Ecuaciones Diferenciales

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

18 de mayo de 2025

Contenido

1. Objetivo
2. ¿Qué es una ecuación diferencial?
3. Clasificacións de las ecuaciones diferenciales
   - Clasificación según el orden
   - Clasificación segun el grado
   - Ejemplos
   - Ejercicios
   - Clasificación por linealidad
   - Ejemplos
   - Ejercicios
4. Tipos de soluciones de las ecuaciones diferenciales
   - Ejemplos
   - Ejercicios
5. Función vs solución
6. Familia de soluciones
   - Ejemplos
7. Sistema de EDOs
8. PVIs de primer y segundo orden
   - Ejemplos
9. Teorema de existencia
   - Ejemplos
10. Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.
    - Ejemplos

Objetivo

Identificar la clasificación que tienen las ecuaciones diferenciales y algunas posibles aplicaciones de las mismas por medio de ejercicios planteados en el salón de clase para la solución de problemas reales.

¿Qué es una Ecuación Diferencial?

Una **Ecuación Diferencial (en general)** es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida. Estas derivadas pueden ser:

- Derivadas ordinarias (respecto a una sola variable independiente),
- Derivadas parciales (respecto a varias variables independientes).

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \quad o \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Clasificación:

- **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)**: Una EDO es una ecuación diferencial en la que:
  - Solo hay una variable independiente,
  - Las derivadas que aparecen son ordinarias, es decir, derivadas con respecto a una sola variable.

  $$\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

  Aquí, y es función de una sola variable x.
- **Ecuación Diferencial Parcial (EDP)**: Una EDP involucra derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes.

  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  Aquí, $u = u(x, t)$ depende de dos variables x y t, y se usan derivadas parciales.

Comparación General

	EDO	EDP
Variables independientes	1	2 o más
Tipo de derivada	Ordinaria	Parcial
Ejemplo típico	$\frac{dy}{dx} = y$	$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
Soluciones	Funciones de una variable	Funciones multivariables

Ecuación Diferencial (ED) : Es aquella ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes.

$$y(x) = e^{0{,}1\;x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0{,}2\;x\;\underbrace{e^{0{,}1\;x^2}}_{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0{,}2\;x\;y$$

Es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes.

$$\frac{\overbrace{dy}^{\text{dependiente}}}{\underbrace{dx}_{\text{independiente}}} = 0{,}2\quad\underbrace{x}_{\text{independiente}}\;\underbrace{y}_{\text{dependiente}}$$

Imaginemos que nos dan directamente esta ecuación.

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Intentaremos contestar preguntas del tipo:

- ¿Qué función representa $y(x)$?
- ¿Cómo se resuelve semejante ecuación?

Las ecuación diferenciales se clasifican por **TIPO, ORDEN y LINEALIDAD**

Clasificación segun el TIPO

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): Una ecuación que contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes de una sola variable independiente, por ejemplo.

(a)

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

(b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Una EDO puede contener más de una variable dependiente, $x(t), y(t)$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Ecuación diferencial parcial (EDP): Una ecuación que contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes, ejemplo de EDP

(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

Notaciones

- Notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} \quad \text{ó} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + w_o^2\, y = 0$$

- Notación con primas:

$$y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)} \quad \text{ó} \quad y^{''} + w_o^2\, y = 0$$

- Notación de Newton: Regularmente se usa cuando la variable independiente es el tiempo.

$$\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots, \quad \text{ó} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2\, x = 0$$

- Notación de subíndice (derivadas parciales).

$$u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, \ldots, \quad \text{ó} \quad u_{xx} = u_{tt} - 2u_t$$

En la notación de Leibniz localizamos rápidamente cuál es la variable dependiente (y) y la independiente (x):

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Formas de EDO

- Forma diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

- Forma general

$$F(x,y,y^{'},y^{''},y^{'''},\ldots,y^{(n)}) = 0$$

- Forma normal

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = f(x,y,y^{'},y^{''},y^{'''},\ldots,y^{(n)})$$

Clasificación según el orden

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden mayor de la derivadas involucradas en la ecuación.

