# Ecuaciones diferenciales Parciales
# Transformada de Fourier en Series

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

9 de julio de 2025

# Contenido

Como las condiciones de frontera son homogéneas de Dirichlet, expandimos $u(x,t)$ en una serie de senos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde los senos satisfacen automáticamente las condiciones en $x = 0$ y $x = L$.

**Ecuación para los coeficientes temporales**

Sustituyendo en la PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum A_n'(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

y

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k \sum A_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

igualando término a término:

$$A_n'(t) = -k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n(t),$$

una ODE para cada coeficiente.

La solución de cada ODE es:

$$A_n(t) = A_n(0)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t},$$

donde

$$A_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,$$

se obtiene usando el desarrollo de Fourier seno de la condición inicial $f(x)$.
**Solución completa:** la solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

**Interpretación:**

- Cada término representa un modo que decae exponencialmente en el tiempo.
- Para $t \to \infty$, todos los términos se anulan y la solución tiende a cero, consistente con condiciones de frontera homogéneas.

# Ejemplo 1:

Encuentre la transformada de fourier en series de senos si la condición inicial (C.I.)

$$f(x) = 100,$$

**Solución:** Remplazando en

$$A_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,$$

su serie de senos es:

$$A_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L 100\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{200}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

por lo que la solución es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{200[1-(-1)^n]}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

# Ejemplo 2: Ecuación del calor con extremos aislados

Resolución detallada usando la serie de Fourier en cosenos. Consideremos la ecuación del calor en una varilla unidimensional $0 \leq x \leq L$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

con condiciones de frontera de extremos aislados (Neumann):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0,$$

y condición inicial:

$$u(x,0) = f(x).$$

**Solución:**

Buscamos soluciones en serie de Fourier en cosenos, debido a las condiciones de Neumann:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Sustituyendo en la ecuación del calor, cada término debe satisfacer:

$$\frac{dA_n}{dt} = -k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n,$$

con solución

$$A_n(t) = A_n(0)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

# Ejemplo 3: Determinación de los coeficientes iniciales

Los coeficientes $A_n(0)$ se obtienen de la condición inicial usando la serie de Fourier en cosenos:

$$A_0(0) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad A_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (n \geq 1).$$

**Solución:**

Finalmente, la solución completa es:

$$u(x,t) = \frac{A_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0)e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde

$$A_0(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx,$$

y para $n \geq 1$,

$$A_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

### Interpretación de la solución

- Cada término en la serie representa un modo de oscilación con frecuencia espacial $n\pi/L$.
- La condición de extremos aislados permite la expansión en cosenos (derivada nula en los bordes).
- Los términos con mayor $n$ se atenúan más rápidamente debido al factor $e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$.
- Para $t \to \infty$, $u(x,t)$ tiende al promedio de la condición inicial:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{A_0(0)}{2}.$$

### Conclusión

Hemos resuelto la ecuación del calor en una varilla con extremos aislados mediante expansión en serie de Fourier en cosenos. Este método permite obtener la evolución temporal exacta para cualquier condición inicial razonable $f(x)$.

**¿Preguntas?**