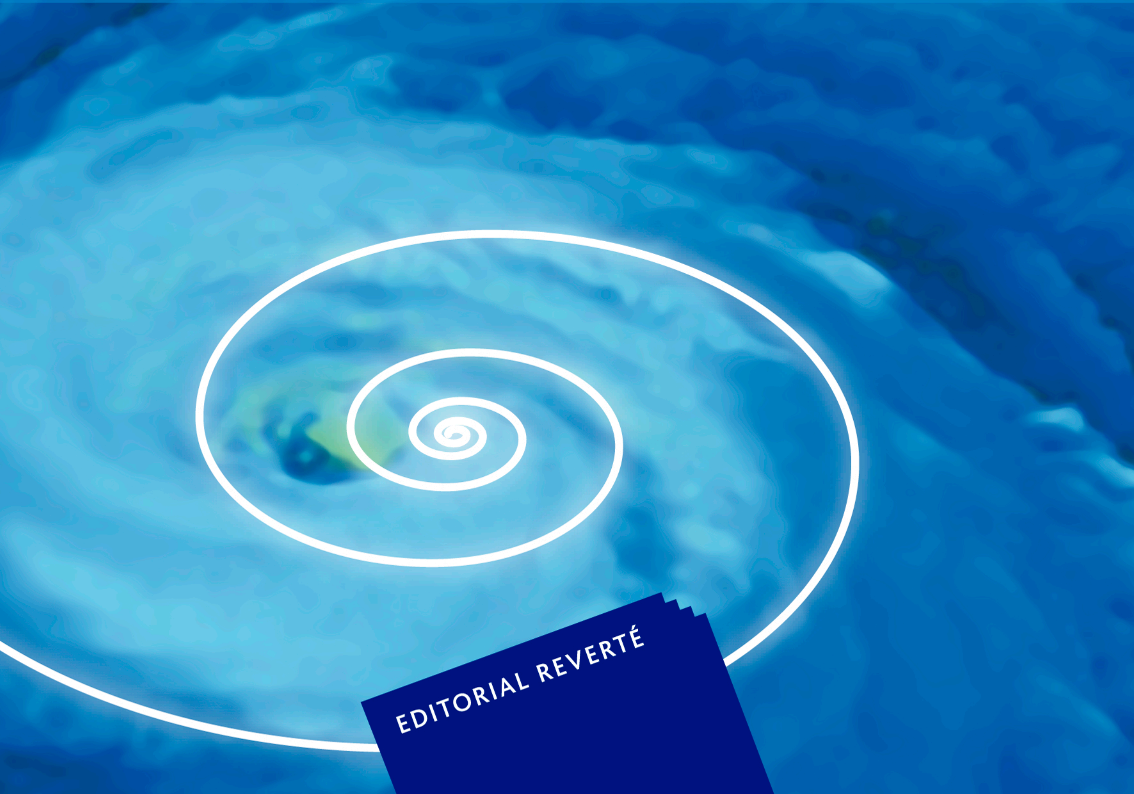
Ecuaciones diferenciales

S. L. Ross



EDITORIAL REVERTÉ

Ecuaciones diferenciales

Shepley L. Ross
UNIVERSITY OF NEW HAMPSHIRE

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
Differential Equations. Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada por:
John Wiley & Sons, Inc., New York, USA

Edición en papel
© Editorial Reverté, S. A., 1992
ISBN: 978-84-291-5113-8

Edición en e-book
© Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN: 978-84-291-9129-5

Versión española por:
Dr. Carlos Navarro Garrido
Doctor en Matemáticas por la Universidad de Oxford

Revisada por:
Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de Análisis matemático. Universidad Complutense de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
E-mail: reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

Prólogo

Esta segunda edición, igual que la primera, es una introducción a los métodos básicos, teoría y aplicaciones de las Ecuaciones diferenciales. Presupone, naturalmente, un conocimiento de Cálculo elemental.

Se ha retenido el estilo detallado que caracterizaba a la primera edición. En realidad, se han conservado sin variación muchas de las secciones de la edición previa, mientras que otras se han vuelto a escribir o se han reordenado con la única intención de hacerlas más claras y asimilables. Del mismo modo que la edición anterior, el texto contiene muchos ejemplos con una solución detallada, habiéndose incluido además alrededor de un centenar de ejercicios nuevos.

El libro queda dividido en dos partes principales. La primera parte (capítulos 1 a 9) trata del material que constituye normalmente un curso de introducción a las Ecuaciones diferenciales ordinarias. La segunda parte (capítulos 8 a 14) da a conocer al lector ciertos métodos especializados y más avanzados, proporcionando una introducción sistemática a la teoría fundamental. El examen del índice revela como se han presentado los temas.

El material estrictamente nuevo en el texto trata de la teoría y métodos adicionales para los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (en los capítulos 7 y 9) y de los sistemas autónomos no lineales (capítulo 13).

Creo que el capítulo 7 proporciona ahora una flexibilidad considerable para el estudio de los sistemas lineales. Damos a continuación varias presentaciones posibles de este capítulo:

1. *Secciones 7.1 y 7.2 (métodos y aplicaciones).*
2. *Secciones 7.1A, 7.3 y 7.4 (teoría y métodos para el caso $n=2$, sin demostraciones).*
3. *Secciones 7.1A, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 y 7.7 (lo mismo que en la presentación 2 más lo siguiente: teoría y métodos para el caso general, incluyendo casi todas las demostraciones).*
4. *Secciones 7.1A, 7.5, 7.6 y 7.7 combinadas juiciosamente con 7.4 (una alternativa a la presentación 3).*

Debiera señalarse que la sección 7.5 es una introducción muy elemental a los sorprendentemente escasos conceptos sobre vectores y matrices que son necesarios para las secciones 7.6 y 7.7, conceptos que no vuelven a utilizarse en el resto del libro. En consecuencia, la sección 7.5 puede omitirse o revisarse si el lector ha estudiado ya álgebra elemental de matrices.

El libro puede usarse como texto en diferentes tipos de cursos. Un más o menos tradicional curso de seis meses podría basarse en el material comprendido en los capítulos que van del 1 hasta la sección 7.4 del capítulo 7, en el caso de que quisieran incluirse aplicaciones elementales. Una versión semestral que omitiese las aplicaciones pero incluyese métodos numéricos y transformadas de Laplace podría basarse en los capítulos 1, 2, 4, 6, 7, 8 y 9. Podría obtenerse también un curso de introducción destinado a conducir a los métodos de las ecuaciones en derivadas parciales de una forma rápida basándose en los capítulos 1, 2 (en parte), 4, 6, 12 y 14 (en parte).

El libro puede utilizarse también como texto para diversos cursos intermedios destinados a estudiantes que han tenido ya un curso de introducción al tema. Uno de tales cursos con interés especial en los métodos adicionales podría basarse en los capítulos 8, 9, 12, 13 y 14. Otro curso intermedio destinado a introducir la teoría fundamental podría basarse en las tres últimas secciones del capítulo 7 y en la totalidad o parte de los capítulos 10 hasta el 14. Es posible conseguir una flexibilidad adicional escogiendo algunos de estos últimos capítulos en diversos órdenes. En particular, podrían intercambiarse los capítulos 13 y 14, combinando juiciosamente las tres últimas secciones del capítulo 7 con el capítulo 11.

Es un placer expresar mi gran aprecio y sincero agradecimiento al Profesor Elmer Haskins de la Universidad del estado de Nueva York, Potsdam, N.Y. y al Mayor Francis W. Farrell de la Academia Militar de los Estados Unidos, West Point, N.Y. Tanto uno como otro leyeron cuidadosamente la totalidad de la Parte 1 cuando estaba en forma de manuscrito, haciendo muchos valiosos comentarios y sugerencias que se tradujeron en una variedad de mejoras, mayores y menores. Quiero también expresar mi aprecio al personal del Departamento de matemáticas de West Point por su cuidadoso trabajo en detectar y corregir errores en la primera edición. Mi agradecimiento especial al Profesor Stanley M. Lukawecki de la Universidad de Clemson, Clemson, S.C., quien leyó con todo cuidado el capítulo 7 y cuyas constructivas sugerencias me ayudaron considerablemente a tomar una decisión final acerca del material y ordenación de este capítulo. Me encuentro también en deuda con él por sus valiosos comentarios y sugerencias referentes a los capítulos de la Parte 2.

Quiero agradecer también a los Profesores F. A. Ficken, de la Universidad de Nueva York, Nueva York, N.Y., y Arnold Seiken, Union College, Schenectady, N.Y., sus consejos, comentarios y sugerencias.

Mi profundo agradecimiento a Solange Abbott por su excelente trabajo al mecanografiar las partes revisadas del manuscrito. Es un placer expresar mi aprecio a Arthur Evans, Marret McCorkle y otros miembros del personal de Xerox College Publishing por su ayuda y cooperación constantes.

Un agradecimiento especial para mi esposa por los ánimos, entendimiento y paciencia recibidos de ella, así como por su considerable ayuda en las muchas tareas diferentes requeridas en la escritura y revisión de un texto. Gracias de nuevo Gin.

SLR

Índice analítico

Parte 2

TEORÍA FUNDAMENTAL Y OTROS MÉTODOS

PARTE 1

Métodos fundamentales y aplicaciones

1

Ecuaciones diferenciales y sus soluciones

El tema de las ecuaciones diferenciales constituye una rama amplia y muy importante de la Matemática moderna. Desde los primeros tiempos del Cálculo, tal tema ha sido un área de gran investigación teórica y aplicaciones prácticas, y aún continúa siéndolo en nuestros días. Dicho todo esto, aparecen varias cuestiones de forma natural. ¿Qué es exactamente una ecuación diferencial y qué significa? ¿Dónde y cómo se originaron las ecuaciones diferenciales y cuál es su utilidad? Enfrentado a una ecuación diferencial, ¿qué se hace con ella, cómo se trata y cuáles son los resultados de tales manipulaciones? Estas cuestiones indican tres aspectos importantes del tema: teoría, método y aplicación. El propósito de este capítulo es dar a conocer al lector los aspectos básicos de la materia y, al mismo tiempo, proporcionarle un breve resumen de los tres aspectos que acabamos de mencionar. Encontraremos así respuestas a las cuestiones generales planteadas, respuestas que irán adquiriendo todo su significado cuando continuemos el estudio de las ecuaciones diferenciales en los capítulos siguientes.

1.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales. Su origen y aplicación

A. *Ecuaciones diferenciales y su clasificación*

DEFINICIÓN

Se llama ecuación diferencial *a una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes respecto a una o más variables independientes.**

♦ EJEMPLO 1.1. Proponemos como ejemplos de ecuaciones diferenciales los siguientes:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \operatorname{sen} t, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{1.4}$$

De la breve lista de ecuaciones diferenciales de este ejemplo, aparece como evidente que las diversas variables y derivadas relacionadas en una ecuación diferencial pueden figurar de muchas maneras. Es necesario, por tanto, algún tipo de clasificación. Para comenzar, clasificaremos las ecuaciones diferenciales según que intervengan una o más variables independientes.

DEFINICIÓN

Se denomina ecuación diferencial ordinaria *a una ecuación diferencial en la que aparecen derivadas ordinarias de una o más variables dependientes respecto a una única variable independiente.*

---

* En conexión con esta definición básica, no incluimos en la clase de ecuaciones diferenciales aquellas ecuaciones que son realmente identidades relativas a derivadas. Por ejemplo, excluimos expresiones tales como

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}, \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \qquad \text{y otras.}$$

♦ EJEMPLO 1.2. Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son ecuaciones diferenciales ordinarias. En la ecuación (1.1) la variable x es la única variable independiente, mientras que la variable y es la variable dependiente. En la ecuación (1.2) la variable t es independiente, mientras que la x es dependiente.

DEFINICIÓN

Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales *a una ecuación diferencial en la que aparecen derivadas parciales de una o más variables dependientes respecto a más de una variable independiente.*

♦ EJEMPLO 1.3. Las ecuaciones (1.3) y (1.4) son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la ecuación (1.3) las variables s y t son independientes y v es la variable dependiente. En la ecuación (1.4) hay tres variables independientes, x, y, z, mientras que u es dependiente.

Clasificamos ahora ambos tipos de ecuaciones diferenciales de acuerdo con el orden más elevado de las derivadas que aparecen en la ecuación.

DEFINICIÓN

Se denomina orden *de una ecuación diferencial al orden de la derivada que lo tenga más alto entre todas las que figuran en dicha ecuación.*

♦ EJEMPLO 1.4. La ecuación diferencial ordinaria (1.1) es de segundo orden, puesto que la derivada más elevada que aparece es una derivada segunda. La ecuación (1.2) es una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (1.3) y (1.4) son de primero y segundo orden, respectivamente.

Continuando con nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales, introducimos ahora el importante concepto de *linealidad,* concepto que nos permitirá hacer una clasificación aún más fina de estas ecuaciones.

DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial ordinaria lineal *de orden n, en la variable dependiente y y la variable independiente x, es una ecuación que puede expresarse en la forma*

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x),$$

donde a_0 no es cero idénticamente.

Obsérvese (1) que solamente aparece la primera potencia de la variable dependiente y y de sus diversas derivadas, (2) que no figuran productos de y con sus derivadas ni de las derivadas entre sí, (3) que no aparecen funciones trascendentes de y ni de sus derivadas.

♦ EJEMPLO 1.5. Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias son lineales. En cada caso y es la variable dependiente, satisfaciéndose evidentemente las observaciones (1) y (2).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x. \tag{1.6}$$

DEFINICIÓN

Para precisar la diferencia entre linealidad y no linealidad damos el siguiente ejemplo.

♦ EJEMPLO 1.6. Las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias *no son lineales:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0. \tag{1.9}$$

La ecuación (1.7) no es lineal ya que figura la segunda potencia de la variable dependiente y en el término $6y^2$. La ecuación (1.8) debe su falta de linealidad a la presencia del término $5(dy/dx)^3$ con la tercera potencia de la derivada primera. Finalmente, la ecuación (1.9) no es lineal debido al término $5y(dy/dx)$ que incluye el producto de la variable dependiente por su derivada primera.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales pueden clasificarse, además, de acuerdo con la naturaleza de los coeficientes de las variables dependientes y sus derivadas. Por ejemplo, la ecuación (1.5) se dice que es una ecuación lineal con *coeficientes constantes*, mientras que la ecuación (1.6) es lineal con *coeficientes variables*.

B. Origen y aplicación de las ecuaciones diferenciales

Después de clasificar de varias maneras las ecuaciones diferenciales, ahora consideraremos brevemente dónde y cómo se originan realmente tales ecuaciones. De este modo obtendremos una indicación de la gran variedad de temas a los que se aplican la teoría y métodos de las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales aparecen en conexión con numerosos problemas que se encuentran en las diversas ramas de la Ingeniería y la Ciencia. Indicamos algunos de estos problemas en la siguiente lista, que podría alargarse hasta llenar muchas páginas.

1. El problema de determinar el movimiento de un proyectil, cohete, satélite o planeta.
2. El problema de determinar la carga o corriente en un circuito eléctrico.
3. El problema de la conducción de calor en una barra o lámina.
4. El problema de determinar las vibraciones de un hilo o una membrana.
5. El estudio de la velocidad de descomposición de una sustancia radiactiva o la tasa de crecimiento de una población.
6. El estudio de las reacciones químicas.
7. El problema de la determinación de curvas que posean ciertas propiedades geométricas.

