= \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{4} \\ \xi^2 - \eta^2 &= \frac{\sqrt{2}\,(4xy - 4y^2)}{4} \\ &= \sqrt{2}\,(xy - y^2) \end{aligned}$$

DIRECCIÓN CAMINO DE VERA, 14
APARTADO 22.012
46071 VALENCIA (SPAIN)
TELÉFONOS 96 387 76 60
96 387 70 00 - Ext. 6600
FAX 96 387 76 69
ELECTRONIC MAIL
RED EUNET DEPMAT@UPVNET.UPV.ES
TELEX 62.808 UPV

P2 (a) $y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, y(t)\, dt = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$

$K \in L^1(\mathbb{R})$, acot., $\hat{K}(\lambda) \neq -1$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\frac{\hat{f}(\lambda)}{1+\hat{K}(\lambda)} \in L^1(\mathbb{R})$,

$y \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Como $y \in L^1(\mathbb{R})$, $K \in L^1(\mathbb{R})$ y acot., son convolucionables; como $y \in C(\mathbb{R})$, $K * y \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ con $(K*y)^\wedge = \hat{K} \cdot \hat{y}$.
La ec. es por tanto

$$y + K * y = f \;;$$

tomando tr. de F., $\hat{y} + \hat{K} \cdot \hat{y} = \hat{f}$; luego

$$\hat{y}(\lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{1+\hat{K}(\lambda)} \quad (\in L^1(\mathbb{R}) \text{ por hip.})$$

y aplicando la fórmula de Fourier

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{1+\hat{K}(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (ya que } y \in C(\mathbb{R})).$$

(b) Si $K(x) = \sqrt{2\pi}\, e^x \cdot \chi_{]-\infty,0[}(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, e^x, & x<0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$, es muy fácil comprobar que $K \in L^1(\mathbb{R})$, está acot. ($0 \leq K(x) < \sqrt{2\pi} \;\forall x$), y

$$\hat{K}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} e^x e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{1-i\lambda} \neq -1 \;\forall \lambda.$$

Asimismo, si $f(x) = \sqrt{2\pi}(e^x - e^{2x})\chi_{]-\infty,0[}(x) = K(x) - K_2(x)$,
con $K_2(x) := K(2x)$; luego $f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\hat{f}(\lambda) = \hat{K}(\lambda) - [K(2x)]^\wedge(\lambda) = \frac{1}{1-i\lambda} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-i\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{1-i\lambda} - \frac{1}{2-i\lambda}.$$

Luego la sol.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{1+\hat{K}(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{(2-i\lambda)^2}}_{\in L^1(\mathbb{R})} e^{i\lambda x} d\lambda$$

con $\hat{y}(\lambda) = \frac{1}{(2-i\lambda)^2} = \frac{1}{i}\frac{d\hat{K}_2}{d\lambda}(\lambda) = [-x \cdot K_2(x)]^\wedge(\lambda)$; y como
$-x K_2(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, entonces $y(x) = -x K_2(x) = -x\sqrt{2\pi}\, e^{2x} \chi_{]-\infty,0[}(x)$.

Examen de EDP (8-6-2007)

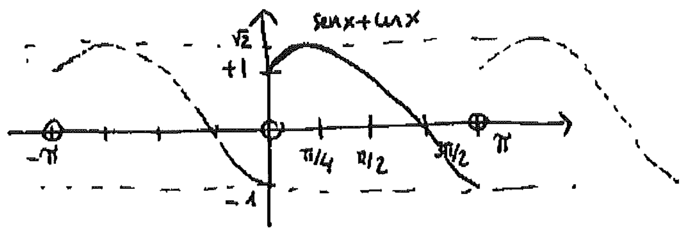
$\boxed{C1}$ Representemos gráficamente la $f^{\underline{n}}$ $\operatorname{sen} x + \cos x$, para $x \in]0,\pi[$.

Ceros de la $f^{\underline{n}}$: $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ sii $\operatorname{tg} x = -1$, $x \in]0,\pi[$ sii $x = \frac{3\pi}{4}$.

Extremos: $f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ sii $\operatorname{tg} x = +1$, $x \in]0,\pi[$ sii $x = \pi/4$,

que es un máx. rel. ($f''(x) = -(\operatorname{sen} x + \cos x)$; y $f''(x) = 0$, $x \in]0,\pi[$ sii $x = 3\pi/4$);

además $\lim_{x \to 0+} f(x) = +1$, $\lim_{x \to \pi-} f(x) = -1$.



Def. en $\mathbb{R}$ la $f^{\underline{n}}$ $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $x \in]0,\pi[$, $f(0) = 0$, $f(x+\pi) = f(x)$ $\forall x$.

Como se observa, $f \in C(\mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\})$, está acotada en $\mathbb{R}$ ($-1 < f(x) \leq \sqrt{2}$), y es π-periódica por def; $f \in R_\pi$. Analicemos la conv. puntual de su serie de Fourier.

(a) si $x \in]0,\pi[$ $f(x) \in C^\infty]0,\pi[$, en particular $f \in VA$ en un entorno de x, luego (crit. de Jordan) su s. de F. conv. en x a $f(x)$.

(b) si $x = 0$, como $\lim_{h \to 0+} f(0+h) = +1 = f(0+)$, $\lim_{h \to 0+} f(0-h) = -1 = f(0-)$,

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0+)}{h} = +1$, $\lim_{h \to 0+} \frac{f(0-h) - f(0-)}{h} = -1$, por el crit. de Dini su s. de F. converge en $x = 0$ a $\frac{1}{2}\left(f(0+) + f(0-)\right) = 0 = f(0)$.

Como $f \in R_\pi$, concluimos que $\forall x \in \mathbb{R}$ su s. de F. conv. a $f(x)$.

Con resp. a su conv. unif., como $f \in C\,]0,\pi[$, sea $[a,b] \subset]0,\pi[$; como $f \in VA[a,b]$ (ya que es de deriv. acotada) su s. de F. conv. unif. en $[a,b]$ (crit. de Jordan); naturalmente, esto es cierto $\forall$ int. $[a,b] \subset]0,\pi[$.

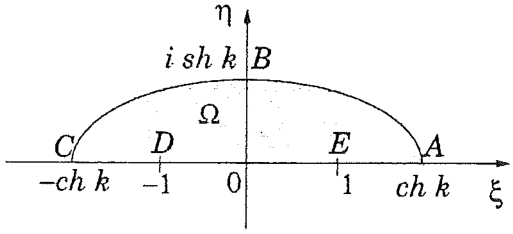
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (11–9–2007)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

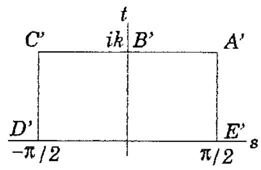
P–1 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} - 2a\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - 2b\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + (a^2+b^2)\theta = 0 \ , & (\xi,\eta) \in \Omega \ , \ (a,b>0) \\ \theta(\xi,0) = 0 \ , \quad -\operatorname{ch} k \le \xi \le \operatorname{ch} k & \\ \theta(\xi,\eta) = \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 k}\exp(a\xi + b\eta) \text{ si } (\xi,\eta) \text{ está en } \begin{cases} \frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^2 k} + \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 k} = 1 \\ \eta \ge 0 \end{cases} & \end{cases}$$

siendo Ω la zona de la figura



(Sug.: Utilizar primero el cambio de variable dependiente $\theta(\xi,\eta) = \sigma(\xi,\eta)\exp(a\xi+b\eta)$. Seguidamente utilizar la transformación holomorfa $\zeta = \operatorname{arc\,sen}(\xi + i\eta)$ para tranformar $\bar{\Omega}$ en el rectángulo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0,k]$ (será mas sencillo trabajar con la transformación inversa $\xi + i\eta = \operatorname{sen}\zeta = \operatorname{sen}(s+it)$.)



P–2 *a*) Estudiar las oscilaciones libres de una cuerda sujeta en sus extremos, que vibra en un medio cuya resistencia es proporcional a la primera potencia de la velocidad. (Sug.: Se utilizará el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \ , \quad \forall t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 \le x \le l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \ , \quad 0 \le x \le l \end{cases}$$

en el que h es un parámetro > 0 muy pequeño y f, g son continuas y de variación acotada en $[0,l]$ satisfaciendo las condiciones $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$.)

b) Resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{(\omega^2 + 3i\omega - 2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

utilizando la transformación de Fourier.

Nota. P-1, **P-2a** y **P-2b** se entregará por separado. Puntuación: (10; 6; 4).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (11–9–2007)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

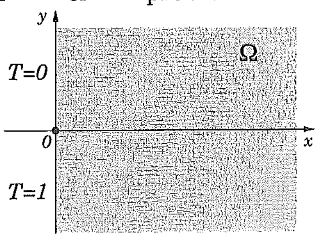
C–1 Clasificar la ecuación

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2k\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \ , \qquad (k > 0) \ , \ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

A continuación, hallar la solución que tiene la forma $\phi(x,t) = f(x)\operatorname{sen} kt$ ($f \in C^2(\mathbb{R})$) y que satisface las condiciones $\phi(0,t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, y $\phi(\frac{1}{k}, \frac{\pi}{2k}) = \frac{1}{ke}$.

C–2 Sea $f(x)$ la función 4–periódica que en el intervalo $(-2,-1)$ coincide con la parábola $y = x^2+4x+3{,}75$ y en el intervalo $(-1,2)$ con la parábola $y = -x^2+x$. Analizar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de $f(x)$. ¿Qué forma tiene la serie de Fourier de $f(x)$?.

C–3 Hallar el problema de contorno equivalente al siguiente



$$\begin{cases} \Delta T = 0 \text{ en } \Omega \\ T = 0 \text{ en el semieje positivo de ordenadas} \\ T = 1 \text{ en el semieje negativo de ordenadas} \\ T \text{ acotada en } \bar{\Omega} \setminus \{0\} \end{cases}$$

vía la transformación $w = \frac{z-1}{z+1}$.

C–4 Demostrar de dos maneras distintas que la función $\phi(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ es solución de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (2.5; 2.5; 2.5; 2.5).

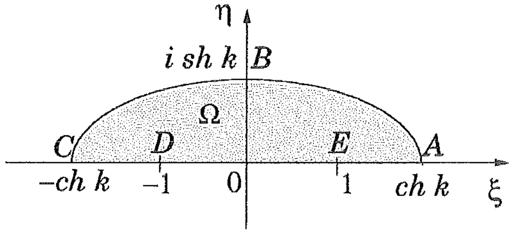
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (11–9–2007)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

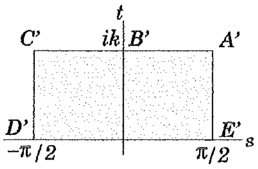
P–1 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} - 2a\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - 2b\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + (a^2+b^2)\theta = 0 \,, & (\xi,\eta)\in\Omega \,,\ (a,b>0) \\ \theta(\xi,0) = 0 \,, \quad -\operatorname{ch} k \le \xi \le \operatorname{ch} k & \\ \theta(\xi,\eta) = \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 k}\exp(a\xi+b\eta) \text{ si } (\xi,\eta) \text{ está en } \begin{cases} \frac{\xi^2}{\operatorname{ch}^2 k} + \frac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 k} = 1 \\ \eta \ge 0 \end{cases} & \end{cases}$$

siendo Ω la zona de la figura



(Sug.: Utilizar primero el cambio de variable dependiente $\theta(\xi,\eta) = \sigma(\xi,\eta)\exp(a\xi+b\eta)$. Seguidamente utilizar la transformación holomorfa $\zeta = \operatorname{arc\,sen}(\xi+i\eta)$ para tranformar $\bar{\Omega}$ en el rectángulo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,k]$ (será mas sencillo trabajar con la transformación inversa $\xi+i\eta = \operatorname{sen}\zeta = \operatorname{sen}(s+it)$.)



P–2 *a*) Estudiar las oscilaciones libres de una cuerda sujeta en sus extremos, que vibra en un medio cuya resistencia es proporcional a la primera potencia de la velocidad. (Sug.: Se utilizará el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \,, \quad \forall t\ge 0 \\ u(x,0) = f(x) \,, \quad 0\le x\le l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \,, \quad 0\le x\le l \end{cases}$$

en el que h es un parámetro > 0 muy pequeño y f, g son continuas y de variación acotada en $[0,l]$ satisfaciendo las condiciones $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$.)

b) Resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{(\omega^2+3i\omega-2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \,, \qquad -\infty < x < \infty \,,$$

utilizando la transformación de Fourier.

Nota. **P-1**, **P-2a** y **P-2b** se entregará por separado. Puntuación: (10; 6; 4).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP 11-9-2007

P-1 Al aplicar el cambio de función $\theta(\xi,\eta)=\sigma(\xi,\eta)e^{a\xi+b\eta}$ a la ecuación dada, obtenemos la ecuación $\Delta\sigma=0$. Veamos las condiciones de contorno del nuevo problema (II):

$$\sigma(\xi,0)=\theta(\xi,0)e^{-a\xi}=0 \quad , -\text{ch}\,k<\xi<\text{ch}\,k$$

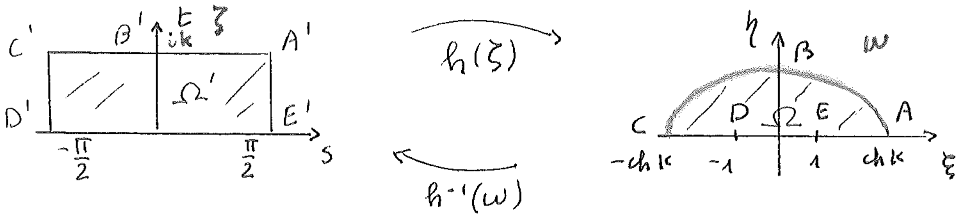
$$\sigma(\xi,\eta)=\theta(\xi,\eta)e^{-(a\xi+b\eta)}=\frac{\eta^2}{\text{sh}^2 k} \quad , (\xi,\eta)\in \text{elipse}$$

Para resolver el problema (II)

$$(\text{II})\begin{cases}\Delta\sigma=0 & \text{en } \Omega\\ \sigma(\xi,0)=0 & , -\text{ch}\,k<\xi<\text{ch}\,k\\ \sigma(\xi,\eta)=\dfrac{\eta^2}{\text{sh}^2 k} & , (\xi,\eta)\in \text{elipse}\end{cases}$$

considero la transformación holomorfa $h(\zeta)=\text{sen}(\zeta)=\text{sen}(s+it)=$ $\zeta\in\Omega'$

$=\text{sen}\,s\,\text{ch}\,t+i\cos s\,\text{sh}\,t=\xi+i\eta$. Veamos que la frontera del nuevo abierto Ω' se transforma en la de Ω



si $\zeta\in E'A'$ $\quad \zeta=\frac{\pi}{2}+it$, $0<t<k$ $\quad h(\zeta)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+it\right)=\text{ch}\,t \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 1$, $\underset{t\to k^-}{\longrightarrow}\text{ch}\,k$

si $\zeta\in A'C'$ $\quad \zeta=s+ik$, $-\frac{\pi}{2}<s<\frac{\pi}{2}$ $\quad h(\zeta)=\text{sen}(s+ik)=\underbrace{\text{sen}\,s\,\text{ch}\,k}_{\xi}+i\underbrace{\cos s\,\text{sh}\,k}_{\eta}$ y

$$\frac{\xi^2}{\text{ch}^2 k}+\frac{\eta^2}{\text{sh}^2 k}=\frac{\text{sen}^2 s\,\text{ch}^2 k}{\text{ch}^2 k}+\frac{\cos^2 s\,\text{sh}^2 k}{\text{sh}^2 k}=1$$

análogamente $D'E'$ y $D'C'$.

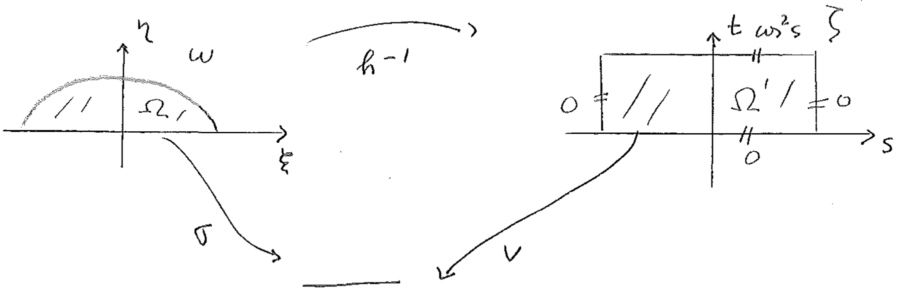
Al aplicar la transformación $h^{-1}(\omega)=\text{arcsen}\,\omega$, $\omega\in\Omega$ a la ecuación $\Delta\sigma=0$, obtenemos nuevamente la ecuación de Laplace $\Delta V=0$ por ser h^{-1} holomorfa. Así pues consideremos el nuevo problema de contorno (III):

DIRECCIÓN: CAMINO DE VERA, 14
APARTADO 22.012
46071 VALENCIA (SPAIN)
TELÉFONOS (96) 387 76 60
(96) 387 70 00 - Ext. 6.600
FAX (96) 387 76 69
ELECTRONIC MAIL
RED EUNET DEPMAT@UPVNET. UPV. ES
TELEX 62.808 UPV

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP 11-9-2007

$$(\text{III})\begin{cases} \Delta v = 0 \quad \text{en } \Omega' \\ v(s,0) = \sigma(h(s,0)) = \sigma(\operatorname{sen} s) = 0, \quad \text{pues } -1 < \operatorname{sen} s < 1 \\ -\pi/2 < s < \frac{\pi}{2} \\ v(\frac{\pi}{2},t) = \sigma(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+it)) = \sigma(\operatorname{ch} t) = 0, \quad \text{pues } 1 < \operatorname{ch} t < \operatorname{ch} k \\ 0<t<k \\ v(s+ik) = \sigma(\underbrace{\operatorname{sen} s \operatorname{ch} k}_{\xi} + i \underbrace{\cos s \operatorname{sh} k}_{\eta}) = \dfrac{\cos^2 s \operatorname{sh}^2 k}{\operatorname{sh}^2 k} = \cos^2 s, \quad \text{pues } (\xi,\eta) \in \text{elipse y } \sigma(\xi,\eta) = \dfrac{\eta^2}{\operatorname{sh}^2 k} \\ -\pi/2 < s < \frac{\pi}{2} \\ v(-\pi/2, t) = \sigma(-\operatorname{ch} t) = 0, \quad \text{pues } -\operatorname{ch} k < -\operatorname{ch} t < -1 \\ 0<t<k \end{cases}$$



$\sigma = v \circ h^{-1}$

Para resolver el problema (III) efectuamos una traslación $\phi(\zeta) = \zeta + \frac{\pi}{2} = s + \frac{\pi}{2} + it = x + iy = z$

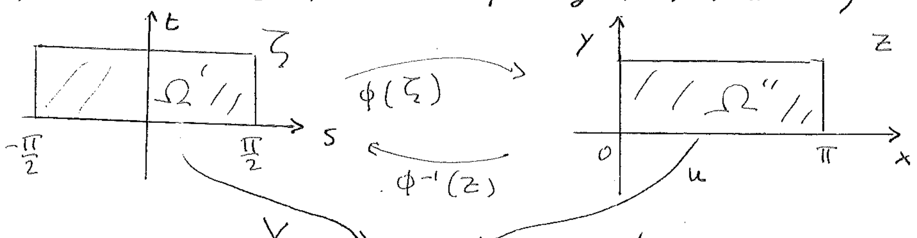
$\phi^{-1}(z) = \phi^{-1}(x,y) = (x - \frac{\pi}{2}, y) = (s,t)$. Consideramos entonces el problema de contorno

$$(\text{IV})\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,k) = v(\phi^{-1}(x,k)) = v(x-\frac{\pi}{2},k) = \cos^2(x-\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}^2 x = H(x), \quad 0<x<\pi \\ u(x,y) = 0 \quad \text{en otros tres lados} \end{cases}$$

La solución del problema (IV) viene dada por

$$u(x,y) = \sum_{1}^{\infty} d_n \frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{\pi}x \operatorname{sh}\frac{n\pi}{\pi}y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{\pi}k}, \quad \text{donde } \underset{n\geq 1}{d_n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} nx \, dx$$

(pues $H(x) \in C[0,\pi] \cap VA[0,\pi]$ y $K(0) = K(\pi) = 0$)



$v = u \circ \phi$

DIRECCIÓN
CAMINO DE VERA, 14
APARTADO 22.012
46071 VALENCIA (SPAIN)
TELÉFONOS 96 387 76 60
96 387 70 00 - Ext. 6600
FAX 96 387 76 69
ELECTRONIC MAIL
RED EUNET DEPMAT@UPVNET.UPV.ES
TELEX 62.808 UPV

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Examen EDP 11-9-2007

La función $v = u \circ \phi$ es solución de (III): v es armónica por composición de una holomorfa y una armónica.
v es continua en $\overline{\Omega'}$ por composición de continuas
v satisface en $\partial\Omega'$ las condiciones

Finalmente la solución del problema dado (I) es

$$\theta(\xi,\eta) = \sigma(\xi,\eta)\,e^{a\xi+b\eta} = v(h^{-1}(\xi,\eta))\cdot e^{a\xi+b\eta} = v(\operatorname{arcsen}(\xi+i\eta))\,e^{a\xi+b\eta} =$$

$(\xi,\eta)\in\Omega$

$$= v(s+it)\,e^{a\xi+b\eta} \underset{v=u\circ\phi}{=} u(\phi(s+it))\,e^{a\xi+b\eta} = u(s+\tfrac{\pi}{2}+it)\,e^{a\xi+b\eta} = u(x+iy)\,e^{a\xi+b\eta}$$

P. 2b ||

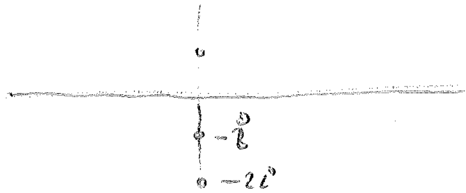
$$\frac{1}{(\omega^2+3i\omega-2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \qquad -\infty < x < +\infty$$

$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega^2+3i\omega-2)^2}$ es continua en $\mathbb{R}$ y pertenece a L^1

así que podemos aplicar el T. de inversión de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega^2+3i\omega-2)^2} e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega+i)^2(\omega+2i)^2} e^{i\omega x}\, d\omega$$

Para efectuar la integración empleamos el método de los residuos.
Ambos polos en el semiplano inferior:



$$\operatorname{Res}(-i) = \lim_{\omega \to -i} \frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{(\omega+2i)^2} e^{i\omega x}\right] =$$

$$= \lim_{\omega \to -i} \left\{ \frac{-2}{(\omega+2i)^3} e^{i\omega x} + \frac{1}{(\omega+2i)^2} ix\, e^{i\omega x} \right\} = -i e^{x}(x+2)$$

$$\operatorname{Res}(-2i) = \lim_{\omega \to -2i} \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{(\omega+i)^2} e^{i\omega x}\right\} = \lim_{\omega \to -2i}\left[\frac{-2}{(\omega+i)^3} e^{i\omega x} + \frac{1}{(\omega+i)^2} ix\, e^{i\omega x}\right] =$$

$$= -i e^{2x}(x-2)$$

$$f(x) = \pm 2\pi i \left(\sum \operatorname{Res}\right) = \begin{cases} \boxed{0} & \text{para } x > 0 \\ \frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\left[-i e^{x}(x+2) - i e^{2x}(x-2)\right] = & \end{cases}$$

$$= \boxed{-e^{x}(x+2) - e^{2x}(x-2)} \qquad \text{para } x < 0$$

Examen de EDP (11-9-2007)

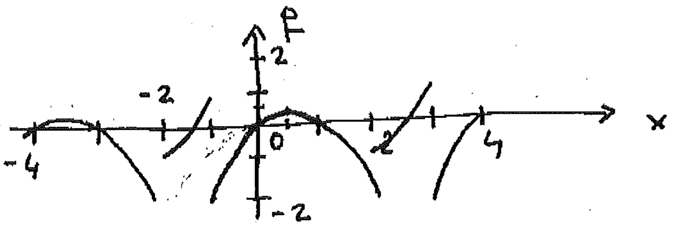
$\boxed{C2}$ Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3.75, & x\in(-2,-1) \\ -x^2+x, & x\in(-1,2) \end{cases}$, f 4-periódica.

