Ecuaciones Diferenciales - Pratica Calificada 2

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. *[] Proporcione el campos de isoclinas de la ecuación diferencial indicada junto con una o más curvas solución. Trace las curvas solución que pasan por los puntos adicionales marcados en cada campo de isoclinas.

   Solucion:

$$\frac{dy}{dx} = x - y + 1$$
$$x - y + 1 = C \Rightarrow y = x + 1 - C$$

La ecuacion diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x); \quad P(x) = 1, Q(x) = x + 1$$

El factor de integración

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^x$$

multiplicamos ambos lados por el factor

$$\begin{aligned} e^x\frac{dy}{dx} + e^x y &= e^x(x+1) \\ \frac{d}{dx}(ye^x) &= e^x(x+1) \\ d(ye^x) &= e^x(x+1)dx \end{aligned}$$

Integrando ambos lados

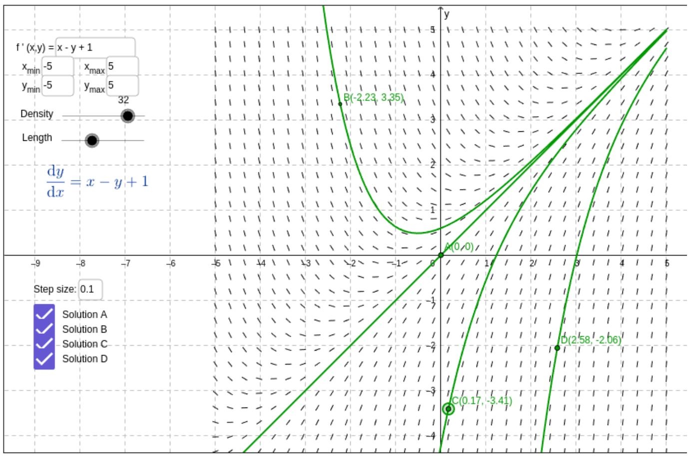
$$\begin{aligned} \int d(ye^x) &= \int e^x(x+1)dx \\ ye^x &= \int e^x(x+1)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv &= e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^x(x+1)dx &= (x+1)e^x - \int e^x dx \\ &= (x+1)e^x - e^x = xe^x \end{aligned}$$

La solucion es de la forma

$$ye^x = xe^x + C \Rightarrow y = x + Ce^x$$



https://www.geogebra.org/m/kpp3FjBh

2. *[] Verifique que la ecuación diferencial dada sea exacta; después resuélvala.

   (a)
$$(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$$

   (b)
$$(2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y^3)dy = 0$$

   Solucion:

   (a)
$$(2x + 3y)\,dx + (3x + 2y)\,dy = 0$$

   Calculamos derivadas parciales de

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) = 2x + 3y \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{\partial M}{\partial y} = 3 \\ N(x,y) = 3x + 2y \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{\partial N}{\partial x} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{La ecuación es exacta.}$$

Ahora integramos $M(x,y)$, encontrar $\psi(x,y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 2x + 3y \Rightarrow \psi(x,y) = x^2 + 3xy + h(y)$$

Derivamos $\psi(x,y)$ con respecto a y y comparamos con $N(x,y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3x + h'(y) = N(x,y)$$

$$3x + h'(y) = 3x + 2y \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2$$

por lo tanto

$$\psi(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$$

(b)

$$(2xy^2 + 3x^2)\,dx + (2x^2y + 4y^3)\,dy = 0$$

Calculamos derivadas parciales de

$$\left.\begin{array}{lll} M(x,y) = 2xy^2 + 3x^2 & \Rightarrow & \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy \\ N(x,y) = 2x^2y + 4y^3 & \Rightarrow & \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{La ecuación es exacta.}$$

Ahora integramos $M(x,y)$, encontrar $\psi(x,y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M = 2xy^2 + 3x^2 \Rightarrow \psi = x^2y^2 + x^3 + h(y)$$

Derivamos $\psi(x,y)$ con respecto a y y comparamos con $N(x,y)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y + h'(y) = N(x,y)$$

$$2x^2y + 4y^3 \Rightarrow h'(y) = 4y^3 \Rightarrow h(y) = y^4$$

por lo tanto

$$\boxed{\psi(x,y) = x^2y^2 + x^3 + y^4}$$

3. (10 points) La ecuación $\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C$ como ecuación de Riccati. Suponga que se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación. Compruebe que la sustitución

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

transforma la ecuación de Riccati en una ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)v = -A$$

Solucion:

La ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C$$

Suponga que se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación.