La formulación matemática de tales problemas da lugar a la aparición de ecuaciones diferenciales. ¿Cómo ocurre esto exactamente? En las situaciones que se consideran en cada uno de los anteriores problemas los objetos involucrados cumplen ciertas leyes científicas. Estas leyes implican diversas velocidades de cambio de una o más magnitudes respecto a otras magnitudes. Recordemos que tales velocidades de cambio se expresan matemáticamente mediante derivadas, por lo que en la formulación de cada una de las situaciones anteriores, las diversas velocidades de cambio se expresan mediante derivadas y las leyes científicas mismas se transforman en cueaciones matemáticas que relacionan derivadas, esto es, ecuaciones diferenciales.

En el proceso de la formulación matemática generalmente es necesario el hacer hipótesis simplificativas, a fin de que sean abordables las ecuaciones diferenciales resultantes. Por ejemplo, si la situación real en un cierto aspecto del problema es de naturaleza relativamente complicada, nos veremos forzados a modificarla considerando una situación aproximada, de naturaleza comparativamente simple, en su lugar. En realidad, ciertos aspectos del problema de poca importancia relativa, han de eliminarse totalmente la mayor parte de las veces. El resultado de tales cambios en la naturaleza real de las cosas significa que la ecuación diferencial resultante responde a una situación idealizada. No obstante, la información obtenida de tal ecuación es del mayor valor para el científico.

Una cuestión natural es ahora la siguiente: ¿Cómo se obtiene información útil de una ecuación diferencial? La respuesta es, en esencia, que se resuelve la ecuación diferencial a fin de obtener una solución, si es posible, y si no lo es, se utiliza la teoría de ecuaciones diferenciales a fin de obtener información *acerca* de la solución. Para entender el significado de esta respuesta, hemos de discutir lo que queremos decir por solución de una ecuación diferencial; que es lo que hacemos en la sección siguiente.

Ejercicios

Clasificar cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales como ordinaria o en derivadas parciales; determinar el orden y la linealidad o no linealidad en cada caso.

1. $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x.$

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 3y = \operatorname{sen} x.$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

4. $x^2\,dy + y^2\,dx = 0.$

5. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0.$

6. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y \operatorname{sen} x = 0.$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x \operatorname{sen} y = 0.$

9. $\dfrac{d^6x}{dt^6} + \left(\dfrac{d^4x}{dt^4}\right)\left(\dfrac{d^3x}{dt^3}\right) + x = t.$

10. $\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2r}{ds^2} + 1}.$

1.2. Soluciones

A. *Naturaleza de las soluciones*

Estudiamos ahora el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de orden n.

DEFINICIÓN

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de orden n

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0, \tag{1.10}$$

donde F es una función real de sus $(n+2)$ argumentos x, y, $\dfrac{dy}{dx}$, ..., $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

1. Sea f una función real definida para todo x en un intervalo real I, que posee derivada n-ésima (y por tanto todas las derivadas de orden inferior) para todo $x \in I$. *La función f es una* solución explícita *de la ecuación diferencial* (1.10) *en el intervalo I si satisface las dos condiciones siguientes:*

$$F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)] \tag{A}$$

está definida para todo $x \in I$, y

$$F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)] = 0 \tag{B}$$

para todo $x \in I$. Es decir, la sustitución de y y sus derivadas por $f(x)$ y sus derivadas correspondientes en (1.10), *reduce esta ecuación a una identidad en el intervalo I.*

2. Se dice que una relación $g(x, y) = 0$ es una solución implícita *de* (1.10), *si esta relación define al menos una función real f de la variable x en un intervalo I, de manera que esta función sea una solución explícita de* (1.10) *en este intervalo.*

3. *Normalmente, ambas soluciones, implícita y explícita, se denominan simplemente* soluciones.

Entonces, hablando informalmente, podemos decir que una solución de la ecuación diferencial (1.10) es una relación, explícita o implícita, entre x e y que no contiene derivadas y que satisface idénticamente (1.10).

♦ EJEMPLO 1.7. La función f definida para todo x real mediante

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x \tag{1.11}$$

es una solución explícita de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{1.12}$$

para todo x real. Observemos primeramente que f está definida y tiene derivada segunda para todo x real. Observemos a continuación que

$$f'(x) = 2 \cos x - 3 \operatorname{sen} x,$$

$$f''(x) = -2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x.$$

Sustituyendo $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ por $f''(x)$ e y por $f(x)$ en la ecuación diferencial (1.12), esta ecuación se reduce a la identidad

$$(-2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x) + (2 \operatorname{sen} x + 3 \cos x) = 0,$$

válida para todo x real. En consecuencia, la función f definida por (1.11) es una solución explícita de la ecuación diferencial (1.12) para todo x real.

♦ EJEMPLO 1.8. La relación

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \tag{1.13}$$

es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.14}$$

en el intervalo I definido por $-5 < x < 5$. En efecto, la relación (1.13) define las dos funciones reales f_1 y f_2 dadas por

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

y

$$f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2},$$

resectivamepnte, para todo $x \in I$ real, y ambas funciones son soluciones explícitas de la ecuación diferencial (1.14) en el intervalo I.

Ilustremos este hecho para la función f_1. Puesto que

$$f_1(x) = \sqrt{25 - x^2},$$

vemos que

$$f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

para todo $x \in I$ real. Sustituyendo y por $f_1(x)$ y dy/dx por $f'_1(x)$ en (1.14) obtenemos la identidad

$$x + (\sqrt{25 - x^2})\left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}\right) = 0 \quad \text{o} \quad x - x = 0,$$

que es válida para todo $x \in I$ real. En consecuencia, la función f_1 es una solución explícita de (1.14) en el intervalo I.

Consideremos ahora la relación

$$x^2 + y^2 + 25 = 0. \tag{1.15}$$

¿Es también una solución implícita de la ecuación (1.14)? Efectuemos la diferenciación implícita de (1.15) respecto a x. Obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Aplicando esta expresión en la ecuación diferencial (1.14) obtenemos la identidad *formal*

$$x + y\left(-\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Por tanto, la relación (1.15) satisface *formalmente* la ecuación diferencial (1.14). ¿Podemos inferir de esto sólo, que (1.15) es una solución implícita de (1.14)? La respuesta es que «no», ya que no podemos asegurar a partir de esto que la relación (1.15) defina ninguna función que sea solución explícita de (1.14) en algún intervalo real I. Todo lo que hemos visto es que (1.15) es una relación entre x e y que, después de diferenciar implícitamente y sustituir, reduce *formalmente* la ecuación diferencial (1.14) a una identidad *formal*. Se denomina solución *formal* y tiene la *apariencia* de solución, pero esto es lo único que sabemos en este momento de nuestra investigación.

Vamos a continuar un poco más allá. Despejando y en (1.15) encontramos que

$$y = \pm\sqrt{-25 - x^2}.$$

Puesto que esta expresión da lugar a valores imaginarios de y para todos los valores reales de x, concluimos que la relación (1.15) no define ninguna función real en ningún intervalo. Entonces la relación (1.15) no es verdaderamente una solución implícita sino meramente una *solución formal* de la ecuación diferencial (1.14).

Al aplicar los métodos de los capítulos siguientes obtendremos frecuentemente relaciones que, puede comprobarse fácilmente que son soluciones formales, al menos. Nuestro principal objetivo será el conseguir familiaridad con los métodos mismos y nos contentaremos a menudo con designar las relaciones así obtenidas como «soluciones», aunque no tengamos seguridad de que sean verdaderamente soluciones implícitas. Si se exige un examen crítico de la situación, se ha de pasar a determinar si las soluciones formales obtenidas son realmente verdaderas soluciones implícitas que definen soluciones explícitas.

Con la finalidad de profundizar en el significado de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones, vamos a examinar ahora la ecuación sencilla del ejemplo siguiente.

♦ Ejemplo 1.9. Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{1.16}$$

La función f_0 definida para todo x real mediante $f_0(x) = x^2$, es una solución de esta ecuación. También lo son las funciones f_1, f_2 y f_3 definidas para todo x real mediante $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2$ y $f_3(x) = x^2 + 3$, respectivamente. De hecho, para cada número real c, la función f_c definida para todo x real mediante

$$f_c(x) = x^2 + c \tag{1.17}$$

es una solución de la ecuación diferencial (1.16). En otras palabras, la fórmula (1.17) define una familia infinita de funciones, una para cada constante real c, y toda función de esta familia es una solución de (1.16). Llamaremos a la constante c de (1.17) *constante arbitraria* o *parámetro* y nos referiremos a la familia de funciones definida por (1.17) como *familia uniparamétrica de solu-*

ciones de la ecuación diferencial (1.16). Escribimos esta familia uniparamétrica de soluciones en la forma

$$y = x^2 + c. \tag{1.18}$$

Aunque es evidente que toda función de la familia definida por (1.18) es una solución de (1.16), no hemos demostrado que la familia de funciones (1.18) incluya a *todas* las soluciones de (1.16). No obstante, indicamos (sin demostración) que así es en este ejemplo; es decir, toda solución de (1.16) es realmente de la forma (1.18) para algún número real c apropiado.

Nota. De la última frase del ejemplo 1.9 no hemos de obtener la conclusión de que toda ecuación diferencial ordinaria de primer orden, admita una familia uniparamétrica de soluciones que contenga *todas* las soluciones de la ecuación diferencial, puesto que esto no es lo que siempre ocurre. En realidad, algunas ecuaciones diferenciales de primer orden no poseen solución (ver ejercicio 7(a) al final de esta sección), mientras que otras tienen una familia uniparamétrica de soluciones y una o más soluciones «extra» diferentes de aquellas de la familia (ver ejercicio 7(b) al final de esta sección).

La ecuación diferencial del ejemplo 1.9 nos capacita para entender mejor el significado analítico de las ecuaciones diferenciales. Dicho brevemente, la ecuación diferencial de ese ejemplo *define funciones* que no son otra cosa que sus soluciones. Veremos que éste es el caso de muchas otras ecuaciones diferenciales, no solamente de primer orden. Podemos decir entonces que una ecuación diferencial es, simplemente, una expresión incluyendo derivadas, que puede servir como medio para definir un cierto conjunto de funciones: sus soluciones. En realidad, muchas de las funciones que empleamos con familiaridad aparecieron originalmente a través de ecuaciones diferenciales que las definían.

Consideremos ahora el significado geométrico de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. Recordaremos primeramente que una función real F puede representarse geométricamente mediante una curva $y = F(x)$ en el plano xy y que el valor de la derivada de F en x, $F'(x)$, puede interpretarse como la pendiente de esa curva en x. En consecuencia, la ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.19}$$

donde f es una función real, hace corresponder una pendiente $f(x, y)$ a todo punto (x, y) en que la función f está definida. Supongamos ahora que la ecuación diferencial (1.19) tiene una familia uniparamétrica de soluciones que puede escribirse en la forma

$$y = F(x, c), \tag{1.20}$$

donde c es la constante arbitraria o parámetro de la familia. Esta familia de funciones, definida por (1.20), se representa geométricamente mediante lo que se llama *familia uniparamétrica de curvas* en el plano xy, las pendientes de las cuales vienen dadas por la ecuación diferencial (1.19). Estas curvas, gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial (1.19), reciben el nombre de *curvas integrales* de dicha ecuación diferencial.

♦ EJEMPLO 1.10. Consideremos de nuevo la ecuación diferencial de primer orden.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1.16}$$

del ejemplo 1.9. Como hemos dicho, esta ecuación puede interpretarse como definición de una pendiente $2x$ en el punto de coordenadas (x, y) para todo x real. Por otra parte, sabemos que la ecuación diferencial (1.16) tiene una familia uniparamétrica de soluciones de la forma

$$y = x^2 + c, \tag{1.18}$$

donde c es la constante arbitraria o parámetro. Entonces, la familia de funciones definida por (1.18) se representa geométricamente mediante una familia uniparamétrica de curvas en el plano xy: la familia de *parábolas* con ecuación (1.18). La pendiente de cada una de estas parábolas viene dada por la ecuación diferencial (1.16) de la familia. Vemos entonces que tales parábolas, con eje común coincidente con el eje de las ordenadas y cada una con pendiente $2x$ en el punto (x, y) para todo x real, son las curvas integrales de la ecuación diferencial (1.16). Ver figura 1.1.

B. *Métodos de solución*

Cuando decimos que resolvemos una ecuación diferencial queremos decir que hallamos una o más de sus soluciones. ¿Cómo se hace esto y qué significa realmente? La mayor parte de este libro está dedicada a los diversos métodos de solución de ecuaciones diferenciales. El método a emplear depende del tipo de ecuación diferencial que se considere y no entraremos en detalles de los métodos específicos por ahora.

Supongamos, no obstante, que resolvemos una ecuación diferencial utilizando uno u otro método. ¿Significa esto necesariamente que hemos hallado una solución explícita f expresada, en la llamada forma cerrada, como suma finita de funciones elementales conocidas? Es decir, y hablando informalmen-

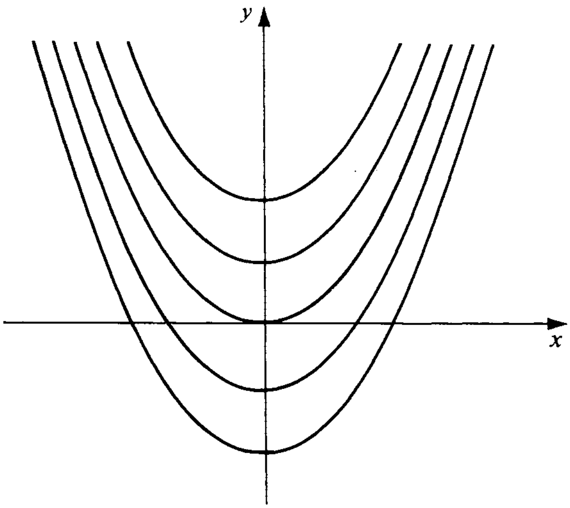


FIGURA 1.1

te, cuando hemos resuelto una ecuación diferencial ¿significa necesariamente que hemos encontrado una «fórmula» para la solución? La respuesta es «no». Comparativamente muy pocas ecuaciones diferenciales poseen soluciones expresables de esa forma; de hecho, una solución en forma cerrada es realmente un lujo en ecuaciones diferenciales. En los capítulos 2 y 4 consideraremos ciertos tipos de ecuaciones que sí poseen soluciones en forma cerrada y estudiaremos los métodos exactos disponibles para hallar estas soluciones deseables. Pero, como acabamos de decir, tales ecuaciones se encuentran realmente en minoría y hemos de considerar lo que significa «resolver» ecuaciones para las que no existen métodos exactos disponibles. Tales ecuaciones se resuelven por diversos métodos aproximados, algunos de los cuales se consideran en los capítulos 6, 8 y 13, y entre los que se encuentran los métodos de series, numéricos y gráficos. ¿Qué proporcionan realmente esos métodos aproximados? La respuesta a esta cuestión depende del propio método en consideración.

