Ecuaciones diferenciales
Series de Potencias

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

4 de junio de 2025

Contenido

Series infinitas

Definición

Una serie infinita se define como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

Una serie infinita es una suma

- Suma parcial:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

- Ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} = 2^0 + 2^{1/2} + 2^{2/2} + \ldots$$

Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$$

Suma parcial

$$s_m = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^m = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$$

$$\begin{aligned}
s_m &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^m \\
rs_m &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^m + r^{m+1} \\
s_m - rs_m &= 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{r^3} + \dots + \cancel{r^m} - \cancel{r} - \cancel{r^2} - \cancel{r^3} - \dots - \cancel{r^m} - r^{m+1} \\
(1 - r)s_m &= 1 - r^{m+1} \\
s_m &= \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$s_m = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$$

Convergencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

Se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} s_m = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{m+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

El límite no existe (serie diverge) para $|r| \geq 1$ es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots$$

- Suma parcial (m-ésima suma parcial):

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$$

- Se puede demostrar que en este caso

$$\lim_{m \to \infty} s_m$$

no existe (serie diverge)

Series de potencias

Definición

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_k(x-x_0)^k + \ldots$$

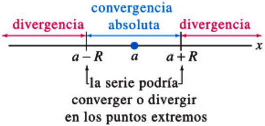
- donde $x, x_0, a_k \in \mathbb{R}$
- x_0: centro de la serie
- Intervalo de convergencia: $|x - x_0| < R$
- R: radio de convergencia
- Convergencia.

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_m(x-x_0)^m$$

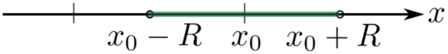
La suma converge cuando

$$\lim_{m\to\infty} s_m$$

la serie existe.



- Intervalo de convergencia.
  - Consiste en los valores de x para los que la serie converge.
  - x_0 es el centro del intervalo.
- Radio de convergencia, R.
  - La serie converge para $|x - x_0| < R$
  - La serie diverge para $|x - x_0| \geq R$
- Si la serie converge para $x \in \mathbb{R}$, el radio de convergencia es infinito.



Propiedades de series

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \quad \text{(índice mudo, n=m)}$$
- $$k\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0), \leftrightarrow a_n = b_n$$
- A partir del último caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = 0 \Leftrightarrow c_n = 0$$

Series de Taylor

Definición

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Dados $f(x)$ y x_0

Serie de McLaurin ($x_0 = 0$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Ejemplos

- **Exponencial**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- **Seno**

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Series de Taylor Fundamentales

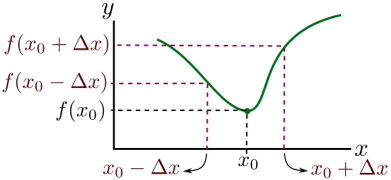
Función	Serie de Taylor alrededor de 0	Radio de convergencia
Exponencial	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	∞
Seno	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	∞
Coseno	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$	∞
Logaritmo natural (1+x)	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$	1
Binomial	$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$	1
Arco tangente	$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$	1
Seno hiperbólico	$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	∞
Coseno hiperbólico	$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	∞

Cuadro 1: Series de Taylor esenciales con centro en 0 (series de Maclaurin)

Máximos y mínimos

Expansión de Taylor de segundo orden:

$$f(x) \approx f(x_0) + \cancel{f'(x_0)}(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$



Primero, se encuentra la derivada primera se iguala a cero $f'(x_0) = 0$ para encontrar los puntos críticos.

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Luego, se evalúa la derivada segunda, $f''(x_0) = 0$, en estos puntos críticos. Si $f''(x_0)$ es positiva, se tiene un mínimo relativo, y si es negativa, se tiene un máximo relativo.

- Cuando $f''(x_0) > 0$ se cumple que

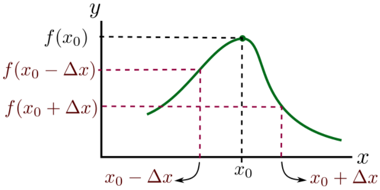
$$f(x \pm \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 > 0$$

  por lo tanto, x_0 es un mínimo.

- Cuando $f''(x_0) < 0$ se cumple que

$$f(x \pm \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)(\Delta x)^2 < 0$$

  por lo tanto, x_0 es un maxima.



