Ecuaciones diferenciales
SEMANA 1

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

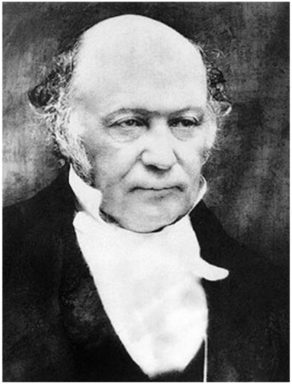
15 de abril de 2025

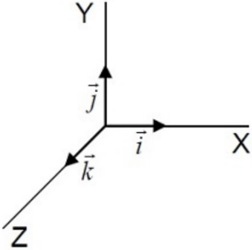
Contenido

Objetivos de la Clase

- Comprender la estructura de los espacios vectoriales y subespacios.
- Identificar operaciones entre subespacios.
- Distinguir combinación lineal, independencia, y dimensión.
- Aplicar teoría mediante ejemplos y ejercicios prácticos.

Reseña Histórica





William Rowan Hamilton (1805-1865) introdujo la notación i, j, k para los vectores de la base canónica en el espacio tridimensional

VECTORES

El comportamiento que caracteriza a los vectores es el siguiente:

- Podemos **sumar vectores** y obtenemos otro vector.
- Podemos **multiplicar un vector por un número (escalar)** y obtenemos otro vector.

Estas operaciones cumplen ciertas propiedades:

- Propiedades de la suma:
  - Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
  - Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
  - Elemento neutro $\vec{0}:\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
  - Elemento opuesto $-\vec{v}:\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$
- Propiedades del producto por un escalar:
  - Asociativa: $\beta(\alpha\vec{v})=(\beta\alpha)\vec{v}$
  - Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$
  - Distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$
  - Elemento unidad $\mathbf{1}:\mathbf{1}\vec{v}=\vec{v}$

Espacio Vectorial

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial es cualquier conjunto que posea unas operaciones suma y producto por escalares, cumpliendo todas las propiedades anteriores. Un espacio vectorial es real o complejo según sean los escalares.

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un conjunto V con dos operaciones:

- **Suma de vectores** $(+) : V \times V \to V$
- **Multiplicación escalar** $(\cdot) : \mathbb{F} \times V \to V$

Satisfacen ocho axiomas fundamentales (asociatividad, conmutatividad, neutro, inverso, etc.).
Ejemplos:

- $\mathbb{R}^2$ **es un espacio vectorial**
  - Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  - Escalar: $a(x, y) = (ax, ay)$ con $a \in \mathbb{R}$
  - Se cumplen todos los axiomas.
- **Polinomios de grado menor o igual a 2**
  El conjunto P_2 de polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial.
- **Matrices** 2×2
  El conjunto de todas las matrices reales de 2×2 con suma usual y multiplicación por escalar es un espacio vectorial.

Espacio Vectorial

Ejemplos:

- **Vectores en $\mathbb{R}^n$**
  El espacio $\mathbb{R}^n$ formado por todos los vectores de n componentes $(x_1, \ldots, x_n)$ es un espacio vectorial real, en el que se pueden sumar vectores y multiplicar por un escalar (real) de manera habitual.
- **Polinomios de grado 2**
  El conjunto de polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales:
  $\mathbb{P}_2 = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial real, pues podemos sumar dos elementos de $\mathbb{P}_2$ y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$ y podemos multiplicarlo por un escalar real y obtenemos otro elemento de $\mathbb{P}_2$. Sin embargo, no es un espacio vectorial complejo.

Ejercicios:

- Razonar si son espacios vectoriales reales:
  (a) El conjunto G de los polinomios de grado 3.
  (b) El conjunto $\mathbb{M}_{2\times 2}$ de matrices 2×2.
  (c) El conjunto de las funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$, por ejemplo $f(x) = \log x, g(x) = x^2$.
- Explicar si $\mathbb{R}^3$ es espacio vectorial con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (x', y', z') &= (x + x', y + y', z + z') \\ \lambda(x, y, z) &= (0, \lambda y, \lambda z)\end{aligned}$$

Subespacios Vectoriales

Definición de Subespacios Vectoriales

Dado un espacio vectorial **V**, se dice que un subconjunto **S** de **V** es un **subespacio vectorial** si contiene al vector $\vec{0}$ y si al efectuar las operaciones de suma y producto por un escalar entre vectores de **S** el resultado permanece en **S**, es decir:

- $\vec{0} \in S$.
- Si $\vec{u}, \vec{v} \in S$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
- Si $\vec{u} \in S$ y λ es un escalar entonces $\lambda\vec{u} \in S$

Un **subespacio S** de un espacio vectorial **V** es un subconjunto no vacío que también es espacio vectorial con las operaciones de **V**.

