Tommaso Leonori

Ejercicios del curso "Ecuaciones en derivadas parciales"

Ejercicios del curso "Ecuaciones en derivadas parciales"

Tommaso Leonori
Dep. de Análisis Matemático
Universidad de Granada.

e-mail: leonori@ugr.es

ISBN papel 978-84-686-2795-3
Impreso en España
Editado por Bubok Publishing S.L.

Índice general

Introdución

En estos apuntes he reunido las soluciones de los ejercicios propuesto durante el curso, dado juntos con el Prof. David Arcoya, y en los exámenes de “Ecuaciones en Derivadas Parciales ” del año académico 2009/2010.

En las referencias podéis encontrar unos libros ó apuntes donde la teoría relativa a los ejercicios propuestos está explicada de forma clara. Algunos de los ejercicios propuestos han sido cogido desde [CF], [DF], [Per] y [St].

Si alguien encontrara erratas, misprints ó tiene dudas sobre los ejercicios, que no dudes en enviarme un correo (leonori@ugr.es).

Ecuaciones del Primer Orden

Ejercicio 1.1 *Estudiad la linealidad y estableced el orden para cada una de las e.d.p. siguientes:*

1. $u_t - u_{xx} + 1 = 0,$
2. $u_t - u_{xx} + xu = 0,$
3. $u_t - u_{xxt} + uu_x = 0,$
4. $u_{tt} - u_x + x^2 = 0,$
5. $iu_t - u_{xx} + \frac{u}{x} = 0,$
6. $\dfrac{u_x}{\sqrt{(1+u_x^2)}} + \dfrac{u_y}{\sqrt{(1+u_y^2)}} = 0,$
7. $u_x + e^y u_y = 0,$
8. $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0.$

Solución.[1] No es complicado verificar que:

[1]Con *ecuación diferencial de orden* m se entiende una ecuación de la forma

$$F(D^m u, D^{m-1}u, ..., Du, u, x) = 0 \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \; N \geq 2\,,$$

donde

$$F : \mathbb{R}^{N^m} \times \mathbb{R}^{N^{m-1}} \times ..... \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$$

es una función asignada y

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

1. es lineal del segundo orden;
2. es lineal del segundo orden;
3. es nolineal del tercer orden;
4. es lineal del segundo orden;
5. es lineal del segundo orden;
6. es nolineal del primer orden;
7. es lineal del primer orden;
8. es nolineal del cuarto orden.

■

es una función regular. Además decimos que la ecuación es *lineal* si se escribe de la forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

donde f y a_α son funciones regulares.

Ejercicio 1.2 *Dado $c \in \mathbb{R}$, estudiad la linealidad y orden de la siguiente ecuación:*

$$u_x + cu_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Interpretad geométricamente la e.d.p. y calculad sus soluciones.

Solución.
No es complicado verificar que la ecuación es lineal del primer orden.

Nótese que dicha ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\nabla u(x, y) \cdot (1, c) = 0\,,$$

donde $\nabla = (\partial_x \cdot, \partial_y \cdot)$. Entonces el ejercicio consiste en encontrar funciones u tales que su gradiente es ortogonal al vector $(1, c)$.

Vamos a explicar dos manera de resolver este ejercicio.

Método 1. Geometrico. Aprovechando la idea del sentido geométrico de la ecuación, deducimos que la derivada direccional de $u(x)$ en la dirección $(1, c)$ tiene que ser 0, es decir que $u(x)$ es constante a lo largo de dicha direccion. Entonces que las soluciones de la ecuación (1.1) tienen que depender sólo de una dirección ortogonal a $(1, c)$. Siendo el vector $(-c, 1)$ ortogonal a $(1, c)$, deducimos que

$$u(x, y) = f(y - cx)\,,$$

donde f es una función de clase $C^1(\mathbb{R})$. Las rectas $y - cx$ =constante se llaman *rectas características.*

Método 2. Características. Aplicando el método de las características (véase, por ejemplo [Ev], Cap. 2 para la teoría de esto método) deducimos que

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = c \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z'(t) = 0\,, \end{cases}$$

así que resulta, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ constantes arbitrarias,

$$\begin{cases} x(t) = t + \alpha_1 \\ y(t) = ct + \alpha_2 \\ z(t) = \alpha_3 \,. \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$\alpha_3 = z(x(t), y(t)) = z(t + \alpha_1, ct + \alpha_2)$$

y como

$$y(t) - cx(t) = \alpha_2 - c\alpha_1$$

deducimos que las soluciones de (1.1) son de la forma

$$u(x, y) = f(y - cx)\,,$$

donde f es una cualquier función $f \in C^1(\mathbb{R})$. ■

Ejercicio 1.3 *Resolved las ecuaciones:*

1. $u_t + xu_x = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$

2. $u_t + 2tx^2 u_x = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$

Solución.
En los dos casos aplicamos el método de las características.

1. Escribimos el sistema característico asociado a la primera de la ecuaciones resulta ser

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = x(s) \\ z'(s) = 0\,. \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Entonces, siendo c_i $i = 1,2,3$ constantes, la solución del sistema esta dada por

$$\begin{cases} t(s) = s + c_1 \\ x(s) = c_2 e^s \\ z(s) = c_3\,. \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación $u_t + xu_x = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ resulta ser constante si calculada a lo largo de la familia de las curvas característica definida mediante las primeras dos ecuaciones en (1.2). Por lo tanto, teniendo en cuenta que $s = t - c_1$, resulta que $xe^{-t} = c_2 e^{-c_1} = C_1$. Además aprovechando que la ecuación es lineal no homogénea y que no hay ningún término de orden cero, las constantes cumplen también la ecuación así que las soluciones son de la forma:

$$u(x,t) = C_1 x e^{-t} + C_2$$

con C_1 y C_2 constantes.

2. En este caso el sistema característico resulta ser dado por

$$\begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = 2t(s)x^2(s) & \qquad s \in \mathbb{R} \\ z'(s) = 0\,. \end{cases}$$

Entonces, siendo c_i $i = 1, 2, 3$ constantes, las soluciónes de la primera y tercera ecuaciones del sistema son

$$\begin{cases} t(s) = s + c_1 & \qquad s \in \mathbb{R} \\ z(s) = c_2\,, \end{cases}$$

mientras que para resolver la segunda aplicamos el método de separación de las variables. Para $x(s) \neq 0$ tenemos que

$$\frac{x'(s)}{x^2(s)} = 2t(s) = 2(s + c_1)$$

así que

$$c_3 - \frac{1}{x(s)} = 2\int t(s)ds = 2\int (s + c_1)ds = (s + c_1)^2 + c_3' = t^2(s) + c_3'\,,$$

por una constante c_3' oportuna. Por lo tanto

$$\frac{1}{x} + t^2 = c_3''\,, \qquad \text{con } c_3'' \in \mathbb{R}\,,$$

y como la solución es constante a lo largo de cada curva característica, deducimos, razonando como antes, que las soluciones tienen la forma

$$u(x,t) = C_1\Big(\frac{1}{x} + t^2\Big) + C_2\,,$$

con C_1 y C_2 constantes.

Se puede fácilmente verificar que dichas soluciones cumplen las ecuaciones diferenciales propuestas en el ejercicio.

■

Ejercicio 1.4 *Calculad la solución del problema*

$$\begin{cases} u_t - u_x = u^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{2}e^{-x}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución.
Aplicamos el método de las características y por lo tanto queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{x}(s) = -1 \\ \dot{z}(s) = z^2(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0(\sigma) = 0 \\ x_0(\sigma) = \sigma \\ z_0(\sigma) = \frac{1}{2}e^{-\sigma}\,. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} t(s,\sigma) = s \\ x(s,\sigma) = -s + \sigma \\ \frac{1}{z_0(\sigma)} - \frac{1}{z(s,\sigma)} = 2e^{\sigma} - \frac{1}{z(s,\sigma)} = s\,, \end{cases}$$

y consecuentemente

$$\begin{cases} s = t(s,\sigma) \\ \sigma = x(s,\sigma) + t(s,\sigma) \\ u(x(s,\sigma), t(s,\sigma)) = z(s,\sigma) = \dfrac{1}{2e^{\sigma} - s} = \dfrac{1}{2e^{x(s,\sigma)+t(s,\sigma)} - t(s,\sigma)} \end{cases}$$

y finalmente deducimos que

$$u(x,t) = \frac{1}{2e^{x+t} - t}\,.$$

Es fácil comprobar que ésta es efectivamente una solución del problema. ■

Ejercicio 1.5 *Calculad la solución del problema*

$$\begin{cases} u_x + uu_y = 2, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución.
Observemos que es un problema de Cauchy de la forma

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \\ u(x_0(s),y_0(s)) = z_0(s), \quad s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con coeficientes $a(x,y,u) = 1$, $b(x,y,u) = u$, $c(x,y,u) = 2$ y con la curva inicial $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s))$ dada por $x_0(s) = 0$, $y_0(s) = s$ y $z_0(s) = s$. Observemos también que este problema es no característico ya que

$$\det \begin{pmatrix} a(x_0(s),y_0(s)) & x_0'(s) \\ b(x_0(s),y_0(s)) & y_0'(s) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Además la curva $s \mapsto (x_0(s), y_0(s)) = (0,s) = \Gamma(s)$ es inyectiva. Por tanto existe una superficie integral (o solución local) que contiene a la curva inicial $\Gamma(s)$.

Para calcular dicha solución, consideramos el sistema característico:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = 1 \\ \dot{y}(s) = z(s) \\ \dot{z}(s) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0(\sigma) = 0 \\ y_0(\sigma) = \sigma \\ z_0(\sigma) = \sigma\,. \end{cases}$$

Está claro que las primeras y las terceras ecuaciones nos dan

$$\begin{cases} x(s,\sigma) = s \\ z(s,\sigma) = 2s + \sigma, \end{cases}$$

así que tenemos

$$y(s,\sigma) - \sigma = \int_0^s (2\tau + \sigma)d\tau = s^2 + s\sigma.$$

Podemos obtener una expresíon para s y t en función de x e y:

$$\begin{cases} x = s \\ \sigma = \frac{y-x^2}{1+x} \quad \text{para } x \neq 1\,. \end{cases}$$

Consecuentemente,

$$u(x,y) = \frac{y-x^2}{1+x} + 2x \quad \text{para } x \neq 1\,.$$

Es fácil comprobar que ésta es efectivamente una solución del problema. ■

Ejercicio 1.6 *Calculad la solución del problema*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

with g tal que

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \textit{if } x \leq 0 \\ 1-x & \textit{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{if } x \geq 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Solución.
Primero, notamos que en principio el método de las características no se puede aplicar a este problema siendo el dato inicial de clase C^1 a trozos pero no $C^1(\mathbb{R})$. A pesar de esto facto, podemos pensar en aplicar dicho método en las regiones del semiplano correspondientes a las zonas donde el dato inicial es regular e intentar, luego, de pegar las soluciones encontradas.

La ecuación diferencial que aparece en (1.3) es muy bien conocida en mecánica de luidos como Ecuación de Burges (con coeficiente de viscosidad 0). Más in general este es un ejemplo sencillo de una ley de conservación, es decir de ecuaciones que tienen la forma

$$u_t + F(u)_x = 0$$

con F una función regular ($F(s) = \frac{1}{2}s^2$ en (1.3)).

Escribimos el sistema asociado, es decir

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = 1 \\ \dot{x}(s) = z(s) \\ \dot{z}(s) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_0(\sigma) = 0 \\ x_0(\sigma) = \sigma \\ z_0(\sigma) = g(\sigma)\,. \end{cases}$$

Siendo

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

el sistema es compatible, así que tiene sentido buscar una solución al rededor de la curva $\Gamma(s) = (t(\sigma), x(\sigma), g(\sigma))$. Por lo tanto

$$\begin{cases} t(s) = s \\ z(s) = g(\sigma) \\ x(s) = \sigma + sg(\sigma)\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Por lo tanto

$$u(x(s,\sigma), t(s,\sigma)) = z(s,\sigma) = g(\sigma)$$

así que ahora sólo tenemos que encontrar una expresión explícita para $g(\sigma)$ en función de x y t.

Siendo $t = s$, deducimos que $x(s) = \sigma + tg(\sigma)$; además, aprovechando (1.4), podemos escribir la solución de la tercera ecuación en (1.5) explícitamente:

$$\begin{cases} x = \sigma + t & \text{if } \sigma \leq 0 \\ x = \sigma + t(1-\sigma) & \text{if } 0 < \sigma \leq 1 \\ x = \sigma + t & \text{if } \sigma > 1\,. \end{cases}$$

Por lo tanto (véase también Figura 1.1)

$$\begin{cases} \sigma = x - t & \text{if } x \leq t \\ \sigma = \frac{x-t}{1-t} & \text{if } 0 < \frac{x-t}{1-t} \leq 1 \qquad \text{es decir } t < x \leq 1,\ 0 < t < 1 \\ \sigma = x & \text{if } x > 1\,. \end{cases}$$

Consecuentemente la solución de (1.3) está data, acordando la definición de g data por (1.4), por

$$u(x,t) = \begin{cases} x - t & \text{if } \ x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{if } \ t < x \leq 1,\ 0 < t < 1 \\ 0 & \text{if } \ x > 1\,. \end{cases}$$

Como ya hemos observado, la solución encontrada no es de clase $C^1(\mathbb{R} \times (0,1))$ siendo el dato inicial sólo continuo (y C^1 a trozos pero no $C^1(\mathbb{R})$) y por no tener, la ecuación considerada, un efecto de regularización en las soluciones.

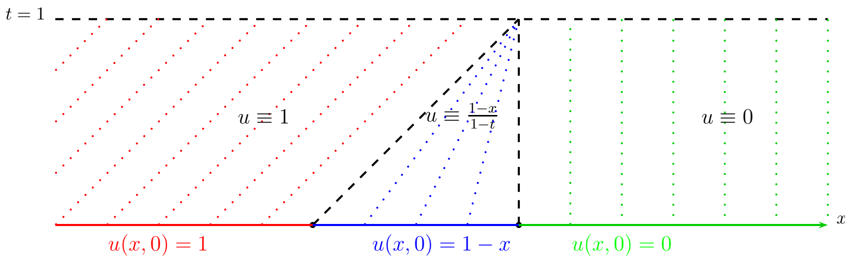

Figura 1.1: Las rectas características en la región $0 < t < 1$.

De todas formas el mismo tipo de fenómeno si habría presentado si hubiéramos elegido un cualquier dato inicial $g \in C^1(\mathbb{R})$ que cumpliese

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0 \\ g(x) \in C^1[0,1], \quad 0 \leq g(x) \leq 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

Efectivamente, las curvas característica que salen de la zona $x \leq 0$ y $x \geq 1$ al tiempo $t = 0$ habrían sido las misma y nótese que las rectas características cruzan en $(x,t) = (1,1)$. A la solución en este punto no se le puede asignar un valor preciso, siendo el punto $(1,1)$ en el cruce de tres familias de curvas características que dan valor distinto en alcanzar dicho punto: si nos acercamos desde la zona "verde" la solución vale cero, si nos acercamos desde la zona "roja" la solución vale uno mientras que si nos acercamos desde la zona "azul" la solución es indeterminada.

Por lo tanto se produce un *fenómeno de shock* que limita el dominio de la solución (en sentido clásico) al conjunto $\{0 < t < 1\}$.

De todas formas, se puede definir la solución en un conjunto mas grande utilizando una condición adicional (conocida como la Condición de Entropia) para elegir el valor de la solución por $t > 1$ (véase por ejemplo [Ev], Sección 3.4). ■

Ejercicio 1.7 *Dado* $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, estudiad la linealidad y orden de la siguiente ecuación:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.6}$$

Calculad algunas soluciones particulares.

Solución.
No es complicado probar que la ecuación es lineal del segundo orden.

Método 1. Características.

Vamos a aplicar el método de las características a esta clase de ecuaciones. Siendo la ecuación del primer orden, la idea es descomponer el operador diferencial como $\big(\partial_x - \frac{1}{a}\partial_t\big) \circ \big(\partial_x + \frac{1}{a}\partial_t\big)$ así como $\big(\partial_x + \frac{1}{a}\partial_t\big) \circ \big(\partial_x - \frac{1}{a}\partial_t\big)$, es decir que la ecuación se puede escribir de las formas:

$$\big(\partial_x - \frac{1}{a}\partial_t\big)\big(\partial_x + \frac{1}{a}\partial_t\big)u(x,t) = 0 = \big(\partial_x + \frac{1}{a}\partial_t\big)\big(\partial_x - \frac{1}{a}\partial_t\big)u(x,t), \tag{1.7}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto las soluciones de la ecuación (1.6) se pueden ver como soluciones del siguiente sistema característico:

$$\begin{cases} u_x(x,t) - \frac{1}{a}u_t(x,t) = \psi(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}, \\ \psi_x(x,t) + \frac{1}{a}\psi_t(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{1.8}$$

Primero, buscamos las soluciones de la segunda ecuación: una vez encontrada la substituyamos en la primera así que podemos hallar $u(x,t)$.

Pues, tratandose de un sistema de ecuaciones lineales del primer orden, escribimos el sistema característico asociado a la segunda ecuación:

$$\begin{cases} t'(s,\sigma) = \frac{1}{a} \\ x'(s,\sigma) = 1 & s > 0 \\ z'(s,\sigma) = 0\,. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$t(s) = \frac{1}{a}s + c_1\,, \quad x(s) = s + c_2\,, \qquad z(s) = \psi(x(s), t(s)) = c_3$$

con c_i, $i = 1, 2, 3$ constantes. Observamos que $x - at$ es constante, así que deducimos que

$$\psi(x,t) = f(x - at)\,, \qquad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Ahora substituyendo la expresión de $\psi(x,t)$ en la primera de (1.8), deducimos que $u(x,t)$ cumple

$$u_x(x,t) - \frac{1}{a}u_t(x,t) = f(x - at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Para hallar la expresión de $u(x,t)$, aplicamos otra vez el método de las características a la ecuación no homogénea que verifica u. Entonces deducimos

$$\begin{cases} x'(s) = 1 \\ t'(s) = -\frac{1}{a} & \qquad s > 0. \\ z'(s) = f\big(x(s) - at(s)\big) \end{cases} \tag{1.9}$$

Por lo tanto desde las primeras dos ecuaciones deducimos que

$$t(s) = -\frac{1}{a}s + c_1\,, \quad x(s) = s + c_2\,,$$

con c_i, $i = 1, 2$ constantes, así que

$$x + at = c_3\,, \qquad c_3 \in \mathbb{R}\ ,$$

son rectas características. Entonces una cualquier función de la variable $x + at$ anula el operador $\partial_x - \frac{1}{a}\partial_t$, así que siempre podemos añadir a la solución particular una función $g(x + at)$ con g de clase $C^2(\mathbb{R})$.

Desde la tercera ecuación en (1.9) nos sale que

$$\frac{d}{ds}u(x(s), t(s)) = z'(s) = f\big(x(s) - at(s)\big) = f(2s + c)$$

y entonces

$$z(s) = uz(x(s), t(s)) = \frac{1}{2}F(2s + c)\,,$$

con $F' = f$. Finalmente deducimos que, siendo $2s = x - at$, las soluciones de (1.6) son de la forma

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at)$$

con F, G de clase $C^2(\mathbb{R})$.
Método 2. Para calcular las soluciones, notamos, como antes, la descomposición del operador $\partial_x^2 \cdot -\frac{1}{a^2}\partial_t^2 \cdot$ como hemos ya hecho en (1.7).

Buscamos ahora un cambio de variable para llevar este problema a uno más sencillo. La descomposición del operador sugieres, siguiendo la idea del método de las características, de definir la pareja de nuevas variables ξ y η de la siguiente forma

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at, \end{cases} \qquad \text{y consecuentemente} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \\ t = \dfrac{\eta - \xi}{2a}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Por lo tanto si llamamos

$$v(\xi, \eta) = u\big(\frac{\eta - \xi}{2}, \frac{\eta + \xi}{2a}\big)$$

deducimos, con un calculo directo, que

$$\partial_\xi \partial_\eta \, v(\xi, \eta) = 0 = \partial_\eta \partial_\xi \; v(\xi, \eta)\,. \tag{1.11}$$

Vamos a disfrutar de la primera identidad. Notamos que desde (1.11) la función $\partial_\eta \, v(\xi, \eta)$ es independiente de la variable ξ, es decir existe una función f de clase $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$\partial_\eta \, v(\xi, \eta) = f(\eta)\,.$$

Siendo esta identidad cierta para cada ξ y $\eta \in \mathbb{R}$, se pueden integrar ambos lados con respecto a η así que, aprovechando el teorema fundamental del calculo, deducimos que

$$\int \partial_\eta \, v(\xi, \eta) d\eta = \int f(\eta) d\eta\,.$$

Como estamos integrando una función de dos variables con respecto sólo a una de las dos, en calcular la familia de primitivas de f, hay que añadir (en lugar de una constante, como se hace en el calculo de primitivas en una variable) una función arbitraria dependiente sólo de la variable ξ. Por lo tanto

$$v(\xi, \eta) = F(\eta) + G(\eta)\,,$$

donde G de clase $C^2(\mathbb{R})$ y $F' = f$. Nótese que dicha v verifica tanto la primera como la segunda identidad en (1.11).

Deshaciendo el cambio de variable introducido en (1.10), deducimos que las soluciones de (1.6) son de la forma

$$u(x,t) = \tilde{F}\big(ax - t\big) + \tilde{G}\big(ax + t\big)\,,$$

con $\tilde{F}$ y $\tilde{G}$ de clase $C^2(\mathbb{R})$. ■

Ejercicio 1.8 *Para* $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ *se define el operador laplaciano* Δ *mediante*

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Dado $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, *definimos (la solución fundamental del laplaciano)* $E_\xi : \mathbb{R}^N \setminus \{\xi\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante*

$$E_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{N-2}|x-\xi|^{2-N}, & si\ N > 2, \\ \\ -\log|x-\xi|, & si\ N = 2. \end{cases}$$

Probad que

$$\Delta E_\xi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}.$$

Solución.

Nótese que la función E_ξ, tanto en el caso $N \geq 3$ como en el caso $N = 2$, es una función no acotada, definida en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$ y diferenciable en todo su dominio de definición. Por lo tanto, como el ejercicio nos pide de calcular su Laplaciano en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$, el calculo de las derivadas esta permitido.

Empezamos por el caso $N \geq 3$.