Termodinámica: Ecuación virial

Factor de compresibilidad

$$Z = \frac{pv}{RT} \Rightarrow p = RT\frac{Z}{v}$$

Ecuación virial

$$Z = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \dots$$

$$\frac{Z}{v} = \frac{1}{v} + \frac{B(T)}{v^2} + \frac{C(T)}{v^3} + \dots$$

por lo tanto

$$p = RT\left[\frac{1}{v} + \frac{B(T)}{v^2} + \frac{C(T)}{v^3} + \dots\right]$$

Gas de van der Waals

$$B(T) = b - \frac{a}{RT}$$

Puntos ordinarios y singulares

A partir de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}(x)y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}(x)y = 0$$

Para la ecuación:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

- **Punto ordinario:** $P(x)$ y $Q(x)$ analíticas
- **Punto singular:** alguna no analítica

Algunas definiciones:

- **Función analítica:** Aquella que tiene una serie convergente en un intervalo alrededor de x_0.
- **Punto ordinario:** x_0 es ordinario cuando ambas $P(x_0)$ y $Q(x_0)$ son funciones analíticas.
- **Punto singular:** x_0 es singular cuando alguna o ambas $P(x_0)$ y $Q(x_0)$ es no analítica.

Ejemplo 1

Ejemplo

$$xy'' + \frac{x}{1-x}y' + (\sin x)y = 0$$

solucion: Primero, reescribimos la ecuación en la forma estándar

$$y'' + \frac{1}{1-x}y' + \frac{\sin x}{x}y = 0$$

Los puntos singulares ocurren donde los coeficientes de y' o y no son analíticos.

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{es un punto singular en,} \quad x = 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{es analítica o ordinario en,} \quad x = 0, \quad \text{(removible)}$$

Por lo tanto, $x = 0$ es un punto ordinario y $x = 1$ es un punto singular.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Expandimos los términos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Por lo tanto, el único punto singular regular es $x = 1$. Sin embargo, buscaremos una solución en serie alrededor de $x = x_0 = 0$, que es un punto ordinario para esta ecuación.

Asumimos una solución tiene la forma de una serie de potencias centrada en $x = 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Calculamos las derivadas

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustitución en la ecuación

$$y'' + \frac{1}{1-x} y' + \frac{\sin x}{x} y = 0$$

$$\frac{1}{1-x} y' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right)$$

$$\frac{\sin x}{x} y = \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

Sustituyendo todas las series:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{n \to n+2} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

- Primera suma, hacemos el cambio de índice $n \to n+2$ en el primer término para igualar las potencias de x^n. Para lograr el cambio de índice definimos un nuevo índice $k = n-2$, lo que implica $n = k+2$, ajustamos los límites de la suma:
  - Cuando $n = 2$, $k = 0$.
  - Cuando $n \to \infty$, $k \to \infty$

  Así, la serie se reescribe como:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^{k-2}}_{\text{indice empieza en cero}}$$

  Para uniformidad, renombramos k como n

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n-2}$$

- Producto de series (segundo término):

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right)\left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots\right) \\
&= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots \\
&+ a_1 x + a_2 x^{+} a_3 x^3 + \ldots \\
&+ a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \ldots \\
&+ \ldots \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n\right) x^n
\end{aligned}$$

- Tercer término (producto de Cauchy):

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right) \\
&= \frac{a_0}{1!}x + \frac{a_1}{1!}x^2 + \frac{a_2}{1!}x^3 + \ldots \\
&- \frac{a_0}{\;}x^3 - \frac{a_1}{\;}x^4 - \frac{a_2}{\;}x^5 + \ldots
\end{aligned}$$

Combinar términos y encontrar relación de recurrencia

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+}x^{n-2}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}+\sum_{k=0}^{n/2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_{n-2k}\right]x^n=0$$

Para que esto sea válido para todo x, cada coeficiente debe ser cero

$$(n+1)(n+2)a_{n+}x^{n-2}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}+\sum_{k=0}^{n/2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_{n-2k}=0$$

Calcular coeficientes

- Para $n=0$

$$2a_2+a_1+a_0=0\Rightarrow a_2=\frac{a_0+a_1}{2}$$

- Para $n=1$

$$\begin{aligned}6a_3+(a_1+2a_2)+(a_1+\frac{1}{6}a_0) &= 0\\ 6a_3 &= -a_1-2a_2-a_1+\frac{a_0}{6}\\ a_3 &= \frac{a_0}{36}+\frac{a_1}{3}+\frac{a_0+a_1}{6}=\frac{7a_0}{36}-\frac{a_1}{6}\end{aligned}$$

- y así sucesivamente

Los primeros términos de la solución son:

$$y(x)=a_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{7x^3}{36}+\dots\right)+a_1\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\dots\right)$$

Donde a_0 y a_1 son constantes determinadas por condiciones iniciales.