Nota : No haría falta comprobar el resto de propiedades (asociativa, conmutativa, etc) porque si se cumplen en **V** , también se cumplen en **S**.

Ejemplos

- **Eje x en $\mathbb{R}^2$:** $W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ es subespacio.
- **Subespacio de matrices simétricas :** El conjunto de matrices simétricas $A = A^T$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es un subespacio.
- **Polinomios sin término independiente:** $W = \{p(x) \in P_2 \mid p(0) = 0\}$ es subespacio de P_2
- **La recta $x = y$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.** Está formado por vectores de la forma (x, x). Contiene al vector $(0, 0)$ y es cerrado para la suma y producto escalar:
  - Suma: $(x, x) + (x', x') = (x + x', x + x'$ es también elemento de la recta.
  - Producto por un escalar $\lambda(x, x) = (\lambda x, \lambda x)$ también es un elemento de la recta.
- **El plano XY es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.** Está formado por vectores de la forma $(x, y, 0)$. Contiene al vector $(0, 0, 0)$ y es cerrado para la suma y producto escalar:
  - Suma: $(x, y, 0) + (x', y', 0) = (x + x', y + y', 0)$ es también elemento del plano.
  - Producto por un escalar $\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0)$ también es un elemento del plano.

Ejercicio:

(a) ¿Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ el conjunto de vectores de la forma $(a, 1)$?

(b) ¿Forma un subespacio del espacio de $\mathbb{P}_2$ (polinomios de grado ≤ 2) el conjunto de polinomios de grado ≤ 1?

(c) En $\mathbb{M}_{2\times 2}$ (matrices cuadradas de orden 2), ¿es un subespacio el conjunto de matrices simétricas?

Operaciones con Subespacios

Intersección y suma de subespacios: Sean W_1 y W_2 subespacios de V:

- $W_1 \cap W_2$ también es subespacio.
- $W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$ también es subespacio.

Ejemplos:

- **Intersección en** $\mathbb{R}^3$ $W_1 = \{(x, y, 0)\}$ y $W_2 = \{(x, 0, z)\}$. Entonces $W_1 \cap W_2 = \{(x, 0, 0)\}$.
- **Suma de subespacios** Usando los mismos W_1 y W_2, $W_1 + W_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, z = 0 \text{ o } y = 0\}$
  - en realidad se obtiene $\{(x, y, z) \mid z = 0 \text{ o } y = 0\}$
  - suma no abarca todo $\mathbb{R}^3$.
- **Subespacios con intersección trivial** Sean $W_1 = \text{span}\{(1, 0)\}$, $W_2 = \text{span}\{(0, 1)\}$ en $\mathbb{R}^2$
  - $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$
  - $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$
- **Subespacio generado por vectores** Dados $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$
  - $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$ es un subespacio plano que pasa por el origen.

Descripción de los Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Geométricamente, en general los subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^2$ son rectas, y en $\mathbb{R}^3$ son planos y rectas (el subespacio $\vec{0}$ es un punto). En general, los subespacios en $\mathbb{R}^n$ serán hiperplanos, y podremos describirlos de dos maneras:

- **Forma implícita:** mediante ecuaciones. Los vectores que verifican las ecuaciones son los que pertenecen al subespacio.
- **Forma paramétrica:** mediante una expresión con parámetros, que al tomar distintos valores producen todos los vectores del subespacio. Los parámetros deben ser **independientes** entre sí.

La suma del número de ecuaciones implícitas y el número de parámetros da el número de incógnitas, siempre que los **parámetros sean independientes entre sí**.

Ejemplos

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ la bisectriz se escribe en implícitas como $\{x = y\}$ y en paramétricas $\{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- En $\mathbb{R}^3$ el plano XY se escribe en implícitas como $\{z = 0\}$ y en paramétricas $\{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- En $\mathbb{R}^3$ dado el subespacio en paramétricas $\{(\alpha, \beta, \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, su forma implícita es $\{z = x - y\}$.
- El subespacio cero de $\mathbb{R}^3$ $(0, 0, 0)$ tiene como implícitas $x = 0, y = 0, z = 0$.
- El subespacio total $\mathbb{R}^3$ tiene como forma paramétrica $\{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ y no tiene ecuación implícita.