Los métodos de series proporcionan soluciones en forma de series infinitas, mientras que los métodos numéricos dan los valores aproximados de las funciones solución para ciertos valores elegidos de las variables independientes; finalmente, los métodos gráficos proporcionan aproximadamente las gráficas de las soluciones (curvas integrales). Ninguno de ellos es deseable como método exacto, debido a la gran cantidad de trabajo que implican y a que los resultados obtenidos con ellos son solamente aproximados, pero si no hay métodos exactos aplicables, no queda otro remedio que utilizarlos. Los problemas de la Ciencia y la Ingeniería modernas dan lugar continuamente a ecuaciones diferenciales a las que no se pueden aplicar los métodos exactos, por lo que los métodos aproximados tienen cada día más importancia.

Ejercicios

1. Demostrar que cada una de las funciones definidas en la columna I es una solución de la ecuación diferencial correspondiente en la columna II para cada intervalo $a < x < b$ del eje x.

	I	II
(a)	$f(x) = x + 3e^{-x}$	$\dfrac{dy}{dx} + y = x + 1$
(b)	$f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$
(c)	$f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2$
(d)	$f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(1 + x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

2. (a) Demostrar que $x^3 + 3xy^2 = 1$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$ en el intervalo $0 < x < 1$.

   (b) Demostrar que $5x^2y^2 - 2x^3y^2 = 1$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3y^3$ en el intervalo $0 < x < \dfrac{5}{2}$.

3. (a) Demostrar que toda función f definida por

$$f(x) = (x^3 + c)e^{-3x},$$

donde c es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}.$$

(b) Demostrar que toda función f definida por

$$f(x) = 2 + ce^{-2x^2},$$

donde c es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$$

4. (a) Demostrar que toda función f definida por $f(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

(b) Demostrar que toda función g definida por $g(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-2x}$, donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias, es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0.$$

5. (a) Para ciertos valores de la constante m, la función definida por $f(x) = e^{mx}$ es una solución de la ecuación diferencial.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0.$$

Determinar todos esos valores de m.

(b) Para ciertos valores de la constante n, la función g definida por $g(x) = x^n$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 10x\frac{dy}{dx} - 8y = 0.$$

Determinar todos esos valores de n.

6. (a) Demostrar que la función f definida por $f(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^x + 4xe^{-2x}$$

y también la condición $f(0) = 5$.

(b) Demostrar que la función f definida por $f(x) = 3e^{2x} - 2xe^{2x} - \cos 2x$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = -8 \operatorname{sen} 2x$$

y también las condiciones $f(0) = 2$ y $f'(0) = 4$.

7. (a) Demostrar que la ecuación diferencial de primer orden

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 1 = 0$$

no tiene soluciones (reales).

(b) Demostrar que la ecuación diferencial de primer orden

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4y = 0$$

posee una familia uniparamétrica de soluciones de la forma $f(x) = (x + c)^2$, donde c es una constante arbitraria, más la solución «extra» $g(x) = 0$ que *no* es un miembro de esta familia $f(x) = (x + c)^2$ *cualquiera* que sea la elección de la constante c.

1.3. Problemas con condiciones iniciales, problemas con condiciones de contorno y existencia de soluciones

A. *Problemas con condiciones iniciales y problemas con condiciones de contorno*

Comenzaremos esta sección considerando el problema sencillo del ejemplo siguiente.

♦ EJEMPLO 1.11

PROBLEMA. Hallar una solución f de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{1.21}$$

de modo que en $x = 1$ esta solución tenga el valor 4.

EXPLICACIÓN. Hemos de asegurarnos en primer lugar de que entendemos completamente este problema. Buscamos una función real f que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. La función f ha de verificar la ecuación diferencial (1.21); es decir, la función f ha de ser tal que $f'(x) = 2x$ para todo x real en un intervalo real I.
2. La función f ha de tener el valor 4 en $x = 1$; esto es, la función f ha de ser tal que $f(1) = 4$.

NOTACIÓN. El problema enunciado puede expresarse en la siguiente notación abreviada:

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

$$y(1) = 4.$$

En esta notación podemos considerar que y representa la solución deseada. Entonces la propia ecuación diferencial representa evidentemente la condición 1, mientras que la condición 2 puede expresarse en la forma $y(1) = 4$. Más concretamente, la notación $y(1) = 4$ afirma que la solución y buscada ha de tener el valor 4 en $x = 1$, es decir, $y = 4$ para $x = 1$.

SOLUCIÓN. Vimos en el ejemplo 1.9 que la ecuación diferencial (1.21) tiene una familia uniparamétrica de soluciones que escribimos en la forma

$$y = x^2 + c, \tag{1.22}$$

donde c es una constante arbitraria, y que cada una de estas soluciones satisfacía la condición 1. Vamos a intentar ahora determinar la constante c de manera que (1.22) satisfaga la condición 2, esto es, $y = 4$ para $x = 1$. Sustituyendo $x = 1$, $y = 4$ en (1.22), obtenemos $4 = 1 + c$ y, por tanto, $c = 3$. Sustituyendo ahora el valor $c = 3$ así determinado en (1.22), obtenemos que

$$y = x^2 + 3,$$

es una solución de la ecuación diferencial (1.21) que posee el valor 4 en $x = 1$. Con otras palabras, la función f definida por

$$f(x) = x^2 + 3,$$

verifica las dos condiciones del problema.

Comentario sobre la condición 2 y su notación. En un problema de este tipo, la condición 2 se considera como una *condición suplementaria* que ha de satisfacer también la solución de la ecuación diferencial. La notación abreviada $y(1) = 4$ que hemos utilizado para expresar esta condición es en cierto modo indeseable, pero tiene las ventajas de ser usual y conveniente.

En la aplicación de las ecuaciones diferenciales, tanto de primer orden como de órdenes más elevados, los problemas que se encuentran con más frecuencia son semejantes al del ejemplo introductorio en que incluyen una ecuación diferencial, y una o más condiciones suplementarias que ha de verificar la solución de la ecuación dada. Si todas las condiciones suplementarias asociadas se refieren a un valor x, el problema se denomina *problema con condiciones iniciales* (o problema con condiciones de contorno en un punto). Si las condiciones hacen referencia a dos valores diferentes de x, el problema recibe el nombre de *problema con condiciones de contorno en dos puntos* (o simplemente problema con condiciones de contorno). Ilustraremos estos conceptos con algunos ejemplos, y a continuación consideraremos con detalle uno de estos problemas. En lo que concierne a la notación, emplearemos generalmente para las condiciones suplementarias una notación abreviada similar a la utilizada en el ejemplo 1.11.

♦ EJEMPLO 1.12

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$
$$y(1) = 3,$$
$$y'(1) = -4.$$

Este problema consiste en hallar una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

que tenga el valor 3 en $x = 1$ y cuya primera derivada posea el valor -4 en $x = 1$. Ambas condiciones se refieren a un solo valor de x, $x = 1$. Nos encontramos, por tanto, ante un problema con condiciones iniciales. Veremos posteriormente que admite una solución única.

♦ EJEMPLO 1.13

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$
$$y(0) = 1,$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$$

En este problema buscamos de nuevo una solución de la misma ecuación diferencial, pero que esta vez tome el valor 1 en $x = 0$ y el valor 5 en $x = \pi/2$. Es decir, la condición hace referencia a *dos* valores diferentes de x, 0 y $\pi/2$, por lo que tenemos un problema con condiciones de contorno (dos puntos). Este problema posee también una solución única; sin embargo, el problema

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$
$$y(0) = 1,$$
$$y(\pi) = 5,$$

no tiene en absoluto solución. Este hecho simple puede llevar a la conclusión correcta de que no han de tomarse a la ligera los problemas con condiciones de contorno.

Volveremos ahora a una consideración más detallada del problema con valores iniciales en el caso de una ecuación diferencial de primer orden.

DEFINICIÓN

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.23}$$

donde f es una función continua de x e y en un dominio * *D del plano xy, y sea (x_0, y_0) un punto de D.* El problema con valores iniciales *asociado a* (1.23) *consiste en hallar una solución ϕ de la ecuación diferencial* (1.23),

* Un *dominio* es un conjunto abierto y conexo. Para aquellos que no estén familiarizados con tales conceptos, D puede considerarse como el interior de alguna curva plana simple y cerrada.

definida en un intervalo real que contenga a x_0 y que satisfaga la condición inicial

$$\phi(x_0) = y_0.$$

En la notación abreviada corriente, este problema con condiciones iniciales puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Para resolverlo, hemos de encontrar una función ϕ que no solamente satisfaga la ecuación diferencial (1.23), sino que satisfaga también la condición inicial de tomar el valor y_0 cuando x tome el valor x_0. La interpretación geométrica de la condición inicial y, por tanto, del problema completo, se comprende fácilmente. La gráfica de la solución deseada ϕ ha de pasar por el punto de coordenadas (x_0, y_0). Es decir, interpretado geométricamente, el problema con condiciones iniciales consiste en hallar una curva integral de la ecuación diferencial (1.23) que pase por el punto (x_0, y_0).

El método de hallar realmente la solución deseada ϕ depende de la naturaleza de la ecuación diferencial del problema, esto es, de la forma de $f(x, y)$. Ciertos tipos especiales de ecuaciones diferenciales poseen una familia uniparamétrica de soluciones cuya ecuación se puede hallar siguiendo procedimientos determinados (ver capítulo 2). Si la ecuación diferencial del problema pertenece a alguno de tales tipos especiales, primero se obtiene la ecuación de su familia uniparamétrica de soluciones y a continuación se aplica la condición inicial a esta ecuación, a fin de hallar una solución «particular» ϕ que satisfaga el problema completo. Explicaremos con más precisión esta situación en el próximo párrafo. No obstante, antes de pasar a ello, hemos de observar que, en general, no puede hallarse la ecuación de una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial, por lo que se ha de recurrir a métodos aproximados (ver capítulo 8).

Supongamos ahora que puede determinarse la ecuación

$$g(x, y, c) = 0 \tag{1.24}$$

de una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial del problema. Entonces, puesto que la condición inicial exige que $y = y_0$ en $x = x_0$, sustituimos estos valores de x e y en (1.24) obteniéndose

$$g(x_0, y_0, c) = 0.$$

Despejando c en esta ecuación, obtenemos en general un valor particular, al que designaremos por c_0. Sustituyendo ahora en (1.24) la constante arbitraria c, por la constante particular c_0, obtenemos la solución particular.

$$g(x, y, c_0) = 0.$$

La solución particular explícita que satisface las dos condiciones del problema (ecuación diferencial y condición inicial), se determina a partir de la implícita anterior, si es posible.

Ya hemos resuelto un problema con condiciones iniciales en el ejemplo 1.11. Damos ahora otro ejemplo con la finalidad de ilustrar más completamente procedimientos y conceptos.

♦ EJEMPLO 1.14. Resolver el problema con condiciones iniciales

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \tag{1.25}$$

$$y(3) = 4, \tag{1.26}$$

sabiendo que la ecuación diferencial (1.25) posee una familia uniparamétrica de soluciones que puede escribirse en la forma

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{1.27}$$

La condición (1.26) significa que buscamos la solución de (1.25) en la que $y = 4$ para $x = 3$. En consecuencia, la pareja de valores (3,4) ha de satisfacer la relación (1.27). Sustituyendo por estos valores de y y x en (1.27) obtenemos

$$9 + 16 = c^2 \quad \text{o} \quad c^2 = 25.$$

Aplicando ahora este valor de c^2 en (1.27) tenemos

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Despejando y obtenemos

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Es evidente que hay que elegir el signo positivo para que y tenga el valor $+4$ en $x = 3$. Entonces la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \qquad -5 < x < 5,$$

es la solución del problema. En la notación abreviada usual, escribimos esta solución como $y = \sqrt{25 - x^2}$.

B. Existencia de soluciones

En el ejemplo 1.14 fuimos capaces de encontrar una solución para el problema en consideración. Pero, ¿poseen soluciones todos los problemas con condiciones iniciales y con condiciones de contorno? Ya hemos respondido negativamente a esta cuestión, puesto que vimos que el problema

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

$$y(0) = 1,$$

$$y(\pi) = 5,$$

mencionado al final del ejemplo 1.13 no tiene solución. Se plantea entonces el problema de la *existencia* de soluciones: dado un problema con condiciones iniciales o de contorno, ¿posee realmente una solución? Vamos a considerar la cuestión para el problema con condiciones iniciales definido en la página 19. En este caso podemos dar una respuesta precisa. Todo problema con condiciones iniciales, que satisfaga la definición de la página 19, posee *al menos una* solución.

Pero ahora se plantea otra cuestión, la cuestión de la *unicidad*. ¿Posee tal problema *más de una* solución? Vamos a considerar el problema

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3},$$

$$y(0) = 0.$$

Se puede comprobar que las funciones f_1 y f_2 definidas, respectivamente, por

$$f_1(x) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ real};$$

y

$$f_2(x) = (\tfrac{2}{3}x)^{3/2}, \quad x \geq 0; \qquad f_2(x) = 0, \quad x \leq 0;$$

son *ambas* soluciones de este problema. De hecho, este problema posee infinitas soluciones. La respuesta a la cuestión de la unicidad es clara: tal como se ha planteado, el problema con condiciones iniciales no necesita poseer una solución *única*. A fin de asegurar la unicidad, han de imponerse, ciertamente, algunas condiciones adicionales. Éste es el contenido del teorema 1.1 que enunciamos a continuación.

TEOREMA 1.1. Teorema básico de existencia y unicidad

HIPÓTESIS. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.28}$$

donde

1. *La función f es una función continua de x e y en un dominio D del plano xy, y*

2. *La derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es también una función continua de x y de y en D, y sea (x_0, y_0) un punto de D.*

CONCLUSIÓN. *Existe una solución única ϕ de la ecuación diferencial* (1.28), *definida en un intervalo $|x - x_0| \leq h$, donde h es suficientemente pequeño, que satisface la condición*

$$\phi(x_0) = y_0. \tag{1.29}$$

Observaciones explicativas. Este teorema básico es el primer teorema que hemos encontrado en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Intentaremos, en consecuencia, explicar con detalle su significado.

1. Es un *teorema de existencia y unicidad.* Esto quiere decir que es un teorema que nos dice que bajo ciertas condiciones (enunciadas en la hipótesis) algo *existe* (la solución descrita en la conclusión) y es *única* (hay *solamente una* de tales soluciones). El teorema no da indicación alguna de *cómo* hallar esta solución, sino que meramente nos dice que el problema *posee* solución.

2. La *hipótesis* se refiere a las condiciones que han de cumplir las cantidades implicadas. Trata con dos objetos: la ecuación diferencial (1.28) y el punto (x_0, y_0). En lo que concierne a la ecuación diferencial (1.28), la hipótesis requiere que *tanto* la función f *como* la función $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (obtenida diferenciando $f(x, y)$ parcialmente respecto de y) sean continuas en un dominio D del plano xy. En lo que concierne al punto (x_0, y_0), éste ha de ser un punto de este mismo dominio D donde f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ tienen el comportamiento apropiado (continuidad).

3. La *conclusión* nos dice qué es lo que podemos asegurar cuando se satisfacen las hipótesis establecidas. Nos dice que podemos asegurar que

existe una y sólo una solución ϕ de la ecuación diferencial, definida en un intervalo, $|x - x_0| \leq h$, con centro en x_0, la cual toma el valor y_0 cuando x toma el valor x_0. Es decir, asegura que, bajo las hipótesis hechas para $f(x, y)$, el problema con *condiciones iniciales*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0,$$

posee una *solución única* válida en un intervalo alrededor del punto inicial x_0.