Analizar la conv. puntual y uniforme del desarrollo de F. de $f(x)$.

$f(x)$, en $(-2,-1)$, coincide con la parábola $x^2+4x+3.75$, cuyo máximo se halla en $x=-2$; asimismo, $\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=-0.25$, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=0.75$;

de la misma forma, $f(x)$ coincide con la parábola $-x^2+x$, de máximo en $x=+1/2$, en $(-1,2)$; con $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)=-2$;

como f es 4-periódica, su gráfica es:



luego $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{2,-1,3,-2,\dots\})$, está acotada en $\mathbb{R}$, es 4-periódica: $f\in R_4$.

Tanto en puntos x del int. $(-2,-1)$ como del int. $(-1,2)$, f es de derivada continua (coincide con un polinomio), luego su s. de F. converge en x a $f(x)$. En $x=-2$ aplicamos el crit. de Dini:

$\lim\limits_{h\to0+} f(-2+h)=-0.25$, $\lim\limits_{h\to0+} f(-2-h)=\lim\limits_{h\to0+} f(-2-h+4)=-2$,

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(-2+h)-f(-2+0)}{h}=0$, $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(-2-h)-f(-2-0)}{h}=-5$

luego su s. de F. converge en $x=-2$ a $\dfrac{f(-2+0)+f(-2-0)}{2}=\dfrac{-0.25-2}{2}=-\dfrac{2.25}{2}$.

En $x=-1$ aplico el crit. de Jordan: en un entorno de $x=-1$, la gráfica de $f(x)$ se puede expresar como

P2a Sea el problema de contorno

$$\begin{cases} (i) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ (ii) & u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0 \\ (iii) & u(x,0) = f(x)\,, \quad 0 \leq x \leq \ell \\ (iv) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\,, \quad 0 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

$h > 0$ muy pequeño

$f, g \in C \cap VA[0,\ell]$,

$f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$.

Busquemos funciones de la forma $X(x)\cdot T(t)$ $(X \in C^2[0,\ell],\ T \in C^2[0,\infty[\,)$ que satisfagan (i) y (ii). Sustituyendo en (i), dividiendo por $X(x)\cdot T(t)$, se obtiene

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 2h\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \text{ cte},$$

luego

$$\begin{cases} X''(x) - \dfrac{\lambda}{a^2}X(x) = 0\,, \\ X(0) = X(\ell) = 0\,, \end{cases} \qquad T''(t) + 2hT'(t) - \lambda T(t) = 0\,,$$

donde la última condición proviene de (ii). El problema para $X(x)$ es bien conocido y ha sido resuelto en las Notas del Curso: sólo $\exists$ sol. no trivial para $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}a\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$, con

$$X(x) = B \operatorname{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\,.$$

El problema para $T(t)$ es una EDO homog. de coefs. ctes; como $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}a\right)^2$, su pol. característico $p(z) = z^2 + 2hz - \lambda = z^2 + 2hz + \left(\frac{n\pi}{\ell}a\right)^2$ posee raíces $\omega_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2} = \left\{\text{como } h > 0 \text{ es muy pequeño, } h^2 < \left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2\right\} =$
$= -h \pm i\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 - h^2} = -h \pm i\tau_n$, donde $\tau_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 - h^2}$, $n = 1, 2, \dots$; luego la sol. general

$$T(t) = C_1 e^{-ht}\cos\tau_n t + C_2 e^{-ht}\operatorname{sen}\tau_n t\,, \quad C_1, C_2 \text{ ctes.}$$

En resumen, toda función de la forma

$$u(x,t) = e^{ht}(D_1\cos\tau_n t + D_2\operatorname{sen}\tau_n t)\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\,, \quad D_1, D_2 \text{ ctes},$$

verifica (i) y (ii), y también toda suma finita

$$(*) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-ht}(D_{1,n}\cos\tau_n t + D_{2,n}\operatorname{sen}\tau_n t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{\ell}x\,, \quad D_{1,2,n} \text{ ctes},\ N \in \mathbb{N}^+,$$

verifica (i) y (ii).

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}$$

Veamos cómo satisfacer (iii) y (iv). Evaluemos una de las sumas (*) en $t=0$:

$$\sum_{n=1}^{N} D_{1,n} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x ,$$

que corresponde a una suma finita de senos; def. una f^{n} 2ℓ-periódica e impar que coincida con $f(x)$ en $[0,\ell]$; como $f(0)=f(\ell)=0$ y $f \in C \cap VA[0,\ell]$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x = f(x) \text{ unif. en } \mathbb{R}, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx .$$

escogeremos los coefs $D_{1,n} = b_n$ para que se verifique (iii).

De igual forma, derivando (*) con resp. a t, en $t=0$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \left(-h D_{1,n} + \tau_n D_{2,n}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x ;$$

y def. una f^{n} 2ℓ-per. e impar que coincida con $g(x)$ en $[0,\ell]$; razonando igual,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x = g(x) \text{ unif. en } \mathbb{R}, \quad \bar{b}_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x \, dx ;$$

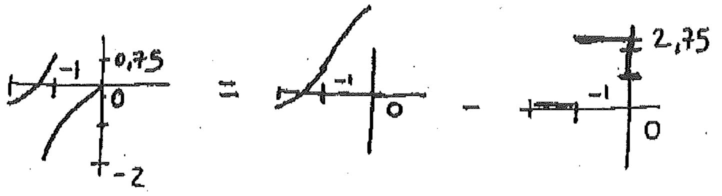
luego igualamos $-h D_{1,n} + \tau_n D_{2,n} = \bar{b}_n$, de donde

$D_{2,n} = \frac{1}{\tau_n}\left(\bar{b}_n + h b_n\right)$. Finalmente se comprueba que la función

$$u(x,t) = e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos \tau_n t + \frac{1}{\tau_n}(\bar{b}_n + h b_n) \operatorname{sen} \tau_n t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{\ell} x$$

está bien def. y verifica (i)–(iv), luego es sol. del problema.

/.



$$f = f_1 - f_2$$

i.e. f es diferencia de f^{ns} monótonas (crecientes) en un ent. de -1, luego f es de VA en un ent. de -1, y su s. de F. conv. en -1 a

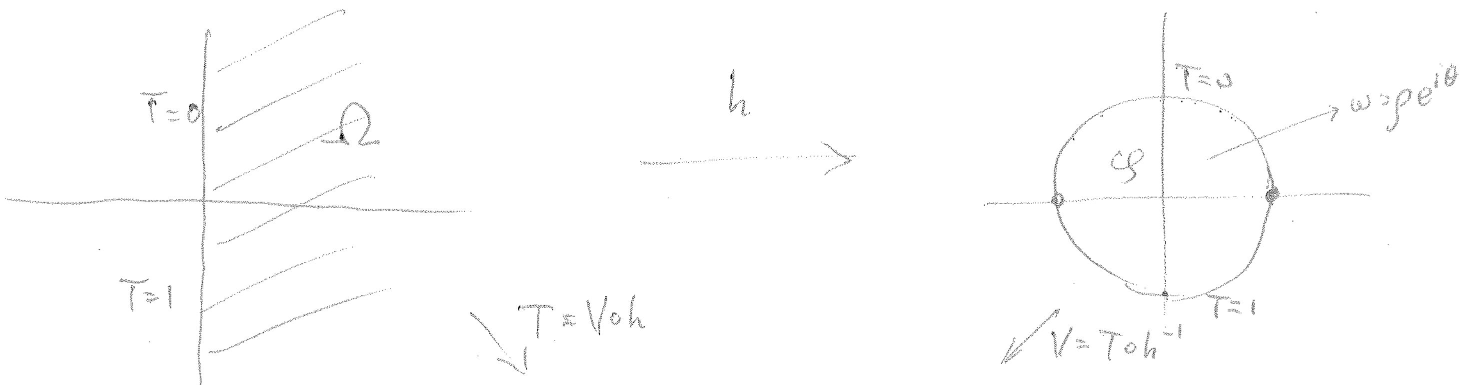
$$\frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2} = \frac{-2+0.75}{2} = -\frac{1.25}{2}$$

Como f es 4-periódica se sigue la conv. puntual en $\mathbb{R}$ de la s. de F.

Como en $]-1,2[$ f es indef. derivable se sigue que $\forall\, [c,d] \subset]-1,2[$ $f \in VA[c,d]$ luego su s. de F. conv. unif. Lo mismo se aplica $\forall$ $[c,d] \subset]-2,-1[$.

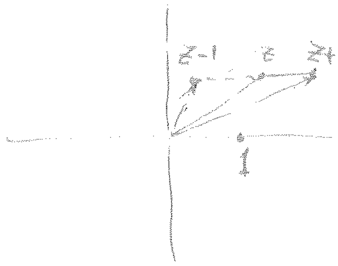
C3

$$w = h(z) = \frac{z-1}{z+1}$$



Mediante el cambio de variable propuesto, el semiplano Ω se transforma en el disco unidad.

La forma más simple de comprobarlo es representar gráficamente los complejos $z-1$ y $z+1$. $\Omega = \{x+yi \mid x>0\}$. El módulo de $z-1$ es menor que el módulo de $z+1$ $\forall z \in \Omega$. Cuando $z \in \partial\Omega$ $|z+1| = |z-1|$, así que $|w| \leq 1$.



Como caso límite $|w| = 1$ cuando $z = iy$ $(x=0)$

Así que Ω se aplica en el interior del disco unidad y el eje imaginario se aplica en la circunferencia unidad.

No obstante vamos a operar también en componentes.

$$h(z) = w = \xi + i\eta = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2} \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} \\ \eta = \dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$$

$$\xi^2+\eta^2 = \frac{x^4+y^4+1-2x^2-2y^2+2x^2y^2+4y^2}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2} = \frac{x^4+y^4+2x^2y^2+1+2y^2-2x^2}{x^4+y^4+2x^2y^2+1+2y^2+4x^3+2x^2+4x+4xy^2} < 1$$

igual a 1 para $x=0$

si $x=0$ $\begin{cases} \text{para } y>0 \\ \text{para } y<0 \end{cases}$ $\quad \xi = \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$, $\eta = \dfrac{2y}{y^2+1} > 0$ semicircunferencia sup.

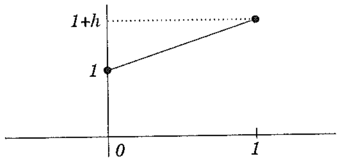
$\eta = \dfrac{2y}{y^2+1} < 0$ semicirc. inferior.

Problema equivalente $\begin{cases} \Delta V = 0 \text{ en } \mathcal{D} \\ V(e^{i\theta}) = 1 \quad -\pi<\theta<0 \\ V(e^{i\theta}) = 0 \quad 0<\theta<\pi \\ V \text{ acotada en } \overline{\mathcal{D}} \setminus \{1,-1\} \end{cases}$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (4–9–2006)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Una cuerda está inicialmente en reposo y tiene la forma de la figura.



Determinar el movimiento de la cuerda si sus extremos permanecen fijos en el transcurso del tiempo y está sometida solamente a la fuerza de la gravedad.
(Sug.: Si g es la aceleración de la gravedad, el movimiento de la cuerda está gobernado por la ecuación diferencial $u_{tt} = c^2 u_{xx} - g$. Entonces se debe resolver el problema de contorno

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} - g & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = 1 \ , \quad u(1,t) = 1 + h & t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 + hx & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \ . \end{array}$$

La solución de este problema es suma de una solución de la ecuación, independiente del tiempo, $U(x)$, que satisface las condiciones $U(0) = 1$, $U(1) = 1 + h$, y de la única solución $v(x,t)$ del problema de contorno (que se resolverá mediante el método de separación de variables)

$$\begin{array}{l} v_{tt} = c^2 v_{xx} \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -\frac{g}{2c^2} x(x-1) \\ v_t(x,0) = 0 \ . \end{array} \quad)$$

P–2 *a*) Utilizando la transformación de Fourier resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{(\omega^2 - 5i\omega - 4)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Probar que la función $u(z) = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$ es una solución $\neq 0$ del problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } U \\ \lim_{r \to 1-0} u(re^{i\theta}) = 0 \ , \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

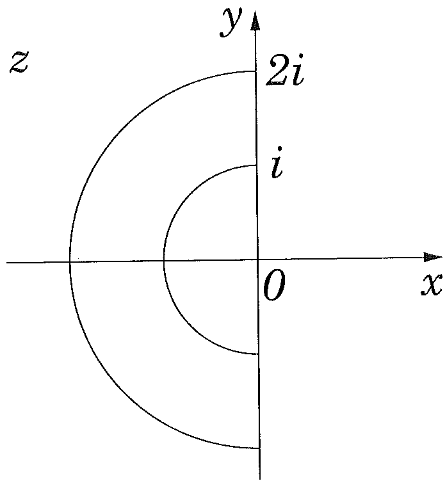
Nota. **P-1**, **P-2a** y **P-2b** se entregarán por separado. **P-1**: 4 hojas (por una cara), **P-2a**: 3 hojas (por una cara), **P-2b**: 2 hojas (por una cara). Puntuación: (10, 7, 3).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (4–9–2006)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Representar gráficamente la función 1–periódica, $f(x)$, que en el intervalo $(-1,0)$ coincide con $\sqrt[3]{x}$ $(= -e^{\frac{1}{3}\log(-x)})$ y estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de dicha función.

C–2 ¿En qué region se transforma la zona señalada de la figura mediante la aplicación $h(z) = \log_\pi(z) - i\frac{\pi}{2}$?



C–3 *a)* Hallar la transformada de Fourier de la funcion $\chi_{[a-r,a+r]}$.

b) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ probar que

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \ .$$

C–4 Hallar el problema de contorno equivalente al siguiente

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \text{ en } D(0,1) \\ T(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < 2\theta_0 \\ 0 & 2\theta_0 < \theta < 2\pi \end{cases} \\ T \text{ acotada} \end{cases} \qquad (\theta_0 \in]0, \tfrac{\pi}{2}[)$$

utilizando la transformación $h(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (3, 2, 2, 3).

P-1 Calculemos primeramente $U(x)$:

$U(x)$ satisface pues la ecuación $U'' = \frac{g}{c^2}$ luego $U' = \frac{g}{c^2}x + A$ y así $U = \frac{g}{c^2}\frac{x^2}{2} + Ax + B$ que con las condiciones $U(0)=1$ $U(1) = 1+h$ se obtiene $U(x) = \frac{g}{2c^2}x(x-1) + hx + 1$

Resolvamos a continuación por el MSV el problema de contorno

$$\begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ \\ (iii) \end{array}\left\{\begin{array}{l} v_{tt} = c^2 v_{xx} \qquad 0<x<1,\ t>0 \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -\frac{g}{2c^2}x(x-1) \\ v_t(x,0) = 0 \end{array}\right.$$

Sea $v(x,t) = X(x)T(t)$ una función que satisface (i) (ii) (iii) ($X \in C^2[0,1]$ y tiene aquí un número finito de ceros y $T \in C^2[0,\infty[$ y localmente finitamente oscilante):

$$XT'' = c^2X'' \qquad \left\{\begin{array}{l} X'' - \frac{\lambda}{c^2}X = 0,\ 0\le x\le 1 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} T'' - \lambda T = 0 \qquad t\geq 0 \\ T'(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{T''}{T} = c^2\frac{X''}{X} = \lambda$$

Calculemos λ:

$\lambda > 0$ $\quad \{e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}, e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}\}$ SF $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} X(x) = Ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + Be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} \\ X(0) = X(1) = 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ $A = B = 0$

$\lambda = 0$ $\quad \begin{array}{l} X(x) = Ax + B \\ X(0) = X(1) = 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ $A = B = 0$

$\lambda < 0$ $\quad r^2 = \pm i\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}$ $\quad \begin{array}{l} X(x) = A\cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x \\ X(0) = 0 = A \\ X(1) = 0 = B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{-\lambda}}{c} \qquad B\neq 0 \quad \lambda = -(n\pi c)^2 \quad n = 1,2,\dots \end{array}$

$\Rightarrow$ $X(x) = B\operatorname{sen} n\pi x$

Resolvemos el otro problema y obtenemos $T(t) = C\cos n\pi c t$

Proponemos como solución del problema de contorno

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x \cos n\pi c t$$

Tomemos ahora la función $f(x) = -\frac{g}{2c^2}x(x-1)$, $0<x<1$

($f'(x) = -\frac{g}{c^2}x + \frac{g}{2c^2}$, $f'' = -\frac{g}{c^2} < 0$) y la extiendo a $]-1,0[$ de forma impar y a toda la recta con período 2, entonces

$$-\frac{g}{2c^2}\, x(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x \qquad 0<x<1$$

siendo

$$b_n = -\frac{g}{c^2}\int_0^1 (x^2-x)\operatorname{sen} n\pi x\,dx = \frac{2g}{n^3\pi^3c^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

Por lo que

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g}{\pi^3c^2}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right]\cos n\pi c t \operatorname{sen} n\pi x$$

Finalmente la solución del problema planteado es

$$u(x,t) = U(x) + v(x,t) = \frac{g}{2c^2}\, x(x-1) + hx + 1 + v(x,t) \,.$$

$0<x\le 1$
$t\geq 0$

Examen de EDP (4-9-2006)

C1. Representaremos gráficamente la f^n 1-periódica $f(x)$ que en el int. $(-1,0)$ toma el valor $\sqrt[3]{x} := -e^{\frac{1}{3}\log(-x)}$.

obs. que como $\log(x) \in C(0,1)$ y $\exp(x) \in C(-\infty,0)$ entonces $f(x) = -\exp(\frac{1}{3}\log(-x)) \in C(-1,0)$.

Como f es 1-periódica, basta estudiar su gráfica en el int. $(-1,0)$.

Como $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces $f(x) := -e^{\frac{1}{3}\log(-x)} < 0 \ \forall x \in (-1,0)$.

Además,

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to -1+} f(x) = -1$$

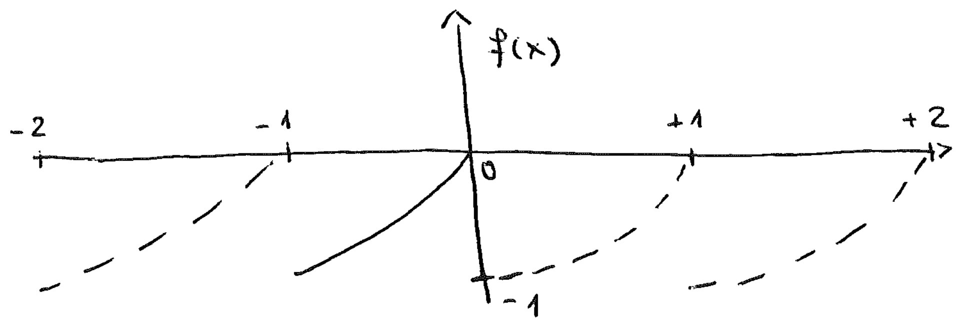
Su derivada en $(-1,0)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{3x} e^{\frac{1}{3}\log(-x)} > 0 \quad \forall x \in (-1,0)$$

luego f es monot. creciente en $(-1,0)$; y

$$f''(x) = \frac{2}{9x^2} e^{\frac{1}{3}\log(-x)} > 0$$

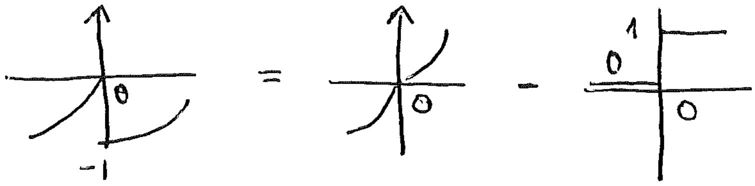
luego su gráfica es



Es fácil ver que $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2\})$ (i.e, $f \in C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$) y que está acotada en $\mathbb{R}$.

Convergencia puntual. Si $x \in (-1,0)$, tomamos $\delta>0$ t.q. $I := [x-\delta, x+\delta] \subset (-1,0)$; como f es monótona en I, $f \in VA(I)$, luego (crit. de Jordan) su s. de Fourier converge a $f(x)$ (porque $f \in C(x)$).

Si $x=0$, sea la siguiente gráfica en un entorno de 0:



$$f \quad = \quad f_1 \quad - \quad f_2$$

como $f = f_1 - f_2$, con $f_1, f_2 \uparrow$ en un ent. de 0, f es de VA en un entorno del origen, luego (crit. de Jordan) su s. de Fourier conv en 0 a

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{f(-1+)+f(0-)}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Si $x=-1$ se razona igual.

Convergencia uniforme. Como $f \in C]-1,0[$ y f es monótona en $(-1,0)$, su s. de Fourier converge unif. en todo intervalo $[c,d] \subset (-1,0)$ (porque $f \in VA[c,d]$ por ser monótona).

P2a. Resolver

$$\frac{1}{(\omega^2-5i\omega-4)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \qquad , \text{si } f\in L^1(\mathbb{R}).$$

Como $f\in L^1(\mathbb{R})$ tiene sentido $\hat f(\omega):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$,

luego la ec. integral es

$$\frac{1}{(\omega^2-5i\omega-4)^2}=\sqrt{2\pi}\ \hat f(\omega) \qquad (\omega\in\mathbb{R})$$

y hemos de hallar una f^n^ $f\in L^1(\mathbb{R})$ t.q. $\hat f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\omega^2-5i\omega-4)^2}$.

Como $\hat f\in L^1(\mathbb{R})$ (ver luego) aplicamos la fórmula de inversión de Fourier: en todo punto x donde f es continua,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat f(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega^2-5i\omega-4)^2}e^{i\omega x}\,d\omega .$$

La integral a calcular es del tipo $\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{ix\alpha}dx$

con $P(z)=1$, $Q(z)=(z^2-5iz-4)^2=(z-4i)^2(z-i)^2$. Calculemos los residuos en los ceros del denominador:

$$\operatorname{Res}_{4i}=\lim_{z\to 4i}\frac{d}{dz}\left[(z-4i)^2\frac{P(z)}{Q(z)}e^{izx}\right]=\lim_{z\to 4i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-i)^2}e^{izx}\right]=$$

$$=-\frac{i}{27}(3x+2)\,e^{-4x}$$

$$\operatorname{Res}_{i}=\frac{i}{27}(-3x+2)\,e^{-x}$$

luego

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\cdot\begin{cases}2\pi i\cdot(\operatorname{Res}_{4i}+\operatorname{Res}_{i})=\frac{1}{27}2\pi\left((3x+2)e^{-4x}+(3x-2)e^{-x}\right), & x>0\\ \pi i\cdot\frac{1}{27}(2-2)=0, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{27}\left((3x+2)e^{-4x} - (3x-2)e^{-x}\right) \cdot \chi_{[0,\infty[}(x) \quad ,$$

y se observa que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

(Veamos finalmente que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$: si $\omega \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sqrt{2\pi}\,|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{|\omega^2 - 5i\omega - 4|^2} = \frac{1}{|\omega-4i|^2\,|\omega-i|^2} =$$

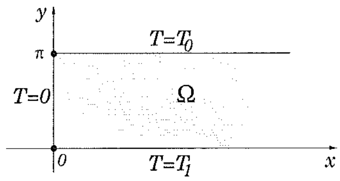
$$= \frac{1}{(\omega^2+16)(\omega^2+1)} \leq \frac{1}{\omega^2+1} \quad ,$$

pero la f^{n} $\frac{1}{x^2+1} \in L^1(\mathbb{R})$.)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (23–6–2006)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

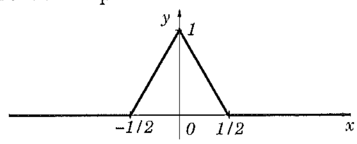
P–1 Hallar la temperatura estacionaria en la zona de la figura



(Sug.: Para llegar a un problema equivalente en el semiplano superior emplear la transformación $\omega = \coth \frac{z}{2}$, después una rotación y finalmente otra transformación elemental.)