Calculamos las derivadas parciales de E con respecto a la variable x_i, por un cualquier i entre 1 y N:

$$\partial_{x_i} \frac{1}{N-2}|x-\xi|^{2-N} = -|x-\xi|^{1-N}\partial_{x_i}|x-\xi| = -\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^N},$$

donde la última identidad es consecuencia del siguiente calculo directo:

$$\partial_{x_i}|x-\xi| = \partial_{x_i}\sqrt{\sum_{k=1^N}(x_k-\xi_k)^2} = \frac{1}{2}\frac{2(x_i-\xi_i)}{\sqrt{\sum_{k=1^N}(x_k-\xi_k)^2}} = \frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}.$$

Ahora derivamos otra vez con respecto a x_i así que

$$\partial_{x_i}^2 E_\xi(x) = N\frac{(x_i-\xi_i)^2}{|x-\xi|^{N+2}} - \frac{1}{|x-\xi|^N}.$$

Por tanto, al sumar i entre 1 y N obtenemos:

$$\Delta E_\xi(x) = \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{x_i} E_\xi(x) = \sum_{i=1}^{N} \left[N \frac{(x_i - \xi_i)^2}{|x-\xi|^{N+2}} - \frac{1}{|x-\xi|^N} \right]$$

$$= \frac{N}{|x-\xi|^{N+2}} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \xi_i)^2 - \frac{1}{|x-\xi|^N} \sum_{i=1}^{N} 1 = \frac{N}{|x-\xi|^{N+2}} |x-\xi|^2 - \frac{1}{|x-\xi|^N} N = 0\,.$$

En el caso $N = 2$, con el mismo espiritu del caso anterior, calculamos por i igual a 1 ó 2 la derivada de $E_\xi(x)$ con respecto a x_i:

$$\partial_{x_i} - \log|x-\xi| = -\frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|^2}\,,$$

y consecuentemente

$$\partial^2_{x_i} E_\xi(x) = 2\frac{(x_i - \xi_i)^2}{|x-\xi|^4} - \frac{1}{|x-\xi|^2}\,.$$

Por lo tanto

$$\partial^2_{x_1} E_\xi(x) + \partial^2_{x_2} E_\xi(x) = 0\,.$$

■

Ejercicio 1.9 *Sean* $a, b \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ *con* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un conjunto abierto y acotado. Supongamos que* $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ *(con* t *en un intervalo de* $\mathbb{R}$*) es una curva característica de la ecuación casilineal*

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Probar que si la proyección $(x(t), y(t))$ *de* $\gamma(t)$ *sobre* $\overline{\Omega}$ *corta la frontera* $\partial\Omega$ *de* Ω *en dos puntos* $P \neq Q$*, entonces el problema*

$$\begin{cases} a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

no posee solución cuando la función $f \in C(\partial\Omega)$ *satisface* $f(P) \neq f(Q)$*.*

Solución.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x(0), y(0)) = P$ y $(x(1), y(1)) = Q$. Probaremos que si para $f \in C(\partial\Omega)$ tenemos una solución u del problema

$$\begin{cases} a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

entonces $f(P) = f(Q)$ (véase Figura 1.2) Para ello, basta ver que $u(x, y)$ es constante a lo largo de la proyección $(x(s), y(s))$ de la curva característica. Esto es deducido usando que la superficie integral contiene toda la curva característica $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (i.e., $u(x(t), y(t)) = z(t)$) y observando que por ser homogénea la ecuación satisfecha por u tenemos que $z(t)$ es constante (pues la tercera ecuación del sistema característico es $z'(t) = 0$). Por tanto, $f(P) = u(P) = u(x(0), y(0)) = z(0) = z(1) = u(x(1), y(1)) = u(Q) = f(Q)$. ■

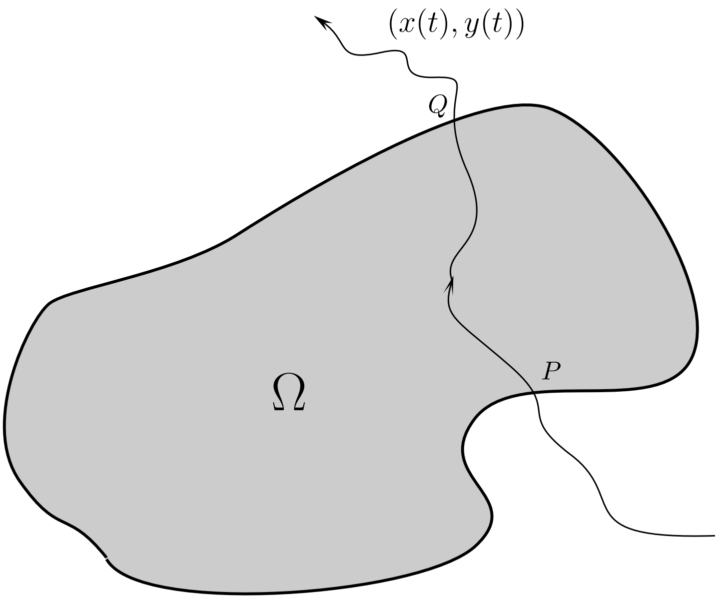

Figura 1.2: El abierto Ω y la curva Γ.

Ecuación de Ondas

Ejercicio 2.1 *Resolved el el siguiente problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, & x, y \in \mathbb{R}, \\ u(0,y) = 1 + y^2, & y \in \mathbb{R}, \\ u_x(0,y) = -sen\, y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Solución.
Aplicando la formula de D'Alembert [2] la solución del problema está dada por

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[1 + (y-x)^2] + \frac{1}{2}[1 + (y+x)]^2 - \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} \operatorname{sen}(s)ds$$

$$= 1 + y^2 + x^2 + \frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)] = 1 + y^2 + x^2 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\,.$$

■

[2] Recordamos la formula de D'Alembert. Dato el problema (homogéneo)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$, $c \neq 0$, la única solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}g(x-ct) + \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)ds\,. \tag{2.1}$$

Ejercicio 2.2 *Resolved el el siguiente problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & \textit{en } \mathcal{C}, \\ u_t(x,0) = xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\mathcal{C} = \{x \geq 0,\ t > 0\}$.

Solución.
En este caso, siendo el problema definido sólo en la cuarta parte del plano, la formula de D'Alembert no se puede aplicar directamente. Entonces la idea es la de extender de una forma oportuna el problema a uno definido en todo el semiespacio (por el que sabemos calcular la solución via la formula (2.1)); la dificultad está en encontrar la extensión correcta para que se cumpla también la condición en $x = 0$.

Más concretamente definimos $\tilde{u}$ la solución de

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - c^2\tilde{u}_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{u}_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con $g \in C^1(\mathbb{R})$ y $f \in C^2(\mathbb{R})$ tales que $g(x) = xe^{-x^2}$ if $x \geq 0$ y $f = 0$ if $x \geq 0$. Por lo tanto, gracias a la formula de D'Alembert, la la única solución $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ está dada por

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}f(x - ct) + \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\,.$$

Para que la $\tilde{u}(x,t)$ sea solución de (2.2) tiene que cumplir la condición $u(0,t) = 0$, $\forall t \geq 0$, y consecuentemente:

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}f(-ct) + \frac{1}{2}f(ct) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(s)ds = 0 \quad \forall t \geq 0\,.$$

Esta condición nos lleva a las definiciones tanto de f como de g en todo el eje: en efecto esta condición es equivalente a pedir que

$$0 \equiv \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(s)ds \quad \text{y} \quad 0 \equiv \frac{1}{2}f(-ct) + \frac{1}{2}f(ct)\,.$$

Por lo tanto deducimos que f y g tienen que ser impares[3] y la f y g son las extensiones impares, respectivamente, de 0 y xe^{-x^2} , es decir

$$f(x) \equiv 0 \qquad \text{y} \qquad g(x) = xe^{-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$ con

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} se^{-s^2}ds\,,$$

y consecuentemente

$$u(x,t) = -\frac{1}{4c}e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{4c}e^{-(x-ct)^2} = e^{-x^2-(ct)^2}\frac{e^{2x\,ct} - e^{-2x\,ct}}{4c}\,, \qquad \forall (x,t) \in \mathcal{C}\,.$$

■

[3] Lo de la f es la definición de función impar, para la g, nótese que derivando la condición

$$0 \equiv \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(s)ds$$

deducimos

$$cg(ct) - (-c)g(-ct) = 0 \iff g(ct) = -g(-ct) \quad \forall t > 0\,,$$

es decir g impar.

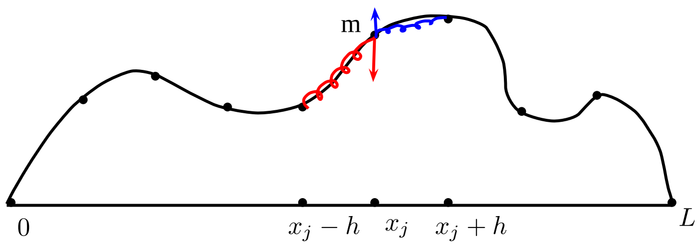

Figura 2.3: La curda vibrante “modelizada” con los muelles.

Ejercicio 2.3 *Una cuerda de longitud $\ell = 1$ con los extremos fijos tiene la posición inicial $u = sen(\pi x)$ y se suelta en el instante $t = 0$. Halle su movimiento subsiguiente.*

Comentario 2.1 (La Cuerda Vibrante) *La ecuación de ondas en el caso de una sola dimensión representa el perfil de una cuerda que vibra con velocidad c. Imagina una cuerda de largueza L en la que hay colgados $n = L/h$ puntos cada uno de masa m a distancia h uno de otro y cada uno conectado con un muelle con constante de elasticidad k a los de a lado (véase Figura 2.3) . Supongamos, entonces, de tener una sucesión $x_0 = 0$, $x_1 = h, x_2 = 2h, \ldots x_n = L$ de puntos y sea $u(x_i, t)$ la función que representa las alturas de dichos puntos en el tiempo. Supongamos además que los puntos de masas m sólo puedes moverse verticalmente (para que u sea una función).*

Gracias a la ley de Newton [4] el punto que se encuentra en la posición x_j, con $1 \leq j \leq n-1$, esta sujeto a una fuerza data por la ley de Hook [5] es decir

$$\begin{aligned} F(x_j + h, t) &= -k\big[\big(u(x_j, t) - u(x_j + h, t)\big) - \big(u(x_j - h, t) - u(x_j, t)\big)\big] \\ &= -k\big[-u(x_j + h, t) + 2u(x_j, t) - u(x_j - h, t)\big]\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, siendo $M = nm$ la masa total de la cuerda, $K = nk$ su rigidez

[4] es decir: $F = ma$, donde F es la fuerza, m la masa y a la aceleración.

[5] es decir: $F(x) = -kx$, donde k es la constante de elasticidad del muelle y x el desplazamiento de su condición de equilibrio.

y acordando que $nh = L$, deducimos que

$$\frac{d^2u(x_j,t)}{dt^2} = \frac{nK\,h^2}{\frac{M}{n}} \frac{u(x_j+h,t) - 2u(x_j,t) + u(x_j-h,t)}{h^2}$$

$$= \frac{KL^2}{M} \frac{u(x_j+h),t) - 2u(x_j,t) + u(x_j-h,t)}{h^2}\,.$$

Ahora queremos tirar h a cero, es decir pasar de un modelo discreto (los muelles) a uno continuo (la cuerda elástica). Siendo u suficientemente suave (u es de clase por lo menos $C^2(0,L)$) deducimos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x_j+h),t) - 2u(x_j,t) + u(x_j-h,t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,,$$

y consecuentemente

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in (0,L)\,, \quad t > 0\,,$$

siendo $c^2 = \frac{KL^2}{M}$ la velocidad de propagación de la cuerda. Como la cuerda esta fija en sus extremos, tiene además que cumplir

$$u(0,t) = 0 = u(L,t)\,, \qquad \forall t \geq 0\,.$$

Este problema está bien definido si lo emparejamos con un problema de Cauchy, es decir que para encontrar una solución tenemos que saber la posición inicial (es decir $u_0(x)$) y su velocidad (denotada con $u_1(x)$) en un momento dato. Entonces el perfil de la cuerda esta dado por la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0,L),\, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in (0,1) \\ u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

siendo $u_0(x) \in C^2(0,L) \cap C^0[0,L]$ *y* $u_1(x) \in C^1(0,L) \cap C^0[0,L]$.

Nos referiremos a (2.3) como el problema mixto asociado a la ecuación de ondas.

Solución.
En este caso la cuerda fija en sus extremos significa que queremos resolver un problema de Cauchy con condiciones en la frontera lateral iguales a 0. Además la cuerda tiene un perfil inicial asignado ($\operatorname{sen} \pi x$) que representa el dato inicial mientras que el hecho que se suelte significa que su velocidad inicial es igual a cero. Por lo tanto, el problema que tenemos que resolver es el siguiente (ponemos por simplicidad $c = 1$):

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0,1),\, t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} \pi x, & x \in (0,1), \\ u_t(x,0) = 0, & x \in (0,1) \\ u(t,0) = 0, & t > 0, \\ u(t,1) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Aquí proponemos dos maneras de resolver el ejercicio.

Método 1. Hemos ya visto (véase Ejercicio 1.7) que las soluciones de la ecuación de las ondas tienen la forma

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)\,,$$

con $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^2(\mathbb{R})$. Nuestro objetivo es hallar una expresión explícita para F y G de forma que la solución cumpla además las condiciones en la frontera. Entonces, desde (2.4), F y G tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \operatorname{sen} \pi x, & x \in (0,1), \\ F'(x) - G'(x) = 0, & x \in (0,1) \\ F(t) + G(-t) = 0, & t > 0, \\ F(1+t) + G(-t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta que, en $(0,1)$, F y G coinciden (a menos de una constante que puede ser elegida 0) y de la primera ecuación entonces deducimos que $F(x) \equiv G(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x$, para $x \in (0,1)$.

Finalmente, de la tercera y la cuarta ecuaciones nos sale que F y G tienen que ser impares y 2–periódicas, así que

$$F(s) \equiv G(s) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi s \qquad \forall s \in \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}[\pi(x-t)] + \frac{1}{2} \operatorname{sen}[\pi(x+t)]\,,$$

es la (única[6]) solución de (2.4). Aprovechando que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \big(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha\big) \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

deducimos que

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\pi x \cos \pi t\,.$$

Método 2. Otra forma de resolver el problema es la siguiente. Como el problema está definido en un subconjunto de $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, la formula de D'Alembert no se puede aplicar directamente. Entonces queremos encontrar un problema definido en todo $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, cuya solución $\tilde{u}(x,t)$ restringida al $(0,1) \times (0,+\infty)$, sea sol de (2.4).

Por eso resolvemos el problema

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u}_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.5}$$

con f y g funciones regulares tales que $f(x) \equiv \operatorname{sen}(\pi x)$ si $x \in (0,1)$ y $g(x) \equiv 0$ si $x \in (0,1)$.

[6]Véase ejercicio 2.4

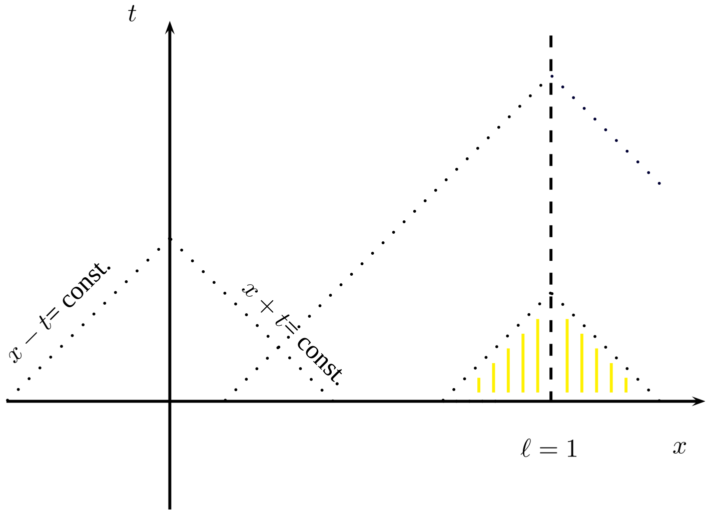

Figura 2.4: Aquí está representada la forma que tiene el cono de influencia. La parte amarilla es la área que está por debajo de las rectas características y que calculamos mediante la integral que aparece en (2.6).

La solución de (2.4) será, entonces, $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{C} = [0,1] \times [0,+\infty)$. Gracias a la Formula de D'Alembert (véase (2.1)), las solución de (2.5) está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds\,. \tag{2.6}$$

Nótese que tanto f como g tienen que ser elegidas de forma que se cumplan la condiciones $u(0,t) = 0$ y $u(1,t) = 0$, $\forall t > 0$.

Por lo tanto, por un lado notamos que la primera condición nos da que

$$u(0,t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(-t) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} g(s)ds \equiv 0 \qquad \forall t > 0\,.$$

Por eso se ve que tanto la f como la g tienen que ser funciones impares.

Por otro lado, cuando calculamos la condición a lo largo de la recta $x = 1$ deducimos que

$$u(1,t) = \frac{1}{2}f(1+t) + \frac{1}{2}f(1-t) + \frac{1}{2}\int_{1-t}^{1+t} g(s)ds \equiv 0 \qquad \forall t > 0\,.$$

Esta expresión (véase también la Figura 2.4) lleva (con el cambio $1 - t = t'$, si necesario) a la secunda condición sobre f y g, es decir que tanto f como g tienen que ser 2–periódicas.

Siendo los datos iniciales ya funciones impares y 2–periódicas, sólo tenemos que aplicar la fórmula de D'Alembert a (2.5) con $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ y $g = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, así que:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}[\pi(x-t)] + \frac{1}{2} \operatorname{sen}[\pi(x+t)] = \operatorname{sen} \pi x \cos \pi t\,.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 2.4 *Sea* $c \neq 0$, $\ell > 0$ *y* $\mathcal{C} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$ *tales que* $0 < x < \ell, \;\; t > 0\}$. *Probad la unicidad de la solución* $u(x,t) \in C^2(\mathcal{C}) \cap C^1(\overline{\mathcal{C}})$ *del problema mixto*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & \text{in } \mathcal{C} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = h(t), & t \ge 0 \\ u(\ell,t) = m(t), & t \ge 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

donde $f \in C^2[0,\ell]$, $g \in C^1[0,\ell]$ *mientras* h *y* $m \in C^1(\mathbb{R}^+)$.

Solución.
Supongamos que el problema (2.7) tenga dos soluciones $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$; definimos la función $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ y probamos que $w(x,t) \equiv 0$. Nótese que siendo el problema (2.7) lineal, es sencillo deducir que $w(x,t)$ cumpla

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t) = 0, & 0 \le x \le \ell, \;\; t \ge 0 \\ w(x,0) = 0, & 0 \le x \le \ell \\ w_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \ell \\ w(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ w(\ell,t) = 0, & t \ge 0\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Para deducir que la única solución de (2.8) es la cero, aplicamos un *método de energía*. Definimos la siguiente cantidad (la energía):

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \big[w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)\big]\, dx\,.$$

Nótese que la energía, por ser la integral de una función positiva, es positiva. Además, como las función que aparecen al interior de la integral sol continuas, es posible calcular

$$e(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2} \int_0^\ell \big[w_t^2(x,t) + c^2 w_x^2(x,t)\big]\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell \big[w_t^2(x,0) + c^2 w_x^2(x,0)\big]\, dx = 0\,,$$

siendo $w_t(x,0)=0$ gracias a las condiciones iniciales y y $w_x(x,0)=\big(w(x,0)\big)_x\equiv 0$. El siguiente paso es probar que $e(t)=0, \forall t>0$.
Para probar este facto, hallamos la derivada de $e(t)$ y probamos que dicha función es decreciente, es decir que $e'(t)\le 0$, $\forall t>0$. Siendo las funciones que aparecen en la definición de e regulares en $\mathcal{C}$, podemos llevar la derivada al interior de la integral, así que

$$e'(t)=\int_0^\ell \big[w_{tt}(x,t)w_t(x,t)+c^2 w_{xt}(x,t)w_x(x,t)\big]dx\,.$$

Ahora en el segundo termino, aplicamos la integración por partes, es decir

$$\int_0^\ell w_{xt}(x,t)w_x(x,t)dx = w_t(x,t)w_x(x,t)\Big|_0^\ell - \int_0^\ell w_t(x,t)w_{xx}(x,t)dx\,.$$

Utilizando que $w(0,t)\equiv 0\equiv w(\ell,t)$ y que consecuentemente $w_t(0,t)\equiv 0\equiv w_t(\ell,t)$, deducimos que

$$w_t(x,t)w_x(x,t)\Big|_0^\ell = 0\,,$$

y entonces

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_0^\ell \big[w_{tt}(x,t)w_t(x,t)-c^2 w_{xx}(x,t)w_t(x,t)\big]dx \\ &= \int_0^\ell w_t(x,t)\big[w_{tt}(x,t)-c^2 w_{xx}(x,t)\big]dx = 0 \end{aligned}$$

siendo $w(x,t)$ una solución de (2.8). Por lo tanto

$$e(t)\equiv 0 \quad \forall t\ge 0\,.$$

Consecuentemente tanto $w_t(x,t)$ como $w_x(x,t)$ son nulas y, siendo $w(x,0)=0$, deducimos que $w(x,t)=0$, $\forall t>0$. ■

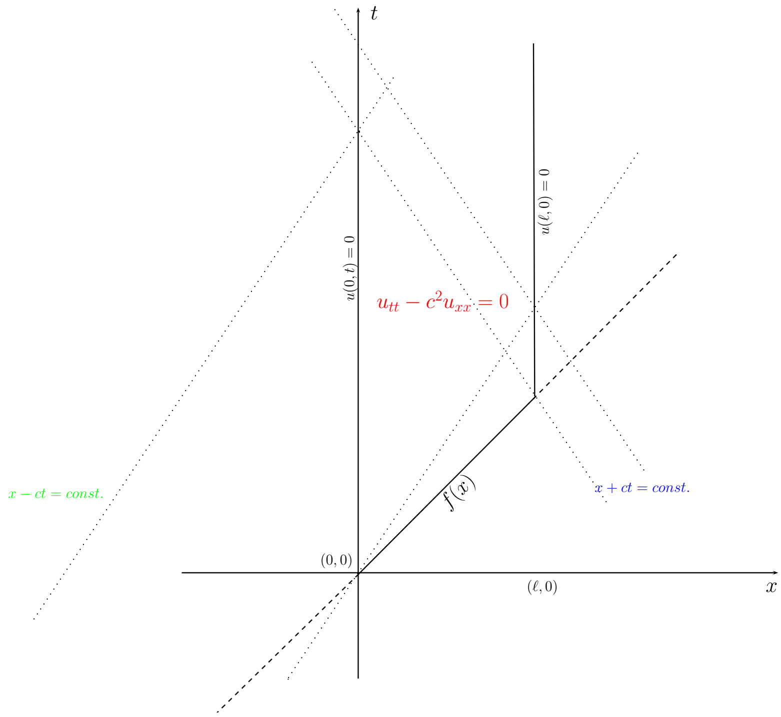

Figura 2.5: El dominio de u y las rectas características ($|c|<1$).