4. Se omite la *demostración* del teorema. Se demuestra con hipótesis menos restrictivas en el capítulo 10.

5. El *valor* de un teorema de existencia puede ser digno de un poco de atención. ¿Qué utilidad tiene, podría uno preguntarse, si no nos dice cómo obtener la solución? La respuesta a esta cuestión es muy simple: un teorema de existencia nos dice que *hay una* solución que buscar. Tendría poco sentido gastar energía, tiempo y hasta dinero, buscando una solución que realmente no existiera. En cuanto al valor de la unicidad, tendría igualmete poco sentido el desperdiciar tiempo y energía hallando una solución particular, solamente para enterarse más tarde que había otras y que la que se ha encontrado no era la que se necesitaba.

Hemos incluido esta discusión, más bien larga, con la esperanza de que el estudiante, que probablemente no ha encontrado nunca un teorema de este tipo, obtenga una idea más clara de lo que realmente significa este importante teorema. Esperamos además que esta discusión le ayudará a analizar teoremas que encontraremos en el futuro dentro de este libro, o que él pueda encontrar en otras partes. Consideramos ahora dos ejemplos sencillos que ilustran el teorema 1.1.

◆ EJEMPLO 1.15. Consideremos el problema con condiciones iniciales o problema de valores iniciales, como lo denominaremos a partir de ahora,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2,$$

$$y(1) = 3.$$

Vamos a aplicar el teorema 1.1. Primeramente comprobaremos las hipótesis. Aquí $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$. Las dos funciones, f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, son continuas en todo dominio D del plano xy. La condición inicial $y(1) = 3$ significa que $x_0 = 1$ e $y_0 = 3$, y el punto $(1, 3)$ pertenece ciertamente a alguno de tales dominios D. Se verifican, por tanto, todas las hipótesis y la conclusión es válida; es decir, existe una solución única ϕ de la ecuación diferencial $dy/dx = x^2 + y^2$, definida en un intervalo $|x - 1| \leq h$ alrededor de $x_0 = 1$, que satisface la condición inicial de que $\phi(1) = 3$.

♦ EJEMPLO 1.16. Consideremos los dos problemas:

1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}},$$
$$y(1) = 2,$$

2.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}},$$
$$y(0) = 2.$$

Aquí

$$f(x, y) = \frac{y}{x^{1/2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Estas funciones son ambas continuas, *excepto* para $x = 0$ (es decir, a lo largo del eje y). En el problema 1, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. El cuadrado de lado 1 con centro en $(1, 2)$ *no* contiene al eje y, por lo que f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ satisfacen las hipótesis requeridas en su interior, el cual puede tomarse como el dominio D del teorema 1.1 al que ciertamente pertenece el punto $(1, 2)$. Podemos decir, en consecuencia, que el problema 1 admite una solución única definida en un intervalo suficientemente pequeño alrededor de $x_0 = 1$.

Consideremos ahora el problema 2. Aquí $x_0 = 0$, $y_0 = 2$. En este punto no son continuas ni f ni $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Con otras palabras, el punto $(0,2)$ no puede pertenecer a un dominio D donde se satisfagan las hipótesis requeridas. *No* podemos, en consecuencia, concluir, basándonos en el teorema 1.1, que el problema 2 posea solución. *No* estamos diciendo que no posea una, sino simplemente que el teorema 1.1 no proporciona información alguna.

Ejercicios

1. Demostrar que

$$y = 4e^{2x} + 2e^{-3x}$$

es una solución del problema de valores iniciales

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0,$$
$$y(0) = 6,$$
$$y'(0) = 2.$$

¿Es $y = 2e^{2x} + 4e^{-3x}$ también una solución de este problema? Explicar la razón.

2. Sabiendo que cada solución de

$$\frac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}$$

Puede escribirse en la forma $y = (x^2 + c)e^{-x}$, para una elección conveniente de la constante arbitraria c, resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = y = 2xe^{-x}$, $y(0) = 2$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2xe^{-x}$, $y(-1) = e + 3$.

3. Sabiendo que cada solución de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 12y = 0$$

puede escribirse en la forma

$$y = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x},$$

para una elección conveniente de las constantes arbitrarias c_1 y c_2, resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 12y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 6$.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 12y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 6$.

4. Cada solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

puede escribirse en la forma $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$, para una elección conveniente de las constantes arbitrarias c_1 y c_2. Utilizando esta información, demostrar que los problemas de contorno (a) y (b) poseen solución, mientras que (c) no.

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y(\pi/2) = 1.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(\pi/2) = -1.$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y(\pi) = 1.$

5. Sabiendo que cada solución de

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6x \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

puede escribirse en la forma $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$, para una elección conveniente de las constantes arbitrarias c_1, c_2 y c_3, resolver el problema de valores iniciales que consta de la ecuación anterior más las tres condiciones

$$y(2) = 0, \qquad y'(2) = 2, \qquad y''(2) = 6.$$

6. Aplicar el teorema 1.1 para demostrar que cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales posee una solución única definida en un intervalo suficientemente pequeño $|x - 1| \leq h$ alrededor de $x_0 = 1$:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{sen} y,\quad y(1) = -2.$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x-2},\quad y(1) = 0.$

7. Considerar el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y,$$

$$y(2) = 5,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son ambos polinomios de tercer grado en x. ¿Posee este problema una solución única en algún intervalo $|x-2| \leq h$ alrededor de $x_0 = 2$? Explicar la razón.

8. En la página 22 enunciamos el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = y^{1/3},$$

$$y(0) = 0,$$

y dijimos que poseía infinitas soluciones.

(a) Comprobar que esto es lo que realmente ocurre, demostrando que

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ [\frac{2}{3}(x-c)]^{3/2}, & x \geq c, \end{cases}$$

es una solución del problema para todo número real $c \geqslant 0$.

(b) Dibujar cuidadosamente la solución para la que $c = 0$. A continuación, y usando esta gráfica particular, dibujar también las soluciones para las que $c = 1$, $c = 2$ y $c = 3$.

Lecturas sugeridas

AGNEW, R. P., *Differential Equations*, 2ª ed. (McGraw-Hill, New York, 1960).

BRAUER, F. y J. NOHEL, *Ordinary Differential Equations: A First Course* (Benjamin, New York, 1967).

CODDINGTON, E., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961).

FORD, L., *Differential Equations*, 2ª ed. (McGraw-Hill, New York, 1955).

KAPLAN, W., *Ordinary Differential Equations* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958).

LEIGHTON, W., *Ordinary Differential Equations*, 3ª ed. (Wadsworth, Belmont, Cal., 1970).

2

Ecuaciones de primer orden para las que pueden obtenerse soluciones exactas

En este capítulo consideraremos ciertos tipos básicos de ecuaciones de primer orden para las que pueden obtenerse soluciones exactas mediante procedimientos determinados. El propósito del capítulo es, por tanto, capacitar al lector para que reconozca estos diversos tipos y sepa aplicar los correspondientes métodos de solución. De los tipos considerados aquí, las denominadas ecuaciones exactas de la sección 2.1 son, en cierto sentido, las básicas, mientras que las ecuaciones separables de la sección 2.2 son, también en cierto sentido, las «sencillas». Las más importantes, desde el punto de vista de las aplicaciones, son las ecuaciones separables de la sección 2.2 y las ecuaciones lineales de la sección 2.3. Los restantes tipos son de formas diversas muy especiales y los correspondientes métodos de resolución emplean técnicas diversas. Abreviadamente, podríamos describir este capítulo como una colección de métodos especiales, técnicas, trucos o recetas en orden descendente de importancia.

2.1. Ecuaciones diferenciales exactas y factores integrantes

A. *Formas normales de las ecuaciones diferenciales de primer orden*

Las ecuaciones diferenciales de primer orden que estudiaremos en este capítulo pueden escribirse, bien en la forma de derivada

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

o bien en la forma diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{2.2}$$

Una ecuación escrita en una de esas formas puede transformarse fácilmente en la otra. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

es de la forma (2.1) y puede escribirse

$$(x^2 + y^2)\,dx + (y - x)\,dy = 0,$$

que es de la forma (2.2). La ecuación

$$(\operatorname{sen} x + y)\,dx + (x + 3y)\,dy = 0,$$

que es de la forma (2.2), puede escribirse en la forma (2.1) y es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} x + y}{x + 3y}.$$

De la propia notación aparece claro que en la forma (2.1) y se considera como variable dependiente y x como variable independiente; sin embargo, en la forma (2.2) podemos realmente considerar cualquier variable como dependiente y la otra como independiente. No obstante, en este texto, consideraremos que en todas las ecuaciones diferenciales en x e y de la forma (2.2), y es la variable dependiente y x la independiente, a menos que digamos específicamente lo contrario.

B. *Ecuaciones diferenciales exactas*

DEFINICIÓN

Sea F una función de dos variables reales que posee derivadas parciales primeras continuas en un dominio D. La diferencial total *dF de la función F viene definida por la fórmula*

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\,dy$$

para todo $(x, y) \in D$.

♦ EJEMPLO 2.1. Sea F una función de dos variables reales definida por

$$F(x, y) = xy^2 + 2x^3y$$

para todo (x, y) real. Entonces

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2 + 6x^2y, \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy + 2x^3,$$

y la diferencial total dF viene definida por

$$dF(x, y) = (y^2 + 6x^2y)\,dx + (2xy + 2x^3)\,dy$$

para todo (x, y) real.

DEFINICIÓN

La expresión

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \tag{2.3}$$

recibe el nombre de diferencial exacta *en un dominio D si existe una función F de dos variables reales tal que su diferencial total, $dF(x, y)$, coincide con dicha expresión para todo $(x, y) \in D$. Es decir, la expresión* (2.3) *es una diferencial exacta en D, si existe una función F que verifica*

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$.

Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta, la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

se denomina ecuación diferencial exacta.

♦ EJEMPLO 2.2. La ecuación diferencial

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 \tag{2.4}$$

es una ecuación diferencial exacta, ya que la expresión $y^2\,dx + 2xy\,dy$ es una diferencial exacta. En realidad, es la diferencial total de la función F definida para todo (x, y) mediante $F(x, y) = xy^2$, ya que el coeficiente de dx es $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = y^2$ y el de dy es $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2xy$. Por otra parte, una ecuación de apariencia tan simple como

$$y\,dx + 2x\,dy = 0, \tag{2.5}$$

obtenida a partir de (2.4) dividiendo por y, *no* es exacta.

En el ejemplo 2.2 afirmamos sin ninguna vacilación que la ecuación diferencial (2.4) es exacta, mientras que la ecuación diferencial (2.5) no lo es. En el caso de la ecuación (2.4) comprobamos nuestra afirmación explicitando la función F de la que la expresión $y^2\,dx + 2xy\,dy$ es la diferencial total. Sin embargo, en el caso de la ecuación (2.5) no respaldamos nuestra afirmación demostrando que no existe una función F tal que $y\,dx + 2x\,dy$ sea su diferencial total. Es evidente que necesitamos una manera sencilla de determinar cuando una ecuación diferencial dada es exacta. El próximo teorema resuelve esta cuestión.

TEOREMA 2.1

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{2.6}$$

donde M y N poseen derivadas parciales primeras continuas en todos los puntos (x, y) de un dominio rectangular D.

1. Si *la ecuación diferencial* (2.6) *es exacta en D,* se verifica

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{2.7}$$

para todo $(x, y) \in D$.

2. Recíprocamente, si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$, entonces *la ecuación diferencial* (2.6) *es exacta en D.*

Demostración. Parte 1. Si la ecuación diferencial (2.6) es exacta en D, se verifica que $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta en D. Por la definición de diferencial exacta, existe una función F tal que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Por tanto,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Entonces

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Pero, usando la continuidad de las derivadas parciales primeras de M y N, tenemos

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$.

Parte 2. Siendo la recíproca de la parte 1, partimos de la hipótesis

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$, teniendo que demostrar que $M\, dx + N\, dy = 0$ es exacta en D. Esto significa que hemos de probar que existe una función F que verifica

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \tag{2.8}$$

y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{2.9}$$

para todo $(x, y) \in D$. Ciertamente podemos hallar alguna $F(x, y)$ que satisfaga bien (2.8) o (2.9), pero ¿y las dos simultáneamente? Supongamos que F satisface (2.8) y operemos. Entonces

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, \partial x + \phi(y), \tag{2.10}$$

donde $\int M(x, y)\, \partial x$ indica una integración parcial con respecto a x, manteniendo y constante, y ϕ es una función arbitraria de y solamente. La función $\phi(y)$ que necesitamos en (2.10) ha de ser tal que $F(x, y)$ dada por (2.10) represente *todas* las soluciones de (2.8). Esta corresponde a una constante de integración en el caso de «una variable». Efectuando la diferenciación parcial de (2.10) respecto a y, obtenemos

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x + \frac{d\phi(y)}{dy}.$$

Puesto que (2.9) ha de satisfacerse, hemos de tener

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} \tag{2.11}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x.$$

Puesto que ϕ es función de y únicamente, la derivada $d\phi/dy$ ha de ser también independiente de x. Es decir, para que (2.11) se satisfaga,

$$N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x \tag{2.12}$$

ha de ser independiente de x.

Demostraremos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x\right] = 0.$$

Resulta, inmediatamente, que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x\right] = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int M(x, y)\, \partial x.$$

Si han de satisfacerse (2.8) y (2.9) hemos de tener, usando la hipótesis (2.7),

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int M(x, y)\, \partial x = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} \int M(x, y)\, \partial x.$$

Obtenemos así

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x\right] = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} \int M(x, y)\, \partial x$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x\right] = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}.$$

Pero, según la hipótesis (2.7),

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, \partial x\right] = 0$$

para todo $(x, y) \in D$, y de esta manera (2.12) *es* independiente de x. Podemos escribir entonces

$$\phi(y) = \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] dy.$$

Sustituyendo $\phi(y)$ en la ecuación (2.10) por este valor, tendremos

$$F(x, y) = \int M(x, y) \partial x + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] dy. \qquad (2.13)$$

Esta función $F(x, y)$ satisface entonces (2.8) y (2.9) para todo $(x, y) \in D$, de modo que $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta en D. C.Q.D.

El lector acostumbrado a la terminología de la matemática avanzada estará de acuerdo en que el teorema 2.1 puede enunciarse con las siguientes palabras: Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (2.6) sea exacta en D es que la condición (2.7) se satisfaga para todo $(x, y) \in D$. Para lectores no tan acostumbrados, insistamos en que la condición (2.7),

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

constituye el criterio de exactitud. Si (2.7) es válida, entonces (2.6) es exacta; si (2.7) *no* es válida, la ecuación (2.6) *no* es exacta.

♦ EJEMPLO 2.3. Aplicamos el criterio de exactitud (2.7) a las ecuaciones (2.4) y (2.5) introducidas en el ejemplo 2.2. Para la ecuación

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 \qquad (2.4)$$

tenemos

$$M(x, y) = y^2, \qquad N(x, y) = 2xy,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo (x, y). En consecuencia, la ecuación (2.4) es exacta en todo dominio rectangular D. Por otra parte, para la ecuación

$$y\,dx + 2x\,dy = 0, \qquad (2.5)$$

tenemos

$$M(x, y) = y, \qquad N(x, y) = 2x,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1 \neq 2 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo (x, y). En consecuencia, la ecuación (2.5) no es exacta en ningún dominio rectangular D.