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} &= A\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + B\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + \\
&= A\left(y_1^2 + \frac{2y_1}{v} + \frac{1}{v^2}\right) + B\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + C \\
&= \underbrace{Ay_1^2 + By_1 + C}_{\frac{dy_1}{dx}} + \left(\frac{2Ay_1 + B}{v}\right) + \frac{A}{v^2} \\
\cancel{\frac{dy_1}{dx}} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} &= \cancel{\frac{dy_1}{dx}} + \left(\frac{2Ay_1 + B}{v}\right) + \frac{A}{v^2}
\end{aligned}
$$

Restamos $\frac{dy_1}{dx}$ de ambos lados:

$$
-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \left(\frac{2Ay_1 + B}{v}\right) + \frac{A}{v^2} \Rightarrow -\frac{dv}{dx} = (2Ay_1 + B)v + A
$$

transforma la ecuación de Riccati en la ecuación lineal:

$$
\boxed{\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)v = -A} \Rightarrow \frac{dv}{dx} + Pv = Q
$$

Donde P, Q son funciones que no dependen de (x, v)

4. *[] Se aplican los frenos a un auto cuando se está moviendo a una velocidad de 100 km/h provocando una desaceleración constante de 10 metros por segundo al cuadrado (m/s^2). ¿Cuánta distancia viaja antes de detenerse?
Solucion:

- Velocidad inicial: $v_0 = 100 \text{ km/h} = \frac{100 \times 1000}{3600} = 27.78 \text{ m/s}$
- Velocidad final: $v = 0 \text{ m/s}$ (se detiene)
- Aceleración (negativa por ser desaceleración): $a = -10 \text{ m/s}^2$

Usamos la ecuación del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$
v^2 = v_0^2 + 2ax
$$

Despejamos x:

$$
x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}
$$

Sustituimos los valores:

$$
x = \frac{0^2 - (27.78)^2}{2(-10)} = \frac{-772.84}{-20} = 38.64 \text{ m}
$$

La distancia que recorre el auto antes de detenerse es: $\boxed{\text{38.64 metros}}$

5. *[] Sea la ecuación diferencial

$$
x^2y^{''} - 4xy^{'} + 6y = \ln x^2
$$

Halle la solución particular y complementaria.
Solucion:

- **Ecuación homogénea:**
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$
Usamos $y = x^r$,
$$\begin{aligned} y &= x^r \\ y' &= rx^{r-1} \\ y'' &= r(r-1)x^{r-2} \end{aligned}$$
Sustituyendo en la ecuación:
$$\begin{aligned} x^2r(r-1)x^{r-2} - 4xrx^{r-1} + 6x^r &= 0 \\ r(r-1)x^r - 4rx^r + 6x^r &= 0 \\ x^r\left[r(r-1) - 4r + 6\right] &= 0 \end{aligned}$$
Ecuación característica:
$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-3) = 0 \Rightarrow r = 2,\ 3$$
Solución homogénea:
$$y_h(x) = C_1x^2 + C_2x^3$$
- **Solución particular:** Proponemos una solución particular de la forma
$$y_p(x) = A(x)\ln x$$
  - Como $\ln x$ no es solución de la homogénea, intentamos $y_p(x) = x^k \ln x$
  - Notamos que el término no homogéneo es $\ln x^2 = 2\ln x$

