

Universidad Autónoma de Madrid

Departamento de Matemáticas

Primer Curso de

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ireneo Peral Alonso

DEDICATORIA

*A mi mujer, Magdalena,
y a mis hijas, Irene y Magdalena,
simplemente, porque las quiero y ellas son lo más importante para mí.*

INDICE

Lista de símbolos	9
Prólogo	11
CAPÍTULO 1 : LOS EJEMPLOS CLÁSICOS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA	
Introducción.	15
§1.1 La divergencia. Una manera de medir variaciones.	17
§1.2 El teorema de la divergencia de Gauss.	24
§1.3 Ecuaciones de difusión: La ecuación del calor.	33
§1.4 Ecuaciones estacionarias: Las ecuaciones de Laplace y de Poisson	38
§1.5 Ecuación de la cuerda vibrante.	40
§1.6 Ecuaciones de Maxwell. La ecuación de ondas.	42
§1.7 Ecuaciones de primer orden. Euler y las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos.	47
§1.8 Otros modelos físicos.	51
Ejercicios del Capítulo 1.	53
CAPÍTULO 2: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN: EL PROBLEMA DE CAUCHY	
Introducción.	55
§2.1 Ecuaciones <i>quasi lineales</i> de primer orden	57
§2.2 Ecuación general de primer orden.	70
§2.3 Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.	84
§2.4 El teorema de Cauchy-Kovalevsky.	94
Apéndice al Capítulo 2.	
Problema de Cauchy para la ecuación general de primer orden en \mathbf{R}^N .	102
Ejercicios del Capítulo 2.	106
CAPÍTULO 3: PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE. SERIES E INTEGRALES DE FOURIER. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES.	
Introducción.	113
§3.1 Problemas de contorno de segundo orden.	
Teorema de la alternativa. Función de Green.	118
§3.2 Problemas autoadjuntos: El problema de Sturm-Liouville. Autovalores.	132
§3.3 El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad de \mathbf{R}^2 .	
Convergencia de series de Fourier.	153

§3.4 Problemas mixtos para la ecuación del calor en una dimensión espacial.	175
§3.5 Problemas de contorno para la ecuación de ondas: la cuerda vibrante.	184
§3.6 El problema de Dirichlet en el semiplano positivo.	
La transformación de Fourier.	188
Ejercicios del Capítulo 3.	201
CAPÍTULO 4: LA ECUACIÓN DE ONDAS EN DIMENSIONES ESPACIALES UNO DOS Y TRES. EL PROBLEMA DE CAUCHY.	
Introducción.	211
§4.1 La ecuación de ondas en dimensión uno. Fórmula de D’Alambert.	213
§4.2 La ecuación de ondas en dimensión espacial tres.	
Método de las medias esféricas.	216
§4.3 El problema de Cauchy en dimensión espacial dos.	
Método de descenso de Hadamard.	222
§4.4 La ecuación de ondas no homogénea.	224
§4.5 Energía y unicidad. Dependencia de la ecuación de ondas de la dimensión.	226
Ejercicios del Capítulo 4.	234
CAPÍTULO 5: LA ECUACIÓN DE LAPLACE. EL PROBLEMA DE DIRICHLET.	
Introducción.	239
§5.1 Representación integral de funciones. Función de Green.	241
§5.2 El problema de Dirichlet en una bola de \mathbf{R}^N .	246
§5.3 Cálculo de la función de Green en dominios con simetrías	251
§5.4 Propiedades de las funciones armónicas.	254
§5.5 El problema de Dirichlet en dominios generales. Método de Perron.	261
§5.6 La ecuación de Poisson.	275
Ejercicios al Capítulo 5.	283
CAPÍTULO 6: LA ECUACIÓN DEL CALOR.	
Introducción.	291
§6.1 Núcleo de Gauss. Construcción de soluciones.	293
§6.2 El principio del máximo. Resultados clásicos de unicidad.	299
§6.3 El problema de Cauchy no homogéneo.	303
§6.4 Temperaturas positivas.	312
Ejercicios del Capítulo 6	319
Índice Alfabético	327
Bibliografía	333

LISTA DE SIMBOLOS

- \mathbf{R} Números reales
- \mathbf{R}^N Espacio euclídeo N-dimensional
- \mathbf{R}^3 Espacio euclídeo 3-dimensional
- \mathbf{R}^2 Espacio euclídeo 2-dimensional
- \mathbf{R}_+^2 Semiplano con segunda coordenada positiva
- \mathbf{R}_+^{N+1} Semiespacio con la última coordenada positiva
- \mathbf{Q} Números racionales
- \mathbf{C} Números complejos
- \mathbf{N} Números naturales
- \mathbf{Z} Números enteros
- $A \times B$ Producto cartesiano de A y B .
- \mathcal{C}^∞ Funciones indefinidamente diferenciables
- \mathcal{C}_0^∞ Funciones indefinidamente diferenciables y con soporte compacto.
- \mathcal{C} Funciones continuas
- \mathcal{C}^1 Funciones con primeras derivadas continuas
- \mathcal{C}^2 Funciones con segundas continuas
- \mathcal{C}^3 Funciones con terceras derivadas continuas
- \mathcal{C}^k Funciones con k derivadas continuas
- \mathcal{C}^α Funciones Holderianas
- L^2 Funciones de cuadrado integrable
- \Im Parte imaginaria
- \Re Parte real
- \langle, \rangle Producto escalar canónico en \mathbf{R}^N .

PROLOGO

Cualquier texto sobre una materia clásica de las Matemáticas es siempre producto de un punto de vista personal del autor sobre la disciplina en cuestión. Este no es una excepción.

Debo confesar que la organización de las lecciones que siguen a continuación, es como me hubiera gustado aprender ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES por primera vez. Y, no cabe duda, éste es mi gusto actual, el cual es seguramente distinto de cuando escuché por primera vez hablar de esta vasta y apasionante parcela de las Matemáticas.

No deben esperarse contenidos originales en una materia tan clásica, ¡sería peligroso...!

He pretendido buscar los conocimientos que considero realmente básicos para un estudiante motivado y curioso de las Matemáticas, de su gestación y de cómo sirven para describir algunos procesos naturales con singular finura.

Lo que yo considero básico puede resumirse en los siguientes puntos:

- (1) *Entender bien los resultados más elementales en los tres ejemplos clásicos de las ecuaciones de la Física Matemática: ECUACIÓN DE ONDAS, ECUACIÓN DEL CALOR Y ECUACIÓN DE LAPLACE.*
- (2) *Conocer, siquiera someramente, las ECUACIONES DE PRIMER ORDEN, su interpretación geométrica y su uso para determinar LOS BUENOS PROBLEMAS para las ecuaciones de segundo orden.*
- (3) *El MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES, como origen de la disciplina, y tema central del curso, es decir, manipular las series de Fourier para poder leer en ellas propiedades de las soluciones. En este sentido, es útil conocer los problemas de Sturm-Liouville y sus autovalores.*
- (4) *Convencer al lector de que la inversión de esfuerzo y tiempo que se hace en los apartados anteriores es muy rentable.*

Lo que se hace para los tres ejemplos más elementales se convierte en métodos muy generales que, con desarrollos técnicos más sofisticados, permiten estudiar las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales e incluso algunos problemas no lineales. Estos métodos han sido el motor de buena parte de las Matemáticas de los dos últimos siglos.

Me gusta enfatizar en este punto, pues recuerdo no sin cierto desasosiego, la impresión que me producían las ecuaciones en derivadas parciales al estudiarlas por primera vez. Estudiar problema tras problema, ahora con valores iniciales, ahora con

valores de contorno, una ecuación de este tipo, luego se la cambia un signo y su comportamiento no se parece en nada... ¿Verdad que parece un desastre?

Insisto, los ejemplos que estudiaremos en lo que sigue son **paradigmáticos**. Y trataré de dar cuenta de por qué lo son; no solo las ecuaciones, sino también, el tipo de problema que para cada una se estudia. Intentaré mostrar los hechos fundamentales en cada caso, buscando el camino que, a mi juicio, tiene más proyección y más uso en desarrollos avanzados.

El origen de este texto está en la necesidad de tener una referencia de carácter elemental, más o menos autocontenida, que me sirva a mí mismo como guía de los cursos que he de dar. No obstante, es posible que sea de interés para alguien más que tenga que dar un curso de introducción y para los estudiantes. De ahí el esfuerzo, un poco masoquista, que he emprendido de ponerlo en AMSTEX. No puedo agradecer la estupenda labor de mecanografía, porque sería un autoagradecimiento injusto, ya que lo bien que queda no es mérito mío, sino del TEX.

No pienso dar indicaciones metodológicas, siempre me ha causado un cierto espanto enseñar a enseñar. Pero sí diré lo que vengo haciendo con el contenido del texto en un cuatrimestre de cuatro horas semanales de clase.

En las condiciones anteriores, el curso 1992-93, se cubrieron:

- El Capítulo 1 esencialmente completo.
- El Capítulo 2 salvo el teorema de Cauchy-Kovalevsky.
- Del Capítulo 3 se suprimió la transformada de Fourier pero el resto se estudió con detalle.
- El Capítulo 4 se estudió completo.
- Del Capítulo 5 se estudió la parte más elemental, es decir, se omitieron, la solución del problema de Dirichlet en dominios generales por el método de Perron, la cual se explicó sin demostraciones, y los resultados de teoría del potencial elemental.
- Del Capítulo 6 se obtuvieron las soluciones mediante la gaussiana, que se obtuvo como solución autosemejante, y se mostró unicidad de solución acotada por aplicación del principio del máximo.

También hice buena parte de los ejercicios propuestos. Todo esto es lo que yo considero el PRIMER CURSO EN ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. El resto es para los estudiantes mejores y les servirá como paso intermedio para leer otros textos más avanzados, tales como los que aparecen en las referencias.

Tuvimos el año 1992-93 ¡370 estudiantes de E.D.P! Esta fue una razón más para redactar estas lecciones. Quiero agradecer al pequeño grupo, el más activo, de este colectivo excesivo, su interés por las Matemáticas, pues ello me hizo trabajar duro y con ilusión en culminar la empresa de redactar este texto.

Es de justicia el reconocimiento a mis colegas del Departamento de Matemáticas, en especial a los que dedican su tiempo a las "EDP": Bernis, Esteban, García Azorero, Vázquez y Walías, porque de sus comentarios y sugerencias aprendo continuamente. Pero en general a todos los compañeros del Departamento les debo gratitud. A unos por los ánimos que me dieron, a otros por "pasar de mí" y dejarme en paz.

Mi más profundo agradecimiento a Dimitri Yakubovich, con quien compartí la enseñanza de este curso, por la ayuda que me prestó. Sus correcciones y comentarios han sido de utilidad para hacer legible este texto. Las conversaciones con Jesús Gonzalo, que enseñó el tercer grupo, siempre fueron interesantes para mí por sus peculiares y profundos puntos de vista. También debo gratitud a A. de la Llave y M. Walias por la lectura de las versiones previas, por sus severas críticas, que han hecho que disminuyan las erratas de manera exponencial.

Recibiré con gratitud todo comentario, crítica, apunte, sugerencia, chascarrillo, etc., que los lectores tengais a bien hacer y que vayan en el camino de la mejora de este curso.

Los símbolos más usados están recogidos tras el índice.

Se incluye una lista de referencias bibliográficas de la que debo advertir que son todos los que están pero, evidentemente, no están todos los que son. La selección ha sido hecha por gusto personal del autor y por aproximación al nivel del texto. Algunas de ellas serían la continuación natural de estas lecciones.

Gracias, ánimo y que la Divina Providencia nos conserve a todos el buen humor, que buena falta nos hace.

Madrid, Otoño de 1993

Ireneo Peral Alonso

NOTA A LA SEGUNDA EDICION.

He recibido gran número de sugerencias y comentarios positivos al texto por parte de colegas de diversas universidades españolas. A todos mi agradecimiento. Me ha alegrado saber que el esfuerzo realizado ha servido para algo y ha sido un acicate para hacer una corrección de erratas exhaustiva.

Especial gratitud merecen los profesores Calsina, de la Universidad Autónoma de Barcelona, García Azorero y Walias, de la Universidad Autónoma de Madrid, quienes separada y generosamente me han hecho llegar las erratas detectadas por ellos.

Razones comerciales, supongo unido al cambio de propiedad, llevaron a que la Addison-Wesley descatalogara el libro. Esto me permite ofrecer desde mi página web el texto para beneficio de todos los lectores del mundo hispanohablante.

Por último avisar que no hay cambios en el contenido, se ha tratado solamente de corregir las erratas advertidas, aclarar alguna frase y añadir media docena de nuevos ejercicios.

Madrid, Septiembre de 2004

Ireneo Peral Alonso

CAPITULO 1

LOS EJEMPLOS CLASICOS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE LA FISICA MATEMATICA

Introducción

Este capítulo pretende motivar el privilegio que se concede a determinadas *ecuaciones en derivadas parciales* al estudiarlas de manera preferente.

Una buena razón para estudiar estos tipos de *ecuaciones en derivadas parciales* es que, por una parte, son modelos muy aproximados de fenómenos físicos básicos y por otra, que son el inicio de la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales, inicio común con otras muchas disciplinas de la Física y de las Matemáticas.

La mayoría del contenido de este capítulo fue generado a fines del siglo XVIII y comienzos del XIX y lleva asociados los nombres de los matemáticos más eminentes de este periodo histórico. En esta época puede apreciarse que las fronteras de las Matemáticas y de la Física Matemática eran aún más difusas que en la actualidad y los progresos en un área lo eran en la otra.

Ecuaciones, métodos y teoremas llevan los nombres de sus descubridores: Euler, Bernouilli, Fourier, Gauss, Riemann, Green, Laplace, Poisson, Dirichlet y Lagrange, entre otros, son los protagonistas de esta Historia.

Recomendamos la lectura de los capítulos dedicados a Ecuaciones en Derivadas Parciales del libro *M. Kline, "El Pensamiento Matemático desde los tiempos antiguos a los modernos" Alianza Editorial, 1992*, para que el lector amplíe su perspectiva histórica.

La lectura del presente capítulo debe servir para observar el proceso de modelación de fenómenos físicos en ejemplos clásicos y no excesivamente complicados, mediante *ecuaciones*. Por su importancia el estudio de estos ejemplos ha motivado la construcción de teorías matemáticas enteras.

Comenzaremos por elaborar la forma de medir "*variaciones de magnitudes*" en varias dimensiones: teorema de Gauss.

Una vez hecho este estudio se introducirán los modelos que dan lugar a las tres ecuaciones siguientes:

- (1) $u_t = u_{xx}$, *ecuación del calor*,
- (2) $u_{tt} = u_{xx}$, *ecuación de ondas*,
- (3) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, *ecuación de Laplace*.

A estos ejemplos y a variantes de ellos estará dirigida nuestra atención en adelante.

Puede parecer poco ambicioso este proyecto, dedicar un curso a *unos pocos ejemplos*. Pero hay que decir que el estudio profundo de estos tres ejemplos tan sencillos en apariencia, ha dado las ideas suficientes para poder abordar problemas mucho más generales y complicados. Muchas ideas están en estos ejemplos y conocerlas bien supone la posibilidad de explorar otros modelos más complicados de forma razonablemente asequible.

En esta dirección invitamos al lector a acompañarnos en este estudio y a observar también lo poderoso que resulta el lenguaje matemático. Una misma ecuación puede describir realidades físicas diversas como se verá en las siguientes secciones.

1.1.- La divergencia.

Una manera de medir variaciones de magnitudes.

Se trata en esta sección de estudiar *las tasas de cambio de magnitudes* en más de una dimensión, es decir, de buscar un sustituto razonable de la derivada, que es el concepto esencial para estudiar variaciones de magnitudes unidimensionales.

Hay muchas posibilidades *a priori* de encontrar esta sustitución de la derivada, pero veremos las que la Física Matemática ha tenido en cuenta por ser más naturales y por tanto más útiles.

Para precisar las ideas consideremos el campo vectorial en \mathbf{R}^3

$$U(x, y, z) = u(x, y, z)\mathbf{e}_1 + v(x, y, z)\mathbf{e}_2 + w(x, y, z)\mathbf{e}_3$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es la base canónica.

Para que resulte más intuitivo supóngase que U es, por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido, es decir, en cada punto $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ se tiene el vector velocidad $U(x, y, z)$. Supongamos que Ω es una parte acotada de \mathbf{R}^3 . ¿Cómo cambia el volumen de Ω al desplazarse por el flujo del fluido? ¿Hay giros reseñables en el movimiento?

Estas cuestiones quedarán claras después de un análisis elemental de la situación mediante el teorema del valor medio. Para ello supondremos regularidad suficiente en la función U de \mathbf{R}^3 en \mathbf{R}^3 que define el campo; más concretamente supondremos $U \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$, es decir U y todas sus derivadas primeras son continuas.

Usando el Teorema de Taylor, escribimos entonces,

$$U(\vec{x} + \vec{h}) = U(\vec{x}) + J_{\vec{x}}U(\vec{x})\vec{h} + o(|\vec{h}|) \quad \text{para} \quad \vec{h} \rightarrow 0;$$

donde $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$ y $J_{\vec{x}}U(\vec{x})$ es el jacobiano de U en el punto \vec{x} . Si $|\vec{h}|$ es pequeño se puede tomar como valor aproximado de $U(\vec{x} + \vec{h})$ el término

$$(1.1.1) \quad U(\vec{x}) + J_{\vec{x}}U(\vec{x})\vec{h}$$

El primer sumando representa una traslación. Analizaremos a continuación el segundo sumando. Escrito en detalle el segundo sumando es,

$$J_{\vec{x}}U(\vec{x})\vec{h} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \equiv A\vec{h}$$

Consideremos la parte simétrica y antisimétrica de A , es decir,

$$D = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{y} \quad R = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

respectivamente; donde A^t denota la matriz traspuesta de A . Así pues, el valor aproximado de $U(\vec{x} + \vec{h})$ dado por (1.1.1) se puede expresar como

$$(1.1.2) \quad U(\vec{x}) + D\vec{h} + R\vec{h}.$$

Además

$$D = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y + v_x) & \frac{1}{2}(u_z + w_x) \\ \frac{1}{2}(u_y + v_x) & v_y & \frac{1}{2}(v_z + w_y) \\ \frac{1}{2}(u_z + w_x) & \frac{1}{2}(v_z + w_y) & w_z \end{pmatrix}$$

con lo que resulta

$$\text{Traza}(D) = u_x + v_y + w_z.$$

La expresión $u_x + v_y + w_z$ se llama *divergencia* del campo U y se nota $\text{div } U$. Por tanto,

$$\text{Traza}(D) = \text{div } U.$$

Si se hace un cambio de coordenadas ortogonal podemos transformar D en una matriz diagonal \tilde{D} . De esta forma,

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

y se tiene que $\text{Traza}\tilde{D} = \text{div } U$, ya que la traza es un invariante en el cambio de coordenadas ortogonal.

Podemos interpretar el sumando $D\vec{h}$ de (1.1.2) como sigue. Sea P_0 un paralelepípedo y $P(t)$ la evolución de P_0 en el tiempo t , es decir, si $\vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^t$ son los lados de $P(t)$ y $\vec{h}_0 = (h_{01}, h_{02}, h_{03})^t$ los lados de P_0 se verifica

$$\begin{cases} \frac{d\vec{h}}{dt}(t) &= D\vec{h}(t) \\ \vec{h}(0) &= \vec{h}_0 \end{cases}$$

Llamando \tilde{h}_i , $i = 1, 2, 3$ los transformados de los h_i por el cambio de coordenadas ortogonal, resulta:

$$\frac{d\tilde{h}_i(t)}{dt} = d_i \tilde{h}_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(P(t)) = \frac{d}{dt} (\tilde{h}_1(t) \tilde{h}_2(t) \tilde{h}_3(t)) = \left(\sum_{i=1}^3 d_i \right) (\tilde{h}_1(t) \tilde{h}_2(t) \tilde{h}_3(t)) = (\text{div } U) \text{Vol}(P(t))$$

Así, tenemos que la divergencia mide la tasa de cambio de volumen asociada al campo U . El argumento expuesto se refiere a la aproximación lineal del campo y da una idea muy intuitiva de lo que significa la divergencia.

La siguiente proposición presupone algún conocimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias, como referencia a tales conocimientos pueden tomarse *E.A. Codrington - N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations", Mc Graw Hill 1955* o, en español, *M.W. Hirsch - S. Smale, "Ecuaciones diferenciales sistemas dinámicos y álgebra lineal", Alianza Universidad, 1983*, entre otros. A continuación se detalla formalmente la anterior interpretación de la divergencia. No obstante, la idea heurística de qué ocurre con la aproximación lineal es suficiente para seguir adelante.

Proposición.

Sea U un campo de vectores en \mathbf{R}^3 , y sea $x(t, x_0)$ la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t, x_0) = U(x(t, x_0)) \\ x(0, x_0) = x_0 \end{cases}$$

Para un t fijado se define la aplicación $\Psi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ por

$$x_0 \in \mathbf{R}^3 \longrightarrow \Psi(x_0) = x(t, x_0)$$

Para $E \subset \mathbf{R}^3$ medible, se denota por $\Psi(E)$ su imagen mediante Ψ . Entonces, se tiene

$$\int_{\Psi(E)} dy = \int_E \exp\left(\int_0^t \operatorname{div} U(x(\tau, x_0)) d\tau\right) dx_0$$

Demostración.

Aplicando la fórmula del cambio de variable se tiene

$$\int_{\Psi(E)} dy = \int_E |\det \Psi_\xi| dx$$

Pero según el teorema de Peano de derivación del flujo respecto al dato inicial se tiene que $\Psi_\xi(\xi_0)$ es la solución del problema matricial,

$$\begin{cases} y'(t) = U_x(x(t, \xi_0))y(t) \\ y(0) = I \end{cases} \quad \text{donde } I \text{ es la matriz identidad } 3 \times 3$$

La fórmula de Jacobi da la expresión para el determinante de una matriz solución de un sistema lineal; en nuestro caso se concluye que

$$\det y(t) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{Traza} U_x(x(\tau, \xi_0)) d\tau\right),$$

para ello basta sustituir en la expresión de la fórmula del cambio de variable. \square

Por otra parte, y para completar nuestro estudio, consideramos la parte anti-simétrica

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_y - v_x) & \frac{1}{2}(u_z - w_x) \\ -\frac{1}{2}(u_y - v_x) & 0 & \frac{1}{2}(v_z - w_y) \\ -\frac{1}{2}(u_z - w_x) & -\frac{1}{2}(v_z - w_y) & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y observamos que el vector $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ es precisamente lo que se define como el *rotacional* del campo U , es decir,

$$\text{rot}U = \vec{\xi}.$$

Si se consideran las soluciones del sistema lineal con coeficientes constantes,

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t) = R\vec{h}(t),$$

módulo un cambio de coordenadas dado por una matriz P de cambio de base, resultan ser

$$\vec{h}(t) = P \begin{pmatrix} \cos|\xi|t & \text{sen}|\xi|t & 0 \\ -\text{sen}|\xi|t & \cos|\xi|t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{h}(0)$$

que representa una rotación en \mathbf{R}^3 , donde $|\xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2}$. Se sugiere al lector como ejercicio comprobar todos los extremos del cálculo anterior. Salvo detalles bastante elementales de algebra lineal se ha establecido el siguiente resultado:

"Un campo de vectores continuamente diferenciable en \mathbf{R}^3 se descompone localmente en una traslación, una dilatación y un giro".

Como se ve la divergencia aparece de manera natural cuando se intenta medir la variación de volumen que produce un campo; el rotacional da la parte del campo que produce giros, de ahí su nombre.

Al final del capítulo se proponen algunos ejercicios de cálculo con la divergencia y el rotacional.

Establecemos ahora dos resultados útiles de cálculo vectorial y que son los primeros ejemplos de como encontrar solución de ecuaciones en derivadas parciales.

1.1.1. Teorema.

Sea \vec{F} un campo de vectores en \mathbf{R}^3 , es decir,

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3))$$

Suponemos que,

- (1) $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$,
- (2) $\text{div}\vec{F} = 0$.

Entonces existe \vec{G} tal que $\vec{F} = \text{rot}\vec{G}$

Demostración.

Para que se verifique el teorema se ha de tener

$$(1.1.3) \quad \begin{cases} F_1 = G_{3x_2} - G_{2x_3} \\ F_2 = G_{1x_3} - G_{3x_1} \\ F_3 = G_{2x_1} - G_{1x_2} \end{cases}$$

Elegimos, por ejemplo, $G_3 \equiv 0$, con lo cual (1.1.3) se convierte en

$$(1.1.4) \quad \begin{cases} F_1 = -G_{2x_3} \\ F_2 = G_{1x_3} \\ F_3 = G_{2x_1} - G_{1x_2} \end{cases}$$

que es un sistema aparentemente sobredeterminado pues hay dos incógnitas y tres ecuaciones; es aquí donde entra en juego la condición 2), es decir, $\text{div}\vec{F} = 0$. En efecto, de (1.1.4) resulta que

$$(1.1.5) \quad G_1(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_3} F_2(x_1, x_2, t)dt + \alpha(x_1, x_2)$$

donde α es una función regular a determinar. De igual manera se tiene que

$$(1.1.6) \quad G_2(x_1, x_2, x_3) = -\int_0^{x_3} F_1(x_1, x_2, t)dt + \beta(x_1, x_2)$$

Para que se verifique la tercera ecuación de (1.1.4) se ha de tener,

$$(1.1.7) \quad \begin{aligned} F_3(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -\int_0^{x_3} F_{1x_1}(x_1, x_2, t)dt + \beta_{x_1}(x_1, x_2) - \int_0^{x_3} F_{2x_2}(x_1, x_2, t)dt - \alpha_{x_2}(x_1, x_2) = \\ &= \int_0^{x_3} F_{3x_3}(x_1, x_2, t)dt + (\beta_{x_1}(x_1, x_2) - \alpha_{x_2}(x_1, x_2)) = \\ &= F_3(x_1, x_2, x_3) - F_3(x_1, x_2, 0) + (\beta_{x_1}(x_1, x_2) - \alpha_{x_2}(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

después de haber aplicado que $\text{div}\vec{F} = 0$. Pero de (1.1.7) resulta que

$$F_3(x_1, x_2, 0) = \beta_{x_1}(x_1, x_2) - \alpha_{x_2}(x_1, x_2),$$

suponiendo, por ejemplo, $\beta \equiv 0$, se tiene

$$\alpha(x_1, x_2) = -\int_0^{x_2} F_3(x_1, s, 0)ds,$$

de manera que el campo \vec{G} de componentes

$$\begin{cases} G_1(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_3} F_2(x_1, x_2, t) dt - \int_0^{x_2} F_3(x_1, s, 0) ds \\ G_2(x_1, x_2, x_3) = - \int_0^{x_3} F_1(x_1, x_2, t) dt \\ G_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases}$$

es uno de los infinitos campos que satisfacen $\vec{F} = \text{rot}\vec{G}$ \square

Observación. En (1.1.3) tenemos un sistema de ecuaciones que involucran derivadas parciales. Lo que hemos hecho en el teorema anterior es calcular soluciones de un *sistema de ecuaciones en derivadas parciales*. Sirva como primer ejemplo de lo que se trata en los capítulos que siguen.

El resultado que se presenta a continuación fue formulado por primera vez por el eminente físico y matemático franco-italiano Lagrange.

Como es habitual en los textos de Cálculo el *gradiente* de una función derivable f será denotado por ∇f , y significa asociar a cada punto el vector cuyas coordenadas son las derivadas parciales de f , es decir,

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \right)$$

1.1.2. Teorema.

Sea \vec{F} un campo de vectores de clase uno en \mathbf{R}^3 tal que $\text{rot}\vec{F} = 0$.

Entonces existe $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^1(\mathbf{R}^3)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$, es decir,

$$(1.1.8) \quad F_1 = f_{x_1}, \quad F_2 = f_{x_2}, \quad F_3 = f_{x_3}$$

Demostración.

De nuevo la condición $\text{rot}\vec{F} = 0$ hará que el sistema (1.1.8), que es sobredeterminado, sea compatible.

En efecto, que $\text{rot}\vec{F} = 0$ significa

$$(1.1.9) \quad F_{1x_2} = F_{2x_1}, \quad F_{1x_3} = F_{3x_1}, \quad F_{3x_2} = F_{2x_3}.$$

De otro lado, de haber solución de (1.1.8), se ha de verificar

$$(1.1.10) \quad f(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} F_1(s, x_2, x_3) ds + \alpha(x_2, x_3)$$

Para que se verifique la segunda ecuación en (1.1.8) hemos de tener

$$\begin{aligned} F_2(x_1, x_2, x_3) &= f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} F_{1x_2}(s, x_2, x_3) ds + \alpha_{x_2}(x_2, x_3) = \\ &= \int_0^{x_1} F_{2x_1}(s, x_2, x_3) ds + \alpha_{x_2}(x_2, x_3) = F_2(x_1, x_2, x_3) - F_2(0, x_2, x_3) + \alpha_{x_2}(x_2, x_3) \end{aligned}$$

después de haber aplicado (1.1.9). Es decir,

$$\alpha(x_2, x_3) = \int_0^{x_2} F_2(0, t, x_3) dt + \beta(x_3).$$

De esta forma se tiene que (1.1.10) da

$$(1.1.11) \quad f(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} F_1(s, x_2, x_3) ds + \int_0^{x_2} F_2(0, t, x_3) dt + \beta(x_3),$$

que verifica las dos primeras ecuaciones de (1.1.8), cualquiera que sea $\beta(x_3)$.

Por último determinaremos β para que se satisfaga la tercera ecuación de (1.1.8).

Aplicando de nuevo (1.1.9) se tiene que,

$$\begin{aligned} F_3(x_1, x_2, x_3) &= f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \int_0^{x_1} F_{1x_3}(s, x_2, x_3) ds + \int_0^{x_2} F_{2x_3}(0, t, x_3) dt + \beta'(x_3) = \\ &= \int_0^{x_1} F_{3x_1}(s, x_2, x_3) ds + \int_0^{x_2} F_{3x_2}(0, t, x_3) dt + \beta'(x_3) = \\ &= F_3(x_1, x_2, x_3) - F_3(0, x_2, x_3) + F_3(0, x_2, x_3) - F_3(0, 0, x_3) + \beta'(x_3), \end{aligned}$$

de donde

$$\beta'(x_3) = F_3(0, 0, x_3).$$

En resumen, tenemos como solución

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} F_1(s, x_2, x_3) ds + \int_0^{x_2} F_2(0, t, x_3) dt + \int_0^{x_3} F_3(0, 0, u) du + K,$$

donde K es una constante arbitraria. \square

A la función f obtenida en el teorema anterior, se le llama *función potencial* para el campo \vec{F} .

De otra parte son muy fáciles de comprobar las igualdades

$$\begin{aligned} (1) \quad & \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{G}) = 0 \\ (2) \quad & \operatorname{rot}(\nabla f) = 0 \end{aligned}$$

que son los recíprocos de los teoremas anteriores.

Los campos gradientes de potenciales se suelen llamar campos conservativos. Se justifica el nombre en el sentido que para el sistema dinámico dado por

$$(1.1.12) \quad mx''(t) = -\nabla f(x(t))$$

se tiene la conservación de energía en el tiempo. En efecto, si se considera la energía definida por

$$(1.1.13) \quad E(t) = \frac{m}{2}[x'(t)]^2 + f(x(t))$$

se verifica que

$$E(t) = E(0),$$

lo que se comprueba derivando respecto de t en (1.1.13) y utilizando (1.1.12).

1.2.- El teorema de la divergencia de Gauss.

En el apartado (1.1) hemos indicado como la divergencia mide la tasa de cambio del volumen en el modelo del campo de velocidades de un fluido.

Gauss en uno de sus muchos y grandes teoremas estableció algo mucho más preciso y que constituye el contenido de esta sección: *el teorema de la divergencia*.

Para una función F definida en la recta real y con derivada continua, es bien conocido que

$$(1.2.1) \quad F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

La anterior afirmación constituye el *teorema fundamental del cálculo*. También se puede leer el resultado como sigue: *La variación total de F en $[a, b]$ es igual a la integral de la tasa de variación, $F'(x)$.*

En dimensión uno $F'(x)$ es la divergencia y entonces (1.2.1) expresa que la cantidad de F que entra o sale, dependiendo del signo, es igual a la integral de la *divergencia*. Con esta lectura del teorema fundamental del cálculo se puede entrever la posibilidad de extender (1.2.1) a más dimensiones.

Para fijar las ideas, sea $n = 2$ y consideremos

$$\vec{F} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

función continua y con derivadas primeras continuas.

Podemos escribir en coordenadas $\vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Sea R la región

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \phi_1(x) < y < \phi_2(x), x \in (a, b), \phi_1(a) = \phi_2(a), \phi_1(b) = \phi_2(b)\},$$

donde se supone que ϕ_1 y ϕ_2 tienen derivada primera continua.

Calculemos ahora

$$(1.2.3) \quad \int_R \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx = \int_a^b (f_2(x, \phi_2(x)) - f_2(x, \phi_1(x))) dx.$$

Sea \vec{n} la normal exterior de la frontera de ∂R , es decir, si

$$\vec{n} = \begin{cases} (-\phi_2'(x), 1) & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ (\phi_1'(x), -1) & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\}; \end{cases}$$

normalizando,

$$\vec{n} = \frac{\tilde{n}}{\|\tilde{n}\|}.$$

Entonces si $\vec{n} = (n_1, n_2)$, se tiene

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} \int_{\partial R} f_2 n_2 d\sigma(x) &= \int_{\Gamma_1} f_2 n_2 d\sigma(x) + \int_{\Gamma_2} f_2 n_2 d\sigma(x) = \\ &= \int_a^b -\frac{f_2(x, \phi_1(x))}{\sqrt{1 + (\phi_1')^2(x)}} (\sqrt{1 + (\phi_1')^2(x)} dx) + \int_a^b \frac{f_2(x, \phi_2(x))}{\sqrt{1 + (\phi_2')^2(x)}} (\sqrt{1 + (\phi_2')^2(x)} dx) = \\ &= \int_a^b (f_2(x, \phi_2(x)) - f_2(x, \phi_1(x))) dx \end{aligned}$$

De (1.2.3) y (1.2.4) resulta

$$(1.2.5) \quad \int_R \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx = \int_{\partial R} f_2 n_2 d\sigma$$

Supongamos que R también se puede expresar como

$$(1.2.6) \quad R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \psi_1(y) < x < \psi_2(y), y \in [c, d], \psi_1(c) = \psi_2(c), \psi_1(d) = \psi_2(d)\}$$

Cálculos análogos a los anteriores prueban que

$$(1.2.7) \quad \int_R \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy = \int_{\partial R} f_1 n_1 d\sigma$$

(basta repetir los cálculos con la definición de R dada en (1.2.6)).

Por tanto de (1.2.5) y de (1.2.7) se tiene

$$(1.2.8) \quad \int_R \operatorname{div} \vec{F} dx dy = \int_{\partial R} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

donde \langle, \rangle denota el producto escalar en \mathbf{R}^2 , \vec{n} la normal y $d\sigma$ el elemento de longitud en ∂R , frontera de R .

La idea intuitiva es que la *variación de \vec{F}* en R es igual a la *cantidad de \vec{F}* que entra o sale a través de ∂R . Esta es precisamente la observación de Gauss, concordante con la experiencia física, y que es la versión del *teorema de la divergencia* en \mathbf{R}^2 . El segundo término en (1.2.8), se llama *flujo del campo \vec{F} a través de ∂R* .

Tanto el flujo como la divergencia tienen perfecto sentido en dimensiones mayores; nos proponemos dar condiciones suficientes sobre los dominios $R \subset \mathbf{R}^N$, de forma que la expresión (1.2.8) sea válida.

El caso más sencillo para el que se tiene la igualdad (1.2.8) es el siguiente:

Consideremos $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ campo de vectores en \mathbf{R}^N y supongamos que

- (1) f_i tiene derivadas primeras continuas para $i = 1, \dots, n$.
- (2) Existe alguna bola B cerrada tal que $f_i(x) = 0$ si $x \notin B$, para $i = 1, \dots, n$.

Entonces claramente se tiene que

$$(1.2.9) \quad \int_{\mathbf{R}^N} \operatorname{div} \vec{F} dx = 0,$$

pues

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} dx_i \right) d\bar{x} = 0,$$

dado que f_i se anula fuera de una bola.

Así (1.2.9) establece el teorema de la divergencia en este caso para el campo \vec{F} en \mathbf{R}^N . También tenemos de manera obvia que en las hipótesis anteriores si $B \subset 2B$,

$$\int_{\partial(2B)} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = 0.$$

La segunda observación elemental que vamos a utilizar posteriormente para hacer una demostración con cierta generalidad, es la siguiente. Consideremos $U \subset \mathbf{R}^{n-1}$ un abierto acotado y $\phi \in \mathcal{C}^1(U)$, con $\phi(\bar{x}) > 0$ cualquiera que sea $\bar{x} \in U$. Llamamos S a la gráfica de ϕ ; es decir,

$$S = \{(\bar{x}, \phi(\bar{x})) : \bar{x} \in U\}$$

Calculamos ν , normal a S con la componente $\nu_n(\bar{x}) > 0$, resultando

$$(1.2.10) \quad \nu = (-\phi_{x_1}, \dots, -\phi_{x_{n-1}}, 1) \frac{1}{(1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Consideremos ahora el conjunto "cilíndrico" C , definido por:

$$C = \{(\bar{x}, x_n) \in U \times \mathbf{R} : 0 \leq x_n \leq \phi(\bar{x})\}.$$

Si se toma f con derivadas primeras continuas en C , tal que $f(\bar{x}, 0) = 0$, se tiene

$$(1.2.11) \quad \int_C \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx = \int_S f \nu_n d\sigma,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área de S .

Probar (1.2.11) resulta inmediato del teorema fundamental del cálculo, (1.2.1), y de reinterpretar correctamente el resultado. En efecto,

$$(1.2.12) \quad \begin{aligned} \int_C \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx &= \int_U \left(\int_0^{\phi(\bar{x})} \frac{\partial f(\bar{x}, x_n)}{\partial x_n} dx_n \right) d\bar{x} = \int_U f(\bar{x}, \phi(\bar{x})) d\bar{x} = \\ &= \int_U f(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \frac{1}{(1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}} d\bar{x} \end{aligned}$$

Como

$$\nu_n(\bar{x}) = \frac{1}{(1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

y por la definición de integral de superficie en S , (1.2.12) puede leerse como sigue

$$\int_U f(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \nu_n (1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}} d\bar{x} = \int_S f \nu_n d\sigma,$$

lo que prueba (1.2.11).

Las dos observaciones anteriores van a permitir demostrar *un teorema de la divergencia de tipo local* en dominios con algunas condiciones que se precisarán rápidamente y que llamaremos "regulares", es decir, se probará:

Dado un dominio regular, existen entornos de sus puntos, tales que la identidad (1.2.8) se verifica para campos continuamente diferenciables soportados en dichos entornos.

Soportado en un entorno significa que se hacen cero fuera de tal entorno. Se define el *soporte* de una función f como el cierre de los puntos tales que $f(x) \neq 0$, es decir,

$$\text{sup}(f) = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Hay que explicar ahora lo que entenderemos por un dominio regular y lo que se entiende por entorno de los puntos del dominio.

Dado $D \subset \mathbf{R}^N$, diremos que es un *dominio* si es abierto y conexo; ∂D denotará su frontera.

1.2.1. Definición.

Un dominio acotado $D \subset \mathbf{R}^N$ se dice que es regular si para cada $x_0 \in \partial D$ existe un entorno U de x_0 en \mathbf{R}^N y una función

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

continuamente diferenciable, de forma que

- (1) $\nabla\varphi(x) \neq 0$ si $x \in U$,
- (2) $\partial D \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$,
- (3) $D \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$.

Lo que establece la definición anterior es que un dominio regular tiene su frontera definida localmente por ceros de funciones continuamente diferenciables, es decir, por trozos de superficies diferenciables en \mathbf{R}^N definidas implícitamente.

Sea D un dominio regular y sea $x \in \partial D$. Un vector normal a ∂D en x viene dado por $n = \nabla\varphi(x)$, donde φ es una función que define ∂D en el entorno de x como en la definición (1.2.1). Diremos que n es *normal exterior* a ∂D en x si para $\delta > 0$ suficientemente pequeño y $0 < t < \delta$ se verifican

$$\begin{aligned} x - tn &\in D, \\ x + tn &\in \mathbf{R}^N - D. \end{aligned}$$

Para terminar, denotaremos por $\nu(x)$ la normal exterior unitaria en x a ∂D . Si D es regular, entonces $\nu(x)$ es un campo continuo en ∂D . Compruebe el lector este extremo, pero sigamos ahora con la trama argumental del Teorema de la Divergencia, cuyo episodio siguiente es la demostración de la anunciada versión local. Como antes se ha indicado, utilizaremos $\langle x, y \rangle$ para denotar el producto escalar en \mathbf{R}^N .

1.2.2. Lema.

Sea D dominio regular en \mathbf{R}^N . Entonces dado $x_0 \in \bar{D} = D \cup \partial D$ existe un entorno U de x_0 tal que para todo campo continuamente diferenciable, \vec{F} , soportado en U , se verifica

$$(1.2.13.) \quad \int_D \operatorname{div} \vec{F}(x) dx = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \nu \rangle d\sigma$$

Demostración.

Si $x_0 \in D$, entonces podemos encontrar un $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x - x_0| < r\} \subset D.$$

Todo campo \vec{F} continuamente diferenciable en D , soportado en $B(x_0, r)$, extendiéndole por cero fuera de la bola, se convierte en un campo diferenciable y con soporte compacto, \tilde{F} en \mathbf{R}^N . Por (1.2.9) para tal campo se tiene

$$\int_{\mathbf{R}^N} \operatorname{div} \tilde{F} dx = \int_D \operatorname{div} \vec{F} dx = 0 = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \nu \rangle d\sigma$$

Es decir, si $x_0 \in D$ se tiene demostrado el lema.

Supongamos ahora que $x_0 \in \partial D$. La estrategia es probar que fijada una dirección coordenada, $i = 1, \dots, n$, se puede construir un entorno U_i de x_0 en la topología relativa a la de \mathbf{R}^N en \bar{D} , tal que si un campo \vec{F} continuamente diferenciable en D , está soportado en U_i , entonces

$$(1.2.14) \quad \int_{\partial D} F_i \nu_i d\sigma = \int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx$$

siendo F_i la coordenada i -ésima de \vec{F} y ν_i la correspondiente componente de la normal exterior a ∂D .

De esta forma considerando

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i$$

se tendrá probado el lema.

Probaremos para $i = n$, tratándose de igual manera el resto de las coordenadas. Una observación adicional es necesaria. Si sometemos a giros y traslaciones al dominio D los dos miembros en (1.2.14) son invariantes. Por tanto, podemos suponer que la coordenada n -ésima de x_0 es positiva y que $\nu_n(x_0) > 0$.

Como, por hipótesis, D es regular existe W entorno de x_0 y φ continuamente diferenciable tal que $\nabla \varphi(x_0) \neq 0$ y

$$\partial D \cap W = \{x \in W \mid \varphi(x) = 0\},$$

$$D \cap W = \{x \in W \mid \varphi(x) < 0\}.$$

Por el teorema de funciones implícitas encontramos un abierto $V \subset \mathbf{R}^{n-1}$ entorno de \bar{x}_0 , proyección de x_0 sobre el hiperplano coordenado ortogonal al eje Ox_n ; y existe

$$\psi : V \longrightarrow \mathbf{R},$$

$\psi \in \mathcal{C}^1(V)$ y tal que $\varphi(\bar{x}, \psi(\bar{x})) = 0$ para $\bar{x} \in V$. Haciendo V pequeño si es preciso se tiene por continuidad que $\psi(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \in V$ dado que, por hipótesis $x_{0n} = \psi(\bar{x}_0) > 0$. Para V elegido verificando lo anterior consideramos la parte de ∂D dada por el grafo de ψ , es decir,

$$S = \{(\bar{x}, \psi(\bar{x})) \mid \bar{x} \in V\}$$

Además, como $\nu_n(x_0) > 0$, se tiene, en particular

$$\frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_n} > 0,$$

y por tanto, existe $\delta > 0$ tal que si $|\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta, |x_{0n} - x_n| < \delta$, entonces

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}, x_n)}{\partial x_n} > 0.$$

Se toma δ suficientemente pequeño para que $B = \{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta\} \subset V$. Llamemos

$$R = \{(\bar{x}, x_n) : |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta, |x_n - x_{0n}| < \delta\}$$

y definamos el intervalo $I_{\bar{x}} = \{x_n : (\bar{x}, x_n) \in R\}$, entonces, en particular, la función

$$g_{\bar{x}}(x_n) = \varphi(\bar{x}, x_n)$$

es creciente en $I_{\bar{x}}$. Además, para cada \bar{x} el intervalo $I_{\bar{x}}$ contiene el valor $\psi(\bar{x})$, que es donde $\varphi(\bar{x}, \psi(\bar{x})) = 0$. Como $\varphi(\bar{x}, \cdot)$ es creciente como función de x_n en $I_{\bar{x}}$, resulta que

$$D \cap R = \{(\bar{x}, x_n) \in R : x_n < \psi(\bar{x})\}.$$

Dicho de otra manera, $D \cap R$ está contenido en un conjunto cilíndrico como el utilizado en (1.2.11) y así se prueba (1.2.14) para los campos continuamente diferenciables en D soportados en $D \cap R$. \square

Queda ahora por globalizar el resultado y así obtener el teorema de Gauss.

1.2.3. Teorema.

Sea D dominio regular y $\vec{F} \in C^1(\bar{D})$ un campo de vectores. Entonces

$$\int_{\partial D} \langle \vec{F}, \nu \rangle d\sigma = \int_D \text{div } \vec{F} dx$$

Demostración.

Para cada $x \in \bar{D} = \partial D \cup D$ consideremos U_x el entorno de x que da el Lema (1.2.2). Así $\{U_x : x \in \bar{D}\}$ es un cubrimiento por abiertos (en la topología relativa) del compacto \bar{D} ; por tanto, se puede obtener un subrecubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_r\}$ de \bar{D} .

Supongamos que podemos construir una familia finita de funciones

$$\{\phi_1, \dots, \phi_r\}, \phi_i \in C^\infty(\bar{D}), i = 1, \dots, r$$

tales que

- (1) $\phi_i \geq 0$,
- (2) $\text{supp}(\phi_i) \subset U_i$ (en particular $\phi_i = 0$ fuera de U_i),
- (3) $\sum_{i=1}^r \phi_i(x) = 1$ si $x \in \bar{D}$.

Las familias de funciones regulares que verifican 1), 2) y 3) reciben el nombre de *particiones de la unidad subordinadas al recubrimiento* $\{U_1, \dots, U_r\}$.

Sea $\vec{F} \in C^1(\bar{D})$ un campo; si consideramos la partición de la unidad $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$, tenemos

$$(1.2.15) \quad \vec{F}(x) = \sum_{i=1}^r \phi_i(x) \vec{F}(x) \equiv \sum_{i=1}^r \vec{F}_i(x).$$

Ahora $\vec{F}_i(x) = \phi_i(x)\vec{F}(x)$ está soportado en U_{x_i} y por construcción se tiene:

$$\int_D \operatorname{div} \vec{F}_i(x) dx = \int_{\partial D} \langle \vec{F}_i, \nu \rangle d\sigma.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div} \vec{F}(x) dx &= \sum_{i=1}^r \int_D \operatorname{div} \vec{F}_i(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{\partial D} \langle \vec{F}_i, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \nu \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Módulo la construcción de particiones de la unidad hemos probado el teorema. \square

Probar que existen particiones de la unidad exige un poco más de trabajo. Advertimos, no obstante, que puede seguirse la lectura admitiendo este resultado.

Para conveniencia del lector ofrecemos la prueba justamente en el contexto que necesitamos, aunque el resultado es cierto en un marco mucho más general.

1.2.4. Lema.

Sea $\bar{D} \subset \mathbf{R}^N$ un compacto. Sean $\{U_1, \dots, U_r\}$ abiertos de \mathbf{R}^N tales que

$$\bigcup_{i=1}^r U_i \supset \bar{D}.$$

Entonces existen $\phi_1, \dots, \phi_r \in \mathcal{C}^\infty \mathbf{R}^N$ verificando

- (1) $\phi_i \geq 0$,
- (2) $\operatorname{sop}(\phi_i) \subset U_i$,
- (3) $\sum_{i=1}^r \phi_i(x) \leq 1$ si $x \in \mathbf{R}^N$ y $\sum_{i=1}^r \phi_i(x) = 1$ si $x \in \bar{D}$.

Demostración.

Sea $\{K_1, \dots, K_r\}$ familia de compactos verificando

- (1) $K_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, r$;
- (2) $\bigcup_{i=1}^r K_i \supset \bar{D}$.

La primera observación es que se puede construir para cada $i = 1, \dots, r$ una función ϕ_i^* tal que $0 \leq \phi_i^*(x) \leq 1$, $x \in \mathbf{R}^N$, $\operatorname{sop} \phi_i^* \subset U_i$ y $\phi_i^*(x) = 1$ sobre un entorno de K_i .

En efecto, sea V_i abierto tal que

$$K_i \subset V_i \subset U_i$$

y sea

$$\rho_i = \inf\{|x - y| : x \in K_i, y \in \mathbf{R}^N - V_i\}.$$

Evidentemente ρ_i es positivo. Sea $\varepsilon < \frac{\rho_i}{2}$ y sea

$$K_i(\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}^N : |x - y| \leq \varepsilon, x \in K_i\}.$$

De esta manera $K_i(\varepsilon) \cap (\mathbf{R}^N - V_i) = \emptyset$ y $K_i(\varepsilon)$ es compacto. Tomamos ahora la función

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{(|x|^2 - 1)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

El soporte de ψ^* es exactamente la bola $|x| \leq 1$ y además $\psi^* \geq 0$. Por otro lado, la función de una variable real

$$\alpha(s) = \begin{cases} \exp \frac{1}{(|s|^2 - 1)}, & |s| < 1; \\ 0, & |s| \geq 1. \end{cases}$$

es indefinidamente derivable en \mathbf{R} . (Compruébese este extremo). Como consecuencia $\psi^* \in \mathcal{C}^\infty \mathbf{R}^N$.

Sea

$$c = \int_{\mathbf{R}^N} \psi^*(x) dx$$

y consideremos $\psi(x) = \frac{1}{c} \psi^*(x)$.

Definimos

$$\psi_\delta(x) = \delta^{-n} \psi\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Así se tiene

- (1) $\psi_\delta \in \mathcal{C}^\infty \mathbf{R}^N$,
- (2) $\psi_\delta \geq 0$ y $\text{supp}(\psi_\delta) = \{x : |x| \leq \delta\}$,
- (3) $\int_{\mathbf{R}^N} \psi_\delta(x) dx = 1$.

En particular, si tomamos $\delta < \frac{\rho_i}{2}$ se tiene que

$$\phi_i^*(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \chi_{K_i}(y) \psi_\delta(x - y) dy$$

verifica la observación hecha, siendo $\chi_{K_i} = 1$ si $x \in K_i$ y $\chi_{K_i} = 0$ si $x \notin K_i$. Construida para cada $i = 1, \dots, r$ la función ϕ_i^* es claro que definiendo:

- (1) $\phi_1(x) = \phi_1^*(x)$
- (2) $\phi_i(x) = \phi_i^*(x)(1 - \phi_1^*(x)) \dots (1 - \phi_{i-1}^*(x))$ para $1 < i \leq r$;

verifican los requisitos 1), 2) y 3).

En efecto, es evidente que $\text{sop}(\phi_i) \subset U_i$, ya que $\text{sop}(\phi_i) \subset \text{sop}(\phi_i^*)$.

Además

$$\sum_{i=1}^r \phi_i(x) = 1 - (1 - \phi_1^*(x)) \dots (1 - \phi_r^*(x)),$$

por tanto,

$$0 \leq \sum_{i=1}^r \phi_i(x) \leq 1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbf{R}^N$$

y

$$\sum_{i=1}^r \phi_i(x) = 1$$

sobre un entorno de D . \square

1.3.- Ecuaciones de difusión. La ecuación del calor.

Consideramos un medio físico cuya densidad es $\rho(x)$ que está sometido a fuentes de calor $F(x, t)$. Aquí se tiene que $(x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, siendo x *el espacio* y t *el tiempo*.

Denotaremos por $u(x, t)$ la temperatura que hay en el instante t en el punto x . Como es sabido el vector

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$$

está dirigido en el sentido de la temperatura creciente. De otro lado, las experiencias más cotidianas muestran que el flujo de calor va de *lo caliente* a *lo frío*; es decir, de mayor temperatura a menor temperatura. La *ley de Fourier* establece que *el flujo térmico es proporcional al gradiente de las temperaturas*, por lo que dicho flujo puede escribirse como

$$J = -\kappa(x)\nabla u, \quad \kappa(x) \geq 0$$

donde $\kappa(x)$ es una característica del medio llamada *conductividad térmica*.

Se trata de encontrar un modelo que rijan la difusión del calor en la hipótesis de que las variaciones de temperatura son moderadas. De esta forma es razonable postular que las constantes físicas no dependen de la temperatura.

Es bien sabido que, por ejemplo, la densidad varía con la temperatura, de manera que para suponerla constante la variación de la temperatura debe ser no muy grande. Para altas temperaturas y grandes variaciones de la misma, la conductividad puede depender de la temperatura y de sus variaciones, esta situación queda excluida en nuestro planteamiento inicial, es decir, tomamos como exacta la ley de Fourier que lleva implícita la independencia de la conductividad respecto a la temperatura.

Sea D un dominio dentro del medio físico, que supondremos regular, y sea ∂D su frontera.

La ley de Fourier implica que la cantidad de calor que se intercambia entre D y su complementario a través de su frontera ∂D en el tiempo t es

$$Q_1 = \int_{\partial D} \langle \kappa \nabla u, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial D} \kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma;$$

donde ν designa la normal exterior y $d\sigma$ el elemento de área en ∂D . Aplicando el teorema de la divergencia se tiene

$$Q_1 = \int_D \operatorname{div}(\kappa(x) \nabla u) dx.$$

Por otro lado las fuentes de calor generan en D una cantidad de calor

$$Q_2 = \int_D F(x, t) dx$$

en el instante t .

La variación de la temperatura respecto al tiempo en cada punto x es dada por

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Por tanto, en un intervalo de Δt segundos la variación de la cantidad de calor en D se puede aproximar por

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_D c(x) \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \right) dt,$$

donde $c(x)$ es el *calor específico* del medio.

Para que haya equilibrio debe ser

$$\int_t^{t+\Delta t} (Q_1 + Q_2) dt = Q_3,$$

de donde resulta que

$$(1.3.0) \quad \int_t^{t+\Delta t} \int_D [\operatorname{div}(\kappa(x) \nabla u(x, t)) + F(x, t) - c(x) \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}] dx dt = 0.$$

Como D y Δt son arbitrarios, en los puntos de continuidad del integrando, se tiene

$$(1.3.1) \quad \operatorname{div}(\kappa(x) \nabla u(x, t)) + F(x, t) - c(x) \rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0,$$

que es la *ecuación del calor*.

Obsérvese que (1.3.1) se obtiene a partir de (1.3.0). En efecto, (1.3.0) se verifica en particular para $D = B(x, r)$ y $\Delta t = r$, con $r > 0$ suficientemente pequeño. Entonces basta usar el siguiente resultado de cálculo, esencialmente debido a Cauchy.

Proposición. Si f es una función continua se verifica que

$$f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} f(y) dy$$

donde $|B_r(x_0)|$ designa el volumen de la bola de radio r y centro x_0 , $B_r(x_0)$.

Proponemos al lector como ejercicio la prueba de esta proposición. (En este contexto es un sencillo ejercicio sobre continuidad).

Si suponemos que en (1.3.1) κ , ρ y c son constantes, con un cambio de escala en el espacio y el tiempo se obtiene

$$(1.3.2) \quad u_t - \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = F(x, t).$$

El primer problema que se plantea es si conocida la temperatura en el instante $t = 0$,

$$(1.3.3) \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

se puede predecir la temperatura en el tiempo futuro, es decir, en $t > 0$. Esto significa encontrar una función $u(x, t)$ tal que se verifique (1.3.2) para $x \in \mathbf{R}^3$, $t > 0$ y (1.3.3) si $x \in \mathbf{R}^3$.

Este problema se denomina, *problema de valor inicial* o *problema de Cauchy*, en la terminología acuñada por J. Hadamard.

Se observará que en el problema de Cauchy se supone que el medio físico ocupa todo el espacio y se estudia como evoluciona la temperatura en $t > 0$. En algunas situaciones el problema de Cauchy es una buena aproximación del fenómeno real.

Pero con frecuencia se tiene un medio físico ubicado en una región acotada y relacionada con el exterior a través de su frontera. Dos ejemplos clásicos son:

- (1) Suponer la temperatura fijada sobre la frontera.
- (2) Suponer el medio con un flujo calórico prescrito a través de la frontera.

En el primer caso tendríamos que si D es el dominio ocupado por el medio, las ecuaciones de la conducción del calor serían

$$(P_1) \quad \begin{cases} (1) & u_t - \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = F(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0 \\ (2) & u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D \\ (3) & u(x, t) = \phi(x, t), \quad x \in \partial D, \quad t > 0. \end{cases}$$

Llamaremos a (P_1) problema mixto de valores iniciales y de valores de frontera de tipo *Dirichlet*.

Evidentemente en el segundo caso si se tiene en cuenta que la densidad de flujo, salvo constantes, viene dada por

$$\bar{J} = \langle \nabla u, n \rangle = \frac{\partial u}{\partial n},$$

con n normal a ∂D , el problema resultante es

$$(P_2) \quad \begin{cases} (1) & u_t - \sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i} = F(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0 \\ (2) & u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D \\ (3') & \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \psi(x, t), \quad x \in \partial D, \quad t > 0; \end{cases}$$

que es el problema mixto de valores iniciales y de frontera de *tipo Neumann*. En el caso de que $\psi \equiv 0$ se trata de un sistema térmicamente aislado. Por supuesto con estos modelos se pueden imaginar una infinidad de problemas variando las condiciones en la frontera, tomando parte de la frontera con datos Dirichlet y parte con datos Neumann e incluso suponiendo que D varía con el tiempo. Al menos desde el punto de vista matemático, la limitación a dimensión tres es eliminable, pudiéndose estudiar la ecuación del calor en dimensión n ; es decir,

$$u_t = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + F(x, t).$$

Curiosamente modelos ecológicos de dinámica de poblaciones y modelos de reacciones químicas con difusión hacen que la ecuación en dimensiones distintas de tres sea interesante en las aplicaciones.

Comentarios.

1) En los modelos de reacción-difusión o de dinámica de poblaciones hay algunas observaciones interesantes. En primer lugar como la incógnita aquí representa o bien una concentración, o bien un número de especímenes, es natural la condición *unilateral* $u(x, t) \geq 0$ que, naturalmente, también hay que imponer si estudiamos el comportamiento de temperaturas por la existencia del cero absoluto.

Afortunadamente con esta condición el modelo de la ecuación del calor es como *funciona bien*. Esto se explicará en su momento con detalle.

En los mismos modelos, las situaciones más reales corresponden al caso en que la incógnita es vectorial, dando así lugar a sistemas de ecuaciones. Estos problemas quedan fuera del objetivo que nos proponemos en el estudio que se acomete en esta obra.

También aparecen ecuaciones de la forma

$$(1.3.4) \quad u_t - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = f(x, t, u, \nabla u)$$

que no dependen linealmente de u y de ∇u pues f es una función no necesariamente lineal.

2) Si se suponen grandes variaciones de temperatura la conductividad puede depender de u en unos casos, y de ∇u en otros. En el primer caso se tiene $\kappa \equiv \varphi(u)$; por ejemplo, si $\varphi(u) = |u|^{m-1}$, da lugar a la ecuación

$$u_t = \operatorname{div}(|u|^{m-1} \nabla u).$$

Esta ecuación además de regir la difusión de calor a muy altas temperaturas, como las originadas en reacciones termonucleares, da una buena aproximación a la *difusión de gases en medios porosos*.

En el segundo caso $\kappa \equiv \varphi(\nabla u)$; si $\varphi(\nabla u) = |\nabla u|^{p-2}$ está especialmente estudiado por tener relación con otros fenómenos. La ecuación resultante es

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Estos últimos ejemplos no lineales son mucho más complicados que el caso lineal con coeficientes constantes (1.3.2), el cual no es en absoluto trivial, y no serán considerados en este texto. Sin embargo, hemos querido mencionar estos temas como motivación; comprender bien el caso lineal con coeficientes constantes (1.3.2) permite comprender el caso de coeficientes variables en bastantes casos interesantes por argumentos de continuidad u otros. Los problemas no lineales más simples pueden ser mirados en algunos casos como perturbaciones de problemas lineales.

En resumen, es una buena inversión estudiar la ecuación lineal del calor.

Por último, resaltamos lo anunciado en la introducción: una misma ecuación puede modelar fenómenos aparentemente diferentes.

Decimos aparentemente, pues la modelación matemática nos permite hablar de un único fenómeno: *la difusión*.

1.4.- Ecuaciones estacionarias. Las ecuaciones de Laplace y Poisson.

Es bien conocido que si $f(z)$ es una función analítica en el plano complejo entonces, llamando $u(x, y) = \Re f(x + iy)$, $v(x, y) = \Im f(x + iy)$, partes real e imaginaria, respectivamente de f , se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann; es decir,

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ -u_y = v_x. \end{cases}$$

Por consiguiente, se obtienen las ecuaciones

$$(1.4.0) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ v_{xx} + v_{yy} = 0. \end{cases}$$

En este sentido se dice que u y v son funciones armónicas; es decir, son regulares y verifican cada una la *ecuación de Laplace*.

Como es habitual escribiremos la ecuación de Laplace en \mathbf{R}^2 de la manera siguiente

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

y en general, en \mathbf{R}^N

$$(1.4.1) \quad \Delta_n u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Suprimiremos el subíndice en el *laplaciano* Δ cuando no haya lugar a confusión.

Las soluciones de la ecuación de Laplace en \mathbf{R}^N , $n \neq 2$, no tienen la relación con las funciones de variable compleja que tienen si $n = 2$. No obstante, como se verá en el capítulo correspondiente, tienen todas las propiedades importantes de las funciones analíticas en el plano complejo, que es lo mismo que decir de sus partes real e imaginaria, o sea, de las funciones armónicas de dos variables, a saber: *propiedad de la media*, verificación de los *principios del máximo y de reflexión*, etc.

También llamaremos *funciones armónicas* a las soluciones regulares de (1.4.1)

Si en la ecuación del calor (1.3.2) sin fuentes, $F(x, t) = 0$, buscamos soluciones *estacionarias*; es decir, independientes del tiempo, entonces $u_t = 0$ y de esta manera resulta que tales soluciones verifican $\Delta u = 0$. Es decir, la ecuación de Laplace puede ser interpretada como la ecuación de una conducción de calor estacionaria. Si se supone en (1.3.2) fuentes *estacionarias*, $F(x, t) \equiv F(x)$ y, si se buscan soluciones estacionarias como antes, la ecuación que verificarán es $-\Delta u = F(x)$. Dicha ecuación es conocida como *ecuación de Poisson*. Como se ve la ecuación de Laplace es la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación de Poisson.

Pero la ecuación de Poisson se obtiene también en la electrostática clásica. Si suponemos una distribución de cargas eléctricas $\rho(x)$ en \mathbf{R}^3 , la *ley de Gauss* establece que el campo eléctrico $\vec{E}(x)$ satisface

$$\operatorname{div} \vec{E}(x) = 4\pi\rho(x).$$

Por otra parte, la *ley de Coulomb* establece que el campo eléctrico es un *campo potencial o campo gradiente*, por lo que $\vec{E} = -\nabla u$. Por ejemplo, el potencial para una carga puntual es

$$u_0(x) = \frac{c}{|x|}.$$

Sustituyendo en la ley de Gauss obtenemos la *ecuación del potencial* generado por la distribución de cargas ρ , que resulta ser

$$(1.4.2) \quad -\Delta u(x) = -\operatorname{div} \vec{E}(x) = 4\pi\rho(x).$$

Si se supone $\rho(x) \geq 0$ y se interpreta como una distribución de masas, (1.4.2) es la ecuación del potencial gravitatorio de Newton.

La expresión *ecuación estacionaria* queda clara desde el punto de vista físico con la no dependencia del fenómeno respecto al tiempo; desde el punto de vista matemático podríamos decir, al margen del significado espacial o temporal de las variables, que en las ecuaciones de Poisson y de Laplace no hay ninguna variable *singularizada*, cosa que en la ecuación del calor es diferente: hay una variable respecto de la cual sólo se deriva una vez.

Traduciendo los problemas que hemos expuesto para la ecuación del calor a la ecuación de Poisson en un dominio $D \subset \mathbf{R}^N$, se tienen

$$(P_1) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in D \\ u(x) = \phi(x), & x \in \partial D; \end{cases}$$

que es el problema de Dirichlet y también el problema de Neumann,

$$(P_2) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \psi(x), & x \in \partial D; \end{cases}$$

siendo n la normal a ∂D .

Mirada la ecuación de Poisson como el caso estacionario de la ecuación del calor, (P_1) y (P_2) aparecen como los problemas naturales, pero se puede pensar legítimamente en proponer el problema:

$$(P_3) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in D \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \psi(x), & x \in \partial D \\ u(x) = \phi(x), & x \in \partial D; \end{cases}$$

que sería el candidato a problema de valores iniciales al tratarse de una ecuación de segundo orden (compárese con las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden).

Veremos más adelante que el problema (P_3) en general está sobredeterminado. Esto significa que salvo que ϕ y ψ satisfagan una relación de compatibilidad el problema (P_3) no tiene solución. Sobre este hecho incidiremos en el capítulo dedicado a la

ecuación de Laplace y de Poisson. Sin embargo, el comentario anterior viene a avisar que en las propias ecuaciones en derivadas parciales está encerrada información que hay que desvelar, incluso para saber cuál es el tipo de problema razonable para cada ecuación.

1.5.- Ecuación de la cuerda vibrante.

El estudio de la vibración de la cuerda de un violín es uno de los primeros problemas que se propusieron los físicos y matemáticos de finales del siglo XVIII y comienzos del XIX. Bernoulli, Dirichlet, Euler y Fourier contribuyeron a obtener métodos de solución para el *problema de la cuerda vibrante*; tales métodos han sentado las bases para muchos desarrollos modernos de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Algunos de ellos los estudiaremos en detalle en los capítulos venideros. Ahora centraremos la atención en obtener el modelo matemático de la vibración de una cuerda. Recomendamos al lector la lectura de los capítulos 22 y 28 de la obra de *M. Kline, "El Pensamiento Matemático desde los tiempos antiguos a los modernos", Alianza Editorial 1992*, donde encontrará la historia de éste problema y su proyección en el desarrollo de las Matemáticas.

Comenzaremos por precisar lo que entenderemos como una cuerda, a saber:

Llamaremos cuerda a un medio continuo unidimensional, elástico y que no ofrece resistencia a la flexión.

Supondremos la cuerda colocada en el plano Oxu , y que se la somete a vibraciones transversales, pero dentro de dicho plano, respecto a su posición de equilibrio, que suponemos coincidente con el eje Ox y ocupando precisamente el intervalo $[0, l]$.

La magnitud del desplazamiento de la cuerda en el punto x y en el instante t la designamos por $u(x, t)$. Además nos vamos a limitar a estudiar pequeñas vibraciones, es decir, tales que si $\tan \alpha = \frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial x}$, se tiene que $(\tan \alpha)^2$ es muy pequeño en relación a $\tan \alpha$, de forma que los términos en $(\tan \alpha)^2$ no serán tenidos en cuenta en la deducción.

La tensión en cada punto x y cada instante t se supone dirigida en la dirección de la tangente a la cuerda en el punto x con módulo $T(x, t)$. Esta hipótesis es justamente la falta de resistencia a la flexión. La longitud de un segmento $(a, a + h)$ al deformarse se convierte en

$$s = \int_a^{a+h} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \simeq h,$$

por la hipótesis hecha sobre el tamaño de las vibraciones. Esto quiere decir que la cuerda en nuestras condiciones resulta aproximadamente inextensible. Por tanto el módulo de la tensión, cuya variación es proporcional al estiramiento según la *ley de Hooke*, resulta ser constante, $|T(x, t)| \equiv T_o$.

Sea $F(x, t)$ la magnitud de la fuerza que es aplicada perpendicularmente al eje

Ox en el punto x y en el instante t ; sea $\rho(x)$ la función densidad de la cuerda que, razonablemente, se supone independiente del tiempo.

La ley del movimiento viene dada por la *ley de Newton*

$$(1.5.1) \quad \text{Masa} \times \text{Aceleración} = \text{Fuerza}.$$

Las fuerzas que actúan sobre un elemento $[x, x + \Delta x]$ son aproximadamente:

i) Las de tensión

$$T_0(\sin \alpha(x + \Delta x) - \sin \alpha(x)),$$

que aproximamos por

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + (\tan \alpha)^2}} \simeq \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

al suponer vibraciones pequeñas y despreciar el término $(\tan \alpha)^2$.

ii) Las fuerzas externas las aproximamos por

$$F(x, t)\Delta x,$$

lo cual es razonable con hipótesis de continuidad sobre F .

Con estas consideraciones (1.5.1) se puede expresar por

$$(1.5.2) \quad T_0(\sin \alpha(x + \Delta x) - \sin \alpha(x)) + F(x, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

o bien, efectuando la sustitución de $\sin \alpha$ por $\tan \alpha$ como se indicó antes,

$$(1.5.3) \quad \frac{T_0}{\Delta x} \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Pasando al límite para $\Delta x \rightarrow 0$ resulta la ecuación siguiente

$$(1.5.4) \quad T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

que rige el movimiento en las hipótesis hechas. Las condiciones naturales para una cuerda es que tenga los extremos fijos; es decir,

$$u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \in \mathbf{R}$$

Así resulta el siguiente problema mixto de valor inicial y de contorno

$$(1.5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t) = \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}; \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = \phi(x) \quad x \in [0, l], \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \end{array} \right.$$

En relación con lo dicho para la ecuación del calor, la singularización de la variable tiempo respecto al espacio en este caso viene definida por aparecer las derivadas con distinto signo, lo cual, como veremos, hace que el problema (1.5.5) sea *el correcto* para esta ecuación.

Si en (1.5.4) se supone la densidad constante resulta, tras un cambio de escala, la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x, t),$$

que es la llamada *ecuación de ondas* en una dimensión de espacio. En la próxima sección aparecerá la ecuación de ondas en más dimensiones en relación con las ecuaciones de la Electrodinámica de Maxwell.

1.6.- Ecuaciones de Maxwell. La ecuación de ondas.

Las ecuaciones del electromagnetismo son el resultado de la elaboración de observaciones y teorías llevadas a término en las primeras décadas del siglo XIX, esencialmente por Oersted, Faraday y Ampère. La Electroestática, de la cual hemos visto lo fundamental en el apartado (1.4), era bien conocida en tiempos de Maxwell, quien formuló sus ecuaciones hacia 1865, permitiéndole identificar la luz como ondas electromagnéticas. A continuación obtendremos las ecuaciones de Maxwell a partir de la conservación de energía y posteriormente las transformaremos en *ecuaciones de ondas*.

Sea $(x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, denotando x el punto del espacio y t el instante de tiempo. Sean

$$\mathbf{E}(x, t) = (E_1(x, t), E_2(x, t), E_3(x, t))$$

y

$$\mathbf{H}(x, t) = (H_1(x, t), H_2(x, t), H_3(x, t))$$

los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

Como parte de las ecuaciones de Maxwell se tienen la leyes de Gauss

$$(1.6.1.a) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(x, t) = \rho(x, t),$$

$$(1.6.1.b) \quad \operatorname{div} \mathbf{H}(x, t) = 0,$$

siendo $\rho(x, t)$ la densidad de carga. La densidad de energía en (x, t) viene dada por:

- i) $\mathcal{E}_E = \varepsilon \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle$, energía eléctrica,
- ii) $\mathcal{M}_H = \mu \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$, energía magnética.

(Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar canónico de \mathbf{R}^N .)

Aquí ε y μ son constantes dependientes del medio físico.

El flujo de energía a través de la frontera, es dado en el instante t por

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} c \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}, \nu \rangle dS, \quad c > 0;$$

donde \wedge denota el producto vectorial en \mathbf{R}^3 y ν la normal exterior a la frontera de \mathcal{D} . Se supone que en el instante t la cantidad de energía eléctrica que se transforma en calor es

$$\mathcal{C} = \int_{\mathcal{D}} \sigma \langle \vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{E}} \rangle dx, \quad \sigma > 0.$$

El principio de conservación de la energía establece entonces que

$$(1.6.2) \quad -\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_E + \mathcal{M}_H) = \mathcal{F} + \mathcal{C},$$

o escrito en detalle:

$$(1.6.3) \quad -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\varepsilon \langle \vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{E}} \rangle + \mu \langle \vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}} \rangle) dx = \int_{\mathcal{D}} \sigma \langle \vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{E}} \rangle dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} c \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}, \nu \rangle dS.$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss podemos calcular la última integral en (1.6.3)

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{D}} c \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}, \nu \rangle dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} c \operatorname{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) dx$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \langle \mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H} \rangle,$$

resulta

$$(1.6.4) \quad 0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}} \{ \varepsilon \langle \mathbf{E}_t, \mathbf{E} \rangle + \mu \langle \mathbf{H}_t, \mathbf{H} \rangle + \sigma 4\pi \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle + c[\langle \mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H} \rangle] \} dx.$$

Haciendo tender a cero el diámetro de \mathcal{D} y suponiendo regularidad suficiente, se tiene que para que se conserve la energía ha verificarse

$$(1.6.5) \quad 0 = -\frac{1}{4\pi} \{ \varepsilon \langle \mathbf{E}_t, \mathbf{E} \rangle + \sigma 4\pi \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle - c \langle \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H} \rangle \} - \frac{1}{4\pi} \{ \mu \langle \mathbf{H}_t, \mathbf{H} \rangle + c[\langle \mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E} \rangle] \},$$

pero la *ley de Faraday* establece que

$$(1.6.6) \quad -\frac{\mu}{c} \mathbf{H}_t = \operatorname{rot} \mathbf{E};$$

por tanto, el segundo sumando de (1.6.5) es nulo. De otra parte la modificación hecha por Maxwell a la ley de Ampère establece que

$$(1.6.7) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E}_t + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E},$$

Como consecuencia, (1.6.5) se verifica donde se verifican (1.6.6) y (1.6.7).