♦ Ejemplo 2.4. Consideremos la ecuación diferencial

$$(2x \operatorname{sen} y + y^3 e^x)\,dx + (x^2 \cos y + 3y^2 e^x)\,dy = 0.$$

Aquí

$$M(x, y) = 2x \operatorname{sen} y + y^3 e^x,$$

$$N(x, y) = x^2 \cos y + 3y^2 e^x,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2x \cos y + 3y^2 e^x = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

en todo dominio rectangular D. Por tanto, esta ecuación diferencial es exacta en cada uno de tales dominios.

Estos ejemplos ilustran el uso del criterio dado por (2.7) para determinar si una ecuación de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es o no es exacta. Debemos mencionar que la ecuación *ha de* presentarse en la forma normal $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ a fin de que pueda usarse el criterio de exactitud (2.7). Es necesario observar con todo cuidado lo siguiente: puede encontrarse una ecuación en la forma *no* normal $M(x, y)dx = N(x, y)dy$ y en esta forma *no* puede aplicarse el criterio (2.7).

C. *Solución de las ecuaciones diferenciales exactas*

Ahora que disponemos de un criterio con el que determinar la exactitud, procedamos a resolver ecuaciones diferenciales exactas. Si la ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta en un dominio rectangular D, existirá una función F tal que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in D.$$

Entonces la ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\,dy = 0 \quad \text{o simplemente} \quad dF(x, y) = 0.$$

La relación $F(x, y) = c$ es evidentemente una solución de ésta, donde c es una constante arbitraria. Resumimos esta observación en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2

Supongamos que la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ satisface las condiciones de diferenciabilidad del teorema 2.1 y es exacta en un dominio rectangular D. En este caso, una familia uniparamétrica de soluciones de esta ecuación diferencial viene dada por $F(x, y) = c$, donde F es una función tal que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad y \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \text{ para todo } (x, y) \in D$$

y c es una constante arbitraria.

Volviendo al teorema 2.1, observamos que $F(x, y)$ viene dada por la fórmula (2.13). No obstante, no es necesario ni deseable el utilizar esta fórmula cuando se resuelven ecuaciones diferenciales exactas. En su lugar se obtiene $F(x, y)$, bien procediendo como en la demostración de la parte 2 del teorema 2.1, o mediante el denominado «método de agrupamiento» que explicaremos en los siguientes ejemplos.

♦ EJEMPLO 2.5. Resolver la ecuación

$$(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0.$$

Nuestra primera misión es determinar si esta ecuación es exacta. Aquí

$$M(x, y) = 3x^2 + 4xy, \qquad N(x, y) = 2x^2 + 2y,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 4x, \qquad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 4x,$$

para todo (x, y) real, y en consecuencia la ecuación es exacta en todo dominio rectangular D. Por lo tanto, hemos de hallar F tal que satisfaga

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 + 4xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = 2x^2 + 2y.$$

De la primera de estas ecuaciones se deduce

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,\partial x + \phi(y) = \int (3x^2 + 4xy)\,\partial x + \phi(y)$$
$$= x^3 + 2x^2y + \phi(y).$$

Entonces

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}.$$

Pero hemos de tener

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = 2x^2 + 2y.$$

En consecuencia

$$2x^2 + 2y = 2x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

o sea,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 2y.$$

Por tanto $\phi(y) = y^2 + c_0$, donde c_0 es una constante arbitraria, de modo que

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0.$$

Luego una familia uniparamétrica de soluciones es $F(x, y) = c_1$, o

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + c_0 = c_1.$$

Combinando las constantes c_0 y c_1 podemos escribir esta solución en la forma

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c,$$

en donde $c = c_1 - c_0$ es una constante arbitraria. El lector observará que no se pierde generalidad tomando $c_0 = 0$ y escribiendo $\phi(y) = y^2$. Consideramos a continuación otro procedimiento.

MÉTODO DE AGRUPAMIENTO. Resolveremos ahora la ecuación diferencial de este ejemplo, agrupando los términos de manera tal que su primer miembro aparezca como la suma de ciertas diferenciales exactas. Escribimos la ecuación diferencial

$$(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$$

en la forma

$$3x^2\,dx + (4xy\,dx + 2x^2\,dy) + 2y\,dy = 0.$$

No hay dificultad en ver que esta expresión es

$$d(x^3) + d(2x^2y) + d(y^2) = d(c),$$

donde c es una constante arbitraria, o

$$d(x^3 + 2x^2y + y^2) = d(c).$$

De aquí obtenemos inmediatamente

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c.$$

Es evidente que este procedimiento es mucho más rápido; sin embargo requiere un buen conocimiento de diferenciales y una cierta pericia en determinar cómo han de agruparse los términos. El método normal puede ser más laborioso y largo, pero es completamente directo. El adoptar uno u otro dependerá un poco del temperamento del lector.

A fin de asegurarnos de que se han entendido ambos procedimientos, consideraremos ahora un problema de valores iniciales en el que se presenta una ecuación diferencial exacta.

♦ EJEMPLO 2.6. Resolver el problema de valores iniciales

$$(2x \cos y + 3x^2y)\, dx + (x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y)\, dy = 0,$$

$$y(0) = 2.$$

Observamos en primer lugar que la ecuación es exacta en todo dominio rectangular D, ya que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y + 3x^2 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

para todo (x, y) real.

MÉTODO NORMAL. Hemos de hallar una F que satisfaga

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 2x \cos y + 3x^2y$$

y

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y.$$

Entonces

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, \partial x + \phi(y)$$

$$= \int (2x \cos y + 3x^2y)\, \partial x + \phi(y)$$

$$= x^2 \cos y + x^3 y + \phi(y),$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y + x^3 + \frac{d\phi(y)}{dy}.$$

Pero también

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = x^3 - x^2 \operatorname{sen} y - y$$

de manera que

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = -y$$

por lo que

$$\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + c_0.$$

Entonces

$$F(x, y) = x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} + c_0.$$

En consecuencia, una familia uniparamétrica de soluciones es $F(x, y) = c_1$, la cual puede escribirse

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c.$$

Aplicando la condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$, hallamos $c = -2$. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales dado es

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = -2.$$

Método de agrupamiento. Agrupamos los términos del modo siguiente:

$$(2x \cos y \, dx - x^2 \operatorname{sen} y \, dy) + (3x^2 y \, dx + x^3 \, dy) - y \, dy = 0.$$

Tenemos entonces

$$d(x^2 \cos y) + d(x^3 y) - d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d(c);$$

de manera que

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial. Naturalmente, la condición inicial $y(0) = 2$ proporciona de nuevo la solución particular ya obtenida.

D. Factores integrantes

Dada la ecuación diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0,$$

si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

la ecuación es exacta y podemos obtener una familia uniparamétrica de soluciones mediante cualquiera de los procedimientos explicados anteriormente. Sin embargo, si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

la ecuación *no* es exacta y no pueden aplicarse los métodos anteriores. ¿Qué podemos hacer en tal caso? Quizá podríamos multiplicar esta ecuación, que no es exacta, por alguna expresión que la transformara en una ecuación exacta, esencialmente equivalente. Si esto es posible, se puede proceder a resolver la ecuación exacta resultante por uno de los métodos previos. Consideremos de nuevo la ecuación

$$y\, dx + 2x\, dy = 0, \tag{2.5}$$

introducida en el ejemplo 2.2. Ya observamos allí que esta ecuación *no* es exacta. No obstante, si multiplicamos la ecuación (2.5) por y, se transforma en la ecuación esencialmente equivalente

$$y^2\, dx + 2xy\, dy = 0, \tag{2.4}$$

que es exacta (ver ejemplo 2.2). Puesto que la ecuación exacta resultante, (2.4), es integrable, llamamos a y *factor integrante* de la ecuación (2.5). En general, tendremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Si la ecuación diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.14}$$

no *es exacta en un dominio D, pero la ecuación diferencial*

$$\mu(x, y)M(x, y)\, dx + \mu(x, y)N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.15}$$

es *exacta en D,* $\mu(x, y)$ *recibe el nombre de* factor integrante *de la ecuación diferencial* (2.14).

♦ EJEMPLO 2.7. Consideremos la ecuación diferencial

$$(3y + 4xy^2)\, dx + (2x + 3x^2y)\, dy = 0. \tag{2.16}$$

Esta ecuación es de la forma (2.14), donde

$$M(x, y) = 3y + 4xy^2, \qquad N(x, y) = 2x + 3x^2y,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3 + 8xy, \qquad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2 + 6xy.$$

Puesto que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

excepto para los (x, y) que satisfacen $2xy + 1 = 0$, la ecuación (2.16) *no* es exacta en ningún dominio rectangular D.

Sea $\mu(x, y) = x^2y$. Entonces la correspondiente ecuación diferencial de la forma (2.15) es

$$(3x^2y^2 + 4x^3y^3)\, dx + (2x^3y + 3x^4y^2)\, dy = 0.$$

Esta ecuación es exacta en todo dominio rectangular D puesto que

$$\frac{\partial[\mu(x, y)M(x, y)]}{\partial y} = 6x^2y + 12x^3y^2 = \frac{\partial[\mu(x, y)N(x, y)]}{\partial x}$$

para todo (x, y) real. Por tanto $\mu(x, y) = x^2y$ es un factor integrante para la ecuación (2.16).

La multiplicación de una ecuación diferencial que no es exacta por un factor integrante la transforma en una ecuación exacta. Nos hemos referido a esta ecuación exacta resultante diciendo que era «esencialmente equivalente» a la original. Esta ecuación exacta esencialmente equivalente posee la misma familia uniparamétrica de soluciones que la ecuación original. No obstante, la multiplicación de dicha ecuación original por el factor integrante puede dar lugar a (1) la pérdida de (una o más) soluciones de la original, o (2) la aparición de (una o más) funciones que son soluciones de la «nueva» ecuación pero no de la original o (3) ambos fenómenos. Por tanto, siempre que transformemos una ecuación que no es exacta en una exacta, mediante la multiplicación por un factor integrante, hemos de comprobar cuidadosamente si hemos perdido o ganado soluciones. Ilustraremos un caso especial importante de estos fenómenos cuando consideremos las ecuaciones separables en la sección 2.2. Ver también el ejercicio 22 al final de esta sección.

Un problema se presenta ahora: ¿Cómo puede encontrarse un factor integrante? No intentaremos responder a esta cuestión ahora. En su lugar procederemos al estudio de las clases importantes de ecuaciones separables en la sección 2.2 y de las ecuaciones lineales en la sección 2.3. Veremos que las ecuaciones separables poseen siempre factores integrantes que son evidentes, mientras que las ecuaciones lineales siempre tienen factores integrantes de una cierta forma especial. Volveremos a la ecuación suscitada en la sección 2.4. Nuestro objetivo aquí ha sido meramente el introducir la noción de factor integrante.

Ejercicios

Determinar en los ejercicios que van del 1 al 10 si cada una de las ecuaciones dadas es o no exacta; resolver aquéllas que lo sean.

1. $(3x + 2y)\,dx + (2x + y)\,dy = 0.$
2. $(y^2 + 3)\,dx + (2xy - 4)\,dy = 0.$
3. $(2xy + 1)\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0.$
4. $(3x^2y + 2)\,dx - (x^3 + y)\,dy = 0.$
5. $(6xy + 2y^2 - 5)\,dx + (3x^2 + 4xy - 6)\,dy = 0.$
6. $(\theta^2 + 1)\cos r\,dr + 2\theta\,\operatorname{sen} r\,d\theta = 0.$
7. $(y\sec^2 x + \sec x\tan x)\,dx + (\tan x + 2y)\,dy = 0.$
8. $\left(\dfrac{x}{y^2} + x\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{y^3} + y\right)dy = 0.$
9. $\left(\dfrac{2s - 1}{t}\right)ds + \left(\dfrac{s - s^2}{t^2}\right)dt = 0.$
10. $\dfrac{2y^{3/2} + 1}{x^{1/2}}\,dx + (3x^{1/2}y^{1/2} - 1)\,dy = 0.$

Resolver los problemas de valores iniciales planteados en los ejercicios 11 a 16.

11. $(2xy - 3)\,dx + (x^2 + 4y)\,dy = 0, \quad y(1) = 2.$

12. $(3x^2y^2 - y^3 + 2x)\,dx + (2x^3y - 3xy^2 + 1)\,dy = 0, \quad y(-2) = 1.$

13. $(2y \operatorname{sen} x \cos x + y^2 \operatorname{sen} x)\,dx + (\operatorname{sen}^2 x - 2y \cos x)\,dy = 0, \quad y(0) = 3.$

14. $(ye^x + 2e^x + y^2)\,dx + (e^x + 2xy)\,dy = 0, \quad y(0) = 6.$

15. $\left(\dfrac{3 - y}{x^2}\right) dx + \left(\dfrac{y^2 - 2x}{xy^2}\right) dy = 0, \quad y(-1) = 2.$

16. $\dfrac{1 - y^{2/3}}{x^{2/3}y^{1/3}}\,dx + \dfrac{2x^{4/3}y^{2/3} - x^{1/3}}{y^{4/3}}\,dy = 0, \quad y(1) = 8.$

17. En cada una de las siguientes ecuaciones determinar la constante A de modo que la ecuación sea exacta y resolver la ecuación resultante:
   (a) $(x^2 + 3xy)\,dx + (Ax^2 + 4y)\,dy = 0.$
   (b) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) dx + \left(\dfrac{Ax + 1}{y^3}\right) dy = 0.$

18. En cada una de las siguientes ecuaciones determinar la constante A de modo que la ecuación sea exacta y resolver la ecuación resultante:
   (a) $(Ax^2y + 2y^2)\,dx + (x^3 + 4xy)\,dy = 0.$
   (b) $\left(\dfrac{Ay}{x^3} + \dfrac{y}{x^2}\right) dx + \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right) dy = 0.$

19. En cada una de las siguientes ecuaciones determinar la función más general $N(x, y)$ que haga de ellas ecuaciones exactas:
   (a) $(x^3 + xy^2)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$
   (b) $(x^{-2}y^{-2} + xy^{-3})\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$

20. En cada una de las siguientes ecuaciones determinar la función más general $M(x, y)$ que haga de ellas ecuaciones exactas:
   (a) $M(x, y)\,dx + (2x^2y^3 + x^4y)\,dy = 0.$
   (b) $M(x, y)\,dx + (2ye^x + y^2e^{3x})\,dy = 0.$

21. Considerar la ecuación diferencial

$$(4x + 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

   (a) Demostrar que esta ecuación no es exacta.
   (b) Hallar un factor integrante de la forma x^n, donde n es un entero positivo.

(c) Multiplicar la ecuación dada por el factor integrante hallado en (b) y resolver la ecuación exacta resultante.

22. Considerar la ecuación diferencial

$$(y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0.$$

(a) Demostrar que esta ecuación no es exacta.
(b) Multiplicar la ecuación dada por y^n, donde n es un entero, y determinar entonces n de modo que y^n sea un factor integrante para la ecuación dada.
(c) Multiplicar la ecuación dada por el factor integrante hallado en (b) y resolver la ecuación exacta resultante.
(d) Demostrar que $y = 0$ es una solución de la ecuación original, no exacta, pero no es solución de la ecuación exacta, esencialmente equivalente, hallada en el apartado (c).
(e) Dibujar varias curvas integrales de la ecuación original, incluyendo todas aquéllas cuyas ecuaciones se encuentran (o pueden escribirse) en alguna forma «especial».