P–2 Utilizando la transformación de Fourier, resolver el problema de contorno

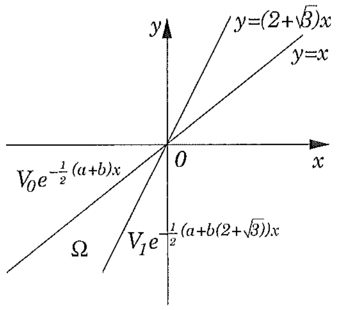
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & -\infty < x\,,\, t < \infty\,, \\ u(x,0) = 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x)\,, \end{cases}$$



siendo $f(x)$ la función de la figura.

P–3 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = 0\,, & (a,b,c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } c = \frac{1}{4}(a^2+b^2)) \\ u(x,x) = V_0 e^{-\frac{1}{2}(a+b)x}\,, \quad x < 0\,, \\ u(x,(2+\sqrt{3})x) = V_1 e^{-\frac{1}{2}(a+b(2+\sqrt{3}))x}\,, \quad x < 0\,, \end{cases}$$



Primero pasar a un problema equivalente mediante el cambio de función incógnita $u(x,y) = v(x,y)e^{-\frac{1}{2}(ax+by)}$. Después efectuar una rotación y una transformación elemental para llegar a un problema equivalente en el semiplano superior.

Nota. Cada problema se entregará por separado. Puntuación: (6, 7, 7).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (23–6–2006)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sean u, v dos funciones armónicas en Ω. Probar que uv es armónica en Ω sii $\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0$ en Ω. (Sug.: Demostrar la fórmula $\Delta(uv) = v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$.)

C–2 Análisis de la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de la función π–periódica que en el intervalo $(0,\pi)$ vale $+\sqrt{x}$.

C–3 Utilizando la teoría de la transformación de Fourier, resolver la ecuación integral

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = (1-|\omega|)\,\chi_{[-1,1]}(\omega)\ , \qquad -\infty < \omega < \infty\ ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

C–4 Hallar las vibraciones de una cuerda, con extremos fijos $x = -\pi$ y $x = \pi$, sabiendo que su desviación inicial es nula y su velocidad inicial es $\cos(\frac{7x}{2})$. (Sug.: Se trata de resolver, utilizando el método de separación de variables, el problema mixto

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , & -\pi < x < \pi\ ,\ t > 0 \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0\ , & \\ u(x,0) = 0\ , & \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(\frac{7x}{2})\ . \quad) & \end{cases}$$

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (2, 2, 3, 3).

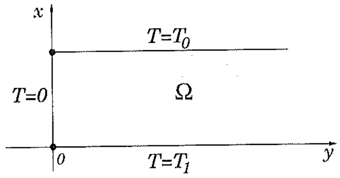
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales

Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (23–6–2006)

2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

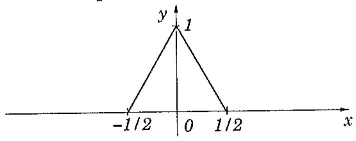
P–1 Hallar la temperatura estacionaria en la zona de la figura



(Sug.: Para llegar a un problema equivalente en el semiplano superior emplear la transformación $\omega = \coth \frac{z}{2}$, después una rotación y finalmente otra transformación elemental.)

P–2 Utilizando la transformación de Fourier, resolver el problema de contorno

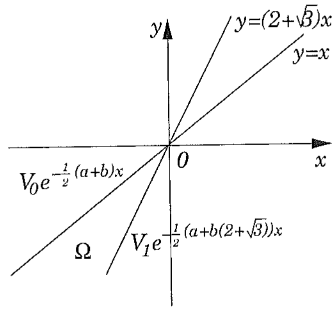
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, & -\infty < x\,, t < \infty \,, \\ u(x,0) = 0 \,, & \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) \,, & \end{cases}$$



siendo $f(x)$ la función de la figura.

P–3 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \,, & (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } c = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)) \\ u(x,x) = V_0 e^{-\frac{1}{2}(a+b)x} \,, \quad x < 0 \,, & \\ u(x, (2+\sqrt{3})x) = V_1 e^{-\frac{1}{2}(a+b(2+\sqrt{3}))x} \,, \quad x < 0 \,, & \end{cases}$$



Primero pasar a un problema equivalente mediante el cambio de función incógnita $u(x,y) = v(x,y)e^{-\frac{1}{2}(ax+by)}$. Después efectuar una rotación y una transformación elemental para llegar a un problema equivalente en el semiplano superior.

Nota. Cada problema se entregará por separado. Puntuación: (6, 7, 7).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (23–6–2006)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y sean u, v dos funciones armónicas en Ω. Probar que uv es armónica en Ω sii $\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0$ en Ω. (Sug.: Demostrar la fórmula $\Delta(uv) = v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$.)

C–2 Análisis de la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de la función π–periódica que en el intervalo $(0,\pi)$ vale $+\sqrt{x}$.

C–3 Utilizando la teoría de la transformación de Fourier, resolver la ecuación integral

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = (1-|\omega|)\,\chi_{[-1,1]}(\omega)\ , \qquad -\infty < \omega < \infty\ ,$$

sabiendo que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

C–4 Hallar las vibraciones de una cuerda, con extremos fijos $x = -\pi$ y $x = \pi$, sabiendo que su desviación inicial es nula y su velocidad inicial es $\cos(\frac{7x}{2})$. (Sug.: Se trata de resolver, utilizando el método de separación de variables, el problema mixto

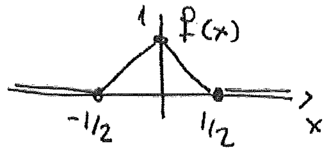
$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , & -\pi < x < \pi\ ,\ t > 0 \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0\ , & \\ u(x,0) = 0\ , & \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(\frac{7x}{2})\ . &) \end{array}\right.$$

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Puntuación: (2, 2, 3, 3).

EXAMEN DE EDP (23-6-2006)

$\boxed{P2}$ Sea el problema de contorno

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,0)=0 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) & \end{cases}$$



siendo $f(x) = \begin{cases} 0, & x<-1/2 \\ 1+2x, & -1/2\le x\le 0 \\ 1-2x, & 0<x\le 1/2 \\ 0, & x>1/2 \end{cases} = (1-2|x|)\cdot \chi_{[-1/2,1/2]}$

(se observa que $f\in C(\mathbb{R})$, está acotada en $\mathbb{R}$, $f\geq 0$, es par, y $f\in L^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx = \int_{-1/2}^{1/2}(1-2|x|)\,dx = \frac{1}{2}<+\infty$)

Sea el probl. auxiliar:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2 \\ \text{(ii)} & u(\cdot,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R})\quad \forall t\in\mathbb{R}, \\ \text{(iii)} & \lim\limits_{t\to 0}\|u(\cdot,t)\|_1 = 0, \qquad \lim\limits_{t\to 0}\left\|\dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) - f\right\|_1 = 0 \\ \text{(iv)} & \lim\limits_{\eta\to 0}\left\|\dfrac{u(\cdot,t+\eta)-u(\cdot,t)}{\eta} - \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right\|_1 = 0, \\ & \lim\limits_{\eta\to 0}\left\|\dfrac{\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t+\eta)-\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)}{\eta} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\cdot,t)\right\|_1 = 0, \quad \forall t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Sup. que $\exists$ solución u al probl. (2), denotemos $v(\lambda,t) := [u(\cdot,t)]^\wedge(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. Tomando transf. de Fourier en (i) y teniendo en cuenta (iv) y propiedades de la tr. de Fourier, se llega a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \lambda^2 v = 0, \quad \lambda\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}.$$

Si $\underline{\lambda\neq 0}$, la sol. general de esta ec. dif. es

$$v(\lambda,t) = A(\lambda)\cos\lambda t + B(\lambda)\cdot\operatorname{sen}\lambda t$$

(si $\lambda=0$, $v(0,t) = A(0)+B(0)\,t$.)

Teniendo en cuenta que "$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad 0 \le |\hat{f}(\lambda)| \le \|f\|_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$",

las condiciones (iii) dan lugar a las siguientes condiciones para v:

$$\lim_{t\to 0} v(\lambda,t) = 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial v}{\partial t}(\lambda,t) = \hat{f}(\lambda) \quad , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda \neq 0$, $\quad \lim_{t\to 0} v(\lambda,t) = A(\lambda) = 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial v}{\partial t}(\lambda,t) = \lambda \cdot B(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$

luego

$$v(\lambda,t) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} \lambda t \qquad (\lambda \neq 0)$$

(si $\lambda = 0$, $v(0,t) = \hat{f}(0) \cdot t$)

Calculemos por tanto $\hat{f}(\lambda)$:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-1/2}^{0} (1+2x)\, e^{-i\lambda x}\, dx + \int_0^{1/2} (1-2x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/2} (1-2x) \cos \lambda x \, dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1-\cos\frac{\lambda}{2}}{\lambda^2} \quad , \quad \lambda \neq 0$$

$\left(\hat{f}(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)$

Por lo tanto,

$$v(\lambda,t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\left(1-\cos\frac{\lambda}{2}\right) \operatorname{sen} \lambda t}{\lambda^3} \quad , \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

y como $v(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ~~($|v(\cdot,t)| \le 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left|\frac{1}{\lambda^3}\right| \in L^1(\mathbb{R})$ para $\lambda \neq 0$)~~

aplicamos la fórmula de inversión de Fourier: $\quad \left(\frac{\left(1-\cos\frac{\lambda}{2}\right) \operatorname{sen}\lambda t}{\lambda^3} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R} \right.$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda,t)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{\lambda}{2}\right) \operatorname{sen}\lambda t}{\lambda^3}\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

e-4. Aplicamos el método de separación de variables

$u(x,t) = X(x)T(t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT''$

$X''T = XT''$; $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda$

Resulta:

Prob. contorno $\left\{ \begin{array}{l} X'' - \lambda X = 0 \\ X(-\pi) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{array} \right.$ $T'' - \lambda T = 0$

Resolvemos en primer lugar el prob. de contorno: ec. dif. de 2º orden de coef. constantes. Sólo da soluciones no triviales para $\lambda < 0$

$\lambda < 0$: Sistema fundamental soluciones: $\{\cos\sqrt{-\lambda}x, \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x\}$

Sol. gral. $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x$

$\left. \begin{array}{l} X(-\pi) = A\cos\sqrt{-\lambda}\pi - B\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \\ X(\pi) = A\cos\sqrt{-\lambda}\pi + B\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{array} \right\}$ sistema homogéneo.

Para que haya solución no trivial se debe cumplir: $\det\begin{pmatrix} \cos\sqrt{-\lambda}\pi & -\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi \\ \cos\sqrt{-\lambda}\pi & \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi \end{pmatrix} = 0$

$2\cos\sqrt{-\lambda}\pi \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \Longrightarrow 2\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$

$\sqrt{-\lambda} = \frac{n}{2}$; $\lambda = -\frac{n^2}{4}$

$A\cos\sqrt{-\lambda}\pi = B\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi \Rightarrow B = A\frac{\cos\sqrt{-\lambda}\pi}{\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi}$

Con lo cual $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + A\frac{\cos\sqrt{-\lambda}\pi}{\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi}\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x = A\operatorname{sen}\frac{n}{2}(\pi + x)$

O lo que es lo mismo: $\left\{ \begin{array}{ll} X(x) = B\operatorname{sen}\frac{n}{2}x & \text{para } n \text{ par} \\ X(x) = A\cos\frac{n}{2}x & \text{" } n \text{ impar.} \end{array} \right.$

Resolvemos ahora la ec. dif. en $T(t)$: $T'' - \frac{n^2}{4}T = 0$

$T(t) = C\cos\frac{n}{2}t + D\operatorname{sen}\frac{n}{2}t$, resulta:

n par: $u(x,t) = \left(C\cos\frac{n}{2}t + D\operatorname{sen}\frac{n}{2}t\right)\operatorname{sen}\frac{n}{2}t$

n impar: $u(x,t) = \left(C\cos\frac{n}{2}t + D\operatorname{sen}\frac{n}{2}t\right)\cos\frac{n}{2}t$

Imponemos ahora la condición inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} n \text{ par: } \left(-C\frac{n}{2}\,\text{sen}\,\frac{n}{2}t + D\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2}t\right)\text{sen}\,\frac{n}{2}x \\ n \text{ impar } \left(-C\frac{n}{2}\,\text{sen}\,\frac{n}{2}t + D\frac{n}{2}\cos\frac{n}{2}t\right)\cos\frac{n}{2}t \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \left(-C\frac{n}{2}\cdot 0 + D\frac{n}{2}\cdot 1\right)\cos\frac{\cancel{n}x}{2} = \cos\frac{7x}{2} \Rightarrow \begin{cases} n=7 \\ D=\frac{2}{7} \\ C \text{ arbitraria} \end{cases}$$

Si elegimos $C=0$, resulta

$$\boxed{u(x,t) = \frac{2}{7}\,\text{sen}\,\frac{7}{2}t\cdot\cos\frac{7}{2}x}$$

P-3 Sea $u(x,y)$ la solución de (1) entonces de $u(x,y) = v(x,y)e^{-\frac{1}{2}(ax+by)}$ se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a}{2}v\right)e^{-1/2(ax+by)}$$

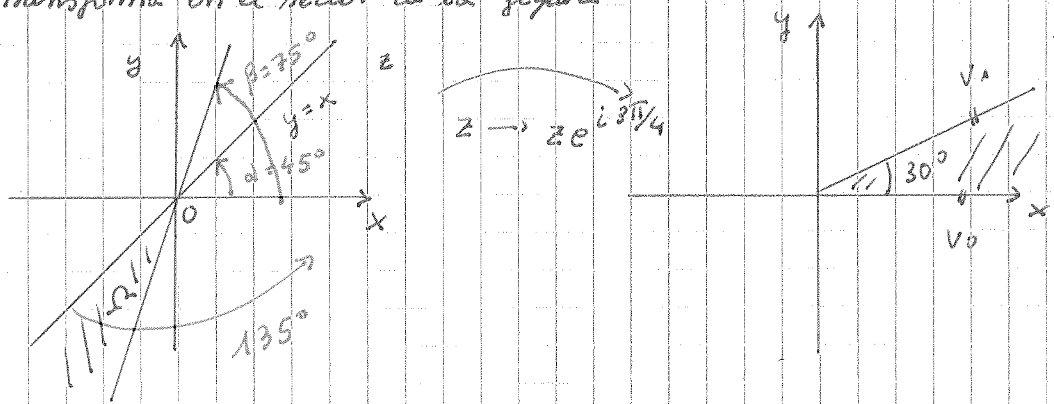
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{4}v\right)e^{-1/2(ax+by)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{b}{2}v\right)e^{-1/2(ax+by)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - b\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2}{4}v\right)e^{-1/2(ax+by)}$$

y, por tanto, sustituyendo en la ecuación diferencial que satisface u, llegamos al problema de contorno

$$(2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 & (x,y)\in\Omega \\ v(x,x) = V_0 \\ v(x,(2+\sqrt{3})x) = V_1 \end{cases}$$

Hacemos ahora una rotación de 135° (en sentido antihorario) y Ω se transforma en el sector de la figura

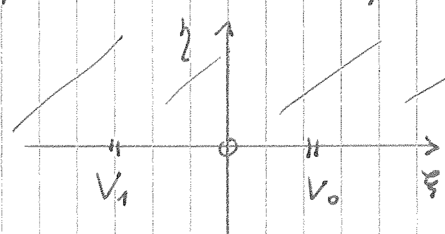


Si a continuación hacemos la transformación $z \longrightarrow z^6$ llegamos al semiplano superior. Por tanto la transformación

$$z \longrightarrow \left(z e^{i3\pi/4}\right)^6 = z^6 e^{i\frac{9\pi}{2}} = i z^6$$

nos transforma $\overline{\Omega}$ en el semiplano superior $\overline{\mathbb{R}^2_+}$. Planteamos ahora el problema generalizado de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el semiplano superior

$$(3)\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \phi = V_1 & \xi < 0 \\ \phi = V_0 & \xi > 0 \\ \phi \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+}\setminus\{0\} \end{cases}$$



La solución de (3) viene dada por

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{V_1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt + \frac{V_0}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt =$$

$\eta > 0$

$$= \frac{V_1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right) + \frac{V_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right) = \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_0-V_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}$$

La solución $v(x,y)$ del problema de contorno (2) será $v(z) = \phi(iz^6)$.

$$v(re^{i\theta}) = \phi(ir^6e^{i6\theta}) = \phi(r^6e^{i(6\theta+\pi/2)}) =$$

$z = re^{i\theta}$

$0 < r < \infty$

$\pi + \frac{\pi}{4} < \theta < \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

$$= \phi\Big(\underbrace{r^6\cos(6\theta+\pi/2)}_{\xi},\ \underbrace{r^6\operatorname{sen}(6\theta+\tfrac{\pi}{2})}_{\eta}\Big) =$$

$$= \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_0-V_1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos(6\theta+\pi/2)}{\operatorname{sen}(6\theta+\pi/2)}\right) =$$

$$= \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_0-V_1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\operatorname{sen}6\theta}{\cos 6\theta}\right) =$$

$$= \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_1-V_0}{\pi}\,6\theta$$

Finalmente la solución del problema dado es

$$u(z) = v(re^{i\theta})\,e^{-1/2\,(ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta)}$$

$z = re^{i\theta} \in \Omega$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (13–9–2005)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar las ecuaciones siguientes:

$$\text{a)} \quad y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{b)} \quad x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

C–2 Análisis de la convergencia puntual y uniforme del desarrollo en serie de Fourier de la función 6−periódica e impar que en el intervalo $]0,3[$ coincide con la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ -\sqrt{4x - x^2 - 3}, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

C–3 Hallar el problema de contorno equivalente al siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega =]0,\pi]\times]0,\infty[, \\ u(0,y) = V_1\ , & 0 < y < \infty \\ u(x,0) = V_2\ , & 0 < x < \pi \\ u(\pi,y) = V_3\ , & 0 < y < \infty \\ u \text{ acotada} & \end{cases}$$

vía la transformación $w = \mathrm{e}^{iz-1}$.

C–4 Hallar una solución no idénticamente nula del problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(Sug.: Obtener las soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ utilizando el método de separación de variables.)

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado y ocupar un máximo de dos hojas (por una cara). **Puntuación**: (2,2,3,3).

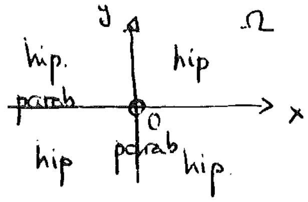
EXAMEN DE E.D.P (ETSII, 13-9-2005)

C1 Clasificar

(a) $$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ (b) $$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(a) La matriz de coeficientes $A(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix} \neq O_2$ en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y es diagon

Siempre que $y \neq 0$ ó $x \neq 0$ un valor propio es $+$ y el otro v.p. es $-$, luego la EDP (a) es de tipo hiperbólico $\forall (x,y) \in \Omega \setminus \{x=0, y\neq 0\} \cup \{x \neq 0, y = 0\}$:



(b) Es lo mismo: en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la EDP es de tipo elíptico $\forall (x,y) \in \Omega \setminus \{x=0, y\neq 0\} \cup \{x \neq 0, y=0\}$, y en el resto es de tipo parabólico

---

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura | Curso / Curs | Grupo / Grup | Nº Pg. 1

(P2) a) $\frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \Rightarrow \frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2} = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\omega)$

puesto que $f \in L^1(\mathbb{R})$

Así $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2}$. Veamos que $\hat{f} \in (L^1)^1(\mathbb{R})$

* Como $\omega^2+i\omega+2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-i \pm \sqrt{i^2-8}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} \begin{cases} i \\ -2i \end{cases}$

entonces $\omega^2+i\omega+2 \neq 0 \ \forall \omega \in \mathbb{R}$ luego $\hat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$ y por tanto localmente integrable.

* $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega^2+i\omega+2|^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2+2)^2+\omega^2} d\omega$

Pero como $\omega^2+2 > 1 \Rightarrow (\omega^2+2)^2 > 1 \Rightarrow (\omega^2+2)^2+\omega^2 > 1+\omega^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\omega^2+2)^2+\omega^2} < \frac{1}{\omega^2+1}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| d\omega \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\operatorname{arctg} \omega\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} < \infty$$

Se tiene así que $\hat{f} \in (L^1)^1(\mathbb{R})$.

Como $f, \hat{f} \in (L^1)^1(\mathbb{R})$ y $f \in C(\mathbb{R})$ en virtud de la fórmula de inversión (pag. 40 (xiv) del curso)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2} \cancel{d\omega}\, e^{i\omega x} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2} e^{i\omega x} d\omega.$$

Reprovał PAPEL 100% RECICLADO

Nº | Apellidos y nombre / Cognoms i nom | Firma / Signatura | Fecha / Data

P2 a)

Calculamos esta integral mediante residuos.

Como $(\omega^2+i\omega+2)^2=0 \iff \left.\begin{array}{l}\omega_1=i\\ \omega_2=-2i\end{array}\right\}$ dobles

entonces

$$\mathrm{Res}_{\omega_1}=\frac{1}{1!}\frac{d}{d\omega}\left[(\omega-i)^2\frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2}e^{i\omega x}\right]_{\omega=i}=\frac{d}{d\omega}\left[(\omega-i)^2\frac{1}{(\omega-i)^2(\omega+2i)^2}e^{i\omega x}\right]_{\omega=i}$$

$$=\frac{d}{d\omega}\left[(\omega-i)^{-2}e^{i\omega x}\right]_{\omega=i}=\left[-2(\omega+2i)^{-3}e^{i\omega x}+(\omega+2i)^{-2}ix\,e^{i\omega x}\right]_{\omega=i}$$

$$=-2(3i)^{-3}e^{-x}+(3i)^{-2}ixe^{-x}=\left[\frac{-2}{27(-i)}+\frac{i}{9(-1)}x\right]e^{-x}=\boxed{\frac{-i}{27}(2+3x)e^{-x}}$$

$$\mathrm{Res}_{\omega_2}=\frac{1}{1!}\frac{d}{d\omega}\left[(\omega+2i)^2\frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2}e^{i\omega x}\right]_{\omega=-2i}=\frac{d}{d\omega}\left[(\omega+2i)^2\frac{1}{(\omega-i)^2(\omega+2i)^2}e^{i\omega x}\right]_{\omega=-2i}$$

$$=\frac{d}{d\omega}\left[(\omega-i)^{-2}e^{i\omega x}\right]_{\omega=-2i}=\left[-2(\omega-i)^{-3}e^{i\omega x}+(\omega-i)^{-2}ix\,e^{i\omega x}\right]_{\omega=-2i}$$

$$=-2(-3i)^{-3}e^{i(-2i)x}+(-3i)^{-2}ix\,e^{i(-2i)x}=\left[\frac{-2}{-27(-i)}+\frac{i}{9(-1)}x\right]e^{2x}=$$

$$=\boxed{\frac{i}{27}(2-3x)e^{2x}}$$

Aplicamos entonces la fórmula de los residuos.

