Ecuaciones diferenciales
Variables separables

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

18 de mayo de 2025

Contenido

¿Qué es una Ecuación de Variables Separables?

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

es una **ecuación de variables separables** si puede reescribirse como:

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx$$

y se puede resolver integrando ambos lados.

Procedimiento General

1. Identificar si la ecuación puede separarse.
2. Reescribir la ecuación con cada variable en un lado:

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx$$

3. Integrar ambos lados.
4. Resolver para y si es posible.
5. Aplicar condiciones iniciales si están dadas.

Ejemplo

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

- **Paso 1:** Separar variables:

$$\frac{1}{y}\,dy = x\,dx$$

- **Paso 2:** Integrar ambos lados:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

- **Paso 3:** Despejar y:

$$y = Ce^{x^2/2}$$

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+y^2}$$

- **Paso 1:** Separar variables:

$$(1+y^2)\,dy = x\,dx$$

- **Paso 2:** Integrar ambos lados:

$$\int (1+y^2)\,dy = \int x\,dx$$

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

- **Paso 3:** Dejar la solución en forma implícita (si no se puede despejar fácilmente y):

$$y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ejemplo con condición inicial

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y(0) = 3$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{1}{y}dy = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

- **Aplicamos la condición inicial:**

$$\ln|3| = 0 + C \Rightarrow C = \ln 3$$

$$\ln|y| = x^2 + \ln 3 \Rightarrow \boxed{y = 3e^{x^2}}$$

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\tan(x), \quad y(0) = 1$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{dy}{1+y^2} = \tan(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \tan(x)\,dx$$

$$\arctan(y) = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$y(x) = \tan(-\ln|\cos(x)| + C)$$

- **Aplicamos la condición inicial:**

$$1 = \tan(-\ln|\cos(0)| + C) \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{y(x) = \tan\left(-\ln|\cos(x)| + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Ejemplo

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1+x^2}$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$$

- **Integración:**

$$\int y^{-2}dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$-\frac{1}{y} = \arctan x + C$$

- **Solución general:**

$$y(x) = \frac{-1}{\arctan x + C}$$

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

- **Separación de variables:**

$$ydy = 2xdx$$

- **Integración:**

$$\int ydy = \int 2xdx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C$$

- **Solución general:**

$$y(x) = \pm\sqrt{2x^2 + 2C}$$

Ejemplo con condiciones iniciales

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad y(0) = 2$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{dy}{y} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

- **Aplicamos la condición inicial:**

$$2 = C_1 e^0 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$\boxed{y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

- **Solución general:**

$$y(x) = C_1 x$$

donde $C_1 = \pm e^C$.

Ejemplo

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{1}{y} dy = \cos x dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x dx$$

$$\ln |y| = \sin x + C$$

- **Solución general:**

$$y(x) = \pm e^{\sin x + C} = C_1 e^{\sin x}$$

donde $C_1 = \pm e^C$.

Resolver

$$y^{e^x} dy = (e^{-y} + e^{2x-y}) dx$$

- **Reescribir la ecuación:**

$$y^{e^x} dy = e^{-y}(1 + e^{2x}) dx$$

- **Separación de variables:**

$$\frac{y^{e^x}}{e^{-y}} dy = (1 + e^{2x}) dx$$

$$\ln(y^{e^x}) = e^x \ln(y), \quad \ln(e^{-y}) = -y$$

$$-e^x \frac{\ln(y)}{y} dy = (1 + e^{2x}) dx$$

- Integrar ambos lados:

$$-\int \frac{\ln(y)}{y} dy = \int \left(\frac{1}{e^x} + e^x \right) dx$$

$$-\frac{(\ln(y))^2}{2} = -e^{-x} + e^x + C \Rightarrow y = e^{\sqrt{2(e^{-x} - e^x) + C}}$$

Resumen

- Las ecuaciones de variables separables permiten integrar cada lado de la ecuación por separado.
- Muy útiles para resolver muchos problemas físicos y modelos simples.
- Siempre verificar si la ecuación puede separarse.
- Condiciones iniciales permiten determinar la constante de integración.
- El método es directo y útil para modelar procesos físicos y biológicos.

¿Qué es una solución de una ecuación diferencial?

Una función $y = y(x)$ es una **solución** de una ecuación diferencial si, al sustituirla en la ecuación, se verifica la igualdad.

Dos formas comunes:

- **Solución Explícita:** Una solución **explícita** tiene la forma $y = f(x)$
- **Solución Implícita:** Una solución **implícita** puede ser una ecuación entre x y y que no se puede despejar fácilmente, tiene la forma $F(x, y) = C$

Comparación

	Explícita	**Implícita**
Forma	$y = f(x)$	$F(x, y) = C$
Despejada	Sí	No necesariamente
Solución directa	Sí	Puede requerir despeje
Ejemplo	$y = x^2 + C$	$x^2 + y^2 = C$

Conclusión

- Una solución explícita permite conocer directamente el valor de y para un valor dado de x.
- Una solución implícita puede ser útil cuando no se puede despejar y fácilmente.
- Ambas representan soluciones válidas a ecuaciones diferenciales.

Ejemplos

- Una **solución explícita** es una función $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial directamente.

  Resolver
  $$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Solución:

$$y(x) = x^2 + C$$

Es una solución explícita porque se despeja y como función de x.

- Una **solución implícita** es una ecuación de la forma $F(x, y) = C$ que representa una familia de curvas que satisfacen la ecuación diferencial.

  Resolver
  $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Solución:

Separando variables:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 1$$

Ecuación lineal:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = \frac{1}{x}$$

Multiplicamos e integrando:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow \boxed{y = x\ln|x| + Cx}$$

Esta expresión también puede escribirse como una solución implícita:

$$F(x, y) = y - x\ln|x| - Cx = 0$$

Gracias por su atención

¿Preguntas?