Ejercicio 2.5 *Para* $c^2 < 1$*, dedúzcase una fórmula para la resolución del siguiente problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & 0 \le x \le \ell, \quad t \ge x \\ u(x,x) = f(x), & 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,x) = 0, & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(\ell,t) = 0, & t \ge \ell \end{cases} \tag{2.9}$$

donde f *es una función continua tal que* $f(0) = f(\ell) = 0$.

Solución.

Paso 1. *Hallar la solución de:*

$$\begin{cases} \psi_{tt}(x,t) - c^2\psi_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq x, \\ \psi(x,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \psi_t(x,x) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.10}$$

para una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* $C^1(\mathbb{R})$.

Para encontrar la solución de (2.10), descomponemos el problema como un sistema característico (véase Ejercicio 1.7) así que, el primer paso es definir una función auxiliar $\phi(x,t)$ como

$$\phi(x,t) = \psi_t(x,t) - c\psi_x(x,t)\,.$$

Entonces la ecuación en (2.10) se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \psi_t(x,t) - c\psi_x(x,t) = \phi(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq x, \\ \phi_t(x,t) + c\phi_x(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq x. \end{cases}$$

Por lo visto, (2.10) nos da una condición en la recta $x = t$, mientras que la condición cumplida por ϕ la calculamos gracias a la segunda y la tercera en (2.10), es decir

$$\phi(x,x) = \psi_t(x,x) - c\psi_x(x,x) = 0 - c\varphi'(x) \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto hemos encontrado dos sistemas del primer orden que, acoplados, nos proporcionan la solución de (2.10):

$$\begin{cases} \phi_t(x,t) + c\phi_x(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq x, \\ \phi(x,x) = -c\varphi'(x), & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \psi_t(x,t) - c\psi_x(x,t) = \phi(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq x, \\ \psi(x,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Nótese que el primer sistema es independiente del segundo, así que la estrategia será hallar la solución del primero, substituirla en el segundo y finalmente encontrar la $\psi(x,t)$.

Para el calculo de $\phi(x,t)$, escribimos su sistema característico, que resulta ser

$$\begin{cases} t'(s,\sigma) = 1 \\ x'(s,\sigma) = c \qquad s > 0 \\ z'(s,\sigma) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t(0,\sigma) = \sigma \\ x(0,\sigma) = \sigma \quad \sigma > 0 \\ z(0,\sigma) = -c\varphi'(\sigma)\,. \end{cases}$$

Aprovechando que $c \neq 1$, deducimos que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

así que el sistema es compatible. Entonces

$$t(s,\sigma) = s + \sigma\,, \quad x(s,\sigma) = cs + \sigma\,, \qquad z(s,\sigma) = -c\varphi'(\sigma)$$

y siendo $\sigma = \frac{x-ct}{1-c}$ deducimos que

$$\phi(x,t) = z(s(x,t),\sigma(x,t)) = -c\varphi'\left(\frac{x-ct}{1-c}\right)\,.$$

Substituyendo la expresión encontrada de $\phi(x,t)$ en (2.11), nos encontramos con el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \psi_t(x,t) - c\psi_x(x,t) = -c\varphi'\left(\frac{x-ct}{1-c}\right), & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq x \\ \psi(x,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.12}$$

Más en general, hallamos la solución del problema del primer orden

$$\begin{cases} w_t(x,t) - cw_x(x,t) = \alpha(x,t), & x \in \mathbb{R} \\ w(x,x) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con α y g funciones continuas. Otra vez, calculamos las ecuaciones característica de dicha ecuación que resultan ser:

$$\begin{cases} t'(s,\sigma) = 1 \\ x'(s,\sigma) = -c \qquad s > 0 \\ z'(s,\sigma) = \alpha(x(s), t(s)) \end{cases} \qquad \begin{cases} t(0,\sigma) = \sigma \\ x(0,\sigma) = \sigma \quad \sigma > 0 \\ z(0,\sigma) = \beta(\sigma)\,. \end{cases}$$

y, otra vez, el sistema es compatible siendo $c \neq -1$. Por lo tanto, resolviendo el sistema característico, resulta que

$$\begin{cases} t(s,\sigma) = s + \sigma \\ x(s,\sigma) = -cs + \sigma \qquad s > 0 \\ z(s,\sigma) - \beta(\sigma) = \displaystyle\int_0^s \alpha(x(s'), t(s'))ds'\,. \end{cases}$$

Desde las primeras dos ecuaciones deducimos que

$$s = \frac{x-t}{1-c} \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{x+ct}{1+c}\,,$$

así que, siendo

$$z(s,\sigma) = \psi(x(s,\sigma), t(s,\sigma))$$

deducimos que

$$w(x,t) = \beta\left(\frac{x+ct}{1+c}\right) + \int_0^{\frac{t-x}{1+c}} \alpha\left(-cs + \frac{x+ct}{1+c}, s + \frac{x+ct}{1+c}\right) ds.$$

Entonces aplicando esta formula al problema (2.12), deducimos que $\psi(x,t)$ está dada por

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \varphi\left(\frac{x+ct}{1+c}\right) - c\int_0^{\frac{t-x}{1+c}} \varphi'\left(\frac{x+ct}{1+c} - \frac{2c}{1-c}s\right) ds \\ &= \varphi\left(\frac{x+ct}{1+c}\right) - c\left(-\frac{1-c}{2c}\right)\varphi\left(\frac{x+ct}{1+c} - \frac{2c}{1-c}s\right)\Bigg|_0^{\frac{t-x}{1+c}} \\ &= \frac{1+c}{2}\varphi\left(\frac{x+ct}{1+c}\right) + \frac{1-c}{2}\varphi\left(\frac{x-ct}{1-c}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de (2.10) será

$$\psi(x,t) = \frac{1+c}{2}\varphi\left(\frac{x+ct}{1+c}\right) + \frac{1-c}{2}\varphi\left(\frac{x-ct}{1-c}\right) \text{ en } \mathcal{C}_1, \tag{2.13}$$

donde $\mathcal{C}_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \geq x\}$.

Paso 2. *Hallar la solución de (2.9).*
En este segundo paso queremos encontrar una función $\varphi(s)$ de forma que la función $\psi(x,t)$ definida en (2.13) sea la solución cuando es restringida al cilindro

$$\mathcal{C} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t > 0\,,\, 0 \leq x \leq c\,,\, t \geq x\}\,,$$

es decir $u(x,t) = \psi(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$. La dificultad está en encontrar una definición de $\varphi(s)$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$, de forma que la función $\psi(x,t)$ definida en (2.13) cumpla también las condiciones

$$\psi(x,t)\big|_{r_1} = \psi(x,t)\big|_{r_2} = 0\,.$$

a lo largo de las semirectas

$$r_1 = \{(x,t) \,:\, x = 0, t > 0\} \quad \text{y} \quad r_2 = \{(x,t) \,:\, x = l, t > \ell\}\,.$$

La otra información que conocemos sobre $\varphi(s)$ es que cumple la siguiente condición en $[o,\ell]$:

$$\varphi(x) \equiv f(x) \quad \text{si } 0 \leq x \leq \ell\,.$$

La condición en r_1 está dada por

$$u(0,t) = \psi(0,t) = \frac{1+c}{2}\varphi\left(\frac{ct}{1+c}\right) + \frac{1-c}{2}\varphi\left(\frac{-ct}{1-c}\right) = 0 \quad t > 0\,,$$

mientras que en r_2:

$$u(\ell,t) = \psi(\ell,t) = \frac{1+c}{2}\varphi\left(\frac{\ell+ct}{1+c}\right) + \frac{1-c}{2}\varphi\left(\frac{\ell-ct}{1-c}\right) = 0 \quad t \geq \ell\,.$$

Por lo tanto la función φ tiene que verificar las siguientes tres condiciones:

$$\begin{array}{ll}
\varphi\left(\dfrac{-ct}{1-c}\right) = -\dfrac{1+c}{1-c}\varphi\left(\dfrac{ct}{1+c}\right) & t > 0 \\
\varphi\left(\dfrac{\ell+ct}{1+c}\right) = -\dfrac{1-c}{1+c}\varphi\left(\dfrac{\ell-ct}{1-c}\right) & t > \ell \\
\varphi(x) = f(x) & 0 \leq x \leq \ell\,.
\end{array}$$

Hallando unos cambio de variable ($s = \frac{ct}{1-c}$ en la primera ecuación y $s = \frac{\ell+ct}{1+c}$ en la segunda) deducimos que

$$\varphi(s) = \begin{cases} -\dfrac{1+c}{1-c}\,\varphi\left(-\dfrac{1-c}{1+c}s\right) & s<0, \\ f(s) & 0\le s\le \ell, \\ -\dfrac{1-c}{1+c}\,\varphi\left(\dfrac{2\ell-(1+c)s}{1-c}\right) & s>\ell\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

Nótese que la definición de φ que hemos dado vale para cada $s\in\mathbb{R}$ aunque no es directa, es decir que depende de la φ misma. Más en detalle observamos que esta definición de φ involucra unas transformaciones de la función f, es decir hay que reflexionar y contraer (o dilatar) la f para obtener φ.

Más concretamente notemos que podemos conocer el valor de φ cuando calculado en un cualquier punto s con el siguiente argumento recursivo:

- si $0\le s\le\ell$ simplemente calculando f en s
- si $-\frac{1+c}{1-c}\ell\le s<0$ entonces desde la primera condición en (2.14)
$$\varphi(s) = -\frac{1+c}{1-c}f\left(-\frac{1-c}{1+c}s\right);$$
- si $\ell<s\le\frac{2}{1+c}\ell$ entonces desde la tercera condición en (2.14)
$$\varphi(s) = -\frac{1-c}{1+c}f\left(\frac{2\ell-(1+c)s}{1-c}\right);$$
- además, si $\frac{2}{1+c}\ell\le s<\frac{2}{1+c}\ell+\ell$ entonces $-\frac{1+c}{1-c}\ell\le\frac{2\ell-(1+c)s}{1-c}<0$ así que
$$\varphi(s) = -\frac{1-c}{1+c}\left[-\frac{1+c}{1-c}f\left(-\frac{1-c}{1+c}\frac{2\ell-(1+c)s}{1-c}\right)\right] = f\left(-\frac{2\ell}{1+c}+s\right);$$
- en cambio si $-\frac{2}{1-c}\ell<s\le-\frac{1+c}{1-c}\ell$ deducimos que $\ell\le-\frac{1-c}{1+c}s\le\frac{2}{1+c}\ell$ y consecuentemente
$$\varphi(s) = -\frac{1+c}{1-c}\left[-\frac{1-c}{1+c}f\left(\frac{2\ell-(1+c)\frac{-(1-c)s}{1+c}}{1-c}\right)\right] = f\left(\frac{2\ell}{1-c}+s\right);$$

Por lo tanto

$$\varphi(s)=\begin{cases} f\left(\dfrac{2\ell}{1-c}+s\right) & -\frac{2}{1-c}\ell<s\leq-\frac{1+c}{1-c}\ell\\ -\frac{1+c}{1-c}f\left(-\frac{1-c}{1+c}s\right) & -\frac{1+c}{1-c}\ell\leq s<0,\\ f(s) & 0\leq s\leq\ell,\\ -\dfrac{1-c}{1+c}f\left(\dfrac{2\ell-(1+c)s}{1-c}\right) & \ell<s\leq\frac{2}{1+c}\ell,\\ f\left(-\dfrac{2\ell}{1+c}+s\right) & \frac{2}{1+c}\ell\leq s<\frac{2}{1+c}\ell+\ell \end{cases} \tag{2.15}$$

Calculamos la función en dos trozos de recta más:

- si $-\ell\left(\frac{2}{1-c}+\frac{1+c}{1-c}\right)\leq s<-\frac{2}{1-c}\ell$ entonces $\frac{2c}{1+c}\ell\leq-\frac{1-c}{1+c}s<\frac{2}{1+c}\ell+\ell$ así que

$$\varphi(s)=-\frac{1+c}{1-c}\varphi\left(-\frac{1-c}{1+c}s\right)=-\frac{1+c}{1-c}f\left(-\frac{1-c}{1+c}s+\frac{2\ell}{1+c}\right);$$

- en cambio si $\frac{2}{1+c}\ell+\ell<s\leq\frac{4}{1+c}\ell$ deducimos que $-\frac{2\ell}{1-c}\leq\frac{2\ell-(1+c)s}{1-c}\leq-\frac{1+c}{1-c}\ell$ y consecuentemente

$$\varphi(s)=-\frac{1-c}{1+c}\varphi\left(\frac{2\ell-(1+c)\frac{-(1-c)s}{1+c}}{1-c}\right)=-\frac{1-c}{1+c}f\left(2\frac{2\ell}{1-c}-\frac{1+c}{1-c}s\right).$$

Por fin deducimos que la función $\varphi(s)$ es una función definida de la siguiente forma: par a cada j y $k\in\mathbb{N}$

$$\varphi(s)=\begin{cases} f\Big(s+j\dfrac{2\ell}{1-c}\Big) & \text{si}\quad -\ell-\frac{1+c}{1-c}\ell\leq\ s+j\frac{2\ell}{1-c}\ <-\frac{1+c}{1-c}\ell\,,\\ -\dfrac{1+c}{1-c}f\Big(-\dfrac{1-c}{1+c}\big(s+j\dfrac{2\ell}{1-c}\big)\Big) & \text{si}\quad -\frac{1+c}{1-c}\ell\leq\ s+j\frac{2\ell}{1-c}\ <0\,,\\ f\Big(s-\dfrac{2k\ell}{1+c}\Big) & \text{si}\quad 0\leq\ s-k\frac{2\ell}{1+c}\ <\ell\,,\\ -\dfrac{1-c}{1+c}f\Big(\dfrac{2\ell}{1-c}-\dfrac{1+c}{1-c}\big(s-k\dfrac{2\ell}{1+c}\big)\Big) & \text{si}\quad \ell\leq\ s-k\frac{2\ell}{1+c}\ <\frac{2\ell}{1+c}\,. \end{cases}$$

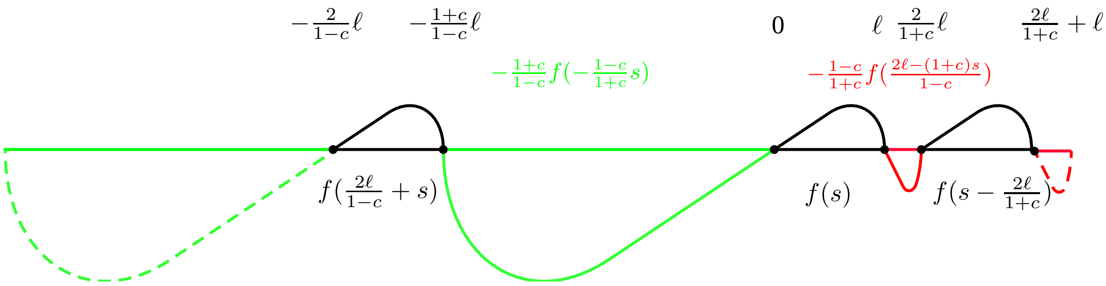

Figura 2.6: En negro en el intervalo $(0,\ell)$ esta dibujada la f, mientras que las partes en rojo y verde representan la pinta que tiene la φ fuera de dicho intervalo.

Finalmente la solución de (2.9) será

$$u(x,t)=\frac{1+c}{2}\varphi\left(\frac{x+ct}{1+c}\right)+\frac{1-c}{2}\varphi\left(\frac{x-ct}{1-c}\right) \qquad \text{en } \mathcal{C}\,,$$

donde

$$\mathcal{C}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,:\,t>0\,,\,0\le x\le c\,,\,t\ge x\}\,.$$

Observamos que la necesidad de hacer el primer paso es sólo para construir la solución explícitamente. Otra manera para resolver dicho ejercicio es observar (véase Ejercicio 1.7) que la $u(x,t)$ por ser solución de la ecuación de ondas es de la forma

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct),$$

con F y $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $C^2(\mathbb{R})$ por determinar. El objetivo es ahora encontrar las funciones F y G de forma que se cumplen las condiciones en la frontera de $\mathcal{C}$, es decir

$$\begin{cases} F(-ct)+G(ct)=0, & \text{para } t\ge 0\\ F(\ell-ct)+G(\ell+ct)=0, & \text{para } t\ge 0\\ F(x-cx)+G(x+cx)=f(x), & \text{para } 0\le x\le \ell\\ -cF'(x-cx)+cG'(x+cx)=0, & \text{para } 0\le x\le \ell\,. \end{cases}$$

Manipulando las ecuaciones, deducimos que

$$\begin{cases} F(-s) = -G(s), & \text{para } s \geq 0 \\ F(s) + G(2\ell - s) = 0, & \text{para } s \leq \ell(1-c) \\ F'(s) = G'(s\frac{1+c}{1-c}), & \text{para } 0 \leq s \leq \ell(1-c) \\ F(s) + G(s\frac{1+c}{1-c}) = f(\frac{s}{1-c}), & \text{para } 0 \leq s \leq \ell(1-c)\,. \end{cases}$$

Desarrollando las cuentas llegamos a que

$$F(s) = \frac{1-c}{2}\varphi\big(\frac{s}{1-c}\big) \qquad \text{y} \qquad G(s) = \frac{1+c}{2}\varphi\big((\frac{s}{1+c}\big)\,,$$

con $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo (2.14). ■

Ejercicio 2.6 *Calcula* $u\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ *si* $u(x,t)$ *es la solución de*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=0, & 0\leq x\leq 1, \quad t\geq 0\\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq 1\\ u_t(x,0)=x(1-x), & 0\leq x\leq 1\\ u(0,t)=0=u(1,t), & t\geq 0. \end{cases}$$

Solución.
Primero, extendemos el dato inicial de forma que sea impar en $(-1,1)$ (o en $(0,2)$, es lo mismo). Adémas los extendemos a todo el eje, de forma que se pueda aplicar la fórmula de D'Alambert. Así que definimos $\tilde{u}(x,t)$ como la solución del problema definido en todo el eje

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t)-\tilde{u}_{xx}(x,t)=0, & x\in\mathbb{R}, \quad t\geq 0\\ \tilde{u}(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\\ \tilde{u}_t(x,0)=g(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

donde

$$g(x)=\begin{cases} x(1-x) & 0\leq x\leq 1\\ x(1+x) & -1\leq x\leq 0\\ \text{2-perodica} \end{cases}$$

Gracias a la fórmula de D'Alembert tenemos una representación de $u(x,t)$ en todo $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$:

$$\tilde{u}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy\,.$$

Para determinar el valor de u en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ sólo nos hace falta conocer g en el cono de influencia de $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, es decir por debajo de las rectas característica que en este caso están dada por $x-t=-1$ y $x+t=2$ (véase Figura 2.7).

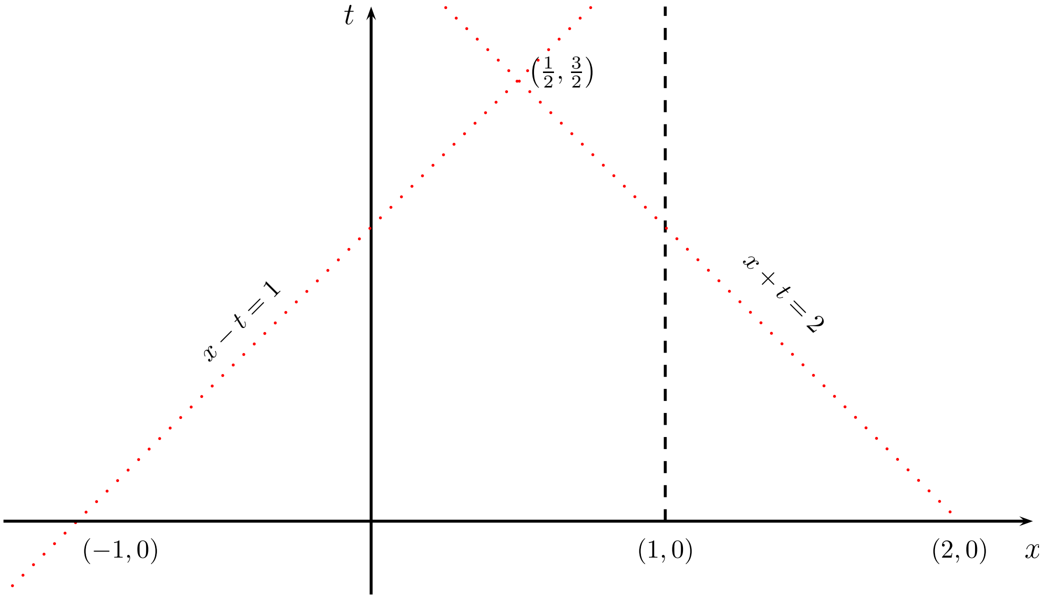

Figura 2.7: El cono de influencia

Entonces

$$u\Big(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big)=\tilde{u}\Big(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\Big)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}g(y)dy$$
$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}y(1+y)dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}y(1-y)dy}_{=0\text{ por ser }g\text{ impar}}+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(y-2)(y-1)dy$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\Big]_1^2=-\frac{1}{12}\,.$$

■

Ejercicio 2.7 *Calcula* $u(\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$ *si*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 3x^2 - 2x^3, & 0 \le x \le 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u_x(0,t) = 0, & t \ge 0, \\ u_x(1,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases}$$

Solución.
La idea es parecida a la del ejercicio anterior. Pero, en este caso, hay dos dificultades más: primero la ecuación no es homogénea y segundo en la frontera lateral hay condiciones de tipo Neumann (es decir que involucran la derivada de la solución)

El principio de Duhamel [7] nos da una solución del problema definida en todo $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Así que tenemos que elegir el dato $f(x,t) = f(x)$ definido para cada $x \in \mathbb{R}$ de forma que coincida con $3x^2 - 2x^3$ en $(0,1)$ y de forma que la función definida por la fórmula (2.16) cumpla las condiciones en la frontera del dominio $(0,1) \times (0, +\infty)$. Por lo tanto definimos $\tilde{u}(x,t)$ como la

[7] El principio de Duhamel nos da una fórmula de representación para soluciones de ecuaciones no homogéneas. Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), & x \in \mathbb{R}\,, \ t > 0\,, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con f de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, la única solución de dicho problema tiene la siguiente forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds\,. \tag{2.16}$$

solución de

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = f(x), & x \in \mathbb{R}\,, \;\; t > 0\,, \\ \tilde{u}(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}\,, \\ \tilde{u}_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

es decir

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y)dyds\,,$$

así que

$$\tilde{u}_x(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[f(x+(t-s)) - f(x-(t-s))\big]ds\,.$$

Entonces las condiciones en la frontera del cilindro $(0,1) \times (0,+\infty)$ son

$$\begin{cases} \tilde{u}_x(t,0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \big[f(t-s) - f(-(t-s))\big]ds = 0\,, \\ \tilde{u}_x(t,1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \big[f(1+(t-s)) - f(1-(t-s))\big]ds = 0\,, \end{cases} \qquad \forall t > 0\,,$$

que gracias a un cambio de variable ($t - s = \sigma$ en la primera expresión y $\sigma = 1 + (t-s)$ en la segunda) quedan

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \big[f(\sigma) - f(-\sigma)\big]d\sigma = 0\,, \\ \displaystyle\int_1^{1+t} \big[f(\sigma) - f(2-\sigma)\big]d\sigma = 0\,, \end{cases} \qquad \forall t > 0\,.$$

Consecuentemente, desde la primera condición deducimos que f tiene que ser par mientras que la segunda implica que es además 2–periódica.