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segundo orden}} + 5\left(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{prime orden}}\right)^3 - 4y = e^x$$

Luego, es una EDO de segundo orden.
Nota: A veces escribiremos las EDOs en forma diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

Por ejemplo, supongamos que y es la variable dependiente y x la independiente en la EDO en forma diferencial:

$$\left.\begin{array}{rcr} (y-x)\,dx + 4x\,dy & = & 0 \\ y' & = & \frac{dy}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow y - x + 4xy' = 0$$

Forma general de orden n de una EDO:

$$F(\underbrace{x, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)}}_{n+2 \text{ variables}}) = 0$$

Forma normal de orden n de una EDO:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(\underbrace{x, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n-1)}}_{n+1 \text{ variables}}) = 0$$

Por ejemplo, las formas general y normal de la EDO $(4xy^{'} + y = x)$, son respectivamente:

$$4xy^{'} + y = x$$

$$F(x, y, y^{'}) = y^{'} - \frac{(x-y)}{4x} = 0$$

$$y^{'} = \frac{(x-y)}{4x} = f(x, y)$$

Clasificación segun el grado

El grado de una ED es el grado algebraico de su derivada de mayor orden. Es decir, el grado de una ED **es la potencia a la que esta elevada la derivada que nos da el orden de la ecuación diferencial**.

ejemplo: La siguiente ecuación diferencial

$$\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{orden dos, grado uno}} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

el termino que alverga la segunda derivada **nos da el orden de la ED, orden dos**, la potencia a la que esta elevada este termino **nos da el grado, es de primer grado**

Ejemplos

Determinar el grado de las siguientes ecuaciones:

(a)

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 3x^2 + 7$$

(b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = x^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

NOTA: cuando alguna derivada esté dentro de un radical o en polinomio, que a su vez esté elevado a una potencia fraccionaria, tendremos que eliminar dicho radical para determinar el grado de la ecuación diferencial.

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 7x^2 + 1$$

$$\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + x} = \sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}$$

Ejercicios

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $\frac{d^3y}{dx^3} = 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5y$

(b) $\frac{dy}{dx} + 18\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 8x + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5$

(c) $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + 3x} = \sqrt[5]{\frac{d^3y}{dx^3}}$

(d) $\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3} - 5x} = 8\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Clasificación por linealidad

Se dice que una EDO de orden n es lineal si F (en la forma general) es lineal en $(y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)})$.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots, +a_1(x)y^{'} + +a_0(x)y - g(x) = 0$$

o bien

$$a_n(x)\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} +, \ldots, +a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y - g(x) = 0$$

sea lineal se requiere cumplir las siguientes dos reglas.

- La variable dependiente y y todas sus derivadas $(y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)})$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada término que contiene y es igual a 1.
- Los coeficientes de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $(y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)})$ dependen de la variable independiente x.

Dos casos importantes para nosotros serán las EDOs lineales de **primer y segundo orden**.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y - g(x) = 0 \quad \textbf{(primer orden)}$$

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y - g(x) = 0 \quad \textbf{(segundo orden)}$$

$$a_n(x)\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}+a_{n-1}(x)\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}+,\ldots,+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

- **Lineal homogénea:** El término independiente $g(x)$ es nulo.
- **Lineal con coeficientes constantes:** Los coeficientes $a_0(x),\ldots,a_n(x)$ son constantes.
- **Lineal con coeficientes variables:** Enfatiza el hecho de que al menos uno de los coeficientes $a_0(x),\ldots,a_n(x)$ NO es constante.

En una **EDO lineal de orden** n:

1. $y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n)}$ son de primer grado.
2. Coeficientes $a_0(x),\ldots,a_n(x)$ dependen solo de la variable independiente x.

Ejemplos

- Las siguientes EDO **son lineales**.

(a)

$$(y - x)\, dx + 4x\, dy = 0$$

(b)

$$y^{''} - 2\, y^{'} + y = 0$$

(c)

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

- Las siguiente EDO **son NO lineales**.

(a)

$$\underbrace{(1-y)}_{\text{coeficiente depende de y}} \qquad y^{'} + 2y = e^x$$

(b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\sin y}_{\text{función no lineal de y}} = 0$$

(c)

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \underbrace{y^2}_{\text{función no lineal de y}} = 0$$

Ejercicios

Las siguientes EDO **¿son lineales o no lineales?**.

(a)

$$\frac{d\,v(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{RC}v(t)$$

(b)

$$\frac{d\,T}{dt} = K(T_a - T)$$

(c)

$$ml\;\ddot{\theta} + kl\;\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

(d)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

(e)

$$y^{'} + x^3 y + \sin(x) y^2 = x^2 - 1$$

(f)

$$y^{''} - \mu(1 - y^2)y^{'} + y = 0$$

Ejemplo: comprobación de una solución

Comprobar que la función indicada es la solución de la EDO dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$

- $$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \text{ con solución } y = \frac{x^4}{16}$$

  Solución : Existe la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{4}$ para todo x de $(-\infty, \infty)$

  - Lado izquierdo

  $$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

  - Lado derecho

  $$xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = x\frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$$

  y la igualdad se cumple para todo x de $(-\infty, \infty)$

- $$y^{''} - 2y^{'} + y = 0 \text{ con solución } y = xe^x$$

  Solución : Derivando la solución dos veces

  $$\begin{aligned} y^{'} &= xe^x + e^x \\ y^{''} &= xe^x + 2\,e^x \end{aligned}$$

  $$y^{''} - 2y^{'} + y = 0 \Rightarrow (xe^x + 2\,e^x) - (xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