Puesto que $\mathrm{Im}(\omega_1)=\mathrm{Im}(i)=1>0$

$\mathrm{Im}(\omega_2)=\mathrm{Im}(-2i)=-2<0$

entonces

P2 a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2} e^{i\omega x} d\omega = \begin{cases} 2\pi i \, Res_i & x>0 \\ -2\pi i \, Res_{-2i} & x<0 \\ \pi i \, Res_i - \pi i \, Res_{-2i} & x=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \, \frac{-i}{27}(2+3x)e^{-x} & x>0 \\ -2\pi i \, \frac{i}{27}(2-3x)e^{-x} & x<0 \\ \pi i \, \frac{-2i}{27} - \pi i \, \frac{2i}{27} & x=0 \end{cases}$$

y en consecuencia

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2+i\omega+2)^2} e^{i\omega x} dx = \begin{cases} \frac{1}{27}(2+3x)e^{-x} & x>0 \\ \frac{1}{27}(2-3x)e^{2x} & x<0 \\ \frac{2}{27} & x=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{27}(2+3x)e^{-x} & x\geq 0 \\ \frac{1}{27}(2-3x)e^{-x} & x<0 \end{cases}$$

(3) Dado $z \in \Omega \Rightarrow z = x+iy$ con $0<x<\pi$

$0<y<\infty$

Entonces $\omega = e^{iz-1} = e^{i(x+iy)-1} = e^{ix-y-1} = e^{-y-1}e^{ix}$

Denotando $\left.\begin{array}{l}\rho = e^{-y-1}\\ \theta = x\end{array}\right\}$ se tiene

$0<y<\infty \Rightarrow -\infty<-y<0 \Rightarrow -\infty<-y-1<-1 \Rightarrow e^{-\infty}<e^{-y-1}<e^{-1}$

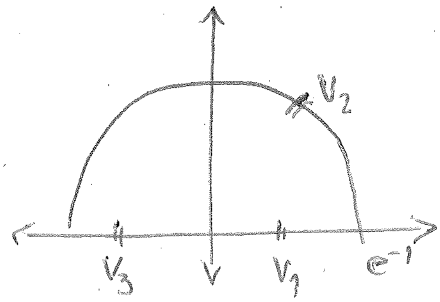
$\Rightarrow \boxed{0<\rho<e^{-1}}$

$0<x<\pi \Rightarrow \boxed{0<\theta<\pi}$

Así $\omega = \rho e^{i\theta}$ con $\left.\begin{array}{l}0<\rho<e^{-1}\\ 0<\theta<\pi\end{array}\right\}$ que es un semicírculo de radio $\frac{1}{e}$.

Veamos la frontera:

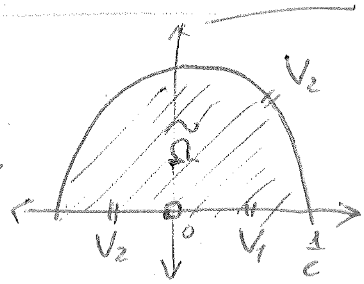
$\left.\begin{array}{l}(V_1) * \; x=0 \Rightarrow \theta=0, \quad 0<\rho<e^{-1}\\ (V_2) * \; y=0 \Rightarrow \rho=\frac{1}{e}, \quad 0<\theta<\pi\\ (V_3) * \; x=\pi \Rightarrow \theta=\pi, \quad 0<\rho<e^{-1}\end{array}\right\}$



El problema de contorno equivalente es entonces

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\Delta v = 0 \text{ en } \tilde{\Omega}\\ v(\rho) = V_1 \quad 0<\rho<e^{-1}\\ v\left(\frac{1}{e}e^{i\theta}\right) = v\left(e^{i\theta-1}\right) = V_2, \quad 0<\theta<\pi\\ v(-\rho) = V_3 \quad 0<\rho<e^{-1}\\ v \text{ acotada}\end{array}\right\}}$$

siendo



P-1 Si llamamos ϕ al cambio de variable, tenemos

$$\phi(x,y) = (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)) = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}(x-y), \frac{\sqrt{6}}{3}(x+y)\right) = (\xi, \eta)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[dr, "u"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[l, shift left, "\psi"] \arrow[d, dashed, "v = u \circ \psi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad \phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(\xi,\eta) = \phi'(x,y)\, A(x,y)\, \phi'(x,y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0$. Así llegamos a la ecuación equivalente $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0$

Veamos en qué se transforma Γ a través de ϕ:

$\Gamma: 16x^2 + 16y^2 + 8xy = 15 \qquad x = \frac{5\xi}{2\sqrt{10}} + \frac{3}{2}\frac{\eta}{\sqrt{6}} \qquad y = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\sqrt{6}} - \frac{5}{2}\frac{\xi}{\sqrt{10}}$

y sustituyendo en Γ llegamos a $\xi^2 + \eta^2 = 1 : T$

Γ^+ mediante ϕ se transforma en T^+: En efecto

Si $(x,y) \in \Gamma^+$ entonces $(x,y) \in \Gamma$ e $y > -x$ o bien $x+y>0$ luego $\eta > 0$

Γ^- mediante ϕ se transforma en T^-: En efecto

Si $(x,y) \in \Gamma^-$ entonces $(x,y) \in \Gamma$ e $y < -x$ o bien $y+x<0$ luego $\eta < 0$

<u>El problema de contorno equivalente</u> es entonces

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0 \quad \text{en } U \\ v = \begin{cases} V_0 & \text{en } T^+ \\ V_1 & \text{en } T^- \end{cases} \\ v \text{ acotada en } \overline{U} \setminus \{\pm 1\} \end{array} \right.$$

Por la pag 48 de los apuntes del curso, la solución de (II) es

$$v(\xi,\eta) = v(re^{i\theta}) = \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_0-V_1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2r\operatorname{sen}\theta}{1-r^2}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \xi^2+\eta^2 \\ \xi = r\cos\theta \\ \eta = r\operatorname{sen}\theta \end{array} \right\} = \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_0-V_1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\eta}{1-(\xi^2+\eta^2)}\right)$$

La solución del problema dado (I) por el teorema del cambio de variable es

$$u(x,y) = v(\phi(x,y)) = v(\xi,\eta) = v\left(\frac{\sqrt{10}}{5}(x-y), \frac{\sqrt{6}}{3}(x+y)\right) =$$

$$= \frac{V_0+V_1}{2} + \frac{V_0-V_1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\frac{\sqrt{6}}{3}(x+y)}{1-\left[\frac{10}{25}(x-y)^2+\frac{6}{9}(x+y)^2\right]}\right).$$

P2b (i) Definamos en $\mathbb{R}$ una f^{n} impar y 2π-periódica a partir de la f^{n} del enunciado (y que denotaremos igual):

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}(5x) - \cos(5x) & , \ 0 < x < \frac{2\pi}{5} \\ 0 & , \ x = 2\pi/5 \\ 1 & , \ \frac{2\pi}{5} < x < \pi \\ 0 & , \ x = 0, \pi \\ \operatorname{sen}(5x) + \cos(5x) & , \ -\frac{2\pi}{5} < x < 0 \\ 0 & , \ x = -\frac{2\pi}{5} \\ -1 & , \ -\pi < x < -\frac{2\pi}{5} \\ f \ 2\pi\text{-periódica} \end{cases}$$

Observemos que $\lim_{x\to 0+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = +1$, $\lim_{x\to \frac{2\pi}{5}-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to \frac{2\pi}{5}+} f(x) = +1$, $\lim_{x\to \pi-} f(x) = +1$, $\lim_{x\to \pi+} f(x) = \lim_{x\to \pi+} f(x-2\pi) = -1$, luego f es una función continua en $\mathbb{R}$ excepto en $0, \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\pi, \dots$, y está acot en $\mathbb{R}$. $f \in R_{2\pi}$; por ser impar,

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \ , \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \ (n=1,2,\dots)$$

Analicemos la conv puntual para puntos del intervalo $]-\pi, +\pi]$:

si $x \in]0, \frac{2\pi}{5}[$, $f(x) = \operatorname{sen} 5x - \cos 5x$ es indef. derivable, en particular de derivada continua, luego su s. de F. converge a $f(x)$; lo mismo se aplica si $x \in]\frac{2\pi}{5}, \pi[$ ó si $x \in]-\frac{2\pi}{5}, 0[$ ó si $x \in]-\pi, -\frac{2\pi}{5}[$;

si $x=0$, aplico el Crit. de Dini: como $f(0+) = -1$, $f(0-) = +1$,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0+)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\operatorname{sen}(5h) - \cos(5h) + 1}{h} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0+} 5(\cos 5h + \operatorname{sen} 5h) = 5 ,$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0-h) - f(0-)}{h} = 5$$

la s. de Fourier converge en $x=0$ a $\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0 = f(0)$.

si $x = \frac{2\pi}{5}$, lo mismo: $f(\frac{2\pi}{5}-) = -1$, $f(\frac{2\pi}{5}+) = +1$,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(\frac{2\pi}{5}+h) - f(\frac{2\pi}{5}+)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1-1}{h} = 0 ,$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(\frac{2\pi}{5}-h) - f(\frac{2\pi}{5}-)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\operatorname{sen}(2\pi - 5h) - \cos(2\pi - 5h) + 1}{h} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} -5$$

y la s de Fourier converge en $x=\frac{2\pi}{5}$ a $\frac{f(\frac{2\pi}{5}+)+f(\frac{2\pi}{5}-)}{2}=0$.

si $x=\pi$, idem: $f(\pi-)=+1$, $f(\pi+)=-1$,

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(\pi+h)-f(\pi+)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-1-(-1)}{h}=0,$$

$$f(\pi+h)=f(\pi+h-2\pi)=f(h-\pi)=-1$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(\pi-h)-f(\pi-)}{h}=0$$

Luego la s de Fourier converge en $x=\pi$ a $\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}=0$.
Lo mismo si $x=-2\pi/5$
En resumen, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

Con resp. a la conv uniforme: como $f\in C\,]0,\frac{2\pi}{5}[\,\cap C^{\infty}]0,\frac{2\pi}{5}[$, entonces $\forall [c,d]\subset]0,2\pi/5[$ $f\in VA[c,d]$ y la s. de Fourier conv uniformemente $\forall [c,d]\subset]0,2\pi/5[$. Lo mismo se aplica al intervalo $]\frac{2\pi}{5},\pi[$.

(b) Calcular la s de Fourier:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{2\pi}{5}}[\operatorname{sen}5x-\cos 5x]\operatorname{sen} nx\,dx+\int_{\frac{2\pi}{5}}^{\pi}1\cdot\operatorname{sen} nx\,dx\right\}$$

$(n=1,2,\dots)$

con

$$\int_0^{\frac{2\pi}{5}}\operatorname{sen}5x\operatorname{sen} nx\,dx=\begin{cases}\int_0^{\frac{2\pi}{5}}\frac{1}{2}\left(\cos(n-5)x-\cos(n+5)x\right)dx=\frac{5}{n^2-5^2}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}n, & \text{si } n\neq\\[2ex] \int_0^{\frac{2\pi}{5}}\frac{1}{2}(1-\cos 10x)\,dx=\frac{\pi}{5}, & \text{si } n=5,\end{cases}$$

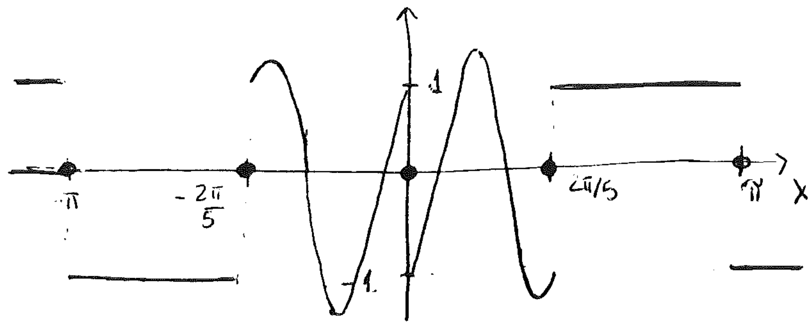
$$\int_0^{\frac{2\pi}{5}}\cos 5x\operatorname{sen} nx\,dx=\begin{cases}-\frac{n}{n^2-5^2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}n-1\right), & \text{si } n\neq 5\\ 0, & \text{si } n=5\end{cases}$$

$$\int_{\frac{2\pi}{5}}^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx=-\frac{1}{n}\Big(\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}-\cos\frac{2\pi}{5}n\Big)$$

luego

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{5}{n^2-5^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}n + \frac{n}{n^2-5^2}\left(\cos \frac{2\pi}{5}n - 1\right) + \frac{1}{n}\left(\cos \frac{2\pi}{5}n - (-1)^n\right)\right), & \text{si } n \neq 5 \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\right), & \text{si } n = 5. \end{cases}$$

NOTA Gráfica de $f(x)$:



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

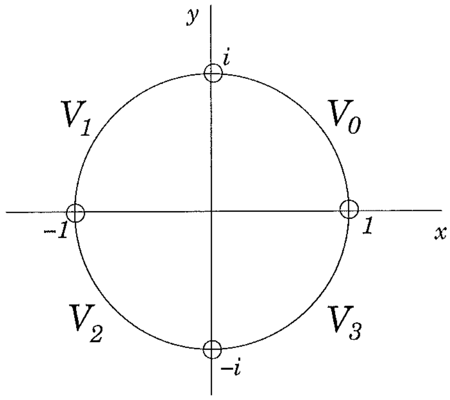
E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (14–6–2005)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 **a)** Resolver el problema de contorno siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ , & (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0) = e^{i\alpha x} \ , & x \in \mathbb{R} \ , (\alpha = \text{cte. real}) \\ u \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} & \end{cases}$$

utilizando el cambio de variable $\Phi(x,y) = (\xi,\eta) = \left(x,\, 2\sqrt{y}\right)$ y el teorema de los residuos.

b) **5** Hallar el potencial electrostático en la región del espacio interior al cilindro



siendo el potencial en la superficie cilíndrica el indicado en la figura. (Sug.: Se utilizará la transformación $w = \frac{z-i}{zi-1}$.)

P–2 Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en }]0,a[\times]0,b[\\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(a,y) = 0 \\ u(x,b) = \begin{cases} M\,x & 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ M\,(a-x) & \frac{a}{2} \le x \le a \end{cases} \quad (M = \text{cte.} > 0) \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

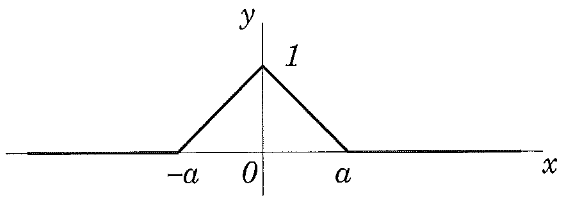
Nota. Cada problema debe entregarse por separado. **P-1a)** y **P-1b)** ocuparán un máximo de 3 hojas (por una cara), **P-2)** un máximo de 4 hojas (por una cara).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (14–6–2005)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo en serie de senos de la función $f(x) = \cos(5\pi x)$, $0 < x < 1$.

C–2 Probar que $\hat{\hat{f}} = \tilde{f}$ cuando $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ($\tilde{f}(x) = f(-x)$). Calcular entonces la transformada de Fourier de las siguientes funciones:



y

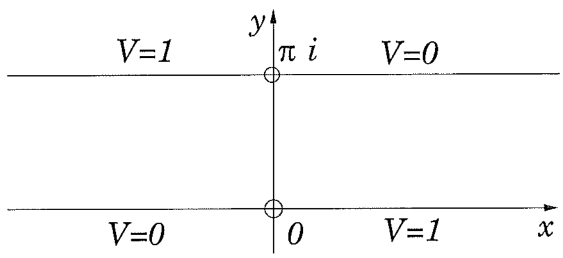
$$g(x) = \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$$

C–3 Resolver el problema mixto

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(a,t) = 0 \\ u(x,0) = -\operatorname{sen} \frac{25\pi x}{a} + 13 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

C–4 Hallar el potencial electrostático en la zona de la figura



utilizando la transformación $w = -\coth \frac{z}{2}$. (Nota: Bastará plantear el problema equivalente.)

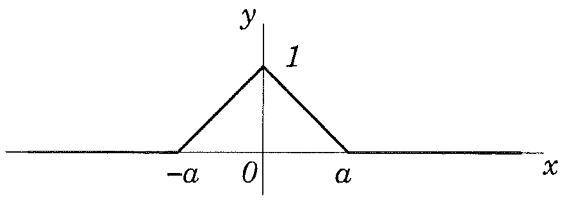
Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado y ocupar un máximo de 2 hojas (por una cara). Todas las cuestiones puntúan igual.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (14–6–2005)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Estudiar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo en serie de senos de la función $f(x) = \cos(5\pi x)$, $0 < x < 1$.

C–2 Probar que $\hat{\hat{f}} = \tilde{f}$ cuando $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ($\tilde{f}(x) = f(-x)$). Calcular entonces la transformada de Fourier de las siguientes funciones:



y

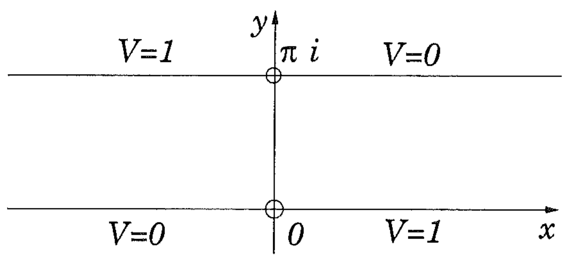
$$g(x) = \frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$$

C–3 Resolver el problema mixto

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(a,t) = 0 \\ u(x,0) = -\operatorname{sen}\frac{25\pi x}{a} + 13\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a} \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

C–4 Hallar el potencial electrostático en la zona de la figura



utilizando la transformación $w = -\coth\frac{z}{2}$. (Nota: Bastará plantear el problema equivalente.)

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado y ocupar un máximo de 2 hojas (por una cara). Todas las cuestiones puntúan igual.

P-1 a) Desde luego ϕ es una biyección de $\Omega = \mathbb{R}^2_+$ sobre $\Theta = \mathbb{R}^2_+$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[dr, "u"'] & \Theta \arrow[l, shift left, "\psi"] \arrow[d, "v = u\circ\psi"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\psi(\xi,\eta) = \phi^{-1}(\xi,\eta) = (\xi, \eta^2/4)$$

Como $\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\tilde{A}(\xi,\eta) = \phi'(x,y)\,A(x,y)\,\phi'(x,y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para los demás coeficientes:

$$\tilde{a}_1(\xi,\eta) = \underbrace{a_{11}(x,y)}_{1}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{2a_{12}(x,y)}_{0}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial y}}_{0} + \underbrace{a_{22}(x,y)}_{y}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2}}_{0} + \underbrace{a_1(x,y)}_{0}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} +$$

$$+ \underbrace{a_2(x,y)}_{1/2}\underbrace{\frac{\partial\phi_1}{\partial y}}_{0} = 0$$

$$\tilde{a}_2(\xi,\eta) = \underbrace{a_{11}}_{1}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}}_{0} + \underbrace{2a_{12}}_{0}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_2}{\partial x\partial y}}_{0} + \underbrace{a_{22}}_{y}\underbrace{\frac{\partial^2\phi_2}{\partial y^2}}_{-\frac{1}{2}y^{-3/2}} + \underbrace{a_1}_{0}\underbrace{\frac{\partial\phi_2}{\partial x}}_{0} + \underbrace{a_2}_{\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{\partial\phi_2}{\partial y}}_{\frac{1}{\sqrt{y}}} = 0$$

$$\tilde{a}(\xi,\eta) = 0, \quad \tilde{f}(\xi,\eta) = 0$$

La ecuación equivalente en Θ es $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} = 0$. Para la frontera del nuevo abierto:

$u(x,0) = e^{i\alpha x} = f(x)$, entonces $v(\xi,0) = f(\psi(\xi,0)) = f(\xi,0) = e^{i\alpha\xi}$,

por consiguiente el problema de contorno dado se transforma en el siguiente

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } \Theta \\ v(\xi,0) = e^{i\alpha\xi}, & \xi\in\mathbb{R} \\ v \text{ acotada} \end{cases}$$

y la solución de este problema viene dada por

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,e^{i\alpha t}\,dt.$$

Por tanto la solución del problema inicial es

$$\underset{y>0}{u(x,y)} = v(\phi(x,y)) = v(x, 2\sqrt{y}) = \frac{2\sqrt{y}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2+4y} e^{i\alpha t}\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (z-x)^2 = -4y \\ z-x = \pm i2\sqrt{y} \\ z = x \pm i2\sqrt{y} \\ P(z)=1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i \frac{2\sqrt{y}}{\pi} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{(z-x)^2+4y}; x+i2\sqrt{y}\right) & \alpha>0 \\ -2\pi i \frac{2\sqrt{y}}{\pi} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{(z-x)^2+4y}; x-i2\sqrt{y}\right) & \alpha<0 \\ 2\pi i \frac{2\sqrt{y}}{\pi} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-x)^2+4y}; x+i2\sqrt{y}\right) & \alpha=0 \end{array} \right.$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{(z-x)^2+4y}; x+i2\sqrt{y}\right) = \lim_{z\to x+i2\sqrt{y}} \cancel{(z-(x+i2\sqrt{y}))} \frac{e^{i\alpha z}}{\cancel{(z-(x+i2\sqrt{y}))}(z-(x-i2\sqrt{y}))} =$$

$$= \frac{e^{-2\alpha\sqrt{y}} e^{i\alpha x}}{4i\sqrt{y}}$$

Finalmente

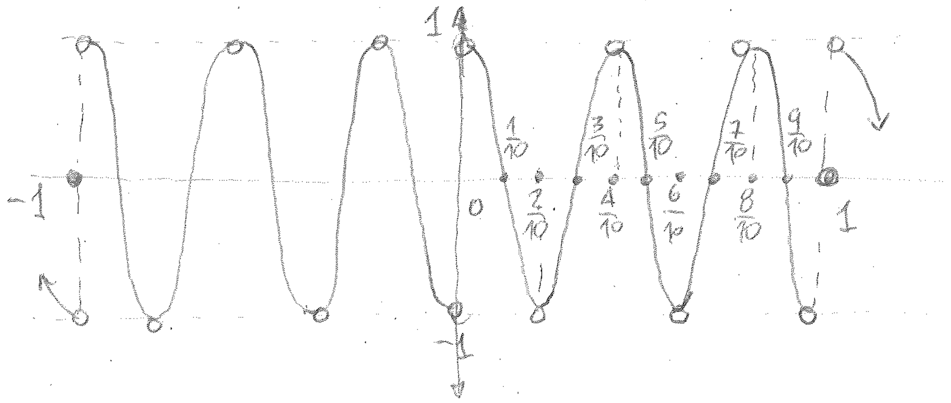
$$u(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} e^{-2\alpha\sqrt{y}} e^{i\alpha x} & , (x,y)\in \mathbb{R}^2_+ & , \alpha \geq 0 \\ e^{2\alpha\sqrt{y}} e^{i\alpha x} & , (x,y)\in \mathbb{R}^2_+ & , \alpha<0 \end{array} \right.$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura	Curso / Curs	Grupo / Grup	Nº Pg.
			1

(C1) Sea f la extensión impar y 2-periódica de $\cos(5\pi x)$ $0<x<1$

$$f(x)=\begin{cases}\cos(5\pi x) & 0<x<1\\ -\cos(5\pi x) & -1<x<0\\ 0 & x=0,1\end{cases} \qquad f(x+2)=f(x).$$



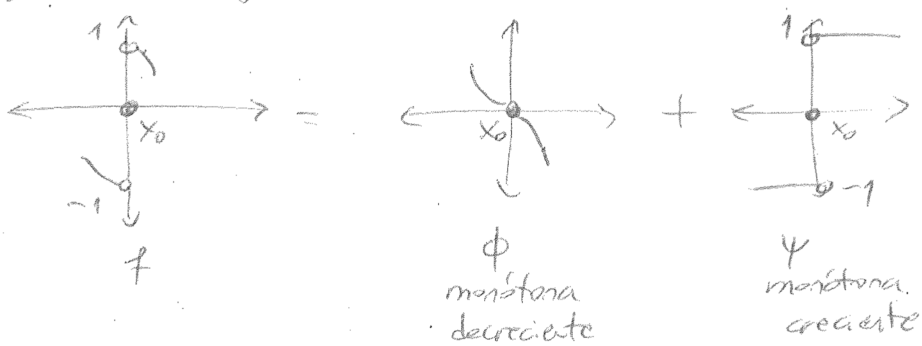
(i) Por definición f es una función 2-periódica y como es continua en $\mathbb{R}$ salvo en los puntos del conjunto $\{k : k\in\mathbb{Z}\}$ que son discontinuidades de salto finito entonces f es localmente integrable.