Finalmente, podemos calcular

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{2}) = \tilde{u}(\frac{1}{4},\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{5}{4}+s}^{\frac{7}{4}-s} f(y)dyds\,. \tag{2.17}$$

Definiendo

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma)d\sigma \quad \text{para } -2 \le s \le 2\,,$$

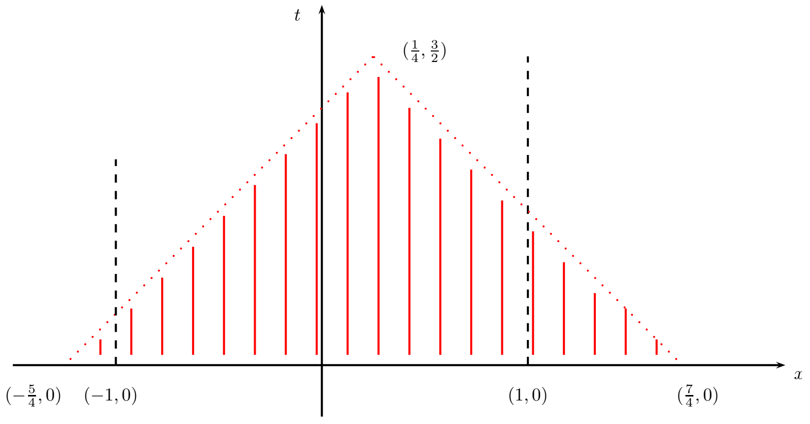

Figura 2.8: El área de la región roja es donde calculamos la integral en (2.17).

(sólo nos hace falta dar la definición de F al interior del cono de influencia) tenemos que

$$F(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}s^4 + s^3 - \frac{1}{2} & \text{si } \; -2 \leq s \leq -1, \\ \frac{1}{2}s^4 + s^3 & \text{si } \; -1 \leq s \leq 0, \\ -\frac{1}{2}s^4 + s^3 & \text{si } \; 0 \leq s \leq 1, \\ \frac{1}{2}s^4 + s^3 + \frac{1}{2} & \text{si } \; 1 \leq s \leq 2\,. \end{cases}$$

Por lo tanto, hallando la integral, deducimos que

$$\begin{aligned} u(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}) &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{5}{4}+s}^{\frac{7}{4}-s} f(y)dyds = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} [F(-\frac{5}{4}+s) - F(\frac{7}{4}-s)]ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds\,. \end{aligned}$$

Calculamos las dos integrales por separado:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds = \int_0^{\frac{1}{4}} F(-\frac{5}{4}+s)ds + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} F(-\frac{5}{4}+s)ds + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds$$
$$= \int_0^{\frac{1}{4}} \big[-\frac{1}{2} + (-\frac{5}{4}+s)^3 - \frac{1}{2}(-\frac{5}{4}+s)^4\big]ds + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \big[(-\frac{5}{4}+s)^3 + \frac{1}{2}(-\frac{5}{4}+s)^4\big]ds$$
$$+ \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} \big[(-\frac{5}{4}+s)^3 - \frac{1}{2}(-\frac{5}{4}+s)^4\big]ds$$
$$= \Big[-\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}(-\frac{5}{4}+s)^4 - \frac{1}{10}(-\frac{5}{4}+s)^5\Big]_0^{\frac{1}{4}} + \Big[\frac{1}{4}(-\frac{5}{4}+s)^4 + \frac{1}{10}(-\frac{5}{4}+s)^5\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} +$$
$$\Big[\frac{1}{4}(-\frac{5}{4}+s)^4 - \frac{1}{10}(-\frac{5}{4}+s)^5\Big]_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \Big[-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\Big] - \Big[\frac{1}{4}\frac{5^4}{4^4} + \frac{1}{10}\frac{5^5}{4^5}\Big] - \Big[\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\frac{5^5}{4^5}\Big] + \Big[\frac{1}{4^5} - \frac{1}{10}\frac{1}{4^5}\Big]$$
$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{5^4}{4^5} + \frac{9}{10}\frac{1}{4^5}\,.$$

Por el otro lado:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds = \int_0^{\frac{3}{4}} F(\frac{7}{4}-s)ds + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds$$
$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \big[\frac{1}{2} + (\frac{7}{4}-s)^3 - \frac{1}{2}(\frac{7}{4}-s)^4\big]ds + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}} \big[(\frac{7}{4}-s)^3 + \frac{1}{2}(\frac{7}{4}-s)^4\big]ds$$
$$= \Big[\frac{1}{2}s - \frac{1}{4}(\frac{7}{4}-s)^4 + \frac{1}{10}(\frac{7}{4}-s)^5\Big]_0^{\frac{3}{4}} + \Big[-\frac{1}{4}(\frac{7}{4}-s)^4 - \frac{1}{10}(\frac{7}{4}-s)^5\Big]_{\frac{3}{4}}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \Big[\frac{3}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\Big] - \Big[-\frac{1}{4}(\frac{7}{4})^4 + \frac{1}{10}(\frac{7}{4})^5\Big] + \Big[-\frac{1}{4^5} - \frac{1}{10}\frac{1}{4^5}\Big] - \Big[-\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\Big]$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{3}{10}\frac{7^5}{4^5} - \frac{11}{10}\frac{1}{4^5}\,.$$

Por lo tanto

$$u(\frac{1}{4},\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} F(-\frac{5}{4}+s)ds - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} F(\frac{7}{4}-s)ds$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\frac{3}{5} + \frac{2-5^4}{4^5} - \frac{3}{10}\frac{7^5}{4^5}\Big]\,.$$

■

Ejercicio 2.8 *Encontrad la solución de*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = sen\,(\pi x), & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Solución.
Método 1. Razonamos como en el ejercicio anterior. Extendemos el problema a uno definido en todo el semiplano con un dato impar y 2–periódico (nótese que la extensión de $\sin(\pi x)$ impar y 2–periódica es la función misma)

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - \tilde{u}_{xx}(x,t) = \mathrm{sen}\,(\pi x), & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Calculamos ahora su solución utilizando el de Duhamel [8]

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} sin(\pi y) dy ds\,.$$

Por lo tanto la solución de (2.18) será $\tilde{u}(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$, es decir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^t \big[\cos\big(\pi x + \pi(t-s)\big) - \cos\big(\pi x - \pi(t-s)\big)\big] ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \big[\cos\big(\pi x + \pi(t-s)\big) - \cos\big(\pi x - \pi(t-s)\big)\big] ds \\ &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}\,(\pi x)\int_0^t \mathrm{sen}\,\big(\pi(t-s)\big) ds = -\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\,(\pi x)[1-\cos(\pi t)]\,. \end{aligned}$$

Método 2. Notamos primero que $\big(\mathrm{sen}(\pi x)\big)'' = -\pi^2\,\mathrm{sen}(\pi x)$; es decir, dandole la vuelta, que $z(x) = \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{sen}(\pi x)$ cumple

$$\begin{cases} -z_{xx}(x) = \mathrm{sen}(\pi x), & 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

[8] Véase (2.16)

Por lo tanto si definimos $v(x,t) = u(x,t) + z(x)$, entonces $v(x,t)$ es solución de

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ v(x,0) = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Razonando como antes, tenemos que encontrar una $\tilde{v}$ que resuelva el problema (2.19) en todo $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ con un dato inicial que coincide con $\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)$ para $0 \leq x \leq 1$. Ya hemos visto que la elección que hay que hacer es la extensión de $\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)$ de forma impar y 2–periódica, es decir la función misma en todo el eje. Por lo tanto, gracias a la fórmula de D'Alembert, deducimos que

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi^2}\operatorname{sen}\big(\pi(x+t)\big) + \frac{1}{2\pi^2}\operatorname{sen}\big(\pi(x-t)\big) = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t)\,.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio,

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi t) - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}(\pi x)\,.$$

■

Ejercicio 2.9 *Una cuerda se encuentra fija en sus extremos $x = 0$ y $x = 1$. En el instante inicial tiene la forma*

$$u(x,0) = \frac{5}{16}(x^4 - 2x^3 + x)$$

y está en reposo (velocidad inicial nula). Analice sus vibraciones a partir de ese momento.

Solución.
Primero observamos que, siendo al cuerda fija en su extremos, significa que la función que describe su perfil cumple las condiciones

$$u(0,t) = 0 = u(1,t), \qquad \forall t > 0.$$

Por lo tanto estamos buscando una solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{5}{16}(x^4 - 2x^3 + x), & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Actuamos como antes, es decir buscando una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que cuando restringida a $(0,1)$ coincida con $\frac{5}{16}(x^4 - 2x^3 + x)$ y tal que la solución del problema

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) - c^2 \tilde{u}_{xx}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.21}$$

verifique

$$\tilde{u}(0,t) = 0 = \tilde{u}(1,t), \qquad \forall t > 0.$$

Ya hemos visto que la manera de encontrar f es extender la función $\frac{5}{16}(x^4 - 2x^3 + x)$ de forma impar y 2–periódica en todo el eje x. Por lo tanto al solución del problema (2.21) será

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct)$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{16}(x^4 - 2x^3 + x), & x \in (0,1) \\ -\frac{5}{16}(x^4 + 2x^3 - x) & x \in (-1,0) \\ 2\text{–periodica} \end{cases}$$

y $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$, donde $\mathcal{C} = [0,1] \times [0,+\infty)$.

Nótese que siendo el polinomio asignado $g(x) = \frac{5}{16}(x^4 - 2x^3 + x)$ de clase infinito, y tal que $g(0) = g(0) = 0$, $g'(0^+) = -g'(1^-) = \frac{5}{16}$ y $g''(0^+) = g''(1^-) = 0$, la función f resulta ser de clase $C^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto la aplicación de la fórmula de D'Alembert está justificada. Además podemos escribir una fórmula de representación de la solución aprovechando que el dato inicial tiene un desarrollo en serie de Fourier. Hallamos ahora los coeficientes de $g(x)$, es decir $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$, por ser g impar, mientras que [9]

$$\begin{aligned} b_n = \int_{-1}^{1} g(x)\sin(n\pi x)dx &= \frac{10}{16}\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x)\sin(n\pi x)dx \\ &= \frac{15}{n^5\pi^5}(1 - (-1)^n)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto deducimos que la serie de Fourier de la g está dada por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \qquad \text{con } b_n = \frac{15}{n^5\pi^5}(1 - (-1)^n)\,.$$

[9]Aprovechamos de las siguientes integrales:

$\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{\sin(n\pi x) - \pi n x\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$;

$\int_0^1 x^2\sin(n\pi x)dx = \frac{2\pi 2nx\sin(n\pi x) + (2 - \pi^2 n^2 x^2)\cos(n\pi x)}{n^3\pi^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{(2-\pi^2n^2)(-1)^n}{n^3\pi^3}$;

$\int_0^1 x^3\sin(n\pi x)dx = \frac{3(\pi^2n^2x^2 - 2)\sin(n\pi x) - \pi n x(\pi^2 n^2 x^2 - 6)\cos(n\pi x)}{n^4\pi^4}\Big|_0^1 = -\frac{(\pi^2n^2-6)(-1)^n}{n^3\pi^3}$;

$\int_0^1 x^4\sin(n\pi x)dx = \frac{4\pi n x(\pi^2n^2x^2 - 6)\sin(n\pi x) - (\pi^4n^4x^4 - 12\pi^2n^2x^2 + 24)\cos(n\pi x)}{n^5\pi^5}\Big|_0^1$
$= \frac{-(\pi^4n^4 - 12\pi^2n^2 - 24)(-1)^n}{n^5\pi^5} + \frac{24}{n^5\pi^5}$

Por lo tanto la solución de (2.20) tendrá la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\big(n\pi(x-ct)\big) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\big(n\pi(x+ct)\big)$$

donde $b_n = \frac{15}{n^5\pi^5}(1-(-1)^n)$. Aprovechando que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

finalmente deducimos que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{15}{n^5\pi^5}(1-(-1)^n)\operatorname{sen}\big(n\pi x\big)\cos\big(n\pi ct\big)$$

que, opportunamente manipulada, se trasforma en

$$u(x,t) = \frac{30}{\pi^5}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^5}\operatorname{sen}\big((2n+1)\pi x\big)\cos\big((2n+1)\pi ct\big)\,.$$

■

Ejercicio 2.10 *Estudiad el problema consistente en hallad la función $u(x,t)$ que describe las vibraciones de una cuerda de longitud $\ell = 1$, fija en sus extremos y en posición horizontal, cuyo desplazamiento y velocidad iniciales son nulos y que está sometida a una fuerza externa proporcional a la distancia a uno de sus extremos.*

Solución.
En este caso la cuerda está fija en sus extremos $x = 0$ y $x = 1$, la fuerza externa será de la forma $f(x,t) = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = \lambda x, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Sea $v(x)$ la solución del siguiente problema estacionario

$$\begin{cases} v_{xx}(x) = \frac{\lambda}{c^2} x, & 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

Integrando la ecuación dos veces y aprovechando de las condiciones en la frontera, no es complicado verificar que la solución está dada por

$$v(x) = \frac{\lambda}{6\,c^2} x(x^2 - 1)\,.$$

Definimos ahora

$$z(x,t) = u(x,t) + v(x) \tag{2.23}$$

y utilizando las ecuaciones cumplida tanto por u cuanto por v, deducimos que

$$z_{tt}(x,t) - c^2 z_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) - c^2 v_{xx}(x) = \lambda x - c^2 \frac{\lambda}{c^2} x = 0\,.$$

Teniendo además en cuenta las condiciones en la frontera, $z(x,t)$ es solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} z_{tt}(x,t) - c^2 z_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = v(x), & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Ya hemos visto que la estrategia para encontrar está solución es extender el problema a uno en definido en el semiespacio, aplicar la fórmula de D'Alembert y restringir la solución encontrada al cilindro $\mathcal{C} = [0,1]\times[0,+\infty)$. Por lo tanto definimos

$$\begin{cases} \tilde{z}_{tt}(x,t) - c^2 \tilde{z}_{xx}(x,t) = 0, & \text{en } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{z}(x,0) = \tilde{v}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{z}_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.24}$$

donde

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{6\,c^2} x(x^2-1), & x \in (-1,1) \\ 2\text{–periodica} \end{cases}$$

(por ser la función $x(x^2-1)$ impar).

Nótese que la función $v(x) \in C^2(-1,1) \cap C^1[-1,1]$ y $\tilde{v}(x) \in C^1(\mathbb{R})$ pero $\tilde{v}(x) \notin C^2(\mathbb{R})$, por ser

$$\lim_{x\to 1^-} v''(x) = \frac{\lambda}{c^2} \neq -\frac{\lambda}{c^2} = \lim_{x\to -1^+} v''(x)\,.$$

Entonces la Formula de D'Alembert no se puede aplicar.

Lo que si se puede hacer es escribir una *solución formal* de (2.22) de forma que pueda dar, en algún sentido, una aproximación de la solución.

Entonces, primero observamos que si pudiésemos aplicar la fórmula de D'Alembert, la solución de (2.24) se quedaría en

$$\tilde{z}(x,t) = \frac{1}{2}\tilde{v}(x-ct) + \frac{1}{2}\tilde{v}(x+ct)\,, \tag{2.25}$$

y consecuentemente la solución de (2.22) sería $z(x,t) = \tilde{z}(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$, con $\mathcal{C} = [0,1] \times [0,+\infty)$.

Calculamos ahora los coeficientes de Fourier de la $\tilde{v}(x)$. Siendo la función impar (y 2–periódica) deducimos que los coeficientes $a_n = 0$, $\forall n \geq$ y que (véase la nota en el Ejercicio 2.9) los coeficientes están dado s por

$$b_n = \frac{\lambda}{6\,c^2}\int_{-1}^{1} x(x^2-1)\sin(n\pi x)dx = \frac{\lambda}{3\,c^2}\int_{0}^{1} x(x^2-1)\sin(n\pi x)dx = \frac{2\lambda}{c^2\pi^3 n^3}(-1)^n\,.$$

Por lo tanto

$$\tilde{v}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\lambda}{c^2\pi^3 n^3}(-1)^n \operatorname{sen}(n\pi x)\,.$$

Consecuentemente aprovechando (2.25), deducimos

$$z(x,t) = \frac{1}{2}\frac{2\lambda}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\big[\operatorname{sen}\big(n\pi(x-ct)\big)+\operatorname{sen}\big(n\pi(x+ct)\big)\big]\,, \qquad \forall (x,t) \in \mathcal{C}\,,$$

y finalmente deshaciendo el cambio (2.23) obtenemos que

$$u(x,t) = -\frac{\lambda}{6\,c^2}x(x^2-1) + \frac{2\lambda}{c^2\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}(n\pi x)\cos(n\pi\, ct)\,.$$

Nótese que la escritura de la $u(x,t)$ es sólo formal, es decir que no podemos concluir que la función aquí definida cumpla verdaderamente la ecuación. ■

Ejercicio 2.11 *Para* $g(x,t) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\mathrm{sen}(2\pi\omega t)$*, calcular la solución de*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = g(x,t), & 0 \le x \le \ell, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), & 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(\ell,t) = 0, & t \ge 0, \end{cases} \tag{2.26}$$

donde $A, c, \omega, \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*.*

Solución.
Supongamos que $(2\omega\pi)^2 \neq c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2$.
Primero notamos que $g_{tt}(x,t) - c^2 g_{xx}(x,t) = -\left[(2\pi\omega)^2 - c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\right] g(x,t)$, entonces si definimos

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{1}{(2\pi\omega)^2 - c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2} g(x,t), \tag{2.27}$$

resulta que $v(x,t)$ cumple

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) - c^2 v_{xx}(x,t) = 0, & 0 \le x \le \ell, \quad t > 0 \\ v(x,0) = \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), & 0 \le x \le \ell \\ v_t(x,0) = \frac{2\pi\omega A}{(2\pi\omega)^2 - c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right), & 0 \le x \le \ell \\ v(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ v(\ell,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Como los datos iniciales del problema son impares y ℓ–periódicos deducimos que la solución del problema (2.28) está dada por la función definida por la fórmula de D'Alembert restringida al cilindro $(0,\ell) \times (0,+\infty)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi(x+ct)}{\ell}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi(x-ct)}{\ell}\right) \\ &\quad + \frac{1}{c}\frac{\pi\omega A}{(2\pi\omega)^2 - c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2}\int_{x-ct}^{x+ct} \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi s}{\ell}\right) ds \\ &= \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}ct\right) + \frac{2\ell\omega}{mc}\frac{A}{(2\pi\omega)^2 - c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}ct\right). \end{aligned}$$

Finalmente deshaciendo el cambio (2.27) encontramos la solución buscada:

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}x\right)\left[\cos\left(\frac{m\pi}{\ell}ct\right) + \frac{2\ell\omega}{mc}\frac{A}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ell}ct\right) - \frac{A}{\rho}\operatorname{sen}(2\pi\omega t)\right],$$

donde $(2\pi\omega)^2 - c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 = \rho \neq 0$.

Para el caso $(2\omega\pi)^2 = c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2$ hay que razonar de otra forma. La ídea es buscar una solución del problema que tenga la forma

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)T(t).$$

con $T \in C^2(0,\infty) \cap C^1[0,\infty)$. Nótese que las condiciones en los extremos de la cuerda se cumplen (siendo $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = 0$); entonces para que u sea solución sólo tenemos que pedir a T de verificar el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} T''(t) + c^2\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 T(t) = A\operatorname{sen}(2\omega\pi t) & t > 0\,, \\ T(0) = 1\,, \\ T'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{2.29}$$

La familia de soluciones de la ecuación homogénea asociada a (2.29) es

$$T_0(t) = \alpha\operatorname{sen}\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \beta\cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siendo $\frac{cm\pi}{\ell} = 2\omega$, buscaré la solución particular de (2.29) de la forma

$$T_p(t) = \gamma t\operatorname{sen}\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \delta t\cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right)$$

con $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$. Operando resulta que la integral general de la ecuación en (2.29) resulta ser

$$T(t) = -\frac{A\ell}{2cm\pi}t\cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \alpha\operatorname{sen}\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \beta\cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Finalmente la solución de (2.29) está dada por

$$T(t) = -\frac{A\ell}{2cm\pi}t\cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \frac{A\ell^2}{2c^2m^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right)$$

y consecuentemente deducimos la expresión de la solución de (2.26):

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = -&\frac{A\ell}{2cm\pi} t \cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \\
+ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) &\left[\frac{A\ell^2}{2c^2m^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right) + \cos\left(\frac{cm\pi}{\ell}t\right)\right] .
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

■

Comentario 2.2 (La resonancia) *¿Porque en el ejercicio anterior nos han solido dos casos?*

El segundo caso es lo que describe el fenómeno de la resonancia.

La resonancia es un fenómeno que se produce cuando un cuerpo elástico (es decir que es capaz de vibrar, como una cuerda, un puente...) le largueza ℓ *es sometido a la acción de una fuerza periódica (*$F(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\operatorname{sen}(2\omega\pi t)$*), cuyo periodo de vibración coincide con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo (es decir estamos en el caso* $(2\omega)^2 = c^2\left(\frac{m}{\ell}\pi\right)^2$*). En esto caso una fuerza, aunque pequeña puede llevar a vibraciones cuya amplitud crece imparablemente.*

Como se puede observar en (2.30) la solución es la suma de dos terminos: el segundo que aparece es agotado mientras que el primero es una función que oscila y cuya amplitud de oscilaciones crece proporcionalmente al tiempo.