  Nótese que $y(x) = 0$ también es solución tanto de este ejemplo como del anterior en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Se conoce como **solución trivial**

Solución de una EDO

Definición : La **función** ϕ, definida en un **intervalo** I, es solución si tiene n derivadas continuas en I, que al sustituirse en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reduce la ecuación a una identidad, se considera solución de la ecuación en el intervalo. En otras palabras, ϕ posee al menos n derivadas y cumple:

$$F(x, \phi(x), \phi^{'}(x), \phi^{''}(x), \phi^{'''}(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I$$

Intervalo de definición (I) : Siempre hemos de considerar una solución junto a su **intervalo I**, también llamado **intervalo de existencia, de validez o dominio de definición**.
Nota : Al proceso de obtención de las soluciones de una EDO se le denomina **integración de la ecuación**.
Una EDO puede tener:

- Infinitas soluciones:
$$y^{'} = y\cos x; \quad y(x) = C\, e^{\sin t}$$
- Una única solución:
$$(y^{'})^2 + y^2 = 0; \quad y(x) = 0$$
- Ninguna solución:
$$(y^{'})^2 + x^2 = 0$$

Ejemplo

Comprobar que la $y = x^2 + C$ no es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Solución Derivando $y = x^2 + C$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Sustituyendo el valor de la derivada encontrada en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} 2x &= x \\ 2 &\neq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto $y = x^2 + C$ no es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Ejemplo - Hagámoslo a la inversa

- Encuentre la ED cuya solución general es $y = C\,x^2$.
  Solución Observemos que sólo aparece una constante de integración, de manera que derivamos una sola vez la solución general $y = C\,x^2$. Así

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

  Como en esta derivada no aparecen constantes de integración, quiere decir que esta es la ED de la solución general propuesta.

- Encuentre la ED cuya solución general es $y = C\,x^2$.
  Solución Observemos que sólo aparece una constante de integración, de manera que derivamos una sola vez la solución general $y = C\,x^2$. Así

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

  Despejamos C de la solución general y se sustituye el valor encontrado en la ED.

$$C = \frac{y}{x^2} \qquad \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)x$$

  Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

  es la ED de la solución general, puesto que ya no aparecen constantes de integración.

Ejercicios

Determine si cada ecuación es solución o no de la ecuación diferencial dada:

(a)
$$y = x^2 + Cx; \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2 + y$$

(b)
$$y = A\sin(5x) + B\cos(5x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$

(c)
$$y = C(x-C)^2; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0$$

(d)
$$y = C^2 + Cx^{-1}; \quad y + xy' = x^4(y')^2$$

(e)
$$e^{\cos x}(1-\cos y) = C; \quad \sin y\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin x \cos y = \sin x$$

(f)
$$y = 8x^2 + 3x^2 + C; \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 6 = 160x^3$$

Ejercicios

Encuentra la ED de cada una de las siguientes soluciones generales

(a)

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

(b)

$$y = \tan(3x + C)$$

(c)

$$(x - C_1) + y^2 = C_2^2$$

Función vs solución

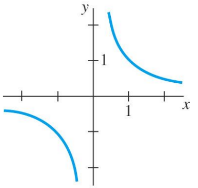
La gráfica de una solución de una EDO se llama curva solución y es continua en su intervalo de definición. Aunque las soluciones de EDO son funciones diferenciables y, por lo tanto, continuas, puede haber diferencias entre la gráfica de la función solución y la gráfica de la EDO.

- **Curva solución:** La gráfica de una solución de una EDO se llama curva solución o curva integral.
- **Continuidad:** Toda solución de una EDO es una función diferenciable, y por tanto, continua en su intervalo de definición.
- **Diferencias:** Aunque las soluciones son continuas, su gráfica puede no coincidir con la forma general de la EDO en todos los puntos.

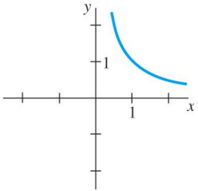
Por ejemplo

(a) $y = \frac{1}{x}$ considerada como una función, tiene dominio de definición $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Es discontinua y **NO diferenciable en** $x = 0$.

(b) $y = \frac{1}{x}$ es también solución de $xy' + y = 0$. Se entiende que es solución en algún intervalo I en el que es diferenciable y cumple la EDO. Por ejemplo, en $(0, \infty)$.



(a) Function $y = 1/x$, $x \neq 0$



(b) Solution $y = 1/x$, $(0, \infty)$

- **Solución explícita de una EDO** La variable dependiente está expresada solamente en términos de variables independientes y constantes. Por ejemplo, la solución de $xy' + y = 0$ en $(0, \infty)$ es $y = F(x) = \frac{1}{x}$.
- **Solución implícita de una EDO** Una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una EDO en un intervalo I, siempre que exista al menos unafunción $y = F(x)$ que satisface tanto la relación como la ED en I.