Ejercicio:

- Obtener la forma implícita del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones paramétricas: $\{(\lambda, \lambda, 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Obtener la forma implícita del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones paramétricas: $\{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
- Obtener la forma paramétrica del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por las ecuaciones implícitas: $\{x + z = 0, x + 2y + z = 0\}$

Combinación e Independencia Lineal

Definición de Combinación Lineal

Dado un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se llama **combinación lineal (C.L.)** a cualquier vector de la forma: $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares $\mathbb{K}$, llamados coeficientes de la combinación lineal. La **C.L.** de elementos de un subespacio **S** está en **S**.

- **¿Qué es una combinación lineal (C.L) ?**
  Sea un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Una **C.L.** de estos vectores es cualquier expresión de la forma:
  $$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n,$$
  donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares $\mathbb{K}$.
- **¿Qué es independencia lineal (L.I.)?**
  Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son **linealmente independientes (L.I.)** si:
  $$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$
  De lo contrario, son **linealmente dependientes (L.D.)**.

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^2$, dado el subespacio $U \equiv \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, la combinación lineal de dos elementos de **U** es:
$$\alpha(\lambda, \lambda) + \beta(\nu, \nu) = (\alpha\lambda + \beta\nu, \alpha\lambda + \beta\nu)$$
que también es elemento de **U** .
- ¿Son linealmente independientes los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$?

Solución

Consideramos $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(2, 4) = (0, 0) \Rightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2) = (0, 0)$$

Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 + 2c_2 & = & 0 \\ 2(c_1 + 2c_2) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \ \Rightarrow \ \textbf{Dependientes}$$

Ejemplos

- Verificar si los vectores $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, 2)$ son linealmente independientes.

Solución

Planteamos:

$$\alpha_1(1, 0, -1) + \alpha_2(2, 1, 3) + \alpha_3(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo:

Única solución: $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$ **Independientes**

Ejemplos

- Determina si las funciones $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = te^t$, $f_3(t) = t^2e^t$ son linealmente independientes.

Solución

Estas funciones forman un conjunto conocido del método de variación de parámetros y son:

Linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$

Se puede demostrar con el Wronskiano W:

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e^t & te^t & t^2e^t \\ e^t & (t+1)e^t & t(t+2)e^t \\ e^t & (t+2)e^t & (t^2+4t+2)e^t \end{vmatrix} = 2e^{3t} \neq 0 \Rightarrow \textbf{Independencia lineal}$$

- Determina si $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$, $y_3(t) = 1$ son linealmente independientes en $[0, 2\pi]$.

Solución:

Consideramos la combinación:

Dependencia Lineal

Definición de Dependencia Lineal

Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente (L.D.) o ligado** si al menos uno de ellos es **C.L.** de los demás, o bien, el vector $\vec{0}$ es **C.L.** de ellos con coeficientes no nulos.

Ejemplo

- En $\mathbb{R}^2$ los vectores $\vec{u} = (1, 1), \vec{v} = (0, 3)$ y $\vec{w} = (2, 5)$ son linealmente dependientes **(L.D.)** puesto que

$$\vec{w} = \vec{v} + 2\vec{u}, \text{ o bien, } 0 = \vec{v} + 2\vec{u} - \vec{w}$$

- Comprobar si son linealmente dependientes los siguientes conjuntos de vectores:
  (a) $\vec{u} = (3, 1), \vec{v} = (4, 5)$ en $\mathbb{R}^2$
  (b) $\vec{u} = (1, 0, 2), \vec{v} = (4, 3, 1), \vec{w} = (5, 3, 3)$ en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 0, 2) + (4, 3, 1) = (5, 3, 3) = \vec{w}$$

Propiedades de la Dependencia / Independencia Lineal

- El conjunto formado por un solo vector $\vec{v}$ no nulo es libre.
- Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo de otro.
- Todo conjunto que contenga al $\vec{0}$ es ligado.
- Si un conjunto es ligado, añadiéndole vectores sigue siendo ligado.
- Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre.
- Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número (la dimensión del espacio) y sigue siendo libre.
- Si un conjunto es ligado, quitándole vectores que son **C.L.** de los demás llegará a ser libre.

Rango

Definición de Rango

El **rango de un conjunto de vectores** es el número de vectores linealmente independientes del conjunto.

