Ecuaciones diferenciales
SEMANA 1

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

7 de abril de 2025

Contenido

Objetivos de la Clase

- Comprender la estructura de los espacios vectoriales y subespacios.
- Identificar operaciones entre subespacios.
- Distinguir combinación lineal, independencia, y dimensión.
- Aplicar teoría mediante ejemplos y ejercicios prácticos.

Definición de Espacio Vectorial

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un conjunto V con dos operaciones:

- Suma de vectores: $+ : V \times V \to V$
- Multiplicación escalar: $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$

Satisfacen ocho axiomas fundamentales (asociatividad, conmutatividad, neutro, inverso, etc.). Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{M}_{m\times n}$, polinomios, funciones continuas.

- **Ejemplo 1: $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial**
  - Suma: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
  - Escalar: $a(x, y) = (ax, ay)$
  - Se cumplen todos los axiomas.
- **Ejemplo 2: Polinomios de grado menor o igual a 2** El conjunto P_2 de polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial.
- **Ejemplo 3: Matrices** 2×2 El conjunto de todas las matrices reales de 2×2 con suma usual y multiplicación por escalar es un espacio vectorial.

Definición de Subespacio

Un **subespacio** W de un espacio vectorial V es un subconjunto no vacío que también es espacio vectorial con las operaciones de V.

- **Ejemplo 4: Eje X en** $\mathbb{R}^2$ $W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ es subespacio.
- **Ejemplo 5: Subespacio de matrices simétricas** El conjunto de matrices simétricas $A = A^T$ en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es un subespacio.
- **Ejemplo 6: Polinomios sin término independiente** $W = \{p(x) \in P_2 \mid p(0) = 0\}$ es subespacio de P_2.

Operaciones con Subespacios

Intersección y suma de subespacios: Sean W_1 y W_2 subespacios de V:

- $W_1 \cap W_2$ también es subespacio.
- $W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$ también es subespacio.

Ejemplos:

- **Ejemplo 7: Intersección en** $\mathbb{R}^3$ $W_1 = \{(x, y, 0)\}$ y $W_2 = \{(x, 0, z)\}$. Entonces $W_1 \cap W_2 = \{(x, 0, 0)\}$.
- **Ejemplo 8: Suma de subespacios** Usando los mismos W_1 y W_2, $W_1 + W_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, z = 0 \text{ o } y = 0\}$
  - en realidad se obtiene $\{(x, y, z) \mid z = 0 \text{ o } y = 0\}$
  - suma no abarca todo $\mathbb{R}^3$.
- **Ejemplo 9: Subespacios con intersección trivial** Sean $W_1 = \text{span}\{(1, 0)\}$, $W_2 = \text{span}\{(0, 1)\}$ en $\mathbb{R}^2$
  - $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$
  - $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$
- **Ejemplo 10: Subespacio generado por vectores** Dados $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$
  - $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$ es un subespacio plano que pasa por el origen.

Combinación e Independencia Lineal

¿Qué es una combinación lineal? Sea un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Una combinación lineal de estos vectores es cualquier expresión de la forma:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares.

¿Qué es independencia lineal? Los vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son linealmente independientes si:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

De lo contrario, son linealmente dependientes.

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** ¿Son linealmente independientes los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$?

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** ¿Son linealmente independientes los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$?

Solución

Consideramos $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$c_1(1, 2) + c_2(2, 4) = (0, 0) \Rightarrow (c_1 + 2c_2, 2c_1 + 4c_2) = (0, 0)$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 4c_2 &= 0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \textbf{Dependientes} \end{aligned}$$

- **Ejemplo 2:** Verificar si los vectores $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, 2)$ son linealmente independientes.

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** ¿Son linealmente independientes los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, 4)$?

Solución

Consideramos $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$c_1(1, 2) + c_2(2, 4) = (0, 0) \Rightarrow (c_1 + 2c_2, 2c_1 + 4c_2) = (0, 0)$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 4c_2 &= 0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \textbf{Dependientes} \end{aligned}$$

- **Ejemplo 2:** Verificar si los vectores $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, 2)$ son linealmente independientes.