Concluimos así que $f\in\mathcal{R}_2$.

(ii) Veamos donde f es de V.A. Por la simetría y la periodicidad es suficiente hacer el estudio en $[0,1]$.

(1) si $x_0\in[0,1]-\left\{\frac{2k}{10} : 0\leq k\leq 5\right\}$ entonces f es de V.A. en un entorno de x_0 por ser monótona en dicho entorno.

(2) $x_0=0$ (análogamente en $x_0=1$)



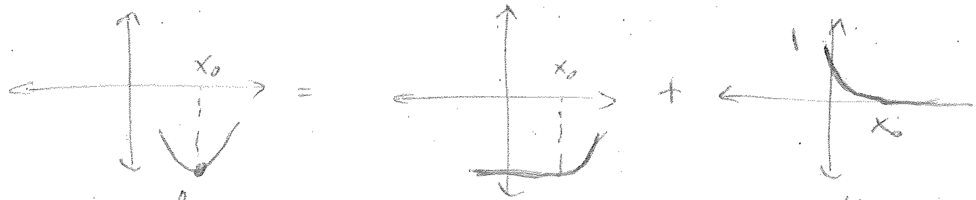
Como $f=\phi+\Psi$ en un entorno de x_0 $\Longrightarrow$ f es de V.A. en un entorno de x_0

$\searrow$ $\nearrow$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura | Curso / Curs | Grupo / Grup | Nº Pg. 2

③ $x_0 = \frac{2}{10}$ (análogamente si $x_0 = \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}$)



f = Φ monótona creciente + Ψ monótona decreciente

Como $f = \underset{\nearrow}{\Phi} + \underset{\searrow}{\Psi}$ en un entorno de $x_0 \Rightarrow f$ V.A. en un entorno de x_0

En virtud del criterio de Jordan la s.d.F. de senos de la función f converge en cada $x_0 \in \mathbb{R}$ a:

$$\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \notin \{k : k\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \\ \underbrace{\frac{1+(-1)}{2}}_{0} & x_0 \in \{k : k\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \end{cases} = f(x_0)$$

Además la convergencia será uniforme en cada $[a,b]$ donde la función sea continua es decir en cada $[a,b]$ que no contenga ningún punto de $\mathbb{Z}$

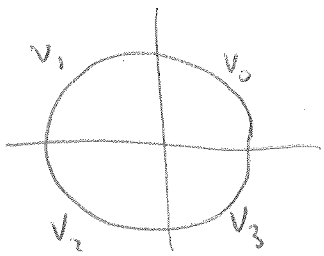
Reproval PAPEL 100% RECICLADO

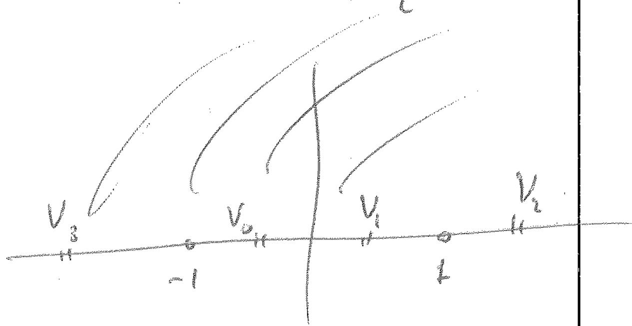
Nº | Apellidos y nombre / Cognoms i nom | Firma / Signatura | Fecha / Data

P. 1b) $z = re^{i\theta}$

$w = \xi + i\eta$

$w = h(z) = \dfrac{z-i}{iz-1}$





$\searrow u$ $\qquad\qquad$ $\swarrow v$

$z = re^{i\theta}$; $r<1$

$$w = \frac{re^{i\theta}-i}{ire^{i\theta}-1} = \frac{r\cos\theta + i(r\sin\theta-1)}{ir\cos\theta - r\sin\theta - 1} = \frac{[r\cos\theta + i(r\sin\theta-1)][(-r\sin\theta-1)-ir\cos\theta]}{(-r\sin\theta-1)^2+r^2\cos^2\theta} =$$

$$= \underbrace{\frac{-2r\cos\theta}{1+r^2+2r\sin\theta}}_{\xi} + i\underbrace{\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\sin\theta}}_{\eta}$$

Llegamos al semiplano superior. La circ. $|z|=1$ se convierte en el eje real. $h(0)=-1$; $h(i)=0$; $h(-1)=1$; $h(-i)=\infty$

$$v(\xi,\eta) = \frac{V_3}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt + \frac{V_0}{\pi}\int_{-1}^{0}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt + \frac{V_1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt + \frac{V_2}{\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt$$

$$= \frac{V_3}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{-1-\xi}{\eta}+\frac{\pi}{2}\right] + \frac{V_0}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{-\xi}{\eta} - \operatorname{arctg}\frac{-1-\xi}{\eta}\right] + \frac{V_1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{\eta} - \operatorname{arctg}\frac{-\xi}{\eta}\right] + \frac{V_2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{\eta}\right]$$

$$= \frac{V_3+V_2}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\xi+1}{\eta}\left[\frac{V_0-V_3}{\pi}\right] + \frac{V_1-V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta} + \frac{V_2-V_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi-1}{\eta}$$

$$u(re^{i\theta}) = \frac{V_3+V_2}{2} + \frac{V_0-V_3}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{-2r\cos\theta+1+r^2+2r\sin\theta}{1-r^2} + \frac{V_1-V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{-2r\cos\theta}{1-r^2}$$
$$+ \frac{V_2-V_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{-2r\cos\theta-1-r^2-2r\sin\theta}{1-r^2}$$

Asunto: EDP 14 / 6 / 05

C-2

$$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \rightsquigarrow (\hat{f})^{\wedge}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-i\lambda x} dx \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}),\ \text{por } 2 = FIF}}{=} f(-\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$$

$$f_a(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R}), \quad x > a$$

$$\hat{f}_a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-a}^{0} \left(1 + \frac{x}{a}\right) e^{-i\lambda x} + \int_{0}^{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{-i\lambda x} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{i\lambda x} dx + \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{-i\lambda x} dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos\lambda x \, dx =$$

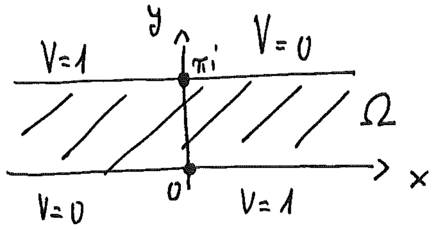
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^a \cos\lambda x \, dx - \frac{1}{a} \int_0^a x \cos\lambda x \, dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{1 - \cos\lambda a}{a\lambda^2}$$

$$\hat{g}(\lambda) = \left(\frac{1 - \cos ax}{x^2} \right)^{\wedge}(\lambda) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\hat{f}_a(x) \right)^{\wedge}(\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \hat{\hat{f}} = \tilde{f}}}{=} a\sqrt{\frac{\pi}{2}} f_a(-\lambda) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}} f_a(\lambda)$$

EXAMEN EDP (14-6-2005)

C-4 Sea el problema

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega = \{(x,y) : 0<y<\pi\} \\ u(x,0) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \\ u(x,\pi) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \\ u \text{ acot. en } \overline{\Omega} \setminus \{(0,0),(0,\pi)\} \end{cases}$$



Sea $h(z) = -\operatorname{cth}\frac{z}{2} = -\frac{\operatorname{ch} z/2}{\operatorname{sh} z/2} \in H(\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

Si $z = x+iy \in \Omega$ $(0<y<\pi)$ entonces

$$h(z) = -\operatorname{cth}\left(\frac{x}{2}+i\frac{y}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{x}{2}}e^{i\frac{y}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}e^{-i\frac{y}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}e^{i\frac{y}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}e^{-i\frac{y}{2}}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}e^{-i\frac{y}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}e^{i\frac{y}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}e^{-i\frac{y}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}e^{i\frac{y}{2}}} =$$

$$= -\frac{e^{x}-e^{-x}-e^{iy}+e^{-iy}}{e^{x}+e^{-x}-e^{+iy}-e^{-iy}} = -\frac{\operatorname{sh}x - i\operatorname{sen}y}{\operatorname{ch}x-\cos y} = -\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos y}+i\frac{\operatorname{sen}y}{\operatorname{ch}x-\cos y} = w$$

con $\operatorname{Im} w = \gamma = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{ch}x-\cos y} > 0$ porque $y\in\,]0,\pi[$, luego $w \in \mathbb{R}^2_+$

(recuérdese que $\operatorname{ch}x \geq 1\ \forall x$ y que $\cos y \in\,]-1,+1[$ si $y\in\,]0,\pi[$)

Si $z = x\in\mathbb{R}$, $h(x) = -\operatorname{cth}\frac{x}{2} = -\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}x/2} \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$;

si $x\in\,]-\infty,0[$, $h(x) = -\frac{\operatorname{ch}x/2}{\operatorname{sh}x/2} \in C(]-\infty,0[,\mathbb{R})$ con $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0-} -\frac{\operatorname{ch}x/2}{\operatorname{sh}x/2} = +\infty$, luego $h(]-\infty,0[) =]1,+\infty[$

si $x\in\,]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0+} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -1$, $h(x)\in C]0,\infty[$, luego

$h(]0,+\infty[) =]-\infty,-1[$.

si $\underline{z = x + i\pi \;, x \in \mathbb{R}}$, $h(x+i\pi) = -\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x} \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, con

$$\lim_{x\to-\infty} h(x+i\pi) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{(e^{x}-e^{-x})/2}{1+\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\,\frac{e^{2x}-1}{e^{x}+\frac{1}{2}(e^{2x}+1)} = +1 \;,$$

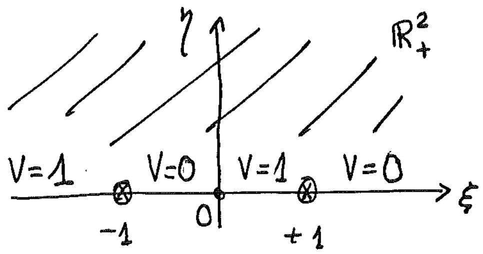
$$\lim_{x\to+\infty} h(x+i\pi) = -1 \;,$$

luego $\underline{h(\{x+i\pi \;:\; x\in\mathbb{R}\}) =]-1,+1[}$; y en concreto,

$h(\{x+i\pi : x<0\}) =]0,1[$, $h(\{x+i\pi : x>0\}) =]-1,0[$

Planteamos por tanto el siguiente problema "equivalente"

$$\begin{cases} \Delta V(\omega) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ V(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < -1 \\ 0, & -1<\xi<0 \\ 1, & 0<\xi<1 \\ 0, & \xi>1 \end{cases} \\ V \text{ acot. en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{\pm 1, 0\} \end{cases}$$



UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura | Curso / Curs | Grupo / Grup | Nº Pg.

C-3 M.S.V. $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X T' \quad ;; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' T$$

$$X T' = k X'' T \quad ;; \quad \frac{T'}{T} = k \frac{X''}{X} = \lambda$$

(1) $\begin{cases} X'' - \frac{\lambda}{k} X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$ (2) $T' - \lambda T = 0$

Resolvemos (1) $r^2 - \frac{\lambda}{k} = 0 \;;\; r = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{k}}$

Para $\lambda > 0$ y $\lambda = 0$ sólo soluciones triviales

Para $\lambda < 0$ el sist. fundamental es $\left\{ \cos\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x ,\ \operatorname{sen}\sqrt{\frac{\lambda}{k}}x \right\}$

$$X(x) = A\cos\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x + B\operatorname{sen}\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}x$$

$$X(0) = 0 = A + B\cdot 0 \Longrightarrow A = 0$$

$$X(a) = 0 = B\operatorname{sen}\sqrt{\frac{-\lambda}{k}}a \Longrightarrow \sqrt{\frac{-\lambda}{k}}a = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{-n^2\pi^2}{a^2}k$$

$$X(x) = B\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x$$

Solución de (2): $T' + \frac{n^2\pi^2}{a^2}kT = 0$

$$T = Ce^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}kt}$$

$$u(x,t) = B\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}kt}$$

Por superposición lineal $u(x,t) = \sum_1 B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}kt}$

En nuestro caso basta con una suma finita para verificar la condición inicial

$$u(x,0) = 13\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a} - \operatorname{sen}\frac{25\pi x}{a} \;;\; B_2 = 13,\ B_{25} = -1$$

$$u(x,t) = 13\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a}\, e^{-\frac{4\pi^2}{a^2}kt} - \operatorname{sen}\frac{25\pi x}{a}\, e^{-\frac{625\pi^2}{a^2}kt}$$

Nº | Apellidos y nombre / Cognoms i nom | Firma / Signatura | Fecha / Data

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura	Curso / Curs	Grupo / Grup	Nº Pg.

Problemas clase EDP

Sep 2003 M.A

Junio 2001 EDP

Junio 2005 EDP sólo el c.v.

y el paso a cilíndricas

Nº	Apellidos y nombre / Cognoms i nom	Firma / Signatura	Fecha / Data

Examen de EDP (14-6-2005)

P-2 Sea el P.C. $(a,b>0,\ M>0)$

$$\begin{cases} \text{(i)} & \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega =]0,a[\times]0,b[\\ \text{(ii)} & u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,y) = 0, \\ \text{(iii)} & u(x,b) = g(x) = \begin{cases} Mx, & 0 \le x \le a/2 \\ M(a-x), & a/2 \le x \le a \end{cases} \end{cases}$$

Sup. que $\exists$ funciones de la forma $X(x)\cdot Y(y)$ (con $X \in C^2[0,a]$, $Y \in C^2[0,b]$, no id. nulas, etc) que verifican (i) y (ii). Sustituyendo en (i) y dividiendo por $X(x)\,Y(y)$ ("siempre que tenga sentido") obtenemos que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \ \text{constante}.$$

Sustituyendo asimismo en (ii) llegamos a los siguientes problemas:

$$(1)\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (0<x<a) \\ X'(0)=0, \ X'(a)=0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \ 0<y<b \\ Y(0)=0 \end{cases}$$

Resolvemos (1). Si $\underline{\lambda>0}$ la sol. general es $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ (A,B constantes). Pero $X'(0) = X'(a) = 0$ implican $A - B = 0$ y $Ae^{a\sqrt{\lambda}} - Be^{-a\sqrt{\lambda}} = 0$; como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{a\sqrt{\lambda}} & -e^{-a\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = -2\,\mathrm{sh}(a\sqrt{\lambda}) \neq 0$ entonces

$\underline{A=B=0}$. Si $\underline{\lambda=0}$ la s.g. es $X(x) = Ax+B$; $X'(0)=0$ implica $A=0$, luego $\underline{X(x)=B}$, que satisface trivialmente la condición $X'(a)=0$.

Si $\underline{\lambda<0}$ la s.g. es $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + B\cdot\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,x)$; $X'(0)=0$ implica $B=0$, luego $X(x) = A\cdot\cos(\sqrt{-\lambda}\,x)$; si $X'(a)=0$ entonces $A\cdot\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}\,a)=0$, lo que implica (si $A\neq0$) que $\sqrt{-\lambda}\,a = n\pi$, $n=1,2,\dots$, luego $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$, y $\underline{X(x) = A\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$. En resumen, las sols. no triviales de (1) son

$$X(x) = \left\{\begin{array}{ll} B & \text{, cuando } \lambda = 0 \\ A\cdot\cos\frac{n\pi}{a}x & \text{, cuando } \lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, n=1,2,\dots \end{array}\right\} = B\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 0, 1, \dots$$

Resolvemos (2). Cuando $\underline{\lambda = 0}$, la s.g. es $Y(y) = C_1 + C_2\cdot y$; si $Y(0) = 0$ entonces $C_1 = 0$, luego $Y(y) = C_2\cdot y$. Cuando $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$, la s.g. es $Y(y) = C_1\cdot ch\left[\frac{n\pi}{a}y\right] + C_2\cdot sh\left[\frac{n\pi}{a}y\right]$; si $Y(0) = 0$ entonces $C_1 = 0$, y $Y(y) = C_2\cdot sh\left[\frac{n\pi}{a}y\right]$. Luego

$$Y(y) = \begin{cases} C_2\cdot y & \text{cuando } \lambda = 0 \\ C_2\cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) & \text{cuando } \lambda = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Por lo tanto cualquier función $X(x)\cdot Y(y)$ de las anteriores satisface (i) y (ii), y también cualquier <u>suma finita</u>

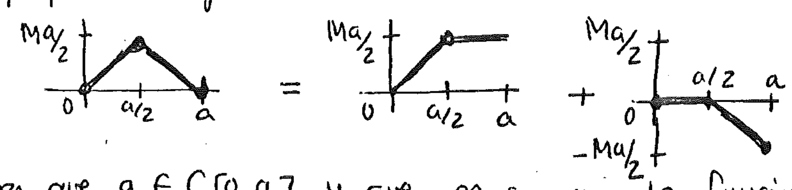
$$D_0\cdot y + \sum_{n=1}^{N} D_n\cdot sh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad (D_n \text{ ctes}, N\in\mathbb{N}).$$

si $y = b$ en la anterior expresión obtenemos un desarrollo <u>finito</u> en <u>cosenos</u>, $(D_0\cdot b) + \sum_{n=1}^{N}\left(D_n\cdot sh\frac{n\pi b}{a}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$. Esto motiva definir en $\mathbb{R}$ una función <u>$2a$-periódica</u>, <u>par</u>, que coincida con $g(x)$ en $[0, a]$, y que denotaremos igual. Como$^{(+)}$ $g(x) \in C \cap VA$ en $[0, a]$ entonces

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad \text{uniformemente en } [0, a],$$

con $a_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$, $n = 0, 1, \dots$

(+) La gráfica de $g(x)$ en $[0, a]$



muestra que $g \in C[0, a]$ y que es <u>suma</u> de funciones monótonas, luego de V.A

Calculemos a_n, $n=0,1,\dots$ Como $\int x\cdot \cos Kx \, dx = \frac{1}{K^2} \cos Kx + \frac{1}{K} x \, \text{sen}\, Kx$ $\left(\underset{\neq 0}{K:\text{cte}}\right)$

entonces un poco de cálculo muestra que

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{Ma}{2} \\[2ex] a_n = \dfrac{2Ma}{(n\pi)^2}\left(2\cos\dfrac{n\pi}{2} - (1+(-1)^n)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ \dfrac{4\,Ma}{(2K\pi)^2}\left((-1)^K - 1\right) & \text{si } n=2K \text{ es } \underline{\text{par}}. \\ & K=1,2,\dots \end{cases} \\ n=1,2,\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ es } \underline{\text{par}} \\ \dfrac{2Ma}{(2r-1)^2\pi^2} & \text{si } K=2r-1 \text{ es } \underline{\text{impar}} \\ & r=1,2,\dots \end{cases}$$

luego

$$g(x) = \frac{Ma}{4} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2Ma}{(2r-1)^2\pi^2} \cos\left[2(2r-1)\frac{\pi}{a}x\right] \quad \text{unif. en } [0,a].$$

Sea entonces la función

$$u(x,y) = \frac{Ma}{4}\frac{1}{b}y + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2\,Ma}{(2r-1)^2\pi^2} \frac{1}{\text{sh}\left[2(2r-1)\pi\frac{b}{a}\right]} \cdot \text{sh}\left[\frac{2(2r-1)\pi y}{a}\right] \cdot \cos\left[\frac{2(2r-1)\pi x}{a}\right].$$

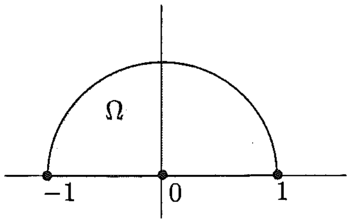
Es inmediato comprobar que $u(x,y)$ verifica (iii). Se puede demostrar que también verifica (i) y (ii), luego es sol. del P.C. planteado.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (6–9–2004)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 ¿Cuál es el problema de contorno equivalente al siguiente

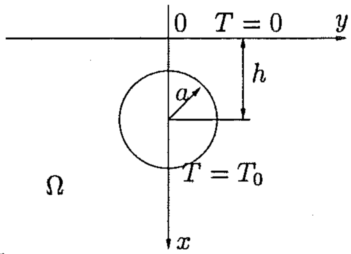
$$\begin{cases} y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & (x,y)\in\Omega \\ u(x,0) = V_0\ , & x\in(-1,0) \\ u(x,0) = V_1\ , & x\in(0,1) \\ u(x,y) = V_2\ , & x^2+y^2=1\ ,\ y>0 \\ u \text{ acotada} & \end{cases}$$



vía la transformación $\phi(x,y) = (\theta,\tau) = (\arctan\frac{x}{y}, \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$?

P–2 **a)** Resolver el siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u(0,y) = 0\ , & y\in(-\infty,\infty) \\ u(h+ae^{i\theta}) = T_0\ , & \theta\in(-\infty,\infty) \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$



(Sug.: Utilizar primero la aplicación $\omega = \frac{z-c}{z+c}$ ($c=\sqrt{h^2-a^2}$) para transformar el problema dado en un problema de Dirichlet en una corona circular centrada en el origen. A continuación se resolverá dicho problema en coordenadas polares

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \\ v(1,\theta) = 0 \\ v(\frac{a}{h+c},\theta) = 0 \\ v(r,\cdot)\ 2\pi - \text{periódica} \end{cases}$$

La solución de este último problema es de la forma $v = R(r)\Theta(\theta)$ con Θ 2π–periódica (el correspondiente λ es 0).)

b) Sabiendo que $f\in C(\mathbb{R})\cap L'^1(\mathbb{R})$ resolver la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{2\pi}{\omega^2-2\omega+2} \qquad (-\infty<\omega<\infty)\ .$$

Nota. Puntuación: (10, 7, 3). Cada problema ocupará un máximo de 3 hojas (por una cara).