Propiedades:

- El rango de un conjunto de vectores es el rango de la matriz que forman (habitualmente colocándolos por columnas).
- Dados m vectores, si su rango es m son linealmente independientes.
- Si tenemos n vectores en $\mathbb{R}^n$, la matriz que forman es cuadrada, por lo que se puede obtener su determinante. Si el **determinante es nulo** serán dependientes, si el **determinante es no nulo** serán independientes.
- Si al eliminar uno de los vectores de un conjunto se conserva el rango del conjunto, dicho vector depende linealmente de los demás.
- Si al añadir un vector a un conjunto se conserva el rango, entonces el nuevo depende linealmente de los anteriores.

Ejercicio:
En $\mathbb{R}^3$ determinar el rango de los vectores: $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (0,1,0), \vec{w} = (1,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

$$\vec{w} = (1,1,0) \Rightarrow (1,0,0) + (0,1,0) = \vec{u} + \vec{v}$$

Sistemas Generadores

Definición de Sistemas Generadores

Dado un conjunto de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de ellos se llama **subespacio generado o engendrado** por $\vec{v} =_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$. Dichos vectores forman un sistema generador del subespacio (o del espacio).

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^2$ un vector no nulo v genera una recta: $\alpha\vec{v}$.
- En $\mathbb{R}^3$ dos vectores generan un plano, por ejemplo, los vectores
  - $\vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (0, 1, 0)$
  - $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) \to \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es la expresión paramétrica del plano XY.
- Otro sistema generador de $\mathbb{R}^2$ es
  - $(2, 0), (1, 3), (2, 1)$
  - $(a, b) = \alpha(2, 0) + \beta(1, 3) + \gamma(2, 1)$ produce un sistema de ecuaciones que es compatible para todo a, b, por lo tanto es sistema generador de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio

(a) ¿Son los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ un sistema generador de $\mathbb{R}^2$? En caso negativo, ¿qué espacio generan?

(b) Hallar un sistema generador del subespacio $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) En R3 ¿pertenece $\vec{u} = (1,2,3)$ al subespacio generado por $\vec{v} = (4,5,6), \vec{w} = (7,8,9)$?

Observación

Uniendo sistemas generadores de dos subespacios $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, se obtiene un espacio generador de $\mathbf{U} + \mathbf{V}$.

Ejemplo:

- $U \equiv$ plano $XY \equiv \{(\alpha, \beta, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ sist. gen.$\{(1,0,0),(0,1,0)\}$
- $V \equiv$ plano $XZ \equiv \{(\alpha, 0, \gamma) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \rightarrow$ sist. gen.$\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Es sistema generador de $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ es el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Bases

Definición de Base

Se llama **base** de un espacio o subespacio vectorial a un sistema generador de dicho espacio o subespacio que sea a la vez linealmente independiente.

¿Qué es una base? Una **base** de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio.

- Cada vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base.
- Ejemplo: en $\mathbb{R}^3$, una base típica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Propiedades:

- Una base de **S** es un sistema generador lo más pequeño posible (minimal) de **S**.
- Una base de **S** es un conjunto linealmente independiente lo más grande posible dentro de **S**.
- Una base de **S** permite expresar todos los vectores de **S** como **C.L.** de ella de manera única para cada vector.

$$S \equiv \{x + 2y + z - t = 0; z - t = 0\}$$

coeficientes

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos y Ejercicio

Ejemplos

- Base canónica de $\mathbb{R}^n$: los vectores $\{(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)\}$ son linealmente independientes y forman un sistema generador porque cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como **C.L.** de ellos.
- Otra base de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(1,1,0),(0,2,-3)\}$.
- $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\}$ no forman base de R3 porque no son linealmente independientes.

Ejercicio

(a) En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio $S \equiv$ plano XY. ¿Forman los vectores $\{(3,2,0),(1,-1,0)\}$ base de **S**?

(b) ¿Es $\{(1,0,2),(1,0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$?

(c) ¿Es $\{(2,0,0),(0,3,0),(4,1,0)\}$ base de $S \equiv$ plano XY de $\mathbb{R}^3$?

Dimensión

Definición de Dimensión

Todas las bases de un mismo espacio o subespacio tienen el mismo número de vectores. Al número de vectores que forman una base se llama **dimensión**.

¿Qué es la dimensión? La **dimensión** de un espacio vectorial es el número de vectores en una base de ese espacio.