Solución

Planteamos:

$$c_1(1, 0, -1) + c_2(2, 1, 3) + c_3(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Sistema:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 0 + c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplos

- **Ejemplo 3:** Determina si las funciones $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = te^t$, $f_3(t) = t^2e^t$ son linealmente independientes.

Ejemplos

- **Ejemplo 3:** Determina si las funciones $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = te^t$, $f_3(t) = t^2 e^t$ son linealmente independientes.

Solución

Estas funciones forman un conjunto conocido del método de variación de parámetros y son:

$$\textbf{Linealmente independientes en } (-\infty, \infty)$$

Se puede demostrar con el Wronskiano:

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) \neq 0 \Rightarrow \textbf{Independencia lineal}$$

- **Ejemplo 4:** Determina si $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$, $y_3(t) = 1$ son linealmente independientes en $[0, 2\pi]$.

Ejemplos

- **Ejemplo 3:** Determina si las funciones $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = te^t$, $f_3(t) = t^2 e^t$ son linealmente independientes.

Solución

Estas funciones forman un conjunto conocido del método de variación de parámetros y son:

Linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$

Se puede demostrar con el Wronskiano:

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) \neq 0 \Rightarrow \textbf{Independencia lineal}$$

- **Ejemplo 4:** Determina si $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$, $y_3(t) = 1$ son linealmente independientes en $[0, 2\pi]$.

Solución:

Consideramos la combinación:

$$c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Derivando y evaluando:

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow \textbf{Independientes}$$

Envolvente Lineal

¿Qué es la Envolvente Lineal?

- La envolvente lineal de un conjunto de funciones es el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de esas funciones.
- Es un concepto fundamental en el estudio de espacios vectoriales de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales.

Propiedades

- Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son funciones, su envolvente lineal está dada por:

$$\text{Env}(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \,\middle|\, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- El conjunto es un subespacio del espacio de funciones definidas en un intervalo común.

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** Determinar la envolvente lineal de las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$.

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** Determinar la envolvente lineal de las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$.

Solución

La envolvente lineal está formada por todas las combinaciones lineales:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- **Ejemplo 2:** Determinar la envolvente lineal de $\sin x$ y $\cos x$.

Ejemplos

- **Ejemplo 1:** Determinar la envolvente lineal de las funciones $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$.

Solución

La envolvente lineal está formada por todas las combinaciones lineales:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- **Ejemplo 2:** Determinar la envolvente lineal de $\sin x$ y $\cos x$.

Solución

La envolvente lineal es:

$$y(x) = a \sin x + b \cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Este conjunto es el espacio solución de la ecuación:

$$y'' + y = 0$$

Ejemplos

- **Ejemplo 3:** Determinar si las funciones x, x^2, y x^3 forman una envolvente lineal en $\mathbb{R}$.

Ejemplos

- **Ejemplo 3:** Determinar si las funciones x, x^2, y x^3 forman una envolvente lineal en $\mathbb{R}$.

Solución

Sí, ya que cualquier combinación $ax + bx^2 + cx^3$ pertenece a la envolvente lineal. Este conjunto corresponde al espacio de polinomios de grado ≤ 3.

- **Ejemplo 4:** Determinar la envolvente lineal de e^x, xe^x, y x^2e^x.

Ejemplos

- **Ejemplo 3:** Determinar si las funciones x, x^2, y x^3 forman una envolvente lineal en $\mathbb{R}$.

Solución

Sí, ya que cualquier combinación $ax + bx^2 + cx^3$ pertenece a la envolvente lineal. Este conjunto corresponde al espacio de polinomios de grado ≤ 3.

- **Ejemplo 4:** Determinar la envolvente lineal de e^x, xe^x, y x^2e^x.

Solución

El conjunto:

$$y(x) = ae^x + bxe^x + cx^2e^x$$

corresponde al espacio solución de una ecuación diferencial de tercer orden con raíces reales iguales.