Examen de EDP, 6-9-04

C1. Clasificar $(x+a)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

La matriz de coeficientes

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x+a & xy-\frac{y^2}{2} \\ xy-\frac{y^2}{2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2 \text{ para } (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(-a,0),(-a,-2a)\} = \Omega .$$

$(x+a=0$ sii $x=-a$; luego $(-a)y-\frac{y^2}{2} = -y\left(a+\frac{y}{2}\right)=0$ sii $y=0$ ó $y=-2a)$

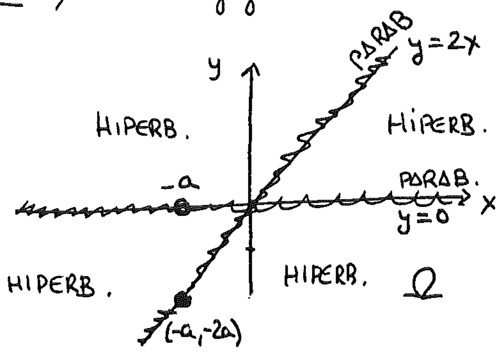
El carácter de la EDP viene dado (estamos en dim. 2) por el det. de $A(x,y)$:

si $(x,y)\in\Omega$,

$$|A(x,y)| = -\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)^2 < 0 \quad \text{excepto si} \quad xy-\frac{y^2}{2} = \left(x-\frac{y}{2}\right)\cdot y = 0$$

(i.e., si $y=0$ ó $y=2x$)

Luego la EDP es <u>hiperbólica</u> $\forall (x,y)\in\Omega$ excepto para $y=0$ ó $y=2x$, donde es <u>parabólica</u>; ver la figura



P-1 $\quad A(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$, $\quad \phi(x,y) = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$= (\phi_1(x,y), \phi_2(x,y))$

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x} & \frac{\partial\phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} \\ \frac{-x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

por tanto

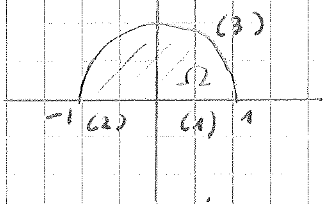
$$\tilde{A}(\theta,z) = \phi'(x,y)\,A(x,y)\,\phi'(x,y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_1 = a_{11}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + a_2\frac{\partial\phi_1}{\partial y} + a = 0$$

$\tilde{a}_2 = -1 \qquad \tilde{a} = 0$

así la ecuación transformada es $\quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = \dfrac{\partial V}{\partial z}$

Veamos la frontera de Ω



Si $z \in (3)$ $\quad z = e^{i\theta} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$
$0<\theta<\pi$

$\phi(z) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}, 0\right)$

Si $\theta \to 0^+$ $\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \to \frac{\pi}{2}$

Si $\theta \to \pi^-$ $\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \to -\frac{\pi}{2}$

Si $z \in (1)$ $\quad z = (x,0)$ $\quad \phi(z) = \left(\frac{\pi}{2}, \ln\frac{1}{|x|}\right)$
$0<x<1$

$\lim_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} \ln\frac{1}{|x|} = 0$

Si $z \in (2)$ $\quad z = (x,0)$ $\quad \phi(z) = \left(-\frac{\pi}{2}, \ln\frac{1}{|x|}\right)$
$-1<x<0$

$\lim_{x\to 0^-} \ln\frac{1}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} -\ln -x = +\infty$

$\lim_{x\to -1^+} -\ln -x = 0$

Si $z \in \Omega$ $\quad z = re^{i\theta}$ $\quad \phi(z) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{tg\theta}, \log\frac{1}{r}\right)$

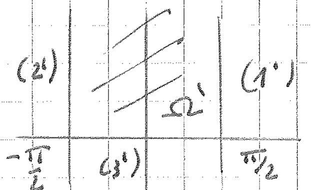
$0 < r < 1$

$0 < \theta < \pi$

luego la parte real $\operatorname{arctg}\frac{1}{tg\theta} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ pues $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\frac{1}{tg\theta} = +\infty$

$\lim\limits_{\theta\to\pi^-}\frac{1}{tg\theta} = -\infty$

y $\log\frac{1}{r} \in \left]0, \infty\right[$ pues $\lim\limits_{r\to 0^+}\log\frac{1}{r} = +\infty$ y $\lim\limits_{r\to 1^-}\log\frac{1}{r} = 0$

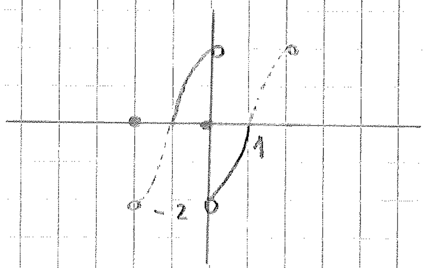


Finalmente el problema de contorno equivalente es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} = \dfrac{\partial v}{\partial \tau} & (\theta,\tau)\in\Omega' \\ v(\theta,0) = V_2 & , -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ v(\frac{\pi}{2},\tau) = V_1 & , 0 < \tau < \infty \\ v(-\pi/2,\tau) = V_0 & , 0 < \tau < \infty \\ v \text{ acotada} \end{cases}$$

C-2 Extendemos $f(x)$ al intervalo $]-1,0[$ de forma impar y a toda la recta con periodo 2 obteniendo una función de $\mathbb{R}_2$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & , x\in]0,1[\\ 0 & , x=0 \\ -x^2+x+2 & , x\in]-1,0[\\ 2 \text{ periódica} \end{cases}$$

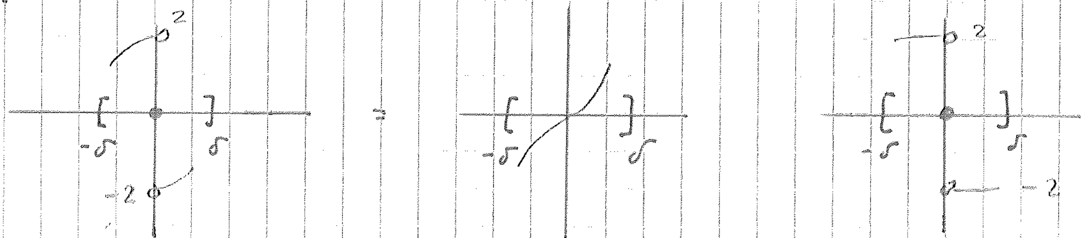


Estudio de la convergencia puntual en $[-1,1]$

Si $x\in]-1,0[\cup]0,1[$ aquí f es derivable luego la s.d.F. de f converge en x a $f(x)$.

Si $x=1 \sim [1-\delta,1+\delta]$ aquí f es monótona, luego de v.a. Por tanto por el criterio de Jordan la s.d.F. de f converge en $x=1$ a $f(1)=0$

Si $x=0 \sim (-\delta,\delta)$ aquí f es de v.a. por ser suma de funciones de v.a. Por tanto por el criterio de Jordan la s.d.F. de f converge a $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=0$ en $x=0$.



Estudio de la convergencia uniforme.

Sea $]A,B[=]0,2[$, en cada $[a,b]\subset]0,2[$ f es de v.a. por ser monótona, luego por el criterio de Jordan hay c.u. de la s.d.F. a la función en cada $[a,b]\subset]0,2[$.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (6–9–2004)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar la ecuación

$$(x+a)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

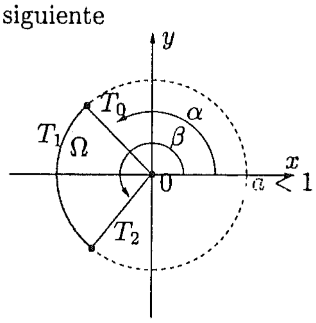
en función del parámetro a ($a \in \mathbb{R}$ y $\neq 0$).

C–2 Estudiar la convergencia del desarrollo en serie de senos de la función

$$f(x) = x^2 + x - 2 \qquad x \in (0,1)\ .$$

C–3 ¿Cuál es el problema generalizado de Dirichlet equivalente al siguiente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega & \\ u(e^{i\theta}) = T_1 & \theta \in (\alpha, \beta) \\ u(re^{i\alpha}) = T_0 & r \in (0,a) \\ u(re^{i\beta}) = T_2 & r \in (0,a) \\ u \text{ acotada} & \end{cases}$$



vía la transformación $\omega = \log_\pi z$?

C–4 Hallar las soluciones elementales del problema

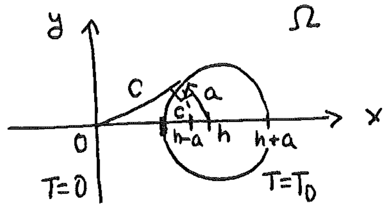
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2c\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (c \in \mathbb{R}) \\ u \text{ periódica en } t & \\ u(0,t) = 0 \quad \forall t & \\ u \to 0 \text{ cuando } x \to +\infty & \end{cases}$$

(Nota: Recuérdese que si $M\cos\alpha t + N\cos\alpha t$ es periódica y $\alpha > 0$ entonces $\alpha \in \mathbb{N}$.)

Nota. Puntuación: (2.5, 2.5, 2.5, 2.5). Cada cuestión debe entregarse por separado y ocupar un máximo de dos hojas (por una cara).

P2a Sea el probl. de Dirichlet de la figura

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u(0,y) = 0, \ y \in \mathbb{R}, \\ u(h+ae^{i\theta}) = T_0, \ \theta \in [0,2\pi[\quad (h>a>0) \\ u \text{ acot. en } \overline{\Omega} \end{cases}$$



(con $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z = x > 0 \text{ y } |z-h|>a\}$, $\partial\Omega = \{z : \operatorname{Re} z = x = 0\} \cup \{|z-h|=a\}$.)

y sea la aplicación $w = \phi(z) = \dfrac{z-c}{z+c}$, con $c = \sqrt{h^2-a^2}$ $(h>a$, luego $c>0)$;
como $\phi(z) \in H(\mathbb{C}\setminus\{-c\})$, $\underline{\phi \in H(\Omega)}$. (Su inversa $z = \phi^{-1}(w) = c\,\dfrac{1+w}{1-w} \in H(\mathbb{C}\setminus\{1\})$.)

Veamos en qué se transforma $\partial\Omega$:

si $\underline{z = iy}$, $y \in \mathbb{R}$, $\quad \phi(iy) = \dfrac{iy-c}{iy+c} = \dfrac{(iy-c)(-iy+c)}{y^2+c^2} = \dfrac{y^2-c^2+2iyc}{y^2+c^2}$,

luego $|\phi(iy)|^2 = \dfrac{1}{(y^2+c^2)^2}\left((y^2-c^2)^2+(2yc)^2\right) = 1 \Rightarrow \phi(iy)$ cae en la <u>circunf. unidad</u>

si $\underline{z = h+ae^{i\theta}}$, $\theta \in [0,2\pi[$, $\quad \phi(h+ae^{i\theta}) = \dfrac{h-c+ae^{i\theta}}{h+c+ae^{i\theta}} \cdot \dfrac{h+c+ae^{-i\theta}}{h+c+ae^{-i\theta}} =$

$$= \frac{(h^2-c^2+a^2+2ah\cos\theta) + 2iac\operatorname{sen}\theta}{(h+c)^2+a^2+2a(h+c)\cos\theta},$$

luego

$|\phi(h+ae^{i\theta})|^2 = \ldots$ un poco de cálculo $\ldots$ (con $h^2-c^2=a^2$, etc.) $= \dfrac{(2a)^2(h+a\cos\theta)^2}{(2(c+h))^2(h+a\cos\theta)^2} = \left(\dfrac{a}{c+h}\right)^2$,

por lo que $\phi(h+ae^{i\theta})$ pertenece en la <u>circunf. de centro 0</u> y <u>radio</u> $\dfrac{a}{c+h}$

(obs. que $\dfrac{a}{c+h} < 1$)

en resumen, los puntos $\underline{z \in \partial\Omega}$ se transf. bajo ϕ en <u>puntos de la frontera</u> de la <u>corona circular</u> $\left\{ \dfrac{a}{c+h} < |w| < 1 \right\} = \mathcal{O}$.

(aunque $c \notin \Omega$ es interesante obs. que $\phi(c) = 0$ es el centro de la corona.)

[Veamos que si $z \in \Omega$ entonces $\phi(z) \in \mathcal{O}$:

probaremos que si $z \in \Omega$ entonces $\left|\frac{z-c}{z+c}\right| < 1$ y $\left|\frac{z-c}{z+c}\right| > \frac{a}{c+h}$; veamos la 1^{a} desig.

si $z = x+iy$ con $x>0$ entonces $\left|\frac{z-c}{z+c}\right| < 1$ sii $|z-c|^2 < |z+c|^2$ sii

$(x-c)^2 + y^2 < (x+c)^2 + y^2$ sii $-2cx < 2cx$ ¡cierto porque $x>0$!

con respecto a la 2^{a} desigualdad, si $z = h + r \cdot e^{i\theta}$ con $r>a$ entonces

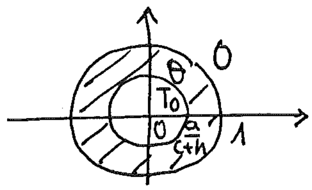
$\left|\frac{z-c}{z+c}\right| > \frac{a}{c+h}$ sii $(c+h)^2 |z-c|^2 > a^2 |z+c|^2$ sii

$(h+c)^2\left((h-c+r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta\right) > a^2\left((h+c+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\right)$ sii

... simplificando ... sii $2c(h+c)\underbrace{(r^2-a^2)}_{(r+a)(r-a)} > 0$, lo que es cierto! $(r>a)$.]
(y pasando todo al lado izdo. de la desig.)
(obs. que desaparece la dep. en $\cos\theta$)

Sea por tanto el problema auxiliar

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta\tilde{u} = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ \tilde{u}(\omega) = 0 & \text{si } |\omega| = 1 \\ \tilde{u}(\omega) = T_0 & \text{si } |\omega| = \frac{a}{c+h} \\ \tilde{u} \text{ acot.} \end{cases}$$



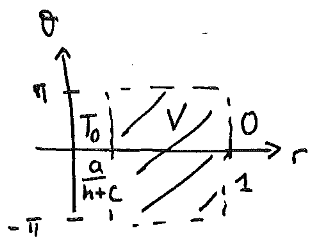
entonces $u(z) = \tilde{u}(\phi(z))$ es solución del problema (1) (la comprobación es la misma que en los Problemas del Curso). Resolvamos por tanto (2).

Si realizamos un cambio a coordenadas polares,

$$\begin{cases} r = |\omega| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} & (\omega = \xi + i\eta) \\ \theta = \arg_0 \omega \in]-\pi, \pi[, \end{cases}$$

llegamos (ver Notas del curso) al problema

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 & \text{en } V =]\frac{a}{h+c}, 1[\times]-\pi,\pi[, \\ v(1,\theta) = 0 \\ v(\frac{a}{h+c}, \theta) = T_0 \\ v(r,\cdot) \ 2\pi\text{-periódica} \end{cases}$$



Hallemos una "solución elemental" $R(r)\Theta(\theta)$ de (3): sustituyendo en la ec. (sup. que $R\in C^2$, $\Theta\in C^2$ (en sus dominios respectivos), no id. nulas, etc.) obtenemos que

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)}+r\frac{R'(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda \text{ cte.}$$

i.e., $\begin{cases} r^2 R''(r)+r R'(r)-\lambda R(r)=0 & \text{(ec. de Euler)},\\ \Theta''(\theta)+\lambda\cdot\Theta(\theta)=0 \end{cases}$

Con respecto a las otras condiciones:

si $R(1)\Theta(\theta)=0\ \ \forall\theta \implies R(1)=0$

si $R\left(\frac{a}{h+c}\right)\Theta(\theta)=T_0\ \ \forall\theta \implies \Theta(\theta)$ es una f^n^ constante de θ; pero la única situación donde la ec. $\Theta''+\lambda\cdot\Theta=0$ posee sol. constante es cuando $\lambda=0$. Luego $\Theta(\theta)=A$ cte (y naturalmente 2π-periódica).

Resolvemos entonces la ec. de Euler con $\lambda=0$:

$$r^2R''+rR'=0$$

su pol. indicial $q(\rho)=\rho(\rho-1)+\rho=\rho^2$ posee 0 como raíz doble: la sol. general es

$$R(r)=C_1+C_2\cdot\log r \qquad (\text{en } 0<r<+\infty)$$

Pero si $R(1)=0$ entonces $C_1=0$. Luego la sol. elemental

$$R(r)\Theta(\theta)=A\cdot C_2\cdot\log r$$

y si $R\left(\frac{a}{h+c}\right)\Theta(\theta)=T_0=A\cdot C_2\log\frac{a}{h+c}$ entonces $A\cdot C_2=\dfrac{T_0}{\log\frac{a}{h+c}}$.

En cons., la función

$$v(r,\theta)=\frac{T_0}{\log\frac{a}{h+c}}\cdot\log r$$

es solución de (3). Luego la función

$$\tilde{u}(w)=\frac{T_0}{\log\frac{a}{h+c}}\log|w|$$

es sol. de (2).

Finalmente,

$$u(z) = \tilde{u}(\phi(z)) = \frac{T_0}{\log \frac{a}{c+h}} \log \left| \frac{z-c}{z+c} \right|$$

es <u>solución de (1)</u>.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (8–6–2004)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 **7 a)** Resolver, utilizando la transformación de Fourier, el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} i) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } (0,a)\times\mathbb{R} \quad (a = \text{cte.} > 0) \\ ii) & u(x,\cdot), u_x(x,\cdot), u_y(x,\cdot), u_{xx}(x,\cdot), u_{yy}(x,\cdot) \in \mathrm{L}'^1(\mathbb{R}) \ , \quad \forall x \in (0,a) \\ iii) & \lim\limits_{x\to 0+} \|u(x,\cdot)\|_1 = 0, \quad \lim\limits_{x\to a-} \|u(x,\cdot) - f\|_1 = 0, \quad f \in \mathrm{L}'^1(\mathbb{R}) \\ iv) & \forall x \in (0,a) : \lim\limits_{h\to 0} \left\| \dfrac{u(x+h,\cdot) - u(x,\cdot)}{h} - u_x(x,\cdot) \right\|_1 = 0 \\ & \lim\limits_{h\to 0} \left\| \dfrac{u_x(x+h,\cdot) - u_x(x,\cdot)}{h} - u_{xx}(x,\cdot) \right\|_1 = 0 \end{cases}$$

(Nota: Se podrá dejar la solución en términos de la transformada de Fourier de la función $f(x)$.)

3 b) Resover la ecuación integral

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-t|} f(t)\, dt = -\sqrt{2\pi}\, e^{-2|x|} \ , \qquad -\infty < x < \infty \ ,$$

utilizando la transformación de Fourier y el teorema de los residuos.

P–2 **10** El ángulo de torsión $\theta(x,t)$ de un eje de longitud unidad que vibra torsionalmente se determina a partir de las condiciones

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \ , \quad 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ \theta(0,t) = \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(1,t) = 0 \ , \quad t > 0 \\ \theta(x,0) = x(1-x) \ , \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial t}(x,0) = 0 \ , \quad 0 < x < 1 \ . \end{cases}$$

Determinar $\theta(x,t)$ utilizando el método de separación de variables.

Nota. P-1a), **P-1b)** y **P-2** se entregarán por separado. **P-1a)** y **P-2**: 3 hojas (por una cara), **P-1b)**: 2 hojas (por una cara).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (8–6–2004)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

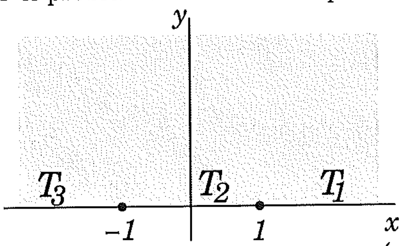
C–1 **1** Clasificar la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial\alpha}=u$$

en el abierto $\Omega=\{(\alpha,\beta,\varphi):\ 0<\alpha<\pi,\ \alpha<\beta,\ -\pi<\varphi<\pi\}$.

C–2 **3** Desarrollar en serie de senos la función $f(x)=\operatorname{sh}x$, $x\in(0,1)$, y analizar la convergencia puntual (resp. uniforme) de la serie de Fourier obtenida.

C–3 **3** Hallar el problema de contorno equivalente al siguiente



$$\begin{cases}\Delta T=0 \text{ en } \mathbb{R}^2_+\\ T=\begin{cases}T_3 & x<-1\\ T_2 & -1<x<1\\ T_1 & 1<x\end{cases}\\ T \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+}\setminus\{-1,1\}\end{cases}$$

utilizando la transformación $\zeta=\log_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$. (Sug.: Descomponer esa transformación en $\omega=\frac{z-1}{z+1}$ y $\zeta=\log_{\frac{\pi}{2}}\omega$.)

C–4 **3** Utilizando el método de separación de variables hallar las soluciones elementales del problema de contorno

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ,\quad 0<x<a,\ 0<y<b\\ u(x,0)=0\ ,\quad 0<x<a\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,y)=0\ ,\quad 0<y<b\ .\end{cases}$$

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. **C-1**: 1 hoja (por una cara), **C-2**, **C-3** y **C-4**: 3 hojas (por una cara).

C-1 Derivando obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial \beta}+$$

$$+\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\,(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial \alpha}-u=0$$

$$\Omega=\{(\alpha,\beta,\varphi)\ :\ 0<\alpha<\pi,\ \alpha<\beta,\ -\pi<\varphi<\pi\}$$

Sea $(\alpha,\beta,\varphi)\in\Omega$

$$A(\alpha,\beta,\varphi)=\begin{pmatrix}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\,(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\end{pmatrix}$$

Los tres valores propios de la matriz son los elementos de la diagonal. En este caso

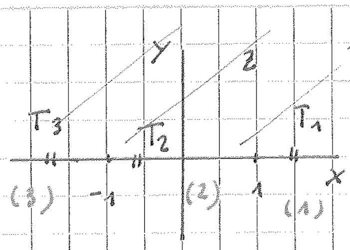
$$\operatorname{sen}\alpha>0 \qquad 0<\alpha<\pi$$

$$\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha>0 \quad \text{pues} \quad \operatorname{ch}\beta>1 \text{ si } \beta>\alpha \quad y \quad -1<\cos\alpha<1$$

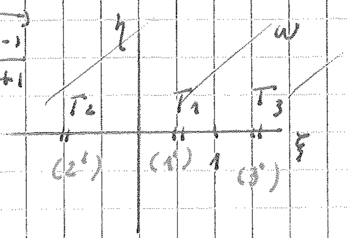
Por tanto los tres valores propios son positivos y la ecuación es elíptica en ese punto. Como este razonamiento es válido $\forall(\alpha,\beta,\varphi)\in\Omega$, la ecuación es elíptica en Ω

Nota. El justificar correctamente que $\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha>0$ en nuestro caso vale 0,5 puntos.

C-3



$h(z) = \frac{z-1}{z+1}$



Si $z \in \mathbb{R}^2_+$ $z = x+iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y>0$

$$h(z) = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} = \frac{y^2+x^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}$$

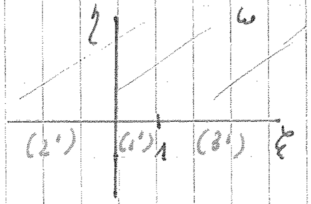
$$\operatorname{Im} h(z) = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2} > 0$$

Si $z \in (1)$ $z = x$, $x>1$ $\qquad h(z) = \frac{x-1}{x+1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0$, $\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

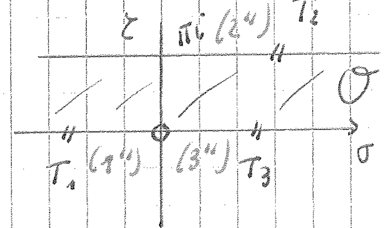
Si $z \in (2)$ $z = x$, $-1<x<1$ $\qquad h(z) = \frac{x-1}{x+1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$, $\xrightarrow[x\to -1^+]{} -\infty$

Si $z \in (3)$ $z = x$, $-\infty<x<-1$ $\qquad h(z) = \frac{x-1}{x+1} \xrightarrow[x\to -1^-]{} +\infty$, $\xrightarrow[x\to -\infty]{} 1$

Consideremos ahora $f(\omega) = \log_{\pi/2} \omega$



$f(\omega)$



Si $\omega \in \mathbb{R}^2_+$ $\omega = \xi + i\eta$, $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta>0$

$$\log_{\pi/2}\omega = \log|\xi+i\eta| + i\arg_{\pi/2}(\xi+i\eta) = \log\sqrt{\xi^2+\eta^2} + it, \ t \in \left]0,\pi\right[$$

Si $\omega \in (3')$ $\qquad \log_{\pi/2}\omega = \log\xi \in \left]0,\infty\right[$
$\omega = \xi$, $\xi>1$

Si $\omega \in (2')$ $\qquad \log_{\pi/2}\omega = \log(-\xi) + i\pi$
$\omega = \xi$, $\xi<0$

Si $\omega \in (1')$ $\qquad \log_{\pi/2}\omega = \log\xi \in \left]-\infty,0\right[$
$\omega = \xi$, $0<\xi<1$

El problema de contorno equivalente es

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Theta \\ u(\sigma) = T_3 & 0<\sigma<\infty \\ u(\sigma) = T_1 & -\infty<\sigma<0 \\ u(\sigma+i\pi) = T_2 & -\infty<\sigma<\infty \\ u \text{ acotada } \overline{\Theta}\setminus\{0\} \end{cases}$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Asignatura / Assignatura

Curso / Curs

Grupo / Grup

Nº Pg.

P. 1 b)

$$f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-t|} f(t)\,dt = -\sqrt{2\pi}\, e^{-2|x|}$$

$$\hat{f}(\lambda) - \sqrt{2\pi}\left[e^{-2|x|}\right]^{\wedge} \cdot \hat{f}(\lambda) = -\sqrt{2\pi}\left[e^{-2|x|}\right]^{\wedge}$$

$$\hat{f}(\lambda) - \frac{2\cdot 2}{2^2+\lambda^2} \cdot \hat{f}(\lambda) = -\frac{2\cdot 2}{2^2+\lambda^2}$$

$$\hat{f}(\lambda)\left[1 - \frac{4}{4+\lambda^2}\right] = -\frac{4}{4+\lambda^2}$$

$$\hat{f}(\lambda)\,\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2} = -\frac{4}{4+\lambda^2}$$

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{4}{\lambda^2}$$

Obtenemos una transformada de Fourier discontinua en $\lambda = 0$ y por lo tanto no se puede aplicar el T. de inversión de Fourier. La transformada de Fourier de una fcn de L^1 pertenece siempre a C_0.