Teniendo en cuenta (1.6.1), (1.6.6) y (1.6.7) se tienen las *ecuaciones de Maxwell*; es decir, el sistema

$$(1.6.8) \quad \begin{cases} \text{div } \mathbf{E}(x, t) &= \rho(x, t); \\ \text{div } \vec{\mathbf{H}}(x, t) &= 0; \\ -\frac{\mu}{c} \mathbf{H}_t(x, t) &= \text{rot } \mathbf{E}(x, t); \\ \text{rot } \mathbf{H}(x, t) &= \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E}_t(x, t) + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}(x, t). \end{cases}$$

Así resultan ocho ecuaciones con seis incógnitas, y es por lo que se dice que se trata de un problema sobredeterminado. Esto quiere decir que se debe pedir alguna condición a los datos. Por ejemplo, si suponemos que $\rho \equiv 0$ y suponemos que $\text{div } \mathbf{E}(x, 0) = 0$, se tiene que tal ecuación se verifica para todo tiempo. En efecto, llamando $f(x, t) = \text{div } \mathbf{E}(x, t)$ y tomando divergencia en la última ecuación se tiene

$$0 = \text{div rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} f_t + \frac{4\pi\sigma}{c} f;$$

de donde, integrando esta ecuación lineal, se obtiene

$$0 \equiv f(x, 0)e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t} = f(x, t).$$

Consideraremos a partir de ahora que $\sigma = 0$ y que se ha hecho un rescale en las variables de forma que todas las constantes de las ecuaciones de Maxwell resultantes son la unidad. Por contra supondremos que hay una corriente \mathbf{J} .

Así las ecuaciones se transforman en

$$(1.6.9) \quad \begin{cases} (1) & -\mathbf{H}_t(x, t) &= \text{rot } \mathbf{E}(x, t) \\ (2) & \text{rot } \mathbf{H}(x, t) &= \mathbf{E}_t(x, t) + \mathbf{J}(x, t) \\ (3) & \text{div } \mathbf{H}(x, t) &= 0 \\ (4) & \text{div } \mathbf{E}(x, t) &= \rho(x, t) \end{cases}$$

Transformaremos ahora las ecuaciones en *ecuaciones de ondas*.

Por el teorema (1.1.1) y verificarse (3) en (1.6.9), se tiene que existe un campo vectorial \mathbf{A} tal que $\text{rot } \mathbf{A} + \nabla f = \mathbf{H}$, para cualquier función regular f . Sustituyendo en (1) de (1.6.9) obtenemos

$$(1.6.10) \quad 0 = \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{H}_t = \text{rot } (\mathbf{E} + \mathbf{A}_t).$$

(Se ha tomado $f \equiv 0$).

Aplicando el teorema (1.1.2), como consecuencia de (1.6.10), obtenemos la existencia de $\phi \in \mathcal{C}^2 \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, tal que

$$(1.6.11) \quad \mathbf{E} + \mathbf{A}_t = -\nabla \phi.$$

Sustituyendo en la ecuación (2) de (1.6.9) se tiene

$$(1.6.12) \quad \mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E}_t = \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) + (\mathbf{A}_t + \nabla \phi)_t.$$

No es difícil establecer la identidad

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \nabla(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A};$$

donde Δ es el operador de Laplace introducido en la sección 1.4. (Véase problema 1 (g)). Sustituyendo en (1.6.12) se tiene

$$(1.6.13) \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla(\text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}).$$

Por tanto, en virtud de (1.6.11), (4) de (1.6.9) se convierte en

$$(1.6.14) \quad \rho = -\Delta \phi - \frac{\partial(\text{div } \mathbf{A})}{\partial t}.$$

Las ecuaciones de Maxwell se han reducido a (1.6.13) y (1.6.14) junto con

$$(1.6.15) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{A} &= \mathbf{H} \\ -\mathbf{E} &= \mathbf{A}_t + \nabla \phi. \end{cases}$$

Sean ahora \mathbf{A}_0 y ϕ_0 verificando (1.6.15); si se toma f una función regular arbitraria y consideremos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla f$ y $\phi = \phi_0 - f_t$, entonces el par (\mathbf{A}, ϕ) verifica también (1.6.15). Esta libertad nos permite elegir f para que se verifique

$$(1.6.16) \quad \text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0;$$

en efecto, basta elegir f verificando

$$\Delta f - f_{tt} = -(\text{div } \mathbf{A}_0 + \phi_{0t}).$$

De esta forma las ecuaciones de Maxwell se han transformado en

$$(1.6.17) \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mathbf{J}; \\ \Delta \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\rho; \\ \text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0, \end{cases}$$

que son *ecuaciones de ondas*.

Obsérvese que una vez obtenidos \mathbf{A} y ϕ verificando (1.6.17), los campos vectoriales

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{A}_t + \nabla\phi)$$

y

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

verifican (1.6.9).

Con las anteriores observaciones de Maxwell se obtiene que la ecuación

$$(1.6.18) \quad u_{tt} - \Delta_x u = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$$

rige la propagación de las ondas en el vacío. Es claro que es el mismo tipo de ecuación obtenida para la vibración de una cuerda, pero en un número de dimensiones mayor.

Cuando se considera la propagación de las ondas en un medio hay que modificar la ecuación con un término de *rozamiento*, resultando la *ecuación del telegrafista*, es decir,

$$(1.6.19) \quad u_{tt} - \Delta_x u + u_t = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}.$$

El término u_t como veremos produce disipación de energía por lo que la ecuación (1.6.19) es una buena aproximación a la realidad de la propagación de ondas de radio, por ejemplo.

Cuando la Física se ocupa de la teoría corpuscular de la luz la ecuación que se estudia es otra modificación de la ecuación de ondas conocida como *ecuación de Klein-Gordon*, más precisamente la ecuación

$$(1.6.20) \quad u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R};$$

donde m representa la masa de las partículas.

La Física moderna se ha ocupado también de modelos que involucran a la ecuación

$$(1.6.21) \quad u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = F(u), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R},$$

que tiene una dependencia no lineal en la incógnita u . Este modelo es considerablemente más difícil y se escapa del alcance de este texto. Sólo decir que según los físicos la anterior ecuación describe la interacción de una partícula con el campo creado por ella misma.

1.7.- Ecuaciones de primer orden.

Euler y las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos.

Hacia 1739 Clairaut se ocupó de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en relación con sus estudios sobre la forma de la Tierra. Son las ecuaciones de primer orden más sencillas; es decir, ecuaciones de la forma,

$$u_x = P, \quad u_y = Q, \quad u_z = R.$$

Como el lector advertirá, sólo aparecen *derivadas de primer orden*, de ahí el nombre que se da a estas ecuaciones.

El teorema (1.1.2) da las condiciones para encontrar una función u , que verifique la ecuación, es decir, tal que, $\nabla u = (P, Q, R)$. Tal condición fué formulada por Lagrange en términos de las coordenadas del campo, es decir, concretamente

$$(1.7.1.) \quad P_y = Q_x, \quad P_z = R_x, \quad Q_z = R_y$$

que es como se conoce en los textos de ecuaciones diferenciales ordinarias el concepto de *diferencial exacta*.

Entre los años 1772 y 1779 Lagrange publicó una serie de trabajos ocupándose de ecuaciones de la forma general

$$(1.7.2) \quad f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

que aparecen en Geometría y Óptica Geométrica.

Los trabajos de Lagrange, Charpit, Monge y Cauchy sobre ecuaciones del tipo (1.7.2) constituyen la base de la teoría que se estudiará en el capítulo siguiente. El resto de esta sección está dedicado a dar un modelo físico donde aparecen las ecuaciones de primer orden de una manera en absoluto trivial. Se trata de las ecuaciones de Euler que rigen el movimiento de fluidos no viscosos.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ una región ocupada por un fluido en movimiento; se trata de dar un modelo que describa tal movimiento.

Para establecer las ecuaciones del movimiento de un fluido no viscoso Euler tiene en cuenta tres principios básicos de la Física, a saber:

- I) Principio de conservación de la masa.
- II) Segunda ley de la Dinámica de Newton.
- III) Principio de conservación de la energía.

A nivel macroscópico es razonable pensar que la densidad del fluido $\rho(x, t)$ es una función continua del espacio y del tiempo. Dada una bola $Q \subset \Omega$ la masa de fluido que encierra en el instante t es entonces

$$(1.7.3) \quad m(Q, t) = \int_Q \rho(x, t) dx.$$

Si $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ designa la posición de una partícula en el instante t , supondremos que dicha partícula describe una trayectoria bien definida y que, por tanto, la velocidad $\mathbf{u}(x, t)$ de cada partícula en el instante t define un campo de vectores en Ω .

Para la obtención de las ecuaciones supondremos que \mathbf{u} y ρ tienen la regularidad suficiente para que los cálculos sean válidos.

La *ley de conservación de masa* establece que la tasa de variación de masa respecto al tiempo es igual a la masa que entra menos la masa que sale. Tenemos la herramienta perfecta para formular este principio: el teorema de la divergencia. En efecto, la tasa de variación de la masa respecto al tiempo en la bola Q es

$$(1.7.4) \quad \frac{dm}{dt}(Q, t) = \int_Q \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dx,$$

y debe equilibrarse con el flujo a través de la frontera de Q ; es decir, con

$$(1.7.5) \quad - \int_{\partial Q} \rho \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle dS = - \int_Q \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dx,$$

por el teorema de la divergencia. Como conclusión, de (1.7.4), y (1.7.5) se tiene

$$\int_Q \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dx = 0.$$

Suponiendo que el integrando es continuo y haciendo tender el diámetro de Q a cero, obtenemos la expresión diferencial de la conservación de masa,

$$(1.7.6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

que es conocida como *ecuación de la continuidad*.

Sin hipótesis de regularidad la ecuación de la continuidad se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Q \rho dx + \int_{\partial Q} \rho \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = 0;$$

que es la forma de *ley de conservación* que, a menudo, aparece en Física. Desde el punto de vista matemático esta formulación da lugar a la necesidad de introducir conceptos de solución más generales que el clásico, según el cual la solución es derivable y la ecuación se satisface puntualmente.

Sea $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ la trayectoria seguida por una partícula del fluido. Por tanto en términos del campo de velocidades se tiene

$$(1.7.7) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t).$$

Podemos ahora obtener la aceleración derivando en (1.7.7); es decir,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u} + \mathbf{u}_t;$$

donde el símbolo en el último término se expresa en coordenadas de la manera que sigue

$$a_i(t) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

La segunda ley de Newton establece que

$$(1.7.8) \quad \rho \mathbf{a} = \text{Fuerza}.$$

Las fuerzas que se consideran son esencialmente de dos tipos:

- (1) Fuerzas exteriores, como las gravitatorias, etc.; cuya densidad se supone dada por un campo $\mathbf{f}(x, t)$.
- (2) Tensiones internas.

En los *fluidos perfectos*, es decir, los no viscosos, estas últimas fuerzas de tensión interna se suponen que actúan de una manera muy particular. Más concretamente, se supone que existe una función $p(x, t)$, llamada *presión*, de forma que si se considera un elemento de superficie S en el fluido y n su normal, las fuerzas de tensión a través de S tienen una densidad en el punto x y en el instante t igual a $p(x, t)n$. Lo que quiere decir esta hipótesis física es que no hay componentes tangenciales en las fuerzas de tensión interna. Es decir, la idea intuitiva que esto sugiere es que en un *fluido perfecto* no se crearían o destruirían rotaciones sin la acción de fuerzas externas.

La contribución de las tensiones internas a través de la frontera de la bola $Q \subset \Omega$ viene dada entonces por

$$\mathbf{S}_{\partial Q} = - \int_{\partial Q} p n dS.$$

Así, la proyección de dicha fuerza en la dirección del vector unitario $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^3$ es

$$(1.7.9) \quad \langle \mathbf{e}, \mathbf{S}_{\partial Q} \rangle = - \int_{\partial Q} p \langle \mathbf{e}, n \rangle dS = - \int_Q \operatorname{div} (p \mathbf{e}) dx = - \int_Q \langle \nabla p, \mathbf{e} \rangle dx,$$

tras haber aplicado el teorema de la divergencia.

Podemos, entonces, reformular (1.7.9) como

$$(1.7.10) \quad \mathbf{S}_{\partial Q} = - \int_Q \nabla p dx.$$

Con hipótesis de regularidad, como siempre, hacemos tender el diámetro de Q a cero y, por el teorema fundamental del cálculo, (1.7.8) se convierte en

$$(1.7.11) \quad \rho(\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u}) = -\nabla p + f;$$

que son las *ecuaciones de Euler*.

La energía total del sistema E viene dada como la suma de la energía interna E_I y la energía cinética

$$E_C = \int_{\Omega} \rho |\mathbf{u}|^2 dx.$$

Cuando se supone que la energía interna es constante, el principio de conservación de la energía, implica que también la energía cinética es constante. En este caso se demuestra que las ecuaciones del movimiento son

$$(1.7.12) \quad \begin{cases} \rho(\mathbf{u}_t + \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u}) = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \rho = a, \quad \text{constante a lo largo de trayectorias.} \end{cases}$$

La condición de contorno natural es que el fluido no se salga del dominio total donde se experimenta, es decir, $\langle \mathbf{u}, n \rangle = 0$ en la frontera, $\partial\Omega$, siendo n su normal.

Otra hipótesis interesante es el caso en que la energía interna es

$$E_I = \int_{\Omega} \rho w dx,$$

donde w representa el trabajo realizado. En este caso se prueba que

$$(1.7.13) \quad \nabla w = \frac{\nabla p}{\rho},$$

y este tipo de fluidos se llaman *fluidos isentrópicos*, que expresado de otra forma quiere decir que $p = p(\rho)$ o, lo que es lo mismo, se tienen ecuaciones de estado explícitas.

Remitimos para más detalles al texto de *A.J. Chorin - J.E. Marsden, "A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics", Springer Verlag, 1990.*

Para los fluidos viscosos se obtienen distintos tipos de modelos según las hipótesis físicas que se usen. Los fluidos viscosos *newtonianos* se rigen por las *ecuaciones de Navier-Stokes* que añaden a las de Euler un término de la forma $\nu \Delta \mathbf{u}$ donde ν designa la viscosidad. Se trata, por tanto, de ecuaciones de segundo orden a diferencia de las de Euler.

1.8.- Otros modelos físicos.

En el desarrollo de la Física del siglo XX han aparecido otros modelos muy interesantes.

Para empezar, en muchos modelos se consideran ecuaciones no lineales. Animados siempre por la búsqueda de una mayor aproximación a la realidad o para explicar fenómenos en condiciones más extremas, es necesario considerar modelos no lineales.

Es claro que si en la deducción de la ecuación de la cuerda vibrante no se suponen vibraciones pequeñas, no es realista despreciar los términos de segundo orden. De igual manera la ley de Fourier para temperaturas muy altas deja de ser adecuada; piénsese en el calor que se produce en reacciones nucleares naturales y artificiales. (Véase la Sección 3).

Un ejemplo de este tipo de modelos no lineales menos conocido, pero no menos bello, es el de las ecuaciones de equilibrio de estrellas politrópicas en condiciones isotermas, modelo introducido por Emden y Fowler a comienzos del siglo XX y estudiado entre otros por el Premio Nobel de Física S. Chandrasekar.

Designaremos por $\rho(r)$ la densidad, P la presión y T la temperatura, como funciones del radio.

Se postula, de acuerdo con la experimentación, que la presión satisface la identidad

$$(1.8.1) \quad P = \frac{\kappa}{H\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4;$$

donde el primer sumando es la *presión cinética* y el segundo sumando la *presión de radiación* y siendo κ = constante de Boltzman, μ = peso molecular medio, H = masa del protón y a = constante de Stefan-Boltzman.

La ley de la gravitación de Newton establece que la tasa de variación de la presión es equilibrada por la fuerza de atracción gravitatoria, es decir,

$$(1.8.2) \quad -\frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Aquí G es la constante universal de la gravitación y $M(r) = 4\pi \int_0^r s^2 \rho(s) ds$ es la masa.

Si en (1.8.1) se supone que T es constante, sustituyendo en (1.8.2) resulta

$$-\frac{k}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}$$

derivando una vez más se tiene

$$\frac{k}{r^2} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \log \rho(r)}{dr} \right) \right) = -4\pi G \rho.$$

Haciendo el cambio de variable $r = [\frac{k}{4\pi G}]^{1/2} x$ y $\phi = \log \rho - \log \lambda$ se obtiene la ecuación

$$-\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) = \lambda e^\phi,$$

que es la ecuación de Poisson para funciones radiales con un segundo término que depende de la incógnita de forma no lineal. Es decir, más en general se puede escribir

$$-\Delta u = \lambda e^u.$$

Para terminar este apartado hacemos mención a otro modelo de la Física moderna. La *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \Delta \psi + V(x)\psi,$$

que da la densidad de probabilidad de que la posición de una partícula de masa m se encuentre en un elemento de volumen; siendo \hbar la constante de Plank. Esta ecuación es importante pues toda la Mecánica Cuántica gira en torno a ella.

El número de ecuaciones en derivadas parciales que el lector puede encontrar en la literatura es enorme. Cada vez mayor, a la vez que es mayor el nivel de comprensión que se alcanza de los distintos fenómenos que se estudian.

No obstante el estudio de las tres ecuaciones clásicas, **ecuación de Laplace, ecuación de ondas y ecuación del calor**, será el único objetivo de este curso.

Como se decía en la introducción esto será suficiente para tener idea clara de las dificultades de los problemas, de los métodos de solución y de las técnicas necesarias para afrontar con éxito empresas más ambiciosas en el campo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 1

1. Probar las siguientes igualdades para los campos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y las funciones f y g :

- a) $\nabla \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{u} + \mathbf{u} \wedge \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{u}$.
- b) $\text{div}(f\mathbf{u}) = f \text{div } \mathbf{u} + \langle \mathbf{u}, \nabla f \rangle$.
- c) $\text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v} \rangle$.
- d) $\text{div}(\text{rot } \mathbf{u}) = 0$.
- e) $\text{rot}(f\mathbf{u}) = f \text{rot } \mathbf{u} + \nabla f \wedge \mathbf{u}$.
- f) $\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \nabla \rangle \mathbf{u}$.
- g) $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{u}) = \nabla(\text{div } \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$.
- h) $\text{rot}(\nabla f) = 0$.
- i) $\text{div}(\nabla f \wedge \nabla g) = 0$.

2. Sea el campo de vectores $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{x+z}, 0, -e^{x+z} + 2y)$, estudiar si existe un campo \mathbf{G} tal que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$. Calcular el flujo de \mathbf{F} a través de la esfera unidad centrada en el origen.

3. Sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz \cos(x^2yz), x^2z \cos(x^2yz), x^2y \cos(x^2yz) + 2z)$$

Estúdiese si es un campo conservativo.

4. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, sabiendo que la temperatura en cada punto es $u(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$.

5. Comprobar el teorema de la divergencia para el campo $\mathbf{F} = (x, y)$ y la bola unidad en \mathbf{R}^2 .

6. Calcular la integral de la componente normal del campo $(2xy, -y^2)$ sobre la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

7. La velocidad de un fluido en \mathbf{R}^3 viene dada por el campo

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (0, 0, \sqrt{y});$$

calcular el flujo a través de la superficie $x^2 + z^2 = y$, $0 \leq y \leq 1$.

CAPITULO 2

ECUACIONES EN DERIVADAS
PARCIALES DE PRIMER ORDEN.
EL PROBLEMA DE CAUCHY.

Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de las *ecuaciones en derivadas parciales de primer orden* que se han motivado en la sección 1.7. Concretamente se estudiará el problema de Cauchy o problema de valores iniciales, que plantearemos precisamente en su lugar y momento adecuados.

Hay que decir que este tema clásico es de gran importancia para establecer resultados en ecuaciones más generales. Por ejemplo, el teorema de existencia de Cauchy-Kovalevsky para datos analíticos necesita de los resultados de este capítulo como se establecerá en la última sección. También será necesario para clasificar las ecuaciones en derivadas parciales según tipos.

Por concreción se presentan todos los resultados en dimensión tres, empezando en la sección 2.1 con el caso más simple de las *ecuaciones quasi lineales*. La sección 2.2 se dedicará a la ecuación más general.

Las dos últimas secciones se dedican a aplicar lo estudiado a la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y a probar un caso particular del teorema de Cauchy-Kovalevsky, respectivamente. Esta última sección puede ser omitida en una primera lectura.

En un apéndice se expone el caso de la ecuación general en dimensión cualquiera, que puede prescindirse de él inicialmente pero que se incluye para satisfacer la curiosidad de los lectores con más motivación matemática. Se cierra el capítulo 2 con una lista de problemas seleccionados.

Como referencias y lecturas complementarias pueden usarse los textos de *F. John*, "*Partial Differential Equations*", Cuarta Edición, Springer Verlag 1979 y *R. Courant-D. Hilbert*, "*Methods of Mathematical Physics*", Volumen I John Wiley Classics Edition 1989.

2.1.- Ecuaciones quasi lineales de primer orden.

Consideraremos en esta sección ecuaciones de la forma

$$(2.1.1) \quad f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} = f(x_1, x_2, u)$$

Tales ecuaciones son llamadas *quasi lineales*, pues si bien dependen linealmente de las derivadas (u_{x_1}, u_{x_2}) , es no lineal la dependencia en u .

Ejemplos.

1.- La ecuación

$$f_1(x_1, x_2)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2)u_{x_2} = f(x_1, x_2)u$$

es *lineal* pues además de ser quasi lineal la dependencia en u es lineal. A este caso podrán aplicarse en particular los resultados que se obtengan a continuación.

2.- La ecuación $u_t + a(u)u_x = 0$, donde las variables independientes son ahora t y x puede escribirse también como $u_t + A(u)_x = 0$ siendo $A(u) = \int_0^u a(s)ds$.

Empezaremos a precisar algunas condiciones sobre la ecuación (2.1.1); en primer lugar se supone que f_1, f_2, f están definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Supondremos así mismo que:

- 1) $f_1, f_2, f \in C^1(\Omega)$, es decir, son continuamente derivables en Ω .
- 2) $|f_1(x_1, x_2, u)| + |f_2(x_1, x_2, u)| > 0$, si $(x_1, x_2, u) \in \Omega$

La hipótesis 1) es una condición de regularidad suficiente; la hipótesis 2) garantiza que *hay ecuación en derivadas parciales* en todo Ω .

2.1.1. Definición.

Por **solución** de la ecuación (2.1.1) entendemos una función, ϕ , definida en un abierto $G \subset \mathbf{R}^2$,

$$\phi : G \longrightarrow \mathbf{R},$$

de manera que $\phi \in C^1(G)$ y

- (1) $(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in \Omega$.
- (2) Cualquiera que sea $(x_1, x_2) \in G$ se verifica

$$f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_1}(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)).$$

Es claro que el concepto de solución introducido por la definición anterior es de carácter local. En otras palabras, se considera como solución al par (G, ϕ) , pudiendo ser G el entorno de un punto.

Esta idea trae aparejada una dificultad obvia y es saber cuando dos soluciones locales, ϕ_1 y ϕ_2 definidas en G_1 y G_2 , respectivamente, pueden considerarse de alguna forma como un único objeto. La idea es que ϕ_1 y ϕ_2 coincidan en $G_1 \cap G_2$. Podemos interpretar de esta manera que ϕ_1 y ϕ_2 son restricciones de una misma solución a abiertos más pequeños. Por tanto damos la definición

2.1.2. Definición.

Entenderemos que (G_1, ϕ_1) , (G_2, ϕ_2) , son una misma solución de (2.1.1) si se verifica que

$$\phi_1|_{G_1 \cap G_2} = \phi_2|_{G_1 \cap G_2}$$

Recurriremos al significado geométrico de la ecuación para explorar como construir soluciones. Como resultado de este estudio geométrico aparecerán los datos que son admisibles para plantearnos un problema de *valores iniciales*.

Supongamos una solución local de (2.1.1),

$$\phi : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},$$

y sea su gráfica

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in G\}.$$

El vector normal a Σ es $\mathbf{n} = (\phi_{x_1}, \phi_{x_2}, -1)$. Si consideramos el campo dado por los coeficientes de la ecuación, es decir, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f)$, que está definido en Ω , se tiene que el ser ϕ solución implica que

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{F} \rangle = 0 \quad \text{en } \Sigma$$

En otras palabras \mathbf{F} es tangente a Σ en todos sus puntos.

Por tanto, parece natural intentar construir las superficies solución o gráficas de soluciones, a partir de las curvas de campo asociadas al campo \mathbf{F} , es decir, las curvas tangentes a \mathbf{F} en cada punto. Evidentemente hay que precisar como generar superficies a partir de curvas, pero lo que es claro, es que las curvas tangentes a \mathbf{F} son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo siguiente:

$$(2.1.2a) \quad \begin{cases} x_1'(t) &= f_1(x_1, x_2, u) \\ x_2'(t) &= f_2(x_1, x_2, u) \\ u'(t) &= f(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

A (2.1.2a) se le llama *sistema característico* de la ecuación (2.1.1). Las gráficas en \mathbf{R}^3 de las soluciones de (2.1.2a) se llaman *curvas características*.

Teniendo en cuenta que suponemos $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, para cada dato inicial

$$(2.1.2b) \quad (x_1(0), x_2(0), u(0)) = (\xi_1^0, \xi_2^0, \eta^0) \in \Omega$$

el problema de Cauchy planteado por (2.1.2a) y (2.1.2b) tiene solución local única en virtud del teorema de existencia de Picard.

Además, la dependencia de las soluciones con respecto a los datos iniciales es diferenciable bajo nuestras hipótesis. Este resultado se conoce habitualmente como teorema de Peano.

El lector puede encontrar los detalles sobre los resultados anteriores en las referencias dadas en la sección 1.1 o en *M. Guzmán, "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Editorial Alhambra 1975.*

Precisamos a continuación qué entendemos por *generar* una superficie a partir de las curvas características.

Si fijamos una curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ regular, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, y cuyas coordenadas son

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)),$$

podemos considerar la familia uniparamétrica de curvas soluciones de (2.1.2a) verificando para cada s el dato inicial

$$(x_1(0), x_2(0), u(0)) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)),$$

que denotaremos por

$$(2.1.3) \quad \Gamma(t, s) = (X_1(t, s), X_2(t, s), Z(t, s))$$

Para s_0 fijo el vector tangente a $\Gamma(t, s_0)$ es $\Gamma_t(t, s_0)$ y por tanto viene dado por el segundo término del sistema característico (2.1.2a), es decir, abreviadamente,

$$\Gamma_t(t, s_0) \equiv \mathbf{F}(\Gamma(t, s_0)) \equiv (f_1(\Gamma(t, s_0)), f_2(\Gamma(t, s_0)), f(\Gamma(t, s_0)))$$

Por otra parte para $t = 0$ tenemos que $\Gamma(0, s) = \gamma(s)$ y así el vector tangente es

$$\gamma'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \beta'(s))$$

En consecuencia para que $\Gamma(t, s)$ sea la parametrización de una superficie regular, es decir, con plano tangente en cada punto y que éste varíe con continuidad de punto a punto, necesitamos que, al menos sobre la curva inicial, los dos vectores tangentes calculados sean linealmente independientes. Algebraicamente esto quiere decir que el rango de la matriz formada por las coordenadas de ambos vectores sea exactamente dos, es decir,

$$(2.1.4) \quad \text{rango} \begin{pmatrix} f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha'_1(s) \\ f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha'_2(s) \\ f(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \beta'(s) \end{pmatrix} = 2$$

Si admitimos un argumento de continuidad basado en los citados resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias, tenemos la forma de generar soluciones paramétricamente, a costa de suponer la condición (2.1.4) sobre la curva γ .

Nos referiremos a la condición (2.1.4) como *condición de transversalidad* de la curva γ y el campo que define la ecuación (2.1.1) o, si se prefiere, al sistema característico.

La mayor dificultad que habremos de resolver es probar que las funciones así obtenidas *definen* una solución de (2.1.1). Para ser más precisos, si pudiesemos probar que la condición (2.1.4) implica que

$$\begin{cases} x_1 = & X_1(t, s) \\ x_2 = & X_2(t, s) \end{cases}$$

tiene inversa local,

$$\begin{cases} s = & S(x_1, x_2) \\ t = & T(x_1, x_2) \end{cases}$$

todo quedaría reducido a establecer que

$$u = Z(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2)) = \phi(x_1, x_2)$$

es una solución de (2.1.1). Además deberemos establecer si esta es la única solución con el *dato* γ .

Antes de hacer un planteamiento formal de las anteriores ideas, las vamos a ensayar en un ejemplo que nos permita hacer todos los cálculos explícita y sencillamente. Seguro que de esta manera entenderemos mejor lo que hemos razonado heurísticamente.

Ejemplo 1.

Consideramos la ecuación

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} - b = 0$$

donde $a_1, a_2, b \in \mathbf{R}$ y $|a_1| + |a_2| > 0$. Como se ve se trata de una ecuación lineal.

Evidentemente las curvas características son las rectas con vector de dirección (a_1, a_2, b) , es decir,

$$\begin{cases} x_1(t) &= a_1 t + \xi_1^0 \\ x_2(t) &= a_2 t + \xi_2^0 \\ u(t) &= b t + \eta^0. \end{cases}$$

Tomando una curva $\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s))$, transversal al vector (a_1, a_2, b) ,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1'(s) & \alpha_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces,

$$(2.1.5) \quad \Gamma(t, s) = (a_1 t + \alpha_1(s), a_2 t + \alpha_2(s), b t + \beta(s))$$

es la ecuación paramétrica de un cilindro de generatrices paralelas al vector (a_1, a_2, b) .

Observación. Un caso particular interesante, es cuando se tiene la ecuación

$$u_t + cu_x = 0$$

y se toma el dato $u(0, x) = \phi(x)$. La solución resulta ser $\phi(x - ct)$ que es lo que cuando se estudie la ecuación de ondas se llamará una onda plana.

Tomemos en particular la curva $\gamma(s) = (a_2s, -a_1s, s^2)$. De acuerdo a la expresión (2.1.5) se tiene, resolviendo el sistema lineal que resulta,

$$\begin{cases} t &= \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1^2 + a_2^2}, \\ s &= \frac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_1^2 + a_2^2}. \end{cases}$$

Sustituyendo en $Z(t, s) = bt + s^2$, resulta

$$u(x_1, x_2) = b\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1^2 + a_2^2}\right) + \left(\frac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_1^2 + a_2^2}\right)^2$$

que directamente se puede comprobar es solución de la ecuación.

También se verifica que $u(a_2s, -a_1s) = s^2$; es decir, hemos determinado una superficie solución de la ecuación que sobre la curva plana

$$\gamma^*(s) = (a_2s, -a_1s)$$

toma el valor s^2 .

En el ejemplo 1 el resultado se ha conseguido porque hemos podido *invertir* explícitamente (t, s) en términos de (x_1, x_2) al tratarse de una expresión lineal.

En general el resultado de inversión lo dará el teorema de la función inversa. Remitimos al lector, por ejemplo, al texto de *J.E. Marsden, "Elementary Classical Analysis", W.H. Freeman Co. 1974*, para todos los detalles sobre este resultado básico del Análisis.

Precisamos a continuación las hipótesis que hemos conjeturado:

I) Hipótesis sobre la ecuación.

Las condiciones que se suponen sobre la ecuación (2.1.1), es decir,

$$L[u] \equiv f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} - f(x_1, x_2, u) = 0,$$

son

- (1) $f_1, f_2, f \in C^1(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio abierto, es decir, un subconjunto abierto y conexo.
- (2) $|f_1| + |f_2| > 0$, para cada $(x_1, x_2, u) \in \Omega$.

II) Hipótesis sobre la curva dato.

Sobre la curva dato se hacen las hipótesis siguientes:

- (1) $\gamma \in \mathcal{C}^1(I)$, donde $I \subset \mathbf{R}$ es un intervalo, y $\gamma(s) \in \Omega$ para cada $s \in I$ que lo que quiere decir es que se trata de una aplicación

$$\gamma : I \longrightarrow \Omega \subset \mathbf{R}^3$$

- (2) $|\alpha'_1(s)| + |\alpha'_2(s)| > 0$ sobre el intervalo I . Es claro que esta condición establece que en ningún punto la curva tiene tangente paralela al eje Ou .
- (3) La *condición de transversalidad* (2.1.4) se postula también sobre las dos primeras coordenadas, es decir se supone que

$$\det \begin{pmatrix} f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha'_1(s) \\ f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & \alpha'_2(s) \end{pmatrix} \neq 0$$

para cada $s \in I$.

Es claro que las hipótesis 2) y 3) se pueden hacer sobre otro par de coordenadas, entonces se definirá la coordenada restante como función de ellas.

Planteamiento del problema de Cauchy. El problema de Cauchy, o problema de valores iniciales, se plantea en los siguientes términos

Problema.

Dada la ecuación

$$L[u] \equiv f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} - f(x_1, x_2, u) = 0$$

y la curva dato

$$\gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)),$$

encontrar una función

$$\phi : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},$$

$\phi \in \mathcal{C}^1(G)$, tal que:

- i) $(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in \Omega$ si $(x_1, x_2) \in G$,
- ii) ϕ verifica la ecuación, en el sentido que si $(x_1, x_2) \in G$ entonces

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_1}(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2))\phi_{x_2}(x_1, x_2) = \\ = f(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

- iii) $\phi(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \beta(s)$ para $s \in I$

La expresión *problema de valores iniciales* queda justificada porque buscamos una función solución de la ecuación tal que sobre la curva plana $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ tome el valor $\beta(s)$. Es tanto como decir que la superficie solución (gráfica de la función solución) contiene la curva tridimensional γ .

Como quedó dicho anteriormente, el concepto de solución que usamos es de carácter local, es decir, se considera el par (G, ϕ) . Por esta razón cuando se hable de unicidad, habrá que entenderlo como se precisa en la definición (2.1.2).

2.1.3. Teorema.

Consideremos el problema de Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, u)u_{x_1} + f_2(x_1, x_2, u)u_{x_2} - f(x_1, x_2, u) = 0 \\ u(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \beta(s), \end{cases}$$

donde la ecuación y el dato verifican las hipótesis I) y II) anteriores.

Entonces, el problema (P) tiene una única solución local u , con derivadas primeras continuas.

Demostración.

1.- *Existencia.* Comenzamos probando la existencia de al menos una solución local regular, siguiendo los razonamientos geométricos anteriores. Para ello, consideramos el problema de Cauchy para el *sistema característico*

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) \\ \frac{du}{dt} = f(x_1, x_2, u), \end{cases}$$

con dato inicial para s fijo,

$$\begin{cases} x_1(0) = \alpha_1(s) \\ x_2(0) = \alpha_2(s) \\ u(0) = \beta(s). \end{cases}$$

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias establece, que el problema de Cauchy anterior tiene una única solución,

$$(2.1.6) \quad \begin{cases} x_1 = \phi_1(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv X_1(t, s) \\ x_2 = \phi_2(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv X_2(t, s) \\ u = \phi_3(t, \alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \equiv Z(t, s). \end{cases}$$

Además en un entorno del punto $(0, s)$ se tiene que la función vectorial,

$$(t, s) \longrightarrow (X_1(t, s), X_2(t, s), Z(t, s))$$

definida por (2.1.6) es continuamente derivable, en virtud del teorema de Peano sobre la regularidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria respecto a los datos iniciales.

De esta manera la función vectorial (2.1.6) define paramétricamente una superficie $\mathcal{C}^1(G(0, s))$ donde $G(0, s)$ es un entorno del punto $(0, s)$, pues la condición de transversalidad se escribe como sigue

$$\begin{vmatrix} X_{1s}(0, s) & X_{2s}(0, s) \\ X_{1t}(0, s) & X_{2t}(0, s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha'_1(s) & \alpha'_2(s) \\ f_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) & f_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \end{vmatrix} \neq 0.$$

El teorema de la función inversa implica, entonces, que en un entorno de $(0, s)$ la función, $(X_1(t, s), X_2(t, s))$ tiene inversa continuamente derivable,

$$\begin{cases} t = & T(x_1, x_2) \\ s = & S(x_1, x_2), \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x_1 = & X_1(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2)) \\ x_2 = & X_2(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2)) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 0 = & T(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \\ s = & S(\alpha_1(s), \alpha_2(s)). \end{cases}$$

Definimos

$$u(x_1, x_2) = Z(T(x_1, x_2), S(x_1, x_2))$$

y probaremos que es solución del problema de Cauchy.

En efecto,

$$\begin{aligned} (2.1.7) \quad f_1 u_{x_1} + f_2 u_{x_2} &= f_1(Z_t T_{x_1} + Z_s S_{x_1}) + f_2(Z_t T_{x_2} + Z_s S_{x_2}) = \\ &= Z_t(f_1 T_{x_1} + f_2 T_{x_2}) + Z_s(f_1 S_{x_1} + f_2 S_{x_2}) \\ &= Z_t(X_{1t} T_{x_1} + X_{2t} T_{x_2}) + Z_s(X_{1t} S_{x_1} + X_{2t} S_{x_2}) \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que (X_1, X_2) es solución del sistema característico. De otra parte, se observa que

$$X_{1t} T_{x_1} + X_{2t} T_{x_2} = 1$$

$$X_{1t} S_{x_1} + X_{2t} S_{x_2} = 0$$

pues son un término de la diagonal principal y otro fuera de ella respectivamente, de la matriz producto de las matrices jacobianas de (X_1, X_2) y (T, S) que son funciones

inversas. Si además se tiene en cuenta que al ser Z la tercera componente del sistema característico, $Z_t = f$, (2.1.7) se convierte en

$$f_1 u_{x_1} + f_2 u_{x_2} = f,$$

es decir, u es solución de la ecuación. Que verifica el dato se comprueba en la siguiente cadena de identidades

$$\begin{aligned} u(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) &= Z(T(\alpha_1(s), \alpha_2(s)), S(\alpha_1(s), \alpha_2(s))) = \\ &= Z(0, s) = \beta(s) \end{aligned}$$

2.- *Unicidad.* La unicidad resulta como consecuencia del siguiente resultado.

2.1.4. Lema.

Sea $S = \{(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in G \times \mathbf{R}\}$ una superficie solución y P un punto de S . Si $\Gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t))$ es la característica tal que $P = \Gamma(0)$, entonces se verifica que $\Gamma(t) \in S$ para cada t tal que $(x_1(t), x_2(t)) \in G$.

Demostración.

Basta considerar la función $U(t) = z(t) - \phi(x_1(t), x_2(t))$ y probar que puesto que $U(0) = 0$, se verifica $U(t) \equiv 0$. Pero se tiene tras derivar que

$$\begin{aligned} U'(t) &= f(x_1(t), x_2(t), z(t)) - \phi_{x_1}(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) - \phi_{x_2}(x_1(t), x_2(t))x_2'(t) \\ &= f(x_1(t), x_2(t), U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))) - \\ (2.1.8) \quad &- \phi_{x_1}(x_1(t), x_2(t))f_1(x_1(t), x_2(t), U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))) - \\ &- \phi_{x_2}(x_1(t), x_2(t))f_2(x_1(t), x_2(t), U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))) \equiv \\ &\equiv F(t, U(t)), \end{aligned}$$

ya que, evidentemente, $z(t) = U(t) + \phi(x_1(t), x_2(t))$.

De (2.1.8) se tiene que U verifica

$$(PO) \quad \begin{cases} U'(t) &= F(t, U(t)) \\ U(0) &= 0. \end{cases}$$

Como ϕ es una solución de la ecuación de (2.1.1), se comprueba que la función $V(t) \equiv 0$ es solución de (PO); basta sustituir la función nula en (2.1.8).

La unicidad de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias implica que necesariamente, entonces, $U(t) \equiv 0$. \square

Una lectura adecuada del lema anterior establece la unicidad para el problema de Cauchy de la ecuación de primer orden *quasi lineal* que estamos estudiando. A saber, la existencia se obtiene construyendo la solución con características y el lema (2.1.4) prueba que si una característica tiene un punto en común con una solución, los tiene todos.

Podemos resumir el argumento de unicidad de la manera siguiente:

Si existiesen dos soluciones distintas para el dato dado, cada característica pasando por cada punto de la curva dato debería estar contenida en ambas. Lo cual es una contradicción. \square

Al igual que para las ecuaciones diferenciales ordinarias, se tiene un resultado de dependencia continua respecto a los datos. Pasamos a precisar en que sentido entendemos dicha continuidad y a probar el resultado.

Supongamos las curvas dato

$$\begin{cases} \gamma(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \beta(s)) \\ \bar{\gamma}(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \bar{\beta}(s)), \end{cases}$$

donde $\beta(s)$ y $\bar{\beta}(s)$, coinciden fuera de un intervalo compacto.

Sean $\Gamma(t, s)$ y $\bar{\Gamma}(t, s)$ las respectivas soluciones en forma paramétrica.

Entonces podemos escribir fijado s

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t, s) - \bar{\Gamma}(t, s)\| &\leq \\ &\leq |\beta(s) - \bar{\beta}(s)| + \int_0^t \left\{ \sum_1^2 |f_i(\Gamma(r, s)) - f_i(\bar{\Gamma}(r, s))| + |f(\Gamma(r, s)) - f(\bar{\Gamma}(r, s))| \right\} dr. \end{aligned}$$

Por las hipótesis de regularidad sobre f_1, f_2 y f , aplicando el teorema del valor medio sobre una bola de \mathbf{R}^3 que contenga los puntos donde las curvas dato no coinciden, existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(\Gamma(t, s)) - f(\bar{\Gamma}(t, s))| \leq K \|\Gamma(t, s) - \bar{\Gamma}(t, s)\|,$$

$$|f_i(\Gamma(t, s)) - f_i(\bar{\Gamma}(t, s))| \leq K \|\Gamma(t, s) - \bar{\Gamma}(t, s)\| \quad \text{si } i = 1, 2.$$

Por tanto, resulta

$$\|\Gamma(t, s) - \bar{\Gamma}(t, s)\| \leq |\beta(s) - \bar{\beta}(s)| + K \int_0^t \|\Gamma(u, s) - \bar{\Gamma}(u, s)\| du,$$

y por la desigualdad de Gronwall concluimos que

$$\|\Gamma(t, s) - \bar{\Gamma}(t, s)\| \leq |\beta(s) - \bar{\beta}(s)| e^{Kt},$$

lo que prueba la continuidad en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos. El lector puede consultar cualquiera de los libros de ecuaciones diferenciales ordinarias citados en las referencias para encontrar una prueba de la desigualdad de Gronwall, aunque le sugerimos que intente demostrarla por sí mismo en este caso sencillo.

El teorema de existencia y unicidad que acabamos de probar es de caracter local. La pregunta inmediata es si estos resultados se pueden globalizar. La respuesta es negativa si el concepto de solución es el clásico, es decir, de una función con derivadas continuas y que sustituida ella y sus derivadas en la ecuación, la verifican idénticamente.

El ejemplo que sigue es paradigmático a este respecto. Se trata de una ecuación de Euler en una dimensión.

Ejemplo 2.

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= h(x). \end{cases}$$

El sistema característico es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} &= u \\ \frac{dt}{d\tau} &= 1 \\ \frac{du}{d\tau} &= 0; \end{cases}$$

y el dato parametrizado

$$\begin{cases} \alpha_1(s) &= s \\ \alpha_2(s) &= 0 \\ \beta(s) &= h(s). \end{cases}$$

Por tanto tras integrar el sistema característico se tiene que la solución parametrizada es

$$(2.1.9) \quad \begin{cases} X(\tau, s) = & s + u\tau \\ T(\tau, s) = & \tau \\ Z(\tau, s) = & h(s). \end{cases}$$

Si se eliminan s y τ resulta

$$u = h(x - ut),$$

que es la solución definida implícitamente.

En el plano xt las dos primeras componentes de la curva característica que pasa por el punto $(s, 0, h(s))$ definen la recta

$$x = s + h(s)t.$$

Sobre dicha recta la tercera componente es constante y su valor es $Z(\tau, s) = h(s)$, de acuerdo con (2.1.9). Si se sigue la pauta de la prueba del teorema, la solución sobre tal recta tiene el valor de Z , es decir, también, $u = h(s)$.

Para dos valores $s_1 \neq s_2$ las correspondientes rectas, proyecciones de las características sobre el plano xt se cortan en un punto P dado por el valor del parámetro

$$t_0 = -\left(\frac{s_2 - s_1}{h(s_2) - h(s_1)}\right),$$

si este está bien definido.

Según la observación anterior, en dicho punto, de estar definida la solución como una función, debería tomar a la vez los valores $h(s_1)$ y $h(s_2)$. Es decir, es en general imposible definir globalmente una función solución que sea derivable con continuidad.

Con el siguiente cálculo quedará claro qué tipo de singularidad se tiene. Estudiando la variación de u_x a lo largo de una recta característica se tiene

$$u_x = h'(s)s_x,$$

pero

$$s_x = [x_s]^{-1} = \frac{1}{1 + h'(s)\tau}.$$

Por tanto si $h'(s) < 0$ tenemos que para $\tau \rightarrow t_1 = -\frac{1}{h'(s)}$ se verifica que $u_x \rightarrow \infty$. Entonces en tales puntos la función solución deja de ser derivable con continuidad.

Si se recuerda la obtención de la ecuación en §1.7, puede observarse que hay una expresión integral que no requiere la regularidad de la solución y que es equivalente a la ecuación puntual cuando la solución es regular. Para entenderlo mejor, escribamos la ecuación como la divergencia de un campo, es decir,

$$(2.1.10) \quad A(u)_t + B(u)_x = 0,$$

o bien,

$$A'(u)u_t + B'(u)u_x = 0$$

y para que sea equivalente a la ecuación $u_t + uu_x = 0$ debe verificarse que

$$B'(u) = uA'(u).$$

El lector habrá comprendido que lo que hacemos es multiplicar la ecuación por $A'(u)$, y calcular una primitiva de $A'(u)$ y de $uA'(u)$, a la cual llamamos B .

Pero ahora tenemos que si a, b y t son arbitrarios, por integración de (2.1.10),

$$(2.1.11) \quad 0 = \frac{d}{dt} \left(\int_a^b A(u(x, t)) dx \right) + (B(u(b, t)) - B(u(a, t))),$$

que es lo que se conoce como una *ley de conservación*.

Si suponemos que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$, entonces (2.1.11) implica que u verifica la ecuación en derivadas parciales de partida, es decir,

$$u_t + uu_x = 0.$$

Pero observamos que (2.1.11) es válido para u con menos regularidad, por eso (2.1.11) puede servir para definir lo que es una *solución débil* de la ecuación (2.1.10).

Sea u una solución débil de la ecuación (2.1.10), que es regular excepto en una curva

$$x = \sigma(t),$$

a través de la cual la solución tiene un salto finito.

Suponemos que $u^+ = \lim_{x \rightarrow \sigma(t)^+} u(x, t)$ y $u^- = \lim_{x \rightarrow \sigma(t)^-} u(x, t)$ son finitos, entonces, si $a < \sigma(t) < b$, (2.1.11) podemos escribirlo como

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int_a^{\sigma(t)} A(u(x, t)) dx + \int_{\sigma(t)}^b A(u(x, t)) dx \right) + (B(u(b, t)) - B(u(a, t))),$$

de donde efectuando los cálculos se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\sigma}{dt}(t)(A(u^-) - A(u^+)) + B(u(b, t)) - B(u(a, t)) + \left(\int_a^{\sigma(t)} A_t(u) dx + \int_{\sigma(t)}^b A_t(u) dx \right) = \\ &= \frac{d\sigma}{dt}(t)(A(u^-) - A(u^+)) + B(u(b, t)) - B(u(a, t)) - \left(\int_a^{\sigma(t)} B_x(u) dx + \int_{\sigma(t)}^b B_x(u) dx \right). \end{aligned}$$

Por tanto, efectuando las dos últimas integraciones, tenemos

$$(2.1.13) \quad \frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{B(u^+) - B(u^-)}{A(u^+) - A(u^-)}.$$

que da la velocidad de propagación de la discontinuidad en términos de la variación de A y B en el salto de u . La condición (2.1.13) se conoce como *condición de choque*.

Lo hecho para nuestro ejemplo tiene validez en casos muy generales que quedan fuera del alcance de este texto. No obstante el siguiente ejemplo puede ser ilustrativo pues pone de manifiesto como puede tenerse solución débil global *no regular*.

Ejemplo 3.

Consideramos el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x, 0) &= h(x), \end{cases}$$

con

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Podemos encontrar solución local con derivadas primeras continuas si $t \leq 1$. En $t > 1$ las características se cortan y no se puede tener solución regular. Podemos definir para $t \geq 1$

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1+t}{2} \\ 0 & \text{si } x > \frac{1+t}{2}; \end{cases}$$

que es una solución débil, regular salvo en $x = \frac{1+t}{2}$, $t > 1$. El salto es $s = \frac{1}{2}$.

Multiplicando la ecuación (2.1.10) por una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty \mathbf{R}^2$ e integrando por partes, se obtiene

$$(2.1.12) \quad \int_{\mathbf{R}^2} (A(u)\phi_t + B(u)\phi_x) dx dt = 0.$$

Otra posibilidad de definir una *solución débil* de (2.1.10) es pedir que se verifique (2.1.12) para toda $\phi \in \mathcal{C}^\infty \mathbf{R}^2$, que no depende de que u sea regular.

Este concepto de solución débil es el conocido como *solución en sentido de distribuciones*. Este contexto da gran fluidez de cálculo pero queda también para un estudio más avanzado del que aquí se pretende.

Debemos, sin embargo, reflexionar en el cálculo que hemos hecho. La solución en un sentido clásico, entendida como función derivable, puede existir sólo localmente. Entonces se extiende el concepto de solución a costa de tener comportamientos más complicados.

2.2.- Ecuación general de primer orden

Sea la ecuación

$$(2.2.1) \quad F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0,$$

donde se supone que $F \in \mathcal{C}^2 \Omega$, siendo $\Omega \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2$ un dominio abierto, y tal que es aplicable el teorema de la función implícita, respecto a u_{x_1} , o bien respecto a u_{x_2} .

Es clásico notar $p = u_{x_1}$ y $q = u_{x_2}$, de manera que la ecuación se escribe entonces como

$$F(x_1, x_2, u, p, q) = 0$$

y la condición para que sea aplicable el teorema de la función implícita resulta entonces

$$|F_p| + |F_q| > 0, \quad \text{en todo punto } (x_1, x_2, u, p, q) \in \Omega.$$

Notaremos por Ω^* la proyección de Ω sobre \mathbf{R}^3 , espacio de las variables (x_1, x_2, u) . De esta forma podemos imaginar Ω como formado por puntos de Ω^* a los cuales se les asignan vectores de la forma $(p, q, -1)$.

2.2.1. Definición.

Diremos que la función ϕ definida en un abierto $G \subset \mathbf{R}^2$ es una solución de la ecuación (2.2.1) si se verifican:

- (1) $\phi \in \mathcal{C}^2 G$,
- (2) $F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) = 0$ para cada $(x_1, x_2) \in G$.

La condición de regularidad que pedimos a ϕ es consecuencia de la regularidad exigida a F , que está motivada únicamente para simplificar los argumentos en la demostración de los teoremas de existencia y unicidad.

La condición 2) supone en particular que

$$(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) \in \Omega.$$

Es bastante sorprendente que para la ecuación general también se obtenga el resultado de existencia y unicidad local, mediante la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, como ocurría en el caso más sencillo de la ecuación quasi lineal.

También en este caso va a ser transcendental la interpretación geométrica que podemos hacer de la ecuación en derivadas parciales (2.2.1). La geometría es un poco más complicada en el caso general, pero tan ilustrativa como en el caso quasi lineal. ¿Qué significa la ecuación geoméricamente? Fijemos un punto $(x_1^0, x_2^0, u^0) \in \Omega^*$ y supongamos que ϕ es una solución de la ecuación (2.2.1) definida en cierto abierto G , tal que $u^0 = \phi(x_1^0, x_2^0)$. Si $(p, q, -1)$ designa al vector normal a la gráfica de ϕ en el punto (x_1^0, x_2^0, u^0) , necesariamente ha de verificarse que

$$F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0.$$

Por tanto, para encontrar superficies solución que pasen por un punto hay que buscar entre aquellas cuyo vector normal tiene sus dos primeras coordenadas satisfaciendo la ecuación no lineal $F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0$. En otras palabras, fijado un punto $(x_1^0, x_2^0, u^0) \in \Omega^*$, la ecuación en derivadas parciales (2.2.1) selecciona los parámetros

p y q , de forma que $(p, q, -1)$ es el vector normal a un plano pasando por el punto fijado y que es el candidato a ser un plano tangente a una superficie solución.

La envolvente de esta familia de planos es un cono, el cual recibe el nombre de *cono de Monge* en honor del matemático francés G. Monge, quien introdujo este método para abordar el problema. Así pues, mientras que en el caso quasi lineal la ecuación asigna a cada punto un vector, en el caso general asigna a cada punto el cono de Monge correspondiente. Como se ve, la geometría es en efecto más complicada.

Determinar el cono de Monge que la ecuación asigna a cada punto es nuestra tarea inmediata. Sea $P^0 = (x_1^0, x_2^0, u^0) \in \Omega^*$ un punto fijado; el cono de Monge es la envolvente de la familia de planos

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} (X_1 - x_1^0)p + (X_2 - x_2^0)q = U - u^0 \\ F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0. \end{cases}$$

Como por hipótesis $|F_p| + |F_q| > 0$, podemos suponer que, por ejemplo, $F_p \neq 0$ y, por tanto, que $F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0$ define implícitamente a p como

$$(2.2.3) \quad p = f(x_1^0, x_2^0, u^0, q).$$

Es decir, en realidad (2.2.2) es una familia uniparamétrica de planos. Como consecuencia las generatrices del cono de Monge en el punto P^0 se obtienen como la intersección de los planos en (2.2.2) con

$$0 = (X_1 - x_1^0)\frac{dp}{dq} + (X_2 - x_2^0)$$

Pero derivando implícitamente con P^0 fijo, tenemos que

$$F_p \frac{dp}{dq} + F_q = 0$$

por lo que, tras un cálculo algebraico elemental, las generatrices del cono de Monge escritas en forma continua son

$$\begin{cases} F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0 \\ \frac{X_1 - x_1^0}{F_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q)} = \frac{X_2 - x_2^0}{F_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q)} = \frac{U - u^0}{pF_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) + qF_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q)}. \end{cases}$$

Llamaremos *curvas de Monge* a las que en cada punto son tangentes al cono de Monge, es decir, son las soluciones del sistema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_p(x_1, x_2, u, p, q) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_q(x_1, x_2, u, p, q) \\ \frac{du}{dt} = pF_p(x_1, x_2, u, p, q) + qF_q(x_1, x_2, u, p, q) \\ F(x_1, x_2, u, p, q) = 0. \end{cases}$$

Es claro que, en general, se tiene un parámetro libre, o dicho de otra forma por cada punto de Ω^* pasa una familia uniparamétrica de curvas de Monge. Ahora bien, si una curva de Monge,

$$(x_1(t), x_2(t), u(t)),$$

se supone situada sobre una superficie solución $u = \phi(x_1, x_2)$ entonces la normal a la superficie a lo largo de la curva ha de variar siguiendo las ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = p_{x_1} \frac{dx_1}{dt} + p_{x_2} \frac{dx_2}{dt} = p_{x_1} F_p + p_{x_2} F_q \\ \frac{dq}{dt} = q_{x_1} \frac{dx_1}{dt} + q_{x_2} \frac{dx_2}{dt} = q_{x_1} F_p + q_{x_2} F_q, \end{cases}$$

donde los valores de p_{x_1} , p_{x_2} , q_{x_1} y q_{x_2} se calculan derivando en la ecuación respecto a x_1 y x_2 . Más precisamente, derivando se tienen las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} F_{x_1} + pF_u + F_p p_{x_1} + F_q q_{x_1} = 0 \\ F_{x_2} + qF_u + F_p p_{x_2} + F_q q_{x_2} = 0, \end{cases}$$

y por hipótesis ϕ tienen derivadas segundas continuas, entonces se tiene que $p_{x_2} = q_{x_1}$, por el teorema de Schwartz sobre la igualdad de las *derivadas cruzadas*. Por tanto, despejando, resultan las ecuaciones que deben satisfacer p y q a lo largo de la curva de Monge situada sobre la superficie solución y que son

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -F_{x_1} - pF_u \\ \frac{dq}{dt} = -F_{x_2} - qF_u. \end{cases}$$

De esta manera a la solución $u = \phi(x_1, x_2)$ le hemos asociado una familia de curvas de Monge situadas sobre su gráfica tales que los parámetros p y q satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) \\ \frac{du}{dt} = pF_p(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) + qF_q(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) \\ \frac{dp}{dt} = -F_{x_1} - pF_u \\ \frac{dq}{dt} = -F_{x_2} - qF_u \\ F(x_1^0, x_2^0, u^0, p, q) = 0. \end{cases}$$

Las cinco ecuaciones diferenciales se llaman *sistema característico* relativo a la ecuación en derivadas parciales de primer orden.

Parece natural intentar construir soluciones de la ecuación en derivadas parciales por integración del sistema característico con datos iniciales verificando

$$F(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0) = 0.$$

La primera dificultad es que en apariencia el sistema formado por las cinco ecuaciones diferenciales y la condición sobre los datos es sobredeterminado. A este respecto observemos que si se tiene una solución del sistema característico,

$$(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)),$$

y llamando

$$g(t) = F(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)),$$

se verifica

$$\begin{aligned} g'(t) &= F_{x_1} \frac{dx_1}{dt} + F_{x_2} \frac{dx_2}{dt} + F_u \frac{du}{dt} + F_p \frac{dp}{dt} + F_q \frac{dq}{dt} = \\ &= F_{x_1} F_p + F_{x_2} F_q + F_u (pF_p + qF_q) + F_p (-F_{x_1} - pF_u) + F_q (-F_{x_2} - qF_u) \equiv 0 \end{aligned}$$

Es decir, la función F es constante sobre las características, de forma que si en $t = 0$ se verifica que $0 = F(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0)$, entonces se verifica

$$0 = F(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)),$$

en todo $t \in I$, intervalo de definición de la característica. Esto se traduce en que la sexta condición es compatible con el sistema de ecuaciones diferenciales característico y, por tanto, que el problema es soluble.

Conviene ahora reflexionar sobre el significado geométrico del sistema característico y de sus soluciones.

Una solución del sistema característico debe entenderse como una curva en el espacio \mathbf{R}^3 , $(x_1(t), x_2(t), u(t))$ y, a lo largo de ella, una familia de planos cuyo vector normal es $(p(t), q(t), -1)$. Observemos que

$$(2.2.4) \quad u'(t) = x_1'(t)p(t) + x_2'(t)q(t),$$

es decir, se trata de planos tangentes a la curva.

Para t_0 fijo el punto correspondiente, $(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0)$, de la solución del sistema característico será llamado un *elemento de banda*, en el sentido que las dos últimas coordenadas son las componentes de un plano tangente. A las soluciones del sistema característico las llamaremos *bandas características* por verificar (2.2.4) y diremos que $(x_1(t), x_2(t), u(t))$ es la curva característica soporte.

El resultado que sigue establece que toda solución de la ecuación en derivadas parciales está engendrada por *bandas características*. Este resultado es en realidad un resultado de unicidad como veremos; además indica como deben de construirse las soluciones. En concreto establece que dada una solución de la ecuación en derivadas parciales, si tomamos un punto de su gráfica y el vector normal al plano tangente a ella en dicho punto, la banda característica con tales datos iniciales, verifica que su curva característica soporte, $(x_1(t), x_2(t), u(t))$, está contenida en la superficie solución para todo t , siendo además $(p(t), q(t), -1)$ el vector normal a la superficie solución en el punto $(x_1(t), x_2(t), u(t))$.

2.2.2. Lema.

Sea $(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t))$ banda característica definida en el intervalo I y sea $u = \phi(x_1, x_2)$ solución de $F(x_1, x_2, u, p, q) = 0$. Si para algún t_0 se tiene que

$$(2.2.5) \quad \begin{cases} u(t_0) = \phi(x_1(t_0), x_2(t_0)) \\ p(t_0) = \phi_{x_1}(x_1(t_0), x_2(t_0)) \\ q(t_0) = \phi_{x_2}(x_1(t_0), x_2(t_0)), \end{cases}$$

entonces para cada $t \in I$ se verifica

$$(2.2.6) \quad \begin{cases} u(t) = \phi(x_1(t), x_2(t)) \\ p(t) = \phi_{x_1}(x_1(t), x_2(t)) \\ q(t) = \phi_{x_2}(x_1(t), x_2(t)). \end{cases}$$

Demostración.

Sea

$$(x_1^0, x_2^0, u^0, p^0, q^0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), p(t_0), q(t_0)),$$

verificando la hipótesis (2.2.5). Consideramos las ecuaciones diferenciales

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} x_1'(t) = F_p(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) \\ x_2'(t) = F_q(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)), \end{cases}$$

que resultan de sustituir en las dos primeras ecuaciones del sistema característico la solución y sus derivadas parciales. Si consideramos el dato inicial

$$(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (x_1^0, x_2^0)$$

el sistema (2.2.7) tiene una solución única, $(y_1(t), y_2(t))$, pues el sistema está en las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de Picard por las condiciones exigidas a F . (Véanse las referencias sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de la Bibliografía).

Si definimos $z(t) = \phi(y_1(t), y_2(t))$, tenemos que la curva $(y_1(t), y_2(t), z(t))$, está sobre la superficie solución. Además derivando se tiene que

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} z'(t) = \phi_{x_1} \frac{dy_1}{dt} + \phi_{x_2} \frac{dy_2}{dt} = \phi_{x_1} F_p + \phi_{x_2} F_q \\ \phi'_{x_1}(t) = \phi_{x_1 x_1} y'_1(t) + \phi_{x_2 x_1} y'_2(t) = \phi_{x_1 x_1} F_p + \phi_{x_2 x_1} F_q \\ \phi'_{x_2}(t) = \phi_{x_2 x_1} y'_1(t) + \phi_{x_2 x_2} y'_2(t) = \phi_{x_2 x_1} F_p + \phi_{x_2 x_2} F_q \end{cases}$$

y donde $\phi(x_1^0, x_2^0) = u^0$, $\phi_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = p^0$ y $\phi_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = q^0$. Como $u = \phi(x_1, x_2)$ es solución también se verifica $F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) = 0$, derivando respecto a x_1 y a x_2 tenemos

$$(2.2.9) \quad \begin{cases} F_{x_1} + F_u \phi_{x_1} + F_p \phi_{x_1 x_1} + F_q \phi_{x_2 x_1} = 0 \\ F_{x_2} + F_u \phi_{x_2} + F_p \phi_{x_1 x_2} + F_q \phi_{x_2 x_2} = 0 \end{cases}$$

De (2.2.9) obtenemos el segundo miembro de (2.2.8), es decir, las dos últimas ecuaciones de (2.2.8) se transforman en

$$\begin{cases} \frac{d\phi_{x_1}}{dt} = -\phi_{x_1} F_u - F_{x_1} \\ \frac{d\phi_{x_2}}{dt} = -\phi_{x_2} F_u - F_{x_2}. \end{cases}$$

En resumen, las funciones

$$(y_1(t), y_2(t), z(t), \phi_{x_1}(y_1(t), y_2(t)), \phi_{x_2}(y_1(t), y_2(t)))$$

son soluciones del sistema característico con el mismo dato inicial que satisface la banda característica considerada y

$$F(y_1(t), y_2(t), z(t), \phi_{x_1}(y_1(t), y_2(t)), \phi_{x_2}(y_1(t), y_2(t))) = 0.$$

Por el teorema de Picard aplicado al sistema característico, hay una única solución, es decir,

$$(x_1(t), x_2(t), u(t), p(t), q(t)) \equiv (y_1(t), y_2(t), z(t), \phi_{x_1}(y_1(t), y_2(t)), \phi_{x_2}(y_1(t), y_2(t)))$$

□

Tras el lema (2.2.2) parece natural que la forma de proceder para construir soluciones de la ecuación en derivadas parciales (2.2.1) sea la siguiente:

Para una *banda inicial* dada, calcular las bandas características que la tienen por dato inicial.

Sea una curva dato $(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s))$ regular. Para tal curva dato hallamos funciones $(p^0(s), q^0(s))$ que verifiquen

i) *Condición de banda.*-

$(p^0(s), q^0(s), -1)$ es un vector normal a la tangente a $(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s))$ en cada s , es decir,

$$(2.2.10) \quad \frac{dx_1^0}{ds} p^0 + \frac{dx_2^0}{ds} q^0 = \frac{du^0}{ds}.$$

ii) *Condición de compatibilidad.*-

Para la *banda inicial* resultante,

$$(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)),$$

se satisface

$$(2.2.11) \quad F(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) = 0,$$

que es la condición sobre los datos iniciales para que el sistema característico no sea sobredeterminado.

Por razones análogas a las argumentadas en el caso *quasi lineal* supondremos que la curva dato no es tangente a las características en ningún punto. De esta manera es de esperar que se pueda generar plano tangente.

Es claro que para que no sea tangente a las características, su vector tangente no tiene que ser colineal con el segundo miembro del sistema característico, es decir, debemos imponer la *condición de transversalidad* siguiente

$$(2.2.12) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{dx_1^0}{ds} & \frac{dx_2^0}{ds} \\ F_p(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) & F_q(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \end{pmatrix} \neq 0,$$

la cual excluye simultáneamente la posibilidad de que la curva dato tenga tangente paralela al eje u .

Con estos prerequisites podemos formular precisamente el problema de valores iniciales para la ecuación (2.2.1).

Problema de Cauchy.

Sea la ecuación

$$F(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0$$

bajo las hipótesis generales.

Dada una banda inicial,

$$(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)),$$

verificando (2.2.10), (2.2.11) y (2.2.12), se trata de obtener una solución de la ecuación,

$$\phi : G \subset \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},$$

tal que

$$\begin{cases} \phi(x_1^0(s), x_2^0(s)) = u^0(s) \\ \phi_{x_1}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = p^0(s) \\ \phi_{x_2}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = q^0(s). \end{cases}$$

A continuación demostramos el resultado de existencia y unicidad para el problema de Cauchy.

Se van a utilizar el teorema de la función inversa, de nuevo el teorema de Cauchy-Picard y el teorema de Peano de derivabilidad respecto a parámetros, de los cuales hemos dado ya referencias con anterioridad.

2.2.3. Teorema.

Sea la ecuación en derivadas parciales

$$(2.2.13) \quad F(x_1, x_2, u, p, q) = 0$$

donde la función

$$F : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

tiene derivadas segundas continuas en Ω y verifica $|F_p| + |F_q| > 0$. Sea $(x_1^0(s), x_2^0(s))$ y $u^0(s)$, definidas en $I \subset \mathbf{R}$ y con derivada segunda continua en I . Sean $p^0(s)$ y $q^0(s)$ con derivada primera continua en I satisfaciendo:

i).- Condición de banda,

$$(2.2.14) \quad \begin{cases} \frac{dx_1^0}{ds}(s)p^0(s) + \frac{dx_2^0}{ds}(s)q^0(s) = \frac{du^0}{ds}(s) \\ F(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) = 0. \end{cases}$$

ii).- Condición de transversalidad,

$$(2.2.15) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{dx_1^0}{ds}(s) & \frac{dx_2^0}{ds}(s) \\ F_p(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) & F_q(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Entonces existe un entorno $G \subset \mathbf{R}^2$ de la curva $(x_1^0(s), x_2^0(s))$ y una única función $\phi : G \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que:

$$(2.2.16) \quad \begin{cases} F(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2), \phi_{x_1}(x_1, x_2), \phi_{x_2}(x_1, x_2)) = 0 & \text{para cada } (x_1, x_2) \in G \\ \phi(x_1^0(s), x_2^0(s)) = u^0(s) \\ \phi_{x_1}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = p^0(s) \\ \phi_{x_2}(x_1^0(s), x_2^0(s)) = q^0(s). \end{cases}$$

Observación.-De forma implícita estamos suponiendo que

$$(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \in \Omega$$

Demostración.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales característico con dato inicial la banda del enunciado, es decir, para cada $s \in I$ se considera,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_p, & x_1(0) &= x_1^0(s) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_q, & x_2(0) &= x_2^0(s) \\ \frac{du}{dt} &= pF_p + qF_q, & u(0) &= u^0(s) \\ \frac{dp}{dt} &= -F_{x_1} - pF_u, & p(0) &= p^0(s) \\ \frac{dq}{dt} &= -F_{x_2} - qF_u, & q(0) &= q^0(s). \end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única solución. Por las hipótesis de regularidad de F y de la banda dato, se concluye que la solución

$$\begin{cases} x_1 = X_1(s, t) \\ x_2 = X_2(s, t) \\ u = U(s, t) \\ p = P(s, t) \\ q = Q(s, t), \end{cases}$$

es derivable con continuidad respecto a s y t .

Por (2.2.14) y la compatibilidad se tiene que

$$F(X_1(s, t), X_2(s, t), U(s, t), P(s, t), Q(s, t)) = 0.$$

Por (2.2.15) y satisfacerse los datos iniciales tenemos que $(X_1(s, t), X_2(s, t), U(s, t))$ define una superficie paramétricamente en un entorno de la curva dato. En efecto, el rango de la matriz jacobiana de (X_1, X_2, U) respecto a (s, t) , es dos en un entorno de la curva dato, pues

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dx_1^0}{ds} & \frac{dx_2^0}{ds} \\ F_p(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) & F_q(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s)) \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} X_{1s} & X_{2s} \\ X_{1t} & X_{2t} \end{pmatrix} =$$

por la condición de transversalidad (2.2.15).

Como consecuencia de la observación anterior y del teorema de la función inversa se puede definir en entornos convenientemente pequeños de los puntos de la curva dato,

$$\begin{cases} s &= s(x_1, x_2) \\ t &= t(x_1, x_2) \end{cases}$$

Entonces podemos considerar las funciones compuestas

$$\begin{cases} u = U(s, t) = U(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) \equiv u(x_1, x_2) \\ p = P(s, t) = P(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) \equiv p(x_1, x_2) \\ q = Q(s, t) = Q(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) \equiv q(x_1, x_2) \end{cases}$$

Además, como

$$F(X_1(s, t), X_2(s, t), U(s, t), P(s, t), Q(s, t)) = 0,$$

se tiene, sustituyendo

$$F(x_1, x_2, u(x_1, x_2), p(x_1, x_2), q(x_1, x_2)) = 0.$$

Para terminar la demostración del teorema lo único que falta establecer es que $u_{x_1} = p$ y $u_{x_2} = q$.

Este extremo va a exigir algunos cálculos que pasamos a efectuar a continuación.

Consideremos la función

$$f(s, t) = U_s - PX_{1s} - QX_{2s},$$

que para $t = 0$ verifica $f(s, 0) = 0$ por la condición de banda (2.2.14). Queremos establecer que f es idénticamente nula, lo que geoméricamente significa que para cada t fijo, $(P, Q, -1)$ es un vector normal al plano tangente a (X_1, X_2, U) . Para establecer que $f(s, t) \equiv 0$, se deriva respecto a t , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) &= \\ &= U_{st} - P_t X_{1s} - P X_{1st} - Q_t X_{2s} - Q X_{2st} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(U_t - P X_{1t} - Q X_{2t}) + P_s X_{1t} + Q_s X_{2t} - P_t X_{1s} - Q_t X_{2s} = \\ &= F_p P_s + F_q Q_s + (F_{x_1} + F_u P) X_{1s} + (F_{x_2} + F_u Q) X_{2s}, \end{aligned}$$

pues $U_t - P X_{1t} - Q X_{2t} \equiv 0$ y por las ecuaciones del sistema característico. Si se suma y se resta $F_u U_s$ y se reordenan términos se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) &= \\ &= F_{x_1} X_{1s} + F_{x_2} X_{2s} + F_u U_s + F_p P_s + F_q Q_s - F_u (U_s - P X_{1s} - Q X_{2s}) = \\ &= F_s - F_u f \equiv -F_u f, \end{aligned}$$

ya que $F_s \equiv 0$ por ser $F(X_1(s, t), X_2(s, t), U(s, t), P(s, t), Q(s, t)) \equiv 0$.

Llamemos $y(t) = f(s, t)$ para s fijo. Se ha obtenido la ecuación

$$y'(t) = -F_u y(t)$$

que tiene como solución

$$y(t) = y(0) \exp\left\{-\int_0^t F_u dr\right\}$$

Como se tiene que $y(0) = 0$ resulta que $f(s, t) \equiv 0$, que se traduce en

$$U_s = PX_{1s} + QX_{2s}.$$

Esta ecuación y la tercera ecuación característica da el siguiente sistema,

$$(2.2.17) \quad \begin{cases} U_s = & PX_{1s} + QX_{2s} \\ U_t = & PX_{1t} + QX_{2t} \end{cases}$$

Además, teniendo en cuenta que $U(s, t) = u(X_1(s, t), X_2(s, t))$ y que, por ser funciones inversas,

$$\begin{cases} x_1 &= X_1(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) \\ x_2 &= X_2(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)), \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{cases} U_s = & u_{x_1} X_{1s} + u_{x_2} X_{2s} \\ U_t = & u_{x_1} X_{1t} + u_{x_2} X_{2t} \end{cases}$$

En consecuencia

$$(2.2.18) \quad (P, Q) \equiv (u_{x_1}, u_{x_2})$$

por ser soluciones de un mismo sistema lineal determinado, ya que

$$\det \begin{pmatrix} X_{1s} & X_{2s} \\ X_{1t} & X_{2t} \end{pmatrix} \neq 0$$

por la condición de transversalidad. Pero (2.2.18) se traduce en que

$$\begin{cases} P(s, t) &= u_{x_1}(X_1(s, t), X_2(s, t)) \\ Q(s, t) &= u_{x_2}(X_1(s, t), X_2(s, t)), \end{cases}$$

o bien,

$$\begin{cases} p(x_1, x_2) &= u_{x_1}(x_1, x_2) \\ q(x_1, x_2) &= u_{x_2}(x_1, x_2). \end{cases}$$

De esta forma queda establecido que $u(x_1, x_2)$ es solución de la ecuación. Que verifica el dato inicial es la siguiente sencilla comprobación:

$$\begin{aligned} u(x_1^0(s), x_2^0(s)) &= u(X_1(s, 0), X_2(s, 0)) = U(s, 0) = u^0(s), \\ u_{x_1}(x_1^0(s), x_2^0(s)) &= p(x_1^0(s), x_2^0(s)) = p(X_1(s, 0), X_2(s, 0)) = P(s, 0) = p^0(s), \\ u_{x_2}(x_1^0(s), x_2^0(s)) &= q(x_1^0(s), x_2^0(s)) = q(X_1(s, 0), X_2(s, 0)) = Q(s, 0) = q^0(s). \end{aligned}$$

Por último, la unicidad es consecuencia directa del lema (2.2.2). Para establecerla, supongamos que existe otra solución $v = \psi(x_1, x_2)$, definida en un entorno de la curva dato. Trabajaremos en el entorno intersección del dominio de u y del dominio de v . Como el dato inicial $(x_1^0(s), x_2^0(s), u^0(s), p^0(s), q^0(s))$ es común a las dos soluciones, la banda característica es común también a las dos soluciones según el lema (2.2.2). Si tal banda es

$$x_1 = X_1(s, t), \quad x_2 = X_2(s, t), \quad u = U(s, t), \quad p = P(s, t), \quad q = Q(s, t)$$

se tiene

$$v(X_1(s, t), X_2(s, t)) = U(s, t) = u(X_1(s, t), X_2(s, t))$$

Y esto concluye la prueba. \square

Como en la sección 2.1 el resultado es local. Nótese que demostramos la existencia en el entorno de cada punto de la banda dato. El entorno de la banda es la unión de tales entornos y la solución está bien definida dado que por la unicidad sobre las intersecciones de los entornos tiene un solo valor.

