

Matemáticas Avanzadas:

Variable Compleja, Series y Ecuaciones

Diferenciales Ordinarias,

con aplicaciones en Máxima

H. Hernández

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida-Venezuela*

L. A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia*

9 de septiembre de 2018

Índice general

1. Variable Compleja	7
1.1. Funciones de Variable Compleja	8
1.1.1. De la recta real al plano complejo	8
1.1.2. Continuidad en el plano complejo	8
1.1.3. Diferenciabilidad de funciones complejas	8
1.1.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann	9
1.1.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann	11
1.2. Puntos y líneas de corte, ceros de funciones complejas	12
1.2.1. Puntos y líneas de corte	12
1.2.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas	14
1.3. Transformaciones conformes	18
1.3.1. Algunas consecuencias y ejemplos	19
1.4. Integrales complejas	21
1.4.1. Algunas propiedades	21
1.5. Teorema Integral de Cauchy	23
1.5.1. El teorema y las regiones	23
1.5.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera	24
1.5.3. Fórmula integral de Cauchy	26
2. Series	29
2.1. Sucesiones y Series	30
2.1.1. Introducción a las sucesiones	31
2.1.2. Acercándonos al concepto de series	35
2.1.3. Series elementales	36
2.1.4. Derivación de series geométricas elementales	39
2.1.5. El método de la diferencia	42
2.1.6. Sumando por analogía	44
2.1.7. Algebra elemental de series	44
2.1.8. Series telescópicas	45
2.1.9. Ejemplos	47
2.1.10. Practicando con Maxima	48
2.1.11. Ejercicios	52
2.2. Criterios de convergencia	53

2.2.1.	Convergencia absoluta o condicional	53
2.2.2.	Criterio de Comparación	54
2.2.3.	Criterio de la Raíz	55
2.2.4.	Criterio de d'Alembert	55
2.2.5.	Criterio de la Integral de Maclaurin	56
2.2.6.	Series alternantes y convergencia condicional	58
2.2.7.	Ejemplos	60
2.2.8.	Practicando con Maxima	60
2.2.9.	Ejercicios	60
2.3.	Series de funciones	60
2.3.1.	Series de Potencias	61
2.3.2.	Convergencia de una serie de potencias	61
2.3.3.	Covergencia uniforme	62
2.3.4.	Criterio Mayorante de Weierstrass	64
2.3.5.	Criterio de Abel	65
2.3.6.	Nota sobre el álgebra de series de potencias	66
2.3.7.	Ejemplos	69
2.3.8.	Practicando con Maxima	69
2.3.9.	Ejercicios	69
2.4.	Serie de Taylor	69
2.4.1.	Algunas series de Taylor	71
2.4.2.	La expansión binomial	72
2.4.3.	Taylor en varias variables	73
2.4.4.	Ejemplos	74
2.4.5.	Practicando con Maxima	74
2.4.6.	Ejercicios	74
2.5.	Series y espacios de Hilbert	75
2.5.1.	Completitud de E^∞	75
2.5.2.	Conjunto completo de funciones	76
2.6.	Series de Laurent	78
2.6.1.	Series de Taylor para funciones analíticas	78
2.6.2.	Series de Laurent	80
2.6.3.	Algunos Ejemplos	82
2.6.4.	Integración por el método de los residuos	84
2.6.5.	Los residuos de Laurent	85
2.7.	Teorema del Residuo	86
2.7.1.	Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$	86
2.7.2.	Evaluación de integrales, reales, impropias	87
2.7.3.	Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$	87
2.7.4.	Integrales de funciones racionales de $\cos \theta$ y $\sen \theta$	90
2.8.	Integrales de Fourier	91
2.9.	Series de Polinomios Ortogonales	94
2.10.	Polinomios de Legendre	95
2.10.1.	Generalidades de los Polinomios de Legendre	95
2.10.2.	Relación de Recurrencia	97
2.10.3.	Norma de los Polinomios de Legendre	98
2.10.4.	Función Generatriz de los Polinomios de Legendre	99
2.10.5.	Otras propiedades de los polinomios de Legendre	101

2.10.6. Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico	102
2.10.7. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre	104
2.11. Polinomios de Hermite	104
2.11.1. Generalidades de los Polinomios de Hermite	105
2.11.2. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite	108
2.11.3. Relación de Recurrencia	108
2.11.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite	110
2.11.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite	110
2.11.6. El Oscilador armónico, independiente del tiempo, en Mecánica Cuántica.	111
2.11.7. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite	113
2.12. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales	113
2.12.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad	114
2.12.2. Fórmula de Rodrigues generalizada	114
2.12.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales	115
2.12.4. Relaciones de Recurrencia	115
2.12.5. Función generatriz generalizada	115
2.12.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales	116
2.12.7. Aplicaciones para los polinomios ortogonales	116
2.13. Series y transformadas de Fourier	122
2.14. Condiciones de Dirichlet	125
2.15. Algunos ejemplos de expansiones en series de Fourier	126
2.15.1. Ondas Cuadradas	126
2.15.2. Variedades de dientes de sierra	126
2.15.3. Función cuadrática	128
2.16. Consideraciones de Simetría en series de Fourier	128
2.16.1. Tratamiento de discontinuidades	129
2.17. El Fenómeno de Gibbs	129
2.17.1. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor σ de Lanczos	130
2.18. Transformadas de Fourier	131
2.18.1. Propiedades	132
2.18.2. Funciones pares e impares	132
2.18.3. Bases discreta y contínuas: La base de Ondas Planas	132
2.18.4. Un par de ejemplos	134
2.18.5. Transformadas Discretas de Fourier	134
3. Ecuaciones diferenciales ordinarias	140
3.1. Motivación y origen	141
3.2. Ejemplos de algunas ecuaciones diferenciales	146
3.3. De ecuaciones y ecuaciones diferenciales	147
3.4. Orden y linealidad	147
3.5. Soluciones explícitas e implícitas	148
3.6. Soluciones generales y particulares	149
3.6.1. Familia de soluciones n -paramétricas	150
3.6.2. Solución particular, valores iniciales y valores de contorno	150

4. Ecuaciones diferenciales de orden 1	152
4.1. Soluciones analíticas	153
4.1.1. Métodos elementales de integración	153
4.1.2. Ecuaciones diferenciales separables	155
4.1.3. Ecuaciones diferenciales no separables	156
4.1.4. Método de las Isoclinas	157
4.1.5. Ecuaciones diferenciales separables	159
4.1.6. Variaciones sobre separabilidad	160
4.1.7. Ecuaciones diferenciales homogéneas	162
4.1.8. Ecuaciones Isóbaras	165
4.1.9. Ecuaciones diferenciales exactas	165
4.1.10. Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1	168
4.1.11. Ecuaciones diferenciales no lineales y el factor integrador	169
4.1.12. Ecuación de Bernoulli	172
4.1.13. Ecuación de Riccati	173
4.1.14. Un tipo muy especial de ecuación diferencial no lineal	175
4.1.15. Otros métodos	176
4.1.16. Solución paramétrica: Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada	177
4.2. Soluciones numéricas	185
4.2.1. Las ideas generales	185
4.2.2. La idea de la integración y los métodos	187
4.2.3. Control del Paso	193
4.3. Algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden	195
4.3.1. Ley de Malthus y el decaimiento radioactivo	195
4.3.2. La Ecuación logística o Ley de Verhulst	196
4.3.3. La Ley de Enfriamiento de Newton	197
4.3.4. Interés Compuesto.	199
4.3.5. Mecánica Elemental.	200
4.3.6. Modelado de Concentración/Desplazamiento de Soluciones	205
5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a 1	209
5.1. Definiciones para comenzar	210
5.2. Homogéneas, lineales, de segundo orden	210
5.3. Ecuaciones diferenciales de orden n	213
5.4. Algunos métodos de solución para ecuaciones inhomogéneas	215
5.4.1. El Wronskiano	215
5.4.2. Métodos de los coeficientes indeterminados	216
5.4.3. Métodos de variación de parámetros	218
5.4.4. Métodos de reducción de orden	220
5.5. Algunas aplicaciones de las ecuaciones de orden superior	221
5.5.1. Mecánica y Electricidad	221
5.5.2. Oscilaciones libres	221
5.5.3. Oscilaciones libres amortiguadas	222
5.5.4. Oscilaciones forzadas	225
5.5.5. Oscilaciones forzadas amortiguadas	227
5.5.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio	230
5.5.7. Péndulo simple con desplazamiento finito	231
5.5.8. Disgresión elíptica	238

5.5.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal?	241
5.5.10. El péndulo físico: integración numérica	242
6. Sistemas de ecuaciones diferenciales	244
6.1. Algunos comentarios iniciales	245
6.1.1. Sistemas lineales homogéneos	247
6.1.2. Sistemas lineales inhomogéneos	251
6.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales y el uso de operadores	254
6.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace	260
7. Métodos de soluciones por series	264
7.1. Otra vez Algebra de Series	265
7.2. Un Ejemplo conocido.	265
7.3. Otro Ejemplo menos conocido pero importante	267
7.4. Método de Diferenciaciones Sucesiva	269
7.5. Métodos de los Coeficientes Indeterminados	270
7.6. Los Puntos y las Estrategias	272
7.7. Ecuaciones e intervalos en puntos regulares	272
7.8. El Método de Frobenius	274
7.8.1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.	279
7.8.2. $m_1 = m_2$	281
7.8.3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero.	286
7.9. Revisitando a Bessel	289
7.9.1. Otras Formas de la Ecuación de Bessel	296
7.9.2. Relaciones de Recurrencia:	296
7.9.3. Funciones de Bessel y Funciones Elementales	297
7.9.4. Reflexión:	298
7.9.5. Función Generatriz	298
7.9.6. Representación Integral para las Funciones de Bessel	298
7.9.7. Ortogonalidad de las Funciones de Bessel	299
8. Funciones Especiales	301
8.1. Algunas funciones Especiales	302
8.1.1. Función Gamma e Integrales de Probabilidad	302
8.1.2. La Funciones Digamma y Poligamma	306
8.1.3. La Aproximación de Stirling	307
8.1.4. La función Beta	308
9. El problema de Sturm-Liouville	310
9.1. El problema de Sturm-Liouville	311
9.1.1. Cálculo Operacional	311
9.1.2. Operadores diferenciales de segundo orden	312
9.1.3. Operadores diferenciales autoadjuntos	313
9.1.4. El Sistema Sturm-Liouville	315
9.1.5. Algunos ejemplos ilustrativos	316
9.1.6. Función de Green	320
10. Apéndice	322

Capítulo

1

Variable Compleja

Borrador Preliminar

1.1. Funciones de Variable Compleja

A continuación, generalizaremos algunos conceptos de funciones de variable compleja.

1.1.1. De la recta real al plano complejo

La idea de función de variable (o variables) reales puede ser extendida (continuada, le dicen también) al plano complejo. La idea es la de siempre: si en una determinada región del plano complejo a un número complejo z le corresponde un número (o varios números) complejos $w = f(z)$, diremos que $f(z)$ es una función de variable compleja z . Obvio que $f(z)$ puede ser biyectiva, en cuyo caso tendremos que a z le estará asociado uno y solo un número complejo $w = f(z)$. Es claro también que siempre se podrá expresar

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{con } u(x, y) \text{ la parte real y } v(x, y) \text{ la parte imaginaria} \quad (1.1)$$

Esta representación tiene una interpretación adicional. Como representamos un número complejo en el plano $0xy$ como $z = x + iy$, pero $w = f(z)$ también podrá ser representada como un punto en el plano $0uv$. Entonces, desde el punto de vista geométrico una función de variable compleja podrá ser entendida como una ley de transformación entre pares de puntos (x, y) del plano $0xy$ del argumento z y los puntos (u, v) del plano $0uv$ de valor w .

1.1.2. Continuidad en el plano complejo

Podemos también extender el concepto de continuidad de una función de variable real a una función de variable compleja. Esto es: diremos que una función compleja¹ $w = f(z)$ será continua en z_0 si para un $\epsilon > 0$ siempre existe un $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ tan pequeño como uno quiera y siempre puede encontrar $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. La otra manera de verlo es la estándar: si existe el límite cuando $z \rightarrow z_0$, es decir,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

En este punto se pueden resaltar que los límites (y con ello la idea de continuidad) en el plano complejo hereda las sutilezas y dificultades de los límites y continuidades de las funciones en varias variables. En segundo lugar cabe señalar que la diferencia con las funciones de variable real radica en que los ϵ y δ son radios de un círculo centrado en $f(z_0)$ y z_0 , respectivamente. Adicionalmente, para el caso de las funciones complejas no tiene sentido los límites por la derecha y por la izquierda que planteábamos para funciones de variable real. También es obvio que si

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{con } u(x, y) \text{ y } v(x, y) \text{ continuas en } (x_0, y_0) \Rightarrow f(z) \text{ será continua en } z_0 = x_0 + iy_0$$

1.1.3. Diferenciabilidad de funciones complejas

La dificultad que subyace en esta definición es equivalente a las dificultades que enfrentamos en las definiciones de derivadas para funciones de varias variables. Diremos entonces que, una función $f(z)$ univaluada en una región \mathcal{S} será diferenciable en esa región si la derivada

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{df}{dz} = f'(z) \end{aligned}$$

¹A partir de ahora y por razones de simplicidad llamaremos a $f(z)$ función compleja en vez de función de variable compleja.

existe y es única.

Una vez más, al igual que en el caso de funciones de varias variables, el concepto de límite (y con éste el de derivada), debe existir sin importar la ruta o forma de aproximación al punto sobre el cual estamos calculando la derivada. Esto es, si $\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Sea $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 + 2i(x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 - y^2 - 2ixy}{\Delta x + i\Delta y}$$

al desarrollar pruebe que, independientemente de la ruta en el plano complejo ($\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ o viceversa) resulta:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(2x + i2y + \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + 2i\Delta x \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right) = 2x + i2y$$

que es más o menos obvio si hubiéramos notado que $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)^2 \equiv z^2$ con lo cual

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

2. Ahora bien, las cosas no siempre son así. Si consideramos $f(z) = 2x + iy$ es rápido comprobar que no es diferenciable en el plano complejo, ya que

$$f'(z) = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x + i(y + \Delta y) - 2x - iy}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

el cual, claramente no coincide si las direcciones de aproximación a $z_0 = x_0 + iy_0$ son distintas, vale decir, por ejemplo: $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ o $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$.

Como heredamos todas las ideas y métodos del campo real se cumplen todas las reglas de la derivación para funciones reales. Vale decir

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}; \quad \frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz}; \quad \frac{d}{dz}(f(g(z))) = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(z)}{dz}$$

1.1.4. Funciones Analíticas y Condiciones de Cauchy-Riemann

Diremos que una función es analítica (holomorfa o regular) en una región \mathcal{S} , si es univaluada y derivable en todos los puntos dentro de esa misma región \mathcal{S} . Puede darse el caso de que sea analítica en la región excepto en un número finito de puntos (donde es singular). Entonces diremos que es analítica (holomorfa o regular) en \mathcal{S} , excepto en esos puntos.

Una función se denomina una función entera si ésta es analítica en todos los puntos del plano finito, como por ejemplo, los polinomios.

A partir de dos estrategias (muy particulares) de aproximación a $\Delta z \rightarrow 0$ tales como $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ o $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$, podremos encontrar un criterio para identificar dónde, una función compleja, $f(z)$, es analítica. Esto es

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta y=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z)_{\Delta x=0} &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right], \end{aligned}$$

y ambas tienen que coincidir. Con lo cual

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[-i \frac{\Delta u(x, y)}{\Delta y} + \frac{\Delta v(x, y)}{\Delta y} \right],$$

y equivalentemente

$$f'(z)_{\Delta y=0} = f'(z)_{\Delta x=0} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

Con ello hemos encontrado las condiciones *necesarias* para que una función compleja sea analítica, vale decir: Las condiciones de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (1.2)$$

Ahora tendremos un criterio más expedito para determinar que la función $f(z) = 2x + iy$ no es analítica.

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = 2x \\ v(x, y) = y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2 \neq 1 = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 = 0 = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Para el caso $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$ se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

pero como esas condiciones son *necesarias* porque para encontrarlas hemos seleccionado un par de rutas muy específicas: $\Delta y = 0; \Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta x = 0; \Delta y \rightarrow 0$, se requiere exigir algunas condiciones adicionales. Sin demostración (puede consultar para detalles y demostraciones las referencias indicadas) exigiremos como condición necesaria y suficiente para que una función sea analítica que las cuatro derivadas parciales para $u(x, y)$ y $v(x, y)$, existan, sean continuas en la región S y que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. El punto crucial (adicional) es que las derivadas sean continuas.

Ejercicios

Investigar los dominios del plano complejo para los cuales las funciones $f(z) = |x| - i|y|$ y $f(z) = |z|^2 = zz^*$ son analíticas.

1.1.5. Curiosidades de Cauchy-Riemann

Las funciones analíticas satisfacen algunas propiedades adicionales consecuencias de las condiciones de Cauchy-Riemann.

La primera es que dada una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $f(z)$ es analítica, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas, $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$, i.e. satisfacen la ecuación de Laplace. Si derivamos apropiadamente las ecuaciones (1.2) respecto a una y otra variable encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

y equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] \Rightarrow \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

es decir, hemos demostrado que las partes reales e imaginarias de una función analítica son necesariamente armónicas. La importancia de este resultado radica, en primer lugar, que no son arbitrarias las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ con las cuales construimos $f(z)$. Ambas deben satisfacer la ecuación de Laplace. En segundo lugar que ambas están ligadas por las condiciones de Cauchy-Riemann, y esto implica que al conocer una de las funciones armónicas conjugadas, siempre es posible encontrar (salvo una constante de integración) la otra.

Ejemplo

Para ilustrar lo anterior, supongamos la siguiente función armónica conjugada $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ correspondiente a la parte real de $f(z)$. Es fácil comprobar que es una función armónica, ahora construyamos la parte imaginaria $v(x, y)$. Esto es

$$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$$

entonces

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -6xy + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = -6xy = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \phi(x) = C \Rightarrow v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C.$$

La segunda curiosidad, consecuencia de las ecuaciones (1.2), es que para una función compleja genérica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, en la cual además se cumple que $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const}$, entonces se cumplirá que: $\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$.

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} \right] \cdot \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} \right] = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

y por obra de las condiciones de Cauchy-Riemann es inmediato comprobar que se anulan

$$\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

Es decir, $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const}$, corresponden a *trayectorias mutuamente ortogonales*. Esta “curiosidad” nos permite construir sistemas de coordenadas alternativos en el plano complejo y, sobre todo

saber como establecer su transformación a otros planos complejos. Esto se representa en la Figura 1.2 y será considerado en la sección 1.3 de la página 18.

La tercera curiosidad es un resultado el cual, siendo una formalidad, nos indica que las funciones analíticas $f(z)$ dependen de z y no de su conjugado z^* . O dicho de otra manera: z y z^* son variables independientes. Para demostrar esto procedemos primero a convencernos que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $f(z)$ analítica, entonces $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$. Sin detenernos a pensar en el significado de la derivada respecto a la variable conjugada, recordamos que operacionalmente

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{z + z^*}{2} \\ y = \frac{z - z^*}{2i} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] - \frac{1}{2i} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]$$

arreglando tendremos que es inmediato comprobar que se anula si se cumplen las condiciones (1.2)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] = 0 \Rightarrow f(z) \not\equiv f(x, y) = f\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right)$$

en otras palabras, las funciones analíticas son verdaderas funciones de variable compleja y no, como pudiera parecer, de dos variables reales interpuestas.

Ejercicios

1. Determine la función $f(z)$ analítica cuya parte imaginaria es $[y \cos(y) + x \operatorname{sen}(z)]e^x$
2. Muestre que si $f(z)$ es analítica entonces $f^*(z^*)$ también lo es.

1.2. Puntos y líneas de corte, ceros de funciones complejas

Hemos mencionamos anteriormente, que los números complejos se representan por su forma polar en dos ejes coordenados. Ese diagrama bidimensional lo llamamos Diagrama de Argand. Como en el caso del Análisis de Funciones Reales, existen funciones *multivaluadas*, a las cuales les debemos imponer ciertas condiciones para convertirlas en *univaluadas*, si una función es multivaluada, automáticamente deja de ser analítica. El objetivo de esta sección es identificar ese conjunto de condiciones para detectar en cual región del plano complejo una determinada función es univaluada.

1.2.1. Puntos y líneas de corte

Consideremos entonces la función $f(z) = z^{1/2}$ y hagamos distintos circuitos cerrados $0 \leq \theta < 2\pi$ con el “vector” z .

$$f(z) = z^{1/2} \equiv r^{1/2} e^{i\theta/2} \rightarrow f(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2} \rightarrow r^{1/2} e^{i(\theta+2\pi)/2} = -r^{1/2} e^{i\theta/2}$$

Visto así nos tendremos que preguntar ahora cual fue el circuito que recorrimos con z , y dependiendo de ese circuito identificaremos algunos puntos con características distintas. Si el circuito cerrado descrito por z **no** contiene el punto $z = 0$, la función $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor original (ver Figura 1.1 cuadrante superior izquierdo contorno C_1). Pero si, como se aprecia en la misma Figura 1.1, el circuito cerrado C_2 **si** contiene el punto $z = 0$ entonces la función no retoma su valor original, $f(z) \rightarrow -f(z)$. También es claro que si el circuito cerrado lo recorremos dos veces $\theta \rightarrow 4\pi$ entonces $f(z) = z^{1/2}$ retoma su valor inicial.

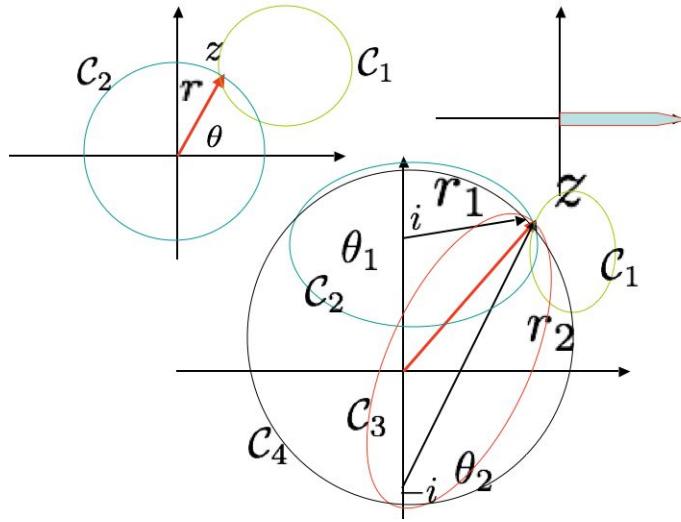


Figura 1.1: Los distintos contornos que identifican los puntos de corte

Los puntos alrededor de los cuales se construye un circuito cerrado en el diagrama de Argand y la función no retoma su valor inicial se denominan *puntos de corte* y las *líneas de corte* (o simplemente *cortes*) serán aquellas líneas que separan regiones en las cuales una determinada función es univaluada. Es claro que los puntos de corte son puntos singulares, en los cuales la función deja de ser analítica y existirán si θ toma, valores $0 \leq \theta \leq 2n\pi$. Es decir, puede dar n vueltas.

En este caso, para nuestra función $f(z) = z^{1/2}$, la línea de corte será cualquiera que comience en $z = 0$ y continúe para $|z| \rightarrow \infty$. Por simplicidad es costumbre tomar las líneas de corte a lo largo de los ejes reales o complejos. De este modo aparece ilustrado en la Figura 1.1 cuadrante superior derecho la línea de corte que sigue el eje positivo de las x .

La situación se torna más interesante cuando estas definiciones se analizan a la luz de funciones con más de un punto de corte.

Consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1} \Rightarrow f(z) = \sqrt{(z-i)(z+i)} \equiv \sqrt{(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1+\theta_2)/2}$$

analicemos entonces, varios contornos en el plano de Argand. Otra vez la Figura 1.1 ilustra en el cuadrante inferior los distintos contornos C_1, C_2, C_3 y C_4 .

Tal y como se aprecia en esa figura, se dan cuatro casos:

1. Contorno C_1 no incluye ningún punto de corte, entonces $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, con lo cual $f(z)$ retoma su valor inicial luego de recorrer el C_1
2. Contorno C_2 incluye $z = i$ como punto de corte, entonces $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $\theta_{2min} \leq \theta_2 \leq \theta_{2max}$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$
3. Contorno C_3 incluye $z = -i$ como punto de corte, entonces $\theta_{1min} \leq \theta_1 \leq \theta_{1max}$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow -f(z)$
4. Contorno C_4 incluye ambos como punto de corte, $z = i$ y $z = -i$, entonces $0 \leq \theta_1 \leq 2n\pi$ y $0 \leq \theta_2 \leq 2n\pi$, por lo cual $f(z) \rightarrow f(z)$ retoma su valor.

De este modo para construir los cortes que impidan que nuestra función sea multivaluada podremos seleccionar:

$$z_{\text{corte}} > i \quad \text{y} \quad z_{\text{corte}} < -i, \quad \text{o} \quad -i < z_{\text{corte}} < i$$

1.2.2. Singularidades, polos y ceros de funciones complejas

Un punto donde la función $f(z)$ no es analítica se denomina un punto singular. Estos puntos pueden ser:

- **Singularidades aisladas:** si una función es analítica en todo el entorno de un punto z_0 , excepto en el propio punto z_0 , entonces se dice que el punto z_0 es una singularidad aislada o un punto singular de la función $f(z)$.

Por ejemplo, para la función $f(z) = 1/z$, sabemos que es analítica en todo punto excepto en $z = 0$. La única singularidad de la función esta en el punto $z = 0$ y este punto es entonces una singularidad aislada.

- **Singularidades no aisladas:** Si una función contiene un conjunto de singularidades aisladas en una vecindad de un punto z_0 , entonces se dice que z_0 es una singularidad no aislada. Es decir, una singularidad no aislada de una función es un punto límite del conjunto de sus singularidades.

Clasificación de las singularidades aisladas

1. Un punto singular aislado z_0 de una función f se denomina removable o evitable si:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad \exists.$$

Observemos que:

- a) la función f puede no estar definida en z_0 y por esta razón la función no es analítica en z_0 .
- b) la función puede estar definida en z_0 pero de valor diferente al $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Con lo cual la función no es continua en z_0 y por lo tanto no es analítica en z_0 .
- c) la función puede estar definida en z_0 y su valor igual al del $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. En este caso la función no es singular en z_0 .

Por lo tanto, si f tiene una singularidad removable en z_0 entonces una de las posibilidades (a) o (b) debe ser la causa de que la función no sea analítica o regular en z_0 .

Si una función g es igual a f en todos los puntos, excepto en z_0 , y

$$g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

entonces g no es singular en z_0 , esto significa que la singularidad de f puede ser removida mediante la redefinición de la función f en z_0 .

2. Un punto singular aislado z_0 de una función f que no está definida en z_0 se llama un polo de orden n de f si:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M \neq 0,$$

donde n es un número entero positivo. Un polo de orden 1 se denomina un polo simple.

3. Un punto singular aislado de una función f recibe el nombre de *singularidad esencial* de f si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0,$$

para ningún entero positivo de n .

Ejemplos

1. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{(z - 4)(z - i)},$$

la función es analítica en todos los puntos, excepto en $z = 4$ y $z = i$. Entonces, las únicas singularidades están en los puntos $z = 4$ y $z = i$, y como son un conjunto finito de singularidades cada una de estas son singularidades aisladas.

2. Sea f la función:

$$f(z) = \left(\operatorname{sen} \left[\frac{x}{|z|^2} \right] \cosh \left[\frac{y}{|z|^2} \right] - i \cos \left[\frac{x}{|z|^2} \right] \operatorname{senh} \left[\frac{y}{|z|^2} \right] \right)^{-1},$$

Si denotamos al denominador como $g(z)$, entonces

$$\begin{aligned} g(z) &= \operatorname{sen} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] - i \cos \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \neq 0, \end{aligned}$$

Es claro que $z \neq 0$. Por otra parte, de las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cos \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todas partes salvo en $z = 0$, donde ni g ni las derivadas parciales están definidas. Como las derivadas parciales son continuas, entonces g es analítica en todos los puntos excepto $z = 0$. Por lo tanto, f es analítica salvo en $z = 0$.

Por otra parte, $g = 0$ si su parte real como su parte imaginaria son nulas, así que las singularidades de f , además de $z = 0$, vienen dadas por el siguiente sistema ecuaciones:

$$\operatorname{sen} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \cosh \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] = 0 \quad y \quad \cos \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] \operatorname{senh} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] = 0$$

Como $\cosh(\alpha) > 0$, la primera ecuación se satisface si

$$\operatorname{sen} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} = \pm n\pi,$$

puesto que $\cos(\alpha) \neq 0$ cuando $\operatorname{senh}(\alpha) = 0$, entonces la segunda ecuación se satisface si $y = 0$. Por lo tanto, el sistema se satisface simultáneamente si

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} = \pm n\pi \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Las singularidades ocurren en el eje real y en los puntos donde $x = \pm 1/n\pi$. El punto límite de este conjunto, cuando $n \rightarrow \infty$, es el punto $z = 0$. Por lo tanto, f tiene una singularidad no aislada en $z = 0$ y singularidades aisladas en los puntos $z = \pm 1/n\pi$, con $n = 1, 2, 3, \dots$

3. Dada la función

$$f(z) = \frac{z^2 + 16}{z - 4i}, \quad z \neq 4i,$$

esta función es el cociente de dos funciones enteras y por lo tanto es analítica, salvo donde el denominador se hace nulo, esto es en $z = 4i$. Por otra parte:

$$f(z) = \frac{(z + 4i)(z - 4i)}{z - 4i} = z + 4i,$$

y

$$\lim_{z \rightarrow 4i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 4i} z + 4i = 8i.$$

la función f tiene una singularidad removable en $z = 4i$ pues el límite existe. Podemos definir una función g igual a f , para $z \neq 4i$

$$g(z) = \begin{cases} z + 4i & \text{si } z \neq 4i \\ 8i & \text{si } z = 4i \end{cases}$$

y queda claro que g es una función entera.

4. Para

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} = \frac{2z}{(1-z)(1+z)}$$

y es inmediato darse cuenta que tendremos polos de orden 1 en $z = 1$ y $z = -1$

5. Para

$$f(z) = \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \Rightarrow e^z = e^{i(2n+1)\pi} e^{-z} \text{ es un polo}$$

es decir donde $e^z = -e^{-z}$, con lo cual $z_0 = (n + \frac{1}{2})i\pi$ y al utilizar la definición:

$$\lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \sinh(z)}{\cosh(z)} = \lim_{z \rightarrow (n + \frac{1}{2})i\pi} \frac{[z - (n + \frac{1}{2})i\pi] \cosh(z) + \sinh(z)}{\sinh(z)} = 1$$

donde hemos utilizado el Teorema de L'Hopital y consecuentemente $z_0 = (n + \frac{1}{2})i\pi$ es un polo simple.

Existe otro tipo de singularidades conocidas como removibles. Estas singularidades se caracterizan porque el valor de $f(z) \rightarrow 0/0$ cuando $z \rightarrow z_0$. El caso más emblemático es la función

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \right) = \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots \right) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$$

con lo cual, luego de desarrollar por Taylor la función $\sin(z)$, se ha removido la singularidad aparente.

El comportamiento de una función compleja en infinito (o cuando tiende a infinito), vale decir, cuando $z \rightarrow \infty$ no está tan bien definida como en los casos de funciones de variable real. Es claro como una cantidad real, digamos $|f(z)|$ o $|z|$ tiende a infinito, pero z es una cantidad “bidimensional” y, en principio, existirían varias formas de tender a infinito. Para precisar el comportamiento de una función compleja de variable compleja en infinito, hacemos un cambio de variable $z = 1/\xi$ y estudiamos $f(1/\xi)$ con $1/\xi \rightarrow \infty$.

De esta manera:

1.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z(1 + z^2) \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3} \quad \text{con lo cual tendrá un polo de orden 3.}$$

2.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \xi^n} \quad \text{y presenta una singularidad esencial para } z \rightarrow \infty .$$

Los ceros de una función compleja ($f(z_0) = 0$, entonces llamaremos z_0 un cero de $f(z)$) se clasifican al igual que los polos. Esto es

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ con } n \text{ entero positivo y } g(z) \neq 0 \quad \forall z .$$

Ejercicios

1. Determine el tipo de singularidades (en caso de poseerlas) de las siguientes funciones en: $z = 0$ y $z = \infty$

a)

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

b)

$$f(z) = \frac{1+z^3}{z^2}$$

c)

$$f(z) = \operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right)$$

2. Identifique los ceros, polos y las singularidades esenciales de las siguientes funciones:

a)

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

b)

$$f(z) = e^{1/z}$$

c)

$$f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$$

3. Encuentre el comportamiento en el infinito de

a)

$$f(z) = a + \frac{b}{z^2}$$

b)

$$f(z) = z(1+z^2)$$

c)

$$f(z) = e^z$$

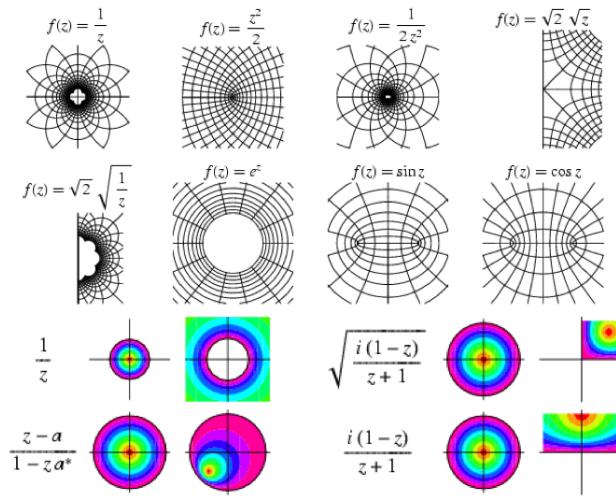


Figura 1.2: Transformaciones conformes. Tomado de Eric W. Weisstein. **Conformal Mapping**. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html>

1.3. Transformaciones conformes

Nos interesará ahora considerar transformaciones entre planos complejos, esto es:

$$z = x + iy \leftrightarrow w = r + is \Rightarrow w = g(z) = r(x, y) + is(x, y) \leftrightarrow z = h(w) = x(r, s) + iy(r, s)$$

Es decir, transformaciones entre puntos $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$ correspondientes a dos diagramas de Argand, de tal modo que existe la función inversa $z = h(g(z))$ con $w = g(z)$ y $z = h(w)$ funciones analíticas, salvo en un número finito de polos aislados. Entonces denominaremos a este tipo de transformaciones *transformaciones conformes* si además, en todo punto z y w (excepto en aquellos en los cuales $g'(z)$ y por lo tanto $h'(w)$ son cero o infinita) cumple con:

- Curvas continuas en el plano z transforman en curvas continuas en el w .
- Los ángulos entre dos curvas cualesquiera que se intersecten en el plano z serán los mismos que los que formen las curvas transformadas en el plano w . Esto es, los ángulos entre las curvas serán invariantes bajo la transformación.²
- El cambio de escala en la vecindad de puntos transformados es independiente de la dirección en la cual se mida.
- Cualquier función analítica en $z = x + iy$ transforma en otra función $w = r + is$ también analítica.

La segunda de las afirmaciones es inmediata a partir de la primera. Es decir, si una transformación conforme de coordenadas tienen inversa y ambas son analíticas, es obvio que curvas continuas $\mathcal{C}(z)$ serán transformadas a curvas continuas $\tilde{\mathcal{C}}(w)$.

²De esta propiedad es donde la transformación hereda su nombre de conforme. Son transformaciones *isogonales* es decir, que preservan los ángulos entre las curvas que se intersectan.

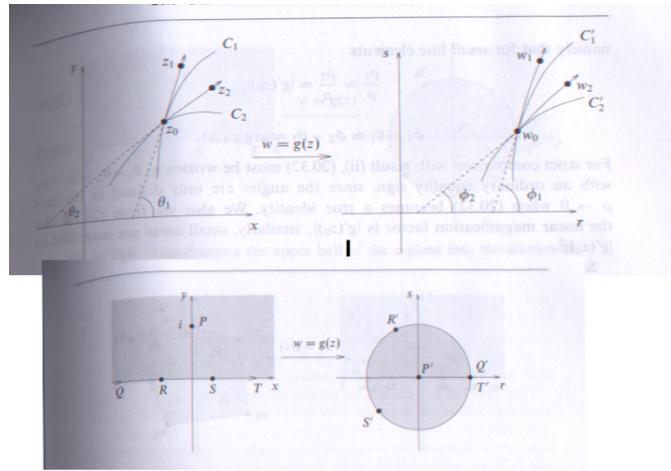


Figura 1.3: Transformaciones conformes. Cuadrante superior representa la conservación de ángulos y escala bajo transformaciones y el inferior un ejemplo de transformaciones conforme

El hecho que la transformación conforme preserva el ángulo y las escalas se muestra en la figura 1.3 y puede comprobarse de la siguiente manera. Consideremos dos curvas, $C_1(z)$ y $C_2(z)$, en el plano complejo $z = x + iy$. Supongamos además que estas curvas se intersectan en un punto $z = z_0$. Entonces, sobre las tangentes a cada curva, en z_0 , definimos otros dos puntos z_1 y z_2 de tal forma que

$$\left. \begin{array}{l} z_1 - z_0 = \rho e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 = \rho e^{i\theta_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\phi_1} \\ w_2 - w_0 = \rho_2 e^{i\phi_2} \end{array} \right.$$

Nótese que hemos construido los puntos z_1 y z_2 sobre las tangentes a z_0 a la misma distancia ρ de z_0 y, en principio, hemos supuesto que las distancias a los puntos transformados w_1 y w_2 (las cuales hemos identificado como ρ_1 y ρ_2 , respectivamente), no son iguales. Ahora bien, dado que $w = g(z)$ es analítica entonces

$$\frac{dg(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} = \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \lim_{z_2 \rightarrow z_0} \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} \Rightarrow g'(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_1}{\rho} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho_2}{\rho} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$$

Es claro que al comparar las magnitudes y las fases demostramos que las transformaciones conformes preservan las distancias, $\rho_1 = \rho_2$, y los ángulos $(\phi_2 - \phi_1) = (\theta_2 - \theta_1)$. Adicionalmente, es muy fácil convencerse que si la transformación conforme conserva los ángulos entre curvas y las escalas en todas direcciones las figuras son transformadas en figuras equivalentes quizás ampliadas y rotadas, pero no deformadas.

1.3.1. Algunas consecuencias y ejemplos

Las consecuencias de la última afirmación reviste alguna importancia. Si $f = f(z)$ es analítica en el plano (x, y) y la transformación $z = h(w)$ también lo es, entonces la función $F(w) = f(h(w))$ necesariamente es analítica en el plano (r, s) .

$$\frac{\Delta F}{\Delta w} = \frac{\Delta f}{\Delta h} \frac{\Delta h}{\Delta w} \equiv \frac{\Delta f}{\Delta z} \frac{\Delta h}{\Delta w}$$

Por hipótesis supusimos que f y h eran analíticas, por lo cual es inmediato concluir que debido a que los dos factores de la derecha son analíticos, la función $F(w)$ también lo será.

Tal y como mostramos en la sección 1.1.5 si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, es analítica, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán funciones armónicas conjugadas, vale decir que satisfacen la ecuación de Laplace, con lo cual $\nabla^2 u(x, y) = \nabla^2 v(x, y) = 0$. Eso significa que si $F = \Phi(w) + i\Psi(w)$, entonces:

$$f = \phi + i\psi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow F = \Phi + i\Psi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\}$$

Esto impone que si $\Re[f(z)] = \phi$ es constante en el plano (x, y) , también lo será $\Re[F(w)] = \Phi$ en (r, s) (!Demuéstrelo!). Esta propiedad deriva una serie de aplicaciones en la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Si bien es una técnica elegante y útil cuando es posible, no deja de ser limitada porque se restringe a 2D. Hoy los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales han superado con creces este tipo de técnicas.

Los ejemplos son variados.

- Las siguientes transformaciones representan:

traslaciones: $w = z + b$; rotaciones de ángulo θ : $w = ze^{i\theta}$; expansiones de escala a : $w = az$

y pueden ser combinadas como: $w = az + b$ con a y b números complejos. Para la traslación es inmediado. Para la rotación también si recordamos que $z = |z|e^{i\phi}$ con lo cual $w = |z|e^{i\phi}e^{i\theta} = |z|e^{i(\phi+\theta)}$

- También la transformación de inversión $w = 1/z$ que transforma los puntos del interior de un círculo unidad a su exterior y viceversa. Una vez más, $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\phi}} = \left|\frac{1}{z}\right| e^{-i\phi}$. Entonces es claro que

$$0 \leq |z| \leq 1 \Rightarrow \infty < |w| \leq 1 \quad \wedge \quad 1 \leq |z| \leq \infty \Rightarrow 0 < |w| \leq 1$$

- Un caso más interesante lo constituye la transformación $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right)$, la cual transforma los puntos z_0 del semiplano superior complejo $y > 0$ al interior de un círculo unidad en el w -plano (ver figura 1.3 en la página 19). Para convencernos de ello notamos que

$$|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \right|$$

En general si z_0 y z los consideramos en el semiplano complejo superior $y \geq 0$, entonces siempre se cumple que $|z - z_0| \leq |z - z_0^*|$ con lo cual $|w| \leq 1$, y como se cumple para todo z en ese semiplano, entonces cada uno de esos puntos es transformado dentro de un círculo de radio $|w|$. Es inmediato convencerse que, la igualdad se cumple para puntos z sobre el eje real y que el punto $z = z_0$ es llevado al punto $w = 0$. Finalmente, notamos que si conocemos como transforman dos puntos $z_1 \rightarrow w_1$ y $z_2 \rightarrow w_2$ entonces podremos determinar la transformación, esto es, conocer los valores de los parámetros z_0 y ϕ . Este caso lo podemos apreciar si consideramos un par de puntos en el semiplano complejo y conocemos como transforman, digamos $z = i$ sobre el eje imaginario, e imponemos que sea transformado a $w = 0$, entonces es inmediato determinar que $z_0 = i$. Por otro lado, si imponemos que $z = \infty \Rightarrow w = 1$, entonces: $1 = w = e^{i\theta} \Rightarrow \theta = 0$, con lo cual $w = \frac{z - i}{z + i}$.

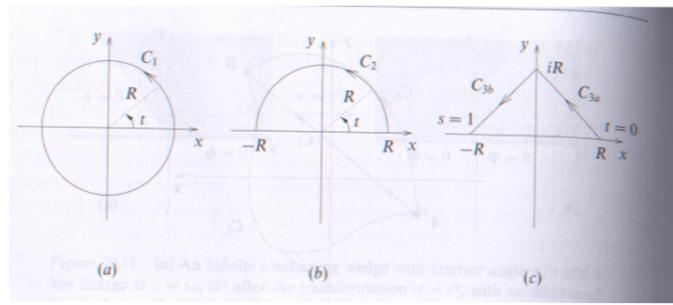


Figura 1.4: Integrales complejas y circuitos

1.4. Integrales complejas

Como siempre, luego de definir la derivada, construimos el concepto de integral a partir de la suma de Riemann. Esto es

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \Rightarrow |z_j - z_{j-1}| \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(z_j - z_{j-1}) = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z)$$

Es decir, que si el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, entonces se corresponde con la definición de la integral.

1.4.1. Algunas propiedades

Es claro que esta integral es, necesariamente, una integral de línea, ya que z tiene “dos dimensiones”

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{z_1}^{z_2} [dx + idy] [u(x, y) + iv(x, y)] = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy] \quad (1.3)$$

con lo cual transformamos una integral compleja en una suma de integrales reales. Pero necesitamos definir el contorno a través del cual vamos del punto $z_1 = x_1 + iy_1$ al punto $z_2 = x_2 + iy_2$.

La integración compleja tendrá las propiedades acostumbradas

- $\int_C dz (f(z) + g(z)) = \int_C dz f(z) + \int_C dz g(z)$
- $\int_C dz Kf(z) = K \int_C dz f(z)$ con K una constante real o compleja
- $\int_a^b dz f(z) = - \int_b^a dz f(z)$
- $\int_a^b dz f(z) = \int_a^m dz f(z) + \int_m^b dz f(z)$
- $\int_C dz |f(z)| \leq ML$, donde $M = \max |f(z)|$ y L la longitud de C

Esta última propiedad es importante porque permite establecer cotas a las integrales complejas sin tener que evaluarlas. De la definición de integral es casi inmediata la demostración

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j = \int_{z_1}^{z_2} dz f(z) \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\zeta_j)| |\Delta z_j| \leq M \sum_{j=1}^n |\Delta z_j| \leq ML$$

Donde hemos utilizado que $|f(\zeta_j)| \leq M$ y que la suma de los intervalos $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ es la longitud L del recorrido \mathcal{C} . Es claro que tomando límites a ambos miembros obtendremos $\left| \int_{\mathcal{C}} dz f(z) \right| \leq \int_{\mathcal{C}} dz |f(z)| \leq ML$.

Ejemplos

1. Evaluemos la integral compleja $f(z) = z^{-1}$ a lo largo de diferentes contornos, tal y como se ilustran en la figura 1.4

- a) un circuito cerrado a lo largo de una circunferencia de radio R

$$\oint dz z^{-1} \equiv \oint d(Re^{i\theta}) R^{-1} e^{-i\theta} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

- b) siguiendo una semicircunferencia desde $(R, 0) \rightarrow (-R, 0)$. Esto es

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} dz z^{-1} = \int_{(R,0)}^{(R,\pi)} d(Re^{i\theta}) R^{-1} e^{-i\theta} = i \int_0^\pi d\theta = \pi i$$

- c) siguiendo dos líneas rectas entre los puntos $(R, 0) \rightarrow (0, R) \rightarrow (-R, 0)$. En este caso, procedemos utilizando la expresión cartesiana para los números complejos. Para ello, vamos a parametrizar $z = z(t)$ para $(R, 0) \rightarrow (0, R)$ y $z = z(s)$ cuando $(0, R) \rightarrow (-R, 0)$. Veamos

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_3=(-R,0)} dz z^{-1} = \int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(0,R)} dz z^{-1} + \int_{z_2=(0,R)}^{z_3=(-R,0)} dz z^{-1}$$

para cada una de las integrales se cumple, respectivamente, que

$$z = (1-t)R + itR \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad \wedge \quad z = -sR + i(1-s)R \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1$$

con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{dz}{z} = \int_0^1 dt \frac{-1+i}{1+t(-1+i)} + \int_0^1 ds \frac{-1-i}{i+s(-1-i)}$$

procedemos entonces con la primera de las integrales

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)dt}{(1-t)+it} = \int_0^1 \frac{(-1+i)((1-t)-it)dt}{(1-t)^2-t^2} = \int_0^1 \frac{(2t-1)dt}{1-2t+2t^2} + i \int_0^1 \frac{dt}{1-2t+2t^2}$$

es decir

$$\int_0^1 \frac{(-1+i)dt}{(1-t)+it} = \frac{1}{2} \ln(1-2t+2t^2) \Big|_0^1 + i \arctan \left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^1 = 0 + \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}$$

y, la segunda integral también tendrá el mismo resultado, con lo cual

$$\int_{z_1=(R,0)}^{z_2=(-R,0)} \frac{dz}{z} = \pi i \quad \text{¡el mismo resultado que a través del arco de circunferencia!}$$

Es interesante notar que si regresamos al punto $(R, 0)$ a través del contorno $(-R, 0) \rightarrow (0, -R) \rightarrow (R, 0)$ la integral cerrada se anula, no así cuando nos regresamos a través el arco complementario de circunferencia. En pocas palabras, como se esperaba, el valor de las integrales de camino, para algunas funciones, dependerán del camino seleccionado. En la próxima sección veremos a cuáles funciones corresponderá un mismo valor de la integral cerrada, independientemente del circuito que uno elija.

2. Otro ejemplo ilustrativo lo constituye

$$\oint \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\theta} d\theta}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} = \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \Rightarrow \begin{cases} n = 0 : & \int_0^{2\pi} d\theta = 2i\pi \\ n \neq 0 : & \frac{i}{R^n} \int_0^{2\pi} d\theta [\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)] = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la forma polar $z - z_0 \equiv Re^{i\theta}$ e integrado a lo largo de una circunferencia de radio R centrada en $z = z_0$.

Ejercicios

Repetir los mismos pasos del primer ejemplo para el caso de

$$f(z) = (z^*)^{-1}.$$

1.5. Teorema Integral de Cauchy

1.5.1. El teorema y las regiones

El teorema integral de Cauchy es uno de los dos teoremas básicos en la teoría de funciones de variable compleja. Este teorema considera que si $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa, \mathcal{R} , en su contorno \mathcal{C} y su derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región³, entonces la circulación a lo largo de cualquier contorno cerrado \mathcal{C} se anula. Esto es

$$\oint_C dz f(z) = 0$$

Antes que nada, y como parte de ese adiestramiento en lenguaje, precisaremos qué queremos decir (qué quieren decir los matemáticos) con regiones *simplemente conexas* y *múltiplemente conexas*.

Una región *simplemente conexa* es aquella que no tiene “huecos”, o dicho de una manera más precisa y elegante, en la cual una curva Γ puede ser reducida (encogida) a un punto sin salir de la región \mathcal{R} . En la figura 1.5 cuadrante **Ia** se muestra una región simplemente conexa y en los cuadrantes **Ib** y **Ic** regiones *múltiplemente conexas*. Estas dos últimas figuras clarifican este concepto. Es decir, una *región múltiplemente conexa* es aquella que no es *simplemente conexa* y con eso queremos decir que “tiene huecos”, o lo que es lo mismo existen curvas que no se pueden reducir a puntos en la región.

Tal y como hemos comentado la demostración rigurosa del Teorema de Cauchy está fuera de los alcances de estas notas, pero algo se puede hacer si invocamos el Teorema de Stokes (o uno de los Teoremas de Green en el plano) que vimos cuando estudiamos análisis vectorial. Con ello recordamos la ecuación (1.3), entonces

$$\int_{z_1}^{z_2} dz f(z) = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [u(x, y)dx - v(x, y)dy] + i \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} [v(x, y)dx + u(x, y)dy]$$

³Esta última condición no es necesaria, pero la demostración del teorema se torna mucho más sofisticada, y referimos al lector a los libros especializados, vale decir a las referencias [?, ?].

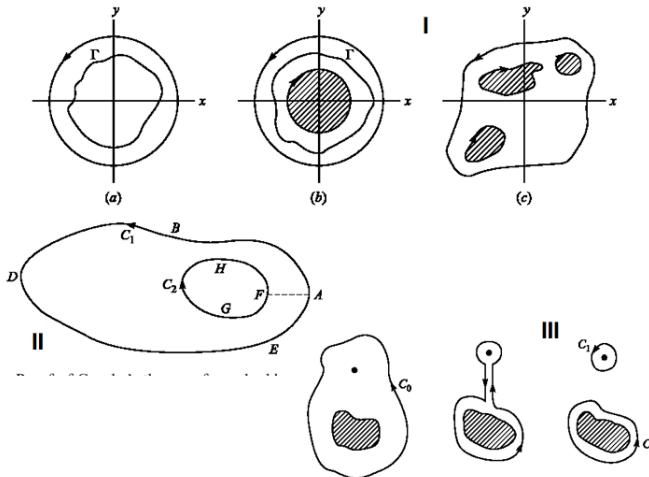


Figura 1.5: Regiones en el plano complejo

El Teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) = \oint_{\mathcal{C}} (pdy - qdx)$$

con lo cual, si una vez más suponemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $dz = dx + idy$, entonces tendremos que

$$\oint_{\mathcal{C}} (udx - vdy) + i \oint_{\mathcal{C}} (vdx + udy) = \int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial(-u)}{\partial y} \right) + i \int_{\mathcal{R}} dx dy \left(\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(-v)}{\partial y} \right) = 0$$

y acto seguido, como $f(z)$ es analítica, invocamos las condiciones de Cauchy Riemann (ecuación (1.2)) y es inmediato ver que se anula la integral de circulación.

1.5.2. Algunas observaciones y el Teorema de Morera

De la anterior “demonstración” del Teorema de Cauchy Riemann emergen algunas observaciones

- La primera es la insistencia de que la condición que la derivada $f'(z)$ existe y es continua en esta región no es necesaria.
- La segunda es que el Teorema de Cauchy, es válido también para regiones múltiplemente conexas. Consideremos una región como la descrita en la figura 1.5 cuadrante **II**, es claro que podemos circular la integral en los siguientes contornos

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = \int_{ABDEAFGHFA} dz f(z) \equiv \int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{AF} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) + \int_{FA} dz f(z) = 0$$

y como $\int_{AF} dz f(z) = - \int_{FA} dz f(z)$ entonces

$$\int_{ABDEA} dz f(z) + \int_{FGHF} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) = 0$$

con lo cual se nota que para regiones múltiplemente conexas, a pesar que las circulaciones son opuestas, el “observador” que circula por \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 siempre tiene la región \mathcal{R} a su izquierda.

- Siguiendo con la reflexión anterior, podemos invertir el sentido de la circulación en el contorno \mathcal{C}_2 con lo cual

$$\oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) - \oint_{\mathcal{C}_2} dz f(z) = 0 \Leftrightarrow \oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) = \oint_{\mathcal{C}_2} dz f(z)$$

Es decir, que si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} , da igual cualquier recorrido por las fronteras de una región y el valor de la integral permanecerá inalterado.

- Más aún, este resultado puede extenderse a regiones con n huecos de tal forma que, tal y como ilustra en la figura 1.5 cuadrante III

$$\oint_{\mathcal{C}_1} dz f(z) = \sum_{j=1}^n \oint_{\mathcal{C}_j} dz f(z)$$

Con lo cual estamos afirmando que, dada una región que contiene un número finito (*¿enumerable?*) n de singularidades, la integral a lo largo del contorno que encierra la región \mathcal{R} es equivalente a la suma de las integrales que encierran cada una de las n singularidades.

Enunciaremos sin demostración el Teorema de Morera⁴, también conocido como el teorema inverso de Cauchy.