- Si un espacio tiene una base con n vectores, se dice que su dimensión es n.
- La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.
- La dimensión de un subespacio en $\mathbb{R}^n$ coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica.
- Si **S** y **T** son subespacios y $S \subset T$ entonces $dim\ S \leq dim\ T$
- El rango de una familia de vectores es igual a la dimensión del subespacio que generan.

Observaciones

Observaciones

- La dimensión de un subespacio en $\mathbb{R}^n$ coincide con el número de parámetros libres en su forma paramétrica
- El rango de un conjunto de vectores es igual a la dimensión del subespacio que generan (por combinaciones lineales)
- Sea $\mathbf{S}$ un subespacio de dimensión m. Entonces:
  - Si tenemos m vectores linealmente independientes en $\mathbf{S}$, serán sistema generador de $\mathbf{S}$ (y por tanto, base)
  - Si tenemos m vectores que generan $\mathbf{S}$, también serán linealmente independientes (y por tanto, base)

Estos conceptos permiten pasar de la forma paramétrica a la forma implícita de un subespacio: implicitación.

Consecuencia de la Definición de Base y Dimensión

Ejemplos
Expresar en forma implícita

$$S \equiv \{(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

Que tenemos :

$$\left.\begin{array}{c} 2 \text{ parámetros} \to \dim S = 2 \\ 3 \text{ incógnitas en } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \text{ ecuación implícita}$$

Obtenemos una base de

$$S : (\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) = \alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, -5)$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

- $(1, 0, 3)$ y $(0, 1, -5)$ forman un sistema generador y son **L.I.**.
- Un vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ pertenecerá a **S** si es **C.L.**, es decir, si el rango sigue siendo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -5 & z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x - 5y \end{pmatrix} \Rightarrow z - 3x - 5y = 0$$

Ejercicio:
Expresar en forma implícita en $\mathbb{R}^4$ el subespacio

$$S \equiv \{(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta, -\alpha + 3\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplos

- **Ejemplo 1** Determina si el conjunto $\{(1,0,-1),(0,1,2),(2,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Verificamos si los vectores son linealmente independientes resolviendo si:

$$a(1,0,-1)+b(0,1,2)+c(2,1,0)=(0,0,0)$$

El sistema homogéneo solo tiene solución trivial $\Rightarrow$ los vectores son **L.I.** y forman base.

- **Ejemplo 2** ¿Cuál es la dimensión del espacio de soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$y''+y=0?$$

Solución

La solución general es:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

Los vectores $\{\cos x, \sin x\}$ son **L.I.**, por tanto la dimensión es 2.

Ejemplos

- **Ejemplo 3** Encuentra una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,3),(2,4,6),(1,0,1)\}$.

Solución

Notamos que $(2,4,6) = 2(1,2,3)$. Son L.D. Entonces una base es $\{(1,2,3),(1,0,1)\}$.
Dimensión $= 2$.

- **Ejemplo 4** Determina si $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es una base del espacio solución de:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Solución

La ecuación tiene raíces repetidas: $r = 1$ con multiplicidad 3. Solución general:

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$$

$\Rightarrow$ Los vectores dados son **L.I.** y forman una base.

- Una base permite representar todo el espacio vectorial.
- La dimensión nos dice cuántos vectores se necesitan para ello.
- Comprender estos conceptos es clave para resolver ecuaciones diferenciales.

Inclusión de Subespacios

- Se dice que el subespacio **S** está contenido en el subespacio $T(S \subset T)$ si todos los elementos de **S** están también en **T**.
- En cualquier espacio vectorial, el subespacio $\vec{0}$ está contenido en todos los demás subespacios.

Ejemplos:

- En $\mathbb{R}^3$, sean los siguientes subespacios:

$$\begin{aligned} S &\equiv \{y = 0, z = 0\} \\ T &\equiv \{y = 0\} \end{aligned}$$

  tenemos que $(S \subset T)$ pues todo vector que satisfaga las ecuaciones de **S** también satiface la de **T**.

- En $\mathbb{R}^3$, sean los subespacios:

$$\begin{aligned} S &\equiv \{(\lambda, 0, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ T &\equiv \{(\alpha, 0, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  tenemos que $(S \subset T)$, pues todo vector de la forma $(\lambda, 0, 0)$ también es de la forma $(\alpha, 0, \beta)$.