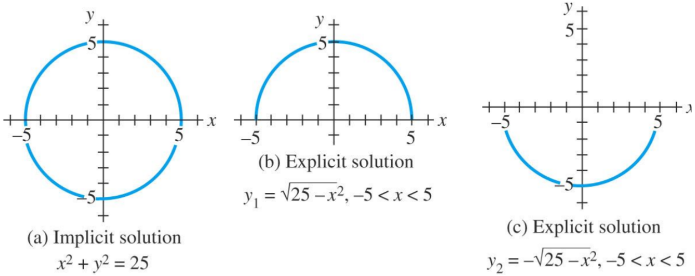
Ejemplo: Comprobación de una solución implícita. $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ en el intervalo $-5 < x < 5$; puesto que al derivar de forma implícita respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25), \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

obtenemos la EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Despejando y de la solución implícita podemos encontrar dos soluciones explícitas:



(a) Implicit solution $x^2 + y^2 = 25$

(b) Explicit solution $y_1 = \sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$

(c) Explicit solution $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$

Familia de soluciones o solución general

Al resolver una EDO de primer orden $F(x, y, y^{'}) = 0$, en general, se obtiene una solución que contiene una constante arbitraria o parámetro c. Una solución así, $G(x, y, c) = 0$ representa en realidad a un conjunto de soluciones, llamado **familia uniparamétrica de soluciones**.

Cuando se resuelve una EDO de orden n, se busca una **familia n-paramétrica de soluciones** $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Observemos que el número de constantes arbitrarias en la solución general está determinado por el orden de la EDO.

Solución particular : Es una solución libre de parámetros arbitrarios. Por ejemplo

$$y = cx - x\cos x$$

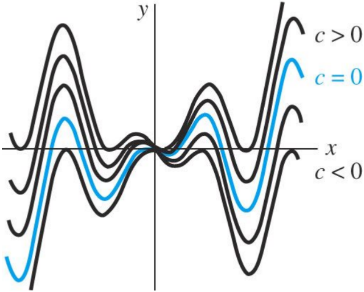
es la solución general de

$$xy^{'} - y = x^2 \sin x$$

en $(-\infty, \infty)$; una **familia uniparamétrica de soluciones**. Tomando $c = 0$, tenemos,

$$y = xcosx$$

una **solución particular**



Ejemplo

Sin explicitarlo, hemos visto que las **variables independientes y dependientes** pueden usar símbolos distintos a x e y. Por ejemplo:

$$x = c_1 \cos(4t), \quad x = c_2 \sin(4t)$$

con c_1 y c_2 constantes o parámetros arbitrarios, son ambas soluciones de la EDO:

$$x'' + 16x = 0$$

Podemos comprobar fácilmente que la suma

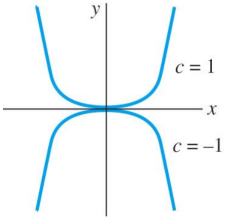
$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$$

es también una solución.

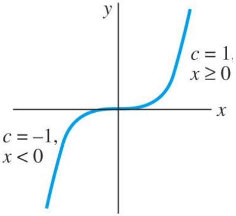
Solución Definida por Partes : Podemos comprobar que la familia uniparamétrica $y = cx^4$ es una solución de $xy - 4y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.. La función definida a trozos:

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular donde elegimos $c = -1$ para $x < 0$ y $c = 1$ para $x = 0$.



(a)



(b)

Solución singular

Una solución que no puede obtenerse al especificar los valores de los parámetros de la familia de soluciones.

Por ejemplo:

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$$

es la familia de soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

sin embargo $y(x) = 0$ también es una solución de la ED anterior. No podemos encontrar ningún valor de c en la familia de soluciones

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2$$

que nos proporcione la solución y $= 0$, así que llamamos a $y = 0$, solución singular.

Sistema de EDOs

Dos o más ecuaciones con las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente.

Ejemplo de sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y) \end{aligned}$$

Problemas de valores iniciales (PVI)

En un intervalo I que contiene a x_o, encontrar la solución de una **ecuación diferencial (ED)** de la forma

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = f(x, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \ldots, y^{(n-1)})$$

que además satisfaga las **condiciones adicionales (CI)** en $y(x)$ y en sus derivadas,

$$y(x_o) = y_o, y^{'}(x_o) = y_1, y^{''}(x_o) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1}$$

donde $y_o, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ son contantes reales arbitrarias dadas, se llama **problema con valores iniciales (PVI)**, o problema con valores iniciales de **n-ésimo orden**.