Nº

Apellidos y nombre / Cognoms i nom

Firma / Signatura

Fecha / Data

P-1a) Para cada $0<x<a$ pongamos $u(x,\cdot)^\wedge(\lambda) = v(x,\lambda)$. Tomando ^ en la ecuación

$$\underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\cdot)\right]^\wedge(\lambda)}_{\overset{(iv)}{=}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\lambda)} + \underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,\cdot)\right]^\wedge(\lambda)}_{=\ -\lambda^2 v(x,\lambda)} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \lambda^2 v = 0 \qquad 0<x<a,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Fijamos λ y llamemos $v_\lambda(x) = v(x,\lambda)$

$$v_\lambda'' - \lambda^2 v_\lambda = 0 \qquad 0<x<a$$

$r^2-\lambda^2=0 \quad r^2=\lambda^2 \qquad r=0$ doble SF $\{1,x\}$ SG $v(x,\lambda) = A(0)+B(0)x$

$\lambda\neq 0 \quad r=\pm\lambda \quad$ SF $\{e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}\}$ SG $v(x,\lambda) = A(\lambda)e^{\lambda x}+B(\lambda)e^{-\lambda x}$

y así

$$v(x,\lambda) = \begin{cases} A(\lambda)e^{\lambda x} + B(\lambda)e^{-\lambda x}, & 0<x<a \quad \lambda\neq 0 \\ A(0)+B(0)x, & 0<x<a \quad \lambda=0 \end{cases}$$

Determinemos $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $A(0)$, $B(0)$:

por (iii)

$$u(x,\cdot) \xrightarrow[x\to 0+]{L^1(\mathbb{R})} 0 \xrightarrow{\wedge \text{ continua}} [u(x,\cdot)]^\wedge \xrightarrow[x\to 0+]{C_0(\mathbb{R})} 0$$ luego

$\lim\limits_{x\to 0+} v(x,\lambda) = 0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$u(x,\cdot) \xrightarrow[x\to a-]{L^1(\mathbb{R})} f \xrightarrow{\wedge \text{ continua}} [u(x,\cdot)]^\wedge \xrightarrow[x\to a-]{} \hat f$$ luego

$\lim\limits_{x\to a-} v(x,\lambda) = \hat f(\lambda) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\lambda\neq 0 \qquad 0 = \lim\limits_{x\to 0+} v(x,\lambda) = \lim\limits_{x\to 0+} A(\lambda)e^{\lambda x}+B(\lambda)e^{-\lambda x} = A(\lambda)+B(\lambda)$

$\hat f(\lambda) = \lim\limits_{x\to a-} v(x,\lambda) = \lim\limits_{x\to a-} A(\lambda)e^{\lambda x}+B(\lambda)e^{-\lambda x} = A(\lambda)e^{\lambda a}+B(\lambda)e^{-\lambda a}$

$\Rightarrow \quad A(\lambda) = -B(\lambda) \qquad A(\lambda) = \dfrac{\hat f(\lambda)}{2\,\mathrm{sh}\,\lambda a} \qquad B(\lambda) = -\dfrac{\hat f(\lambda)}{2\,\mathrm{sh}\,\lambda a}$

$\Rightarrow \quad v(x,\lambda) = \dfrac{\hat f(\lambda)}{\mathrm{sh}\,\lambda a}\,\mathrm{sh}\,\lambda x \qquad \lambda\neq 0$

$\lambda = 0 \qquad 0 = \lim\limits_{x\to 0+} v(x,\lambda) = \lim\limits_{x\to 0+} A(0)+B(0)x = A(0) \quad \Rightarrow A(0)=0$

$\hat f(\lambda) = \lim\limits_{x\to a-} v(x,\lambda) = \lim\limits_{x\to a-} A(0)+B(0)x = B(0)a \quad \Rightarrow B(0) = \dfrac{\hat f(0)}{a}$

$\Rightarrow \quad v(x,\lambda) = \frac{\hat{f}(0)}{a} x$

De ambas expresiones se llega a que $\quad v(x,\lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{sh\lambda a} sh\lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Como $\; v(x,\lambda) \in L'^1(\mathbb{R}) \;$ ($v(x,\lambda)$ es cont en $\mathbb{R}$ luego l.i. en $\mathbb{R}$ y

$\hat{f}(\lambda) \in L'^1(\mathbb{R})$ y $\frac{sh\lambda x}{sh\lambda a}$ está acotada, $0<x<a$)

por la 2ª fórmula de inversión de Fourier

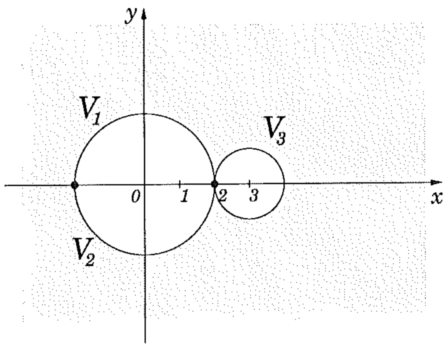
$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\lambda)}{sh\lambda a} sh\lambda x \, e^{i\lambda x} d\lambda$$

$\forall y \in \mathbb{R}$ pues $u(x,\cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que u es armónica en $(0,a)\times\mathbb{R}$.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (5–9–2003)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Hallar el potencial electrostático en la región del espacio exterior a los cilindros de la figura



siendo el potencial de las superficies cilíndricas el indicado en la figura. (Sug.: Efectuar la transformación $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)$.)

P–2 6 a) Resolver, utilizando la transformación de Fourier, el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} i) & \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}\times]0,h[\quad (h = \text{cte.} > 0) \\ ii) & u(\cdot,y), u_x(\cdot,y), u_y(\cdot,y), u_{xx}(\cdot,y), u_{yy}(\cdot,y) \in L'^1(\mathbb{R}) \quad \forall y \in]0,h[\\ iii) & \lim\limits_{y\to 0+} \|u(\cdot,y) - f\|_1 = 0 \ , \quad \sup\limits_{0<y<h} \|u(\cdot,y)\|_1 < \infty \\ iv) & \lim\limits_{y\to h-} \|u(\cdot,y)\|_1 = 0 \\ v) & \forall y > 0 : \ \lim\limits_{\eta\to 0} \left\| \dfrac{u(\cdot,y+\eta) - u(\cdot,y)}{\eta} - u_y(\cdot,y) \right\|_1 = 0 \\ & \lim\limits_{\eta\to 0} \left\| \dfrac{u_y(\cdot,y+\eta) - u_y(\cdot,y)}{\eta} - u_{yy}(\cdot,y) \right\|_1 = 0 \end{cases}$$

4 b) b1) Supongamos que una barra no aislada a lo largo de su superficie lateral pierde calor a través de ella a una velocidad por unidad de longitud proporcional a la diferencia $u(x,t) - T$ donde T es la temperatura del medio ambiente. Resolver el problema de conducción de calor correspondiente si los extremos de la barra se mantienen a temperatura T y la distribución inicial de temperatura es $f(x)$. (Sug.: Para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u-T) \qquad (h = \text{cte.} > 0) \\ u(0,t) = u(l,t) = T \ , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \qquad f(0) = f(l) = T \end{cases}$$

utilizar el cambio $v = e^{ht}(u-T)$.)

b2) Usar el método de **b1)** para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u-1) \qquad 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 1 \ , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right) \ , \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

siendo h una constante > 0.

Nota. P-1: 3 hojas (por una cara). **P-2a)**: 2 hojas (por una cara). **P-2b)**: 2 hoja (por una cara).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (5–9–2003)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar las ecuaciones diferenciales en las zonas indicadas:

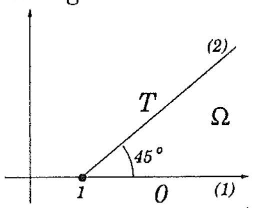
a) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\operatorname{cth}\alpha + \dfrac{1}{4}v = 0 \qquad (0 < \alpha < \infty,\ -\pi < \beta < \pi,\ -\pi < \varphi < \pi).$

b) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\operatorname{cotg}x - \dfrac{1}{4}v = 0 \qquad (0 < x < y,\ -\infty < y < \infty,\ -\pi < z < \pi).$

C–2 Sea $f(x)$ la función 2π–periódica que coincide con la parábola $y = ax^2 + bx$ en $[0, 2\pi[$ $(a, b < 0)$. Analizar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de $f(x)$. En el punto $x = 2\pi$ utilizar Dini y Jordan.

C–3 Hallar la temperatura estacionaria en una placa en forma de cuadrante $x, y \geq 0$ si sus caras están perfectamente aisladas y sus bordes tienen temperatura $T(x, 0) = 1$, $T(0, y) = 0$. Hallar también las isotermas. (Sug.: Utilizar la transformación $\omega = z^2$.)

C–4 Hallar el problema generalizado de Dirichlet equivalente al siguiente

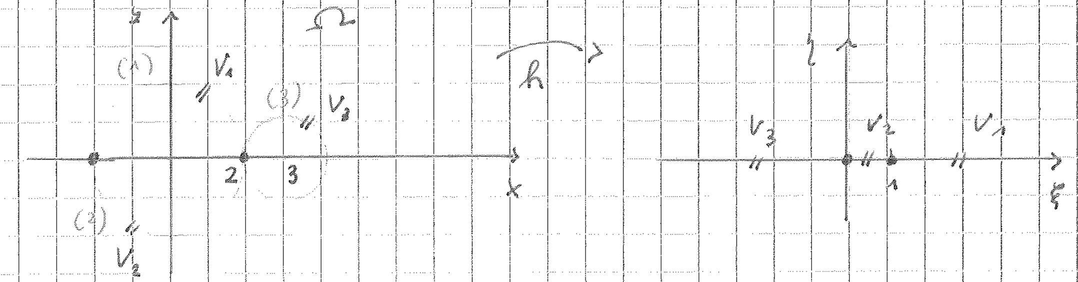


$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } (1) \\ u = T \text{ en } (2) \\ u \text{ acotada en } \bar{\Omega} \setminus \{1\} \end{cases}$$

efectuando la transformación $\omega = (z - 1)^4$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Se debe utilizar un máximo de dos hojas por cuestión.

P-1



Se trata de resolver el PGD para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u(2e^{i\theta}) = V_1 & 0<\theta<\pi \\ u(2e^{i\theta}) = V_2 & \pi<\theta<2\pi \\ u(3+e^{i\theta}) = V_3 & -\pi<\theta<\pi \\ u \text{ acot en } \overline{\Omega}\setminus\{\pm 2\} \end{cases}$$

Si $z \in (1)$ o (2) $\quad z = 2e^{i\theta}$

$$h(z) = e^{i\frac{\pi}{3}\left(\frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}-2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}\left(\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}\frac{(e^{i\theta}+1)(e^{-i\theta}-1)}{(e^{i\theta}-1)(e^{-i\theta}-1)}}$$

$$= e^{\frac{\pi}{3}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}}$$

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = +\infty$ $\qquad h((1)) =]1,\infty[$

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = 0$$

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 2\pi^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = -\infty$

$$h((2)) =]0,1[$$

$$\lim_{\theta\to\pi^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = 0$$

Si $z\in(3)$ $\quad z = 3+e^{i\theta}$, $-\pi<\theta<\pi$

$$h(z) = e^{i\frac{\pi}{3}\left(\frac{3+e^{i\theta}+2}{3+e^{i\theta}-2}\right)} = -e^{\frac{2}{3}\pi\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}} < 0$$

$$\lim_{\theta\to\pi^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = +\infty$$

$$h((3)) =]-\infty,0[$$

$$\lim_{\theta\to-\pi^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = -\infty$$

70

Si tomamos por ejemplo $z = 6\in\Omega$ $\quad h(6) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\overline{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}}$

luego $h(\Omega) \subset \operatorname{Im} w > 0$

Consideremos el problema auxiliar

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \mathbb{R}^2_+ \\ v(\xi) = \begin{cases} V_1 & 1 < \xi < \infty \\ V_2 & 0 < \xi < 1 \\ V_3 & -\infty < \xi < 0 \end{cases} \\ v \text{ acot en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{0, 1\} \end{cases}$$

La solución de este problema es

$$v(\xi,\eta) = \frac{V_3}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt + \frac{V_2}{\pi}\int_0^1 \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt +$$

$$+ \frac{V_1}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\,dt = \frac{V_3}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right] +$$

$$+ \frac{V_2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{\eta} + \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right] + \frac{V_1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{\eta}\right]$$

Si ponemos $u(z) = (v \circ h)(z) = v(h(z)) = v(\xi, \eta)$

$z \in \Omega \quad z = x + iy$

$$h(z) = e^{i\frac{\pi}{3}\left(\frac{x+iy+2}{x+iy-2}\right)} = e^{\frac{4\pi}{3}\frac{y}{(x-2)^2+y^2}}\, e^{i\frac{\pi}{3}\left(\frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2}\right)}$$

$$= \underbrace{e^{\frac{4\pi}{3}\frac{y}{(x-2)^2+y^2}}\cos\left(\frac{\pi}{3}\frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2}\right)}_{\xi} + i\,\underbrace{e^{\frac{4\pi}{3}\frac{y}{(x-2)^2+y^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2}\right)}_{\eta}$$

es la solución del problema dado ya que

u es continua en $\overline{\Omega} \setminus \{\pm 2\}$ por composición de continuas

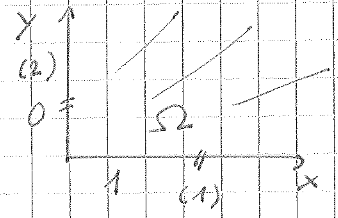
u es armónica en Ω por composición de una holomorfa h y una armónica v

u está acot en $\overline{\Omega} \setminus \{\pm 2\}$ por estarlo v

u cumple las condiciones en la frontera.

C-3 Se trata de resolver el PGD para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en } \Omega \\ T(x,0) = 1 & x > 0 \\ T(0,y) = 0 & y > 0 \\ T \text{ acotada en } \overline{\Omega} \setminus \{0\} \end{cases}$$



Si $z \in \Omega$ $\quad z = x + iy$, $x, y > 0$

$h(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$\operatorname{Im} h(z) = 2xy > 0$

Si $z \in (1)$ $\quad z = x > 0$ $\quad h(x) = x^2 > 0$ luego $h((1)) =]0, \infty[$

Si $z \in (2)$ $\quad z = iy$, $y > 0$ $\quad h(iy) = -y^2 < 0$ luego $h((2)) =]-\infty, 0[$

Consideremos el PGD para la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ \\ u(\xi, 0) = 0 & , -\infty < \xi < 0 \\ u(\xi, 0) = 1 & , 0 < \xi < \infty \\ u \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{0\} \end{cases}$$

La solución de este problema es

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta}{(t-\xi)^2 + \eta^2}\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\eta}$$

Pongamos $\quad T = u \circ h$, entonces

$$T(x,y) = u(h(x,y)) = u(x^2 - y^2, 2xy) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

es la solución del problema dado ya que T es continua en $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ por composición de continuas, T es armónica en Ω por ser la composición de una holomorfa h y una armónica u, T está acotada en $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ por estarlo u y T cumple las condiciones en la frontera de Ω.

Calculemos las isotermas:

$T(x,y) = C \quad (C = \text{cte}) \longrightarrow \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - y^2}{2xy} = \left(C - \dfrac{1}{2}\right)\pi = C' \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$\longrightarrow \dfrac{x^2 - y^2}{2xy} = \operatorname{tg} C' = K \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 - y^2 - Kxy = 0$, $K \in \mathbb{R}$, es la familia de isotermas (hipérbolas)

P. 2b 1)

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u-T) \\ u(0,t) = u(l,t) = T \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Haciendo $v = e^{ht}(u-t)$ obtenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{ht}\frac{\partial u}{\partial x} \quad " \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{ht}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = h\,e^{ht}(u-T) + e^{ht}\frac{\partial u}{\partial t} \quad " \quad \frac{\partial u}{\partial t} = e^{-ht}\frac{\partial v}{\partial t} - h(u-T)$$

Sustituimos en ~~la~~ la ec. dif.

$$e^{-ht}\frac{\partial v}{\partial t} - \cancel{h(u-T)} = k e^{-ht}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \cancel{h(u-T)} \quad " \quad \frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Cálculo de las condiciones iniciales y de contorno.

$$v(0,t) = e^{ht}(u(0,t)-T) = e^{ht}(T-T) = 0$$

$$v(l,t) = e^{ht}(u(l,t)-T) = e^{ht}(T-T) = 0$$

$$v(x,0) = e^{h\cdot 0}(f(x)-T) = f(x)-T$$

Llegamos al problema transformado equivalente

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x,0) = f(x)-T & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Se sabe que la solución de (2) es

$$v(x,t) = \sum_{1}^{\infty} b_n\, e^{-k\frac{n^2\pi^2}{l^2}t} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

siendo $b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l (f(\xi)-T)\operatorname{sen}\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$

De donde se obtiene rápidamente : $u(x,t) = e^{-ht}v(x,t) + T$

2b) En este caso resulta el problema

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0 \\ v(x,0) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{\ell} \end{cases}$$

En este caso $b_1 = -1$, $b_n = 0 \quad \forall n \neq 1$

$$v(x,t) = -e^{-k\frac{\pi^2}{\ell^2}t}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}$$

Obtenemos así

$$u(x,t) = -e^{-ht}e^{-k\frac{\pi^2}{\ell^2}t}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell} + 1$$

¡ Prueba !

$\boxed{P2a}$ Si $y \in]0,h[$, definamos

$$v(\lambda,y) := [u(\cdot,y)]^\wedge(\lambda) \qquad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

Por las props. de la transf. de Fourier $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,y)\right]^\wedge(\lambda) = (i\lambda)^2[u(\cdot,y)]^\wedge(\lambda) =$
$= -\lambda^2 v(\lambda,y)$. Asimismo (tal y como se dem. en las Notas de Clase) por (v), $\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cdot,y)\right]^\wedge(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}[u(\cdot,y)]^\wedge(\lambda) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\lambda,y)$. Tomando por tanto transf. de Fourier en la ec. $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}\times]0,h[$, obtenemos:

$$-\lambda^2 v(\lambda,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\lambda,y) = 0 \qquad (\lambda\in\mathbb{R}), \text{ con } 0<y<h.$$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$ está fijado, la anterior es una ec. dif. en la var. y de coefs. ctes. Su polinomio característico $p(z) = z^2-\lambda^2$ posee raíces $\pm\lambda$. Entonces si $\lambda\neq 0$ la sol. general es

$$v(\lambda,y) = A(\lambda)e^{\lambda y} + B(\lambda)e^{-\lambda y} = \tilde{A}(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda y + \tilde{B}(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda y$$

(si $\lambda = 0$, $v(0,y) = \tilde{A}(0) + \tilde{B}(0)\,y$.)

Tal y como se comenta en las Notas de Clase, las condiciones (iii) y (iv) implican que

$$\lim_{y\to 0+} v(\lambda,y) = \hat{f}(\lambda) \qquad (\lambda\in\mathbb{R}).$$
$$\lim_{y\to h-} v(\lambda,y) = 0$$

Si $\lambda\neq 0$ entonces

$$\lim_{y\to 0+}(\tilde{A}(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda y + \tilde{B}(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda y) = \tilde{A}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$
$$\lim_{y\to h-}(\tilde{A}(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda y + \tilde{B}(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda y) = \tilde{A}(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda h + \tilde{B}(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda h = 0 \to \tilde{B}(\lambda) = -\tilde{A}(\lambda)\frac{\mathrm{sh}\,\lambda}{\mathrm{sh}\,\lambda}$$

luego

$$v(\lambda,y) = \hat{f}(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda y - \hat{f}(\lambda)\frac{\mathrm{ch}\,\lambda h}{\mathrm{sh}\,\lambda h}\,\mathrm{sh}\,\lambda y \qquad (\lambda\neq 0,\ y\in]0,h[)$$

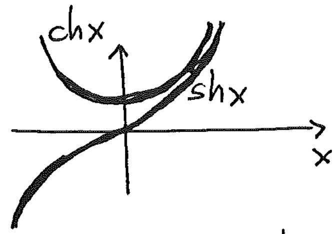
(si $\lambda = 0$ $\quad v(0,y) = \hat{f}(0) - \hat{f}(0)\frac{y}{h}$ $\quad (0<y<h)$).

Sea ahora $y \in]0,h[$ fijo, $\lambda \neq 0$. Como $\operatorname{ch}\lambda y \leq \operatorname{ch}\lambda h$ entonces

$$|\hat{f}(\lambda)|\operatorname{ch}\lambda y \leq |\hat{f}(\lambda)| \cdot \operatorname{ch}\lambda h$$

siendo $\hat{f}(\lambda)\operatorname{ch}\lambda h \in L^1(\mathbb{R})$ (tal y como se indicó en el enunciado del Problema).

Asimismo, como $\operatorname{sh}\lambda y \leq \operatorname{sh}\lambda h$, entonces



$$\left|\hat{f}(\lambda)\frac{\operatorname{ch}\lambda h}{\operatorname{sh}\lambda h}\operatorname{sh}\lambda y\right| \leq |\hat{f}(\lambda)| \cdot \operatorname{ch}\lambda h .$$

Luego $v(\cdot,y) \in L^1(\mathbb{R})$ $(0<y<h)$ ya que es suma de funciones abs. integrables.

Podemos aplicar la fórmula de inversión de Fourier:

$\forall x \in \mathbb{R}$
$(0<y<h)$

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda,y)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

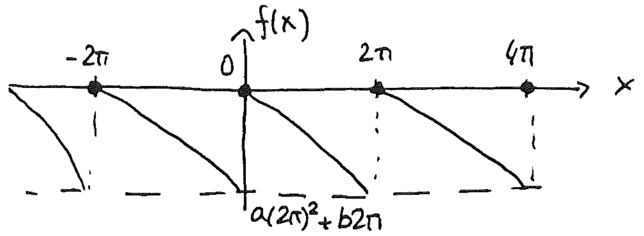
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda)\left(\operatorname{ch}\lambda y - \frac{\operatorname{ch}\lambda h}{\operatorname{sh}\lambda h}\operatorname{sh}\lambda y\right) e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

EXAMEN DE E.D.P. (5-9-2003)

$\boxed{C-2}$ Sea $f(x)=ax^2+bx$, $x\in[0,2\pi[$, f 2π-periódica. Veamos su gráfica.

Si $x\in]0,2\pi[$, $f'(x)=2ax+b<0$ ya que $a,b<0$, luego $f\searrow$ en $]0,2\pi[$

(también, $f''(x)=2a<0$ en $]0,2\pi[$). Luego:



Obs. que $f(0+)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} f(0+h)=\lim(ah^2+bh)=0=f(0)$

pero que $f(0-)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\(h<0)}} f(0+h)=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\(h<0)}} f(+h+2\pi)=\lim\limits_{h\to 0}\left(a(h+2\pi)^2+b(h+2\pi)\right)=a(2\pi)^2+b2\pi$

luego $f(0+)=f(0)\neq f(0-)$ y $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\dots\})$.

Conv. Puntual.

Si $x\in]0,2\pi[$, f es monot. decreciente luego loc. de V.A. ($\exists\delta>0$ t.q. $[x-\delta,x+\delta]\subset]0,2\pi[$; como $f\searrow$ en $[x-\delta,x+\delta]$, f es de V.A. en dicho intervalo); como además es C^a, por el criterio de Jordan su serie de F. converge a $f(x)$.