En particular, en los ejemplos practico, esto significa que el cuerpo sometido a la fuerza periódica se va a romper cuando pase un tiempo t^* *dependiente del coeficiente de elasticidad de dicho cuerpo.*

El ejemplo más famoso de este fenómeno ha sido el derrumbe del Puente "Tacoma Narrows Bridge" en el estado de Washington el 7 de noviembre de 1940. Concretamente la fuerza externa que provocó la rotura del puente ha sido el viento (hay videos de este derrumbe en la web que son impresionantes!).

Por la misma razón se le pide a las tropas que cruzan un puente de romper el paso: las vibraciones provocadas por marchar podrían entrar en resonancia y romper el puente.

Ejercicio 2.12 (Cuerda percutida por un martillo de amplitud 2δ)
Sea

$$g(x) = \begin{cases} k, & si\ |x-a| \leq \delta, \\ 0, & si\ |x-a| > \delta, \end{cases}$$

donde $0 < 2\delta < a < \ell - 2\delta$ *y* $k > 0$. *Demostrad que la solución del problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ u(0,t) = 0 = u(\ell,t), & t \geq 0, \end{cases}$$

está dada por

$$u(x,t) = \frac{4k\ell}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} sen \frac{n\pi a}{\ell} sen \frac{n\pi\delta}{\ell} sen \frac{n\pi x}{\ell} sen \frac{n\pi ct}{\ell}.$$

Solución.
El ejercicio se puede intentar de resolver con el mismo esquema de los anteriores: es un problema mixto, entonces extendemos los datos iniciales; aplicamos la Formula de D'Alembert para encontrar una solución definida en todo el semiplano; si la extensión ha sido hecha de forma oportuna, la función encontrada al ser restringida al cilindro $(0,\ell) \times (0,+\infty)$ será solución de nuestro problema.

Pues, en este caso notamos que el dato inicial $g(x)$ no es una función suficientemente regular (no es tampoco continua) y entonces no podemos aplicar la Formula de D'Alembert (cualquier extensión hagamos).

Por lo tanto, las cuentas que siguen son *formales*, es decir no hay que entenderlas en un sentido *clásico* sino en un sentido más *débil* de lo que hemos entendido hasta ahora. De hecho la solución que vamos a construir será data por una serie de Fourier que no converge uniformemente en $(0,\ell) \times (0,+\infty)$, así que sólo tiene un sentido en un espacio más grande de lo de las funciones $C^2((0,\ell) \times (0,+\infty))$.

El truco que vamos a utilizar será lo de desarrollar el dato inicial en serie de Fourier y trabajar con dicha serie tratandola como si fuese una suma finita. El resultado, como ya explicado, será una solución que tiene que entenderse en un sentido más grande de lo que hemos hecho hasta ahora.

Por lo tanto, desarrollamos en serie de Fourier de la función $g(x)$. Primero extendemos dicha función al intervalo $(-\ell, \ell)$ y luego de forma que sea 2ℓ–periodica, es decir definimos $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como la única función 2ℓ–periódica tal que

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \ell\,, \\ -g(-x) & \text{si } -\ell \leq x \leq 0\,, \\ \tilde{g}(x) \quad \text{es } 2\ell\text{-periodica}\,. \end{cases}$$

Ahora calculamos los coeficientes de Fourier a_0, a_n y b_n, $n \geq 1$, de la s $\tilde{g}$: En primer lugar,

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{g}(x)dx = 0\,,$$

siendo $\tilde{g}$ impar. Además, por la misma razón,

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{g}(x)\cos\big(\frac{n\pi x}{\ell}\big)dx = 0\,,$$

y finalmente

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{g}(x)\sin\big(\frac{n\pi x}{\ell}\big)dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} g(x)\sin\big(\frac{n\pi x}{\ell}\big)dx = \frac{2k}{\ell}\int_{a-\delta}^{a+\delta} \sin\big(\frac{n\pi x}{\ell}\big)dx$$

$$= \frac{2k}{\ell}\frac{\ell}{n\pi}\Big[-\cos\big(\frac{n\pi x}{\ell}\big)\Big]_{a-\delta}^{a+\delta} = \frac{2k}{n\pi}\Big[-\cos\left(n\frac{\pi}{\ell}(a+\delta)\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}(a-\delta)\right)\Big]\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta \tag{2.31}$$

deducimos

$$b_n = \frac{4k}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right)\,.$$

Por lo tanto la función $\tilde{g}(x)$ tiene su expresión como serie de Fourier data por

$$\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right) \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{\ell}\big)\,.$$

Nótes e que la convergencia de la Serie de Fourier a la función $\tilde{g}(x)$ no es uniforme, sino sólo en $L^2(-\ell,\ell)$. Por lo tanto dicha identidad tiene que ser entendida sólo como una identidad entre funciones de lates espacios y no puntual.

Aplicamos ahora la formula de de D'Alembert a la serie de Fourier de $\tilde{g}$, así que

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(y)dy$$
$$= \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4k}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right) \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi y}{\ell}\big)dy\,.$$

Hacemos ahora otro paso formal, es decir supongamos que podemos llevar la integral al interior del símbolo de suma: por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \frac{2k}{c\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right) \int_{x-ct}^{x+ct} \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi y}{\ell}\big)dy \\ &= \frac{2k}{c\pi}\frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right)\Big[-\cos\big(\frac{n\pi y}{\ell}\big)\Big]_{x-ct}^{x+ct}. \\ &= \frac{2k\ell}{c\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right)\Big[-\cos\big(\frac{n\pi(x+ct)}{\ell}\big)+\cos\big(\frac{n\pi(x-ct)}{\ell}\big)\Big].\end{aligned}$$

Gracias a (2.31) y recordando que $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\big|_{\mathcal{C}}$, deducimos que

$$u(x,t) = \frac{4kl}{c\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ctn}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

■

Ejercicio 2.13 *Para α y β funciones continuas de soporte compacto en $\mathbb{R}$, supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ es una solución del problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & \text{si } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Consideremos

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx \qquad \text{(Energía cinética)},$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)\, dx \qquad \text{(Energía potencial)}.$$

Probad

1. *La función $E(t) := K(t) + V(t)$ es constante.*

2. *Existe t_0 dependiente de α y β tal que $K(t) = V(t)$, para todo $t \geq t_0$.*

Solución.
Por la fórmula de D'Alembert (véase (2.1)), la solución de (2.32) está data por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\alpha(x+t) + \alpha(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \beta(s) ds,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0. \tag{2.33}$$

1) Si fijamos $t \geq 0$, observamos que

$$\alpha(x+t) = 0 \quad \text{if} \quad x \notin -t + \operatorname{sop} \alpha$$

y analogamente

$$\alpha(x-t) = 0 \quad \text{if} \quad x \notin t + \operatorname{sop} \alpha\,.$$

Aprovechamos, entonces, que α tiene soporte compacto para deducir que los conjuntos $-t + \operatorname{sop} \alpha$ y $t + \operatorname{sop} \alpha$ son acotados y, por tanto, existe $x_0 >> 0$ (dependiente de t) tal que $\alpha(x+t) = \alpha(x-t) = 0$ si $|x| \geq x_0$.

Análogamente, como el soporte de β está acotado,

$$\int_{-\infty}^{x-t} \beta(s)ds = \int_{x+t}^{+\infty} \beta(s)ds = 0,$$

para todo $x \leq t + \text{ínf}\,\text{sop}\,\beta$ y

$$\int_{x+t}^{+\infty} \beta(s)ds = 0,$$

para todo $x \geq -t + \sup \text{sop}\,\beta$. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el punto x_0 previamente escogido verifica también

$$\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s)ds,$$

para todo $|x| \geq x_0$. Así que

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s)ds = \text{cte}, \quad \forall |x| \geq x_0 \tag{2.34}$$

y

$$\begin{aligned} E'(t) &= K'(t) + V'(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{tt} + u_x u_{xt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx} + u_x u_{tx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x (u_t u_x)\, dx \end{aligned}$$

Gracias al Teorema Fundamental del Calculo y siendo para cada $t \geq 0$

$$\lim_{|x|\to\infty} u_t(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = 0\,,$$

deducimos entonces que

$$\forall t \geq 0\,, \qquad E'(t) = 0\,.$$

Por lo tanto $E(t)$ es constante.

2) Gracias a (2.33), deducimos que

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha'(x+t) - \alpha'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[\beta(x+t) + \beta(x-t)\right]$$

y

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha'(x+t) + \alpha'(x-t)\right] + \frac{1}{2}\left[\beta(x+t) - \beta(x-t)\right]$$

Como los datos iniciales α y β tienen soporte compacto, existe $t_0 >> 0$ tal que

$$([\operatorname{sop}\alpha \cup \operatorname{sop}\beta] + t) \cap ([\operatorname{sop}\alpha \cup \operatorname{sop}\beta] - t) = \emptyset,$$

para todo $t \geq t_0$. Así, teniendo en cuenta que

$$x + t \in \operatorname{sop}\alpha' \Longrightarrow x + t \in \operatorname{sop}\alpha \Longleftrightarrow x \in \operatorname{sop}\alpha - t$$

$$x - t \in \operatorname{sop}\alpha' \Longrightarrow x - t \in \operatorname{sop}\alpha \Longleftrightarrow x \in \operatorname{sop}\alpha + t$$

$$x + t \in \operatorname{sop}\beta \Longleftrightarrow x \in \operatorname{sop}\beta - t$$

$$x - t \in \operatorname{sop}\beta \Longleftrightarrow x \in \operatorname{sop}\beta + t,$$

deducimos que si $t \geq t_0$ entonces

$$u_t(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha'(x+t) + \frac{1}{2}\beta(x+t), & \text{si } x \in [\operatorname{sop}\alpha \cup \operatorname{sop}\beta] - t \\ -\frac{1}{2}\alpha'(x-t) + \frac{1}{2}\beta(x-t), & \text{si } x \in [\operatorname{sop}\alpha \cup \operatorname{sop}\beta] + t \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$u_x(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha'(x+t) + \frac{1}{2}\beta(x+t), & \text{si } x \in [\operatorname{sop}\alpha \cup \operatorname{sop}\beta] - t \\ \frac{1}{2}\alpha'(x-t) - \frac{1}{2}\beta(x-t), & \text{si } x \in [\operatorname{sop}\alpha \cup \operatorname{sop}\beta] + t \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consecuentemente, si $t \geq t_0$, $u_x(x,t)^2 = u_t(x,t)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y así

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)\,dx = V(t),$$

para todo $t \geq t_0$. ■

Ejercicio 2.14 *Hallad la solución de:*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & en\ \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = 0 & en\ \mathbb{R}^3 \times \{0\} \\ u_t(x,0) = e^{-|x|^2} & en\ \mathbb{R}^3 \times \{0\} \end{cases}$$

Solución.
Para el calculo de dicha solución necesitamos aplicar la fórmula de Poisson-Kirchoff [10] que representa la extensión de la fórmula de D'Alembert en dimensión 3. En consecuencia

$$u(x,t) = \frac{t}{|\partial B_t(x)|} \int_{\partial B_t(x)} e^{-|y|^2} dS_y$$

que con el cambio $y = x + tz$ se transforma en

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi} e^{-(|x|^2+t^2)} \int_{\partial B_1(0)} e^{-2t\,x\cdot z} dS_z = \frac{t}{4\pi} e^{-(|x|^2+t^2)} \int_{\partial B_1(0)} e^{-2t\,|x|\,\hat{x}\cdot z} dS_z\,,$$

donde $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$. Sin perder generalidad, se puede suponer que $x = e_1|x|$, así que

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi} e^{-(|x|^2+t^2)} \int_{\partial B_1(0)} e^{-2t\,|x|\,z_1} dS_z\,. \tag{2.35}$$

Nótese que la frontera de $B_1(0)$ se puede descomponer como

$$\partial B_1(0) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

[10] La fórmula de Poisson-Kirchoff nos da una fórmula de representación para la única solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{0\} \end{cases}$$

con $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. La solución se escribe de la siguiente forma:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{|\partial B_{ct}(x)|}\int_{\partial B_{ct}(x)} f(s)dS_x\right] + \frac{t}{|\partial B_{ct}(x)|}\int_{\partial B_{ct}(x)} g(s)dS_x\,,$$

donde $\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \,:\, |y-x| = r\}$ y $|\partial B_r(x)| = 4\pi r^2$.

donde
$$\Sigma_1 = \left\{ (z_1, z_2, z_3) : z_3 = \sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2} \right\}$$
y
$$\Sigma_2 = \left\{ (z_1, z_2, z_3) : z_3 = -\sqrt{1 - z_1^2 - z_2^2} \right\}.$$
Entonces
$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} e^{-2t\,|x|\,z_1} dS_z = 2\int_{\Sigma_1} e^{-2t\,|x|\,z_1} dS_z &= \int_{z_1^2+z_2^2\le 1} \frac{e^{-2t\,|x|\,z_1}}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}} dz_1 dz_2 \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z_1^2}}^{\sqrt{1-z_1^2}} \frac{e^{-2t\,|x|\,z_1}}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}} dz_1 dz_2 \\ &= \int_0^1 e^{-2t\,|x|\,z_1} \left(\int_{-\sqrt{1-z_1^2}}^{\sqrt{1-z_1^2}} \frac{dz_2}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}} \right) dz_1 .\end{aligned}$$
La integral entre paréntesis admite una familia de primitivas explícitas:
$$\begin{aligned}\int \frac{dz_2}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}} &= \int \frac{dz_2}{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-\frac{z_2^2}{1-z_1^2}}} = \\ &\left[\text{con el cambio} \quad s = \tfrac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac12}} \quad ds = \tfrac{dz_2}{(1-z_1^2)^{\frac12}}\right] \\ = \int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} &= \operatorname{arc\,sen} s = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac12}}\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
Entonces:
$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} e^{-2t\,|x|\,z_1} dS_z &= 2\int_0^1 e^{-2t\,|x|\,z_1} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac12}}\right)\Bigg|_{\sqrt{1-z_1^2}}^{-\sqrt{1-z_1^2}} dz_1 \\ &= 2\int_0^1 e^{-2t\,|x|\,z_1} [\operatorname{arc\,sen} 1 - \operatorname{arc\,sen}(-1)] dz_1 = 2\pi \int_0^1 e^{-2t\,|x|\,z_1} dz_1 \\ &= 2\pi \frac{e^{-2t\,|x|\,z_1}}{-2t|x|}\Bigg|_{-1}^{1} = -\pi \frac{e^{-2t\,|x|} - e^{2t\,|x|}}{t|x|} \\ &= \pi \frac{e^{2t\,|x|} - e^{-2t\,|x|}}{t|x|} = \frac{2\pi}{t|x|} \operatorname{senh}\,(2t|x|).\end{aligned}$$
Finalmente, sustituyendo en (2.35), llegamos a
$$u(x,t) = e^{-(|x|^2+t^2)} \frac{\operatorname{senh}\,(2t|x|)}{2|x|}.$$

■

Ecuación del Calor

Ejercicio 3.1 *Resuelve mediante la fórmula de Poisson:*

1.
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = t + e^t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 2, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 3t^2, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = e^t \cos(x), & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \cos(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Solución. [11]

[11] Recordamos que gracias a la fórmula de Poisson, data una función $g(x) \in C^0(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 1$, tal que $g(x) \leq Ce^{\alpha|x|^2}$, para $C, \alpha > 0$, entonces la función

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy\,.$$

es tal que:

- $u(x,t) \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) \cap C^2(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty))$;
- cumple
$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N\,. \end{cases}$$

1. Para este apartado no necesitamos la fórmula de Poisson. En efecto, observamos que $u(x,t)$ es independiente del espacio (es decir no depende de la variable x), así que es la solución de 1) es de la forma

$$u(x,t) = z(t) \qquad \text{con } z \text{ resolviendo} \qquad \begin{cases} z'(t) = t + e^t \\ z(0) = 2\,. \end{cases}$$

Entonces
$$u(x,t) = 2 + \int_0^t (s + e^s)ds = \frac{t^2}{2} + e^t + 1.$$

2. En este caso la solución $u(x,t)$ es la suma de dos funciones:

$$u(x,t) = v(x,t) + z(x,t)$$

donde:
$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 3t^2, & (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \\ u(x,0) = 0, & (x \in \mathbb{R}), \end{cases}$$
y
$$\begin{cases} z_t - z_{xx} = 0, & (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x), & (x \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

En particular, está claro que $v(x,t) = \tilde{v}(t)$ y entonces

$$v(x,t) = t^3\,.$$

Por otro lado, la fórmula de Poisson nos da

$$z(x,t) = S(x,t) * \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \operatorname{sen}(y)dy$$

Entonces
$$u(x,t) = t^3 + \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \operatorname{sen}(y)dy\,.$$

3. Vamos buscando una solución de la forma:

$$u(x,t) = A(t)\cos x$$

y entonces A tiene que cumplir

$$\begin{cases} A'(t) + A(t) = e^t & t > 0 \\ A(0) = 1 \end{cases}$$

y la solución es $A(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$. Por lo tanto

$$u(x,t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cos x = \cosh t\,\cos x\,.$$

Es sencillo verificar que las soluciones encontradas cumplen los problemas propuestos.

■

Ejercicio 3.2 *Probad la unicidad de la solución del problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & 0 \le x \le \ell\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = \phi(t) & t > 0 \\ u(l,t) = \psi(t) & t > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $f(x,t) \in C^0((0,\ell)\times(0,+\infty))$*,* $g(x) \in C^0(0,\ell)$*,* $\phi(t), \psi(t) \in C^0(0,+\infty)$*.*

Solución.
Supongamos por contradicción que (3.1) tenga dos soluciones u_1 y u_2 y sea $w = u_1 - u_2$. Entonces $w(x,t)$ cumple

$$\begin{cases} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0 & 0 \le x \le \ell\,,\ t > 0 \\ w(x,0) = 0 & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = 0 = u(\ell,t) & t > 0\,. \end{cases}$$

Definimos la siguiente función de una variable real:

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell w^2(x,t)dx\,.$$

Primero observamos que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\int_0^\ell w^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_0^\ell w^2(x,0)dx = 0.$$

Nuestro objetivo es probar que $e(t) \equiv 0$, $\forall t > 0$, que directamente implica $w(x,t) \equiv 0$ y consecuentemente $u_1 \equiv u_2$.

Observamos que $e(t) \ge 0$ siendo la integral de una función positiva; entonces nos queda de probar que $e(t) \le 0$, $\forall t > 0$.

Calculamos la primera derivada de $e(t)$: siendo w es de clase 2, se puede pasar la derivada bajo el siño de integral, así que

$$e'(t) = \int_0^\ell w(x,t)w_t(x,t)dx\,.$$

Utilizando la ecuación satisfecha por w, sale

$$e'(t) = \int_0^\ell w(x,t) w_{xx}(x,t)dx\,,$$

e integrando por partes, aprovechando además las condiciones en la frontera,

$$e'(t) = w(x,t)w_t(x,t)\Big|_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^\ell w_x(x,t)w_x(x,t)dx = -\int_0^\ell w_x^2(x,t)dx \le 0\,.$$

Por lo tanto $e(t) \equiv 0$ y consecuentemente $w(x,t) \equiv 0$, que implica $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. ■

Ejercicio 3.3 *Probad la unicidad de la solución del problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f(x,t) \in C^0(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$, $g(x) \in C^0(\mathbb{R})$, *en la clase de funciones* $v(x,t) \in C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$ *tales que*

$$\int_{\mathbb{R}} \big[v^2(x,t) + v_x^2(x,t) + v_t^2(x,t)\big]dx < +\infty \quad y \quad \lim_{|x|\to\infty} v(x,t) = 0\,,\ \forall t > 0\,.$$

Solución.
Supongamos que el problema tenga dos soluciones u_1 y u_2, y sea $w = u_1 - u_2$. Entonces $w(x,t) \not\equiv 0$ cumple

$$\begin{cases} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0 \\ w(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación satisfecha por w por w misma para obtener

$$0 = \int_{\mathbb{R}} w_t(x,t)w(x,t)dx - \int_{\mathbb{R}} w_{xx}(x,t)w(x,t)dx$$

e integrando por partes nos sale

$$0 = \int_{\mathbb{R}} w_t(x,t)w(x,t)dx + \int_{\mathbb{R}} w_x^2(x,t)dx\,,$$

donde hemos utilizado además que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} w(x,t)w_x(x,t) = 0$. Ahora integramos la anterior identidad entre 0 y t, para cualquier $t > 0$,

$$0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} w_s(x,s)w(x,s)dxds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} w_x^2(x,s)dxds \geq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} w_s(x,s)w(x,s)dxds\,.$$

Gracias al teorema de Tonelli se puede cambiar el orden de integración y, observando que $w_s(x,s)w(x,s) = \frac{1}{2}[w^2(x,s)]_s$, deducimos

$$0 \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t [w^2(x,s)]_s ds dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w^2(x,0)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} w^2(x,t)dx\,,$$

siendo $w(x,0) \equiv 0$. Consecuentemente deducimos que $w(x,t) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\forall t > 0$, que contradice $u_1 \neq u_2$. ■

Ejercicio 3.4 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que existen:*

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}f(x),\qquad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

Probad que la única solución acotada $u(x,t)$ del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & (x\in\mathbb{R},\ t>0),\\ u(x,0)=f(x), & (x\in\mathbb{R}),\end{cases}$$

satisface:

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{f(-\infty)+f(+\infty)}{2}.$$

Solución.
Calculamos la solución utilizando al fórmula de Poisson:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}f(y)dy$$

$$\left[\text{con el cambio } z=\frac{(x-y)}{2\sqrt{t}} \text{ y } dy=-2\sqrt{t}dy\right]=\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}e^{-z^2}f(x-2\sqrt{t}z)dy$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-z^2}f(x-2\sqrt{t}z)dy+\int_{-\infty}^0 e^{-z^2}f(x-2\sqrt{t}z)dy\right].$$

Ahora queremos calcular

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-z^2}f(x-2\sqrt{t}z)dy+\int_{-\infty}^0 e^{-z^2}f(x-2\sqrt{t}z)dy\right];$$

gracias al teorema de Lebesgue (aquí se utiliza que f es acotada) deducimos

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-z^2}\lim_{t\to+\infty}f(x-2\sqrt{t}z)dy+\int_{-\infty}^0 e^{-z^2}\lim_{t\to+\infty}f(x-2\sqrt{t}z)dy\right]$$
$$=\frac{f(-\infty)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2}dy+\frac{f(+\infty)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-z^2}dy=\frac{f(+\infty)+f(-\infty)}{2},$$

ya que

$$\int_{-\infty}^0 e^{-z^2}dz=\int_0^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{3.2}$$

En efecto es bien conocido que la función e^{-z^2} no tiene una primitiva que se pueda representar mediante funciones elementales. De todas formas se puede calcular su integral en todo el eje. Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y consideramos la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy \,.$$

Cambiando a polares deducimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{0}^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} re^{-r^2} drd\theta,$$

donde la r que aparece en la integral es debida al cambio de diferencial. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} re^{-r^2} dr = -\pi e^{-r^2}\Big|_{0}^{+\infty} = \pi \,.$$

Por otro lado,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 .$$

Así deducimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

y aprovechando que e^{-x^2} es una función par sale (3.2).