23. Considerar una ecuación diferencial de la forma

$$[y + xf(x^2 + y^2)]\,dx + [yf(x^2 + y^2) - x]\,dy = 0.$$

(a) Demostrar que una ecuación de esta forma no es exacta.
(b) Demostrar que $1/(x^2 + y^2)$ es un factor integrante de una ecuación de esta forma.

24. Utilizar el resultado del ejercicio 23 (b) para resolver la ecuación

$$[y + x(x^2 + y^2)^2]\,dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]\,dy = 0.$$

2.2. Ecuaciones separables y ecuaciones reducibles a esta forma

A. *Ecuaciones separables*

DEFINICIÓN

Una ecuación de la forma

$$F(x)G(y)\,dx + f(x)g(y)\,dy = 0 \tag{2.17}$$

se denomina ecuación de variables separables *o, simplemente,* ecuación separable.

Por ejemplo, la ecuación $(x-4)y^4\,dx - x^3(y^2-3)\,dy = 0$ es una ecuación separable.

En general, la ecuación separable (2.17) no es exacta, aunque, evidentemente, $1/f(x)G(y)$ es un factor integrante, puesto que si multiplicamos la ecuación (2.17) por esta expresión separamos las variables, obteniéndose así la ecuación

$$\frac{F(x)}{f(x)}\,dx + \frac{g(y)}{G(y)}\,dy = 0. \tag{2.18}$$

esencialmente equivalente. Esta ecuación es exacta ya que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F(x)}{f(x)}\right] = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g(y)}{G(y)}\right].$$

Si llamamos $M(x)$ *a* $F(x)/f(x)$ y $N(y)$ a $g(y)/G(y)$, la ecuación (2.18) toma la forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$. Puesto que M es función únicamente de x y N función únicamente de y, de manera inmediata resulta que una familia uniparamétrica de soluciones es

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = c, \tag{2.19}$$

donde c es una constante arbitraria. El problema de hallar tal familia de soluciones de la ecuación separable (2.17) se ha reducido al de llevar a cabo la integración indicada en la ecuación (2.19). Es en este sentido que las ecuaciones separables son las ecuaciones diferenciales de primer orden más sencillas.

Puesto que hemos obtenido la ecuación exacta separada (2.18) a partir de la (2.17) inexacta multiplicando esta última por el factor integrante $1/f(x)G(y)$, es posible que hayamos perdido o ganado soluciones en este proceso. Consideraremos ahora este punto con más cuidado. Al multiplicar formalmente por el factor integrante $1/f(x)G(y)$, realmente dividimos por $f(x)G(y)$. Esto lo hemos hecho con la suposición tácita de que ni $f(x)$ ni $G(y)$ son nulas, con lo que hemos procedido a obtener la familia uniparamétrica de soluciones dada por (2.19). Ahora debiéramos investigar si en este proceso formal se han perdido o ganado soluciones. En particular, si como es normal y es la variable dependiente, consideremos la situación que se presenta cuando $G(y)$ es cero. Escribiendo la ecuación diferencial original (2.17) con la notación de derivada

$$f(x)g(y)\frac{dy}{dx} + F(x)G(y) = 0,$$

observamos inmediatamente lo siguiente: Si y_0 es cualquier número real para el que $G(y_0) = 0$, tenemos entonces que $y = y_0$ es una solución (constante) de la ecuación diferencial original y esta solución puede haberse (o no) perdido en el proceso formal de separación.

Al hallar una familia uniparamétrica de soluciones de una ecuación separable, supondremos siempre que ninguno de los factores por los que dividimos en ese proceso formal de separación es cero. Después, hemos de hallar las soluciones $y = y_0$ de la ecuación $G(y) = 0$ y determinar si algunas de ellas son soluciones de la ecuación original perdidas en el proceso formal de separación.

♦ EJEMPLO 2.8. Resolver la ecuación

$$(x - 4)y^4\, dx - x^3(y^2 - 3)\, dy = 0.$$

La ecuación es separable y separando las variables mediante la división por x^3y^4, resulta

$$\frac{(x - 4)\, dx}{x^3} - \frac{(y^2 - 3)\, dy}{y^4} = 0$$

o bien

$$(x^{-2} - 4x^{-3})\, dx - (y^{-2} - 3y^{-4})\, dy = 0.$$

Integrando, obtenemos la familia uniparamétrica de soluciones

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} = c,$$

donde c es una constante arbitraria.

Al dividir por x^3y^4 en el proceso de separación, hemos supuesto que $x^3 \neq 0$ e $y^4 \neq 0$. Consideramos ahora la solución $y = 0$ de $y^4 = 0$. Esta solución no es miembro de la familia uniparamétrica que hemos obtenido. No obstante, escribiendo la ecuación diferencial original en forma de derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - 4)y^4}{x^3(y^2 - 3)},$$

es evidente que $y = 0$ *es* una solución de esta ecuación original. Concluimos pues que es una solución que se había perdido en el proceso de separación.

♦ Ejemplo 2.9. Resolver el problema de valores iniciales formado por la ecuación diferencial

$$x \operatorname{sen} y\, dx + (x^2 + 1) \cos y\, dy = 0 \tag{2.20}$$

y las condiciones iniciales

$$y(1) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.21}$$

Obtendremos primeramente una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial (2.20). Separando las variables mediante la división por $(x^2 + 1)$ sen y, obtenemos

$$\frac{x}{x^2 + 1}\, dx + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = 0.$$

Entonces

$$\int \frac{x\, dx}{x^2 + 1} + \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = c_0,$$

donde c_0 es una constante arbitraria. Recordemos que

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad \text{y} \quad |u| = \begin{cases} u & \text{si} \quad u \geq 0, \\ -u & \text{si} \quad u \leq 0. \end{cases}$$

En consecuencia, efectuando las integraciones, hallamos

$$\tfrac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + \ln |\operatorname{sen} y| = c_0. \tag{2.22}$$

Podíamos dejar la familia de soluciones en esta forma, pero podemos expresarla de una forma más elegante de la siguiente manera. Puesto que cada término del primer miembro de esta ecuación es el logaritmo de una función, parece razonable que podamos conseguir algo escribiendo la constante arbitraria c_0 en la forma $\ln |c_1|$. Obtenemos entonces

$$\tfrac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + \ln |\operatorname{sen} y| = \ln |c_1|.$$

Multiplicando por 2,

$$\ln (x^2 + 1) + 2 \ln |\operatorname{sen} y| = 2 \ln |c_1|.$$

Puesto que

$$2 \ln |\operatorname{sen} y| = \ln (\operatorname{sen} y)^2,$$

y

$$2 \ln |c_1| = \ln c_1^2 = \ln c,$$

donde

$$c = c_1^2 \geq 0,$$

tenemos ahora

$$\ln(x^2+1) + \ln \operatorname{sen}^2 y = \ln c.$$

Puesto que $\ln A + \ln B = \ln AB$, esta ecuación puede escribirse

$$\ln(x^2+1)\operatorname{sen}^2 y = \ln c.$$

de donde obtenemos inmediatamente

$$(x^2+1)\operatorname{sen}^2 y = c. \tag{2.23}$$

Es evidente que (2.23) es una forma más elegante que (2.22).

Al dividir por (x^2+1) sen y en el proceso de separación, hemos supuesto sen $y \neq 0$. Consideramos ahora las soluciones de sen $y = 0$, dadas por $y = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Escribiendo la ecuación diferencial original en forma de derivada, es evidente que cada una de estas soluciones $y = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) de sen $y = 0$ es una solución constante de la ecuación diferencial (2.20), siendo también cada una de ellas miembro de la familia uniparamétrica (2.23) de soluciones de (2.20) para $c = 0$. Vemos pues que no se había perdido ninguna solución de este tipo en el proceso de separación.

Aplicamos ahora la condición inicial (2.21) a la familia de soluciones (2.23). Tenemos

$$(1^2+1)\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} = c$$

de modo que $c = 2$. Por tanto, la solución al problema de valores iniciales en consideración es

$$(x^2+1)\operatorname{sen}^2 y = 2.$$

B. Ecuaciones homogéneas

Consideraremos ahora una clase de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a ecuaciones separables mediante un cambio de variables.

DEFINICIÓN

Se dice que la ecuación diferencial de primer orden $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ *es* homogénea *si escrita en la forma de derivada* $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ *existe una función g tal que* $f(x, y)$ *pueda expresarse en la forma* $g(y/x)$.

♦ Ejemplo 2.10. La ecuación diferencial $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ es homogénea. Para ver esto, escribamos esta ecuación en forma de derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}.$$

Observando ahora que

$$\frac{3y^2 - x^2}{2xy} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right),$$

vemos que la ecuación diferencial que consideramos puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right),$$

en la que el segundo miembro es de la forma $g(y/x)$ para una cierta función g.

♦ Ejemplo 2.11. La ecuación

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$$

es homogénea. Cuando la escribimos en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

el segundo miembro puede expresarse como

$$\frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2}}$$

o

$$\frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

dependiendo del signo de x. Lo tenemos evidentemente en la forma $g(y/x)$.

Antes de proceder a hallar realmente la solución de las ecuaciones homogéneas, consideraremos un procedimiento ligeramente diferente para reconocer tales ecuaciones. Se dice que una función F es *homogénea de grado n* si $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$, lo que significa que si en $F(x, y)$ se sustituyen x e y por tx y ty, respectivamente, resulta un factor común t^n y otro factor que es la propia función $F(x, y)$. Por ejemplo, la función F dada por $F(x, y) = x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2, ya que

$$F(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2F(x, y).$$

Supongamos ahora que las funciones M y N en la ecuación diferencial $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$ son ambas homogéneas y del *mismo* grado n. Entonces, puesto que $M(tx, ty) = t^nM(x, y)$ si hacemos $t = 1/x$, tenemos

$$M\left(\frac{1}{x}\cdot x, \frac{1}{x}\cdot y\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y).$$

Es evidente que esta expresión puede escribirse en la forma más sencilla

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y);$$

de donde se obtiene inmediatamente

$$M(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} M\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Del mismo modo, podemos obtener

$$N(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} N\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Escribiendo ahora la ecuación diferencial $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$ en la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{-n} N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}.$$

Queda claro que la expresión de la derecha es de la forma $g(y/x)$, de modo que la ecuación $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$ es homogénea en el sentido de la definición original de homogeneidad. Llegamos, en consecuencia, a la conclusión de que si M y N en $M(x, y)\ dx + N(x, y)\ dy = 0$ son ambas funciones homogéneas del mismo grado n, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial homogénea.

Volvamos ahora a los ejemplos 2.10 y 2.11 utilizando estas consideraciones. En el ejemplo 2.10, $M(x, y) = x^2 - 3y^2$ y $N(x, y) = 2xy$, por lo que tanto M como N son funciones homogéneas de grado 2. Vemos pues, que la ecuación diferencial $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ es una ecuación homogénea. En el ejemplo 2.11, $M(x, y) = y + (x^2 + y^2)$ y $N(x, y) = -x$, esta última función es homogénea de grado 1. Como

$$M(tx, ty) = ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = t^1 M(x, y),$$

vemos que M es también homogénea y de grado 1. Concluimos, por tanto, que la ecuación

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$$

es homogénea.

Demostraremos ahora que toda ecuación homogénea puede reducirse a una separable en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3

Si

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{2.24}$$

es una ecuación homogénea, el cambio de variables $y = vx$ transforma (2.24) en una ecuación separable en las variables v y x.

Demostración. Puesto que $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es homogénea, puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Sea $y = vx$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

y (2.24) se transforma en

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

o

$$[v - g(v)]\,dx + x\,dv = 0.$$

Esta ecuación es separable y separando las variables obtenemos

$$\frac{dv}{v - g(v)} + \frac{dx}{x} = 0. \tag{2.25}$$

C.Q.D.

En consecuencia, para resolver una ecuación diferencial homogénea de la forma (2.24), hacemos $y = vx$, con lo que transformamos dicha ecuación homogénea en una ecuación de la forma (2.25). Según esto tenemos

$$\int \frac{dv}{v - g(v)} + \int \frac{dx}{x} = c,$$

donde c es una constante arbitraria. Si llamamos $F(v)$ a

$$\int \frac{dv}{v - g(v)},$$

volviendo a la variable dependiente original y, la solución toma la forma

$$F\left(\frac{y}{x}\right) + \ln |x| = c.$$

♦ EJEMPLO 2.12. Resolver la ecuación

$$(x^2 - 3y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0.$$

Ya comprobamos que esta ecuación es homogénea. Escribiéndola en la forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x}$$

y haciendo $y = vx$, obtenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{3v}{2},$$

de donde

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2v} + \frac{v}{2},$$

o, finalmente,

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}.$$

Esta ecuación es separable. Separando variables resulta

$$\frac{2v\, dv}{v^2 - 1} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, hallamos

$$\ln |v^2 - 1| = \ln |x| + \ln |c|,$$

y de aquí

$$|v^2 - 1| = |cx|,$$

donde c es una constante arbitraria. El lector debe observar que no se han perdido soluciones en el proceso de separación. Sustituyendo ahora v por y/x obtenemos las soluciones en la forma

$$\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| = |cx|$$

o

$$|y^2 - x^2| = |cx|x^2.$$

Si $y \geq x \geq 0$, las soluciones adoptan la forma más sencilla

$$y^2 - x^2 = cx^3.$$

♦ EJEMPLO 2.13. Resolver el problema de valores iniciales

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\, dx - x\, dy = 0,$$
$$y(1) = 0.$$

Hemos visto que la ecuación diferencial es homogénea. Como antes, la escribimos en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

Puesto que el valor inicial de x es 1, consideramos $x > 0$ y tomamos $x = \sqrt{x^2}$ con lo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Si hacemos $y = vx$ obtenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

de donde

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}.$$

Separando variables hallamos

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dx}{x}.$$

Llevando a cabo las integraciones requeridas obtenemos

$$\ln |v + \sqrt{v^2 + 1}| = \ln |x| + \ln |c|,$$

o

$$v + \sqrt{v^2 + 1} = cx.$$

Sustituyendo ahora v por y/x, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = cx$$

o

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2.$$

La condición inicial requiere que sea $y = 0$ cuando $x = 1$. Esto da $c = 1$ y de aquí

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2,$$

de donde se deduce que

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1).$$

Ejercicios

Resolver las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 1 a 14.

1. $4xy\,dx + (x^2 + 1)\,dy = 0.$
2. $(xy + 2x + y + 2)\,dx + (x^2 + 2x)\,dy = 0.$
3. $2r(s^2 + 1)\,dr + (r^4 + 1)\,ds = 0.$
4. $\csc y\,dx + \sec x\,dy = 0.$
5. $\tan\theta\,dr + 2r\,d\theta = 0.$
6. $(e^v + 1)\cos u\,du + e^v(\operatorname{sen} u + 1)\,dv = 0.$
7. $(x + 4)(y^2 + 1)\,dx + y(x^2 + 3x + 2)\,dy = 0.$
8. $(x + y)\,dx - x\,dy = 0.$
9. $(2xy + 3y^2)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0.$
10. $v^3\,du + (u^3 - uv^2)\,dv = 0.$

11. $\left(x \tan \frac{y}{x} + y\right) dx - x\,dy = 0.$

12. $(2s^2 + 2st + t^2)\,ds + (s^2 + 2st - t^2)\,dt = 0.$

13. $(x^3 + y^2\sqrt{x^2 + y^2})\,dx - xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0.$

14. $(\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y})\,dx + (\sqrt{x - y} - \sqrt{x + y})\,dy = 0.$

Resolver los problemas de valores iniciales de los ejercicios 15 al 20.