Teorema de Morera: Si una función $f(z)$ es continua en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno \mathcal{C} y $\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$ entonces $f(z)$ es analítica en \mathcal{R} .

Ejemplo

Considere la función definida en una región \mathcal{R}

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad \text{con } \begin{cases} z_0 \text{ fuera de la región } \mathcal{R} \\ z_0 \text{ dentro de la región } \mathcal{R} \end{cases}$$

- Si z_0 está **fuera** de la región, entonces $f(z)$ es analítica en \mathcal{R} , con lo cual el Teorema de Cauchy implica que

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = 0$$

- Si z_0 está **dentro** de la región, entonces $f(z)$ no es analítica en \mathcal{R} por cuanto existe una singularidad $z = z_0$. Si consideramos \mathcal{C} el contorno que bordea a \mathcal{R} , como una circunferencia centrada en $z = z_0$ y Γ otra circunferencia que aisla a z_0 con un radio $|z - z_0| = \epsilon$ (esta situación se ilustra en la figura 1.6 cuadrante I). Entonces, si hacemos $z - z_0 = \tilde{z} = \epsilon e^{i\theta}$ el Teorema de Cauchy implica

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

⁴Pueden consultar la demostración en la referencia [Arfken, Weber y Weber 2000].

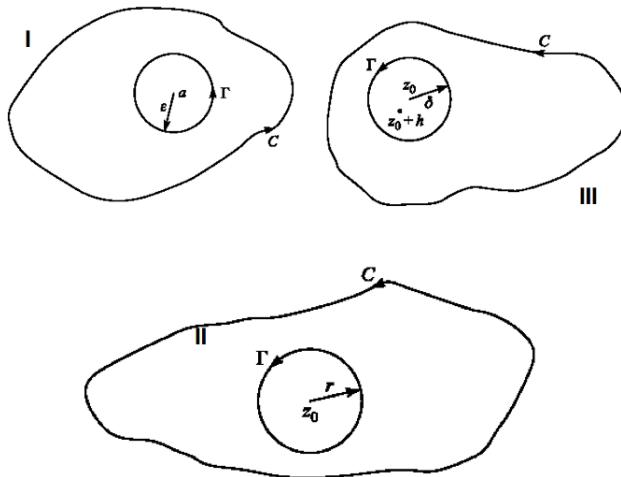


Figura 1.6: Circulaciones y Polos

1.5.3. Fórmula integral de Cauchy

El ejemplo de la sección anterior nos lleva a una de las expresiones más útiles e importantes del análisis complejo: *La Fórmula Integral de Cauchy*, la cual dice que si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} encerrada por un contorno C y consideramos un punto $z = z_0$ contenido en esa región, entonces

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0)$$

Para probar esta afirmación supongamos una vez más un circuito en encierra al polo $z = z_0$ (ver figura 1.6 cuadrante II). Con lo cual, como $f(z)$ es analítica en una región, el Teorema de Cauchy nos garantiza

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad \text{si } z - z_0 = re^{i\theta} \Rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

si hacemos $r \rightarrow 0$ tendremos que

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0)$$

Observaciones Surgen también observaciones al respecto

- Obvio que es válido para regiones múltiplemente conexas y es fácil demostrarlo. Se lo dejamos al lector como ejercicio.
- Si reacomodamos la expresión para la forma integral podemos hacer que esa fórmula sea válida para todo z

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

- Más aún, veremos que es fácil generalizar esta fórmula para derivadas de funciones, vale decir

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Veamos el caso más sencillo y demostremos que para $n = 1$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{h} \left\{ \frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right\} dz \right]$$

tal y como se muestra en la figura 1.6, cuadrante III tenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \right] = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$$

Pero mucho más interesante hubiera sido “derivar respecto a una constante”. Este truco implica que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (1.4)$$

Esta fórmula es muy útil para calcular integrales. Considere, por ejemplo la siguiente integral

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2\zeta} d\zeta}{(\zeta + 1)^4} \equiv \frac{2i\pi}{3!} f^{(3)}(-1) \quad \text{con } f(z) = e^{2z} \Rightarrow I = \frac{8i\pi}{3} e^{-2}$$

donde hemos supuesto que el contorno \mathcal{C} encerraba el punto $z = -1$, porque de otro modo la función $\frac{e^{2z}}{(z + 1)^4}$ sería analítica y la integral se anularía por el Teorema de Cauchy.

Ejemplos

1. Evaluar

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz, \quad \text{para los entornos: } C: |z| = 3 \text{ y } C: |z| = 1.$$

El entorno $|z| = 3$ contiene en su interior al punto $z_0 = 2$, esto implica que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz = e^2.$$

Para el entorno $|z| = 1$, vemos que el punto $z_0 = 2$ no está contenido en ese entorno, esto significa que el integrando es una función analítica en toda la región. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z - 2} dz = 0.$$

2. Evaluar

$$I = \int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz, \quad \text{para los entornos: } C_1: |z - i| = 2, \quad C_2: |z| = 3 \text{ y } C_3: |z + i| = 2.$$

La integral puede ser escrita de la siguiente manera:

$$I = \int_C \frac{1}{(z + 2i)(z - 2i)} dz.$$

Para el contorno $|z - i| = 2$, tenemos que éste contiene en su interior al punto $z_0 = 2i$. Si escribimos la integral como

$$I = \int_C \frac{1}{z - 2i} dz,$$

la función $1/(z + 2i)$ es analítica dentro de C_1 y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{1}{z - 2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4i} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos ahora el contorno $|z| = 3$. Este contorno contiene en su interior a los puntos $2i$ y $-2i$. Podemos trazar dos contornos adicionales, de radio ϵ alrededor de cada punto, entonces:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^2 + 4} dz &= \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z^2 + 4} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z^2 + 4} dz \\ &= \int_{C_{(2i)}} \frac{1}{z - 2i} dz + \int_{C_{(-2i)}} \frac{1}{z + 2i} dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{z + 2i} \right]_{z=2i} + 2\pi i \left[\frac{1}{z - 2i} \right]_{z=-2i} \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{4i} \right] + 2\pi i \left[-\frac{1}{4i} \right] = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para el contorno $|z + i| = 2$ se tiene que éste contiene al punto $z_0 = -2i$. Repitiendo lo que hicimos en el primer caso tenemos:

$$I = \int_C \frac{1}{z + 2i} dz$$

la función $1/(z - 2i)$ es analítica dentro de C_3 y entonces por el teorema de Cauchy

$$I = \int_C \frac{1}{z + 2i} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4i} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Capítulo **2**

Series

Borrador Preliminar

La ruta de este capítulo

2.1. Sucesiones y Series

Básicamente el tema central de este curso tiene que ver con el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y el desarrollo de métodos para resolverlas. Las ecuaciones diferenciales aparecen ya como tema de estudio, o curiosidad matemática, desde los tiempos de Isaac Newton¹ cuando se comenzó con el desarrollo del Cálculo Diferencial. El propio Newton las estudió en su tratado de cálculo diferencial donde discute sus soluciones a través de una expansión en series.

Newton estudió la siguiente ecuación diferencial, que por contener una primera derivada llamaremos una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x). \quad (2.1)$$

Para buscar su solución, Newton propone el siguiente método que consiste en suponer una solución que tiene la forma de una serie infinita. El primer término de la serie es:

$$y = 0 + \dots$$

el cual corresponde al valor inicial $x = 0$ en la ecuación (2.1).

Al insertar este valor en (2.1) resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 + \dots$$

que al integrarse se obtiene

$$y = x + \dots$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.1), resulta

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + x + \dots = 1 - 2x + 2x^2 + \dots$$

Integrando esta última ecuación, se obtiene

$$y = x - x^2 + \frac{2}{3}x^2 + \dots$$

Repitiendo el proceso:

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 \dots \Rightarrow y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

Continuando con el método repetidamente se van calculando los diferentes términos de la serie

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{45} + \frac{x^7}{630} + \dots$$

En la figura 2.1 se puede apreciar parte del manuscrito original donde aparece el esquema de solución por series propuesto por Newton.

¹Sir Isaac Newton (1643-1727), fue un científico, físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, más conocidos como los Principia, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la Mecánica Clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo matemático. Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra como la culminación de la revolución científica. (Tomado de Wikipedia).

E X E M P L. I

Sit Aequatio $\frac{y}{x} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cuius Terminos:

$x - 3x + xx$ non affectos Relata Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in sinistrâ Columnâ.

	$+ 1 - 3x + xx$
$+ y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5; \&c.$
$+ xy$	$* x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6; \&c.$
Aggreg.	$+ 1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5; \&c.$
$y =$	$+ x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6; \&c.$

Numer.

Figura 2.1: El esquema de Newton

Por otra parte, notemos que para cada valor de x y y , la ecuación (2.1) no es más que la derivada $y'(x)$, es decir la pendiente, de las soluciones de:

$$y'(x) = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x).$$

De esta manera, con un poco de paciencia, o con algún programa de computación algebraico apropiado, se puede obtener el *campo vectorial* correspondiente a la ecuación diferencial, como se puede apreciar en la figura 2.2 (figura 2a). En realidad las soluciones se pueden ver como las curvas determinadas por las direcciones indicadas en el campo vectorial, figura 2b. Las aproximaciones que se van obteniendo con el método mostrado anteriormente se pueden observar, junto con la solución verdadera en la Figura 2c. Notemos que todas las aproximaciones son más cercanas entre si cuando x toma valores cada vez más próximos a cero.

Comencemos entonces nuestro estudio sobre ecuaciones diferenciales precisamente con las series matemáticas.

2.1.1. Introducción a las sucesiones

Para empezar, vayamos a la noción elemental de sucesiones. Básicamente, una sucesión es una colección numerable de elementos, dados en cierto orden, como:

$$1, 2, 3, 4, \dots, 1, x, x^2, x^3, \dots, a, b, c, d.$$

En matemáticas se puede entender las sucesiones como una aplicación desde los números naturales a cualquier otro conjunto, no necesariamente de la misma naturaleza. Estos números se denominan los términos, elementos o miembros de la sucesión. Siendo más rigurosos, una sucesión se puede definir como una función sobre el conjunto de los números naturales, es decir, que estaríamos hablando en este caso de una función discreta.

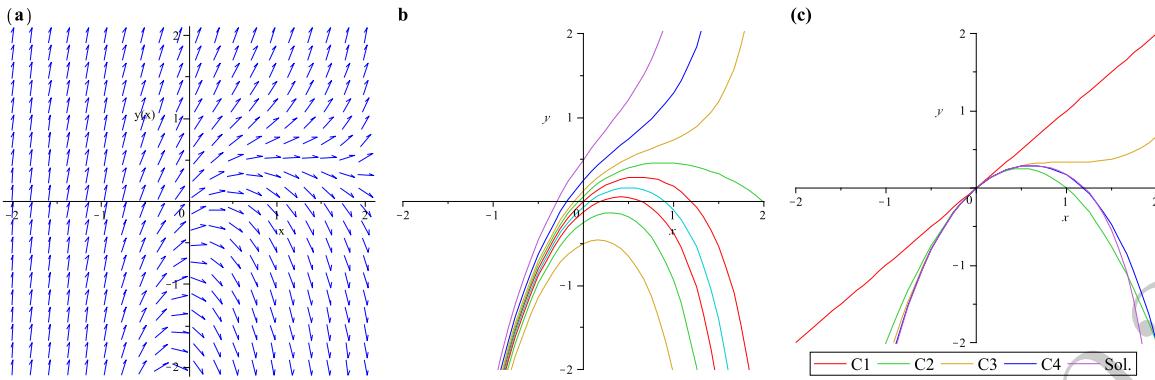


Figura 2.2: (a) Representación de los campos vectoriales. (b) Diferentes soluciones para la ecuación diferencial (2.1). (c) La solución correcta correspondiente al valor inicial $y(0) = 0$ con las diferentes soluciones aproximadas.

Es bastante común que se confundan las sucesiones con series matemáticas, veremos que una serie entenderemos es en realidad una suma de términos.

Las sucesiones se diferencian de los conjuntos en el hecho de que es importante considerar el orden en que aparecen distribuidos. Además, un mismo término de una sucesión puede aparecer varias veces en posiciones diferentes. Esto significa que las siguientes sucesiones finitas son diferentes:

$$a, b, c, d \neq b, c, d, a.$$

Una sucesión puede contener infinitos elementos y en este caso se denomina una sucesión infinita, por lo tanto, si a cada número entero positivo se le asocia un elemento u_n , entonces el conjunto ordenado:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

define una sucesión infinita. Cada término u_n tendrá un siguiente término u_{n+1} y por lo tanto no existe un último término.

Las sucesiones se pueden expresar de una manera más sencilla definiendo el n -ésimo término, como por ejemplo:

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

cuyos primeros cuatro términos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}.$$

Otra manera de definir sucesiones es por medio de una relación de recurrencia, por ejemplo, para la bien conocida sucesión de Fibonacci la relación de recurrencia es:

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n \geq 2,$$

y cuyos primeros términos son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Como curiosidad matemática, podemos ver que existe una función que permite generar los números de Fibonacci, esta función cuando se expande en potencias de x tiene como coeficientes, ¡los números de Fibonacci!

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + 34x^9 + \dots$$

También es posible definir una sucesión a través del concepto de función. Se define una función para los enteros positivos, de manera que $f(n)$ es el término n -ésimo de la sucesión para cada $n = 1, 2, 3, \dots$. Por lo tanto, los términos de las sucesión se escriben como:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

Las siguientes fórmulas son ejemplos de sucesiones:

$$f(n) = (-1)^n \Rightarrow -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$f(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \sin(\pi), \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \sin(2\pi), \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right), \dots$$

$$f(n) = (-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right] \Rightarrow -2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \dots$$

Las sucesiones pueden tener la característica de ser crecientes o decrecientes. Una sucesión $\{f(n)\}$ se dice que es creciente si:

$$f(n) \leq f(n+1) \quad \forall n \geq 1,$$

es decir, cada término es menor o igual al término siguiente. Y si se impone la condición $f(n) < f(n+1)$ se denomina *estrictamente creciente*. Por otro lado, una sucesión se llama decreciente si:

$$f(n) \geq f(n+1) \quad \forall n \geq 1.$$

y *estrictamente decreciente* si $f(n) > f(n+1)$.

Las sucesiones pueden estar acotadas de diferente manera. Diremos que la sucesión $\{f(n)\}$ es acotada *superiormente* si existe un número positivo M tal que $f(n) \leq M$ para todo n . También puede ser acotada *inferiormente* si existe un número positivo N tal que $f(n) \geq N$ para todo n . En el caso de cumplirse ambas condiciones hablaremos de una sucesión acotada $N \leq f(n) \leq M$. Podemos hablar de sucesiones monótonas cuando la diferencia entre un término y el que le sigue siempre es del mismo signo y además son del tipo creciente o decreciente.

Nos vemos ahora en la necesidad de hablar del significado de los términos convergencia o divergencia de una sucesión.

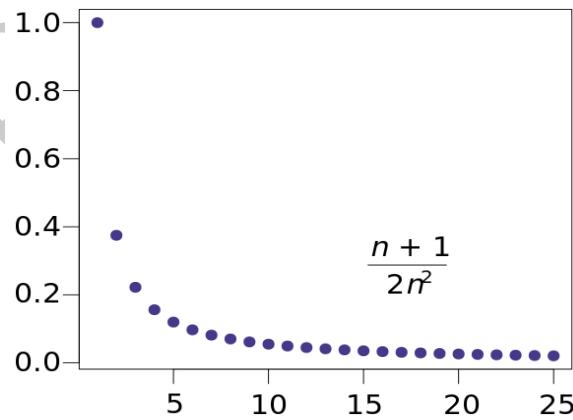


Figura 2.3: Sucesión convergente a cero.

La convergencia o divergencia se determina de manera sencilla, como lo indica el siguiente teorema:

Teorema: Una sucesión monótona converge si y sólo si es acotada.

Revisemos el concepto de convergencia (divergencia). Cuando una sucesión converge, lo que significa es que tiende a un valor particular llamado su límite, diremos en éste caso la sucesión será una *sucesión convergente*. Las sucesiones que no son convergentes se denominan *divergentes*.

En otras palabras, una sucesión tiene límite si los elementos de la sucesión se hacen cada vez más y más cercanos a algún valor L (llamado límite de la sucesión). Esto significa que dado un número real ε mayor que

cero, todos menos un número finito de elementos de la sucesión estarán siempre a una distancia a L menor que ε .

Matemáticamente es lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L. \quad (2.2)$$

Si una sucesión $f(n)$ converge, entonces el límite 2.2 existe, es único y la sucesión es acotada.

En la figura 2.3 podemos ver una representación gráfica para la sucesión:

$$f(n) = \frac{n+1}{2n^2}.$$

Esta serie converge, y es fácil ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2} = 0.$$

También existen las sucesiones oscilantes, las cuales suelen ser divergentes por no tener límite. Estas sucesiones presentan términos que se alternan de manera indefinida. Cuando cambian de signo se llaman sucesiones alternadas, como la que mencionamos anteriormente $f(n) = (-1)^n \Rightarrow -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Un ejemplo particular de sucesiones oscilantes convergentes es la *sucesión de Cauchy*. Una sucesión de números reales: x_1, x_2, x_3, \dots se denomina una sucesión de Cauchy fundamental si para todo número positivo ε existe un entero positivo M tal que para todos los números naturales $n, m > M$ se cumple:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

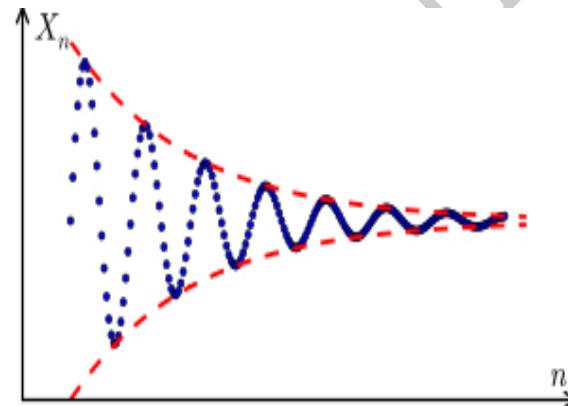


Figura 2.4: Sucesión de Cauchy.

En este tipo de sucesiones los elementos de la sucesión se vuelven arbitrariamente cercanos entre sí a medida que la sucesión progresiona, como se puede ver en la figura 2.4. Esta condición, necesaria para hablar de convergencia, se llama la condición de Cauchy.

Existe una serie de resultados interesantes que podemos mencionar:

- Toda sucesión convergente es de Cauchy.
- Toda sucesión de Cauchy está acotada.
- Para los números reales \mathbb{R} , toda sucesión de Cauchy es convergente.
- Toda sucesión convergente está acotada.

A medida que n se hace cada vez más grande, el valor de una sucesión $\{f(n)\}$ o $\{u_n\}$ se puede comportar de una manera bastante particular. Por ejemplo, si $u_n = 1/n$, es claro que u_n converge a cero a medida que $n \rightarrow \infty$. Pero si $u_n = e^{\alpha n}$, el límite dependerá del valor de α .

Por lo tanto, la pregunta a responder tiene que ver con el hecho de saber si los términos de u_n tienden, o no, a un límite finito cuando n crece indefinidamente.

2.1.2. Acercándonos al concepto de series

Con el concepto de sucesiones es posible definir una expresión analítica que formalmente tiene aspecto de suma, que contiene un número infinito de sumandos y que denominaremos *serie infinita*.

Si $\{u_n\}$ (con $n = 1, 2, 3, \dots$) es una sucesión infinita de números reales o complejos, es posible formar una nueva sucesión $\{s_n\}$ a partir de tomar sumas parciales de $\{u_n\}$. Veamos el procedimiento:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots \quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Es decir, partimos con $s_1 = u_1$ y decimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $s_{n+1} = s_n + u_{n+1}$. La sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos la serie de término general a_n definida a través de la sucesión $\{u_n\}$ y la representaremos por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{2.3}$$

Al número

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

le denominaremos la suma parcial de orden n de la serie (2.3).

Es importante aclarar que una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen al sumar de manera consecutiva los términos de una sucesión diferente.

Si la sucesión s_n tiende a un límite S , la serie infinita

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

se dice que es convergente y converge al valor S , el cual es único. Entonces se puede escribir:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i. \tag{2.4}$$

El número S se denomina *la suma de la serie* infinita y debe ser entendido como el límite de la sucesión.

Lo anterior se puede formalizar diciendo que la condición para la existencia de un límite S es que para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|S - s_i| < \varepsilon \quad \text{para } i > N \Rightarrow |s_j - s_i| < \varepsilon \quad \text{para, todo } i, j > N.$$

Esta afirmación se denomina **criterio de Cauchy**² sobre la convergencia de las series parciales, y viene a ser la condición necesaria y suficiente para que una suma parcial s_i converja a medida que avanzamos en los términos de la serie.

Se dirá que la serie *diverge* si el valor de la sumatoria aumenta indeteniblemente.

La serie también puede oscilar:

$$s_i = \sum_{n=1}^i (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^i + \dots$$

²Augustin Louis Cauchy París, 1789 - 1857, matemático francés pionero en los estudios de análisis (real y complejo) y de la teoría de los grupos de permutación. Cauchy hizo aportes importantes en los criterios de convergencia y divergencia de series infinitas, así como también, en ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidades y física matemática

Aquí s_n será 0 o 1 y por lo tanto el límite no existe.

La serie cuyos términos son tomados a partir del $(n+1)$ -ésimo término, y en el mismo orden, de la serie (2.4) se llama el *resto n-ésimo* de la serie (2.4) y se denota por:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \Rightarrow u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots . \quad (2.5)$$

Si el resto n -ésimo de la serie (2.4) converge, entonces su suma:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k , \quad (2.6)$$

se denomina el *resto de la serie*.

De las series nos interesa conocer cuánto suman. Es decir, cuál es el valor de s_i para una serie finita donde $i = N$. Pero también estamos interesados en conocer cuánto suma una serie infinita.

2.1.3. Series elementales

Probablemente, de cursos anteriores hemos conocido algunas series emblemáticas, estudiemos aquí algunas de estas series:

■ Serie aritmética

Seguramente con anterioridad hemos oído hablar de progresiones aritméticas. Ellas son, sencillamente series de la forma:

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a + nd) = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d) + \dots + [a + (N - 1)d] ,$$

donde a y d son números reales o complejos.

Al desarrollar la serie anterior en orden inverso y sumarla con la serie original obtenemos:

$$s_N = \frac{a}{[a + (N - 1)d]} + \frac{(a + d)}{[a + (N - 2)d]} + \frac{(a + 2d)}{[a + (N - 3)d]} + \frac{(a + 3d)}{[a + (N - 4)d]} + \dots + a$$

resultando:

$$2s_N = N [a + a + (N - 1)d] \Rightarrow s_N = \frac{N}{2} [\text{Primer Término} + \text{Último Término}]$$

obviamente, si $N \rightarrow \infty$ la serie diverge.

■ Serie Geométrica

De ésta serie también sabemos que:

$$s_N = \sum_{n=0}^N x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N ,$$

y si realizamos la resta $s_N - xs_N$, tenemos

$$\begin{aligned} s_N &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N \\ xs_N &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{N+1} \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que:

$$(1-x)s_N = 1 - x^{N+1} \Rightarrow s_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x},$$

Notemos que si $x \neq 1$ podemos reescribir la serie anterior como:

$$\sum_{n=0}^N x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{1-x} \quad (2.7)$$

Por lo tanto podemos ver que si $|x| < 1$ tendremos que la suma será:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^{N+1}}{1-x} = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, la serie divergirá (u oscilará) si $|x| \geq 1$.

■ Series Aritmético-geométricas

Estas series, un poco más exóticas y como su nombre lo sugiere son una combinación de las anteriores.

$$s_N = \sum_{n=0}^{N-1} (a+nd)x^n = a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + (a+3d)x^3 + (a+4d)x^4 + \cdots + [a + (N-1)d]x^{N-1}.$$

Utilizando la misma estrategia que aplicamos a las series geométricas (se deja como ejercicio al lector) se llega a encontrar el valor, nada intuitiva, de la suma S :

$$s_N = \frac{a - [a + (N-1)d]x^N}{1-x} + \frac{xd(1-x^{N-1})}{(1-x)^2}.$$

Otra vez, si $|x| < 1$, entonces cuando $N \rightarrow \infty$ la serie converge a:

$$S = \frac{a}{1-x} + \frac{xd}{(1-x)^2}.$$

■ Serie Armónica

Quizá no la conocíamos con este nombre (y menos por sus propiedades) pero seguro nos la hemos tropezado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Esta serie infinita resulta ser engañosa, en apariencia parece converger, pero no es así. Además notemos lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n} \approx 3,5977, \quad \sum_{n=1}^{220} \frac{1}{n} \approx 5,9731, \quad \sum_{n=1}^{20220} \frac{1}{n} \approx 10,492,$$

la suma de los primeros 20 términos es más grande que la suma de los siguientes ¡200 términos! y da la impresión de que la serie crece muy lentamente hacia algún valor límite.

Si analizamos con más cuidado, veremos que hay sutilezas. Acomodemos los términos de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\sigma_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\sigma_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{\sigma_3} + \cdots$$

la expresión anterior puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{1+1}}_{\sigma_0} + \underbrace{\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2}}_{\sigma_1} + \underbrace{\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4}}_{\sigma_2} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{8+1} + \frac{1}{8+2} + \cdots + \frac{1}{8+8}}_{\sigma_3} + \cdots + \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + j} + \cdots \end{aligned}$$

con lo cual:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}; \quad \sigma_1 = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}; \quad \sigma_2 = \frac{533}{840} > \frac{1}{2}; \quad \sigma_3 = \frac{95549}{144144} > \frac{1}{2}; \cdots$$

y claramente diverge ya que:

$$1 + \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Esta prueba aparentemente se le debe a Nicole D'Oresme³.

Ahora bien, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta:

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n) \Rightarrow \ln(n) &= \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \int_3^4 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = +\infty.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Una de las generalizaciones de la serie armónica es la función Zeta de Riemann⁴

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots, \quad \Re(z) > 1.$$

³Nicole D'Oresme (1323-1382) Matemático francés que inventó la geometría coordenada antes de Descartes. Sobre la serie armónica consulte: <http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html>

⁴Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 Hanover, Alemania - 1866 Selasca, Italia) Matemático alemán cuyas ideas sobre las geometrías del espacio han tenido un profundo impacto en el desarrollo de la física teórica. Igualmente clarificó la noción de integral al introducir el concepto de lo que hoy se conoce como *integral de Riemann*. Más detalles en <http://mathworld.wolfram.com/RiemannIntegral.html>.

Esta última expresión es también un ejemplo donde a partir de una serie se define una función, en este caso una función analítica. Aquí z puede ser un número complejo, $z = a + ib$, y la serie converge cuando su parte real es mayor o igual a 1.

La función Zeta de Riemann viene también definida por:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^z}{x(e^x - 1)} dx, \text{ donde } \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^z e^{-x}}{x} dx.$$

$\Gamma(z)$ es la función gamma.

Las mayoría de las series que hemos mencionado con anterioridad tienen la particularidad de que todos sus términos son positivos, es decir, para la serie $\sum a_n$ se tiene que $a_n \geq 0$, y por lo tanto:

$$s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$$

de manera que las sumas parciales s_n son una sucesión monótona creciente.

2.1.4. Derivación de series geométricas elementales

Las series infinitas se encuentran entre las más poderosas herramientas que se introducen en un curso de cálculo elemental. Son un ejercicio bastante inteligente para la manipulación de límites y son una buena herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales, en el desarrollo de métodos numéricos y para estimar el comportamiento de funciones.

Consideremos la serie geométrica:

$$a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n + \cdots$$

con $|z| < 1$. Este es uno de los pocos ejemplos donde se puede encontrar el término de las sumas parciales a través de una expresión sencilla. Esta serie se puede tomar como punto de partida para encontrar la suma de un gran número de series interesantes. Consideremos el caso $a = 1$ y $z = x$, como en la ecuación (2.8).

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (2.9)$$

Si cambiamos x por x^2 en (2.9) resulta:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.10)$$

Si se multiplica (2.10) por x se obtiene:

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.11)$$

Si cambiamos x por $-x$ en (2.9) resulta:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1. \quad (2.12)$$

Si cambiamos x por x^2 en (2.12) resulta:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.13)$$

Si se multiplica (2.13) por x se obtiene:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + \cdots = \frac{x}{1+x^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.14)$$

Si cambiamos x por $2x$ en (2.10) resulta:

$$1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-4x^2}, \quad |x| < \frac{1}{2}. \quad (2.15)$$

Si se deriva (2.9) entonces:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1. \quad (2.16)$$

Si se integra (2.12):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \ln(1+x), \quad |x| < 1. \quad (2.17)$$

Si se integra (2.13) ahora resulta:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan(x), \quad |x| < 1. \quad (2.18)$$

Siguiendo a Laplace, quien dijo que había que leer a Euler: “*Read Euler, read Euler. He is the master of us all*”, podemos hacer lo siguiente con la serie (2.17):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (2.19)$$

Es bueno acotar que Euler utilizó esta expresión para construir ¡tablas de logaritmos!

Ahora hagamos lo siguiente, cambiemos x por $-x$ en la ecuación anterior:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (2.20)$$

restando (2.19) menos (2.20):

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \right] - \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \right] \\ &= 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots \end{aligned}$$

Es decir:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots$$

Para valores pequeños de x , digamos $x = 1/3$ resulta:

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \ln(2) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots \approx 0,6930041152$$

Euler notó la siguiente conexión entre logaritmos y las series armónicas. Cambiando x por $1/n$ en (2.19) se obtiene

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \dots$$

y para valores de n muy grandes, se cumple que:

$$\frac{1}{n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Ahora bien, para diferentes valores de n se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} n=1 \Rightarrow 1 &= \ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \\ n=2 \Rightarrow \frac{1}{2} &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64} - \dots \\ n=3 \Rightarrow \frac{1}{3} &= \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{18} - \frac{1}{81} + \frac{1}{324} - \dots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{1}{n} &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \dots \end{aligned}$$

Si sumamos columna por columna resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \right] - \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} \right] \\ &+ \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{n^4} \right] - \dots \end{aligned}$$

Es fácil ver que la suma de los logaritmos de la primera línea se puede escribir como el logaritmo de sus productos, es decir,

$$\ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln \left[2 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{4}{3} \right) \dots \frac{n+1}{n} \right] = \ln(n+1).$$

De manera que, y siguiendo a Euler que llevó a cabo un estimado para los términos sobrantes, resulta lo siguiente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln(n+1) + 0,577218.$$

Para valores de n muy grandes la suma de las serie armónica es igual a un logaritmo más una constante. Esta constante es actualmente llamada la Constante de Euler y denotada por la letra γ :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right]. \quad (2.21)$$

La constante de Euler juega un papel central en otras ramas de las matemáticas, por ejemplo, en el análisis real aparece como:

$$\gamma = - \int_0^\infty e^{-x} \ln(x) dx.$$

2.1.5. El método de la diferencia

A veces para una serie finita, $\{s_N\}$, uno encuentra que para el término n -ésimo se tiene que:

$$a_n = f(n) - f(n-1).$$

para alguna función $f(n)$.

En ese caso es inmediato demostrar lo siguiente:

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N f(n) - \sum_{n=1}^N f(n-1) = f(N) - f(0). \quad (2.22)$$

Por ejemplo, si tenemos la serie:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)},$$

se puede ver que:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \Rightarrow f(n) = -\frac{1}{n+1},$$

por lo tanto, la suma se podrá expresar como:

$$s_N = f(N) - f(0) = -\frac{1}{N+1} + 1 = \frac{N}{N+1}.$$

Se puede ir más allá si identificamos que el término n -ésimo tiene la forma:

$$a_n = f(n) - f(n-m),$$

por lo tanto, la suma de la serie se puede escribir como:

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N f(n) - \sum_{n=1}^N f(n-m). \quad (2.23)$$

Hay que hacer notar que el argumento $n-m$ puede ser positivo o negativo. Con lo cual el método de la diferencia resulta versátil y muy útil cuando se requiere encontrar la suma de series de variada dificultad. Podemos ver que:

- Si $m = 1$

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = f(N) - f(0).$$

como la ecuación (2.22).

- Si $m = 2$

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1).$$

- Si $m = 3$

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n = f(N) + f(N-1) + f(N-2) - f(0) - f(-1) - f(-2).$$

Consideremos la siguiente serie y su expansión en fracciones simples

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)},$$

se tiene que el término n -ésimo es:

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = -\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2n} \Rightarrow f(n) = -\frac{1}{2(n+2)},$$

de manera que:

$$a_n = f(n) - f(n-2) = -\frac{1}{2(n+2)} - \left(-\frac{1}{2n}\right),$$

de forma y manera que, como $m = 2$, resulta:

$$s_N = f(N) + f(N-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1} \right) = \frac{N(3N+5)}{4(N+1)(N+2)}.$$

Ahora bien, con alguna frecuencia surgen las series de números naturales. La más simple es:

$$s_N = 1 + 2 + 3 + \cdots + N = \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2},$$

es decir, una serie aritmética de razón $d = 1$.

Más interesante puede ser la serie de cuadrados de números enteros:

$$s_N = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Este resultado, nada intuitivo, surge de la aplicación ingeniosa del método de la diferencia. Tal y como hemos dicho, se trata de encontrar que el elemento genérico de la serie sea: $a_n = f(n) - f(n-1) = n^2$ para alguna función.

Suponga una función del tipo

$$f(n) = n(n+1)(2n+1) \Rightarrow f(n-1) = (n-1)n(2n-1),$$

entonces:

$$f(n) - f(n-1) = n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1) = 6n^2,$$

con lo cual:

$$a_n = 6n^2 \Rightarrow s_N = \sum_{n=1}^N a_n = \frac{f(N) - f(0)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

2.1.6. Sumando por analogía

Como siempre, intentaremos proceder por analogía. La intención es expresar una serie complicada como sumas de series conocidas. Considere el siguiente ejemplo:

$$s_N = \sum_{n=1}^N (n+1)(n+3) = \sum_{n=1}^N (n^2 + 4n + 3) = \sum_{n=1}^N n^2 + \sum_{n=1}^N 4n + \sum_{n=1}^N 3,$$

con lo cual:

$$s_N = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2} + 3N = \frac{N(2N^2 + 15N + 31)}{6}.$$

2.1.7. Algebra elemental de series

Las series se suman, se igualan y se multiplican. Para ello es importante que tengamos cuidado con los índices y sus valores. Consideremos un par de series infinitas:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

con lo cual la suma de esas series será:

$$u + v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Los índices son mudos y se acomodan para ser sumados.

Para sumar series es imperioso que los índices de cada serie comiencen con el mismo valor, esto es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + b_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Nótese que hemos hecho los siguientes cambios: $j \rightarrow n$ y $n \rightarrow n - 1$.

Algo parecido ocurre cuando las series se igualan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} \iff \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - b_n] = 0.$$

Para finalizar se puede comprobar que las series también se pueden multiplicar:

$$uv = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

donde:

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_jb_{n-j} + \cdots + a_{n-2}b_2 + a_{n-1}b_1 + a_nb_0.$$

Cuando las sucesiones comprenden sumas y productos de otras sucesiones, es decir, si u_k y v_k son dos sucesiones con $u_k \rightarrow U$ y $v_k \rightarrow V$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces se cumple que:

1. si a y b son números independientes de k , entonces $au_k + bv_k \rightarrow aU + bV$ cuando $k \rightarrow \infty$.
2. $u_kv_k \rightarrow UV$ para $k \rightarrow \infty$.
3. si $V \neq 0$ entonces $u_k/v_k \rightarrow U/V$ a medida que $k \rightarrow \infty$.
4. si $u_k < v_k \forall k > N$ entonces $U \leq V$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Teorema: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces cualquiera de sus restos converge. Si cualquier resto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, entonces la propia serie también converge, y si además:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad s_i = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad r_i = \sum_{n=i+1}^{\infty} u_n.$$

Entonces:

$$S = s_i + r_i.$$

Se tiene entonces que es posible agregar o quitar un número finito de términos a la serie dada y esta operación no influirá sobre su convergencia. También se desprende del teorema anterior que si la serie converge entonces su resto tiende a cero:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \lim_{i \rightarrow \infty} (S - s_i) = 0.$$

2.1.8. Series telescópicas

Una propiedad importante de las series finitas es la propiedad denominada telescópica:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}, \quad (2.24)$$

para el caso de series infinitas, se consideran aquellas series $\sum u_n$ donde cada término se puede expresar como una diferencia de la forma:

$$u_n = a_n - a_{n+1}.$$

Las series telescópica son series cuyas sumas parciales se van cancelando de manera tal que al final resulta un número fijo de términos:

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Teorema: Sean $\{u_n\}$ y $\{a_n\}$ dos sucesiones de números reales o complejos tales que:

$$u_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces la serie $\sum u_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{a_n\}$ converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - L \quad \text{donde} \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Podemos demostrar que:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

Es fácil verificar que:

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \left[1 - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] + \cdots + \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right] = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Pero si aplicamos el teorema anterior, tenemos entonces que: $a_n = 1/n$, $a_1 = 1$ y además ya vimos que la sucesión $a_n = 1/n$ converge:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 1.$$

Las series pueden llegar a tener comportamientos extraños, como se ve con la siguiente serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

Recordemos que anteriormente estudiamos la serie geométrica (2.7), la cual volveremos a escribir pero está vez intercambiando $x \rightarrow -x$, de manera que nos queda de la siguiente forma:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x}. \quad (2.25)$$

Ecuación que es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 1$.

Integrando (2.25) entre 0 y 1 se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx &= \ln(2) \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx &= \ln(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

Se puede ver también que:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \Rightarrow \ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} = \frac{1}{n+2}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} \right] = 0 \Rightarrow \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n}.$$

La suma tienen el valor de $S = \ln(2)$.

Se puede mostrar lo que sucede si se arreglan los términos de la manera siguiente:

$$S = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} \right) + \cdots,$$

la cual contiene exactamente los mismos términos, aunque en orden diferente, pero ahora la serie converge a $S = \frac{3}{2} \ln(2)$. Esta aparente contradicción surge cuando pasamos por alto el hecho de que al sumar los términos de una serie no se hace la suma con los infinitos términos, lo que hacemos es calcular un límite de una sucesión de términos que se obtienen sumando de manera consecutiva los términos de otra sucesión dada, es decir, lo que se hacemos es aplicar un proceso de límite. Para que al sumar no importe el orden de los sumandos tendríamos que sumar los infinitos términos de la sucesión.

A pesar de que las series pueden presentar estos comportamientos extraños, las series resultan muy buenas representaciones aproximadas de funciones, por ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.26)$$

La suma directa de una serie infinita no es un método práctico para estudiar su convergencia, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2},$$

converge al valor $0,937548\dots$, pero para obtener estos primeros cinco decimales se tendría que sumar unos 10^7 términos!

Es necesario entonces desarrollar algunos criterios que nos permitan saber si una serie puede llegar a converger o no.

2.1.9. Ejemplos

1. Dada la sucesión $\{u_n\}$ de números reales, se llama sucesión de Cauchy o sucesión fundamental, en el caso de que satisfaga el requisito siguiente: dado un número real r positivo se pueda conseguir dos enteros positivos p y q tal que de $p > n_0$ y $q > n_0$ se deduzca que $|c_p - c_q| < r$.

En los números reales toda sucesión de Cauchy converge a algún límite. Esta particularidad implica un resultado importante en el análisis real que es la caracterización de Cauchy para la convergencia de sucesiones:

Una sucesión de números reales es convergente (en los reales) si y solo si es de Cauchy.

2. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Se tiene que

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n},$$

y que al multiplicar por $\frac{1}{2}$ se obtiene

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}},$$

restando

$$\left[1 - \frac{1}{2}\right]s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2^n}\right] = 1,$$

la serie converge.

2.1.10. Practicando con Maxima

Maxima puede calcular fácilmente sumas numéricas finitas, pero cuando le pedimos calcular sumas simbólicas infinitas podrá calcularlas solo en casos particulares. Es útil al trabajar con series utilizar la librería **simplify_sum**

Veamos algunos ejemplos sencillos de sumas

```
(%i1) load(simplify_sum)$
```

```
(%i2) sum(n^2, n, 1, N);
```

$$(\%o2) \sum_{n=1}^N n^2$$

```
(%i3) sum(1/n^2, n, 1, inf);
```

$$(\%o3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

La función **sum** nos deja indicada la suma porque no hemos especificado el rango para los valores de la suma.

```
(%i4) sum(n^2, n, 1, 20);
```

```
(%o4) 2870
```

También podemos utilizar **float** para pedirle al programa que nos escriba el valor numérico

```
(%i5) sum(1/n^2, n, 1, 1000),float;
```

```
(%o5) 1,643934566681561
```

Con las funciones **simpsum** o **simplify_sum** es posible que el programa realice la suma simbólica.

```
(%i6) sum(n^2, n, 1, N),simpsum;
```

$$(\%o6) \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

```
(%i7) simplify_sum(sum(n^2, n, 1, N));
```

$$(\%o7) \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

Con este último comando podemos escribir la expresión de la sumatoria de manera más elegante.

```
(%i8) sum(n^2, n, 1, N)=simplify_sum(sum(n^2, n, 1, N));
```

$$(\%o8) \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

Consideremos las siguientes series infinitas:

```
(%i9) sum(x^n/n!, n, 0, inf)=simplify_sum(sum(x^n/n!, n, 0, inf));
```

$$(\%o9) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

```
(%i10) sum(1/n^2, n, 1, inf)=simplify_sum(sum(1/n^2, n, 1, inf));
```

$$(\%o10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Podemos ahorrarnos el estar escribiendo el término enésimo varias veces si definimos la función $f = f(n)$ en primer lugar.

```
(%i11)f: (-1)^(n-1)/n$ sum(f, n, 1,inf)=simplify_sum(sum(f, n, 1,inf));
```

$$(\%o11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$$

En el siguiente ejemplo el programa no podrá encontrar la serie de manera simbólica, pero como comentamos anteriormente, podemos evaluar la serie para algunos valores de N . En este caso, para $N > 10.000$ el consumo en tiempo de cálculo para la computadora comienza a notarse.

```
(%i12)f:log(n)/n^2;
```

$$(\%o12) \frac{\log(n)}{n^2}$$

```
(%i13)sum(f, n, 1,inf)=simplify_sum(sum(f, n, 1,inf));
```

$$(\%o13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$$

```
(%i14)sum(f,n,2,10),numer;sum(f,n,2,100),numer;sum(f,n,2,1000),numer;sum(f,n,2,10000),numer;
```

(%o14) 0,6185026440390787

(%o15) 0,8817261267819703

(%o16) 0,9296439518465429

(%o17) 0,9365272663288963

Este último ejercicio puede ser resuelto de una manera más eficiente si expresamos la función de variable discreta como una sucesión utilizando la opción de crear una lista, **makelist**, para evaluarla.

Primero escribimos la función discreta, note que usamos :=

```
(%i18)g[n]:=log([n])/[n]^2;
```

$$(\%o18) g_n := \frac{\log([n])}{[n]^2}$$

```
(%i19)makelist(sum(g[n],n,2,N),N,[10,100,1000,10000]),numer;
```

(%o19) [[0,6185026440390787], [0,8817261267819703], [0,9296439518465429], [0,9365272663288963]]

Por lo tanto, hacer cálculos con sucesiones es sencillo, veamos algunos ejemplo de sucesiones.
Definimos la siguiente sucesión, la de Fobonacci :

```
(%i20) kill(all)$
(%i1) F[1]:=1$ F[2]:=1$ F[n]:=F[n-1]+F[n-2];
(%o3) Fn := F[n - 1] + F[n - 2]
(%i4) makelist(F[n],n,1,15);
(%o4) [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610]
```

Definamos otra sucesión

```
(%i5) G[n]:=(-1)^n*(1+1/n);
(%o5) Gn := (-1)n  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 
(%i6) makelist(G[n],n,1,15);
(%o6) \left[-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, \frac{9}{8}, -\frac{10}{9}, \frac{11}{10}, -\frac{12}{11}, \frac{13}{12}, -\frac{14}{13}, \frac{15}{14}, -\frac{16}{15}\right]
```

Podemos hacer operaciones básicas con sucesiones, como sumarlas

```
(%i7) S[n]:=F[n]+G[n]; makelist(S[n],n,1,15);
(%o7) Sn := Fn + Gn
(%o8) \left[-1, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}, \frac{17}{4}, \frac{19}{5}, \frac{55}{6}, \frac{83}{7}, \frac{177}{8}, \frac{296}{9}, \frac{561}{10}, \frac{967}{11}, \frac{1741}{12}, \frac{3015}{13}, \frac{5293}{14}, \frac{9134}{15}\right]
```

Operaciones combinadas

```
(%i9) C[n]:=3*F[n]-n*G[n]; makelist(C[n],n,1,15);
(%o9) Cn := 3Fn - n Gn
(%o10) [5, 0, 10, 4, 21, 17, 47, 54, 112, 154, 279, 419, 713, 1116, 1846]
```

Multiplicación

```
(%i11) M[n]:=F[n]*G[n]; makelist(M[n],n,1,15);
(%o11) Mn := Fn Gn
(%o12) \left[-2, \frac{3}{2}, -\frac{8}{3}, \frac{15}{4}, -6, \frac{28}{3}, -\frac{104}{7}, \frac{189}{8}, -\frac{340}{9}, \frac{121}{2}, -\frac{1068}{11}, 156, -\frac{3262}{13}, \frac{5655}{14}, -\frac{1952}{3}\right]
```

División

```
(%i13) D[n]:=F[n]/G[n]; makelist(M[n],n,1,15);
(%o13) Dn := \frac{Fn}{Gn}
```

$$(\%o14) \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, -\frac{25}{6}, \frac{48}{7}, -\frac{91}{8}, \frac{56}{3}, -\frac{153}{5}, 50, -\frac{979}{12}, \frac{1728}{13}, -\frac{3029}{14}, \frac{5278}{15}, -\frac{4575}{8} \right]$$

Consideremos la siguiente sucesión:

(%i15) $f[n] := (n+1)/(2*n^2);$

$$(\%o15) f_n := \frac{n+1}{2n^2}$$

Para algún valor de n en particular:

(%i16) $f[2];$

$$(\%o16) \frac{3}{8}$$

Para un conjunto de valores:

(%i17) $\text{makelist}(f[n], n, 1, 15);$

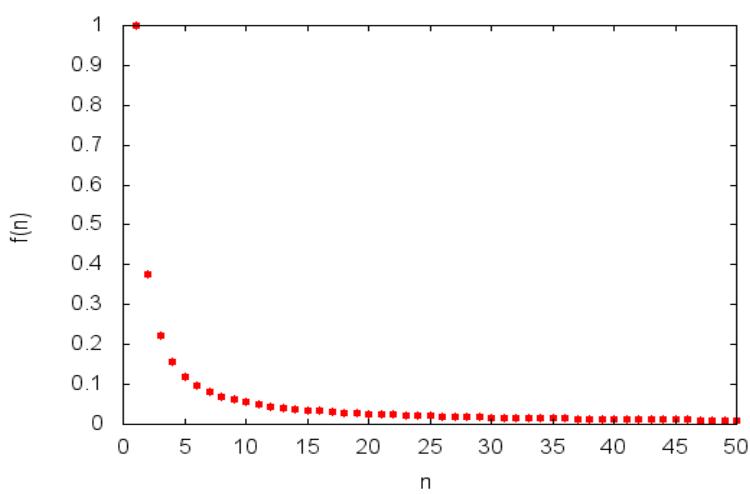
$$(\%o17) \left[1, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{5}{32}, \frac{3}{25}, \frac{7}{72}, \frac{4}{49}, \frac{9}{128}, \frac{5}{81}, \frac{11}{200}, \frac{6}{121}, \frac{13}{288}, \frac{7}{169}, \frac{15}{392}, \frac{8}{225} \right]$$

Si queremos graficar la sucesión hacemos lo siguiente

(%i18) $N[n] := n; \text{LisN} := \text{makelist}(N[n], n, 1, 50); \text{Listf} := \text{makelist}(f[n], n, 1, 50);$

(%i21) $\text{wxplot2d}([\text{discrete}, \text{LisN}, \text{Listf}], [\text{style}, [\text{points}, 2, 2, 1]], [\text{xlabel}, "n"], [\text{ylabel}, "f(n)"]);$

(%o21)

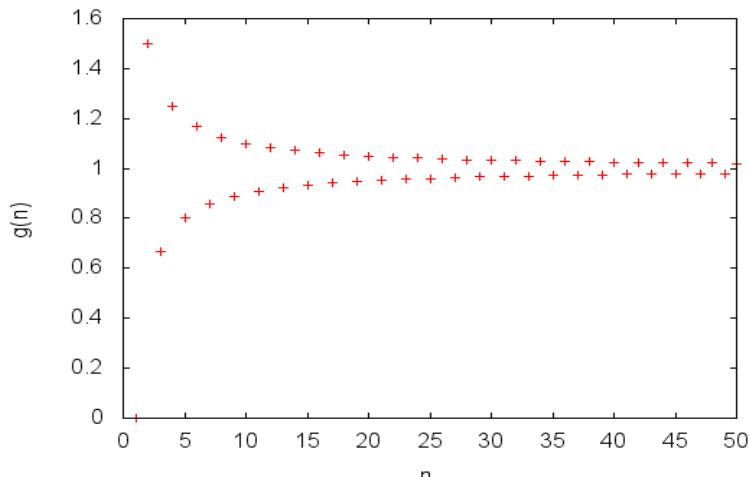


Otro ejemplo de una sucesión que converge es el siguiente

(%i22) $g[n] := 1 + (-1)^n / (n);$

$$(\%o22) g_n := 1 + \frac{(-1)^n}{n};$$

```
(%i23) Listg:makelist(g[n],n,1,50)$
(%i24) wxplot2d([discrete,LisN,Listg],[style,[points,2,2,4]],[xlabel,"n"],[ylabel,"g(n)"]);
(%o24)
```



2.1.11. Ejercicios

1. Encuentre la suma de los 100 primeros enteros.
2. Encuentre la distancia total que recorre una pelota que rebota verticalmente y que en cada rebote pierde $2/3$ de su energía cinética.
3. Encuentre la suma de la serie $S = 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{4} + \frac{11}{8} + \dots$.
4. Demuestre que

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

5. Determine el límite de las siguientes sucesiones cuando $n \rightarrow \infty$.

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$

b) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

c) $u_n = \frac{n^2}{1+n}$

d) $u_n = \frac{(an+b)^2}{cn^2+d}$

6. Muestre que $s_N = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = \sum_{n=1}^N n^3 = \left(\sum_{n=1}^N n \right)^2 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$.

7. Demuestre que para $|x| < 1$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5}$

8. Demuestre que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right].$$

2.2. Criterios de convergencia

La pregunta que nos planteamos es la siguiente: Si hacemos que $N \rightarrow \infty$ entonces ¿la suma $\sum_{k=1}^N a_k$, tiene un límite? Existen algunas formas de averiguarlo, a pesar de que sólo podremos calcular la suma de algunas series. En la mayoría de los casos nos será imposible y nos tendremos que conformar con saber si convergen o no, o peor aún, si una suma parcial converge sin poder calcular el valor de esa suma. Los términos de una serie pueden ser positivos, negativos o números complejos y las series pueden converger (decrecer o crecer hacia un valor finito) no converger (incrementar o decrecer indefinidamente) u oscilar. Existe una serie de criterios y teoremas de aplicación general que expondremos a continuación.

2.2.1. Convergencia absoluta o condicional

Para estudiar la convergencia de una serie infinita dada, i.e., $\sum a_i$ veremos que siempre podremos asociarle otra de la forma $\sum |a_i|$, es decir la serie de valores absolutos, con lo cual garantizamos la positividad (y que sean números reales) de los términos de la serie. Si la serie de los valores absolutos $\sum |a_i|$ converge, entonces también convergerá la serie original $\sum a_i$ y diremos que esa serie es *absolutamente convergente*. Sin embargo si la serie de valores absolutos diverge, no podremos decir que $\sum a_i$ converja. De hecho si converge diremos que es *condicionalmente convergente* y, con un rearreglo de sus términos podrá converger, diverger u oscilar.

Teorema: Si $\sum |a_n|$ converge, entonces también converge $\sum a_n$ y se tiene que:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Para una serie de términos positivos el criterio de convergencia más intuitivo (necesario pero no suficiente) es que en límite cuando $n \rightarrow \infty$ el término n -ésimo tienda a cero. Con lo cual tenemos que si esta condición no se satisface, la serie diverge.

Teorema: Si la serie $\sum a_n$ converge, el término n-ésimo tiende a cero, esto significa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Notemos que para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

sin embargo, como ya vimos anteriormente, esta serie diverge. Esto significa que el teorema suministra una condición suficiente para que exista la divergencia de la serie, es decir, si para el término n-ésimo de la serie a_n no se cumple que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

Una serie que es convergente pero que no es absolutamente convergente es la siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

porque ya vimos que la serie de los valores absolutos asociada a la serie anterior es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la cual diverge.

2.2.2. Criterio de Comparación

En segundo lugar de simplicidad está el criterio de comparación entre un par de series de términos positivos. Si conocemos el comportamiento de una de ellas comparamos el de la otra. Esto es, suponga que consideramos dos series: una de prueba $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y una serie conocida y convergente (o divergente) $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n$, entonces

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ converge y } \forall n \text{ se tiene que } \tilde{a}_n \geq a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Por otro lado

$$\text{Si } \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \text{ diverge y } \forall n \text{ se tiene que } 0 \leq \tilde{a}_n \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Ejemplo Para ilustrar esta estrategia consideremos las siguientes series

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!+1}$$

En ese caso compararemos con una serie conocida

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 1 + \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots}_{e} = 1 + e$$

y es claro que la serie indicada no es otra cosa que e , con lo cual la serie claramente converge y su suma es $1 + e$.