Intersección de Subespacios

Definición

La intersección de subespacios **S** y **T** consiste en encontrar los elementos comunes a dos conjuntos $(S \cap T)$. Dados dos subespacios cualesquiera, siempre hay vectores comunes a ambos, al menos el $\vec{0}$.

La forma más sencilla de calcular $(S \cap T)$ es considerar, conjuntamente, las ecuaciones implícitas de **S** y las de **T** formando un sistema de ecuaciones. Resolviendo el sistema que forman, se obtiene la forma paramétrica de $(S \cap T)$.

Teorema

La intersección de subespacios es un subespacio, pues la suma y el producto por un escalar permanece dentro de **S** y **T** y por tanto dentro de $(S \cap T)$.

Ejemplo:
Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $S \equiv \{z = 0\}$ (plano XY), $T \equiv \{y = 0\}$ (plano XZ), su intersección es $(S \cap T) \equiv \{z = 0, y = 0\}$ en implícitas, $\{(\lambda, 0, 0)\}$ en paramétricas (eje X).

Suma de Subespacios

Dados dos subespacio , el subespacio suma se define como aquellos vectores que podamos construir sumando un vector de **S** y uno de **T**.

Al contrario que la intersección, la suma $(S + T)$ se calcula más fácilmente usando la forma paramétrica de **S** y **T** .

Teorema

La suma de subespacios es un subespacio.

Ejemplo:
Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $S \equiv \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y $T \equiv \{(0, 0, \gamma \in \mathbb{R}\}$, entonces $S + T \equiv \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta + \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

Observación:
la intersección $(S \cap T)$ es el mayor subespacio contenido en ambos y la suma $(S + T)$ es el menor subespacio que contiene a ambos.

Suma Directa

Dados dos subespacios **S** y **T**, considerando el subespacio suma:
$S + T = \{u + v : u \in S, v \in T\}$ uniendo un sistema generador de **S** con uno de **T** se obtiene un sistema generador de $(S + T)$. Sin embargo, no siempre uniendo una base de **S** con una base de **T** se obtiene una base de $(S + T)$:

Fórmula de Grassmann:

$$dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T)$$

Teorema

Se dice que la suma es directa $(S \oplus T)$ si su intersección $(S \cap T)$es solamente el vector cero. En ese caso, al unir una base de **S** y una base de **T** se obtiene una base de $(S \oplus T)$.

- Suma directa: $dim(S \oplus T) = dim(S) + dim(T)$
- Suma no directa: $dim(S + T) + dim(S \cap T) = dim(S) + dim(T)$

Subespacio Suplementario

Si dos subespacios **S** y **T** están en suma directa y además su suma es igual al espacio total $S \oplus T = V$ se dice que **S** y **T** son suplementarios. Todo subespacio tiene infinitos suplementarios, salvo el $\vec{0}$ cuyo único suplementario es el total, y el total, cuyo único suplementario es el $\vec{0}$.

Aplicación:
Dada una base de S, la prolongamos añadiendo vectores, independientes de los anteriores, hasta formar una base del espacio total. Para ello elegimos cualquier vector, por ejemplo, los de la base canónica. Los vectores añadidos forman una **base de un suplementario de S**
Ejemplos:

- El eje Z es el suplementario del plano XY.
- En $\mathbb{R}^3$ el suplementario de un plano es cualquier recta que no esté contenida en el plano y el suplementario de una recta es un plano que no la contenga.

Subespacio Suplementario

Ejemplo: En $\mathbb{R}^4$, sea **S** el subespacio cuya base es

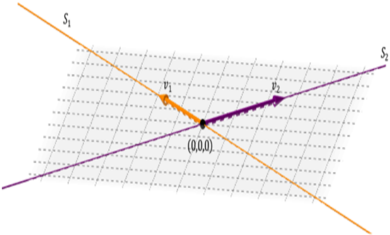
$$\vec{v}_1 = (1,0,2,0), \vec{v}_2 = (3,0,0,0)$$

Para hallar un suplementario de S, consideramos los vectores de la base canónica $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.
Podemos añadir a v_1, v_2 los vectores $(0,1,0,0),(0,0,0,1)$ porque dan un conjunto linealmente independiente **(rango 4)**, forman un suplementario de **S**.
Ejercicio:
En $\mathbb{R}^4$, sea **S** el subespacio dado por las ecuaciones implícitas $\{x+y=0, t=0\}$, obtener un subespacio suplementario de S.
Ejercicio:

- El eje Z es el suplementario del plano XY.
- En $\mathbb{R}^3$ el suplementario de un plano es cualquier recta que no esté contenida en el plano y el suplementario de una recta es un plano que no la contenga.

Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

- Dos rectas, $S_1 =< \vec{v}_1 >$ y $S_2 =< \vec{v}_2 >$, que se cortan

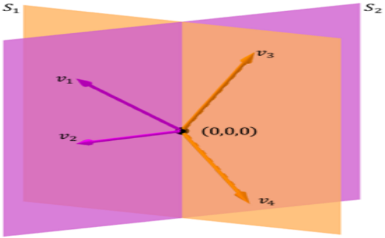


$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$$

$$S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$$

$S_1 \oplus S_2 = S$, siendo **S** el plano que contiene a ambas rectas

- Dos planos, $S_1 =< \vec{v}_3, \vec{v}_4 >$ y $S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, que se cortan en una recta



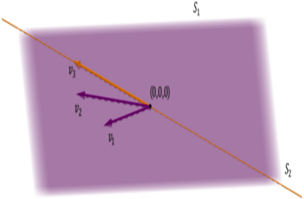
$$S_1 \cap S_2 = \{(0,0,0)\}$$

$$S_1 + S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 >=< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >$$

$$S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3, \text{ pero } \cancel{S_1 \oplus S_2}$$

Ejemplos en $\mathbb{R}^3$

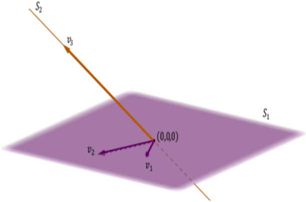
- Rectas, $S_2 =< \vec{v}_3 >$ contenida en un plano $S_1 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, que se cortan



$S_1 + S_2 = S_1$ ya que $S_2 \subset S_1$

$\cancel{S_1 \oplus S_2}$ ya que $S_1 \cap S_2 = S_2$

- Recta, $S_2 =< \vec{v}_3$, que cortra un plano $S_1 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$



$S1 \cap S2 = \{(0,0,0)\}$ y $S_2 =< \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 >=^3$

Por lo tanto, $\cancel{S_1 \oplus S_2}$, En otras palabras, S_1 y S_2 son subespacios suplementarios.

Coordenadas

En un espacio vectorial **V**, fijada una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, todo vector $\vec{u} \in V$ puede ponerse de forma única como **(C.L)**. de dicha base : $u = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$. Los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son las coordenadas del vector $\vec{u}$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Ejemplos:
En la base canónica de $\mathbb{R}^2(1,0),(0,1)$ las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,2)$ son exactamente $(1,2)$ ya que se puede expresar: $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$ Si fijamos la base de $\mathbb{R}^2 : B \equiv \{(2,3),(1,-1)\}$, podemos hallar las coordenadas de $\vec{v}$ en **B**:

$$(1,2) = \alpha(2,3) + \beta(1,-1) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5}, \beta = -\frac{1}{5}$$

Por tanto, las coordenadas de $\vec{v}$ en **B** son $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

Envolvente Lineal

Definicioń

Sea **V** un espacio vectorial. Dado un subconjunto $E \subset V$ se llama envolvente lineal generada por **E**, **L(E)**, al conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ que se pueden poner como combinación lineal de elementos de **E**

$$\begin{aligned} L(E) &= \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2, \ldots, \alpha_p\vec{v}_p : p \in \mathbb{N}, \vec{v}_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\vec{v}_i : p \in \mathbb{N}, \vec{v}_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Al conjunto **E** se le llama sistema generador de **L(E)**. Si $L(E) = V$ el conjunto **E** se llama simplemente un sistema generador del espacio vectorial.

¿Qué es la Envolvente Lineal?

- La envolvente lineal de un conjunto de funciones es el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de esas funciones.
- Es un concepto fundamental en el estudio de espacios vectoriales de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales.

Propiedades de las envolventes lineales

Proposición

Sea **V** un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y **E** un subconjunto de **V**, $(E \subset V)$. La envolvente lineal de **E**, $L(E)$, es el menor subespacio vectorial que contiene a **E**.

Como consecuencia de la definción y esta proposición deducimos algunas propiedades:

- $E \subset B \Rightarrow L(E) \subset L(B)$
- $E \subset B \Rightarrow L(E \cup \{\vec{v}\}) = L(E)$
- **L(E)** es un subespacio vectorial de **V**.
- **L(E)** es el menor subespacio vectorial de **V** que contiene a **E**, esto es, si **V** es un subespacio vectorial de **V** que contiene a **E**, entonces $L(E) \subset V$.
- Si **E** es subespacio vectorial de **V**, entonces $L(E) = E$.