■

Método de Fourier para el problema mixto

Hará falta una técnica peculiar para resolver el problema mixto asociado a la ecuación del calor, así que lo resumimos brevemente aquí. Nos fijamos en el siguiente problema:

Encontrar una (de hecho la, gracias al Ejercicio 2.4) solución de

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.3}$$

donde $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ *es de clase* $C^0([0,L])$ *y tal que* $f(0) = f(L) = 0$.

Primero, analizamos la ecuación diferencial. La manera más sencilla de resolver la ecuación

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \qquad \text{en } 0 < x < L,\ t > 0,$$

es buscar una solución con variable separadas, es decir

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

con

$$X(x) \in C^2(0,L) \cap C^0[0,L] \qquad \text{y} \qquad T(t) \in C^1(0,+\infty) \cap C^0[0,+\infty)\,.$$

Por lo tanto, deducimos que

$$X(x)T'(t) + X''(x)T(t) = 0 \qquad \text{en } 0 < x < L,\ t > 0,$$

y consecuentemente $X(x)$ y $T(t)$ resuelven, respectivamente,

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad x \in (0,L)$$

y

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0 \qquad t > 0$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ahora añadimos las condiciones de contorno: por un lado pediremos a la X de anularse en la frontera de su dominio de definición y por otro nos hará falta que, en el tiempo 0, T sea igual a un numero positivo (que fijaremos en 1, sin perder de generalidad). Por lo tanto, para $\lambda \in \mathbb{R}$, resolveremos

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & x \in (0, L) \\ X(0) = 0 = X(L) \end{cases} \tag{3.4}$$

y

$$\begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0 & t > 0 \\ T(0) = 1\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Observamos que las condiciones al contorno en el problema asociado a X implican que λ tiene que ser negativo. [12] Además las soluciones de (3.4) están datas por

$$X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad x \in (0, L)\,,$$

para cualquier $A \in \mathbb{R}$ y con la condición

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

En otras palabras, $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, con $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión de valores propios para el operador "menos derivada segunda" y sen $\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ es la autofunción asociada a dicho valor proprio.

Consecuentemente deducimos que la solución de (3.5) está dada por

$$T(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \qquad t > 0\,.$$

[12]Nótese que si λ fuese positivo tendríamos que la solución general de la ecuación diferencial en (3.4) vendría data por

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

para $A, B \in \mathbb{R}$, que es incompatible con las condiciones $X(0) = X(L) = 0$.

Por lo tanto para $A \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $u(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$ es la solución de (3.3) con $f(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Además si $f(x)$ es una combinación lineal (finita) de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, para algunos valores de $n \in \mathbb{N}$, entonces la solución, dada la linealidad de la ecuación del calor, es una combinación lineal de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$.

Para extender esta idea a una función f cualquiera observamos que a cualquier función $f \in L^2(0,L)$ corresponde su desarrollo en serie de Fourier. Queremos probar que, bajo algunas hipótesis de regularidad, el método explicado previamente funciona también si consideramos una combinación lineal infinita de $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ como dato inicial.

Más concretamente, consideramos una función $f \in C^1(0,L)$ tal que $f(0) = f(L) = 0$. Dicha función, aprovechando las condiciones en 0 y L, puede extenderse a una función $f_{imp}(x)$ continua en $(-L,L)$, $2L$–periódica e impar. Por lo tanto $f_{imp}(x)$ admite un desarrollo en Serie de Fourier:

$$f_{imp}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.6}$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Además la función definida por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \tag{3.7}$$

es de clase $C_x^2\big((0,L)\times(0,+\infty)\big) \cap C_t^1\big((0,L)\times(0,+\infty)\big)$ y cumple la ecuación del calor. En efecto, condiderando que $t > 0$, sus coeficientes son tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| n^2 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} < +\infty\,,$$

y consecuentemente se puede derivar término a término la función definida en (3.7) y es facil verificar entonces que $u(x,t)$ cumple la ecuación del calor.

Además, calculando $u(x,t)$ para $t=0$, deducimos que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

es decir que $u(x,t)$ cumple su dato inicial. Siendo $u(x,t)$ una serie de sólo senos, se sigue que la función se anula en la frontera lateral del cilindro.

Nótese que todo tiene sentido si f sólo pertenece a $L^2(0,L)$ la $u(x,t)$ definida en (3.7) tiene sentido "c.t.p." y la $u(x,t)$ es dicha *solución generalizada* de (3.3).

Aplicaremos este método en los siguientes ejercicios, aunque no siempre directamente.

Ejercicio 3.5 *Considérese la función* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x, & si\ x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Encontrad una expresión para la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Solución.
Para resolver este ejercicio sólo nos hace falta aplicar el método explicado previamente.
Definimos una función $\tilde{f}(x)$ como la extensión impar del dato inicial en el intervalo $(-\pi, \pi)$ y calculamos sus coeficientes de Fourier. Nótese que, siendo la función extendida de forma impar, los coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \qquad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

nos saldrán iguales a cero, por ser $\cos(nx)$ y 1 funciones pares. Calculamos entonces

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big(\pi - x\big) \operatorname{sen}(nx) dx \,. \end{aligned}$$

Calculamos una primitiva de la función integrando por partes

$$\int s \operatorname{sen}(ns) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(ns) - \frac{1}{n} s \cos(ns) + c \,, \qquad c \in \mathbb{R} \,,$$

mientras con un cálculo directo nos sale que

$$\int \operatorname{sen}(ns) = -\frac{1}{n} \cos(ns) + c \qquad c \in \mathbb{R} \,.$$

Consecuentemente

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}(nx)dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi\,\mathrm{sen}(nx)dx\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}(nx) - \frac{1}{n}x\cos(nx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}(nx) - \frac{1}{n}x\cos(nx)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&\qquad + \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{n}\cos(nx)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big) - \cancel{\frac{\pi}{2n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)} - \cancel{\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}(n\pi)} + \cancel{\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)} + \cancel{\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big)}\\
&\qquad - \cancel{\frac{\pi}{2n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)} - \cancel{\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)} + \cancel{\frac{\pi}{n}\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)}\Big]\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\,\mathrm{sen}\big(\frac{n\pi}{2}\big).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,}\\ \frac{2}{n^2\pi}\big(-1\big)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}
$$

Manipulando los coeficientes obtenemos que la solución generalizada está dada por

$$
u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,\mathrm{sen}((2n+1)x)e^{-(2n+1)^2t}\,.
$$

■

Ejercicio 3.6 *(Barra con un extremo a temperatura* 0 *y el otro aislado térmicamente). Obtened mediante series de Fourier, una expresión para la solución del problema:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \pi/2,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u_x(\pi/2,t), & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi/2. \end{cases} \tag{3.8}$$

donde $f \in C^1([0,\pi/2])$, *con* $f(0) = 0 = f'(\pi/2)$.

Solución.
Este ejercicio es parecido al anterior. En este caso también buscamos una solución aprovechando que el dato inicial es una función que admite un desarrollo en serie de Fourier. Consideramos $\tilde{f}$, la extensión par de la función f con respecto al eje $x = \frac{\pi}{2}$, es decir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (0,\pi/2)\,, \\ f(\pi - x) & \text{si } x \in (\pi/2,\pi)\,. \end{cases}$$

Entonces $\tilde{f}$ cumple la condición $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = f(0) = 0$. Para aplicar otra vez la fórmula (3.7) y encontrar la solución generalizada de (3.8), extendemos $\tilde{f}$ a $\tilde{f}_{imp}$ en el intervalo $(-\pi,\pi)$, de forma impar, es decir:

$$\tilde{f}_{imp}(x) = \begin{cases} -f(x+\pi) & \text{si } x \in (-\pi,-\pi/2)\,, \\ -f(-x) & \text{si } x \in (-\pi/2,0)\,, \\ f(x) & \text{si } x \in (0,\pi/2)\,, \\ f(\pi - x) & \text{si } x \in (\pi/2,\pi)\,. \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)$$

donde

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_{imp}(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx\,,$$

siendo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_{imp}(x)\cos(nx)dx = 0 \qquad \forall n \geq 0\,,$$

por ser $\tilde{f}_{imp}(x)$ impar. ■

Ejercicio 3.7 *Una función $V : [0, L] \to \mathbb{R}$ se llama "temperatura de equilibrio" cuando:*

$$\lim_{t\to+\infty}[u(x,t) - V(x)] = 0, \ \forall x \in [0, L].$$

Probad que la solución $V(x)$ del problema:

$$\begin{cases} V''(x) = 0, & 0 < x < L, \\ V(0) = \alpha, \ V(L) = \beta, & \end{cases}$$

es una temperatura de equilibrio para el problema de tipo mixto:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ u(0,t) = \alpha, \ u(L,t) = \beta, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

para cualquier $f \in C^1([0, L])$, con $f(0) = \alpha$, $f(L) = \beta$.

Solución.
Primero, vamos a ver quien es $V(x)$. Ya que $V''(x) = 0$ in $(0, L)$, deducimos que $V(x)$ tiene que ser una función lineal, así que

$$V(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L} x \, .$$

Definimos ahora $z(x,t) = u(x,t) - V(x)$ y notamos que $z(x,t)$ verifica:

$$z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = [u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)] - \underbrace{[\partial_t V(x) - \partial_{xx} V(x)]}_{=0} = 0 \, ,$$

así que $z(x,t)$ cumple la misma ecuación de $u(x,t)$. Además

$$\alpha = u(0,t) = V(0) + z(0,t) = \alpha + z(0,t)$$

y

$$\beta = u(L,t) = V(L) + z(L,t) = \beta + z(0,t)$$

y finalmente

$$f(x) = u(x,0) = V(x) + z(0,x)$$

así que $z(x,t)$ es solución de

$$\begin{cases} z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ z(0,t) = 0 = z(L,t) & t \geq 0, \\ z(x,0) = f(x) - V(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{3.9}$$

Observamos que

$$f(x) - V(x)\Big|_{x=0} = f(0) - \alpha = 0 \quad \text{ y } \quad f(x) - V(x)\Big|_{x=L} = f(l) - \beta = 0\,.$$

Entonces $f(x)$ admite un de desarrollo en serie de Fourier de la forma

$$z(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^L \left[f(x) - \alpha - \frac{\beta-\alpha}{L}x\right] \operatorname{sen}\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) dx\,.$$

Ahora nos podemos utilizar que la solución de (3.9) es

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\,.$$

Puesto que f es de clase C^1, deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} |z(x,t)| &\leq \Big|\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big|A_n\Big| e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \\ &\leq e^{-\frac{\pi^2}{L^2}t} \sum_{n=1}^{\infty} \Big|A_n\Big|\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to+\infty} |z(x,t)| = 0\,, \qquad \forall x \in (0,L)\,,$$

y consecuentemente

$$\lim_{t\to+\infty} z(x,t) = \lim_{t\to+\infty} \big[u(x,t) - V(x)\big] = 0\,, \qquad \forall x \in (0,L)\,,$$

que prueba que $V(x)$ es la temperatura de equilibrio. ■

Ejercicio 3.8 *Dadas* $g \in C([0, L])$ *y* $f \in C^1([0, L])$, *con* $f(0) = \alpha$, $f(L) = \beta$, *probad que para el problema de tipo mixto:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x), & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) = \alpha,\ u(L,t) = \beta, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

la función $V(x)$, *solución del problema:*

$$\begin{cases} -V''(x) = g(x), & 0 < x < L, \\ V(0) = \alpha,\ V(L) = \beta, \end{cases}$$

es una temperatura de equilibrio.

Solución.
Para resolver este ejercicio definimos la función

$$z(x,t) = u(x,t) - V(x)\,.$$

Nótese que

$$z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + V_{xx}(x) = 0$$

y así $z(x,t)$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ z(0,t) = 0 & t \geq 0, \\ z(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) - V(x) = \tilde{f}(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.10}$$

con $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(L) = 0$. Por lo tanto la solución del problema (3.10) tiene la forma que ya hemos encontrado en los ejercicios anteriores, es decir

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \operatorname{sen}\big(\frac{n\pi x}{L}\big)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) dx\,.$$

Además siendo tanto la f como la V, por lo menos, de clase $C^1[0,L]$, entonces hay convergencia absoluta de los coeficientes de Fourier así que deducimos que

$$\lim_{t\to+\infty} \big|z(x,t)\big| = \lim_{t\to+\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \right| = \lim_{t\to+\infty} e^{-(\frac{\pi}{L})^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \big|b_n\big| = 0\,.$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = V(x)\,.$$

■

Ejercicio 3.9 *Dadas* $g \in C([0,L])$ *y* $f \in C^1([0,L])$ *con* $f'(0) = \alpha$, $f'(L) = \beta$, *probad que, en general, el problema de tipo mixto:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x), & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = \alpha,\ u_x(L,t) = \beta, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.11}$$

no tiene solución de equilibrio. Estableced una condición que deben verificar α, β, g, L *para la existencia de una solución de equilibrio.*

Solución.
Empezamos observando varias cosas.
Primero, no es obvio que el problema tenga una temperatura de equilibrio. Por lo visto, el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 1, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.12}$$

(es decir (3.11) con $g(x) = 1$ y $f(x) = \alpha = \beta = 0$) tiene como única solución

$$u(x,t) = t$$

y

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = +\infty\,.$$

Además $u(x,t)$ es la única solución de (3.12). En efecto, más en general, supongamos que (3.11) tenga más de una solución, $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$, entonces $z(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ verifica

$$\begin{cases} z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ z_x(0,t) = 0,\ z_x(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ z(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.13}$$

Por lo tanto, si multiplicamos la ecuación en (3.13) por $z(x,t)$ e integramos con respecto a x entre 0 y L, obtenemos, integrando por partes:

$$\int_0^L z_t(x,t)z(x,t)dx + \int_0^L z_x^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_0^L [z^2(x,t)]_t\, dx + \int_0^L z_x^2(x,t)dx = 0\,.$$

Integrando esta identidad con respecto a t entre 0 y un $\tau > 0$ deducimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^L [z^2(x,t)]_t dx d\tau + \int_0^\tau\int_0^L z_x^2(x,t) dx d\tau \\
= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\tau [z^2(x,t)]_t dx d\tau + \int_0^\tau\int_0^L z_x^2(x,t) dx d\tau \\
= \frac{1}{2}\int_0^L z^2(x,\tau)dx - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L z^2(x,0)dx}_{=0} + \underbrace{\int_0^\tau\int_0^L z_x^2(x,t)dxd\tau}_{\geq 0} = 0\,,
\end{aligned}$$

donde, para cambiar el orden de integración, hemos utilizado el Teorema de Tonelli. Por lo tanto, siendo las cantidades en las integrales positivas, para un cualquier $\tau > 0$, $z(x,\tau) \equiv 0$. Esto implica que $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Supongamos ahora que el problema elíptico asociado a (3.11), es decir

$$\begin{cases} -v_{xx}(x) = g(x), & 0 < x < L, \\ v_x(0) = \alpha,\ v_x(L) = \beta, \end{cases} \tag{3.14}$$

tenga una solución. Queremos probar que entonces

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = v(x)\,.$$

En efecto si arrestamos las ecuaciones verificadas por $u(x,t)$ y $v(x)$ deducimos que $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ cumple

$$\begin{cases} w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ w_x(0,t) = 0,\ w_x(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0) = f(x) - v(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.15}$$

Nótese que $w(x,0) \in C^1(0,L)$ y

$$w_x(0,0) = f_x(0) - v_x(0) = \alpha - \alpha = 0\,,$$

and

$$w_x(L,0) = f_x(L) - v_x(L) = \beta - \beta = 0\,.$$

Por lo tanto, adaptando el método explicado previamente para problemas con condiciones de Dirichlet, la única solución de (3.15) esta data por

$$w(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\big(\frac{\pi n\, x}{L}\big) e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos\big(\frac{\pi n\, x}{L}\big) w(x,0)dx \qquad n \geq 0\,,$$

Siendo $w(x,0) \in C^1[0,L]$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \leq \overline{a} < \infty$ y por lo tanto

$$|w(x,t) - \frac{a_0}{2}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big| a_n \cos\big(\frac{\pi n\, x}{L}\big)\Big| e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \leq \overline{a} e^{-\frac{\pi^2}{L^2}\, t}\,,$$

así que, acordando que

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L w(x,0)dx = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - v(x)]dx\,.$$

tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} w(x,t) = \frac{a_0}{2} \qquad \text{uniformemente con respecto a } \ x \in [0,L]\,. \tag{3.16}$$

Nótese que la solución $v(x)$ de (3.14) no es única, sino es única a menos de constantes (véase Ejercicio 4.5 para los detalles de esta prueba), así que entre las infinitas soluciones elegimos la que cumple la condición

$$\int_0^L v(x)dx = \int_0^L f(x)dx\,,$$

así que desde (3.16) deducimos

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = v(x)\,.$$

Por lo tanto una condición suficiente para la existencia de una temperatura de equilibrio es la existencia de una solución para (3.14).

¿Cuando es posible encontrar dicha solución?

Supongamos que (3.14) tenga una: si integramos la ecuación arriba entre 0 y L obtenemos

$$\int_0^L g(x)dx = -\int_0^L v_{xx}(x)dx = -v_x(L) + v_x(0) = -\beta + \alpha\,.$$

Entonces una condición necesaria para que exista l a temperatura de equilibrio es que

$$\int_0^L g(x)dx = \alpha - \beta\,.$$

Por otro lado, cada solución de la ecuación en (3.14) tiene la forma

$$v(x) = \int_0^x \int_0^y (-g(s))dsdy + h(x)\,,$$

con $h(x) = ax + b$, y donde $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $v(x)$ es solución (3.14) si

$$v'(0) = h'(0) = \alpha$$

y

$$v'(L) = \int_0^L (-g(s))ds + h'(L) = \beta\,.$$

Esto implica, desde la primera condición, que

$$a = \alpha$$

y desde la segunda

$$\int_0^L g(s)ds = \alpha - \beta\,. \tag{3.17}$$

Por lo visto, la condición de compatibilidad (3.17) es necesaria y suficiente para encontrar una solución (única salvo constantes) de (3.14). Dicha condición, por lo probado anteriormente, es suficiente para encontrar una temperatura de equilibrio para (3.11). ■

Ejercicio 3.10 *Obtened una expresión para la solución del problema:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 1, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{3.18}$$

Solución.
Se trata de aplicar el método de Fourier a un oportuno problema homogéneo asociado a (3.18).
Llamamos $v(x)$ la solución de

$$\begin{cases} -v_{xx}(x) = 1, & 0 < x < \pi, \\ v(0) = 0 = u(\pi), \end{cases}$$

es decir, integrando dos veces la ecuación satisfecha por $v(x)$,

$$v(x) = \frac{1}{2}x(x-\pi)\,.$$

Por lo tanto definiendo $z(x,t) = u(x,t) - v(x)$ resulta que $z(x,t)$ cumple

$$\begin{cases} z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ z(0,t) = 0,\ z(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ z(x,0) = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}x(x-\pi), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Entonces para escribir una fórmula de representación de $(x,t)z$ (y consecuentemente de $u(x,t)$) hay que desarrollar $z(x,0)$ en serie de Fourier. Nótese que

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [-\frac{1}{2}x(x-\pi)\operatorname{sen}(nx)]dx = 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}$$

entonces

$$z(x,t) = \big(\frac{2}{\pi}+1\big)e^{-t}\operatorname{sen}(x) + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}e^{-n^2t}\operatorname{sen}(nx)$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}x(x-\pi) + \big(\frac{2}{\pi}+1\big)e^{-t}\operatorname{sen}(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}e^{-n^2t}\operatorname{sen}(nx) \\ &= \frac{1}{2}x(x-\pi) + \big(\frac{2}{\pi}+1\big)e^{-t}\operatorname{sen}(x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)^2t}}{(2n+1)^3}\operatorname{sen}((2n+1)x)\,. \end{aligned}$$

■

Ecuaciones Elípticas

Ejercicio 4.1 *Sea* $N \geq 2$ *y* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, 1 < |x| < 2\}$. *Calculad la solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & |x| = 1 \\ u(x) = 1, & |x| = 2. \end{cases}$$

Solución.
Buscamos una solución radial del problema. Observemos que la solución es única gracias al principio del máximo.

Supongamos que $u(x) = v(|x|) = v(r)$, donde

$$|x| = r = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}\,.$$

Siendo

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{x_i x_i} u(x)\,,$$

empezamos calculando $\partial_{x_i} u(x)$ para algún i entre 1 y N. Así tenemos que

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} v(r) = v'(r) \partial_{x_i} r$$

y como

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} r = \partial_{x_i} \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{N} x_j^2} &= \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{\partial_{x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}} \partial_{x_i} \textstyle\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_{x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}} 2x_j \; \delta_{i,j} = \frac{x_i}{r}\,, \qquad \text{si } r \neq 0\,, \end{aligned}$$

siendo $\delta_{i,j}$ la Delta de Kroneker (es decir $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$), deducimos

$$\partial_{x_i} u(x) = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

Consecuentemente

$$\partial_{x_i} u(x) = v'(r)\frac{x_i}{r}\,,$$

y entonces podemos calcular

$$\partial^2_{x_i x_i} u(x) = \partial_{x_i}\left(v'(r)\frac{x_i}{r}\right)$$

$$= v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\frac{1}{r} - v'(r)\frac{x_i}{r^2}\partial_{x_i} r = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\frac{1}{r} - v'(r)\frac{x_i^2}{r^3}\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{x_i x_i} u(x) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left[v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\frac{1}{r} - v'(r)\frac{x_i^2}{r^3}\right] \\ &= v''(r)\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} + v'(r)\frac{N}{r} - v'(r)\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^3}} = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r)\,.\end{aligned}$$

Entonces el Laplaciano en polares está dado por

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) \tag{4.1}$$

para cada $r > 0$, $N \geq 1$. Muchas veces será cómodo escribir el Laplaciano en polares en su forma compacta:

$$\Delta u(x) = \frac{\left(r^{N-1}v'(r)\right)'}{r^{N-1}}\,.$$

Por lo tanto la función armónica radial que buscamos es solución del siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}v'(r)\right)' = 0, & 1 < r < 2, \\ v(1) = 0, \\ v(2) = 1, \end{cases}$$

con $u(x) = v(r)$ y $r = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Consecuentemente $v(r)$ cumple

$$r^{N-1} v'(r) = c_1 \,,$$

con c_1 una constante arbitraria.