Para acabar esta sección ensayamos lo aprendido hasta ahora aplicándolo a un ejemplo que viene de la Óptica Geométrica: La ecuación *eikonal*.

Ejemplo.

Consideremos la ecuación

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Desde el punto de vista geométrico la ecuación puede interpretarse como sigue. Sea $(p, q, -1)$, vector normal a una superficie solución, la proyección sobre el plano x_1x_2 según la ecuación tiene longitud 1, de forma que en el vector $e_2 = (p, q, -1)$ y el eje u forman un ángulo tal que

$$\arctan(-1) = \theta,$$

o, lo que es equivalente, el plano tangente forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje u .

En óptica geométrica las líneas de nivel de las soluciones son llamadas *frentes de onda* y las curvas características *rayos*.

Es evidente que la ecuación satisface las condiciones de regularidad en

$$\Omega = \mathbf{R}^3 \times (\mathbf{R}^2 - 0).$$

Un sencillo cálculo pone de manifiesto que el cono de Monge en el punto (x_1^0, x_2^0, u^0) viene dado por las ecuaciones,

$$\begin{cases} (u - u^0) = p(x_1 - x_1^0) + q(x_2 - x_2^0) \\ \frac{x_1 - x_1^0}{2p} = \frac{x_2 - x_2^0}{2q} \\ 1 = p^2 + q^2. \end{cases}$$

El sistema característico es entonces

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2p \\ \frac{dx_2}{dt} = 2q \\ \frac{du}{dt} = 2(p^2 + q^2) \\ \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{dq}{dt} = 0 \\ 1 = p^2 + q^2, \end{cases}$$

y sustituyendo la sexta ecuación en la tercera el sistema se transforma en

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2p \\ \frac{dx_2}{dt} = 2q \\ \frac{du}{dt} = 2 \\ \frac{dp}{dt} = 0 \\ \frac{dq}{dt} = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones se obtienen por integración elemental y resultan ser

$$\begin{cases} x_1 = 2p^0 t + x_1^0 \\ x_2 = 2q^0 t + x_2^0 \\ u = 2t + u^0 \\ p = p^0 \\ q = q^0 \\ 1 = p^2 + q^2. \end{cases}$$

Es claro ahora el porque del nombre de rayos que reciben las características.

Dada una curva dato en \mathbf{R}^3 ,

$$\Gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)),$$

los datos iniciales que se consideran para el sistema característico son las bandas obtenidas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} p^0(s)\alpha'(s) + q^0(s)\beta'(s) = \gamma'(s) \\ [p^0(s)]^2 + [q^0(s)]^2 = 1. \end{cases}$$

El signo del discriminante de la ecuación de segundo grado que resulta de eliminar q^0 entre las dos ecuaciones es el mismo que la expresión

$$D = [\alpha']^2 + [\beta']^2 - [\gamma']^2.$$

Por tanto, si $D < 0$ no hay solución real y si $D > 0$ hay dos posibles bandas iniciales asociadas a la curva dato, a las cuales hay que imponer la condición de transversalidad

$$q^0\alpha' - p^0\beta' \neq 0.$$

Una vez obtenida la banda inicial se tiene la solución en paramétricas como en la prueba del teorema, por integración del sistema característico.

Obsérvese que si $\gamma(s)$ es constante se verifica que $D \geq 0$ y tenemos solución que se escribe en paramétricas,

$$\begin{cases} x_1 = 2p^0(s)t + \alpha(s) \\ x_2 = 2q^0(s)t + \beta(s) \\ u = 2t + \gamma(s) \\ p = p^0(s) \\ q = q^0(s). \end{cases}$$

2.3.- Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Tras el estudio del problema de Cauchy para las ecuaciones de primer orden que se ha hecho en las secciones anteriores, parece natural plantear el mismo problema para ecuaciones de orden superior. Nos limitaremos a dar algunos resultados de carácter cualitativo general, para ecuaciones de segundo orden y sólo en lo referente a la estructura algebraica de la ecuación, que es lo que permitirá la *clasificación en tipos*.

Comenzamos por estudiar algunos ejemplos que ayudan a ver los diferentes comportamientos del problema de Cauchy según las ecuaciones.

Todos ellos tienen en común que se trata de ecuaciones de orden dos en \mathbf{R}^2 y que, por tanto, fijamos dos datos; el valor de la función y de la derivada respecto a la dirección normal en una recta.

Ejemplo 1. Consideremos el problema siguiente

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} u_{xt} &= 0 \\ u(x, 0) &= \phi_0(x) \\ u_t(x, 0) &= \phi_1(x). \end{cases}$$

Suponemos los datos regulares, por ejemplo, con segunda derivada continua.

Sea $u(x, t)$ una solución *clásica*, es decir, una función con segundas derivadas continuas que verifica la ecuación puntualmente. Entonces, en particular, se verifica

$$0 = u_{xt}(x, 0) = \phi_{1,x} = \phi_1'(x),$$

es decir, ϕ_1 *necesariamente es constante*. En consecuencia el problema (3.2.1) *no es soluble para cualquier dato*; pero, además, si se supone la condición de compatibilidad, $\phi_1 \equiv c$, donde c es constante, por integración elemental se tiene

$$u_t(x, t) = \alpha(t) \quad \text{independiente de } x,$$

por lo que todas las funciones verificando la ecuación son de la forma

$$u(x, t) = w_1(x) + w_2(t)$$

De esta manera si tomamos una función $w_2(t) = ct + at^2$ con a arbitrario,

$$u_a(x, t) = \phi_0(x) + ct + at^2,$$

es solución.

Tenemos así una alternativa extrema

- i) El problema (2.3.1) no es soluble si ϕ_1 no es constante.
- ii) Si ϕ_1 es constante, el problema (2.3.1) tiene infinitas soluciones.

Como el lector ha comprendido la elección de w_2 solo requiere que $w_2(0) = 0$ y $w_2'(0) = c$. Por ejemplo, $w_2 = ct + t^r$, $r > 0$, son elecciones válidas.

Ejemplo 2. Consideramos ahora el siguiente problema para la ecuación del calor

$$(2.3.2) \quad \begin{cases} u_t = & u_{xx} \\ u(x, 0) = & \phi_0(x) \\ u_t(x, 0) = & \phi_1(x), \end{cases}$$

con datos regulares. Entonces en particular

$$\phi_1(x) = u_t(x, 0) = u_{xx}(x, 0) = \phi_0''(x).$$

Es decir, es un problema sobredeterminado. En este caso es más natural el resultado pues respecto a la variable t , la ecuación del calor es solo de orden 1.

Ejemplo 3. El problema que sigue requiere el uso de algunos resultados básicos de variable compleja. (Si fuese necesario, el lector puede encontrarlos en *L.V. Ahlfors, "Complex Analysis", Mc Graw Hill, 1979*)

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } y > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_y(x, 0) = h(x). \end{cases}$$

Una función $u(x, y)$ con segundas derivadas continuas y verificando la ecuación es llamada *armónica* y se verifica que $u = \Re f(z)$ para $f = u + iv$ función analítica en $y > 0$.

El *principio de reflexión de Schwarz* prueba que en nuestras hipótesis la función

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \Im z \geq 0 \\ \bar{f}(\bar{z}) & \Im z \leq 0, \end{cases}$$

donde $\bar{f} = u - iv$ es la función conjugada de f , es analítica. Además $\Re \tilde{f} = \tilde{u}$ donde

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & y \geq 0 \\ u(x, -y) & y \leq 0, \end{cases}$$

y por tanto es analítica real. Pero en particular, $\tilde{u}(x, 0)$ y $\tilde{u}_y(x, 0)$ son analíticas reales. En consecuencia, si h no es analítica *no hay solución*, o dicho de otra forma el problema (2.3.3) es sobredeterminado. Podemos enunciar entonces que el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace es sobredeterminado.

Ejemplo 4. Por último vamos a analizar otro problema de valores iniciales. Se trata de la ecuación de ondas.

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Si se hace el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(x + t) \\ T = \frac{1}{2}(x - t) \end{cases}$$

la ecuación se transforma en

$$(2.3.5) \quad u_{XT} = 0$$

(véase la Sección 4.1 para encontrar todos los detalles).

Como se vio en el ejemplo 1 la solución general de (2.3.5) es

$$u(X, T) = w_1(X) + w_2(T),$$

o bien en las coordenadas primitivas

$$u(x, t) = w_1(x + t) + w_2(x - t).$$

Si se imponen los datos se obtiene *de manera única* que la solución de (2.3.4) es

$$u(x, t) = \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

que es la conocida como fórmula de D'Alembert. (Véase Sección 4.1.)

Si se reflexiona sobre los ejemplos anteriores lo único que parece claro hasta el momento es que el problema de Cauchy respecto a existencia y unicidad de la solución depende de alguna *misteriosa* relación entre la ecuación en derivadas parciales y la superficie donde se prescriben los datos.

Analizaremos brevemente qué es lo que ocurre estudiando las ecuaciones de segundo orden en dos variables independientes. Así, la ecuación lineal general es

$$(2.3.6) \quad a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y).$$

Para tratar de encontrar una forma equivalente y sencilla de la ecuación (2.3.6), se considera el cambio de variables

$$(2.3.7) \quad \begin{cases} t = \phi(x, y) \\ s = \psi(x, y), \end{cases}$$

es decir, funciones regulares en \mathbf{R}^2 tales que su jacobiano es distinto de cero. En estas hipótesis (2.3.7) es un cambio de variables *local*. Supondremos además que la aplicación (2.3.7) de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 es biyectiva.

Respecto a este cambio de variables las derivadas se transforman como sigue

$$(2.3.8) \quad \begin{aligned} u_x &= u_t t_x + u_s s_x, \\ u_y &= u_t t_y + u_s s_y, \\ u_{xx} &= u_{tt}(t_x)^2 + 2u_{ts}t_x s_x + u_{ss}(s_x)^2 + u_t t_{xx} + u_s s_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{tt}(t_y)^2 + 2u_{ts}t_y s_y + u_{ss}(s_y)^2 + u_t t_{yy} + u_s s_{yy}, \\ u_{xy} &= u_{tt}t_x t_y + u_{ts}(t_x s_y + t_y s_x) + u_{ss}s_x s_y + u_t t_{xy} + u_s s_{xy}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3.6) se obtiene

$$\alpha_{11}u_{tt} + 2\alpha_{12}u_{ts} + \alpha_{22}u_{ss} + R(t, s, u, u_t, u_s) = 0,$$

donde R es una función lineal en u , u_t , u_s y es independiente de las derivadas segundas. Los nuevos coeficientes son

$$(2.3.9) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= a_{11}(t_x)^2 + 2a_{12}t_xt_y + a_{22}(t_y)^2, \\ \alpha_{12} &= a_{11}t_xs_x + a_{12}(t_xs_y + t_ys_x) + a_{22}t_ys_y, \\ \alpha_{22} &= a_{11}(s_x)^2 + 2a_{12}s_xs_y + a_{22}(s_y)^2. \end{aligned}$$

Observamos que α_{11} y α_{22} tienen la misma forma. Una manera de simplificar la ecuación es intentar encontrar el cambio de variables de forma que

$$\alpha_{11} = 0 = \alpha_{22}.$$

Pero esto es equivalente a encontrar dos soluciones de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$(2.3.10) \quad a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0,$$

que tengan jacobiano no nulo. Si $\phi(x, y)$ es solución de (2.3.10), a la curva $\phi(x, y) = c$ la llamaremos *curva característica* de la ecuación en derivadas parciales (2.3.6). El resultado de si existen dos curvas características por cada punto, será positivo o no, dependiendo de cuantas bandas iniciales asocia la ecuación a cada punto, y ello es equivalente a estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0.$$

En función de este discriminante clasificaremos la ecuación. Sea $\mathcal{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ entonces,

- 1) La ecuación (2.3.6) es de *tipo hiperbólico* si y sólo si $\mathcal{D} > 0$.
- 2) La ecuación (2.3.6) es de *tipo elíptico* si y sólo si $\mathcal{D} < 0$.
- 3) La ecuación (2.3.6) es de *tipo parabólico* si y sólo si $\mathcal{D} = 0$.

A) Es claro que en el caso de ser la ecuación de tipo hiperbólico puede conseguirse que

$$\alpha_{11} = 0 = \alpha_{22},$$

eligiendo ϕ y ψ soluciones independientes de la ecuación (2.3.10). En este caso la ecuación se reduce a su forma *normal*

$$(2.3.11) \quad u_{ts} = F$$

donde $F = \frac{R}{\alpha_{12}}$. Si ahora hacemos el cambio

$$(2.3.12) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}(s+t) \\ T = \frac{1}{2}(s-t) \end{cases}$$

la ecuación (2.3.11) se transforma en la ecuación de ondas

$$(2.3.13) \quad u_{XX} - u_{TT} = 4F,$$

es decir, la ecuación de ondas es la forma *canónica* de las ecuaciones de tipo hiperbólico.

B) Si la ecuación es de tipo elíptico, es decir, $\mathcal{D} < 0$, podemos tomar las bandas iniciales con valores complejos, obteniéndose de esta forma una solución de (2.3.10), $t = \phi$, que tiene valores complejos. Además la conjugada compleja $s = \bar{\phi}$ de ϕ es la otra solución independiente. Se deja al lector comprobar todos los extremos formales de estas aseveraciones.

Se puede ahora seguir el mismo proceso que en el caso hiperbólico y, para no trabajar con cantidades complejas, podemos considerar el cambio de variables

$$(2.3.14) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}(s + t) \\ Y = \frac{1}{2i}(s - t) \end{cases}$$

que provee la forma *normal*

$$(2.3.15) \quad u_{XX} + u_{YY} = 4F$$

Como vemos la ecuación de Poisson o, si se prefiere, la ecuación de Laplace no homogénea, es la forma *canónica* de las ecuaciones de tipo elíptico.

C) Si $\mathcal{D} = 0$, es decir, si la ecuación (2.3.6) es de tipo parabólico, tenemos una única banda que proporciona una solución $t = \phi(x, y)$. Tomamos una función arbitraria que complete el cambio de variables $s = \psi(x, y)$. Obsérvese que por ser $\mathcal{D} = 0$ tenemos

$$a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}},$$

de donde,

$$\alpha_{11} = (\sqrt{a_{11}}t_x + \sqrt{a_{22}}t_y)^2 = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= a_{11}t_x s_x + a_{12}(t_x s_y + t_y s_x) + a_{22}t_y s_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}t_x + \sqrt{a_{22}}t_y)(\sqrt{a_{11}}s_x + \sqrt{a_{22}}s_y) = 0. \end{aligned}$$

En resumen, la ecuación se reduce a la forma *canónica*

$$(2.3.16) \quad u_{ss} = G,$$

donde $G = \frac{R}{\alpha_{22}}$.

La ecuación del calor es un caso de ecuación de tipo parabólico.

Como puede verse las ecuaciones tipo aparecen como *Formas Canónicas* de las ecuaciones de segundo orden. Los nombres adjudicados a cada clase son motivados por la siguiente observación. Cada clase corresponde al caso que la forma cuadrática

$$(x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

represente geoméricamente a una hipérbola, una elipse o una parábola, respectivamente.

De esta forma es natural extender este tipo de clasificación a ecuaciones en \mathbf{R}^N . En efecto, sea la ecuación de segundo orden

$$\mathcal{P}(x, D)u \equiv \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c(x)u + f(x) = 0, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

a la que asociamos la ecuación de las *superficies características* que por analogía al caso de $n = 2$ es

$$(2.3.17) \quad \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij}(x)\phi_{x_i}\phi_{x_j} = 0.$$

La forma cuadrática asociada en un punto x_0 , es

$$(2.3.18) \quad \mathcal{Q}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}(x_0) & a_{12}(x_0) & \dots & a_{1n}(x_0) \\ a_{11}(x_0) & a_{22}(x_0) & \dots & a_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x_0) & a_{n2}(x_0) & \dots & a_{nn}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

que como es simétrica, por hipótesis, tiene todos sus autovalores reales. Se define el *índice de inercia* T de (2.3.18), como el número de autovalores negativos. Se define también el *defecto* D de (2.3.18), como el número de autovalores nulos.

Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

- 1) La ecuación (2.3.17) es de *tipo elíptico* si y sólo si $D = 0$ y $T = 0$ o $D = 0$ y $T = n$.
- 2) La ecuación (2.3.17) es de *tipo hiperbólico* si y sólo si $D = 0$ y $T = 1$ o $D = 0$ y $T = n - 1$.
- 3) La ecuación (2.3.17) es de *tipo parabólico* si y sólo si $D > 0$.
- 4) La ecuación (2.3.17) es de *tipo ultra-hiperbólico* si y sólo si $1 < T < n - 1$ y $D = 0$.

Dejamos que el lector complemente toda la parte algebraica que necesite. Una referencia a tal efecto puede ser el capítulo 6 del libro "*Topics in Algebra*" de I.N. Herstein (Ed. John Wiley 1975).

A la vista de estas consideraciones volvemos a nuestro problema inicial de intentar entender la diversidad de comportamiento de los ejemplos de los que partió nuestro estudio. Por claridad consideramos sólo el caso $n = 2$.

Tenemos que la ecuación que define las características asigna un cono de direcciones a cada punto x_0 ,

$$C(x_0) = \{(\eta_1, \eta_2) \mid a_{11}(x_0)\eta_1^2 + 2a_{12}(x_0)\eta_1\eta_2 + a_{22}(x_0)\eta_2^2 = 0\},$$

al cual llamaremos *cono característico*.

Si se toma una dirección $\eta \in C(x_0)$ y la característica con tal dirección como normal, el cambio de variables que se hizo antes da que:

La ecuación no es de orden dos en la dirección η .

Como consecuencia:

Si fijamos datos sobre una característica el problema de Cauchy resultante es sobredeterminado.

Ejemplos.

1'.- La ecuación $u_{xt} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) \mid \eta_1\eta_2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y las curvas características son

$$x = \alpha, \quad y = t = \beta.$$

El Ejemplo 1) del comienzo tiene fijados los datos sobre la característica $t = 0$ y es sobredeterminado.

2'.- La ecuación $u_t - u_{xx} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) \mid \eta_2^2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(0, 1)$ y las curvas características son

$$t = \beta.$$

En el Ejemplo 2) del comienzo se tiene fijados los datos sobre la característica $t = 0$ y es sobredeterminado.

Veremos en el capítulo correspondiente a la ecuación del calor, que en este caso tiene sentido considerar el problema de Cauchy con único dato $u(x, 0)$.

3'.- La ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) | \eta_1^2 + \eta_2^2 = 0\} \equiv \{0\},$$

es decir, el cono es degenerado. No hay características reales, por consiguiente. El ejemplo 3) del comienzo tiene fijados los datos sobre $t = 0$ y es sobredeterminado.

En este caso necesitaremos consideraciones de otro tipo, que se harán más adelante.

4'.- La ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ tiene como cono característico a

$$C = \{(\eta_1, \eta_2) | \eta_1^2 - \eta_2^2 = 0\}.$$

Las direcciones características son $(1, 1)$ y $(1, -1)$ y las curvas características son

$$x + t = \alpha, \quad y \quad x - t = \beta$$

En este caso el ejemplo 4 tiene fijados los datos sobre $t = 0$, *que no es característica* y el problema tiene solución única.

Consideremos el problema de Cauchy con datos en la superficie

$$S = \{(x, y) | g(x, y) = 0\},$$

es decir,

$$(P) \quad \begin{cases} a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \\ + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \\ u(x, y) = u_0(x, y) \quad \text{si} \quad (x, y) \in S \\ u_\nu(x, y) = u_1(x, y) \quad \text{si} \quad (x, y) \in S, \end{cases}$$

donde u_ν significa la derivada de u en la dirección ν de la normal a S . Como resumen de esta sección tenemos:

- *El comportamiento del problema de Cauchy (P) depende de si la curva S sobre la que se fijan los datos es solución o no de*

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0,$$

es decir, si S es característica o no.

- *Si S es característica la ecuación no es genuinamente de orden dos en la dirección de su normal y , en consecuencia, el problema (P) es sobredeterminado.*

- En el caso en que no hay características reales, es decir, cuando la ecuación es de tipo elíptico el problema (P) es sobredeterminado, pero en este caso el comportamiento está determinado por la propia ecuación.

Su estudio se hace a continuación.

Esclarecemos lo que ocurre en el caso de la ecuación de Laplace. Nos fijamos en la ecuación escrita en forma normal con coeficientes constantes

$$u_{tt} = au_{xx} + bu_{xt} + cu_t + du_x + eu, \quad a, b, c, d, e \in \mathbf{R},$$

y buscamos soluciones de la forma $u(x, t) = e^{\lambda t + ix\xi}$ para $\xi \in \mathbf{R}$ fijo. De esta forma u es solución cuando se verifica que λ y ξ están relacionados por

$$(2.3.19) \quad \lambda^2 + a\xi^2 - ib\lambda\xi - c\lambda - id\xi - e = 0.$$

Para cada $\xi \in \mathbf{R}$ existen dos valores complejos de λ , que por estimación directa verifican $|\lambda(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)$.

Supongamos que λ verifica (2.3.19) y consideremos el problema no característico

$$(H) \quad \begin{cases} u_{tt} = au_{xx} + bu_{xt} + cu_t + du_x + eu \\ u(x, 0) = e^{ix\xi} \\ u_t(x, 0) = \lambda e^{ix\xi}. \end{cases}$$

El matemático francés J. Hadamard propuso el término *problema bien propuesto* para aquel que tiene solución única y, además, ésta depende continuamente de los datos.

Si suponemos que (H) está bien propuesto la solución es $u(x, t) = e^{\lambda t + ix\xi}$. Para que haya dependencia continua se debe verificar que para $T > 0$ fijo

$$|u(x, t)| \leq e^{|\Re \lambda(\xi)|T} \leq C(\sup |u(x, 0)| + \sup |u_t(x, 0)|) \leq C(1 + |\lambda(\xi)|).$$

Por tanto, si el problema está bien propuesto se ha de verificar

$$(2.3.20) \quad |\Re \lambda(\xi)| \leq C + a \log(1 + |\xi|),$$

que se conoce como *condición de Hadamard*.

No es difícil comprobar que el problema no característico para el operador hipérbólico verifica la condición de Hadamard.

Por el contrario, la ecuación de Laplace no la satisface, ya que, $\lambda(\xi) \in \mathbf{R}$ y

$$\lambda^2(\xi) = |\xi|^2$$

y, por tanto, crece más que un logaritmo.

En resumen,

El problema de Cauchy para la ecuación de Laplace no está bien propuesto, pues no verifica la condición de Hadamard.

Todos los resultados tienen su contrapartida en \mathbf{R}^N y para ecuaciones de orden mayor, pero no serán detallados aquí.

2.4.- El teorema de Cauchy-Kovalevsky.

Esta sección la dedicamos a estudiar un resultado clásico. Para una ecuación diferencial ordinaria particular cuyo segundo miembro es expresable como la suma de una serie de potencias, el propio Newton obtuvo la solución del problema de Cauchy también como una serie, calculándose los coeficientes por identificación.

El caso de las ecuaciones en derivadas parciales es debido a Cauchy y a Sonia Kovalevsky. Una vez más recomendamos para una reseña histórica fiable el libro de M. Kline al que nos hemos referido en repetidas ocasiones. Una corta biografía de Sonia Kovalevsky puede encontrarse en "*Women in Mathematics*" de L.M Osen, M.I.T. Press 1974.

Vamos a plantear el problema en un contexto muy concreto, advirtiéndolo al lector, que una versión general puede encontrarla, por ejemplo, en *G. Folland, "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton University Press, 1976.*

Consideraremos el problema

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}) \\ u(x, 0) = \phi_0(x) \\ u_t(x, 0) = \phi_1(x), \end{cases}$$

donde $F(t, x, u, p, q, r, s)$, ϕ_0 y ϕ_1 se suponen funciones analíticas en todas sus variables en un entorno del origen.

Obsérvese que la recta $t = 0$, sobre la que se dan los datos, es analítica.

Transformaremos el problema (2.4.1) en una forma equivalente para la que se probará el teorema de Cauchy-Kovalevsky sobre la existencia de una única solución analítica en un entorno del origen.

Por conveniencia del lector damos la siguiente definición.

2.4.1 Definición.

Sea $R = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < r\}$. Una función

$$f : R \subset \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$$

se dice que es analítica real en R si y solo si existe una sucesión de números reales $\{a_{i_1 \dots i_n}\}_{i_1 \dots i_n \in \mathbf{N}}$ tal que en cada $(x_1, \dots, x_n) \in R$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

donde la serie converge absolutamente.

Por el criterio de mayoración de Weierstrass, si f es analítica en R , la serie que la representa converge uniformemente en $|x| < r - \varepsilon$.

Transformamos el problema (2.4.1) de la manera siguiente: llamamos

$$y_{00} = u, \quad y_{10} = u_x, \quad y_{01} = u_t, \quad y_{11} = u_{xt}, \quad y_{20} = u_{xx}, \quad y_{02} = u_{tt}$$

(obsérvese que el doble subíndice nos recuerda las derivadas respecto a x y t , respectivamente). Así obtenemos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales equivalente

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} (y_{00})_t = y_{01} \\ (y_{10})_t = y_{11} \\ (y_{01})_t = y_{02} \\ (y_{11})_t = (y_{02})_x \\ (y_{20})_t = (y_{11})_x \\ (y_{02})_t = F_t + \sum_{i+j < 2} F_{y_{ij}} y_{i(j+1)} + \sum_{i+j=2, j < 2} F_{y_{ij}} (y_{(i-1)(j+1)})_x \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$(2.4.3) \quad \begin{cases} y_{00}(x, 0) = \phi_0(x) \\ y_{10}(x, 0) = (\phi_0)_x(x) \\ y_{01}(x, 0) = \phi_1(x) \\ y_{11}(x, 0) = (\phi_1)_x(x) \\ y_{20}(x, 0) = (\phi_0)_{xx}(x) \\ y_{02}(x, 0) = F(0, x, \phi_0(x), (\phi_0)_x(x), \phi_1(x), (\phi_1)_x(x), (\phi_0)_{xx}(x)) \end{cases}$$

Se deja al lector comprobar que si y_{00} es la primera componente de una solución del problema (2.4.2), (2.4.3), entonces es solución del problema (2.4.1). Escrito en esta forma se obtiene que el problema (2.4.1) se ha transformado, con un cambio de nombres de las variables, en un caso particular de

$$\begin{pmatrix} Y_{1t}(t, x) \\ \vdots \\ Y_{6t}(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(t, x, \mathbf{Y}) & \dots & A_{16}(t, x, \mathbf{Y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{61}(t, x, \mathbf{Y}) & \dots & A_{66}(t, x, \mathbf{Y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1x}(t, x) \\ \vdots \\ Y_{6x}(t, x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t, x, \mathbf{Y}) \\ \vdots \\ B_6(t, x, \mathbf{Y}) \end{pmatrix},$$

donde

$$A_{ij}(t, x, \Psi) \quad \text{y} \quad B_i(t, x, \Psi)$$

son funciones analíticas.

Escrito matricialmente tenemos la misma forma que la ecuación *quasi lineal* de la Sección 2.1, es decir,

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} \mathbf{Y}_t(t, x) = \tilde{\mathbf{A}}(t, x, \mathbf{Y}) \mathbf{Y}_x(t, x) + \tilde{\mathbf{B}}(t, x, \mathbf{Y}) \\ \mathbf{Y}(0, x) = \Phi(x) \end{cases}$$

que si le aumentamos con una ecuación más le podemos considerar *autónomo*, es decir, si añadimos la ecuación $(Y_7)_t = 1$, y además hacemos el cambio

$$\mathbf{U}(t, x) = \mathbf{Y}(t, x) - \Phi(x),$$

(2.4.4) se convierte en

$$(2.4.5) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_t = \mathbf{A}(x, \mathbf{U}) \mathbf{U}_x + \mathbf{B}(x, \mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

Para este problema con $(x, \mathbf{U}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, es para el que estudiaremos el resultado de existencia.

Para comenzar establecemos los resultados de series de potencias que se van a usar y previamente introducimos la notación que se usa para trabajar cómodamente con multiíndices.

Notación.

Como se ha podido apreciar la necesidad del uso de índices múltiples complica extraordinariamente la escritura, dificultando a menudo la comprensión inmediata de lo que las fórmulas significan. La notación que proponemos a continuación y que usaremos en esta sección, fue introducida por Laurent Schwarz en los años 50, cuando creó la Teoría de Distribuciones. En resumen es la siguiente:

Sea un multíndice $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$, convendremos en notarle $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^N$. Entonces escribiremos

$$|\alpha| \equiv \sum_1^n i_j$$

$$\alpha! \equiv i_1! \dots i_n!$$

$$x^\alpha \equiv x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

$$D_x^\alpha f(x_0) \equiv f_{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}}(x_0)$$

Dado otro multíndice $\beta = (j_1, \dots, j_n)$ diremos que

$$\alpha \leq \beta \quad \text{si y sólo si} \quad i_l \leq j_l, \quad \text{para todo} \quad l = 1, \dots, n$$

Proposición. (*Propiedades de las funciones analíticas*)

Sea f una función analítica en R entonces

- (1) f es indefinidamente derivable, y sus derivadas se obtienen derivando la serie término a término y, además,

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha f(0).$$

- (2) Si se tiene la función analítica en un entorno de $t = 0$,

$$x(t) = \sum_{\beta} b_\beta t^\beta,$$

entonces $h(t) = f(x(t))$, es analítica siendo los coeficientes de la serie de h obtenidos por la fórmula

$$c_\gamma = \frac{1}{\gamma!} D_t^\gamma h(0) = P_\gamma(b_\beta, a_\alpha), \quad \alpha, \beta \leq \gamma,$$

donde P_γ es un polinomio con coeficientes positivos independiente de f y x .

Un ejemplo de función analítica que usaremos es el siguiente:

Dados $M, r > 0$

$$f(x_1 \dots x_n) = \frac{Mr}{r - (x_1 + \dots + x_n)}$$

es analítica en

$$R = \{x \in \mathbf{R}^N \mid \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| < \frac{r}{n}\},$$

siendo su serie de Taylor

$$f(x_1, \dots, x_n) = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^k}{r^k} = M \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \frac{(i_1 + \dots + i_n)!}{i_1! \dots i_n! r^{(i_1 + \dots + i_n)}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Otra idea importante es la de *mayoración de series*. Dadas

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

y

$$g(x) = \sum_{\alpha} b_{\alpha} x^{\alpha},$$

funciones analíticas, diremos que f mayor a g si se verifica que

$$a_{\alpha} \geq |b_{\alpha}|$$

para todos los índices.

Dada una función analítica

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

en R , tomando $\rho < r$, definiendo

$$\sum_{\alpha} |a_{\alpha}| \rho^{|\alpha|} < M,$$

entonces la serie geométrica de coeficientes

$$b_{\alpha} = \frac{M}{r^{|\alpha|}}$$

es una mayorante de la serie que define a f , en $R_{\rho} = \{x \mid |x_i| < \rho, \quad i = 1 \dots n\}$,

2.4.2. Teorema. (*Cauchy-Kovalevsky*)

Sea el problema

$$(2.4.5) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_t = \mathbf{A}(x, \mathbf{U}) \mathbf{U}_x + \mathbf{B}(x, \mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(0, x) = \mathbf{0} \end{cases}$$

tal que la matriz \mathbf{A} y el vector \mathbf{B} tienen componentes analíticas como funciones de (x, \mathbf{U}) en un entorno del origen, entonces (2.4.5) tiene una única solución analítica.

Demostración.

Como por hipótesis los datos son analíticos tenemos que sobre un entorno del origen, $R = \{(x, \eta) \mid |x| < \delta, |\eta| < \delta\}$, se pueden expresar por las series

$$\mathbf{A}(x, \eta) = \sum_{i, \beta} a_{i\beta} x^i \eta^{\beta},$$

$$\mathbf{B}(x, \eta) = \sum_{i, \beta} b_{i\beta} x^i \eta^{\beta},$$

donde $a_{i\beta}$ es una matriz y $b_{i\beta}$ un vector, que resultan por la fórmula de Taylor

$$a_{i\beta} = \frac{D_x^i D_{\eta}^{\beta} \mathbf{A}(0, 0)}{i! \beta!},$$

$$b_{i\beta} = \frac{D_x^i D_{\eta}^{\beta} \mathbf{B}(0, 0)}{i! \beta!}.$$

Buscamos una solución de la forma

$$\mathbf{Y}(t, x) = \sum_{i=0, j=0}^{\infty} c_{ij} x^i t^j, \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \frac{D_x^i D_t^j \mathbf{Y}(0, 0)}{i! j!}.$$

Procedemos en varias etapas

- 1) Si se impone que se verifique la condición inicial, necesariamente debemos tener $c_{i0} = 0$ cualquiera que sea el índice $i = 0, 1, \dots$, ya que, $\mathbf{Y}(0, x) = 0$.
- 2) Además por verificarse la ecuación

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{Y}(t, x) &= \sum_{i=0, j=0}^{\infty} (j+1) c_{i(j+1)} x^i t^j \equiv \\ &\equiv \mathbf{A}(x, \mathbf{Y}(t, x)) D_x \mathbf{Y}(t, x) + \mathbf{B}(t, x) \equiv \sum_{ij} P_{ij}(c_{lm}, a_\alpha, b_\beta) x^i t^j, \end{aligned}$$

donde el polinomio $P_{ij}(c_{lm}, a_\alpha, b_\beta)$, siendo $|\alpha|, |\beta| \leq i+j$, $l \leq i$ y $m \leq j$, tiene coeficientes positivos.

Por identificación se obtiene entonces

$$(2.4.6) \quad c_{i(j+1)} = \frac{P_{ij}(c_{lm}, a_\alpha, b_\beta)}{j+1}, \quad l \leq i, \quad m \leq j \quad |\alpha|, |\beta| \leq i+j$$

Así, si se conocen c_{lm} para cada $l = 0, 1, \dots$ y $m \leq j$, (2.4.6) da los coeficientes $c_{i(j+1)}$. Este *algoritmo* permite calcular por recurrencia una serie formal, que de haber solución analítica debe ser la que la representa. Obsérvese que este argumento implica unicidad de solución analítica al obtenerse los coeficientes de la serie de manera única al imponer el dato y que verifique formalmente la ecuación.

Por tanto, resta comprobar que la serie formal obtenida converge en algún entorno del origen.

- 3) Sea $r < \delta$ y sea

$$R_r = \{(x, y_1, \dots, y_n) \mid |x| < r, \quad |y_i| < r, i = 1, \dots, n\}.$$

Si $(x, Y) \in R_r$ se tiene

$$(2.4.7) \quad \sum_{\alpha, i} \frac{D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{A}(0, 0)}{i! \alpha!} x^i Y^\alpha \leq \sum_{\alpha, i} \frac{|D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{A}(0, 0)|}{i! \alpha!} r^i r^{|\alpha|} \leq M_1$$

$$(2.4.8) \quad \sum_{\alpha, i} \frac{D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{B}(0, 0)}{i! \alpha!} x^i Y^\alpha \leq \sum_{\alpha, i} \frac{|D_x^i D_Y^\alpha \mathbf{B}(0, 0)|}{i! \alpha!} r^i r^{|\alpha|} \leq M_2$$

Tomando $M > \max\{M_1, M_2\}$ y los coeficientes

$$d_{i\alpha} = M \frac{1}{r^{i+|\alpha|}},$$

la serie resultante es una mayorante de la de \mathbf{A} y la de \mathbf{B} . Además

$$(2.4.9) \quad \begin{aligned} \Phi(x, \mathbf{Y}) &= M \sum_{i\alpha} \frac{x^i}{r^i} \frac{\mathbf{Y}^\alpha}{r^{|\alpha|}} = M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(x + y_1 + \dots + y_n)}{r} \right)^k = \\ &= \frac{M}{1 - \frac{(x + y_1 + \dots + y_n)}{r}} = \frac{Mr}{r - (x + y_1 + \dots + y_n)}. \end{aligned}$$

- 4) Como consecuencia, consideramos el *problema mayorante* que para cada componente resulta

$$(2.4.10) \quad \begin{cases} D_t z_k = \frac{Mr}{r - (x + y_1 + \dots + y_n)} \left(\sum_{i=1}^n D_x z_i + 1 \right) \\ z_k(x, 0) = 0, \end{cases}$$

es decir, es un mismo problema para todas las componentes. Por esta razón buscamos soluciones de (2.4.10) de la forma

$$z_k(x, t) = v(x, t), \quad \text{para todo } k = 1, \dots, n$$

que verifica el problema

$$(2.4.11) \quad v_t = \frac{Mr}{r - x - nv} (nv_x + 1) \quad \text{con dato inicial } v(0, x) = 0.$$

Este problema admite solución explícita usando la técnica desarrollada en la sección (2.1).

En efecto, el sistema característico es

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = r - x - nv, & t(0) = 0 \\ \frac{dx}{d\tau} = -nMr, & x(0) = s \\ \frac{dv}{d\tau} = Mr, & v(0) = 0 \end{cases}$$

de donde resulta

$$\begin{cases} t(\tau, s) &= (r - s)\tau \\ x(\tau, s) &= -Mrn\tau + s \\ v(\tau, s) &= Mr\tau, \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{cases} s &= nv + x \\ \tau &= \frac{v}{Mr}. \end{cases}$$

Sustituyendo

$$t = (r - nv - x) \frac{v}{Mr},$$

o bien,

$$v(t, x) = \frac{(r - x) \pm \sqrt{(r - x)^2 - 4nMrt}}{2n},$$

y como ha de ser $v(0, x) = 0$, entonces, necesariamente,

$$v(t, x) = \frac{(r - x) - \sqrt{(r - x)^2 - 4nMrt}}{2n},$$

es la solución de (2.4.11), que es obviamente analítica en un entorno de $(0, 0)$.

- 5) Para finalizar basta comprobar que la solución de (2.4.10), problema mayorante, calculada en la etapa 4) anterior, es decir,

$$\vec{z}(t, x) = v(t, x)(1, \dots, 1),$$

es una mayorante de la serie formal obtenida como candidato a solución. Así habremos terminado la demostración por utilización del criterio de comparación. Si llamamos e_{ij} a los coeficientes de la serie representando a \vec{z} , repitiendo los cálculos de las etapas 1) y 2) anteriores, obtenemos

$$e_{i(j+1)} = \frac{P_{ij}(e_{lm}, d_\alpha, d_\beta)}{j+1}, \quad l \leq i, \quad m \leq j \quad |\alpha|, |\beta| \leq i+j$$

donde el polinomio con coeficientes positivos, P_{ij} , es el mismo que en (2.4.6) Por consiguiente, por recurrencia se tiene,

$$|c_{i(j+1)}| = \left| \frac{P_{ij}(c_{lm}, a_\alpha, b_\beta)}{j+1} \right| \leq \frac{P_{ij}(|c_{lm}|, |a_\alpha|, |b_\beta|)}{j+1} \leq \frac{P_{ij}(e_{lm}, d_\alpha, d_\beta)}{j+1} = e_{i(j+1)}$$

que establece el resultado. \square

Apéndice al Capítulo 2.

Problema de Cauchy para la ecuación general de primer orden en \mathbf{R}^N .

Sea

$$F : \Omega \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, u, p) \longrightarrow F(x, u, p),$$

función con dos derivadas continuas, definida en el abierto Ω .

Supondremos que

$$\|\nabla_p F\| \equiv \|(F_{p_1}, \dots, F_{p_n})\| > 0$$

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar en \mathbf{R}^N . Notaremos $p_i = u_{x_i}$.

La teoría elaborada en la sección (2.2) sugiere como estudiar el problema de Cauchy para la ecuación

$$(A.1) \quad F(x, u, \nabla u) = 0$$

Se supone

$$u : G \subset \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R},$$

solución de (A.1), y se considera el sistemas de curvas de Monge, que en este caso, y por los mismos argumentos que en la sección (2.2), resulta ser

$$(A.2) \quad x'(t) = \nabla_p F(x(t), u, p).$$

Se considera la forma de variación de u y p a lo largo de una solución de (A.2)

$$\begin{cases} u'(t) = \langle \nabla u(x(t)), x'(t) \rangle = \langle p(t), \nabla_p F(x(t), u(t), p(t)) \rangle \\ p'(t) = (\langle \nabla u_{x_1}, x'(t) \rangle, \dots, \langle \nabla u_{x_n}, x'(t) \rangle) = (\langle \nabla u_{x_1}, \nabla_p F \rangle, \dots, \langle \nabla u_{x_n}, \nabla_p F \rangle) \end{cases}$$

pero como

$$F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0,$$

derivando respecto a cada coordenada x_k , $k = 1, \dots, n$, obtenemos

$$F_{x_k} + F_u u_{x_k} + \langle \nabla_p F, (\nabla u)_{x_k} \rangle = 0,$$

por lo que resulta

$$p'(t) = -\nabla_x F - p F_u$$

El *sistema característico* así obtenido es

$$(A.3) \quad \begin{cases} x'(t) &= \nabla_p F(x(t), u(t), p(t)) \\ u'(t) &= \langle p(t), \nabla_p F(x(t), u(t), p(t)) \rangle \\ p'(t) &= -\nabla_x F(x(t), u(t), p(t)) - p(t) F_u(x(t), u(t), p(t)) \\ F(x, u, p) &= 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son llamadas *bandas características* y las proyecciones, $(x(t), u(t))$, se llaman curvas características.

Como en el caso de dimensión $n = 2$ es fácil de establecer que F es una integral primera para el sistema característico, es decir, F es constante a lo largo de las bandas características. Esto quiere decir que si partimos de datos que verifiquen la condición $F(x(t_0), u(t_0), p(t_0)) = 0$, entonces se verifica la misma condición sobre toda la banda. Así pues, con esta condición de compatibilidad (A.3) no es sobredeterminado.

Planteamos a continuación el *problema de Cauchy* para la ecuación (A.1).

Sea $U \subset \mathbf{R}^{n-1}$ un abierto y sea la aplicación

$$\gamma : U \longrightarrow \mathbf{R}^N,$$

con segundas derivadas continuas y tal que si $\gamma_s(s)$ designa la matriz jacobiana de γ , se verifica

$$\text{rango}(\gamma_s(s)) = n - 1, \quad \text{para } s \in U$$

Sea también

$$\phi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

una función con derivadas segundas continuas.

Observamos que si $x^0 = \gamma(s^0)$, $u^0 = \phi(s^0)$ y $(x^0, u^0, p^0) \in \Omega$ es tal que

$$(A.4) \quad \begin{cases} F(x^0, u^0, p^0) = 0, \\ p^0 \gamma(s^0) = 0, \\ \det(\gamma_s(s^0) \nabla_p F(x^0, u^0, p^0)) \neq 0, \end{cases}$$

entonces existe una única función definida en un entorno de s^0 con derivadas primeras continuas,

$$\pi : U(s^0) \longrightarrow \mathbf{R}^N,$$

tal que:

- (1) $\pi(s^0) = p^0$
- (2) $F(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)) = 0$ para $s \in U(s^0)$.
- (3) $\nabla_s \phi(s) = \pi(s) \gamma_s(s)$, $s \in U(s^0)$ (Condición de banda).

En efecto, basta notar que (A.4) y las hipótesis de regularidad, permiten aplicar el teorema de funciones implícitas a

$$G(s, p) = (p\gamma_s(s) - \nabla_s \phi(s), F(\gamma(s), \phi(s), p))$$

Obteniéndose así que en un entorno de s^0 , $U(s^0)$, se tiene

$$G(s, \pi(s)) = 0 \quad \text{y} \quad \pi(s^0) = p^0,$$

pero estas son las condiciones que se buscaban.

A una tal función,

$$(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)),$$

verificando 1), 2) y 3), le llamamos *banda inicial*.

Problema de Cauchy.

Podemos formularle como sigue.

Obtener una solución de

$$\begin{cases} F(x, u, \nabla u) = 0 & \text{tal que verifique el dato} \\ u(\gamma(s)) = \phi(s), & s \in U \end{cases}$$

Como en el caso de dimensión $n = 2$ hemos de imponer algunas condiciones sobre los datos para que el problema tenga solución y ésta sea única. Tales condiciones son copia de las del caso estudiado y aparecen como hipótesis en el siguiente resultado.

A.1.- Teorema.

Sea F verificando todas las hipótesis anteriores en Ω abierto de \mathbf{R}^{1+2n} . Sean

$$\gamma : U \subset \mathbf{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{y} \quad \phi : U \longrightarrow \mathbf{R}$$

funciones con dos derivadas continuas. Sean $\gamma(s^0) = x^0$, $\phi(s^0) = u^0$ y p^0 tales que,

- (1) $F(x^0, u^0, p^0) = 0$
- (2) $p^0 \gamma_s(s^0) = \nabla_s \phi(s^0)$
- (3) $\det(\gamma_s(s^0), \nabla_p F(x^0, u^0, p^0)) \neq 0$.

Entonces existe G , entorno de x^0 en \mathbf{R}^N y

$$u : G \longrightarrow \mathbf{R},$$

tal que

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 & \text{para } x \in G \\ u(\gamma(s)) = \phi(s) & \text{para } s \in U \quad \text{tal que } \gamma(s) \in G. \end{cases}$$

Demostración.

Sea $\pi(s)$ verificando 1), 2) y 3) de la observación anterior, es decir, consideremos la banda

$$(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)).$$

Sea

$$(X(t, s), U(t, s), P(t, s)),$$

solución del sistema característico (A.3), con dato inicial

$$X(0, s) = \gamma(s), \quad U(0, s) = \phi(s), \quad P(0, s) = \pi(s).$$

Por el teorema de Peano de diferenciabilidad respecto a los datos iniciales, se tiene que $(X(t, s), U(t, s), P(t, s))$, tiene derivadas primeras continuas para s cercano a s^0 y t pequeño. Además, por ser F integral primera y verificarse $F(\gamma(s), \phi(s), \pi(s)) = 0$, se tiene también que

$$(A.5) \quad F(X(t, s), U(t, s), P(t, s)) = 0.$$

Por otra parte, si llamamos $J_{(t,s)} \equiv (X(t, s))_{ts}$ a la matriz jacobiana de $X(t, s)$ se tiene que

$$\det J_{(t,s)}(0, s^0) = \det(\gamma_s(s^0), \nabla_p F(x^0, u^0, p^0)) \neq 0,$$

condición de transversalidad impuesta.

Así pues en un entorno $V(x^0)$ de x^0 , la función $x = X(t, s)$ tiene inversa con derivadas primeras continuas, $(t, s) = X^{-1}(x)$. Entonces de $u(X(t, s)) = U(t, s)$ se obtiene, $u(x) = U(X^{-1}(x))$ y de $p(X(t, s)) = P(t, s)$ se concluye, $p(x) = P(X^{-1}(x))$. De esta forma (A.5) se convierte en

$$(A.6) \quad F(x, u(x), p(x)) = 0.$$

Para terminar la prueba hemos de establecer que

$$(A.7) \quad \nabla u(x) = P(X^{-1}(x)).$$

Pero como $U(t, s) = u(X(t, s))$ se obtiene

$$(A.8) \quad \nabla u(X(t, s)) X_{ts}(t, s) = U_{ts}(t, s).$$

Como $\det X_{ts}(t, s) \neq 0$ en un entorno de $(0, s^0)$, ∇u queda univocamente determinado por el sistema lineal (A.8). Entonces si también se puede probar que

$$(A.9) \quad P(t, s) X_{ts}(t, s) = U_{ts}(ts),$$

concluiremos que $P(t, s) = \nabla u(X(t, s))$. Es suficiente entonces, que probemos (A.9).

Del sistema característico obtenemos la relación

$$(A.10) \quad U_t = \langle P, X_t \rangle.$$

Si consideramos la función

$$(A.11) \quad \Phi(t, s) = U_s - PX_s,$$

se tiene en primer lugar que $\Phi(0, s) = 0$ por verificarse la condición de banda para el dato inicial. Además, derivando respecto a t ,

$$\begin{aligned} \Phi_t &= (U_s)_t - P_t X_s - P(X_s)_t = (U_t - PX_t)_s + X_t P_s - P_t X_s = \\ &= \nabla_p F P_s + (\nabla_x F + F_u P) X_s + (F_u U_s - F_u U_s) = \\ &= (\nabla_x F X_s + F_u U_s + \nabla_p F P_s) - F_u (U_s - PX_s) = F_s - F_u \Phi, \end{aligned}$$

por (A.10) y el sistema característico. Además, de (A.5) se concluye que $F_s \equiv 0$, por lo que la expresión anterior se reduce a

$$\Phi_t = -F_u \Phi, \quad \text{con dato inicial } \Phi(0, s) = 0 \quad \text{para cada } s.$$

Por tanto $\Phi \equiv 0$ y (A.11) queda demostrado y como consecuencia que (A.9) se verifica. (Con la notación usada la matriz jacobiana X_{ts} tiene una primera columna que es X_t las restantes $(n-1)$ columnas son las de la matriz X_s .)

La unicidad de u , solución con dos derivadas continuas, es consecuencia del mismo argumento que en dimensión $n = 2$, es decir, dos soluciones coinciden sobre las soluciones del sistema característico con dato la banda inicial, por tanto, deben coincidir sobre la intersección de sus dominios de definición. \square

EJERCICIOS DEL CAPITULO 2

1. Cálculense las soluciones de $yu_x - xu_y = 0$ e interprétese geoméricamente el resultado.

2. Sea

$$u = f\left(\frac{xy}{u}\right).$$

Elimínese f y obténgase la ecuación en derivadas parciales que verifica u .

3. Determinénse todas las soluciones de la ecuación

$$(x + y)u_x + (u - x)u_y = (y + u)$$

4. Sea la ecuación

$$(xy - u)u_x + (y^2 - 1)u_y = uy - x$$

y las curvas dato

a) $y = 0, x^2 - u^2 = 1$.

b) $x^2 + y^2 = 1, u = 0$.

Resolver el problema de Cauchy para el dato a). Análogo para el dato b).

5. Sea la ecuación

$$uu_x - u_y = 0.$$

a) Hállense las curvas características.

b) Determinénse la solución que pasa por la curva

$$y = 0 \quad u = x^2 - 1$$

y dibujar $u(x, 0)$, $u(x, 1)$, $u(x, 2)$ y $u(x, 3)$.

6. Sea el sistema diferencial

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) &= f(x(t), y(t), u(t)); \\ y'(t) &= g(x(t), y(t), u(t)); \\ u'(t) &= h(x(t), y(t), u(t)). \end{cases}$$

Se llama *integral primera* del sistema Σ a una función $W(x, y, u) \in \mathcal{C}^1$ tal que es constante a lo largo de las trayectorias de Σ .

¿Qué ecuación en derivadas verifica la integral primera W ? Interpretese el resultado y diseñese un método para obtener integrales primeras.

7. Dos superficies se dicen ortogonales si son ortogonales sus planos tangentes en los puntos en que se cortan.

Pruébese que para que la gráfica de la función $u = \phi(x, y)$ sea una superficie ortogonal a la familia uniparamétrica de superficies definida implícitamente por $F(x, y, u, \alpha) = 0$, es necesario y suficiente que verifique la ecuación

$$F_x \phi_x + F_y \phi_y = F_u.$$

Hállense las superficies ortogonales a la familia definida por $x^2 + y^2 = 2\alpha u$.

8. Una función $u(x_1, x_2)$ se dice homogénea de grado $m > 0$ si $u(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^m u(x_1, x_2)$. Pruébese que la condición necesaria y suficiente para que u sea homogénea de grado m es que verifique la ecuación

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = m u.$$

(Este resultado es conocido como teorema de Euler).

9. Consideramos la ecuación

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = u^2.$$

Se pide calcular la solución que verifica el dato $u = 1 \quad x^2 + y^2 = 1$.

10. Calcular la solución de $u_y = u_x^3$ que verifica $u(x, 0) = 2x^{\frac{3}{2}}$

11. Calcular la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} p^2 - q^2 - 2u = 0 \\ x = 0 \\ u = (1 + y)^2. \end{cases}$$

12. Sea la ecuación

$$u = xp + yq + \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Determinese la solución verificando

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

13. Dada la ecuación

$$p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2) + 4(x + y + 1),$$

sea $c(s) \equiv (\alpha(s), \beta(s), \gamma(s))$ una curva de Monge sobre la superficie

$$u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + xy + 2x,$$

tal que para $s = 0$ pasa por el punto $(x_0, y_0, \frac{1}{2}(x_0^2 - y_0^2) + x_0 y_0 + 2x_0)$

a) Determinar la proyección de c sobre el plano $u = 0$.

b) Sea $x_0 = -1, y_0 = 0$; hallar la banda característica que verifique el dato

$$(-1, 0, -\frac{3}{2}, 1, -1).$$

14. Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2 \\ y = 2x \\ u = 1. \end{cases}$$

15. Probar que si $v_1(x, y, u) = k_1$ y $v_2(x, y, u) = k_2$ son integrales primeras del sistema característico de la ecuación

$$(1) \quad fu_x + gu_y = h,$$

entonces para cada función arbitraria $\Phi \in \mathcal{C}^1$,

$$(2) \quad g(x, y, u) = \Phi(v_1(x, y, u), v_2(x, y, u)) = 0,$$

define una solución de (1). Pruébese que toda solución de (1) puede escribirse de la forma (2) si el rango del jacobiano de v_1, v_2 respecto a (x, y, u) es dos.

16. Dada una ecuación en derivadas parciales de primer orden, $F(x, y, u, p, q) = 0$, se llama *integral completa* a una familia biparamétrica de soluciones, $u = u(x, y, \alpha, \beta)$. Demostrar que:

1 Si la ecuación es de la forma $q = f(p)$ admite una integral completa de la forma

$$u = \alpha x + f(\alpha)y + \beta.$$

2 Si la ecuación es de la forma $p = f(x, q)$ admite una integral completa de la forma

$$u = \int^x f(s, \alpha) ds + \alpha y + \beta.$$

3 Si la ecuación es de la forma $p = f(u, q)$ admite una integral completa definida implícitamente por

$$\int^u \frac{ds}{f(s, \alpha)} = x + \alpha y + \beta.$$

4 Si la ecuación es de la forma $f_1(x, p) = f_2(y, q)$ admite una integral completa de la forma

$$u = \int^x \phi_1(s, \alpha) ds + \int^y \phi_2(s, \alpha) ds + \beta.$$

(Indicación:

1 Llamando $p = \alpha$, la ecuación da que $q = f(\alpha)$, entonces resulta $du = \alpha dx + f(\alpha) dx$. Basta integrar.

2 Obsérvese que tomando $q = \alpha$, la ecuación da la expresión $du = f(x, \alpha) dx + \alpha dy$. Intégrese

3 Del sistema característico se obtiene que $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$, es decir, $q = \alpha p$; de la ecuación resulta

$$\frac{du}{f(u, \alpha)} = dx + \alpha dy$$

4 Del sistema característico resultan

$$f_{1x} + f_{1p} \frac{dp}{dx} = 0,$$

$$f_{2y} + f_{2q} \frac{dq}{dy} = 0,$$

por tanto, $f_1(x, p) = \alpha = f_2(y, q)$.

Despejando p y q se tiene $p = \phi_1(x, \alpha)$, $q = \phi_2(y, \alpha)$, de donde,

$$du = \phi_1(x, \alpha)dx + \phi_2(y, \alpha)dy$$

y se concluye integrando)

17. Determinénse las bandas características de las ecuaciones siguientes, calculando una integral completa por el método del problema 16.

- a) $pq - x^2y^2 = 0$.
- b) $p^3q^3 + px + qy - u = 0$.
- c) $pq = 9u^2$.
- d) $p = \sin q$.

18. Resuélvanse los problemas de Cauchy siguientes.

$$(a) \quad \begin{cases} pq + 1 - u = 0 \\ u = 2x + 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} pq - 3xy - 2u = 0 \\ u = 15y \\ x = 5. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} p^2 + q^2 - 4u = 0 \\ u = y^2 \\ x = 0. \end{cases}$$

19. Clasificar las ecuaciones siguientes

- a) $\cos^2 x u_{xx} - 2y \cos x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$
- b) $(1 + t^2)u_{tt} + (1 + x^2)u_{xx} + tu_t + xu_x = 0.$
- c) $u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} + 2u_{tt} + 2(u_{xy} + u_{xz} + u_{xt}) + 4(u_{yz} + u_{yt}) + 6u_{zt} = 0.$
- d) $u_{xx} + u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} = 0.$
- e) $u_{xx} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{xt} + 2u_{xz} + 2u_{zt} = 0.$
- f) $y^2 u_{xx} - u_{yy} = 0.$

Escribábase en forma canónica.

20. Transfórmese la ecuación

$$x^2 u_{xx} = y^2 u_{yy}$$

a variables características.

Como consecuencia probar que las soluciones son $u = f(xy) + xg(\frac{y}{x})$ con f y g funciones regulares arbitrarias.

21. Hallar las características de $(1 + x^2)u_{xx} - (1 + y^2)u_{yy} = 0$ y reducir la ecuación a forma normal.

22. Sean $f(t) = \sin t$ y $g(t) = \cos t$. Calcular la solución analítica del problema

$$u_{xx} = u_t \quad \text{con datos} \quad u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = g(t).$$

23. Sean $f(x) = e^{-x}$ y $g(t) = \sin x$. Calcular la solución analítica del problema

$$(1 + x^2)u_{xx} - (1 + y^2)u_{yy} = 0, \quad \text{con datos} \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x).$$

24. Considerar la ecuación cuasilineal

$$(x^2 + 1)u_x - yxu_y = \frac{u}{x}$$

y la curva dato $x = 1, \quad u = y$.

- a) Comprobar si se cumple la condición de transversalidad.
- b) En el caso que se cumpla, resolver el problema de Cauchy.

25. Considerar la ecuación cuasilineal

$$xu_x + yu_y = 2(x^2 + y^2)u$$

y la curva dato $x = 1, \quad u = e$.

- a) Comprobar si se cumple la condición de transversalidad.
- b) En el caso que se cumpla, resolver el problema de Cauchy.

CAPITULO 3

PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

SERIES E INTEGRALES

DE FOURIER.

METODO DE SEPARACION

DE VARIABLES.

Introducción

El método de separación de variables que se describe a continuación y se estudiará en detalle a lo largo de todo el capítulo, está en los orígenes de la *teoría de ecuaciones en derivadas parciales*. Fue esbozado en la última mitad del siglo XVIII, especialmente por J. Bernoulli y L. Euler, para estudiar el problema de la cuerda vibrante.

La publicación en 1822 de la "*Theorie Analytique de la Chaleur*" por J.B. Fourier supuso un paso decisivo en la consolidación del método de desarrollo de una función en *serie trigonométrica*. La expresión que Fourier obtiene para los coeficientes del desarrollo en serie trigonométrica de una función como la integral de la función por la correspondiente función trigonométrica, lo que hoy llamamos *coeficientes de Fourier* de la función, aceleró, seguramente, los estudios sobre el concepto de integral. En este sentido los trabajos de Cauchy y posteriormente de Riemann culminaron en la

integral de Lebesgue y la moderna teoría de la integración. Es obvio también el influjo que el problema de desarrollar una función en *serie de Fourier* tuvo sobre la teoría de convergencia de series, para dilucidar en qué sentido la serie de Fourier representa a la función. El propio concepto de función, como hoy se entiende, fue originado en ardorosas polémicas entre los matemáticos de la época. El debate fue motivado por el significado de desarrollar en serie trigonométrica los datos y la solución de los anteriores problemas de ecuaciones en derivadas parciales, conducción de calor y vibraciones de una cuerda.

Muchas áreas de las Matemáticas nacieron a propósito del tratamiento de problemas surgidos en la teoría de series trigonométricas, o bien, de la integral de Fourier. Como ejemplo pueden citarse la *Teoría de Conjuntos* y la *Topología*.

Las series e integrales de Fourier surgieron para resolver los problemas de la difusión del calor y de las vibraciones de una cuerda. Su desarrollo posterior ha seguido caminos diversos y ha servido como uno de los motores importantes de la creación matemática. Los métodos más refinados del *Análisis de Fourier* han contribuido durante las décadas precedentes al importante progreso de las *Ecuaciones en Derivadas Parciales* en el siglo XX, fundamentalmente la teoría lineal.

Como motivación de lo que se va a estudiar en el presente capítulo, tomaremos el mismo problema que consideró Fourier sobre la conducción del calor en una varilla *unidimensional*.

Sea una varilla unidimensional de longitud l . La supondremos ubicada en el intervalo $[0, l]$ del eje OX .

Llamaremos $u(x, t)$ a la temperatura en el punto x y en el instante t , y supondremos una escala normalizada de forma que todas las constantes físicas son la unidad.

Consideraremos el problema con las hipótesis siguientes:

- i) Los extremos de la varilla se mantienen a cero grados en todo tiempo, es decir, $u(0, t) = 0 = u(l, t)$.
- ii) La temperatura inicial, en $t = 0$, es conocida. Es decir, $u(x, 0) = f(x)$.

Las anteriores hipótesis junto a lo visto en la sección (1.3), dan lugar al siguiente problema

$$(P) \quad \begin{cases} (1) & u_t = u_{xx} \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \\ (2) & u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \\ (3) & u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

La idea es buscar soluciones de (1) de la forma

$$u(x, t) = \phi(x)\psi(t),$$

para lo cual se ha de verificar la ecuación

$$\psi'(t)\phi(x) = \psi(t)\phi''(x),$$

o bien

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \lambda,$$

donde entonces necesariamente λ ha de ser una constante. Por tanto, tomando λ fijo y las soluciones de

$$\begin{cases} \psi'(t) = \lambda\psi(t) \\ \phi''(x) = \lambda\phi(x), \end{cases}$$

tenemos soluciones de (1) de *variables separadas*. Es decir, se tiene explícitamente

$$u_\lambda(x, t) = e^{\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}), \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

y

$$u_0(x, t) = c_1 x + c_2, \quad \text{si } \lambda = 0,$$

soluciones de (1).

De la familia de soluciones de (1), $u_\lambda(x, t)$, se buscan las que verifican las condición (2); es decir, tras sustituir en (2), las constantes c_1 y c_2 deben satisfacer el sistema lineal

$$(3.0.2) \quad \begin{cases} e^{\lambda t}(c_1 + c_2) = 0 \\ e^{\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0 \end{cases}$$

si $\lambda \neq 0$. Para $\lambda = 0$ sólo se encuentra la solución $c_1 = c_2 = 0$, que se corresponde con la solución trivial de (1). La condición necesaria y suficiente para que (3.0.2) tenga solución no trivial es que

$$(3.0.3) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}l} & e^{-\sqrt{\lambda}l} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l} = 0$$

Evidentemente, si $\lambda > 0$ no se verifica (3.0.3). Sea $\lambda < 0$ y llamamos $-\mu^2 = \lambda$ para $\mu \in \mathbf{R}$; (3.0.3) es equivalente a

$$\text{sen}(\mu l) = 0,$$

es decir, necesariamente,

$$\mu l = k\pi, \quad k \in \mathbf{N},$$

que implica

$$-\lambda = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Como resumen de los cálculos realizados se tiene que las soluciones de variables separadas de (1) verificando las condiciones de contorno (2) son los múltiplos constantes de

$$u_k(x, t) = \text{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right)e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}, \quad \text{para } k \in \mathbf{N}.$$

Si se supone que f es un polinomio trigonométrico de senos, es decir,

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right),$$

por el principio de superposición o, lo que es lo mismo, por la linealidad de la ecuación y de las condiciones del problema (P), la solución de (1), (2) y (3) resulta ser

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k u_k(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

En general el dato $f(x)$ no es un polinomio trigonométrico de senos. La afirmación que hizo Fourier "*grosso modo*" es la siguiente:

"Cualquier función $f(x)$ se puede expresar como una serie de senos"

La anterior afirmación se escribe como que toda función f se puede expresar por la fórmula

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

para determinadas constantes c_k .

El propio Fourier sugirió la forma de los coeficientes, precisamente por la expresión

$$(3.0.4) \quad c_k = \frac{1}{a} \int_0^l f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}s\right) ds,$$

siendo

$$a \equiv \int_0^l \left| \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}s\right) \right|^2 ds = \frac{l}{2}.$$

Si es cierta la conjetura de Fourier el candidato a solución del problema (P) es

$$(3.0.5) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{l^2}t}.$$

De todas formas, en las afirmaciones anteriores poco o nada está claro. ¿Qué quiere decir el signo "=" en la series anteriores? ¿Dependerá del tipo de función que se considere? ¿Qué razón hay para definir los coeficientes c_k por (3.0.4)? ¿Estará bien definida la función u de (3.0.5)? ¿Será la solución de (P)?

Este capítulo está dedicado a contestar las anteriores preguntas, al menos parcialmente, y a aplicar los resultados a otros problemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Las secciones (3.1) y (3.2) se dedican a estudiar los problemas de contorno para ecuaciones ordinarias de segundo orden, con especial énfasis sobre el *problema de autovalores de Sturm-Liouville*. En una primera lectura pueden obviarse algunas de las demostraciones de la sección (3.2), sobre todo la de existencia de autovalores.

En la sección (3.3) se estudia el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad de \mathbf{R}^2 y la teoría de convergencia de series de Fourier. Este estudio permitirá estudiar problemas mixtos unidimensionales para la ecuación del calor y de ondas en las secciones (3.4) y (3.5), respectivamente. La sección (3.6) presenta la motivación de la transformación de Fourier y algunas de sus propiedades elementales. Esta última sección también es prescindible en una primera lectura.

Una colección de ejercicios y problemas pone fin a este capítulo.

3.1.- Problemas de contorno de segundo orden. Teorema de la alternativa. Función de Green.

Se considerará el siguiente problema

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ m_1y(a) + n_1y'(a) + p_1y(b) + q_1y'(b) = h_1 \\ m_2y(a) + n_2y'(a) + p_2y(b) + q_2y'(b) = h_2, \end{cases}$$

donde $m_i, n_i, p_i, q_i, h_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ y se supone que $a_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $a_1, a_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ y $a_0(x) \neq 0$ si $x \in [a, b]$. Salvo mención en contrario supondremos $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Las condiciones de contorno se pueden escribir matricialmente como sigue

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Merecerán especial atención los casos particulares siguientes:

$$(3.1.2) \quad \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & q_2 \end{pmatrix},$$

que son condiciones separadas o de Sturm y

$$(3.1.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que con $h_1 = 0 = h_2$ son condiciones periódicas. Como se verá, estos dos casos particulares tienen propiedades interesantes y además aparecerán con frecuencia al resolver los problemas de ecuaciones en derivadas parciales por el método de Fourier.

Cuando $h_1 = h_2 = 0$ se dirá que se trata del problema de contorno con condiciones *homogéneas*.

La primera cuestión que se plantea es la existencia y unicidad de solución del problema de contorno (3.1.1); téngase en cuenta que se trata de un problema *global*, es decir, la solución ha de estar definida en todo el intervalo $[a, b]$ y las condiciones se dan en los *dos* extremos.

Sin embargo, en este caso la respuesta es una cuestión de Álgebra Lineal elemental y representa un modelo muy interesante de argumento: la reducción de la demostración de existencia a la prueba de unicidad para un problema asociado.

Este es el método que se usa en las aplicaciones del teorema de Rouché-Frobenius a la discusión de sistemas lineales y tiene extensiones a la teoría de ecuaciones integrales y contextos más generales. Nos referiremos a este tipo de resultados como *teoremas de alternativa*.

Por brevedad vamos a usar la siguiente notación

$$(3.1.4) \quad \tilde{L}(y(x)) \equiv a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y,$$

$$U(y) \equiv \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix}.$$

Con esta notación podemos formular el resultado

3.1.1. Teorema. *(de alternativa)*

Sea el problema

$$(P_1) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y(x)) = f(x), \\ U(y) = h \in \mathbf{R}^2, \end{cases}$$

y el problema homogéneo asociado

$$(P_2) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y(x)) = 0, \\ U(y) = 0 \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Entonces se verifica una de las dos alternativas siguientes:

- (1) *(P₁) tiene solución única.*
- (2) *(P₂) tiene solución no trivial.*

Demostración.

Toda solución de la ecuación $\tilde{L}(y(x)) = f(x)$ se escribe como

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + u(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R},$$

donde $\{\phi_1, \phi_2\}$ es una base del espacio vectorial

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^2 \mid \tilde{L}(y) = 0\}$$

y $\tilde{L}(u) = f(x)$.

Por ser lineales las condiciones de contorno se tiene

$$U(y) = c_1U(\phi_1) + c_2U(\phi_2) + U(u).$$

Entonces para que (P_1) tenga solución única cualquiera que sea $h \in \mathbf{R}^2$ ha de ser

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) = 2.$$

Si

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) < 2,$$

(P_2) tiene solución distinta de la trivial. \square

Nótese que como aplicación del teorema de Rouché-Frobenius, si

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) < 2,$$

el problema (P_1) tiene solución, y en este caso no es única, si se verifica

$$\text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2)) = \text{rango}(U(\phi_1), U(\phi_2), h - U(u)).$$

Como aplicación del teorema de alternativa si suponemos que el problema homogéneo asociado (P_2) tiene sólo solución trivial, el problema

$$(3.1.5) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y) = f \\ U(y) = h \end{cases}$$

tiene solución única, que por linealidad podemos expresarla como suma de las soluciones de los problemas

$$(3.1.6) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y_1) = 0 \\ U(y_1) = h, \end{cases}$$

$$(3.1.7) \quad \begin{cases} \tilde{L}(y_2) = f \\ U(y_2) = 0, \end{cases}$$

es decir, la solución $y(x)$ de (3.1.5) puede expresarse por $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. La solución de (3.1.6), una vez conocida la solución general de la ecuación diferencial, es un ejercicio elemental de algebra lineal. Vamos a ocuparnos de dar una fórmula explícita para la solución de (3.1.7) que tiene interés es sí misma y en las secciones siguientes.

La idea es resolver un problema particular, para un segundo miembro *singular* en el sentido que se precisará más adelante, y a partir de la solución de tal problema se generará la solución de (3.1.7).

La solución del problema con dato *singular* tiene nombre propio, se llama *función de Green* del problema (3.1.7).

3.1.2. Teorema.

Supongamos que el problema

$$\begin{cases} \tilde{L}(y) = 0 \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo solución trivial.

Entonces existe una única función

$$G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$$

verificando:

- (1) $G \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$, $\frac{\partial G}{\partial x} \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b] - \{(x, x) \mid x \in [a, b]\})$
- (2) $\frac{\partial G}{\partial x}(t^+, t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t^-, t) = \frac{1}{a_0(t)}$, (Condición de salto).
- (3) Para cada $t \in [a, b]$ fijo se verifica $\tilde{L}G(x, t) = 0$ en $\{a \leq x < t\} \cup \{t < x \leq b\}$.
- (4) $U(G(x, t)) = 0$ para cada $t \in [a, b]$ fijo.

(Se nota

$$(3.1.8) \quad \frac{\partial G}{\partial x}(t^+, t) = \lim_{x \rightarrow t, x > t} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(t^-, t) = \lim_{x \rightarrow t, x < t} \frac{\partial G}{\partial x}(x, t).$$

Demostración.

Sean $\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$ soluciones linealmente independientes de la ecuación $\tilde{L}(u) = 0$, es decir, una base del espacio vectorial $\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid \tilde{L}(y) = 0\}$. Supondremos la base normalizada de tal forma que en algún $x_0 \in [a, b]$, la matriz wronskiana es la identidad, es decir,

$$(3.1.9) \quad \Phi(\phi_1, \phi_2)(x_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así el wronskiano es $W(\phi_1, \phi_2) = \det \Phi(\phi_1, \phi_2)$. Fijado $t \in [a, b]$ consideramos la familia de funciones

$$(3.1.10) \quad K(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < t \\ c_1(t)\phi_1(x) + c_2(t)\phi_2(x) & \text{si } t \leq x \leq b, \end{cases}$$

donde $c_1(t), c_2(t) \in \mathbf{R}$ serán elegidos de forma que

$$(3.1.11) \quad \begin{cases} (1) & K(t, t) = 0 \\ (2) & \frac{\partial K}{\partial x}(t^+, t) - \frac{\partial K}{\partial x}(t^-, t) = \frac{1}{a_0(t)}. \end{cases}$$

El sistema (3.1.11) se traduce en

$$(3.1.12) \quad \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0(t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que tiene solución única por (3.1.9) y la fórmula de Jacobi-Liouville para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. (Véase *M. Guzmán, "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias", Editorial Alhambra 1975, página 162*).

Resolviendo (3.1.12) obtenemos

$$(3.1.13) \quad \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2'(t) & -\phi_2(t) \\ -\phi_1'(t) & \phi_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{a_0(t)} \frac{1}{W(\phi_1, \phi_2)(t)},$$

donde $W(\phi_1, \phi_2)(t)$ es definido en (3.1.9). Por tanto,

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} \frac{1}{a_0(t)} \begin{pmatrix} -\phi_2(t) \\ \phi_1(t) \end{pmatrix}.$$

De esta forma (3.1.10) se convierte en

$$(3.1.14) \quad K(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x \leq t \\ \frac{\phi_1(t)\phi_2(x) - \phi_1(x)\phi_2(t)}{a_0(t)W(\phi_1, \phi_2)(t)} & \text{si } t \leq x \leq b, \end{cases}$$

La función K obtenida en (3.1.14) verifica las condiciones 1), 2) y 3) del teorema.

Definiremos la función

$$(3.1.15) \quad G(x, t) = K(x, t) + d_1\phi_1(x) + d_2\phi_2(x),$$

es decir, como la suma de la función K definida en (3.1.14) y una solución de la ecuación diferencial homogénea, $y(x) = d_1\phi_1(x) + d_2\phi_2(x)$, que será elegida de forma que G verifique el requerimiento 4) del teorema. Es obvio, por otra parte, que cualquier función de la forma (3.1.15) continúa verificando los requerimientos 1), 2) y 3) del teorema.