Definición: Los valores de $y(x)$ de sus derivadas en el punto, es decir

$$y(x_o) = y_o, y^{'}(x_o) = y_1, y^{''}(x_o) = y_2, \ldots, y_{(}^{(n-1)} x_o) = y_{n-1}$$

se llaman **condiciones adicionales (CI)**. El usar las CI nos permite obtener una solución particular de la familia de soluciones.

Nota: De manera resumida podemos decir que un problema con valores iniciales es la ecuación diferencial acompañada de condiciones iniciales.

PVIs de primer y segundo orden:

En el caso de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden tendríamos el siguiente PVI respectivamente:

- Resolver
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{sujeto a} \quad y(x_o) = y_o$$
- Resolver
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y^{'}), \quad \text{sujeto a} \quad y(x_o) = y_o, y^{'}(x_o) = y_1$$

Geométricamente, un PVI de primer orden consiste en encontrar la solución de una ED en un intervalo I que contenga a x_0, cuya gráfica pase por el punto (x_0, y_0).

Ejemplo: Hallar la solución de ED

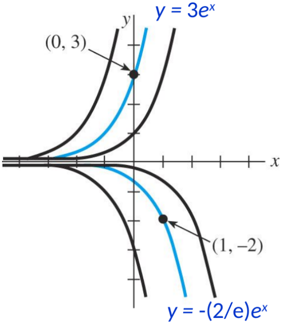
$$y' = y, \quad y(0) = 3; \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \\ \ln y + c_1 &= x + c_2 \Rightarrow \ln y = x + c \\ y &= e^{x+c} = e^c e^x = Ce^x \end{aligned}$$

la familia de soluciones uniparamétrica de la ED

$$y = Ce^x \quad I = (-\infty, \infty)$$



Ejemplo

- De las CI sabemos que $(x, y) = (0, 3)$. Sustituimos estos valores en la familia solución, y obtenemos la solución particular

$$3 = Ce^0 = C \Rightarrow y = 3e^x$$

- Si queremos una solución que pase por $(1, -2)$, entonces la condición es $y(1) = -2$.

$$-2 = Ce \Rightarrow C = -2e^{-1} \Rightarrow y = -\frac{2}{e}e^x$$

Ejemplo

Si tenemos una ecuación de segundo orden o mayor, lo que tenemos que hacer es derivar la solución las veces que sea necesaria para sustituir los valores iniciales.

Hallar una solución del siguiente PVI

$$\ddot{x} + 16x = 0, \quad x(\pi/2) = -2, \quad \dot{x}(\pi/2) = 1.$$

Solución:

$$x = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$$

es solución de

$$\ddot{x} + 16x = 0$$

- Sustituimos $x(\pi/2) = -2$ en

  $$x = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$$

  obtenemos $c_1 = -2$
- De la misma manera, sustituimos $\dot{x}(\pi/2) = 1$ en

  $$\dot{x} = -4c_1 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t)$$

  obtenemos $c_2 = \frac{1}{4}$.

La solución es:

$$x = -2\cos 4t + \frac{1}{4}\sin 4t$$

Ejemplo

La solución de

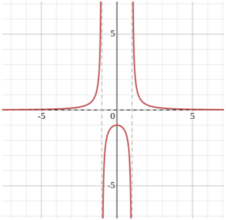
$$y' + 2xy^2 = 0$$

es

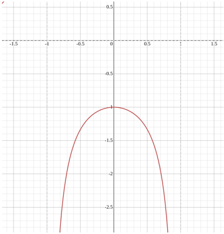
$$y = \frac{1}{x^2 + c}$$

Si imponemos la IC $y(0) = -1$, obtenemos $c = -1$.

1. Como función, el dominio de $y = \frac{1}{(x^2-1)}$ es el conjunto de todos los números reales excepto -1 y 1.
2. Como una solución: los intervalos de definición mayores posibles son $(-\infty, 1), (-1, 1)$ y $(1, \infty)$.
3. Como un problema de valor inicial, con $y(0) = -1$. El intervalo de definición mayor es $(-1, 1)$.



funcion definida $\forall x$, excepto $x = \pm 1$



funcion definida en el intervalo containiendo $x = 0$

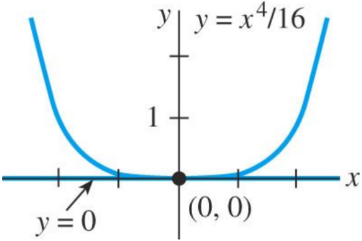
Existencia y unicidad

¿Existe siempre una solución para un problema de valor inicial (PVI)? Y si existe una solución, ¿es única?