2.2.3. Criterio de la Raíz

Dada una serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, el criterio de la raíz (o también de la raíz de Cauchy) puede resumirse en el siguiente par de afirmaciones. Sí:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \rho < 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \implies \text{converge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \implies \text{diverge}$$

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{para un } n \text{ suficientemente grande y } \rho \text{ independiente de } n \implies (?)$$

Otra forma, más compacta de expresarlo sería

$$\text{Si } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ entonces: } \begin{cases} \rho < 1 & \implies \text{converge} \\ \rho > 1 & \implies \text{diverge} \\ \rho = 1 & \implies (?) \end{cases}$$

Es fácil ver que si utilizamos el criterio de comparación, entonces

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \rho \implies a_n \leq \rho^n \implies \begin{cases} \text{cuando } \rho < 1 \text{ la serie converge} \\ \text{cuando } \rho \geq 1 \text{ la serie diverge} \end{cases}$$

Ejemplo Dada la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{n+1} \right]^{n^2},$$

por lo tanto:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{n}{n+1} \right]^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \implies \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

La serie converge.

2.2.4. Criterio de d'Alembert

Dada una serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, el criterio de d'Alembert⁵ o también llamado criterio del cociente, compara el valor relativo de un término de la serie con el que le precede. Este criterio se resume también fácilmente

$$\text{Si } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ entonces: } \begin{cases} \rho < 1 & \implies \text{converge} \\ \rho > 1 & \implies \text{diverge} \\ \rho = 1 & \implies \text{indeterminado} \end{cases}$$

⁵ Jean Le Rond d'Alembert París, Francia 1717 - 1783. Matemático francés pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y su utilización en la Física, en particular en el estudio de los fluidos. Más detalles en http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_Le_Rond_d'Alembert

Nótese que si

$$\rho < 1 \Rightarrow \rho < x < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < x \Rightarrow a_{n+1} = a_n x$$

Entonces para un $N < n$, pero también suficientemente grande, tendremos que los términos de la serie a partir de ese N serán

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} \dots = a_N + x a_N + x^2 a_N + x^3 a_N \dots = a_N (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots)$$

y que no es otra cosa que una serie geométrica con razón $x < 1$ y por consiguiente converge. Es claro que un argumento similar se puede utilizar para probar la divergencia.

Ejemplo Un ejemplo inmediato lo constituye la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \Rightarrow \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{2} < 1,$$

con lo cual tiene que converger.

2.2.5. Criterio de la Integral de Maclaurin

El criterio de la Integral de Maclaurin⁶ es otro criterio de comparación, pero esta vez se compara la serie con una integral. Así supondremos que existe una función $f(x)$ continua y monótonamente decreciente para un valor de $x \geq x_0$ y que, adicionalmente, se cumple que para algún valor entero $x = n$ el valor de la función es igual a un término de la serie. Esto es $f(n) = a_n$. Entonces se tendrá que si el límite $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N dx f(x)$ existe y es finito, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Por el contrario si el límite no existe o es infinito, entonces diverge.

La idea de este criterio es comparar la integral de $f(x)$ (es decir, el área bajo la curva) con la suma de rectángulos que representa la serie. Entonces, la suma parcial

$$s_i = \sum_{n=1}^i a_n \equiv \sum_{n=1}^i f(n).$$

Pero:

$$\left. \begin{array}{l} s_i > \int_1^{i+1} dx f(x) \\ s_i - a_1 < \int_1^i dx f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^{i+1} dx f(x) \leq s_i \leq \int_1^i dx f(x) + a_1$$

donde $a_1 = f(1)$, con lo cual, al hacer $i \rightarrow \infty$ tendremos que si el límite de la integral existe, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$$\int_1^{\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} dx f(x) + a_1$$

⁶Colin Maclaurin 1698, Argyllshire, Escocia - 1746 Edimburgo, Escocia. Matemático escocés quien escribió el *Tratado de los Fluxiones* el primer tratado que expuso de una manera sistemática y rigurosa el cálculo diferencial ideado por Newton. Este tratado fue como respuesta a la crítica de Berkeley sobre la falta de rigurosidad de los métodos Newton.

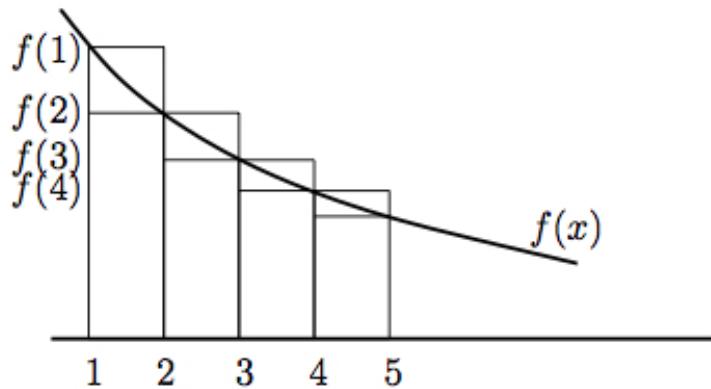


Figura 2.5: El criterio de la integral

Ejemplos

1. Un ejemplo inmediato podría ser determinar si la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{3}{2})^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x - \frac{3}{2})^2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N dx \frac{1}{(x - \frac{3}{2})^2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{N - \frac{3}{2}} \right) = 0$$

con lo cual claramente converge.

Este criterio es muy útil para acotar (entre un ínfimo y un supremo) el residuo de una determinada serie. Vale decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^N a_n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n}_{\text{Residuo}} \Rightarrow \int_{N+1}^{\infty} dx f(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_{N+1}^{\infty} dx f(x) + a_{N+1}$$

2. Comprobar que la función Zeta de Riemann, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, efectivamente converge. En este caso $f(x) = x^{-p}$, entonces

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \Rightarrow \int_1^{\infty} dx x^{-p} = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} & \text{Para } p \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{\infty} & \text{Para } p = 1 \end{cases}$$

y es claro que para $p > 1$ el límite existe y es finito, por lo tanto, la función Zeta de Riemann, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, converge para $p > 1$.

```
> restart:  
> assume(p>1):  
> Limit(Int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity)=  
limit(int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity);  
> assume(p<=1):  
> Limit(Int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity)=  
limit(int((x)^(-p),x=1..infinity),x=infinity);
```

2.2.6. Series alternantes y convergencia condicional

Hasta ahora todos los criterios que analizamos eran para una serie de términos positivos, por lo cual todos esos criterios nos llevaban al concepto de series absolutamente convergente. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también converge. Sin embargo, muchas veces nos tendremos que conformar con que una serie sea simplemente convergente y no requerir que sea absolutamente convergente. Este es el caso de las series alternantes. Series en las cuales se alternan términos positivos y negativos:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \quad \text{con } a_n \geq 0$$

Entonces, si la serie es monótona decreciente para un n suficientemente grande tenemos lo que se denomina el Criterio de Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n) \text{ converge, si: } \begin{cases} a_n > a_{n-1} & \forall n > N \\ & \wedge \\ a_n \rightarrow 0 & \text{cuando } n \rightarrow \infty \end{cases}$$

De otro modo la serie oscilará.

Estas condiciones son fáciles de ver si reorganizamos la serie de los primeros $2m$ términos, a partir de un determinado N par y $N > n$, entonces

$$s_{2m} = (a_N - a_{N-1}) + (a_{N-2} - a_{N-3}) + \cdots + (a_{N+2m-2} - a_{N+2m-1})$$

donde todos los paréntesis son positivos, con lo cual $s_{2m} > 0$ y se incrementa al incrementar m . Ahora bien, si rearreglamos la serie tendremos que

$$s_{2m} = a_N - (a_{N-1} - a_{N-2}) - (a_{N-3} - a_{N-4}) + \cdots - (a_{N+2m-1} - a_{N+2m-2}) - a_{N+2m-1}$$

donde, otra vez los paréntesis son positivos y es inmediato comprobar que entonces $s_{2m} < a_n$ para todo m .

Como $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, la serie alternante necesariamente converge.

La series alternantes ya eran conocidas desde hace mucho tiempo, como por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{x^n}{n} \right) + \cdots .$$

Esta serie converge y su suma es $\ln(1+x)$ para $-1 < x \leq 1$. Para x positivo es una serie alternante y en el caso particular de $x = 1$ se tiene:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) + \cdots = \ln(2)$$

Otra relación interesante es:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} \right) + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Teorema: Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente con límite igual a cero, la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

converge.

Si S es su suma y s_n su suma parcial n -ésima, se tiene que:

$$0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Ejemplo Estudiemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

Sabemos que $1/n$ es una sucesión monótona decreciente y que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior la serie converge; como ya hemos visto.

Ejemplo Sea

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Por otro lado, se tiene también que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

y que a_n es monótona decreciente, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

converge.

La suma parcial $(2n - 1)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s_{2n-1} &= 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} = \\ s_{2n-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n). \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) = \gamma,$$

donde γ es la constante de Euler, $\gamma \approx 0,5772156649$.

Ejercicios

1. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^{3/2}} x^n$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{5^n} x^n$$

e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[3 + (-1)^n]^n}$$

f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+(-1)^n}}$$

2.2.7. Ejemplos

2.2.8. Practicando con Maxima

2.2.9. Ejercicios

2.3. Series de funciones

La idea de series se puede ampliar al permitir que sus términos sean función de alguna variable (una o varias), esto es $a_n = a_n(x)$. Esta extensión del concepto se serie, trae como consecuencia que ahora las sumas parciales dependen de x .

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots,$$

con lo cual, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),$$

entonces, el comportamiento de la serie también dependerá de la variable.

La convergencia de la serie podrá ser posible para algunos valores de x y no para otros. El punto central con las series de funciones $f(x)$ complicadas es la de tratar de construir funciones como una serie de términos, $a_k(x)$, más simples. Así, esas sumas parciales $f_n(x)$ constituirán la función deseada

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k(x).$$

Estaremos interesados en aquellas funciones a las cuales converjan las sumas parciales de una serie. Para fijar conceptos, comenzaremos por las series de funciones más comunes: Las Series de Potencias.

2.3.1. Series de Potencias

Asociaremos una serie de potencias $a_n = c_n x^n$ a un polinomio de grado infinito.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ o también } P(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Esta asociación tiene la ventaja de permitirnos intuir algunos comportamientos de la serie para algunos valores de x . Los coeficientes c_n son números independientes de x . Pero, más aún, estas series pueden ser series de potencias de número complejos. Vale decir, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con $z = x + iy$.

2.3.2. Convergencia de una serie de potencias

Se pueden utilizar todos los criterios que hemos desarrollado anteriormente. Así una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge en un punto x_0 si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

existe, para $x = x_0$, para todo x o para algunos x .

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ convergerá absolutamente si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |c_j (x - x_0)^j| = \rho, \quad \text{existe.}$$

También se cumplirá el criterio de convergencia absoluta. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x - x_0)^n|$ converge, entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ converge, pero el inverso no es siempre verdad.

Los criterios más populares para evaluar la convergencia, se seguirán cumpliendo. Así el criterio de d'Alembert y el de la raíz de Cauchy se podrán reescribir como:

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{c_n (x - x_0)^n} \right| & \Rightarrow \rho(x) < 1 \Rightarrow \text{converge} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n (x - x_0)^n|} & \rho(x) > 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$$

Sólo que ahora es bueno enfatizar que $\rho = \rho(x)$ dependerá de la variable. Llamaremos, de ahora en adelante a este límite el *radio o entorno de convergencia*, el cual delimitará los valores de x para que la serie de potencias converja.

Ejemplos

1. Consideremos la siguiente serie

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0,$$

es decir,

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

con lo cual la serie converge para todo valor de x .

2. Otro caso ocurre cuando consideramos la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n = x - 2 - 2(x-2)^2 + 3(x-2)^3 - 4(x-2)^4 + \cdots,$$

por lo tanto:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} (n+1) (x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n (x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = |x-2|$$

lo que implica que la serie:

$$\text{converge si: } |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \quad \text{y} \quad \text{diverge si: } |x-2| > 1.$$

Es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n (x-2)^n$ convergerá únicamente para $1 < x < 3$. Para otros valores de x , diverge.

Para puntualizar:

- Si una serie converge en $x = x_1$, convergerá absolutamente para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ y divergerá para $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.
 - Se llama radio de convergencia, $\rho = \rho(x)$ a aquella cantidad tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge para $|x - x_0| < \rho$ y diverge para $|x - x_0| > \rho$.
- Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ que converge únicamente para $x = x_0$ tendrá un radio de convergencia $\rho = 0$, mientras que una que converja para todo x tendrá un radio de convergencia $\rho = \infty$.

2.3.3. Covergencia uniforme

Se puede rephraser el criterio de convergencia de Cauchy que vimos anteriormente. Para cualquier valor de $\epsilon > 0$, tan pequeño como uno quiera, siempre existirá un número N **independiente de x** , con $a \leq x \leq b$, tal que:

$$\text{si } S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \Rightarrow |S(x) - s_n(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b] \wedge n \geq N.$$

Con ello es inmediato indentificar el error que se comete cuando se corta la serie en un N suficientemente grande

$$S(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^N a_n(x)}_{s_n(x)} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x)}_{\approx \epsilon}$$

Hay que resaltar el hecho de que las suma de funciones continuas $a_n(x)$ no necesariamente habrá de ser continua, el concepto de convergencia uniforme busca garantizar que esa suma de funciones continuas también sea continua.

Recordemos la idea de continuidad de una función. Una función será continua si sus límites por la derecha y por izquierda coinciden

$$\lim_{t \rightarrow x^\pm} f(t) = f(x)$$

Por otro lado, a partir del hecho de que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

es valido preguntarse si el límite de la sucesión de sumas parciales es continua, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow x^\pm} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{t \rightarrow x^\pm} f_n(x) \right].$$

Es decir, al suponer que la suma de términos continuos tiende a una función continua estamos suponiendo que podemos intercambiar los límites, pero eso no es siempre cierto. Consideremos el caso (extremo)

$$f_n = n^2 x (1 - x^2)^n \text{ con: } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } n = 1, 2, 3, \dots$$

entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= 0 \Rightarrow \int_0^1 dx \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = 0 \\ \int_0^1 dx f_n(x) &= \frac{n^2}{2(n+1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dx f_n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Claramente no se pueden intercambiar los límites.

Ejemplo Sea la serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^k} + \dots,$$

de manera que

$$a_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

Como

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{1}{1+x^2} < 1 \quad \forall \quad x \neq 0,$$

la serie es absolutamente convergente $\forall x$ ($x \neq 0$).

Sin embargo, tenemos que $f(0) = 0$. El término n -ésimo para la suma parcial es

$$f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+x^2)^k} = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = 1 + x^2 - \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n},$$

como $1+x^2 > 1$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 + x^2, \quad x \neq 0.$$

pero hemos establecido que $f(0) = 0$ de manera que $f(x)$ no es continua.

Ejemplo Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]},$$

cuya suma n -ésima parcial es

$$s_n(x) = \frac{nx}{nx+1}.$$

La función $s_n(x)$ es una función continua de $x \forall 0 \leq x \leq 1$, y para todo n . Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0, \text{ si } x = 0 \\ S(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 1, \text{ si } x \neq 0. \end{aligned}$$

Existe una discontinuidad en $x = 0$ para $S(x)$ y por lo tanto la condición (2.3.3) no se cumplirá.

Para el caso de series de funciones, existen un par de criterios que identifican la convergencia uniforme. El criterio Mayorante de Weierstrass⁷ y el criterio de Abel⁸. Estos criterios desarrollan la noción de convergencia uniforme la cual es necesaria para asegurar el intercambio en los límites.

2.3.4. Criterio Mayorante de Weierstrass

La idea de convergencia uniforme se introduce para garantizar que la sumas infinitas de un conjunto de funciones sea continua.

Una condición suficiente, pero no necesaria, para que la serie

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

sea uniformemente convergente es dada por la condición de Weierstrass:

Si encontramos una serie convergente de números positivos

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \quad \text{con } M_i \geq |a_i(x)| \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{entonces la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es **uniformemente** convergente.

⁷Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897). Matemático Alemán con importantes contribuciones al análisis complejo mediante la utilización de series.

⁸Niels Henrik Abel (1802-1829). Matemático Noruego. Su primera mayor aportación fue la prueba de la imposibilidad de resolución algebraica de la ecuación quíntica mediante radicales.

La demostración se obtiene a partir de la definición misma de convergencia. Si $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ converge, entonces para $n+1 \geq N$ se tiene

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon \text{ y como } |a_i(x)| \leq M_i \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_i(x)| < \epsilon \Rightarrow |S(x) - s_n(x)| \equiv \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_i(x)| < \epsilon$$

con la cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ será uniformemente convergente para todo $x \in [a, b]$.

Ahora bien, como consideramos los $M_i \geq 0$. La serie en cuestión también será absolutamente convergente. Otra vez, los criterios de convergencia absoluta y, en este caso, de convergencia uniforme, no son consecuencia uno del otro, ni están relacionados.

Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$$

convergen uniformemente pero NO absolutamente. Sin embargo, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ la serie $\sum_{j=0}^{\infty} (1-x)x^j$ converge absolutamente pero no uniformemente, por cuanto tiene una discontinuidad. Se puede demostrar que

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1-x)x^j = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

con lo cual se puede concluir que una serie arbitraria $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_i(x)$ no podrá converger uniformemente en intervalos en los cuales la función $f(x)$ sea discontinua.

Ejemplo La serie

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2^2} \cos^2(x) + \frac{1}{3^2} \cos^3(x) + \dots$$

es uniformemente convergente, porque al tomar $M_k = 1/k^2$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

converge a $\pi^2/6$.

2.3.5. Criterio de Abel

El criterio de Abel se puede resumir de la siguiente manera. Si

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) \quad \wedge \quad a_i(x) = c_i(x)f_i(x),$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)$ converge, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_i(x) = S,$$

entonces la serie *converge uniformemente* en $[a, b]$. Para que se cumpla el criterio de Abel, $f_n(x)$ tiene que estar acotada ($0 \leq f_n \leq M \forall n$) y tiene que ser monótonamente decreciente en el intervalo en el cual esté definida, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ con $x \in [a, b]$.

En resumen, si la serie

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

es uniformemente convergente para $a \leq x \leq b$, entonces es posible integrar y diferenciar término por término.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{da_k}{dx} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k(x) dx,\end{aligned}$$

donde $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

La convergencia uniforme no implica convergencia absoluta y convergencia absoluta no implica convergencia uniforme, como se vió anteriormente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

es absolutamente convergente pero no uniformemente convergente cerca de $x = 0$.

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad de comportarse como las series finitas, los términos pueden ser multiplicados e intercambiado el orden de la suma. Las series uniformemente convergentes se comportan como las series finitas donde la serie es continua si cada término de la serie también lo es.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3+x^2} + \cdots$$

es únicamente condicionalmente convergente, pero, es también uniformemente convergente.

2.3.6. Nota sobre el álgebra de series de potencias

El álgebra elemental de series se puede reconsiderar a la luz de las series de potencias. De esta forma recordamos que los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x-x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho $k = j - 1$, por lo cual $j = k + 1$.

Las series se igualan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x-x_0)^n\end{aligned}$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} (n+1) .$$

Si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=2}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$$

o también

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+2} (x - x_0)^{k+2} &= a_0 + a_1 (x - x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + c_{n-2}) (x - x_0)^n, \end{aligned}$$

y en este último caso $c_{-2} = c_{-1} = 0$ y $c_i = b_{i+2}$. Nótese como en los dos ejemplos anteriores hemos hecho coincidir los dos índices de la sumatoria desde el comienzo.

La series también se multiplican, esto es

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Si alguna de las series de potencias es absolutamente convergente, entonces su multiplicación con otra, será absolutamente convergente.

Pero también las series de potencias se invierten! y para ello utilizamos todo lo visto anteriormente veamos. Supongamos que se tiene una serie del tipo

$$y - y_0 = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Es decir tenemos $y - y_0$ expresado en términos de una serie de potencias de $(x - x_0)^n$ entonces, igual podremos plantearnos invertir el proceso, vale decir, expresar $(x - x_0)$ en términos de potencias $(y - y_0)^n$ Esto es

$$x - x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y - y_0)^n \implies x - x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right]^k$$

y al igualar términos con la misma potencia, despejamos los coeficientes b_n en términos de los a_n , de forma

que

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a_1} \\ b_2 &= -\frac{a_2}{(a_1)^3} \\ b_3 &= \frac{2(a_2)^2 - a_1 a_3}{(a_1)^5} \\ b_4 &= \frac{5a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - 5a_2^3}{(a_1)^7} \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Igualmente, si una serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge para un entorno $-R \leq x \leq R$ entonces por el criterio de Mayorante de Weierstrass, convergerá absoluta y uniformemente para $-S \leq x \leq S$ con $0 \leq S \leq R$. Más aún, el criterio de Abel nos garantiza las siguientes propiedades:

- Dado que todos los términos $a_n(x) = c_n (x-x_0)^n$ son funciones continuas de x y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge uniformemente para un entorno $-S \leq x \leq S$, entonces la función $f(x)$ es continua en el intervalo de convergencia.
- Si los términos $a_n(x) = c_n (x-x_0)^n$ son funciones continuas de x , entonces la serie puede ser derivada término a término

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-x_0)^{n-1}$$

(nótese como cambia el comienzo de la serie) y convergerá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-x_0)^{n-1} \rightarrow \frac{df(x)}{dx} \quad a_n(x) \wedge \frac{d}{dx} a_n(x) \quad \text{continuas} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x),$$

converge uniformemente en $[a, b]$.

- De igual manera las series pueden ser integradas término a término

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b dx c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Ejercicios

1. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2},$$

es uniformemente y condicionalmente convergente.

2. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+x^2}{n^2},$$

converge uniformemente, pero no absolutamente.

3. Determine el radio de convergencia de la serie

$$\frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{a+\sqrt{2}} + \frac{x^3}{a+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{x^n}{a+\sqrt{n}} + \cdots$$

donde a es un número real y positivo. Determine si la serie es o no uniformemente convergente.

4. Considere la siguiente sucesión

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

demuestre que:

$$\frac{d}{dx} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x),$$

5. Discuta la convergencia de las siguientes series

a)

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \cdots$$

b)

$$\left(a - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n}\right) + \cdots$$

donde a y b son constantes positivas.

6. Utilizando fracciones parciales, demuestre que

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)(k+5)} = \frac{23}{480}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-2}{k(k+1)(k+2)} = 1.$$

2.3.7. Ejemplos

2.3.8. Practicando con Maxima

2.3.9. Ejercicios

2.4. Serie de Taylor

Para los físicos el uso apropiado (y frecuente) de la serie Taylor facilita muchos cálculos. La idea detrás de este tipo de series es la de la aproximación de una determinada función por una serie de potencias en donde existe una forma sistemática de construir los coeficientes y, dependiendo de el número de términos que utilicemos en la serie, tendremos una idea de cuan aproximada es la serie y cuanto es el error que cometemos al desarrollar la serie hasta un determinado término. Así supondremos que $f = f(x)$ es una función

contínua y continuamente diferenciable. Con lo cual, si denotamos $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, entonces supondremos que $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ están definidas en el intervalo $[a, b]$.

De cursos anteriores se sabe que:

$$\int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a+h) - f(a) \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \Rightarrow f(a+h) \approx f(a) + hf'(a),$$

donde hemos supuesto que en intervalo $[a, a+h]$ la función $f'(x)$ es constante y tiene como valor $f'(a)$. Ahora bien, esto vale para todo x y para cualquier función, por lo tanto se cumple que:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(a) + (x-a)f'(a), \\ f'(x) &\approx f'(a) + (x-a)f''(a), \\ f''(x) &\approx f''(a) + (x-a)f'''(a), \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x) &\approx f^{(n-1)}(a) + (x-a)f^{(n)}(a). \end{aligned}$$

Con lo cual podemos construir

$$f(a+h) = f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) \approx f(a) + \int_a^{a+h} dx [f'(a) + (x-a)f''(a)] \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a),$$

que no es otra cosa que una aproximación de segundo orden a $f(a+h)$. En general podemos construir

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \int_a^{a+h} dx f'(x) = f(a) + \int_a^{a+h} dx \left[f'(a) + \int_a^{a+h} dx f''(x) \right] \\ &= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} dv \left[\int_a^{a+h} dx f''(x) \right] \\ &= f(a) + hf'(a) + \int_a^{a+h} du \left(\int_a^{a+h} dv \left[f''(a) + \int_a^{a+h} dx f'''(x) \right] \right) \\ &= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \int_a^{a+h} du \left(\int_a^{a+h} dv \left[\int_a^{a+h} dx f'''(x) \right] \right) \end{aligned}$$

y si repetimos ese procedimiento n veces, suponiendo que las derivadas de $f(x)$ existan, tendremos la aproximación $n-1$ a la función. Esto es

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \mathcal{R}_n$$

y también es fácil convencerse por inspección que el residuo o el error que cometemos en la aproximación $n-1$ viene dado por la integración enésima de la derivada enésima, vale decir

$$\mathcal{R}_n = \int_a^{a+h} du \int_a^{a+h} dv \underbrace{\dots}_{n \text{ veces}} \int_a^{a+h} dx f'''(x)$$

y por el Teorema del Valor medio

$$\int_a^{a+h} d\tau g(\tau) = hg(\xi) \Rightarrow R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

Ahora bien, una elección astuta del parámetro $h = x - a$ nos lleva a la conocida expresión de la serie de Taylor para una función de una variable

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n$$

y el error vendrá dado por

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con } a \leq \xi \leq a+h$$

así la expansión de Taylor especifica el valor de una función en un punto x en términos de el valor de la función y sus derivadas en un punto de referencia a . La expansión se hace en términos de potencias de la diferencia, $(x-a)$, entre el punto que se evalúa y el punto de referencia.

Algunas otras formas de expresar la serie de Taylor, serían

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \frac{d^n}{dx^n}}{n!} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} f(x) = e^{hD} f(x) \quad \text{donde, } D \equiv \frac{d}{dx}$$

Si el punto de referencia es $a = 0$ tendremos la serie de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n$$

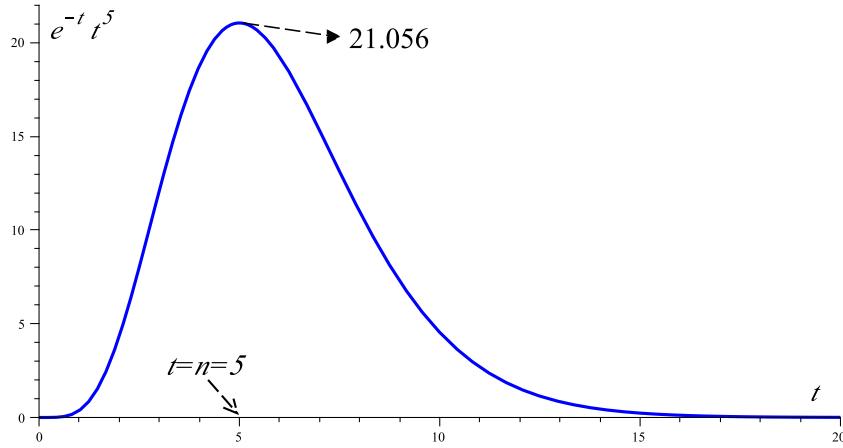
2.4.1. Algunas series de Taylor

Un listado incompleto de las series de Taylor más utilizadas es:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{para } -\infty < x < \infty \\ \arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad \text{para } -1 < x < 1 \\ (1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1) \frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2) \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n + \cdots \quad \forall x \end{aligned}$$

Si tenemos una función y queremos determinar su serie de potencias, es posible que los cálculos se simplifiquen notablemente si utilizamos apropiadamente las series elementales anteriores, por ejemplo:

$$e^{\alpha x^2 + \beta x} = 1 + (\alpha x^2 + \beta x) + \frac{(\alpha x^2 + \beta x)^2}{2} + \frac{(\alpha x^2 + \beta x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x^2 + \beta x)^4}{4!} + \cdots$$

Figura 2.6: La función Gamma para $n = 5$

desarrollando los términos binomiales

$$e^{\alpha x^2 + \beta x} = 1 + \beta x + \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta^2\right) x^2 + \left(\beta \alpha + \frac{1}{6} \beta^3\right) x^3 + \left(\frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha \beta^2 + \frac{1}{24} \beta^4\right) x^4 + \dots$$

Si se quiere hacer el desarrollo alrededor de un punto diferente de $x_0 = 0$, podemos completar cuadrados:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x^2 + \beta x} &= e^{\alpha(x^2 + \beta x / \alpha)} = e^{\alpha(x^2 + \beta x / \alpha + \beta^2 / 4\alpha^2 - \beta^2 / 4\alpha^2)} = e^{\alpha(x^2 + \beta x / \alpha + \beta^2 / 4\alpha^2) - \beta^2 / 4\alpha} \\ &= e^{\alpha(x + \beta / 2\alpha)^2 - \beta^2 / 4\alpha} = e^{\alpha(x + \beta / 2\alpha)^2} e^{-\beta^2 / 4\alpha} \\ &= e^{-\beta^2 / 4\alpha} [1 + \alpha(x + \beta / 2\alpha)^2 + \alpha^2(x + \beta / 2\alpha)^4 / 2 + \dots] \end{aligned}$$

y esta es la expansión en series de potencias alrededor del punto $x_0 = -\beta / 2\alpha$.

2.4.2. La expansión binomial

Por su uso frecuente, consideraremos el caso de la expansión binomial

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \end{aligned}$$

donde el término $\binom{m}{n}$ se denomina el coeficiente binomial y la serie termina cuando $m = n$. Ahora bien, escrito de la forma compacta se sugiere que el exponente m tendría que ser entero y positivo. Pero no es así. La serie explícita no se restringe a valores enteros y positivos de m . Por ello, la forma compacta pero exacta

de la expansión binomial es

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m &= 1 + m\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m-n)}\left(\frac{x}{a}\right)^n.\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la función $\Gamma(x)$ como la generalización del factorial para valores que no se restringen a enteros positivos. Nótese también que si el exponente es negativo, $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$ tiene una singularidad o un polo en $x = -a$.

Cuando n es un entero positivo tendremos

$$n! = \Gamma(1+n) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \int_0^\infty e^{-t+n \ln(t)} dt$$

Esta integral, como se puede ver en la figura, nos recuerda la forma de una Gaussiana con un máximo en $t = n$. Al hacer una expansión alrededor de este punto

$$\begin{aligned}f(t) = -t + n \ln(t) &= f(n) + (t-n)f'(n) + (t-n)^2 f''(n)/2 + \dots \\ &= -n + n \ln(n) + 0 + (t-n)^2(-n/n^2)/2 + \dots\end{aligned}$$

Si conservamos los términos hasta segundo orden, la integral puede ser aproximadamente igual a:

$$n! \sim \int_0^\infty e^{-n+n \ln(n)-(t-n)^2/2n} dt = n^n e^{-n} \int_0^\infty e^{-(t-n)^2/2n} dt$$

Para valores de n grandes, y esto es lo que se conoce como la aproximación de Stirling, se tiene:

$$n! \sim n^n e^{-n} \int_{-\infty}^\infty e^{-(t-n)^2/2n} dt = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Aquí, el símbolo \sim se refiere a un comportamiento asintótico de la función Gamma.

En la siguiente tabla se muestran, para algunos valores de n , el valor exacto del factorial, el valor por la fórmula de Stirling y el cociente entre estos dos valores. Se puede apreciar entonces lo buena que resulta tal aproximación.

n	$n!$	$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$	$n! / (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})$
1	1	0,922	0,922
2	2	1,919	0,960
5	120	118,019	0,983
10	3628800	3598695,619	0,992

2.4.3. Taylor en varias variables

Sólo por razones de completitud, y para reforzar los conceptos de que es un desarrollo en series para una función alrededor de un determinado punto, escribiremos el desarrollo en series de Taylor para una función

de dos variables $f = f(x, y)$. Esta es

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x - a) f_x|_{ab} + (y - b) f_y|_{ab} \\ &+ \frac{1}{2!} [(x - a)^2 f_{xx}|_{ab} + 2(x - a)(y - b) f_{xy}|_{ab} + (y - b)^2 f_{yy}|_{ab}] \\ &+ \frac{1}{3!} [(x - a)^3 f_{xxx}|_{ab} + 3(x - a)^2(y - b) f_{xxy}|_{ab} + 3(x - a)(y - b)^2 f_{xyy}|_{ab} + (y - b)^3 f_{yyy}|_{ab}] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

De una manera más compacta

$$f(x^j + x_0^j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^k \partial_k)^n f(x^m) \Big|_{x^m=x_0^m} \Rightarrow f(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^n f(x^m) \Big|_{\vec{r}=\vec{a}}$$

Dónde hemos utilizado la siguiente convención

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x; \quad f_y = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y; \quad f_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \partial_{xx}; \quad f_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \partial_{xy}; \quad f_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \partial_{yy}; \quad \dots$$

2.4.4. Ejemplos

2.4.5. Practicando con Maxima

La gráfica mostrada en la Figura 1 pueden obtenerse de la siguiente manera:

```
> restart;
> n := 5;
> f := exp(-t)*t^n;
> Int(f,t=0..infinity)=int(f,t=0..infinity);
> GAMMA(5+1);
> plot(f,t=0..20);
> 'f(5)'=evalf(subs(t=5,f));
```

2.4.6. Ejercicios

- Utilice la siguiente definición

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2},$$

expanda el integrando y luego integre término por término para derivar la siguiente expansión conocida como expansión de Gregory

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Evalué la serie para $x = \frac{\pi}{4}$.

- Utilizando la definición

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

derive las expresiones siguientes

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{-1}x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ \operatorname{sen}^{-1}(1-x) &= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2x} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4^n(2n+1)n!} x^n \right).\end{aligned}$$

3. Encuentre los primeros cinco términos, diferentes de cero, de la serie de Taylor, de la función

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2} \left[\frac{2+2x}{1+2x} - \frac{\ln(1+2x)}{x} \right].$$

Puedes usar el programa Maxima.

2.5. Series y espacios de Hilbert

Hemos dejado “sueltos” algunos conceptos para los espacios de Hilbert *infinito*-dimensional. El primero de estos conceptos es que un vector $|a\rangle \in E^\infty$ surge de la combinación lineal de elementos de una base infinita $\{|e_i\rangle\}$, (de una serie) que converge al vector $|a\rangle$ para un espacio donde también la norma del vector converge a un valor finito $\|a\|^2 = \langle a | a \rangle$.

El segundo concepto fue la posibilidad de expresar un determinado vector (una función) como combinación lineal de una base (de dimensión infinita) de un espacio vectorial E^∞ . Efectivamente, esa combinación lineal (de dimensión infinita) habrá de converger a el valor de la función en ese punto. En su momento expresamos estos conceptos intuitivos y fácilmente demostrables para E^n (un espacio vectorial Euclíadiano de dimensión finita, n -dimensional) y sin mayores justificaciones hicimos el “salto” a E^∞ (un espacio Euclíadiano *infinito*-dimensional). Ahora, equipados con los conceptos de convergencia uniforme estamos en capacidad de explorar esas razones que antes eludimos.

Ambos conceptos tienen que ver con la palabra *completitud*, la cual, como veremos, no tiene el mismo significado en cada una de las situaciones antes mencionadas, pero será complementario. En el primer caso la completitud de E^∞ se logra al poder expresar un vector como una combinación lineal de una base infinita que converja al valor del vector. En el segundo caso diremos que la base $\{|e_i\rangle\}$ para E^∞ será completa si expande la totalidad de los vectores de E^∞ .

2.5.1. Completitud de E^∞

La primera idea de completitud de un Espacio de Hilbert E^∞ tiene que ver con el hecho que, en ese espacio, donde la norma de un vector es finita $\|a\|^2 = \langle a | a \rangle < \infty$, la combinación lineal de los elementos de una base infinita, $\{|e_i\rangle\}$, converja al vector $|a\rangle$. Esto es, $a^i |e_i\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a\rangle$.

Para el caso de E^n es inmediato que, dada una base (ortonormal, por ejemplo)

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle \Rightarrow \|a\|^2 = \langle a | a \rangle = a^i a_i < \infty, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots n,$$

la norma es finita, por cuanto es la suma de términos finitos (las componentes del vector $(a^1, a^2, a^3, \dots a^n)$). Sin embargo, para el caso de E^∞ las componentes del vector será función de las sumas parciales, esto es hasta dónde desarrollemos la serie y debemos demostrar que si

$$|a\rangle_n \Leftrightarrow (a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4, \dots a_n^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a_\infty\rangle \Leftrightarrow (a_\infty^1, a_\infty^2, a_\infty^3, \dots a_\infty^j, \dots) \Rightarrow \| |a_\infty\rangle - |a_n\rangle \| < \epsilon.$$

Es decir que, efectivamente, componente a componente el vector $|a_n\rangle$ converja al vector $|a\rangle$.

El criterio de convergencia de Cauchy en este caso significa que: dadas dos sumas parciales (desarrollos parciales en una determinada base infinita $\{|e_i\rangle\}$) $|a_n\rangle = a^i |e_i\rangle$ con $i = 1, 2, \dots, n$ y $|a_m\rangle = a^j |e_j\rangle$ con $j = 1, 2, \dots, m$ entonces:

$$\| |a_m\rangle - |a_n\rangle \| = \| |a_m\rangle - |a\rangle - |a_n\rangle + |a\rangle \| \leq \| |a\rangle - |a_n\rangle \| + \| |a\rangle - |a_m\rangle \| < \epsilon' + \epsilon'' \equiv \epsilon,$$

con lo cual las diferencias en las sumas parciales serán siempre menor que un $0 < \epsilon < 1$.

Nótese que hemos utilizado la desigualdad triangular $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, y es esa misma desigualdad triangular lo que nos garantiza que:

$$|a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| |a_m\rangle - |a_n\rangle \|^2 < \epsilon,$$

vale decir, hemos demostrado que el término j -ésimo (y con ello todas las componentes del vector) de una suma parcial, converge al término correspondiente de la serie límite. Esto es, $a_n^j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_m^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a^j$ por lo tanto que la combinación lineal converge al vector. Nos queda por demostrar si su norma es finita, o lo que es lo mismo, $\langle a | a \rangle = a^i a_i < \infty$ con $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Es claro que:

$$\sum_{j=1}^M |a_n^j - a_m^j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a_m^j|^2 \equiv \| |a_m\rangle - |a_n\rangle \|^2 < \epsilon,$$

con lo cual si $m \rightarrow \infty$ tendremos que $\sum_{j=1}^M |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon$, y si ahora hacemos:

$$M \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j - a^j|^2 < \epsilon \Rightarrow \langle a | a \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |a^j|^2 \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2.$$

Ahora bien, para α y β complejos, se cumple:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \equiv |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Rightarrow 2|\alpha||\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 \Rightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha| + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta|,$$

para que resulte:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

Finalmente, podemos aplicarlo al caso que nos compete:

$$\langle a | a \rangle \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |a^j + a_n^j - a_n^j|^2 \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a^j - a_n^j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |a_n^j|^2 \right) < \infty.$$

2.5.2. Conjunto completo de funciones

El segundo sentido de completitud tiene que ver con que el conjunto (funciones) de vectores base expandan la totalidad del espacio vectorial (de funciones). Esto es, si $\{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$ es una base ortonormal para E^∞ entonces:

$$|a\rangle = a^i |u_i\rangle \Rightarrow \| |a\rangle \|^2 = \langle a | a \rangle = a^i a_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Otra vez es la misma afirmación que consideramos en el caso de un espacio finito dimensional E^n , en el cual demostramos que una base $\{|u_i\rangle\}$ con $i = 1, 2, 3, \dots, n$ expandía todo el espacio.

Si adicionalmente existe una función *cuadrado integrable*, $\mathcal{L}_{[a,b]}^2$ definidas en el intervalo $[a, b]$, la cual pueda ser aproximada por la base:

$$\| |f\rangle \|^2 \equiv \langle f | f \rangle < \infty \Rightarrow |f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i |u_i\rangle \sim \sum_{i=0}^N c^i |u_i\rangle \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b dx |f(x)|^2 \Rightarrow f(x) \sim \sum_{j=0}^N c^j u_j(x).$$

Nótese que hemos supuesto la existencia de un producto interno y si las bases son ortonormales tendremos que:

$$\langle g | f \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x) \Rightarrow \langle u^k | u_l \rangle \equiv \int_a^b dx u^{*k}(x) u_l(x) = \delta_l^k \Rightarrow \|f(x)\|^2 \equiv \int_a^b dx |f(x)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c^j|^2.$$

donde:

$$c^k = \int_a^b dx u^{*k}(x) f(x).$$

Para demostrar que E^∞ es completo, comenzamos por demostrar la llamada *desigualdad de Bessel*. Esta es: dada una base ortonormal infinita, $\{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$ para un espacio vectorial de Hilbert, E^∞ , de funciones cuadrado integrable $f(x) \in \mathcal{L}_{[a,b]}^2$, con un producto interno definido por $\langle g | f \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x)$, entonces se cumple que:

$$\|f(x)\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{con } c^k = \langle u^k | f \rangle = \int_a^b dx u^{*k}(x) f(x) \quad \wedge \quad \langle g | f \rangle \equiv \int_a^b dx g^*(x) f(x).$$

Para demostrar la desigualdad de Bessel, partimos de una afirmación obvia en espacios finito dimensionales:

$$0 \leq \| |f\rangle - c^i |u_i\rangle \|^2 \equiv [|\langle f | - c_k^* \langle u^k ||] [|\langle f | - c^i |u_i\rangle|] = \| |f\rangle \|^2 - c_k^* \underbrace{\langle u^k | f \rangle}_{c^k} - c^i \underbrace{\langle f | u_i \rangle}_{c_i^*} + c_k^* c^i \underbrace{\langle u^k | u_i \rangle}_{\delta_i^k},$$

donde $k, i = 1, 2, 3, \dots, n$ Entonces, queda demostrada la desigualdad de Bessel al tomar el límite $n \rightarrow \infty$:

$$0 \leq \| |f\rangle \|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \| |f\rangle \|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Si definimos el error, M_n , que se comete al aproximar una función con su expansión hasta un término n -ésimo como $M_n(b-a) \equiv \| |f\rangle - \alpha^i |u_i\rangle \|^2$ demostraremos que M_n es mínima si $\alpha^i = c^i = \langle u^i | f \rangle$.

Para ello procedemos como es costumbre, partiendo de la definición que acabamos de hacer y nos centramos en el caso finito dimensional:

$$0 \leq M_n(b-a) \equiv \| |f\rangle - \alpha^i |u_i\rangle \|^2 = \| |f\rangle - (\alpha^i - c^i) |u_i\rangle - c^k |u_k\rangle \|^2.$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} M_n(b-a) &= [\langle f | - (\alpha_k^* - c_k^*) \langle u^k | - c_k^* \langle u^k |] [|\langle f | - (\alpha^i - c^i) |u_i\rangle - c^i |u_i\rangle|] \\ &= \| |f\rangle \|^2 - c_i^* (\alpha^i - c^i) - 2c_i^* c^i - (\alpha_k^* - c_k^*) c^k + \sum_{j=1}^n \|\alpha^j - c^j\|^2 + (\alpha_k^* - c_k^*) c^k + c_i^* (\alpha^i - c^i) + c_i^* c^i \\ &= \left[\| |f\rangle \|^2 - \sum_{i=1}^n \|c^i\|^2 \right] + \sum_{j=1}^n \|\alpha^j - c^j\|^2. \end{aligned}$$

Pero la desigualdad de Bessel garantiza que la cantidad entre corchetes es positiva, por lo tanto M_n es mínima (y la denotaremos \tilde{M}_n) cuando seleccionamos $\alpha^j = c^j$. Más aún, \tilde{M}_n decrece cuando $n \rightarrow \infty$, vale decir:

$$\tilde{M}_n(b-a) = \| |f\rangle \|^2 - \sum_{i=1}^n \|c^i\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{M}_\infty(b-a) = \| |f\rangle \|^2 - \sum_{i=1}^\infty \|c^i\|^2,$$

y si, adicionalmente tenemos que $\tilde{M}_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces es claro que:

$$\| |f\rangle \|^2 = \sum_{i=1}^\infty \|c^i\|^2 \Rightarrow \{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\} \quad \text{es completa.}$$

Esta noción de convergencia se denomina *convergencia al promedio*.

Si adicionalmente exigimos que la serie $c^i |u_i\rangle$ converja uniformemente para $x \in [a, b]$ entonces es claro que:

$$\int_a^b dx \|f(x) - c^i |u_i\rangle\|^2 = 0 \Rightarrow |f\rangle = c^i |u_i\rangle \quad (\text{con } i = 1, 2, 3 \dots, \infty) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^\infty c^i u_i(x).$$

Podemos enumerar las condiciones para la cual exigiremos que una función pueda ser expresada en términos de una base completa de funciones.

- Que $f(x)$ sea cuadrado integrable $f(x) \in \mathcal{L}_{[a,b]}^2$.
- Que la base sea completa, $\{|u_i\rangle\} \Leftrightarrow \{u_i(x)\}$ i.e. $\| |f\rangle \|^2 = \sum_{i=1}^\infty \|c^i\|^2$.
- Que la serie $c^i |u_i\rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^\infty c^i u_i(x)$ converja uniformemente, para $x \in [a, b]$.

2.6. Series de Laurent

Anteriormente consideramos series complejas de potencias. En esta sección revisaremos, desde la perspectiva de haber expresado la derivada n -ésima de una función analítica, el equivalente a las series de Taylor para funciones complejas de variable complejas.

2.6.1. Series de Taylor para funciones analíticas

Si $f(z)$ es analítica en un círculo de radio R , encerrado por un contorno \mathcal{C} y centrado en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ puede ser expandida en series de potencias (enteras positivas) para todo $|z - z_0| < R$ de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \equiv f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_n,$$

con el resto $R_n(z)$ definido como:

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}.$$

Para probar esta afirmación partimos de la fórmula integral de Cauchy escrita convenientemente:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right], \quad (2.27)$$

de donde:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right],$$

este último corchete proviene de una forma ingeniosa de utilizar una serie geométrica de razón $r = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

Para entenderlo, recordemos que para una serie geométrica, se cumple que:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \Rightarrow \frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{j=0}^n \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right],$$

con lo cual:

$$f(z) = \sum_{j=0}^n (z - z_0)^j \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} \right) + R_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + R_n(z), \quad (2.28)$$

donde:

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)}. \quad (2.29)$$

Obvio que la serie (2.28) converge si $R_n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y de eso es fácil convencerse al acotar la ecuación (2.29). Esto es, considerando ζ sobre el contorno \mathcal{C} y z en el interior de \mathcal{R} , entonces:

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| \frac{(z - z_0)^n}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} \right| < \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n (\zeta - z)} \right| d\zeta \\ &< \frac{|z - z_0|^n}{2\pi} M \frac{1}{R^n} 2\pi R, \end{aligned}$$

donde, una vez más, hemos utilizado la forma polar $\tilde{\zeta} = \zeta - z_0 = Re^{i\theta}$ y hemos acotado $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| < M$, con

lo cual es inmediato constatar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z - z_0}{R} \right|^n = 0 \Rightarrow R_n(z) \rightarrow 0$, con lo cual la serie converge.

Ejemplos Expanda

- $f(z) = \frac{1}{1 - z}$, alrededor de $z = z_0$

$$f(z) = \frac{1}{1 - z_0} + \frac{1}{(1 - z_0)^2} (z - z_0) + \frac{1}{(1 - z_0)^3} (z - z_0)^2 + \frac{1}{(1 - z_0)^4} (z - z_0)^3 + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}}$$

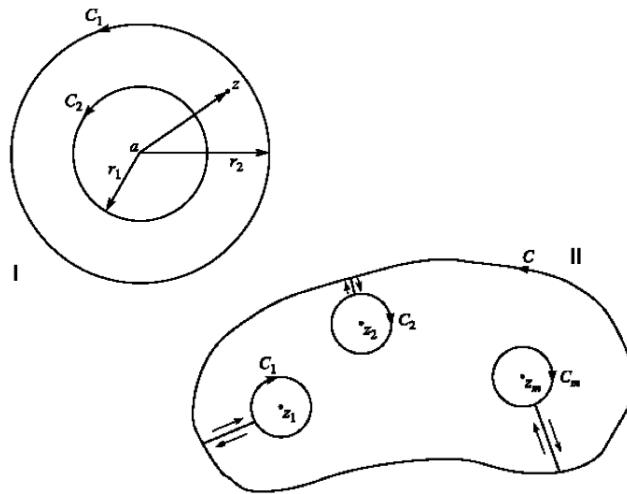


Figura 2.7: Expansión de Laurent

- $f(z) = \ln(1+z)$, alrededor de $z=0$ (Serie de Maclaurin)

$$f(z) = \ln(1+z) = \ln(1+z)|_{z=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1-z)^{n+1}} \Big|_{z=0} z^n \equiv f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \dots = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

- $f(z) = \ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$, alrededor de $z=0$ (Serie de Maclaurin)

$$\ln\left[\frac{1+z}{1-z}\right] \equiv \ln[1+z] - \ln[1-z] = \left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots\right] - \left[-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \dots\right] = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \dots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}.$$

2.6.2. Series de Laurent

Hemos dicho que si una función $f(z)$ es analítica en una región (digamos que circular) \mathcal{R} , entonces puede ser expandida por series de Taylor. Sin embargo, si $f(z)$ tiene un polo de orden p , digamos, en $z = z_0$, dentro de la región \mathcal{R} , no será analítica en ese punto, mientras que la función: $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ si lo será en todos los puntos de esa región. Entonces $f(z)$ podrá ser expandida como series de potencias (de Laurent) de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k (z - z_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z - z_0)^n}, \text{ con } u_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad (2.30)$$

para: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Equivalentemente

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p} = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (2.31)$$

La suma de todos los términos que tengan potencias negativas, vale decir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{-n}}{(z - z_0)^n}$, se denomina *parte principal* de $f(z)$.

Para demostrar (2.30) o (2.31), recordamos que, tal y como muestra la figura 2.8 cuadrante I , si $f(z)$ es analítica en la región anular, entonces el Teorema de Cauchy, nos garantiza que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} \equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} - \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}$$

donde en el segundo caso hemos supuesto que ambas circulaciones tienen el mismo sentido.

Del mismo modo como procedimos en la ecuación (2.27) reescribimos el segundo par de integrales como

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right]$$

y ahora invocando, una vez más la progresión geométrica (??) podemos construir expresiones de integrales equivalentes a la ecuación (??). Vale decir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n}{\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0} \right)} \right] + \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_2} d\zeta \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^j + \frac{\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n}{\left(\frac{\zeta - z}{z - z_0} \right)} \right]$$

y equivalentemente

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (z - z_0)^j \underbrace{\oint_{C_1} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}}_{u_j} + R_{n1}(z) + \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(z - z_0)^{j+1}} \underbrace{\oint_{C_2} d\zeta f(\zeta)(\zeta - z_0)^j}_{u_{-j}} + R_{n2}(z) \quad (2.32)$$

Con lo cual queda demostrado la forma funcional de los coeficientes de la expansión de Laurent. La demostración de la convergencia, esto es $n \rightarrow \infty \Rightarrow R_{n1}(z) \rightarrow R_{n2}(z) \rightarrow 0$ sigue el mismo esquema que utilizamos para demostrar la convergencia de la ecuación (2.30) y se lo dejamos como ejercicio al lector.

Otra manera de representar las series de Laurent es por medio de las fórmulas:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2. \quad (2.33)$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.34)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-k+1}} dz, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (2.35)$$

En este caso, se supone que la función es analítica en el dominio anular: $R_1 < |z - z_0| < R_2$ y C es un contorno cerrado simple en torno a z_0 y contenido en la región anular.

En el caso de b_k podemos ver que el integrando se puede escribir también como $f(z)(z - z_0)^{k-1}$. Si f es analítica en $|z - z_0| < R_2$, entonces el integrando es una función analítica en dicho disco y por lo tanto $b_k = 0$. Es decir, la serie (2.33) se reduce a una serie de Taylor donde los coeficientes son:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

2.6.3. Algunos Ejemplos

En muchos casos las expansiones en series de Laurent no se generan a partir de las ecuaciones (2.30) o (2.33) sino a partir de manipulaciones algebraicas y expansiones en Taylor moduladas por otros factores.

Ejemplo 1: El primero lo haremos directamente, vale decir, que como lo vamos a hacer no lo haremos otra vez. Queremos hacer una representación en serie de Laurent de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Utilizando las fórmulas de (2.32), construimos la relación

$$u_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta^{j+2}(\zeta - 1)} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta^{j+2}} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{d\zeta}{\zeta^{j+2-n}}$$

convirtiendo a la forma polar tendremos que

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{ri\theta e^{i\theta} d\theta}{r^{j+2-n} e^{i(j+2-n)\theta}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{j+2-n, 1} \Rightarrow \begin{cases} u_n = -1 & \text{para } n \geq -1 \\ u_n = 0 & \text{para } n < -1 \end{cases}$$

es decir

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

Consideremos los siguientes ejemplos de desarrollos en Series de Laurent:

Ejemplo 2:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)}.$$

La función puede escribirse en la forma:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2} \right], \quad 0 < |z| < 2.$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z(z-2)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z - \frac{1}{16}z^2 - \frac{1}{32}z^3 - \frac{1}{64}z^4 - \frac{1}{128}z^5 - \dots, \quad 0 < |z| < 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

Esta función tiene polos de orden 1 en $z = 1$ y $z = 3$. Además, expresando $f(z)$ como una suma de fracciones parciales, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} \right], \quad 1 < |z| < 3,$$

- Para $1 < |z| < 3$.

Tenemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1, \\ -\frac{1}{z-3} &= \frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3, \end{aligned}$$

La serie es:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \right] \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{18} z - \frac{1}{54} z^2 - \frac{1}{162} z^3 - \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{1}{2} z^{-3} - \frac{1}{2} z^{-4} - \dots . \end{aligned}$$

- Para $|z| > 3$.

En este caso no podemos utilizar el segundo desarrollo anterior, ya que éste es válido sólo para $|z| < 3$. Por lo tanto:

$$-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-3/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3,$$

podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= -\frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-3^n}{z^{n+1}} \\ &= z^{-2} + 4z^{-3} + 13z^{-4} + 40z^{-5} + \dots . \end{aligned}$$

- para $|z| < 1$.

Escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-3} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z} - \frac{1}{6} \frac{1}{1-z/3},$$

como $|z| < 1$ y $|z/3| < 1$ en este dominio, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{4}{9} z + \frac{13}{27} z^2 + \frac{40}{81} z^3 + \frac{121}{243} z^4 + \dots . \end{aligned}$$

Ejemplo 4:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}.$$

Sabemos que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^2 e^{2(z-1)}}{(z-1)^3} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-1)^n}{n! (z-1)^3} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (z-1)^{n-3} \\ &= e^2 \left[\frac{2}{3} + (z-1)^{-3} + 2(z-1)^{-2} + 2(z-1)^{-1} + \frac{2}{3}z + \frac{4}{15}(z-1)^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

la cual es válida para: $0 < |z-1| < \infty$.**Ejemplo 5:**

$$f(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Esta función se puede escribir como:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}.$$

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < \infty,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} &= \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{z^3 (2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{120}z^2 + \frac{1}{5040}z^4 - \frac{1}{362880}z^6 + \frac{1}{39916800}z^8 - \dots, \end{aligned}$$

válida para: $0 < |z| < \infty$.

2.6.4. Integración por el método de los residuos

Las expansiones de funciones en series de potencias dejan “residuos” al detener la expansión a para una determinada potencia. Esto se puede apreciar claramente en la expresión de Taylor para funciones analíticas. Ahora, las expansiones de Laurent nos muestran otro “residuo”. Explotaremos las series de Laurent para funciones con polos y construiremos un método para evaluar integrales de funciones en esos puntos. Primero estudiaremos los residuos en general y luego los utilizaremos para evaluar integrales.

2.6.5. Los residuos de Laurent

Hemos dicho que si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} dz f(z) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z - z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

más aún, tendremos que los coeficientes de la expansión pueden ser calculados a partir de

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{si } n = -1 \quad \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2i\pi a_{-1} \equiv 2i\pi \operatorname{Res} f(z) \quad (2.36)$$

Es decir, la integración a lo largo de un contorno \mathcal{C} que aísle al polo $z = z_0$ es proporcional al residuo correspondiente a la expansión de Laurent alrededor de ese polo. Nos queda entonces calcular el residuo para así no calcular la integral.

Esta situación se ilustra con el siguiente ejemplo. Supongamos

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \cdots,$$

por lo tanto:

$$a_{-1} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\zeta = 2i\pi a_{-1} = -\frac{i\pi}{3}$$

En general, si $f(z)$ tiene un polo de orden p en $z = z_0 \in \mathcal{R}$, entonces

$$(z - z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z - z_0) + \cdots + a_0(z - z_0)^p + \cdots \Rightarrow \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}[(z - z_0)^p f(z)] = (p-1)! a_{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

con lo cual concluimos que

$$a_{-1} \equiv \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)] \right) \quad (2.37)$$

Si, por ejemplo consideramos

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \equiv \frac{e^{iz}}{(z + i)^2(z - i)^2} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = i \Rightarrow \frac{d}{dz}[(z - i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z + i)^2} \right] \\ z_0 = -i \Rightarrow \frac{d}{dz}[(z + i)^2 f(z)] = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z - i)^2} \right] \end{cases}$$

con lo cual

$$\operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \Big|_i = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z + i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z + i)^2 i e^{iz} - e^{iz} 2(z + i)}{(z + i)^2} = \frac{-4ie^{-1} - -4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}$$

del mismo modo se procede para el caso $z = -i$

Un caso particular y muy útil lo constituyen las funciones racionales del tipo $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ y $f(z)$ tiene un polo simple en $z = z_0$. Esto es $q(z_0) = 0$ entonces

$$\operatorname{Res} f(z)|_{z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)p(z)}{q(z)} = p(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \quad (2.38)$$

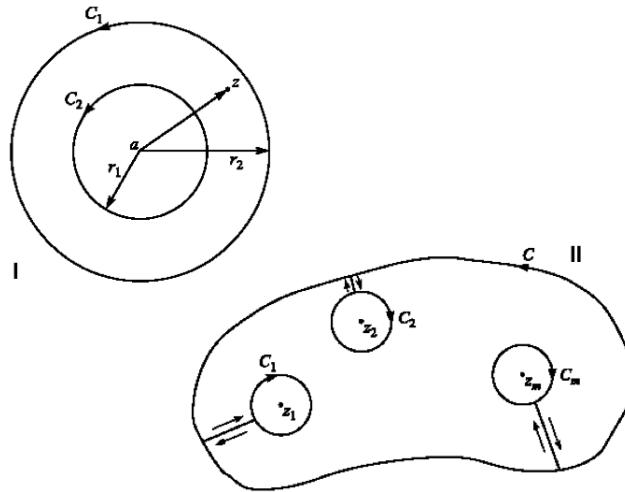


Figura 2.8: Expansión de Laurent

porque hemos utilizado el Teorema de L'Hopital. Este caso lo podemos ejemplificar si consideramos una función

$$f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z} \equiv \frac{4-3z}{z(z-1)} \quad \text{con polos en } \begin{cases} z=0 & \Rightarrow \text{Res } f(z)|_{z=0} = \frac{4-3z}{2z-1} \Big|_{z=0} = -4 \\ z=1 & \Rightarrow \text{Res } f(z)|_{z=1} = \frac{4-3z}{2z-1} \Big|_{z=1} = 1 \end{cases} \quad (2.39)$$

2.7. Teorema del Residuo

2.7.1. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$

Hemos visto como calcular las integrales de funciones, en regiones múltiplemente conexas, con polos simples a partir de residuos. Ahora generalizaremos ese esquema para una región, también múltiplemente conexa, pero con un número finito de polos. Tal y como se muestra en la figura 2.8 en el cuadrante II , realizamos una circulación ingeniosa, de tal modo que aislamos los distintos polos. Ahora bien, como la función es analítica en la región bordeada por todos esos contornos, entonces

$$\left[\oint_C dz f(z) + \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) + \dots + \oint_{C_m} dz f(z) \right] = 0$$

y al cambiar el sentido de circulación comprobamos lo que ya sabíamos

$$\oint_C dz f(z) = \oint_{C_1} dz f(z) + \oint_{C_2} dz f(z) + \dots + \oint_{C_m} dz f(z) \Leftrightarrow \oint_C dz f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

donde hemos utilizado lo que hicimos para la ecuación (2.36)

Con ello podemos enunciar el Teorema del Residuo que ya hemos demostrado

Si $f(z)$ es analítica en una región \mathcal{R} excepto en un número, m , finito de polos $z_{0_1}, z_{0_2}, z_{0_3}, \dots, z_{0_m}$ entonces

$$\oint_C dz f(z) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0_j}}$$

Una vez más ejemplificamos. Sea la función $f(z) = \frac{4-3z}{z^2-z}$, una función con polos simples en $z = 0$ y $z = 1$ correspondientes a residuos 4 y 1, respectivamente, tal y como se vió en la sección (2.6.5). Entonces, utilizamos los resultado expuestos en el ejemplo (2.39)

$$\oint_C dz \frac{4-3z}{z^2-z} = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i$$

siempre y cuando el circuito C encierre los dos polos, $z = 0$ y $z = 1$, para los cuales hemos calculado los residuos.

Ejercicios

- Determinar los polos y los residuos correspondientes para cada una de las funciones propuestas

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2-z-2}; \quad f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2; \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2}; \quad f(z) = \cot z$$

- Evaluar

a)

$$\oint_C \frac{dz e^z}{\cosh z} \quad \text{a lo largo de una circunferencia } |z| = 5$$

b)

$$\oint_C \frac{(2z^2+5)dz}{(z+2)^3(z^2+4)z^2} \quad \text{a lo largo de una circunferencia } |z-2i| = 6 \text{ y}$$

un cuadrado de vértices $z = 1+i; z = 2+i; z = 2+2i$ y $z = 1+2i$.

2.7.2. Evaluación de integrales, reales, impropias

El teorema del residuo (2.7) es una herramienta poderosa para evaluar algunos tipos de integrales definidas en variable real. La intención es “extender” el dominio de las funciones de la recta real al Plano Complejo. Una de las restricciones es que los contornos deben ser cerrados antes de que sean evaluados los residuos. El punto es que muchas integrales reales tienen contornos abiertos y la posibilidad de evaluar estas integrales a través del Teorema del Residuo descansa en la forma como se cierran los contornos. En estos casos se debe estimar las contribuciones de esos contornos adicionales que permiten cerrar los contornos abiertos. A continuación expondremos algunas técnicas para cerrar algunos tipos de contornos abiertos.

2.7.3. Integrales impropias del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$

Este tipo de integrales implica, si ambos límites existen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 dx f(x) + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r dx f(x) \leftrightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r dx f(x)$$

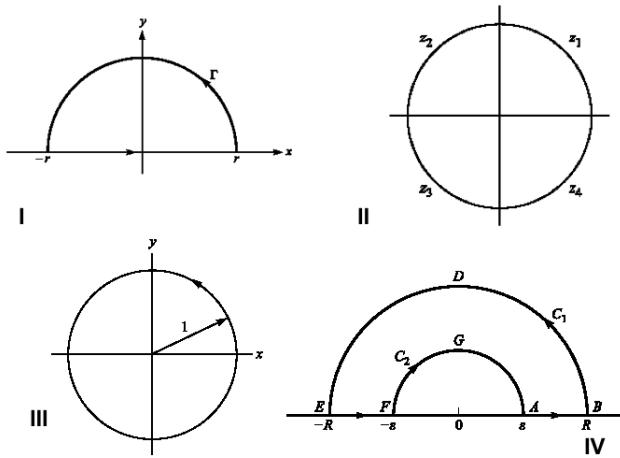


Figura 2.9: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

Necesitaremos que el integrando sea una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $q(x) \neq 0 \ \forall x$. Adicionalmente requeriremos que cuando menos $q(x) \sim x^2 p(x)$. Supuesto todo esto, convertimos nuestra función racional en una función de variable compleja $f(x) \rightarrow f(z)$ y consideraremos la integral de circulación, $\oint_C dz f(z)$, sobre un contorno C descrito por el eje real y una semicircunferencia Γ en el plano complejo con $y \geq 0$, tal y como se muestra en el cuadrante I la figura 2.10. La intención es hacer $r \rightarrow \infty$ y con ello evaluar la integral $\int_0^\infty dx f(x)$. Es fácil convencerse que

$$\oint_C dz f(z) = \int_\Gamma dz f(z) + \int_{-r}^r dx f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}}$$

es decir,

$$\int_{-r}^r dx f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} - \int_\Gamma dz f(z)$$

Esta estrategia es válida porque hemos supuesto que $f(x)$ es racional y que $q(x) \neq 0 \ \forall x$, entonces si existen polos para $f(z)$ estarán en el plano complejo (no sobre el eje real). Todos esos polos serán encerrados por el contorno C que hemos seleccionado. Más aún, comprobaremos que $\int_\Gamma dz f(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. Esto es sencillo si notamos que

$$q(x) \sim x^2 p(x) \Rightarrow |f(z)| < \frac{k}{|z|^2} \Rightarrow \left| \int_\Gamma dz f(z) \right| < \frac{k}{r^2} \pi r = \frac{k\pi}{r} \quad \text{para } |z| = r \geq 0$$

con lo cual llegamos a que para este tipo de integrales

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x) = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_{0j}} \quad \text{para } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \text{con } q(x) \neq 0 \ \forall x \wedge p(x) \sim x^2 q(x) \quad (2.40)$$

Ejemplo Considere evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} = 2i\pi \sum_{j=1}^m \text{Res } f(z)_{z=z_0j}$$

donde hemos utilizado la expresión (2.40). La extensión analítica

$$f(x) \rightarrow f(z) = \frac{1}{z^4 + 1} \quad \text{tendrá cuatro polos simples: } z = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}; z = e^{\pm \frac{3i\pi}{4}};$$

correspondientes a las cuatro raíces de $z^4 = -1$. Acto seguido calculamos los residuos invocando la relación (2.38) que hemos construido para funciones racionales. Esto es

$$\text{Res } \frac{p(z)}{q(z)} \Big|_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \Rightarrow \begin{cases} z = e^{\frac{i\pi}{4}} \Rightarrow \text{Res } f(z) \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{4} \\ z = e^{\frac{3i\pi}{4}} \Rightarrow \text{Res } f(z) \Big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{-9i\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{4} \end{cases}$$

Hemos considerado únicamente los polos para el semiplano complejo $y > 0$ ya que seguimos considerando el circuito descrito en el cuadrante I de la figura 2.10. Quedan dos polos ubicados en el semiplano complejo $y < 0$, tal y como se muestra en el cuadrante II de la misma figura 2.10. Consecuentemente, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{2\pi i}{4} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{-i\pi}{4}} \right) = \pi \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \quad \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

Ejemplo Para evaluar la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 2z + 2)}$$

donde hemos realizado la extensión analítica $f(x) \rightarrow f(z)$ y ubicado sus polos de $z = i$ y $z = i - 1$ en el semiplano complejo $y > 0$ y los encerrados por el circuito descrito en el cuadrante I de la figura 2.10. El primero de estos polos es de segundo orden, mientras que el segundo corresponde a un polo simple. Consecuentemente, los residuos se calculan invocando la relación general (2.37) arriba expuesta. Con lo cual para

$$z = i \Rightarrow \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{d}{dz} \left[(z - i)^2 \frac{z^2}{(z - i)^2(z + i)^2(z^2 + 2z + 2)} \right] \right) = \frac{-12 + 9i}{100}$$

y para

$$z = i - 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow i-1} (z - i + 1) \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2(z - i - 1)(z + i - 1)} = \frac{3 - 4i}{25}$$

Finalmente, podemos evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} = 2i\pi \sum_{j=1}^2 \text{Res } f(z)_{z=z_0j} = 2\pi i \left(\frac{-12 + 9i}{100} + \frac{3 - 4i}{25} \right) = \frac{7\pi}{50}$$

Ejercicios Evaluar las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2}; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$$

2.7.4. Integrales de funciones racionales de $\cos \theta$ y $\sen \theta$

Ahora mostraremos la estrategia para integrales de funciones racionales de funciones trigonométricas, $\mathcal{G}(\cos \theta, \sen \theta)$. La idea es transformar estas integrales en otras de funciones de variable compleja a través de los cambios de variables que conectan las funciones trigonométricas y los números complejos. Esto es transformar integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{G}(\cos \theta, \sen \theta) \rightarrow \oint_C \frac{dz}{zi} f(z)$$

mediante cambios de variables estándares

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{zi}; \quad \cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad \text{y} \quad \sen \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (2.41)$$

Ejemplo En las tablas de integrales encontrábamos⁹ que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sen \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{con } |a| > |b|$$

veamos como se llega a ese resultado.

Haciendo $z = re^{i\theta}$ y asumiendo las consecuencias, tal y como se presenta en (2.41) arriba, tendremos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sen \theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{zi}}{a + \frac{b}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)} = \oint_C \frac{2dz}{bz^2 + 2aiz - b} \quad \text{con } C \text{ una circunferencia } |z| = 1$$

los polos de

$$f(z) = \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} \Rightarrow z_{\pm 0} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$$

son los valores de z que anulan el denominador de $f(z)$. Seguidamente verificamos la ubicación de los polos simples y comprobamos que como $|a| > |b|$ entonces

$$|z_{+0}| = \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| < 1 \quad \text{y} \quad |z_{-0}| = \left| \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i \right| > 1$$

y por lo tanto, sólo el primero de los polos está encerrado por el circuito C con $|z| = 1$ tal y como muestra en el cuadrante *III* de la figura 2.10.

Una vez más calculamos el residuo para z_{+0} a partir de (2.37). Entonces tendremos que

$$\text{Res } f(z)|_{z=z_{+0}} = \lim_{z \rightarrow z_{+0}} (z - z_{+0}) \frac{2}{bz^2 + 2aiz - b} = \lim_{z \rightarrow z_{+0}} \frac{2}{2bz + 2ai} = \frac{1}{bz_{+0} + ai} \equiv \frac{-i}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

finalmente

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sen \theta} = \oint_C \frac{2dz}{bz^2 + 2aiz - b} = 2i\pi \text{Res } f(z)|_{z=z_{+0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Ejercicios Compruebe las siguientes evaluaciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sen \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \quad \text{con } a^2 > b^2 + c^2; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta \, d\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}.$$

⁹Encontrábamos porque hoy en día estas integrales las calculamos con manipuladores simbólicos del tipo **Maple**, **Reduce**, **Mathematica** o **Mupad**

2.8. Integrales de Fourier

Otro grupo de integrales que pueden ser evaluadas mediante el Teorema de Residuos son las integrales de Fourier. Integrales que involucran funciones racionales, $f(x)$, que satisfacen las condiciones expuestas anteriormente y funciones senos y cosenos. Integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \operatorname{sen} mx \end{Bmatrix} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{imx} \rightarrow \oint_C dz f(z) e^{imz} = 2i\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Res} |f(z)e^{imz}|_{z=z_0j} \quad (2.42)$$

Con $m > 0$ y los polos correspondientes a los residuos que se muestran en el lado derecho, están ubicados en el semiplano complejo con $y > 0$. Es claro que el circuito seleccionado es Γ que muestra el cuadrante II de la figura 2.10.

Equivalentemente, igualando partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cos mx &= -2\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Im} \operatorname{Res} |f(z)e^{imz}|_{z=z_0j} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \operatorname{sen} mx &= 2\pi \sum_{j=1}^m \operatorname{Re} \operatorname{Res} |f(z)e^{imz}|_{z=z_0j}. \end{aligned}$$

Otra vez, el circuito C se separa en una semicircunferencia Γ y el eje real.

Para demostrar que para evaluar las integrales de Fourier (2.42) se requiere la suma de los residuos nos convencemos que la integral a lo largo de la semicircunferencia se anula. Esto es fácil si comprobamos que $y > 0$ y $m > 0$, entonces si $z = x + iy$ tendremos que

$$|e^{imz}| = |e^{imx}| |e^{-my}| = e^{-my} < 1 \Rightarrow |f(z)e^{imz}| = |f(z)| \leq |f(z)| |e^{imz}|$$

con lo cual redujimos al de una función racional.

Ejemplo: Comprobemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \cos mx}{x^2 + k^2} = \frac{\pi}{k} e^{-km} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \operatorname{sen} mx}{x^2 + k^2} = 0$$

es fácil ver que el polo simple de la continuación analítica de $f(x)$ es $z_0 = ik$ y su residuo será

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \Rightarrow z_0 = ik \Rightarrow \operatorname{Res} \frac{e^{imz}}{z^2 + k^2} \Big|_{z=ik} = \frac{e^{imz}}{2z} \Big|_{z=ik} = \frac{e^{-mk}}{2ik}$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{imx}}{x^2 + k^2} = 2i\pi \frac{e^{-mk}}{2ik} = \frac{\pi}{k} e^{-mk}$$

Ejemplo: Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2 + 2x + 5}$$

Partimos de la continuación analítica de

$$f(x) \rightarrow f(z) = \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \Rightarrow z_{\pm 0} = -1 \pm 2i \Rightarrow \oint_C dz \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} = \operatorname{Res} \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \Big|_{z=-1+2i}$$

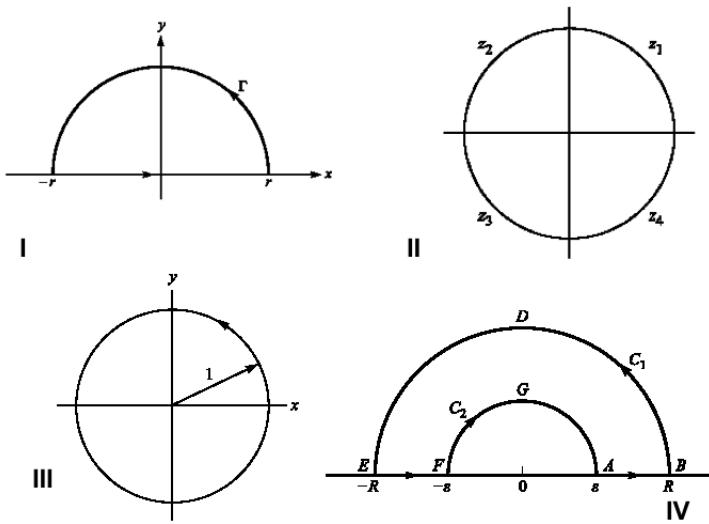


Figura 2.10: Circuitos y evaluación de integrales reales, impropias

ya que ese es el único polo encerrado por la circulación Γ . Calculando el residuo tendremos

$$\text{Res } \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \Big|_{z=-1+2i} = \lim_{z \rightarrow -1+2i} \left((z + 1 - 2i) \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} \right) = (-1 + 2i) \frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i}$$

con lo cual

$$\oint_C dz \frac{ze^{iz\pi}}{z^2 + 2z + 5} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} = 2i\pi(-1 + 2i) \frac{e^{-\pi(2+i)}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1 - 2i)e^{-2\pi}$$

Igualando parte real e imaginaria tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \cos \pi x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} = -\pi e^{-2\pi}$$

Ejercicios: Compruebe que

$$\text{Para } m > 0 \quad \int_0^{\infty} dx \frac{\cos mx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi e^{-m}(1 + m)}{4} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} dx \frac{\cos 2\pi x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

Otras Integrales Improperas

Existen integrales definidas para las cuales el integrando se hace infinito para un determinado punto en el rango de integración. Esto es, en general

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \rightarrow \infty \Rightarrow \int_a^b dx f(x) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \zeta} dx f(x) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{x_0 + \xi}^b dx f(x)$$

donde ζ y ξ tienden a cero de forma independiente, es decir, ambos límites se efectúan independientemente. Ahora bien, puede darse el caso que uno o ambos límites no existan pero si existe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{x_0+\epsilon}^b dx f(x) \right) \Leftrightarrow V.P. \int_a^b dx f(x)$$

Diremos entonces que existe el *Valor Principal de Cauchy* para esa integral. La estrategia en estos casos será diseñar un circuito tal que evite los polos de la extensión analítica de la función. Normalmente se establece este recorrido rodeando los polos con arcos de circunferencia cuyos radios luego tenderán a cero. Veamos con un ejemplo esta estrategia de circunsnavegación.

Ejemplo: Consideremos que queremos evaluar la siguiente integral

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si bien el límite está definido, cuando hacemos la extensión analítica¹⁰ $f(x) = \sin x/x \rightarrow f(z) = e^{iz}/z$ la función compleja presenta un polo simple en $z = 0$, con lo cual la integral compleja presenta un polo en la región de integración. Esto es

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \rightarrow \oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z} + \int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix}}{x} + \int_{C_1} dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$$

donde hemos construido un circuito que rodea el polo $z = 0$ (cuadrante IV de la figura 2.10.). Es claro que $\oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = 0$ porque la región no contiene ningún polo.

Ahora mostraremos que $\int_{C_1} dz \frac{e^{iz}}{z} \rightarrow 0$, cuando $R \rightarrow \infty$. Para ello, convertimos

$$z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz/z = id\theta,$$

entonces

$$\left| \int_{C_1} dz \frac{e^{iz}}{z} \right| = \left| \int_0^\pi d\theta i e^{iz} \right| \leq \int_0^\pi d\theta |e^{iz}| = \int_0^\pi d\theta \underbrace{|e^{iR \cos \theta}|}_1 |e^{-R \sin \theta}| = \int_0^\pi d\theta e^{-R \sin \theta}$$

con lo cual

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\pi d\theta |e^{iz}| = \int_0^\pi d\theta e^{-R \sin \theta} = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-R \sin \theta} = 2 \left[\int_0^\zeta d\theta \underbrace{e^{-R \sin \theta}}_{I_1} + \int_\zeta^{\pi/2} d\theta \underbrace{e^{-R \sin \theta}}_{I_2} \right]$$

para $0 \leq \zeta \leq \pi/2$.

Es claro que $e^{-R \sin \theta}$ es una función decreciente en θ y como estamos tratando de demostrar que la integral a lo largo del circuito se anula $\mathcal{I}_1 \rightarrow 0$, podremos considerar los máximos valores para I_1 y I_2 en el entorno de integración y fijarlos como constantes, al hacer esto tendremos los máximos valores que podrán tomar las integrales respectivas. Los máximos valores para I_1 y I_2 , son, 1 y $e^{-R\zeta}$.

Entonces,

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\pi d\theta |e^{iz}| \leq 2 \left[\int_0^\zeta d\theta + e^{-R \sin \zeta} \int_\zeta^{\pi/2} d\theta \right] = 2 \left[\zeta + e^{-R \sin \zeta} \left(\frac{\pi}{2} - \zeta \right) \right] < 2\zeta + \pi e^{-R \sin \zeta}$$

¹⁰Nótese que la extensión analítica ha sido $f(x) = \sin x/x \rightarrow f(z) = e^{iz}/z$ y no $f(x) = \sin x/x \rightarrow f(z) = \sin z/z$ La razón de esta selección se fundamenta en el comportamiento patológico (oscilante) de la función seno en infinito.

Al considerar que $\zeta \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ comprobamos que $\mathcal{I}_1 \rightarrow 0$.

Seguidamente nos toca demostrar que $\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} dz \frac{e^{iz}}{z} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Para este caso $z = \epsilon e^{i\theta}$ y como siempre, $dz/z = id\theta$, entonces la integral

$$\mathcal{I}_2 = \int_{C_2} dz \frac{e^{iz}}{z} = \int_0^\pi d\theta i e^{i\epsilon \exp(i\theta)} \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta i e^{i\epsilon \exp(i\theta)} = i\pi$$

Esto implica que

$$\oint_C dz \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\epsilon} dx \frac{e^{ix}}{x} + i\pi + \int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix}}{x} = 0 \quad \underset{x \rightarrow -x}{\Rightarrow} \quad \int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} + i\pi = 0$$

con lo cual es claro que

$$\int_\epsilon^R dx \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} = -i\pi \Rightarrow 2i \int_\epsilon^R dx \frac{\sin x}{x} = -i\pi \Rightarrow \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donde hemos hecho los límites $R \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$.

Ejercicios: Comprobar las evaluaciones para las siguientes integrales

1.

$$\int_0^\infty dx \sin x^2 = \int_0^\infty dx \cos x^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

2.

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{x^4 + 1} = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}; \quad \int_0^\infty dx \frac{(\ln x)^2}{x^4 + 1} = \frac{3\pi^3 \sqrt{2}}{16}$$

3.

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{-p}}{x^2 + 2x \cos \alpha + 1} = \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) \left(\frac{\sin p\alpha}{\sin \alpha} \right)$$

2.9. Series de Polinomios Ortogonales

Enunciaremos un teorema debido a Weierstrass el cual garantiza que una función continua en un intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada uniformemente por una serie de polinomios. Por lo tanto, cualquier función continua podrá ser aproximada por combinaciones lineales de potencias.

El Teorema de aproximación polinómica de Weierstrass queda enunciado como sigue. Cualquier función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $x \in [a, b]$ podrá ser aproximada uniformemente por polinomios en ese mismo intervalo si, para un n suficientemente grande y un ϵ suficientemente pequeño siempre se tiene que

$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Aceptaremos este teorema sin demostración¹¹, sin embargo este teorema nos permitirá desarrollar las secciones siguientes.

¹¹Consultar: Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) *Mathematics of Classical and Quantum Physics* y Cushing, J. (1975) *Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences*.

2.10. Polinomios de Legendre

El primero de los ejemplos de una base ortonormal de polinomios en la cual podremos expresar cualquier función continua en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$ serán los *Polinomios de Legendre*. Estos vienen construidos a partir de la Fórmula de Rodríguez

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con $P_0(x) = 1$.

Es decir

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

2.10.1. Generalidades de los Polinomios de Legendre

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre son mutuamente ortogonales para un producto interno definido de la siguiente manera

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. La norma es definida por

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

notese que los polinomios de Legendre, calculados a partir de la Fórmula de Rodrigues no están normalizados.

Ejemplos:

1.

$$\int_{-1}^1 P_1(x) P_2(x) dx = \int_{-1}^1 [x] \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \right) dx = 0.$$

2.

$$\int_{-1}^1 P_2(x) P_2(x) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right] dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{9}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{2}{5}.$$

Al ser los Polinomios de Legendre un conjunto completo de funciones, ellos expanden el espacio de funciones continuas en el intervalo cerrado $x \in [-1, 1]$. Por ello cualquier función en el intervalo $[-1, 1]$ puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \right]}_{a_k} P_k(x),$$

los primeros términos son:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt + \frac{3}{2} \left[\int_{-1}^1 t f(t) dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[\int_{-1}^1 (3t^2 - 1) f(t) dt \right] P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4} \left[\int_{-1}^1 (5t^3 - 3t) f(t) dt \right] P_3(x) + \frac{9}{16} \left[\int_{-1}^1 (35t^4 - 30t^2 + 3) f(t) dt \right] P_4(x) + \dots \end{aligned}$$

Ejemplos

- Si $f(x)$ es un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

entonces, no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes a_n se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de $f(x) = x^2$ tendremos

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) \\ &= a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 (3x^2 - 1) \\ &= \left(a_0 - \frac{1}{2} a_2 \right) + a_1 x + \frac{3}{2} a_2 x^2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}, a_1 = 0, a_2 = \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x). \end{aligned}$$

- En el caso de una función mas complicada

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

por un lado

$$\int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x) dx$$

la expansión en series de Legendre quedaría como

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1-x}{2}} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt + \frac{3}{2} \left[\int_{-1}^1 t \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[\int_{-1}^1 (3t^2 - 1) \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_2(x) \\ &+ \frac{7}{4} \left[\int_{-1}^1 (5t^3 - 3t) \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_3(x) + \frac{9}{16} \left[\int_{-1}^1 (35t^4 - 30t^2 + 3) \sqrt{\frac{1-t}{2}} dt \right] P_4(x) + \dots \\ &= \frac{2}{3} P_0(x) - \frac{2}{5} P_1(x) - \frac{2}{21} P_2(x) - \frac{2}{45} P_3(x) - \frac{2}{77} P_4(x) - \frac{2}{117} P_5(x) - \dots \\ &= \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}. \end{aligned}$$

Antes de entrar en el detalle de las propiedades de estos polinomios, hay que enfatizar que los Polinomios de Legendre constituyen la única base ortogonal para un espacio de Hilbert con un producto interno definido como el producto simple de funciones en el intervalo cerrado. Al ortonormalizar mediante Gram Schmidt

la base $\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\}$ del espacio de polinomios, \mathcal{P}^n , de grado n en el intervalo $[-1, 1]$, con el producto interno definido por $\int_{-1}^1 dx f(x) g(x)$ se obtienen los polinomios de Legendre.

Los polinomios de Legendre surgen, originalmente, como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

o de manera equivalente a ecuaciones como

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n+1) P_n(x) = 0,$$

donde $y = P_n(x)$ y $\lambda = n(n+1)$.

La siguiente tabla muestra algunas ecuaciones diferenciales con sus respectivas soluciones

n	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_0(x)}{dx} = 0$	$P_0(x) = 1$
1	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_1(x)}{dx} + 2 P_1(x) = 0$	$P_1(x) = x$
2	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_2(x)}{dx} + 6 P_2(x) = 0$	$P_2(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_3(x)}{dx} + 12 P_3(x) = 0$	$P_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1 - x^2) \frac{d^2 P_4(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_4(x)}{dx} + 20 P_4(x) = 0$	$P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

2.10.2. Relación de Recurrencia

Supongamos que conocemos todos los polinomios de Legendre hasta $P_n(x)$ y queremos generar el próximo. Obviamente ese polinomio será de grado $n+1$. Nos plantemos generararlo a partir de $xP_n(x)$. Como estos polinomios son base del espacio de funciones, entonces

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} \left[\int_{-1}^1 P_k(t)tP_n(t) dt \right] P_k(x),$$

Observando con algo más de detalle

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 tP_n(t) dt + \frac{3}{2} \left[\int_{-1}^1 t^2 P_n(t) dt \right] P_1(x) + \frac{5}{4} \left[\int_{-1}^1 (3t^3 - t) P_n(t) dt \right] P_2(x) \\ &\quad + \frac{7}{4} \left[\int_{-1}^1 (5t^4 - 3t^2) P_n(t) dt \right] P_3(x) + \frac{9}{16} \left[\int_{-1}^1 (35t^5 - 30t^3 + 3t) P_n(t) dt \right] P_4(x) + \dots \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^1 P_n(t)tP_n(t) dt = \int_{-1}^1 tP_n^2(t) dt,$$

por lo tanto, el integrando es una función impar. Consideraremos algunos casos:

Para $n = 0$

$$xP_0(x) = \frac{3}{2} \left[\int_{-1}^1 t^2 dt \right] P_1(x) = P_1(x)$$

Para $n = 1$

$$xP_1(x) = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^1 t^2 dt \right] + \frac{5}{4} \left[\int_{-1}^1 (3t^4 - t^2) dt \right] P_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2(x)$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} xP_2(x) &= \frac{3}{4} \left[\int_{-1}^1 (3t^4 - t^2) dt \right] P_1(x) + \frac{7}{16} \left[\int_{-1}^1 (5t^3 - 3t)(3t^3 - t) dt \right] P_3(x) \\ &= \frac{2}{5} P_1(x) + \frac{3}{5} P_3(x). \end{aligned}$$

Para $n = 3$

$$xP_3(x) = \frac{3}{7} P_2(x) + \frac{4}{7} P_4(x).$$

Se puede apreciar que

$$\int_{-1}^1 P_n(x) x P_k(x) dx = 0, \text{ para } k < n - 1.$$

Esto implica que sobreviven únicamente tres términos

$$xP_n(x) = AP_{n+1}(x) + BP_{n-1}(x).$$

Desarrollando con la fórmula de Rodríguez

$$\begin{aligned} \frac{x}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{A}{(n+1)!2^{n+1}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} + \frac{B}{(n-1)!2^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^{n-1}, \\ x \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n &= \frac{A}{2(n+1)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^{n+1} + 2nB \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes resulta

$$A = \frac{n+1}{2n+1}, \quad B = \frac{n}{2n+1}$$

La relación de recurrencia se puede obtener entonces de:

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

2.10.3. Norma de los Polinomios de Legendre

Conociendo que la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y la relación de recurrencia, procedemos encontrar el valor de su norma

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

De la relación de recurrencia cambiando $n \rightarrow n - 1$ se tiene

$$\begin{aligned} nP_n(x) &= (2n-1) xP_{n-1}(x) - (n-1) P_{n-2}(x), \\ (2n+1) P_n(x) nP_n(x) &= (2n+1) P_n(x) [(2n-1) xP_{n-1}(x) - (n-1) P_{n-2}(x)], \end{aligned} \tag{2.43}$$

ahora multiplicamos la relación de recurrencia por $(2n - 1) P_{n-1}(x)$ para obtener

$$(2n - 1) P_{n-1}(x) (n + 1) P_{n+1}(x) = (2n - 1) P_{n-1}(x) [(2n + 1) xP_n(x) - nP_{n-1}(x)] , \quad (2.44)$$

restando miembro a miembro (6.13) - (6.14) obtenemos :

$$(2n + 1) [nP_n^2(x) + (n - 1) P_n(x)P_{n-2}(x)] - (2n - 1) [(n + 1) P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)] = 0 ,$$

lo que es igual a:

$$\begin{aligned} (2n + 1) [nP_n^2(x) + (n - 1) P_n(x)P_{n-2}(x)] &= (2n - 1) [(n + 1) P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}^2(x)] , \\ P_n^2(x) + \frac{(n - 1)}{n} P_n(x)P_{n-2}(x) &= \frac{2n - 1}{2n + 1} \left[\frac{(n + 1)}{n} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + P_{n-1}^2(x) \right] , \end{aligned}$$

integrando y considerando la ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{2n - 1}{2n + 1} \left[\int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx \right] \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right) \left[\left(\frac{2n - 3}{2n - 1} \right) \int_{-1}^1 P_{n-2}^2(x) dx \right] \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \left(\frac{2n - 1}{2n + 1} \right) \left[\left(\frac{2n - 3}{2n - 1} \right) \left(\frac{2n - 5}{2n - 3} \right) \int_{-1}^1 P_{n-3}^2(x) dx \right] \end{aligned}$$

continuando con este proceso

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{3}{2n + 1} \left[\int_{-1}^1 P_1^2(x) dx \right] = \frac{3}{2n + 1} \left[\frac{2}{3} \right] \\ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{2}{2n + 1} . \end{aligned}$$

2.10.4. Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{P}(t, x)$ de los polinomios de Legendre, es decir una función que tenga la forma:

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = P_0(x) + P_1(x) t + P_2(x) t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n , \quad |t| < 1 , |x| \leq 1 ,$$

para la cual los $P_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Esta serie converge para $|2xt + t^2| < 1$. Para demostrar que el desarrollo en serie de la función $\mathcal{G}(t, x)$ tiene como coeficientes a los $P_n(x)$ partimos de que:

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{P}(t, x)}{\partial t} = \frac{t - x}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}}$$

combinando estas dos expresiones, resulta

$$(t - x) \mathcal{P}(t, x) + (1 - 2xt + t^2) \frac{\partial \mathcal{P}(t, x)}{\partial t} = 0$$

y, consecuentemente

$$(t-x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n + (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x) t^{n-1} = 0.$$

Multiplicando y acomodando queda

$$(t-x) P_0(x) + (t-x) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x) t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x) t^{n+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} (t-x) P_0(x) &+ \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x) t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x) t^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x) t^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t-x) P_0(x) &+ \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xP_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xnP_n(x) t^n \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x) t^n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t-x) P_0(x) &+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)xP_n(x) t^n + \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x) t^n = 0, \\ tP_0(x) &- xP_0(x) + P_1(x) + 2P_2(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x) t^n - 3xP_1(x)t - \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1)xP_n(x) t^n \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} nP_{n-1}(x) t^n = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \underbrace{[P_1(x) - xP_0(x)]}_{=0} &+ \underbrace{[2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x)]}_{} t \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{[(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)]}_{=0} t^n = 0 \end{aligned}$$

El primero de los términos se cumple siempre por cuanto $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$. El tercer término conforma la relación de recurrencia para los polinomios de Legendre. Con esto queda demostrado que el desarrollo en series de potencias de la función generatriz, tiene como coeficientes a los polinomios de Legendre.

La función generatriz muestra su utilidad en la expansión de

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}},$$

recordemos que por la definición del producto interno se tiene

$$\int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_k(x)dx.$$

Al formar el producto

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x),$$

e integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right] dx &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx \\ \frac{1}{2t} \left[1 + t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right) \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx. \end{aligned}$$

Expandiendo el lado izquierdo en series de potencias de t

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

lo cual nos conduce, al igualar coeficientes a

$$\frac{4}{3} = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) dx \quad y \quad \frac{-4}{(4n^2-1)(2n+3)} = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx$$

y finalmente a la forma de la expansión en series

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

2.10.5. Otras propiedades de los polinomios de Legendre

- $P_n(1) = 1$ y $P_n(-1) = (-1)^n$. Entonces se tiene lo que se conoce como la relación de paridad: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ para todo n .
- $P_n(x)$ tiene n raíces en el intervalo $(-1, 1)$. Esta propiedad puede apreciarse para los primeros 5 polinomios en la figura 2.11.

- Tienen una representación integral de la forma

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right]^n d\varphi$$

- Cambios de variables inmediatos conllevan a ecuaciones diferenciales equivalentes

- Forma autoadjunta

$$[(1-x^2) y']' + \lambda(\lambda+1) y = 0$$

- En coordenadas esféricas con $u = P_n(\cos(\theta))$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{du}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda+1) u = 0$$

- En coordenadas esféricas con $u = \sqrt{\sin \theta} P_n(\cos \theta)$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2(\theta)} \right] u = 0$$

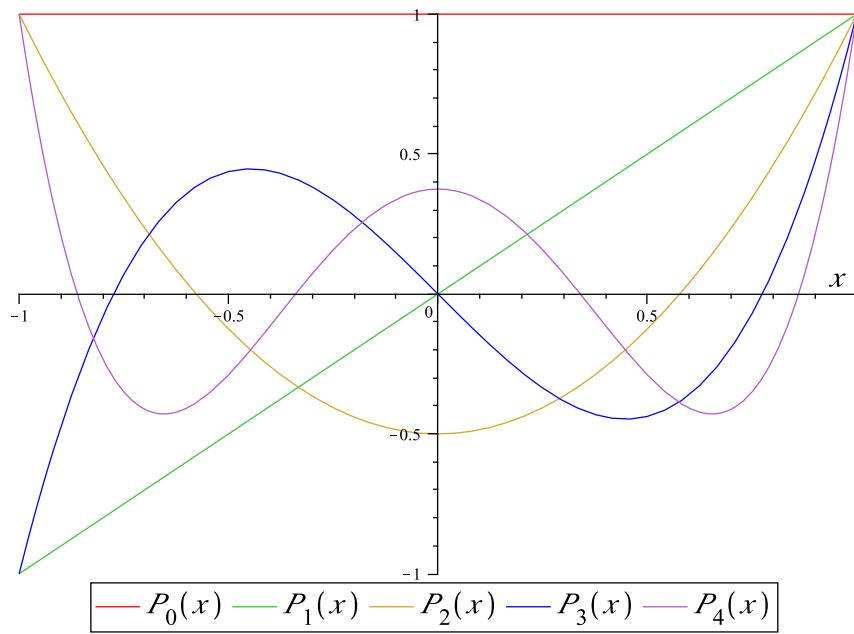


Figura 2.11: Polinomios de Legendre

2.10.6. Potencial Electrostático de un Dipolo Eléctrico

En Física el ejemplo claro es el cálculo del potencial electrostático producido por dos cargas $q_1 = +q$ y $q_2 = -q$ separadas por una distancia $2d$ en un punto P cualquiera de un plano (x, y) . El potencial en ese punto genérico viene dado por

$$V = q \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$$

Tal y como puede apreciarse de la figura 2.12

$$(R')^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos(\theta) \quad \text{y} \quad R^2 = r^2 + d^2 - 2r d \cos(\pi - \theta) ,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \frac{1}{r} \left[1 - 2 \cos(\theta) \left(\frac{d}{r} \right) + \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \left[1 - 2 \cos(\pi - \theta) \left(\frac{d}{r} \right) + \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} \frac{1}{R'} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\theta)) \left(\frac{d}{r} \right)^n \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n [\cos(\pi - \theta)] \left(\frac{d}{r} \right)^n = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-\cos(\theta)) \left(\frac{d}{r} \right)^n \end{aligned}$$

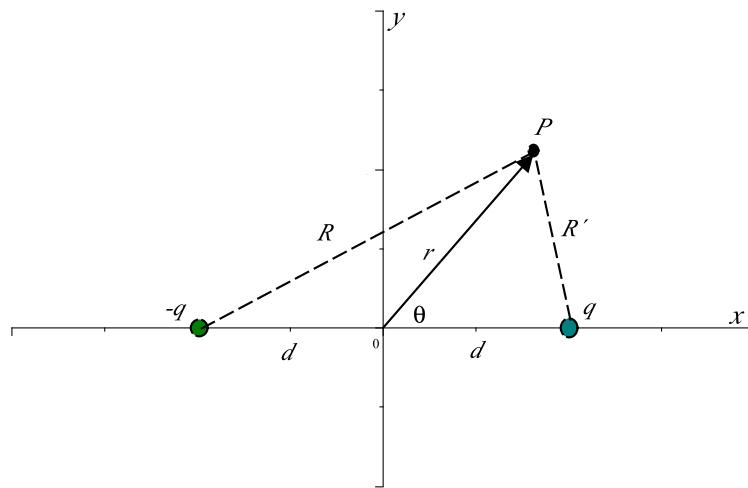


Figura 2.12: Potencial electrostático de un dipolo eléctrico

El potencial será

$$V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(\cos(\theta)) - P_n(-\cos(\theta))] \left(\frac{d}{r}\right)^n$$

donde todos los términos pares de $P_n(\cos(\theta))$ se anulan y finalmente tendremos la expresión del potencial para cualquier punto del plano

$$V = \frac{2q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos(\theta)) \left(\frac{d}{r}\right)^{2n+1}$$

Nos quedamos con el primer término de la serie, si

$$\frac{d}{r} \ll 1 \Rightarrow V \approx \frac{q}{r^2} 2d \cos(\theta).$$

2.10.7. Resumen de Propiedades Polinomios Legendre

Definición: $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Ejemplos: $P_0 \equiv 1; \quad P_1 = x; \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

Relación de Recurrencia: $(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

Ecuaciones Diferenciales: $(1 - x^2)y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1)y = 0$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{du}{d\theta} \right) + n(n + 1)u = 0; \quad u = P_n(\cos(\theta))$$

Función Generatriz: $\mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$

Representación Integral: $P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi]^n d\varphi$

Ortogonalidad: $\int_{-1}^1 P_\alpha(x) P_\beta(x) dx = \delta_{\alpha\beta} \frac{2}{2\alpha + 1}$

Practicando con Maple:

```
> restart;
> plot([LegendreP(0,x),LegendreP(1,x),LegendreP(2,x),LegendreP(3,x),
LegendreP(4,x)],x=-1..1);
```

2.11. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite a diferencia de los de Legendre (y Tchevychev), vienen definidos en toda la recta real, vale decir, $x \in (-\infty, \infty)$, por lo cual la función peso $w(x)$ en el producto interno deberá decrecer más rápido que $|x|^n$, para garantizar que la norma de los vectores en este espacio vectorial sea finita. La función más simple que cumple estos requisitos es $w(x) = e^{-x^2}$ (también algunos autores utilizan $w(x) = e^{-x^2/2}$) Esto es, el producto interno entre los polinomios de Hermite vendrá definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) f(x) g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} f(x) g(x).$$

Otra vez, para este producto interno, si ortogonalizamos con Gram-Schmidt se obtienen los polinomios de Hermite. Al igual que el resto de los polinomios ortogonales, existe una fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

los cinco primeros polinomios de Hermite son los siguientes:

$H_0(x) = 1,$	$H_1(x) = 2x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2,$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

2.11.1. Generalidades de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite serán ortogonales, pero no normales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\beta}(x) H_{\alpha}(x) dx = 2^{\alpha} \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta},$$

por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha}^2(x) dx = 2^{\alpha} \alpha! \sqrt{\pi}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$.

Antes de desarrollar funciones en términos de los polinomios de Hermite, expondremos un par de teoremas sin demostración.

Teorema 1: Sean f y g dos funciones arbitrarias, cuando menos continuas a trozos en $(-\infty, \infty)$ y que cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx \quad \exists \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g^2(x) dx \quad \exists$$

Entonces el conjunto de estas funciones forman un espacio vectorial euclídeo \mathcal{I}_2^w con un producto interno definido por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) dx$$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se denominan cuadrado-integrables respecto al peso w . Es por ello que denotamos el espacio de funciones como \mathcal{I}_2^w .

Teorema 2: Si $f(x)$ es una función continua arbitraria en \mathcal{I}_2^w entonces puede ser aproximada por un polinomio en ese mismo espacio. Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [f(x) - p_n(x)]^2 dx \right)^{1/2} = 0$$

Así, la expresión de una función arbitraria en la base de los polinomio de Hermite se reduce a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t) dx \right] H_k(x),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_k(t) dx.$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$

$$f(x) = x^2 = \sum_{k=0}^2 b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k H_k(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &= a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) \\ &= a_0 + a_1(2x) + a_2(4x^2 - 1) \\ &= (a_0 - a_2) + 2a_1 x + 4a_2 x^2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4}. \\ &= \frac{1}{4} H_0(x) + \frac{1}{4} H_2(x) \end{aligned}$$

Si generalizamos para funciones del tipo $f(x) = x^{2p}$ con $p = 1, 2, 3, \dots$, entonces

$$f(x) = x^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} H_{2k}(x),$$

por lo tanto

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2p} H_{2k}(x) dx = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} e^{-x^2} dx.$$

Una integración por partes estratégica muestra que:

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \left\{ x^{2p} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 2px^{2p-1} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} dx \right\}.$$

El primer término de la resta se anula debido a la definición de los polinomios de Hermite

$$x^{2p} \frac{d^{2k-1}}{dx^{2k-1}} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = x^{2p} (-1)^{2k-1} e^{-x^2} H_{2k-1}(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Repetiendo el proceso $2k$ veces, tendremos

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p-2k} e^{-x^2} dx$$

si en la integral hacemos $x = \sqrt{t}$ obtenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p-k-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \end{aligned}$$

y utilizando la definición $\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \equiv (z-1)!$, queda como

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+1}(2k)!\sqrt{\pi}} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right).$$

Ahora, recurrimos a la propiedad de “duplicación” de la Función Gamma, i.e.

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$$

tenemos que

$$2^{2p-2k} \Gamma\left(p-k+\frac{1}{2}\right) (p-k)! = \sqrt{\pi} (2p-2k)!$$

quedan entonces los coeficientes determinados como

$$a_{2k} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(2k)!(p-k)!}$$

y, por lo tanto el desarrollo en la base de los polinomios de Hermite

$$f(x) = x^{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^p \frac{H_{2k}(x)}{(2k)!(p-k)!} \quad -\infty < x < \infty.$$

Muestre que del mismo modo se puede encontrar

$$f(x) = x^{2p+1} = \frac{(2p-1)!}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^p \frac{H_{2k+1}(x)}{(2k+1)!(p-k)!} \quad -\infty < x < \infty.$$

Si $f(x) = e^{-a^2 x^2}$ con $\operatorname{Re} a^2 > -1$. Otra vez

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} H_{2k}(x)$$

entonces

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2k}(x) dx$$

Sustituyendo $H_{2k}(x)$ por su expresión integral tendremos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+1)x^2} \left[\frac{2^{2k+1}(-1)^k e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt dt \right] dx \\ &= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \cos 2xt dt \right] dx \\ &\equiv \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2xt dx \right] dt \\ &= \frac{2(-1)^k}{\pi(2k)!} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2k} \left[\sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-t^2/a^2} \right] dt = \\ &= \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!a} \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+a^{-2})} t^{2k} dt \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{k-\frac{1}{2}} ds \quad \leftarrow t^2(1+a^{-2}) = s \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\pi}(2k)!} \frac{a^{2k}}{(1+a^2)^{k+1/2}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

y ahora usando, otra vez la propiedad de “duplicación” de la función gamma,

$$2^{2k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) k! = \sqrt{\pi} (2k)!$$

obtenemos

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} k! (1+a^2)^{k+1/2}}$$

por lo tanto

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{2k}}{2^{2k} k! (1+a^2)^{k+1/2}} H_{2k}(x)$$

Al igual que los polinomios de Legendre, los de Hermite, surgen también en sus orígenes como soluciones a la ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + nH_n(x) = 0$$

Vale decir:

n	Ecuación de Hermite	Solución
0	$\frac{d^2H_0(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_0(x)}{dx} = 0$	$H_0(x) = 1$
1	$\frac{d^2H_1(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_1(x)}{dx} + 2H_1(x) = 0$	$H_1(x) = 2x$
2	$\frac{d^2H_2(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_2(x)}{dx} + 4H_2(x) = 0$	$H_2(x) = 4x^2 - 2$
3	$\frac{d^2H_3(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_3(x)}{dx} + 6H_3(x) = 0$	$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
4	$\frac{d^2H_4(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_4(x)}{dx} + 8H_4(x) = 0$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

2.11.2. Función Generatriz de los Polinomios de Hermite

Se puede encontrar una función generatriz $\mathcal{H}(t, x)$ de los polinomios de Hermite:

$$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt - t^2} = H_0(x) + H_1(x)t + \frac{H_2(x)}{2}t^2 + \frac{H_3(x)}{3!}t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

para la cual los $H_n(x)$ son los coeficientes de su desarrollo en series de potencias. Es fácil darse cuenta que esta expresión proviene del desarrollo en Serie de Taylor

$$\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0} t^n \quad \|t\| < \infty$$

para lo cual

$$\left[\frac{\partial^n \mathcal{H}(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0} = e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \left[\frac{d^n}{du^n} e^{-(u)^2} \right]_{u=x} = H_n(x)$$

2.11.3. Relación de Recurrencia

A partir de la función generatriz se puede construir la siguiente identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x)}{\partial t} = (2x - 2t) \mathcal{H}$$

y utilizando el desarrollo en series de potencias en t tendremos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} nt^{n-1} &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} nt^{n-1} &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1)t^n &- 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n = 0, \\ H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1)t^n &- 2xH_0(x) - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n = 0, \\ \underbrace{H_1(x) - 2xH_0(x)}_{=0} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right] t^n = 0, \end{aligned}$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{H_{n+1}(x)}{(n+1)!} (n+1) - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right]}_{=0} t^n = 0.$$

Por lo tanto:

$$\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - 2x \frac{H_n(x)}{n!} + \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0$$

Así la relación de recurrencia será

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

De igual modo, podemos partir de otra identidad

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, x)}{\partial x} = 2t \mathcal{H} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1},$$

es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n \Rightarrow \frac{H'_n(x)}{n!} = 2 \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}$$

y encontrar una relación para generar las derivadas de los polinomios de Hermite en término de ellos mismos:

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalmente, utilizando la ecuación anterior en la relación de recurrencia y derivando esa expresión una vez más, queda como:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) &= 0 \\ H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2n H_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado que los polinomios de Hermite son una solución particular de esa ecuación diferencial.