Queda por probar que para t fijo se pueden elegir $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$ de forma que G verifique la condición 4). Es decir, hemos de resolver el sistema

$$(3.1.16) \quad d_1U(\phi_1) + d_2U(\phi_2) = -U(K),$$

que tiene solución única por el teorema de alternativa. Para tal elección de d_1 y d_2 tenemos la función G satisfaciendo las condiciones del teorema.

A la función G se le llama *función de Green* para el problema de contorno. \square

Ejemplo 1.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' + y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

Si se hace el cambio de variable dependiente $x = e^t$ se transforma en una ecuación con coeficientes constantes que se integra elementalmente. Tras deshacer el cambio obtenemos que la solución general de la ecuación de nuestro problema es

$$y(x) = c_1 \cos(\log x) + c_2 \operatorname{sen}(\log x).$$

Es muy fácil ver que el problema homogéneo tiene sólo la solución trivial. Procedemos a calcular la función de Green. Como se trata de condiciones separadas se pueden organizar los cálculos en la forma siguiente.

1) Si se considera

$$K(x, t) = \begin{cases} a(t) \operatorname{sen}(\log x) & \text{si } 1 \leq x < t \\ b(t)(\operatorname{sen}(\log x) - \tan(1) \cos(\log x)) & \text{si } t < x \leq e \end{cases}$$

se verifican los datos de contorno y que es solución en todo el intervalo $[1, e]$ salvo en $x = t$.

2) Para que K resulte continua basta tomar

$$a(t) = c(t)(\operatorname{sen}(\log t) - \tan 1 \cos(\log t))$$

y

$$b(t) = c(t) \operatorname{sen}(\log t),$$

donde $c(t)$ es arbitraria.

3) Si elegimos ahora $c(t)$ para que se verifique la condición de salto, resulta que la función de Green es

$$G(x, t) = \frac{1}{t \tan 1} \begin{cases} (\operatorname{sen}(\log t) - \tan(1) \cos(\log t)) \operatorname{sen}(\log x) & \text{si } 1 \leq x < t \\ \operatorname{sen}(\log t)(\operatorname{sen}(\log x) - \tan(1) \cos(\log x)) & \text{si } t < x \leq e \end{cases}$$

Con la función de Green calculada en el teorema anterior se obtiene la forma explícita de la solución del problema (3.1.7), esta expresión es el contenido del siguiente resultado.

3.1.3. Teorema.

Supongamos que el problema homogéneo asociado,

$$\begin{cases} \tilde{L}(y) = 0 \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo solución trivial y sea $G(x, t)$ su función de Green.

Supongamos que $f \in \mathcal{C}([a, b])$, entonces la única solución de (3.1.7) es

$$(3.1.17) \quad y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt.$$

Demostración.

La unicidad es consecuencia del *teorema de alternativa*, (3.1.1). Comprobaremos que y verifica la ecuación diferencial, pues las condiciones de contorno es obvio que son satisfechas por verificarlas la función de Green. Se tiene

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt = \int_a^x K(x, t) f(t) dt + \int_a^b (d_1 \phi_1(x) + d_2 \phi_2(x)) f(t) dt$$

y por tanto,

$$(3.1.18) \quad \tilde{L}(y)(x) = \tilde{L}\left(\int_a^x K(x, t) f(t) dt\right),$$

dado que el resto es solución de la ecuación homogénea.

Calculando directamente se obtiene

$$y'(x) = \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) f(t) dt$$

por ser $K(x, x) = 0$, y entonces

$$y''(x) = \int_a^x \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) f(t) dt + \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

por ser el salto de $\frac{\partial K}{\partial x}$ en $x = t$, igual a $\frac{1}{a_0(t)}$.

Entonces

$$\tilde{L}\left(\int_a^x K(x, t) f(t) dt\right) = \int_a^x \tilde{L}(K(x, t)) f(t) dt + a_0(x) \frac{f(x)}{a_0(x)} = f(x),$$

pues

$$\tilde{L}(K(x, t)) = 0 \quad \text{si} \quad a \leq t < x.$$

Así (3.1.18) y esta última observación prueban el teorema. \square

A continuación estudiamos con más detalle qué significado tiene la función de Green, lo cual nos permitirá entender mejor el resultado del teorema (3.1.3).

Suponemos que se verifican las hipótesis de los teoremas anteriores.

Fijo $t \in (a, b)$, consideramos $\varepsilon > 0$ tal que, $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \subset [a, b]$, y la función

$$(3.1.19) \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \chi_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [t - \varepsilon, t + \varepsilon] \\ \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } x \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon]. \end{cases}$$

Según una sencilla extensión del teorema (3.1.3), la solución $y_\varepsilon(x)$ del problema

$$\begin{cases} \tilde{L}(y_\varepsilon(x)) = f_\varepsilon(x) \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

es dada por la fórmula

$$y_\varepsilon(x) = \int_a^b G(x, s) f_\varepsilon(s) ds = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} G(x, s) ds$$

Por la continuidad de $G(x, t)$, se concluye que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = G(x, t).$$

Observamos, por otra parte que

$$(3.1.20) \quad \int_a^b f_\varepsilon(x) dx = 1,$$

de acuerdo con la definición de f_ε . Por tanto,

- (1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = 0$ si $x \neq 0$, siendo el límite infinito en $x = 0$.
- (2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f_\varepsilon(x) dx = 1$
- (3) Si $g \in \mathcal{C}([a, b])$ entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b g(x) f_\varepsilon(x) dx = g(t)$.

Formalmente tenemos que, llamando δ_t al límite puntual de la familia $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, se debería verificar

- (1) $\int_a^b g(x) \delta_t dx = g(t)$.
- (2) El soporte de δ_t es sólo el punto $t \in (a, b)$.

Si se aplica (1) a la función $g(x) \equiv 1$ se debería tener que $\int_a^b \delta_t dx = 1$, lo cual en el marco de las funciones integrables choca de plano con la condición (2) y la teoría de la integral: *Una función con soporte en un único punto tiene integral cero*

Sin embargo los cálculos formales con objetos como δ_t son frecuentes y muy útiles en Física. Fueron desarrollados por el premio Nobel británico Paul Dirac por lo que a δ_t se le llama *delta de Dirac concentrada en el punto t*. Intuitivamente puede mirarse como una masa unidad concentrada en un punto.

Desde el punto de vista matemático, justificar el argumento formal de representar el límite puntual de $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ por un objeto δ_t , que a la vista de lo discutido no puede ser una función, requiere el desarrollo de la Teoría de Distribuciones, elaborada en la década de los cincuenta por el matemático francés L. Schwartz y los rusos Gelfand y Shilov, y que escapa del alcance de este texto.

Pero al menos formalmente por el momento podemos decir que la función de Green es la *solución*, en algún sentido débil, del problema

$$(3.1.21) \quad \begin{cases} \tilde{L}(G(x, t)) = \delta_t(x) \\ U(G) = 0. \end{cases}$$

De esta forma si se interpreta el segundo miembro de (3.1.7) como una densidad, $f(t)$ en cada punto $t \in (a, b)$, la fórmula (3.1.17) puede leerse como la "*suma*" de las soluciones de (3.1.21) multiplicadas por la densidad en cada punto. Realmente es una extensión del principio de superposición a integrales.

Como resumen, el cálculo de la solución de un problema *singular*, es la clave para obtener la solución de (3.1.7).

Otro punto de vista interesante que sugieren los resultados anteriores es el siguiente. Consideremos

$$\mathcal{E} = \{\phi \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid U(\phi) = 0\},$$

es decir, las funciones con dos derivadas continuas que satisfacen las condiciones de contorno. Entonces el *operador diferencial* \tilde{L} puede verse como la aplicación

$$\tilde{L} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

que es lineal y uno a uno, pues se supone que el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial. Pero por el teorema (3.1.3), definiendo

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{E},$$

por

$$(3.1.22) \quad \mathcal{G}f(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt,$$

se tiene

$$(3.1.23) \quad \tilde{L}\mathcal{G}f(x) = f(x),$$

luego \mathcal{G} es la aplicación inversa de \tilde{L} . Además la unicidad de solución implica también que

$$(3.1.24) \quad \mathcal{G}\tilde{L}u(x) = u(x).$$

Esta *algebraización* del problema será útil. Para que así sea, dotamos al espacio de funciones continuas de una norma parecida a la euclídea en \mathbf{R}^N , en el sentido de que es inducida por un producto escalar.

Más precisamente, si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ definimos el producto escalar

$$(3.1.25) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)dt,$$

entonces la norma asociada es

$$(3.1.26) \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = (\langle f, f \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

La única propiedad que requiere alguna demostración no obvia es la *propiedad triangular* de la norma, la cual está basada en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que se obtiene a continuación.

3.1.4. Lema. (*Desigualdad de Cauchy-Schwartz*)

Se verifica

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Demostración.

Sean $x, \theta \in \mathbf{R}$. Entonces,

$$0 \leq \|f - xe^{i\theta}g\|_2^2 = \langle f - xe^{i\theta}g, f - xe^{i\theta}g \rangle = \|f\|_2^2 - 2\Re[xe^{-i\theta}\langle f, g \rangle] + x^2\|g\|_2^2.$$

Tomando $\theta = \arg\langle f, g \rangle$ se tiene

$$0 \leq \|f - xe^{i\theta}g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2x|\langle f, g \rangle| + x^2\|g\|_2^2,$$

en consecuencia el polinomio de segundo grado debe ser positivo o cero, es decir

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$$

como se quería demostrar. \square

La desigualdad triangular se obtiene por el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}\|f + g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + 2\Re\langle f, g \rangle + \|g\|_2^2 \leq \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2.\end{aligned}$$

Además la desigualdad de Cauchy-Schwartz permite establecer las propiedades de la aplicación \mathcal{G} que se usarán.

(1) Se verifica que existe una constante $C > 0$ tal que

$$(3.1.27) \quad \|\mathcal{G}f\|_2 \leq C\|f\|_2, \quad \text{si } f \in \mathcal{C}([a, b])$$

En efecto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}f\|_2^2 &= \int_a^b \left| \int_a^b G(x, t)f(t)dt \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left\{ \left(\int_a^b |G(x, t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right) \right\} dx = \\ &= \left(\int_a^b \int_a^b |G(x, t)|^2 dt dx \right) \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)\end{aligned}$$

que prueba (3.1.27).

(2) Si f es continua se verifica

$$(3.1.28) \quad |\mathcal{G}f(x)| \leq \int_a^b |G(x, t)||f(t)|dt \leq \sup_{(x, t) \in [a, b] \times [a, b]} |G(x, t)|(b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2,$$

donde la última desigualdad resulta de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

(3) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, que depende sólo de G y ε , tal que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$(3.1.29) \quad |\mathcal{G}f(x) - \mathcal{G}f(y)| \leq \varepsilon\|f\|_2(b-a)^{\frac{1}{2}}.$$

En efecto, la continuidad uniforme de G en $[a, b] \times [a, b]$ implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|G(x, t) - G(y, t)| < \varepsilon$. La desigualdad de Cauchy-Schwartz permite terminar y obtener (3.1.29).

De las propiedades 1), 2) y 3) concluimos

3.1.5. Proposición.

Sea $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) \mid \|f\|_2 \leq R\}$. Si se considera el conjunto de funciones $\mathcal{G}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{G}(f) \mid f \in \mathcal{B}\}$, se verifican

- (1) $\sup_{x \in [a, b]} |\mathcal{G}f(x)| \leq M(b-a)^{\frac{1}{2}}R$, donde $M = \sup_{(x, t) \in [a, b] \times [a, b]} |G(x, t)|$
- (2) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|\mathcal{G}f(x) - \mathcal{G}f(y)| \leq \varepsilon R(b-a)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para toda } f \in \mathcal{B}.$$

Por su importancia, la propiedad 2) recibe nombre propio, las familias de funciones que la verifican se dicen *equicontinuas*, viniendo la palabra a expresar que el número $\delta > 0$ que se postula existe, no depende más que de ε y es independiente de los puntos y de la función f . Para ser más formales recogemos las ideas anteriores como sigue.

3.1.6. Definición.

Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([a, b])$ una familia de funciones. Diremos que \mathcal{F} es *equicontinua* si se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Nota. Lo que sigue puede ser omitido en una primera lectura, en la cual, algunos de los teoremas de la sección siguiente donde se utiliza, pueden ser admitidos sin prueba. No obstante para que el texto sea lo más autocontenido posible nos ha parecido oportuno hacer esta pequeña incursión en el *Análisis Real*.

Haremos una primera observación sobre un ejemplo. Si se considera la sucesión de funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ definida por

$$(3.1.30) \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - n(x - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \quad n = 3, 4, \dots, \end{cases}$$

se tiene que si $m > n$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_2^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$$

como se comprueba fácilmente por integración elemental. En este sentido podemos decir que $\{f_n\}_{n \geq 3}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}([a, b])$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, definida en (3.1.26). De otra parte el límite puntual de la sucesión es muy fácil ver por inspección directa que es la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

que *no es continua*. Por consiguiente el espacio de funciones continuas en $[0, 1]$ con la norma definida en (3.1.26) tiene la dificultad de que no toda sucesión de Cauchy tiene como límite una función continua. Por esta razón se dice que el espacio $\mathcal{C}([0, 1])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ *no es completo*. Este problema en el paso al límite es una dificultad seria que hay que evitar. Para ello la idea es *completar* el espacio de funciones continuas añadiendo aquellas funciones que son límites puntuales de sucesiones de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. Procedemos a continuación a indicar la solución del anterior problema en el paso al límite.

Se consideran funciones integrables con respecto a la integral de Lebesgue.

Como referencia complementaria de *teoría de la integral* sugerimos el texto de De Barra, "Measure Theory and integration", Ed. Ellis Horwood Ltd.(1981).

Sea el espacio de funciones

$$L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ medible, } \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\},$$

es fácil ver que L^2 así definido es un espacio vectorial. Además si se define

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt$$

es un producto escalar en L^2 . La prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwartz es aplicable aquí también.

Se considerarán dos *funciones equivalentes* si son iguales salvo en un conjunto de medida cero y se consideraran los elementos de L^2 como las clases de equivalencia respecto a esta relación. Es claro que, con esta precisión, la extensión de la definición (3.1.26) define una norma sobre L^2 . Dejamos al lector que complete los detalles de esta última afirmación.

Podemos establecer ahora el resultado básico.

3.1.7. Proposición.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de Cauchy en $L^2([a, b])$, entonces existe $f \in L^2([a, b])$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

(Es decir, $L^2([a, b])$ es completo.)

Demostración.

Dada la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, seleccionamos una subsucesión $\{f_{k_n}\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que

$$(3.1.31) \quad \|f_{k_n} - f_{k_{n+1}}\|_2 \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

lo cual es posible por tratarse de una sucesión de Cauchy.

Definimos

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^m |f_{k_n}(x) - f_{k_{n+1}}(x)|,$$

con lo que se tiene

$$(3.1.32) \quad \begin{cases} (i) & g_m(x) \leq g_{m+1}(x) \quad \text{para cada } x \in [a, b], \\ (ii) & \|g_m(x)\|_2 \leq 1 \quad (\text{en virtud (3.1.31)}). \end{cases}$$

Por (i) en (3.1.32) existe $g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x)$, salvo en un conjunto de medida cero de $[a, b]$. El teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue demuestra que:

- 1) $g \in L^2([a, b])$,
 - 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b |g_m(x) - g(x)|^2 dx = 0$.
- Además,

$$|f_{k_m}(x) - f_{k_l}(x)| \leq \sum_{j=l+1}^{m-l} |f_{k_j}(x) - f_{k_{j-1}}(x)| \leq g(x) - g_{l-1}(x),$$

y en consecuencia $\{f_{k_n}(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $x \in [a, b] - E$, E conjunto de medida cero. Por tanto existe una función medible f tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) = f(x)$ en $x \in [a, b] - E$. Si observamos lo demostrado hasta ahora podemos resumirlo en la siguiente afirmación que tiene interés en sí misma.

Dada una sucesión de Cauchy en L^2 , existe una subsucesión que converge puntualmente salvo en un conjunto de medida cero.

Es obvio que

- a) $|f(x) - f_{k_n}(x)| \leq g(x)$ para cada $n \in \mathbf{N}$, por tanto,

$$\|f\|_2 \leq \|f - f_{k_n}\|_2 + \|f_{k_n}\|_2 \leq \|g\|_2 + \|f_{k_n}\|_2 < \infty,$$

o, dicho de otra manera, $f \in L^2([a, b])$.

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_{k_n}(x)| = 0$ en todo $x \in [a, b] - E$

El teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue con a) y b) prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{k_n}\|_2 = 0$$

Para terminar, sólo hace falta notar que al ser $\{f_n\}_{k \in \mathbf{N}}$ sucesión de Cauchy, se tiene que toda la sucesión converge a f , es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_2 = 0.$$

□

En la sección 3.3 probaremos que las funciones continuas son densas en L^2 , por tanto no incidimos más aquí en ese resultado.

La norma de L^2 se define por el producto escalar y L^2 resulta ser completo respecto a ella. Es lo mismo que ocurre en \mathbf{R}^N con la norma euclídea. Esto sugiere que la *geometría* de L^2 sea muy parecida a la euclídea. Se verá en las próximas secciones que hay una gran similitud de estructuras geométricas, como se presume. Los espacios cuya norma procede de un producto escalar y que respecto a ella son completos son conocidos en la literatura como *espacios de Hilbert*, en honor del eminente matemático germano David Hilbert.

3.2.- Problemas autoadjuntos. Problema de Sturm-Liouville. Autovalores.

Consideremos el *operador diferencial* \tilde{L} definido para cada $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ por

$$\tilde{L}(y)(x) \equiv a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x),$$

que es el considerado en (3.1.4).

Supondremos que $a_0 \in \mathcal{C}^1([a, b])$, que $a_1, a_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ y que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Con estas hipótesis de regularidad, multiplicando la ecuación $\tilde{L}(y) = f$ por una función $g \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $g(x) \neq 0$ en cada $x \in [a, b]$, resulta la ecuación $g\tilde{L}(y) = gf$, la cual tiene por soluciones la misma familia de funciones que la ecuación de partida. Esta observación elemental lleva a buscar una función g tal que la ecuación resultante tenga forma *autoadjunta* en el sentido que precisaremos a continuación.

Buscaremos, en particular, una función g tal que se pueda escribir la identidad siguiente

$$(3.2.1) \quad g(x)(a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)) \equiv (p(x)y'(x))' + q(x)y(x).$$

La función g ha de verificar

$$p = a_0g, \quad p' = ga_1, \quad q = ga_2,$$

es decir, se debe tener que $(ga_0)' = ga_1$ o, lo que es lo mismo,

$$(3.2.2) \quad g'(x) = \left(\frac{a_1(x) - a_0'(x)}{a_0(x)} \right) g(x).$$

Cualquier solución no nula de (3.2.2) es válida para conseguir la ecuación en la forma (3.2.1). La solución general de (3.2.2) es

$$g(x) = g(a) \frac{a_0(a)}{a_0(x)} \exp \left\{ \int_a^x \frac{a_1(s) - a_0'(s)}{a_0(s)} ds \right\}.$$

La forma para el operador \tilde{L} ,

$$(3.2.3) \quad L(y)(x) \equiv (p(x)y'(x))' + q(x)y(x),$$

se llama *forma autoadjunta*. Por lo visto tenemos que las ecuaciones $\tilde{L}(y) = f$ y $L(y) = fg$ son equivalentes, en el sentido que tienen las mismas soluciones. A partir de ahora consideraremos los problemas de contorno escritos en forma autoadjunta, con las hipótesis resultantes de los cálculos anteriores, es decir, $p \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $q \in \mathcal{C}([a, b])$ y $p(x) \neq 0$, cualquiera que sea $x \in [a, b]$. El problema de contorno

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} L(y) \equiv (py')' + qy = f \\ U(y) = h \end{cases}$$

con las condiciones de contorno *separadas*, precisamente las que corresponden a la matriz

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & q_2 \end{pmatrix},$$

se llama *problema de Sturm-Liouville*.

Paralelamente estudiaremos el problema (3.2.4) con condiciones periódicas, es decir, las dadas por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

en cuyo caso supondremos también

$$p(a) = p(b)$$

Observamos que estas son las condiciones (3.1.2) y (3.1.3), respectivamente. Estos dos problemas son el objeto de estudio de esta sección. Comenzamos por estudiar las propiedades formales comunes al problema de Sturm-Liouville y al problema periódico, que son claves para estudiar el problema de autovalores asociado a (3.2.4)

3.2.1. Lema. (Identidad de Lagrange)

Sea L definido por (3.2.3) y sean $u, v \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Entonces se verifica

$$(I - L) \quad uL(v) - vL(u) = (p(uv' - u'v))'$$

Demostración.

Es un simple cálculo con determinantes, a saber,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} u & L(u) \\ v & L(v) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} u & (pu')' \\ v & (pv')' \end{pmatrix} = \\ &= p \det \begin{pmatrix} u & u'' \\ v & v'' \end{pmatrix} + p' \det \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} = \\ &= \left(p \det \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} \right)' \end{aligned}$$

□

Sea $E = \{\phi \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid U(\phi) = 0\}$, donde U es (3.1.2) o (3.1.3) y en este caso, $p(a) = p(b)$.

3.2.2. Corolario. (Identidad de Green)

Si $u, v \in E$, entonces

$$\langle u, Lv \rangle \equiv \int_a^b uL(v)dx = \int_a^b L(u)vdx \equiv \langle Lu, v \rangle$$

(Nótese que se trata del producto escalar definido en (3.1.25), para funciones reales.)

Demostración.

Por $(I - L)$ se tiene

$$\langle u, Lv \rangle - \langle Lu, v \rangle = p(b)(u(b)v'(b) - v(b)u'(b)) - p(a)(u(a)v'(a) - v(a)u'(a)) = 0,$$

si las condiciones de contorno son (3.1.2) o (3.1.3) y $p(a) = p(b)$. \square

El resultado anterior pone de manifiesto una propiedad de simetría del operador L en el espacio E . Hay una analogía con lo que ocurre en el caso de una matriz simétrica A en \mathbf{R}^N . En efecto, si A es una matriz simétrica en \mathbf{R}^N se tiene,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbf{R}^N.$$

Los problemas de contorno verificando la identidad de Green se llaman *problemas autoadjuntos*. En este sentido el problema de Sturm-Liouville y el problema periódico son problemas autoadjuntos.

Las matrices simétricas son diagonalizables por un cambio de base; la conjetura es que, siendo el operador L simétrico sobre E , también sea diagonalizable en algún sentido.

Por esta analogía, haremos una digresión sobre la estrategia que se sigue en la diagonalización de matrices simétricas.

En primer lugar se tiene que si A es una matriz simétrica real sus *autovalores* son reales. Además el mayor de los autovalores se calcula resolviendo el siguiente problema de máximo condicionado:

Determinar el máximo de $F(x) = \langle Ax, x \rangle$ sujeto a la condición $\|x\|^2 = 1$

(Véase el texto de *W. Fleming "Functions of Several Variables" Ed. Springer Verlag 1977, página 163*, para encontrar todos los detalles.)

Una vez encontrado el autovalor λ_1 , valor máximo, y un autovector unitario e_1 donde se alcanza, se considera H , hiperplano ortogonal a e_1 . Se plantea el problema de máximos condicionados que sigue:

Determinar el máximo de $F(x) = \langle Ax, x \rangle$, sujeto a las condiciones $\|x\|^2 = 1$ y $\langle x, e_1 \rangle = 0$.

La última condición es equivalente a que $x \in H$, es decir, se considera el problema proyectado sobre H .

Su solución da el autovalor $\lambda_2 \leq \lambda_1$ y un autovector, e_2 .

De esta manera, por reiteración del proceso anterior, se determinan todos los autovalores de A .

Se trata ahora de calcular los *autovalores* de L sujeto a las condiciones de contorno homogéneas, separadas o periódicas con $p(a) = p(b)$. Para precisar damos la definición correspondiente.

3.2.3. Definición.

Sea el problema

$$(3.2.5) \quad \begin{cases} L(y) \equiv (py')' + qy = \lambda y \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

se dice que $\lambda \in \mathbf{C}$ es un autovalor de (3.2.5) si existe solución no trivial del problema.

Si λ es un autovalor de (3.2.5), y $\phi \in E$, $\phi \neq 0$, verifica $L(\phi) = \lambda\phi$, diremos que ϕ es una autofunción correspondiente al autovalor λ .

La idea es ensayar el mismo método usado en el caso de las matrices, para calcular los autovalores de (3.2.5).

La primera dificultad es que la función

$$\mathcal{F}(\phi) = \langle L(\phi), \phi \rangle,$$

definida sobre las funciones de E , no necesariamente está acotada en términos de $\|\phi\|_2 = 1$. El lector puede pensar en funciones "pequeñas" con derivadas muy grandes para convencerse de la anterior afirmación. Puestos a poner dificultades, no está claro que exista algún autovalor para (3.2.5), cosa que en el caso de las matrices se tiene gratuitamente por aplicación del teorema fundamental del Algebra o por el teorema de Heine Borel que afirma que una función continua sobre la esfera, que es un compacto de \mathbf{R}^N , tiene máximo. No hay algo parecido para el caso que nos ocupa, el espacio E tiene dimensión infinita y entonces la correspondiente esfera no es compacta. Esto quiere decir que tendremos que trabajar más para probar que existen autovalores del problema (3.2.5).

La primera etapa en este proyecto es formal y bastante elemental. Supongamos que el problema

$$(3.2.6) \quad \begin{cases} L(y) = 0 \\ U(y) = 0, \end{cases}$$

tiene sólo solución trivial. (En caso contrario $\lambda = 0$ es autovalor y está probada la existencia).

En la hipótesis anterior para (3.2.6), podemos calcular la función de Green, $G(x, t)$, del problema de contorno, como se ha demostrado en el teorema (3.1.2). De esta forma se puede considerar también la aplicación

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow E \subset \mathcal{C}([a, b])$$

por

$$(3.2.7) \quad \mathcal{G}f(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt,$$

siendo así \mathcal{G} el inverso de L sobre E , como prueba el teorema (3.1.3). Por tanto, si λ es un autovalor para el problema de contorno, es decir, si existe $\phi \in E$ tal que $\phi \neq 0$ verificando $L\phi = \lambda\phi$, entonces $\phi = \mathcal{G}L\phi = \lambda\mathcal{G}\phi$. En otras palabras, si λ es autovalor del problema de contorno, entonces $\mu = \frac{1}{\lambda}$ es autovalor de \mathcal{G} , inverso de L en E . Es obvio también que si μ es autovalor de \mathcal{G} , $\frac{1}{\mu}$ es autovalor del problema de contorno. De esta forma la primera conclusión es que

El estudio de los autovalores del problema de contorno, es equivalente a estudiar los autovalores de \mathcal{G} .

La primera ventaja que se aprecia de esta estrategia es que \mathcal{G} verifica una condición de acotación análoga a la que verifican las matrices, más concretamente, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}f, f \rangle &= \int_a^b \mathcal{G}f(x) \bar{f}(x) dx \leq \\ &\leq \left(\int_a^b |\mathcal{G}f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

tras aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad (3.1.27). Observamos que la desigualdad anterior, es decir,

$$(3.2.8) \quad \langle \mathcal{G}f, f \rangle \leq C \|f\|_2^2,$$

es el mismo tipo de desigualdad que se obtiene para las matrices.

De otro lado, del Corolario (3.2.2) se concluye una propiedad de simetría para \mathcal{G} , es decir, si $u, v \in E$ tenemos

$$(3.2.9) \quad \langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle.$$

Pero entonces, si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ y llamamos $u = \mathcal{G}f$ y $v = \mathcal{G}g$, por (3.2.9) se obtiene

$$(3.2.10a) \quad \langle \mathcal{G}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{G}g \rangle.$$

Dicho de otra manera \mathcal{G} es también simétrico sobre $\mathcal{C}([a, b])$, y además verifica (3.2.8).

Como consecuencia de la propiedad (3.2.10a) resulta que la función de Green ha de verificar la propiedad de simetría

$$(3.2.10b.) \quad G(x, t) = G(t, x), \quad x, t \in [a, b]$$

Antes de ocuparnos de la existencia de autovalores para \mathcal{G} , o bien, para el problema de Sturm-Liouville o para el problema periódico de forma equivalente, daremos algunas propiedades elementales de autovalores y autofunciones, que se desprenden de lo que hemos estudiado hasta ahora.

3.2.4. Proposición.

A) Consideremos el problema de Sturm-Liouville, es decir, (3.2.4) con las condiciones de contorno (3.1.2). Sea \mathcal{G} el correspondiente operador inverso definido por (3.2.7). Entonces,

- (1) Si λ es autovalor de \mathcal{G} , necesariamente $\lambda \in \mathbf{R}$.
- (2) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de \mathcal{G} y ϕ_1, ϕ_2 autofunciones correspondientes, se verifica

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$$

(Es decir, ϕ_1 y ϕ_2 son ortogonales respecto al producto escalar definido por (3.1.25)).

- (3) Si ϕ_1 y ϕ_2 son autofunciones correspondientes al autovalor λ de \mathcal{G} , existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $\phi_1 = c\phi_2$. (Es decir, todo autovalor del problema de Sturm-Liouville, es simple).
- B) Si se considera el problema periódico, es decir, (3.2.4) con la hipótesis $p(a) = p(b)$ y las condiciones de contorno (3.1.3), se verifican las conclusiones 1) y 2) del apartado A).

Demostración.

La prueba de (1) y (2) es idéntica en los casos A) y B). En efecto,

- (1) Por ser \mathcal{G} simétrico se tiene que si ϕ es una autofunción correspondiente a λ

$$(3.2.11) \quad 0 = \langle \mathcal{G}\phi, \phi \rangle - \langle \phi, \mathcal{G}\phi \rangle = (\lambda - \bar{\lambda})\langle \phi, \phi \rangle$$

que prueba (1).

- (2) Por el mismo argumento de simetría y teniendo en cuenta (1),

$$0 = \langle \mathcal{G}\phi_1, \phi_2 \rangle - \langle \phi_1, \mathcal{G}\phi_2 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \phi_1, \phi_2 \rangle,$$

que prueba este apartado.

Con la hipótesis de que se tienen condiciones separadas probamos el apartado (3)

- (3) Si hubiese dos autofunciones u y v correspondientes al autovalor λ , consideramos el determinante wronskiano de estas dos soluciones

$$W(u, v)(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x).$$

Por verificar las condiciones de contorno se tiene

$$\begin{cases} m_1 u(a) + n_1 u'(a) = 0, \\ m_1 v(a) + n_1 v'(a) = 0, \end{cases}$$

y sustituyendo se obtiene $W(u, v)(a) = 0$. Pero entonces por ser soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden, $W(u, v)(x) = 0$ para cada $x \in [a, b]$, y por tanto son funciones linealmente dependientes, es decir, existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $u(x) = cv(x)$. (Véase el texto de *G.F. Simmons "Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas historicas", Ed Mc Graw Hill (1993) pag 90-91*) \square

Nota.

El problema periódico no satisface la conclusión (3) de la Proposición (3.2.4), como pone de manifiesto el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.

Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} -y'' = \lambda y, \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

El claro que $\{\sin kx, \cos kx\}$ son autofunciones correspondientes al autovalor $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbf{N}$.

Podemos considerar

$$\mathcal{G} : L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([a, b])$$

puesto que

$$(3.2.12) \quad \mathcal{G}f(x) = \int_a^b G(x, t)f(t)dt$$

está bien definido para $f \in L^2$. Además de la desigualdad (3.2.8) se tiene

$$(3.2.13) \quad \|\mathcal{G}f\|_2 \leq c\|f\|_2,$$

como se probó en la sección 3.1.

La continuidad de $G(x, t)$ permite demostrar la continuidad de $\mathcal{G}f$ para $f \in L^2$, pero el resultado siguiente mejora esta propiedad de \mathcal{G} y establece una condición de acotación. Ambas serán importantes para demostrar la existencia de autovalores.

3.2.5. Teorema.

Sea

$$X = \{\mathcal{G}f \mid f \in L^2, \quad \|f\|_2 \leq 1\}.$$

Entonces X verifica

1) *X es uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que*

$$|\mathcal{G}f(x)| \leq M, \quad \text{para cada } x \in [a, b] \quad \text{y cada } f \quad \text{tal que} \quad \|f\|_2 \leq 1$$

2) *X es un conjunto equicontinuo, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x, y \in [a, b]$ tales que $|x - y| < \delta$ se verifica $|\mathcal{G}f(x) - \mathcal{G}f(y)| < \varepsilon$ para toda $\mathcal{G}f \in X$*

Demostración.

1) La acotación uniforme es justamente la desigualdad (3.1.28), junto a que $\|f\|_2 \leq 1$.

- 2) De la misma forma la equicontinuidad, resulta de la desigualdad (3.1.29) y de que $\|f\|_2 \leq 1$. \square

La importancia del teorema (3.2.5) es que para los conjuntos de funciones verificando las hipótesis de X , se tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass para la convergencia uniforme, es decir,

Toda sucesión de funciones en X tiene una subsucesión uniformemente convergente.

Esta propiedad de X se recoge diciendo que X es *relativamente compacto*. En este sentido tenemos que

X es relativamente compacto en $\mathcal{C}([a, b])$ respecto a la convergencia uniforme.

En las hipótesis de acotación uniforme y equicontinuidad que verifica X , la propiedad de Bolzano-Weierstrass fue demostrada por Ascoli y su resultado fué generalizado por Arzelá. Pasamos a dar una prueba del lema de Ascoli-Arzelá para conveniencia del lector.

3.2.6. Lema. (Ascoli-Arzelá)

Sea $K = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N] \subset \mathbf{R}^N$, intervalo cerrado y acotado. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de funciones continuas en K con valores reales verificando

- i) (Acotación uniforme.) Existe una constante M , $0 < M < \infty$, tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in K$ y todo $n \in \mathbf{N}$.
 ii) (Equicontinuidad.) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in K$ verifican $|x - y| < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$.

Entonces existe una subsucesión $\{f_{k_n}\}_{k \in \mathbf{N}}$ que converge uniformemente.

Demostración.

Por la hipótesis i) se tiene que

$$\cup_{n \in \mathbf{N}} \{f_n(x) \mid x \in K\} \subset [-M, M],$$

es decir, el conjunto formado por las imágenes de la sucesión en \mathbf{R} , es acotado. Podemos ahora usar la hipótesis ii) para la sucesión $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, con lo que obtenemos una sucesión $\delta_n > 0$, que podemos suponer decreciente, tal que si $x, y \in K$, $|x - y| < \delta_n$,

$$|f_m(x) - f_m(y)| < \frac{1}{n} \quad \text{cualquiera que sea } m \in \mathbf{N}.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$ consideramos el correspondiente δ_n y del recubrimiento por bolas de radio δ_n de K extraemos, por compacidad, una familia finita de bolas, que continúa cubriendo a K ,

$$\{B(x_1^n), \dots, B(x_{r(n)}^n)\}.$$

Una vez fijadas todas las bolas y sus centros, utilizamos el proceso diagonal de Cantor en la siguiente forma. Por la propiedad de Bolzano-Weierstrass en la recta real, para $\varepsilon_1 = 1$ tomamos una subsucesión $\{f_n^1\}_{n \in \mathbf{N}}$ tal que

$$|f_n^1(x_j^1) - f_m^1(x_j^1)| < 1, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, r(1).$$

Por análogo argumento, para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ existe una subsucesión de la anterior,

$$\{f_n^2\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \{f_n^1\}_{k \in \mathbf{N}},$$

de forma que

$$|f_n^2(x_j^2) - f_m^2(x_j^2)| < \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, r(2).$$

Así, por recurrencia, para $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ construimos una subsucesión $\{f_n^k\}_{k \in \mathbf{N}}$ de $\{f_n^{k-1}\}_{k \in \mathbf{N}}$, de forma que

$$|f_n^k(x_j^k) - f_m^k(x_j^k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, r(k).$$

Por tanto, para cada $x \in K$ y cada $k \in \mathbf{N}$ podemos encontrar $j \in \{1, \dots, r(k)\}$ tal que $|x - x_j^k| < \delta_k$ y entonces

$$|f_n^k(x) - f_m^k(x)| \leq |f_n^k(x) - f_n^k(x_j^k)| + |f_n^k(x_j^k) - f_m^k(x_j^k)| + |f_m^k(x_j^k) - f_m^k(x)| \leq \frac{3}{k},$$

donde el primer y tercer sumando se acotan por $\frac{1}{k}$ en virtud de la equicontinuidad, y el segundo por la construcción anterior. En resumen se tiene

$$\sup_{x \in K} |f_n^k(x) - f_m^k(x)| \leq \frac{3}{k}.$$

Tomamos la *subsucesión diagonal*, es decir, $\{f_n^n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \{f_n^k\}_{k \in \mathbf{N}}$, para todo $k \in \mathbf{N}$

Observamos que por construcción la sucesión $\{f_n^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ verifica que dado $\varepsilon > 0$, tomando $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ y $m, n > k_0$, entonces

$$(*) \quad \sup_{x \in K} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| \leq 3\varepsilon,$$

que es lo que se entiende como que la sucesión diagonal es *uniformemente de Cauchy*.

Fijado $x \in K$ la propiedad $(*)$ implica que existe límite puntual, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^n(x) = f(x).$$

Pero de otra parte $(*)$ implica que en cada $x \in K$, si $n > k_0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| = |f_n^n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon,$$

es decir, la convergencia es uniforme. \square

Podemos ahora parafrasear los resultados obtenidos para \mathcal{G} en el siguiente corolario.

2.3.6' Corolario.

Si $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}} \in L^2$ es tal que $\|f_n\|_2 \leq 1$, entonces de $\{\mathcal{G}f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ se puede obtener una subsucesión uniformemente convergente.

La abstracción de esta idea a espacios generales es el concepto de *operador compacto*, donde la convergencia es la propia de cada espacio. Observemos que en este sentido podemos decir que *el operador \mathcal{G} es compacto como aplicación de L^2 en L^2* ; en efecto si $\{\mathcal{G}f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente, entonces también converge respecto a la norma de L^2 .

Dado el operador

$$\mathcal{G} : L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([a, b])$$

definido en (3.2.12), por verificar la acotación (3.2.13), permite definir

$$(3.2.14) \quad \|\mathcal{G}\| = \sup_{\|f\|_2=1} \|\mathcal{G}f\|_2.$$

La fórmula (3.2.14) define una norma sobre la clase de las aplicaciones lineales, T , de L^2 en sí mismo, tales que existe $c > 0$ verificando

$$\|Tf\|_2 \leq c\|f\|_2.$$

Esta afirmación es un buen ejercicio que se deja al cuidado del lector.

Retomamos la línea argumental y vamos a probar un resultado técnico, que permitirá intuir la similitud en el cálculo de autovalores de \mathcal{G} , con lo que se hace para calcular los de las matrices.

3.2.7. Lema.

Sea \mathcal{G} definido en (3.2.12) y $\|\mathcal{G}\|$ definido por (3.2.14). Entonces se verifica

$$(3.2.15) \quad \|\mathcal{G}\| = \sup_{u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\|_2=1} |\langle \mathcal{G}u, u \rangle|.$$

Demostración.

Llamemos

$$\eta = \sup_{u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\|_2=1} |\langle \mathcal{G}u, u \rangle|.$$

Si $u \in \mathcal{C}([a, b])$ y $\|u\|_2 = 1$, la desigualdad de Cauchy-Schwartz prueba que

$$|\langle \mathcal{G}u, u \rangle| \leq \|\mathcal{G}u\|_2 \|u\|_2 \leq \|\mathcal{G}\|,$$

es decir,

$$(3.2.16) \quad \eta \leq \|\mathcal{G}\|.$$

Para probar que $\eta \geq \|\mathcal{G}\|$, consideramos para $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$ tales que $\|u\|_2 = 1$, $\|v\|_2 = 1$,

$$\begin{aligned}
 (3.2.17) \quad & \langle \mathcal{G}(u+v), u+v \rangle = \\
 & = \langle \mathcal{G}u, u \rangle + \langle \mathcal{G}v, v \rangle + 2\langle \mathcal{G}u, v \rangle \leq \\
 & \leq \eta \|u+v\|_2^2,
 \end{aligned}$$

por la definición de η y por ser \mathcal{G} simétrico. De igual manera se tiene que

$$\begin{aligned}
 (3.2.18) \quad & \langle \mathcal{G}(u-v), u-v \rangle = \\
 & = \langle \mathcal{G}u, u \rangle + \langle \mathcal{G}v, v \rangle - 2\langle \mathcal{G}u, v \rangle \geq \\
 & \geq -\eta \|u-v\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Sustrayendo de (3.2.17), (3.2.18) se obtiene

$$(3.2.19) \quad 4\langle \mathcal{G}u, v \rangle \leq \eta(\|u+v\|_2^2 + \|u-v\|_2^2) = 2\eta(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2),$$

donde la última identidad es conocida como *identidad del paralelogramo* por su obvia interpretación geométrica, ($u+v$ y $u-v$ son las diagonales del "paralelogramo" de lados u y v).

Como $\|u\|_2 = 1$, tomando en (3.2.19) $v = \frac{\mathcal{G}u}{\|\mathcal{G}u\|_2}$ se tiene

$$(3.2.20) \quad 4\langle \mathcal{G}u, \frac{\mathcal{G}u}{\|\mathcal{G}u\|_2} \rangle \leq 2\eta(\|u\|_2^2 + 1) = 4\eta,$$

es decir,

$$(3.2.21) \quad \|\mathcal{G}u\|_2 \leq \eta,$$

y entonces

$$(3.2.22) \quad \|\mathcal{G}\| \leq \eta,$$

que con (3.2.16) prueba el resultado. \square

El lema anterior permite conjeturar el valor del mayor autovalor de \mathcal{G} , a la luz de lo que ocurre en el caso de las matrices. Es decir, si consideramos

$$\mathcal{F}(u) = |\langle \mathcal{G}u, u \rangle|,$$

el autovalor mayor debe ser

$$|\lambda| = \sup_{u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\|_2=1} \mathcal{F}(u),$$

para lo cual habrá que encontrar $u \in \mathcal{C}([a, b])$ de forma que se alcance el supremo.

El resultado probado en el lema (3.2.7), en combinación con la anterior conjetura, sugiere de manera natural enunciar el resultado siguiente.

3.2.8. Teorema.

Sea $\lambda = \|\mathcal{G}\|$, entonces λ o $-\lambda$ es un autovalor de \mathcal{G} .

Demostración.

En virtud del lema (3.2.7), existe una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{C}([a, b])$, $\|u_n\|_2 = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$, verificando

$$(3.2.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle| = \|\mathcal{G}\| = \lambda.$$

De esta forma podemos suponer que existe una subsucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_{k_n}, u_{k_n} \rangle = \|\mathcal{G}\| = \lambda,$$

o bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_{k_n}, u_{k_n} \rangle = \|\mathcal{G}\| = -\lambda.$$

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que ocurre lo primero y denotamos de nuevo a la subsucesión como $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Por el lema de Ascoli-Arzelá (3.2.6) y el teorema (3.2.5) se tiene que existe una subsucesión, la cual denotamos por $\{\mathcal{G}u_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{C}([a, b])$, que converge uniformemente a una función continua ϕ . Es decir,

$$(3.2.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}u_n = \phi \quad \text{uniformemente.}$$

Entonces también se tiene

$$(3.2.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \phi\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\mathcal{G}u_n(x) - \phi(x)|^2 dx = 0$$

y se continúa verificando

$$(3.2.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle = \lambda.$$

De la continuidad de la norma y de (3.2.25) se concluye

$$(3.2.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\|\mathcal{G}u_n\|_2 - \|\phi\|_2| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \phi\|_2^2 = 0,$$

es decir

$$(3.2.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n\|_2 = \|\phi\|_2.$$

Probaremos que ϕ verifica

$$\mathcal{G}\phi = \lambda\phi,$$

con lo cual quedará probado que λ es autovalor de \mathcal{G} . En primer término probamos que $\phi \neq 0$. En efecto,

$$(3.2.29) \quad 0 \leq \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2^2 = \|\mathcal{G}u_n\|_2^2 + \lambda^2 \|u_n\|_2^2 - 2\lambda \langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle,$$

pasando al límite, teniendo en cuenta (3.2.26), (3.2.28) y que $\|u_n\|_2 = 1$, se obtiene

$$(3.2.30) \quad 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2^2 = \|\phi\|_2^2 - \lambda^2,$$

por tanto,

$$(3.2.31) \quad \|\phi\|_2^2 \geq \lambda^2 > 0,$$

luego $\phi \neq 0$.

Por otra parte la definición de λ implica que

$$(3.2.32) \quad \|\mathcal{G}u_n\|_2^2 \leq \lambda^2,$$

por tanto de (3.2.29) se concluye

$$(3.2.33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2^2 \leq 2\lambda^2 - 2\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{G}u_n, u_n \rangle = 0.$$

Entonces por la propiedad triangular

$$(3.2.34) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \|\mathcal{G}\phi - \lambda\phi\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{G}\phi - \mathcal{G}(\mathcal{G}u_n)\|_2 + \|\mathcal{G}(\mathcal{G}u_n) - \lambda\mathcal{G}u_n\|_2 + \|\lambda\mathcal{G}u_n - \lambda\phi\|_2 \leq \\ &\leq \|\mathcal{G}\| \|\phi - \mathcal{G}u_n\|_2 + \|\mathcal{G}\| \|\mathcal{G}u_n - \lambda u_n\|_2 + \lambda \|\mathcal{G}u_n - \phi\|_2 \end{aligned}$$

El primer y tercer sumando tienden a cero por (3.2.25) y el segundo tiende a cero por (3.2.33). En consecuencia, $\|\mathcal{G}\phi - \lambda\phi\|_2 = 0$.

Así se tiene $\mathcal{G}\phi = \lambda\phi$ con $\phi \neq 0$, que era lo que queríamos demostrar. \square

Probada la existencia de autovalores para \mathcal{G} o, equivalentemente del problema de contorno (3.2.4), nos vamos a preocupar ahora por saber cuántos hay. El estudio de las autofunciones como *base ortonormal* de E y de L^2 , en el sentido que se precisará, será el segundo objetivo del resto de la sección.

3.2.9. Teorema.

El operador \mathcal{G} definido por (3.2.12) tiene una sucesión infinita de autovalores, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Demostración.

Sea λ_0 el autovalor obtenido en el teorema (3.2.8), y sea ϕ_0 autofunción correspondiente tal que $\|\phi_0\|_2 = 1$.

Consideramos la función

$$G_1(x, t) = G(x, t) - \lambda_0 \phi_0(x) \phi_0(t),$$

que verifica las mismas propiedades de regularidad que la función de Green, $G(x, t)$. Por esta razón si se define

$$\mathcal{G}_1 : \mathcal{C}([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a, b])$$

por

$$(3.2.35) \quad \mathcal{G}_1 f(x) = \int_a^b G_1(x, t) f(t) dt,$$

se puede definir su extensión a L^2 y \mathcal{G}_1 resulta ser simétrico y compacto, por los mismos argumentos que se usaron para probar las mismas propiedades para \mathcal{G} . Podemos aplicar a \mathcal{G}_1 el teorema (3.2.8), por el cual, definiendo

$$(3.2.36) \quad \|\mathcal{G}_1\| = \sup_{u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\|_2=1} |\langle \mathcal{G}_1 u, u \rangle|,$$

bien $\lambda_1 = \|\mathcal{G}_1\|$, o bien $\lambda_1 = -\|\mathcal{G}_1\|$, es un autovalor de \mathcal{G}_1 . Sea ϕ_1 autofunción normalizada, es decir

$$(3.2.37) \quad \begin{cases} \mathcal{G}_1 \phi_1 = \lambda_1 \phi_1 \\ \|\phi_1\|_2 = 1. \end{cases}$$

Probaremos que ϕ_1 es una autofunción correspondiente al autovalor λ_1 para \mathcal{G} . Pero si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, se tiene

$$(3.2.38) \quad \begin{aligned} \langle \mathcal{G}_1 f, \phi_0 \rangle &= \int_a^b \mathcal{G}_1 f(x) \phi_0(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b G_1(x, t) f(t) dt \right) \phi_0(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b G(x, t) \phi_0(x) dx \right) f(t) dt - \lambda_0 \int_a^b \left(\int_a^b f(t) \phi_0(t) dt \right) \phi_0^2(x) dx \equiv \\ &\equiv \lambda_0 \int_a^b f(t) \phi_0(t) dt - \lambda_0 \int_a^b f(t) \phi_0(t) dt = 0, \end{aligned}$$

ya que ϕ_0 es autofunción de \mathcal{G} y $G(x, t) = G(t, x)$, por tratarse de la función de Green de un problema autoadjunto. La condición de ortogonalidad (3.2.38), en particular, implica que

$$(3.2.39) \quad 0 = \langle \mathcal{G}_1 \phi_1, \phi_0 \rangle = \lambda_1 \langle \phi_1, \phi_0 \rangle,$$

es decir, ϕ_1 es ortogonal a ϕ_0 y entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}\phi_1(x) &= \int_a^b G(x, t)\phi_1(t)dt = \\
 (3.2.40) \quad &= \int_a^b (G_1(x, t) + \lambda_0\phi_0(x)\phi_0(t))\phi_1(t)dt = \\
 &= \int_a^b G_1(x, t)\phi_1(t)dt = \mathcal{G}_1\phi_1(x) = \\
 &= \lambda_1\phi_1(x).
 \end{aligned}$$

Una vez probado que λ_1 es un autovalor de \mathcal{G} y ϕ_1 una autofunción procedemos por inducción. Supongamos que se han encontrado $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}\}$, autovalores y

$$\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}\}$$

autofunciones correspondientes, formando un sistema ortonormal.
Definimos

$$(3.2.41) \quad G_m(x, t) = G_{m-1}(x, t) - \lambda_{m-1}\phi_{m-1}(x)\phi_{m-1}(t) = G(x, t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j\phi_j(x)\phi_j(t)$$

El operador asociado a G_m se define por

$$\mathcal{G}_m f(x) = \int_a^b G_m(x, t)f(t)dt,$$

y goza exactamente de las mismas propiedades de regularidad que \mathcal{G} por lo que se puede repetir el mismo proceso que hemos seguido con \mathcal{G}_1 . Observamos que se trata de ir proyectando el problema de maximización, sobre el ortogonal de las autofunciones calculadas en etapas previas y siempre sometido a la restricción $\|u\|_2 = 1$.

Este proceso iterativo se puede seguir siempre que $\|\mathcal{G}_m\| \neq 0$. Pero si para algún $m \in \mathbf{N}$ se llegase a que $\|\mathcal{G}_m\| = 0$, o, lo que es igual, a que $\mathcal{G}_m \equiv 0$, se tendría para $f \in \mathcal{C}([a, b])$ que

$$\begin{aligned}
 0 &= L\mathcal{G}_m f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j L\phi_j(x) \int_a^b f(t)\phi_j(t)dt = \\
 (3.2.42) \quad &= f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \phi_j(x)\langle f, \phi_j \rangle,
 \end{aligned}$$

dado que, por ser L inverso de \mathcal{G} , se verifica $L\phi_j(x) = \frac{1}{\lambda_j}\phi_j(x)$.

Pero (3.2.42) implica que toda función continua f sería una suma finita de autofunciones, las cuales tienen todas dos derivadas continuas, por tanto, lo mismo le debería ocurrir a f , lo cual es una contradicción que prueba que $\mathcal{G}_m \neq 0$ para todo $m \in \mathbf{N}$. Por tanto, \mathcal{G} tiene una sucesión de autovalores. \square

Por la construcción hecha en el teorema (3.2.9) se concluye que

$$(3.2.43) \quad |\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots |\lambda_k| \geq |\lambda_{k+1}| \geq \dots$$

Probaremos un resultado mejor que el anterior, es decir, que

$$(3.2.44) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0,$$

con el cual obtendremos la *diagonalización* de \mathcal{G} , y como consecuencia, que la sucesión de autovalores construida en el teorema (3.2.9) contiene **todos los autovalores de \mathcal{G}** .

A tal efecto, vamos a utilizar las siguientes extensiones de la Geometría Euclídea a nuestro contexto. Estas extensiones fueron elaboradas por D. Hilbert y dieron lugar a introducirlas desde un punto de vista abstracto, constituyendo la teoría de *espacios de Hilbert*. El ejemplo prototípico de tales espacios es $L^2([a, b])$, y lo importante es que su norma, definida en (3.1.26), es inducida por el producto escalar definido en (3.1.25).

Dada una sucesión en L^2 , $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, por analogía con \mathbf{R}^N , diremos que es un *sistema ortonormal* si se verifica

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk},$$

siendo δ_{jk} las *deltas de Krönecker*, es decir,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

El ejemplo de sistema ortonormal que aquí nos va a ocupar, son las autofunciones de \mathcal{G} obtenidas en el teorema (3.2.9).

3.2.10. Definición.

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un sistema ortonormal en L^2 . Sea $f \in L^2$.

i) Se define la *proyección* de f sobre ϕ_k por

$$\langle f, \phi_k \rangle \phi_k(x).$$

ii) Los *coeficientes de Fourier* de f respecto a $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ se definen como la sucesión

$$\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Dada la sucesión de autofunciones obtenidas en el teorema (3.2.9), normalizadas, podemos escribir el *desarrollo en serie de autofunciones* de una función $f \in L^2$ como sigue

$$(3.2.45) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k(x).$$

Probaremos que (3.2.45) representa a f en el sentido de L^2 , como se precisará, y además se verifica un teorema de Pitágoras generalizado a esta situación. Comenzamos con una primera aproximación a estos resultados conocida como *Desigualdad de Bessel*.

3.2.11. Lema.

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset L^2([a, b])$ sistema ortonormal de funciones.

Sea $f \in L^2([a, b])$, entonces

$$(3.2.46) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2, \quad (\text{Desigualdad de Bessel}).$$

Demostración.

Fijado $N \in \mathbf{N}$ y teniendo en cuenta la ortogonalidad, se tiene

$$0 \leq \|f - \sum_{k=0}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2.$$

Como la desigualdad anterior es cierta cualquiera que sea N , se concluye (3.2.46). \square

Para probar (3.2.44), consideremos para cada λ_n la autofunción ϕ_n normalizada.

Definimos $\psi_n(x, t) = \phi_n(x)\phi_n(t)$. La sucesión $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es un sistema ortonormal en $L^2([a, b] \times [a, b])$, como se comprueba directamente. Además los coeficientes de Fourier de la función de Green se calculan fácilmente,

$$\begin{aligned} \langle G, \psi_n \rangle &= \int_a^b \int_a^b G(x, t) \psi_n(x, t) dx dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b G(x, t) \phi_n(t) dt \right) \phi_n(x) dx = \int_a^b \lambda_n \phi_n^2(x) dx = \lambda_n. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Bessel para este caso particular, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \int_a^b \int_a^b |G(x, t)|^2 dx dt < \infty.$$

El criterio de Cauchy implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$$

que es (3.2.44).

El resultado fundamental es el siguiente resultado de convergencia del desarrollo en serie de autofunciones.

3.2.12. Teorema.

Sea \mathcal{G} el operador de Green para el problema autoadjunto (3.2.4), definido por (3.2.12). Sean $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ y $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesiones de autovalores y autofunciones obtenidas en el teorema (3.2.9). Sea E el conjunto de funciones $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$ verificando las condiciones de contorno, $U(u) = 0$. Entonces para cada $u \in E$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

donde la convergencia de la serie es uniforme en $[a, b]$.

Demostración.

Dada $u \in E$ llamamos $f = L(u)$, que es una función continua. Entonces a su vez tenemos que $u = \mathcal{G}f$. Por tanto,

$$(3.2.47) \quad \begin{aligned} \langle u, \phi_n \rangle &= \langle \mathcal{G}f, \phi_n \rangle = \\ &= \langle f, \mathcal{G}\phi_n \rangle = \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle, \end{aligned}$$

ya que \mathcal{G} es simétrico. En esta nueva formulación debemos probar que

$$(3.2.48) \quad \mathcal{G}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

en el sentido de la convergencia uniforme en $[a, b]$. Pero para cada $m \in \mathbf{N}$ se tiene que

$$(3.2.49) \quad \|\mathcal{G}f - \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 = \|\mathcal{G}_m f\|_2 \leq \|\mathcal{G}_m\| \|f\|_2 = |\lambda_m| \|f\|_2,$$

donde \mathcal{G}_m es el operador correspondiente a la función G_m definida en (3.2.41) y donde la última igualdad es también obtenida en el teorema (3.2.9).

Como consecuencia de (3.2.44) y (3.2.49) tenemos que

$$(3.2.50) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}f - \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 = 0.$$

Ahora, por (3.1.28), concluimos que

$$\begin{aligned}
 (3.2.51) \quad & \left| \sum_{n=p}^{n=q} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right| = \left| \mathcal{G} \left(\sum_{n=p}^{n=q} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right) \right| \leq \\
 & \leq \sup_{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]} |G(x,t)| (b-a)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=p}^{n=q} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

La desigualdad de Bessel implica que el último término en (3.2.51) tiende a cero cuando $p, q \rightarrow \infty$, o en otras palabras que las funciones *sumas parciales* de (3.2.48),

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

son uniformemente de Cauchy en $[a, b]$. Por tanto existe una función continua $\phi(x)$ tal que $S_N(x) \rightarrow \phi(x)$, uniformemente sobre $[a, b]$ cuando $N \rightarrow \infty$. Pero por (3.2.50) se tiene que S_N converge en $L^2([a, b])$ a $\mathcal{G}f$, por consiguiente,

$$\phi \equiv \mathcal{G}f$$

y así se verifica (3.2.48) en el sentido de la convergencia uniforme que es lo que queríamos demostrar. \square

3.2.13. Corolario. (*Identidad de Parseval*)

En las hipótesis del teorema (3.2.12), si $u \in E$, se verifica

$$(3.2.52) \quad \|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2.$$

Demostración.

Por el resultado del teorema (3.2.12)

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

en el sentido de la convergencia uniforme. Entonces,

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx = \int_a^b \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x) \right) u(x) \right| dx = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2$$

□

Podemos leer el resultado anterior como una extensión del teorema de Pitágoras al caso de *dimensión no finita*. De hecho pone de manifiesto que la sucesión de autofunciones es *base* en algún sentido. Evidentemente no es una base en el sentido del Álgebra, pues ello requeriría que pudiesemos expresar cada función como una combinación lineal finita. Lo que (3.2.52) significa es que u es límite de una sucesión de combinaciones lineales de autofunciones, cuyos coeficientes se calculan por proyección ortogonal. Este concepto generalizado de base es muy útil en Análisis y se conoce como *base hilbertiana*. El corolario anterior permite una extensión interesante.

No es difícil demostrar que E definido para las condiciones separadas y para las periódicas es denso en $L^2([a, b])$. De hecho éste resultado será una consecuencia del teorema de Weierstrass que probamos en la sección 3.

Este resultado de densidad junto al resultado anterior, nos permite establecer la siguiente consecuencia importante.

3.2.14. Corolario.

Si $f \in L^2([a, b])$ se verifica

$$(3.2.53) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2.$$

Demostración.

Para $\varepsilon > 0$ sea $u \in E$ tal que $\|u - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \|f\|_2^2 - \left(\sum_{n=0}^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| &\leq \|f - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 \leq \\ &\leq \|f - u\|_2 + \|u - \sum_{n=0}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 + \left\| \sum_{n=0}^N \langle f - u, \phi_n \rangle \phi_n \right\|_2 \leq \\ &\leq 2\|f - u\|_2 + \|u - \sum_{n=0}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n\|_2 \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|u - \sum_{n=0}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n\|_2, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Bessel. Usando el teorema (3.2.12) se acaba la prueba. □

Como consecuencia del corolario (3.2.13) se tiene también que:

Los autovalores de \mathcal{G} son exactamente los obtenidos en el teorema (3.2.9).

En efecto, si existiese un autovalor $\lambda \neq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y fuese $\phi \neq 0$ la autofunción correspondiente, se tendría que ϕ es ortogonal a todas las autofunciones ϕ_n , en virtud de la proposición (3.2.4).

Pero entonces según el corolario (3.2.13)

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \phi, \phi_n \rangle|^2 \equiv 0,$$

lo que es una contradicción con el hecho de ser $\phi \neq 0$ por suponer que es una autofunción.

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema.

3.2.15. Teorema.

El operador \mathcal{G} definido por (3.2.12) tiene exactamente una sucesión de autovalores que, además verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0.$$

En el caso de las condiciones de variables separadas, es decir, en el caso del problema de Sturm-Liouville, los autovalores son simples. Si referimos el operador a la base hilbertiana ortonormal formada por las autofunciones $\{\phi_n\}_{k \in \mathbf{N}}$, aparece *diagonalizado* en el sentido que

$$\mathcal{G}\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

De esta manera si, por ejemplo, $f \in \mathcal{C}([a, b])$ podemos escribir

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

por los resultados anteriores. Entonces

$$(3.2.54) \quad y(x) = \mathcal{G}f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

es decir, la solución del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} L(y) = f \\ U(y) = 0 \end{cases}$$

es representada por la serie (3.2.54).

Análogo resultado se tiene para el problema periódico.

3.3.- El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad de \mathbf{R}^2 . Convergencia de series de Fourier.

La primera aplicación del método de separación de variables que realizaremos es el estudio del problema

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

es decir, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, siendo

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}.$$

Supondremos que g es continua en la circunferencia unidad.

La simetría del problema (3.3.1) sugiere utilizar coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Calculando directamente obtenemos

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} r_x = \cos \theta & \theta_x = -\frac{\sin \theta}{r} \\ r_y = \sin \theta & \theta_y = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

y en consecuencia,

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} r_{xx} = \frac{\sin^2 \theta}{r} & \theta_{xx} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \\ r_{yy} = \frac{\cos^2 \theta}{r} & \theta_{yy} = -\frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2}, \end{cases}$$

por lo que

$$(3.3.4) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_{rr} \cos^2 \theta + u_r \frac{\sin^2 \theta}{r} - 2u_{r\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + u_{\theta\theta} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + 2u_\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}, \\ u_{yy} = u_{rr} \sin^2 \theta + u_r \frac{\cos^2 \theta}{r} + 2u_{r\theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + u_{\theta\theta} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} - 2u_\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}. \end{cases}$$

Entonces la ecuación de Laplace en coordenadas polares se escribe de la manera siguiente

$$(3.3.5) \quad 0 = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Llamando $f(\theta) = g(\cos \theta, \sin \theta)$, resulta ser una función continua y 2π -periódica, es decir, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$. Análogamente, llamando de nuevo u a la composición, es decir, $u(r, \theta) \equiv u(r \cos \theta, r \sin \theta)$, se obtiene $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$.

En resumen, el problema (3.3.1) en coordenadas polares resulta ser

$$(3.3.6) \quad \begin{cases} (1) & u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \quad \text{para } (r, \theta) \in (0, 1) \times [0, 2\pi] \\ (2) & u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \\ (3) & u(1, \theta) = f(\theta) \quad \text{en } \theta \in [0, 2\pi] \\ (4) & u \text{ continua en } [0, 1] \times [0, 2\pi] \end{cases}$$

Para resolver el problema (3.3.6) comenzamos buscando soluciones de (1) que sean de la forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Se ha de verificar entonces

$$(3.3.7) \quad (r^2 R''(r) + r R'(r))\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

es decir,

$$(3.3.8) \quad \frac{(r^2 R''(r) + r R'(r))}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = c,$$

donde necesariamente c es constante. La ecuación diferencial en R , es de las llamadas de tipo Euler. Para este tipo de ecuaciones se buscan soluciones de la forma $R(r) = r^k$. Sustituyendo en la ecuación diferencial para R en (3.3.8) se concluye que para que r^k sea solución se debe verificar la *ecuación indicial*

$$(3.3.9) \quad k^2 - c = 0.$$

Si $c \neq 0$, los dos valores de k dan dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.3.8) para R . Si $c = 0$, la integración de la ecuación puede hacerse aun más fácilmente por rebajamiento de orden. En resumen, las soluciones de (3.3.8) en su parte en R son:

$$(3.3.10) \quad \begin{cases} R(r) = ar^{\sqrt{c}} + br^{-\sqrt{c}} & \text{si } c > 0 \\ R(r) = a + b \log r & \text{si } c = 0 \\ R(r) = ar^{i\sqrt{-c}} + br^{-i\sqrt{-c}} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

La ecuación que se obtiene en (3.3.8) para $\Theta(\theta)$ es

$$(3.3.8') \quad \Theta''(\theta) + c\Theta(\theta) = 0,$$

que por integración da

$$(3.3.11) \quad \begin{cases} \Theta(\theta) = Ae^{i\theta\sqrt{c}} + Be^{-i\theta\sqrt{c}} & \text{si } c > 0 \\ \Theta(\theta) = A + B\theta & \text{si } c = 0 \\ \Theta(\theta) = Ae^{\theta\sqrt{-c}} + Be^{-\theta\sqrt{-c}} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Si se impone que se verifique (2) en el problema (3.3.6) resulta, que necesariamente ha de ser $c = n^2$ y para que se satisfaga (4), ha de ser $b = 0$ en (3.3.10). Entonces

$$(3.3.12) \quad \begin{cases} u_0(r, \theta) = 1 \\ u_n(r, \theta) = r^n (ae^{in\theta} + be^{-in\theta}) \quad \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Podemos escribir (3.3.12) como

$$(3.3.13) \quad \{u_n(r, \theta)\}_{-\infty}^{\infty} = \{r^{|n|} e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}.$$

Queda, por último, verificar la condición (3) en (3.3.6). Para ello conjeturamos como solución una función de la forma

$$(3.3.14) \quad u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

debiéndose verificar

$$(3.3.15) \quad f(\theta) = u(1, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

Como $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ es la familia de autofunciones del problema con condiciones periódicas en $[-\pi, \pi]$ para la ecuación (3.3.8'), es decir,

$$\begin{cases} y'' + cy = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi), \quad \text{donde } c = n^2, \end{cases}$$

los coeficientes de Fourier de f respecto a $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ son

$$(3.3.16) \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

Supuesta f continua, la Identidad de Parseval (corolario (3.2.14)) implica que

$$(3.2.17) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2,$$

siendo cada a_n el coeficiente de Fourier de f definido por (3.3.16). Por tanto, en particular, la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ está acotada. De esta forma se tiene que (3.3.14)

define una función continua en $0 \leq r < 1$. Además, derivando término a término (3.3.14) respecto a r o respecto a θ se obtiene una serie mayorante

$$(3.3.18) \quad A \sum_{-\infty}^{\infty} |n| r^{|n|},$$

que converge uniformemente en $0 \leq r < 1$. Por tanto, la función definida por (3.3.14), cuyos coeficientes son calculados en (3.3.16), es una función con derivadas primeras continuas en $[0, 1) \times [0, 2\pi]$. Un argumento de recurrencia pone de manifiesto que la función u definida por (3.3.14), es indefinidamente diferenciable en $[0, 1) \times [0, 2\pi]$ y como cada sumando de la serie es solución de la ecuación de la Laplace, también lo es u .

El único detalle que queda por establecer es que

$$(3.3.19) \quad \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta),$$

que es la condición (3) del problema (3.3.6).

Para resolver este último problema, comenzamos expresando u detalladamente, notando que por las observaciones anteriores los cálculos siguientes están justificados si $0 \leq r < 1$

$$(3.3.20) \quad \begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(\theta-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Pero además podemos calcular explícitamente la suma de la serie del último término de (3.3.20); en efecto,

$$(3.3.21) \quad \begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \\ &\sum_0^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{-\infty}^{-1} r^{-n} e^{inx} = \\ &\frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}, \end{aligned}$$

que resulta de haber sumado las dos series geométricas de razones re^{ix} y re^{-ix} , respectivamente, y de un simple cálculo algebraico.

De esta forma (3.3.20) se puede expresar por la siguiente fórmula integral

$$(3.3.22) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-s) + r^2} f(s) ds, \quad \text{si } 0 \leq r < 1.$$

Al segundo término de la expresión (3.3.22) se le llama *Integral de Poisson* de la función f . Por como se ha calculado la integral de Poisson de f se tiene que satisface la ecuación de Laplace en el interior del disco unidad. Por precisar más la terminología damos la definición siguiente.

3.3.1. Definición.

La función

$$(3.3.23) \quad P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} \quad \text{si } 0 \leq r < 1, -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

es llamada *núcleo de Poisson*.

Dada una función f integrable en $[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica, la integral de Poisson de f es

$$(3.3.24) \quad u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) f(s) ds.$$

Para probar (3.3.19) necesitamos el siguiente resultado.

3.3.2. Lema.

Sea $P(r, \theta)$ el núcleo de Poisson definido por (3.3.23). Entonces:

i) Para todo r , P es una función par en θ , es decir,

$$P(r, \theta) = P(r, -\theta).$$

ii) Fijado $r \in [0, 1)$, $P(r, \theta)$ es monótona decreciente en $(0, \pi)$, como consecuencia si $\delta > 0$

$$\max_{\delta \leq \theta \leq \pi} P(r, \theta) = P(r, \delta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \delta + r^2} \quad y \quad \min_{\theta \in [0, \pi]} P(r, \theta) = P(r, \pi) > 0.$$

iii) $\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) d\theta = 1, \quad , 0 \leq r < 1.$

Demostración.

Los apartados i) y ii) resultan de manera inmediata de la expresión (3.3.23), pues $\cos \theta$ es par y decreciente en $[0, \pi]$. La parte iii) se obtiene fácilmente integrando el desarrollo en serie de P . \square

Estas propiedades del núcleo de Poisson junto con el resultado que sigue, el cual prueba (3.3.19), ponen de manifiesto que se trata de un ejemplo de *aproximación de la identidad*, en el sentido que se precisará.

3.3.3. Teorema.

Sea f una función continua y 2π -periódica. Entonces, si se considera la integral de Poisson de f

$$(3.3.25) \quad u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) f(s) ds,$$

se verifica que

$$(3.3.26) \quad \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta),$$

siendo la convergencia uniforme en $[-\pi, \pi]$.

Demostración.

Por ser f continua en $[-\pi, \pi]$, existe $M = |f(\theta_0)| = \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f(\theta)|$, para algún $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ y además es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$. Dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|\theta - \bar{\theta}| < \delta$ se verifica que $|f(\theta) - f(\bar{\theta})| < \varepsilon/2$. Por iii) del lema (3.3.2) aplicado a (3.3.25) se tiene

$$(3.3.27) \quad |u(r, \theta) - f(\theta)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) (f(s) - f(\theta)) ds \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds,$$

donde en la última desigualdad se ha tenido en cuenta también que $P(r, \theta) > 0$, que es consecuencia obvia de ii) del lema (3.3.2).

Fijado $\varepsilon > 0$, tomamos un $\delta > 0$ correspondiente por la continuidad uniforme de f y descomponemos la última integral de (3.3.27) como sigue

$$(3.3.28) \quad \begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds = \\ & \int_{|\theta - s| < \delta} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds + \int_{|\theta - s| \geq \delta} P(r, \theta - s) |f(s) - f(\theta)| ds \leq \\ & \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - s) ds + \max_{\delta \leq |\theta - s| \leq \pi} P(r, \theta - s) \int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - f(\theta)| ds \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado ii) y iii) del lema (3.3.2). Por último observar que

$$\lim_{r \rightarrow 1} 2M \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} = 0,$$

por tanto, existe $1 > r_0 > 0$ tal que si $r_0 < r < 1$ se tiene

$$0 < 2M \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esta forma hemos demostrado que

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| < \varepsilon, \quad \text{si } r_0 < r < 1, \quad \text{para todo } \theta \in [-\pi, \pi],$$

que es el resultado requerido. \square

El teorema anterior prueba que el problema (3.3.6), o bien el (3.3.1), tiene una solución $u \in C^\infty(B_1) \cap C(\bar{B}_1)$, donde B_1 es la bola unidad abierta y \bar{B}_1 es la bola unidad cerrada. Que la integral de Poisson es la única solución del problema (3.3.1) es un resultado que adelantamos y que probaremos posteriormente con un carácter más general. No obstante, el lector puede ensayar una prueba directa de la unicidad probando que toda solución del problema necesariamente tiene la misma serie de Fourier que la integral de Poisson. (Véase a tal efecto el texto de *R. Seeley "Introducción a las Series e Integrales de Fourier", Ed Reverté 1970*).

Los argumentos que se darán más adelante serán diferentes y se conocerán como *principio del máximo*.

Lo notable es que con la solución del problema de Dirichlet en la bola unidad y con el uso de teoremas de variable compleja vamos a poder dar la solución del problema de Dirichlet en dominios planos muy generales.

Si se tiene una función

$$f : \Omega \subset \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

función holomorfa tal que $f'(z) \neq 0$, se dice que se trata de una aplicación conforme.

El siguiente resultado de Riemann es uno de los más profundos de la variable compleja. Establece que todo dominio simplemente conexo (sin agujeros) distinto de todo el plano complejo, es *conformemente equivalente* al disco unidad. Precisamente el teorema de Riemann puede establecerse como sigue.

Teorema de Riemann.

Sea $\Omega \subset \mathbf{C}$ dominio simplemente conexo distinto de todo el plano \mathbf{C} , y sea $z_0 \in \Omega$. Existe una única función analítica

$$f : \Omega \subset \mathbf{C} \longrightarrow B_1,$$

donde B_1 es el disco unidad, verificando $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ y tal que f es una aplicación uno a uno y sobre el disco unidad, $|w| < 1$.

(Véanse los detalles en el libro *L. Ahlfors "Complex Variables" Ed. Mc Graw Hill 1979*).

Dado ahora un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ simplemente conexo, distinto de todo el plano \mathbf{R}^2 . Consideremos la función $w = f(z)$ dada por el teorema de Riemann, que le transforma en el disco unidad $|w| < 1$, $f(z_0) = 0$. Sean $\bar{x} = (x_1, x_2)$ para $z_0 = x_1 + ix_2$ e $\bar{y} = (y_1, y_2)$ para $z = y_1 + iy_2$.

Considerando la función

$$g(x, y) = g(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi} \log |f(z)|$$

se obtiene la *función de Green* del problema, de la cual se obtiene el *núcleo de Poisson* del problema.

Dejamos aplazados todos los detalles al capítulo 5, donde quedarán claros los conceptos de *función de Green* y de *núcleo de Poisson* en este contexto general. Previamente el lector puede consultar el libro *G. Hellwig, "Partial Differential Equations", ed. Blaisdell Pu. Co. New York 1964, página 35.*

CONVERGENCIA DE SERIES DE FOURIER

Hay muchas razones para acometer el estudio de las series de Fourier; desde razones históricas, hasta la búsqueda de las aplicaciones. En este sentido ya tenemos la experiencia del problema de Dirichlet en el disco unidad, que acabamos de resolver.