Supongamos que $N \neq 2$, entonces integrando la identidad anterior, nos sale

$$v(r) = \frac{c_1}{2-N} r^{2-N} + c_2$$

y gracias a las condiciones al contorno deducimos

$$\begin{cases} \frac{c_1}{2-N} + c_2 = 0, \\ \frac{c_1}{2-N} 2^{2-N} + c_2 = 1, \end{cases}$$

lo cual implica

$$v(r) = -\frac{1}{1-2^{2-N}} r^{2-N} + \frac{1}{1-2^{2-N}} \,.$$

En el caso $N = 2$, repitiendo los argumentos anteriores, deducimos que

$$v(r) = \frac{\log r}{\log 2} \,.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 4.2 *Resolved el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1, & |x| < R = B_R(0), \\ u(x) = 0, & |x| = R, \end{cases} \tag{4.2}$$

con $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Solución.
Buscamos una solución radial: si la encontramos, por el principio de comparación es la única solución. Teniendo en cuenta la expresión del Laplaciano dada por (4.1) resulta que $u(x) = v(r)$ resuelve

$$\begin{cases} -v''(r) - \frac{N-1}{r} v'(r) = 1, & 0 < r < R, \\ v(R) = 0, \\ v'(0) = 0. \end{cases}$$

Observamos que la última condición, $v'(0) = 0$, es consecuencia de la simetría de $v(r)$. Efectivamente, por ser $u(x)$ una solución radial y siendo de clase $C^2(B_R(0))$, hay que tener en cuenta que su primera derivada en cero tiene que ser 0 (si no la solución no sería tampoco de clase $C^1(B_R(0))$).

Nótese que la ecuación diferencial asociada a tal problema puede escribirse como

$$-\big(r^{N-1} v'(r)\big)' = r^{N-1} \qquad 0 < r < R,$$

que integrando entre 0 y un cualquier $r \in (0, R)$ queda

$$-s^{N-1} v'(s)\Big|_0^r = \frac{1}{N} s^N \Big|_0^r,$$

es decir

$$v'(r) = -\frac{1}{N} r\,.$$

Integrando otra vez entre $r \in (0, R)$ y R llegamos a

$$v(R) - v(r) = -\frac{1}{2N}(R^2 - r^2)\,,$$

y consecuentemente
$$u(x) = \frac{1}{2N}(R^2 - |x|^2)\,.$$

Si queremos comprobar que la función encontrada es la solución buscada, es suficiente notar que en el conjunto $|x| = R$, $u(x) = 0$. Además para cada $i = 1, ..., N$,
$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} \frac{1}{2N}(R^2 - |x|^2) = -\frac{x_i}{N}\,,$$
y entonces
$$\partial^2_{x_i x_i} u(x) = -\frac{1}{N}\partial_{x_i} x_i = -\frac{1}{N}\,.$$
Por lo tanto
$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^{N} \partial^2_{x_i x_i} u(x) = -\sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{N} = 1\,,$$
y entonces $u(x)$ es solución de (4.2).

■

Ejercicio 4.3 *Dados $R_2 > R_1 > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, resuelve el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \alpha, & R_1 < \ |x| < R_2, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \beta, & |x| = R_1 \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = \beta, & |x| = R_2, \end{cases} \tag{4.3}$$

con $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Solución.
Empezamos con el caso $N \geq 2$. Utilizando la fórmula del Laplaciano en coordinadas polares resulta que $v(r) = u(x)$ cumple

$$-\big(r^{N-1}v'(r)\big)' = \alpha r^{N-1} \qquad r \in (R_1, R_2)\,. \tag{4.4}$$

Además nótese que la normal al dominio es paralela a la dirección radial, y tiene el mismo sentido en la frontera exterior y el sentido contrario en la frontera interior (véase la Figura 4.9). Así que las condiciones en la frontera de Ω están dada por

$$v'(R_2) = \beta \quad \text{y} \quad -v'(R_1) = \beta\,.$$

Por lo tanto notamos que e problema tiene que satisfacer una condición de compatibilidad: en efecto integrando (4.4) entre R_1 y R_2, deducimos que

$$-R_2^{N-1}v'(R_2) + R_1^{N-1}v'(R_1) = \frac{\alpha}{N}(R_2^N - R_1^N)\,,$$

que implica la siguiente relación entre α, β, R_1 y R_2:

$$-\beta[R_2^{N-1} + R_1^{N-1}] = \frac{\alpha}{N}(R_2^N - R_1^N)\,. \tag{4.5}$$

Para calcular explícitamente la solución de (4.3), integramos la identidad (4.4) entre $r \in (R_1, R_2)$ y R_2, así que

$$v'(r) = \frac{R_2^{N-1}\beta}{r^{N-1}} + \frac{\alpha}{Nr^{N-1}}(R_2^N - r^N) = r^{1-N}R_2^{N-1}\left[\beta + \frac{\alpha R_2}{N}\right] - \frac{\alpha}{N}r\,.$$

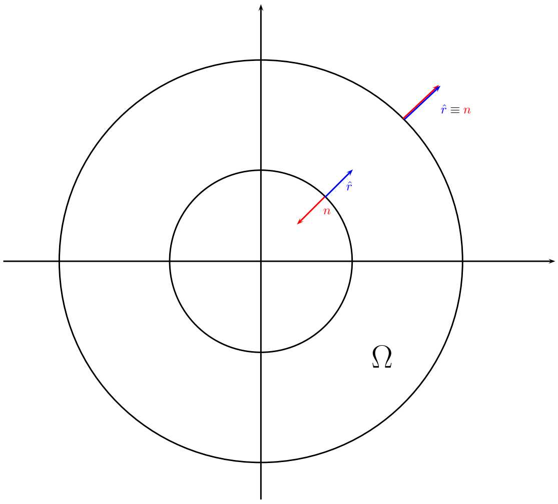

Figura 4.9: El Anillo y las normales en la frontera.

Por lo tanto para $N \geq 3$ la solución está dada por

$$v(r) = \frac{1}{2-N}\left[\frac{\alpha}{N}R_2^N + R_2^{N-1}\beta\right]r^{2-N} - \frac{\alpha}{2N}r^2 + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,,$$

mientras que si $N = 2$

$$v(r) = \left[\frac{\alpha}{2}R_2^2 + R_2\beta\right]\log r - \frac{\alpha}{4}r^2 + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

En ambos casos α y β verifican la identidad (4.5).

Se puede fácilmente verificar que la función encontrada verifica el problema propuesto. ■

Ejercicio 4.4 *Dados $R > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, resuelve el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \alpha, & |x| < R, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = \beta, & |x| = R, \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Solución.
Al encontrar las soluciones del problema nos daremos cuenta que α y β tendrán que cumplir una condición de compatibilidad. Primero, escribimos el problema teniendo en cuenta que el problema tiene una simetría esférica, así que $u(x) = v(r)$, y v cumple

$$\begin{cases} -(r^{N-1}v'(r))' = \alpha r^{N-1}, & 0 < r < R, \\ v'(R) = \beta\,, \\ v'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Integrando entre 0 y r la ecuación satisfecha por v, deducimos que

$$-r^{N-1}v'(r) = \frac{\alpha}{N}r^N\,,$$

es decir

$$v'(r) = -\frac{\alpha}{N}r\,.$$

Nótese que la v es solución si y sólo si

$$v'(R) = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta = -\frac{\alpha}{N}R\,.$$

Las soluciones del problema serán entonces de la forma

$$v(r) = -\frac{\alpha}{2N}r^2 + c$$

con $\beta = -\frac{\alpha}{N}R$ y c una constante arbitraria (es decir que el problema es invariante con respecto a traslaciones verticales). ∎

Ejercicio 4.5 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto, acotado y regular y* $f \in C^1(\overline{\Omega})$*. Probad que una condición necesaria para la existencia de solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

es que se cumpla

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, dS_x = 0.$$

Solución.
El ejercicio es una aplicación del Teorema de la Divergencia [13]. Si integramos la ecuación satisfecha por $u(x)$ en Ω, nos sale que

$$0 = \int_\Omega -\Delta u(x) dx = \int_\Omega -\text{div } \nabla u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS_x \,.$$

Utilizando ahora las condiciones en la frontera de Ω, la última integral es igual a la integral en en la frontera de f, y así la condición

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, dS_x = 0\,,$$

es necesaria para que el dato sea compatible con el problema. ■

[13] Teorema de la divergencia:
Sea Ω *un abierto de clase* C^1 *y* F *un campo* $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*,* $N \geq 2$*. Entonces*

$$\int_\Omega div\, F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n\, dS_x \,, \tag{4.6}$$

siendo n *la normal exterior a* $\partial\Omega$*.*

Ejercicio 4.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y regular y $f \in C^1(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\overline{\Omega})$.*

1. *Dad una condición de compatibilidad para que el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

pueda tener solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

2. *Probad que si existe dicha solución y Ω es conexo, ésta es única salvo constantes aditivas.*

Solución.

1. Actuando como en el ejercicio anterior, integramos la ecuación que cumple $u(x)$ en Ω y aprovechando la condición en la frontera deducimos, gracias al Teorema de la Divergencia, que

$$\int_\Omega g(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)dS_x = \int_{\partial\Omega} f(x)dS_x$$

es decir que la condición necesaria resulta ser

$$\int_\Omega g(x)dx = \int_{\partial\Omega} f(x)dS_x\,.$$

2. Sean u_1, $u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ dos soluciones y definimos $v(x)$ como $v(x) = u_1(x) - u_2(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Aprovechando la linealidad de la ecuación, v cumple

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Es suficiente probar que $\nabla v(x) \equiv 0$, $\forall x \in \Omega$: siendo Ω conexo esto implica que u es constante en Ω. Por lo tanto, multiplicamos la ecuación verificada por $v(x)$ por v misma e integramos en Ω, así que, aplicando la integración por partes

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega -v(x)\Delta v(x)dx &= \int_\Omega -v(x) \text{ div } \nabla v(x)\\ &= \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 - \int_{\partial\Omega} v(x) \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}(x)}_{=0} .\end{aligned}$$

Por la condición

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 = 0$$

deducimos que $|\nabla v(x)|^2 \equiv 0$ y consecuentemente la (eventual) solución del problema es única salvo constante. ■

Ejercicio 4.7 ***[Teorema de Liouville]*** *Probad que toda función armónica en $\mathbb{R}^N$ acotada superiormente (o inferiormente) es constante.*

Solución.
Para este ejercicio vamos a utilizar unas propiedades de las funciones armónicas: la propiedad de la media. [14] Supongamos que u sea superiormente acotada: entonces existe $M = \sup_{\mathbb{R}^N} u(x)$ y consecuentemente $v(x) = u(x) - M \le 0$. Probaremos que v es constante.
Llamamos $\{x_n\}$ una sucesión de puntos tales que $v(x_n) \to 0$ y fijamos $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Además sí $R_n = |x_n - x_0|$, notamos que

$$B_{R_n}(x_0) \subset B_{2R_n}(x_n)\,.$$

Por lo tanto, aprovechando que $v \le 0$, y por (4.7)

$$\begin{aligned} 0 \ge v(x_0) &= \frac{1}{|B_{R_n}(x_0)|}\int_{B_{R_n}(x_0)} v(y)dy \ge \frac{1}{|B_{R_n}(x_0)|}\int_{B_{2R_n}(x_n)} v(y)dy \\ &= \frac{2^N}{|B_{2R_n}(x_0)|}\int_{B_{2R_n}(x_n)} v(y)dy = v(x_n) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty\,. \end{aligned}$$

Entonces $v(x_0)$ es igual a 0 por cualquier x_0 y esto concluye la prueba. ■

[14] Hay varias maneras de averiguar si una función es armónica, una de ellas es la siguiente:
Una función $u(x)$ definida en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es armónica si para cada $x \in \Omega$ y cada r tales que $B_r(x) \subset \Omega$ se verifica

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = \frac{N}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)dy\,. \tag{4.7}$$

Recordamos que $|B_r(x)| = \omega_N r^N$ mientras que $|\partial B_r(x)| = N\omega_N r^{N-1}$, donde ω_N es $|B_1| = \omega_N$.

Ejercicio 4.8 ***[Teorema de convergencia de Harnack]*** *Probad que el límite uniforme en compactos de funciones armónicas en un abierto Ω es una función armónica en Ω.*

Solución.
Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones que convergen localmente uniformemente a u, entonces
$$\forall x \in \Omega \quad u_n(x) \to u(x)\,.$$
Además, siendo u_n armónicas, para cualquier $x_0 \in \Omega$ existe un $r(x_0)$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$, $\forall r < r(x_0)$. Gracias a la propiedad de la media
$$u_n(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} u_n(y)dy\,. \tag{4.8}$$
Para cada $r < r(x_0)$
$$B_r(x_0) \subset \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega\,.$$
Ya que $u_n \to u$ uniformemente en $\overline{B_r(x_0)}$, podemos pasar al limite bajo el signo de integral en (4.8) y así u también verifica la propiedad de la media. Consecuentemente u es armónica. ■

Ejercicio 4.9 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de clase C^1, y $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Probad que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \varepsilon \int_\Omega |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega u^2.$$

Solución.
Dado que el abierto es regular, podemos integrar por partes y deducir

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u = \int_\Omega u \text{ div } \nabla u = \int_\Omega u\Delta u \leq \int_\Omega |u||\Delta u| \, .$$

Aplicando la desigualdad de Young [15] con $p = p' = 2$ con $a = \sqrt{2\varepsilon}|\Delta u|$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}|u|$ concluimos. (Nótese que la desigualdad de Young en el caso $p = p' = 2$ se puede deducir perfectamente desarrollando el cuadrado de un binomio). ■

[15]Recordamos la desigualdad de Young: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \quad \text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Ejercicio 4.10 ***[Desigualdad de Harnack]*** *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$ y K un subconjunto compacto y conexo de Ω. Probad que existe una constante $C > 0$ (dependiente sólo de N,K y Ω) tal que*

$$\max_{x\in K} u(x) \leq C \min_{x\in K} u(x),$$

para toda función no-negativa y armónica en Ω. [16]

Solución.
Probamos, primero, el teorema si $K = \overline{B_r(x_0)}$ con $x_0 \in \Omega$ y r tal que $B_{4r}(x_0) \subset \Omega$. Nótese que para cada $y \in B_r(x_0)$, $B_{3r}(y) \subset \Omega$ (véase Figura 4.10). Entonces, siendo u no negativa para cualquier x_1 y $x_2 \in B_r(x_0)$ resulta:

$$u(x_1) = \frac{1}{|B_r(x_1)|} \int_{B_r(x_1)} u(x)dx \leq \frac{1}{|B_r(x_1)|} \int_{B_{2r}(x_0)} u(x)dx\,,$$

y

$$u(x_2) = \frac{1}{|B_{3r}(x_2)|} \int_{B_{3r}(x_1)} u(x)dx \geq \frac{1}{|B_r(x_2)|} \int_{B_{2r}(x_0)} u(x)dx\,.$$

Por lo tanto para cualquier función armónica no negativa

$$u(x_1) \leq 3^N u(x_2)\,,$$

y consecuentemente

$$u(x_1) = \max_{B_r(x_0)} u(x) \leq 3^N \min_{B_r(x_0)} u(x) = 3^N u(x_2)\,,$$

[16] Nótese que la hipótesis Ω conexo es necesaria. Supongamos que el abierto tuviese dos componentes conexas Ω_1 y Ω_2. Entonces para la función

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_1\,, \\ 0 & \text{si } x \in \Omega_2\,, \end{cases}$$

la desigualdad de Harnack no es cierta en Ω (pero si que es cierta en cada componente conexa).

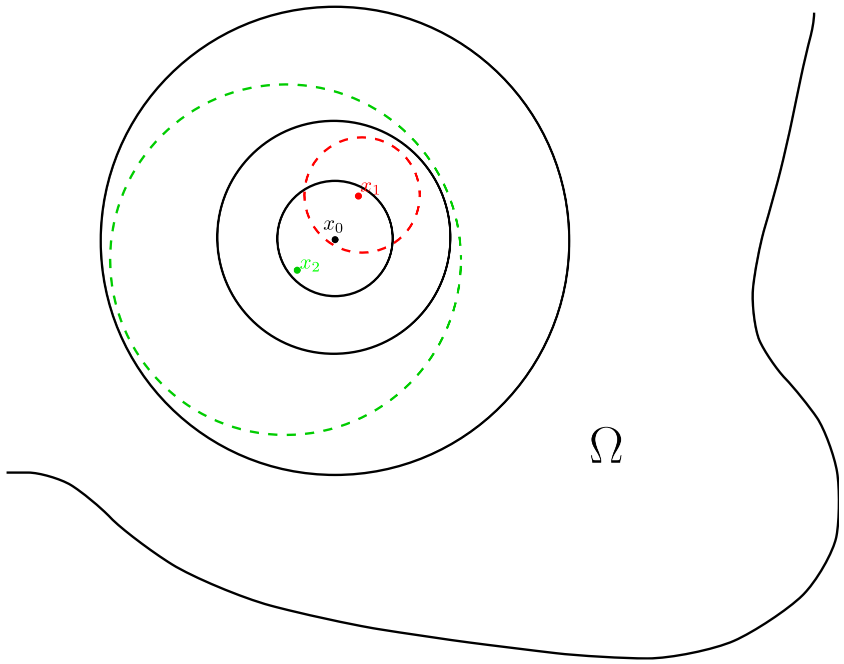

Figura 4.10: Fijado un x_0 y un radio $r > 0$ hemos construido varias bolas de esta forma: En $B_r(x_0)$ hay dos puntos tales que se puedan construir una bola de centro x_1 y radio r (bola roja) contenida en $B_{2r}(x_0)$ que está contenida en $B_{3r}(x_2)$ (bola verde). Todo queda en el interior de $B_{4r}(x_0)$.

y queda probad la desigualdad de Harnack en el caso de una bola. El caso general es consecuencia de la siguiente técnica de recubrimiento: Sea K cualquier subconjunto compacto conexo de Ω. Como $u(x)$ es continua en K, $u(x)$ alcanza su valor máximo y mínimo en K. Consideramos

$$x_M \in K \ : \ u(x_M) = \max_K u(x) := M$$

y

$$x_m \in K \ : \ u(x_m) = \min_K u(x) := m$$

y una curva Γ que une los dos puntos, contenida en K. Fijamos $r > 0$ tal que $B_{4r}(y) \subset \Omega$, $\forall y \in \Gamma$ y, usando que Γ es compacto, fijamos un recubrimiento finito de bolas de radio r, digamos $B_1, ..., B_j$, que recubran toda la curva Γ, y con (véase Figura 4.11

$$M_i = \max_{\overline{B_r^i}} u(x) \qquad m_i = \min_{\overline{B_r^i}} u(x)\,.$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$ la desigualdad de Harnack nos da que

$$M_i \leq 3^N m_i. \tag{4.9}$$

Nuestro objetivo es probar que

$$M \leq c\; m \quad \text{con } \ c = c(N, K, \Omega)\,.$$

Entre las j bolas que recubren Γ cogemos j' con $1 \leq j' \leq j$ de forma que $M = M_1$, $m_{j'} = m$ y para cada $i = 1, ..., j'-1$, $\overline{B}_r^i \cap \overline{B}_r^{i+1} \neq \emptyset$. Por lo tanto es sencillo probar [17] que

$$M_i \geq m_{i+1} \qquad \forall i = 1, ..., j'-1\,. \tag{4.10}$$

Juntando (4.9) y (4.10) deducimos

$$M_1 \leq 3^{j'\,N} m\,.$$

■

17

$$M_i = \max_{\overline{B}_r^i} u \geq \max_{\overline{B}_r^i \cap \overline{B}_r^{i+1}} u \geq \min_{\overline{B}_r^i \cap \overline{B}_r^{i+1}} u \geq \min_{\overline{B}_r^{i+1}} u = m_{i+1}\,.$$

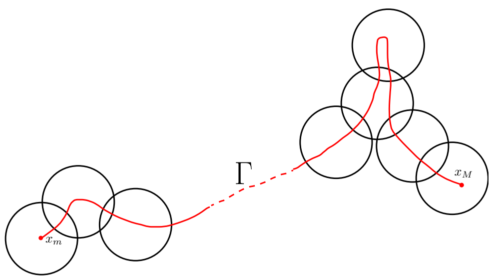

Figura 4.11: El método de recubrimiento de la curva Γ.

Ejercicio 4.11 ***[Teorema de compacidad de Harnack]*** *Sea Ω un abierto y conexo en $\mathbb{R}^N$ y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω verificando*

1. *Existe una función u_0 armónica en Ω tal que $u_0 \leq u_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\{u_n(x_0)\}$ está acotada superiormente.*

Probar (con el teorema de Ascoli-Arzelà) que existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ que converge uniformemente en compactos de Ω.

Solución.
Paso 1. *Probamos que si u es armónica en Ω, entonces*

$$|u_{x_i}| \leq \frac{C_N}{r^{N+1}} \|u\|_{L^1(B_r)}$$

para cada $B_r \subset \Omega$ y cada $i = 1, \ldots, N$ y donde $C_N > 0$.
Gracias a la propiedad de la media la u está dada por

$$u(x) = \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int_{B_{r/2}(x)} u(y)dy\,.$$

Por lo tanto, derivado ambos lados de dicha identidad con respecto a x_i, $i = 1, ..., N$ (se puede llevar la derivación bajo el signo de la integral ya que u es suficientemente regular), deducimos que para cualquier $x_0 \in \Omega$,

$$u_{x_i}(x_0) = \frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u_{y_i}(y)dy\,.$$

Entonces, gracias al teorema de Gauss,

$$\begin{gathered} |u_{x_i}(x_0)| = \left|\frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u_{y_i}(y)dy\right| \\ = \left|\frac{N2^N}{\omega_N r^N} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x_0)} u(y)n_i dS_y\right| \leq \frac{2N}{r} \|u\|_{L^1(\partial B_{\frac{r}{2}}(x_0))}\,. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Observamos además que para cada $y \in \partial B_{\frac{r}{2}}(x_0)$, resulta que $B_{\frac{r}{2}}(y) \subset B_r(x_0) \subset \Omega$ así que

$$|u(x)| \leq \left(\frac{2}{r}\right)^N \frac{1}{\omega_N} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))},$$

y utilizando esta desigualdad en (4.11), deducimos que

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{C_N}{r^{N+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Paso 2. *u es Lipschitz en K con constante que depende sólo de K.*

El Paso 2 es una consecuencia del Paso 1: aplicando un oportuno argumento de recubrimiento de K deducimos que

$$\|u_{x_i}\|_{L^\infty(K)} \leq C\|u\|_{L^1(K)} \qquad \text{con } C = C(K).$$

para cada $K \subset\subset \Omega$.