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

Donde hemos hecho $y = H_n(x)$. Adicionalmente, podremos demostrar que $y = e^{-x^2/2} H_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial autoadjunta

$$y'' + (2n + 1 - x^2) y = 0.$$

2.11.4. Ortogonalidad y Norma de los Polinomios de Hermite

En general estos polinomios cumplen con

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\beta}(x) H_{\alpha}(x) dx = 2^{\alpha} \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta}.$$

Donde la función delta de Kronecker es $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$; y $\delta_{\beta\beta} = 1$. Para demostrar el caso $\alpha \neq \beta$ partimos de

$$\begin{aligned} u_{\beta} [u''_{\alpha} + (2\alpha + 1 - x^2) u_{\alpha}] &= 0 \\ u_{\alpha} [u''_{\beta} + (2\beta + 1 - x^2) u_{\beta}] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro e integrando se tiene que:

$$\begin{aligned} [u'_{\alpha} u_{\beta} - u'_{\beta} u_{\alpha}]' + 2(\alpha - \beta) u_{\alpha} u_{\beta} &= 0 \\ (\alpha - \beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha}(x) H_{\beta}(x) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha}(x) H_{\beta}(x) dx &= 0 \quad \alpha \neq \beta; \end{aligned}$$

ya que

$$e^{-x^2/2} \{2\alpha H_{\alpha-1}(x) H_{\beta}(x) - 2\beta H_{\beta-1}(x) H_{\alpha}(x)\} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Para encontrar el valor de la norma, procedemos a partir de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} H_n(x) [H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x)] &= 0 \\ H_{n-1}(x) [H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)] &= 0 \end{aligned}$$

restando miembro a miembro, multiplicando por e^{-x^2} e integrando entre $(-\infty, \infty)$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha-1}^2(x) dx$$

repitiendo la operación y recordando que al final queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = 2\sqrt{\pi}$$

Obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{\alpha}^2(x) dx = 2^{\alpha} \alpha! \sqrt{\pi}$$

2.11.5. Representación Integral de los Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite pueden ser representados como

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2itx} t^n dt$$

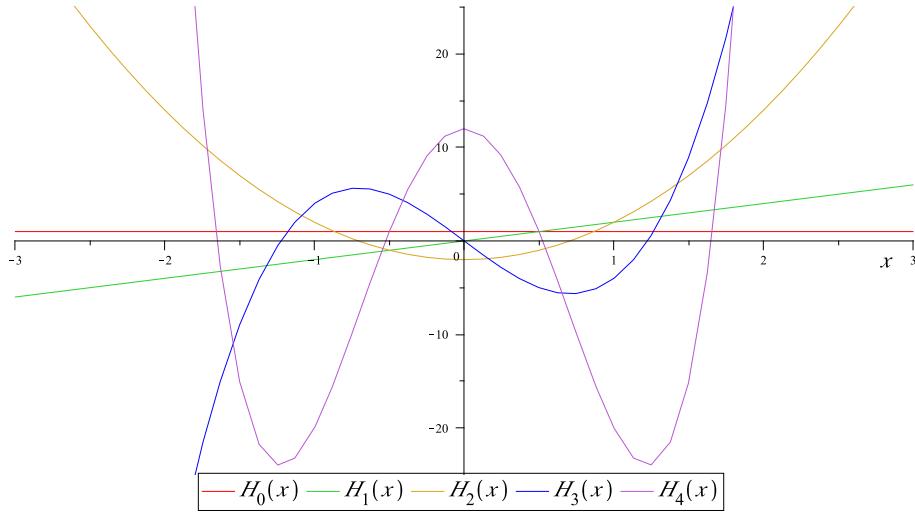


Figura 2.13: Polinomios de Hermite

que puede ser separada como

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y para los términos impares

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} \sin(2xt) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La forma de llegar a cualquiera de estas últimas fórmulas se parte de las conocidas integrales desarrolladas en el plano complejo

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \cos(2xt) dt$$

se deriva $2n$ veces a ambos miembros se utiliza la definición de los polinomios de Hermite.

2.11.6. El Oscilador armónico, independiente del tiempo, en Mecánica Cuántica.

La Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y en una dimensión es

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi(x) = 0,$$

con μ la “masa” de la partícula; E los niveles de energía y $U(x)$ el potencial al cual está sometida la partícula. En el caso que estudiemos un potencial del tipo $U(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$ en el cual la frecuencia angular del oscilador viene representada por ω . La ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 \right] \psi(x) = 0,$$

haciendo un cambio de variable $\xi = x\sqrt{\mu\omega/\hbar}$ para adimensionalizar la ecuación de Schrödinger, se obtiene

$$\psi''(\xi) + \left[\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2 \right] \psi(\xi) = 0,$$

la cual corresponde a la forma autoadjunta de la Ecuación de Hermite:

$$\psi''(\xi) + [2n + 1 - \xi^2] \psi(\xi) = 0,$$

y por lo tanto identificamos

$$\frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega,$$

con lo cual comprobamos la forma como viene cuantizada la energía en este sistema y la energía del estado fundamental. Por su parte, la función de onda se podrá expresar en la base de soluciones de esa ecuación

$$\psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi).$$

Si mantenemos la normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(\xi) d\xi = 1 \quad \text{con } c_n = \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}.$$

2.11.7. Resumen de Propiedades Polinomios Hermite

Definición: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

Ejemplos: $H_0(x) = 1; H_1(x) = 2x; H_2(x) = 4x^2 - 2; H_3(x) = 8x^3 - 12x$

Relaciones de Recurrencia: $H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ecuaciones Diferenciales: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

$$u'' + (2n + 1 - x^2) u = 0; \quad u(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

Función Generatriz: $\mathcal{H}(t, x) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$

Representación Integral: $H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos(2xt) dt$

$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin(2xt) dt$

Ortogonalidad: $2^\alpha \alpha! \sqrt{\pi} \delta_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_\beta(x) H_\alpha(x) dx$

Practicando con Maple:

```
> restart: with(orthopoly):
> plot([H(0,x), H(1,x), H(2,x), H(3,x), H(4,x)], x=-3..3, y=-25..25);
```

2.12. Planteamiento General para Polinomios Ortogonales

Hemos considerado un par de ejemplos de Polinomios Ortogonales. En ambos podemos identificar algunas características comunes. En base a estas características comunes definiremos otras familias de polinomios ortogonales.

† En el caso de los polinomios de Jacobi, la norma es

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n!\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \quad \text{con } \alpha > -1 \quad \text{y} \quad \beta > -1.$$

Nomenclatura	Nombre	a	b	$w(x)$	h_n	h_0
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	$\frac{2}{2n+1}$	
$T_n(x)$	Tchebychev 1E	-1	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$U_n(x)$	Tchebychev 2E	-1	1	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$	
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$2^n n! \sqrt{\pi}$	
$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	1	
$L_n^\alpha(x)$	Laguerre G	0	∞	$x^\alpha e^{-x}$ con $\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	
$P_n^{\alpha\beta}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	\dagger	

Cuadro 2.1: Propiedades genéricas de los Polinomios Ortogonales, N_n indica la norma del polinomio de grado n .

2.12.1. Producto interno genérico, norma y ortogonalidad

Los polinomios ortogonales se definen como un conjunto de polinomios $\{p_n(x)\}$ de orden n definidos en un determinado intervalo $a \leq x \leq b$, los cuales son ortogonales respecto a una definición de producto interno

$$\int_a^b w(x)p_m(x)p_n(x)dx = h_n \delta_{nm} \quad \text{con } w(x) > 0 \text{ una función peso en } a \leq x \leq b$$

que garantiza que la norma sea finita en ese intervalo. Dado que el Teorema de Weierstrass garantiza que el conjunto de polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ es una base completa para un espacio vectorial \mathbb{E}^∞ , se procede a ortogonalizar esa base con la definición de producto interno y el intervalo que corresponda. Para cada caso tendremos una base ortogonal de polinomios.

Polinomio	μ_n	$w(x)$	$q(x)$
P_n	$2^n n!$	1	$1-x^2$
T_n	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1-x^2$
U_n	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{\pi}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})$	$\sqrt{1-x^2}$	$1-x^2$
H_n	$(-1)^n$	e^{-x^2}	1
L_n	$n!$	e^{-x}	x
L_n^α	$n!$	$x^\alpha e^{-x}$	x

Cuadro 2.2: Funciones para determinar la Fórmula de Rodrigues generalizada

En el cuadro 2.1 resumimos las propiedades más resaltantes, com lo son: la función peso en el producto interno, el intervalo en el cual están definidas estas fuciones y su norma.

2.12.2. Fórmula de Rodrigues genelarizada

En general todos los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ vienen definidos por la fórmula de Rodrigues generalizada

$$p_n(x) = \frac{1}{w(x)\mu_n} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)q(x)^n)$$

donde $w(x)$, $q(x)$ y μ_n vienen especificados en el cuadro 2.2 para cada conjunto de polinomios ortogonales

2.12.3. Ejemplos de Polinomios Ortogonales

Utilizando la fórmula de Rodrigues generalizada, podemos construir algunos polinomios generalizados. El cuadro 2.3 muestra algunos de ejemplos de estos polinomios ortogonales

Polinomio	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
P_n	1	x	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
T_n	1	x	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
U_n	1	$2x$	$4x^2 - 1$	$8x^3 - 4x$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
H_n	1	$2x$	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
L_n	1	$1 - x$	$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	$-\frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6)$	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$

Cuadro 2.3: Ejemplos de Polinomios Ortogonales

2.12.4. Relaciones de Recurrencia

También se pueden formular, de manera genérica las relaciones de recurrencia. Obviamente, las relaciones de recurrencia también constituyen una forma alternativa de ir construyendo los polinomios ortogonales. Así, un polinomio ortogonal genérico, $p_n(x)$, cumplirá

$$p_{n+1}(x) = (a_n + xb_n)p_n(x) - c_np_{n-1}(x)$$

El cuadro 2.4 contiene las expresiones de los coeficientes para construir las relaciones de recurrencia generalizadas para cada uno de los polinomios

Polinomio	a_n	b_n	c_n
P_n	0	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
T_n	0	2	1
U_n	0	2	1
H_n	0	2	$2n$
L_n	$\frac{2n+1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
L_n^α	$\frac{2n+1+\alpha}{n+1}$	$-\frac{1}{n+1}$	$\frac{n+\alpha}{n+1}$

Cuadro 2.4: Funciones para determinar la Relación de Recurrencia Generalizada

2.12.5. Función generatriz generalizada

Para todos los polinomios ortogonales podemos definir una función generatriz $G(x, t)$, de tal manera que cada uno de los polinomios ortogonales $\{p_n(x)\}$ será proporcional al coeficiente de t^n del desarrollo en

series de Taylor, en potencias de t alrededor del punto $x = 0$. Esta función generatriz que constituye una forma alternativa de definir los polinomios ortogonales viene expresada por la serie

$$\mathcal{G}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) t^n \quad \text{con } a_n \text{ constante}$$

Las funciones generatrices no son exclusivas de los polinomios ortogonales. Como veremos más adelante, existen funciones generatrices para las funciones de Bessel.

Polinomio	C_n	$\mathcal{G}(x, t)$
P_n	1	$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$
T_n	2	$\frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} + 1$
U_n	1	$\frac{1}{1 - 2xt + t^2}$
H_n	$1/n!$	$e^{2xt - x^2}$
H_{2n}	$1^n/(2n)!$	$\cos(2xt)e^{t^2}$
H_{2n+1}	$1^n/(2n+1)!$	$\sin(2xt)e^{t^2}$
L_n	1	$\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}$
L_n^α	1	$\frac{1}{(1-t)^\alpha}e^{-\frac{xt}{1-t}}$

Cuadro 2.5: Funciones para determinar la función generatriz generalizada

2.12.6. Ecuación diferencial para los Polinomios Ortogonales

Cada uno de los polinomios ortogonales habrá de ser solución de una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$g_2(x) \frac{d^2 p_n(x)}{dx^2} + g_1(x) \frac{dp_n(x)}{dx} + \alpha_n p_n(x) = 0$$

En el cuadro 2.6 mostramos las expresiones para los coeficientes de las ecuaciones correspondientes a las ecuaciones diferenciales para las cuales cada uno de los polinomio ortogonales es solución

2.12.7. Aplicaciones para los polinomios ortogonales

Interpolación polinomial de puntos experimentales

Muchas veces nos encontramos con la situación en la cual tenemos un conjunto de n medidas o puntos experimentales $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \dots, (x_n, y_n) = f(x_n)\}$ y para modelar ese experimento quisieramos una función que ajuste estos puntos. El tener una función nos provee la gran ventaja de poder intuir o aproximar los puntos que no hemos medido. La función candidata más inmediata es un polinomio y debemos definir el grado del polinomio y la estrategia que aproxime esos puntos. Si queremos aproximar esos puntos por una recta el Método de Mínimos Cuadrados es el más utilizado.

Puede ser que el polinomio no sea lineal y sea necesarios ajustar esos puntos a un polinomio tal que éste pase por los puntos experimentales. Queda entonces por decidir la estrategia. Esto es, ajustamos la

Polinomio	$g_2(x)$	$g_1(x)$	α_n
P_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1 - x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1 - x$	n
L_n^α	x	$1 - x + \alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$

Cuadro 2.6: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales

función como “trozos” de polinomios que a su vez se ajusten a subconjuntos: $\{(x_1, y_1) = f(x_1), (x_2, y_2) = f(x_2), \dots, (x_m, y_m) = f(x_m)\}$, con $m < n$, de los puntos experimentales En este caso tendremos una función de ajuste, para cada conjunto de puntos.

También podemos ajustar la función a todo el conjunto de puntos experimentales y, en ese caso, el máximo grado del polinomio que los ajuste será $n - 1$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de Polinomios de Legendre. Esto es:

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \dots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{cases}$$

que no es otra cosa que un sistema de n ecuaciones con n incógnitas: los coeficientes $\{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ Al resolver el sistema de ecuaciones y obtener los coeficientes, podremos obtener la función polinómica que interpola esos puntos.

Una expansión equivalente se pudo haber logrado con cualquier otro conjunto de polinomios ortogonales, ya que ellos son base del espacio de funciones. Es importante hacer notar que debido a que los polinomios de Legendre están definidos en el intervalo $[-1, 1]$ los puntos experimentales deberán re-escalarse a ese intervalo para poder encontrar el polinomio de interpolación como combinación lineal de los Polinomios de Legendre. Esto se puede hacer con la ayuda del siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{(b-a)t + b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2} dt$$

Consideremos los puntos experimentales representado en la figura 2.14. Al construir el sistema de ecuaciones obtendremos: ($a = 2$ y $b = 12$)

$$(-1, 8) \Rightarrow 8 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5$$

$$\left(-\frac{3}{5}, 10\right) \Rightarrow 10 = C_0 - \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 + \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 + \frac{477}{3125} C_5$$

$$\left(-\frac{1}{5}, 11\right) \Rightarrow 11 = C_0 - \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 + \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 - \frac{961}{3125} C_5$$

$$\left(\frac{1}{5}, 18\right) \Rightarrow 18 = C_0 + \frac{1}{5} C_1 - \frac{11}{25} C_2 - \frac{7}{25} C_3 + \frac{29}{125} C_4 + \frac{961}{3125} C_5$$

$$\left(\frac{3}{5}, 20\right) \Rightarrow 20 = C_0 + \frac{3}{5} C_1 + \frac{1}{25} C_2 - \frac{9}{25} C_3 - \frac{51}{125} C_4 - \frac{477}{3125} C_5$$

$$(1, 34) \Rightarrow 34 = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$$

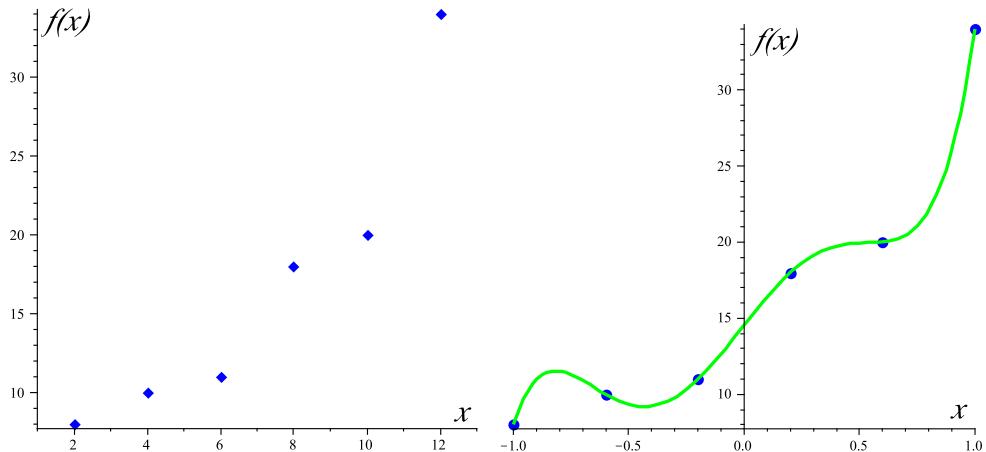


Figura 2.14: En el lado izquierdo se muestran el conjunto de puntos experimentales: $\{(2, 8), (4, 10), (6, 11), (8, 18), (10, 20), (12, 34)\}$ y a la derecha la función polinómica que los interpola.

y al resolver el sistema obtendremos que

$$C_0 = \frac{2249}{144}, \quad C_1 = \frac{3043}{336}, \quad C_2 = \frac{1775}{504}, \quad C_3 = -\frac{175}{216}, \quad C_4 = \frac{625}{336}, \quad C_5 = \frac{14375}{3024}$$

con lo cual

$$\mathcal{P}(x) = f(x) = \frac{2249}{144} + \frac{3043}{336}x + \frac{1775}{504}P(2, x) - \frac{175}{216}P(3, x) + \frac{625}{336}P(4, x) + \frac{14375}{3024}P(5, x)$$

la interpolación queda representada en la figura 2.14.

Es importante señalar que mientras más puntos experimentales se incluyan para la interpolación, el polinomio resultante será de mayor grado y, por lo tanto incluirá oscilaciones que distorsionarán una aproximación más razonable. Por ello, la estrategia de hacer la interpolación a trozos, digamos de tres puntos en tres puntos, generará un mejor ajuste, pero será una función (polinomio) continua a trozos.

Practicando con Maple:

```
> restart: with(plots):
> pointplot([2,8],[4,10],[6,11],[8,18],[10,20],[12,34]);
>
> P:=pointplot([-1,8],[-3/5,10],[-1/5,11],[1/5,18],[3/5,20],[1,34]):
> eq1:=C0-C1+C2-C3+C4-C5=8:
> eq2:=C0-3/5*C1+1/25*C2+9/25*C3-51/125*C4+477/3125*C5=10:
> eq3:=C0-1/5*C1-11/25*C2+7/25*C3+29/125*C4-961/3125*C5=11:
> eq4:=C0+1/5*C1-11/25*C2-7/25*C3+29/125*C4+961/3125*C5=18:
> eq5:=C0+3/5*C1+1/25*C2-9/25*C3-51/125*C4-477/3125*C5=20:
> eq6:=C0+C1+C2+C3+C4+C5=34:
> s:=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,[C0,C1,C2,C3,C4,C5]);assign(s);
> f:=C0 + C1*x + C2*LegendreP(2,x) + C3*LegendreP(3,x) + C4*LegendreP(4,x) +
C5*LegendreP(5,x);
> F:=plot(f,x=-1..1):
> display(F, P);
```

Cuadratura de Gauss-Legendre

Una de los usos más comunes de los polinomios ortogonales es la de aproximar funciones, en particular integrales que requieren ser resueltas numéricamente. La idea es aproximar una integral, para una función $f(x)$, definida en el intervalo $[a, b]$ y suficientemente bien comportada, por una suma finita de términos $c_k f(x_k)$ y estimar el error que cometemos en esta aproximación. Esto es:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) + E_N \quad (2.45)$$

Nótese que la intención es utilizar la función a integrar evaluada en un conjunto de puntos estratégicos para los cuales están definidos unos coeficientes, también inteligentemente seleccionados. Es decir se requieren $2N$ números (c_k y los x_k con $k = 1, 2, \dots, N$). Más aún, esas $2N$ cantidades pueden ser seleccionadas de forma tal que la aproximación es exacta $E_N = 0$ cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2N - 1$.

Supongamos, para empezar que la función $f(x)$ está definida para $x \in [-1, 1]$ ¹² y por lo tanto los polinomios ortogonales que seleccionaremos para aproximar la integral (y la función) serán los del Legendre (igual pudimos haber utilizado los polinomios de Tchebychev), con lo cual

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x),$$

donde:

$$a_k = \left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 dx f(x) P_k(x) \quad \text{y} \quad a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x).$$

Con lo cual

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k).$$

Quedan todavía por determinar los pesos c_k y los puntos x_k . Para ello procedemos de la siguiente forma. Notamos que $P_N(x)$ tiene N raíces, $x = x_j$, en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Entonces, si seleccionamos esos puntos $x = x_j$ para evaluar la función $f(x_k)$ se anulan el coeficiente para el término a_N y, además podremos encontrar los pesos c_k resolviendo el sistema de N ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^N c_j P_0(x_j) = \sum_{j=1}^N c_j = 2 \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j P_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1$$

donde los $P_k(x_j)$ son los distintos polinomios evaluados en las raíces del polinomio de grado N , i.e. $P_N(x_j) = 0$

Se puede demostrar que la solución de este sistema provee los pesos escritos de la forma

$$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2)^{(P'_N(x_j))^2}}, \quad \text{donde: } P'_N(x_j) = \frac{dP_N(x)}{dx} \Big|_{x=x_j}$$

Más aún, podemos escribir

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = 2a_0 + E_N \quad \text{con} \quad E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^N c_k P_n(x_k),$$

¹²Esta no es una limitación muy severa porque siempre podemos hacer, como ya vimos, un cambio de variable del tipo $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \left(\frac{b+a}{2}\right)$ y convertir cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ en un intervalo cerrado $[-1, 1]$.

N	$P_N(x_j) = 0$	$c_j = \frac{2}{(1 - x_j^2)(P'_N(x_j))^2}$	$2N - 1$
2	$\pm\sqrt{3}/3$	1	3
3	0 $\pm\sqrt{15}/5$	$8/9$ $5/9$	5
4	$\pm 0,3399810436$ $\pm 0,8611363116$	0,65214515 0,34785485	7
5	0 $\pm 0,5384693101$ $\pm 0,9061798459$	0,56888889 0,47862867 0,23692689	9
6	$\pm 0,2386191861$ $\pm 0,6612093865$ $\pm 0,9324695142$	0,46791393 0,36076157 0,17132449	11
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Cuadro 2.7: Puntos y pesos para una cuadratura de Gauss-Legendre

pero como

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx f(x) \Rightarrow \int_{-1}^1 dx f(x) = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) - E_N$$

Es decir, demostramos que es posible aproximar la integral del la función con un promedio pesado de la función evaluada en unos puntos estratégicos. Los puntos estratégicos son los ceros del polinomio de Legendre de grado igual al número de puntos con los cuales se quiere aproximar la función y los pesos vienen de resolver las ecuaciones para los coeficientes de la expansión. En el cuadro 2.7 se ilustran los valores de los puntos de interpolación y sus pesos correspondientes.

Es inmediato comprobar que si $f(x)$ es un polinomio de grado $\leq N - 1$ la aproximación es exacta y el error es nulo. Pero lo que realmente hace útil a este tipo de aproximaciones es que también será exacta para polinomios de grado $\leq 2N - 1$. Esto se puede ver si expresamos un polinomio de grado $2N - 1$ como la suma de dos polinomios

$$f(x) = P_N(x)Y_1(x) + Y_2(x)$$

donde Y_1 y Y_2 son polinomios de grado $N - 1$. Entonces, al integrar miembro a miembro

$$\int_{-1}^1 dx f(x) = \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_N(x)Y_1(x)}_{=0} + \int_{-1}^1 dx Y_2(x)$$

el primer término se anula por ser $P_N(x)$ ortogonal a cualquier polinomio de grado inferior, y el segundo término no es más que el caso que analizamos anteriormente de un polinomio de grado $\leq N - 1$.

Puede resultar conveniente escribir la ecuación

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right) dt$$

Entonces, para la cuadratura de Gauss-Legendre

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N c_k f\left(\frac{(b-a)t_k + b+a}{2}\right)$$

donde los t_k son las raíces de $P_N(t) = 0$.

Ejemplo Utilizar la fórmula de cuadratura de dos puntos de Gauss-Legendre para calcular

$$\int_2^4 (x^2 - 2x + 1)dx$$

Entonces, $N = 2$:

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x^2 - 2x + 1)dx &= \frac{4-2}{2} \left[c_1 f\left(\frac{(4-2)t_1 + 4+2}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{(4-2)t_2 + 4+2}{2}\right) \right] \\ &= (1)f\left(\frac{2t_1 + 6}{2}\right) + (1)f\left(\frac{2t_2 + 6}{2}\right) = f\left(\frac{2\sqrt{3}/3 + 6}{2}\right) + f\left(\frac{-2\sqrt{3}/3 + 6}{2}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{13}{3} = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

Estrategia General para cuadraturas de Gauss

Para el caso general, la aproximación de una integral

$$\int_a^b dx w(x)f(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k),$$

donde las $\{x_1, \dots, x_k, \dots, x_N\}$ son los ceros del polinomio ortogonal, de grado N , $p_N(x)$, elegido para hacer esta aproximación. Los N pesos $\{c_1, \dots, c_k, \dots, c_N\}$ surgen de resolver el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^N c_j = \frac{h_0}{p_0^2} \quad \text{con } h_0 = \int_a^b w(x)p_0^2(x)dx \quad \wedge \quad \sum_{j=1}^N c_j p_k(x_j) = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Así para aproximar integrales con funciones pesos, $w(x)$, utilizaremos cuadraturas adaptadas a los polinomios ortogonales. Esto es

$$\int_0^\infty dx e^{-x} f(x) \Rightarrow \text{Laguerre}, \quad \int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} f(x) \Rightarrow \text{Hermite}, \quad \int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \text{Tchebychev}.$$

Ejercicio Para integrales con funciones peso del tipo

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

los pesos son: $w_i = \pi/N$, resultando

$$\int_{-1}^1 dx \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k), \quad \text{con } x_k = \cos\left(\frac{k-\frac{1}{2}}{N}\right)\pi$$

Muestre que para un intervalo arbitrario $a \leq x \leq b$, esta última integral es:

$$\int_a^b dx \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \approx \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k)$$

donde:

$$x_k = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a) \cos\left(\frac{k - \frac{1}{2}}{N}\right)\pi.$$

2.13. Series y transformadas de Fourier

Otro de los casos de expansión en una base completa de funciones lo constituyen la base de Fourier. En este caso la serie de Fourier la constituyen funciones continuas, reales de variable real y definidas en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}_{[0,2\pi]}^\infty$, en término de funciones trigonométricas.

Esto es el conjunto de funciones $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle, \dots\}$ representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \quad |u_{2n}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |u_{2n-1}\rangle = \sin(nx), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Es claro que $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle, \dots\}$ es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm} |u_n\rangle|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ |u_n\rangle|^2 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \sin(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \\ \int_0^{2\pi} dx \cos^2(nx) = \pi \\ \int_0^{2\pi} dx \sin^2(nx) = \pi \end{cases}$$

Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones

$\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots\}$ de la forma

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \quad \text{y} \quad |e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

Tal y como se muestra en la figura 2.15 distintas funciones pueden ser expandidas con sumas parciales de Fourier. A diferencia de las series de potencias, que imponen que las funciones a ser expandidas deben ser continuas y continuamente diferenciables en el intervalo, la series de Fourier pueden representar funciones continuas a trozos, siempre y cuando cumplan con algunas condiciones.

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ puede expresarse en términos de esta base como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i |e_i\rangle \quad \Rightarrow c_i = \langle e_i | f \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si } i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si } i = 2n - 1 \end{cases}$$

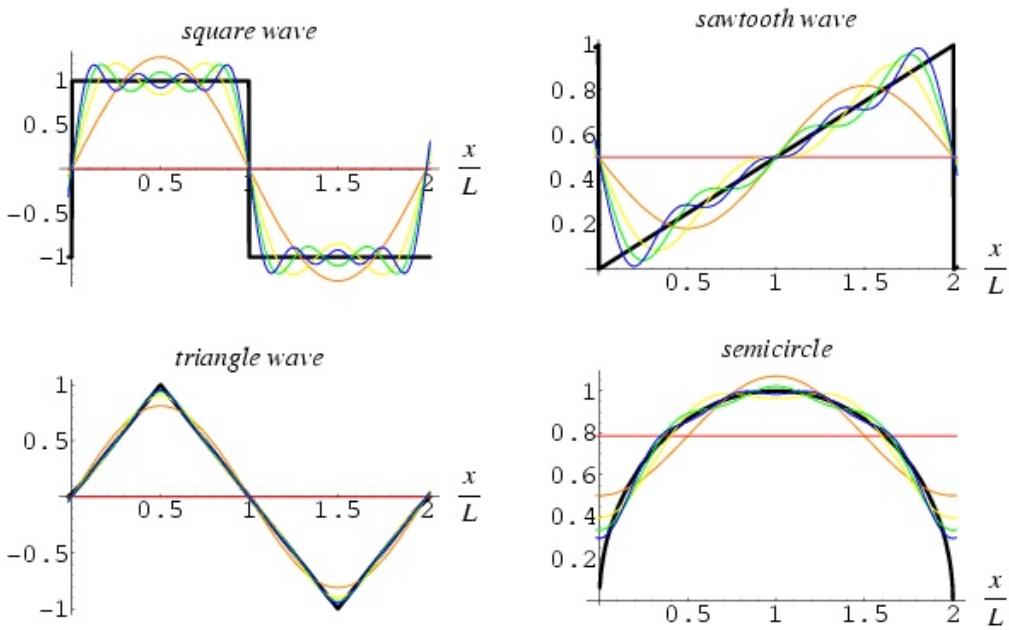


Figura 2.15: Expansiones de Varias funciones en sumas parciales de Series de Fourier. Tomado de Eric W. Weisstein. **Fourier Series.** <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

donde los c_i son los coeficientes de Fourier, con lo cual podemos escribir

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

el término a_0 es colocado fuera de la sumatoria, y multiplicado por 1/2, solo por conveniencia.

De manera equivalente, si el período es T y para un t_0 genérico

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dx f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \end{cases}$$

La figura 2.15 muestra la aproximación de las distintas sumas parciales para distintas funciones, a medida que aumentamos el número de términos la aproximación mejora.

Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta atendiendo a las expresiones anteriores. Esta expresión se conoce en algunos ámbitos como la expresión integral para la series

de Fourier

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} dt f(t) \sin(nt) \right] \sin(nx) \right\} \\ F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dt f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} dt f(t) \cos(n[t-x]). \end{aligned}$$

También es muy común expresar una serie de Fourier en término de una base compleja. Vale decir $\{\dots|\tilde{\phi}_k\rangle\dots\} \leftrightarrow \{\dots e^{-ikx}\dots\}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Con lo cual

$$|f\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k |\tilde{\phi}_k\rangle \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_k e^{-ikx} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_k = \frac{\langle \tilde{\phi}_k | f \rangle}{\langle \tilde{\phi}_k | \tilde{\phi}_k \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x).$$

Podremos reescribir (una vez más) la expresión de una suma parcial de la Serie de Fourier, dado que

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n[t-x])$$

tendremos que

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \cos(n(t-x)) \right] \\ &= \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponentiales llegamos a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \left[\frac{\sin((n + \frac{1}{2})(t-x))}{\sin(\frac{1}{2}(t-x))} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

la cual siempre es convergente y el término

$$\mathcal{K}(x, n, t) = \left[\frac{\sin((n + \frac{1}{2})(t-x))}{\sin(\frac{1}{2}(t-x))} \right]$$

se conoce como el núcleo de la transformación de F , el *Kernel* de Dirichlet.

La pregunta básica que sigue es, en todos estos casos: ¿cómo se relaciona la expansión de Fourier $|f\rangle \leftrightarrow F(x)$ con la función $f(t)$ que genera los coeficientes de la expansión? Nótese que es una forma de mirar una relación entre $F(x) \leftrightarrow f(t)$. Pasamos de $f(t)$ a $F(x)$ mediante una “transformación”

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathcal{K}(x, n, t)$$

Este tipo de relaciones se denomina transformación integral y en particular ésta es una de las expresiones de las llamadas *Transformaciones de Fourier*.

2.14. Condiciones de Dirichlet

Las condiciones que una determinada función $f(x)$ debe cumplir para poder ser representada como una serie de Fourier, se conocen con el nombre de condiciones de Dirichlet¹³ las cuales pueden ser esquematizadas en los siguientes puntos:

- la función $f(x)$ debe ser periódica
- la función $f(x)$ debe ser univaluada y continua a trozos (continua menos, en un número finito de puntos) con un número finito de máximos y mínimos
- la integral $\int_{-T/2}^{T/2} dx |f(x)|$ debe ser convergente. Donde $[-T/2, T/2]$ quiere indicar el intervalo de definición de una función con período T .

Podemos formalizar un poco más las condiciones de Dirichlet en el llamado Teorema de Fourier.

Teorema de Fourier Sea $f(x)$ una función en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ y definida para el resto de la recta real tal que cumpla con $f(x + 2\pi) = f(x)$. Es decir $f(x)$ es 2π -periódica. Supongamos además que existe la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x), \quad \text{y que } C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x) \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

y si $|f(x)|$ está acotada para un intervalo $[a, b]$ con $-\pi < a \leq x \leq b < \pi$, entonces

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-ikx} \quad \text{es convergente al valor } F(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0_-} f(x - \epsilon) \right)$$

y si $f(x)$ es continua en $x = x_0$ entonces $F(x_0) \rightarrow f(x_0)$.

En este punto se pueden puntualar varias cosas:

1. El valor $F(x) = \frac{1}{2} (\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} f(x + \epsilon) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} f(x - \epsilon))$ al cual converge la expansión de Fourier, cobra particular importancia cuando el punto $x = x_0$ es una discontinuidad. Tal y como veremos más adelante (sección 2.16.1) y expresa este teorema, las series de Fourier son particularmente apropiadas para expandir funciones discontinuas (en un número finito de puntos en el intervalo), sin embargo, por ser una base de funciones continuas no puede reproducir la discontinuidad como tal. La expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad $x \rightarrow x_{\pm 0}$ tenderá al valor $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$ donde $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$. Es decir, tenderá al valor medio de los valores de la discontinuidad por la izquierda $F(x_{-0})$ y por la derecha $F(x_{+0})$.
2. Si los coeficientes de Fourier tienen variaciones acotadas en el intervalo y $|C_k| \rightarrow 0$ con $k \rightarrow \infty$. Entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2 + b_n^2| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2$$

que no es otra cosa que la expresión de la completitud de esta base de funciones.

¹³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 1805 - 1859. Matemático Alemán con importantes contribuciones en Teorías de números Algebráica, Series y aproximaciones de funciones y ecuaciones diferenciales parciales.

2.15. Algunos ejemplos de expansiones en series de Fourier

Para ilustrar esta relación entre la función $f(x)$ y su expansión en serie de Fourier $F(x)$ analicemos algunos ejemplos típicos

2.15.1. Ondas Cuadradas

Para empezar, el caso de una función muy conocida en el ámbito de los circuitos eléctricos. Una onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{1}{2}T \leq t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T, \end{cases}$$

En este caso se puede integrar entre $[0, T/2]$ y luego multiplicar todo por 2.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}, \end{aligned}$$

Entonces solo sobreviven los b_{2n+1} ya que coeficientes pares se anulan: $b_{2n} = 0$.

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} + \dots \right)$$

donde hemos denotado $\omega = 2\pi/T$.

Al definir la función ω podemos interpretar los coeficientes de Fourier a_n, b_n como las contribuciones de cada uno de los armónicos $a_n, b_n \rightarrow \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$. A partir de estas contribuciones se construye el espectro de potencia, el cual está relacionado con la energía que aporta cada uno de estos armónicos. Por ello construimos un cantidad $E_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y graficamos E_n vs n tal y como se puede comprobar en la figura 2.16, cuadrantes IV y VII. Se encuentra que se puede asociar un espectro de potencia a cada señal y con lo cual realizar una especie de identificación.

En este punto podemos hacernos algunas preguntas:

- ¿qué hubiera pasado si en vez de considerar el intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ hubieramos considerado $(0, T)$?
- ¿tendríamos el mismo desarrollo en serie de Fourier?
- ¿el mismo espectro?

Justifique sus respuestas.

2.15.2. Variedades de dientes de sierra

Otra función muy común es la denominada dientes de sierra

$$f(t) = at \quad \text{si } 0 \leq t \leq T, \quad \text{con } a \text{ constante}$$

los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T at dt = aT, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{aT}{\pi^2 n^2} [n\pi \operatorname{sen}(2n\pi) - \operatorname{sen}^2(n\pi)] = 0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T at \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = -\frac{aT}{n\pi}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$f(t) = at = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = \frac{aT}{2} - \frac{aT}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\omega nt)}{n}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T$$

En el caso particular de hacer $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$, entonces:

$$f(t) = 3t = 3 - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n} = 3 - \frac{6\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} - \frac{2\operatorname{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} - \frac{6\operatorname{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots$$

La figura 2.16 (cuadrantes V y VI) muestra la construcción de esta función y su representación en Series de Fourier.

A partir de esta función podemos hacer unas variaciones. Por ejemplo considérese la función

$$f(t) = at \quad \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad \text{con } a \text{ constante} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at dt &= 0 \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt &= 0 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} at \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt &= -\frac{aT(-1)^n}{n\pi}. \end{cases}$$

Claramente es una función impar $f(-x) = -f(x)$ y así lo refleja su expansión en series de Fourier. Si hacemos $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$ tendremos que la expresión para de la serie es

$$f(t) = 3t = \frac{6\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi} - \frac{3\operatorname{sen}(2\pi t)}{\pi} + \frac{2\operatorname{sen}(3\pi t)}{\pi} - \frac{3\operatorname{sen}(4\pi t)}{2\pi} + \frac{6\operatorname{sen}(5\pi t)}{5\pi} + \dots \quad \text{con } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

la cual, si bien es parecida no es igual a la anterior, debido que estamos expandiendo otra función.

Otra variación posible de la función “diente de sierra” puede ser la versión completamente par del “diente”, $f(-x) = f(x)$. Esta es

$$f(t) = \begin{cases} -at & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ at & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

El cálculo de los coeficientes resulta en:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at dt = \frac{aT}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{aT}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1], \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-at) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} at \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = 0. \end{aligned}$$

En este caso son los coeficiente b_n los que se anulan. Adicionalmente, nótese que para n par, los coeficientes a_n también se anulan. Otra vez, si hacemos $a = 3$ y $T = 2 \rightarrow \omega_n = n\pi$ tendremos la serie:

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{12 \cos(\pi t)}{\pi^2} - \frac{4 \cos(3\pi t)}{3\pi^2} - \frac{12}{25} \frac{\cos(5\pi t)}{\pi^2} + \dots \quad \text{con } \frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

2.15.3. Función cuadrática

Otro caso, complementario al anterior por sus propiedades de simetría, es la expansión en series de Fourier de la función $f(x) = x^2$ para $-\pi < x < \pi$. Entonces los coeficientes se la expansión serán

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx & = \frac{2\pi^2}{3} \\ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx & = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{cases}$$

ya que los coeficientes correspondientes a los términos impares b_n se anulan. Con lo cual

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

Nótese que como un resultado particular, al evaluar en $x = \pi$, se tiene la función zeta de Riemann $\zeta(2)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pero este caso se presta también para considerar funciones no periódicas. Supongamos que queremos desarrollar la expansión de Fourier para $f(t) = t^2$ pero en este caso con $0 < t < 2$. Si este fuera el caso, empezamos por suponer que la función tienen un período, digamos $T = 4$. Esto es $-2 \leq t \leq 2$. Con lo cual

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3} \\ a_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 \cos\left(\frac{2\pi nt}{4}\right) dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 \cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right) dt = \frac{16}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi) = \frac{16}{\pi^2 n^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Con lo cual tendremos que

$$t^2 = \frac{4}{3} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \quad \text{para } 0 < t \leq 2$$

2.16. Consideraciones de Simetría en series de Fourier

Es de hacer notar que estas propiedades de simetría respecto al período de la función ($f(x) = f(-x)$ simetría y $f(x) = -f(-x)$ antisimetría) para un período $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$ pueden y deben ser explotadas para simplificar los cálculos. Esto se puede resumir en

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ b_n = 0 \end{cases} \quad \text{y alternativamente} \quad f(x) = -f(-x) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 \\ b_n \neq 0 \end{cases}$$

Pero más interesante aún es cuando estas propiedades de simetría se presentan en un cuarto del período. Vale decir, que $f(x)$ será par o impar respecto a $T/4$ i.e. $f\left(\frac{T}{4} + x\right) = \pm f\left(\frac{T}{4} - x\right) \Rightarrow f(-s) = \pm f(s)$ donde $s = \frac{T}{4} - x$. Entonces

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \sin\left(\frac{2\pi n s}{T} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Donde los límites de integración no se han visto alterados porque la función es periódica. Es inmediato comprobar que

$$\sin\left(\frac{2\pi n s}{T} + \frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi n s}{T}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n s}{T}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

es decir

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \sin\left(\frac{2\pi n s}{T}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \int_{x_0}^{x_0+T} ds f(s) \cos\left(\frac{2\pi n s}{T}\right) \right]$$

por lo que si $n = 2k \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \sin(\pi k) = 0$ y si $n = 2k - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0$. La misma consideración se puede hacer para los coeficientes a_n (queda como ejercicio para el lector) y se puede concluir que

- Si $f(x)$ par en $T/4$ entonces $a_{2n-1} = b_{2n} = 0$
- Si $f(x)$ impar en $T/4$ entonces $a_{2n} = b_{2n-1} = 0$

2.16.1. Tratamiento de discontinuidades

Tal y como hemos mencionado, a diferencia de las series de potencias, las series de Fourier manejan razonablemente bien las discontinuidades, pero por ser una base de funciones continuas, no puede reproducirlas. Tal y como comentamos en el Teorema de Fourier y muestra la figura 2.17 el valor de las sumas parciales de Fourier en un punto de discontinuidad $x = x_{\pm 0}$ será el promedio de los valores $F(x_{-0})$ (por la izquierda) y $F(x_{+0})$ (por la derecha) en la discontinuidad. Esto es la expansión de Fourier alrededor de un punto de discontinuidad $x \rightarrow x_{\pm 0}$ tenderá al valor $F(x) \rightarrow F(x_{\pm 0}) \equiv F_m$ donde $F_m = \frac{F(x_{+0}) + F(x_{-0})}{2}$.

2.17. El Fenómeno de Gibbs

También se muestra en la figura 2.17 que, tanto por la izquierda como por la derecha de la discontinuidad de la función escalón, las sumas parciales de Fourier oscilan y no convergen a los valores $x_{\pm 0}$. El comportamiento oscilante de las sumas parciales de Fourier alrededor de las discontinuidades, que no desaparecen ni en el límite se denominan *fenómeno de Gibbs* en honor a su descubridor Josiah Willard Gibbs.¹⁴

Para entender qué pasa en la discontinuidad consideremos una variación de la onda cuadrada considerada anteriormente (2.15). Entonces sus sumas parciales serán

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases} \Rightarrow F_{2n}^c(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)x)$$

¹⁴ **Josiah Willard Gibbs** 1839 - 1903. Algunos lo consideran el primer Físico Norteamericano, de hecho fue el primero en recibir un título de doctorado por una universidad norteamericana (Yale University). Hizo importantes aportes en electromagnetismo y sobre todo en termodinámica y física estadística, sentando las bases matemáticas para estas disciplinas. En matemáticas es conocido su estudio de las oscilaciones de las expansiones de las series de Fourier en los puntos de discontinuidad.

porque los coeficientes pares (a_n) se anulan. Para estudiar el fenómeno de Gibbs reescribimos la suma parcial anterior de una manera ingeniosa

$$F_{2n}^c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t ds \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t ds \left(\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^t ds \left(\frac{\sin(2ns)}{\sin(s)} \right)$$

donde, utilizando la fórmula de Moivre y convirtiendo esa serie de cosenos en una de exponentiales la cual, a su vez es una progresión geométrica (y le queda la comprobación al lector), hemos sustituido

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)s = \frac{\sin(2ns)}{\sin(s)}$$

Es inmediato convencerse que las sumas parciales $F_{2n}^c(x)$ siempre tendrán máximos y mínimos

$$\frac{dF_{2n}^c(x)}{dx} = \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} = 0 \quad \Rightarrow \text{para } x = \frac{m\pi}{2n} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots$$

Las Series de Fourier tienden a sobre-estimar el valor de los puntos de discontinuidad en $\pm 18\%$ esto es un valor de $\approx 1,1789797$. La inclusión de más términos en las sumas parciales no mejoran la situación. El fenómeno de Gibbs no se restringe a Series de Fourier sino que también se presenta en las demás series de funciones (ver detalles en la referencia: Arfken-Weber-2000).

El fenómeno de Gibbs fue observado ¡experimentalmente! por primera vez por Albert Michelson.¹⁵ Para finales de 1800 Michelson había creado un dispositivo mecánico para medir las componentes de Fourier de señales eléctricas. Al incorporarle una onda cuadrada observó que una oscilación inesperada en los puntos de discontinuidad. Creyó que esa oscilación se debía a defectos del dispositivo. Luego de probar múltiples tipos de señales periódicas y observar un comportamiento similar, decidió comentárselo a su amigo Willard Gibbs, de la Universidad Yale. Al poco tiempo Gibbs volvió con una explicación que dejó intacta la fama de Michelson como instrumentista. El fenómeno es una consecuencia de la teoría de series de Fourier y no del equipo diseñado por Michelson¹⁶.

2.17.1. Corrección al fenómeno de Gibbs: Factor σ de Lanczos

Una de las estrategias para corregir las oscilaciones del fenómeno de Gibbs se le debe a Lanczos¹⁷. Considerando el mismo caso de la función onda cuadrada, se puede intentar sustituir la función oscilante $F_n^c(x)$ por su promedio $\bar{F}_n^c(x)$ alrededor del punto x . Vale decir

$$F_{2n}^c(x) \rightarrow \bar{F}_{2n}^c(x) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds F_{2n}^c(s) = \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)s) \right]$$

¹⁵ Albert Abraham Michelson Strelno, Prusia, 1852 - Pasadena EEUU. 1931. Premio Nobel en Física (1907) uno de los físicos experimentales más habilidosos de todos los tiempos. La precisión y lo ingenioso de los instrumentos creados por él son famosos. Con importantes contribuciones en medidas de fenómenos en óptica. Una de sus contribuciones más conocidas son los experimentos para mostrar la inexistencia del Ether como medio de trasmisión para el fenómeno electromagnético. Más detalles <http://nobelprize.org/physics/laureates/1907/michelson-bio.html>

¹⁶Más detalles http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon

¹⁷Cornelius Lanczos 1893 - 1974 Hungría. Matemático húngaro con contribuciones importante en Relatividad y Física Teórica. En matemáticas es conocido inventar la transformada rápida de Fourier. Más detalles en <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lanczos.html>

desarmando tendremos que

$$\begin{aligned}\bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{n}{\pi} \int_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} ds \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)s) \right] \\ &= \frac{n}{\pi} \left[\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)s) \Big|_{x-\frac{\pi}{2n}}^{x+\frac{\pi}{2n}} \right] \\ \bar{F}_{2n}^c(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \underbrace{\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2n}(2k-1))}{\frac{\pi}{2n}(2k-1)} \right]}_{\sigma} \sin((2k-1)x)\end{aligned}$$

Con lo cual hemos identificado el factor σ de Lanczos. Siguiendo este mismo proceso se puede generalizar para cualquier función de tal modo que una serie de Fourier genérica podrá ser corregida con un factor σ para lograr

$$\bar{F}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{(\frac{k\pi}{n})} \right] (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

2.18. Transformadas de Fourier

La transformada de Fourier representa (como combinación lineal de funciones sinusoidales) a funciones definidas en toda la recta real y/o sin una periodicidad definida. Puede ser considerada como la generalización de la representación en serie de Fourier, y es mayormente utilizada para expresar funciones que varían en el tiempo con el único requisito que tengan norma acotada, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|$ finita

Anteriormente hemos visto, que podemos expresar una función en término de series de Fourier complejas

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2n\pi}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \omega_n t}$$

donde hemos definido $\omega = \frac{2n\pi}{T}$.

Ahora bien, podemos hacer $T \rightarrow \infty$ con lo cual $[-T/2, T/2] \rightarrow [-\infty, \infty]$ pero también se tiene:

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{n} = \Delta\omega \rightarrow d\omega \text{ y además } \frac{\int_{-T/2}^{T/2} dt f(t)}{T} \rightarrow 0 \text{ ya que } \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t), \text{ existe y es acotada.}$$

Si recordamos la expresión que toman los coeficientes de la expansión

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-i \frac{2n\pi}{T} x} f(x) \Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dx e^{-i\omega_n x} f(x) \right) e^{i\omega_n t}$$

con lo cual hacer $T \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega x} f(x)}_{F(\omega)}$$

De este modo, la transformada de Fourier de una función y su inversa, pueden escribirse como

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) \Leftrightarrow f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} F(\omega)$$

2.18.1. Propiedades

Las transformada de Fourier cumplen con las siguientes propiedades, las cuales se derivan de la definición arriba expuesta

1. Las transformadas de la derivada $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathcal{F}[f^n(t)] = i^n \omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es más o menos inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f'(t) i\omega F(\omega)$$

2. La transformada de la integral

$$\mathcal{F} \left[\int^t ds f(s) \right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$$

donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ se denomina delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración

3. Escalamiento $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
4. Traslación $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} F(\omega)$
5. Multiplicación por un exponencial $\mathcal{F}[e^{\alpha t} f(t)] = f(\omega + i\alpha)$

2.18.2. Funciones pares e impares

Al igual que en las expansiones de Fourier, la paridad de las funciones $f(t)$ es importante. Esto se nota rápidamente a partir de la definición. Supongamos $f(t) = -f(-t)$, entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) f(t) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \sin(\omega t) f(t)$$

con lo cual podemos definir las transformadas de Fourier seno y coseno para funciones impares y pares respectivamente. Esto es para funciones impares $f(t) = -f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \cos(\omega t) f(t) \Leftrightarrow f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \cos(\omega t) F(\omega)$$

y para funciones pares $f(t) = f(-t)$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dt \sin(\omega t) f(t) \Leftrightarrow f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d\omega \sin(\omega t) F(\omega)$$

2.18.3. Bases discreta y contínuas: La base de Ondas Planas

Haremos una digresión para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como hemos visto repetidas veces, la representación de un vector $|F\rangle$ en un espacio vectorial abstracto \mathbf{V} puede darse en términos de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots |u_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \dots |v_n\rangle \dots\}$) de la forma:

$$|F\rangle = \begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i |u_i\rangle = \sum_{i=0}^n \langle u_i | F \rangle |u_i\rangle & \Leftarrow B_{DF} = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle \dots |u_n\rangle\} \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i |v_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle v_i | F \rangle |v_i\rangle & \Leftarrow B_{DI} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \dots |v_n\rangle \dots\} \end{cases}$$

donde en ambos casos:

$$c_i = \langle u_i | F \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \langle u_i | u_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta_{ij}$$

la intención ahora será utilizar la transformada de Fourier para construir la generalización de bases discretas a continua $|w_\alpha\rangle$ de tal forma que transformamos el índice de la sumatoria en la variable de una integral

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |w_\alpha\rangle$$

donde

$$c(\beta) = \langle w_\beta | \Psi \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \langle w_\beta | w_\alpha \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \delta(\alpha - \beta)$$

con en la cual $\delta(\alpha - \beta)$ es una Delta de Dirac.

Así, los dos conceptos expresados hasta ahora tienen una expresión:

Propiedad\Base	Discreta	Continua
Ortogonalidad	$\langle v_i v_j \rangle = \delta_{ij}$	$\langle w_\beta w_\alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$
Cierre	$1 = \sum_{j=0}^{\infty} v_j\rangle \langle v_j $	$1 = \int d\alpha w_\alpha\rangle \langle w_\alpha $
Expansión	$ F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i\rangle$	$ \Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) w_\alpha\rangle$
Componentes	$c_i = \langle u_i F \rangle$	$c(\beta) = \langle w_\beta \Psi \rangle$
Producto Interno	$\langle G F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g_i^* f_i$	$\langle G F \rangle = \int d\alpha g^*(\alpha) f(\alpha)$
Norma	$\langle F F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} f_i ^2$	$\langle F F \rangle = \int d\alpha f(\alpha) ^2$

Ilustraremos esta generalización con la construcción de la base de ondas planas. Hemos visto que la transformada compleja de Fourier para una función, se puede escribir como

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ist} f(t) \quad \rightleftharpoons \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-ist} F(s)$$

las cuales reescribiremos en términos más familiares a la comunidad de físicos como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx/\hbar} \bar{\psi}(p) \quad \rightleftharpoons \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \psi(x)$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en mecánica cuántica. Estas fórmulas pueden ser reinterpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \quad \rightleftharpoons \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \right)}_{v_p^x(x)} \psi(x)$$

por lo cual

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p(x) \bar{\psi}(p) \quad \rightleftharpoons \quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_p^*(x) \psi(x)$$

Diremos que la función $\psi(x)$ está expresada en la base de ondas planas $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$.
Nótese

- El índice p de $v_p(x)$ varía de forma continua entre $-\infty$ e ∞ .

- Que $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \notin \mathcal{L}^2$ es decir no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge

$$\langle v_p | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \infty$$

- Que las proyecciones de $\psi(x)$ sobre la base de ondas planas es $\bar{\psi}(p) = \langle v_p | \psi \rangle$
- La relación de cierre para esta base se expresa como

$$1 = \int d\alpha |v_\alpha\rangle \langle v_\alpha| \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p^*(x') v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i p(x'-x)/\hbar} = \delta(x' - x)$$

mientras que de la definición de producto interno, uno obtiene

$$\langle v_{p'} | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{p'}^*(x) v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i x(p'-p)/\hbar} = \delta(p' - p)$$

2.18.4. Un par de ejemplos

Un ejemplo inmediato lo tenemos al considerar la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{el resto} \end{cases} \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt 1 e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2\sin\omega}{\sqrt{2\pi}\omega}$$

el otro ejemplo de uso lo podremos construir si consideramos la ecuación diferencial inhomogénea y buscamos su solución

$$\frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[\frac{d\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) \right] e^{-i\omega t} = F(\omega)$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función $f(x)$. Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \left[\frac{d\phi(x)}{dx^2} \right] e^{-i\omega t} - K^2\tilde{\phi}(\omega) = F(\omega) \Rightarrow -k^2\tilde{\phi}(\omega) - K^2\tilde{\phi}(\omega) = F(\omega) \Rightarrow \tilde{\phi}(\omega) = -\frac{F(\omega)}{k^2 + K^2}$$

donde hemos representado $\tilde{\phi}(\omega)$ como la transformada de Fourier de la solución $\phi(x)$. Con lo cual

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \tilde{\phi}(\omega) e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 dt \frac{F(\omega)}{k^2 + K^2} e^{-i\omega t}$$

Como solución formal de la ecuación diferencial resulta sencilla y el método también es inmediato. El punto crucial es la solución del la integral que resulta de la transformación inversa. Normalmente este tipo de integrales no son tratables de manera analítica. Pero siempre queda el recurso numérico.