En las próximas secciones necesitaremos conocer más resultados sobre convergencia de series de Fourier, por lo que dedicamos a este tema el resto del presente apartado.

Consideramos el sistema

$$\mathcal{T} \equiv \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbf{Z}}.$$

\mathcal{T} es ortonormal respecto al producto escalar definido por (3.1.25) en $L^2([-\pi, \pi])$, por ser el sistema de autofunciones del problema de autovalores periódico

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi). \end{cases}$$

(El lector puede comprobar ésta afirmación por integración elemental.)

Para una función integrable definimos los correspondientes coeficientes de Fourier por

$$(3.3.29) \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

Como consecuencia inmediata de la observación anterior y de lo estudiado en la sección 3.2 sobre desarrollo en serie de autofunciones tenemos:

(I) Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ entonces

$$(3.3.30) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2. \quad (\text{Identidad de Parseval}).$$

Como consecuencia si $S_N f(x) = \sum_{-N}^N a_n e^{inx}$,

$$(3.3.31) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\|_2 = 0.$$

(II) Si $f \in \mathcal{C}^2$ es 2π -periódica, entonces

$$(3.3.32) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x),$$

siendo la convergencia uniforme, por el teorema (3.2.12).

Estos resultados derivan de la teoría general que hemos desarrollado.

Pero en este caso de las series de Fourier podemos evaluar $S_N f$ de una manera similar a lo hecho con el núcleo de Poisson. En efecto,

$$(3.3.33) \quad \begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^N a_n e^{inx} = \sum_{-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{inx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\sum_{-N}^N e^{in(x-s)} \right) ds, \end{aligned}$$

donde la suma del último término se calcula de la forma siguiente,

$$(3.3.34) \quad \begin{aligned} \tilde{D}_N(t) &= \sum_{-N}^N e^{int} = \\ &= e^{-iNt} \sum_{n=0}^{2N} e^{int} = e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}, \end{aligned}$$

como suma de los $2N$ primeros términos de una progresión geométrica de razón e^{it} . Pero de (3.3.34) se deduce que

$$(3.3.35) \quad e^{-i\frac{t}{2}}(e^{it} - 1)\tilde{D}_N(t) = e^{-i\frac{t}{2}}(e^{i(N+1)t} - e^{-iNt}),$$

de donde resulta

$$(3.3.36) \quad \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\tilde{D}_N(t) = \text{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right)t,$$

es decir,

$$(3.3.37) \quad \tilde{D}_N(t) = \frac{\text{sen}\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Llamaremos *núcleo de Dirichlet* a

$$(3.3.38) \quad D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \tilde{D}_N(t)$$

Entonces es obvio que se tiene

$$(3.3.39) \quad S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(x-s) ds.$$

La fórmula (3.3.39) se lee diciendo que la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de f , es la *integral de convolución* de f con el núcleo de Dirichlet.

Con esta expresión trabajaremos de ahora en adelante para obtener algunos resultados de convergencia de series de Fourier más generales y precisos.

Las ideas de Dirichlet, matemático alemán sucesor de Gauss en Gottingen, se demuestran muy fructíferas en este área de las series de Fourier. Su contribución abarca también otras disciplinas como las Ecuaciones en Derivadas Parciales, el Cálculo de Variaciones y la Teoría de Números.

Antes de seguir observemos que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$, (3.3.30) implica, en particular que

$$(3.3.40) \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{C}^1$ y es 2π -periódica. (Obsérvese que esto puede interpretarse como que $f(e^{it})$ es derivable en la circunferencia unidad.)

Podemos calcular los coeficientes de Fourier de f' ,

$$(3.3.41) \quad a'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s) e^{-ins} ds,$$

que de acuerdo con (3.3.40) verifican

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} |a'_n| = 0$$

y en particular existe M , $0 < M < \infty$, verificando

$$(3.3.42) \quad |a'_n| \leq M,$$

cualquiera que sea $n \in \mathbf{Z}$.

Pero integrando por partes en (3.3.41) y teniendo en cuenta la periodicidad de f , podemos relacionar los coeficientes de Fourier de f con los de f' , es decir,

$$(3.3.43) \quad a'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s) e^{-ins} ds = \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds = in a_n,$$

siendo a_n el coeficiente de Fourier para f . Podemos resumir (3.3.42) y (3.3.43) en el resultado siguiente.

3.3.4. Teorema.

Si $f \in \mathcal{C}^1$ es 2π -periódica y

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds,$$

entonces $a'_n = ina_n$, y por tanto, existe $M < \infty$ tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{|n|}, \quad \text{para cualquier } n \in \mathbf{Z}$$

Un argumento de recurrencia permite formular la siguiente extensión del resultado anterior.

3.3.5. Corolario.

Si $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$ y suponemos $f \in \mathcal{C}^k$ y 2π -periódica, entonces se verifica

$$|a_n| \leq \frac{M}{|n|^k}, \quad \text{cualquiera que sea } n \in \mathbf{Z}.$$

Podemos decir entonces que *la mayor regularidad de la función se traduce en un mayor decaimiento de sus coeficientes de Fourier*. Vamos a obtener una aplicación inmediata de este hecho a la obtención de un teorema de convergencia uniforme.

3.3.6. Teorema.

Sea $f \in \mathcal{C}^1$ y 2π -periódica y sea $S_N f(x)$ su suma parcial de Fourier N -ésima, como se definió en (3.3.33). Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Demostración.

Por (3.3.43) y suponiendo $N > n$

$$(3.3.44) \quad |S_N f(x) - S_n f(x)| \leq \sum_{n < k \leq N} |a_k| \leq \sum_{n < k \leq N} \left| \frac{a'_k}{k} \right|,$$

siendo a'_k el coeficiente de Fourier k -ésimo de f' . Pero entonces tenemos la siguiente desigualdad inmediata

$$(3.3.45) \quad \sum_{n < k \leq N} \left| \frac{a'_k}{k} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n < k \leq N} (|a'_k|^2 + \frac{1}{k^2}) \leq \varepsilon, \quad \text{si } n, M \geq n_0,$$

pues la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} \leq A < \infty$ y por la identidad de Parseval $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |a'_k|^2 = \|f'\|_2^2$. Por tanto, $\{S_N f(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $[-\pi, \pi]$. Entonces existe $\phi \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ tal que

$$(3.3.46) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \phi(x),$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Pero en virtud de (3.3.46), ϕ tiene los mismos coeficientes de Fourier que f y entonces

$$(3.3.47) \quad \|f - \phi\|_2 \leq \|f - S_N f\|_2 + \|S_N f - \phi\|_2 \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty,$$

en virtud de (3.3.31). Por tanto, $f \equiv \phi$ y queda demostrado el teorema. \square

Observamos que en el teorema (3.3.6) el resultado sólo depende de tener la derivada en L^2 , con lo cual basta suponer que exista salvo en un conjunto de puntos de medida cero. Dicho de una manera alternativa, el resultado anterior es cierto si se supone que f es la primitiva de una función de L^2 . Esta observación se recoge en el siguiente enunciado.

3.3.6'. Teorema.

Sea f 2π -periódica y tal que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)ds$, con $f' \in L^2([-\pi, \pi])$. Sea $S_N f(x)$ su suma parcial de Fourier N -ésima, como se definió en (3.3.33). Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Ejemplo.

El teorema (3.3.6') recoge como casos particulares importantes el de las funciones continuas que son además derivables a trozos. Una función en dientes de sierra y 2π -periódica es el prototipo de tales funciones.

La representación obtenida en (3.3.39) para las sumas parciales de la serie de Fourier va a permitirnos un estudio *localizado* de la convergencia, como vamos a precisar. La localización debe entenderse en el sentido que *la convergencia de la serie de Fourier en un punto depende solo de la regularidad de la función en un entorno de dicho punto*.

Podemos expresar (3.3.40) en la forma que se utilizará a continuación.

3.3.7. Lema. (Riemann-Lebesgue)

Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces

$$(3.3.48a) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} k s ds = 0$$

y

$$(3.3.48b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ksd s = 0.$$

Demostración.

Basta observar que $\sin ks = \frac{1}{2i}(e^{iks} - e^{-iks})$ para comprobar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ksd s = \frac{-\pi}{i}(a_k - a_{-k}),$$

con lo que se sigue (3.3.48a) de (3.3.40). El resultado (3.3.48b) es similar. \square

Nota.

Teniendo en cuenta que el espacio $L^2([-\pi, \pi])$ es denso en el espacio de funciones integrables, se concluye el lema de Riemann-Lebesgue (3.3.7) para L^1 , que es como habitualmente se enuncia.

Damos otra prueba del anterior resultado. Si $f \in \mathcal{C}^1$ es 2π -periódica integrando por partes se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ksd s = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(s) \cos ksd s,$$

con lo que se sigue como antes de (3.3.40). De nuevo la conclusión para funciones integrables, se sigue por un argumento de densidad. En efecto, como \mathcal{C}^1 es denso en L^1 , fija una función $g \in L^1$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathcal{C}^1$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon$$

por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(s) \sin ksd s = \int_{-\pi}^{\pi} (g(s) - f(s)) \sin ksd s + \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ksd s.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \sin ksd s \right| \leq \varepsilon,$$

que es lo que queríamos demostrar.

El siguiente paso es observar dos propiedades elementales del núcleo de Dirichlet.

- 1) Integrando término a término en la suma trigonométrica que define a $D_N(t)$ se obtiene

$$(3.3.49) \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1, \quad \text{para todo } N \in \mathbf{N}$$

- 2) El núcleo de Dirichlet es una función par,

$$(3.3.50) \quad D_N(t) = D_N(-t),$$

cualquiera que sea $N \in \mathbf{N}$, por tratarse de un cociente de senos.

Con estos prerrequisitos podemos formular el siguiente resultado, debido a Dirichlet, que confirma la idea de localización que habíamos conjeturado.

Una precisión de la terminología que vamos a usar:

Una función se dice que es derivable a trozos si:

- i) *Es continua salvo, a lo más, en una cantidad finita de puntos, en los cuales tiene límites laterales finitos.*
- ii) *Tiene derivada continua en todos los puntos de continuidad de la función salvo, a lo más, en una cantidad finita, y en todo punto la derivada tiene límites laterales finitos.*

3.3.8. Teorema.

Sea $f \in L^2$, 2π -periódica, tal que en un entorno de x_0 , $I_{\delta_0} = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, f es derivable a trozos. Entonces

$$(3.3.51) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0, +) + f(x_0, -)].$$

Demostración.

Por las propiedades del núcleo de Dirichlet, (3.3.49) y (3.3.50) podemos hacer el cálculo siguiente

$$(3.3.52) \quad \begin{aligned} S_N f(x_0) - \frac{1}{2} [f(x_0, +) + f(x_0, -)] &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) [f(x_0 + t) - \frac{1}{2} f(x_0, +) - \frac{1}{2} f(x_0, -)] dt = \\ &= \int_0^{\pi} D_N(t) (f(x_0 + t) - f(x_0, +)) dt + \int_0^{\pi} D_N(t) (f(x_0 - t) - f(x_0, -)) dt \equiv \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Es claro que el comportamiento de los dos sumandos I_1 e I_2 es idéntico por lo que realizamos el estudio de I_1 y dejamos al cuidado del lector persuadirse que a I_2 se le estima de igual forma.

Por la hipótesis de regularidad, f es derivable a trozos, por lo que existe $\delta_1 < \delta_0$ tal que $\sup_{x_0 < s < x_0 + \delta_1} |f'(s)| \leq M$, para cierta constante M , lo cual implica que

$$|f(x_0 + t) - f(x_0, +)| \leq M|t| \quad \text{si} \quad |t| < \delta_1.$$

Entonces

(3.3.53)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi D_N(t)(f(x_0 + t) - f(x_0, +))dt = \\ &= \int_0^\delta D_N(t)(f(x_0 + t) - f(x_0, +))dt + \int_\delta^\pi D_N(t)(f(x_0 + t) - f(x_0, +))dt \equiv \\ &\equiv I_1(\delta, N) + I_2(\delta, N). \end{aligned}$$

Para $\delta < \delta_1$ se tiene

$$(3.3.54) \quad |I_1(\delta, N)| \leq \int_0^\delta Mt|D_N(t)|dt \leq \frac{M}{\pi} \int_0^\delta \frac{t}{2 \operatorname{sen}(\frac{t}{2})} dt.$$

Observando que si $t \in [0, \pi]$, $t \leq 2\pi \operatorname{sen}(\frac{t}{2})$, se tiene que

$$|I_1(\delta, N)| \leq M\delta.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta \leq \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$, resulta

$$(3.3.55.) \quad |I_1(\delta, N)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fijado $\delta > 0$ para obtener (3.3.55), $I_2(\delta, N)$ se estima por el lema (3.3.7), pues

$$I_2(\delta, N) = \int_{-\pi}^\pi g(t) \operatorname{sen}((N + \frac{1}{2})t) dt,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0, +)}{2\pi \operatorname{sen}(\frac{t}{2})} & \text{si } \delta < t < \pi \\ 0 & \text{si } -\pi < t < \delta. \end{cases}$$

Es claro que $g \in L^2([-\pi, \pi])$. Entonces

$$\begin{aligned} I_2(\delta, N) &= \int_{-\pi}^\pi g(t) \operatorname{sen}((N + \frac{1}{2})t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^\pi g(t) \operatorname{sen}(Nt) \cos(\frac{t}{2}) dt + \int_{-\pi}^\pi g(t) \cos(Nt) \operatorname{sen}(\frac{t}{2}) dt. \end{aligned}$$

En virtud de (3.3.48a) y (3.3.48b), existe N_0 tal que si $N > N_0$

$$(3.3.56) \quad |I_2(\delta, N)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Las desigualdades (3.3.55) y (3.3.56) demuestran el teorema. \square

En la demostración anterior, queda clara la idea de *localización*. Como el núcleo de Dirichlet no es positivo, no podemos introducir el valor absoluto dentro de la integral definiendo las sumas parciales puesto que entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt \approx \log N \quad N \rightarrow \infty.$$

El lema de Riemann-Lebesgue establece que lo que ocurre fuera de un entorno del punto que se estudia no aporta nada en el límite.

La parte sustancial es que la regularidad de la función en un entorno del punto es suficiente para probar la convergencia.

Un resultado como el anterior con sólo la hipótesis de continuidad es falso, como pone de manifiesto un contraejemplo del matemático germano Paul Du Bois-Reymond, publicado a fines del Siglo XIX. Du Bois-Reymond encuentra una función continua cuya serie de Fourier diverge en un subconjunto denso del intervalo $[-\pi, \pi]$. Dicho categóricamente, para asegurar la convergencia de la serie de Fourier en un punto, se necesita *algo más* de regularidad en un entorno que la mera continuidad. El teorema de Dirichlet establece que la derivabilidad es suficiente y hay otros resultados que dan como condición suficiente otras condiciones de regularidad más débiles. Pero lo cierto es que las funciones continuas quedan fuera de este tipo de resultados. Sin embargo, si se cambia el *modo de sumar* un teorema debido al matemático húngaro Leopold Féjer pone de manifiesto que se obtiene aproximación uniforme para las funciones continuas. Este resultado, que tiene interés en sí mismo, nos dará como consecuencia un teorema de densidad importante: el teorema de Weierstrass. El resultado de Féjer puede formularse como sigue.

3.3.9. Teorema.

Sea f continua y 2π -periódica; consideremos las medias aritméticas de sumas parciales de Fourier de f ,

$$(3.3.56) \quad \sigma_{N+1}f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N S_k f(x),$$

entonces $\sigma_{N+1}f(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente cuando $N \rightarrow \infty$.

Para demostrar este resultado procedemos a expresar $\sigma_{N+1}f(x)$ de forma integral.

Utilizando (3.3.39) se tiene

$$(3.3.57) \quad \begin{aligned} \sigma_{N+1}f(x) &= \frac{1}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_0^N D_k(x-t) \right) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_0^N \operatorname{sen} \left(\frac{(2k+1)(x-t)}{2} \right) \right) \frac{f(t)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x-t}{2} \right)} dt. \end{aligned}$$

Si se observa que

$$(3.3.58) \quad 2 \operatorname{sen} (2k+1)s \operatorname{sen} s = \cos 2ks - \cos 2(k+1)s,$$

se tiene

$$(3.3.59) \quad \sum_0^N \operatorname{sen} (2k+1)s = \frac{1 - \cos 2(N+1)s}{2 \operatorname{sen} s} = \frac{\operatorname{sen}^2(N+1)s}{\operatorname{sen} s},$$

por lo que sustituyendo (3.3.59) en (3.3.57) resulta

$$(3.3.60) \quad \sigma_{N+1}f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_{N+1}(t) dt,$$

siendo

$$(3.3.61) \quad \Phi_{N+1}(t) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\operatorname{sen}^2(N+1)\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

que es el llamado núcleo de Féjer de orden N .

Las propiedades fundamentales del núcleo de Féjer son las siguientes

- 1) $\Phi_{N+1}(t) \geq 0$ y $\Phi_{N+1}(t) = \Phi_{N+1}(-t)$.
- 2) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{N+1}(t) dt = 1$ para todo $N \in \mathbf{N}$.
- 3) Para cada $\delta \in (0, \pi)$ fijo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \Phi_{N+1}(t) dt = 0,$$

para todo $N \in \mathbf{N}$.

El resultado 1) es evidente; 2) resulta de integrar directamente en la igualdad

$$\Phi_{N+1}(t) = \frac{1}{N+1} \sum_0^N D_k(t).$$

Para establecer 3), obsérvese que si $0 < \delta < t < \pi$ entonces

$$\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} < \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})},$$

y entonces es consecuencia del lema de Riemann-Lebesgue (3.3.7).

Una observación importante es que el núcleo de Féjer satisface idénticas propiedades que el núcleo de Poisson. Ambos son *aproximaciones de la identidad* en el sentido que verifican 1), 2) y 3). Las propiedades 2) y 3) podemos entenderlas como que la masa se concentra en un entorno de $t = 0$ a medida que crece N . Este mismo fenómeno ocurre cuando en el núcleo de Poisson hacemos tender r a 1. El nombre de *aproximación de la identidad* se justifica pues al calcular lo que hemos llamado *integral de convolución* y pasar al límite, obtenemos la función de partida.

Como consecuencia se verifica también el resultado de Féjer enunciado como teorema (3.3.9).

Demostración del teorema (3.3.9).

Sea $M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$. Por ser f uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Utilizando la propiedad 2) del núcleo de Féjer podemos escribir

$$\begin{aligned} (3.3.62) \quad & |\sigma_N f(x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \leq \\ & \left| \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| + \\ & + \left| \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| + \left| \int_{\delta}^{\pi} \Phi_N(t)(f(x-t) - f(x))dt \right| \equiv \\ & \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Estimamos en primer lugar I_2 ,

$$I_2 \leq \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observamos que I_1 e I_3 se comportan de manera análoga. Estimamos I_3 ,

$$I_3 \leq \int_{\delta}^{\pi} \Phi_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_N(t) dt,$$

la demostración concluye teniendo en cuenta la propiedad 3) del núcleo de Féjer. \square

Como consecuencia del teorema de Féjer obtenemos dos resultados importantes. El primero de ellos es el siguiente teorema de densidad de Weierstrass.

3.3.10. Teorema. (Weierstrass)

Toda función continua en $[-1, 1]$ se puede aproximar por polinomios.

Demostración.

Dada una función $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$ la extendemos como función continua a \tilde{f} definida en $[-\pi, \pi]$ de forma que $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$. Por periodicidad se extiende como función continua a todo \mathbf{R} . El teorema de Féjer permite aproximar \tilde{f} uniformemente por polinomios trigonométricos en $[-\pi, \pi]$. Pero los polinomios trigonométricos son funciones enteras, por tanto, son aproximables uniformemente por polinomios. La conclusión es ahora inmediata. \square

El lector se escargará de sustituir el intervalo $[-1, 1]$ por otro cualquiera que sea cerrado y acotado.

El resultado anterior se puede enunciar de manera equivalente diciendo que

Los polinomios son densos en el espacio de las funciones continuas en un compacto, dotado con la topología de la convergencia uniforme.

El segundo resultado consecuencia del teorema de Féjer es el siguiente teorema de unicidad.

3.3.11. Teorema.

Los coeficientes de Fourier de una función continua la determinan unívocamente.

En efecto, si una función tiene coeficientes de Fourier cero, sus sumas de Féjer convergen uniformemente a cero.

Observaciones útiles para el cálculo.

Cuando se trata de funciones reales se consideran las Series de Fourier de senos y cosenos,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

siendo los coeficientes de Fourier ahora

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos k s ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \operatorname{sen} k s ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Todos los resultados obtenidos son obviamente válidos.

Como consecuencia práctica se tiene que:

- 1) *Las funciones pares tienen cero los coeficientes correspondientes a los senos.*
- 2) *Las funciones impares tienen cero los coeficientes correspondientes a los cosenos.*

Una aplicación.

Aplicaremos lo estudiado sobre series de Fourier al análisis de una propiedad *extremal* de la solución del problema de Dirichlet (3.3.1). Tal propiedad caracteriza a la solución y sirve para probar existencia de solución en dominios más generales.

Supondremos que en el problema (3.3.1) se tiene el dato $f \in \mathcal{C}^1$; entonces podemos definir la siguiente *integral de Dirichlet o integral de energía*

$$(3.3.63) \quad D_R(u) = \frac{1}{2} \iint_{B_R} (u_x^2 + u_y^2) dx dy,$$

donde B_R representa la bola de centro el origen y radio R . Podemos expresar la energía en coordenadas polares de manera equivalente por

$$(3.3.64) \quad D_R(u) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) r dr d\theta.$$

La solución de (3.3.6) viene dada por (3.3.20) y entonces se tiene

$$(3.3.65) \quad \begin{cases} u_r = \sum_{n \neq 0} |n| r^{|n|-1} e^{in\theta} a_n \\ u_\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} (in) r^{|n|} e^{in\theta} a_n, \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

La identidad de Parseval implica que

$$(3.3.66) \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\theta^2) d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 r^{2|n|-2} |a_n|^2,$$

por lo que

$$D_R(u) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n R^{2|n|} |a_n|^2 \rightarrow D_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} n |a_n|^2, \quad \text{cuando } R \rightarrow 1.$$

En la hipótesis de que $f \in \mathcal{C}^1$ se tiene que

$$(3.3.67) \quad D_1(u) < \infty,$$

ya que si

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

entonces

$$f'(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} i n a_n e^{in\theta},$$

así

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(\theta)|^2 d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty,$$

y en particular resulta (3.3.67).

Observamos que si se supone sólo la continuidad del dato no se concluye (3.3.67) como pone de manifiesto el siguiente ejemplo de Hadamard. Considérese la función

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n!x),$$

evidentemente f es continua, pero la correspondiente integral de Poisson (solución de (3.3.1)) no verifica (3.3.67).

Podemos formular ya la anunciada propiedad extremal del problema (3.3.6) cuando $f \in \mathcal{C}^1$. Consideremos la clase de funciones admisibles

$$\mathcal{A} = \{g \in \mathcal{C}^1([0, 1] \times [0, 2\pi]) \mid g(r, \theta) = g(r, \theta + 2\pi), g(1, \theta) = f(\theta)\}$$

Propiedad extremal de la solución de (3.3.6):

La solución del problema de Dirichlet hace mínima la energía (3.3.63) sobre la clase de funciones admisibles \mathcal{A} .

Más precisamente se tiene el siguiente resultado.

3.3.12. Teorema.

Si u es solución del problema (3.3.6), entonces

$$(3.3.68) \quad D_1(u) \leq D_1(g), \quad \text{cualquiera que sea } g \in \mathcal{A}.$$

Demostración.

La prueba es un cálculo que vamos a efectuar en detalle. Evidentemente basta probar que

$$(3.3.69) \quad D_1(u_N) \leq D_1(g), \quad N \in \mathbf{N},$$

siendo

$$u_N(r, \theta) = \sum_{-N}^N a_k r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Según sabemos, u_N verifica la ecuación de Laplace, por tanto aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (1.2.3),

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{B_1} (g - u_N) \Delta u_N dx dy = \\ &= \iint_{B_1} \operatorname{div} ((g - u_N) \nabla u_N) dx dy - \iint_{B_1} \langle \nabla (g - u_N), \nabla u_N \rangle dx dy = \\ &= \int_{x^2+y^2=1} (g - u_N) \langle \nabla u_N, \nu \rangle dS - \iint_{B_1} \langle \nabla (g - u_N), \nabla u_N \rangle dx dy, \end{aligned}$$

siendo ν la normal exterior al disco unidad y dS el elemento de arco en la circunferencia unidad. Admitamos que

$$(3.3.70) \quad \int_{x^2+y^2=1} (g - u_N) \langle \nabla u_N, \nu \rangle dS = 0,$$

entonces se tiene probado (3.3.69) pues

$$\begin{aligned} 2D_1(g) &= \iint_{B_1} |\nabla g|^2 dx dy = \iint_{B_1} |\nabla (g - u_N) + \nabla u_N|^2 dx dy = \\ &= 2D_1(u_N) + 2D_1(g - u_N) + 2 \iint_{B_1} \langle \nabla (g - u_N), \nabla u_N \rangle dx dy = \\ &= 2D_1(u_N) + 2D_1(g - u_N) \geq 2D_1(u_N), \end{aligned}$$

por la hipótesis suplementaria (3.3.70) y puesto que $D_1(g - u_N) \geq 0$.

Para acabar probamos (3.3.70). Dado que $g(1, \theta) = f(\theta)$,

$$g(1, \theta) - u_N(1, \theta) = \sum_{|k| \geq N+1} a_k e^{ik\theta}.$$

De otra parte se tiene

$$(u_N)_\nu(1, \theta) = (u_N)_\rho(1, \theta) = \sum_{|k| \leq N} |k| a_k e^{ik\theta},$$

entonces concluimos por ortogonalidad que

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2=1} (g - u_N) \langle \nabla u_N, \nu \rangle dS = \\ &= \int_0^{2\pi} (g(1, \theta) - u_N(1, \theta)) (u_N)_\rho(1, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{|k| \geq N+1} a_k e^{ik\theta} \right) \left(\sum_{|k| \leq N} |k| a_k e^{ik\theta} \right) d\theta = 0, \quad \square \end{aligned}$$

3.4.- Problemas mixtos para la ecuación del calor en una dimensión espacial.

Vamos a aplicar los resultados de las secciones precedentes al estudio de problemas de conducción de calor en una dimensión espacial.

Concretamente, vamos a considerar el problema

$$(3.4.1) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t) & \text{si } (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & , x \in (0, l) \\ Au(0, t) + Bu_x(0, t) = 0, & t \in (0, \infty) \\ Au(l, t) + Bu_x(l, t) = 0, & t \in (0, \infty) \end{cases} \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Si $B = 0$, (3.4.1) es el problema planteado en la introducción y si $A = 0$ representa la conducción del calor en el segmento $(0, l)$ en condiciones de aislamiento.

El lector se puede proponer condiciones de Sturm más generales, es decir,

$$\begin{cases} Au(0, t) + Bu_x(0, t) = 0 \\ Cu(l, t) + Du_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad A, B, C, D \in \mathbf{R},$$

y también las condiciones periódicas. El método será idéntico al que consideramos para (3.4.1), variando únicamente el cálculo algebraico previo.

Haremos el estudio en partes para que los cálculos sean más transparentes. La linealidad del problema permite obtener la solución final como suma de las soluciones de los problemas parciales de cada parte.

1.- Problema homogéneo.

Consideramos el problema homogéneo, es decir, $F(x, t) \equiv 0$. Resulta

$$(PH) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{si } (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l] \\ Au(0, t) + Bu_x(0, t) = 0, & t \in (0, \infty) \\ Au(l, t) + Bu_x(l, t) = 0, & t \in (0, \infty) \end{cases} \quad A, B \in \mathbf{R}.$$

Buscando soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, se obtienen las ecuaciones

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

De igual forma a lo hecho en la introducción del capítulo, el problema de contorno resultante es

$$(3.4.3) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ AX(0) + BX'(0) = 0 \\ AX(l) + BX'(l) = 0. \end{cases}$$

Como la solución general de la ecuación en (3.4.3) es

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

para que haya solución no trivial del problema, el sistema lineal

$$(3.4.4) \quad \begin{pmatrix} A + B\sqrt{\lambda} & A - B\sqrt{\lambda} \\ e^{\sqrt{\lambda}l}(A + B\sqrt{\lambda}) & e^{-\sqrt{\lambda}l}(A - B\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ha de tener solución distinta de la solución cero, para lo cual se ha de verificar

$$(3.4.5) \quad (A^2 - B^2\lambda)(e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l}) = 0.$$

Así, o bien $\lambda_0 = \frac{A^2}{B^2}$ (si $B \neq 0$), o bien

$$(3.4.6) \quad e^{-\sqrt{\lambda}l} - e^{\sqrt{\lambda}l} = 0.$$

Por tanto, se tiene

- (1) Si $B = 0$, es decir con condiciones de tipo Dirichlet, resulta que la sucesión de autovalores es

$$(3.4.7) \quad \lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

siendo las autofunciones correspondientes

$$(3.4.8) \quad \phi_k(x) = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

- (2) Si $B \neq 0$ se tienen los autovalores

$$(3.4.7') \quad \lambda_0 = \frac{A^2}{B^2}, \quad \lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

siendo las autofunciones

$$(3.4.8') \quad \begin{aligned} \phi_0(x) &= c_2 e^{-\frac{A}{B}x}, \\ \phi_k(x) &= c_1 \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad k \in \mathbf{N}, \\ \text{donde} \quad &(A + B\frac{k\pi}{l})c_1 + (A - B\frac{k\pi}{l})c_2 = 0. \end{aligned}$$

Ejemplos.

1) Si $B = 0$ entonces las autofunciones son

$$\phi_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

2) Si $A = 0$ entonces las autofunciones son

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad k \in \mathbf{N}.$$

A partir de aquí consideraremos las autofunciones ϕ_k normalizadas, es decir, de forma que $\|\phi_k\|_2 = 1$. Obsérvese que esto se consigue tomando una cualquiera y dividiendo por su norma.

La correspondiente ecuación en la variables t es

$$T'_n(t) = \lambda_n T_n(t), \quad \text{cuyas soluciones son } T_n(t) = A_n e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t}.$$

Por tanto, la solución de (3.4.1) se conjetura que es de la forma

$$(3.4.9) \quad u(x, t) = \sum_0^\infty a_k \phi_k(x) e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t},$$

donde

$$a_k = \int_0^l u_0(s) \phi_k(s) ds.$$

Evidentemente si la serie (3.4.9) define una función, ésta verifica los datos de contorno y el dato inicial.

Si suponemos que $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, l])$ y verifica los datos de contorno, la serie de Fourier de u_0 converge uniformemente en $[0, l]$. Además, utilizando la identidad de Green del corolario (3.2.2) se tiene

$$a''_k = \langle u'', \phi_k \rangle = \langle u, \phi''_k \rangle = \lambda_k \langle u, \phi_k \rangle = \lambda_k a_k,$$

es decir, los coeficientes de Fourier de u se pueden estimar por

$$|a_k| \leq \frac{M}{|\lambda_k|},$$

pues u'' es continua y por la desigualdad de Bessel se tiene que sus coeficientes de Fourier verifican

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a''_k| = 0.$$

Por tanto, por el criterio de Weierstrass, también converge uniformemente la serie (3.4.9).

Si se deriva término a término una vez respecto a t o dos veces respecto a x se obtiene

$$(3.4.10) \quad \sum_0^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k \phi_k(x) e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t},$$

tomando $t_0 > 0$ la serie (3.4.10) tiene la mayorante

$$\sum_0^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a_k \phi_k(x) e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t_0}, \quad \text{si } t \geq t_0.$$

Como consecuencia de que la serie (3.4.9) converge uniformemente en $[0, l] \times [0, \infty)$ y la serie (3.4.10) converge uniformemente en $[0, l] \times [t_0, \infty)$, se tiene:

- 1) u_t y u_{xx} están definidas por la serie (3.4.10), verificandose la ecuación $u_t = u_{xx}$ en $(0, l) \times (0, \infty)$.
- 2) $u_t, u_{xx} \in \mathcal{C}([0, l] \times (0, \infty))$.
- 3) Razonando por recurrencia se tiene que $u \in \mathcal{C}^\infty((0, l) \times (0, \infty))$.
- 4) Se verifica la condición inicial, en el sentido que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x), \quad \text{uniformemente en } [0, l].$$

Es decir, $u \in \mathcal{C}([0, l] \times [0, \infty))$

Obsérvese que si suponemos sólomente que $u_0 \in L^2([0, l])$ se tienen las conclusiones 1), 2) y 3) pues los argumentos anteriores reposan en el hecho que los coeficientes de Fourier $\{a_n\}_{k \in \mathbf{N}}$ forman una sucesión acotada.

Evidentemente no se puede esperar un resultado como 4). No obstante veremos que el dato inicial se satisface en un sentido más débil. Probaremos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = 0$$

En efecto, por la identidad de Parseval

$$\int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = \sum_0^{\infty} |a_k|^2 |1 - e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}|^2,$$

por igual razón, para todo $N \in \mathbf{N}$

$$(3.4.11) \quad \int_0^l |S_N u(x, t) - S_N u_0(x)|^2 dx = \sum_0^N |a_k|^2 |1 - e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t}|^2.$$

Hemos de ver que podemos permutar la suma de la serie con el paso al límite cuando t tiende a cero. Tomando,

$$S_N u(x, t) = \sum_0^N a_k \phi_k(x) e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t},$$

$$S_N u_0(x) = \sum_0^N a_k \phi_k(x),$$

resulta que dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que si $N > N_0$,

$$\int_0^l |u(x, t) - S_N u(x, t)|^2 dx = \sum_N^\infty |a_k|^2 e^{-2(\frac{k\pi}{l})^2 t} \leq \sum_N^\infty |a_k|^2 < \varepsilon, \quad \text{para todo } t > 0$$

y también,

$$\int_0^l |u_0(x) - S_N u(x)|^2 dx = \sum_M^N |a_k|^2 \leq \sum_N^\infty |a_k|^2 < \varepsilon,$$

entonces, usando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \left(\int_0^l |u(x, t) - S_N u(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l |S_N u(x, t) - S_N u_0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \left(\int_0^l |u_0(x) - S_N u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq 2 \left(\sum_N^\infty |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_0^N |a_k|^2 |1 - e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

y ahora pasando al límite para $t \rightarrow 0$ tenemos para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx \leq 2\sqrt{\varepsilon},$$

como se quería probar.

En resumen, hemos demostrado el resultado siguiente

3.4.1. Teorema.

Sea u la función definida en (3.4.9), donde los coeficientes son los coeficientes de Fourier de u_0 respecto a la familia de autofunciones (3.4.8).

- 1) Si $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, l])$ y verifica los datos de contorno, entonces

$$u \in \mathcal{C}^\infty((0, l) \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}([0, l] \times [0, \infty)),$$

siendo solución del problema (3.4.1).

- 2) Si $u_0 \in L^2([0, l])$ entonces

$$u \in \mathcal{C}^\infty((0, l) \times (0, \infty)),$$

es solución del problema (3.4.1), en el sentido que verifica la ecuación y los datos de contorno en $t > 0$ y satisface el dato inicial en el sentido de L^2 , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(x, t) - u_0(x)\|_2 = 0.$$

Observaciones.

- 1) Como puede verse la ecuación del calor tiene la propiedad de que aunque el dato inicial del problema (3.4.1) no sea regular, en cualquier $t > 0$ la solución es indefinidamente diferenciable en el interior. A esta propiedad nos referiremos diciendo que la ecuación del calor tiene *efecto regularizante*.
- 2) Supongamos el caso $B = 0$, condiciones Dirichlet. La serie solución (3.4.9) se convierte en

$$u(x, t) = \sum_1^\infty a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t}$$

Por tanto, si $t > t_0 > 0$,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t} \left| \sum_1^\infty a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{((\frac{\pi}{l})^2 - (\frac{k\pi}{l})^2)t} \right| \leq \\ &\leq M e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t} \sum_1^\infty e^{((\frac{\pi}{l})^2 - (\frac{k\pi}{l})^2)t} \leq C(t_0) e^{-(\frac{\pi}{l})^2 t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

siendo la convergencia uniforme en $[0, l]$. El calor se difunde y la temperatura tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

- 3) La ecuación del calor describe fenómenos irreversibles; si se cambia t por $\tau = -t$ la ecuación sólo cambia en que el signo más se convierte en menos. Si se mira en la correspondiente serie de Fourier, el decaimiento exponencial en el tiempo se convierte en crecimiento exponencial.

2.- Problema no homogéneo.

Supongamos que $F(x, t) \neq 0$ y que $F \in \mathcal{C}([0, l] \times [0, \infty))$.

Conjeturamos que la solución del problema (3.4.1) tiene la forma

$$(3.4.12) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_k(t) \phi_k(x),$$

donde $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ es la sucesión de autofunciones del problema (3.4.3). Para determinar las funciones T_k , multiplicamos en la ecuación (3.4.1) por $\phi_k(x)$, integramos en $[0, l]$,

$$(3.4.13) \quad \begin{aligned} \int_0^l u_t(x, t) \phi_k(x) dx &= \int_0^l u_{xx}(x, t) \phi_k(x) dx + \int_0^l F(x, t) \phi_k(x) dx = \\ &= \lambda_k \int_0^l u(x, t) \phi_k(x) dx + \int_0^l F(x, t) \phi_k(x) dx, \end{aligned}$$

donde se ha integrado por partes dos veces y se ha usado que ϕ_k es una autofunción. Si suponemos ahora que se puede permutar la suma de la serie (3.4.12) definiendo u , con la integración y usando la ortogonalidad de las autofunciones ϕ_k , obtenemos que T_k debe verificar

$$(3.4.14) \quad \begin{cases} T'_k(t) = \lambda_k T_k(t) + c_k(t) \\ T_k(0) = a_k, \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} c_k(t) = \int_0^l F(x, t) \phi_k(x) dx \\ a_k = \int_0^l u_0(x) \phi_k(x) dx \end{cases}$$

La solución de (3.4.14) la calculamos explícitamente por la fórmula de Lagrange y resulta

$$(3.4.15) \quad T_k(t) = a_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds$$

Entonces, formalmente la solución de (3.4.1) la podemos escribir como

$$(3.4.16) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} (a_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds) \phi_k(x).$$

Para terminar justificamos los cálculos realizados con las hipótesis de regularidad que se tienen.

La serie en (3.4.16) la descomponemos en dos partes

$$u_1(x, t) = \sum_0^{\infty} a_k e^{\lambda_k t} \phi_k(x),$$

que es la solución del problema homogéneo, cuyo comportamiento ya hemos estudiado y, de otra parte,

$$u_2(x, t) = \sum_0^\infty \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \phi_k(x)$$

que resuelve el problema (3.4.1) con dato inicial $u_0(x) \equiv 0$.

Observamos que si $F \in \mathcal{C}([0, l] \times (0, \infty))$, se tiene

$$(3.4.17) \quad \begin{aligned} \sum_0^\infty \int_0^t |c_k(s)|^2 ds &= \int_0^t \sum_0^\infty |c_k(s)|^2 ds = \\ &= \int_0^t \left(\int_0^l |F(x, s)|^2 dx \right) ds, \end{aligned}$$

por el teorema de convergencia monótona y la identidad de Parçeval.

Por consiguiente, las sumas parciales definiendo u_2 verifican la desigualdad

$$(3.4.18) \quad \begin{aligned} \left\| \sum_M^N \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \phi_k(x) \right\|_2^2 &= \sum_M^N \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right|^2 \leq \\ &\sum_M^N \left(\int_0^t e^{2\lambda_k(t-s)} ds \right) \int_0^t |c_k(s)|^2 ds = \sum_M^N \frac{e^{2\lambda_k t} - 1}{2\lambda_k} \int_0^t |c_k(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de nuevo la identidad de Parçeval. Es decir, las medias cuadráticas en $[0, l]$ de las sumas parciales definiendo a u_2 , convergen uniformemente en $[0, T]$.

De otro lado, teniendo en cuenta que $\lambda_k = -(\frac{k\pi}{l})^2$ y fijando $T > 0$ de (3.4.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_M^N \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) \phi_k(x) \right| &\leq B \sum_M^N \left| \int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right| \leq \\ &\leq B \sum_M^N \left(\frac{e^{2\lambda_k t} - 1}{2\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |c_k(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{B}{2} \sum_M^N \frac{e^{2\lambda_k T} - 1}{2\lambda_k} + \frac{B}{2} \sum_M^N \int_0^T |c_k(s)|^2 ds \rightarrow 0, \quad M, N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pues la primera serie es convergente y

$$\sum_M^N \int_0^T |c_k(s)|^2 ds \leq \int_0^T \int_0^l |F(x, s)|^2 dx ds = A(T),$$

entonces, $u_2 \in \mathcal{C}([0, l] \times (0, \infty))$.

Podemos reescribir la solución u_2 de la forma siguiente

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \sum_0^\infty \phi_k(x) \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} c_k(s) ds \right) = \\ &= \sum_0^\infty \phi_k(x) \left(\int_0^t e^{\lambda_k(t-s)} \int_0^l F(y, s) \phi_k(y) dy ds \right) = \\ &= \int_0^t \int_0^l \left(\sum_0^\infty e^{\lambda_k(t-s)} \phi_k(y) \phi_k(x) \right) F(y, s) dy ds \equiv \int_0^t \int_0^l G(x, y, t, s) F(y, s) dy ds, \end{aligned}$$

donde G es la *función de Green* del problema

$$G(x, y, t, s) \equiv \sum_0^\infty e^{\lambda_k(t-s)} \phi_k(y) \phi_k(x).$$

La continuidad de u_2 se puede obtener también de esta expresión. Para obtener el resultado de unicidad y otros resultados de regularidad esperamos al capítulo 6.

3) Datos de contorno no homogéneos.

Para fijar las ideas resolveremos el problema (3.4.1) con las condiciones de contorno siguientes

$$(3.4.19) \quad \begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Definimos $w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$ para que verifique (3.4.19), y hacemos el cambio de variable dependiente $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$. En la nueva variable resulta

$$v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} - (w_t - w_{xx}) = F(x, t) - (w_t - w_{xx}) \equiv H(x, t),$$

con lo que el problema a resolver es

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = H(x, t) \\ v(0, t) = 0 = v(l, t) \\ v(x, 0) = u_0(x) - (\mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0))), \end{cases}$$

cuya solución se ha calculado en la etapa previa.

El argumento anterior supone la regularidad suficiente sobre μ_1 y μ_2 . Invitamos al lector a plantearse otras condiciones separadas no homogéneas.

3.5.- Problemas de contorno para la ecuación de ondas: la cuerda vibrante.

Como se dedujo en la sección (1.5) el problema que plantea la vibración de una cuerda sujeta por los extremos es el siguiente

$$(3.5.1) \quad \begin{cases} (1) & u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t) \quad 0 < x < l, \quad t \in \mathbf{R} \\ (2) & u(0, t) = 0 = u(l, t), \quad t \in \mathbf{R} \\ (3) & u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l] \\ (4) & u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, l], \end{cases}$$

donde u_0 es la posición inicial y u_1 la velocidad inicial.

Nos ocuparemos en esta sección del estudio del problema (3.5.1) y como en la sección anterior dividimos el estudio en etapas.

1.- Problema homogéneo, $F(x, t) \equiv 0$.

Procediendo a buscar soluciones de variables separadas se obtiene el problema de autovalores

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 = X(l), \end{cases}$$

cuyo estudio se ha hecho en la sección (3.4); es decir, los autovalores de (3.5.2) son

$$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \left\{ -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right\}_{n \in \mathbf{N}},$$

siendo las autofunciones correspondientes normalizadas

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right).$$

Las ecuaciones resultantes para la variable temporal son

$$T_n''(t) + \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) T_n(t) = 0$$

que integrándolas elementalmente dan

$$T_n(t) = c_1 \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + c_2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{l} \right).$$

La solución del problema (3.5.1) se escribe como

$$(3.5.3) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi t}{l}) + b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi t}{l})) \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l}).$$

Como ha de ser

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

los coeficientes en (3.5.3) serán

$$(3.5.4) \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_0(s) \operatorname{sen}(\frac{n\pi s}{l}) ds,$$

y como

$$u_t(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_0^{\infty} (\frac{n\pi}{l}) b_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l}),$$

$$(3.5.5) \quad (\frac{n\pi}{l}) b_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_1(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{l}) dx.$$

Podemos observar en (3.5.3) que no se obtiene ningún decaimiento en el tiempo y así la serie no *mejora el comportamiento*, al contrario de lo que ocurría con la ecuación del calor. Por tanto, en la ecuación de ondas no encontramos *efecto regularizante*, la convergencia de la serie, y como consecuencia la regularidad de la solución, reposa en la regularidad de los datos iniciales de una manera fundamental.

Si suponemos que

$$(3.5.6) \quad u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{C}^3([0, l]), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \in \mathcal{C}^2([0, l]),$$

con las condiciones de *compatibilidad*

$$(3.5.7) \quad 0 = u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = u_0''(0) = u_0''(l),$$

entonces la solución de (3.5.1) definida por (3.5.3) verifica

$$u \in \mathcal{C}^2([0, l] \times (-\infty, \infty)).$$

Las condiciones (3.5.7) son necesarias para que la solución satisfaga puntualmente los datos en la banda $[0, l] \times (-\infty, \infty)$.

De acuerdo con las condiciones (3.5.6) y (3.5.7) y el corolario (3.3.5) se tiene

$$\begin{cases} |a_n| \leq \frac{M_0}{n^3} \\ |b_n| \leq \frac{M_1}{n^3}, \end{cases}$$

por lo que la regularidad se obtiene comprobando que la derivación término a término da series uniformemente convergentes. Se dejan al cuidado del lector las últimas comprobaciones.

Si derivamos la solución u respecto a t y a x obtenemos

$$u_t(x, t) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right) \left(-a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + b_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

y

$$u_x(x, t) = \sum_0^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \left(\frac{n\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right),$$

respectivamente. Fijado t se obtiene por la identidad de Parseval

$$(3.5.8) \quad \frac{1}{2} \int_0^l (|u_t(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (|u_1(x)|^2 + |u'_0(x)|^2) dx.$$

La identidad (3.5.8) se conoce como *principio de conservación de la energía*, que podemos leer también diciendo que la suma de las medias cuadráticas de la derivada respecto al tiempo y respecto al espacio son constantes en el tiempo.

Como consecuencia de (3.5.8) se tiene un *resultado de unicidad* de solución para el problema (3.5.1). En efecto, si hubiese dos soluciones u y v la integral de energía para la diferencia $w = u - v$ en $t = 0$ es nula. Por tanto, la energía es nula en todo t , que implica que $w_t = 0$ y $w_x = 0$ en todo punto. Se concluye que $w(x, t) = c$, constante. Pero como $w(x, 0) = 0$ por hipótesis, concluimos que $u(x, t) = v(x, t)$.

Obsérvese que los argumentos anteriores son válidos en tanto que la integral de energía sea finita. Esto es así, suponiendo que $u_1 \in L^2([0, l])$ y que $u'_0 \in L^2([0, l])$. En este caso hay que entender la solución en un sentido débil, del cual no nos ocuparemos por el momento.

Podemos escribir (3.5.3) de la forma

$$(3.5.9) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} A_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} (t + \delta_n) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right),$$

siendo

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \frac{n\pi}{l} \delta_n = -\arctan \left(\frac{b_n}{a_n} \right).$$

Cada sumando en (3.5.9) se llama *onda estacionaria*; los puntos

$$x = m \frac{l}{n}, \quad m = 1, \dots, (n-1),$$

son los *nodos*, es decir, los puntos que quedan en reposo para todo tiempo en la onda estacionaria. Se llama *vientre de la onda* a los puntos en que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{l}\right) = \pm 1,$$

es decir, aquellos en que la amplitud de oscilación es máxima. Evidentemente tales puntos son

$$x = \frac{2m+1}{2n}l,$$

siendo $m = 0, \dots, (n-1)$.

Fijado el tiempo, toda onda estacionaria tiene un perfil sinusoidal pues es

$$u_n(x, t) = c_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

donde

$$c_n(t) = A_n \cos(\omega_n(t + \delta_n)), \quad \text{siendo} \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l}.$$

De esta forma queda claro que cada onda estacionaria, u_n , tiene una *frecuencia propia de oscilación*, ω_n , que es igual en todos los puntos.

En los tiempos tales que $\cos(\omega_n(t + \delta_n)) = \pm 1$, las desviaciones son máximas y la velocidad del movimiento es nula.

Por el contrario, en los tiempos en que $\cos(\omega_n(t + \delta_n)) = 0$, la velocidad es máxima y la desviación nula. Con (3.5.9) hemos obtenido la vibración de una cuerda como combinación de ondas estacionarias, es la combinación de *tonos simples*.

2.- Problema no homogéneo, $F(x, t) \neq 0$.

Se procederá como en el caso de la ecuación del calor, es decir, conjeturando que la solución es de la forma

$$(3.5.10) \quad u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Entonces

$$(3.5.11) \quad \int_0^l (u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \int_0^l F(x, t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \equiv c_n(t),$$

de donde se obtiene por ortogonalidad e integrando por partes

$$(3.5.12) \quad T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = c_n(t),$$

y para que se verifiquen los datos iniciales

$$(3.5.13) \quad \begin{cases} T_n(0) = a_n \\ T_n'(0) = b_n\left(\frac{n\pi}{l}\right), \end{cases}$$

donde a_n y b_n están definidos por (3.5.4) y (3.5.5), respectivamente.

La solución de la ecuación (3.5.12) verificando los datos (3.5.13) se obtiene por la fórmula de variación de las constantes y resulta

$$(3.5.14) \quad T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi} \int_0^t c_n(s) \sin\left(\frac{n\pi}{l}(t-s)\right) ds.$$

Basta sustituir en (3.5.10). La regularidad depende de los datos y será estudiada en el capítulo dedicado a la ecuación de ondas.

3.6.- El problema de Dirichlet en el semiplano positivo. La transformación de Fourier.

El problema que estudiamos en esta sección tiene como dificultad añadida que el dominio no es acotado, concretamente consideraremos el semiplano positivo,

$$\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\},$$

entonces su cierre es

$$\bar{\mathbf{R}}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

Nos planteamos el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en \mathbf{R}_+^2 , es decir, el problema

$$(3.6.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

donde por el momento supondremos que f es lo regular que se necesite para que los cálculos sean válidos. Más adelante precisaremos dicha regularidad.

Es obvio que tal como hemos planteado el problema en (3.6.1), en general, no tiene solución única; en efecto, si suponemos por ejemplo $f \equiv 0$, $u(x, y) \equiv 0$ y $v(x, y) = y$ son soluciones de (3.6.1) con dato nulo. Lo que ocurre es que al ser \mathbf{R}_+^2 un dominio no acotado hay parte de su frontera en que no hemos fijado ningún dato, no se ha fijado el dato *en el infinito*, o dicho más precisamente, no hemos fijado qué pasa con la solución cuando $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Tal condición en *el infinito* se va a introducir pidiendo acotación en \mathbf{R}_+^2 . Es decir, consideraremos el problema

$$(3.6.2) \quad \begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R} \\ |u(x, y)| \leq M < \infty, & (x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2. \end{cases}$$

Como en las secciones previas, la idea es utilizar el método de separación de variables, es decir, buscar soluciones de la ecuación de Laplace de la forma

$$U(x, y) = X(x)Y(y).$$

Al sustituir en la ecuación, se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(3.6.3) \quad \begin{cases} X''(x) + cX(x) = 0 \\ Y''(y) - cY(y) = 0. \end{cases}$$

Para $c \neq 0$ las soluciones de las ecuaciones de (3.6.3) son

$$(3.6.4) \quad \begin{cases} X(x) = ae^{i\sqrt{c}x} + be^{-i\sqrt{c}x} \\ Y(y) = Ae^{\sqrt{c}y} + Be^{-\sqrt{c}y}. \end{cases}$$

Como u debe ser acotada, necesariamente ha de ser $c > 0$ y $A = 0$. Poniendo $c = (2\pi\xi)^2$ para $\xi \in (-\infty, \infty)$, resulta $2\pi\xi = \pm\sqrt{c}$, luego

$$(3.6.5.) \quad u_\xi(x, y) = X(x)Y(y) = e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi i\xi x}$$

En analogía a lo que se hace con las series de Fourier en los casos estudiados en las secciones previas, sería razonable escribir la solución como

$$(3.6.6) \quad u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}e^{2\pi i\xi x}d\xi.$$

Pero como debe satisfacerse

$$(3.6.7) \quad u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi,$$

donde *los coeficientes de Fourier* son ahora una familia continua y parece natural definirlos por

$$(3.6.8) \quad a(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i\langle x, \xi \rangle} f(t)dt,$$

en analogía al caso de las series de Fourier

Al menos formalmente, sustituyendo (3.6.8) en (3.6.6) y suponiendo que se verifican las hipótesis para que el cambio de orden de integración sea lícito, se obtiene

$$(3.6.9) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i\langle x, \xi \rangle} f(t)dt \right) e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i\xi x} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i\xi(x-t)} d\xi \right) dt. \end{aligned}$$

Pero tenemos que

$$(3.6.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i\xi(x-t)} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2},$$

puesto que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i\xi s} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi(is+y)} d\xi + \int_0^{\infty} e^{2\pi\xi(is-y)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi(is+y)} - \frac{1}{2\pi(is-y)} = \frac{y}{\pi(s^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

De (3.6.10) y (3.6.9) se concluye

$$(3.6.11) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t) dt.$$

La función

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

es el *núcleo de Poisson* en el dominio \mathbf{R}_+^2 .

Son muy fáciles de comprobar las siguientes propiedades de $P(x, y)$:

$$(3.6.12) \quad P(x, y) \geq 0, \quad \text{en } \mathbf{R}_+^2,$$

$$(3.6.13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x, 1) dx = 1,$$

$$(3.6.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx = \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{x}{y}, 1\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(s, 1) ds = 1,$$

$$(3.6.15) \quad \int_{|x|>\delta} P(x, y) dx = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\delta}{y}\right) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0,$$

$$(3.6.16) \quad \Delta P \equiv P_{xx} + P_{yy} = 0, \quad \text{en } \mathbf{R}_+^2.$$

Una demostración exactamente igual a la del teorema (3.3.3) establece el siguiente resultado

3.6.1 Teorema.

Sea $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, tal que $\sup_{x \in \mathbf{R}} |g(x)| < M < \infty$.

Entonces

$$v(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - t, y) g(t) dt$$

verifica

- (1) $\Delta v = 0$ en \mathbf{R}_+^2
- (2) $|v(x, y)| \leq M$ si $(x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2$
- (3) $\lim_{y \rightarrow 0} v(x, y) = g(x)$, uniformemente sobre compactos de \mathbf{R} .

De esta forma hemos encontrado solución al problema (3.6.2). La unicidad de solución para el problema (3.6.2) es una cuestión más delicada y la posponemos al capítulo 5.

Tras el estudio realizado de las series de Fourier y de sus aplicaciones, es natural interesarse por la expresión (3.6.8), con la esperanza de que resulte igualmente útil para representar funciones definidas sobre la recta real. De acuerdo con (3.6.8) formulamos la definición siguiente.

3.6.2. Definición.

Sea f una función integrable en \mathbf{R} , es decir, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Se define la transformada de Fourier de f por

$$(3.6.17) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(t) dt$$

Para coger confianza con el nuevo objeto introducido, es conveniente calcular *una transformada de Fourier*. Concretamente calcularemos la de la función *gaussiana*, es decir, la transformada de Fourier de

$$g(x) = e^{-a\pi|x|^2}, \quad a > 0.$$

Escribiendo la fórmula (3.6.17) para la función g se tiene

$$(3.6.18) \quad \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} e^{-a\pi|t|^2} dt,$$

poniendo

$$\pi a t^2 + 2\pi i t \xi = (\sqrt{a\pi} t + i \sqrt{\frac{\pi}{a}} \xi)^2 + \frac{\pi}{a} \xi^2$$

resulta

$$(3.6.19) \quad \hat{g}(\xi) = e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi)^2} dt.$$

Calcularemos la integral que queda en (3.6.19) usando variable compleja. Fijado ξ y para cada $R > 0$ consideramos el camino de integración Γ definido por el segmento del eje real que va de $-R + i0$ a $R + i0$, el segmento vertical que une el punto $R + i0$ y el punto $R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$, el segmento horizontal uniendo el punto $R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ con el punto $-R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ y por último, el segmento vertical uniendo el punto $-R + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi$ con $-R + i0$. El interior de Γ es un rectángulo que llamaremos \mathcal{R}_Γ , donde la función de variable compleja $h(z) = e^{-z^2}$, es analítica. El teorema de Cauchy implica entonces que

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0,$$

como además

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^{(\frac{\pi}{a})^{1/2}\xi} e^{-(\sqrt{a\pi}R + is)^2} ds \right| = 0,$$

resulta que

$$(3.6.20) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a\pi}t + i\sqrt{\frac{\pi}{a}}\xi)^2} dt &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\pi t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \end{aligned}$$

dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Por tanto sustituyendo en (3.6.19) obtenemos

$$(3.6.21) \quad \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi}{a}\xi^2},$$

que muestra como *la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana*. Este ejemplo es el que servirá de norma para estudiar la transformada de Fourier. Dado el éxito obtenido con la gaussiana, vamos a fijarnos en algunas de sus propiedades; fundamentalmente en las dos siguientes.

1) Toda gaussiana, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.

2) Dada una gaussiana g y sendos enteros no negativos n y m se verifica

$$(3.6.22) \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^m \frac{d^n g}{dx^n}(x)| < c(n, m),$$

donde $c(n, m)$ es una constante dependiendo de n y m .

Ambas propiedades se obtienen por cálculo directo sin ninguna dificultad. Agruparemos en una familia a todas las funciones verificando las propiedades 1) y 2) de la gaussiana. Tal clase de funciones se suele designar por $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en honor de Laurent Schwartz, quien por primera vez la introdujo como tal clase, llamándola *clase de funciones temperadas*. El nombre es bastante afortunado pues quiere decir que una función está en $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ si ella y cualquier derivada suya tiende a cero en el infinito más rápidamente que cualquier polinomio, como el lector puede probar con un cálculo rutinario.

Para ser un poco más formales, escribimos en detalle la definición de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$,

$$(3.6.23) \quad \mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \mid \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^m \frac{d^n f}{dx^n}(x)| \leq c_{n,m} < \infty, n, m \in \mathbf{N}\}.$$

De la propia definición de \mathcal{S} se sigue que

- a) Si $f, g \in \mathcal{S}$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{S}$
- b) Si $f, g \in \mathcal{S}$, entonces $fg \in \mathcal{S}$.

Además si f es una función temperada, tomando en (3.6.22) $n = 0$ y $m = 2$ se tiene

$$(3.6.24) \quad |(1 + |x|^2)f(x)| \leq M,$$

por tanto,

$$(3.6.25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty,$$

es decir, f es integrable.

La observación anterior implica, en particular, que la transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ está bien definida pues

$$(3.6.26) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(t) dt,$$

y la integral es finita. Obsérvese que además de (3.6.26) y (3.6.25) se concluye

$$(3.6.27) \quad \sup_{\xi \in \mathbf{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

La correcta lectura de (3.6.27) es que la transformada de Fourier de una función integrable es acotada y entonces, en particular, esto es cierto si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Las propiedades más elementales de la transformada de Fourier de funciones temperadas ponen de manifiesto cómo serán las aplicaciones de ella a las ecuaciones en derivadas parciales.

3.6.3. Teorema.

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, entonces

(1) $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ y además

$$(3.6.28) \quad \frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \widehat{g}(\xi), \quad \text{siendo } g(x) = (-2\pi i x)^k f(x).$$

(2) $\frac{d^k f}{dx^k}(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, verificándose

$$(3.6.29) \quad \widehat{\frac{d^k f}{dx^k}}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi).$$

(3) Si se supone también que g es una función integrable y se define

$$(3.6.30) \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \equiv f * g(x),$$

integral de convolución de f y g , se tiene que h es integrable y que

$$(3.6.31) \quad \widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

(4) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Demostración.

1) Si se escribe la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(t) dt,$$

teniendo en cuenta que $\frac{d^k}{d\xi^k}(f(x)e^{-2\pi i x \xi})$ es integrable en valor absoluto, se puede derivar bajo el signo integral, resultando

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^k}{d\xi^k}(e^{-2\pi i t \xi}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-2\pi i t)^k e^{-2\pi i t \xi} dt,$$

y llamando $g(x) = (-2\pi i x)^k f(x)$, se tiene (3.6.28).

2) Que $\frac{d^k f}{dx^k} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, es una consecuencia inmediata de la definición de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Para establecer la fórmula (3.6.29) basta hacerlo para $k = 1$ y reiterar la prueba. Pero, integrando por partes,

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{df}{dt}(t) dt = (-2\pi i \xi) \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(t) dt = (-2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi),$$

que es (3.6.29) con $k = 1$.

- 3) Que h es integrable es consecuencia inmediata del teorema de Fubini-Tonelli sobre inversión del orden de integración, en efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)| dx \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \right) dt = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du \right). \end{aligned}$$

Para obtener (3.6.31) efectuamos el cálculo directamente

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} h(t) dt = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-2\pi i t \xi} dt \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-2\pi i (t-x) \xi} dt \right) e^{-2\pi i x \xi} dx = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi), \end{aligned}$$

que es la identidad buscada.

- 4) Hemos de establecer que si $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son números enteros, se verifica

$$|\xi^m \frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi)| \leq C,$$

que, por los apartados 1) y 2) anteriores, es equivalente a

$$(3.6.32) \quad \xi^m \frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi) = a \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{d^m}{dt^m} (t^n f(t)) dt.$$

Por definición, la función $g(x) = \frac{d^m}{dx^m} (x^n f(x)) \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, por tanto, (3.6.27) implica que

$$|\widehat{g}(\xi)| < C,$$

como queríamos demostrar. \square

Podemos resumir el contenido del teorema (3.6.3) diciendo que, en primer lugar, la transformada de Fourier *aplica* \mathcal{S} en \mathcal{S} ,

$$\widehat{} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

En segundo lugar:

- a) La transformada de Fourier transforma derivación en multiplicación por monomios, como indica la fórmula (3.6.29).
- b) La derivación de la transformada de Fourier es la transformada de Fourier del producto de un monomio por la función, como precisa la fórmula (3.6.28).
- c) El producto de convolución es transformado en el producto de las transformadas de Fourier, como expresa (3.6.31).

Observaciones.

- (1) *La transformada de Fourier se extiende a \mathbf{R}^N por la fórmula*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} f(t) e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} dt,$$

donde \langle, \rangle es el producto escalar en \mathbf{R}^N .

- (2) *La transformación de Fourier permite que un problema diferencial se convierta en un problema algebraico, por ejemplo, si se quiere resolver el problema*

$$(3.6.33) \quad \Delta u = f, \quad \text{en } \mathbf{R}^2,$$

se transforma en

$$(3.6.34) \quad -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Evidentemente, para que la estrategia expuesta culmine con éxito el cálculo de una solución de (3.6.33), es necesario saber si es posible recuperar una función a partir de su transformada de Fourier, es decir, *necesitamos saber invertir la transformada de Fourier*. A esta importante cuestión dedicamos el resto de esta sección.

El apartado 4) del teorema (3.6.3) tiene como caso particular que

$$(3.6.35) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0,$$

que puede verse como una extensión a la transformada de Fourier del teorema de Riemann-Lebesgue demostrado para series de Fourier, es decir, tenemos un resultado de localización. Realmente el resultado, que es conocido también como teorema de Riemann-Lebesgue, es para funciones integrables y puede obtenerse de (3.6.35) por un argumento de densidad de \mathcal{S} en las funciones integrables. Tal resultado de densidad se puede obtener siguiendo las indicaciones del ejercicio 33 de este capítulo.

3.6.4. Teorema. (*Riemann-Lebesgue*)

Sea f función integrable en \mathbf{R} , es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f|dx < \infty$, entonces

$$(3.6.36) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

Demostración.

Para f función integrable y $\varepsilon > 0$ existe $g \in \mathcal{S}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f - g|dx < \varepsilon.$$

Entonces

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f - g|dx + |\widehat{g}(\xi)|,$$

que teniendo en cuenta (3.6.35), implica que para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| \leq \varepsilon,$$

probándose el resultado. \square

Recogemos a continuación un resultado elemental e importante.

3.6.5. Lema.

Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Entonces

$$(3.6.37) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widehat{g}(y)dy.$$

Demostración.

Basta utilizar el teorema de Fubini,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} g(t) dt \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi \right) dt$$

que prueba el resultado. \square

Este resultado y el hecho que la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana serán los ingredientes fundamentales de la prueba del teorema de inversión.

Si $f \in \mathcal{S}$ hemos demostrado que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$, entonces tiene sentido la siguiente definición.

3.6.6. Definición. (*Transformada inversa de Fourier*)

Sea \hat{f} transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}$ se define

$$(\hat{f})^\sim(t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

La conjetura es que $(\hat{f})^\sim = f$. El resultado siguiente prueba esta conjetura.

3.6.7. Teorema. (*inversión de la transformada de Fourier*)

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, entonces $(\hat{f})^\sim = f$

Demostración.

Hemos de probar que

$$(3.6.38) \quad f(t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Para $\varepsilon > 0$ consideramos la gaussiana

$$g_\varepsilon(\xi) = e^{-\pi \varepsilon^2 \xi^2},$$

por el lema (3.6.5) se tiene

$$(3.6.39) \quad \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) g_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \widehat{e^{2\pi i t \xi} g_\varepsilon}(\xi) d\xi.$$

Llamando $h_\varepsilon(x) = e^{2\pi i t x} g_\varepsilon(x)$ se tiene

$$(3.6.40) \quad \hat{h}_\varepsilon(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) e^{-2\pi i (t-\xi)x} dx = \hat{g}_\varepsilon(t-\xi) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi \frac{|t-\xi|^2}{\varepsilon^2}},$$

en virtud de (3.6.21). Sustituyendo en (3.6.39) resulta

$$(3.6.41) \quad \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) e^{-\pi \varepsilon^2 \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi \frac{|t-\xi|^2}{\varepsilon^2}} d\xi = f_\varepsilon(t).$$

Si llamamos $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$ se tiene $\phi(x) > 0$ y $\int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx = 1$. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

es obvio por cambio de variable en la integral que también

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Por consiguiente podemos escribir la última igualdad en (3.6.41) como

$$f_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \phi_\varepsilon(t - \xi) d\xi.$$

Probaremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x).$$

En efecto,

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(\xi) |f(x - \xi) - f(x)| d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(x - \varepsilon y) - f(x)| dy.$$

Dado $\eta > 0$, elegimos $R > 0$ tal que

$$\int_{|y| > R} \phi(y) dy \leq \frac{\eta}{2},$$

entonces si $M = \sup_{y \in \mathbf{R}} |f(y)|$ podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(x - \varepsilon y) - f(x)| dy \leq \int_{-R}^R \phi(y) |f(x - \varepsilon y) - f(x)| dy + M\eta.$$

Pero la continuidad uniforme de f sobre compactos implica que dado $\eta > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que si $|\varepsilon y| < \delta$, se verifica que $|f(x - \varepsilon y) - f(x)| \leq \eta$ cualquiera que sea $|x| \leq R$; por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) |f(x - \varepsilon y) - f(x)| dy \leq \eta \int_{-R}^R \phi(y) dy + M\eta \leq \eta(1 + M),$$

que es lo que queríamos probar.

Para finalizar la demostración del teorema, obsérvese que en el primer término de (3.6.41) se puede aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, resultando

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi x \xi} e^{-\varepsilon^2 \pi \xi^2} d\xi = \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

con lo que se concluye (3.6.38). \square

El teorema (3.6.7) tiene una cuantificación muy interesante.

3.6.8. Teorema. (*Identidad de Plancherel*)

Si $f \in \mathcal{S}$ se verifica

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

Demostración.

Sea $g(x) = f(-x)$ y, por tanto, $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Las propiedades de la transformada de Fourier demostradas en el teorema (3.6.3) nos permiten escribir la siguiente cadena de identidades

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x)dx \equiv f * g(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(f * g)}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Para acabar esta sección notaremos que el teorema (3.6.8) y la densidad de \mathcal{S} en L^2 , permite definir la transformada de Fourier sobre L^2 . En efecto, sea $f \in L^2$ y supongamos $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\|_2 = 0.$$

Definimos

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n(\xi).$$

Es obvio que, de esta manera, la transformada de Fourier es inversible en L^2 verificándose además que es una *isometría* en L^2 por tenerse la extensión de la identidad de Plancherel a L^2 , es decir,

$$(\text{Identidad de Plancherel}) \quad \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2, \quad \text{para toda } f \in L^2$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 3

1. Estudiar si tienen solución los problemas:

a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

b) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

2. Resolver los siguientes problemas de contorno:

a) $y'' = \alpha^2 sy$, $y(0) = v$, $y'(x_0) = 0$, $\alpha, s \in \mathbf{R}$.

b) $y'' - \alpha^2 sy = 0$, $y(0) = \frac{1}{s}$, $y'(x_0) = 0$, $\alpha, s \in \mathbf{R}$.

Discútanse los casos de compatibilidad.

3. Resolver de manera elemental los problemas

- a) $y^{(iv)} - \lambda^4 y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.
 b) $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$, $y(0) = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = \frac{3}{2}$, $y(1) = 0$.

4. Obténgase la función de Green asociada a los problemas:

- a) $y'' = 0$, $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.
 b) $y'' = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.
 c) $y'' - y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$.
 d) $x^2 y'' + x y' - y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = l$, $y(1) = 0$.

5. Calcular la solución de los siguientes problemas:

- a) $y'' + y = x$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
 b) $xy'' + y' = x$, $y(1) = y(e) = 0$.
 c) $y'' + \pi^2 y = \cos(\pi x)$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.
 d) $y'' + y = x^2$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2})$, $y'(0) = y'(\frac{\pi}{2})$.

6. Hallar los autovalores y las autofunciones para el operador diferencial $y'' = \lambda y$ con los datos de contorno siguientes: a) $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$; b) $y(0) = y(2\pi) = 0$; c) $y(0) = 0 = y(1)$; d) $y(0) = y(L) = 0$, $L > 0$; e) $y(-L) = y(L) = 0$, $L > 0$; f) $y(a) = 0 = y(b)$, $a < b$.

7. Sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ función continua. Sea la ecuación

$$y'' - h(x)y = 0$$

y las condiciones de contorno

$$(a) \quad \begin{cases} y(a) + 2y(b) + y'(b) = 0 \\ 2y(a) - y(b) - y'(a) - y'(b) = 0 \end{cases}$$

y

$$(b) \quad \begin{cases} y(a) + y'(b) = 0 \\ y(b) + y'(a) = 0 \end{cases}$$

En cada caso determínese si el correspondiente problema es autoadjunto.

8. Utilícese la identidad de *Parseval-Bessel* para demostrar que

$$(a) \quad \sum_1^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$(b) \quad \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Indicación.- Tómese el problema de contorno $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(\pi) = 0$ y desarróllense en serie de autofunciones $f_1(x) = 1$ y $f_2(x) = x$, respectivamente.

9. Pruébese que

$$\frac{t(\pi - t)}{2} = \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(kt)}{k^2}, \quad \text{si } t \in [0, \pi]$$

Indicación.- Utilícese el mismo problema de contorno que en el problema anterior.

10. Sea el problema de autovalores

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = 0 \\ \alpha y(1) + y'(1) = 0, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbf{R}$ y $\alpha \neq -1$. Sea $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ la sucesión de autovalores. Calcúlese

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

11. Sea $f \in \mathcal{C}^k$, $k > 1$, 2π -periódica y sea

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ins} ds.$$

Probar que

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{inx}$$

converge uniformemente a f cuando $N \rightarrow \infty$, y además se verifica

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |S_N f(x) - f(x)| \leq \frac{C}{N^{k-\frac{1}{2}}}.$$

12. Sea $f(x) = e^x$ en $[-\pi, \pi]$ y se extiende periódicamente a \mathbf{R} . Determínese la suma de su serie de Fourier en $x = \pi$.

13. Calcúlese la serie de Fourier de $f(x) = 1$ en $0 \leq x \leq \pi$ respecto de $\phi_n(x) = \operatorname{sen} nx$. Integrando esta serie determínese una serie que converja a $g(x) = x$ en el mismo intervalo.

14. Pruébese que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \log x \operatorname{sen} nx dx = 0$.

15. Se considera la serie

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n!x)}{n^2}.$$

Pruébese que define una función continua. Si se considera la serie derivada término a término, ¿converge en media cuadrática a alguna función?

16. Sea la ecuación diferencial

$$(E) \quad y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \quad p_1, p_2 \in \mathbf{R},$$

donde f es 2π -periódica.

Utilizar las series de Fourier para obtener una solución 2π -periódica de (E), dando condiciones para su existencia. Aplíquese a calcular soluciones periódicas de las ecuaciones:

$$(a) \quad y'' + 4y = \sum_3^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}.$$

$$(b) \quad y'' + y = \cos x.$$

$$(c) \quad y'' - y = |\operatorname{sen} x|.$$

17. Sea $\lambda \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. Desarrollar en serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ las funciones $f(t) = \cos(\lambda t)$ y $\operatorname{sen}(\lambda t)$, estudiando para que puntos convergen estos desarrollos. Probar que

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2}, \quad \text{si } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}.$$

18. Sea el problema

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = f(x) \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$$

Estúdiase si es autoadjunto. Escribese la solución utilizando la función de Green. Calcúlese los autovalores y las autofunciones del problema. Determinése la solución para $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en forma de serie.

19. Para $f \in \mathcal{C}([0, \pi])$ arbitraria, resolver el problema

$$\begin{cases} y'' - y = f(x) \\ y'(0) = y'(\pi) = 0, \end{cases}$$

mediante desarrollo en serie de autofunciones.

Obtener directamente una solución en el caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ y comparando ambos resultados, calcular la sumas

$$a) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{(4n^2 + 1)(4n^2 - 1)}; \quad b) \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 + 1)(4n^2 - 1)}.$$

20. Sea la función 10-periódica definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5. \end{cases}$$

- a) Hallar sus coeficientes de Fourier.
 b) ¿Cómo habría de definirse f en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 5$, para que la serie de Fourier converja en todo punto?

21. Considérense las curvas planas simples, cerradas, \mathcal{C}^1 y de longitud unidad. Calcúlense de entre ellas la que encierra área máxima.