Ejemplo 2

Ejemplos

Halle una solución mediante series de potencias para las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$y'' - y = 0$$

Solución
Queremos hallar una solución en serie de potencias para la ecuación:

$$y'' - y = 0$$

Supongamos que la solución tiene la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces, su derivada segunda es:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

Sustituimos en $y'' - y = 0$:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}}_{n \to n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Hacemos el cambio de índice $n \to n+2$ en el primer término para igualar las potencias de x^n. Para lograr el cambio de índice definimos un nuevo índice $k = n - 2$, lo que implica $n = k + 2$, ajustamos los límites de la suma:

- Cuando $n = 2$, $k = 0$.
- Cuando $n \to \infty$, $k \to \infty$

Así, la serie se reescribe como:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k}_{\text{indice empieza en cero}}$$

Para uniformidad, renombramos k como n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

Reemplazado cada serie en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Agrupamos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n\right] x^n = 0$$

Para que esta igualdad se cumpla para todo x, el coeficiente de cada potencia debe anularse (el coeficiente de x^n debe ser cero):

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Usamos los coeficientes iniciales a_0, a_1 arbitrarios:

- $a_2 = \frac{a_0}{2\cdot 1} = \frac{a_0}{2}$
- $a_3 = \frac{a_1}{3\cdot 2} = \frac{a_1}{6}$
- $a_4 = \frac{a_2}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{2\cdot 12} = \frac{a_0}{24}$
- $a_5 = \frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{a_1}{6\cdot 20} = \frac{a_1}{120}$
- y así sucesivamente

Agrupamos los términos:

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$\boxed{y(x) = a_0 \cosh(x) + a_1 \sinh(x)}$$

que es la solución general de la ecuación $y'' - y = 0$, expresada como una serie de potencias centrada en $x = 0$.

Ejemplo 3

Ejemplos

Halle una solución mediante series de potencias para las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$(x^2 - 2x + 10)y'' + xy' - 4y = 0$$

usando una serie de potencias centrada en $x_0 = 0$. Se indica que el radio de convergencia es $R = 10$.

Solución
Supongamos la solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustitución en la ecuación Multiplicamos cada término de la ecuación por la expresión correspondiente:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 2x + 10)y'' &= (x^2 - 2x + 10) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 10 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\
-4y &= -4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

Agrupamos todos los términos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 10\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Cambiar índices para combinar Hacemos el cambio de índice para igualar las potencias de x^n:

- En la tercera suma: cambia $n \to n+2$
- En la segunda suma: cambia $n \to n+1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+1-1)a_{n+1} x^{n+1-1} + 10\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1)a_{n+2} x^{n+2-2}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Ahora, vemos que cuando $n=0$ o $n=1$, el término se evalúa a cero, por lo que podemos añadir estos términos a nuestra suma.

$$\underbrace{(0)(0-1)a_0 x^0}_{n=0} + \underbrace{(1)(1-1)a_1 x^1}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$$
$$- \underbrace{2(0+1)(0)a_{0+1} x^0}_{n=0} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n$$
$$+ 10\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$
$$+ \underbrace{(0)a_0 x^0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n + 10\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Después de ajustar todos los términos, agrupamos por potencias de x^n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[10(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)(n)a_{n+1} + n(n-1)a_n + na_n - 4a_n\right]x^n = 0$$

El coeficiente de x^n debe ser cero:

$$10(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)(n)a_{n+1} + [n(n-1)+n-4]a_n = 0$$

Simplificando:

$$10(n+2)(n+1)a_{n+2} = 2(n+1)(n)a_{n+1} - [n^2-4]a_n \Rightarrow a_{n+2} = \frac{2(n+1)(n)a_{n+1} - [n^2-4]a_n}{10(n+2)(n+1)}$$