Propiedades

- Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son funciones, su envolvente lineal está dada por:

$$L(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \,\middle|\, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- El conjunto es un subespacio del espacio de funciones definidas en un intervalo común.

Ejemplos

- Determinar la envolvente lineal de las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$.

Solución

La envolvente lineal está formada por todas las combinaciones lineales:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Determinar la envolvente lineal de $\sin x$ y $\cos x$.

Solución

La envolvente lineal es:

$$y(x) = a \sin x + b \cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Este conjunto es el espacio solución de la ecuación:

$$y'' + y = 0$$

Ejemplos

- Determinar si las funciones x, x^2, y x^3 forman una envolvente lineal en $\mathbb{R}$.

Solución

Sí, ya que cualquier combinación $ax + bx^2 + cx^3$ pertenece a la envolvente lineal. Este conjunto corresponde al espacio de polinomios de grado ≤ 3.

- Determinar la envolvente lineal de e^x, xe^x, y x^2e^x.

Solución

El conjunto:

$$y(x) = ae^x + bxe^x + cx^2e^x$$

corresponde al espacio solución de una ecuación diferencial de tercer orden con raíces reales iguales.

- La envolvente lineal es clave para describir espacios de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.
- Los ejemplos mostraron cómo identificarla, construirla, y relacionarla con ecuaciones diferenciales.

Matriz de Cambio de Base

En un espacio vectorial **V**, dadas dos bases B y B' , se llama matriz de cambio de base o de cambio de coordenadas de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

- **¿Qué es la Matriz de Cambio de Base?**
  - Dado un espacio vectorial **V**, un vector puede representarse en distintas bases.
  - La matriz de cambio de base permite transformar las coordenadas de un vector desde una base B a otra base B'.
  - Si P es la matriz de cambio de base de B a B', entonces:

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$$

  - El cambio de base es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones y simplificar matrices.

Ejemplos

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la base $B \equiv \{(2,3),(1,-1)\}$ y la base canónica $B' \equiv \{(1,0),(0,1)\}$.

- Cambio de base de B a B' :

$$\begin{aligned}(2,3) &= 2(1,0)+3(0,1)\\ (1,-1) &= 1(1,0)-1(0,1)\end{aligned}$$

La matriz de cambio de base de B a B' :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Cambio de base de B' a B:

$$\begin{aligned}(1,0) &= (2,3)+(1,-1)\\ (0,1) &= (2,3)-(1,-1)\end{aligned}$$

La matriz de cambio de base de B' a B:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Usamos la matriz $\mathbf{Q}$ para hallar las coordenadas de $\vec{v} = (1,2)$ en B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Podemos volver a las coordenadas en la base B' usando $\mathbf{P}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Construcción de la Matriz de Cambio de Base

- **Construcción de la Matriz de Cambio de Base**
  - Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases de V.
  - La matriz de cambio de base de B a B' se construye como:

$$P = \begin{bmatrix} [\mathbf{w}_1]_B & [\mathbf{w}_2]_B & \cdots & [\mathbf{w}_n]_B \end{bmatrix}$$

  - Entonces, para un vector $\mathbf{v} \in V$:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B$$

Ejemplos

- **Cambio de base en $\mathbb{R}^2$**
  - Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
  - Construimos $P = [[\mathbf{w}_1]_B \, [\mathbf{w}_2]_B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
  - Para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, calculamos:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- **Cambio de base y diagonalización**
  - Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, queremos diagonalizarla.
  - Base de vectores propios: $B' = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \}$
  - Matriz de cambio de base $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
  - Entonces: $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ejemplos

- **Representación de vectores en nueva base**
  - Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y la base $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
  - Hallamos la matriz P y su inversa.
  - Calculamos $[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B$
- **Cambio de base en $\mathbb{R}^3$**
  - Sean $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
  - Para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, buscamos su representación en B'
  - Construimos P, luego:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B$$

Conclusiones:

- El cambio de base es una herramienta poderosa para simplificar problemas en álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.
- Permite transformar representaciones, diagonalizar matrices y facilitar el análisis de sistemas lineales.
- Dominar la matriz de cambio de base es clave para cursos avanzados en matemáticas aplicadas.

Gracias por su atención

¿Preguntas?