Indicación.-

- i) $Longitud = 1 = \int_0^1 ((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{1/2} dt$,
 ii) *Utilizando la fórmula de Green en el plano el área encerrada es*
 $Area = \int_0^1 (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$,
 iii) *Utilícense series de Fourier*

22. Obténgase por separación de variables la solución del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, \pi) = 0 \\ u(x, 0) = \sin^2 x \end{cases}$$

23. Calcúlese la función armónica conjugada de la solución de

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(e^{i\theta}) = f(\theta), & f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]). \end{cases}$$

Hágase el cálculo formal que da el valor de frontera de dicha función conjugada.

24. Sea $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ y consideremos $F = \nabla v$ de forma que

$$v|_{\partial D} = \log((x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2).$$

Hállese razonadamente el mínimo de

$$E = \iint_D |F|^2 dx dy,$$

sobre los campos gradiente definidos antes.

25. Obténgase una transformación conforme que reduzca el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R} \\ |u(x, y)| < c, & (x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+^2, \end{cases}$$

al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad.

26. Hallar la solución $u(x, t)$ del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \end{cases}$$

en forma de serie y estudiar su convergencia.

27. Resolver mediante el método de Fourier los siguientes problemas:

$$(a) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 = u(1, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 25, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(25, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right), & 0 \leq x \leq 25. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = -x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = \operatorname{sen}(xt), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u_x(\pi, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

$$(h) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + u_x(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}^2(\pi x). \end{cases}$$

$$(i) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = \frac{x}{\pi} + e^{-t}(\frac{x}{\pi} - 1), & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad u(\pi, t) = t, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(j) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$(k) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

28. Resuélvanse los siguientes problemas por el método de Fourier,

$$(a) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = x^2(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = \cos(x + t), & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = x^2(\pi - x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + u_t = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = x \cos\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = xt, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

29. Resolver mediante el método de Fourier los siguientes problemas.

$$(a) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & -\pi < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(-\pi, t) = 0 = u(\pi, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & -\pi < x < \pi \\ u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{7}{2}x\right), & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & -\pi < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(-\pi, t) = 0 = u(\pi, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(3x), & -\pi < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 50 \operatorname{sen}(5x) \operatorname{sen}(5t), & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u_x(1, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \operatorname{sen}^3(\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} u_{tt} = 256u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u_x(2, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{48}x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{48}(2-x) & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} & 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = \operatorname{sen}(kct), \quad k \in \mathbf{N}, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$(g) \quad \begin{cases} 9u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = 0 = u(1, t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(1-x), \quad 0 < x < 1 \\ u_t(x, 0) = \cos(\frac{\pi}{2}x), \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

30. Sea f función integrable sobre \mathbf{R} , es decir,

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx < \infty$$

y sea

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(t) dt$$

su transformada de Fourier. Pruébese:

a) $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx$ para todo $\xi \in \mathbf{R}$

b) $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$

c) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

31. Sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ tal que

$$|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)| \leq \frac{k}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Probar

a) $\sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n)$, converge uniformemente en $0 < x < 1$ a una función, $f^0(x)$, 1-periódica.

b) $f^0 \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$

c) Utilizar el desarrollo en serie de Fourier de f^0 para probar la fórmula de sumación de Poisson,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

32. Sea el operador diferencial ordinario,

$$L[y] \equiv -y'' + y.$$

Sea $E(x)$ tal que

$$\hat{E}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 + 1}.$$

Probar que

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y) f(y) dy$$

es solución de $L[y] = f$.

33. Probar que \mathcal{S} es denso en L^1 , espacio de funciones integrables.

Indicación.-

- a) Considérese $\hat{h}_\varepsilon(x-t)$, definida en (3.6.40), que es una función temperada. Dada $g \in L^1$, pruébese que $g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{h}_\varepsilon(x-t)g(t)dt$ es temperada.
 b) Pruébese que $\int_{\mathbf{R}} |g_\varepsilon(x) - g(x)|dx \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

34.

Sea $F(x, t)$ una función continua en $[a, b] \times [a, b]$ tal que

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} F(x, t)f(x)g(t)dxdt = 0$$

para todas las funciones $f, g \in C([a, b])$. Demostrar que F es simétrica, es decir, que $F(x, t) = F(t, x)$ para todo $(t, x) \in [a, b] \times [a, b]$.

Aplíquese a probar la propiedad de simetría (3.2.10 b).

35.

Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1). \end{cases}$$

- a) ¿Es autoadjunto?
 b) Calcular la función de Green, en caso que exista.
 c) Resolver el problema

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1) \end{cases}$$

36.

Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

- a) Calcular la función de Green, en caso que exista.
 b) Resolver el problema

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

37.

Dada la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_o(x), & 0 \leq x \leq L. \\ \text{Datos de Contorno,} \end{cases}$$

experimentalmente se conoce que $u(x, t) \rightarrow S(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$. S recibe el nombre de solución estacionaria, y la diferencia $R(x, t) = u(x, t) - S(x)$ recibe el nombre de solución transitoria. Calcular S y R en los casos siguientes:

- a) Datos de contorno $u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B$.
- b) Datos de contorno $u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t)$.
- c) Explicar en cada caso cómo depende S del dato inicial u_0 .

EL PROBLEMA DE CAUCHY

Introducción

Se han visto en el capítulo 3 resultados para el problema de la cuerda vibrante. Nos ocupa ahora el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas. Según se vió en la sección 2.3 la condición necesaria para que el problema de Cauchy no característico esté bien propuesto, es que se verifique la condición de Hadamard. Tal condición se verifica en particular para la ecuación de ondas en cualquier dimensión, como se puede comprobar de manera elemental.

Este capítulo está dedicado a estudiar el problema de Cauchy para la ecuación de ondas. Demostraremos que, en el caso particular de la ecuación de ondas, el problema de Cauchy no característico está bien propuesto. Es decir, en este caso particular, la condición de Hadamard resulta ser también suficiente.

Aunque queda fuera de los límites de este texto, hay que decir que, en general para una ecuación con coeficientes constantes de segundo orden, la condición de Hadamard es necesaria y suficiente para que el problema no característico de Cauchy esté bien propuesto. Es más, en el caso de ecuaciones de orden superior, la condición de Hadamard se toma como definición de hiperbolicidad, es decir, se dice que una ecuación de orden m es hiperbólica si se verifica la condición de Hadamard. Se demuestra entonces un resultado general:

El problema de Cauchy no característico para una ecuación hiperbólica de orden m con coeficientes constantes, está bien propuesto.

Puede verse el resultado anterior en el libro de *S. Mizohata, "The Theory of Partial Differential Equations" Cambridge University Press 1978*, donde está expuesto detalladamente.

El contenido de este capítulo se reduce a estudiar el caso más clásico y también el más concreto e interesante de la ecuación de ondas en una, dos y tres dimensiones espaciales respectivamente. Precisamente, nos planteamos el problema de Cauchy

$$(4.0.1) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = F(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

donde $N = 1, 2, 3$. Estudiaremos en qué condiciones de regularidad sobre los datos hay solución clásica, es decir, con derivadas segundas continuas y verificando la ecuación puntualmente. La organización del capítulo 4 es la siguiente, en la sección 4.1 se estudiará la fórmula de D'Alembert para la ecuación de ondas homogénea en una dimensión espacial. Consecutivamente se estudia el método de medias esféricas para resolver la ecuación de ondas en tres dimensiones espaciales, y el método de descenso de Hadamard para resolverla en dos dimensiones espaciales, en las secciones 4.2 y 4.3, respectivamente. La sección 4.4 se dedica a resolver la ecuación no homogénea por la fórmula de Duhamel. La sección final estudia resultados de unicidad mediante la integral de energía, la velocidad de propagación y el comportamiento que según cada dimensión se observa en la ecuación de ondas.

4.1.- La ecuación de ondas en dimensión uno. Fórmula de D'Alembert.

Consideramos el problema

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

donde suponemos los datos con regularidad suficiente para que podamos efectuar todos los cálculos. Al final precisaremos las condiciones de regularidad que se requieren.

Obsérvese que si tuviéramos la ecuación de ondas con *velocidad de propagación* c , es decir, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, haciendo un cambio de escala en la variable espacial se reduce a la ecuación (4.1.1). (Hágase $y = x/c$).

El método que sigue es debido a D'Alembert y puede resumirse en las siguientes etapas

- i) Mediante un cambio de variables se obtienen *todas* las soluciones de la ecuación.
- ii) Se determina una solución que satisfaga los datos. Se comprueba que hay una única solución.

La idea del cambio de variable a realizar viene sugerida por una sencilla observación. Si suponemos $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$, se tiene

$$(4.1.2) \quad u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u,$$

la idea es considerar nuevas variables \bar{x}, \bar{t} de forma que se verifique

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases}$$

con lo que la ecuación (4.1.2) se convierte en

$$(4.1.4) \quad u_{tt} - u_{xx} = u_{\bar{x}\bar{t}}.$$

Para conseguir (4.1.3) basta tomar el cambio de variables

$$(4.1.5) \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2}(x + t) \\ \bar{t} = \frac{1}{2}(x - t), \end{cases}$$

o bien,

$$(4.1.6) \quad \begin{cases} x = \bar{x} + \bar{t} \\ t = \bar{x} - \bar{t}, \end{cases}$$

Dejamos al cuidado del lector comprobar que se obtiene (4.1.4) haciendo los cambios de variable anteriores.

En resumen, si se parte de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

con el cambio (4.1.6) se pasa a

$$(4.1.7) \quad u_{\bar{x}\bar{t}} = 0,$$

que obviamente tiene por soluciones aquellas funciones tales que

$$u_{\bar{t}} = \Phi(\bar{t}),$$

o bien,

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \int^{\bar{t}} \Phi(s) ds + \Psi(\bar{x}).$$

Es decir, las soluciones de (4.1.7) son de la forma

$$(4.1.8) \quad u(\bar{x}, \bar{t}) = w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{t}),$$

con w_1 y w_2 funciones arbitrarias. Deshaciendo el cambio de variables obtenemos

$$(4.1.9) \quad u(x, t) = w_1(x + t) + w_2(x - t),$$

soluciones de la ecuación de ondas. La expresión (4.1.9) es una suma de *ondas planas*. De $w_1(x + t)$ se dice que es una onda plana progresando a la izquierda con velocidad 1, mientras que $w_2(x - t)$ es una onda plana progresando hacia la derecha, también con velocidad 1. Con esta nomenclatura lo que se obtiene en (4.1.9) es la expresión de las soluciones de la ecuación de ondas como suma de ondas planas.

Para determinar la solución del problema (4.1.1) hemos de determinar w_1 y w_2 tales que

$$(4.1.10) \quad \begin{cases} u(x, 0) = w_1(x) + w_2(x) = f(x) \\ u_t(x, 0) = w_1'(x) - w_2'(x) = g(x), \end{cases}$$

o bien,

$$(4.1.11) \quad \begin{cases} w_1(x) + w_2(x) = f(x) \\ w_1(x) - w_2(x) = \int^x g(s) ds + c, \end{cases}$$

es decir,

$$(4.1.12) \quad \begin{cases} w_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + \int^x g(s) ds + c] \\ w_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - \int^x g(s) ds - c] \end{cases}$$

Sustituyendo en (4.1.9) obtenemos la *fórmula de D'Alembert*

$$(4.1.13) \quad u(x, t) = \frac{f(x + t) + f(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$$

Como puede observarse la fórmula (4.1.13) no depende de la primitiva de g que se tome, por tanto, w_1 y w_2 quedan determinadas de forma única por los datos.

Como consecuencia de los cálculos y consideraciones anteriores podemos formular el siguiente resultado.

4.1.1. Teorema.

Sean $f \in C^2(\mathbf{R})$ y $g \in C^1(\mathbf{R})$, entonces la única solución del problema (4.1.1) viene expresada por la fórmula de D'Alembert

$$(4.1.14) \quad u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

Además $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$ y depende continuamente de los datos iniciales con respecto a la convergencia uniforme sobre compactos.

Demostración.

Es clara la regularidad de u por las hipótesis sobre los datos y la fórmula (4.1.14).

Que u es solución del problema (4.1.1) resulta del cálculo que se ha hecho para obtenerla. Puede comprobarse también derivando directamente y sustituyendo en la ecuación. La unicidad es consecuencia de estar determinadas w_1 y w_2 de forma única a partir de los datos.

Estableceremos la dependencia continua respecto a los datos. Supongamos que se tienen datos \bar{f}, \bar{g} tales que

$$(4.1.15) \quad \begin{cases} f(x) - \bar{f}(x) = 0, & x \notin [a, b] \\ g(x) - \bar{g}(x) = 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

y

$$(4.1.16) \quad \begin{cases} |f(x) - \bar{f}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |b-a|}, & x \in [a, b] \\ |g(x) - \bar{g}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |b-a|}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Considerando las correspondientes soluciones u y \bar{u} dadas por la fórmula de D'Alembert, se tiene

$$(4.1.17) \quad \begin{aligned} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| &\leq \\ &\leq \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - (\bar{f}(x+t) + \bar{f}(x-t))}{2} \right| + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |g(s) - \bar{g}(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{1 + |b-a|} + \frac{\varepsilon}{1 + |b-a|} |b-a| = \varepsilon, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. \square

La primera observación que resulta del teorema (4.1.1) es que la solución no mejora la regularidad de los datos.

De otra parte, si fijamos (x_0, t_0) , punto del *espacio-tiempo*, la fórmula de D'Alembert establece que el valor de la solución en dicho punto, $u(x_0, t_0)$, depende *exclusivamente*

de los valores de los datos en el intervalo cerrado $\mathcal{A}(x_0, t_0) = [x_0 - |t_0|, x_0 + |t_0|]$ del eje $t = 0$. A $\mathcal{A}(x_0, t_0)$ se le llama *dominio de dependencia* del punto (x_0, t_0) .

Si ahora consideramos el intervalo cerrado $I = [a, b]$ del eje $t = 0$, los puntos del *espacio-tiempo* en los cuales el valor de la solución de la ecuación de ondas depende del valor de los datos sobre I , viene dado por

$$\mathcal{B}(I) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2 \mid x + t \in [a, b] \text{ ó } x - t \in [a, b]\}.$$

A la región $\mathcal{B}(I)$ la llamaremos *dominio de influencia* del intervalo I . La frontera de $\mathcal{B}(I)$ en $t > 0$ está formada por las semirrectas $x - t = b$ y $x + t = a$. Siendo simétrico el dominio de influencia respecto al eje $t = 0$, la frontera en $t < 0$ resulta ser $x - t = a$, $x + t = b$. Es decir, la frontera la podemos escribir como $x + |t| = a$, $x - |t| = b$. Dicha frontera está formada por rectas características, de acuerdo con lo estudiado en la sección 2.3.

La forma que tiene el dominio de influencia se traduce en que la velocidad de propagación de las ondas es finita, más precisamente, en nuestro caso es uno.

Para entender mejor esta afirmación supongamos que I se reduce a un punto, es decir, $I \equiv \{x_0\}$, $t = 0$. Entonces en t_0 unidades de tiempo, la señal producida por los datos en x_0 ha llegado a los puntos del intervalo de la recta $t = t_0$ común al dominio de influencia del punto x_0 , es decir, $\mathcal{B}(x_0) \cap \{t = t_0\}$. Pero según la frontera obtenida para el dominio de influencia, tal intervalo es hacia la izquierda $[x_0 - t_0, x_0]$ y hacia la derecha $[x_0, x_0 + t_0]$. Entonces

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{t_0}{t_0} = 1.$$

Estas observaciones sobre la fórmula de D'Alembert concuerdan con la experiencia física en el estudio de la luz y el sonido. Más adelante volveremos sobre estos aspectos.

4.2.-La ecuación de ondas en dimensión espacial tres. Método de las medias esféricas.

Estudiamos el problema de Cauchy

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

donde a f y g se les supone por el momento regularidad suficiente para que los cálculos puedan llevarse a término. Al final precisaremos las hipótesis de regularidad de los datos para que la solución sea clásica.

Seguramente la experiencia física de que las ondas *se propagan esféricamente*, sugirió a Poisson el método para resolver el problema (4.2.1) que estudiamos detalladamente a continuación. La idea conductora del método es buscar una expresión de la solución que permita usar la fórmula de D'Alembert unidimensional estudiada en la sección previa.

Supongamos que $u(x, t)$ es una solución de (4.2.1) y fijemos $x \in \mathbf{R}^3$ y $r > 0$. Integremos la ecuación en la bola centrada en x y con radio r , es decir, en $|x - y| \leq r$,

$$(4.2.2) \quad \int_{|x-y| \leq r} u_{tt}(y, t) dy = \int_{|x-y| \leq r} \Delta u(y, t) dy.$$

Utilizando el teorema de la divergencia obtenemos

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \int_{|x-y| \leq r} \Delta u(y, t) dy &= \int_{|x-y|=r} u_\nu(y, t) d\sigma(y) = \\ &= \int_{|x-y|=r} \left(\sum_1^3 u_{x_i}(y, t) \nu_i \right) d\sigma(y) = \int_{|\nu|=1} \left(\sum_1^3 u_{x_i}(x + r\nu, t) \nu_i \right) d\sigma(r\nu) = \\ &= r^2 \int_{|\nu|=1} \left(\sum_1^3 u_{x_i}(x + r\nu, t) \nu_i \right) d\omega = r^2 \int_{|\nu|=1} u_r(x + r\nu, t) d\omega, \end{aligned}$$

ya que la medida sobre la esfera de radio r , $d\sigma(y)$, viene expresada por $d\sigma(y) = r^2 d\omega$, donde $d\omega$ es el elemento de área en la esfera unidad y ν es la normal exterior.

Por otro lado, el término de la izquierda en (4.2.2) se calcula pasando a coordenadas polares

$$(4.2.4) \quad \int_{|x-y| \leq r} u_{tt}(y, t) dy = \int_0^r \rho^2 \int_{|\nu|=1} u_{tt}(x + \rho\nu, t) d\omega d\rho.$$

De (4.2.3) y (4.2.4) se obtiene que (4.2.2) puede escribirse

$$(4.2.5) \quad \int_0^r \rho^2 \int_{|\nu|=1} u_{tt}(x + \rho\nu, t) d\omega d\rho = r^2 \int_{|\nu|=1} u_r(x + r\nu, t) d\omega.$$

Derivando en (4.2.5) respecto a r resulta

$$(4.2.6) \quad \begin{aligned} r^2 \int_{|\nu|=1} u_{tt}(x + r\nu, t) d\omega &= \\ &= 2r \int_{|\nu|=1} u_r(x + r\nu, t) d\omega + r^2 \int_{|\nu|=1} u_{rr}(x + r\nu, t) d\omega, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 (4.2.7) \quad & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x + r\nu, t) d\omega \right) = \\
 & = 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x + r\nu, t) d\omega \right) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x + r\nu, t) d\omega \right) = \\
 & = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x + r\nu, t) d\omega \right).
 \end{aligned}$$

Llamando

$$(4.2.8) \quad \mathcal{M}u(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x + r\nu, t) d\omega,$$

media sobre la esfera de radio r de u , en el punto x y el instante t , la expresión (4.2.7) se traduce en

$$(4.2.9) \quad (r\mathcal{M}u)_{tt} - (r\mathcal{M}u)_{rr} = 0,$$

que es la ecuación de ondas en una dimensión. Es decir, fijado $x \in \mathbf{R}^3$ el producto del radio por las medias esféricas, $r\mathcal{M}u$, de una solución u de (4.2.1), verifica la ecuación de ondas respecto a las variables r y t . Por consiguiente, podemos expresar $r\mathcal{M}u$ como suma de ondas planas de acuerdo con lo estudiado en la sección anterior, es decir,

$$(4.2.10) \quad r\mathcal{M}u(x, r, t) = w_1(x, r + t) + w_2(x, r - t).$$

En particular, si tomamos límites para $r \rightarrow 0$

$$(4.2.11) \quad 0 = w_1(x, t) + w_2(x, -t),$$

o bien,

$$(4.2.12) \quad -w_1(x, t) = w_2(x, -t),$$

por lo que (4.2.10) se convierte en

$$(4.2.13) \quad r\mathcal{M}u(x, r, t) = w_1(x, r + t) - w_1(x, t - r).$$

Derivando en (4.2.13) respecto a la variable r resulta

$$(4.2.14) \quad \mathcal{M}u(x, r, t) + r(\mathcal{M}u)_r(x, r, t) = w'_1(x, r + t) + w'_1(x, t - r),$$

y tomando límites de nuevo para $r \rightarrow 0$ en (4.2.14), se obtiene

$$(4.2.15) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{M}u(x, r, t) = 2w'_1(x, t).$$

Pero si se supone que u es continua se tiene también

$$(4.2.15) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{M}u(x, r, t) = u(x, t),$$

luego (4.2.15) nos permite recuperar la solución u en términos de la onda plana w_1 , es decir,

$$(4.2.16) \quad u(x, t) = 2w'_1(x, t).$$

La idea que se sugiere ahora de forma natural es intentar determinar $w'_1(x, t)$ a partir de los datos iniciales del problema (4.2.1). Pero de (4.2.13), se concluyen las dos identidades siguientes

$$(4.2.17) \quad \begin{cases} (r\mathcal{M}u)_r(x, r, t) = w'_1(x, r+t) + w'_1(x, t-r) \\ (r\mathcal{M}u)_t(x, r, t) = w'_1(x, r+t) - w'_1(x, t-r), \end{cases}$$

o bien,

$$(4.2.18) \quad (r\mathcal{M}u)_r(x, r, t) + (r\mathcal{M}u)_t(x, r, t) = 2w'_1(x, r+t).$$

Pero si ahora se toman límites en (4.2.18) para $t \rightarrow 0$, resulta

$$(4.2.19) \quad \begin{aligned} 2w'_1(x, r) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u(x + r\nu, 0) d\omega \right) + \frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} u_t(x + r\nu, 0) d\omega = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} f(x + r\nu) d\omega \right) + \frac{r}{4\pi} \int_{|\nu|=1} g(x + r\nu) d\omega. \end{aligned}$$

Como (4.2.19) determina w'_1 en función de los datos iniciales y (4.2.16) expresa u en términos de w'_1 , podemos escribir

$$(4.2.20) \quad u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} f(x + t\nu) d\omega \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} g(x + t\nu) d\omega.$$

A la vista de la anterior expresión es natural requerir que $f \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}^3)$ y $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3)$ si se quiere obtener $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R})$, en este sentido podemos enunciar el resultado central de esta sección.

4.2.1. Teorema.

Sean $f \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}^3)$ y $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3)$, entonces la función $u(x, t)$ definida por (4.2.20) tiene segundas derivadas continuas y es la solución del problema de Cauchy (4.2.1).

Además la solución del problema (4.2.1) depende continuamente de los datos con respecto a la convergencia uniforme sobre compactos de los datos y de sus primeras derivadas.

Demostración.

Una vez hecha la construcción de $u(x, t)$ por la fórmula (4.2.20), sólo queda comprobar que, en efecto, es solución del problema (4.2.1). En primer lugar se tiene que u satisface los datos iniciales pues

$$(4.2.21) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \\ \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} f(x + t\nu) d\omega + \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \langle \nabla f(x + t\nu), \nu \rangle d\omega + \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} g(x + t\nu) d\omega \right\} &= \\ &= f(x), \end{aligned}$$

por la regularidad de f y g . Y también

$$(4.2.22) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u_t(x, t) &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} g(x + t\nu) d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \langle \nabla f(x + t\nu), \nu \rangle d\omega \right\} + \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} t \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{|\nu|=1} f(x + t\nu) d\omega \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|\nu|=1} g(x + t\nu) d\omega \right) \right\} = \\ &= g(x), \end{aligned}$$

por la continuidad de los datos iniciales y de sus derivadas parciales y porque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \langle \nabla f(x + t\nu), \nu \rangle d\omega = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 (f_{x_i}(x) \int_{|\nu|=1} \nu_i d\omega) = 0,$$

ya que las componentes de la normal en la esfera son funciones impares y entonces su integral se anula.

Para ver que es solución basta notar que si $h \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^3)$ y definimos

$$v(x, t) = t\bar{M}h(x, t),$$

donde

$$(4.2.23) \quad \bar{M}h(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} h(x + t\nu) d\omega,$$

entonces, $v(x, t)$ es solución de la ecuación de ondas. Pero

$$(4.2.24) \quad v_{tt}(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}h(x, t) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{M}h(x, t).$$

Calcularemos ahora Δv ; para ello observemos que

$$(4.2.25) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y| \leq t} \Delta h(y) dy = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} h_\nu(y) d\sigma(y) = \\ & = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y|=t} \sum_1^3 h_{x_i}(y) \nu_i d\sigma(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \sum_1^3 h_{x_i}(x + t\nu) \nu_i d\omega = \\ & \frac{\partial}{\partial t} \bar{M}h(x, t), \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el teorema de la divergencia y que $d\sigma(y) = t^2 d\omega$.

Pero el primer término de (4.2.25) se calcula también pasando a coordenadas polares y resulta

$$(4.2.26) \quad \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-y| \leq t} \Delta h(y) dy = \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \int_{|x-y|=\rho} \Delta h(y) d\sigma(y)$$

Por tanto, de (4.2.25) y de (4.2.26) se concluye

$$(4.2.27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{M}h(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \int_{|x-y|=\rho} \Delta h(y) d\sigma(y) = \\ &= \frac{-1}{2\pi t^3} \int_0^t \int_{|x-y| \leq t} \Delta h(y) dy + \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \int_{|x-y|=t} \Delta h(y) d\sigma(y). \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo (4.2.25) y (4.2.27) en (4.2.24) se tiene

$$v_{tt} = \Delta v,$$

como queríamos demostrar.

La conclusión de que u es solución de la ecuación de ondas es consecuencia de ser suma de medias esféricas, como v .

La dependencia continua resulta como sigue. Supongamos datos f, g y \bar{f}, \bar{g} , y sean u y \bar{u} las respectivas soluciones. Supondremos que

- a) $f(x) = \bar{f}(x)$ y $g(x) = \bar{g}(x)$ en $x \in \mathbf{R}^N - B(0, R)$.
- b) Para $T > 0$ dado $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{3+T}, \quad |\nabla f(x) - \nabla \bar{f}(x)| < \frac{\varepsilon}{3+T}, \quad |g(x) - \bar{g}(x)| < \frac{\varepsilon}{3+T}.$$

Entonces a partir de (4.2.20), obtenemos

$$|u(x, t) - \bar{u}(x, t)| \leq \varepsilon.$$

□

La lectura de la fórmula (4.2.20) da información sobre propiedades de velocidad de propagación. Estos y otros extremos serán discutidos en la sección 4.5 siguiente.

4.3.- El problema de Cauchy en dimensión espacial dos. Método de descenso de Hadamard.

Una vez resuelto el problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensión espacial 3, nos ocupamos en esta sección de obtener fórmulas explícitas para la solución del problema

$$(4.3.1) \quad \begin{cases} u_{tt}(x_1, x_2, t) - \Delta u(x_1, x_2, t) = 0, & (x_1, x_2, t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \\ u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \\ u_t(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

La idea para obtener la solución de (4.3.1) en función de los datos es sencilla y debida a J. Hadamard. De forma precisa es la siguiente.

Se consideran los datos en (4.3.1) como funciones definidas en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, independientes de x_3 , es decir,

$$(4.3.2) \quad \begin{cases} \tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) \\ \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2), \end{cases}$$

y se calcula la solución de la ecuación de ondas en tres dimensiones espaciales con los datos (4.3.2). Tal solución viene dada por la fórmula (4.2.20)

Es decir, partimos de la expresión

$$(4.3.3) \quad v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \tilde{f}(x + t\nu) d\omega \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} \tilde{g}(x + t\nu) d\omega.$$

La no dependencia de \tilde{f} y \tilde{g} de la variable x_3 , motiva que v sea independiente de x_3 , en particular entonces, $v_{x_3 x_3} = 0$. Por tanto, v es solución de la ecuación del problema (4.3.1).

Con estas ideas, la solución de (4.3.1) viene expresada por

$$(4.3.4) \quad \begin{aligned} u(x_1, x_2, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|^2=1} \tilde{f}(x_1 + t\nu_1, x_2 + t\nu_2, x_3 + t\nu_3) d\omega \right) + \\ & \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|^2=1} \tilde{g}(x_1 + t\nu_1, x_2 + t\nu_2, x_3 + t\nu_3) d\omega, \end{aligned}$$

y vamos a expresar las medias esféricas tridimensionales en términos bidimensionales.

Para ello observemos que, por ejemplo,

$$(4.3.5) \quad \frac{t}{4\pi} \int_{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1} f(x_1 + t\nu_1, x_2 + t\nu_2) d\omega = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \tilde{f}(y) d\sigma(y).$$

En consecuencia hemos de integrar sobre la esfera

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + y_3^2 = t^2$$

Por tanto, escribiendo

$$y_3 = \pm \sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2},$$

el elemento de área es

$$d\sigma(y) = \frac{tdy_1 dy_2}{(t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2)^{1/2}}.$$

Llamando $|\bar{x} - \bar{y}| = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$ se tiene que (4.3.5) se transforma en

$$\frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \tilde{f}(y) d\sigma(y) = \frac{2}{4\pi t} \int_{|\bar{x}-\bar{y}|\leq t} f(y_1, y_2) \frac{tdy_1 dy_2}{(t^2 - |\bar{x} - \bar{y}|^2)^{1/2}}.$$

Con este planteamiento podemos formular el teorema de existencia y unicidad para dimensión espacial dos que se obtiene gratuitamente del teorema (4.2.1).

4.3.1. Teorema.

Sean $f \in \mathcal{C}^3(\mathbf{R}^2)$ y $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$, entonces la solución única del problema (4.3.1) viene dada por la expresión siguiente

$$(4.3.7) \quad u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|\bar{x}-\bar{y}|\leq t} \frac{f(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(t^2 - |\bar{x} - \bar{y}|^2)^{1/2}} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_{|\bar{x}-\bar{y}|\leq t} \frac{g(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(t^2 - |\bar{x} - \bar{y}|^2)^{1/2}}.$$

Además la solución depende continuamente de los datos en el mismo sentido que en el teorema (4.2.1).

El método de Hadamard que hemos estudiado se conoce como *método de descenso*, nombre que resulta ahora transparente. Lo que quiere decir es que resolviendo la ecuación en dimensión 3, se puede "descender" a dimensión dos por simple reinterpretación de las fórmulas explícitas. Este método se aplica en todas las dimensiones pares. De hecho, se resuelve el problema de Cauchy en las dimensiones impares y a partir de dichas soluciones se obtiene la solución en dimensiones pares por el método de Hadamard. Las demás propiedades que pueden concluirse de (4.3.7) se estudiarán en la sección 4.5.

4.4.-La ecuación de ondas no homogénea.

Se considera el problema

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = w(x, t) & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

donde $w \in C^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$ y $N = 1, 2$ o 3 .

Es evidente que si se resuelve el problema (4.4.1), con los resultados de las secciones anteriores y la linealidad de la ecuación, se habrá resuelto el problema general

$$(4.4.2) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = w(x, t) & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

La idea de como obtener la solución de (4.4.1) es sugerida por el método de variación de las constantes de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, que se ve complicado aquí por el hecho de que el espacio de soluciones de la ecuación homogénea no es de dimensión finita. Desde un punto de vista físico se puede obtener el método por la siguiente idea: *Puesto que el impulso, es decir, la fuerza por unidad de tiempo, es igual a la masa por la velocidad, o cantidad de movimiento, entonces la solución del problema (4.4.1) parece que debe poder expresarse como una "suma" de soluciones de los problemas*

$$(4.4.3) \quad \begin{cases} v_{tt}(x, t, s) - \Delta v(x, t, s) = 0 \\ v(x, s, s) = 0, \\ v_t(x, s, s) = w(x, s). \end{cases}$$

Esta estrategia es la seguida por Duhamel y la recogemos en el siguiente resultado.

4.4.1. Teorema.

Sea $w \in C^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$, entonces la solución de (4.4.1) es

$$(4.4.4) \quad u(x, t) = \int_0^t v(x, t, s) ds,$$

siendo $v(x, t, s)$ la solución de (4.4.3).

Demostración.

Se tiene evidentemente que $u(x, 0) = 0$ y

$$(4.4.5) \quad u_t(x, t) = v(x, t, t) + \int_0^t v_t(x, t, s) ds = \int_0^t v_t(x, t, s) ds,$$

por ser v solución de (4.4.3), entonces también se tiene que $u_t(x, 0) = 0$. Por otro lado, derivando respecto a t en (4.4.5) resulta

$$(4.4.6) \quad \begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= v_t(x, t, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, s) ds = \\ &= w(x, t) + \int_0^t \Delta v(x, t, s) ds = w(x, t) + \Delta \left(\int_0^t v(x, t, s) ds \right) = \\ &= w(x, t) + \Delta u(x, t), \end{aligned}$$

es decir, u es solución. \square

Como tenemos fórmulas precisas para los problemas (4.4.3) en dimensiones $N = 1, 2$ y 3 , podemos obtener explícitamente la solución de (4.4.1). Haremos una primera observación que simplificará los cálculos posteriores. Como la ecuación de ondas es invariante por traslaciones, si se define $U(x, t, s) = v(x, t + s, s)$, entonces se verifica

$$(4.4.7) \quad \begin{cases} U_{tt}(x, t, s) - \Delta U(x, t, s) = 0 \\ U(x, 0, s) = 0, \\ U_t(x, 0, s) = w(x, s). \end{cases}$$

Por tanto, en virtud de (4.1.14), (4.3.7) y (4.2.20), respectivamente, se tiene

$$(4.4.8) \quad U(x, t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w(y, s) dy, & \text{si } N = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{w(y, s) dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}, & \text{si } N = 2 \\ \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} w(y, s) d\sigma(y), & \text{si } N = 3. \end{cases}$$

Según el teorema (4.4.1) ha de ser

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, s) ds \equiv \int_0^t U(x, t-s, s) ds$$

y entonces la fórmula para la solución de (4.4.1) de acuerdo con la dimensión es

$$(4.4.9) \quad u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} w(y, s) dy ds, & \text{si } N = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left(\int_{|x-y| \leq (t-s)} \frac{w(y, s) dy}{\sqrt{(t-s)^2 - |x-y|^2}} \right) ds, & \text{si } N = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left(\frac{1}{t-s} \int_{|x-y|=(t-s)} w(y, s) d\sigma(y) \right) ds, & \text{si } N = 3. \end{cases}$$

Incidiremos en la sección siguiente en lo referente a la unicidad y otras propiedades.

4.5.- Energía y unicidad.

Dependencia de la ecuación de ondas de la dimensión.

Consideramos el problema

$$(4.5.1) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad N = 1, 2, 3, \end{cases}$$

y supongamos que f y g verifican las hipótesis de regularidad de los teoremas de existencia probados en las secciones anteriores, y que tienen soporte compacto, es decir, son cero fuera de una bola $B(0, R)$.

De acuerdo con las fórmulas explícitas obtenidas para la solución $u(x, t)$ de (4.5.1) el soporte de u satisface para cada t fijo

$$\text{sopu}(x, t) \subset B(0, R + |t|).$$

Si se multiplica la ecuación por u_t se tiene

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} 0 &= u_t(u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t)) = \frac{1}{2}(u_t)_t^2 + \frac{1}{2} \sum_1^N |u_{x_i}|_t^2 - \sum_1^N (u_{x_i} u_t)_{x_i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \{u_t^2 + |\nabla_x u|^2\} - \text{div} \{(u_{x_i} u_t)_{i=1, \dots, N}\}, \end{aligned}$$

donde ∇_x denota el gradiente respecto a las variables espaciales. Integrando (4.5.2) sobre una bola $B(0, \rho) \subset \mathbf{R}^N$ con $\rho > R + |t_0|$ para t_0 fijado

$$(4.5.3) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_{B(0, \rho)} \frac{\partial}{\partial t} \{u_t^2(x, t_0) + |\nabla_x u(x, t_0)|^2\} dx - \\ &\quad - \int_{B(0, \rho)} \text{div} \{(u_{x_i}(x, t_0) u_t(x, t_0))_{i=1, \dots, N}\} dx, \end{aligned}$$

llamando $S(0, \rho)$ a la frontera de la bola $B(0, \rho)$ y ν a su normal exterior, por el teorema de la divergencia obtenemos

$$(4.5.4) \quad \begin{aligned} & - \int_{B(0, \rho)} \text{div} \{(u_{x_i}(x, t_0) u_t(x, t_0))_{i=1, \dots, N}\} dx = \\ &= - \int_{S(0, \rho)} \langle (u_{x_i}(x, t_0) u_t(x, t_0))_{i=1, \dots, N}, \nu \rangle d\sigma \rightarrow 0, \quad \text{para } \rho \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

en efecto, la integral es cero si $\rho > R + |t_0|$. Por tanto, a partir de (4.5.3) y (4.5.4) se concluye

$$(4.5.5) \quad 0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{B(0,\rho)} \{u_t^2(x, t_0) + |\nabla_x u(x, t_0)|^2\} dx.$$

La expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{B(0,\rho)} \{u_t^2(x, t_0) + |\nabla_x u(x, t_0)|^2\} dx,$$

representa la *energía*, de forma que (4.5.5) se traduce diciendo que *la energía es constante en el tiempo*, o bien que

$$(4.5.6) \quad \mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_{B(0,\rho)} \{|g(x)|^2 + |\nabla_x f(x)|^2\} dx.$$

Es evidente que el resultado que acabamos de obtener sobre la *conservación de la energía*, implica la *unicidad de solución del problema de Cauchy*

$$(4.5.7) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = w(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad N = 1, 2, 3. \end{cases}$$

En efecto, si hubiese dos soluciones u_1, u_2 de (4.5.7), la diferencia $v = u_1 - u_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad N = 1, 2, 3, \end{cases}$$

y según (4.5.6)

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_{B(0,\rho)} \{|v_t(x, 0)|^2 + |\nabla_x v(x, 0)|^2\} dx = 0,$$

de donde, $v_t(x, t) = 0$ y $\nabla_x v(x, t) = 0$, es decir, v es constante y como $v(x, 0) = 0$, $v(x, t) \equiv 0$, o bien, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

Observamos que el argumento anterior sigue siendo válido en cualquier dimensión y para cualquier solución con energía finita.

Por el mismo tipo de técnica que hemos usado para establecer la unicidad, vamos a analizar lo relativo a la velocidad de propagación de las ondas. Este estudio nos dará las bases para estudiar también el comportamiento de la propagación de las ondas según la dimensión.

4.5.1. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^N \times [0, T])$ y tal que $u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ sobre la región $\mathbf{R}^N \times [0, T]$. Supongamos que $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ sobre

$$B = \{(x, 0) \mid |x - x_0| \leq t_0\}, \quad \text{para algún } t_0 \in (0, T).$$

Entonces $u \equiv 0$ sobre la región cónica

$$\mathcal{C} = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq t_0, \quad |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

Demostración.

Para $0 < t_1 < t_0$ consideramos el tronco de cono

$$\mathcal{C}_{t_1} = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq t_1, \quad |x - x_0| \leq t_0 - t\}.$$

Integramos la identidad $0 = u_t(u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t))$ sobre \mathcal{C}_{t_1} , es decir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}_{t_1}} u_t(\Delta u - u_{tt}) dx dt = \\ (4.5.8) \quad &= \int_{\mathcal{C}_{t_1}} \left(\sum_1^N (u_{x_i} u_t)_{x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \{|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2\} \right) dx dt, \end{aligned}$$

y aplicando el teorema de Gauss se tiene

$$(4.5.9) \quad 0 = \int_S \left(-\frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2) \nu_0 + \sum_1^N u_{x_i} u_t \nu_i \right) d\sigma(y) - \int_{B_{t_1}} \frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2) dx,$$

siendo B_{t_1} el círculo superior del tronco de cono, S es la superficie lateral, $d\sigma(y)$ es el elemento de área en S y $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_N)$ es la normal unitaria exterior a S . Obsérvese que la base del tronco de cono no aparece en (4.5.9) por suponerse los datos nulos en $t = 0$.

Calcularemos la integral sobre la superficie lateral S . En primer término se tiene que $\nu = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \nu_1, \dots, \nu_N)$ y entonces $\sum_1^N \nu_i^2 = 1 - \nu_0^2 = \frac{1}{2}$; en segundo lugar si I_S designa la integral sobre S en (4.5.9) se tiene

$$\begin{aligned} (4.5.10) \quad I_S &\equiv \int_S \left\{ -\frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2) \nu_0 + \sum_1^N u_{x_i} u_t \nu_i \right\} d\sigma(y) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_S \left\{ u_t^2 (\nu_0^2 - \sum_1^N \nu_i^2) + \frac{1}{\nu_0} \sum_1^N (u_{x_i} \nu_0 - u_t \nu_i)^2 \right\} d\sigma(y) \leq 0 \end{aligned}$$

como resulta evidente por ser suma de cuadrados. De esta forma (4.5.10) y (4.5.9) permiten concluir

$$(4.5.11) \quad 0 = \frac{1}{2} \int_{B_{t_1}} (|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2) dx.$$

La regularidad de u y (4.5.11) implican que $u_t(x, t_1) = 0$ y $\nabla_x u(x, t_1) = 0$ para cualquier $x \in B_{t_1}$ y cualquier $0 < t_1 < T$. Por tanto u es constante en la región cónica \mathcal{C} y como en la base de \mathcal{C} , es decir, sobre $t = 0$ y $x \in B$, $u(x, 0) \equiv 0$, resulta $u(x, t) \equiv 0$ para $(x, t) \in \mathcal{C}$. \square

El resultado anterior pone de manifiesto que dados los datos en la bola B la solución queda *únicamente* determinada en el cono \mathcal{C} .

Daremos las definiciones que nos permitan enunciar precisamente los términos en la discusión posterior.

4.5.2. Definición.

- i) Dada una bola $B = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x - x_0| \leq r\}$ el dominio de determinación $\mathcal{C}(x_0, r)$ es el conjunto de puntos $(x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ para los que se determina de manera única la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas con datos en B .
- ii) Dada una bola B en el plano $t = 0$ llamamos dominio de influencia de B al conjunto de puntos en $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ en los que el valor de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas depende de los datos en B . Lo notaremos por $\mathcal{B}(B)$.

4.5.3. Definición.

Dado un punto $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ el dominio de dependencia $\mathcal{A}_N(x_0, t_0)$ es el conjunto de puntos $(x, 0) \in \mathbf{R}^N \times \{0\}$ tales que la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en el punto (x_0, t_0) depende de los valores de los datos en $\mathcal{A}_N(x_0, t_0)$.

El teorema anterior junto con las fórmulas (4.1.14), (4.2.20) y (4.3.7), permiten determinar $\mathcal{C}(x_0, r)$ como el doble cono

$$\mathcal{C}(x_0, r) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \mid |x - x_0| \leq r - |t|\}, \quad N = 1, 2, 3$$

A las superficies cónicas

$$S(x_0, r) = \{(x, t) \mid |x - x_0| = r - |t|\},$$

se les llama *conos característicos* por coincidir con las características de la ecuación de ondas estudiadas en la sección 2.3. En otras palabras, los conos característicos son las fronteras de los dominios de determinación.

De esta forma dada una bola B en el plano $t = 0$, el dominio de influencia $\mathcal{B}(B)$ es el conjunto de $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ tal que los conos característicos con vértice en $\mathcal{B}(B)$ cortan a B .

El mismo cálculo hecho para la ecuación de ondas en una dimensión en la sección 4.1, demuestra en general que la *velocidad de propagación es 1*.

De nuevo consideramos las fórmulas (4.1.14), (4.2.20) y (4.3.7). Se aprecia una diferencia sustancial entre lo que ocurre en dimensiones 1 y 2 y lo que ocurre en dimensión 3. En efecto, en el caso de dimensiones $N = 1$ y $N = 2$ el dominio de dependencia de un punto (x_0, t_0) es

$$\mathcal{A}_N(x_0, t_0) = \{(x, 0) \mid |x - x_0| \leq |t_0|\}, \quad N = 1, 2,$$

mientras que en dimensión $N = 3$ el dominio de dependencia es

$$\mathcal{A}_3(x_0, t_0) = \{(x, 0) \mid |x - x_0| = |t_0|\}.$$

En dimensión espacial tres resulta que *el dominio de dependencia es la intersección del cono característico con el plano $t = 0$* , es decir, si tomamos el cono característico $S_3(x_0, |t_0|)$ con vértice en (x_0, t_0) , se tiene

$$(4.5.12) \quad \mathcal{A}_3(x_0, t_0) = S_3(x_0, |t_0|) \cap \{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}^3\}.$$

Por el contrario en dimensiones 1 y 2 el dominio de dependencia es toda la bola y la intersección del cono característico con $t = 0$ es sólo la frontera de $\mathcal{A}_1(x_0, t_0)$ y $\mathcal{A}_2(x_0, t_0)$ en \mathbf{R} y \mathbf{R}^2 , respectivamente.

La propiedad que expresa (4.5.12) se refiere diciendo que la ecuación de ondas en dimensión 3 satisface el *principio fuerte de Huygens*. Así pues la ecuación de ondas en dimensiones 1 y 2 *no* satisface el principio fuerte de Huygens.

Analizaremos que significa el principio fuerte de Huygens. Supongamos los datos en el problema de Cauchy (4.5.1) soportados en una bola $B \subset \mathbf{R}^N$.

En el caso de no verificarse el principio fuerte de Huygens, el dominio de influencia de una bola B es el tronco de cono con base B y superficie lateral generada por las características pasando por la frontera de B . Esto quiere decir que si tomamos un punto $x_0 \in \mathbf{R}^N$ existe un tiempo t_0 en el cual el dominio de determinación $\mathcal{C}(x_0, t_0)$ corta a B en $t = 0$. Pero entonces es claro que a partir de ese instante continúa verificándose que $\mathcal{C}(x_0, t)$ corta a B si $t > t_0$. En este sentido una propagación de ondas en dimensiones 1 y 2 con señal inicial de soporte compacto, tiene la propiedad que cuando la perturbación alcanza un punto permanece perturbándole para todo tiempo posterior. Piénsese en las ondas de agua de un estanque como ejemplo. Si el agua vuelve al reposo es por rozamiento y otras perturbaciones externas.

Si se verifica el principio fuerte de Huygens, es decir si estamos en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$, y se toma un punto $x_0 \in \mathbf{R}^3$ entonces los tiempos t que verifican que el cono característico con vértice en (x_0, t) interseca B es un intervalo acotado como se comprueba fácilmente. Esto quiere decir que el dominio de influencia de una bola B es el tronco de cono con base B , menos un cono interior.

Es decir, en tres dimensiones espaciales una perturbación de soporte compacto, llega a cada punto y después de un tiempo desaparece. El principio de Huygens fuerte permite que puedan emitirse sonidos y que posteriormente se vuelva al silencio.

¿Puede imaginar el lector un espacio físico sin principio de Huygens?

Consideramos de nuevo el problema de Cauchy

$$(4.5.13) \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^N. \quad N = 1, 2, 3, \end{cases}$$

Utilizaremos la transformada de Fourier y las propiedades que para ella se han establecido en la sección 3.6.

Definiendo

$$v(\xi, t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} u(x, t) dx,$$

transformada de Fourier de u respecto a la variable espacial para t fijo,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \text{y} \quad \hat{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} g(x) dx,$$

transformadas de Fourier de f y g respectivamente, se verifica para cada $\xi \in \mathbf{R}^N$

$$(4.5.14) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} v(\xi, t) + 4\pi |\xi|^2 v(\xi, t) = 0 \\ v(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \\ \frac{d}{dt} v(\xi, 0) = \hat{g}(\xi). \end{cases}$$

Las soluciones de (4.5.14) son combinaciones lineales de soluciones de los problemas,

$$(4.5.15) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} v_1(\xi, t) + 4\pi |\xi|^2 v_1(\xi, t) = 0 \\ v_1(\xi, 0) = 0 \\ \frac{d}{dt} v_1(\xi, 0) = 1, \end{cases}$$

y

$$(4.5.16) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} v_2(\xi, t) + 4\pi |\xi|^2 v_2(\xi, t) = 0 \\ v_2(\xi, 0) = 1 \\ \frac{d}{dt} v_2(\xi, 0) = 0, \end{cases}$$

es decir, de

$$\{v_1(\xi, t), v_2(\xi, t)\} = \left\{ \frac{\operatorname{sen}(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|}, \cos(2\pi t|\xi|) \right\}$$

Entonces la solución de (4.5.14) se escribe como

$$(4.5.17) \quad v(\xi, t) = \hat{g}(\xi) \frac{\operatorname{sen}(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|} + \hat{f}(\xi) \cos(2\pi t|\xi|).$$

Observamos que

$$\frac{d}{dt} v_1(\xi, t) = \cos(2\pi t|\xi|),$$

por lo que llamando

$$(4.5.18) \quad E(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{\operatorname{sen}(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|} d\xi,$$

se tiene

$$(4.5.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \cos(2\pi t|\xi|) d\xi.$$

Entonces teniendo en cuenta (4.5.17) y las propiedades de la transformada de Fourier se tiene que la solución de (4.5.13) es

$$(4.5.20) \quad u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial t} E(x - y, t) f(y) dy + \int_{\mathbf{R}^N} E(x - y, t) g(y) dy$$

Todos los cálculos anteriores pueden justificarse si, por ejemplo, se supone que

$$f(x), g(x), |\nabla g(x)| \in L^2(\mathbf{R}^N).$$

El paso de (4.5.20) a (4.1.14) exige calcular de forma explícita $E(x, t)$. En el caso de dimensión 1 se puede hacer elementalmente.

Se trata de calcular la antitransformada de Fourier (4.5.18). Para ello tendremos en cuenta que

$$(4.5.21) \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

Por un argumento sobre la paridad de la función

$$\begin{aligned} (4.5.22) \quad E(x, t) &= \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi i x \xi} \frac{\operatorname{sen}(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|} d\xi = \\ &= 2 \int_0^\infty \cos(2\pi x \xi) \frac{\operatorname{sen}(2\pi t \xi)}{2\pi \xi} d\xi = \\ &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2\pi(x+t)\xi) + \operatorname{sen}(2\pi(t-x)\xi)}{2\pi \xi} d\xi = \\ &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2\pi(x+t)\xi)}{2\pi \xi} d\xi + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(2\pi(t-x)\xi)}{2\pi \xi} d\xi \equiv I_1(x, t) + I_2(x, t), \end{aligned}$$

entonces, si $x + t > 0$ y $t - x > 0$ haciendo el cambio de variables

$$(4.5.23) \quad \begin{cases} s = 2\pi(x + t)\xi, & \text{en } I_1, \\ s = 2\pi(t - x)\xi, & \text{en } I_2, \end{cases}$$

respectivamente, se obtiene,

$$(4.5.24) \quad I_1 = I_2 = \frac{1}{4}.$$

Por consiguiente, si $x \in [-t, t]$, $E(x, t) = \frac{1}{2}$. Por otra parte si $x \notin [-t, t]$, el signo de $x + t$ es opuesto al de $t - x$ y haciendo el cambio indicado por (4.5.23) se tiene $I_1 = -I_2$, obteniéndose así $E(x, t) = 0$. En resumen,

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [-t, t] \\ 0, & \text{si } x \notin [-t, t]. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \frac{\text{sen}(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|} \hat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} E(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy.$$

El otro sumando de la fórmula de D'Alembert sale de derivar respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(y) dy = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

El paso de la fórmula (4.5.20) a las fórmulas explícitas en dimensiones mayores, (4.3.7) y (4.2.20), requiere el concepto de transformada de Fourier en sentido de distribuciones para el cálculo de $E(x, t)$ y será omitido aquí. El resultado en \mathbf{R}^3 es que dada $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ entonces

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{\text{sen}(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|} \hat{g}(\xi) d\xi = \frac{t}{4\pi} \int_{|\nu|=1} g(x + t\nu) d\omega,$$

consiguiéndose el correspondiente resultado en dimensión espacial 2 por el método de descenso de Hadamard. Los detalles se pueden encontrar en el libro de *F. Trèves, "Basic linear Partial Differential Equations" Ed. Academic Press, 1975, pg.47*. También se deja al cuidado del lector la expresión de la solución de la ecuación de ondas no homogénea en términos de $E(x, t)$.

Nota. Obsérvese que el principio de conservación de la energía es una consecuencia inmediata del teorema de Plancherel y de la expresión (4.5.17). (Véase el ejercicio 18).

EJERCICIOS DEL CAPITULO 4.

1. Sea $u(x, t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x(1 - x), & x \in (0, 1) \\ u_t(x, 0) = x, & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Calcúlese razonadamente el valor exacto de $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{10})$. Obténgase la serie de Fourier de la solución y analícese la convergencia.

2. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1) \\ u_t(x, 0) = x(1 - x), & x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Utilícese el método de Fourier para obtener la solución de (P) como suma de una serie. Determinése la regularidad de dicha solución en un entorno del punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{10})$. Determinése razonadamente la suma de la serie de Fourier en dicho punto.

3. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \max\{1 - 2|x|, 0\} & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Determinése

- $\text{sopu} \cap \{t = 1\}$, siendo sopu la clausura del conjunto de puntos donde $u \neq 0$.
- La solución del problema.
- La gráfica de $u(0, t)$, siendo u la solución.

4. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \max\{1 - |x|, 0\}, & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \min\{x^4 - 1, 0\}. & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Determinése el dominio de dependencia del punto $(0, \frac{1}{2})$. Determinése el conjunto de puntos $(x, 4) \in \mathbf{R}^2$ tales que $u(x, 4) \neq 0$. Utilícese la fórmula de D'Alembert para calcular la solución, estudiando en que puntos la solución no es \mathcal{C}^2 .

5. Se considera el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

siendo $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R})$. Obténgase la energía y compruébese que la ecuación de ondas regida por la ecuación de (P) tiende a pararse cuando $t \rightarrow \infty$.

6. Estudiense la solución de los problemas siguientes por la fórmula de D'Alembert y determinense los puntos en que la solución no es \mathcal{C}^2

$$(a) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

7. Obténgase la solución de

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbf{R} \\ u_t(x, 0) = 1, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

8. Sea $u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ la ecuación de ondas en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$. Pruébese que las soluciones con simetría radial son de la forma

$$u(|x|, t) = \frac{w_1(|x| + t) + w_2(|x| - t)}{|x|}.$$

9. Obténgase la solución de la ecuación de ondas en $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ que verifica los datos $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = g(|x|)$.

10. Resuélvase explícitamente el problema 9 para

$$g(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

11. Sea el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

donde $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. Pruébese que la solución $u(x, t)$ verifica

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^3} |u(x, t)| \leq \frac{c}{1 + |t|}.$$

12. Estímese la energía para la ecuación del telegrafista $u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + u_t = 0$ con datos $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^3)$.

Pruébese que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^3} u_t^2(x, t) dx = 0.$$

13. Sea el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

siendo $f(x) = \max\{0, \frac{1}{4} - |x|^2\}$ y $g(x) = \max\{0, 5|x| - (|x|^2 + 6)\}$.

Determinense

a) $\text{sopu}(x, 1)$.

b) $\text{sopu}(x, 2)$.

c) $\text{sopu}(x, 10)$.

14. Sea el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

siendo $f(x) = 0$ y $g(x) = \max\{0, (1 - |x|^2)\}$. Determinar el soporte de la solución en los hiperplanos $t = 1$ y $t = 2$, respectivamente.

15. Considérese el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = F(x, t), & x \in \mathbf{R}^3, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

y calcúlese la energía. Supóngase $f \equiv 0$, $g \geq 0$ y $F \geq 0$. ¿Qué se puede decir de la solución u ?

16. Establecer un principio de comparación para soluciones de las ecuaciones de ondas con iguales datos iniciales y distintos segundos miembros, en dimensiones 1, 2 y 3.

17. Dado el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, & (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times (0, \infty), \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), & z > 0 \\ u_t(x, y, z, 0) = g(x, y, z), & z > 0 \\ u_t(x, y, 0, t) = 0, \end{cases}$$

obtégase su solución.

(Indicación.- Hágase una extensión impar de los datos a $z < 0$).

18. Demuéstrese el principio de conservación de la energía usando la identidad de Plancherel.

19.

Calcular la solución del problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in (-1, 1) \times \mathbf{R} \\ u(-1, t) = 0 = u(1, t), & t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 1, & x \in (-1, 1) \\ u_t(x, 0) = 1 - x^2, & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Determinar el valor exacto de $u(0, \frac{1}{4})$.

20.

Sea la ecuación:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{con } f(0) = 0, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{con } g(0) = 0, \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

a) Calcular la solución de dicho problema.

Indicación. Hacer una extensión adecuada de los datos iniciales f y g a todo \mathbf{R} .

b) Supongamos que $f(x)$ es positiva en el intervalo $(1, 2)$ y vale 0 fuera de él, y que $g \equiv 0$ para todo x . Hallar los conjuntos en los que la solución u es distinta de 0 en los instantes $t = 1$ y $t = 4$.

CAPITULO 5

LA ECUACION DE LAPLACE
EL PROBLEMA DE DIRICHLET

Introducción

Los modelos que dan origen a la ecuación de Laplace y que fueron discutidos en el capítulo 1, son *estacionarios*. En la sección 2.3. se ha visto que el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace no está bien propuesto, mientras que en la sección 3.3 se ha establecido existencia y unicidad para el problema de Dirichlet en la bola unidad del plano, usando las series de Fourier para construir el núcleo de Poisson y en la sección 3.6 se ha resuelto sobre el semiplano positivo, introduciendo la transformación de Fourier.

En este capítulo se van a introducir métodos alternativos para poder resolver el problema de Dirichlet en dominios más generales y de otros problemas relacionados con la ecuación de Laplace y de Poisson.

En la próxima sección, la 5.1, se motiva la función de Green para el laplaciano, obteniéndose explícitamente para la bola unidad de \mathbf{R}^N en la sección 5.2. De esta forma se resuelve el problema de Dirichlet.

Ideas de simetría permiten construir la función de Green en ciertos dominios, como se verá en la sección 5.3. Las propiedades de las *funciones armónicas* y el *principio*

del máximo son los contenidos de la sección 5.4. El principio del máximo junto a las propiedades de las funciones armónicas y la solución del problema de Dirichlet en las bolas de \mathbf{R}^N , permiten resolver el problema de Dirichlet en dominios generales por el *método de Poincaré-Perron*. Será en la sección 5.5. En particular se demostrará la existencia de función de Green en dominios generales, lo cual se aplicará a resolver la ecuación de Poisson en la sección 5.6.

5.1.-Representación integral de funciones. Función de Green.

Como consecuencia inmediata del teorema de la divergencia de Gauss, se obtienen las *fórmulas de Green* que se utilizan repetidamente.

Sea $N \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio regular en el sentido de la definición (1.2.1).

Primera fórmula de Green.

Sean $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ y $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, entonces

$$(5.1.1) \quad \int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma(x) - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx,$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω , n es la normal exterior y $d\sigma$ el elemento de área sobre $\partial\Omega$.

Para establecer (5.1.1) basta observar que

$$\operatorname{div}(v \nabla u) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle + v \Delta u$$

y aplicar el teorema de Gauss.

Segunda fórmula de Green.

Sean $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, entonces

$$(5.1.2) \quad \int_{\Omega} (v(x) \Delta u(x) - u(x) \Delta v(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) \right) d\sigma(x),$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω , n es la normal exterior y $d\sigma$ el elemento de área sobre $\partial\Omega$.

Es obvio que (5.1.2) es consecuencia inmediata de aplicar (5.1.1) a u y a v y restar.

Un caso particular de (5.1.1) es cuando $v \equiv 1$, entonces

$$(5.1.3) \quad \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma(x).$$

De (5.1.3) se concluye que si u verifica la ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$,

$$(5.1.4) \quad 0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma(x),$$

y, en general, para que el problema de Neumann

$$(5.1.5) \quad \begin{cases} \Delta u = F(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

sea compatible, es necesario que

$$(5.1.6) \quad \int_{\Omega} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma(x).$$

Como se ve, el obtener condiciones integrales parece una buena manera de abordar los problemas para la ecuación de Laplace. Otro auxiliar importante lo van a constituir las soluciones *radiales* del laplaciano, es decir, aquellas soluciones, $u(x) \equiv u(|x|)$, que sólo dependen de la distancia del punto al origen, siendo independientes de las variables angulares.

Empezamos calculando el valor del laplaciano para funciones radiales. Puesto que

$$u_{x_i} = u'(r)r_{x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r},$$

se tiene que

$$(5.1.7) \quad u_{x_i x_i} = u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + u'(r)\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2},$$

de donde

$$(5.1.8) \quad \Delta u \equiv u''(r) + \frac{(N-1)}{r}u'(r),$$

siendo N la dimensión de espacio. Es decir, las soluciones radiales de la ecuación de Laplace vienen dadas por las soluciones de la ecuación ordinaria de segundo orden

$$(5.1.9) \quad u''(r) + \frac{(N-1)}{r}u'(r) = 0,$$

que llamando $p = u'$ se convierte en la ecuación de variables separables

$$p'(r) + \frac{(N-1)}{r}p(r) = 0.$$

Por tanto las soluciones de (5.1.9) son

$$(5.1.10) \quad u(r) = \begin{cases} a \log r + b, & \text{si } N = 2 \\ \frac{a}{r^{N-2}} + b, & \text{si } N > 2, \end{cases}$$

que salvo para $a = 0$, es decir las soluciones constantes, son singulares en $r = 0$. Esta singularidad será la clave de la utilidad de dichas funciones y la justificación de este hecho es análoga a la vista para la función de Green en la sección 3.1. Por el momento vamos a poner de manifiesto la mencionada utilidad.

Se trata de representar las funciones con derivadas continuas en Ω en forma integral a partir de las soluciones radiales y de las fórmulas de Green.

La lectura de tal representación nos permitirá conjeturar las directrices a seguir para resolver el problema de Dirichlet y también para obtener propiedades cualitativas y cuantitativas de las soluciones de la ecuación de Laplace.

Por razones de normalización que quedarán claras al hacer los cálculos, tomaremos en particular las soluciones radiales singulares

$$(5.1.11) \quad v(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r, & \text{si } N = 2 \\ \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{r^{N-2}}, & \text{si } N > 2, \end{cases}$$

donde ω_N designa la medida de la esfera $S^{N-1} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| = 1\}$. Dejamos al lector los cálculos en el caso $N = 2$ y supondremos $N > 2$.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio con frontera $\partial\Omega$ regular. Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Para $\xi \in \Omega$ sea $\rho > 0$ tal que $B_\rho(\xi) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x - \xi| < \rho\} \subset \Omega$. Consideramos

$$(5.1.12) \quad v(|x - \xi|) = \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x - \xi|^{N-2}},$$

es decir, la trasladada de la función v definida en (5.1.11) de forma que tenga su singularidad en $x = \xi$. A la función v se la llama *solución fundamental*.

Como la *solución fundamental*, v , no está en las hipótesis para usar directamente la fórmula de Green, procedemos como sigue.

Llamando $\Omega_\rho = \Omega - B_\rho(\xi)$, se tiene que $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\rho)$ y además

$$(5.1.13) \quad \Delta_x v(|x - \xi|) = 0, \quad \text{en } \Omega_\rho,$$

donde Δ_x denota el laplaciano respecto a la variable x . Obsérvese que la frontera de Ω_ρ es la unión de la frontera de Ω con la esfera frontera de B_ρ , S_ρ , es decir,

$$\partial\Omega_\rho = \partial\Omega \cup S_\rho.$$

Aplicando la segunda fórmula de Green (5.1.2) a u y v sobre Ω_ρ y teniendo en cuenta (5.1.13) obtenemos

$$(5.1.14) \quad \int_{\Omega_\rho} v(|x - \xi|) \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega_\rho} \left(v(|x - \xi|) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(|x - \xi|) \right) d\sigma(x),$$

donde n denota la normal exterior a $\partial\Omega_\rho$.

Vamos a evaluar el límite de (5.1.14) para $\rho \rightarrow 0$.

Es claro que el término de la izquierda en (5.1.14) verifica

$$(5.1.15) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Omega_\rho} v(|x - \xi|) \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} v(|x - \xi|) \Delta u(x) dx,$$

por tratarse de una función integrable. El término de la derecha en (5.1.14) tiene un sumando sobre $\partial\Omega$, que no depende de ρ . En consecuencia, sólo tenemos que evaluar

$$(5.1.16) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho(\xi)} \left(v(|y - \xi|) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y) \frac{\partial v}{\partial n}(|y - \xi|) \right) d\sigma(y).$$

Pero tenemos en primer lugar que

$$(5.1.17) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho(\xi)} (v(|y - \xi|) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma(y) = 0,$$

pues en $S_\rho(\xi)$,

$$v(|y - \xi|) = \frac{-1}{(N-2)\omega_N \rho^{N-2}},$$

y entonces aplicando (5.1.3) se tiene

$$(5.1.18) \quad \begin{aligned} \int_{S_\rho(\xi)} v(|y - \xi|) \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma(y) &= \frac{-1}{(N-2)\omega_N \rho^{N-2}} \int_{B_\rho} \Delta u(x) dx = \\ &= \frac{-1}{(N-2)\omega_N \rho^{N-2}} \frac{\omega_N}{N} \rho^N \left(\frac{N}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho} \Delta u(x) dx \right), \end{aligned}$$

donde observamos que la medida de B_ρ es $\frac{\omega_N}{N} \rho^N = |B_\rho|$ y, por tanto, la continuidad de Δu permite concluir (5.1.17).

De otra parte como la normal exterior a Ω_ρ es la normal interior a S_ρ , se tiene

$$(5.1.19) \quad \frac{\partial v}{\partial n}(|y - \xi|) = -\frac{1}{\omega_N |y - \xi|^{N-1}}$$

y resulta para $\rho \rightarrow 0$,

$$(5.1.20) \quad - \int_{S_\rho(\xi)} u(y) \frac{\partial v}{\partial n}(|y - \xi|) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{S_\rho(\xi)} u(y) d\sigma(y) \rightarrow u(\xi),$$

por la continuidad de u .

Tomando límites para $\rho \rightarrow 0$ en (5.1.14) y en virtud de los cálculos anteriores obtenemos la expresión

$$(5.1.21) \quad u(\xi) = - \int_{\partial\Omega} \left(v(|x - \xi|) \frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(|x - \xi|) \right) d\sigma(x) + \int_{\Omega} v(|x - \xi|) \Delta u(x) dx.$$

Como el lector puede comprobar sin dificultad, los mismos argumentos son válidos si sustituimos $v(|x - \xi|)$ por una función

$$(5.1.22) \quad s(x, \xi) = v(|x - \xi|) + \Phi(x),$$

siendo $\Phi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ y $\Delta\Phi(x) = 0$, obteniéndose la misma expresión (5.1.21) con s en vez de v .

Una lectura poco reflexiva de (5.1.21) puede llevar a pensar que contradice el resultado de que el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace está mal propuesto. En la sección 3.3 hemos demostrado que el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = f(x, y), & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

tiene solución única. Además se tienen los resultados de la sección 2.3.

Por tanto, el problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

en general no tiene solución, salvo que F, f y g verifiquen ciertas condiciones de compatibilidad. La fórmula (5.1.21) expresa una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ en términos de *sus valores de frontera y de los de su derivada normal*.

Pero lo que se desearía es aplicar (5.1.21) para resolver el problema de Dirichlet

$$(5.1.23) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

en cuyo caso estorba en (5.1.21) el término en que aparece la derivada normal de u , según los comentarios previos.

La idea es buscar una función $G(x, \xi)$ de la forma (5.1.22), con lo cual se tendrá la representación (5.1.21), pero que verifique además, que para cada $\xi \in \Omega$ fijo, $G(x, \xi) = 0$ si $x \in \partial\Omega$. Es decir, si se sabe resolver el problema de Dirichlet particular

$$(5.1.24) \quad \begin{cases} \Delta_x \Phi(x, \xi) = 0, & x \in \Omega \\ \Phi(x, \xi) = -v(|x - \xi|), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces la función

$$(5.1.25) \quad G(x, \xi) = v(|x - \xi|) + \Phi(x, \xi),$$

sustituida en la fórmula (5.1.21), lleva a la expresión

$$(5.1.26) \quad u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_y}(y, \xi) f(y) d\sigma(y) + \int_{\Omega} F(x) G(x, \xi) dx.$$

A la función G definida en (5.1.25) se la llama *función de Green* y a $\frac{\partial G}{\partial n_y}$ *núcleo de Poisson* para el problema (5.1.23).

Al igual que en los problemas de Sturm-Liouville estudiados en el capítulo 3, la solución en el caso general se reduce a resolver un problema en particular.

En los apartados siguientes calcularemos de forma explícita la función de Green en algunos casos particulares. En el resto de secciones nuestro objetivo será resolver el problema de Dirichlet en dominios generales, o lo que es equivalente, la obtención de la función de Green.

5.2.-El problema de Dirichlet en una bola de \mathbf{R}^N .

Este apartado se dedica a obtener la función de Green en el caso en el que el dominio Ω es la bola de radio R , $B_R(0) = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| \leq R\}$ y, como consecuencia, a resolver el problema de Dirichlet. Supondremos $N \geq 3$, pues el caso $N = 2$ ya se resolvió en la sección 3.3. Sin embargo será un buen ejercicio para el lector reproducir los cálculos que siguen en dimension $N = 2$. (Sólo hay que poner el logaritmo.)

Para calcular la función de Green debemos calcular la solución del problema

$$(5.2.1) \quad \begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0, & \text{si } |y| < R \\ \Phi(x, y) = \frac{1}{\omega_N(N-2)} \frac{1}{|x - y|^{N-2}}, & \text{si } |y| = R, \end{cases}$$

para $|x| < R$ fijo y donde ω_N denota la medida de la esfera de radio 1 en \mathbf{R}^N .

La idea es ensayar como solución de (5.2.1) una función de la forma

$$(5.2.2) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \frac{k}{|\lambda x - y|^{N-2}},$$

donde se supone $\lambda x \neq y$. Se trata entonces de determinar los parámetros k y λ de manera que se verifique la condición de contorno, ya que toda función como la definida en (5.2.2) verifica la ecuación $\Delta_y \Phi = 0$.

Hemos de imponer que si $|y| = R$ se verifique

$$(5.2.3) \quad \frac{1}{|x-y|^{N-2}} = \frac{k}{|\lambda x-y|^{N-2}},$$

o bien,

$$(5.2.4) \quad k^{\frac{2}{N-2}}|x-y|^2 = |\lambda x-y|^2,$$

que desarrollando queda

$$k^{\frac{2}{N-2}}(|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2) = \lambda^2|x|^2 - 2\lambda\langle x, y \rangle + |y|^2,$$

poniendo $|y| = R$ resulta

$$(1 - k^{\frac{2}{N-2}})R^2 = (k^{\frac{2}{N-2}} - \lambda^2)|x|^2 - 2(\lambda - k^{\frac{2}{N-2}})\langle x, y \rangle,$$

y para $\lambda = k^{\frac{2}{N-2}}$ resulta

$$(1 - \lambda)R^2 = (\lambda - \lambda^2)|x|^2,$$

de donde, o bien $\lambda = 1$, o bien $\lambda = \frac{R^2}{|x|^2}$.

El valor $\lambda = 1$ hay que desecharlo, pues no se tendría $\lambda x \neq y$ para $|y| < R$. El otro valor da que, como $\frac{R^2}{|x|^2} > 1$, se tiene que

$$|\frac{R^2}{|x|^2}x| = R|\frac{R}{|x|}| > R,$$

por tanto cualquiera que sea $|y| < R$, se tiene

$$\frac{R^2}{|x|^2}x \neq y.$$

Como $\lambda = k^{\frac{2}{N-2}}$ resulta

$$(5.2.5) \quad k = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2}.$$

La correspondiente función $\Phi(x, y)$ viene dada entonces por

$$(5.2.6) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2} \frac{1}{|\frac{R^2}{|x|^2}x - y|^{N-2}}.$$

La función de Green resulta ser

$$(5.2.7) \quad G(x, y) = \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \begin{cases} \{|x-y|^{2-N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-N}\} & x \neq 0 \\ \{|y|^{2-N} - R^{2-N}\} & x = 0 \end{cases}$$

La última expresión se obtiene considerando que $\Phi(0, y) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} R^{2-N}$.

Calcularemos ahora el núcleo de Poisson, es decir,

$$(5.2.8) \quad \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y), \quad \text{cuando } |y| = R.$$

Derivando en (5.2.7)

$$(5.2.9) \quad \begin{aligned} \nabla_y G(x, y) &= \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} |x-y|^{2-N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \frac{\partial}{\partial y_i} \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-N} \right\}_{i=1, \dots, N} = \\ &= \frac{1}{\omega_N} \left\{ \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \frac{\left(\frac{R^2}{|x|^2}x_i - y_i\right)}{\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^N} \right\}_{i=1, \dots, N}. \end{aligned}$$

Entonces el valor en $|y| = R$ se obtiene a partir de que $G(x, y) = 0$ en dichos puntos, es decir,

$$|x-y|^{2-N} = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-N}, \quad \text{si } |y| = R,$$

o bien,

$$(5.2.10) \quad |x-y| = \left(\frac{|x|}{R}\right) \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right| \quad \text{si } |y| = R.$$

Si se sustituye (5.2.10) en (5.2.9) se obtiene

$$(5.2.11) \quad \nabla_y G(x, y) = \frac{-1}{\omega_N |x-y|^N} \left(\frac{|x|^2 - R^2}{R^2} y_i \right)_{i=1, \dots, N} \quad \text{si } |y| = R.$$

Como la normal exterior a $|y| = R$ es $n = \left(\frac{y_i}{R}\right)_{i=1, \dots, N}$ resulta que el núcleo de Poisson resulta ser

$$(5.2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) &= \\ &= \langle \nabla_y G(x, y), n_y \rangle = \frac{-1}{\omega_N |x-y|^N} \frac{|x|^2 - R^2}{R^2} \sum_1^N \frac{y_i^2}{R} = \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{R \omega_N |x-y|^N} \quad \text{si } |y| = R. \end{aligned}$$

Si ahora se tiene en cuenta la fórmula de representación (5.1.26) es natural enunciar el resultado siguiente.

5.2.1. Teorema. (*Poisson*)

Sea f una función continua en la esfera $S_R = \{y \in \mathbf{R}^N \mid |y| = R\}$. Si se define

$$(5.2.13) \quad u(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_N} \int_{|y|=R} \frac{f(y)}{|x-y|^N} d\sigma(y) & \text{si } |x| < R \\ f(x) & \text{si } |x| = R, \end{cases}$$

u es continua en $|x| \leq R$ y $u \in \mathcal{C}^\infty$ en $|x| < R$, siendo además solución del problema

$$(5.2.14) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{si } |x| < R \\ u(x) = f(x) & \text{si } |x| = R. \end{cases}$$

Demostración.