2.18.5. Transformadas Discretas de Fourier

Aquí haremos algo más contemporaneo que será estudiar la versión discreta de esta transformación. En general las integrales, en su mayoría, no se pueden resolver analíticamente por lo que tenemos que proceder

a resolverlas de forma numérica. La mayor parte de los métodos numéricos involucra convertir integrales en sumatorias. Es decir en series de funciones.

Hemos visto como las funciones trigonométricas (y las exponenciales de argumento imaginario) son ortogonales bajo integrales evaluadas en un determinado intervalo. En otras palabras con la definición de producto interno en un espacio de funciones. Ahora bien, esas mismas funciones (*Fourier Generalidades, coseños y funciones exponenciales* de argumento imaginario) serán también ortogonales al ser evaluadas en puntos muy particulares.

Consideremos los siguientes $2N$ puntos $t_k = \frac{kT}{2N}$ y probaremos que las funciones $e^{2\pi i p t_k / T}$ y $e^{2\pi i q t_k / T}$ serán ortogonales $\propto \delta_{qp}$ en un conjunto esos puntos t_k . Esto es

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s t_k}{T}} = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{\frac{2\pi i s k}{2N}} = \begin{cases} \frac{1 - r^{2N}}{1 - r} = 0 & r \neq 1 \\ 2N & r = 1 \end{cases}$$

donde hemos sustituido $s = q - p$, y evaluado en los puntos $t_k = \frac{kT}{2N}$ con $k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1$. Nótese que la última de las series es una serie finita y geométrica con razón $r = e^{(\pi i s)/N}$, que comienza con 1 y por lo tanto suma (dependiendo del valor de r) lo que aparece en la llave. Es inmediato convencerse que, para todo N se cumple que $r^{2N} = e^{2\pi i s} = 1$ (con s entero) con lo cual se cumple la relación de ortogonalidad que buscamos

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \left[e^{\frac{2\pi i p t_k}{T}} \right]^* e^{\frac{2\pi i q t_k}{T}} = 2N \delta_{qp} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1 \quad (2.46)$$

Si hacemos un ligero cambio de notación y llamamos $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$ tendremos algunos cambios, en apariencia, cosméticos

$$e^{\pm \frac{2\pi i m t_k}{T}} \rightarrow e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Leftrightarrow f(t_k) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} F(\omega_m) e^{\pm \omega_m t_k} \quad (2.47)$$

La función $F(\omega_m)$ representa la transformada discreta de Fourier de la $f(t_k)$. Para despejar la función $f(t_k)$ hemos utilizado la relación de ortogonalidad 2.46.

Consideremos el siguiente $f(t_k) = \cos(t_k)$ evaluado en un período $T = 2\pi$ y dividido, digamos en $N = 2$ intervalos. Los puntos en los cuales evaluaremos nuestra serie serán $2N = 4$, vale decir

$$t_k = \frac{kT}{2N} \equiv \frac{k\pi}{2} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_m = \frac{2\pi m}{T} \equiv m \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{i\omega_m t_k}}{2N} \equiv \frac{e^{imk\pi/2}}{2N}$$

nótese que la función $f(t_k)$ puede ser escrita como un vector $f(t_k) = (1, 0, -1, 0)$, con lo cual para encontrar la expresión de su transformada discreta de Fourier, $F(\omega_m)$, podemos expresar la suma como una matriz de transformación con índices m, k . Esto es

$$\frac{e^{imk\pi/2}}{2N} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$F(\omega_m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k) e^{\pm \omega_m t_k} \Rightarrow \begin{pmatrix} F(\omega_0) \\ F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ F(\omega_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Respecto a la ecuación 2.47 se deben puntualizar varios elementos

- la frecuencia angular $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$ corresponde a lo que en Física se denomina el espacio recíproco (al temporal), espacio de frecuencias u ω -espacio. Por ello la función $F(\omega_m)$ está expresada en este espacio de frecuencias, mientras que la función $f(t_k)$ en el de tiempos.
- La elección de uno de los signos + y - en la expresión $e^{\pm\omega_m t_k}$ es arbitraria.

Con lo cual si “reconstruimos” la función original a partir de la transformada discreta nos sorprende el resultado, por cuanto no coincide

$$f(t_k) = \frac{1}{2}e^{-it_k} + \frac{1}{2}e^{-3it_k} \Rightarrow \Re[f(t_k)] = \frac{1}{2}\cos t_k + \frac{1}{2}\cos 3t_k$$

Ahora bien, para los puntos $t_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y $\frac{3\pi}{2}$ si se cumple que los valores $\cos t_k = \frac{1}{2}\cos t_k + \frac{1}{2}\cos 3t_k$. En los pocos puntos seleccionados $\cos t_k$ y $\cos 3t_k$ se asemejan. En la medida que seleccionemos más puntos en esa medida se dejan de parecer y la reconstrucción de la función será más fidedigna.

Programa para generar cuadraturas de Gauss – Legendre para n puntos

```
[> restart: Digits:=20:
> n := 3:
> L := LegendreP(n,z): p:=expand(%);
          5      3
p := - - z  - - z
```

(1)

Las raíces de los polinomios de Legendre representan las abscisas del problema

(2) $x := \text{fsolve}(p);$
 $x := [-0.77459666924148337704, 0., 0.77459666924148337704]$

Se puede construir una procedimiento que tome como entrada una función $f(x)$ y genere los valores aproximados

```
> proced := f -> sum(c['i']*f(x['i']), 'i'=1..n);
```

Se calculan los pesos a partir de resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

```
[> ecs := []:
> for i from 1 to n do
>     ecs := [op(ecs),proced(z->z^(i-1)) = int(z^(i-1),z=-1..1)]:
> end do:
```

```
=> sys := {op(ecs)}:var := {seq(c[k],k=1..n)}:
```

```

> pesos := solve(sys,var); assign(pesos):
pesos := { $c_1 = 0.5555555555555555, c_2 = 0.88888888888888891, c_3$ 
          = 0.5555555555555555}

```

Para probar el método, generaremos aleatoriamente un polinomio de grado $2n - 1$

```
> q := randpoly(z,degree=2*n-1);
q := -56 - 7 z5 + 22 z4 - 55 z3 - 94 z2 + 87 z
```

con el polinomio anterior construyamos una función $g(x)$

> g := unapply(q,z);

apliquemos la regla definida anteriormente.

> calculado := proced(g);
calculado = -165.866666666666666667

Calculemos el resultado exacto.

> exacto := int(q, z=-1..1); 2488

$$\text{exacto} := -\frac{245}{15}$$

Ahora podemos comparar el resultado exacto con el aproximado

> evalf(exacto - calculado), 0.

FIN

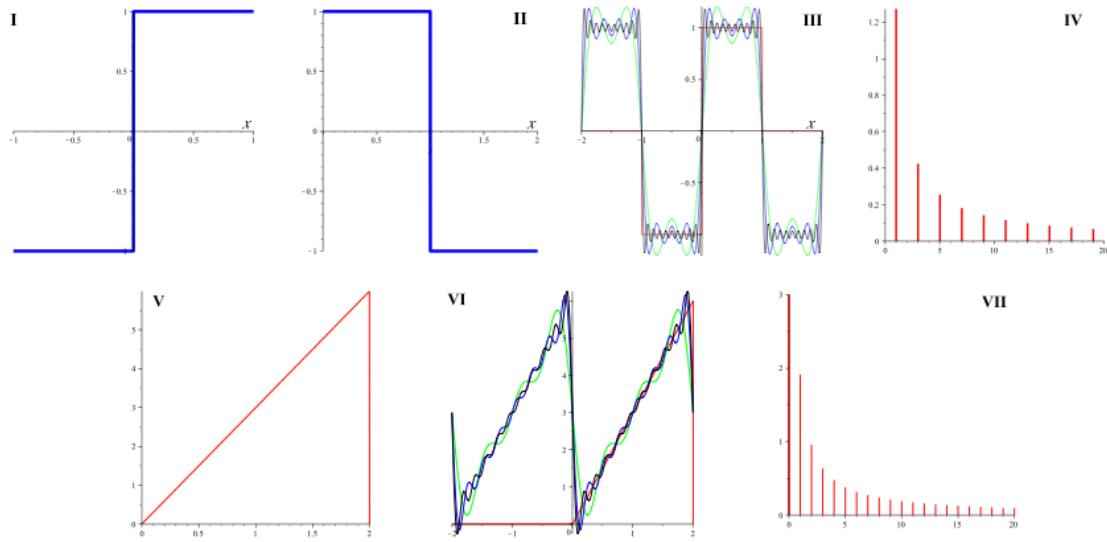


Figura 2.16: Un par de funciones, definidas con un período T , a ser expresadas en como expansiones en Series de Fourier. En los cuadrantes I y II, encontramos una onda cuadrada. La primera (cuadrante I) definida en un intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ y en el cuadrante II la misma función definida en un intervalo $(0, T)$. El cuadrante III ilustra las aproximaciones de la serie de Fourier para $n = 3, 7, 20$, mientras que el espectro de potencia se presenta en el cuadrante IV. La onda “diente de sierra”, definida en un intervalo $(0, T)$, se presenta en el cuadrante V. Sus aproximaciones en series de Fourier para $n = 3, 7, 10$ se pueden observar en el cuadrante VI, mientras que el espectro de potencia en el cuadrante VII.

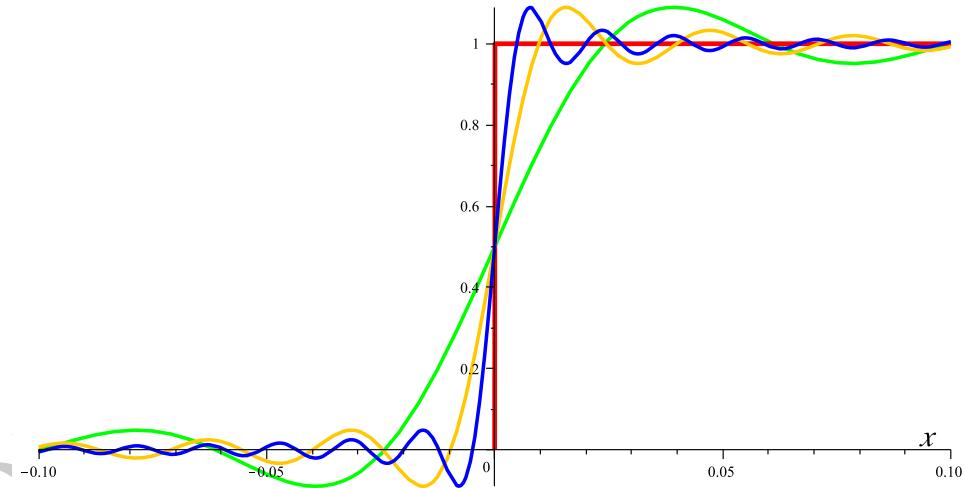


Figura 2.17: Aproximaciones por series de Fourier para la función escalón, linea roja. Las curvas corresponden a sumas parciales de Fourier: $F_{40}(x), F_{100}(x), F_{200}(x)$,

Bibliografía

- [Aleksandrov Kolmogorov y Lavrentiev 1999] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov y M. A. Lavrentiev (1999) **Mathematics: Its Content, Methods and Meaning.** (*Dover Publications, New York*) Existe traducción por Editorial Alianza Universidad.
- [Arfken, Weber y Weber 2000] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (*Academic Press, Nueva York*)
- [1] Byron, F.W. y Fuller W.F. (1970) **Mathematics of Classical and Quantum Physics** (*Dover Publications, New York*)
- [Cushing 1975] Cushing, J. (1975) **Applied Analytical Mathematics for Physical Sciences** (*John Wiley & Sons, New York*)
- [Hamming 1973] Hamming R.W. (1973) **Numerical Methods For Scientist and Engineers**, 2nd ed. (Dover, New York.)
- [Hassani 1991] Hassani, S. (1991) **Foundations of Mathematical Physics** (*Prentice Hall, International Edition, London:*)
- [Lebedev 1972] Lebedev, N.N. (1972) **Special Functions & Their Applications** (*Dover Publications, New York*)
- [math-atlas.org URL] **The Mathematical Atlas** <http://www.math-atlas.org/welcome.html>
- [Richards 2002] Richards, D. (2002) **Advanced Mathematical Methods with MAPLE** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Riley Hobson y Bence 2002] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) **Mathematical Methods for Physics and Engineering** (*Cambridge University Press Cambridge*)
- [Weisstein URL] Weisstein, E. W., **MathWorld** <http://mathworld.wolfram.com/>

Capítulo **3**

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Borrador Preliminar

3.1. Motivación y origen

En Ciencias, una de las formas de modelar fenómenos físicos es mediante su caracterización a través de una función matemática, digamos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z; t)$. Una de las formas (la ideal) para modelar los cambios de esta función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, que depende de la posición y del tiempo, es a través de una ecuación en la cual están involucradas la función, $\mathcal{G}(x, y, z; t)$ y sus derivadas. A esa ecuación, que involucra las derivadas, la llamaremos *Ecuación Diferencial*.

Existe toda una “fauna” de ecuaciones diferenciales y hoy disponemos de un importante arsenal de técnicas, métodos y herramientas para encontrar la función $\mathcal{G}(x, y, z; t)$, la cual será nuestra función incógnita.

Este curso trata, parcialmente, de mostrar parte de esta “fauna” y de indicarles métodos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales: las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias son básicamente funciones del tipo

$$\mathcal{F} [x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0, \quad (3.1)$$

donde:

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}, \quad y'''(x) = \frac{d^3y(x)}{dx^3}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}.$$

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$ax + yy' = 0, \quad x^2y''' - (y')^2 = e^x, \quad y'' \cos(x) + \cos(y) = 2.$$

Cuando la función incógnita f viene definida por una relación entre sus derivadas parciales con respecto a las variables independientes nos estamos enfrentando a un problema de *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Si la función es $f = f(x, y, z)$ una ecuación diferencial en derivadas parciales es una de la forma:

$$\mathcal{F} [x, y, z, f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f, \partial_x^2 f, \partial_y^2 f, \partial_z^2 f, \partial_{xy} f, \partial_{xz} f, \dots] = 0, \quad (3.2)$$

donde:

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \partial_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial_y^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \partial_z^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \partial_{xy} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \partial_{xz} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

Ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - f(x, y) = p(y).$$

Como ya mencionamos, en estas notas de métodos matemáticos trataremos las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus métodos de resolución. Un estudio de las ecuaciones en derivadas parciales será tratado en un curso posterior.

Empecemos por recordar que desde los primeros cursos hemos tratado, la mayor de las veces sin saberlo o sin explicitarlo, con este tipo de ecuaciones en donde la incógnita no es un número sino un conjunto de números: una función.

El caso más emblemático lo constituye el conjunto de “fórmulas” que aprendimos cuando estudiábamos bachillerato o, más recientemente, en los primeros cursos de física general en la universidad. Entonces describímos el movimiento de partículas en una dimensión, a través de dos ecuaciones:

$$v_f(t) = v_0 + at \quad \text{y} \quad d(t) = v_0 t + a \frac{t^2}{2}. \quad (3.3)$$

De memoria repetíamos que v_f representaba la velocidad final, v_0 la velocidad inicial, a la aceleración, t el tiempo transcurrido y d la distancia recorrida en ese tiempo. El problema consistía en encontrar, para un sinfín de situaciones físicas, primeramente el valor de la aceleración del móvil y a partir de las leyes de Newton, conociendo la velocidad y la posición inicial, encontrábamos la posición d y la velocidad v_f en todo instante de tiempo. Así, mediante diagramas de cuerpo libre y la utilización de las leyes de Newton, encontrábamos el valor de la aceleración y con las “formulitas” (3.3) resolvíamos el problema.

$$\sum F_{ext} = ma \Rightarrow a = \frac{\sum F_{ext}}{m} \Rightarrow \begin{cases} v_f = v_0 + at \\ d = v_0 t + a \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

Lo más probable es que nuestros profesores nos repitieran hasta el cansancio que la sumatoria de fuerzas externas $\sum F_{ext}$ era constante, y lo más seguro que nosotros en aquellos momentos no comprendiéramos la trascendencia de esa suposición.

El caso más representativo era el del movimiento de un cuerpo bajo la acción de un campo gravitatorio: el problema llamado de caída libre.

$$-mg = ma \Rightarrow a = -g \Rightarrow \begin{cases} v_f = v_0 - gt \\ d = v_0 t - g \frac{t^2}{2} \end{cases} \quad (3.5)$$

Lo que está detrás de esta historia que nos inició en el estudio de la física y a muchos de nosotros nos sedujo para seguir estudiando y aprendiendo a tratar de describir la naturaleza, es, efectivamente, la utilización de las leyes de Newton para modelar el fenómeno del movimiento. De este modo:

$$\sum F_{ext} = ma = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}. \quad (3.6)$$

Sí la sumatoria de fuerzas externas es una constante tendremos que:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a = \frac{\sum F_{ext}}{m} = \text{constante} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = \int dt a = at + C_2 \\ x(t) = \int dt (at + C_2) = a \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Claramente al identificar:

$$C_2 = v(t=0) = v_0 \quad \text{y} \quad C_1 = x(t=0) = x_0 = 0, \quad (3.8)$$

reobtenemos nuestras “formulitas” ancestrales. Es importante señalar que:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a \quad \text{y} \quad \frac{dx(t)}{dt} = at + C_2, \quad (3.9)$$

constituyen ecuaciones diferenciales donde las funciones incógnitas son la velocidad $v(t)$ y la posición, $x(t)$, respectivamente. Ambas funciones se encontraban dentro de un signo de derivada y fueron “despejadas” mediante un proceso de integración.

La descripción del movimiento de un sistema de partículas es más rica y compleja. El movimiento de una gran cantidad de partículas puede ser simulado a través de una ecuación diferencial del tipo:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} \left(\mathbf{r}(t), \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, t \right) = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}. \quad (3.10)$$

El carácter vectorial implica tres ecuaciones diferenciales, una por cada dimensión del movimiento:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} \left(\mathbf{r}(t), \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, t \right) = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_{ext}^x \left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t \right) = ma_x = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ \sum F_{ext}^y \left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, t \right) = ma_y = m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ \sum F_{ext}^z \left(z(t), \frac{dz(t)}{dt}, t \right) = ma_z = m \frac{d^2z(t)}{dt^2} = m \frac{dv_z(t)}{dt} \end{cases}$$

Además del carácter vectorial de la ecuación, las componentes de la fuerza pueden dejar de ser constantes y depender no sólo del tiempo, sino del vector posición, del vector velocidad o de ambas simultáneamente.

En este caso nuestras “formulitas” dejan de ser válidas y debemos integrar las ecuaciones diferenciales para obtener la trayectoria de la partícula, es decir, $\mathbf{r}(t)$, conocidas: la masa, la expresión de la sumatoria de fuerzas externas, la posición y la velocidad inicial. Este problema se conoce como el problema de condiciones iniciales y es, como hemos dicho antes, la razón de este curso.

Pero antes vamos a mostrar como el conocimiento del movimiento bajo la acción de una fuerza constante, es decir, el movimiento de una partícula con aceleración constante puede resultar muy útil para resolver, de forma aproximada, el caso más general que hemos mencionado.

Veamos con detenimiento que significan estas afirmaciones.

Es claro que el tiempo de evolución esta comprendido entre el tiempo inicial, t_0 , y el tiempo final, t_f , es decir: $t_0 \leq t \leq t_f$. Supongamos que dividimos ese intervalo de tiempo en N subintervalos

$$[t_0, t_f] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_f]$$

de tal modo que en cada uno de esos N subintervalos la aceleración es constante. En estas situación, nuestras “formulitas” son válidas. Esto es:

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v(t_1) = v_1 = v_0 + a(x_0, v_0, t_0)[t_1 - t_0] \\ x(t_1) = x_1 = x_0 + v_0[t_1 - t_0] + a(x_0, v_0, t_0) \frac{[t_1 - t_0]^2}{2} \end{array} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} v(t_1) = v_1 \\ x(t_1) = x_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_2 = v_1 + a(x_1, v_1, t_1)[t_2 - t_1] \\ x_2 = x_1 + v_1[t_2 - t_1] + a(x_1, v_1, t_1) \frac{[t_2 - t_1]^2}{2} \end{array}$$

Si continuamos con este procedimiento, para un tiempo n -ésimo se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} v(t_i) = v_i \\ x(t_i) = x_i \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_{i+1} = v_i + a(x_i, v_i, t_i)[t_{i+1} - t_i] \\ x_{i+1} = x_i + v_i[t_{i+1} - t_i] + a(x_i, v_i, t_i) \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2} \end{array}$$

hasta $i = N - 1$:

$$\left. \begin{array}{l} v(t_{N-1}) = v_{N-1} \\ x(t_{N-1}) = x_{N-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_N = v_{N-1} + a(x_{N-1}, v_{N-1}, t_{N-1})[t_N - t_{N-1}] \\ x_N = x_{N-1} + v_{N-1}[t_N - t_{N-1}] + a(x_{N-1}, v_{N-1}, t_{N-1}) \frac{[t_N - t_{N-1}]^2}{2} \end{array}$$

Nótese que las posiciones y velocidades **finales** para cada intervalo, son las posiciones y velocidades **iniciales** para el intervalo siguiente y que el valor de la aceleración, que es variable, se toma como constante e igual al valor que tiene en el comienzo del intervalo.

Para analizar este caso consideremos la situación de una esfera de corcho, con radio a y masa m que se suelta desde el fondo de un tanque de agua de profundidad h .

Queremos conocer con qué velocidad llega la esfera a la superficie.

El diagrama de cuerpo libre se puede observar en la Figura 3.1 y la ecuación de Newton para este caso se expresa como:

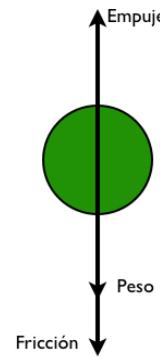


Figura 3.1: Diagrama de Cuerpo Libre de una esfera de corcho que emerge desde el fondo de un tanque de agua.

$$\sum \mathbf{F}_{ext} \left(\mathbf{r}(t), \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, t \right) \Rightarrow -mg - \eta v(t) + m_l g = m \frac{dv(t)}{dt}. \quad (3.12)$$

En la cual podemos identificar:

$$\text{Peso: } -mg, \quad \text{Fricción: } -\eta v(t), \quad \text{Empuje: } m_l g.$$

Como sabemos de cursos anteriores, el empuje o fuerza de Arquímedes es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo. Por ello aparece m_l que representa la masa del fluido.

Para el caso en el cual el fluido no es viscoso ($\eta = 0$), es decir, no hay fricción con el fluido, la ecuación se reduce a:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} \left(\mathbf{r}(t), \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, t \right) \Rightarrow -mg + m_l g = ma, \quad (3.13)$$

en la cual claramente la aceleración es constante e igual a:

$$a = g \left(\frac{m_l}{m} - 1 \right) \equiv g \left(\frac{\rho_l}{\rho} - 1 \right) = \text{cte}. \quad (3.14)$$

donde hemos identificado ρ_l la densidad del fluido y ρ la densidad del cuerpo.

Para buscar la velocidad con la cual llega a la superficie, encontramos primero el tiempo que tarda en subir y luego evaluamos la velocidad en ese tiempo. Esto es:

$$y(t_f) = h = g \left(\frac{\rho_l}{\rho} - 1 \right) \frac{t_f^2}{2} \Rightarrow t_f = \pm \sqrt{\frac{2h\rho}{g(\rho_l - \rho)}}, \quad (3.15)$$

por lo tanto, la velocidad final es:

$$v_f = \pm g \left(\frac{\rho_l}{\rho} - 1 \right) \sqrt{\frac{2h\rho}{g(\rho_l - \rho)}}. \quad (3.16)$$

En el caso general, descrito por la ecuación (3.12), procedemos del mismo modo: encontramos el tiempo en el cual llega la superficie y luego evaluamos la expresión de la velocidad para ese tiempo. Fíjense que

la estrategia para resolver el problema físico es la misma, sólo que tendremos que disponer de un arsenal adicional de herramientas y técnicas para “despejar” la función velocidad.

Aprenderemos a resolver ecuaciones diferenciales de la misma manera que antes resolvíamos ecuaciones algebraicas. En este caso, y como veremos más adelante, la solución exacta para la expresión de la velocidad es:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg - \eta v(t) + m_l g \Rightarrow v(t) = \frac{g(m - m_l)}{\eta} \left[e^{-\frac{\eta}{m}t} - 1 \right]. \quad (3.17)$$

Con lo cual:

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t) = \frac{g(m - m_l)}{\eta} \left[e^{-\frac{\eta}{m}t} - 1 \right], \quad (3.18)$$

y la función posición surge de integrar la ecuación diferencial anterior

$$y(t) = -\frac{g(m - m_l)}{\eta^2} \left[me^{-\frac{\eta}{m}t} + \eta t - m \right], \quad (3.19)$$

desafortunadamente, no se puede despejar el tiempo de manera exacta por cuanto la ecuación:

$$y(t_f) = h = -\frac{gm(m - m_l)}{\eta^2} \left[e^{-\frac{\eta}{m}t_f} - 1 + \frac{\eta}{m}t_f \right], \quad (3.20)$$

para el tiempo final t_f , ésta es una ecuación *trascendente* y debe ser resuelta numéricamente.

Hagamos ahora algunas sustituciones simplificadoras:

$$m_l = \frac{4\pi}{3} \xi \rho a^3, \quad m = \frac{4\pi}{3} \phi \rho a^3, \quad \rho_l = \xi \rho, \quad \rho = \phi \rho_a, \quad (3.21)$$

donde ξ y ϕ representan las densidades relativas del fluido y del cuerpo respecto al agua (que es de densidad ρ_a), respectivamente. Sustituyendo por valores numéricos:

$$g = 9,8; \quad a = 0,02; \quad \rho_a = 10^3; \quad \xi = 1; \quad \phi = 0,8; \quad v_0 = 0; \quad \eta = (6\pi a) (1,002 \times 10^{-3}), \quad (3.22)$$

entonces, de la ecuación (3.20) nos queda que para $h = 10$ (mts)

$$10 = 12339,72755 \left[1 - e^{(-0,01409062500 t_f)} \right] - 173,8744736 t_f, \quad (3.23)$$

y se obtiene, de manera numérica, que $t_f = 2,876443096$ s.

Con este resultado se evalúa la ecuación para la velocidad:

$$v(t_f) = 173,8744730 \left[1 - e^{(-0,01409062500 t_f)} \right] \Rightarrow v_f = 6,9063798 \text{ m/s}. \quad (3.24)$$

En la siguiente tabla se implementan las ecuaciones (3.11) habida cuenta de las simplificaciones (3.21) y los valores numéricos (3.22) para $h = 1/10 \sim [t_{i+1} - t_i]$

$t_i(s)$	$v_i(m/s)$	$y_i(m)$	$v(t)(m/s)$	$y(t)(m)$
0.100	0.2449999997	0.01224999998	0.2448275	0.01225
0.200	0.4896547791	0.04898273892	0.4893102	0.04895
0.300	0.7339648246	0.11016371910	0.7334487	0.11009
0.400	0.9779306220	0.19575849150	0.9772434	0.19563
0.500	1.221552656	0.30573265540	1.2206949	0.30553
0.600	1.464831412	0.44005185880	1.4638035	0.43976
0.700	1.707767373	0.59868179800	1.7065698	0.59828
0.800	1.950361022	0.7815882177	1.9489943	0.78106
0.900	2.192612841	0.9887369109	2.1910775	0.98807
1.000	2.434523312	1.220093719	2.4328198	1.21926
1.100	2.676092916	1.475624530	2.6742217	1.47462
1.200	2.917322134	1.755295283	2.9152836	1.75410
1.300	3.158211444	2.059071962	3.1560062	2.05767
1.400	3.398761326	2.386920600	3.3963898	2.38529

aquí, v_i y y_i representan la velocidad y la posición aproximada, tal y como se expresan en las ecuaciones (3.11). Mientras que $v(t)$ y $y(t)$ ilustran los valores de la velocidad y la posición exactas, calculadas a partir de las ecuaciones (3.18) y (3.19). Es claro que la aproximación es buena hasta la segunda cifra decimal.

3.2. Ejemplos de algunas ecuaciones diferenciales

- Thomas Robert Malthus¹ fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones*, el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, eran de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies. La Ley de Malthus o Decaimiento Radioactivo es:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k y(t) \Rightarrow y(t) = y_0 e^{k t}, \text{ con } y_0 = y(0). \quad (3.25)$$

Para $k > 0$ la población crece y para $k < 0$ tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo.

- La ecuación logística o Ley de Verhulst² se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta el decrecimiento de la población con el término $-y^2$

$$\frac{dy(t)}{dt} = [k - ay(t)] y(t) = ky(t) - ay^2(t) \Rightarrow y(t) = \frac{k y_0}{a y_0 + (k - a y_0) e^{-kt}}$$

- La Ley de Enfriamiento de Newton expresa que la tasa de cambio de la temperatura respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T - T_m) \Rightarrow T(t) = (T_0 - T_m) e^{kt} + T_m, \text{ con } T_0 = T(0)$$

¹En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834).

²Pierre François Verhulst 1804 - 1849. Matemático belga con sus más importantes contribuciones en estadística demográfica.

- La Ley de Torricelli, la cual establece (para un tanque cilíndrico) la tasa de cambio respecto al tiempo de la profundidad del agua en un tanque:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{k}{A} \sqrt{y(t)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t + y(0)^2.$$

3.3. De ecuaciones y ecuaciones diferenciales

En cursos anteriores consideramos una ecuación algebráica como aquella que se cumplía para ciertos valores de x :

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

llamaremos ahora una ecuación diferencial aquella que se cumple para ciertas **funciones** i.e.

$$\frac{df(x)}{dx} - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = e^x$$

Definición: Sea $f(x)$ una función definida sobre un intervalo $a < x < b$. Por una Ecuación Diferencial Ordinaria entenderemos toda ecuación que involucre a x , $f(x)$ y una o más derivadas de $f(x)$.

Ejemplos:

$$\frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0, \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = -e^{-x}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{\cos(x)}{1-x^2}, \quad x \frac{df(x)}{dx} = 2[f(x)]^2.$$

Utilizaremos para tal efecto varias notaciones equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(x)}{dx^2} + g(x) \frac{df(x)}{dx} - af^2(x) &= k(x) \\ f''(x) + g(x)f'(x) - af^2(x) &= k(x) \\ f_{xx}(x) + g(x)f_x(x) - af^2(x) &= k(x). \end{aligned}$$

Se llaman ordinarias porque involucran funciones de una sola variable y derivadas respecto a ella.

3.4. Orden y linealidad

Una ecuación diferencial ordinaria, de orden n , generica suele denominarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0, \quad (3.26)$$

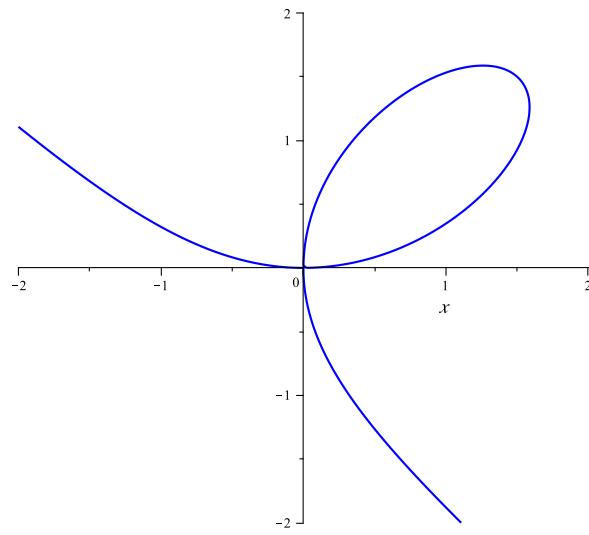
y será lineal si sólo parecen funciones lineales de $y(x)$ y sus derivadas. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} y'y'' + yy' - ay^2 &= k(x) \text{ es no lineal} \\ \alpha(x)y'' + \beta(x)y' + \gamma(x)y &= k(x) \text{ es lineal} \end{aligned}$$

Muchas veces se acostumbra a omitir la dependencia de la función de la variable porque ésta queda sobreentendida: $y(x) = y$.

El orden de la derivada mayor define el orden de la ecuación diferencial, para la EDO (3.26) se tiene entonces que ésta será de orden n . Ejemplos:

$$\begin{aligned} y'' + (3y')^3 + 2x &= 7, & \text{EDO no lineal de orden 2} \\ y' + y &= x, & \text{EDO lineal de orden 1.} \end{aligned}$$

Figura 3.2: Gráfica de la función implícita $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$

La ecuación diferencial (3.26) será homogénea si NO contiene términos independientes de $y(x)$, en caso contrario será inhomogénea:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y(x)}{dx^2} + g(x) \frac{dy(x)}{dx} - ay(x) &= k(x) && \text{lineal inhomogénea} \\ y''(x) + g(x)y'(x) - ay(x) &= 0 && \text{lineal homogénea.} \end{aligned}$$

3.5. Soluciones explícitas e implícitas

Las soluciones heredan su nombre del tipo de función que las representa, así tendremos soluciones explícitas cuando las funciones sean soluciones y sean explícitas. Esto es

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = y(t) + 4e^t \Rightarrow y(t) = e^t C_2 + e^{-t} C_1 + 2te^t$$

y también

$$y' = (x+y)^2 \Rightarrow y(t) = \tan(t - C_1) - t, \quad \text{con } t - C_1 \neq \frac{\pi}{2}$$

Las soluciones serán implícitas si son representadas por funciones como

$$y' y' + x = 0 \Rightarrow f(x, y) = x^2 + y(x)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} \quad \text{con } -5 < x < 5$$

En este caso, se tiene que seleccionar una rama de la función raíz.

Igualmente, será solución implícita de la ecuación:

$$[y^2(x) - x] y'(x) - y(x) + x^2 = 0$$

la siguiente función

$$f(x, y) = x^3 + y^3(x) - 3xy(x) = 0,$$

ahora no es tan fácil verificar si efectivamente es una solución. Para comprobarla derivamos la función

$$\frac{d[f(x, y)]}{dx} = \frac{d[x^3 + y^3(x) - 3xy(x)]}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2(x)\frac{dy(x)}{dx} - 3y(x) - 3x\frac{dy(x)}{dx} = 0,$$

simplificando y agrupando obtenemos la ecuación diferencial. Otra vez, la función solución no es univaluada. Al graficarla (ver Figura 3.2) nos damos cuenta que tenemos varias soluciones de funciones univaluadas unas continuas y otras no. La función es univaluada fuera del lóbulo. Esto es para $x \leq 0 \wedge x > 2^{\frac{2}{3}}$. Con lo cual tendremos que seleccionar, dentro del lóbulo, cuál de las partes univaluadas corresponde a la solución.

3.6. Soluciones generales y particulares

Veamos las siguientes ecuaciones y soluciones

$$\begin{aligned} y' &= e^x &\leftarrow y(x) = e^x + C_1 \\ y'' &= e^x &\leftarrow y(x) = e^x + C_2x + C_1 \\ y''' &= e^x &\leftarrow y(x) = e^x + C_3x^2 + C_2x + C_1 \end{aligned}$$

Cada una de las soluciones representan familias de soluciones, una para cada constante. Este tipo de soluciones las denominaremos soluciones generales. Es decir, llamaremos solución general de una ecuación diferencial aquella que queda indeterminada por un conjunto de constantes $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$. En contraste, cuando *particularizamos* los valores de las constantes tendremos una solución *particular* para cada una de las ecuaciones. Adicionalmente, cuando nos referimos a las ecuaciones no lineales el concepto de solución particular varía. Soluciones particulares en este tipo de ecuaciones serán aquellas que se cumplen para rangos (o puntos) muy particulares. Vale decir

$$\left. \begin{array}{l} (y')^2 + y^2 = 0 \\ (y'')^2 + y^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \text{ única solución}$$

También en este caso llamaremos a este tipo de soluciones, particulares. De igual modo puede darse casos para los cuales no existe solución en un determinado intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} |y'|^2 + 1 = 0 \\ |y''|^2 + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no tienen solución}$$

Ecuaciones de la forma

$$xy' = 1 \Rightarrow y(x) = \ln|x| + C \Rightarrow \begin{cases} y(x) = \ln(x) + C_1 \text{ para } x > 0 \\ y(x) = \ln(-x) + C_1 \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

con: $-1 < x < 0 \wedge 0 < x < 1$, tienen soluciones particulares para intervalos de la variables x .

Del mismo modo

$$(y' - y)(y' - 2y) = 0 \Rightarrow [y(x) - C_1e^x][y(x) - C_2e^{2x}] = 0$$

tendrá dos soluciones particulares.

3.6.1. Familia de soluciones n -paramétricas

Si $y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ es solución de una ecuación diferencial

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0,$$

para n constantes $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$ arbitrarias, entonces diremos que

$y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ es una familia n -paramétrica de soluciones.

Existe una diferencia entre una solución general de una ecuación y una solución n -paramétrica. La solución general tiene que contener **todas** las soluciones de una ecuación diferencial determinada. Una solución n -paramétrica no necesariamente. Veamos

$$y = xy' + (y')^2 \Rightarrow \begin{cases} y(x) = Cx + C^2 \\ y(x) = -\frac{x^2}{4} \end{cases}$$

Se estaría tentado en llamar solución general a la solución 1-paramétrica $y = Cx + C^2$. Sin embargo, se deja por fuera a la otra solución que no tiene que ver con un valor particular de la constante C .

Otro ejemplo, lo constituye

$$y' = -2y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y(x) = \frac{C^2}{(Cx + 1)^2}, \forall x,$$

pero también

$$y(x) = (x + \tilde{C})^{-2}, \text{ es solución con } y(x) \neq 0.$$

Una solución n -paramétrica se denominará solución general si contiene **todas** las soluciones de una determinada ecuación diferencial. En el caso de ecuaciones diferenciales lineales, las soluciones n -paramétricas constituyen las soluciones generales a las ecuaciones diferenciales.

3.6.2. Solución particular, valores iniciales y valores de contorno

Dependiendo de la situación física que estemos modelando quizás podamos determinar las constantes arbitrarias de una familia n -paramétrica con información para un único punto $x = x_0$. Esto es:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0 \Rightarrow y(x) = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

donde

$$y(x_0) = C_1 \quad y'(x_0) = C_2 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = C_n.$$

En este caso diremos que tendremos un problema de valores iniciales, ya que determinaremos las constantes arbitrarias a partir de la información de la función y sus derivadas en un solo punto, por ejemplo:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x).$$

Si por el contrario, para determinar el valor de las constantes arbitrarias disponemos de información de la función y sus derivadas en dos o más puntos, diremos que tendremos un problema de contorno. Esto es:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{con } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \sin(n\pi\omega x).$$

Nótese que también pudimos haber tenido información del tipo

$$y(0) = y_0, y'(1) = y_1; \quad y'(0) = y_0, y'(1) = y_1; \quad y'(0) = y_0, y(1) = y_1,$$

y para cada uno de estos caso tendremos una solución distinta.

Demostraremos que los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales siempre tienen solución particular (siempre se pueden determinar las constantes a partir de la información de la función y las derivadas en UN punto). No así los problemas de valores de contorno.

Capítulo

4

Ecuaciones diferenciales de orden 1

4.1. Soluciones analíticas

Es fundamental, primero que todo, identificar con que tipo de ecuación diferencial ordinaria que estamos tratando antes de cualquier intento de conseguir una solución. Veamos varios ejemplos:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}(\theta) = 0,$	EDO no lineal, homogénea de orden 2
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0,$	EDO lineal, homogénea de orden 2
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = E(t),$	EDO lineal, no homogénea de orden 2
$y' + xy = \frac{x}{y^3},$	EDO no lineal, homogénea de orden 1
$y' - x^3 + 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x}y^2 = 0,$	EDO no lineal, no homogénea de orden 1
$\tan(x)y' - y = \tan^2(x),$	EDO lineal, homogénea de orden 1
$xy' + y = x^3,$	EDO lineal, no homogénea de orden 1

Ahora de manera un poco más sistemática diremos que una ecuación diferencial de primer orden será un funcional tal que si es explícita respecto a la derivada ésta se podrá despejar

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' \equiv \frac{dy(x)}{dx} = H(x, y) \\ P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$y' = 2xy + e^x \Rightarrow (2xy - e^x)dx - dy = 0,$$

$$y' = \ln(x) + y \Rightarrow (\ln(x) + y)dx - dy = 0$$

4.1.1. Métodos elementales de integración

Para comenzar expondremos unos métodos de integración, los cuales si bien son elementales y casi triviales serán utilizados en lo que sigue con bastante frecuencia.

Integración directa

La integración directa tiene varias variantes las cuales nos hemos tropezado en varias situaciones de modelaje y que nos han permitido integrar (intuitivamente) ecuaciones diferenciales. La más directa de todas tiene que ver con la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)$$

por lo cual, al integrar (analítica o numéricamente) tendremos la expresión para la función $y(x)$,

$$\int dy(x) = \int dx f(x) \Rightarrow y(x) = \int dx f(x) + C$$

La integración directa fue la estrategia que utilizamos anteriormente para encontrar las formulitas que nos aprendimos en bachillerato. Esto es

$$\frac{\sum F_{ext}}{m} = \frac{dv(t)}{dt} = a = \text{constante} \Rightarrow \begin{cases} v(t) = \int dt a = at + C_1 \\ x(t) = \int dt (at + C_1) = a\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

en la cual al recordar las condiciones iniciales se tiene:

$$v(0) = v_0 \equiv C_1 \Rightarrow v(t) = v_0 + at$$

$$x(0) = x_0 \equiv C_2 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + a\frac{t^2}{2}.$$

Una primera variante de la estrategia de integración directa anterior se aplica a la siguiente ecuación

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y)$$

acomodando los términos e integrando resulta:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx \Rightarrow \mathcal{F}[y(x)] = x + C$$

donde $\mathcal{F}[y(x)]$ será un funcional, desde el cual quizás se pueda despejar $y(x)$.

Esta estrategia se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -ay(x), \text{ con } y(0) = 2,$$

entonces:

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx \Rightarrow y(x) = Ce^{-ax} \Rightarrow y_p(x) = 2e^{-ax}.$$

la Figura 4.1 muestra varias soluciones particulares pertenecientes a esta familia, para $a = \frac{1}{3}$.

Otro ejemplo de integración directa se puede ver en la búsqueda de la solución de la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$yy' = (y+1)^2$$

esto es:

$$\frac{yy'}{(y+1)^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{ydy}{(y+1)^2} = \int dx, \text{ para } y \neq -1,$$

integrando

$$\frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x + C,$$

que no es otra cosa que una familia de soluciones implícitas, 1-paramétrica. Para una condición inicial como $y(2) = 0$ entonces

$$y(2) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow \frac{1}{y+1} + \ln|y+1| = x - 1 \text{ para } y \neq -1,$$

una vez más esta familia de soluciones 1-paramétrica no constituye la solución general de la ecuación diferencial ya que no contiene todas las soluciones. En este caso, $y(x) = -1$ también es solución.

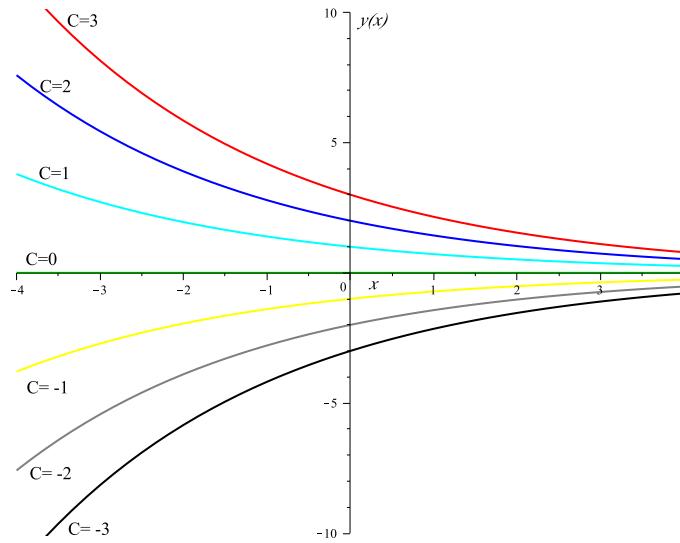


Figura 4.1: Familia de soluciones 1-paramétrica para $a = \frac{1}{3}$. En particular han sido tomados los valores $C = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

4.1.2. Ecuaciones diferenciales separables

Los casos anteriores de integración directa son generalizados por una ecuación que llamaremos separable. Esto es, la función (funcional) de dos variables del lado derecho se supone que es el resultado del producto de dos funciones de una variable, con lo cual las variables dependientes e independientes se agrupan a lados distintos de la igualdad. La siguiente ecuación es separable

$$\frac{dy(x)}{dx} = F[y(x)]G(x)$$

y por lo tanto

$$\frac{dy(x)}{F(y)} = G(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{F(y)} = \int G(x) dx.$$

Por ejemplo, al querer resolver la siguiente ecuación

$$\frac{dy(x)}{dx} = x + xy$$

se tiene

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x dx \Rightarrow \ln(1+y) = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y(x) = Ae^{\frac{x^2}{2}} - 1,$$

donde C o A son constantes arbitrarias a ser determinadas por las condiciones iniciales y además con $y \neq -1$. De todos modos $y = -1$ es una solución particular.

4.1.3. Ecuaciones diferenciales no separables

Veamos ahora un caso bastante sencillo de resolver donde la EDO no es una ecuación diferencial separable. Consideremos, a manera de prueba, la ecuación diferencial siguiente

$$\frac{dy(x)}{dx} + ay(x) = e^{-x}, \text{ con } y(0) = 2,$$

entonces, podemos preguntarnos sobre la posibilidad de que exista una función $\mu(x)$ de manera que si multiplicamos ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$ entonces, el lado izquierdo de la ecuación diferencial se pueda escribir como:

$$\mu(x) \left[\frac{dy(x)}{dx} + ay(x) \right] \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)].$$

De esta manera, la función $\mu(x)$ es una función a determinar (en este caso a adivinar). Efectivamente tenemos que si

$$\mu(x) = e^{ax},$$

entonces al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por $\mu(x)$, resulta:

$$\begin{aligned} e^{ax} \frac{dy(x)}{dx} + e^{ax} ay(x) &= e^{ax} e^{-x} \\ \frac{d}{dx} [e^{ax} y(x)] &= e^{(a-1)x} \\ \int d[e^{ax} y(x)] &= \int dx e^{(a-1)x} \end{aligned}$$

de forma y manera que:

$$e^{ax} y(x) = \frac{1}{a-1} e^{(a-1)x} + C.$$

Para $y(0) = 2$:

$$y(0) = 2 = \frac{1}{a-1} + C \Rightarrow C = \frac{2a-3}{a-1}$$

Una solución particular será entonces:

$$y_p(x) = \frac{1}{a-1} [e^{-x} + (2a-3)e^{-ax}].$$

Un par comentarios son pertinentes:

- Llamaremos al término $\mu(x)$ factor integrador de la ecuación diferencial. Este factor está relacionado con propiedades de simetría de la ecuación, pero en este nivel lo buscaremos tanteando.
- La solución general de esa ecuación diferencial toma la forma de $y(x) = e^{-x} + Ce^{-ax}$, donde el segundo de los términos $y_H(x) = Ce^{-ax}$ corresponde a la solución general para la ecuación homogénea asociada a esa ecuación diferencial: $\frac{dy(x)}{dx} + ay(x) = 0$. El otro término $y_I(x) = e^{-x}$ corresponde a la solución particular de la inhomogénea: $\frac{dy(x)}{dx} + ay(x) = e^{-x}$.

Esto último será una propiedad general para ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. Resolvemos la ecuación homogénea y luego encontraremos una solución de la inhomogénea. La solución general será una suma de ambas soluciones.

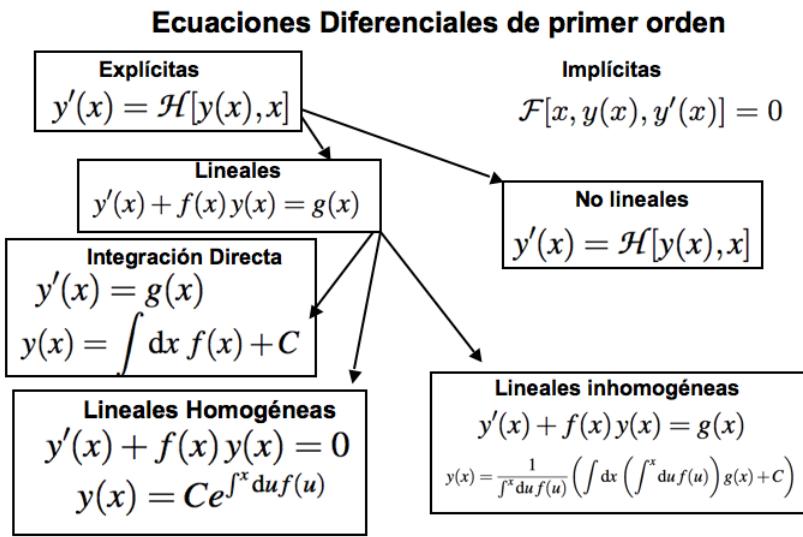


Figura 4.2: Mapa de las ecuaciones diferenciales explícitas

En general, para la ecuación

$$y' + ay = g(x), \quad \text{el factor integrador es: } \mu(x) = e^{ax}$$

y se tiene la siguiente solución general

$$y(x) = \underbrace{e^{-ax} \int_{x_0}^x dt g(t) e^{at}}_{\text{solución de la inhomogénea}} + \underbrace{Ce^{-ax}}_{\text{solución de la homogénea}}$$

la demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

La figura 4.2 muestra el mapa de ruta para la resolución de las EDO lineales.

4.1.4. Método de las Isoclinas

Este método se basa en la idea de campo y curvas integrales que vimos cuando estudiamos campos vectoriales. La idea es bien simple, en general, una ecuación diferencial de primer orden (explícita respecto a la derivada) se podrá representar como:

$$y' = f(y, x). \quad (4.1)$$

Ahora bien, el lado derecho de esa igualdad lo representa una función de dos variables, la cual tendrá un valor en cada punto (x, y) . Ese valor (por la igualdad que representa la ecuación diferencial) será el valor de la derivada en ese punto y el valor de la derivada en un punto, no es otra cosa que la pendiente de la recta tangente a una curva en ese punto. Con eso, al construir una gráfica recordamos las curvas integrales de los campos vectoriales y reconstruimos las curvas solución a partir de sus tangentes.

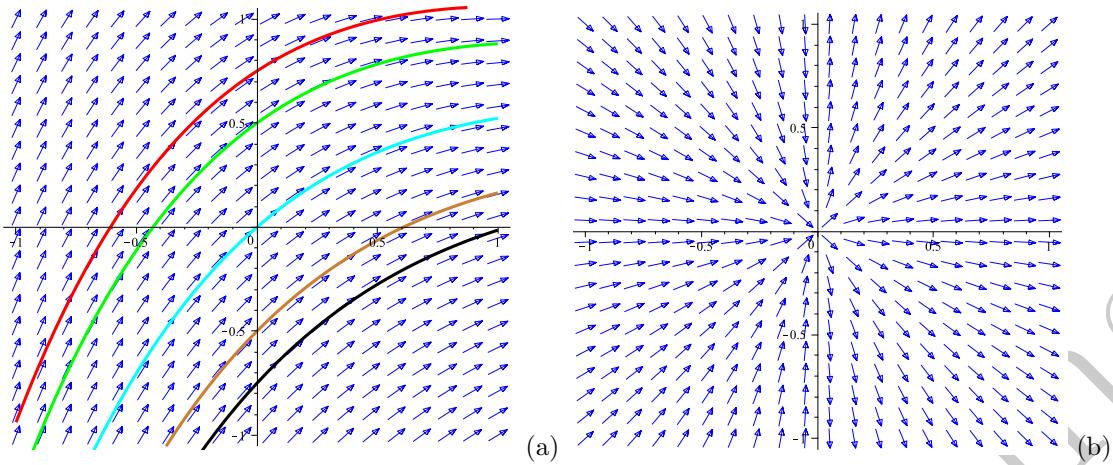


Figura 4.3: Isoclinas para los ejemplos (a) y (b)

Tenemos entonces que si $y = f(x)$ o $f(x, y) = 0$ define y como una función de x que satisface $y' = f(y, x)$ sobre un intervalo $a < x < b$, entonces el gráfico de esta función se denomina una curva integral y a la totalidad de esas curvas se le llama un campo de direcciones. A las curvas con la propiedad: $y' = f(x, y) = \text{constante}$ se le denominan isoclinas (igual pendiente).

Ejemplos: La EDO

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow y = Cx \leftarrow \text{curva integral. } (x \neq 0, y \neq 0).$$

Para la ecuación

$$y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow x^2 + y^2 = C^2 \leftarrow \text{curva integral. } (x \neq 0, y \neq 0).$$

Cuando por un punto pasa más de una curva integral lo llamaremos un punto singular y para los puntos por donde pase una y solo una curva integral le llamaremos puntos ordinarios.