- La envolvente lineal es clave para describir espacios de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.
- Los ejemplos mostraron cómo identificarla, construirla, y relacionarla con ecuaciones diferenciales.

Bases y Dimensión

- **¿Qué es una base?** Una **base** de un espacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio.
  - Cada vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base.
  - Ejemplo: en $\mathbb{R}^3$, una base típica es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
- **¿Qué es la dimensión?** La **dimensión** de un espacio vectorial es el número de vectores en una base de ese espacio.
  - Si un espacio tiene una base con n vectores, se dice que su dimensión es n.
  - La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.

Ejemplos

- **Ejemplo 1** Determina si el conjunto $\{(1,0,-1),(0,1,2),(2,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Verificamos si los vectores son linealmente independientes resolviendo si:

$$a(1,0,-1)+b(0,1,2)+c(2,1,0)=(0,0,0)$$

El sistema homogéneo solo tiene solución trivial $\Rightarrow$ los vectores son L.I. y forman base.

- **Ejemplo 2** ¿Cuál es la dimensión del espacio de soluciones de la ecuación diferencial homogénea
$$y''+y=0?$$

Solución

La solución general es:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$$

Los vectores $\{\cos x,\sin x\}$ son L.I., por tanto la dimensión es 2.

Ejemplos

- **Ejemplo 3** Encuentra una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,2,3),(2,4,6),(1,0,1)\}$.

Solución

Notamos que $(2,4,6) = 2(1,2,3)$. Son L.D. Entonces una base es $\{(1,2,3),(1,0,1)\}$. Dimensión $= 2$.

- **Ejemplo 4** Determina si $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es una base del espacio solución de:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

Solución

La ecuación tiene raíces repetidas: $r = 1$ con multiplicidad 3. Solución general:

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$$

$\Rightarrow$ Los vectores dados son L.I. y forman una base.

- Una base permite representar todo el espacio vectorial.
- La dimensión nos dice cuántos vectores se necesitan para ello.
- Comprender estos conceptos es clave para resolver ecuaciones diferenciales.

Matriz de Cambio de Base

- **¿Qué es la Matriz de Cambio de Base?**
  - Dado un espacio vectorial V, un vector puede representarse en distintas bases.
  - La matriz de cambio de base permite transformar las coordenadas de un vector desde una base B a otra base B'.
  - Si P es la matriz de cambio de base de B a B', entonces:

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$$

  - El cambio de base es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones y simplificar matrices.
- **Construcción de la Matriz de Cambio de Base**
  - Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases de V.
  - La matriz de cambio de base de B a B' se construye como:

$$P = \begin{bmatrix} [\mathbf{w}_1]_B & [\mathbf{w}_2]_B & \cdots & [\mathbf{w}_n]_B \end{bmatrix}$$

  - Entonces, para un vector $\mathbf{v} \in V$:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B$$

Ejemplos

- **Ejemplo 1: Cambio de base en $\mathbb{R}^2$**
  - Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
  - Construimos $P = [[\mathbf{w}_1]_B \, [\mathbf{w}_2]_B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
  - Para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, calculamos:
$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
- **Ejemplo 2: Cambio de base y diagonalización**
  - Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, queremos diagonalizarla.
  - Base de vectores propios: $B' = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \}$
  - Matriz de cambio de base $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
  - Entonces: $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ejemplos

- **Ejemplo 3: Representación de vectores en nueva base**
  - Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y la base $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
  - Hallamos la matriz P y su inversa.
  - Calculamos $[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B$
- **Ejemplo 4: Cambio de base en $\mathbb{R}^3$**
  - Sean $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
  - Para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, buscamos su representación en B'
  - Construimos P, luego:
  $$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B$$
- El cambio de base es una herramienta poderosa para simplificar problemas en álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.
- Permite transformar representaciones, diagonalizar matrices y facilitar el análisis de sistemas lineales.
- Dominar la matriz de cambio de base es clave para cursos avanzados en matemáticas aplicadas.

Gracias por su atención

¿Preguntas?