15. $(y + 2)\,dx + y(x + 4)\,dy = 0, \qquad y(-3) = -1.$

16. $8 \cos^2 y\,dx + \csc^2 x\,dy = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}.$

17. $(3x + 8)(y^2 + 4)\,dx - 4y(x^2 + 5x + 6)\,dy = 0, \qquad y(1) = 2.$

18. $(x^2 + 3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0, \qquad y(2) = 6.$

19. $(2x - 5y)\,dx + (4x - y)\,dy = 0, \qquad y(1) = 4.$

20. $(3x^2 + 9xy + 5y^2)\,dx - (6x^2 + 4xy)\,dy = 0, \qquad y(2) = -6.$

21. (a) Demostrar que la ecuación homogénea

$$(Ax + By)\,dx + (Cx + Dy)\,dy = 0$$

es exacta si y sólo si $B = C$.

(b) Demostrar que la ecuación homogénea

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)\,dx + (Dx^2 + Exy + Fy^2)\,dy = 0$$

es exacta si y sólo si $B = 2D$ y $E = 2C$.

22. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones mediante dos métodos (ver ejercicio 21 (a)):

(a) $(x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy = 0.$

(b) $(3x - y)\,dx - (x + y)\,dy = 0.$

23. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones mediante dos métodos (ver ejercicio 21 (b)):

(a) $(x^2 + 2y^2)\,dx + (4xy - y^2)\,dy = 0.$

(b) $(2x^2 + 2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy)\,dy = 0.$

24. (a) Demostrar que si $M\ dx + N\ dy = 0$ es una ecuación homogénea, el cambio de variables $x = uy$ transforma esta ecuación en una ecuación separable en las variables u y x.

(b) Utilizar el resultado de (a) para resolver la ecuación del ejemplo 2.12 del texto.
(c) Utilizar el resultado de (a) para resolver la ecuación del ejemplo 2.13 del texto.

25. Supongamos que la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ es homogénea. Demostrar que la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r$ sen θ reduce esta ecuación a una ecuación separable en las variables r y θ.
26. (a) Utilizar el método del ejercicio 25 para resolver el ejercicio 8.
(b) Utilizar el método del ejercicio 25 para resolver el ejercicio 9.
27. Supongamos que la ecuación

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{A}$$

es homogénea.
(a) Demostrar que la ecuación (A) es invariante para la transformación

$$x = k\xi, \qquad y = k\eta, \tag{B}$$

donde k es una constante.
(b) Demostrar que la solución general de la ecuación (A) puede escribirse de la forma

$$x = c\phi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{C}$$

donde c es una constante arbitraria.
(c) Usar el resultado de (b) para demostrar que la solución (C) es también invariante para la transformación (B).
(d) Interpretar geométricamente los resultados demostrados en (a) y (c).

2.3. Ecuaciones lineales y ecuaciones de Bernoulli

A. *Ecuaciones lineales*

En el capítulo 1 dimos la definición de ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n. Consideraremos ahora ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden.

DEFINICIÓN

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal *considerando a y como variable dependiente y a x como variable independiente si está escrita, o se puede escribir, en la forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.26}$$

Por ejemplo, la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + (x + 1)y = x^3$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden ya que puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = x^2,$$

que es de la forma (2.26) con $P(x) = 1 + (1/x)$ y $Q(x) = x^2$.

Escribamos la ecuación (2.26) en la forma

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0. \tag{2.27}$$

La ecuación (2.27) puede expresarse como

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

donde

$$M(x, y) = P(x)y - Q(x) \quad \text{y} \quad N(x, y) = 1.$$

Puesto que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = P(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0,$$

la ecuación (2.27) *no* es exacta a menos que sea $P(x) = 0$ en cuyo caso la ecuación (2.26) degenera en una sencilla ecuación separable. No obstante, la ecuación (2.27) posee un factor integrante que sólo depede de x y que puede hallarse fácilmente. En efecto, multiplicando la ecuación (2.27) por $\mu(x)$ se obtiene

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]\,dx + \mu(x)\,dy = 0. \tag{2.28}$$

Por definición, $\mu(x)$ es un factor integrante para la ecuación (2.28) si y sólo si dicha ecuación es exacta; es decir, si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)].$$

Esta condición se reduce a

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}[\mu(x)]. \tag{2.29}$$

En (2.29), P es una función conocida de la variable independiente x, mientras que μ es una función incógnita de x que tratamos de determinar.

En consecuencia, escribimos (2.29) como la ecuación diferencial

$$\mu P(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

en la variable dependiente μ y en la variable independiente x, siendo P una función conocida de x. Esta ecuación diferencial es separable; separando variables, obtenemos

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)\, dx.$$

Integrando, resulta la solución particular

$$\ln |\mu| = \int P(x)\, dx$$

o

$$\mu = e^{\int P(x)\, dx}, \tag{2.30}$$

donde es evidente que $\mu > 0$. Por tanto, la ecuación lineal (2.26) posee un factor integrante de la forma (2.30). Multiplicando (2.26) por (2.30) obtenemos

$$e^{\int P(x)\, dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)\, dx} P(x) y = Q(x) e^{\int P(x)\, dx},$$

que es precisamente

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x)\, dx} y] = Q(x) e^{\int P(x)\, dx}.$$

Integrando ésta, obtenemos la solución a la ecuación (2.26) en la forma

$$e^{\int P(x)\, dx} y = \int e^{\int P(x)\, dx} Q(x)\, dx + c,$$

donde c es una constante arbitraria.

El resumen de esta discusión nos proporciona el siguiente teorema:

TEOREMA 2.4

La ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = Q(x) \tag{2.26}$$

posee un factor integrante de la forma

$$e^{\int P(x)\,dx}.$$

Una familia uniparamétrica de soluciones de esta ecuación es

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + c;$$

es decir,

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx}Q(x)\,dx + c\right].$$

Además, puede demostrarse que esta familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación lineal (2.26) *incluye todas las soluciones de dicha ecuación.*

Consideremos algunos ejemplos.

◆ EJEMPLO 2.14

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}. \tag{2.31}$$

En este caso

$$P(x) = \frac{2x+1}{x}$$

de donde se deduce que el factor integrante es

$$\exp\left[\int P(x)\,dx\right] = \exp\left[\int\left(\frac{2x+1}{x}\right)dx\right] = \exp\,(2x + \ln|x|)$$

$$= \exp\,(2x)\exp\,(\ln|x|) = x\exp\,(2x).*$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (2.31) por este factor integrante, obtenemos

$$xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}(2x+1)y = x$$

o

$$\frac{d}{dx}(xe^{2x}y) = x.$$

Integrando, hallamos las soluciones

$$xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c$$

---

* Las expresiones e^x y $\exp x$ son idénticas.

o

$$y = \tfrac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{c}{x}e^{-2x},$$

donde c es una constante arbitraria.

♦ Ejemplo 2.15. Resolver el problema de valores iniciales referente a la ecuación diferencial

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x \tag{2.32}$$

y a la condición inicial

$$y(2) = 1. \tag{2.33}$$

La ecuación diferencial (2.32) no es de la forma (2.26). Sin embargo, si dividimos por $x^2 + 1$ obtenemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2 + 1}y = \frac{x}{x^2 + 1}. \tag{2.34}$$

que es de la forma normal (2.26) con

$$P(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

Un factor integrante es

$$\exp\left[\int P(x)\,dx\right] = \exp\left(\int \frac{4x\,dx}{x^2 + 1}\right) = \exp\,[\ln(x^2 + 1)^2] = (x^2 + 1)^2.$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (2.34) por este factor integrante, tendremos

$$(x^2 + 1)^2\frac{dy}{dx} + 4x(x^2 + 1)y = x(x^2 + 1)$$

o

$$\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)^2 y] = x^3 + x.$$

Si integramos ahora, obtenemos una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2.32) en la forma

$$(x^2 + 1)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + c.$$

Aplicando la condición inicial (2.33), tenemos

$$25 = 6 + c.$$

En consecuencia, $c = 19$ y la solución del problema de valores iniciales en consideración es

$$(x^2 + 1)^2 y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 19.$$

♦ EJEMPLO 2.16. Consideremos la ecuación diferencial

$$y^2\, dx + (3xy - 1)\, dy = 0. \tag{2.35}$$

Despejando dy/dx, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - 3xy},$$

que, evidentemente, *no* es lineal en y. Además, la ecuación (2.35) *no* es exacta, ni separable, ni homogénea, por lo que parece ser de algún tipo que todavía no hemos encontrado; sin embargo, estudiémosla con más cuidado. En la sección 2.1 señalamos que en la forma diferencial de una ecuación de primer orden los papeles de x e y, eran intercambiables, en el sentido de que cualquier variable podía considerarse como dependiente y la otra como independiente. Teniendo esto en cuenta para la ecuación (2.35), vamos a considerar que la variable dependiente es x y la independiente y. Con esta interpretación, escribimos ahora (2.35) en forma derivada.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - 3xy}{y^2}$$

o

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y} x = \frac{1}{y^2}. \tag{2.36}$$

Observamos ahora que la ecuación (2.36) es de la forma

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

y, por tanto, *lineal en x*. En consecuencia, la teoría desarrollada en esta sección puede aplicarse a la ecuación (2.36) mediante el simple intercambio de los papeles desempeñados por x e y. Entonces, un factor integrante es

$$\exp\left[\int P(y)\,dy\right] = \exp\left(\int \frac{3}{y}\,dy\right) = \exp(\ln|y|^3) = y^3.$$

Multiplicando (2.36) por y^3 obtenemos

$$y^3 \frac{dx}{dy} + 3y^2 x = y$$

o

$$\frac{d}{dy}[y^3 x] = y.$$

Integrando, hallamos soluciones de la forma

$$y^3 x = \frac{y^2}{2} + c$$

o

$$x = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3},$$

donde c es una constante arbitraria.

B. Ecuaciones de Bernoulli

Consideraremos ahora un tipo algo especial de ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación lineal mediante una transformación apropiada. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Bernoulli.

DEFINICIÓN

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.37}$$

se denomina ecuación diferencial de Bernoulli.

Observamos que si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli (2.37) es realmente una ecuación lineal y, por tanto, es fácilmente resoluble como tal. No obstante, en el caso general en el que $n \neq 0$ o 1, no se presenta esta situación tan sencilla, por lo que hemos de proceder de un modo diferente. Enunciamos y demostramos ahora el teorema 2.5, el cual proporciona un método de solución en el caso general.

TEOREMA 2.5

Supongamos que $n \neq 0$ o 1. Entonces la transformación $v = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.37}$$

a una ecuación lineal en v.

DEMOSTRACIÓN. Multiplicamos primeramente la ecuación (2.37) por y^{-n}, expresándola por tanto en la forma equivalente

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \tag{2.38}$$

Si hacemos $v = y^{1-n}$, entonces

$$\frac{dv}{dx} = (1 - n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

y la ecuación (2.38) se transforma en

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{dv}{dx} + (1 - n)P(x)v = (1 - n)Q(x).$$

Haciendo

$$P_1(x) = (1 - n)P(x)$$

y

$$Q_1(x) = (1 - n)Q(x),$$

podemos escribir

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x),$$

que es lineal en v. C.Q.D.

♦ EJEMPLO 2.17

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3. \tag{2.39}$$

Esta ecuación es del tipo de Bernoulli con $n = 3$. Primeramente multiplicamos los dos miembros de la ecuación por y^{-3} y obtenemos la forma equivalente

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x.$$

Si hacemos $v = y^{1-n} = y^{-2}$, entonces $dv/dx = -2y^{-3}(dy/dx)$ y la ecuación diferencial anterior se transforma en la ecuación lineal

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x.$$

Escribiendo esta ecuación lineal en la forma normal

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x, \tag{2.40}$$

vemos que un factor integrante para esta ecuación es

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int 2\,dx} = e^{-2x}.$$

Multiplicando (2.40) por e^{-2x}, tenemos

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2e^{-2x}v = -2xe^{-2x}$$

o

$$\frac{d}{dx}(e^{-2x}v) = -2xe^{-2x}.$$

Integrando ahora obtenemos

$$e^{-2x}v = \tfrac{1}{2}e^{-2x}(2x + 1) + c,$$

$$v = x + \tfrac{1}{2} + ce^{2x},$$

donde c es una constante arbitraria. Pero

$$v = \frac{1}{y^2},$$

por lo que se obtienen entonces las soluciones de (2.39) en la forma

$$\frac{1}{y^2} = x + \tfrac{1}{2} + ce^{2x}.$$

Nota. Consideremos la ecuación

$$\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x), \tag{2.41}$$

donde f es una función conocida de y. Haciendo $v = f(y)$, tenemos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx},$$

y la ecuación (2.41) se transforma en la

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x),$$

que es lineal en v. Observamos ahora que la ecuación diferencial de Bernoulli (2.37) es un caso especial de la ecuación (2.41). Escribiendo (2.37) en la forma

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

y multiplicando los dos miembros por $(1 - n)$, tenemos

$$(1 - n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + P_1(x)y^{1-n} = Q_1(x),$$

donde $P_1(x) = (1 - n)P(x)$ y $Q_1(x) = (1 - n)Q(x)$. Esta última ecuación es de la forma (2.41) con $f(y) = y^{1-n}$, por lo que haciendo $v = y^{1-n}$ se transforma en

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x),$$

que es lineal en v. La consideración de otros casos especiales de (2.41) se postpone al ejercicio 37.

Ejercicios

Resolver las ecuaciones diferenciales dadas en los ejercicios 1 a 18.

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = 6x^2.$

2. $x^4\dfrac{dy}{dx} + 2x^3y = 1.$

3. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}.$

4. $\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$

5. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}$.

6. $(u^2 + 1)\dfrac{dv}{du} + 4uv = 3u$.

7. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x + 1}{x + 1}y = x - 1$.

8. $(x^2 + x - 2)\dfrac{dy}{dx} + 3(x + 1)y = x - 1$.

9. $x\,dy + (xy + y - 1)\,dx = 0$.

10. $y\,dx + (xy^2 + x - y)\,dy = 0$.

11. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos\theta$.

12. $\cos\theta\,dr + (r\operatorname{sen}\theta - \cos^4\theta)\,d\theta = 0$.

13. $(\cos^2 x - y\cos x)\,dx - (1 + \operatorname{sen} x)\,dy = 0$.

14. $(y\operatorname{sen}2x - \cos x)\,dx + (1 + \operatorname{sen}^2 x)\,dy = 0$.

15. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$.

16. $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$.

17. $dy + (4y - 8y^{-3})x\,dx = 0$.

18. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t + 1}{2t}x = \dfrac{t + 1}{xt}$.

Resolver los problemas de valores iniciales de los ejercicios 19 a 30.

19. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x^4, \qquad y(2) = 8$.

20. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2, \qquad y(0) = 2$.

21. $e^x[y - 3(e^x + 1)^2]\,dx + (e^x + 1)\,dy = 0, \qquad y(0) = 4$.