Que $u \in \mathcal{C}^\infty$ en $|x| < R$ es consecuencia de ser

$$\frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_N |x-y|^N} \in \mathcal{C}^\infty \quad \text{si } |y| = R, \quad \text{y } |x| < R,$$

por lo que se puede derivar bajo el signo integral en (5.2.13) de manera reiterada. De otra parte, por la construcción hecha, el núcleo de Poisson verifica la ecuación de Laplace en el interior de la bola de radio R . (Calcúlese directamente el laplaciano para comprobar este extremo.) Por consiguiente, se tiene

$$\Delta u(x) = \frac{1}{R\omega_N} \int_{|y|=R} f(y) \Delta \left(\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N} \right) d\sigma(y) = 0.$$

Queda por probar que (5.2.13) define una función continua en $|x| \leq R$, o lo que es igual, que u verifica el dato de contorno con continuidad.

Necesitamos dos propiedades del núcleo de Poisson.

A) Se verifica

$$(5.2.15) \quad \frac{1}{R\omega_N} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^N} d\sigma(y) = 1$$

Resulta directamente de la fórmula de representación integral (5.1.26) aplicada a $v(x) \equiv 1$ y a la función de Green definida por (5.2.7).

B) Sea x_0 un punto arbitrario de la esfera de radio R , es decir, $|x_0| = R$. Consideremos también $\rho > 0$ y sea

$$E_\rho = \{y \mid |y| = R, |x_0 - y| > \rho\},$$

entonces si $|x - x_0| < \frac{\rho}{2}$ se verifica

$$(5.2.16) \quad \int_{E_\rho} \frac{1}{R\omega_N} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N} d\sigma(y) \leq 2^{N+1} \frac{R - |x|}{\rho} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N-1}.$$

En efecto, si $y \in E_\rho$ y $|x - x_0| < \frac{\rho}{2}$,

$$|x - y| \geq |y - x_0| - |x - x_0| > \frac{\rho}{2},$$

y entonces

$$(5.2.17) \quad \begin{aligned} \int_{E_\rho} \frac{1}{R\omega_N} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N} d\sigma(y) &\leq \frac{2R(R - |x|)}{R\omega_N} \int_{E_\rho} \frac{d\sigma(y)}{|x - y|^N} \leq \\ &\leq \frac{2(R - |x|)}{\omega_N} \omega_N R^{N-1} \frac{2^N}{\rho^N} = 2^{N+1} \frac{R - |x|}{\rho} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{N-1}. \end{aligned}$$

La expresión (5.2.17) pone de manifiesto que la masa del núcleo de Poisson se concentra alrededor del punto x_0 cuando $x \rightarrow x_0$. Las dos propiedades anteriores son las análogas a las que goza el núcleo de Poisson para la bola en \mathbf{R}^2 , según se estudió en la sección 3.3. Al igual que allí, nos servirán para probar la convergencia al dato de frontera. En efecto, podemos escribir en virtud de (5.2.15)

$$(5.2.18) \quad |u(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{R\omega_N} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N} (f(x) - f(x_0)) d\sigma(y) \right|.$$

Como f es uniformemente continua en $|y| = R$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y_1 - y_2| < \delta$ entonces $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon/2$. Sea $A = \max\{|f(y)| \mid |y| = R\}$.

La integral (5.2.18) la descomponemos en dos sumandos, uno al integrar sobre $S_1 = \{y \mid |y| = R, |y - x_0| < \rho\}$ con $\rho < \delta$ y otro al integrar sobre el complementario, S_2 , de S_1 en la esfera de radio R , de esta manera se obtiene

$$(5.2.19) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{R\omega_N} \int_{|y|=R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N} |f(x) - f(x_0)| d\sigma(y) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{R\omega_N} \int_{S_1} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N} d\sigma(y) + 2A \frac{1}{R\omega_N} \int_{S_2} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^N} d\sigma(y) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2A \left(\frac{2^{N+1}(R - |x|)R^{N-1}}{\rho^N} \right), \end{aligned}$$

donde se han aplicado (5.2.15) y (5.2.16).

Ahora bien $R - |x| = |x_0| - |x| \leq |x - x_0|$, por lo que el segundo sumando se hace menor que $\varepsilon/2$ si tomamos

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho^N}{2AR^{N-1}2^{N+1}} \right),$$

quedando establecido el teorema en su totalidad. \square

La expresión integral (5.2.13) se llama *integral de Poisson de f* , y como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente resultado de dependencia continua.

5.2.2. Corolario.

Si f y \bar{f} son funciones continuas en $|y| = R$ y u y \bar{u} son sus respectivas integrales de Poisson definidas por (5.2.13), entonces

$$(5.2.20) \quad |u(x) - \bar{u}(x)| \leq \sup_{|y|=R} |f(x) - \bar{f}(x)|,$$

si $|x| \leq R$.

El resultado es una consecuencia directa de la definición de la integral de Poisson (5.2.13) y de usar (5.2.15)

Obsérvese que el corolario establece la dependencia continua de la integral de Poisson respecto de los datos. No podemos asegurar todavía lo mismo para las soluciones de la ecuación de Laplace en la bola; para poder afirmar lo mismo tendríamos que saber que la solución es única, y, por tanto, coincide con la integral de Poisson. Este resultado de unicidad lo probaremos en la sección 5.4.

5.3.-Cálculo de la función de Green en dominios con simetrías.

Como hemos establecido en las secciones previas de este capítulo, si se conoce explícitamente la función de Green, el problema de Dirichlet está resuelto, aunque tenemos pendiente todavía la demostración de la unicidad.

Esta sección la dedicamos a calcular de manera elemental la función de Green en dominios con algún tipo de simetría. Empezamos por concretar que entendemos por *dominio con simetrías* en este contexto.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio. Entenderemos que el dominio tiene simetría si existe

$$S : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^N,$$

tal que

- i) Si $y \in \Omega$, $S(y) \in \mathbf{R}^N - \Omega$ y si $y \in \mathbf{R}^N - \bar{\Omega}$, $S(y) \in \Omega$
- ii) Si $y \in \partial\Omega$, $S(y) = y$
- iii) Si se define para una función u , $v(y) = u(Sy)$ entonces

$$\Delta v(y) = a(y)\Delta u(y)$$

Si tenemos un dominio Ω para el cual existe una tal S podemos definir la función de Green como sigue

$$(5.3.1) \quad G(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{\alpha(x)}{|S(x)-y|^{N-2}} \right), & N > 2 \\ \frac{1}{2\pi} (\log |x-y| - \alpha \log |S(x)-y|), & N = 2 \end{cases}$$

para un α adecuado, dependiente de a en *iii*).

La anterior observación es aplicada a continuación para obtener la función de Green en algunos ejemplos.

I). El semiespacio superior \mathbf{R}_+^{N+1} .

Denotamos por $\mathbf{R}_+^{N+1} = \{(\bar{x}, x_{N+1}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \mid x_{N+1} > 0\}$, de forma que la frontera de \mathbf{R}_+^{N+1} es el hiperplano $x_{N+1} = 0$ y es invariante por la simetría

$$S : \mathbf{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbf{R}^{N+1}, \quad \text{definida por} \quad S(\bar{x}, x_{N+1}) = (\bar{x}, -x_{N+1}).$$

Fijados los puntos $x = (\bar{x}, x_{N+1}) \in \mathbf{R}_+^{N+1}$ e $y = (\bar{y}, y_{N+1}) \in \mathbf{R}_+^{N+1}$, dado que $S(y)$ pertenece al semiespacio inferior, la función

$$(5.3.2) \quad \Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{(N-1)\omega_{N+1}} \frac{1}{|y - S(x)|^{N-1}}, & N > 1 \\ \frac{-1}{2\pi} \log |x - S(y)|, & N = 1 \end{cases}$$

verifica la ecuación de Laplace como función de x en \mathbf{R}_+^{N+1} , y la función de Green es entonces

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{(N-1)\omega_{N+1}} \left(\frac{1}{|x - y|^{N-1}} - \frac{1}{|y - S(x)|^{N-1}} \right), & N > 1 \\ \frac{1}{2\pi} (\log |x - y| - \log |y - S(x)|), & N = 1 \end{cases}$$

Calculamos el núcleo de Poisson para $N > 1$, dejando al lector el cálculo en el caso $N = 1$ y la comprobación de que el resultado coincide con el obtenido por el método de separación de variables en la sección 3.6.

Como la normal a la frontera es $n_y = (0, 0, \dots, 0, -1)$, se tiene que el núcleo de Poisson es

$$P_{N+1}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial y_{N+1}}(x, y)$$

por lo que un cálculo simple da

$$(5.3.3) \quad P_{N+1}(x, y) = \frac{1}{\omega_{N+1}} \frac{x_{N+1}}{(\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 + x_{N+1}^2)^{\frac{N+1}{2}}}, \quad y \in \mathbf{R}^N.$$

II). La bola de radio R en \mathbf{R}^N .

Consideraremos la inversión, o *transformación de Kelvin*, en $\mathbf{R}^N - \{0\}$ con polo en el origen, es decir,

$$I(x) = \frac{R^2}{|x|^2}x, \quad x \neq 0,$$

respecto a la cual la esfera $S_R^{N-1} = \{y \in \mathbf{R}^N \mid |y| = R\}$ es el lugar geométrico de los puntos invariantes. En efecto, si $y \in S_R^{N-1}$, $I(y) = y$. Además si $u \in \mathcal{C}^2$ y definimos $v(y) = u(I(y))$ se tiene

$$\Delta v(y) = |y|^{N+2} \Delta u(y).$$

Consideremos $N > 2$. Definiendo

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{-1}{(N-2)\omega_N} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{\alpha(x)}{|I(x)-y|^{N-2}} \right), & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{(N-2)\omega_N} \left(\frac{1}{|y|^{N-2}} - \frac{1}{R^{N-2}} \right), & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

hemos de calcular α con la condición $G(x, y) = 0$ si $|y| = R$, para tener la función de Green. Por cálculo directo se obtiene

$$\alpha(x) = \left(\frac{R}{|x|} \right)^{N-2}.$$

El núcleo de Poisson se calculó en la sección 5.2.

III). La semibola $S_{R+}^{N-1} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < R, \quad x_N > 0\}$.

Supondremos de nuevo $N > 2$. El caso $N = 2$ puede construirlo el lector sin dificultad.

La idea es utilizar los apartados I) y II). Más precisamente tomando la función de Green de la esfera calculada en II), la valoramos en el punto x y $S(x)$, siendo S la simetría respecto al hiperplano $x_N = 0$. La diferencia de ambas funciones se anula en $x_N = 0$ también. Es decir, en este caso la función de Green es

$$G(x, y) = \frac{-1}{(N-2)\omega_N} (|x-y|^{2-N} - \alpha|I(x)-y|^{2-N} - |S(x)-y|^{2-N} + \alpha|I(S(x))-y|^{2-N}).$$

Se deja la comprobación de todos los detalles como ejercicio para el lector.

En este caso el núcleo de Poisson resulta,

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \begin{cases} \frac{-1}{R} \frac{|x|^2 - R^2}{\omega_N |x-y|^N}, & |y| = R, \quad y_N > 0 \\ \frac{1}{\omega_N} \frac{x_N}{(\sum_{i=1}^{N-1} (x_i - y_i)^2 + x_N^2)^{\frac{N}{2}}}, & |y| < R, \quad y_N = 0. \end{cases}$$

IV). Función de Green para el ángulo diédrico $x_N > 0$, $x_{N-1} > 0$.

Llamaremos S_N y S_{N-1} las simetrías respecto a los hiperplanos $x_N = 0$ y $x_{N-1} = 0$. La idea es la misma que en el apartado III), es decir restar las funciones de Green para los dos semiespacios que por intersección dan el ángulo diédrico, valoradas en y y $S_{N-1}(y)$, respectivamente. Es decir, para $N > 2$,

$$G(x, y) = \frac{-1}{(N-2)\omega_N} (|x-y|^{2-N} - |x-S_N(y)|^{2-N} - |x-S_{N-1}(y)|^{2-N} - |x-S_N(S_{N-1}(y))|^{2-N})$$

El cálculo del núcleo de Poisson es inmediato por derivación. (Véanse los ejercicios al final del capítulo.)

5.4.-Propiedades de las funciones armónicas.

Consideremos un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, es decir, un abierto conexo de \mathbf{R}^N . El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades de las soluciones de la ecuación de Laplace en Ω y algunas consecuencias que de ellas se obtienen. El conocimiento de tales propiedades nos permitirá demostrar resultados de unicidad y, en la sección siguiente, la existencia de solución en dominios más generales. Para empezar precisamos con la siguiente definición el objeto de trabajo.

5.4.0. Definición.

Diremos que u es una función armónica en Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y además $\Delta u = 0$ en Ω .

Como se ha visto en la sección 5.1 la solución del problema de Dirichlet en general, queda reducida a estudiar el problema particular de calcular la función de Green, y éste al de determinar una función *armónica* con dato de contorno $v(|x-\xi|)$, solución fundamental.

Por esta razón, entre otras, tiene interés el estudio detallado de las propiedades de las funciones armónicas. Vamos a dedicar nuestra atención precisamente a:

- (1) Las propiedades de valor medio.
- (2) Principio del máximo.

Ambas propiedades son bien conocidas en el caso de dimensión $N = 2$, por aplicación de los resultados para funciones holomorfas de una variable compleja. En efecto, si $u(x, y)$ es armónica en \mathbf{R}^2 , podemos calcular la función armónica conjugada, es decir una función v que verifique las Ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} v_x = u_y, \\ v_y = -u_x. \end{cases}$$

Para tales ecuaciones la condición de integrabilidad de Lagrange del teorema (1.1.2), se verifica por la hipótesis de ser u armónica,

$$v_{xy} = u_{yy} = -u_{xx} = v_{yx}.$$

Si se define $f = u + iv$ es una función holomorfa y por tanto verifica la propiedad de la media y del módulo máximo por lo cual también lo satisfacen sus partes real e imaginaria respectivamente.

En dimensión $N > 2$ no se puede usar la variable compleja y entonces se deben diseñar otros métodos para poder demostrar las propiedades de la media y el principio del máximo. Dichos métodos son válidos también en dimensión $N = 2$.

Para precisar las ideas damos la siguiente definición.

5.4.1. Definición.

Dada $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ se dice que verifica la primera propiedad del valor medio en Ω , si para cada $r > 0$ tal que $B_r(x) = \{y \in \mathbf{R}^N \mid |x - y| < r\} \subset \Omega$, se verifica

$$(5.4.1) \quad v(x) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} v(y) d\sigma(y).$$

Si v verifica la primera propiedad del valor medio se tiene

$$\omega_N \rho^{N-1} v(x) = \int_{|x-y|=\rho} v(y) d\sigma(y), \quad 0 < \rho < r$$

y entonces

$$\begin{aligned} \omega_N \int_0^r \rho^{N-1} v(x) d\rho &= \frac{\omega_N r^N}{N} v(x) = \\ &= \int_0^r \int_{|x-y|=\rho} v(y) d\sigma(y) d\rho = \int_{|x-y| \leq r} v(y) dy, \end{aligned}$$

es decir,

$$(5.4.2) \quad v(x) = \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{|x-y| \leq r} v(y) dy \equiv \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} v(y) dy,$$

donde $|B_r(x)| = \frac{\omega_N r^N}{N}$ es la medida de la bola de centro x y radio r .

Si se verifica (5.4.2) para cada r tal que $B_r(x) \subset \Omega$, se dice que verifica la *segunda propiedad del valor medio*. El cálculo precedente pone de manifiesto que si u verifica

la primera propiedad del valor medio también verifica la segunda. Recíprocamente, si se verifica (5.4.2) para cada r tal que $B_r(x) \subset \Omega$, pasando a coordenadas polares

$$(5.4.3) \quad v(x) \frac{\omega_N r^N}{N} = \int_0^r \left(\int_{|x-y|=\rho} v(y) d\sigma(y) \right) d\rho,$$

y derivando respecto a r resulta (5.4.1).

Dada la anterior equivalencia, utilizaremos una u otra según interese para los cálculos.

Como analizamos previamente, la propiedad de la media en dimensión $N = 2$, es una consecuencia de la fórmula de Cauchy para funciones analíticas de una variable compleja.

El caso de dimensión $N > 2$ se establece en el resultado siguiente.

5.4.2. Teorema.

Sea u función armónica en el dominio Ω . Entonces u verifica la primera propiedad de la media.

Demostración.

Dado que $\Delta u = 0$ en Ω , en particular si $B_r(x) \subset \Omega$, se tiene por el teorema de Gauss aplicado sobre $B_r(x)$

$$\int_{|x-y|=r} \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma(y) = 0.$$

Tomemos la solución fundamental definida por (5.1.11) y (5.1.12) y usando la representación integral (5.1.21) obtenemos,

$$u(x) = \int_{|x-y|=r} u(y) \frac{\partial v}{\partial n_y}(|x-y|) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y),$$

que establece el resultado. \square

La propia estructura de la ecuación de Laplace nos permite establecer un *principio de máximo débil (mínimo débil)* que podemos enunciar de la manera siguiente

5.4.3. Teorema. Principio débil del máximo (mínimo)

Sea Ω dominio acotado de \mathbf{R}^N y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ verificando $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$). Entonces el máximo (mínimo) de u se alcanza en la frontera $\partial\Omega$, es decir,

$$\max_{x \in \Omega} u(x) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$$

$$(\min_{x \in \Omega} u(x) = \min_{y \in \partial\Omega} u(y))$$

Demostración.

Siempre se verifica la desigualdad

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \geq \max_{y \in \partial\Omega} u(y),$$

por lo que la prueba consiste en establecer la otra desigualdad.

Supongamos la hipótesis adicional $\Delta u > 0$ en Ω . Entonces si u tuviese un máximo interior en Ω , la matriz hessiana de u sería semidefinida negativa y en particular su traza, que es el laplaciano, debería ser no positiva, $\Delta u \leq 0$, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Es decir, en este caso el resultado está establecido.

Supongamos ahora la hipótesis general, $\Delta u \geq 0$; reduciremos la demostración al caso previo considerando la función auxiliar $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$ para $\varepsilon > 0$. Es evidente que v tiene la misma regularidad que u , pero además $\Delta v = \Delta u + 2N\varepsilon > 0$. Entonces aplicamos el resultado obtenido con esta hipótesis adicional,

$$\max_{x \in \Omega} v_\varepsilon(x) = \max_{y \in \partial\Omega} v_\varepsilon(y),$$

de donde,

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon \max_{x \in \Omega} |x|^2,$$

que tomando límites para $\varepsilon \rightarrow 0$ prueba el resultado. Para el caso del principio del mínimo basta considerar la función $-u$ y aplicar el principio del máximo demostrado. \square

Es claro entonces que si se trata de una función armónica se verifican simultáneamente el principio del máximo y del mínimo. Pero además, en este caso podemos establecer el siguiente *principio del máximo fuerte* que extenderemos en la sección siguiente. Antes de nada queremos llamar la atención sobre el método de demostración que se va a usar. Se trata de un *argumento de conexión*. Por definición un dominio Ω es abierto y conexo, por tanto la única partición en abiertos posible es la trivial. Dicho de otra forma, los únicos subconjuntos de Ω que son abiertos y cerrados a la vez en la topología relativa son el propio Ω y el conjunto vacío, \emptyset . Entonces si se quiere demostrar que una determinada propiedad se verifica en todo Ω lo que hay que establecer es:

- i) El conjunto donde se verifica es no vacío.
- ii) El conjunto donde se verifica es abierto y cerrado a la vez.

Esta es la argumentación que se hará en el próximo resultado.

5.4.4. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ satisfaciendo la condición de la media en Ω . Si para algún $x_0 \in \Omega$ se verifica

$$u(x_0) = M = \max_{x \in \Omega} u(x),$$

entonces $u(x) \equiv M$, $x \in \Omega$.

Demostración.

Sea $\mathcal{A} = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$, por hipótesis $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ya que $x_0 \in \mathcal{A}$. Además la continuidad de u implica que \mathcal{A} es cerrado. Si probamos que \mathcal{A} es abierto, la conexión de Ω dará el resultado.

Para probar que \mathcal{A} es abierto demostraremos que si $x \in \mathcal{A}$, existe una bola de radio $r > 0$ y centro x contenida en \mathcal{A} . Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces $u(x) = M$; sea $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega$, si no fuese cierto que $u(y) = M$ para $|x - y| < r$ se tendría necesariamente que para algún $\bar{y} \in B_r(x)$, $u(\bar{y}) < M$. Pero entonces la continuidad de u implica que para algún $\rho > 0$, $u(z) < M$ para todo $z \in B_\rho(\bar{y})$, es decir, $|z - \bar{y}| < \rho$; ahora por la segunda propiedad de la media

$$\begin{aligned} M = u(x) &= \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{|x-y| \leq r} u(y) dy = \\ &= \frac{N}{\omega_N r^N} \left(\int_{B_r(x) \cap B_\rho(\bar{y})} u(y) dy + \int_{B_r(x) - B_\rho(\bar{y})} u(y) dy \right) < M, \end{aligned}$$

que es una contradicción.

Por tanto, $B_r(x) \subset \Omega$ y así \mathcal{A} es un abierto, como queríamos demostrar. \square

Análogo argumento sirve para el mínimo.

El siguiente resultado es el recíproco del teorema (5.4.2) y caracteriza a las funciones armónicas por satisfacer la propiedad de la media.

5.4.5. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ verificando la propiedad de la media en Ω . Entonces u es armónica en Ω .

Demostración.

Sea $x \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega$. Como $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ el problema

$$\begin{cases} \Delta_y v = 0, & \text{en } |x - y| < r \\ v(y) = u(y), & \text{en } |x - y| = r \end{cases}$$

tiene como solución la integral de Poisson de u en $|x - y| = r$, es decir, podemos definir v por (5.2.13). Así, v es una función armónica en la bola $B_r(x)$, por lo que en virtud del teorema (5.4.2) verifica la propiedad de la media en $|x - y| < r$. Entonces la función $w = u - v$ verifica la propiedad de la media en $|x - y| < r$ y por tanto, en virtud del teorema (5.4.4), podemos aplicar el principio del máximo, obteniendo

$$0 = \min_{|x-y|=r} (u(y) - v(y)) \leq (u(z) - v(z)) \leq \max_{|x-y|=r} (u(y) - v(y)) = 0,$$

para todo z , $|x - z| \leq r$. Por tanto, $u(z) = v(z)$ sobre la bola $B_r(x)$, y como v es armónica, resulta u armónica. \square

Los siguientes corolarios del principio del máximo son fundamentales para trabajar con la ecuación de Laplace.

5.4.6. Corolario.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio acotado. Sean $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Entonces el problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in \Omega \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

verifica que:

- a) Tiene a lo más una solución $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.
- b) Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ es una solución, se verifica

$$\max_{y \in \Omega} |u(y)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)| + C \max_{y \in \Omega} |f(y)|.$$

Demostración.

- a) Si hubiese dos soluciones u_1, u_2 , la diferencia $v = u_1 - u_2$ sería armónica en Ω continua en $\bar{\Omega}$ y tomando valores de frontera nulos. El principio del máximo débil, teorema 5.4.3., implica que $v \equiv 0$ en todo el dominio, es decir, $u_1 = u_2$.
- b) Después de una traslación podemos suponer que el dominio Ω está contenido en la banda $0 < x_1 < b$. Para $\lambda > 1$ consideramos la función

$$v(x) = \max_{\partial\Omega} |u| + (e^{\lambda b} - e^{\lambda x_1}) \max_{\Omega} |f|.$$

Se tiene que $u - v < 0$ en $\partial\Omega$ y además

$$-\Delta(u - v) = f - \lambda^2 \max_{\Omega} |f| \leq 0,$$

por tanto, aplicando el principio del máximo débil resulta que $u \leq v$ en Ω y entonces

$$\max_{y \in \Omega} |u(y)| \leq \max_{y \in \partial\Omega} |u(y)| + (e^{\lambda b} - 1) \max_{y \in \Omega} |f(y)|.$$

\square

5.4.7. Corolario.

Sea Ω dominio acotado. Sean u_1 y u_2 soluciones de los problemas

$$(P_i) \quad \begin{cases} \Delta u_i(x) = F(x), & x \in \Omega \\ u_i(x) = f_i(x), & x \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

donde todos los datos se suponen continuos, entonces

$$\min_{y \in \partial\Omega} (f_1(y) - f_2(y)) \leq u_1(x) - u_2(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} (f_1(y) - f_2(y)), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Es de nuevo la utilización del principio del máximo-mínimo, que con esta lectura da la dependencia continua respecto a los datos de contorno.

5.4.8. Corolario. (*Primer teorema de Harnack*).

Sea $\{u_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ sucesión de funciones armónicas, $u_k \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ para todo $k \in \mathbf{N}$; si la sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente a u en $\partial\Omega$, entonces $\{u_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente a una función armónica u , sobre Ω .

Demostración.

Por el principio del máximo,

$$\sup_{x \in \Omega} |u_k(x) - u_m(x)| \leq \sup_{y \in \partial\Omega} |u_k(y) - u_m(y)|,$$

y así la sucesión es uniformemente de Cauchy en Ω , por tanto converge uniformemente sobre Ω a una función continua u . Para ver que u es armónica, basta establecer que verifica la propiedad de la media, en virtud del teorema (5.4.5). Pero esto es inmediato pasando al límite en las propiedades de la media para las funciones u_k . \square

El uso adecuado de la propiedad de la media nos permite establecer la siguiente estimación que es conocida como *desigualdad de Harnack* cuya extensión a casos más generales permite demostrar regularidad.

5.4.9. Teorema. (*Desigualdad de Harnack*).

Sea u función armónica no negativa en Ω . Sea $A \subset \Omega$ un dominio acotado tal que su clausura, \bar{A} , está contenida en Ω .

Entonces existe una constante C dependiendo de Ω , A y la dimensión N tal que

$$(5.4.4) \quad \sup_{x \in A} u(x) \leq C \inf_{x \in A} u(x).$$

Demostración.

Hay una observación que resulta de la aplicación de la propiedad de la media. Sea $x \in \Omega$ y consideremos $r > 0$ tal que $B_{4r}(x) \subset \Omega$; el factor 4 es elegido para poder asegurar que si $y, z \in B_r(x)$ entonces, por la propiedad triangular, $B_{3r}(y) \subset \Omega$ y $B_{3r}(z) \subset \Omega$ y también

$$B_r(y) \subset B_{2r}(x) \subset B_{3r}(z).$$

De esta forma aplicamos la propiedad de la media como sigue

$$(5.4.5) \quad u(y) = \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} u(s) ds \leq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s) ds,$$

y

$$(5.4.6) \quad u(z) = \frac{N}{\omega_N (3r)^N} \int_{B_{3r}(z)} u(s) ds \geq \frac{N}{\omega_N (3r)^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s) ds.$$

Por tanto, como las estimaciones (5.4.5) y (5.4.6) son válidas para cada $y, z \in B_r(x)$ se tiene que de (5.4.5)

$$(5.4.7) \quad \sup_{B_r(x)} u \leq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s) ds \equiv \alpha,$$

y de (5.4.6) resulta

$$(5.4.8) \quad 3^{-N} \alpha \equiv \frac{N}{\omega_N (3r)^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s) ds \leq \inf_{B_r(x)} u(z),$$

de donde

$$(5.4.9) \quad \sup_{B_r(x)} u(y) \leq 3^N \inf_{B_r(x)} u(z),$$

Ahora sea A en las hipótesis, es decir, \bar{A} es un compacto de Ω . Sean $y, z \in \bar{A}$ puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo de u en \bar{A} , respectivamente.

Tales puntos los podemos unir por una curva contenida en \bar{A} , por ser conexo. Si tomamos

$$0 < 4r \leq \min\{|a - b| \mid a \in \bar{A}, \quad b \in \mathbf{R}^N - \Omega\}$$

se tiene que todas las bolas con centro en los puntos de la curva y radio $4r$ están contenidas en Ω . De otra parte por la compacidad de la curva uniendo los puntos y, z , se tiene que bastan una cantidad finita, digamos m , de tales bolas para cubrirla. De esta forma empezando por el punto de máximo y aplicando (5.4.9) de forma reiterada, se tiene

$$\sup_A u(y) \leq 3^{Nm} \inf_A u(y),$$

como queríamos demostrar. \square

5.5.- El problema de Dirichlet en dominios generales. Método de Perron-Poincaré.

En \mathbf{R}^2 la solución del problema de Dirichlet con dato continuo en la frontera de un dominio simplemente conexo, se reduce a la solución en la bola unidad y a la aplicación del teorema de la aplicación conforme de Riemann, como se indicó en la sección 3.3.

En dimensión mayor, la solución de la ecuación de Laplace, sólo ha sido calculada para bolas en \mathbf{R}^N , si bien, aprovechando lo visto en la sección 5.3, podríamos obtenerla en algún dominio más con un poco de trabajo adicional. Sin embargo, lo que ocurre en dominios más generales es una incógnita, ya que no se dispone de un teorema similar al de Riemann en \mathbf{R}^2 .

Los resultados de existencia que constituyen esta sección están basados en ideas de sendos trabajos de H. Poincaré en 1887 y 1890 que fueron desarrolladas y simplificadas por O. Perron en 1923. De una forma no demasiado precisa tales ideas pueden resumirse diciendo que se trata de construir la solución como el *supremo* de funciones que, no siendo armónicas, verifican la desigualdad $-\Delta u \leq 0$ y los datos de contorno.

Puede que sorprenda, pero ya tenemos elaborados los útiles necesarios para abordar el problema de Dirichlet en dominios generales con las ideas de Poincaré y Perron expuestas. Precisamente los resultados que vamos a usar son:

- A) La solución del problema de Dirichlet en una bola, es decir, la integral de Poisson.
- B) El principio de comparación que se obtiene del principio del máximo y las propiedades de las funciones armónicas.

Comenzamos con una observación elemental, la cual reproduce los cálculos sobre medias de funciones armónicas hechos anteriormente.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio. Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $-\Delta u \leq 0$ en Ω . El signo menos que ponemos al laplaciano es para observar que así, el operador de Laplace es *monótono* en un sentido que dejaremos claro más adelante. Fijemos $\rho_0 > 0$ de forma que para cada $\rho < \rho_0$, la bola cerrada de centro $x \in \Omega$ y radio ρ verifique, $\bar{B}_\rho(x) \subset \Omega$. Aplicando la identidad de Green (5.1.3),

$$(5.5.1) \quad \int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma(y) = \int_{|x-y| \leq \rho} \Delta u(y) dy \geq 0,$$

por hipótesis, siendo n la normal exterior a la esfera y $d\sigma(y)$ el elemento de área.

Utilizando las coordenadas polares

$$(5.5.2) \quad \begin{aligned} \int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial n}(y) d\sigma(y) &= \rho^{N-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x + \rho\omega) d\sigma(\omega) = \\ &= \rho^{N-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(y) d\sigma(y) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $0 < \rho \leq \rho_0$ y se define la función radial

$$(5.5.3) \quad F(\rho) = \rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(y) d\sigma(y),$$

resulta ser no decreciente en ρ ya que por (5.5.2)

$$\frac{dF}{d\rho}(\rho) \geq 0.$$

Entonces, si $0 < \rho < \rho_0$

$$(5.5.4) \quad \rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(y) d\sigma(y) \leq \rho_0^{1-N} \int_{|x-y|=\rho_0} u(y) d\sigma(y)$$

y como u es continua, pasando al límite en (5.5.4) para $\rho \rightarrow 0$, resulta

$$(5.5.5) \quad u(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=\rho} u(y) d\sigma(y) \leq \rho_0^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=\rho_0} u(y) d\sigma(y).$$

En resumen, hemos probado el resultado siguiente.

5.5.1. Proposición.

Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ es un dominio y $-\Delta u \leq 0$ en Ω , entonces si $r > 0$ es tal que $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$,

$$(5.5.6) \quad u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y).$$

Análogamente a lo visto en la sección anterior, la *desigualdad de la media* (5.5.6) es equivalente a la correspondiente para bolas, es decir,

$$(5.5.6') \quad u(x) \leq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

Comparando con lo visto en la sección 5.4 se tiene

- i) Con la hipótesis $-\Delta u = 0$ se tiene la igualdad en (5.5.6).
- ii) Con la hipótesis $-\Delta u \leq 0$ se tiene desigualdad en el mismo sentido en (5.5.6).

Esta es una de las interpretaciones de la *monotonía* del operador $-\Delta$.

De la proposición (5.5.1) y de las propiedades estudiadas para las funciones armónicas, se sugiere la siguiente definición.

5.5.2. Definición.

Sea $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. Se dice que u es una función subarmónica en Ω si para cada $x \in \Omega$ existe $\rho_0 > 0$ tal que $\bar{B}_{\rho_0}(x) \subset \Omega$ y para todo $0 < r \leq \rho_0$

$$(5.5.7) \quad u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y).$$

Nota. Se ha visto en la proposición 5.5.1. que toda función con segundas derivadas continuas y tal que $-\Delta u \leq 0$, es *subarmónica*.

Como el lector puede intuir, con la *desigualdad de la media* definiendo la condición de subarmonicidad, no es suficiente para poder obtener el recíproco, es decir que una función subarmónica verifique $-\Delta u \leq 0$, pues en general no podremos demostrar que sea \mathcal{C}^2 .

El resultado siguiente extiende el principio del máximo a funciones subarmónicas y de hecho la demostración es reproducir lo que señalamos como relevante en la demostración del teorema 5.4.4.

Designaremos

$$\Sigma(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \mid u \text{ subarmónica}\}$$

5.5.3. Teorema.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio.

(1) Si $u \in \Sigma(\Omega)$ entonces, o bien, u es constante en Ω , o bien,

$$(5.5.8) \quad u(x) < \sup_{\Omega} u, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

(2) Si además Ω es acotado, entonces, o bien, u es constante, o bien,

$$(5.5.9) \quad u(x) < \max_{\partial\Omega} u, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Demostración.

1) Sea $M = \sup_{\Omega} u$. Si $M = \infty$ el resultado es obvio. Suponemos $M < \infty$ y consideramos los conjuntos de Ω

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega \mid u(x) < M\}.$$

Entonces

$$(5.5.10) \quad \begin{cases} \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2. \end{cases}$$

La prueba del resultado acaba cuando probemos que, o bien, Ω_1 , o bien, Ω_2 , es vacío. Utilizamos el argumento de conexión utilizado en la demostración del teorema 5.4.4., es decir, probaremos que Ω_1 y Ω_2 son abiertos, con lo cual (5.5.10) y la conexión de Ω nos permitirán concluir el teorema. La continuidad de u implica que Ω_2 es abierto. Pero Ω_1 también es abierto. En efecto, como $u \in \Sigma(\Omega)$, si $x \in \Omega_1$ y $r_0 > 0$ es tal que $B_{r_0}(x) \subset \Omega$, para $0 < r < r_0$ se verifica

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y),$$

o bien,

$$(5.5.11) \quad 0 \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} (u(y) - u(x)) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} (u(y) - M) d\sigma(y).$$

Como por definición $u(y) - M \leq 0$, (5.5.11) prueba que $u(y) = M$ en la esfera $|x - y| = r$, para cada $0 < r < r_0$. Por tanto, si $|x - y| \leq r$, $u(y) = M$, es decir, Ω_1 es abierto, como queríamos demostrar.

2) Es una consecuencia inmediata del apartado 1), tomando $M = \max_{\bar{\Omega}} u$. En efecto, según el apartado 1), o bien u es constante, o bien

$$u(x) < M, \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

como M no se alcanza en Ω , entonces $M = \max_{\partial\Omega} u$, y se verifica la segunda alternativa de 2). \square

Notas.

- 1) Obsérvese que una función u es armónica en Ω si u y $-u$ son subarmónicas en Ω .
- 2) Son obvios los resultados correspondientes a los anteriores cuando se cambia el sentido de las desigualdades, es decir,

$$(5.5.12) \quad -\Delta u \geq 0 \quad \text{implica} \quad u(x) \geq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y),$$

y el teorema (5.5.3) cambiando máximo por mínimo.

Las funciones continuas verificando la desigualdad de la media (5.5.12), se llaman *funciones superarmónicas*.

Antes de seguir adelante probaremos un resultado de comparación, que es consecuencia inmediata del principio del máximo, y un resultado de E. Hopf que tiene interés y que admite extensiones a contextos más generales.

Principio de comparación.

Sea Ω un dominio de \mathbf{R}^N y sean $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ verificando

- i) $-\Delta u_1(x) \leq -\Delta u_2(x)$ para $x \in \Omega$,
- ii) $u_1(x) \leq u_2(x)$ para $x \in \partial\Omega$.

Entonces $u_1 \leq u_2$ en Ω .

Demostración.

Basta observar que por la hipótesis i), $-\Delta(u_1 - u_2) \leq 0$, es decir, $u_1 - u_2$ es subarmónica, que por la hipótesis ii) verifica

$$\sup_{\partial\Omega} (u_1 - u_2) \leq 0,$$

por el principio del máximo resulta $u_1 - u_2 \leq 0$ en Ω como queríamos demostrar. \square

Se dice que un dominio es de clase \mathcal{C}^k si su frontera es expresable localmente como los ceros de una función con k derivadas continuas. Obsérvese que si un dominio Ω es de clase \mathcal{C}^2 , dado un punto de la frontera $x \in \partial\Omega$, existe una bola $B_r(y) \subset \Omega$ tal que

$$\bar{B}_r(y) \cap \partial\Omega = \{x\}.$$

Los dominios cuya frontera verifica dicha propiedad se dice que verifican *la propiedad de esfera interior*. Es claro que tal propiedad excluye aquellos dominios cuya frontera tenga *picos*.

Principio de Hopf.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio con la propiedad de esfera interior.

Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ verificando

- i) $-\Delta u \geq 0$ en Ω ,
- ii) $u \geq 0$ en Ω .

ii) $u = 0$ en $\partial\Omega$. Entonces si $y \in \partial\Omega$,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(y) < 0, \quad \text{siendo } n \text{ la normal exterior a } \Omega$$

Demostración.

Sea $x_0 \in \partial\Omega$ y sea una bola interior a Ω y tocando a $\partial\Omega$ sólo en x_0 , es decir,

$$B_{2r}(y) \in \Omega, \quad \bar{B}_{2r}(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\},$$

que existe por la hipótesis de regularidad de la frontera.

Definimos la función

$$v(x) = \begin{cases} \frac{r^{N-2}}{1 - 2^{2-N}}(|x - y|^{2-N} - (2r)^{2-N}), & N > 2 \\ \frac{1}{\log 2}(\log 2r - \log |x - y|), & N = 2, \end{cases}$$

que verifica

- i) $v(x) \equiv 1$ en $\partial B_r(y)$ y $v(x) \equiv 0$ en $\partial B_{2r}(y)$
- ii) $0 < v(x) < 1$ si $x \in B_{2r}(y) - B_r(y)$ y

$$|\nabla v(x)| > c > 0, \quad \text{para alguna constante positiva } c.$$

Puesto que $u(x) > 0$ en Ω tenemos que

$$\tau = \inf\{u(x) | x \in \partial B_r(y)\} > 0,$$

poniendo $\tau v = w$ resulta que w satisface

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = 0, & \text{si } x \in B_{2r}(y) - \bar{B}_r(y) \\ w(x) = \tau, & \text{si } x \in B_r(y) \text{ y } w(x) = 0, \text{ si } x \in B_{2r}(y). \end{cases}$$

Puesto que $w \leq u$ sobre las dos esferas que constituyen la frontera de la región anular $B_{2r}(y) - B_r(y)$ y también $-\Delta(w - u) \leq 0$ por hipótesis, podemos aplicar el *principio de comparación* anterior; es decir, $w \leq u$ en $B_{2r}(y) - B_r(y)$, siendo según la construcción hecha, $u(x_0) = w(x_0) = 0$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 - tn)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(x_0 - tn)}{t} = \frac{\partial w}{\partial n}(x_0) = \tau \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) < 0,$$

como se quería demostrar. \square

La importancia de las funciones subarmónicas es que, siendo una clase más amplia que las funciones armónicas, continúa verificándose el principio del máximo, como se ha demostrado en el teorema (5.5.3). Veremos a continuación qué papel juegan las funciones subarmónicas en la demostración de existencia de solución del problema de Dirichlet en un dominio Ω .

El problema que deseamos resolver es

$$(5.5.13) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(y) = f(y), & y \in \partial\Omega, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega). \end{cases}$$

Supongamos $v \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, verificando $v(y) \leq f(y)$ para $y \in \partial\Omega$. Por ejemplo, si se supone Ω acotado, una tal función subarmónica v puede ser seleccionada restando una constante de forma que

$$v(y) \leq \inf_{\partial\Omega} f(y), \quad y \in \partial\Omega.$$

Si suponemos que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ es la solución de (5.5.13), entonces u verifica la propiedad de la media; por tanto, $w(x) = v(x) - u(x)$ verifica también la propiedad de la media (5.5.6), es decir, w es subarmónica y no positiva en la frontera de Ω . Por el principio del máximo (5.5.3) resulta $v(x) \leq u(x)$ en Ω .

Hemos obtenido un resultado interesante que podemos formular como sigue:

Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ es la solución de (5.5.13) y si $v \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ verifica $v(y) \leq f(y)$ para $y \in \partial\Omega$, entonces $v(x) \leq u(x)$ en $x \in \Omega$.

Podemos decir entonces de forma imprecisa, que de haber solución de (5.5.13), debe ser la función subarmónica "máxima", verificando $v(y) \leq f(y)$ sobre la frontera, $\partial\Omega$.

Todo lo anterior hace razonable la conjetura siguiente.

Conjetura.

La solución de (5.5.13) puede definirse por

$$u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad v(y) \leq f(y), \quad y \in \partial\Omega\}$$

Estas son las ideas de Poincaré desarrolladas y extendidas por Perron. A partir de aquí, esta sección se dedica a demostrar que la conjetura es correcta bajo alguna hipótesis de regularidad sobre la frontera de Ω .

Comenzamos estableciendo una construcción que se utilizará sistemáticamente y que está basada *exclusivamente en la solución del problema de Dirichlet en bolas de \mathbf{R}^N* , de acuerdo con lo estudiado en el teorema (5.2.1).

Para $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ consideramos $\rho > 0$ tal que $\bar{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$; definimos la función $u_{x_0\rho}$ de la forma siguiente

$$(5.5.14) \quad u_{x_0\rho}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x \in \Omega - B_\rho(x_0) \\ \text{Solución del problema de Dirichlet} \begin{cases} \Delta v(x) = 0, & |x - x_0| < \rho \\ v(y) = u(y), & |x - x_0| = \rho, \end{cases} \\ \text{para } x \in B_\rho(x_0). \end{cases}$$

En consecuencia, la construcción anterior sirve para hacer "crecer" las funciones subarmónicas, como pone de manifiesto el resultado que sigue, y por esa razón se la conoce como *levantamiento armónico*.

5.5.4. Lema.

Sea $u \in \Sigma(\Omega)$ y $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Consideramos la función $u_{x_0\rho}$ definida por (5.5.14).

Entonces

- i) $u(x) \leq u_{x_0\rho}(x)$ si $x \in \Omega$
- ii) $u_{x_0\rho} \in \Sigma(\Omega)$

Demostración.

i) El resultado es obvio si $x \in \Omega - B_\rho(x_0)$. Por otra parte, en $B_\rho(x_0)$ se tiene que la función $v = u - u_{x_0\rho}$ verifica

$$v(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} v(y) d\sigma(y), \quad \text{si } B_r(y) \subset B_\rho(x_0),$$

además, $u(x) - u_{x_0\rho}(x) = 0$ si $|x - x_0| = \rho$. Por el principio del máximo obtenido en el teorema (5.5.3), se tiene

$$u(x) \leq u_{x_0\rho}(x)$$

ii) Por construcción $u_{x_0\rho}$ es armónica en $B_\rho(x_0)$ y subarmónica en $\Omega - B_\rho(x_0)$; por tanto, se verifica la propiedad de la media (5.5.7). Además si $|x - x_0| = \rho$, entonces $u_{x_0\rho}(x) = u(x)$ y por ser u subarmónica

$$u_{x_0\rho}(x) = u(x) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) d\sigma(y) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u_{x_0\rho}(y) d\sigma(y),$$

por el apartado i) y para r suficientemente pequeño. Resulta entonces que $u_{x_0\rho}$ verifica la desigualdad de la media (5.5.7) en todo punto de Ω , es decir, $u_{x_0\rho} \in \Sigma(\Omega)$. \square

El resultado siguiente pone de manifiesto la flexibilidad de cálculo que se obtiene usando funciones subarmónicas: es una clase cerrada frente a la operación de tomar máximo de una familia finita de funciones.

5.5.5. Lema.

Sean $u_1, u_2, \dots, u_k \in \Sigma(\Omega)$, entonces

$$(5.5.15) \quad v(x) = \max\{u_i(x) \mid i = 1, \dots, k\},$$

es subarmónica en Ω .

Demostración.

Se prueba sin dificultad que $v \in \mathcal{C}(\Omega)$. Además si $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} v(x) &= \max\{u_i(x) \mid i = 1, \dots, k\} \leq \\ &\leq \max\left\{\frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u_i(y) d\sigma(y) \mid i = 1 \dots n\right\} \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} v(y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

es decir, $v \in \Sigma(\Omega)$. \square

Por comodidad de notación denotaremos

$$\Sigma_f(\bar{\Omega}) = \{v \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} \leq f\}.$$

Si f es continua y Ω acotado entonces la función constante $v(y) \equiv \min_{\partial\Omega} f(y)$, está en la clase $\Sigma_f(\bar{\Omega})$, es decir, en este caso $\Sigma_f(\bar{\Omega}) \neq \emptyset$. Esta observación dará sentido a la definición que sigue. De acuerdo con la conjetura hecha, la solución del problema de Dirichlet (5.5.13), debe venir dada por

$$(5.5.16) \quad w(x) = \sup\{v(x) \mid v \in \Sigma_f(\bar{\Omega})\},$$

que está bien definida ya que si $M = \sup_{\partial\Omega} f$, por el Teorema (5.5.3)

$$v(x) \leq M, \quad x \in \bar{\Omega},$$

y así $w(x) \leq M$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.

La primera parte de la conjetura es que w es armónica. Así se establece en el siguiente resultado.

5.5.6. Teorema.

La función w definida por (5.5.16) es armónica en Ω .

Demostración.

Sean $m = \inf_{y \in \partial\Omega} f(y)$ y $M = \sup_{y \in \partial\Omega} f(y)$.

Por definición para cada $y \in \bar{\Omega}$ existe $\{\bar{v}_n\}_{k \in \mathbf{N}} \subset \Sigma_f(\bar{\Omega})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{v}_n(y) = w(y)$$

Si se considera $v_n = \max\{\bar{v}_n, m\}$, se tiene que $v_n \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$. Además por el principio del máximo, teorema (5.5.3), $m \leq v_n \leq M$ en $\bar{\Omega}$ y también

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(y) = w(y),$$

en efecto, si $w(y) = m$ entonces es obvio, si $w(y) > m$, para $n > n_0$ se tiene $\bar{v}_n = v_n$ y se tiene el resultado.

Para $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(y) \subset \Omega$, consideramos para cada $n \in \mathbf{N}$ la función $V_n \equiv (v_n)_{y^r}$ definida por (5.5.14), es decir, la solución del problema de Dirichlet

$$(5.5.17) \quad \begin{cases} \Delta V_n(x) = 0, & x \in B(y, r) \\ V_n(x) = v_n(x), & x \in \Omega - B(y, r). \end{cases}$$

De acuerdo con lo probado en el lema (5.5.4) se tiene $V_n \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y

$$(5.5.18) \quad v_n(x) \leq V_n(x), \quad x \in \Omega$$

$$(5.5.19) \quad v_n(x) = V_n(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Por tanto, $V_n \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$.

Como resumen de lo anterior se tiene

$$(5.5.20) \quad \begin{cases} i) & m \leq V_n \leq M \\ ii) & V_n \in \Sigma_f(\bar{\Omega}) \\ iii) & V_n \text{ es armónica en } \bar{B}_r(y) \\ iv) & \text{Dado que } v_n(y) \leq V_n(y) \leq w(y), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(y) = w(y). \end{cases}$$

Tomando $\rho < r$, en $\bar{B}_\rho(y)$, $\{V_n\}_{k \in \mathbf{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua. (Para la propiedad de equicontinuidad véase el problema 14 al final del capítulo.) El lema (3.2.6), lema de Ascoli-Arzelà, provee una subsucesión uniformemente convergente en $\bar{B}_\rho(y)$, $\{V_{k_n}\}_{k \in \mathbf{N}}$; por el teorema de Harnack (corolario 5.4.8) resulta que el límite uniforme

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{k_n},$$

es una función armónica en $\bar{B}_\rho(y)$.

Pero se tiene además que

$$\begin{cases} v(x) \leq w(x), & x \in \bar{B}_\rho(y) \\ v(y) = w(y). \end{cases}$$

La idea es probar que w coincide con la función armónica v en una bola entorno de cada punto. Supongamos lo contrario:

Si en algún punto $x_0 \in \bar{B}_\rho(y) - \{y\}$ se tuviera

$$(5.5.21) \quad v(x_0) < w(x_0),$$

entonces por definición de w , existe $\bar{v} \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$ tal que $v(x_0) < \bar{v}(x_0)$.

Tomando $w_n = \max\{\bar{v}, V_{k_n}\}$, considerando el correspondiente levantamiento armónico, $W_n = (w_n)_{y\rho}$, dado por la fórmula (5.5.14) y repitiendo el proceso previo, encontraríamos una función armónica \bar{w} , límite uniforme de alguna subsucesión $\{W_{k_n}\}_{k \in \mathbf{N}}$. Entonces

$$v \leq \bar{w} \leq w, \quad \text{en } B_\rho(y) \quad \text{y} \quad v(y) = \bar{w}(y) = w(y).$$

Por el principio del máximo de nuevo, resulta $v(x) = \bar{w}(x)$ para $x \in B_\rho(y)$.

Pero esto contradice que $v(x_0) < \bar{v}(x_0)$.

Por tanto, $w = v$ sobre $B_\rho(y)$, resultando w armónica en $B_\rho(y)$. Realizando el mismo proceso en cada punto tenemos que w es armónica en Ω , como queríamos demostrar. \square

Tratamos de verificar la segunda parte de la conjetura, es decir, que w verifica el dato en la frontera de Ω . Más precisamente, se trata de obtener qué condiciones sobre la geometría de la frontera hay que imponer para obtener dicho resultado.

Perron observó que la condición geométrica debe ser aquella que permita construir una *barrera*, es decir una función subarmónica y continua en $\bar{\Omega}$ satisfaciendo ciertas propiedades locales que precisamos en la siguiente definición.

5.5.7. Definición.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio y sea $z \in \partial\Omega$. Se dice que una función $b_z(x)$ es una *barrera* en z si

$$(5.5.22) \quad \begin{cases} 1) & b_z \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ 2) & b_z(z) = 0 \quad \text{y} \quad b_z(x) < 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad x \neq z. \end{cases}$$

A los puntos $z \in \partial\Omega$ que admiten una barrera, les llamaremos *puntos regulares*.

Al final se darán condiciones geométricas suficientes para construir barreras. Por el momento pasamos a demostrar el resultado que culmina la prueba de existencia para el problema de Dirichlet bajo la hipótesis de existencia de barreras. El resultado es de carácter puntual.

5.5.8. Teorema.

Sea Ω un dominio acotado en \mathbf{R}^N y sea $z \in \partial\Omega$ un punto regular. Sea w la función armónica definida por (5.5.16). Entonces

$$(5.5.23) \quad \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow z} w(x) = f(z)$$

Demostración.

Probaremos en primer lugar que

$$(5.5.24) \quad \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow z} w(x) \geq f(z).$$

Para ello consideramos una barrera $b_z(x)$; para $\varepsilon > 0$ y $k > 0$ dados, la función

$$u(x) = f(z) - \varepsilon + kb_z(x),$$

es subarmónica en Ω y continua en $\bar{\Omega}$. Además por (5.5.22) se tiene

$$(5.5.25) \quad \begin{cases} u(x) \leq f(z) - \varepsilon, & \text{si } x \in \partial\Omega \\ u(z) = f(z) - \varepsilon. \end{cases}$$

Por continuidad, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x - z| < \delta$ y $x \in \partial\Omega$ se tiene

$$(5.5.26) \quad f(x) > f(z) - \varepsilon,$$

es decir,

$$(5.5.27) \quad u(x) < f(x).$$

Por otra parte, de (5.5.22) se obtiene también que

$$\lambda(\delta) = \sup\{b_z(x) \mid x \in \partial\Omega, \quad |x - z| \geq \delta\} < 0$$

Eligiendo k suficientemente grande podemos conseguir que $u(x) \leq f(x)$ para $x \in \partial\Omega$, es decir, $u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$. Por consiguiente, de la definición de w , se concluye que

$$(5.5.28) \quad u(x) \leq w(x), \quad x \in \Omega.$$

Entonces

$$f(z) - \varepsilon \equiv \lim_{x \in \Omega, x \rightarrow z} u(x) \leq \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow z} w(x),$$

para todo $\varepsilon > 0$. Es decir, tenemos (5.5.24).

Para acabar hay que probar la desigualdad en el otro sentido, es decir,

$$(5.5.29) \quad \limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow z} w(x) \leq f(z).$$

Dada $U \in \Sigma(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ tal que $-U \leq -f$ sobre $\partial\Omega$, definimos $v(x)$ como el ínfimo puntual sobre esta clase de funciones U . Si $u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})$ entonces $u - U \leq 0$ en $\partial\Omega$, y por el principio del máximo $u(x) - U(x) \leq 0$ sobre Ω .

Por tanto,

$$w(x) = \sup_{u \in \Sigma_f(\bar{\Omega})} u(x) \leq \inf U(x) = v(x), \quad x \in \Omega,$$

que implica

$$\limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow z} w(x) \leq \limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow z} v(x) = - \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow z} (-v(x)) \leq f(z),$$

por la primera parte de la demostración.

Las desigualdades (5.5.24) y (5.5.29) prueban el teorema. \square

Como resumen de todo lo anterior se tiene que si todo punto $z \in \partial\Omega$ es un punto regular, en el sentido de la definición (5.5.7), los teoremas (5.5.6) y (5.5.8) establecen la existencia de solución $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, del problema de Dirichlet (5.5.13), cualquiera que sea $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Diremos en este sentido que *el problema de Dirichlet es soluble en sentido clásico*.

Recíprocamente, si para cada $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ el problema (5.5.13) tiene solución clásica, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, resolviendo para cada $z \in \partial\Omega$ en concreto el problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = -|x - z|, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

su solución $b_z(x)$ es una barrera. Es decir, si el problema de Dirichlet (5.5.13) es soluble en sentido clásico, todo punto de la frontera es *regular* en el sentido de la definición (5.5.7).

Las observaciones anteriores las recogemos en el enunciado siguiente.

5.5.9. Teorema.

Dado $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio acotado. Son equivalentes:

- A) *El problema de Dirichlet (5.5.13) admite solución $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ para cada $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.*
- B) *Todo punto $z \in \partial\Omega$ es un punto regular.*

El paso final de esta sección será sustanciar desde el punto de vista geométrico el concepto de punto regular.

Caso $N = 2$.

La condición geométrica en el caso de dominios planos es muy general de acuerdo con la generalidad que los resultados de variable compleja permiten. Obsérvese que el resultado que se expone a continuación es válido incluso en dominios que no sean simplemente conexos.

Condición geométrica.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ un dominio y $z_0 \in \partial\Omega$ tal que existe una función continua

$$z : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}^2,$$

verificando

- i) $z(0) = z_0$
- ii) z es inyectiva, es decir, define un arco simple.
- iii) $z(t) \notin \bar{\Omega}$ si $t \neq 0$.

Entonces z_0 es un punto regular.

Observamos que las condiciones i), ii) y iii) pueden interpretarse como que *el punto z_0 es accesible desde el exterior por un arco continuo simple*.

Indicamos cómo construir una barrera en las hipótesis i), ii) y iii). Con centro en z_0 se considera un círculo C de radio menor que uno, de forma que

$$\partial C \cap \{z(t) \mid t \in [0, 1]\} \neq \emptyset,$$

es decir, que corte a la gráfica de la función z . Recorriendo en sentido creciente de t la gráfica de z , sea

$$t_1 = \inf\{t \mid z(t) \in \partial C\},$$

así $z(t_1) \in \partial C$ y $C - \{z(t) \mid t \in [0, t_1]\}$ es simplemente conexo y por tanto se puede definir una rama de $\arg(z - z_0)$. (Consúltese el libro *L. Ahlfors "Complex Variables" Mc Graw Hill 1979* para todo lo referente a la última afirmación.)

Entonces la función

$$b_{z_0}(z) = -\Re \left(\frac{1}{\log |z - z_0|} \right)$$

es una barrera para z_0

Caso $N > 2$.

No se tiene ninguna condición tan general como la vista en $N = 2$. Daremos una bastante útil que es satisfecha por todos los dominios con frontera regular.

Condición de esfera exterior.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ y sea $y \in \partial\Omega$. Se dice que Ω satisface la condición de esfera exterior en el punto y si existe $B_r(x_y)$ tal que

$$\bar{\Omega} \cap \bar{B}_r(x_y) = \{y\}$$

Si Ω tiene la propiedad de esfera exterior en y entonces y es un punto regular, siendo una barrera en y la función

$$b_y(x) = r^{2-N} - |x - x_y|^{2-N}.$$

Invitamos al lector a estudiar la condición de cono exterior, mucho más general, que se da en el problema 21 al final del capítulo.

A modo de epílogo de este apartado se obtiene la siguiente consecuencia obvia del teorema (5.5.9).

5.5.10. Corolario.

Si Ω es un dominio tal que los puntos de $\partial\Omega$ son regulares, entonces existe la función de Green $G(x, y)$. Es decir, existe

$$G : \Omega \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbf{R},$$

verificando para cada $x \in \Omega$ fijo

i) $\Delta_y(G(x, y) - v(|x - y|)) = 0$, si $y \in \Omega$, donde $v(|x - y|)$ es definida por (5.1.12).

ii) $G(x, y) = 0$, si $y \in \partial\Omega$.

Además G es única.

Demostración.

Basta observar que para cada $x \in \Omega$, por el teorema (5.5.9), el problema

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0, & \text{si } y \in \Omega \\ \Phi(x, y) = -v(|x - y|), & \text{si } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución.

La función de Green se tiene entonces como

$$G(x, y) = v(|x - y|) + \Phi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \times \bar{\Omega} \quad \square$$

5.6.- La ecuación de Poisson.

Nos vamos a ocupar ahora de la ecuación no homogénea para el laplaciano, conocida como *ecuación de Poisson*.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio. Supondremos que la frontera tiene todos sus puntos regulares, en el sentido de la definición (5.5.7). Supondremos también que Ω es un dominio acotado.

Tratamos de resolver el problema

$$(5.6.1) \quad \begin{cases} \Delta v(x) = F(x), & x \in \Omega \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega). \end{cases}$$

El estudio hecho en la sección anterior permite calcular u_1 solución del problema

$$(5.6.2) \quad \begin{cases} \Delta w(x) = 0, & x \in \Omega \\ w(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \quad f \in \mathcal{C}(\partial\Omega), \end{cases}$$

por tanto, basta con resolver el problema

$$(5.6.3) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ya que por linealidad la solución de (5.6.1) será $v(x) = w(x) + u(x)$, es decir, la suma de las soluciones de (5.6.2) y (5.6.3).

Además el corolario (5.5.10) da la función de Green para nuestro problema. La fórmula de representación (5.1.26) para una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ que valga cero en la frontera $\partial\Omega$ se convierte en

$$(5.6.4) \quad u(x) = \int_{\Omega} F(y)G(x, y)dy,$$

de manera que tal función u , es el candidato a ser la solución del problema (5.6.3).

En este sentido, y con esta conjetura en mente, hemos de encontrar la solución a varios problemas:

- A) ¿Cual es la regularidad suficiente para que la función u definida por (5.6.4) sea de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$?
- B) Supuesta conocida la regularidad suficiente para F , hemos de probar que para la función u definida por (5.6.4) se verifica

$$(5.6.5) \quad \Delta u(x) = \Delta \int_{\Omega} F(y)G(x, y)dy \equiv F(x),$$

pero obsérvese que como $G(x, y) = v(|x - y|) + \Phi(x, y)$ con Φ armónica, probar (5.6.5) es lo mismo que establecer

$$(5.6.6) \quad \Delta \int_{\Omega} F(y)v(|x - y|)dy \equiv F(x),$$

A).- Regularidad del segundo miembro.

Aunque pueda parecer sorprendente, para que la solución tenga derivadas continuas no basta con suponer que la función F sea sólo continua. A tal efecto damos un contraejemplo que demuestra la afirmación anterior. El ejemplo está tomado del libro *V.P. Mijailov "Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales" Ed. MIR, Moscú 1978 pg. 270.*

Trabajaremos en la bola de radio $\frac{1}{2}$ de \mathbf{R}^N , B ; designamos por $|x|$ la norma euclídea de x y por x_1, x_2 sus dos primeras coordenadas.

Sea la función

$$(5.6.7) \quad u(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\log |x|)^{\frac{1}{2}}, & 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es claro que la función $u \in \mathcal{C}^\infty$ fuera del origen y es continua en todo punto. Si calculamos la derivada parcial de orden dos respecto a x_1 dos veces, se obtiene para

$x \neq 0$

$$(5.6.8) \quad \begin{aligned} u_{x_1 x_1}(x) &= 2(-\log |x|)^{\frac{1}{2}} + \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^4(-\log |x|)^{\frac{1}{2}}} - \\ &- \frac{2x_1^2}{|x|^2(-\log |x|)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2(-\log |x|)^{\frac{1}{2}}} - \\ &- \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\log |x|)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} u_{x_1 x_1}(x) = \infty,$$

es decir la función u no es de clase dos en $x = 0$.

Si se calcula el laplaciano fuera del punto $x = 0$ se obtiene

$$(5.6.9) \quad \Delta u(x) = \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{2|x|^2} \left(\frac{N+2}{(-\log |x|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(-\log |x|)^{\frac{3}{2}}} \right) \equiv \tilde{F}(x),$$

por lo que se obtiene

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \tilde{F}(x) = 0,$$

entonces definiendo

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{F}(x), & 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

se tiene que u satisface $\Delta u(x) = F(x)$ con $F \in \mathcal{C}(B)$ y u no siendo de clase dos. Es decir, u satisface el problema

$$(5.6.10) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = F(x), & x \in B \\ u(x) = (x_1^2 - x_2^2)(\log 2)^{\frac{1}{2}}, & |x| = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(Se remite al lector al ejercicio 23 del final del capítulo para completar los cálculos sobre regularidad.)

Cabría la posibilidad de que hubiera otra solución de la ecuación que fuese de clase dos; para cerciorarnos que no es así probamos el siguiente resultado, que tiene interés en sí mismo pues da un criterio sobre *eliminación de singularidades* de funciones armónicas.

5.6.1. Teorema.

Sea u armónica en $\Omega - \{x_0\}$, $x_0 \in \Omega$. Suponemos que

$$(5.6.11) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x - x_0)} = 0,$$

siendo $v(|x - x_0|)$ definida en (5.1.12).

Entonces,

i) Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = A$

ii) La función que resulta de extender u a x_0 con el valor A es armónica en Ω .

Demostración.

Supondremos $N > 2$ por simplicidad de escritura. El caso $N = 2$ puede ser un ejercicio interesante.

Sea $B_r(x_0) \subset \Omega$ y consideremos $u_1 \in C^2(B_r(x_0))$ solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in B_r(x_0) \\ u_1(x) = u(x), & \text{si } |x - x_0| = r. \end{cases}$$

Entonces $w(x) = u(x) - u_1(x)$ es armónica en $B_r(x_0) - \{x_0\}$ y además de (5.6.11), definiendo $\gamma(x) = w(x)|x - x_0|^{N-2}$, verifica

$$(5.6.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 0.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$z_1(x) = \frac{\varepsilon}{|x - x_0|^{N-2}} + w(x), \quad z_2(x) = \frac{\varepsilon}{|x - x_0|^{N-2}} - w(x),$$

y eligiendo $\rho > 0$ suficientemente pequeño, (5.6.12) implica que $z_1 > 0$ y $z_2 > 0$ en $|x - x_0| = \rho$. Aplicando el principio del máximo a la región $\rho \leq |x - x_0| \leq r$, resultan

$$z_1(x) \geq 0, \quad z_2(x) \geq 0, \quad \text{en } \rho \leq |x - x_0| \leq r,$$

pero entonces se concluye que

$$|w(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|x - x_0|^{N-2}}, \quad \rho \leq |x - x_0| \leq r,$$

para cada $\varepsilon > 0$, por consiguiente, $w(x) \equiv 0$ si $x \neq 0$, dado que podemos hacer el argumento con ρ todo lo próximo a cero que se necesite para englobar a cada punto $x \neq 0$. Pero entonces u es igual a la función armónica u_1 en $B_r(x_0) - \{x_0\}$, de donde definiendo $A = u_1(x_0)$ está demostrado el teorema. \square

Podemos resumir el resultado anterior diciendo que si una función es armónica en un abierto menos en un punto, su singularidad tiene que ser al menos equivalente a la de la solución fundamental v definida en (5.1.11).

Aplicamos el resultado anterior para concluir con el ejemplo.

Supongamos que el problema (5.6.10) tuviese una solución clásica $v(x)$. Entonces la función $w(x) = u(x) - v(x)$ es armónica en $B - \{0\}$ y continua en todo B . Por

el teorema (5.6.1) la función w se podría extender a una función armónica en B , en particular a una función de \mathcal{C}^2 , y como también $v(x)$ es \mathcal{C}^2 se concluiría que $u \in \mathcal{C}^2$, lo que es una contradicción. Es decir, hemos demostrado que

*El problema (5.6.10) es un ejemplo de problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson con segundo miembro continuo que **no tiene solución de clase dos**.* La función u , no obstante, verifica la ecuación punto a punto, y es solución en un sentido débil.

La regularidad que se requerirá es que el segundo miembro F verifique una *condición de Hölder* que pasamos a definir.

Diremos que una función $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ satisface una condición de Hölder local de orden $0 < \alpha < 1$ si para cada punto $x \in \Omega$ y cada bola $B_r(x) \subset \Omega$, existe $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

Denotaremos por $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ la clase de funciones que satisfacen la condición de Hölder en Ω .

Cuando $\alpha = 1$ se dice que la función F es localmente *lipschitziana*. Por ejemplo, si se supone $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, la aplicación del teorema del valor medio implica que F es localmente lipschitziana.

Es evidente que toda función que verifica una condición de Hölder, es continua.

Dejamos al lector la comprobación de que la función $F(x)$ en el ejemplo no es de tipo Hölder en el origen.

B).- Existencia de solución clásica para el problema (5.6.3).

Antes de abordar la demostración de (5.6.6) obtenemos las estimaciones que se necesitan de la *solución fundamental*, $v(|x - y|)$, definida en (5.1.12). Por cálculo directo se obtienen,

$$(5.6.13) \quad v_{x_i}(|x - y|) = \frac{1}{\omega_N}(x_i - y_i)|x - y|^{-N}, \quad i = 1, \dots, N$$

y como consecuencia

$$(5.6.14) \quad |\nabla v(|x - y|)| \leq \frac{1}{\omega_N}|x - y|^{1-N}.$$

Análogamente las derivadas segundas

$$(5.6.15) \quad v_{x_i x_j}(|x - y|) = \frac{1}{\omega_N}(|x - y|^2 \delta_{ij} - N(x_i - y_i)(x_j - y_j))|x - y|^{-(N+2)}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

siendo δ_{ij} las *deltas de Kronecker*, es decir, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ii} = 1$. Como consecuencia de (5.6.15) se tiene

$$(5.6.16) \quad |v_{x_i x_j}(|x - y|)| \leq C_N|x - y|^{-N}, \quad i, j = 1 \dots N$$

Las fórmulas (5.6.15) y (5.6.16) ponen de manifiesto que las derivadas segundas de la solución fundamental *no son integrables*. En efecto, si se toman coordenadas polares con origen en el punto x , resultaría que la integral en una pequeña bola centrada en x no es finita,

$$\int_{B_r(x)} |v_{x_i x_j}(|x-y|)| dy \approx c_N \int_0^r \frac{d\rho}{\rho} = \infty$$

5.6.2. Teorema.

Sea $F \in \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$ y sea

$$(5.6.17) \quad w(x) = \int_{\Omega} F(y) v(|x-y|) dy.$$

Entonces

i) $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

ii) Se verifica

$$(5.6.18) \quad \Delta w(x) = \Delta \int_{\Omega} F(y) v(|x-y|) dy \equiv F(x),$$

Demostración.

ETAPA 1.- $w \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

Sea $M = \sup_{x \in \Omega} |F(x)|$.

Consideramos

$$g_i(x) = \int_{\Omega} v_{x_i}(|x-y|) F(y) dy,$$

que por (5.6.14) está bien definida.

Queremos demostrar que

$$w_{x_i}(x) \equiv g_i(x),$$

y como no estamos en las hipótesis de regularidad de los teoremas habituales de cálculo, procedemos por *regularización* de la singularidad de $v(|x-y|)$ y por paso al límite. Más precisamente, tomamos una función

$$\eta : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R},$$

tal que $\eta \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ y

- (1) $0 \leq \eta(t) \leq 1$
- (2) $\eta(t) = 0$ si $0 \leq t \leq 1$ y $\eta(t) = 1$ si $t > 2$
- (3) $0 \leq \eta'(t) \leq 2$, $t \geq 0$.

Definimos para $\varepsilon > 0$ la función

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} F(y)v(|x-y|)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy,$$

a la cual le podemos aplicar los teoremas clásicos de derivación bajo el signo integral, ya que la función

$$v(|x-y|)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),$$

por tanto, $w_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Además

$$\begin{aligned} |g_i(x) - w_{\varepsilon x_i}(x)| &= \left| \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(|x-y|) \left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) \right) F(y) dy \right| \leq \\ &\leq M \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \left(|v_{x_i}(|x-y|)| + \frac{2}{\varepsilon} |v(|x-y|)| \right) dy \leq MC_N \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir,

$$w_\varepsilon \rightarrow w(x), \quad \text{uniformemente en } \bar{\Omega} \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

y

$$w_{\varepsilon x_i} \rightarrow g_i(x), \quad \text{uniformemente en } \bar{\Omega} \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

y por tanto, $w \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ siendo $w_{x_i} = g_i$ para $i = 1, \dots, N$.

Observemos que para este paso de la demostración no se ha usado la regularidad de F , sino simplemente su acotación.

ETAPA 2.- $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y verifica la ecuación.

Consideremos una bola suficientemente grande de forma que $B_R \supset \Omega$ y F extendida por cero a todo B_R , función que denotaremos también por F . Es obvio que

$$w(x) = \int_{\Omega} F(y)v(|x-y|)dy = \int_{B_R} F(y)v(|x-y|)dy,$$

si $x \in \Omega$.

Como en la etapa previa consideraremos la regularización

$$w_{i\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} F(y)v_{x_i}(|x-y|)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy,$$

siendo η como antes. Es claro que $w_{i\varepsilon} \in C^1(\Omega)$ y además fijado $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_{i\varepsilon}}{\partial x_j}(x) &= \int_{\Omega} F(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_{x_i}(|x-y|) \eta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right) dy = \\
 &= \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_{x_i}(|x-y|) \eta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right) (F(x) - F(y)) dy - \\
 (5.6.19) \quad &- F(x) \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_{x_i}(|x-y|) \eta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right) dy = \\
 &= \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_{x_i}(|x-y|) \eta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \right) (F(x) - F(y)) dy - \\
 &- F(x) \int_{\partial B_R} v_{x_i}(|x-y|) \eta \left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right) \nu_j(y) d\sigma(y).
 \end{aligned}$$

No podemos escribir directamente la integral de las derivadas segundas, pues como hemos visto la integral diverge. Por esta razón consideramos la función

$$(5.6.20) \quad g_{ij}(x) = \int_{B_R} v_{x_i x_j}(|x-y|) (F(x) - F(y)) dy - F(x) \int_{\partial B_R} v_{x_i}(|x-y|) \nu_j(y) d\sigma(y),$$

que como puede verse está bien definida ya que la singularidad de las derivadas segundas es compensada por la regularidad de F . El segundo término aparece como una integración formal y está justificado por los cálculos previos que dan origen a (5.6.19). Tomando ε menor que la distancia de x a la frontera $\partial\Omega$, resulta

$$\begin{aligned}
 |g_{ij}(x) - \frac{\partial w_{i\varepsilon}}{\partial x_j}(x)| &\leq \\
 &\leq \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|^\alpha} \int_{|x-y| < 2\varepsilon} \left(|v_{x_i x_j}(|x-y|)| + \frac{2}{\varepsilon} |v_{x_i}(|x-y|)| \right) |x-y|^\alpha dy \leq \\
 &\leq C(F, N)(2\varepsilon)^\alpha,
 \end{aligned}$$

siendo

$$C(F, N) = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x-y|^\alpha} c(\alpha, N).$$

De esta forma se tiene que

- i) $\frac{\partial w_{i\varepsilon}}{\partial x_j}(x) \rightarrow g_{ij}(x)$ uniformemente en Ω cuando $\varepsilon \rightarrow 0$
- ii) $w_{i\varepsilon}(x) \rightarrow w_{x_i}(x)$ uniformemente en Ω cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Por tanto, $w \in C^2(\Omega)$ siendo sus segundas derivadas dadas por (5.6.20), es decir,

$$w_{x_i x_j}(x) = \int_{B_R} v_{x_i x_j}(|x-y|) (F(x) - F(y)) dy - F(x) \int_{\partial B_R} v_{x_i}(|x-y|) \nu_j(y) d\sigma(y),$$

entonces en particular se tiene

$$\Delta w(x) = F(x) \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int_{|x-y|=R} \sum_{i=1}^N \nu_i^2(y) d\sigma(y) \equiv F(x),$$

ya que la solución fundamental es armónica fuera de la singularidad.

De esta forma el teorema queda establecido. \square

Como resumen de lo estudiado hasta aquí podemos formular el siguiente resultado.

5.6.3. Teorema.

Sea Ω dominio acotado de \mathbf{R}^N tal que cada punto de $\partial\Omega$ es regular. Entonces si $F \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ y $f \in C(\partial\Omega)$, el problema (5.6.1) tiene una única solución

$$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$$

El lector no tendrá dificultad de escribir ahora la fórmula explícita de la solución en términos de la función de Green y del correspondiente núcleo de Poisson.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

1.

Obténganse las soluciones radiales de la ecuación

$$\Delta u(x) + m^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

2.