La Figura 4.3 contiene la representación gráfica para las tangentes de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad y' = e^{-x} - \frac{1}{3}y \quad (b) \quad y' = \frac{y}{x}$$

y la Figura 4.4 las de

$$(c) \quad y' = -\frac{x}{y} \quad (d) \quad y' = 1 + xy$$

En el Cuadrante (a) de la Figura 4.3 se muestran las soluciones particulares para las condiciones iniciales: $y(0) = 0,75, 0,50, 0, -0,50, -0,75$. El Cuadrante (b) de la misma figura corresponde a las tangentes generadas a partir de la ecuación diferencial. Nótese que son curvas integrales radiales y que para el punto $x = 0$ no está definida la curva integral. En el Cuadrante (c), de la Figura 4.4, se representan las tangentes de la ecuación. Finalmente el Cuadrante (d) contiene las tangentes a la ecuación diferencial, en ella se han indicado las curvas integrales para las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales: $y(0) = 0,75, 0,50, 0, -0,50, -0,75$.

Es importante señalar que este método permite obtener las posibles soluciones de una ecuación diferencial no importa lo complicada que sea.

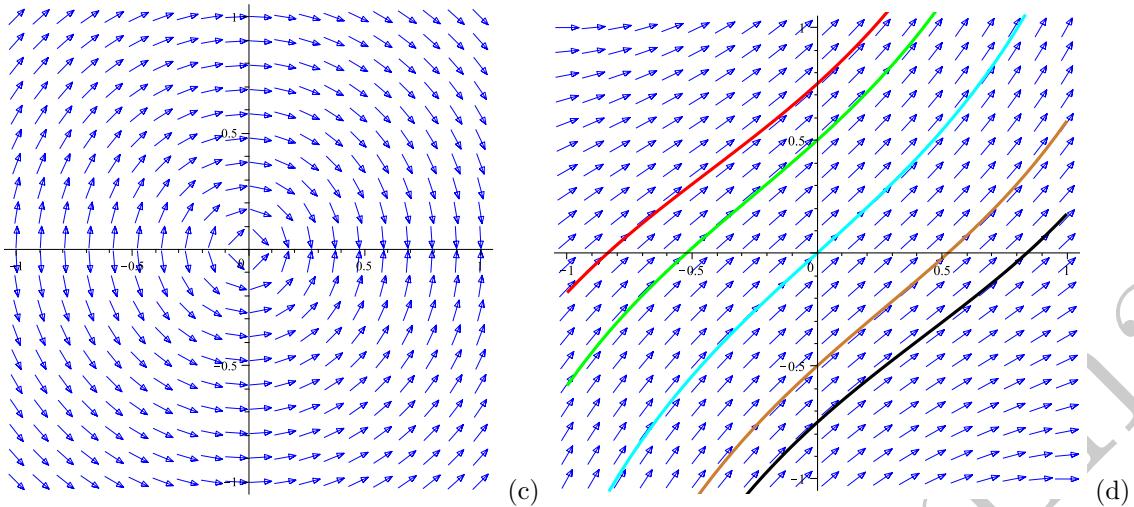


Figura 4.4: Isoclinas para los ejemplos (c) y (d)

Ejercicio Utilice el método anterior para estudiar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$(a) \quad y' = x + y, \quad |x| < 5. \quad (b) \quad y' = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |x| < 1. \quad (c) \quad y' = 1 + xy, \quad |x| < 5.$$

4.1.5. Ecuaciones diferenciales separables

La primera estrategia será la que consideramos anteriormente en el sentido que la ecuación diferencial sea separable. Es decir que las variables dependientes e independientes puedan ser agrupadas y, a partir de allí intentar una integración de cada grupo por separado. Esto lo esbozamos, más o menos así

$$\frac{dy(x)}{dx} = F(y(x))G(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{F(y)} = G(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{F(y)} = \int G(x) dx$$

o equivalentemente

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1(x)P_2(y)dy + Q_1(x)Q_2(y)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_2(y)}{Q_2(y)}dy + \frac{Q_1(x)}{P_1(x)}dx = 0$$

Ejemplo Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$y' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{5-y}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2} dx + \sqrt{5-y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int dx \sqrt{1-x^2} + \int dy \sqrt{5-y} = 0$$

con lo cual, al integrar resulta que

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsen(x) + \frac{2}{3}(5-y)^{3/2} = C \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad y > -5$$

Nótese que el $\arcsen(x)$ es multivaluada por lo tanto debemos restringir el intervalo a su valor principal $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio Pruebe que

$$y' \sqrt{1-x^2} = x \sqrt{1-y},$$

tiene como solución:

$$\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-y} = C \quad \text{para } -1 < x < 1 \quad \wedge \quad y < 1.$$

Es $y=1$ una solución particular?

4.1.6. Variaciones sobre separabilidad

Existen otras situaciones en las cuales encontraremos ecuaciones diferenciales que podremos convertir en separables a través de un cambio de variable:

$$\frac{dy}{dx} = f(\underbrace{ax + by + c}_z) \Rightarrow dz = a dx + b dy,$$

por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = b f(z) + a$$

es decir, el cambio de variable nos conduce a una ecuación diferencial separable:

$$\frac{dz}{b f(z) + a} = dx.$$

Ejemplo:

$$y' = \operatorname{sen}^2(x-y) \Rightarrow dz = dx - dy,$$

esto es

$$y' = 1 - \frac{dz}{dx} \Rightarrow z' = 1 - \operatorname{sen}^2(z) \Rightarrow \int \frac{dz}{1 - \operatorname{sen}^2(z)} = \int dx$$

es decir

$$\int \frac{dz}{\cos^2(z)} = x + C \Rightarrow \tan(z) = x + C \Rightarrow \tan(x-y) = x + C \Rightarrow y = x - \arctan(x+C).$$

Se puede tratar de generalizar el caso anterior y considerar ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Entonces, se distinguen dos casos dependiendo de si las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ son paralelas o no.

1. Son paralelas:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \equiv \tilde{f}(a_1x + b_1y)$$

la cual analizamos anteriormente.

Ejemplo

$$y' = -\frac{2x + 3y - 1}{4x + 6y + 2} \Rightarrow \lambda = 2, \quad z = 2x + 3y - 1 \Rightarrow dz = 2dx + 3dy \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(z' - 2)$$

con lo cual

$$\frac{1}{3}(z' - 2) = -\frac{z}{2z + 4} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z + 8}{2z + 4} \Rightarrow \int \frac{2z + 4}{z + 8} dz = \int dx \Rightarrow 2z - 12 \ln|z + 8| = x + C,$$

por lo tanto, la solución será:

$$4x + 6y - 2 - 12 \ln|2x + 3y + 7| = x + C \Rightarrow x + 2y - 4 \ln|2x + 3y + 7| = \tilde{C},$$

con $2x + 3y + 7 \neq 0$. Podemos comprobar que $2x + 3y + 7 = 0$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

2. No son paralelas, entonces se intuye el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1 \Rightarrow du = a_1dx + b_1dy & dx &= \frac{b_2du - b_1dv}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ v &= a_2x + b_2y + c_2 \Rightarrow dv = a_2dx + b_2dy & dy &= \frac{a_1dv - a_2du}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}$$

con lo cual, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{u}{v}\right),$$

queda de la forma

$$\left[a_2 + b_2f\left(\frac{u}{v}\right)\right]du - \left[a_1 + b_1f\left(\frac{u}{v}\right)\right]dv = 0,$$

donde la función $f\left(\frac{u}{v}\right)$ se conoce como una función homogénea al igual que la ecuación diferencial que hereda de ésta su nombre. Este tipo de ecuaciones diferenciales serán consideradas en la próxima sección.

Otro enfoque (equivalente) de este mismo problema puede ser consultado en el problemario de Kisieliov, Kransnov, Makarenko¹. En este enfoque el cambio de variables se relaciona con el punto de corte (x_0, y_0) .

Para exemplificar este caso analizaremos un ejemplo sencillo de una función con argumento inhomogéneo del tipo.

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \Leftrightarrow Q(x, y)dy + P(x, y)dx = 0 \Rightarrow \begin{cases} Q(x, y) \propto a_2x + b_2y + c_2 \\ P(x, y) \propto a_1x + b_1y + c_1 \end{cases}$$

Decimos, entonces que los coeficientes $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ son inhomogéneos ($c_i \neq 0$). Su pondremos que las rectas no son paralelas, por lo cual utilizamos el cambio de variable propuesto anteriormente. Entonces

$$u = a_2x + b_2y + c_2 \Rightarrow du = a_2dx + b_2dy \Rightarrow dy = \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{du}{a_2} - \frac{dv}{a_1} \right)$$

$$v = a_1x + b_1y + c_1 \Rightarrow dv = a_1dx + b_1dy \Rightarrow dx = \frac{1}{a_2 - a_1} \left(\frac{du}{b_2} - \frac{dv}{b_1} \right)$$

¹A. Kisieliov, M. Krasnov y G. Makarenko (1969) **Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.** (Mir, Moscú)

con lo cual convertimos los los coeficientes $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ en homogéneos. Esto es

$$\underbrace{(a_2x + b_2y + c_2)dy + (a_1x + b_1y + c_1)dx = 0}_{\Downarrow} \\ \underbrace{\left(\frac{u}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{v}{b_2(a_2 - a_1)} \right) du - \left(\frac{u}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{v}{b_1(a_2 - a_1)} \right) dv = 0}$$

es decir

$$P(u, v) = u \left(\frac{1}{a_2(b_2 - b_1)} + \frac{\frac{v}{u}}{b_2(a_2 - a_1)} \right) = ug_1\left(\frac{v}{u}\right); Q(u, v) = u \left(\frac{1}{a_1(b_2 - b_1)} + \frac{\frac{v}{u}}{b_1(a_2 - a_1)} \right) = ug_2\left(\frac{v}{u}\right).$$

Este tipo de funciones homogéneas serán consideradas en la siguiente sección.

4.1.7. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Funciones homogéneas de grado n

Definición: Diremos que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } w = \frac{y}{x} \Rightarrow f(x, y) = x^n g(w) \\ \text{si } w = \frac{x}{y} \Rightarrow f(x, y) = y^n h(w) \end{cases}$$

donde n es una constante y $t > 0$.

Las funciones homogéneas indican un comportamiento particular cuando cambiamos la escala de sus variables. Se utilizan con bastante frecuencia en hidrodinámica y termodinámica.

Ejemplo: La siguiente función:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

es una función homogénea de grado 2, ya que:

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 \ln\left(\frac{ty}{tx}\right) \Rightarrow f(tx, ty) = t^2 \left[x^2 + y^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right] = t^2 f(x, y).$$

Ejercicios: Muestre que:

1. $f(x, y) = \sqrt{y} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ es homogénea de grado $\frac{1}{2}$.
2. $f(x, y) = e^{y/x} + \tan\left(\frac{x}{y}\right)$ es homogénea de grado 0.

Definición Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (4.2)$$

será una ecuación diferencial con coeficientes homogéneos si:

$$Q(x, y) \text{ y } P(x, y) \text{ son homogéneas de grado } n.$$

Teorema Si los coeficientes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ de una ecuación diferencial son homogéneos de orden n , entonces la siguiente sustitución: $y = ux$, convertirá la ecuación diferencial en una ecuación diferencial donde las variables son separables.

Demostración Como $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas de orden n (hipótesis) entonces:

$$P(x, y) = x^n f(u) \quad y \quad Q(x, y) = x^n g(u),$$

sustituyendo en la ecuación diferencial (4.2):

$$\begin{aligned} x^n f(u)dx + x^n g(u)(udx + xdu) &= 0 \\ [f(u) + ug(u)]dx + xg(u)du &= 0 \\ [f(u) + ug(u)] \frac{dx}{x} + g(u)du &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{g(u)du}{f(u) + ug(u)} &= 0, \end{aligned}$$

donde $x \neq 0$ y $f(u) + ug(u) \neq 0$. §

Ejercicio: Demuestre que la sustitución $x = uy$ también convierte la ecuación diferencial en una de variables separables.

Nótese que exigir que $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ sean funciones homogéneas de grado n , equivale a imponer que

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{donde } F\left(\frac{y}{x}\right) \text{ es homogénea de grado 0,}$$

con lo cual estamos diciendo que si los coeficientes $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ son funciones homogéneas de grado n , la ecuación diferencial es invariante de escala.

Ejemplos:

- Como un primer ejemplo consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Esto es

$$\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right)dx - xdy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + ty = t\left(\sqrt{x^2 - y^2} + y\right) \\ Q(tx, ty) = -tx \end{cases}$$

los coeficientes son funciones homogéneas de grado 1 y por lo tanto al hacer $y = ux$ tendremos

$$x\left(\sqrt{1 - u^2} + u\right)dx - x(udx + xdu) = 0 \Rightarrow \pm\sqrt{1 - u^2}dx - xdu = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \pm \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Notemos que: $u \neq \pm 1$ y $x \neq 0$. Integrando y, finalmente, llegamos a

$$\ln|x| = \arcsen(u) + C \Rightarrow \ln|x| = \arcsen\left(\frac{y}{x}\right) + C, \quad \text{para } \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \text{ con } x > 0$$

$$-\ln|-x| = \arcsen(u) + C \Rightarrow -\ln|-x| = \arcsen\left(\frac{y}{x}\right) + C, \quad \text{para } \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \text{ con } x < 0.$$

En este caso tenemos que $u = \left|\frac{y}{x}\right| = 1 \Rightarrow y = \pm x$ también es solución.

2. Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$(x+y)y' - 2x + y - 1 = 0$$

la cual corresponde al caso en los cuales los coeficientes de la ecuación $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ son funciones inhomogéneas. Tal y como hemos visto un cambio de variable lo convierte en homogéneo. De nuevo, hay que tener cuidado con el signo + de: $Pdx + Qdy = 0$.

$$(2x-y+1)dx-(x+y)dy=0 \Rightarrow \begin{cases} u=2x-y+1 \\ v=-(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx-dy \\ dv=-dx-dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=\frac{1}{3}(du-dv) \\ dy=-\frac{1}{3}(du+2dv) \end{cases}$$

así nuestra ecuación diferencial tendrá la forma de una ecuación homogénea

$$(u+v)du-(u-2v)dv=0,$$

y ahora haciendo el cambio de variables $u = tv$ con lo cual $du = t dv + v dt$

$$(tv+v)(tdv+vdt)-(tv-2v)dv=0 \Rightarrow (t^2+2)dv+v(t+1)dt=0 \Rightarrow \int \frac{dv}{v} + \int \frac{t+1}{t^2+2} dt = 0$$

e integrando tendremos que

$$\ln|v| + \frac{1}{2}\ln|t^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = C \Rightarrow \ln|v^2(t^2+2)| + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = \tilde{C},$$

para $v \neq 0$, y ahora

$$t = \frac{u}{v} = \frac{2x-y+1}{-(x+y)} \Rightarrow \ln|(x+y)^2 + 2(2x-y+1)^2| + \sqrt{2}\arctan\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2x-y+1}{-(x+y)}\right| = C,$$

para $x+y \neq 0$. La Figura 4.5 ilustra esta familia de soluciones.

Ejemplo Tratemos con un ejemplo para ilustrar las ecuaciones isóbaras. Consideremos la ecuación

$$2xyy' + y^2 + \frac{2}{x} = 0, \quad \text{entonces,}$$

$$\left(y^2 + \frac{2}{x}\right)dx + 2xydy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow x & \Leftrightarrow dx = dx \\ y \rightarrow z^m & \Leftrightarrow dy = mz^{m-1}dz \end{cases}$$

En la contabilidad de los exponentes de x aporta un peso de 1 mientras que y aporta un peso de m . La intención es balancear los términos para que la ecuación sea homogénea de grado n . Esto es

$$\begin{aligned} \left(z^{2m} + \frac{2}{x}\right)dx + 2xz^m mz^{m-1}dz &= 0 \\ \left(z^{2m} + \frac{2}{x}\right)dx + 2mxz^{-1}z^{2m}dz &= 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = vx^m \Rightarrow y = \frac{v}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

El exponente del primer término es $2m$, del segundo -1 del tercero $2m$. Al balancear todos los exponentes tendremos $2m = -1$, con lo cual $m = -\frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{v^2}{x} + \frac{2}{x}\right)dx + 2x\frac{v}{\sqrt{x}}\left(\frac{dv}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{v}{x\sqrt{x}}dx\right) = 0 \Rightarrow vdv + \frac{dx}{x} = 0$$

entonces al integrar y devolver el cambio $v = y\sqrt{x}$ tendremos

$$\int dv + \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} + \ln|x| = c \Rightarrow \frac{1}{2}y^2x + \ln|x| = c.$$

4.1.8. Ecuaciones Isóbaras

Las ecuaciones isóbaras generalizan a las ecuaciones homogéneas por cuanto los coeficientes de la ecuación $Q(x, y)$ y $P(x, y)$ no son funciones homogéneas del mismo grado y se busca una transformación que convierta la ecuación en homogénea. Es decir, si la dimensionalidad en potencias de y es la misma que la dimensionalidad en potencias de x . Diremos que una ecuación diferencial es isóbara si cumple con

$$\begin{aligned} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= 0 \\ \Downarrow \\ Q(tx, t^m y) &\rightarrow t^n P(x, y) \\ P(tx, t^m y) &\rightarrow t^{n-m+1} Q(x, y) \end{aligned}$$

y el cambio de variable que se impone es $y = vx^m$. Con lo cual habrá que estudiar si es posible “balancear” el orden de las dimensionalidades de variables y funciones.

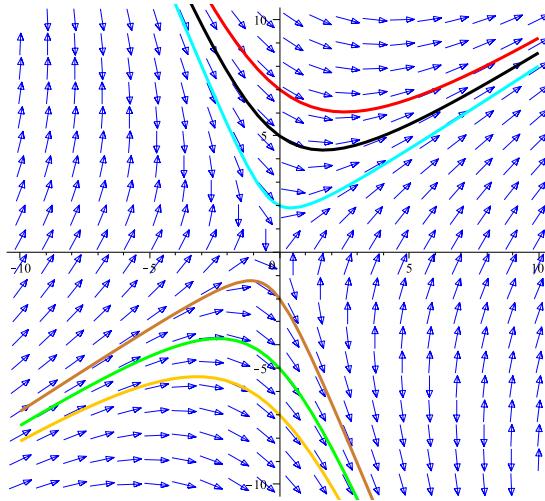


Figura 4.5: Solución gráfica para la ecuación diferencial $(x+y)y' - 2x + y - 1 = 0$. Las curvas de diferentes colores indican soluciones particulares: $y(0) = 7$; $y(0) = 5$; $y(0) = 2$; $y(0) = -7$; $y(0) = -5$; $y(0) = -2$.

4.1.9. Ecuaciones diferenciales exactas

El segundo grupo de estrategias apunta a escribir una ecuación diferencial como una derivada total de un conjunto de funciones. Uno se ayuda en una posible función que pueda acomodar los términos de la ecuación. Esta función se denomina factor integrador, para una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x)y(x) = g(x),$$

al multiplicar a ambos lados por $\mu(x)$ resulta

$$\mu(x)\frac{dy(x)}{dx} + \mu(x)f(x)y(x) = \mu(x)g(x),$$

por otro lado, tenemos y queremos que

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] \equiv \mu(x)\frac{dy(x)}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y(x) = \mu(x)g(x),$$

para que esas dos últimas ecuaciones sean equivalentes los coeficientes de $y(x)$ tienen que ser iguales, es decir,

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)f(x) \Rightarrow \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int dx f(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int dx f(x)}$$

Con lo cual hemos demostrado que para una ecuación lineal de primer orden, siempre es posible encontrar un factor integrador $\mu(x)$ tal que la ecuación diferencial pueda ser expresada como una derivada total del factor integrador y la función incognita.

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x)y(x) = g(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)g(x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int dx \mu(x)g(x) + C \right]$$

donde $\mu(x) = e^{\int dx f(x)}$.

Definición Una ecuación diferencial de la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

se llama una ecuación diferencial exacta si esta es el diferencial total de alguna función $f(x, y)$, es decir, si:

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) \quad \text{y} \quad Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y).$$

Teorema Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

sea exacta es que:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y),$$

donde las funciones: $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial_y P(x, y)$, $\partial_x Q(x, y)$ deben existir y ser continuas.

Demostración Vamos a probar que si: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, entonces: $\partial_y P(x, y) = \partial_x Q(x, y)$.

Como la ecuación es exacta, por la definición anterior se tiene que:

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}f(x, y) \quad \wedge \quad Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y),$$

y como suponemos que $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\partial_y P(x, y)$, $\partial_x Q(x, y)$ existen y son continuas:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) \quad \wedge \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x, y) \quad \exists,$$

y como:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x, y),$$

por lo tanto tenemos que una condición necesaria es:

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y).$$

Por otro lado, probemos que si: $\partial_y P(x, y) = \partial_x Q(x, y)$ entonces: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ es exacta. Así, para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$d[f(x, y)] = 0 \Leftrightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \Rightarrow d[f(x, y)] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy = 0$$

donde $f(x, y)$ será la función a determinar.

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ Q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \Rightarrow d[f(x, y)] = 0$$

Si esto se cumple entonces, podremos encontrar la función $f(x, y)$ integrando respecto a cualquiera de las variables (ahora consideradas independientes ambas)

$$P(x, y) \equiv \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Leftrightarrow f(x, y) = \int_{x_0}^x P(u, y)du + S(y) \Rightarrow Q(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(u, y)du + \frac{dS(y)}{dy}$$

entonces

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial P(u, y)}{\partial y} du + \frac{dS(y)}{dy} \equiv \int_{x_0}^x \frac{\partial Q(v, y)}{\partial v} dv + \frac{dS(y)}{dy} = Q(v, y)|_{v=x_0}^{v=x} + \frac{dS(y)}{dy}$$

con lo cual nos queda finalmente otra ecuación diferencial para encontrar $S(y)$ y con ella $f(x, y)$. Esto es

$$\frac{dS(y)}{dy} = Q(x_0, y) \Rightarrow S(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, w)dw \Rightarrow f(x, y) = \int_{x_0}^x P(u, y)du + \int_{y_0}^y Q(x_0, w)dw = C. \S$$

Hay que hacer notar que los segmentos de línea que unen el punto (x_0, y_0) con los puntos genéricos $(x, y_0) \wedge (x_0, y)$ pertenecen al entorno de (x_0, y_0) . Este tipo de entornos también se denomina *multiplemente conexo*.

Notemos que además de demostrar el teorema también encontramos una familia 1-parámetrica de soluciones:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(u, y)du + \int_{y_0}^y Q(x_0, w)dw = C.$$

Ejemplos: 1.- Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$[x\operatorname{sen}(y) - y^2]y' = \cos(y).$$

Entonces:

$$y' [x\operatorname{sen}(y) - y^2] = \cos(y) \Leftrightarrow \cos(y)dx - (x\operatorname{sen}(y) - y^2)dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) &= \cos(y) \\ Q(x, y) &= -(x\operatorname{sen}(y) - y^2) \end{cases}$$

y verificamos que esta ecuación diferencial es exacta, ya que

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\operatorname{sen}(y) \Rightarrow f(x, y) = \int_{x_0}^x P(u, y)du + \int_{y_0}^y Q(x, w)dw = C$$

con lo cual, si particularizamos el punto $(x_0, y_0) \equiv (0, 0)$ tendremos que

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x \cos(y)du + \int_{y_0}^y w^2 dw = C \Rightarrow x\cos(y) + \frac{y^3}{3} = C$$

2.- Sea la siguiente ecuación

$$(x^2y + y^3)y' + x^3 + y^2x = 0.$$

Por lo tanto:

$$(x^3 + y^2x)dx + (x^2y + y^3)dy \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) &= x^3 + y^2x \\ Q(x, y) &= x^2y + y^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2yx$$

la ecuación diferencial es exacta, y otra vez:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{x_0}^x (u^3 + y^2 u) du + \int_{y_0}^y (x^2 w + w^3) dw = C, \\ &= x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = C, \\ &= (x^2 + y^2)^2 = C. \end{aligned}$$

Ejercicio: Resuelva la ecuación diferencial siguiente:

$$(2xy\operatorname{sen}(x)) y' + x^3 + xy^2 \operatorname{sen}(2x) + y^2 \operatorname{sen}^2(x) = 0.$$

4.1.10. Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1

Una ecuación diferencial lineal de orden 1

$$\frac{dy(x)}{dx} + f(x)y(x) = g(x),$$

no es exacta, ya que:

$$[f(x)y(x) - g(x)] dx + dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = f(x)y(x) - g(x) \\ Q(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}.$$

pero como ya vimos, si $\mu(x)$ es un factor integrador, entonces:

$$\mu(x)[f(x)y(x) - g(x)] dx + \mu(x)dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = \mu(x)[f(x)y(x) - g(x)] \\ Q(x, y) = \mu(x) \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial_x \mu(x) &= \partial_y \{\mu(x)[f(x)y(x) - g(x)]\} \\ \frac{d\mu(x)}{dx} &= \mu(x)f(x) \\ \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} &= f(x)dx \Rightarrow \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int f(x)dx \Rightarrow \ln |\mu(x)| = \int f(x)dx, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Esto significa que para las ecuaciones lineales de orden 1 se tiene

$$e^{\int f(x)dx}[f(x)y(x) - g(x)] dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = e^{\int f(x)dx}[f(x)y(x) - g(x)] \\ Q(x, y) = e^{\int f(x)dx} \end{cases}$$

por lo tanto ahora es una ecuación exacta, ya que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &\Rightarrow \partial_y [e^{\int f(x)dx}f(x)y(x) - e^{\int f(x)dx}g(x)] = f(x)e^{\int f(x)dx} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &\Rightarrow \partial_x [e^{\int f(x)dx}] = f(x)e^{\int f(x)dx} \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación original multiplicada por el factor integrador que la convierte en exacta, podemos escribir:

$$\begin{aligned} e^{\int f(x)dx} f(x)y(x)dx - e^{\int f(x)dx} g(x)dx + e^{\int f(x)dx} dy &= 0 \\ e^{\int f(x)dx} dy + e^{\int f(x)dx} f(x)y(x)dx &= e^{\int f(x)dx} g(x)dx \\ d \left[y(x)e^{\int f(x)dx} \right] &= e^{\int f(x)dx} g(x)dx \\ y(x)e^{\int f(x)dx} &= \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + C. \end{aligned}$$

Llegamos entonces a la fórmula que nos dará la solución general para cualquier ecuación diferencial lineal de orden 1.

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int f(x)dx}} \int e^{\int f(x)dx} g(x)dx + \frac{C}{e^{\int f(x)dx}}. \quad (4.3)$$

En realidad, lo anterior se puede formalizar con el siguiente teorema para el problema de valores iniciales. Consultar la bibliografía recomendada para estudiar su demostración

Teorema Sean las funciones F y $\partial_y F$ funciones continuas en algún intervalo $a < x < b$ y $c < y < d$ que contienen al punto (x_0, y_0) . Entonces, en algún intervalo $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ contenido en $a < x < b$, existe una única solución $y = y(x)$ del problema de valores iniciales:

$$\frac{dy(x)}{dx} = F(x, y), \quad \text{con } y(x_0) = y_0.$$

Ejemplo

$$y' - 2xy = e^{x^2},$$

aquí: $f(x) = -2x$ y $g(x) = e^{x^2}$. Por lo tanto, el factor integrador es:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int -2xdx} = e^{-x^2}.$$

La solución viene a ser:

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x^2}} \int e^{-x^2} e^{x^2} dx + \frac{C}{e^{-x^2}} = e^{x^2} (x + C).$$

Ejercicio Resuelva la ecuación

$$xy' + 3y = \frac{\sin(x)}{x^2}, \quad \text{con } x \neq 0, \text{ y } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

4.1.11. Ecuaciones diferenciales no lineales y el factor integrador

Del mismo modo, y con la misma idea, podemos incorporar el factor integrador $\mu(x, y)$ para extender la idea a ecuaciones que no sean, necesariamente lineales. Así para una ecuación diferencial que pueda ser escrita como

$$d[f(x, y)] = 0 \quad \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \quad \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx = 0$$

es decir

$$d[f(x, y)] = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy = \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx = 0$$

Entonces tendremos que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial sea exacta es:

$$\left. \begin{array}{l} \mu(x, y)P(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \mu(x, y)Q(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y)P(x, y)] \equiv \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y)Q(x, y)]$$

y, obviamente, esta condición de integrabilidad dependerá del $\mu(x, y)$ que propongamos. Veamos algunos casos:

- Si $\mu(x, y) = \mu(x)$ entonces la condición es

$$\mu(x) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx} Q(x, y) + \mu(x) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{Q(x, y)} \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right]$$

con lo cual, si se cumple que

$$\frac{1}{Q(x, y)} \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right] = f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int dx f(x)}$$

podremos determinar el factor integrador.

Una vez identificado procedemos a integrar, formalmente $f(x, y)$

$$f(x, y) = \mu(x) \int_{y_0}^y Q(x, u) du + S(x) \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \mu(x)P(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x) \int_{y_0}^y Q(x, u) du + S(x) \right]$$

y finalmente, una vez más

$$\mu(x)P(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial \mu(x)Q(x, u)}{\partial x} du + \frac{dS(x)}{dx} \Rightarrow \mu(x)P(x, y) = \int_{y_0}^y \frac{\partial \mu(x, u)P(x, u)}{\partial u} du + \frac{dS(x)}{dx}$$

con lo cual

$$S(x) = \int_{x_0}^x \mu(u, y_0)P(u, y_0) du \Rightarrow f(x, y) = \mu(x) \int_{y_0}^y Q(x, u) du + \int_{x_0}^x \mu(u, y_0)P(u, y_0) du + C.$$

Ejemplo

$$\cos(y)y' = -e^x + \sin(y).$$

Esta ecuación no es exacta, ya que:

$$[e^x - \sin(y)] dx + \cos(y) dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) &= e^x - \sin(y) \\ Q(x, y) &= \cos(y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \neq \frac{\partial P}{\partial y} = -\cos(y).$$

Podemos ver que el arreglo:

$$f(x) = \frac{1}{Q(x, y)} \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right] = \frac{-\cos(y) - 0}{\cos(y)} = -1,$$

entonces, el factor integrante es exacta:

$$\mu(x) = e^{\int dx f(x)} = e^{-\int dx} = e^{-x}.$$

Por lo tanto, la ecuación

$$e^{-x} [e^x - \operatorname{sen}(y)] dx + e^{-x} \cos(y) dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) &= 1 - e^{-x} \operatorname{sen}(y) \\ Q(x, y) &= e^{-x} \cos(y) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-x} \cos(y).$$

Queda como ejercicio resolver esta ecuación diferencial.

2. Si $\mu(x, y) = \mu(y)$ entonces la condición queda como

$$\frac{du(y)}{dy} P(x, y) + \mu(y) \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \mu(y) \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{\mu(y)} \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{P(x, y)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right],$$

con lo cual si se cumple que

$$\frac{1}{P(x, y)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] = f(y) = \frac{1}{\mu(y)} \frac{d\mu(y)}{dy} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int dy f(y)}$$

y podremos determinar el factor integrador.

Ejemplo

$$(1 + x^2) y' + xy = 0.$$

Esta ecuación no es exacta, ya que:

$$(xy) dx + (1 + x^2) dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) &= xy \\ Q(x, y) &= 1 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial P}{\partial y} = x.$$

Podemos ver que el arreglo:

$$\frac{1}{P(x, y)} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] = \frac{2x - x}{xy} = \frac{1}{y} = f(y),$$

entonces, el factor integrante es

$$\mu(y) = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln(y)} = y.$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta:

$$(xy^2) dx + (y + yx^2) dy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) &= xy^2 \\ Q(x, y) &= y + yx^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy.$$

Queda como ejercicio resolver esta ecuación diferencial.

Ejercicios

1. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = xy$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int dz f(z)},$$

donde:

$$f(z) = \frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{yQ(x, y) - xP(x, y)}$$

Con este resultado resuelva la ecuación:

$$(x^3 + x^2 y + x) y' + y^3 + x y^2 + y = 0.$$

2. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = x/y$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int dz f(z)},$$

donde:

$$f(z) = \frac{y^2 \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right]}{yQ(x, y) + xP(x, y)}$$

Resuelva la ecuación:

$$xy' = 3y.$$

3. Demuestre que si $\mu = \mu(z)$ donde $z = y/x$, entonces el factor integrante viene dado por

$$\mu(z) = e^{\int dz f(z)},$$

donde:

$$f(z) = \frac{x^2 \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right]}{yQ(x, y) + xP(x, y)}$$

Resuelva la ecuación:

$$3xy' = y.$$

4.1.12. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli, formulada por James Bernoulli² y resuelta por su hermano Johann Bernoulli, se caracteriza por tener la forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} + y(x)f(x) = y(x)^n g(x). \quad (4.4)$$

Es fácil darse cuenta de que la ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación con variables separadas cuando $n = 0$ y cuando $n = 1$ se trata de una ecuación de la forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x) [g(x) - f(x)].$$

la cual también es de variables separables. Entonces, es la presencia del término y^n lo que hace que la ecuación no sea lineal.

Leibniz, en 1696, indicó que el cambio de variable $z = y^{1-n}$ convierte la ecuación (4.4) en una ecuación lineal.

Consideremos entonces $n \neq 1$, si multiplicamos ambos lados de (4.4) por $(1-n)y^{-n}$ resulta:

$$\begin{aligned} (1-n)y^{-n} \left[\frac{dy}{dx} + yf(x) \right] &= (1-n)y^{-n}y^n g(x) \\ (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x) \\ \frac{d}{dx} [y^{1-n}] + (1-n)f(x)y^{1-n} &= (1-n)g(x), \end{aligned}$$

²James Bernoulli (1654-1705), fue un matemático y científico suizo, formaba parte de la gran familia Bernoulli. En 1690 se convirtió en la primera persona en desarrollar la técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables.

si se hace el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se tiene

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x). \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) es una ecuación diferencial lineal, la cual ya sabemos resolver.

Ejemplo Sea la ecuación:

$$y' + xy = \frac{x}{y^3}, \quad \text{con } y \neq 0.$$

esta ecuación es de la forma (4.4) con $n = -3$. Si multiplicamos por $4y^3$ se tiene:

$$\begin{aligned} (4y^3)y' + (4y^3)xy &= (4y^3)\frac{x}{y^3} \\ (4y^3)y' + 4xy^4 &= 4x \\ \frac{d}{dx}[y^4] + 4xy^4 &= 4x \end{aligned}$$

con el cambio de variable $z = y^4$, resulta

$$\frac{dz}{dx} + 4xz = 4x,$$

la cual es una ecuación diferencial lineal con factor integrador

$$\mu(x) = e^{\int dx f(x)} = e^{\int 4xdx} = e^{2x^2},$$

Por lo tanto, la solución vendrá dada por

$$y(x) = \frac{1}{e^{2x^2}} \int e^{2x^2} (4x) dx + \frac{C}{e^{2x^2}} = \frac{1}{e^{2x^2}} \left[e^{2x^2} \right] + \frac{C}{e^{2x^2}} = 1 + Ce^{-2x^2}.$$

Ejercicio Resuelva la ecuación

$$xy' + y - y^2 \ln x = 0.$$

4.1.13. Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati³ es conocida como una ecuación diferencial no lineal que tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy(x)}{dx} = A(x) + B(x)y(x) + C(x)y(x)^2, \quad C(x) \neq 0. \quad (4.6)$$

Esta ecuación fue estudiada por muchos matemáticos, entre ellos los propios integrantes de la familia Bernoulli. Daniel Bernoulli, hijo de John y sobrino de James Bernoulli, publicó su solución en 1724, luego de mantenerla oculta por mucho tiempo en modo de anagrama.

Podemos seguir las recomendaciones de Euler⁴ quien propuso que una sustitución del tipo:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \quad (4.7)$$

³El conde Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) fue un matemático veneciano, que estudió detalladamente la hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana.

⁴Leonhard Paul Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza y murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia. Fue un reputado matemático y físico, y es considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia.

donde $y_1(x)$ es una solución particular de (4.6), convierte la ecuación de Riccati en una ecuación lineal para $z(x)$. Al sustituir (4.7) en (4.6) resulta lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= A(x) + B(x) \left[y_1 + \frac{1}{z} \right] + C(x) \left[y_1 + \frac{1}{z} \right]^2 \\ z^2 \frac{dy_1}{dx} - \frac{dz}{dx} &= [A(x) + B(x)y_1 + C(x)y_1^2] z^2 + [2C(x)y_1 + B(x)] z + C(x) \\ -\frac{dz}{dx} &= \underbrace{\left[A(x) + B(x)y_1 + C(x)y_1^2 - \frac{dy_1}{dx} \right]}_{=0} z^2 + [2C(x)y_1 + B(x)] z + C(x)\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{dz}{dx} = -[2C(x)y_1 + B(x)] z - C(x). \quad (4.8)$$

También podemos hacer la siguiente sustitución

$$y(x) = y_1(x) + u(x) \quad (4.9)$$

donde $y_1(x)$ es una solución particular de (4.6). Esto es, al sustituir (4.9) en (4.6) resulta:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= A(x) + B(x)[y_1 + u] + C(x)[y_1^2 + 2y_1u + u^2] \\ \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= A(x) + B(x)y_1 + C(x)y_1^2 + [B(x) + 2C(x)y_1]u + C(x)u^2 \\ \frac{du}{dx} &= [B(x) + 2C(x)y_1]u + C(x)u^2,\end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{du}{dx} - [B(x) + 2C(x)y_1]u = C(x)u^2, \quad (4.10)$$

que no es más que la ecuación de Bernoulli (4.4) con $f(x) = -[B(x) + 2C(x)y_1]$, $g(x) = C(x)$ y $n = 2$.

Ejemplo Resolver la siguiente ecuación de Riccati

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2},$$

conociendo la solución particular $y_1 = 1/x$.

En lugar de hacer todo el desarrollo anterior, podemos reconocer de manera fácil que:

$$A(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad B(x) = 0, \quad C(x) = 1.$$

Tenemos entonces dos posibilidades: la primera es utilizar la ecuación lineal (4.8)

$$\frac{dz(x)}{dx} = -\left[\frac{2}{x}\right]z(x) - 1 \Rightarrow z(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}.$$

por lo tanto, al volver a la variable $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2}} = -\frac{2x^3 + 3c}{x(x^3 - 3c)}.$$

La segunda, es resolver la ecuación de Bernoulli (4.10) con $n = 2$

$$\frac{du(x)}{dx} - \left[\frac{2}{x} \right] u(x) = u(x)^2 \Rightarrow u(x) = -\frac{3x^2}{x^3 - 3c},$$

y en función de $y(x)$

$$y(x) = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 - 3c} = -\frac{2x^3 + 3c}{x(x^3 - 3c)}.$$

Ejercicios Resuelva la siguiente ecuación de Riccati

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2, \quad y_1(x) = -x^2.$$

4.1.14. Un tipo muy especial de ecuación diferencial no lineal

Vamos a estudiar la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{y(Ax^p y^q + Bx^r y^s)}{x(Cx^p y^q + Dx^r y^s)},$$

donde A, B, C, D son constantes.

La ecuación diferencial puede ser escrita como:

$$y(Ax^p y^q + Bx^r y^s) dx + x(Cx^p y^q + Dx^r y^s) dy = 0.$$

Y se puede demostrar que el factor integrante será de la forma

$$\mu(x, y) = x^a y^b,$$

donde a y b son constantes a determinar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

$$y(2x^2 y^3 + 3) dx + x(x^2 y^3 - 1) dy = 0,$$

entonces:

$$\begin{cases} P(x, y) &= y(2x^2 y^3 + 3) \\ Q(x, y) &= x(x^2 y^3 - 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 y^3 - 1 \neq \frac{\partial P}{\partial y} = 8x^2 y^3 + 3$$

La ecuación no es exacta.

Si $\mu(x, y) = x^a y^b$ es un factor integrante, resulta que:

$$\begin{aligned} (x^a y^b)(2x^2 y^4 + 3y) dx + (x^a y^b)(x^3 y^3 - x) dy &= 0 \\ (2x^{2+a} y^{4+b} + 3x^a y^{1+b}) dx + (x^{3+a} y^{3+b} - x^{1+a} y^b) dy &= 0 \end{aligned}$$

y será exacta si $\partial_y P = \partial_x Q$, esto es

$$\partial_y P = 2x^{2+a}(4+b)y^{3+b} + 3x^a(1+b)y^b = (3+a)x^{2+a}y^{3+b} - (1+a)x^a y^b = \partial_x Q,$$

si multiplicamos por $1/(x^a y^b)$ la ecuación anterior queda como:

$$2(4+b)x^2 y^3 + 3(1+b) = (3+a)x^2 y^3 - (1+a),$$

igualando coeficientes resulta

$$\begin{cases} 8 + 2b = 3 + a \\ 3 + 3b = -1 - a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{5}, \quad b = -\frac{9}{5}.$$

Por lo tanto el factor integrador es $\mu(x, y) = x^{7/5}y^{-9/5}$. Queda como ejercicio verificar que con este factor integrador la ecuación original es exacta.

4.1.15. Otros métodos

Muchas veces, la solución de una ecuación diferencial se puede obtener utilizando más de un método. Si fallan los métodos vistos anteriormente entonces podemos utilizar un poco de ingenio matemático. Veamos los siguientes ejemplos

1. Resolvemos la ecuación

$$xy' = y - y^2 - x^2,$$

la ecuación no es del tipo con coeficientes homogéneos

$$(y - y^2 - x^2)dx - xdy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = y - y^2 - x^2 \\ Q(x, y) = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \neq 1 - 2y = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

pero podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} ydx - xdy - (y^2 + x^2)dx &= 0 \\ \frac{ydx - xdy}{x^2} &= \left[\frac{y^2}{x^2} + 1 \right] dx, \quad x \neq 0 \\ -d\left[\frac{y}{x}\right] &= \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 \right] dx \\ -\frac{d\left[\frac{y}{x}\right]}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} &= dx \end{aligned}$$

integrando:

$$-\int \frac{d\left[\frac{y}{x}\right]}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = \int dx \Rightarrow -\arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x + C \Rightarrow y(x) = -x \tan(x + c), \quad x \neq 0.$$

2. Resolver

$$y' = -2x + 2(x^2 + y - 1)^{\frac{2}{3}}.$$

Podemos hacer la siguiente sustitución:

$$z = x^2 + y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2x$$

Por lo tanto

$$\frac{dz}{dx} - 2x = -2x + 2z^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2z^{\frac{2}{3}}$$

Nos queda entonces una ecuación separable

$$\frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} = 2dx \Rightarrow \int z^{-\frac{2}{3}} dz = \int 2dx \Rightarrow 3z^{\frac{1}{3}} = 2x + C, \quad z \neq 0$$

regresando a la variable original

$$3(x^2 + y - 1)^{\frac{1}{3}} = 2x + C \Rightarrow 27(x^2 + y - 1) = (2x + C)^3, \quad x^2 + y - 1 \neq 0$$

para finalizar, despejamos lo que será nuestra solución

$$y(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{27}(2x + C)^3.$$

Es bueno acotar y queda como ejercicio, demostrar que $y(x) = 1 - x^2$ también es una solución.

3. Resolver

$$2\cos(y)y' + \sin(y) = x^2 \csc(y), \quad y \neq 0.$$

Podemos verificar que los métodos anteriores no funcionan, pero si multiplicamos por $\sin(y)$:

$$\begin{aligned} 2\cos(y)\sin(y)y' + \sin^2(y) &= x^2 \csc(y)\sin(y) \\ \frac{d}{dx} [\sin^2(y)] + \sin^2(y) &= x^2 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación lineal para $\sin^2(y)$, si hacemos $z = \sin^2(y)$ tenemos:

$$\frac{dz}{dx} + z = x^2$$

donde es fácil ver que el factor integrador es $\mu(x) = e^x$. Por lo tanto:

$$z = \frac{1}{e^x} \int x^2 e^x dx + \frac{C}{e^x} = \frac{1}{e^x} (2 - 2x + x^2) e^x + \frac{C}{e^x} = 2 - 2x + x^2 + Ce^{-x},$$

la solución es entonces:

$$y(x) = \arcsen \left[\pm \sqrt{2 - 2x + x^2 + Ce^{-x}} \right], \quad y \neq 0.$$

4.1.16. Solución paramétrica: Ecuaciones no resueltas respecto a la derivada

Podemos preguntarnos sobre los casos donde no es posible despejar y' de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden: $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$.

Varias situaciones pueden aparecer:

$$\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}[y'(x)] = 0 \\ \mathcal{F}[x, y'(x)] = 0 \\ \mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0 \\ \mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0 \end{cases}$$

Veamos todos estos casos:

1. $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$

Como $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$ no contiene ni a x ni a $y(x)$, entonces sí existe al menos una raíz κ_i de la ecuación $\mathcal{F}[y'(x)] = 0$ entonces

$$y' = \kappa_i \Rightarrow y(x) = \kappa_i x + C \Rightarrow \kappa_i = \frac{y(x) - C}{x}.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}\left[\frac{y(x) - C}{x}\right] = 0$$

es la integral de la ecuación diferencial.

Ejemplo La solución de la ecuación

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0,$$

es

$$\left(\frac{y(x) - C}{x}\right)^7 - \left(\frac{y(x) - C}{x}\right)^5 + \frac{y(x) - C}{x} + 3 = 0$$

2. $\mathcal{F}[x, y'(x)] = 0$

Si se puede despejar x , entonces podemos hacer los siguientes cambios de variable

$$\begin{cases} x = f(t) & \Rightarrow dx = f'(t) dt \\ y' = g(t) & \Rightarrow dy = g(t) f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = \int g(t) f'(t) dt + C \\ x = f(t) \end{cases}$$

Este tipo de soluciones se conocen como soluciones parametrizadas.

Ejemplo La ecuación

$$(y')^3 - y' = 1 + x.$$

Hacemos entonces los siguientes cambios de variables

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1 & \Rightarrow dx = (3t^2 - 1) dt \\ y' = t & \Rightarrow dy = t(3t^2 - 1) dt \end{cases} \Rightarrow dy = t(3t^2 - 1) dt$$

integrando:

$$\begin{cases} \int dy = \int t(3t^2 - 1) dt \\ x = t^3 - t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = \frac{t^2}{4}(3t^2 - 2) + C \\ x = t^3 - t - 1 \end{cases}$$

3. Caso: $\mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0$

a) Se puede despejar $y(x)$, es decir: $y = f(y')$. Entonces hacemos los siguientes cambios de variables:

$$\begin{cases} y' = z & \Rightarrow dy = z dx \\ y = f(z) & \Rightarrow dy = f'(z) z' dx \end{cases} \Rightarrow z(x) = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} \Rightarrow dx = \frac{df}{dz} \frac{dz}{z}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica será

$$\begin{cases} x = \int \frac{df}{dz} \frac{dz}{z} + C \\ y = f(z) \end{cases}$$

Ejemplo La ecuación

$$y = a(y')^2 + b(y')^3, \quad a \text{ y } b = \text{constantes}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{cases} y' = z \\ y = az^2 + bz^3 \end{cases} \Rightarrow dx = (2az + 3bz^2) \frac{dz}{z}$$

la solución paramétrica es :

$$\begin{cases} x = \int (2a + 3bz) dz + C \\ y = az^2 + bz^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2az + \frac{3}{2}bz^2 + C \\ y = az^2 + bz^3 \end{cases} .$$

En el caso de que queramos obtener $y(x)$ podemos intentar despejar z de la primera ecuación, en este caso esto es posible

$$z(x) = -\frac{1}{3b} \left[2a \pm \sqrt{4a^2 + 6b(x-C)} \right],$$

y sustituir en la segunda:

$$y(x) = \frac{1}{27b^2} \left(2a \pm \sqrt{4a^2 + 6b(x-C)} \right)^2 \left(a \mp \sqrt{4a^2 + 6b(x-C)} \right).$$

b) No se puede despejar y' ni y de $\mathcal{F}[y(x), y'(x)] = 0$, pero puede existir un parámetro tal que

$$\begin{cases} y = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy = f'(t) dt \\ dy = g(t) dx \end{cases} \Rightarrow f'(t) dt = g(t) dx \Rightarrow \frac{f'(t)}{g(t)} dt = dx$$

La solución paramétrica es entonces la siguiente:

$$\begin{cases} \int \frac{f'(t)}{g(t)} dt = x + C \\ y = f(t) \end{cases} .$$

Ejemplo La ecuación

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1,$$

Tenemos entonces:

$$\begin{cases} y = \cos^3(t) \\ y' = \sin^3(t) \end{cases} \Rightarrow -\frac{3\cos^2(t)\sin(t)}{\sin^3(t)} dt = dx$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} -3 \int \cot^2(t) dt = x + C \\ y = \cos^3(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3[\cot(t) + t] + C \\ y = \cos^3(t) \end{cases}$$

4. Caso: $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$

a) Si se puede despejar la función y , entonces $y = \mathcal{G}(x, y')$. En este caso consideramos la siguiente sustitución: $y' = z(x)$

$$y = \mathcal{G}(x, y') = \mathcal{G}(x, z) \Rightarrow dy = \partial_x \mathcal{G} dx + \partial_z \mathcal{G} dz = z dx,$$

por lo tanto:

$$z = \partial_x \mathcal{G} + \partial_z \mathcal{G} \frac{dz}{dx} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x, z, C) &= 0 \\ y &= \mathcal{G}(x, z) \end{cases}$$

b) Si se puede despejar a la variable x , entonces $x = \mathcal{H}(y, y')$. Como en el caso anterior tenemos la siguiente sustitución: $y' = z(x)$

$$x = \mathcal{H}(y, y') = \mathcal{H}(y, z) \Rightarrow dx = \partial_y \mathcal{H} dy + \partial_z \mathcal{H} dz.$$

Si multiplicamos por z , se tiene

$$z dx = z [\partial_y \mathcal{H} dy + \partial_z \mathcal{H} dz]$$

por lo tanto:

$$dy = z [\partial_y \mathcal{H} dy + \partial_z \mathcal{H} dz] \Rightarrow \begin{cases} \phi(y, z, C) &= 0 \\ x &= \mathcal{H}(y, z) \end{cases}$$

Aquí podemos considerar dos tipos de ecuaciones bien conocidas:

$$y = xf(y') + g(y') \rightarrow \text{Ecuac. de Lagrange}$$

y un caso particular de la ecuación de Lagrange:

$$y = xy' + g(y') \rightarrow \text{Ecuac. de Clairaut}$$

En cuanto a la ecuación de Clairaut podemos notar que al reemplazar y' por el parámetro m , lo que se obtiene es la ecuación de la línea recta

$$y = mx + f(m).$$

Por ejemplo, la solución de la ecuación de Clairaut: $y = xy' + (y')^2$ es la familia de rectas con pendiente m , es decir: $y(x) = mx + m^2$.

Ejemplos

a) Sea la ecuación

$$y = x(y')^2 - (y')^{-1} \Rightarrow y = \mathcal{G}(x, y')$$

Tenemos entonces:

$$\begin{cases} y' = z \\ y = xz^2 - z^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} dy &= z dx \\ dy &= z^2 dx + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right) dz \end{aligned} \Rightarrow z dx = z^2 dx + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right) dz$$

es decir:

$$\begin{aligned} z &= z^2 + \left(2xz + \frac{1}{z^2}\right) \frac{dz}{dx} \\ 1 &= z + \left(2x + \frac{1}{z^3}\right) \frac{dz}{dx} \\ \frac{dx}{dz} &= z \frac{dx}{dz} + 2x + \frac{1}{z^3} \\ (z-1) \frac{dx}{dz} + 2x &= -\frac{1}{z^3} \\ \frac{dx}{dz} + \frac{2x}{z-1} &= -\frac{1}{z^3(z-1)}. \end{aligned}$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial lineal, por lo tanto, la sabemos resolver

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{1}{e^{\int f(z) dz}} \int e^{\int f(z) dz} g(z) dz + \frac{C}{e^{\int f(z) dz}} \\ &= \frac{1}{e^{\int \frac{2x}{z-1} dz}} \int e^{\int \frac{2x}{z-1} dz} \left[-\frac{1}{z^3(z-1)} \right] dz + \frac{C}{e^{\int \frac{2x}{z-1} dz}} \\ &= -\frac{1}{(z-1)^2} \int \frac{z-1}{z^3} dz + \frac{C}{(z-1)^2} \\ &= \frac{2Cz^2 + 2z - 1}{2(z-1)^2 z^2} \end{aligned}$$

La solución, en forma paramétrica, a la ecuación diferencial es entonces

$$\begin{cases} x(z) = \frac{2z(Cz+1)-1}{2(z-1)^2 z^2} \\ y(x) = xz^2 - z^{-1} \end{cases}.$$

b) Consideremos la ecuación

$$y = xy' + \frac{a}{2} \frac{1}{y'}, \quad \text{donde } a \text{ es una constante.}$$

Como en el caso anterior $y = \mathcal{G}(x, y')$. Entonces:

$$\begin{cases} y' = z \\ y = xz + \frac{a}{2z} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} dy &= z dx \\ dy &= z dx + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right) dz \end{aligned} \Rightarrow z dx = z dx + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right) dz$$

con un poco de álgebra se tiene

$$\begin{aligned} z &= z + \left(x - \frac{a}{2z^2}\right) \frac{dz}{dx} \\ 0 &= \left(x - \frac{a}{2z^2}\right) \frac{dz}{dx} \Rightarrow x = \frac{a}{2z^2} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{a}{2x}} \end{aligned}$$

por lo tanto, un conjunto de la soluciones particulares son

$$y(x) = \pm x \sqrt{\frac{a}{2x}} \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2x}{a}}.$$

Y la familia 1-paramétrica de soluciones será: $y(x) = xC + \frac{a}{2C}$.

El método de las envolventes

Hemos descrito varios métodos para obtener una familia 1-paramétrica de soluciones a la ecuación $\mathcal{F}[x, y(x), y'(x)] = 0$. Si ésta familia de soluciones $f(x, y, C) = 0$ no es una solución general, entonces el problema de encontrar una solución particular puede llegar a ser complejo. Sin embargo, en algunos casos, existe un método para encontrar soluciones particulares de una ecuación diferencial de primer orden, este método tiene que ver con el concepto de *envolvente* de una familia de curvas. Primero veamos qué significa una envolvente de manera conceptual

Una curva Γ se denomina una envolvente de una familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ si se cumplen las siguientes dos propiedades

1. En cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente al punto.
2. Todo miembro de la familia de curvas es tangente a la envolvente en un punto distinto de la envolvente.