(a) Probaremos con $y_p = x^2 \ln x$, ya que está relacionado con la parte no homogénea. Calculamos derivadas:
$$\begin{aligned} y_p &= x^2\ln x, \\ y_p' &= 2x\ln x + x, \\ y_p'' &= 2\ln x + 3 \end{aligned}$$
Sustituimos en la ecuación:
$$x^2y_p'' - 4xy_p' + 6y_p = x^2(2\ln x + 3) - 4x(2x\ln x + x) + 6(x^2\ln x)$$
Expandimos:
$$x^2(2\ln x + 3) = 2x^2\ln x + 3x^2$$
$$-4x(2x\ln x + x) = -8x^2\ln x - 4x^2$$
$$6x^2\ln x = 6x^2\ln x$$
Sumamos todos:
$$(2x^2\ln x - 8x^2\ln x + 6x^2\ln x) + (3x^2 - 4x^2) = (0) + (-x^2)$$
Resultado:
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = -x^2 \neq \ln x^2$$
Esto no da el término deseado.

(b) Entonces probamos con $y_p(x) = x^r \ln x$ y encontramos una forma general. Dado que el término derecho es $\ln x^2 = 2\ln x$, usamos variación de parámetros con las soluciones.

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3$$

Usando la fórmula del wronskiano, para encontrar la solución particular de una ecuación diferencial

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$
$$u_1' = -\frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}, \quad u_2' = \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}$$

Donde

$$f(x) = \ln x^2 = 2\ln x$$

Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^2\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x = 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

Entonces

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{x^3\cdot 2\ln x}{x^4} = -\frac{2\ln x}{x} \Rightarrow u_1 = \int -\frac{2\ln x}{x}dx = -(\ln x)^2 + C \\ u_2' &= \frac{x^2\cdot 2\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x}{x^2} \Rightarrow u_2 = \int \frac{2\ln x}{x^2}dx \end{aligned}$$

Para u_2, integramos por partes, $u = \ln x,\ dv = \frac{2}{x^2}dx$

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = -\frac{2}{x} \Rightarrow u_2 = -\frac{2\ln x}{x} + \int \frac{2}{x^2}dx = -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$$

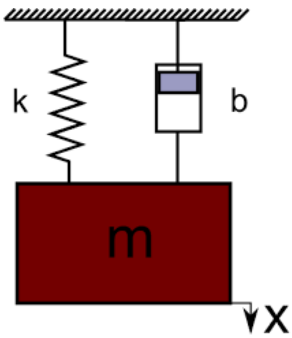
Finalmente:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = \left[-(\ln x)^2\right]x^2 + \left[-\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right]x^3 = -x^2(\ln x)^2 - 2x^2\ln x - 2x^2$$

- Solución general

$$\boxed{y(x) = y_h + y_p = C_1x^2 + C_2x^3 - x^2(\ln x)^2 - 2x^2\ln x - 2x^2}$$

6. *[] Una masa que pesa 16 libras alarga $\frac{8}{3}$ pie un resorte. La masa se libera inicialmente desde el reposo desde un punto 2 pies abajo de la posición de equilibrio y el movimiento posterior ocurre en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento si se aplica a la masa una fuerza externa igual a $f(t) = 10\cos(3t)$.
Solucion:



La ecuación general para masa-resorte-amortiguador con fuerza externa es (curso de Fisica 2, MAS)

$$\begin{aligned} F &= -ky - b\dot{y} + f(t) \\ my'' &= -ky - by' + f(t) \\ my'' + by' + ky &= f(t) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$F = ky \Rightarrow k = \frac{F}{y} = \frac{\text{peso}}{\text{elongación}} = \frac{16}{8/3} = 16\cdot\frac{3}{8} = 6 \text{ lb/ft}$$

Convertir peso a masa, donde $g = 32$ ft/s^2, 1 $slug = \dfrac{lb \cdot s^2}{ft}$

$$W = mg \Rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{16}{32} = 0.5\,\frac{lb \cdot s^2}{ft} = 0.5 \text{ slug}$$

Sustituyendo valores y multiplicamos todo por 2 para eliminar fracciones

$$\begin{aligned} 0.5y'' + \frac{1}{2}y' + 6y &= 10\cos(3t) \\ y'' + y' + 12y &= 20\cos(3t) \end{aligned}$$

Condiciones inicial: Como se suelta desde el reposo 2 pies debajo del equilibrio:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

La ecuación de movimiento es

$$\boxed{y'' + y' + 12y = 20\cos(3t), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0}$$