Ejemplo: Las soluciones $y = \frac{x^4}{16}$ e $y = 0$ satisfacen la ED

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

y también el valor inicial $y(0) = 0$, esta ED tiene al menos dos soluciones:



Teorema de existencia de una solución única

Establece las condiciones para garantizar que una ecuación diferencial de primer orden, junto con una condición inicial, tenga una solución única.

Teorema: Considere El PVI

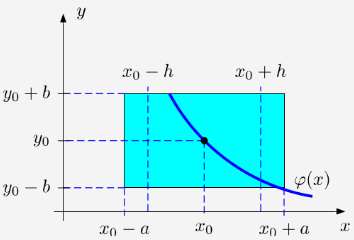
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_o) = y_o$$

Si f y $\frac{df}{dy}$ son continuas en el la región rectangular definida por $R = [x_o - a, x_o + a] \times [y_o - b, y_o + b]$ que contiene el punto (x_o, y_o) en su interior, entonces existe una unica solució del PVI definida en (al menos) un entorno de x_o.

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_o + \int_{x_o}^{x} f(t, y_{n-1})dt \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ y_o &= y_o(x) \end{aligned}$$

Si se cumple las hipotesis del teorema, se puede probar que la sucesion $\{y_n(n)\}_{n\geq 0}$ converge a la solucion del PVI en el intervalo $(x_o - h <, x_o + h)$, contenido en $(x_o - a, x_o + a)$, donde

$$h = \text{mín}\left(a, \frac{a}{M}\right) \text{ y } M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$



Vimos que

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

tenía como soluciones a

$$y = \frac{x^4}{16} \text{ e } y = 0$$

La inspección de las funciones:

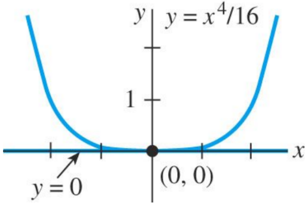
$$f(x, y) = xy^{1/2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

muestra que son continuas en el semiplano superior y > 0. Basándonos en el teorema de existencia de una solución única, concluimos que para cada punto (x_o, y_o), con $y_o > 0$, existe un intervalo centrado en xo en el que esta ED tiene una solución única.

Intervalo de existencia y unicidad

Suponiendo que $y(x)$ es una solución de un PVI, los siguientes conjuntos pueden no ser los mismos:

- el dominio de $y(x)$,
- el intervalo de definición de $y(x)$ como solución,
- el intervalo Io de existencia y unicidad.

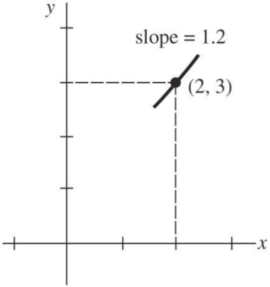


Curvas solución sin una solución

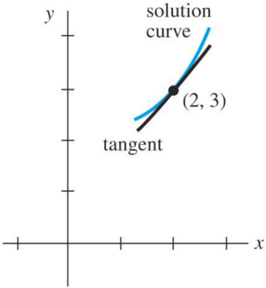
Empezaremos nuestro estudio de EDOs de primer orden analizando una EDO cualitativamente.

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}2\ x\ y = f(x,y)$$

- **Pendientes:** Debido a que la solución $y(x)$ de $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ es necesariamente una función diferenciable en I, también es continua. Así, la derivada $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ proporciona las pendientes de las rectas tangentes a las curvas solución en los puntos (x,y).
- **Elementos lineales:** Suponemos que $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. El valor $f(x,y)$ representa la pendiente de una recta, o un segmento de recta que llamaremos elemento lineal.



Solucion a la curva que pasa por $(2,3)$

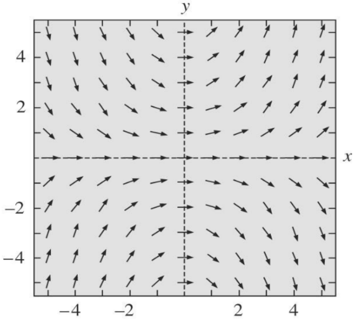


$f(2,3) = 1{,}2$ es la pendiente de la linea recta en $(2,3)$

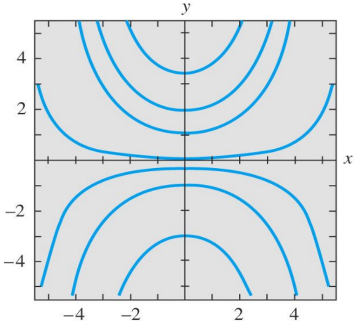
Campo de direcciones

Si para la EDO $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se evalúa f en una red o malla de puntos rectangular en el plano xy, y se dibuja un elemento lineal en cada nodo (x, y) de la malla con pendiente $f(x, y)$, obtenemos el campo de direcciones o campo de pendientes.