Sea $x=2\pi$. Apliquemos el crit. de Dini para analizar la conv. de su s. de F.: como

$$f(2\pi+)=\lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} f(2\pi+h)=\lim f(2\pi+h-2\pi)=\lim_{h\to 0} f(h)=\lim_{h\to 0}(ah^2+bh)=0$$

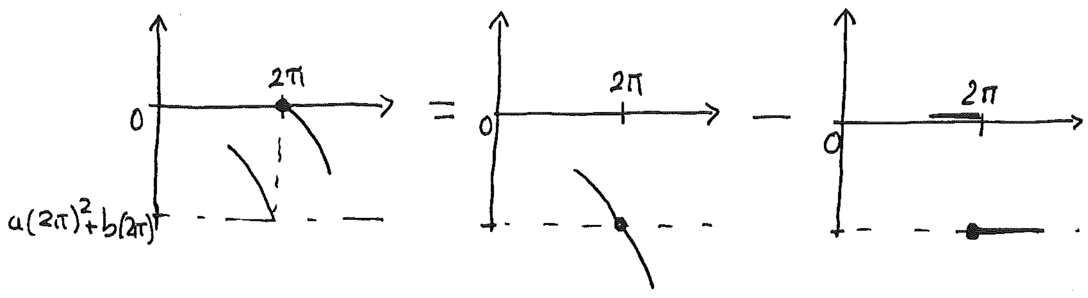
$$f(2\pi-)=\lim_{\substack{h\to 0\\(h<0)}} f(2\pi+h)=\lim\left(a(2\pi+h)^2+b(2\pi+h)\right)=a(2\pi)^2+b\cdot 2\pi$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}}\frac{f(2\pi+h)-f(2\pi+)}{h}=\lim\frac{ah^2+bh-0}{h}=b$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(h<0)}}\frac{f(2\pi+h)-f(2\pi-)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(2\pi+h)^2+b(2\pi+h)-(a(2\pi)^2+b2\pi)}{h}=4\pi a+b$$

los lím. $\exists$ y son finitos, luego su s. de F. converge en 2π a $\dfrac{f(2\pi+)+f(2\pi-)}{2}=\dfrac{a(2\pi)^2+b2\pi}{2}$

Apliquemos ahora el crit. de Jordan. Veamos gráficamente que en un entorno de 2π $f(x)$ es de V.A. La gráfica de $f(x)$ en un entorno de 2π se puede descomponer como sigue:



$$f \quad = \quad f_1 \quad - \quad f_2$$

$$\left(f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2\pi \\ a(2\pi)^2 + b(2\pi) & \text{si } x \geq 2\pi \end{cases} \right)$$

entonces $f = f_1 - f_2$ con $f_1, f_2 \searrow$, luego $f \in VA$, y la s. de Fourier de f converge en 2π a $\dfrac{f(2\pi+) + f(2\pi-)}{2}$.

<u>Conv. Uniforme</u>.

Como $f \in C\,]0,2\pi[$ y $f \searrow$ en $]0,2\pi[$, f es de V.A. en <u>todo</u> intervalo cerrado $[c,d] \subset\,]0,2\pi[$, donde conv. uniformemente por el crit. de Jordan de c.u.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (5–9–2003)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 Clasificar las ecuaciones diferenciales en las zonas indicadas:

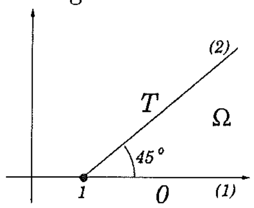
a) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\,\alpha}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial v}{\partial \alpha}\mathrm{cth}\alpha + \dfrac{1}{4}v = 0 \qquad (0 < \alpha < \infty,\ -\pi < \beta < \pi,\ -\pi < \varphi < \pi).$

b) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\,x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{cotg}x - \dfrac{1}{4}v = 0 \qquad (0 < x < y,\ -\infty < y < \infty,\ -\pi < z < \pi).$

C–2 Sea $f(x)$ la función 2π–periódica que coincide con la parábola $y = ax^2 + bx$ en $[0, 2\pi[$ $(a, b < 0)$. Analizar la convergencia puntual y uniforme del desarrollo de Fourier de $f(x)$. En el punto $x = 2\pi$ utilizar Dini y Jordan.

C–3 Hallar la temperatura estacionaria en una placa en forma de cuadrante $x, y \geq 0$ si sus caras están perfectamente aisladas y sus bordes tienen temperatura $T(x, 0) = 1$, $T(0, y) = 0$. Hallar también las isotermas. (Sug.: Utilizar la transformación $\omega = z^2$.)

C–4 Hallar el problema generalizado de Dirichlet equivalente al siguiente



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } (1) \\ u = T \text{ en } (2) \\ u \text{ acotada en } \bar{\Omega} \setminus \{1\} \end{cases}$$

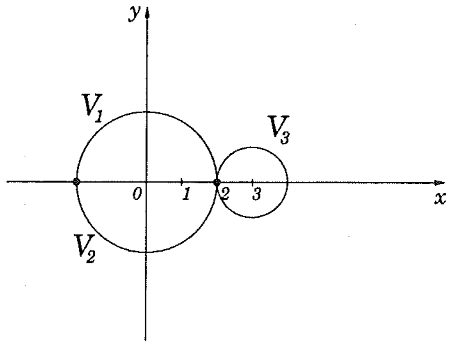
efectuando la transformación $\omega = (z-1)^4$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Se debe utilizar un máximo de dos hojas por cuestión.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (5–9–2003)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Hallar el potencial electrostático en la región del espacio exterior a los cilindros de la figura



siendo el potencial de las superficies cilíndricas el indicado en la figura. (Sug.: Efectuar la transformación $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}\left(\frac{z+2}{z-2}\right)}$.)

P–2 **6 a)** Resolver, utilizando la transformación de Fourier, el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} i) & \Delta u = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}\times]0,h[\quad (h = \text{cte.} > 0) \\ ii) & u(\cdot,y), u_x(\cdot,y), u_y(\cdot,y), u_{xx}(\cdot,y), u_{yy}(\cdot,y) \in L'^1(\mathbb{R}) \quad \forall y \in]0,h[\\ iii) & \lim\limits_{y\to 0+} \|u(\cdot,y) - f\|_1 = 0 \ , \quad \sup\limits_{0<y<h} \|u(\cdot,y)\|_1 < \infty \\ iv) & \lim\limits_{y\to h-} \|u(\cdot,y)\|_1 = 0 \\ v) & \forall y > 0 : \ \lim\limits_{\eta\to 0} \left\| \dfrac{u(\cdot,y+\eta) - u(\cdot,y)}{\eta} - u_y(\cdot,y) \right\|_1 = 0 \\ & \lim\limits_{\eta\to 0} \left\| \dfrac{u_y(\cdot,y+\eta) - u_y(\cdot,y)}{\eta} - u_{yy}(\cdot,y) \right\|_1 = 0 \end{cases}$$

4 b) **b1)** Supongamos que una barra no aislada a lo largo de su superficie lateral pierde calor a través de ella a una velocidad por unidad de longitud proporcional a la diferencia $u(x,t) - T$ donde T es la temperatura del medio ambiente. Resolver el problema de conducción de calor correspondiente si los extremos de la barra se mantienen a temperatura T y la distribución inicial de temperatura es $f(x)$. (Sug.: Para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u-T) \qquad (h = \text{cte.} > 0) \\ u(0,t) = u(l,t) = T \ , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \ , \qquad f(0) = f(l) = T \end{cases}$$

utilizar el cambio $v = e^{ht}(u - T)$.)

b2) Usar el método de **b1)** para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u-1) \qquad 0 < x < l \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 1 \ , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right) \ , \quad 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

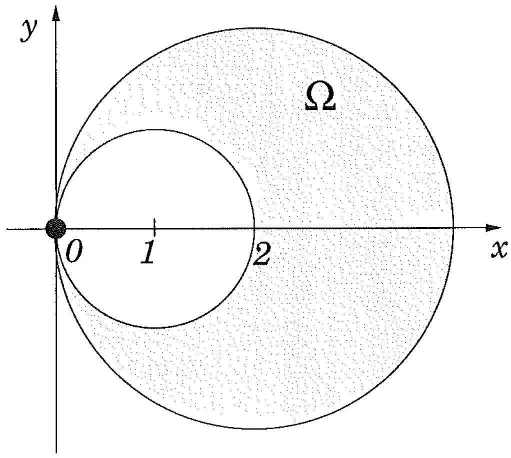
siendo h una constante > 0.

Nota. **P-1**: 3 hojas (por una cara). **P-2a)**: 2 hojas (por una cara). **P-2b)**: 2 hoja (por una cara).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (27–6–2003)
2ª parte: Problemas. Duración: 2,5 horas

P–1 Hallar el potencial electrostático en la región del espacio comprendida entre los cilindros de la figura



sabiendo que el potencial de la superficie cilíndrica exterior es $V = 100$ y el de la interior es $V = 0$. (Sug.: Efectuar la transformación $\omega = e^{-\frac{4\pi i}{z}}$.)

P–2 **6 a)** Hallar las soluciones elementales (es decir, de la forma $X(x)\,T(t)$) del siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 & 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

4 b) Resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{(x+i)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt\ , \qquad -\infty < x < \infty\ ,$$

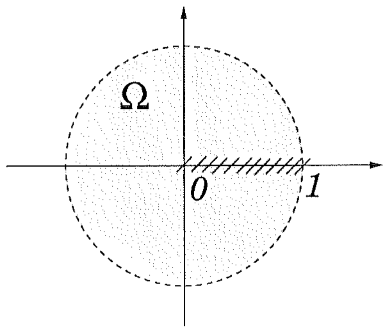
sabiendo que $f \in L'^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$.

Nota. P-1: 3 hojas (por una cara). **P-2a)**: 3 hojas (por una cara). **P-2b)**: 2 hoja (por una cara).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

E.T.S.I. Industriales
Examen de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (27–6–2003)
1ª parte: Cuestiones. Duración: 1,5 horas

C–1 ¿En qué región se transforma la zona Ω de la figura

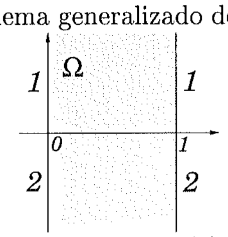


mediante la aplicación $\omega = z^{1/2}$?

C–2 Probar que $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}\cdots\right)$, $|x| \leq \pi$, utilizando la teoría de las series de Fourier.

C–3 Hallar una función $f \in L'^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ sabiendo que $\hat{f}(\omega) = \operatorname{sen}\omega\ \chi_{[-\pi,\pi]}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

C–4 Hallar el problema generalizado de Dirichlet equivalente al siguiente



$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega & \\ u(iy) = u(1+iy) = 1 & y > 0 \\ u(iy) = u(1+iy) = 2 & y < 0 \\ u \text{ acotada} & \end{cases}$$

al realizar la transformación $f(z) = e^{i\pi z}$.

Nota. Cada cuestión debe entregarse por separado. Se debe utilizar un máximo de dos hojas por cuestión.

 Examen EDP 27-6-2003

P-1 Se trata de resolver el PGDL

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{en } \Omega \\ T(1+e^{i\theta}) = 0 & -\pi<\theta<\pi \\ T(2+2e^{i\theta}) = 100 & -\pi<\theta<\pi \\ T \text{ acotada en } \bar{\Omega}\setminus\{(0,0)\} \end{cases}$$

Si $z \in (1)$ $\quad z = 1+e^{i\theta}$, $-\pi<\theta<\pi$

$$h(z) = e^{-\frac{4\pi i}{z}} = e^{-\frac{4\pi i}{1+e^{i\theta}}} = e^{-4\pi i\left[\frac{1}{2} - i\frac{\operatorname{sen}\theta}{2(1+\cos\theta)}\right]} = \overbrace{e^{-2\pi i}}^{1} e^{-2\pi\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}} > 0$$

$$\frac{1}{1+e^{i\theta}} = \frac{1+e^{-i\theta}}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})} = \frac{1+e^{-i\theta}}{2(1+\cos\theta)} = \frac{1}{2} - \frac{i\operatorname{sen}\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

$$h(z) = e^{-2\pi\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}} \xrightarrow[\theta\to\pi^-]{} 0$$

$$\xrightarrow[\theta\to-\pi^+]{} +\infty$$

Si $z\in(2)$ $\quad z = 2+2e^{i\theta}$, $-\pi<\theta<\pi$

$$h(z) = e^{-\frac{4\pi i}{z}} = e^{-\frac{4\pi i}{2+2e^{i\theta}}} = e^{-4\pi i\left[\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right]} = \overbrace{e^{-\pi i}}^{-1} e^{-\pi\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}} < 0$$

Para ver que si $z\in\Omega$, $h(z)$ está en el semiplano superior, o bien se toma un punto sencillo de Ω y se comprueba que $h(z)$ cae en el semiplano superior o bien se procede así

Si $z\in\Omega$ z pertenece a una circunferencia de centro c $(1<c<2)$ y radio c

$z = c + c\,e^{i\theta}$ $\quad -\pi<\theta<\pi$

entonces
$$h(z) = e^{\frac{-4\pi i}{c(1+e^{i\theta})}} = e^{-\frac{2\pi i}{c}} e^{-\frac{2\pi}{c}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}} =$$

$$= e^{-\frac{2\pi}{c}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}}\left[\cos\frac{2\pi}{c} - i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{c}\right]$$

$$\operatorname{Im} h(z) = -e^{-\frac{2\pi}{c}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{c} > 0$$

$1<c<2$

$1 > \frac{1}{c} > \frac{1}{2}$

$2\pi > \frac{2\pi}{c} > \pi$

Consideremos el problema auxiliar

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(\xi) = 100 & \xi < 0 \\ u(\xi) = 0 & \xi > 0 \\ u \text{ acotada en } \overline{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{0\} \end{cases}$$

La solución de este problema es $u(\xi,\eta) = \frac{100}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right]$

Finalmente si $z \in \Omega$ $z = x+iy$

$$h(z) = e^{-\frac{4\pi i}{z}} = e^{-\frac{4\pi i}{x+iy}} = e^{-4\pi i\frac{(x-iy)}{x^2+y^2}} =$$

$$= e^{\frac{-4\pi y}{x^2+y^2}}\left[\cos\frac{4\pi x}{x^2+y^2} - i \operatorname{sen}\frac{4\pi x}{x^2+y^2}\right]$$

La función $T = u \circ h$ es la solución del problema dado

$$T(x,y) = u(h(x,y)) = \frac{100}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\cos\frac{4\pi x}{x^2+y^2}}{\operatorname{sen}\frac{4\pi x}{x^2+y^2}}\right]$$

T es continua en $\overline{\Omega}\setminus\{0\}$ por composición de continuas
es acotada en $\overline{\Omega}\setminus\{0\}$ por estarlo u
es armónica en Ω por composición de una holomorfa y una armónica
cumple las condiciones

PROBLEMA 2 a Hallar las "sols. elementales" (de la forma $X(x)\cdot T(t)$) del problema

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad , \quad (x,t) \in \Omega =]0,1[\times]0,\infty[, \\ \text{(ii)} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 , \quad t \geq 0 \\ \text{(iii)} \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t) = 0 , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

(Suponemos que $X \in C^4[0,1]$, $T \in C^2[0,\infty[$, no id. nulas). Sustituyendo en (i),

$$X(x) \cdot T''(t) + k^2 X^{(iv)}(x) \cdot T(t) = 0 \text{ en } \Omega .$$

Si "ni X ni T se anulan" dividimos por $X \cdot T$ y obtenemos

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -K^2 \frac{X^{(iv)}(x)}{X(x)} = \lambda \text{ constante. } (\in \mathbb{R})$$

Teniendo en cuenta las condiciones (ii) y (iii) del problema, obtenemos que $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen:

(*1) $\{ \; T''(t) - \lambda T(t) = 0 , \; t > 0$

$$(*2) \begin{cases} X^{(iv)}(x) + \dfrac{\lambda}{K^2} X(x) = 0 , \quad x \in]0,1[\\ X(0) = X(1) = 0 \\ X''(0) = X''(1) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos (*2). La EDO es homogénea, de coefs. ctes. Su pol. característico es $p(z) = z^4 + \dfrac{\lambda}{K^2}$. Entonces:

(a) si $\underline{\lambda < 0}$ las raíces de la ec. son

$$\left\{ \sqrt[4]{\frac{-\lambda}{K^2}} , -\sqrt[4]{\frac{-\lambda}{K^2}} , i\sqrt[4]{\frac{-\lambda}{K^2}} , -i\sqrt[4]{\frac{-\lambda}{K^2}} \right\}$$

Llamando $\delta = \sqrt[4]{\frac{-\lambda}{k^2}} > 0$ la sol. gral. es

$$X(x) = c_0 e^{\delta x} + c_1 e^{-\delta x} + c_2 \cos \delta x + c_3 \operatorname{sen} \delta x \qquad (c_i : \text{ctes}, i = 1, \dots, 4)$$

ó también

$$X(x) = d_0 \operatorname{ch} \delta x + d_1 \operatorname{sh} \delta x + d_2 \cos \delta x + d_3 \operatorname{sen} \delta x \qquad (d_i: \text{ctes})$$

Imponiendo las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} X(0) = 0 = d_0 + d_2 \\ X(1) = 0 = d_0 \operatorname{ch} \delta + d_1 \operatorname{sh} \delta + d_2 \cos \delta + d_3 \operatorname{sen} \delta \\ X''(0) = 0 \rightarrow d_0 - d_2 = 0 \\ X''(1) = 0 \rightarrow d_0 \operatorname{ch} \delta + d_1 \operatorname{sh} \delta - d_2 \cos \delta - d_3 \operatorname{sen} \delta = 0 \end{array}\right\}$$

Las ecs. $d_0 + d_2 = 0$, $d_0 - d_2 = 0$ implican que $d_0 = d_2 = 0$. Sustituyendo, quedan las ecs.

$$\begin{array}{l} d_1 \operatorname{sh} \delta + d_3 \operatorname{sen} \delta = 0 \\ d_1 \operatorname{sh} \delta - d_3 \operatorname{sen} \delta = 0 \end{array}$$

que poseen sol. no trivial sólo si $\begin{vmatrix} \operatorname{sh} \delta & \operatorname{sen} \delta \\ \operatorname{sh} \delta & -\operatorname{sen} \delta \end{vmatrix} = -2 \operatorname{sh} \delta \cdot \operatorname{sen} \delta = 0$,

esto es, si $\operatorname{sen} \delta = 0$ (como $\delta > 0$, $\operatorname{sh} \delta > 0$), sii $\delta = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

luego $\delta = \sqrt[4]{\frac{-\lambda}{k^2}} = n\pi \rightarrow \lambda = -k^2 (n\pi)^4$. Entonces $d_1 = 0$ y

$$X(x) = d_3 \cdot \operatorname{sen}(n\pi x) \quad , n = 1, 2, \ldots \quad (d_3 \neq 0).$$

(b) Si $\underline{\lambda = 0}$ $z = 0$ es raíz cuádruple, y

$$X(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \qquad (c_i: \text{ctes})$$

es la sol. gral. Pero las condiciones $X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0$ implican que $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, y por tanto $X \equiv 0$.

(c) Si $\underline{\lambda > 0}$ las raíces de la ec. son

$$\left\{ \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}}\, e^{i\pi/4}, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}}\, e^{-i\pi/4}, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right\}$$

y como $\sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}}\, e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}} (1+i) = \mu(1+i)$, con $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\frac{\lambda}{k^2}} > 0$, etc, la sol. gral. es

$$X(x) = c_0 e^{\mu x} \cos \mu x + c_1 e^{\mu x} \operatorname{sen} \mu x + c_2 e^{-\mu x} \cos \mu x + c_3 e^{-\mu x} \operatorname{sen} \mu x$$

(c_i: ctes), o también

$$X(x) = d_0 \operatorname{ch} \mu x \cos \mu x + d_1 \operatorname{sh} \mu x \cos \mu x + d_2 \operatorname{ch} \mu x \operatorname{sen} \mu x + d_3 \operatorname{sh} \mu x \cdot \operatorname{sen} \mu x$$

(d_i: ctes). Imponemos las restantes condiciones. De

$$X(0) = 0 = d_0$$
$$X''(0) = 0 = 2\mu^2 d_3$$

obtenemos que $d_0 = d_3 = 0$. Asimismo, de

$$X(1) = 0 = d_1 \operatorname{sh}\mu \cdot \cos\mu + d_2 \operatorname{ch}\mu \cdot \operatorname{sen}\mu$$
$$X''(1) = 0 = -d_1 \operatorname{ch}\mu \cdot \operatorname{sen}\mu + d_2 \cdot \operatorname{sh}\mu \cdot \cos\mu$$

para que exista sol. no trivial, el det. de la matriz de coefs. ha de ser cero; pero

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh}\mu \cdot \cos\mu & \operatorname{ch}\mu \cdot \operatorname{sen}\mu \\ -\operatorname{ch}\mu \cdot \operatorname{sen}\mu & \operatorname{sh}\mu \cdot \cos\mu \end{vmatrix} = \operatorname{sh}^2\mu \cdot \cos^2\mu + \operatorname{ch}^2\mu \cdot \operatorname{sen}^2\mu > 0$$

ya que $\operatorname{sh}\mu \neq 0$ puesto que $\mu > 0$, y los ceros de $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ nunca coinciden. Luego sólo $\exists$ sol. trivial, $d_1 = d_2 = 0$ y $X \equiv 0$.

Resolvemos finalmente (*1) cuando $\lambda < 0$, $\lambda = -k^2(n\pi)^4$, $n = 1, 2, \ldots$: la ec. es $T''(t) + k^2(n\pi)^4 T(t) = 0$, $t > 0$, cuya sol. general es

$$T(t) = c_1 \cdot \cos(k(n\pi)^2 t) + c_2 \cdot \operatorname{sen}(k(n\pi)^2 t) \qquad (c_1, c_2: \text{ctes})$$

Luego las "sols. elementales" son

$$\left(A \cdot \cos(k(n\pi)^2 t) + B \cdot \operatorname{sen}(k(n\pi)^2 t) \right) \cdot \operatorname{sen}(n\pi x) \quad ,$$

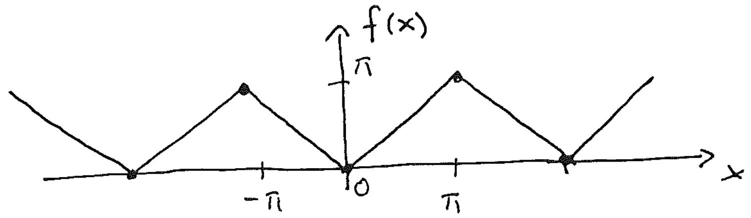
donde A, B son ctes, $n = 1, 2, \ldots$

EXAMEN DE E.D.P. (27-6-2003)

CUESTIÓN 2. Probar que $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$ en $|x| \leq \pi$.

Definimos $f(x) = |x| = \begin{cases} +x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ en $[-\pi, +\pi]$, f 2π-periódica.

Entonces $f \in C(\mathbb{R})$, está acotada, es par:



Poseerá por tanto un desarrollo en serie de Fourier en cosenos,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad , \text{ con } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

Si calculamos

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ PAR} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{si } n = 2k-1 \text{ IMPAR}, \\ & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \dots)$

Luego $f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

Queda probar la convergencia de la serie en $[-\pi, +\pi]$ (y que coincide con $f(x)$)

Si $x \in]-\pi, 0[$ f es monót. decreciente, luego de V.A. en un entorno de x: por el criterio de Jordan su s. de F. converge a $f(x)$ (esto último por ser f continua en x). Si $x \in]0, \pi[$ el razonamiento es igual.

Si $x = 0$, como $f(0+) = f(0-) = f(0) = 0$ (f es $C^{\underline{a}}$ en 0) y como

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0+)}{h} = 1 \quad , \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(0-h)-f(0-)}{h} = -1$$

por tanto, por el criterio de Dini la serie converge en 0 a $f(0)$.
Un razonamiento análogo se puede aplicar al punto $x=\pi$.
Por lo tanto:

$$\text{si } x\in[-\pi,\pi] \ , \quad f(x)=|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$