Utilícense las soluciones radiales del problema anterior para representar las soluciones de $\Delta u + m^2 u = 0$ en forma integral.

3.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N > 2$ y $f \in C(\Omega)$. Determinénse los valores de α tales que

$$u(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy$$

es continuamente diferenciable.

4.

Calcúlese la solución del problema $\Delta u = 1$ en el disco de radio R con valor de contorno en $|x| = R$ cero.

Indicación.- Búsquese solución radial.

5.

Resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u(x, y, z) = 1, & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0 \\ u(x, y, z) = 0, & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z < 0. \end{cases}$$

6.

Sea el problema

$$\begin{cases} \Delta u = F(x), & x \in \Omega \subset \mathbf{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

- i) Dese la condición de compatibilidad para que tenga solución.
 ii) Pruébese que la solución es única salvo constantes aditivas.

7.

Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, tal que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, que se supone de clase uno. Pruébese que para todo $\varepsilon > 0$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dy + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dy.$$

8.

Determinése la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano superior, \mathbf{R}_+^2 , por el método de simetría. Determinése el núcleo de Poisson para el semiplano.

Según lo anterior considérese el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \\ u(x, 0) = e^{-\pi x^2}, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Probar que $\max_{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]} u(x, y) = 1$ y que $u(x, y) > 0$ si $y > 0$.

9.

Resuélvase el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, 0) = 1, & -1 < x < 1 \\ u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0. \end{cases}$$

10.

Sea u función armónica en $B_1(0) \subset \mathbf{R}^N$ y sea $P_2(x)$ su polinomio de Taylor de grado 2. Pruébese que

$$P_2(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} P_2(x) d\sigma(x), \quad \text{para } r \text{ suficientemente pequeño.}$$

11.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio acotado conteniendo el origen. Sea $\Omega_0 = \Omega - \{0\}$ y sean u y v funciones armónicas en Ω_0 y continuas en $\Omega_1 = \Omega_0 \cup \partial\Omega$ tales que:

- i) $u(x) \leq v(x)$ si $x \in \partial\Omega$
- ii) $|u(x)| \leq M, |v(x)| \leq M$ si $x \in \Omega_1$

Utilícese adecuadamente el principio del máximo para demostrar que

$$u(x) \leq v(x), \quad x \in \Omega_1.$$

12.

Sea Ω dominio en \mathbf{R}^N y $p \in \Omega$. Sea u función armónica y acotada en $\Omega - \{p\}$. Demostrar que se puede definir un valor $u(p)$ de forma que la función extendida es armónica en Ω .

13.

Considérese el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 = 1 \\ u(0, 0) = 1. \end{cases}$$

Estúdiense si tiene solución.

14.

Sea u función armónica en $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ y sea $x_0 \in \Omega$. Pruébese que

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{N}{d(x_0)} \sup_{x \in \Omega} |u|,$$

donde $d(x_0) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x_0 - y|$.

Indicación.- Usar la expresión de u como integral de Poisson de sus valores sobre esferas centradas en x_0 , derivar y estimar para cada esfera. Advertir cuál es el radio máximo de tales esferas.

15.

Sea $u \in \mathcal{C}^2$ en $|x| < R$, $u \in \mathcal{C}$ en $|x| \leq R$, $u \geq 0$ y $\Delta u = 0$ en $|x| < R$. Probar que si $|x| < R$

$$\frac{R^{N-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{N-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{N-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{N-1}} u(0).$$

(Desigualdad de Harnack)

16.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio acotado y sea $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de funciones armónicas en Ω tales que $u_n(x) = f_n(x)$ si $x \in \partial\Omega$, frontera de Ω . Pruébese que si $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente en $\partial\Omega$, entonces $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente a una función armónica u en Ω .

17.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio acotado y $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ sucesión de funciones armónicas uniformemente acotadas, es decir,

$$\sup_{x \in \Omega} |u_n(x)| \leq M, \quad n \in \mathbf{N}$$

Probar que si $K \subset \Omega$ es un compacto, existe una subsucesión que converge en K .

18.

Sea la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u(x) + c(x)u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde se supone que $c(x) < 0$. Probar que tiene solución única. Dese un ejemplo en el que siendo $c(x) > 0$ no haya unicidad.

19.

Sea $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x| < \frac{\pi}{2}, \quad |y| < \frac{\pi}{2}\}$. Probar que el problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) + u(x) = 0, & x \in Q \\ u(x) = g(x), & x \in \partial Q, \end{cases}$$

tiene a lo más una solución.

¿Hay unicidad para el problema de Dirichlet sobre

$$Q_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x| < \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad |y| < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\}?$$

20.

Encontrar los autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, & Q = [0, a] \times [0, b] \\ u = 0, & \partial Q. \end{cases}$$

21.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado tal que para cada $y \in \partial\Omega$ existe un cono exterior, K , con vértice y , es decir, $\bar{\Omega} \cap \bar{K} = \{y\}$. Probar que existe una barrera en y de la forma

$$b_y(x) = |x - y|^\alpha f(\langle x, y \rangle).$$

Indicación.- Pásese a coordenadas polares con origen en y

22.

Calcular la función de Green para el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace en una región anular, es decir, comprendida entre dos esferas concéntricas.

23.

Demostrar los resultados de regularidad de la función definida por (5.6.8), en particular, que su laplaciano es una función continua.

24.

Probar que una solución de

$$\Delta u - u^2 = 0$$

en un dominio Ω , no puede tomar su máximo en Ω , salvo que $u \equiv 0$.

25.

Sea u solución dos veces continuamente diferenciable en $|x| < 1$ y continua en $|x| \leq 1$ del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = u^2 + f(|x|), & x \in \mathbf{R}^N, \quad |x| < 1 \\ u(x) = 1, & |x| = 1, \end{cases}$$

donde $f(|x|) \geq 0$ y continuamente diferenciable. Calcular el máximo de u en $|x| \leq 1$ y demostrar que no depende de f . (Se pide demostrar los resultados que se usen).

26.

Sea u solución dos veces continuamente diferenciable en $|x| < 1$ y continua en $|x| \leq 1$ del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = u^4, & |x| < 1 \\ u(x) = 1, & |x| = 1 \end{cases}$$

¿Puede alcanzar su máximo en $|x| < 1$, si $x \in \mathbf{R}^2$? ¿Y si $x \in \mathbf{R}^3$?

27.

Sean $u_0(x, y, z)$, $u_1(x, y, z)$ funciones armónicas en \mathbf{R}^3 .

De acuerdo con lo estudiado en la §4.2, calcular la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas,

$$(PC) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, & (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \\ u_t(x, y, z, 0) = u_1(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

Razónese la respuesta.

28.

Sea Q el cubo de lado 6 centrado en el origen de \mathbf{R}^3 y sea ∂Q su frontera. Calcular $u(0, 0, 0, 1)$ siendo u la solución del problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, & (x, y, z, t) \in Q \times \mathbf{R} \\ u(x, y, z, t) = 0, & (x, y, z) \in \partial Q, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, z, 0) = x - z + 3y, & (x, y, z) \in Q \\ u_t(x, y, z, 0) = x + z - y, & (x, y, z) \in Q \end{cases}$$

Razónese la respuesta.

29.

a) Aplicar el método de separación de variables para calcular los autovalores y autofunciones del problema

$$\begin{cases} F_{xx} + F_{yy} = \lambda F, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ F(0, y) = F(1, y) = F(x, 0) = F(x, 1) = 0, \end{cases}$$

Solución. $\lambda_{j,k} = -(k^2 + j^2)\pi^2$, $F_{j,k}(x, y) = \sin k\pi x \sin j\pi y$.

b) Aplicar el resultado anterior para resolver por separación de variables la ecuación de ondas.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t \in \mathbf{R} \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$

30.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ dominio regular y acotado. Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \Delta u = u^3 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostrar que la única solución del problema anterior es $u \equiv 0$.

Indicación: Multiplicar la ecuación por u , y aplicar las fórmulas de Green.

31.

Consideramos el problema de Dirichlet

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \subset \mathbf{R}^2 \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f(x)$ es una función acotada definida en $\partial\Omega$.

- a) Si Ω es el disco unidad, $|x| < 1$, exprese el problema en coordenadas polares y resuélvase cuando $u(1, \theta) = \cos^2 \theta$
- b) Sean u_1 y u_2 soluciones del problema (P) con datos f_1 y f_2 respectivamente. ¿Qué problema verifica $v = u_1 + u_2$?
- c) Si $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 1], \quad y = 1 \\ 0 & y \in [-1, 1], \quad x = -1 \\ 0 & x \in [-1, 1], \quad y = -1 \\ 3 & y \in [-1, 1], \quad x = 1 \end{cases}$$

- ¿cual es el valor de $u(0, 0)$?
- d) Determinése razonadamente el valor de

$$\int_{x^2+y^2 < \frac{1}{10}} u(x, y) dx dy$$

para la solución u de c).

CAPITULO 6

LA ECUACION DEL CALOR

Introducción

La ecuación del calor,

$$u_t - \Delta u = F(x, t),$$

es el modelo más sencillo de ecuación de difusión y fue obtenida en la sección 1.3 con detalle. Hemos visto en la sección 2.3 cómo el problema de Cauchy para la ecuación del calor con datos en $t = 0$ es un problema característico. En la sección 3.4 se ha estudiado el comportamiento de la difusión de calor en un medio unidimensional, advirtiendo que se trata de un modelo *irreversible* y viendo cómo la ecuación del calor *mejora* los datos, es decir, tiene efecto *regularizante*.

En este capítulo se proyecta estudiar el problema de Cauchy en \mathbf{R}^N comprobando que es compatible, si bien es necesaria una condición *unilateral* para obtener solución única, por ser característico.

A fin de poder demostrar resultados de unicidad se establecerá el *principio del máximo para la ecuación del calor*.

La obtención de la *solución fundamental* es el objeto de la primera sección. Con ella obtendremos una solución del problema de Cauchy homogéneo. Se estudia también un contraejemplo de Tychonoff que pone de manifiesto la no unicidad.

La sección 6.2 se dedica a estudiar el principio del máximo en dominios acotados y a los teoremas de unicidad más simples.

La solución del problema no homogéneo será el objeto de la sección tercera y en la sección cuarta se estudiará el resultado general de unicidad de Widder. Esta última sección se puede reducir en una primera lectura a informarse del resultado, obviando las demostraciones.

Se cierra el capítulo con un apartado de ejercicios.

6.1.- Núcleo de Gauss. Construcción de soluciones.

Al igual que se ha hecho en la ecuación de Laplace, tratamos de obtener soluciones de la ecuación del calor que son singulares en el origen.

Empezaremos por el caso de dimensión espacial uno que es más sencillo de escribir, y en el que usaremos un argumento de *homogeneidad frente al cambio de escala*, que reduce el problema a una ecuación ordinaria.

El uso de la transformación de Fourier nos permitirá obtener la *solución fundamental* en dimensiones mayores.

- A)** En el caso de dimensión $N = 1$, hay un camino muy elemental de obtener la *solución fundamental*.

Buscaremos soluciones *autosemejantes*, es decir, soluciones que *al cambiar la escala convenientemente* permanecen invariantes. Más precisamente, la escala *conveniente* queda determinada observando que en la ecuación del calor hay una derivada en el tiempo y dos en el espacio. Con esta observación, hacemos el cambio de escala $x = \lambda^\alpha y$, $t = \lambda^\beta s$ y consideramos para una solución u ,

$$v(y, s) = u(\lambda^\alpha y, \lambda^\beta s) = u(x, t).$$

Para que v sea solución hemos de tener,

$$v_s - v_{yy} = 0$$

pero si calculamos,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^\beta u_t - \lambda^{2\alpha} u_{xx},$$

de forma que si $\beta = 2\alpha$ tenemos,

$$v_s - v_{yy} = \lambda^\beta (u_t - u_{xx}) = 0.$$

Como consecuencia, parece natural buscar soluciones que respeten la homogeneidad observada, es decir, soluciones que dependan de la variable $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. La forma de una tal función, será,

$$u(x, t) = t^\alpha f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Imponiendo que u verifique la ecuación, $u_t - u_{xx} = 0$, se debe tener,

$$f''(\xi) + \frac{\xi}{2} f'(\xi) - \alpha f(\xi) = 0,$$

donde $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Desde el punto de vista físico se sabe que hay que imponer la conservación de la cantidad de calor. Normalizando se traduce en,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = 1,$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = t^{\alpha+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1,$$

por tanto, necesariamente se ha de tener $\alpha = -\frac{1}{2}$. La ecuación ordinaria puede escribirse como

$$(2f' + \xi f)' = 0.$$

Tomamos en particular las soluciones de

$$2f' + \xi f = 0, \quad \text{es decir,} \quad f(\xi) = ce^{-\frac{|\xi|^2}{4}},$$

que para que tenga integral uno, debe ser,

$$u(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

núcleo de Gauss, que es la *solución fundamental* buscada.

La justificación del nombre quedará clara en unas pocas líneas.

El método es extensible a más dimensiones. Se omiten más detalles, pues tenemos un método alternativo que estudiamos a continuación.

B) Consideremos el problema

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N). \end{cases}$$

Recordamos que \mathcal{S} es el espacio de funciones temperadas introducido en la sección 3.6, en el cual la transformación de Fourier se comporta bien. Si aplicamos la transformación de Fourier en las variable espaciales, es decir,

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} u(x, t) dx,$$

se tiene

$$(6.1.2) \quad \begin{cases} \hat{u}_t(\xi, t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, & \xi \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

Integrando la ecuación ordinaria en t , considerando ξ como parámetro, se obtiene

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}.$$

Como se trata de una función gaussiana podemos calcular su transformada de Fourier, como se hizo en la sección 3.6, resultando otra gaussiana a la que llamamos *núcleo de Gauss*. Más precisamente

$$\int_{\mathbf{R}^N} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Por tanto, en virtud del apartado 3) del teorema (3.6.3) se tiene

$$(6.1.3) \quad u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy,$$

que al ser $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$, está bien definida.

Llamando

$$K(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

y definiendo

$$K_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

es decir,

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

se verifica

- (1) $K_t(x) > 0$, para todo $x \in \mathbf{R}^N$,
- (2) $\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x) dx = 1$,
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta > 0} K_t(x) dx = 0$.

Las tres propiedades se comprueban de forma inmediata por cálculo directo. (Véase la sección 3.6)

A $K_t(x)$ la llamaremos *solución fundamental* de la ecuación del calor. El siguiente resultado justifica esta denominación.

Observemos que la fórmula (6.1.3) tiene sentido también si, por ejemplo, se supone que $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ y está acotada. Por eso se formula el resultado en el contexto de las funciones continuas.

6.1.1. Teorema.

Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ tal que $|f(x)| < M$ si $x \in \mathbf{R}^N$. Entonces, $u(x, t)$ definida por (6.1.3) verifica

- (1) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^N \times (0, \infty))$,
- (2) $u_t - \Delta u = 0$ si $x \in \mathbf{R}^N$, $t > 0$,
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0} u(x_0, t) = f(x_0)$ siendo la convergencia uniforme,
- (4) $|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |f(x)|$, $(x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, \infty)$.

Demostración.

La demostración es una copia de la hecha con el núcleo de Poisson, ya que $K_t(x)$ es una *aproximación de la identidad*. En efecto, los apartados 1) y 2) resultan de la deducción de K_t y pueden comprobarse también por cálculo directo sin grandes dificultades. La conclusión 4) resulta directamente de la propiedad 2) para el núcleo de Gauss K_t .

En cuanto a 3) para $x_0 \in \mathbf{R}^N$, escribimos

$$(6.1.4.) \quad |u(x_0, t) - f(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x_0 - y)(f(y) - f(x_0))dy \right|.$$

Por la continuidad de f , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y - x_0| < \delta$, $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$; entonces en (6.1.4) resulta

$$(6.1.5.) \quad |u(x_0, t) - f(x_0)| \leq \varepsilon \int_{|x_0 - y| < \delta} K_t(x_0 - y)dy + 2 \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |f(y)| \int_{|x_0 - y| > \delta} K_t(x_0 - y)dy \leq 2\varepsilon,$$

en virtud de las propiedades del núcleo K . \square

Ejemplo de Tychonoff: No unicidad de solución del Problema de Cauchy para la ecuación del calor.

Como se estudió en el capítulo 2, el problema (6.1.1) es *característico*, por lo que sin condiciones adicionales no es de esperar unicidad. Así lo pone de manifiesto el ejemplo debido a Tychonoff que se analiza a continuación.

Consideremos el problema

$$(6.1.6) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

que obviamente tiene la solución cero. La idea es usar el problema *no característico*,

$$(6.1.7) \quad \begin{cases} u_{xx} = u_t, & (x, t) \in \mathbf{R}^2 \\ u(0, t) = g(t), & t \in \mathbf{R} \\ u_x(0, t) = 0, \end{cases}$$

para buscar soluciones de (6.1.6). Elegiremos $g(t) = 0$ si $t \leq 0$, para conseguir $u(x, 0) = 0$ y buscaremos

$$(6.1.8) \quad u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t)x^j,$$

para que sea solución.

Suponiendo regularidad suficiente, se deriva término a término en (6.1.8) y se sustituye en la ecuación, obteniéndose

$$(6.1.9) \quad \sum_{j=0}^{\infty} g'_j(t) x^j = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) g_j(t) x^{j-2},$$

y para verificar los datos en (6.1.7)

$$(6.1.10) \quad g_0(t) = g(t), \quad g_1(t) = 0.$$

De (6.1.9) resulta que para $j \geq 2$,

$$g'_j(t) = (j+1)(j+2)g_{j+2}(t)$$

que, junto a (6.1.10) da

- i) Si $j = 2k + 1$, $g_j = 0$.
- ii) Si $j = 2k$,

$$g_{2k}(t) = \frac{1}{(2k)!} \frac{d^k g}{dt^k}(t).$$

Sustituyendo en (6.1.8) resulta

$$(6.1.11) \quad u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{d^k g}{dt^k}(t).$$

Tras este cálculo formal pasamos a elegir g de forma que se tenga la convergencia necesaria para que (6.1.11) defina una solución clásica de la ecuación del calor.

Para $\alpha > 1$ se toma

$$(6.1.12) \quad g(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

De esta forma $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ y $\frac{d^k g}{dt^k}(0) = 0$, con lo que se comprueba directamente que se verifica el dato inicial $u(x, 0) = 0$. Para estudiar la convergencia de la serie (6.1.11) estimamos el comportamiento de $\frac{d^k g}{dt^k}(t)$ como funciones de variable compleja, utilizando la fórmula integral de Cauchy sobre el contorno

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - t| = \theta t\},$$

con θ a determinar.

De esta forma se tiene

$$(6.1.13) \quad \frac{d^k g}{dt^k}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\exp(-z^{-\alpha})}{(z-t)^{(k+1)}} dz.$$

Como para $z \in \Gamma$ se tiene $z = t + \theta t e^{i\phi} = t(1 + \theta e^{i\phi})$, resulta

$$\Re(-z^{-\alpha}) = -t^{-\alpha} \Re((1 + \theta e^{i\phi})^{-\alpha}).$$

Eligiendo θ tal que

$$\frac{1}{2} < \Re((1 + \theta e^{i\phi})^{-\alpha}),$$

obtenemos

$$\Re(-z^{-\alpha}) > -\frac{1}{2}t^{-\alpha}$$

y entonces de (6.1.13) se tiene la estimación siguiente

$$(6.1.14.) \quad \left| \frac{d^k g}{dt^k}(t) \right| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}), \quad t > 0.$$

Sustituyendo las estimaciones (6.1.14) en (6.1.11), tenemos

$$(6.1.15) \quad \begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{d^k g}{dt^k}(t) \right| \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}) \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \leq \\ &(\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{|x|^2}{\theta t})^k \frac{1}{k!}) \exp(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}) = \exp(\frac{x^2}{\theta t} - \frac{t^{-\alpha}}{2}). \end{aligned}$$

La desigualdad (6.1.15) prueba la sumabilidad de la serie y, por tanto, que u es una función continua. Derivando término a término se comprueba la derivabilidad de u por argumentos análogos. Se dejan al cuidado del lector los detalles.

Como consecuencia hemos obtenido una solución no nula del problema (6.1.6), es decir **no se tiene unicidad**. La solución u no es una función acotada en $\mathbf{R} \times (0, \infty)$.

Este resultado no nos sorprende pues en el capítulo 2 vimos que (6.1.6) es un problema *característico*.

En las secciones que siguen se estudiarán resultados de unicidad cuando se pide que la solución esté en una clase de funciones *adecuada*.

6.2.-El principio del máximo. Resultados clásicos de unicidad.

Comenzamos esta sección estableciendo el principio del máximo débil para el problema de Dirichlet. Como consecuencia, tendremos la prueba de unicidad para el problema (3.4.1) con $B = 0$, estudiado en §3.4.

Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$, y sea $0 < T < \infty$. Definimos $\mathcal{D}_T = \Omega \times (0, T)$ y la *frontera parabólica* de \mathcal{D}_T ,

$$\Gamma_p \equiv (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$$

6.2.1. Teorema.

Supongamos $u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{D}}_T)$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_T \cup (\Omega \times \{T\}))$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ y

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{D}_T = \Omega \times (0, T).$$

Entonces

$$\max_{\Gamma_p} u = \max_{\mathcal{D}_T} u$$

Demostración.

Si se hace la hipótesis adicional

$$(6.2.1) \quad u_t - \Delta u < 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

el resultado es inmediato. En efecto, si se tuviese que el máximo se alcanza en un punto $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}_{T'} \equiv \Omega \times (0, T')$, $T' < T$, habría de verificarse que

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

con lo cual se contradiría (6.2.1). Por consiguiente, en la hipótesis (6.2.1) el máximo no se puede alcanzar en $\mathcal{D}_{T'}$ cualquiera que sea $T' < T$. Si el máximo se alcanzase en $(x_0, T) \in \Omega \times \{T\}$ se tendría

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad \Delta u(x_0, t_0) \leq 0,$$

que contradice también (6.2.1). Por tanto, en la hipótesis (6.2.1), el máximo se alcanza en Γ_p .

Se trata ahora de quitar la hipótesis adicional. Para ello consideramos para cada $\varepsilon > 0$ la función

$$v(x, t) = u(x, t) + \varepsilon|x|^2.$$

Es evidente que la función v goza de la misma regularidad que u , verificando además

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2N\varepsilon < 0,$$

de acuerdo con las hipótesis sobre u . Entonces puesto que v verifica la hipótesis (6.2.1) concluimos que

$$\max_{\Gamma_p} v = \max_{\mathcal{D}_T} v.$$

Pero entonces,

$$\max_{\mathcal{D}_T} u \leq \max_{\mathcal{D}_T} v = \max_{\Gamma_p} v \leq \max_{\Gamma_p} u + \varepsilon \max_{\Omega} |x|^2.$$

Como es para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se tiene

$$\max_{\mathcal{D}_T} u \leq \max_{\Gamma_p} u,$$

que con la desigualdad obvia,

$$\max_{\Gamma_p} u \leq \max_{\mathcal{D}_T} u,$$

prueba el resultado. \square

Observamos que el principio del máximo para la ecuación del calor *excluye parte de la frontera*, justamente la frontera temporal en la dirección del tiempo creciente.

Este *principio de máximo* se llama *débil* porque *no excluye que el máximo se tome en un punto interior*.

Como en el caso elíptico, se tiene el llamado *principio del máximo fuerte*, del cual la versión del matemático canadiense y profesor del Courant Institute de New York, *L. Nirenberg*, es válida incluso para una clase de ecuaciones más general.

El resultado para la ecuación del calor es el siguiente.

Principio del máximo fuerte.

Sea u verificando las hipótesis del teorema 6.2.1 en \mathcal{D}_T . Si existe $(x_1, t_1) \in \mathcal{D}_T$ tal que

$$u(x_1, t_1) = M = \max_{\mathcal{D}_T} u,$$

entonces $u \equiv M$.

La idea de la demostración es establecer un principio de Hopf para la ecuación del calor, análogo al obtenido en la ecuación de Laplace. La longitud de este texto aconseja no dar más detalles sobre este resultado, en tanto que no va a ser usado. Una referencia idónea para estudiar el *principio del máximo fuerte* es el libro de

M.H. Protter, H.F. Weinberger, "Maximum Principles in Differential Equations" Ed. Springer Verlag 1984, al cual remitimos al lector interesado en los detalles.

A continuación aplicamos el *principio del máximo débil* a la obtención de algunos resultados de unicidad.

Sea como antes $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular $\partial\Omega$. Consideremos el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Por aplicación directa del principio del máximo se tiene el siguiente corolario, el cual establece la unicidad para el problema (P).

6.2.2. Corolario.

Sea $u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{D}}_T)$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_T \cup (\Omega \times \{T\}))$, $i, j = 1, 2, \dots, N$ solución del problema (P). Entonces $u \equiv 0$.

Menos obvia es la segunda consecuencia del principio del máximo débil.

Como hemos visto en la sección anterior el problema de Cauchy (6.1.1), en general, puede tener más de una solución. No obstante, si nos restringimos a ciertas clases de funciones, vamos a poder demostrar la *unicidad*. En esta sección nos limitaremos al ejemplo, muy interesante, de funciones acotadas.

Demostraremos que dentro de la clase de funciones acotadas, el problema (6.1.1) tiene una única solución.

La prueba de este resultado, que formularemos precisamente más tarde, reposa en el principio del máximo; la dificultad está en que en el problema de Cauchy se tiene todo \mathbf{R}^N y no un dominio acotado. En otras palabras, sobre la "*frontera lateral*" de la frontera parabólica, no se tienen condiciones. Esta dificultad se resolverá con el conocimiento de ciertas soluciones explícitas de la ecuación del calor, con las cuales haremos un proceso de comparación.

Es claro que cualquier función de la forma

$$w_\alpha(x, t) = \alpha(2t + \frac{|x|^2}{N}), \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

es una solución de la ecuación del calor en $\mathbf{R}^N \times [0, \infty)$. Estas son las soluciones de la ecuación del calor que usaremos para comparar.

Podemos pasar a establecer el resultado de unicidad con precisión.

6.2.3. Teorema.

Sean u_1, u_2 soluciones acotadas del problema

$$(6.2.2) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad f \text{ continua y acotada en } \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Entonces $u_1 \equiv u_2$.

Demostración.

Si $|u_1(x, t)| \leq M_1$ y $|u_2(x, t)| \leq M_2$, llamamos $M = \max\{M_1, M_2\}$. La función $v = u_1 - u_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

La idea es aplicar a v el principio del máximo como en el corolario (6.2.2). Directamente esto no es posible dado que el dominio es todo \mathbf{R}^N ; para soslayar esta dificultad consideramos para cada $R > 0$ la bola $|x| < R$ y la función

$$w_R(x, t) = \frac{2NM}{R^2} \left(2t + \frac{|x|^2}{N} \right), \quad R \in \mathbf{R},$$

que como hemos visto verifica la ecuación del calor, en particular en $|x| < R$, $t > 0$. Además

$$w_R(x, 0) \geq |v(x, 0)| = 0, \quad \text{y} \quad w_R(y, t) \geq 2M \geq |v(y, t)|, \quad \text{si} \quad |y| = R, \quad t > 0$$

Aplicando el principio del máximo en el cilindro $|y| \leq R$, $t \in [0, T]$ a $v - w_R$ y a $w_R - v$, resulta que

$$(6.2.3) \quad -w_R(x, t) \leq v(x, t) \leq w_R(x, t),$$

para cada (x, t) tal que $|x| \leq R$, $0 \leq t \leq T$

Fijo (x, t) , la desigualdad (6.2.3) es válida si $R > |x|$. Entonces tomando límite para $R \rightarrow \infty$ se tiene

$$v(x, t) = 0$$

Como (x, t) es arbitrario se concluye que

$$v \equiv 0$$

como queríamos demostrar. \square

Como consecuencia inmediata podemos formular el importante resultado que sigue.

6.2.4. Corolario.

La única solución **acotada** del problema (6.1.1) con dato acotado, es dada por la fórmula (6.1.3).

En la sección 6.4 estudiaremos otros resultados de unicidad, concretamente, los teoremas 6.4.1 y 6.4.5.

6.3.-El problema de Cauchy no homogéneo.

Nos vamos a ocupar del problema

$$(6.3.1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = F(x, t), & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

donde la regularidad de los datos F y f la suponemos, por el momento, suficiente para que sean ciertos los cálculos que vamos a realizar. Más tarde se estudiarán cuales son las condiciones de regularidad suficientes.

Como en el caso de la ecuación de Laplace un papel importante lo jugará la solución fundamental. Ahora vamos a escribir la solución fundamental con la singularidad desplazada, es decir, consideramos $v(x, t, y, s) \equiv K_{t-s}(x - y)$, es decir,

$$(6.3.2) \quad v(x, t, y, s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right), \quad t > s.$$

Por cálculo directo, o bien, por los argumentos en la sección 6.1 se tiene el siguiente resultado.

6.3.1. Lema.

Sea v definida por (6.3.2), entonces,

- i) $v_t - \Delta_y v = 0$ si $t > s$.
- ii) $v_s + \Delta_y v = 0$ si $t > s$.

El apartado i) podemos traducirlo diciendo que fuera de la singularidad la *solución fundamental* verifica la ecuación del calor respecto a t y a y , mientras que el apartado ii) establece que la función v verifica la ecuación del calor "retrógrada" como función de s, y , lo cual es claro por tener s el signo contrario a t . Obsérvese, por último, que el laplaciano se puede tomar también con respecto a x y se sigue verificando el lema.

Un cambio de coordenadas y lo visto en la sección 6.1. permiten escribir la siguiente propiedad importante de la función v .

6.3.2. Lema.

Sea v definida por (6.3.2), entonces

$$\int_{\mathbf{R}^N} v(x, t, y, s) dy = 1, \quad \text{para cada } x \in \mathbf{R}^N \quad y \quad t > s.$$

6.3.3. Lema.

Sea v definida por (6.3.2) y $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio, entonces

$$V(x, t - s) = \int_{\Omega} v(x, t, y, s) dy,$$

verifica

$$\lim_{t-s \rightarrow 0} V(x, t - s) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

(Basta aplicar el teorema (6.1.1) a la función característica de Ω).

Supongamos ahora que u es una solución regular del problema (6.3.1) y sea $B_R \subset \mathbf{R}^N$ la bola de centro el origen y radio R .

Observemos que llamando (y, s) las variables de espacio y tiempo respectivamente, se tiene

$$(6.3.3) \quad (uv)_s = u_s v + v_s u = v \Delta u - u \Delta v$$

de acuerdo con el apartado ii) del lema 6.3.1.

Teniendo en cuenta (6.3.3), integrando en $B_R \times (0, t)$ y utilizando la fórmula de Green (5.1.2) en la integral de espacio, obtenemos la siguiente identidad

$$(6.3.4) \quad \begin{aligned} \int_0^t \int_{B_R} v F dy ds &= \int_0^t \int_{B_R} (u(v_s + \Delta v) - v(\Delta u - u_s)) dy ds = \\ \lim_{s \rightarrow t^-} \int_{B_R} u v dy &- \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{B_R} u v dy + \int_0^t \int_{\partial B_R} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) d\sigma(y) ds \end{aligned}$$

donde n es la normal exterior a B_R y $d\sigma(y)$ el elemento de superficie sobre ∂B_R .

Si se supone, por ejemplo, que u es acotada, como v y $\frac{\partial v}{\partial n}$ decaen exponencialmente cuando $R \rightarrow \infty$, pasando al límite en (6.3.4) se obtiene

$$(6.3.5) \quad \int_0^t \int_{B_R} v F dy ds = \lim_{s \rightarrow t^-} \int_{B_R} u v dy - \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{B_R} u v dy.$$

Observamos ahora que según el teorema 6.1.1

$$(6.3.6) \quad \lim_{s \rightarrow t^-} \int_{B_R} u(y, s) v(x, t, y, s) dy = u(x, t),$$

y también, por el mismo resultado,

$$(6.3.7) \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{B_R} u(y, s) v(x, t, y, s) dy = \int_{B_R} u(y, 0) v(x, t, y, 0) dy = \int_{B_R} f(y) v(x, t, y, 0) dy,$$

sustituyendo (6.3.6) y (6.3.7) en (6.3.5) obtenemos:

Si u es solución regular del problema (6.3.1), entonces

$$(6.3.8) \quad u(x, t) = \int_0^t \int_{B_R} v(x, t, y, s) F(y, s) dy ds + \int_{B_R} f(y) v(x, t, y, 0) dy.$$

Sustituyendo el valor de v tenemos,

$$(6.3.9) \quad u(x, t) = \int_0^t \int_{B_R} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) F(y, s) dy ds + \\ + \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{B_R} f(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy.$$

Una vez hecha la conjetura de cómo escribir la solución sólo falta un resultado de *regularidad* en función de la regularidad de F y f que nos permita concluir que la función u definida por (6.3.9) es solución *clásica* del problema (6.3.1). A ello dedicamos el resto de esta sección.

Usaremos el siguiente resultado de regularidad de funciones definidas por una integral

6.3.4. Lema.

Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de \mathbf{R}^N .

A) Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ verificando:

- i) Para cada $x \in \Omega_1$, la función $y \longrightarrow f(x, y)$ es integrable.*
- ii) Para cada $y \in \Omega_2$, la función $x \longrightarrow f(x, y)$ es continua.*
- iii) Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|f(x, y)| \leq g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$.*

Entonces

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$$

es continua.

B) Si además f verifica,

- iv) Para $y \in \Omega_2$, la función $x \longrightarrow f(x, y)$ tiene derivadas primeras continuas respecto a x_i , $i = 1, \dots, N$.*

- v) Existe una función no negativa g integrable en Ω_2 tal que $|\nabla f(x, y)| \leq g(y)$ para cada $y \in \Omega_2$.
Entonces,

$$h(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$$

tiene derivadas primeras continuas que además se calculan por la fórmula

$$(6.3.10) \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy, \quad i = 1, \dots, N$$

Demostración.

- A) Sea $x_0 \in \Omega_1$ y $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. Entonces consideramos

$$h(x_k) = \int_{\Omega_2} f(x_k, y) dy.$$

Por la hipótesis de continuidad de f , la sucesión de funciones $\{g_k(y) = f(x_k, y)\}_{k \in \mathbf{N}}$ verifica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(y) = f(x_0, y)$$

y por iii) $|g_k(y)| \leq g(y)$, por consiguiente podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = \int_{\Omega_2} f(x_0, y) dy,$$

y como es para cualquier sucesión la función h es continua.

- B) Sea $\{t_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ una sucesión de números reales tendiendo a cero.
Sea $\{\mathbf{e}_i \mid i = 1, \dots, N\}$ la base canónica de \mathbf{R}^N y consideremos

$$\frac{h(x + t_k \mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{1}{t_k} (f(x + t_k \mathbf{e}_i, y) - f(x, y)) dy.$$

Por el teorema del valor medio se tiene

$$\frac{h(x + t_k \mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x + \tau_k(y) \mathbf{e}_i, y)}{\partial x_i} dy,$$

donde $0 < \tau_k(y) < 1$. Por la hipótesis sobre la continuidad de las derivadas parciales de f y la condición v), se verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(x + t_k \mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} dy,$$

cualquiera que sea la sucesión. Por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(x + t_k \mathbf{e}_i) - h(x)}{t_k} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} dy,$$

es decir,

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_i} = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} dy,$$

como queríamos demostrar. La continuidad de las derivadas parciales se obtiene del apartado A) del Teorema. \square

El resultado que se presenta a continuación da condiciones suficientes para la existencia de solución clásica del problema no homogéneo (6.3.1). Al igual que ocurre en la ecuación de Laplace la sola continuidad del segundo miembro de la ecuación *no es suficiente* para que la solución tenga derivadas segundas. Este extremo lo discutiremos en detalle después de establecer el resultado de regularidad que venimos anunciando y que pasamos a detallar.

Recordamos que la solución fundamental para la ecuación del calor es

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad t > 0.$$

6.3.5. Teorema.

Sea $f(x)$ función continua y acotada en \mathbf{R}^N y sean $F(x, t)$ y $\frac{\partial F(x, t)}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, N$ funciones continuas y acotadas en $\mathbf{R}^N \times (0, T)$, para algún $T > 0$.

Entonces la función $u(x, t)$ definida para $(x, t) \in \mathbf{R}^N \times [0, T)$ por

$$(6.3.11) \quad u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) f(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_{(t-s)}(x - y) F(y, s) dy ds,$$

verifica

- (1) $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0, T))$
- (2) $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T)), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T)), \quad i, j = 1, \dots, N$
- (3) u es la única solución acotada del problema (6.3.1).

Demostración.

Llamamos

$$u_1(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) f(y) dy$$

y

$$(6.3.12) \quad u_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_{(t-s)}(x-y) F(y, s) dy ds.$$

Por el teorema 6.1.1. la función u_1 verifica 1) y 2). En particular, de 1) resulta que $u_1(x, 0) = f(x)$, y por tanto u_1 es solución del problema homogéneo,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Basta entonces demostrar que u_2 verifica 1), 2) y es solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(x, t), & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N \end{cases}.$$

Haciendo el cambio de variables espaciales $\frac{x-y}{2\sqrt{t-s}} = z$ en la integral (6.3.12), resulta

$$(6.3.13) \quad u_2(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_{(t-s)}(x-y) F(y, s) dy ds = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} K_1(z) F(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz ds.$$

El integrando, $h(x, z, t, s) = K_1(z) F(x + 2z\sqrt{t-s}, s)$, es continuo en $x, z \in \mathbf{R}^N$ y $0 < s < t$ verificando además que $\nabla_x h(x, z, t, s)$ es continuo y que

$$(6.3.14) \quad |h(x, z, t, s)| = |K_1(z) F(x + 2z\sqrt{t-s}, s)| \leq \frac{1}{\pi^{N/2}} e^{-|z|^2} \sup_{(y, \tau) \in \mathbf{R}^N \times [0, T]} |F(y, \tau)|,$$

siendo también

$$(6.3.15) \quad |\nabla_x h(x, z, t, s)| \leq \frac{1}{2\pi^{N/2}} |z| e^{-|z|^2} \sup_{(y, \tau) \in \mathbf{R}^N \times [0, T]} |F(y, \tau)|,$$

donde se ha sustituido el valor de $K_1(z)$. Es decir, tanto h como su gradiente respecto a x están mayorados por funciones integrables. Por consiguiente aplicando el lema (6.3.4) a la función

$$(6.3.16) \quad g(x, t, s) = \int_{\mathbf{R}^N} K_1(z) F(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz,$$

resulta que es continua y acotada en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$, más concretamente,

$$|g(x, t, s)| \leq M = \sup_{(y, \tau) \in \mathbf{R}^N \times [0, T)} |F(y, \tau)|.$$

Además aplicando el teorema 6.1.1 para $s \rightarrow t$, resulta $g(x, t, t) = F(x, t)$.

Por consiguiente se tiene,

- i) $u_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0, T))$
- ii) $u_2(x, 0) = 0$
- iii) La función u_2 es acotada, siendo

$$\sup_{(x, t) \in \mathbf{R}^N \times [0, T)} |u_2(x, t)| \leq MT$$

Aplicando ahora la segunda parte del lema 6.3.4 se tiene que la función u_2 tiene derivadas primeras continuas verificándose

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x, t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz ds,$$

integrando por partes resulta

$$(6.3.17) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x, t) = \frac{1}{2\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i F(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz ds.$$

Por (6.3.15) se puede aplicar el lema (6.3.4) a (6.3.17) obteniéndose que u_2 tiene derivadas segundas respecto a x continuas en $\mathbf{R}^N \times (0, T)$ y en particular se verifica

$$(6.3.18) \quad \Delta u_2(x, t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz ds.$$

Por otro lado, para calcular la derivada con respecto al tiempo t escribimos

$$\begin{aligned} \frac{u_2(x, t+k) - u_2(x, t)}{k} &= \\ \frac{1}{k} \int_t^{t+k} g(x, t+k, s) ds + \int_0^t \frac{g(x, t+k, s) - g(x, t, s)}{k} ds &\equiv I_1(k) + I_2(k). \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$(6.3.19) \quad \lim_{k \rightarrow 0} I_1(k) = g(x, t, t) = F(x, t).$$

Por el lema (6.3.4), la función $g(x, t, s)$ tiene derivada respecto a t ya que F tiene derivadas parciales respecto a x ; además

$$g_t(x, t, s) = \frac{1}{\pi^{N/2}\sqrt{t-s}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz$$

y, por tanto, por (6.3.15) se concluye que

$$(6.3.20) \quad \lim_{k \rightarrow 0} I_2(k) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-|z|^2} z_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x + 2z\sqrt{t-s}, s) dz ds.$$

De las igualdades (6.3.18), (6.3.19) y (6.3.20), se concluye que u_2 verifica la ecuación del calor no homogénea, es decir,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + F,$$

como queríamos demostrar. \square

En la sección 5.6, se estudió cómo la continuidad del segundo miembro en la ecuación de Poisson no es suficiente para tener *solución clásica*, es decir con derivadas segundas continuas.

El mismo ejemplo que se consideró allí nos servirá para hacer el análisis en la ecuación del calor no homogénea. Así pues consideremos la función

$$u_0(x) = (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{1/2}, \quad |x| < 1$$

que tiene derivadas primeras continuas pero no derivadas segundas. Sin embargo se vio en §5.6 que tiene laplaciano continuo; lo que ocurre es que se producen cancelaciones entre las derivadas segundas, incluso en $x = 0$. Consideremos la extensión por cero de u_0 a todo \mathbf{R}^N , y una función de corte, $\phi(|x|)$, $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$, tal que $\phi(|x|) = 1$ si $|x| < \frac{1}{2}$ y $\phi(|x|) = 0$ si $|x| > \frac{3}{4}$. Definimos $f(x) = \phi(|x|)u_0(x)$ y $F(x) = \Delta f(x)$. Así ambas funciones son continuas y acotadas en \mathbf{R}^N y en $\mathbf{R}^N \times (0, \infty)$ respectivamente.

Es obvio que la función $u(x, t) \equiv f(x)$ es solución acotada, *no clásica*, del problema de Cauchy

$$(6.3.21) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = F(x), & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Que u es solución se entiende como que se verifica la ecuación *punto a punto*. Sin embargo como se vio en la sección §5.6. u no tiene derivadas segundas en el origen.

Hemos de demostrar que (6.3.21) *no tiene solución clásica*.

Supongamos, por el contrario, que existiese $T > 0$ y g solución clásica de (6.3.21) en $\mathbf{R}^N \times (0, T)$. En esta hipótesis se tiene que

$$w = u - g \equiv f(x) - g$$

verifica:

- i) $w \in \mathcal{C}^2$ en $0 < |x| < 1, 0 < t < T$
- ii) $w \in \mathcal{C}^1$ en $|x| < 1, \frac{T}{2} < t < T$ y es solución de

$$(6.3.22) \quad \begin{cases} w_t - \Delta w = 0, \\ w(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Probaremos que w es necesariamente \mathcal{C}^2 en $|x| < 1, T > t > T/2$, con lo cual, por ser $g \in \mathcal{C}^2$, resultaría $u \in \mathcal{C}^2$, lo cual es una contradicción.

Para probar que w tiene derivadas segundas continuas, fijemos (x, t) con $|x| < 1$ y $T/2 < t < T$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \in (0, t - (T/2))$. Sea $v(x, y, t, s)$ definida por (6.3.2). Como se verifica

$$(6.3.23) \quad \begin{aligned} & (w(y, s)v(x, y, t, s))_s + \sum_{i=1}^N (w(y, s)v_{y_i}(x, y, t, s) - w_{y_i}(y, s)v(x, y, t, s))_{y_i} \equiv \\ & v(w_s - \Delta w) - w(v_s + \Delta v) = 0, \end{aligned}$$

integrando sobre el dominio $\Omega = \{(y, s) \mid \delta < |y| < 1, T/2 < s < t - \varepsilon\}$ con $0 < \delta < |x|$ y aplicando las fórmulas de Green, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\delta < |y| < 1} w(y, t - \varepsilon)v(x, y, t - \varepsilon, t)dy = \\ & \int_{\delta < |y| < 1} w(y, T/2)v(x, y, T/2, t)dy - \\ & \int_{T/2}^{t-\varepsilon} \int_{|y|=1} [w(y, s)\frac{\partial v}{\partial n_y}(x, y, t, s) - \frac{\partial w}{\partial n_y}(y, s)v(x, y, t, s)]d\sigma(y)ds - \\ & \int_{T/2}^{t-\varepsilon} \int_{|y|=\delta} [w(y, s)\frac{\partial v}{\partial n_y}(x, y, t, s) - \frac{\partial w}{\partial n_y}(y, s)v(x, y, t, s)]d\sigma(y)ds \equiv \\ & I_{1,\delta} + I_{2,\varepsilon} + I_{3,\varepsilon,\delta}. \end{aligned}$$

Pasando al límite para $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta < |y| < 1} w(y, t - \varepsilon)v(x, y, t - \varepsilon, t)dy = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} w(y, t - \varepsilon)\chi_{\delta < |y| < 1}(y)v(x, y, t - \varepsilon, t)dy = w(x, t), \end{aligned}$$

por el lema (6.3.3) y el teorema (6.1.1). El resto de los términos son inmediatos por el teorema de convergencia de Lebesgue. Pasando al límite ahora para $\delta \rightarrow 0$ concluimos que

$$w(x, t) = \int_{|y| < 1} w(y, T/2) v(x, y, t, T/2) dy - \int_{T/2}^t ds \int_{|y|=1} [w(y, s) \frac{\partial v}{\partial n_y}(x, y, t, s) - \frac{\partial w}{\partial n_y}(y, s) v(x, y, t, s)] d\sigma(y) ds,$$

que implica que $w \in \mathcal{C}^2$ siguiendo la misma argumentación que en la demostración del teorema 6.3.5.

6.4.- Temperaturas positivas.

Esta sección está dedicada a un resultado muy interesante por razones matemáticas y por su significado físico.

Una de las consecuencias del *Segundo Principio de la Termodinámica* es que la *temperatura absoluta* es siempre positiva. Este hecho sugiere que la condición natural a verificar por las soluciones de la ecuación del calor es la condición *unilateral*, $u \geq 0$. Evidentemente es lo mismo suponer $u \geq H$, pues el cambio en la escala de temperaturas $v = u - H$, conduce al caso $v \geq 0$.

Sugerimos al lector recordar las leyes de la termodinámica, para lo cual una hermosa referencia puede ser el celeberrimo curso de R.P. Feynman.

(Véase la versión en español, *R.P. Feynman "Física" Volumen I, Capítulo 44, Addison Wesley Iberoamericana 1987*).

Presentaremos un resultado obtenido en 1944 por D. Widder, profesor de Harvard. Widder prueba que con la condición físicamente natural de que la temperatura sea positiva, el problema de Cauchy para la ecuación del calor tiene una única solución. Desde el punto de vista matemático este resultado es muy interesante, dado que se establece la unicidad con una condición unilateral solamente, es decir, $u(x, t) > 0$.

En realidad, D. Widder probó más cosas, por ejemplo, que una solución de la ecuación del calor que sea positiva y continua, se puede expresar en un tiempo t por la integral de la solución fundamental por el valor de dicha solución en un tiempo anterior. Es decir, la fórmula (6.1.3) caracteriza las soluciones positivas.

Precisaremos estos enunciados en su momento. Antes de nada diremos que la referencia que seguiremos es el trabajo del propio Widder, que se recoge en el libro:

D. Widder, "The heat equation", Academic Press, 1975.

Empezamos estableciendo otro resultado de unicidad, que tiene interés por sí mismo al recoger una hipótesis natural de crecimiento del dato y la solución, y que se usará a continuación. Dicho resultado está en el espíritu del teorema 6.2.3. cambiando la acotación por la ley de crecimiento $|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$. Este crecimiento es el natural, teniendo en cuenta el decaimiento en el infinito de la solución fundamental.

Más precisamente se tiene el siguiente enunciado.

6.4.1. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T))$, verificando el problema

$$(6.4.1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T) \\ |u(x, t)| < Me^{a|x|^2}, & \text{para ciertas constantes positivas } M, a, (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T) \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Entonces $u(x, t) \equiv 0$ para todo $(x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T)$.

Demostración.

La demostración se hace iterando el resultado sobre intervalos del tiempo de longitud convenientemente pequeña. Para empezar elegimos A tal que $A > a$ y $A > \frac{1}{4T}$.

Consideramos la función

$$v(x, t) = \frac{1}{(1 - 4At)^{N/2}} e^{\frac{A|x|^2}{(1-4At)}},$$

que como se observa es precisamente

$$(6.4.2) \quad v(x, t) = (4\pi)^{N/2} K_{(1+\lambda^2 t)}(\lambda x), \text{ donde } \lambda = i\sqrt{4A}$$

y $K_t(x)$ es la solución fundamental de la ecuación del calor como se obtuvo en la sección 6.1. Simplemente la regla de la cadena y la expresión (6.4.2) demuestran que $v(x, t)$ es solución de la ecuación del calor en $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A})$. Además, como para cada $x \in \mathbf{R}^N$, $v(x, t)$ es una función creciente en t , se concluye que

$$(6.4.3) \quad v(x, t) \geq v(x, 0) = e^{A|x|^2}, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A}).$$

Fijado un punto (x_0, t_0) en la banda $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A})$, elegimos $R > |x_0|$ y tomamos un múltiplo de la función v . Exactamente tomamos

$$(6.4.4) \quad w(x, t) = Me^{(a-A)R^2} v(x, t).$$

Sea ahora el cilindro $D = \{(x, t) \mid |x| < R, 0 < t < \frac{1}{4A}\}$ y comparemos las funciones $|u(x, t)|$ y $w(x, t)$ sobre la frontera parabólica de D , es decir, sobre los puntos $(x, 0)$, con $|x| < R$ y los puntos (x, t) , con $|x| = R$ y $0 \leq t \leq \frac{1}{4A}$. Sobre los primeros, es decir, la base, se tiene

$$(6.4.5) \quad |u(x, 0)| = 0 < w(x, 0) = Me^{(a-A)R^2} e^{A|x|^2}$$

y sobre la superficie lateral

$$(6.4.6) \quad |u(x, t)| < Me^{aR^2} \leq Me^{(a-A)R^2} v(x, 0) \leq Me^{(a-A)R^2} v(x, t) = w(x, t), \quad \text{si } |x| = R.$$

Por tanto, aplicando el principio del máximo, teorema 6.2.1, se concluye que

$$-w(x, t) \leq u(x, t) \leq w(x, t), \quad \text{en } (x, t) \in D.$$

En particular,

$$(6.4.7) \quad |u(x_0, t_0)| < Me^{(a-A)R^2} v(x_0, t_0),$$

que se verifica para todo $R > |x|$. Tomando límites en (6.4.7) cuando $R \rightarrow \infty$, obtenemos,

$$u(x_0, t_0) = 0, \quad \text{cualquiera que sea } (x_0, t_0) \in \mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4A}),$$

ya que hemos elegido $A > a$. Para acabar, repetimos el argumento anterior a la función $u(x, t + \tau)$, con $0 < \tau < \frac{1}{4A}$; de esta forma concluimos que $u(x, t) \equiv 0$ en $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{2}{4A})$. Repitiendo el argumento una cantidad finita de veces, concluimos la prueba. \square

En la demostración que haremos del resultado de Widder, se utiliza la siguiente observación de cálculo.

6.4.2. Lema.

Sea $u(x, t)$ solución de la ecuación del calor tal que $u(x, 0) = 0$, entonces

$$v(x, t) = \int_0^t u(x, s) ds$$

es solución de la ecuación del calor. Además si u es positiva v es creciente en t para x fijo y v es subarmónica como función de x para t fijo.

Demostración.

En efecto, en primer lugar, $v_t = u$ en virtud del teorema fundamental del cálculo. En segundo lugar,

$$\Delta v(x, t) = \int_0^t \Delta u(x, s) ds = \int_0^t u_s(x, s) ds = u(x, t),$$

por tanto, $v_t = \Delta v$, es decir, v satisface la ecuación del calor.

Si $u \geq 0$ se tiene $v_t = u = \Delta v \geq 0$, por tanto tenemos las propiedades anunciadas para v . \square

Necesitaremos el siguiente lema, que viene a establecer que entre todas las posibles soluciones positivas de la ecuación del calor, la más pequeña es la que da la fórmula integral (6.1.3). Este resultado será crucial para probar el resultado de unicidad, y como consecuencia, el teorema de representación de soluciones positivas de Widder.

6.4.3. Lema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0, T))$, tal que, $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T))$.

Supongamos que

- (1) $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$
- (2) $u(x, t) \geq 0$ en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$.

Entonces se verifica

$$(6.4.8) \quad \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y)u(y, 0)dy \leq u(x, t).$$

Demostración.

Con las hipótesis que tenemos, lo primero que no está claro es que la integral en (6.4.8) sea finita. Por simplicidad llamaremos $f(x) = u(x, 0)$ y consideraremos una función de corte regular, precisamente, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ verificando,

$$\phi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq (R-1) \\ R-|x|, & \text{si } (R-1) \leq |x| \leq R \\ 0, & \text{si } R \geq |x|. \end{cases}$$

Si se define ahora

$$(6.4.9) \quad v_R(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x-y)f(y)\phi_R(y)dy,$$

es finita pues $f\phi$ es continua y con soporte en una bola. El teorema 6.1.1 establece que la función v_R definida por (6.4.9) verifica el problema

$$(6.4.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_R}{\partial t} - \Delta v_R = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T) \\ v_R(x, t) \geq 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T) \\ v_R(x, 0) = f(x)\phi_R(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Sea $M_R = \max_{|y| < R} f(y)$ y sea $|x| > R$, entonces,

$$(6.4.11) \quad \begin{aligned} 0 \leq v_R(x, t) &\leq M \int_{|y| < R} K(x-y, t)dy \leq \\ &\leq \frac{M}{\pi^{N/2}} \int_{|y| < R} \frac{1}{|x-y|^N} dy \leq \frac{M}{\pi^{N/2}} \int_{|y| < R} \frac{1}{||x|-|R||^N} dy \leq \\ &\leq \frac{MR^N c_N}{||x|-|R||^N}, \end{aligned}$$

pues se tiene que $|s|^N e^{-|s|^2} < 1$ y $|x - y| \geq ||x| - R|$ cuando x está en el exterior de la bola de radio R . Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$,

$$(6.4.12) \quad 0 \leq v_R(x, t) \leq \varepsilon, \quad \text{si} \quad |x| \geq \rho(M, R, n).$$

En particular, tenemos

- i) $0 \leq v_R(x, t) \leq \varepsilon + u(x, t)$ si $|x| = \rho$, $0 < t < T$, ya que por hipótesis u es positiva en toda la banda.
- ii) $v_R(x, 0) \leq f(x) = u(x, 0) \leq u(x, 0) + \varepsilon$ si $|x| \leq \rho$.

Entonces, i) y ii) junto con el principio del máximo, implican que

$$v_R(x, t) \leq u(x, t) + \varepsilon, \text{ si } |x| < \rho, 0 \leq t < T.$$

Además de (6.4.12) y ser $u \geq 0$ se concluye que para todo $\varepsilon > 0$,

$$v_R(x, t) \leq u(x, t) + \varepsilon, \text{ para todo } (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T).$$

Si observamos que $v_R(x, t) \leq v_{R'}(x, t)$ y $\phi_R(x) \leq \phi_{R'}(x)$ si $R < R'$ en todo punto x y para $0 \leq t < T$, podemos pasar al límite aplicando el teorema de convergencia monótona, es decir, se tiene,

$$0 \leq v(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} v_R(x, t) = \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) f(y) dy \leq u(x, t)$$

que prueba que la integral es finita y, de paso, el lema. \square

La siguiente consecuencia consiste en hacer una traslación en el tiempo, pero es útil tenerla escrita con precisión.

6.4.4. Corolario.

Sea u en las hipótesis del lema 6.4.3. Si $t_1 \in (0, T)$, entonces

$$\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, t_1) dy \leq u(x, t + t_1), \quad \text{si } 0 < t < T - t_1$$

La etapa decisiva de los resultados de Widder viene a continuación.

6.4.5. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0, T))$, tal que, $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T))$. Supongamos que

- (1) $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$
- (2) $u(x, t) \geq 0$ en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$.
- (3) $u(x, 0) = 0$ en \mathbf{R}^N .

Entonces, $u(x, t) \equiv 0$ si $(x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, T)$.

Demostración.

Por el lema 6.4.2. se tiene que

$$v(x, t) = \int_0^t u(x, s) ds$$

es solución de la ecuación del calor y al ser $u \geq 0$, $v_t \geq 0$ y $\Delta v \geq 0$. Observamos que si se prueba que, $v(x, t) \equiv 0$, se tiene $u(x, t) \equiv 0$. Por tanto suponemos, sin que ello suponga restricción, que u además verifica

- i) $u_t \geq 0$
- ii) $\Delta u \geq 0$, es decir, u es subarmónica como función de x para t fijo.

Fijamos t_1 , $0 < t_1 < T$ y $0 < t_0 < T - t_1$. Por el corolario 6.4.4 se tiene que

$$(6.4.13) \quad M = (4\pi t_0)^{N/2} \int_{\mathbf{R}^N} K_{t_0}(y) u(y, t_1) dy \leq (4\pi t_0)^{N/2} u(0, t_0 + t_1) < \infty$$

Es claro que si $|y| \leq 2|x|$ se tiene

$$(6.4.14) \quad (4\pi t_0)^{N/2} K_{t_0}(y) = e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} \geq e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}.$$

De otra parte, como u es subarmónica se tiene la desigualdad de la media para bolas (5.5.6'), es decir,

$$(6.4.15) \quad u(x, t_1) \leq \frac{1}{|B_1||x|^N} \int_{|x-y| \leq |x|} u(y, t_1) dy \leq \frac{1}{|B_1||x|^N} \int_{|y| \leq 2|x|} u(y, t_1) dy,$$

pues se tiene que la bola de centro x y radio $|x|$ está contenida en la bola de centro el origen y radio $2|x|$. Como consecuencia de (6.4.15) y usando también (6.4.14), concluimos que,

$$\begin{aligned} |x|^N u(x, t_1) e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{|B_1|} \int_{|y| \leq 2|x|} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} u(y, t_1) dy \leq \\ &\leq \frac{1}{|B_1|} (4\pi t_0)^{N/2} \int_{\mathbf{R}^N} K_{t_0}(y) u(y, t_1) dy = \frac{1}{|B_1|} M \equiv M_1. \end{aligned}$$

Es decir, hemos demostrado que

$$0 \leq u(x, t_1) \leq M_1 \frac{e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}}{|x|^N} \leq M_1 e^{-\frac{|x|^2}{t_0}},$$

si $|x| > 1$. Como $u(x, t_1)$ es continua para $|x| \leq 1$, está acotada en la bola unidad. Por consiguiente, para una constante conveniente, M_2 , se tiene

$$(6.4.16) \quad 0 \leq u(x, t_1) \leq M_2 e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}, \quad \text{para todo } x \in \mathbf{R}^N.$$

Si ahora se tiene en cuenta que $u_t \geq 0$, concluimos,

$$0 \leq u(x, t) \leq u(x, t_1) \leq M_2 e^{-\frac{|x|^2}{t_0}}, \quad \text{para todo } (x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, t_1).$$

Aplicando el teorema 6.4.1 resulta $u(x, t) \equiv 0$ en la banda $\mathbf{R}^N \times (0, t_1)$. Como tanto t_0 y t_1 son arbitrarios se prueba el teorema. \square

Para finalizar este apartado obtendremos una consecuencia importante del teorema 6.4.5 que mejora el lema 6.4.3, estableciéndose la representación de las soluciones positivas de la ecuación del calor como la integral de Gauss del valor inicial.

6.4.6. Teorema.

Sea $u \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times [0, T))$, tal que, $u_t, u_{x_i x_j} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N \times (0, T))$. Supongamos que

- (1) $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$
- (2) $u(x, t) \geq 0$ en $\mathbf{R}^N \times [0, T)$.

Entonces se verifica

$$(6.4.17) \quad \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, 0) dy = u(x, t).$$

Demostración.

En el lema (6.4.3) se estableció la desigualdad

$$\int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, 0) dy \leq u(x, t).$$

Por otra parte ambos miembros de la desigualdad son solución de la ecuación del calor, por tanto,

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_{\mathbf{R}^N} K_t(x - y) u(y, 0) dy \geq 0,$$

verifica las hipótesis del teorema 6.4.5. Consecuentemente $w(x, t) \equiv 0$ que es lo que queríamos demostrar. \square

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

1. Sea la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = 1 - \cos(2\pi x).$$

Se considera el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

- a) Demuéstrese que (P) tiene una solución regular y que es única.
 b) Determinése $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$
 c) Determinése el máximo de $u(x, t)$ en $[0, 1] \times [0, \infty)$.

2. Sea la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi x)}{(k+1)^4}.$$

Pruébese que $f \in \mathcal{C}^2((0, 1))$.

Se considera el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(1, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

- a) Demuéstrese que (P) tiene una solución regular.
 b) Considerando la energía $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, t) dx$, conclúyase si la solución determinada en a) es única.
 c) Determinése $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$

3. Sea f función continua y acotada en \mathbf{R}^N . Para cada $k \in \mathbf{N}$, sea $B_k \subset \mathbf{R}^N$ la bola de centro el origen y radio k . Sea u_k la solución del problema

$$(P_k) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in B_k, \quad T > t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in B_k, \end{cases}$$

$u_k \in \mathcal{C}(\bar{B}_k \times [0, T])$. Supongamos que existe $M > 0$, independiente de k , tal que $|u_k(x, t)| \leq M$ en el cilindro $\bar{B}_k \times [0, T]$. Demostrar que sobre cada cilindro $D \times [0, T]$, donde $D \subset \mathbf{R}^N$ es un dominio acotado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = u(x, t),$$

donde la convergencia es uniforme y u es la única solución acotada del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad T > t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

4. Resolver los problemas siguientes:

- a) $u_t - 4u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = 2$.
 b) $u_t - u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$.
 c) $u_t - u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = \sin x$.

5. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

donde se supone que f es continua y acotada en $0 < x < \infty$ y $f(0) = 0$. Demostrar que (P) tiene una única solución acotada. Obténgase la fórmula de representación de la solución.

Indicación.- Hágase una extensión impar de f a todo \mathbf{R} y aplíquese lo estudiado.

6. Probar análogo resultado al del problema 5), cuando se sustituye la hipótesis de acotación por la hipótesis de crecimiento $|u(x, t)| \leq Me^{ax^2}$.

7. Demostrar que el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x, t), & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

donde se supone que F tiene derivadas primeras continuas y $|F(x, t)| \leq M$, tiene una única solución acotada. Escribese una fórmula explícita para u .

8. Resolver los problemas:

$$(a) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x > 0, \\ -u_x(0, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ -u_x(0, t) = q > 0, & t > 0. \end{cases}$$

9. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & l > x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & l > x > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), & t > 0, \end{cases}$$

Se llama función de Green de (P) a una función $G(x, \xi, t)$ que verifica:

- i) G es regular si $t > 0$ y $x \neq \xi$ y verifica $G_t = G_{xx}$ si $x \neq \xi$.
- ii) $G(0, \xi, t) = G(l, \xi, t) = 0$, es decir, verifica los datos de contorno.
- iii) $\lim_{x \neq \xi, t \rightarrow 0^+} G(x, \xi, t) = 0$.
- iv) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} G(x, \xi, t) dx = 1$.

(En este sentido se trata de la solución de un problema con dato singular, concretamente una δ de Dirac, como se vió en el capítulo 3.)

Constrúyase la función de Green para (P), usando la solución fundamental.

10. Resolver el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x, t), & l > x > 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & l > x > 0, \\ u(0, t) = \phi(t), \quad u(l, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

mediante la función de Green hallada en el Problema 9).

11. Resolver los problemas

- a) $u_t = 4u_{xx} + te^t$, $u(x, 0) = 2$.
- b) $u_t = u_{xx} + t \sin x$, $u(x, 0) = \sin x$.
- a) $4u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = e^{2x-x^2}$.

12. Resolver los siguientes problemas de Cauchy en el plano

$$(a) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = e^t, & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = \cos x \sin y, & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} 2u_t - \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = \cos(xy), & (x, y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

13. Resolver los siguientes problemas de Cauchy en \mathbf{R}^3

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \end{cases}$$

para,

- a) $u_0(x, y, z) = \cos(x + y + z)$.
- b) $u_0(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
- c) $u_0(x, y, z) = (x + y + z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
- d) $u_0(x, y, z) = \sin(x + y + z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

14. Sea $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un dominio acotado y consideremos u solución del problema,

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u + u^2 = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x, 0) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Supongamos que $u_0(x) < 0$ en Ω , ¿se puede concluir que $u(x, t) \leq 0$?

Demostrar que si $u(x, t)$ es una solución de (P), se verifica

$$u(x, t) \leq \sup_{x \in \Omega} (\max\{0, u_0(x)\}).$$

15. Dada la ecuación $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = F(x, t)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, demostrar que se reduce a la ecuación del calor con el cambio de variables

$$x = y - bt, \quad t = t, \quad v(y, t) = e^{-ct} u(y - bt, t).$$

Aplicar el resultado anterior para calcular la solución acotada de los problemas que siguen.

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = F(x, t), & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

siendo,

- a) $u_0(x) = 1$, $F(x, t) = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.
- b) $u_0(x) = \cos x$, $F(x, t) = e^t$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.
- c) $u_0(x) = \cos x$, $F(x, t) = e^t$, $a = 2$, $b = 0$, $c = 2$.
- d) $u_0(x) = 1$, $F(x, t) = t \sin x$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.
- e) $u_0(x) = e^{-x^2}$, $F(x, t) = 0$, $a = 1$, b y c arbitrarios.

Escribir la fórmula de la solución acotada, para F derivable, u_0 continua y acotada.

16. Sea el problema de Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbf{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

Supongamos $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^N)$ tal que para algún $\delta > 0$ verifica

$$(C) \quad |u_0(x)| \leq M_\delta e^{\delta|x|^2},$$

demostrar que entonces,

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy,$$

es solución del problema (P) en la banda $\mathbf{R}^N \times (0, \frac{1}{4\delta})$. Determinar una clase de funciones donde u sea la solución única.

Mostrar que si se supone que se verifica la condición (C) para todo $\delta > 0$, entonces $u(x, t)$ está bien definida y es solución de (P) en $\mathbf{R}^N \times (0, \infty)$.

17. Sea

$$D = \{(x, t) \mid -\pi/4 < x < \pi/4, \quad t < \frac{1}{3} \log(\frac{1 \cos 2x}{2 \cos x})\}.$$

Compruébese que la función

$$u(x, t) = e^{-t} \cos x - \frac{1}{2} e^{-4t} \cos 2x,$$

verifica $u_t - u_{xx} = 0$ en D y se anula en la parte de frontera de D dada por la curva

$$t = \frac{1}{3} \log(\frac{1 \cos 2x}{2 \cos x}).$$

¿Qué se puede decir del Principio del Máximo en un caso como este?

Este ejemplo de no unicidad es debido a Bieberbach.

18. Sea el problema

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, l], \quad t > 0, \quad F \in \mathcal{C}([0, l] \times [0, \infty)) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, l], \quad u_0 \in \mathcal{C}([0, l]) \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(l, t) \end{cases}$$

Estudiar:

a) Si el problema tiene solución única.

Indicación: Si u y v son soluciones, sea $w = u - v$. Derívese $E(t) = \int_0^l |w(x, t)|^2 dx$ y utilícese la ecuación.

b) Si $F \equiv 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

INDICE ALFABETICO

aproximación de la identidad, 157
autofunciones, 135
autovalores, 135
banda inicial, 76
bandas características, 74, 103
barreras, 271
base hilbertiana, 151
base ortonormal, 144
clasificación en tipos, 84
coeficientes de Fourier, 147
condición de banda, 77
condición de compatibilidad, 77
condición de Hölder, 279
condición de Hadamard, 93
condición de transversalidad, 59, 77
condiciones de Dirichlet, 36
condiciones de Neumann, 36
condiciones periódicas, 133
condiciones separadas, 133
condiciones unilaterales, 37, 312
cono característico, 91, 229
cono de Monge, 72
conservación de energía, 227
convergencia de serie de autofunciones, 149
curvas características, 58
curvas de Monge, 72
desarrollo en serie de autofunciones, 148
desigualdad de Bessel, 148
desigualdad de Cauchy-Schwartz, 127
desigualdad de la media, 263
divergencia, 18
dominio de dependencia, 216, 229
dominio de influencia, 216, 229
dominio regular, 28
ecuación del calor, 35
ecuación de la continuidad, 49
ecuación de la cuerda vibrante, 40
ecuación de Klein Gordon, 47

ecuación de Laplace, 38, 239
ecuación de ondas, 42, 43
ecuación de ondas en dimensión dos, 222
ecuación de ondas en dimensión uno, 213
ecuación de ondas en dimensión tres, 216
ecuación de Poisson, 39, 275
ecuación de Schrödinger, 52
ecuación del telegrafista, 47
ecuaciones de Euler, 50
ecuaciones de Maxwell, 42
ecuaciones quasi lineales, 57
efecto regularizante, 180
eliminación de singularidades, 277
espacio-tiempo, 215
estimación de energía, 226
familia equicontinua, 129
fenómenos irreversibles, 180
forma autoadjunta, 132
forma normal y canónica, 88, 89
fórmula de D’Alambert, 214
fórmulas de Green, 134, 241
frontera parabólica, 299
función armónica, 86, 254
función de Green , 121, 122, 125, 246
función de Green para el semiespacio, 252
función de Green para el ángulo diédrico, 254
función de Green para la bola, 247, 253
función de Green para la ecuación del calor, 183
función de Green para la ecuación de Poisson, 246
función de Green para la semibola, 253
función derivable a trozos, 166
función potencial, 24
función subarmónica, 263, 264
función superarmónica, 265
gradiente, 22
identidad de Green, 134
identidad de Lagrange, 133
identidad de Parseval, 150, 160
identidad de Plancherel, 201
integral completa, 109
integral de Dirichlet, 172
integral de Poisson, 157, 249

integral primera, 107
 L^2 , 130
lema Ascoli-Arzelá, 139
lema de Riemann-Lebesgue, 164
lemas de Harnack, 260
levantamiento armónico, 267
ley de conservación, 69
ley de Faraday, 44
ley de Fourier, 33
ley de Gauss, 43
ley de Newton, 41
método de descenso de Hadamard, 222
método de medias esféricas, 217, 218
método de Poincare-Perron, 261
núcleo de Dirichlet, 161
núcleo de Fejer, 169
núcleo de Gauss, 293
núcleo de Poisson, 157, 190, 248
ondas planas, 214
operador compacto, 141
particiones de la unidad, 31
principio de conservación de la energía, 186, 227
principio de Duhamel, 224
principio de Hopf, 266
principio de Huygens, 230
principio de máximo débil para la ecuación del calor, 299
principio del máximo para la ecuación de Laplace, 256, 257
problema de Cauchy, 35, 77, 103
problema de Cauchy para la ecuación de ondas, 213, 216, 222
problema de Cauchy para la ecuación del calor, 295
problema de Dirichlet, 153, 245, 246, 261
problema de la cuerda vibrante, 184
problema de Neumann, 242
problema de Sturm-Liouville, 133
problema de valores iniciales, 63
problema mayorante, 100
problema mixto para la ecuación del calor, 175
problemas autoadjuntos, 134
problemas de contorno, 118
problemas de contorno no homogéneos, 183
propiedad de esfera interior, 266
propiedades de la media, 255, 256

punto regular, 271
rotacional, 20
sistema característico, 58, 73, 103
solución fundamental de la ecuación del calor, 293 (ver *núcleo de Gauss*)
solución fundamental del laplaciano, 243
soporte, 28
temperaturas positivas, 312
teoremas de alternativa, 119
teorema de Cauchy-Kovalevsky, 94, 98
teorema de Dirichlet, 166
teorema de la divergencia, 24, 30
teorema de la divergencia local, 28
teorema de Weierstrass, 171
tipo elíptico, 88, 90
tipo hiperbólico, 88, 90
tipo parabólico, 88, 90
transformación de Fourier, 191
transformación inversa de Fourier, 198
unicidad problema de Cauchy ecuación del calor, 299, 301, 313, 316
velocidad de propagación, 216, 230

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ahlfors, L.V., Complex Analysis, Mc Graw Hill, 1979.
- [2] De Barra, G., Measure Theory and integration, Ed. Ellis Horwood Ltd, 1981.
- [3] Coddington E.A. Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, 1955.
- [4] Courant, R. Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics" Vol I,II, Wiley Classics Edition, 1989.
- [5] Chorin, A.J. Marsden, J.E., A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer Verlag, 1990.
- [6] Dym, H. McKean, H.P., Fourier Series and Integrals, Academic Press, 1972.
- [7] Fleming, W., Functions of Several Variables, Ed. Springer Verlag, 1977.
- [8] Folland, G., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1976.
- [9] Godunov, S. K., Ecuaciones de la Física Matemática, Ed.Mir, 1978.
- [10] Guzman, M., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Editorial Alhambra, 1975.
- [11] Hellwig, G., Partial Differential Equations, Blaisdell Pu. Co. New York, 1964.
- [12] Hirsch, M.W. Smale S., Ecuaciones diferenciales sistemas dinámicos y álgebra lineal, Alianza Universidad, 1983.
- [13] John, F., Partial Differential Equations, Springer Verlag (Cuarta Edicion), 1980.
- [14] Kline, M., El Pensamiento Matemático desde los tiempos antiguos a los modernos, Alianza Editorial, 1992.
- [15] Marsden, J.E., Elementary Classical Analysis, W.H. Freeman Co., 1974.
- [16] Medeiros, L. A. de Andrade, N. G., Iniciacao as Equacoes Diferenciais Parciais, Livros Tecnicos e Cientificos Editora Rio de Janeiro, 1978.
- [17] Mijailov, V. P., Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, Ed. MIR, Moscú, 1978.
- [18] Mikhlin, S. G., Mathematical Physics an advanced course, Noth-Holland, Amsterdam, 1970.
- [19] Mizohata S., The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1973.
- [20] Protter, M.H. Weinberger, H.F., Maximum Principles in Differential equations, Springer Verlag, 1984.
- [21] Seeley, R., Introducción a las Series e Integrales de Fourier, Ed Reverté, 1970.
- [22] Simmons, G.F., Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas historicas, Mc Graw Hill, 1993.
- [23] Sobolev, S.L., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Ed Dover, 1989.

- [24] F.Treves, Basic linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975.
- [25] Tijonov, A. Samarsky, A., Ecuaciones de la Física Matemática, Ed. Mir, 1983.
- [26] Widder, D.V., The Heat Equation, Academic Press, 1975.
- [27] Zygmund A., Trigonometric Series, Cambridge University Press, 1959.