Ejemplo: El campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 0{,}2\ x\ y$ está representado en la figura (a). Compárese con la figura (b) donde se han representado unas curvas de la familia de soluciones.



Campo de direcciones de $\frac{dy}{dx} = 0{,}2\ x\ y$



Algunas curvas de la familia solucion $y = ce^{0,1x^2}$

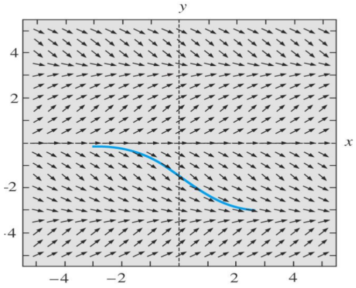
Ejemplo

Use un campo de direcciones para dibujar una curva solución aproximada para

$$\frac{dy}{dx} = \sin y, \text{ con } y(0) = -\frac{3}{2}$$

Solución:

Apelando a la continuidad de $f(x, y) = \sin y$ y $\frac{df}{dy} = \cos y$, el teorema de existencia y unicidad garantiza la existencia de una única curva solución que pasa por algún punto especificado en el plano. Ahora dividimos la región que contiene a $(-3/2, 0)$ en una malla rectangular. Calculamos el elemento lineal de cada nodo para obtener la siguiente figura



EDs de primer orden autónomas

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

Una EDO en la que la variable independiente no aparece de manera explícita es autónoma.
Nota: Recordemos que si,

- si $\frac{dy}{dx} > 0$ para todo $x \in I$, entonces $y(x)$ es creciente en I.
- si $\frac{dy}{dx} < 0$ para todo $x \in I$, entonces $y(x)$ es decreciente en I.

Puntos críticos Los ceros de $f(x)$ en la EDO autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

son puntos especialmente importantes.

- Si $f(c) = 0$, c es un punto crítico, punto de equilibrio o punto estacionario.
- Si sustituimos $y(x) = c$ en $\frac{dy}{dx} = f(y)$, obtenemos $0 = 0$, de modo que si c es un punto crítico, entonces $y(x) = c$ es una solución de $\frac{dy}{dx} = f(y)$.
- Una solución $y(x) = c$ constante, se llama solución de equilibrio. Los equilibrios son las únicas soluciones constantes de $\frac{dy}{dx} = f(y)$

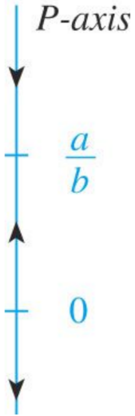
Ejemplo

La ecuación logísitca

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$$

con un valor inicial especificado es una ecuación diferencial de primer orden que modela el crecimiento poblacional, es autónoma, donde a y b son constantes positivas:

- $\frac{dP}{dt}$: Representa la tasa de cambio de la población (P) con respecto al tiempo (t).
- p : Es la variable que representa la población en un momento dado.
- a : Es la tasa de crecimiento intrínseca de la población, es decir, la tasa a la que la población crecería en ausencia de restricciones ambientales.
- b : Es la influencia de la densidad de la población en el crecimiento. Indica cómo el crecimiento de la población se ve afectado por su propio tamaño.



La ecuación sugiere que la población tiende hacia un **punto de equilibrio (o capacidad de carga)**, donde el crecimiento se estabiliza. Este punto de equilibrio se alcanza cuando

$$f(P) = P(a - bP) = 0$$

Curvas solución

tiene dos puntos fijos

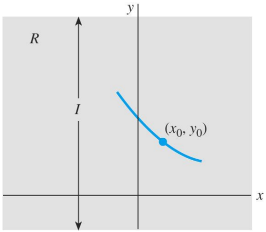
$$P(t) = 0 \text{ y } P(t) = a/b$$

Colocamos los puntos críticos en una recta vertical (recta fase), que la divide en tres intervalos. Las flechas en la figura indican el signo algebraico de $f(P) = P(a - bP)$ en ese intervalo.

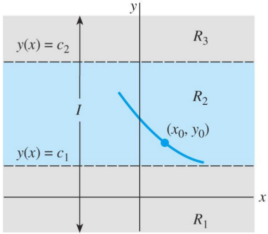
- Si el signo es positivo, entonces P es creciente en este intervalo.
- Si el signo es negativo, entonces P es decreciente en este intervalo.

Si garantizamos la existencia y unicidad de la EDO autónoma $\frac{dy}{dx} = f(y)$, (f y f' son continuas en un intervalo I), por cada punto (x_0, y_0) en R, pasa una sola curva solución.

Supongamos que la EDO autónoma presenta dos puntos críticos, c_1, y c_2, tales que $c_1 < c_2$. Las gráficas de las soluciones de equilibrio $y(x) = c_1, y(x) = c_2$ son rectas horizontales y dividen R en tres regiones, a los que podemos llamar R_1, R_2 y R_3 como en la figura.



