ÁLGEBRA LINEAL - Pratica Calificada 1

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. (10 points) Resuelva

   (a) Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

   $$y^{''}(x) + a(x)y^{'}(x) + b(x)y(x) = 0$$

   donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

Solucion: Sea $\mathcal{S}$ un espacio vectorial de funciones continuas $y(x)$ dos veces derivables, que satisfacen la ecuación diferencial:

$$L[y] = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

(a) Sea $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{S}$ soluciones, tal que

$$y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = 0$$

$$y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x) = 0$$

Entonces para $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} L[y_1] + L[y_2] &= (y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)) + (y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)) \\ &= (y_1'' + y_2'') + a(x)(y_1' + y_2') + b(x)(y_1 + y_2) \\ L[y_1] + L[y_2] &= L[y_1 + y_2] \end{aligned}$$

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $y(x) \in \mathcal{S}$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha L[y] &= \alpha(y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)) \qquad = (\alpha y)'' + a(x)(\alpha y)' + b(x)(\alpha y) \\ \alpha L[y] &= L[\alpha y] \end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

2. (10 points) Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

   (a)

   $$V = M_{22}; \quad H = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Solucion: Verificar si H es un subespacio de V

(a) Sean

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right\} \in H.$$

Entonces,

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

(b) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in H,$$

se tiene:

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix} \in H.$$

Por lo tanto, H es un subespacio vectorial de $V = M_{22}$.

3. (10 points) Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

(a)

$$\text{En } M_{22}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Solucion: Cada matriz en $M_{2\times 2}$ puede representarse como un vector de 4 componentes:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Representamos cada matriz como vector en $\mathbb{R}^4$:

$$A_1 \to \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \to \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 \to \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 \to \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz:

$$M = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos reducción por filas (Gauss-Jordan). Al realizar operaciones elementales, obtenemos una forma escalonada con pivotes en las 4 filas, por lo tanto el rango de esta matriz es 4, por lo tanto los vectores son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^4$, es decir, $M_{2\times 2}$.

$$\text{rango}(M) = 4$$

4. (10 points) Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

(a)

$$\text{En } \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solucion: Si conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$$

entoces $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 0 + c_3 = 0 \\ 0 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + 0 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$c_1 + c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_3$$

De la segunda ecuación:

$$c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_3$$

De la tercera ecuación:

$$c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow (-c_3) + (-c_3) = -2c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

Entonces:

$$c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Por tanto, los vectores son **linealmente independientes**.

5. (10 points) Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

   (a) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 5z = 0$.

Solucion: El plano

$$3x - 2y + 5z = 0$$

Despejamos x:

$$3x = 2y - 5z \Rightarrow x = \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z$$

Entonces, un vector genérico en el plano es:

$$\vec{v} = \left(\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z,\ y,\ z\right)$$

Separando como combinación lineal:

$$\vec{v} = y\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right) + z\left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

Por lo tanto, una base del plano es:

$$\left\{\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right),\ \left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right\}$$

Multiplicando por 3 para evitar fracciones:

$$(2, 3, 0)\,, \quad (-5, 0, 3)$$

Así, una base es:

$$\boxed{\{(2, 3, 0),\ (-5, 0, 3)\}}$$

6. (10 points) Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

(a) Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$en términos de la base dada.

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solucion: Buscamos escalares a, b y c tales que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Expandimos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a + b + 5c \\ 2b + 2c \\ 3a - 2b \end{pmatrix}$$

Obteniendo el sistema:

$$\begin{aligned} -5a + b + 5c &= x \\ 2b + 2c &= y \\ 3a - 2b &= z \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver para cualquier vector (x, y, z), por lo tanto, los vectores dados forman una base.

7. (10 points) Resolver

(a) Encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

$$(1, 21, 25), (3, 2, 0), (22, 1, 7)$$

Solucion: Construir la matriz con filas v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 3 & 2 & 0 \\ 22 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Aplicar eliminación gaussiana

- Eliminamos en la fila 2, R_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 3 & 2 & 0 \\ 22 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 = (3-3, 2-63, 0-75) = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 0 & -61 & -75 \\ 22 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 0 & -61 & -75 \\ 22 & 1 & 7 \end{bmatrix} R_3 \leftarrow R_3 - 22R_1 = (22-22, 1-462, 7-550) = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 0 & -61 & -75 \\ 0 & -461 & -543 \end{bmatrix}$$

- Ahora eliminamos en la fila 3, R_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 0 & -61 & -75 \\ 0 & -461 & -543 \end{bmatrix} R_3 \leftarrow R_3 - \tfrac{461}{61} R_2 = (0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 0 & -61 & -75 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- El rango de la matriz es 2. Por tanto, los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, y $\vec{v}_3$ es combinación lineal de los otros.

Una base para el espacio generado por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

8. (10 points) Calcule los valores característicos y los espacios característicos de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

   (a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Solucion: Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

- Valores característicos, reemplazamos en:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 5 = -[(2-\lambda)(2+\lambda)] + 5 = \lambda^2 + 1$$

Los valores característicos serían:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

- Vectores característicos, resolvemos:

$$(A - \lambda I_n)\bar{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reemplazamos cada uno de los λ:
Para $\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la primera ecuación:

$$(2-i)x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = (2-i)x_1$$

Entonces:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$(2+i)x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = (2+i)x_1$$

Entonces:

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

Los espacios característicos son:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

9. (10 points) Determine si la matriz dada A es diagonalizable. De ser así, encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$. Verifique que $AC = CD$ y que los elementos distintos de cero de D sean los valores característicos de A.

(a)

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solucion: Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - (-1)(-1)\right] = (6-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] \\ \det(A - \lambda I) &= (6-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (6-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) \end{aligned}$$

Raíces:

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$$

Encontrar los autovectores para cada λ, resolvemos

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$$

Aquí damos solo los resultados:

- Para $\lambda = 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene 3 valores propios distintos $\Rightarrow$ es diagonalizable.

$$C = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificamos:

$$C^{-1}AC = D \quad \text{y} \quad AC = CD$$

Estas igualdades se cumplen al hacer la multiplicación.

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable con } C = [\vec{v}_1 \, \vec{v}_2 \, \vec{v}_3], \quad D = \mathrm{diag}(6, 2, 4)}$$

10. (10 points) Resolver

    (a) Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^A Q = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores característicos de A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solucion:

- Encontrar los valores propios de A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

  Las raíces son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

- Encontrar los vectores propios
  - Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)\vec{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    De donde

$$x + y = 0 \implies y = -x \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

    Normalizamos el autovector

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \implies \hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3I)\vec{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde

$$-x + y = 0 \implies y = x \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizamos el autovector

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \implies \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos

$$Q^\top A Q = D$$

Formar la matriz ortogonal $Q = (v_1, v_2)$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz Q es ortogonal y diagonaliza A:

$$\boxed{Q^\top A Q = D, \quad \text{con} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$