Paso 3. *Conclusión.*

Sea u_n la sucesión de funciones armónicas considerada. Nótese que u_n puede ser considerada positiva sin perder generalidad (si no se aplica el método siguiente a $\tilde{u_n} = u_n(x) - u_0$). Por el Paso 2 la sucesión es equi–Lipschitziana, y así equicontinua. Además por $ii)$ la sucesión es equiacotada. Por lo tanto el teorema de Ascoli-Arzelà [18] nos permite concluir la prueba. ■

[18] El teorema de Ascoli-Arzelà nos dice lo siguiente:
Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : K \to \mathbb{R}$, con K compacto tal que

1. *(equicontinuidad)* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *such that* $|u_n(x) - u_n(y)| \leq \varepsilon$, *if* $|x - y| \leq \delta$, $\forall n$;
2. *(equiacotación)* $\exists M > 0$ *such that* $\sup_K |u_n(x)| \leq M$, $\forall n$.

Entonces existe una subsusesión u_{n_k} que converge uniformemente en K.

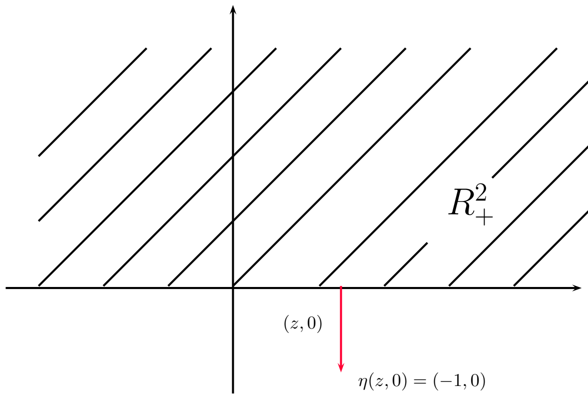

Figura 4.12: $\mathbb{R}^2_+$ y la normal η en $(z,0)$.

Ejercicio 4.12 *a) Determinad la función de Green y el núcleo de Poisson para la ecuación de Laplace en el semiplano superior* $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$.

b) Considerad el problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0, \\ u(x,0) = e^{-\pi x^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Probad que $u(x,y) > 0$, *si* $y > 0$ *y que*

$$\max_{0\leq x,y\leq 1} u(x,y) = 1.$$

Solución.
(a) Dado $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, definimos $\overline{P} = (x,-y)$. Puesto que $\overline{P} \notin \overline{\mathbb{R}^2_+}$, tenemos que la solución fundamental

$$v(z,w) = E(z-x, w+y) = \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{(z-x)^2 + (w+y)^2}$$

(centrada en $\overline{P}$) verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(z,w)}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v(z,w)}{\partial z^2} = 0, & (z,w) \in \mathbb{R}^2_+, \\ v(z,0) = E(z-x,y), & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por tanto, $h_P(z,w) = -E(z-x, w+y)$ verifica

$$\begin{cases} \Delta_{(z,w)} h_P(z,w) = 0, & (z,w) \in \mathbb{R}^2_+, \\ h_P(z,0) = -E(z-x,y), & z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

y la función de Green está dada por

$$\begin{aligned} G((x,y),(z,w)) &= E(z-x,w-y) - E(z-x,w+y) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{\sqrt{(z-x)^2+(w-y)^2}}{\sqrt{(z-x)^2+(w+y)^2}} \right]. \end{aligned}$$

Para calcular el núcleo de Poisson $K((x,y),(z,w)) = \frac{\partial G((x,y),(z,w))}{\partial n}$, usamos que el vector normal exterior n a $\mathbb{R}^2_+$ en $(z,0) \in \partial\mathbb{R}^2_+$ está dado (véase Figura 4.12) por

$$n(z,0) = (0,-1).$$

Así,

$$\begin{aligned} K((x,y),(z,w)) &= \nabla_{(z,w)} G((x,y),(z,0)) \cdot n(z,0) \\ &= \frac{\partial G}{\partial w}((x,y),(z,0)) = \frac{y}{\pi[(x-z)^2+y^2]}. \end{aligned}$$

(b) Por la fórmula de Poisson y el apartado (a):

$$u(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} \frac{y}{\pi[(x-z)^2+y^2]} dz, & y > 0 \\ e^{-\pi x^2}, & y = 0. \end{cases}$$

Claramente, u es positiva y por el principio del máximo:

$$\max_{0 \le x,y \le 1} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial([0,1]\times[0,1])} u(x,y)$$

y es fácil probar que este último vale 1.

■

Ejercicio 4.13 *Para $N \geq 3$, calculad la función de Green para la ecuación de Laplace en*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x| < R,\ x_N > 0\}.$$

Solución. Supongamos $N \geq 3$. Sabemos que $G(x,y) = E(x-y) + h_x(y)$, para todo $x, y \in \Omega$, donde

$$\begin{cases} -\Delta h_x(y) = 0, & y \in \Omega \\ h_x(y) = -E(x-y), & y \in \Omega \end{cases}$$

El problema por tanto es la determinación de la función h_x. Para ello, dada la simetría del dominio, consideramos para cada $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega$ los puntos

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x, \quad \overline{x} = (x_1, x_2, \dots, -x_N),$$

$$\overline{x}^* = (x_1, x_2, \dots, -x_N)^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, -x_N^*),$$

y probamos con

$$h_x(y) = \alpha E(x^* - y) + \beta E(\overline{x} - y) + \gamma E(\overline{x}^* - y).$$

Puesto que los puntos $x^*, \overline{x}, \overline{x}^* \notin \overline{\Omega}$, tenemos que h_x es necesariamente armónica en Ω para cualesquiera constantes α, β, γ. La dificultad está en elegir α, β, γ de forma que

$$\alpha E(x^* - y) + \beta E(\overline{x} - y) + \gamma E(\overline{x}^* - y) = -E(x-y), \quad y \in \Omega \tag{4.12}$$

Recordando (véase el cálculo de la función de Green para una bola $B(0,R)$) que

$$\frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}|x^* - y|^{N-2}} = \frac{1}{|x-y|^{N-2}}, \quad \forall y \in \partial B(0,R),$$

puede probarse que si $y \in \Omega \cap \partial B(0,R)$, entonces

$$\alpha E(x^* - y) + \beta E(\overline{x} - y) + \gamma E(\overline{x}^* - y) - E(x-y) = 0$$

implica

$$\begin{cases} \alpha = -\gamma = \frac{R^{N-2}}{(N-2)\omega_N |x|^{N-2}} \\ \beta = 1. \end{cases}$$

De otra parte, si $y \in \Omega \cap \{x_N = 0\}$, entonces

$$E(x^* - y) = E(\overline{x}^* - y), \quad E(x - y) = E(\overline{x} - y)$$

y así para $\alpha = -\gamma$ y $\beta = 1$ se verifica (4.12). En resumen:

$$G(x, y) = -\frac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\frac{1}{|x - y|^{N-2}} \right.$$

$$\left. - \frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}|x^* - y|^{N-2}} - \frac{1}{|\overline{x} - y|^{N-2}} + \frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}|\overline{x}^* - y|^{N-2}} \right].$$

■

Ejercicio 4.14 *Mediante el método de series de Fourier calculad la solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < A \\ u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,A) = 0, & 0 \le y \le A,\ 0 \le x \le \pi \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi \end{cases} \tag{4.13}$$

donde $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi])$ *y* $f(0) = 0 = f(\pi)$.

Solución. No es difícil probar la siguiente afirmación:

i) Si la ecuación

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < A \tag{4.14}$$

posee una solución u *de la forma* $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, $(x \in (0,\pi), y \in (0,A))$, *con* $X \in \mathcal{C}^2((0,\pi))$, $Y \in \mathcal{C}^2((0,A))$ *y* $X(x) \neq 0 \neq Y(y)$, $\forall (x,y) \in \Omega$, *entonces existe una constante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* X *e* Y *verifican*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi \tag{4.15}$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < A \tag{4.16}$$

ii) Recíprocamente, si existen una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ *y funciones* $X \in \mathcal{C}^2((0,\pi))$, $Y \in \mathcal{C}^2((0,A))$ *verificando (4.15) y (4.16)* [19], *entonces la función* $u(x,y) = X(x)Y(y)$ $((x,y) \in \Omega)$ *es una solución de (4.14).*

Como siempre, a nosotros nos interesará la implicación probada en ii) (y no la probada en i)).

Una vez que hemos demostrado la existencia de infinitas soluciones de (4.14) nos preguntamos si alguna de estas verificará la condición de contorno:

[19] aunque X o Y se anulen en algún punto!

$$\begin{cases} u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,A) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le A.$$

Imponiendo esta condición [20] se llegará a que X e Y deben verificar

$$X(0) = 0 = X(\pi),\ Y(A) = 0,\ X(x) = \frac{f(x)}{Y(0)},\ x \in [0,\pi]$$

De esta forma, hemos observado que (4.13) posee una solución u con la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ (siendo $X \in \mathcal{C}^2((0,\pi)) \cap \mathcal{C}^0([0,\pi])$ y $Y \in \mathcal{C}^2((0,A)) \cap \mathcal{C}^0([0,A])$) si para alguna constante $\lambda \in \mathbb{R}$ existen soluciones X e Y de los problemas

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0,\pi) \\ X(0) = 0 = X(\pi) \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, & 0 < y < A \\ Y(A) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

tales que $Y(0) \neq 1$ y $X(x) = \frac{f(x)}{Y(0)}$, $\forall x \in [0,\pi]$.

Se hace así necesario estudiar para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ los problemas (4.17) y (4.18) poseen solución no trivial. Entonces, el problema (4.17) posee solución no trivial si y solamente si $\lambda = n^2$ con $n \in \mathbb{N}$. Además, en este caso, las soluciones de (4.17) son múltiplos de la función sen nx En otras palabras, $-n^2$ es un valor proprio del operador "derivada segunda" y sen(nx) la autofunción asociada.

Igualmente, para $\lambda = n^2 (n \in \mathbb{N})$, el problema (4.18) tiene soluciones no triviales y éstas son los múltiplos de la función senh $n(A-y)$

Por estas observaciones, llegamos a que cualquier múltiplo de la función sen nx senh $n(A-y)$ es una solución de (4.14) que, además, verifica

$$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,A) = 0, \quad x \in [0,\pi],\ y \in [0,A] \tag{4.19}$$

[20] Suponiendo $Y(0) \neq 0$.

Sin embargo, a menos que f sea un múltiplo de la función $\operatorname{sen} nx$, ésta solución de (4.14) y (4.19) no lo será del problema (4.13) puesto que no se verificará la condición $u(x,0) = f(x)$, $x \in [0,\pi]$.

Como ya es habitual, pensamos entonces si una superposición (finita o infinita) de $\operatorname{sen} nx \operatorname{senh} n(A-y)$ nos dará la solución buscada de (4.13). Así probaremos que *si para $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ con $f(0) = 0 = f(\pi)$, consideramos los coeficientes de Fourier*

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \ \textit{sen}\ nx\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces la función $u : [0,\pi] \times (0,A] \to \mathbb{R}$ definida como

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\textit{senh}\ (nA)}\ \textit{sen}\ nx\ \textit{senh}\ n(A-y) \tag{4.20}$$

para $x \in [0,\pi]$, $y \in (0,A]$, verifica

i) $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi] \times (0,A]) \cap H((0,\pi) \times (0,A))$ *y*

$$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,A) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, 0 < y \le A.$$

ii) $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi] \times [0,A])$ *y* $u(x,0) = f(x)$, *para todo* $x \in [0,\pi]$. *En consecuencia, esta u es la única solución de (4.13).*

En efecto, por ser f de clase C^1, tenemos la convergencia de la serie

$$\sum_{n\ge1} |B_n|$$

y la mayoración

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{\operatorname{senh}\ (nA)} \operatorname{sen} nx \operatorname{senh}\ n(A-y) \le \sum_{n=1}^{+\infty} |B_n| e^{-ny} \le \sum_{n=1}^{+\infty} |B_n| < +\infty.$$

Además, las series de las derivadas parciales formales $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ obtenidas mediante la derivación término a término de la serie que define u

están mayoradas por la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |B_n| e^{-ny}.$$

La convergencia de ésta y el criterio de Weiertrass da que u es armónica en $(0,\pi)\times(0,A)$. El resto de l prueba es fácil con tal que recordemos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \operatorname{sen} nx.$$

■

Ejercicio 4.15 *Probar que el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0, & 0 < x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y) = 0, & x^2 + y^2 = 1, \\ u(0,0) = 1, \end{cases}$$

no posee solución $u \in C^2(\overline{B(0,1)})$.

Solución.
Como el dominio tiene simetría esférica, la solución necesariamente tendrá la misma simetría. Así escribimos la ecuación en polares, es decir: $u(x,y) = v(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y v satisfaciendo

$$\begin{cases} \big(rv'(r)\big)' = 0, & 0 < r < 1, \\ v(1) = 0, \\ \lim\limits_{r \to 0^+} v(r) = 1. \end{cases}$$

De la ecuación deducimos que $rv'(r) = c_1$, con c_1 una oportuna constante. Por lo tanto $v'(r) = \frac{c_1}{r}$ y consecuentemente

$$v(r) = c_2 + c_1 \log r \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

La condición $v(1) = 0$ implica que $c_2 = 0$ y la expresión que queda de v no es compatible con la condición $\lim\limits_{r \to 0^+} v(r) = 1$. ■

Ejercicio 4.16 *Probad que si* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *es abierto y acotado y una solución* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *de*

$$-\Delta u + u^2 = 0,\ \ x \in \Omega$$

alcanza su valor máximo en Ω *entonces* $u \equiv 0$.

Solución.
Como $u^2 \geq 0$, resulta que $-\Delta u \leq 0$, es decir $u(x)$ es subarmónica. Gracias al Principio del Máximo Fuerte para funciones subarmónicas [21], deducimos que si $u(x)$ alcanza su máximo en Ω, entonces es constante (en Ω). Siendo 0 la única constante que cumple la ecuación, el ejercicio esta probado. ■

[21] El Principio del Máximo Fuerte nos dice que:
Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto y conexo y* u *una función verificando*

$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(z)dz\,,$$

para cualquier $B_r(x) \subset\subset \Omega$. *Si existe un punto* $y \in \Omega$ *tal que*

$$u(y) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$$

entonces la función u *es constante en* Ω.

Ejercicio 4.17 *Sea* $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continuamente diferenciable y no-negativa. Supongamos que* $u \in C^2(B_{\mathbb{R}^N}(0,1)) \cap C(\overline{B_{\mathbb{R}^N}(0,1)})$ *es una solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u^2(x) + f(|x|) = 0, & |x| < 1, \\ u(x) = 1, & |x| = 1. \end{cases}$$

Calculad el máximo de u.

Solución.
Queremos probar que el máximo de u es 1, es decir el valor que alcanza en la frontera de la bola. Supongamos que exista un $x_0 \in B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$ tal que u alcance su máximo en dicho punto. Aprovechando que u es regular, en sus puntos de máximo $\Delta u(x_0) \leq 0$; además recordamos que $f \geq 0$. Entonces por la ecuación satisfecha por u deducimos que

$$0 = -\Delta u(x_0) + u^2(x_0) + f(|x_0|) \geq u^2(x_0)\,,$$

lo cual implica $u(x_0) = 0$. ■

Ejercicio 4.18 *Sean* Ω *un subconjunto abierto y acotado en* $\mathbb{R}^N$, $f \in C(\overline{\Omega})$ *y* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función creciente y continua. Probad que el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + g(u(x)) = f(x), & si\ x \in \Omega \\ u(x) = 0, & si\ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tiene a lo más una solución u.

Solución. *Método 1.* Principio del maximo
Sean u_1, u_2 dos soluciones. Probaremos que $v := u_1 - u_2$ es cero. Para ello observemos que verifica

$$\begin{cases} -\Delta v(x) + g(u_1(x)) - g(u_2(x)) = 0, & \text{si } x \in \Omega \\ v(x) = 0, & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos el subconjunto abierto $\Omega_1 := \{x \in \Omega \,/\, v(x) > 0\} = \{x \in \Omega \,/\, u_1(x) > u_2(x)\}$. Probaremos que $\Omega_1 = \emptyset$ por contradicción. Supongamos que $\Omega_1 \neq \emptyset$. Ya que g es creciente, $g(u_1(x)) - g(u_2(x)) \geq 0$, $\forall x \in \Omega_1$ y así

$$\begin{cases} -\Delta v(x) = -g(u_1(x)) + g(u_2(x)) \leq 0, & \text{si } x \in \Omega \\ v(x) = 0, & \text{si } x \in \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Por tanto, $v = u_1 - u_2 \leq 0$ en Ω_1, una contradicción probando que $\Omega_1 = \emptyset$. Análogamente, $\Omega_2 := \{x \in \Omega \,/\, v(x) < 0\} = \{x \in \Omega \,/\, u_1(x) < u_2(x)\} = \emptyset$ y, consecuentemente, $v \equiv 0$.

Método 2. Integración por partes.
Supongamos Ω de clase 1 y supongamos que tenemos dos soluciones u_1 y u_2. Definimos, entonces, la función $w = u_1 - u_2$ la cual queremos demostrar que es idénticamente cero. Nótese que w cumple

$$\begin{cases} -\Delta w(x) + g(u_1(x)) - g(u_2(x)) = 0, & \text{si } x \in \Omega \\ w(x) = 0, & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación por $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ e integramos en Ω para deducir que

$$\int_\Omega -\Delta\big(u_1(x) - u_2(x)\big)\big(u_1(x) - u_2(x)\big) + \int_\Omega [g(u_1(x)) - g(u_2(x))](u_1(x) - u_2(x)) = 0\,.$$

Aplicando la integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 + \int_\Omega [g(u_1(x)) - g(u_2(x))](u_1(x) - u_2(x)) \\ = \int_{\partial\Omega} \nabla w(x) \cdot \nu \, w(x) dS_x \,.\end{aligned}$$

La última integral es cero, ya que $w(x) = 0$ en $\partial\Omega$. Además, como g es no decreciente, entonces $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $[g(s) - g(t)](s - t) \geq 0$, así que

$$\int_\Omega |\nabla w(x)|^2 \leq 0 \,,$$

que implica $w(x) \equiv 0$, ya que $w(x) = 0$ en $\partial\Omega$.
Consecuentemente $u_1(x) - u_2(x) \equiv 0$. ■

Ejercicio 4.19 *Pruébese la Tercera Identidad de Green: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto y acotado en el que es válido el teorema de la divergencia, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $x \in \Omega$, entonces*

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega} u(y)\,\frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y)dS_y - \int_{\partial\Omega} E(x-y)\,\frac{\partial}{\partial n_y} u(y)dS_y,$$

donde la función $E : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ está dada por

$$E(y) = \begin{cases} \dfrac{\log|y|}{2\pi}, & si\ N = 2, \\ -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N |y|^{N-2}}, & si\ N \geq 3 \end{cases} \qquad y \in \mathbb{R}^N$$

y $\frac{\partial}{\partial n_y} = n(y) \cdot \nabla$, con $n(y)$ el vector normal unitario exterior a Ω en $y \in \partial\Omega$ y $\omega_N = |B_1|$.

Solución.
La segunda identidad de Green dice que para cualquier $v, z \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \Big[z(y)\Delta v(y) - v(y)\Delta z(y) \Big] dy = \int_{\partial\Omega} \Big[z(y)\frac{\partial v(y)}{\partial n} - v(y)\frac{\partial z(y)}{\partial n} \Big] dS_y\,.$$

Si fijamos $x \in \Omega$, elegimos $v = u(y)$, $z = E(x-y)$ y aplicamos la segunda identidad de Green en $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$, con $\varepsilon <$dist$(x, \partial\Omega)$, deducimos que (ya que $\Delta E(x-y) = 0$ en Ω_ε, véase Ejercicio 1.8):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\varepsilon} u(y)\Delta E(x-y)dy \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} E(x-y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \Big[E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} \Big] dS_y \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} E(x-y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \Big[E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} \Big] dS_y \\ &\quad + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Big[E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} \Big] dS_y\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Vamos a tomar límites cuando ε tiende a cero. Por el Teorema de Lebesgue,

$$E(x-y)\Delta u(y)\chi_{\Omega_\varepsilon} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} E(x-y)\Delta u(y)\chi_\Omega \quad \text{en } L^1(\Omega)^{22}$$

y así

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} E(x-y)\Delta u(y)dy = \int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)dy. \tag{4.22}$$

Estudiamos ahora las últimas dos integrales en (4.21). Haremos el cálculo sólo para $N \geq 3$ (siendo análogo en el caso $N = 2$). En primer lugar,

$$\partial B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N \,:\, |x-y| = \varepsilon\}$$

y por lo tanto

$$E(x-y)\Big|_{\partial B_\varepsilon(x)} = -\frac{1}{(N-2)\omega_N \varepsilon^{N-2}}$$

así que

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y = -\frac{1}{(N-2)\omega_N\varepsilon^{N-2}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y =$$

$$= -\frac{N\varepsilon}{(N-2)}\frac{1}{N\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.23}$$

pués $\frac{\partial u}{\partial n_y} \in C^1(\Omega)$ implica que

$$\frac{1}{N\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}dS_y \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial u}{\partial n_y}(x)\,.$$

Por otro lado, como $n(y) = \frac{x-y}{\varepsilon}$,

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y}dS_y = \frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{x-y}{|x-y|^N}\cdot\frac{(x-y)}{\varepsilon}dS_y$$

$$= \frac{1}{\omega_N\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS_y = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)dS_y \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u(x). \tag{4.24}$$

Gracias a (4.22), (4.23) y (4.24), tomando límites cuando ε tiende a cero en (4.21) concluimos la fórmula pedida en el ejercicio. ■

[22] Es decir:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \big|E(x-y)\Delta u(y)\chi_{\Omega_\varepsilon} - E(x-y)\Delta u(y)\chi_\Omega\big|dy = 0\,.$$

Bibliografía

[Ca] A. Cañada Villar, *Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, http://www.ugr.es/∼dpto_am/docencia/Apuntes/EDPMatematicas_Canada.pdf

[CF] A. Castro Figueroa, Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley Iberoamericana (1997).

[DF] D.G. De Figueiredo, Análise de Fourier e Equacoes Diferenciais Parciais. Instituto de matemática pura e aplicada (1997).

[Ev] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society (1998).

[Per] I. Peral, *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/libro.pdf

[St] W.A. Strauss, *Partial differential equations. An introduction.* John Wiley & Sons, Inc., New York (1992).

Ejercicios del curso \"Ecuaciones en derivadas parciales\"