Solución formal Cálculo de coeficientes Sea $a_0 = A$, $a_1 = B$, una constante arbitraria, de la ecuación del caso $n = 0, 1$, la recurrencia permite calcular $a_2, a_3, \ldots$

- $n = 0$

$$a_2 = \frac{4a_0}{20} = \frac{4}{20}A$$

- $n = 1$

$$a_3 = \frac{4a_2 - 3a_1}{60} = \frac{4a_2 - 3B}{60} = \frac{\frac{4}{5}A - 3B}{60} = \frac{4}{75}A - \frac{1}{20}B$$

- $n = 2$

$$a_4 = \frac{12}{120}a_3 = \frac{12}{120}\left(\frac{4}{75}A - \frac{1}{20}B\right) = \frac{2}{375}A - \frac{1}{200}B$$

- y así sucesivamente

La solucion es de la forma

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad \text{con } R = 10$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A + Bx + \frac{4}{20}Ax^2 + \left(\frac{4}{75}A - \frac{1}{20}B\right)x^3 + \left(\frac{2}{375}A - \frac{1}{200}B\right)x^3 + \cdots}$$

Ejemplo 4

Ejemplos

Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 - 25)y'' + 2xy + y = 0$$

usando una serie de potencias centrada en $x_0 = 1$. Se indica que el radio de convergencia es $R = 4$.

Solución
Supongamos que la solución es de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

Entonces sus derivadas son:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

Sustituimos $y(x)$, $y''(x)$ en la ecuación:

$$(x^2 - 25)y'' + 2xy + y = 0$$

Esto se convierte en:

$$\underbrace{(x^2 - 25)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} + 2\underbrace{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0$$

Nota: Para continuar se deben expandir los factores como x y $x^2 - 25$ en términos de $(x-1)$, por ejemplo:

$$\begin{aligned} x &= (x-1) + 1 \\ x^2 &= [(x-1)+1]^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \\ x^2 - 25 &= (x-1)^2 + 2(x-1) - 24 \end{aligned}$$

Sustituir y agrupar Al sustituir esto en la serie y multiplicar, se reorganizan las potencias de $(x-1)^n$, luego se igualan coeficientes a cero para obtener una relación de recurrencia entre los coeficientes a_n.

$$\underbrace{\left[(x-1)^2+2(x-1)-24\right])}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}+2\underbrace{[(x-1)+1]}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^n+2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-1}-24\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$
$$+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n=0$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)+3]a_n(x-1)^n$$
$$+2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-1}-24\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}=0$$

Cambiar índices para combinar Hacemos el cambio de índice para igualar las potencias de x^n:

- En la tercera suma: cambia $n \to n+1$
- En la cuarta suma: cambia $n \to n+2$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)+3]a_n(x-1)^n$$
$$+2\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+1-1)a_{n+1}(x-1)^{n+1-1}-24\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+2-1)a_{n+2}(x-1)^{n+2-2}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x-1)^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)+3]a_n(x-1)^n$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} 2(n+1)na_{n+1}(x-1)^n - \sum_{n=2}^{\infty} 24(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[2a_n + [n(n-1)+3]a_n + 2(n+1)na_{n+1} - 24(n+2)(n+1)a_{n+2}\Big](x-1)^n = 0$$

$$[n^2-n+5]a_n + 2(n+1)na_{n+1} - 24(n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{[n^2-n+5]a_n + 2(n+1)na_{n+1}}{24(n+2)(n+1)}$$

Cálculo de coeficientes Sea $a_0 = A$, $a_1 = B$, una constante arbitraria, de la ecuación del caso $n = 0, 1$, la recurrencia permite calcular $a_2, a_3, \ldots$

- $n = 0$

$$a_2 = \frac{1}{48}a_0 = \frac{1}{48}A$$

- $n = 1$

$$a_3 = \frac{5a_1 + 4a_2}{144} = \frac{5B + 4\frac{1}{48}A}{144} = \frac{5B + \frac{1}{12}A}{144}$$

- $n = 2$

$$a_4 = \frac{7a_2 + 12a_3}{288}$$

- y así sucesivamente

Finalmente, obtenemos:

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + a_4(x-1)^4 + \ldots$$

$$y(x) = A + B(x-1) + \frac{1}{48}A(x-1)^2 + \left(\frac{5B + \frac{1}{12}A}{144}\right)(x-1)^3 + \left(\frac{7a_2 + 12a_3}{288}\right)(x-1)^4 + \ldots$$

con coeficientes a_n determinados por la relación de recurrencia obtenida.
Radio de convergencia: $R = 4$, por lo tanto la serie converge en $|x-1| < 4$

Ejemplo 5

Ejemplos

Halle una solución mediante series de potencias para las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$(x^2 - 1)y'' + 6xy' + 4y = -4$$

Solución
Supongamos una solución de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces sus derivadas son:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Multiplicamos cada término:

$$(x^2 - 1)y'' = x^2 y'' - y''$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$-y'' = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$(x^2 - 1)y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$6xy' = 6x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n$$

$$4y = \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n$$

Sustituimos todo en la ecuación:

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{n\to n+2}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = -4$$

Cambiar índices para combinar : Hacemos el cambio de índice $n \to n+2$ para igualar las potencias de x^n:

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1)a_{n+2} x^{n+2-2}}_{\text{indice empieza en cero}}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = -4$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = -4$$

Ahora, vemos que cuando $n = 0$ o $n = 1$, el término se evalúa a cero, por lo que podemos añadir estos términos a nuestra suma.

$$\left[\underbrace{(0)(0-1)a_0 x^0}_{n=0} + \underbrace{(1)(1-1)a_1 x^1}_{n=1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n\right] + \underbrace{6(0)a_0 x^0}_{n=0}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = -4$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n\right] + \sum_{n=0}^{\infty} 6na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = -4$$

Juntamos todos los términos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)a_n+6na_n+4a_n\right]x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=-4$$

Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n^2+5n+4)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}\right]x^n=-4$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+1)a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}\right]x^n=-4$$

Comparación de coeficientes El término del lado derecho es $-4=-4x^0$, entonces:

$$(0^2+5\cdot 0+4)a_0-2\cdot 1\cdot a_2=-4\Rightarrow \boxed{4a_0-2a_2=-4}$$

Relación de recurrencia: Dado que $n\geq 1$, $n+1\neq 0$, vemos que

$$(n+4)\cancel{(n+1)}a_n-(n+2)\cancel{(n+1)}a_{n+2}=0\Rightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{n+4}{n+2}a_n}$$

Cálculo de coeficientes
Sea $a_0=A$, $a_1=B$, constantes arbitrarias, de la ecuación del caso $n=0,1$:

$$4A-2a_2=-4\Rightarrow a_2=2A+2=2(A+1)$$

Luego $n=2$:

$$a_{2+2}=a_4=\frac{2+4}{2+2}a_2=\frac{6}{4}a_2=\frac{3}{2}(2(A+1))=3(A+1))$$

Luego $n=4$:

$$a_{2+4}=a_6=\frac{(4+4)}{4+2}a_4=\frac{8}{6}a_4=\frac{4}{3}(3(A+1))=4(A+1))$$

Luego $n=4$:

$$a_{2+6}=a_8=\frac{(6+4)}{6+2}a_6=\frac{10}{8}a_6=\frac{5}{4}(4(A+1))=5(A+1))$$

y así sucesivamente.

En general,

$$a_{2n} = (n+1)(a_0+1) = (n+1)(A+1)$$

Luego $n = 1$:

$$a_{2+1} = a_3 = \frac{1+4}{1+2} a_1 = \frac{5}{3} a_1 = \frac{5}{3} B$$

Luego $n = 3$:

$$a_{2+3} = a_5 = \frac{(3+4)}{3+2} a_3 = \frac{7}{5} a_3 = \frac{7}{5}\frac{5}{3} B = \frac{7}{3} B$$

Luego $n = 4$:

$$a_{2+5} = a_7 = \frac{(5+4)}{5+2} a_5 = \frac{9}{7} a_5 = \frac{9}{7}\frac{7}{3} B = \frac{9}{3} B$$

y así sucesivamente.
En general,

$$a_{2n+1} = \frac{2n+3}{3} a_1 = \frac{2n+3}{3} B$$

Solución en serie

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(A+1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3}\right) B x^{2n+1}$$

Referencias

- Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 9th ed.
- Reitz, J.R., Milford, F.J., Christy, R.W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, 4a ed.

Gracias por su atención

¿Preguntas?