Region R

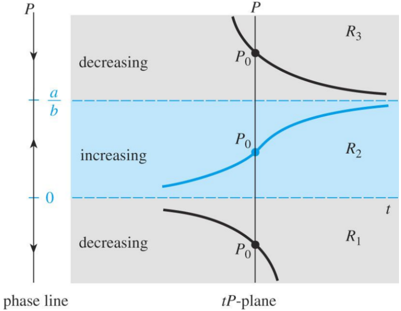


Region R_1, R_2 y R_3

1. Si (x_0, y_0) está en $R_i, i = 1, 2, 3$, una solución $y(x)$ que pasa por (x_0, y_0), permanecerá en la misma subregión.
2. Por continuidad de f , $f(y)$ es mayor o menor que cero y no puede cambiar de signo en una subregión.
3. Como $\frac{dy}{dx} = f(y(x))$ es o positiva o negativa en R_i, cualquier solución $y(x)$ es monótona en R_i.

Sea $P_o = P(0)$, una solución que pasa por P_0, tenemos tres tipos de curvas solución dependiendo del intervalo al que pertenece P_0

1. $R_1 : (-\infty, 0)$, Si $P_o \in (0, 0)$, entonces $P(t) \to 0$ según $t \to \infty$ con $P(t)$ decreciente.
2. $R_2 : (0, a/b)$, Si $P_o \in (0, \frac{a}{b})$, entonces $P(t) \to \frac{a}{b}$ según $t \to \infty$ con $P(t)$ creciente.
3. $R_3 : (a/b, \infty)$, Si $P_o > \frac{a}{b}$, entonces $P(t) \to \frac{a}{b}$ según $t \to \infty$ con $P(t)$ decreciente.

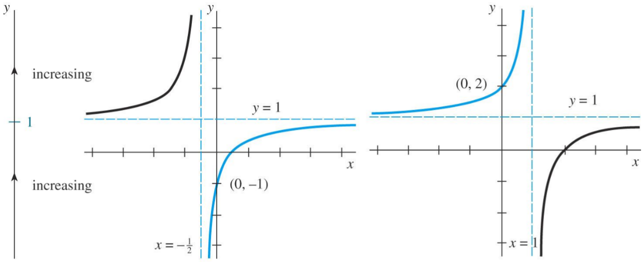


Subregiones R_1, R_2 y R_3

Ejemplo

- La ED
$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2$$
tiene un único punto crítico $y = 1$.

  Desde la gráfica, llegamos a la conclusión de que la solución $y(x)$ es creciente en $-\infty < y < 1$ y $1 < y < \infty$, para todo $x \in (-\infty, \infty)$.



(a) Phase line (b) xy-plane $y(0) < 1$ (c) xy-plane $y(0) > 1$

Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

Las ED nos sirven para modelar y solucionar situaciones reales.

- **Dinámica poblacional**

$$\frac{dP}{dt} \propto P \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde:

  - $P(t)$; denota la población al tiempo t,
  - k; es una constante de proporcionalidad.

- **Decaimiento radiactivo**

$$\frac{dA}{dt} \propto A \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = kA$$

donde:

  - $A(t)$; cantidad de sustancia en el tiempo t,
  - k; es una constante de proporcionalidad.

- **Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton**

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

donde:

  - $T(t)$; temperatura del cuerpo al tiempo t,
  - T_m; temperatura del medio,
  - k; es una constante de proporcionalidad.

Ejemplos

1. Clasifica las siguientes ED.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

2. Demuestra que son solución de la ED

$$\frac{dx}{dx} = xy^{1/2} \quad y = \frac{1}{16}x^4$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y = xe^x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad x^2 + y^2 = 25$$

- **Problemas con valores iniciales:** En los problemas 1 y 2 , $y = \frac{1}{1+c_1 \ e^{-x}}$ es una familia uniparametrica de soluciones de la ED de primer orden $y^{'} = y - y^2$. Encuentre una solución del PVI de primer orden que consiste en esta ecuacion diferencial y la condición inicial dada.
  1. $$y(0) = -\frac{1}{3}$$
  2. $$y(-1) = 2$$
- En los problemas 7 a 10, $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ es una familia de soluciones de dos parámetros de la Ed de segundo orden $x^{''} + x = 0$. Detrmine una solución de PVI de segindo orden que consiste en esta ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas
  1. $$x(0) = -1, \quad x^{'}(0) = 8$$
  2. $$x(\pi/2) = 0, \quad x^{'}(\pi/2) = 1$$
  3. $$x(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad x^{'}(\pi/6) = 0$$
  4. $$x(\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x^{'}(\pi/4) = 2\sqrt{2}$$

Gracias por su atención

¿Preguntas?