22. $2x(y + 1)\,dx - (x^2 + 1)\,dy = 0, \qquad y(1) = -5$.

23. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan\theta = \cos^2\theta, \qquad r\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

24. $\dfrac{dx}{dt} - x = \operatorname{sen}2t, \qquad x(0) = 0$.

25. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}, \qquad y(1) = 2.$

26. $x\dfrac{dy}{dx} + y = (xy)^{3/2}, \qquad y(1) = 4.$

27. $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1, \end{cases}$

$y(0) = 0.$

28. $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} 5, & 0 \le x < 10, \\ 1, & x \ge 10, \end{cases}$

$y(0) = 6.$

29. $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \le x < 2, \\ e^{-2}, & x \ge 2, \end{cases}$

$y(0) = 1.$

30. $(x + 2)\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 2, \\ 4, & x \ge 2, \end{cases}$

$y(0) = 4.$

31. Considerar la ecuación $a(dy/dx) + by = ke^{-\lambda x}$, donde a, b y k son constantes positivas y λ es una constante no negativa.
    (a) Resolver esta ecuación.
    (b) Demostrar que si $\lambda = 0$ toda solución se aproxima a k/b cuando $x \to \infty$ pero si $\lambda > 0$ toda solución se aproxima a 0 cuando $x \to \infty$.

32. Considerar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

   (a) Demostrar que si f y g son dos soluciones de esta ecuación y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, $c_1 f + c_2 g$ es también una solución de esta ecuación.
   (b) Generalizando el resultado de (a), demostrar que si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son n soluciones de esta ecuación y $c_1, c_2 \ldots, c_n$ constantes arbitrarias, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$$

es también una solución de esta ecuación.

33. Considerar la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \tag{A}$$

donde P es continua en el intervalo real I.

(a) Demostrar que la función f tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in I$ es una solución de esta ecuación.
(b) Demostrar que si f es una solución de (A) tal que $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in I$, se verifica que $f(x) = 0$ para todo $x \in I$.
(c) Demostrar que si f y g son soluciones de (A) tales que $f(x_0) = g(x_0)$ para algún $x_0 \in I$, se verifica que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

34. (a) Demostrar que si f y g son dos soluciones diferentes de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{A}$$

se verifica que $f - g$ es una solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0.$$

(b) Demostrar entonces que si f y g son dos soluciones distintas de la ecuación (A) y c es una constante arbitraria, se verifica que

$$c(f - g) + f$$

es una familia uniparamétrica de soluciones de (A).

35. (a) Sea f_1 una solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q_1(x)$$

y f_2 una solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q_2(x),$$

donde P, Q_1 y Q_2 están todas definidas sobre el mismo intervalo real I. Probar que $f_1 + f_2$ es una solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q_1(x) + Q_2(x)$$

en el intervalo I.

(b) Utilizar el resultado de (a) para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = 2\,\mathrm{sen}\,x + 5\,\mathrm{sen}\,2x.$$

36. (a) Generalizar el resultado del ejercicio 35(a) al caso de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = \sum_{k=1}^{n} Q_k(x),$$

donde P, Q_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ vienen todas definidas sobre el mismo intervalo real I.

(b) Utilizar el resultado obtenido en (a) para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = \sum_{k=1}^{5} \mathrm{sen}\,kx.$$

37. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones, que son del tipo (2.41):

(a) $\cos y \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,y = 1.$

(b) $(y + 1)\dfrac{dy}{dx} + x(y^2 + 2y) = x.$

38. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{A}$$

se denomina *ecuación de Riccati.*

(a) Demostrar que si $A(x) = 0$ para todo x, la ecuación (A) es una ecuación lineal, mientras que si $C(x) = 0$ para todo x, la ecuación (A) es una ecuación de Bernoulli.

(b) Demostrar que si f es una solución cualquiera de la ecuación (A), la transformación

$$y = f + \frac{1}{v}$$

reduce (A) a una ecuación lineal en v.

En cada uno de los ejercicios 39 a 41, utilizar el resultado del ejercicio 38(b) y la solución dada para hallar una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación de Riccati propuesta:

39. $\dfrac{dy}{dx} = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$; dando como solución $f(x) = 1$.

40. $\dfrac{dy}{dx} = -y^2 + xy + 1$; dando como solución $f(x) = x$.

41. $\dfrac{dy}{dx} = -8xy^2 + 4x(4x + 1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1)$; dando como solución $f(x) = x$

2.4. Factores integrantes especiales y transformaciones

Hemos encontrado hasta ahora cinco tipos distintos de ecuaciones de primer orden, para las que se podían obtener soluciones mediante métodos exactos; a saber, ecuaciones exactas, separables, homogéneas, lineales y de Bernoulli. En el caso de ecuaciones exactas, seguimos una procedimiento sistemático para obtener soluciones directamente. Para los otros cuatro tipos existen también procedimientos determinados, pero realmente no son tan directos. Tanto en el caso de variables separables, como en el caso de ecuaciones lineales, el método es multiplicar por factores integrantes apropiados que reducen las ecuaciones dadas a otras que son del tipo exacto más básico. Para las ecuaciones homogéneas y de Bernouilli llevamos a cabo transformaciones apropiadas, que reducen tales ecuaciones a los tipos separable y lineal más básicos, respectivamente.

Esto sugiere la utilización de dos planes generales de ataque para la resolución de una ecuación diferencial que *no* sea de uno de los cinco tipos mencionados. Bien (1) podemos multiplicar la ecuación dada por un factor integrante apropiado y reducirla directamente a una ecuación exacta, o (2) podemos llevar a cabo una transformación apropiada que reduzca la ecuación dada a una ecuación de algún tipo más básico (por ejemplo, uno de los cinco tipos ya estudiados). Desgraciadamente no pueden darse directrices generales para hallar un factor integrante o una transformación en todos los casos. No obstante, existe una variedad de tipos especiales de ecuaciones, que poseen tipos especiales de factores integrantes, o bien se les puede aplicar una transformación especial. Nosotros consideraremos en esta sección unos cuantos de esos tipos especiales, que como no tienen excesiva importancia enunciaremos simplemente los teoremas y dejaremos las demostraciones como ejercicios.

A. Cómo encontrar factores integrantes

Las denominadas ecuaciones separables consideradas en la sección 2.2, poseen siempre factores integrantes que pueden determinarse inmediatamente a simple vista. Aunque es cierto que algunas ecuaciones no separables poseen también factores integrantes que pueden determinarse «a simple vista», tales ecuaciones se encuentran raramente, excepto en libros de ecuaciones diferenciales que dedican páginas a la exposición de este «método» dudoso. Aun entonces, se necesita una considerable cantidad de conocimientos y pericia.

Vamos a intentar atacar el problema más sistemáticamente. Supongamos que la ecuación

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.42}$$

no es exacta y que $\mu(x, y)$ es una factor integrante para ella. En ese caso la ecuación

$$\mu(x, y)M(x, y)\, dx + \mu(x, y)N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.43}$$

es exacta. Usando ahora el criterio (2.7) de la exactitud, podemos decir que la ecuación (2.43) es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)N(x, y)].$$

Esta condición se reduce a

$$N(x, y)\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} - M(x, y)\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} = \left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right]\mu(x, y).$$

En este caso M y N son funciones conocidas de x e y, mientras que μ es la función de x e y que tratamos de determinar. En consecuencia, escribimos la condición precedente en la forma

$$N(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x} - M(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right]\mu. \tag{2.44}$$

Por tanto, μ es un factor integrante de la ecuación diferencial (2.42) si y sólo si es una solución de la ecuación diferencial (2.44), que es una ecuación en derivadas parciales que no estamos en condiciones de intentar resolver. En su lugar vamos a intentar determinar factores integrantes de ciertos tipos especiales. ¿Pero qué tipos especiales podemos considerar? Recordemos que la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

posee siempre el factor integrante $e^{\int P(x)\,dx}$ que depende únicamente de x. Puede ser que otras ecuaciones tengan también factores integrantes que dependan solamente de x. Multiplicamos, por tanto, la ecuación (2.42) por $\mu(x)$, donde μ depende de x únicamente. Obtenemos

$$\mu(x)M(x, y)\,dx + \mu(x)N(x, y)\,dy = 0.$$

Esta ecuación es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)N(x, y)].$$

Ahora M y N son funciones conocidas de x e y, mientras que el factor integrante μ depende solamente de x. Luego, la condición anterior se reduce a

$$\mu(x)\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \mu(x)\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} + N(x, y)\frac{d\mu(x)}{dx}$$

o

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{N(x, y)}\left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right]dx. \tag{2.45}$$

Si

$$\frac{1}{N(x, y)}\left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right]$$

contiene la variable y, esta ecuación contiene entonces dos variables dependientes, con lo que nos encontramos de nuevo en dificultades. No obstante, si

$$\frac{1}{N(x, y)}\left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right]$$

depende únicamente de x, la ecuación (2.45) es una ecuación ordinaria separada, con la sola variable independiente x y la sola variable dependiente μ. En este caso podemos integrar y obtener así el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{1}{N(x, y)}\left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right]dx\right\}.$$

Análogamente, si

$$\frac{1}{M(x, y)}\left[\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\right]$$

depende de y solamente, podemos obtener entonces un factor integrante que dependa únicamente de y.

Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.6

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{2.42}$$

Si

$$\frac{1}{N(x, y)}\left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right] \tag{2.46}$$

depende de x únicamente, la función

$$\exp\left\{\int \frac{1}{N(x, y)}\left[\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\right] dx\right\} \tag{2.47}$$

es un factor integrante de la ecuación (2.42). *Si*

$$\frac{1}{M(x, y)}\left[\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\right] \tag{2.48}$$

depende únicamente de y, la función

$$\exp\left\{\int \frac{1}{M(x, y)}\left[\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\right] dy\right\} \tag{2.49}$$

es un factor integrante de la ecuación (2.42).

Insistimos en que, dada una ecuación diferencial, no tenemos en general ninguna seguridad de que sea aplicable uno de estos procedimientos. Puede ocurrir que (2.46) contenga y y que (2.48) contenga x para la ecuación diferencial que se intenta resolver, por lo que hemos de buscar otros procedimientos. De cualquier modo, puesto que el cálculo de las expresiones (2.46) y (2.48) es generalmente muy simple, es útil calcularlas antes de intentar algo más complicado.

♦ EJEMPLO 2.18. Consideremos la ecuación diferencial

$$(2x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0. \tag{2.50}$$

Observemos en primer lugar que esta ecuación *no* es exacta ni separable ni homogénea ni lineal ni de Bernoulli. Veamos entonces si el teorema 2.6 es aplicable. En este caso $M(x, y) = 2x^2 + y$ y $N(x, y) = x^2y - x$, con lo que la expresión (2.46) es ahora

$$\frac{1}{x^2y - x}[1 - (2xy - 1)] = \frac{2(1 - xy)}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x},$$

que depende solamente de x y, por tanto,

$$\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(-2 \ln |x|) = \frac{1}{x^2}$$

es un factor integrante para la ecuación (2.50). Multiplicando (2.50) por este factor integrante, obtenemos la ecuación

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0. \tag{2.51}$$

El lector puede comprobar fácilmente que la ecuación (2.51) es efectivamente exacta y que la solución es

$$2x + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} = c.$$

Se conocen resultados, cada vez más especializados, referentes a tipos particulares de factores integrantes que corresponden a tipos particulares de ecuaciones. Sin embargo, en vez de estudiar casos tan especiales, procederemos ahora a investigar ciertas transformaciones útiles.

B. Una transformación especial

Ya hemos usado transformaciones al reducir las ecuaciones homogéneas y de Bernoulli a tipos más tratables. Otro tipo de ecuación que puede reducirse a un tipo más clásico por medio de una transformación conveniente es una ecuación de la forma

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0.$$

Enunciamos el siguiente teorema referente a esta ecuación.

TEOREMA 2.7

Consideremos la ecuación

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)\, dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)\, dy = 0, \tag{2.52}$$

donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, *son constantes.*

CASO 1. *Si* $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$, *la transformación*

$$x = X + h,$$

$$y = Y + k,$$

donde (h, k) *es la solución del sistema*

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0,$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0,$$

reduce la ecuación (2.52) *a la ecuación homogénea*

$$(a_1 X + b_1 Y)\, dX + (a_2 X + b_2 Y)\, dY = 0$$

en las variables X *e* Y.

CASO 2. *Si* $a_2/a_1 = b_2/b_1 = k$, *la transformación* $z = a_1 x + b_1 y$ *reduce la ecuación* (2.52) *a una ecuación separable en las variables* x y z.

Los ejemplos 2.19 y 2.20 ilustran los dos casos de este teorema.

◆ EJEMPLO 2.19

$$(x - 2y + 1)\, dx + (4x - 3y - 6)\, dy = 0. \tag{2.53}$$

En este caso $a_1 = 1$, $b_1 = -2$, $a_2 = 4$, $b_2 = -3$ y por tanto

$$\frac{a_2}{a_1} = 4 \quad \text{pero} \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{2} \neq \frac{a_2}{a_1}.$$

Nos encontramos pues en el caso 1 del teorema 2.7. Aplicamos la transformación

$$x = X + h,$$

$$y = Y + k,$$

donde (h, k) es la solución del sistema

$$h - 2k + 1 = 0,$$

$$4h - 3k - 6 = 0.$$

Resolviendo obtenemos $h = 3$, $k = 2$, de modo que la transformación es

$$x = X + 3,$$
$$y = Y + 2.$$

Esto reduce la ecuación (2.53) a la ecuación homogénea

$$(X - 2Y)\,dX + (4X - 3Y)\,dY = 0. \tag{2.54}$$

Siguiendo ahora el procedimiento de la sección 2.2, expresamos primeramente esta ecuación homogénea en la forma

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - 2(Y/X)}{3(Y/X) - 4}$$

y hacemos $Y = vX$ para obtener

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1 - 2v}{3v - 4}.$$

Esta expresión se reduce a

$$\frac{(3v - 4)\,dv}{3v^2 - 2v - 1} = -\frac{dX}{X}. \tag{2.55}$$

Integrando (recomendamos aquí el uso de tablas), obtenemos

$$\tfrac{1}{2}\ln|3v^2 - 2v - 1| - \tfrac{3}{4}\ln\left|\frac{3v - 3}{3v + 1}\right| = -\ln|X| + \ln|c_1|,$$

o

$$\ln(3v^2 - 2v - 1)^2 - \ln\left|\frac{3v - 3}{3v + 1}\right|^3 = \ln\left(\frac{c_1^4}{X^4}\right),$$

o

$$\ln\left|\frac{(3v + 1)^5}{v - 1}\right| = \ln\left(\frac{c_1^4}{X^4}\right),$$

o, finalmente,

$$X^4|(3v + 1)^5| = c|v - 1|,$$

donde $c = c^4{}_1$. Éstas son las soluciones de la ecuación separable (2.55). Sustituyendo ahora v por Y/X, obtenemos las soluciones de la ecuación homogénea (2.54) en la forma

$$|3Y + X|^5 = c|Y - X|.$$

Sustituyendo finalmente X por $x - 3$ e Y por $y - 2$, según la transformación original, tendremos las soluciones de la ecuación diferencial (2.53) en la forma

$$|3(y - 2) + (x - 3)|^5 = c|y - 2 - x + 3|$$