El siguiente teorema nos suministra una condición suficiente para que exista una envolvente de la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$.

Teorema Si la función $f(x, y, C) = 0$ es una función dos veces diferenciable para un conjunto de valores x, y, C , y si para este conjunto de valores se cumple que:

$$f(x, y, C) = 0, \quad \partial_c f(x, y, C) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_{cx} f & \partial_{cy} f \end{vmatrix} \neq 0, \quad \partial_{cc} f \neq 0,$$

entonces, la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ tiene una envolvente cuya ecuación paramétrica estará dada por:

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ \partial_c f(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Ejemplos

1. Veamos si la familia de curvas:

$$y = \cos(x + C),$$

posee una envolvente.

Tenemos entonces:

$$f(x, y, C) = y - \cos(x + C) \Rightarrow \partial_c[y - \cos(x + C)] = \operatorname{sen}(x + C) = 0 \Rightarrow x + C = \pi/2$$

por otro lado

$$\begin{vmatrix} \sin(x+C) & 1 \\ \cos(x+C) & 0 \end{vmatrix} = -\cos(x+C), \quad \partial_{cc}f = \cos(x+C),$$

La función $\cos(x+C)$ es diferente de cero si $x+C \neq \pi/2$, por lo tanto, todos los valores que excluyan a $x+C = \pi/2$ y que satisfacen la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} y - \cos(x+C) = 0 \\ \sin(x+C) = 0 \end{cases}$$

conforman una envolvente a la familia $y = \cos(x+C)$.

Podemos notar lo siguiente, si tomamos la primera de estas curvas: $y = \cos(x+C)$, la elevamos al cuadrado y sumamos con la segunda también elevada al cuadrado, resulta:

$$y^2 = \cos^2(x+C) + \sin^2(x+C) = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$$

Las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son las envolventes de $y = \cos(x+C)$.

2. Encontrar las envolventes de

$$y^2 = 2xC - C^2.$$

Como en el ejemplo anterior,

$$f(x, y, C) = y^2 - 2xC + C^2 \Rightarrow \partial_c[y^2 - 2xC + C^2] = -2x + 2C = 0 \Rightarrow x = C$$

$$\begin{vmatrix} -2C & 2y \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4y \neq 0, \quad \partial_{cc}f = 2 \neq 0,$$

Aquí, $y \neq 0$. La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\begin{cases} y^2 - 2xC + C^2 = 0 \\ x = C \end{cases} \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

Envolventes y soluciones

Sea $f(x, y, C) = 0$ una familia 1-paramétrica de soluciones a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Para esta familia puede existir o no una envolvente, si la envolvente existe, entonces se tiene que en cada punto de la envolvente hay un miembro de la familia de soluciones tangente a la envolvente. Esto significa que la curva envolvente en cada uno de sus puntos tiene la misma pendiente y' que las curvas integrales, y por lo tanto, cada envolvente satisface la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$.

Podemos decir entonces, que una envolvente de una familia de soluciones de $y' = f(x, y)$ es también una solución de la ecuación diferencial. La inversa de esta afirmación no tiene porque ser verdadera, es decir, una solución particular, que no sea obtenida a partir de la familia 1-paramétrica de soluciones, no es necesariamente una envolvente.

Ejemplos

1. Utilizando el método de las envolventes encontrar una solución particular de

$$y' = (1 - y^2)^{\frac{1}{2}},$$

que no sea obtenible de la familia de soluciones $y = \cos(x + C)$.

Como vimos en el ejemplo anterior, $y = 1$ y $y = -1$ son envolventes de $y = \cos(x + C)$. Por lo tanto, tenemos dos soluciones particulares a la ecuación diferencial: $y = 1$ y $y = -1$.

2. Encontrar una solución particular de

$$9(y')^2(2 - y^2) = 4(3 - y),$$

no obtenible de su solución $(x - C)^2 = 3y^2 - y^3$.

Veamos si esta familia de soluciones tiene envolventes

$$f(x, y, C) = (x - C)^2 - 3y^2 + y^3 \Rightarrow \partial_c[(x - C)^2 - 3y^2 + y^3] = -2(x - C) = 0 \Rightarrow x = C$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} 2(x - C) & -6y + 3y^2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6y(2 - y) \neq 0 \quad \partial_{cc}f = 2 \neq 0,$$

Se tiene que $y \neq 0$ y $y \neq 2$. La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\begin{cases} (x - C)^2 - 3y^2 + y^3 = 0 \\ x = C \end{cases} \Rightarrow -y^2(3 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

La solución $y = 0$, no se puede considerar ya que el determinante anterior tiene que ser diferente de cero. Por lo tanto, una solución particular es la recta $y = 3$.

3. Resuelva la ecuación de Clairaut

$$y = xy' + (y')^2$$

y estudie sus posibles envolventes.

Esta es una ecuación del tipo $y = \mathcal{G}(x, y')$. Por lo tanto

$$\begin{cases} y' = z \\ y = xz + z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} dy &= z \, dx \\ dy &= z \, dx + (x + 2z) \, dz \end{aligned} \Rightarrow z \, dx = z \, dx + (x + 2z) \, dz$$

es decir:

$$0 = \left(\frac{x}{z} + 2\right) \frac{dz}{dx} \Rightarrow x = -2z$$

Esto nos permite encontrar una solución particular de la ecuación diferencial, ya que

$$z = -\frac{x}{2} \Rightarrow y = xz + z^2 \Rightarrow y(x) = -\frac{x^2}{4}.$$

Si consideramos $y(x) = xC + C^2$, que es la familia de soluciones de la ecuación diferencial, entonces al hacer un estudio sobre las envolventes encontramos lo siguiente

$$f(x, y, C) = y - xC - C^2 \Rightarrow \partial_c[y - xC - C^2] = -x - 2C = 0 \Rightarrow x = -2C$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} -C & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \partial_{cc}f = -2 \neq 0,$$

La envolvente tiene entonces su forma paramétrica dada por

$$\begin{cases} y - xC - C^2 = 0 \\ x = -2C \end{cases} \Rightarrow y + \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{x^2}{4}.$$

Ejercicios

Encuentre, utilizando el método de las envolventes, soluciones particulares no obtenibles de la familia de soluciones.

1.

$$y' = \sqrt{y-x}, \quad y = x + \frac{1}{4}(x+c)^2, \quad x \leq y \leq x+1.$$

2.

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y = (x-c)^3.$$

3.

$$y = xy' + 3\sqrt{1+(y')^2}, \quad y = Cx + 3\sqrt{1+C^2}, \quad y > 0, \quad x^2 < 9.$$

4.

$$y = xy' + \ln y', \quad y = Cx + \ln C.$$

5.

$$y = xy' - (y')^{2/3}.$$

4.2. Soluciones numéricicas

4.2.1. Las ideas generales

Dada una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F\left(\frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right)$$

siempre se puede convertir en un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden, al extender el espacio de variables de la forma

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} p(t) \\ x(t) \stackrel{\text{def}}{=} q(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F\left(\frac{dx(t)}{dt}, x(t), t\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq(t)}{dt} = p(t) \\ \frac{dp(t)}{dt} = F(p(t), q(t), t) \end{array} \right.$$

este sistema puede ser re-arrreglado en forma vectorial

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ F(p(t), q(t), t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t)$$

Así dado un conjunto de potenciales elásticos y las fuerzas que de ellos derivan,

$$V(x) = \begin{cases} kx & \leftarrow p = 1 \\ \frac{1}{2}kx^2 & \leftarrow p = 2 \\ \frac{1}{3}kx^3 & \leftarrow p = 3 \\ \vdots & \\ \frac{1}{p}k\|x\|^p & \end{cases} \Rightarrow F_k(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \Rightarrow F_k(x) = \begin{cases} -k\frac{x}{\|x\|} \\ -kx \\ -kx^2 \\ \vdots \\ -k\|x\|^{p-1}\frac{x}{\|x\|} \end{cases}$$

el sistema dinámico correspondiente a la ecuación de Newton será

$$\frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t), t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \frac{1}{m}[F_{ext}(x(t), t) - k\|x(t)\|^{p-1}\frac{x(t)}{\|x(t)\|}] \end{pmatrix}$$

Métodos y su clasificación

Dada una ecuación diferencial de primer orden, $\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x)$, con y_k el valor de la función obtenida con el método, con $y_k = y(x_k)$, donde $x_k = x_0 + kh$ y h el paso. Diremos que un método es de **paso único** si la determinación de y_{k+1} sólo involucra un único valor de y_k y **múltiple paso** si para calcularlo se utilizan varios valores $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-p}$. Por otra parte se denomina un método **explícito** si para determinar y_{k+1} se utilizan valores anteriores $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-p}$ y **implícito** si se utilizan una función del mismo valor y_{k+1} . Así

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f(x_k, y_k)$$

representa un método **explícito de paso único** mientras que

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

será **implícito de múltiples pasos**.

El rebusque de Taylor

Tal y como hemos dicho arriba, dada una ecuación diferencial, su solución a través de un método de paso único puede ser escrita como

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \varphi(x_k, y_k, h) \quad \text{con } h = x_{i+1} - x_i;$$

Lo primero que se puede hacer es expandir por Taylor alrededor del punto $x = x_k$

$$y(x) = y(x_k) + (x - x_k) y'(x_k) + \frac{1}{2!} (x - x_k)^2 y''(x_k) + \cdots + \frac{1}{n!} (x - x_k)^n y^{(n)}(x_k) + \cdots$$

e identificamos

$$\begin{aligned}
 y(x_k) &\rightarrow y_k y'(x) = f(y(x), x) \\
 y'(x_k) &\rightarrow f(y_k, x_k) \\
 y''(x_k) &\rightarrow f'(y_k, x_k) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} y'_k \\
 y'''(x_k) &\rightarrow f''(y_k, x_k) = \partial_x f' + \partial_y f' y'_k = \partial_{xx} f + (\partial_{xy} f) y'_k + [\partial_{yx} f + (\partial_{yy} f) y'_k] y'_k + \partial_y f y''_k \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

por lo que reconstruimos la serie de Taylor hasta el orden que podamos o requiramos

$$y_{n+1} = y_n + h f(y_k, x_k) + \frac{1}{2!} h^2 f'(y_k, x_k) + \frac{1}{3!} h^3 f''(y_k, x_k) + \cdots + \frac{1}{n!} h^n f^{(n-1)}(y_k, x_k) + \cdots$$

quedando acotado el error por

$$\varepsilon_{red} = \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n)}(y(\xi), x(\xi))$$

4.2.2. La idea de la integración y los métodos

La idea de integrar una ecuación diferencial ordinaria puede ilustrarse, formalmente de la siguiente forma

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi f(\xi, y(\xi))$$

entonces el método se centra en como se aproxima la función dentro de la integral

Euler

$$f(x_k, y_k)$$

Se aproxima la función con en el punto anterior

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

Euler Mejorado o Heuns

$$\frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

Se aproxima la función mediante un promedio en los extremos

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + h f(x_k, y_k))]$$

con $h = x_{i+1} - x_i$ el paso de integración. Nótese además que hemos utilizado Euler otra vez para expresar $y_{k+1} = y_{k+1}(y_k, x_k)$

El Método de Euler constituye una expansión por Taylor hasta primer orden por lo que el error es claramente de segundo orden por cuanto si comparamos con la expansión en series de Taylor correspondiente tendremos

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= y_k + h \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_k} + \cdots \\
 \|\varepsilon_{tot}\| &\propto \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=x_k}
 \end{aligned}$$

El método de Euler y el problema de valores iniciales

Este método si bien no se utiliza en la práctica en su forma estándar para ecuaciones diferenciales ordinarias, si ilustra el proceso de discretización de una ecuación diferencial y su solución mediante métodos numéricos.

Para resolver la ecuación de un oscilador armónico libre que parte del reposo, i.e.

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\phi(t) = 0 \quad \text{con: } \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \phi(t_0) = 1; \quad \text{y} \quad \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$$

en la cual $\phi(t)$ representa la posición de un cuerpo de masa m unido a un resorte de constante elástica k .

Discretizando mediante diferencia centrada

$$h = t_{i+1} - t_i; \quad \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} \approx \frac{1}{h^2} [\phi(t_{i+1}) - 2\phi(t_i) + \phi(t_{i-1})] \equiv \frac{1}{h^2} [\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}]$$

con lo cual la ecuación del oscilador libre queda como

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\phi(t) = 0 \quad \Rightarrow \phi_{i+1} - (2 - h^2\omega_0^2)\phi_i + \phi_{i-1} = 0$$

esta última ecuación es la versión en **diferencias finitas** de la ecuación diferencial y es claro que se convierte en una ecuación algebraica. Finalmente, los dos valores iniciales para la iteración ϕ_0 y ϕ_1 surgen de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \phi_0 &\equiv \phi(t = t_0) = 1 \\ \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=t_0} &= 0 \quad \Rightarrow \phi_1 \approx \phi_0 \end{aligned}$$

Los Métodos de Runge-Kutta

Es el conjunto de métodos más populares y de mayor uso. La idea del método de Runge-Kutta es producir resultados equivalentes a desarrollos en Taylor de orden superior a Euler en métodos de un único paso por lo tanto

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} d\xi f(\xi, y(\xi))$$

y se aproxima la función con un promedio ponderado.

$$f(\xi, y(\xi)) \approx [\alpha f(y_k, x_k) + \beta f(y_k + \delta f(y_k, x_k) h_k, x_k + \gamma h_k)] \quad \text{con} \quad h_k = x_{k+1} - x_k$$

donde α, β, γ y δ son los pesos estadísticos a ser determinados. Por lo tanto

$$y_{k+1} = y_k + [\alpha f(y_k, x_k) + \beta f(y_k + \delta f(y_k, x_k) h_k, x_k + \gamma h_k)] h_k$$

Expandiendo por Taylor de dos variables

$$g(x + \lambda, y + \mu) = g(x, y) + [\lambda \partial_x g + \mu \partial_y g] + \frac{1}{2!} [\lambda^2 \partial_x^2 g + 2\lambda\mu \partial_{xy} g + \mu^2 \partial_y^2 g] + \dots$$

tendremos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + [\alpha + \beta] f_k h_k + \beta [\gamma \partial_x f_k + \delta f_k \partial_y f_k] h_k^2 + \\ &+ \beta \left[\frac{\gamma^2}{2} \partial_x^2 f_k + 2\gamma\delta f_k \partial_{xy} f_k + \frac{\delta^2}{2} f_k^2 \partial_y^2 f_k \right] h_k^3 + \dots \end{aligned}$$

con $f_k = f(y_k, x_k)$ y como se ve claramente, queda libertad para escoger

Euler Mejorado o Heuns $\alpha = \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \delta = 1$

$$y_{k+1} = y_k + f_k h_k + \frac{1}{2} [\partial_x f_k + f_k \partial_y f_k] h_k^2$$

Euler Modificado $\alpha = 0; \quad \beta = 1; \quad \gamma = \delta = \frac{1}{2}$

$$y_{k+1} = y_k + f_k h_k + \left[\frac{1}{2} \partial_x f_k + \frac{1}{2} f_k \partial_y f_k \right] h_k^2$$

Runge-Kutta de cuarto orden aproxima la función $f(\xi, y(\xi))$ en cuatro puntos intermedios en el intervalo $x_k < x < x_{k+1}$ por lo cual

$$y_{k+1} = y_k + [\alpha \kappa_1 + \beta \kappa_2 + \gamma \kappa_3 + \delta \kappa_4] h_k$$

podemos plantearnos varias formas de hacerlo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6} [\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4]$$

donde

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\ \kappa_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}\kappa_1\right) \\ \kappa_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{2}h_k, y_k + \frac{1}{2}\kappa_2\right) \\ \kappa_4 &= f(x_k + h_k, y_k + \kappa_3)\end{aligned}$$

o también

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{8} [\kappa_1 + 3\kappa_2 + 3\kappa_3 + \kappa_4]$$

donde

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\ \kappa_2 &= f\left(x_k + \frac{1}{3}h_k, y_k + \frac{1}{3}\kappa_1\right) \\ \kappa_3 &= f\left(x_k + \frac{1}{3}h_k, y_k + \frac{1}{3}\kappa_2\right) \\ \kappa_4 &= f(x_k + h_k, y_k + \kappa_3)\end{aligned}$$

Más aún el método de **Fehlberg de 4/5 orden** se puede escribir como

$$y_{k+1} = y_k + h_k [C_1 \kappa_1 + C_2 \kappa_2 + C_3 \kappa_3 + C_4 \kappa_4 + C_5 \kappa_5 + C_6 \kappa_6] + O(h^6)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\
\kappa_2 &= f(x_k + a_2 h_k, y_k + b_{21} \kappa_1) \\
\kappa_3 &= f(x_k + a_3 h_k, y_k + b_{31} \kappa_1 + b_{32} \kappa_2) \\
\kappa_4 &= f(x_k + a_4 h_k, y_k + b_{41} \kappa_1 + b_{42} \kappa_2 + b_{43} \kappa_3) \\
&\vdots \\
\kappa_6 &= f(x_k + a_6 h_k, y_k + b_{61} \kappa_1 + b_{62} \kappa_2 + b_{63} \kappa_3 + b_{64} \kappa_4 + b_{65} \kappa_5)
\end{aligned}$$

la cual puede ser redefinida y truncada para obtener

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h_k \left[\tilde{C}_1 \kappa_1 + \tilde{C}_2 \kappa_2 + \tilde{C}_3 \kappa_3 + \tilde{C}_4 \kappa_4 + \tilde{C}_5 \kappa_5 \right] + O(h^5)$$

Métodos multipaso

Los métodos multipaso se basan en encontrar el valor y_{n+k} como una función de k valores precedentes: $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \dots, y_n$. Para $k = 1$, retomamos los métodos de paso único del tipo Euler o Runge-Kutta. Será *explícito (abierto)* si el valor y_{n+k} puede ser calculado directamente o *implícito (abierto)* si la fórmula contiene el valor y_{n+k} deseado.

Otra vez la idea está en aproximar el argumento de la integración formal

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} d\xi f(\xi, y(\xi))$$

nótese en este caso que el punto $i+1$ recibe la contribución de k puntos anteriores. El integrando $f(\xi, y(\xi))$ lo aproximaremos con un polinomio de interpolación de Newton de orden n . Tal que

$$f(\xi, y(\xi)) \rightarrow f(\xi) = p_n(\xi) + R_n(\xi)$$

con $p_n(\xi)$ el polinomio de interpolación y $R_n(\xi)$ el residuo. Donde

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= f[x_n] + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\
&\quad + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_0] \\
R_n(x) &= (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_0) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \quad \text{con } x_0 < \zeta < x_n
\end{aligned}$$

haciendo $p_n(x) \equiv f(x_n + \alpha h)$ con α cero o negativo de tal modo que en términos del operador diferencias atrasada $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ siendo h el incremento

$$\begin{aligned}
f(x_n + \alpha h) &= f_n + \alpha \nabla f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!} \nabla^3 f_n + \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+r-1)}{r!} \nabla^r f_n
\end{aligned}$$

donde hemos denotado $f_n \equiv f(x_n, y(x_n))$, $\nabla^m f_n \equiv \nabla^m f|_{x=x_n}$, y $\alpha = (x - x_i)/h$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} d\xi f(\xi, y(\xi)) \\ &= y_i + h \int_{-k}^1 d\alpha f(x_n + \alpha h) \\ y_{i+1} &= y_i + h \left[\alpha f_i + \frac{\alpha^2}{2} \nabla f_i + \alpha^2 \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2} \right) \frac{\nabla^2 f_i}{2!} + \alpha^2 \left(\frac{\alpha^2}{4} + \alpha + 1 \right) \frac{\nabla^3 f_i}{3!} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \left(\frac{\alpha^3}{5} + \frac{3\alpha^2}{2} + \frac{11\alpha}{3} + 3 \right) \frac{\nabla^4 f_i}{4!} + \dots \right]_{-k}^1 \end{aligned}$$

por razones de conveniencia que son evidentes al hacer el desarrollo, se toman las fórmulas para $k = r$ y k impar y obtendremos

$$\begin{array}{lcl} \left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h \left[f_i + \frac{1}{2} \nabla f_i + \frac{5}{12} \nabla^2 f_i + \frac{3}{8} \nabla^3 f_i \right] \\ R = \frac{251}{720} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=1 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h [2f_i + 0\nabla f_i] \\ R = \frac{1}{3} h^3 f^{(2)}(\zeta) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=3 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h [4f_i - 4\nabla f_i + \frac{3}{8} \nabla^2 f_i + 0\nabla^3 f_i] \\ R = \frac{14}{45} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=5 \\ r=5 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h [6f_i - 12\nabla f_i + 15\nabla^2 f_i - 9\nabla^3 f_i + \frac{33}{10} \nabla^4 f_i] \\ R = \frac{41}{140} h^7 f^{(6)}(\zeta) \end{array} \right. \end{array}$$

y al expresar las diferencias atrasadas las fórmulas explícitas (abierta) quedan expresadas como

$$\begin{array}{lcl} \left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \\ R \sim O(h^5) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=1 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + 2hf_i \\ R \sim O(h^3) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=3 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{4h}{3} [2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}] \\ R \sim O(h^5) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=5 \\ r=5 \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{3h}{10} [11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}] \\ R \sim O(h^7) \end{array} \right. \end{array}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se pueden escribir las fórmulas implícitas (cerradas) para las mismas “curiosas” situaciones. Para este caso la conveniencia se obtiene para k impar y $r = k + 2$

$$\begin{array}{lcl} \left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h [f_{i+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{i+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{i+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{i+1}] \\ R = \frac{-19}{720} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=1 \\ r=3 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_{i-1} + h [2f_{i+1} - 2\nabla f_i - \frac{1}{3} \nabla^2 f_{i+1} - 0\nabla^3 f_{i+1}] \\ R = \frac{-1}{90} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{l} k=3 \\ r=5 \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_{i-3} + h [4f_{i+1} - 8\nabla f_i - \frac{20}{3} \nabla^2 f_{i+1} - \frac{8}{3} \nabla^3 f_{i+1} + \frac{14}{45} \nabla^4 f_{i+1}] \\ R = \frac{-8}{945} h^5 f^{(4)}(\zeta) \end{array} \right. \end{array}$$

desarrollando las diferencias atrasadas, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \\ r=3 \\ k=1 \\ r=3 \\ k=3 \\ r=5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_{i-1} - 5f_{i-1} + 9f_{i-2}] \\ y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} [f_{i+1} + f_i + f_{i-1}] \\ y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2h}{45} [7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}] \end{array} \quad R \sim O(h^5) \quad R \sim O(h^5) \quad R \sim O(h^7)$$

Se debe puntualizar lo siguiente respecto a las fórmulas explícitas e implícitas de los métodos multipaso antes mencionados

- Los métodos multipasos, normalmente, requieren menos evaluaciones de las funciones que los métodos monopaso para un mismo nivel de precisión.
- Los métodos multipaso requieren de un método monopaso que le permita determinar los $y_{n+k-1}, y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \dots, y_n$ puntos iniciales.
- Las fórmulas explícitas son, normalmente, menos precisas que las implícitas. La razón se fundamenta en que, mientras las explícitas extrapolan la solución al punto y_{i+1} , las implícitas la interpolan, por cuanto la toman en cuenta en el momento de calcularla.
- Las fórmulas explícitas e implícitas deben ser consideradas como complementarias, por cuanto las explícitas pueden *predecir* el valor de y_{i+1} necesario para la $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ del cálculo de y_{i+1}^* en la fórmula implícita.

Existen varias combinaciones *predictor-corrector*, entre ellas mencionamos:

Milne de cuarto orden

- Predictor

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3} [2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3} [f_{i+1} - 4f_i + f_{i-1}]$$

Milne de sexto orden

- Predictor

$$y_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3h}{10} [11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2h}{45} [7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}]$$

Adams Modificado o Adams Moulton

- Predictor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

El método de extrapolación multipaso más exitoso (conjuntamente con los métodos de paso único del tipo **Runge-Kutta**) es el de extrapolación racional de **Bulirsch-Stoer** en el cual se define un paso superior de H y una serie de subpaso $h_\eta = H/\eta$ con el aumento del número de subpasos, en algún momento siguiendo algún criterio de convergencia se hace una extrapolación (racional) que representa el límite $\eta \rightarrow \infty$.

El método de Bulirsch-Stoer tiene una estrategia diferente al los anteriores y posee, como motor de aproximación el método del punto medio modificado o salto de rana (*leap frog*). Este esquema se utiliza con frecuencia en discretizaciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y se basa en aproximar la derivada por el valor el promedio en los dos extremos:

$$y'(x) = f(y(x), x) \Rightarrow y'(x_n) = f(y(x_n), x_n) = \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{2h}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv y(x) \\ z_1 &= z_0 + hf(x, z_0) \\ &\vdots \\ z_{n+1} &= z_{n-1} - 2hf(x + nh, z_n) \end{aligned}$$

para finalmente calcular

$$y(x + H) \approx y_n \equiv \frac{1}{2} [z_n + z_{n-1} + hf(x + H, z_n)]$$

Nótese que si reacomodamos

$$y(x + H) \approx \frac{4y_n - y_{n/2}}{3}$$

obtendremos un método de cuarto orden que requiere menos evaluaciones de $f(y(x_n), x_n)$ por paso h

4.2.3. Control del Paso

En General para métodos de 4^{to} orden. Tal y como se mencionó en el caso de la integración numérica, el primer criterio que surge es dividir el paso h en la mitad, calcular todo de nuevo y comparar los resultados a ver si está dentro del los límites de tolerancia que nos hemos impuesto

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y_h - y_{h/2}}{y_h} \right\| &\equiv \Delta(y_h, y_{h/2}) < \varepsilon_{\max} \Rightarrow \\ \frac{\varepsilon_{\max}}{\Delta(y_h, y_{h/2})} &\approx \left(\frac{h_0}{h_t} \right)^5 \Rightarrow h_0 = h_t \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\Delta(y_h, y_{h/2})} \right)^{1/5} \end{aligned}$$

donde hemos denotado h_0 como el paso ideal. Esta relación es general para cualquier método de 4 orden de paso único, multipaso, implícito o explícito.

Más aún, la práctica ha indicado que

$$h_0 = \begin{cases} \mathcal{M}h_t \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\Delta(y_h, y_h^*)} \right)^{0,20} \equiv \mathcal{M}h_t \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_h} \right)^{0,20} & \Delta_0 \geq \Delta_1 \\ \mathcal{M}h_t \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\Delta(y_h, y_h^*)} \right)^{0,25} \equiv \mathcal{M}h_t \left(\frac{\Delta_0}{\Delta_h} \right)^{0,25} & \Delta_0 < \Delta_1 \end{cases}$$

donde $0 < \mathcal{M} < 1$ un factor de seguridad

Para métodos Runge-Kutta. es importante mencionar que se utilizan mayoritariamente métodos hasta cuarto orden porque de mayor orden (M , por ejemplo) involucran más de M evaluaciones (y menos $M - 2$) de la derivada. Por ello para este tipo de métodos se descubrió que considerando el mismo número de puntos para la evaluación intermedia se pueden generar métodos de distinto orden, y para colmo de suerte el menor orden de esta situación se expresa para métodos de 4 y 5 orden. En particular Runge-Kutta de 5 orden se puede escribir como:

$$y_{k+1} = y_k + h_k [C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2 + C_3\kappa_3 + C_4\kappa_4 + C_5\kappa_5 + C_6\kappa_6] + O(h^6)$$

$$\kappa_1 = f(x_k, y_k)$$

$$\kappa_2 = f(x_k + a_2 h_k, y_k + b_{21}\kappa_1)$$

$$\kappa_3 = f(x_k + a_3 h_k, y_k + b_{31}\kappa_1 + b_{32}\kappa_2)$$

$$\kappa_4 = f(x_k + a_4 h_k, y_k + b_{41}\kappa_1 + b_{42}\kappa_2 + b_{43}\kappa_3)$$

 \vdots

$$\kappa_6 = f(x_k + a_6 h_k, y_k + b_{61}\kappa_1 + b_{62}\kappa_2 + b_{63}\kappa_3 + b_{64}\kappa_4 + b_{65}\kappa_5)$$

y con los mismos puntos (! las mismas evaluaciones !) se puede reescribir para 4 orden como:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + h_k [\tilde{C}_1\kappa_1 + \tilde{C}_2\kappa_2 + \tilde{C}_3\kappa_3 + \tilde{C}_4\kappa_4 + \tilde{C}_5\kappa_5] + O(h^5)$$

por lo tanto el error se puede estimar

$$\Delta(y_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}) = \sum_{i=1}^6 (C_i - \tilde{C}_i) k_i$$

y el control del paso se utiliza exactamente igual

$$h_0 = h_t \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\Delta(y_h, \tilde{y}_h)} \right)^{0,20}$$

Para métodos multipasos y predictor corrector la situación puede tener un refinamiento adicional antes de proceder a modificar el paso h . El esquema sería para un método predictor corrector del tipo Adams Modificado o Adams Moulton, donde el

- Predictor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

- Corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

se realiza una serie de iteraciones dentro de la fórmula de corrector, i.e.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left[9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2}) \right]$$

4.3. Algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

Modelar o describir matemáticamente un fenómeno es el fin último de la ciencias. Las matemáticas son el lenguaje de la física. ¿ Cómo describir el chisporroteo de una llama ? ¿ la textura de un pintura al oleo ? ¿ el tráfico en carreteras durante horas picos ? ¿ el titilar de las estrellas ? Describir matemáticamente estas situaciones no sólo no es fácil, pero tampoco es única. Son fenómenos complejos y su descripción puede tener muchos grados de profundidad.

4.3.1. Ley de Malthus y el decaimiento radioactivo

Malthus⁵

$$\frac{d}{dx}y(x) = k \cdot y(x) \quad \begin{cases} k > 0 \\ k < 0 \end{cases} \quad y(0) = y_0. \quad (4.11)$$

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Para $k < 0$ tenemos una situación de decaimiento: la población decrece con el tiempo. Este concepto se utiliza los procesos de decaimiento radiactivo. El tiempo de vida media se define como el tiempo necesario para que la mitad de los núcleos decaigan, lo cual es independiente de la cantidad de la muestra y permite medir la edad de todo aquello que contenga isótopos radioactivos. En particular el C¹⁴ del cual se sabe que: tiene una vida media de 5730 años y que todos los organismos están (o estuvieron) formados por carbono. Por lo tanto, si sabemos el porcentaje de C¹⁴ en una muestra, digamos el 63 % podremos inferir su edad

$$y(0) = 1$$

$$y(5730) = e^{k \cdot 5730} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, despejando k

$$k = \frac{-\ln 2}{5730}$$

tendremos finalmente

$$y(t) = 2^{-t/5730}$$

de aquí obtendremos la edad en años de la muestra

$$y(t) = 0,63 \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,63}{\ln 2} \cdot 5730 \approx 3819,48$$

Para $k > 0$ la ecuación 4.11 describe el incremento poblacional. El valor de k se calcula experimentalmente (promediando sus valores para cada uno de los parámetros). Para la población venezolana $k = 0,018$

⁵En honor al economista político inglés Thomas Robert Malthus (1766-1834). Quien fue uno de los primeros en darse cuenta que la población crece como una razón geométrica mientras que los medios de subsistencias crecen de manera aritmética. Esta afirmación plasmada en su *Ensayo sobre el Principio de Poblaciones*, el cual inspiró a Darwin en la formulación de principio de selección natural. Malthus, muy religioso y creyente pensaba que esa diferencia en el crecimiento de la población y las necesidades que ellas generaban, eran de procedencia divina y que forzaría a la humanidad a ser más laboriosa e ingeniosa para lograr los medios de subsistencia. Darwin, no tan religioso, lo formuló como una situación natural presente en todas las especies.

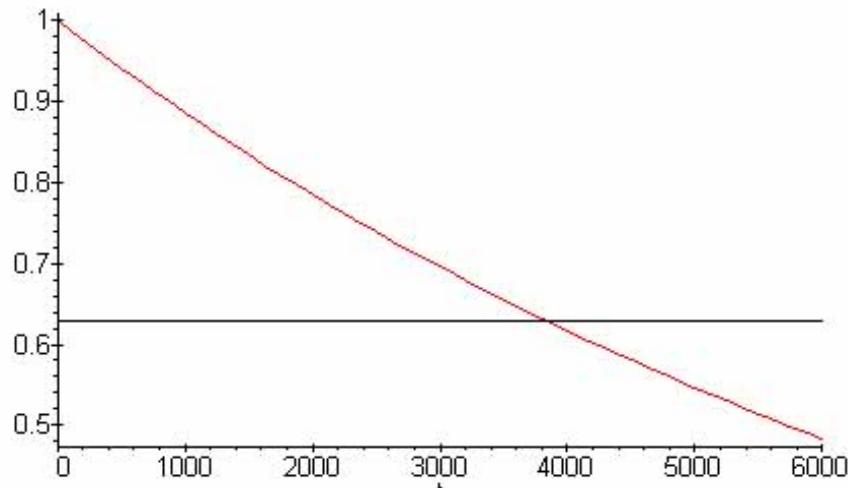


Figura 4.6: Decaimiento Radioactivo

Población Venezolana (Millones Hab.)		
Año	Población	$y(t) = 0,350 e^{0,018t}$
1800 (0)	0.350	0.350
1847 (47)	0.750	0.816
1873 (73)	1.000	1.302
1881 (81)	1.750	1.504
1891 (91)	2.100	1.801
1926 (126)	2.850	3.381
1936 (136)	3.200	4.048
1941 (141)	3.850	4.429
1950 (150)	4.350	5.208
1961 (161)	6.800	6.348
1971 (171)	10.800	7.600
1981 (181)	14.100	9.099

4.3.2. La Ecuación logística o Ley de Verhulst

Esta ecuación se utiliza para describir el crecimiento de la población de una manera más precisa que la Ley de Malthus. Esta ecuación toma en cuenta le decrecimiento de la población con el término $-y^2$

$$y' = (k - ay) y = ky - ay^2$$

donde k y a son constantes arbitrarias. Esta ecuación es separable y la solución tiene la forma de

$$\ln \left| \frac{y}{k - ay} \right| = k t + C$$

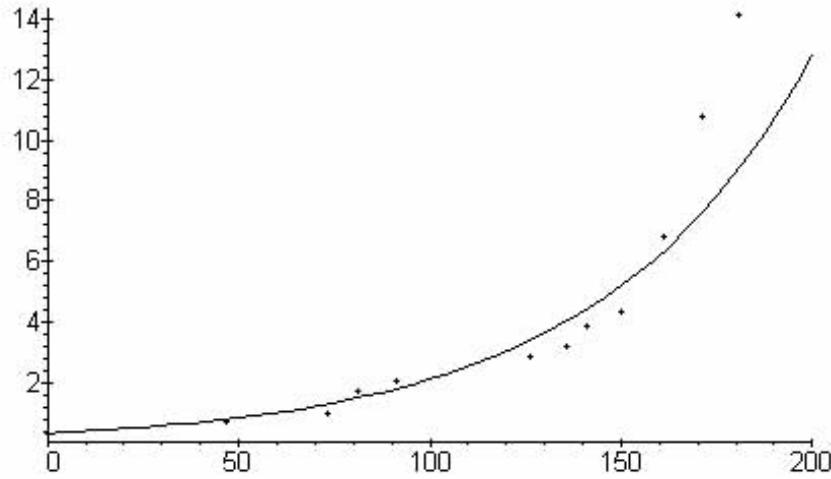


Figura 4.7: Población de Venezuela desde 1800

y por lo tanto

$$y(t) = \frac{k y_0}{a y_0 + (k - a y_0) e^{-kt}}$$

el crecimiento de la población venezolana desde 1800 puede modelarse con $k = 0,018$, $a = 0,001$

4.3.3. La Ley de Enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad T(0) = T_0$$

la solución será

$$T = (T_0 - T_m) e^{kt} + T_m$$

y para el caso de una torta recién sacada del horno a una temperatura de $T_0 = 176^\circ$, y una temperatura ambiente de $T_m = 23^\circ$, con $T(80) = 63^\circ$, la gráfica será

también se puede modelar el enfriamiento con una temperatura del ambiente variable esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m(t)) \quad T(0) = T_0$$

tómese, por ejemplo,

$$T_m(t) = 23 - 10 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \quad \text{con } 0 \leq t \leq 24 \text{ horas}$$

si $T(0) = 15^\circ$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} \left(T - 23 - 7 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) \right)$$

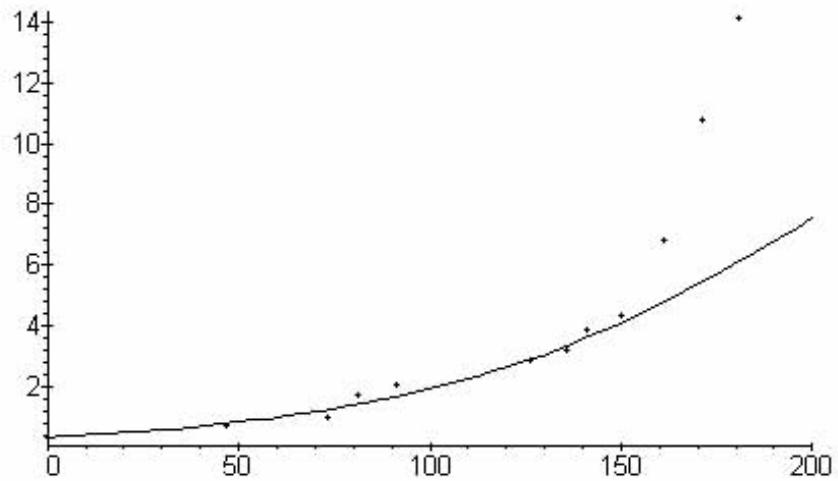


Figura 4.8: Población de Venezuela desde 1800

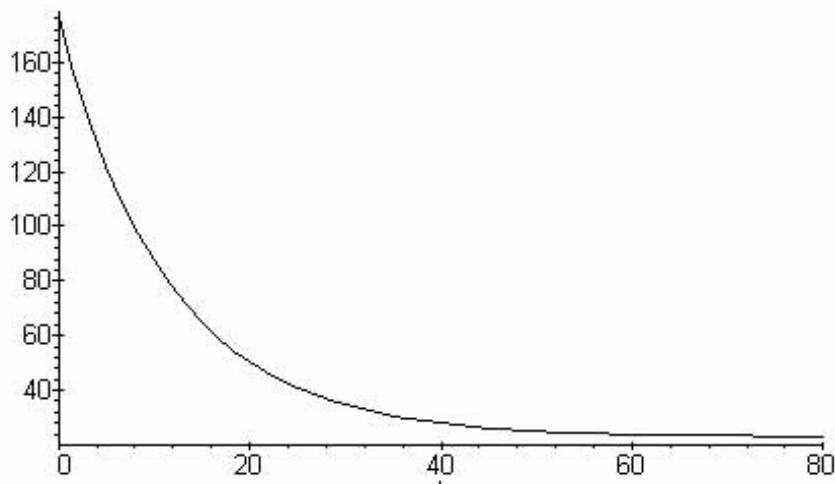


Figura 4.9: Enfriamiento de una torta recién horneada

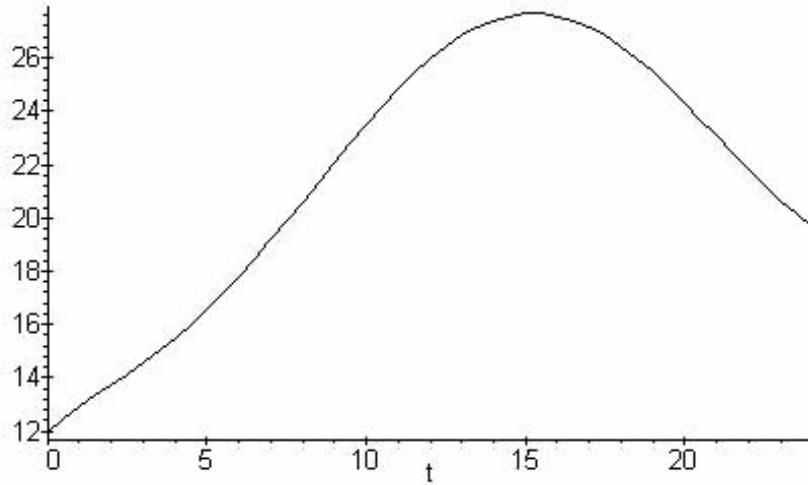


Figura 4.10: Variación de la Temperatura Construcciones

con la solución

$$T(t) = -\frac{-23\pi^2 + 11e^{-\frac{t}{4}}\pi^2 + 21\pi \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{12}) + 63 \cos(\frac{\pi t}{12}) - 207 + 36e^{-\frac{t}{4}}}{9 + \pi^2}$$

y la siguiente evolución

4.3.4. Interés Compuesto.

Otra de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es en el cálculo del crecimiento del capital inicial, depositado en un banco C_0 durante un cierto lapso de tiempo y sujeto a un determinada tasa de interés. Luego del lapso de tiempo, el nuevo capital será

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{int}{100}\right)$$

Pasados dos lapsos (años) de tiempo el capital será

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{int}{100}\right) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100}\right) \left(1 + \frac{int}{100}\right)$$

en t lapsos de tiempo,

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100}\right)^t$$

Ahora bien, si el pago de los intereses se hace varias veces durante ese lapso, entonces tendremos

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 2}\right) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 2}\right) \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 2}\right).$$

Finalmente, si el interés se paga k veces en cada lapso, entonces

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot k} \right)^{kt}. \quad (4.12)$$

Si $k = 12$ entonces se tienen intereses pagaderos sobre saldos mensuales. En el caso de que $k = 365$, los intereses son pagaderos sobre saldos diarios. Nótese que si

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow \left(1 + \frac{int}{100 \cdot k} \right)^{kt} \rightarrow e^{\frac{int}{100} t} ;$$

entonces, podemos aproximar este modelo discreto de pagos sobre saldos por uno continuo, i.e.

$$C(t) = C_0 e^{\frac{int}{100} t} \Leftrightarrow C'(t) = \frac{int}{100} C(t).$$

Existen situaciones en las cuales los bancos, movidos por la competencia, ofrecen cancelar los intereses sobre un año hipotético de 360 días. En este caso, el capital crece como:

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 360} \right)^{365t}. \quad (4.13)$$

La siguiente tabla muestra una comparación del crecimiento del capital inicial $C_0 = 1$, en un lapso de 10 años, sujeto a intereses del 40 % sobre saldos diarios y siguiendo los tres modelos antes mencionados.

Años	$C(t) = C_0 e^{\frac{int}{100} t}$	$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot k} \right)^{kt}$	$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{int}{100 \cdot 360} \right)^{365t}$
0	1.0	1.0	1.0
1	1.491497997	1.491824698	1.499797972
2	2.224566275	2.225540928	2.249393957
3	3.317936142	3.320116923	3.373636494
4	4.948695110	4.953032424	5.059773172
5	7.380968843	7.389056099	7.588637542
6	11.00870024	11.02317638	11.38142320
7	16.41945436	16.44464677	17.06983543
8	24.48958329	24.53253020	25.60130455
9	36.52616442	36.59823444	38.39678465
10	54.47870107	54.59815003	57.58741975

4.3.5. Mecánica Elemental.

El estudio del movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de un conjunto de fuerzas externas, fue una de las principales motivaciones para el planteamiento y solución de las ecuaciones diferenciales.

$$\sum_{externas} \overrightarrow{F(r(t), v(t), t)} = \frac{d \overrightarrow{mv(t)}}{dt} = m \overrightarrow{a(t)}, \quad (4.14)$$

para sistemas con $m = cte$ (partículas) y con $\overrightarrow{v(t)}$ la velocidad y $\overrightarrow{r(t)}$ la posición.

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d \overrightarrow{r(t)}}{dt} .$$

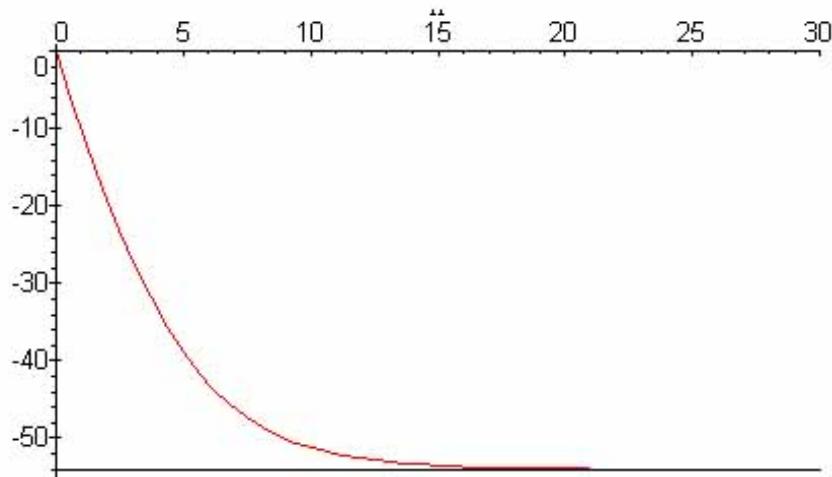


Figura 4.11: Velocidad del paracaidista en función del tiempo

Movimientos con Aceleración Constante

Así en carreras de velocidad, en las cuales los autos tienen que generar el máximo posible de velocidad para una distancia dada tendremos, que la ecuación Newton 5.7 se expresa

$$cte = F = m \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v(t) = v_0 + \frac{F}{m}t \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \end{array} \right\}$$

Los valores típicos para este caso son $v_0 = r_0 = 0$, $a = \frac{F}{m} = 9,8 \text{ m/s}^2$, y por lo tanto la velocidad final a los 400 m. es

$$v_f = \sqrt{2ax} \approx 89 \text{ m/s} = 320,4 \text{ Km/h}$$

Fricción en Fluidos

Por su parte, la descripción del movimiento de un paracaidista la ecuación 5.7 se convierte en

$$\sum_{externas} F(v(t)) = -mg + cv^2 = \frac{d p(t)}{dt} = m \frac{d v(t)}{dt} = m a(t), \quad (4.15)$$

con c una constante arbitraria que depende de la forma del cuerpo. Integrando esta ecuación separable se obtiene

$$v(t) = -v_t \frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)} \quad (4.16)$$

Donde hemos definido la velocidad terminal

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

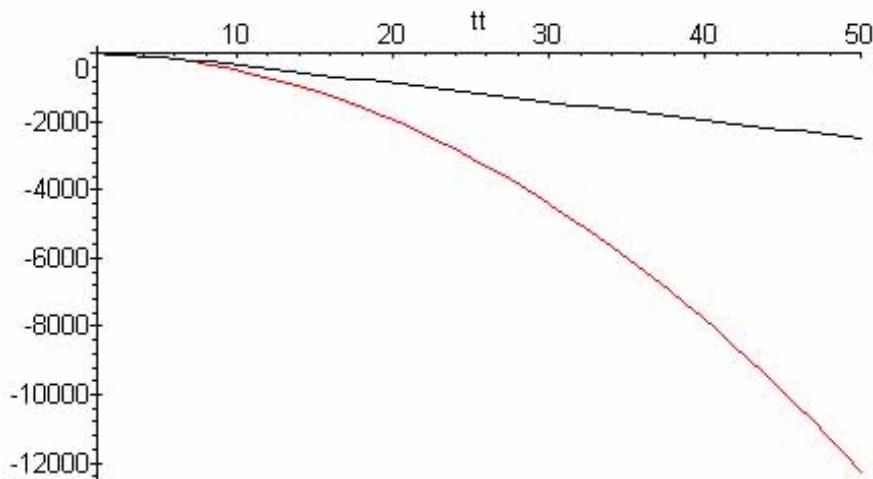


Figura 4.12: Posición del paracaidista respecto al tiempo

como la velocidad que anula la sumatoria de fuerzas y a partir de la cual el cuerpo cae sin aceleración. El tiempo que tarda en alcanzar esa velocidad es estrictamente para $t \rightarrow \infty$, sin embargo, una buena aproximación que surge de la ecuación 4.16, la constituye: $t \gg v_t/2g$. La velocidad terminal típica en un día soleado para un paracaidista de 70 Kg., en posición de “águila extendida”, es 54 m/s. (194,4 Km/h.) y por lo tanto alcanza la velocidad terminal luego de aproximadamente 15 s. esta situación se aprecia claramente en la figura 4.11.

Por su parte, la posición surge al integrar la ecuación 4.16

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -v_t \frac{1 - \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right)}$$

integrando esta ecuación obtendremos

$$y_0 - y(t) = v_t \left(t + \frac{v_t}{g} \ln \left(\frac{2}{\exp\left(-\frac{2gt}{v_t}\right) + 1} \right) \right) \quad (4.17)$$

Con el comportamiento gráfico que muestra la figura 4.12.

Fuerzas Elásticas

Otra situación muy conocida se presenta bajo la acción de fuerzas elásticas. Así, la ecuación 5.7, ahora se expresa como

$$\sum_{externas} F(x(t)) = -kx(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m a(t),$$

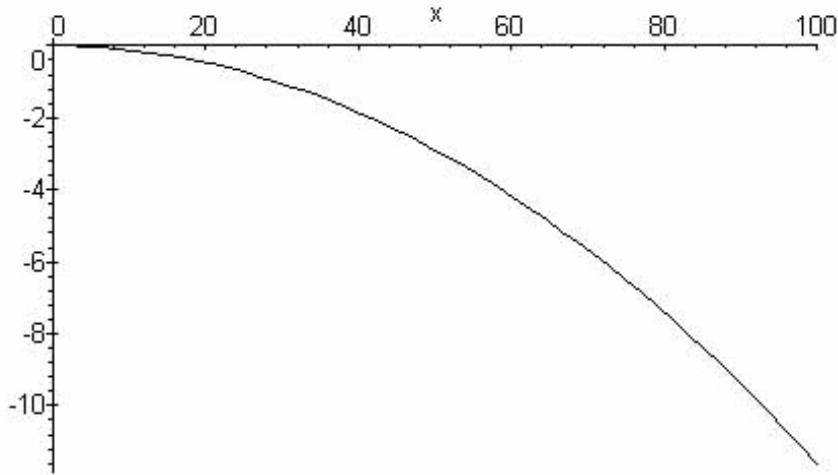


Figura 4.13: Trayectoria de la Flecha al abandonar el arco.

Utilizando la “regla de la cadena”

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dx(t)} \frac{dx(t)}{dt} = v(t) \frac{dv(t)}{dx(t)}$$

Se convierte en separable y se integra para obtener la velocidad

$$m v(t)^2 = -k x(t)^2 + C_1 \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{-k x(t)^2 + C_0}{m}} \quad (4.18)$$

La posición será

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \right)$$

Para analizar el caso del lanzamiento de una flecha (23 g.) por una arco de 30 lb (134 N) el cual un arquero puede separarlo 0,72 m. se obtiene la velocidad de salida de la flecha como

$$v_f = d \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,72 \sqrt{\frac{\frac{134}{0,72}}{23 \times 10^{-3}}} = 65 \text{ m/s}$$

Es interesante mencionar que en 100 m la flecha baja una distancia de ≈ 11 m. ¡!

Sistemas de Masa Variable

Otro de los ejemplos interesantes es la evolución de sistemas de masa variable. El primero de los casos tiene que ver con una barca de masa m_0 que tiene una velocidad inicial v_0 en su navegar, comienza a llover y se va llenando de agua. El agua se acumula con una tasa σ (masa por unidad de tiempo). Se pide encontrar la velocidad de la barca como función del tiempo.

$$P = mv = const = m_0 v_0$$

si $\frac{dm}{dt} = \sigma = \text{cont} \Rightarrow m(t) = m_0 + \sigma t$ y consecuentemente

$$v(t) = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \sigma t}$$

Un segundo caso tiene que ver con una masa M atada a una cadena de densidad lineal de masa ρ . Esta masa se impulsa hacia arriba con una velocidad inicial v_0 . Se pide encontrar el tiempo en que alcanza la altura máxima. La ecuación de Newton para este caso se puede expresar como

$$-Peso_{Masa} - Peso_{cadena} = \frac{d(mv)}{dt} \Leftrightarrow -Mg - \rho x g = \frac{dm}{dt}v + \frac{dv}{dt}m$$

o equivalentemente

$$-g\rho\xi = \frac{dp}{dt} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \xi = \frac{M}{\rho} + x \\ y \\ p = mv = \rho\xi \frac{d\xi}{dt} \end{cases}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} -g\rho\xi p = p \frac{dp}{dt} &\Rightarrow -g\rho\xi m d\xi = pdp \Rightarrow -g\rho\xi \rho\xi d\xi = pdp \\ - \int_{\frac{M}{\rho}}^{\xi} g\rho^2 \xi^2 d\xi &= \int_{m_0 v_0}^p pdp \Rightarrow g\rho^2 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} \right) = \frac{p^2}{2} - \frac{(m_0 v_0)^2}{2} \\ t - t_0 &= \int \frac{\rho\xi d\xi}{\sqrt{2g\rho^2 \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\left(\frac{M}{\rho}\right)^3}{3} + \frac{(m_0 v_0)^2}{2} \right)}} \end{aligned}$$

Un Cohete en Movimiento

Finalmente el caso más emblemático es el movimiento de un cohete que consume una fracción importante de su combustible. Llámemos v la velocidad del cohete para un instante de tiempo t y v' la velocidad de salida de los gases respecto a tierra. Para ese instante t la cantidad de movimiento del cohete es mv un instante dt más tarde la cantidad de movimiento será

$$p' = \underbrace{(m + dm)(v + dv)}_{cohete} + \underbrace{(-dm)v'}_{gases} = mv + m \, dv - dm \underbrace{(v' - v)}_{vel. rel.}$$

Entonces el cambio en la cantidad de movimiento será

$$dp = p' - p = mdv - v_{gases} dm$$

y por lo tanto la ecuación de Newton

$$m(t) \frac{dv(t)}{dt} - v_{gases} \frac{dm}{dt} = \sum_{externas} F$$

Despreciando la resistencia del aire y suponiendo la gravedad constante, tendremos

$$\frac{dv(t)}{dt} - \frac{v_{gases}}{m} \frac{dm}{dt} = -g$$

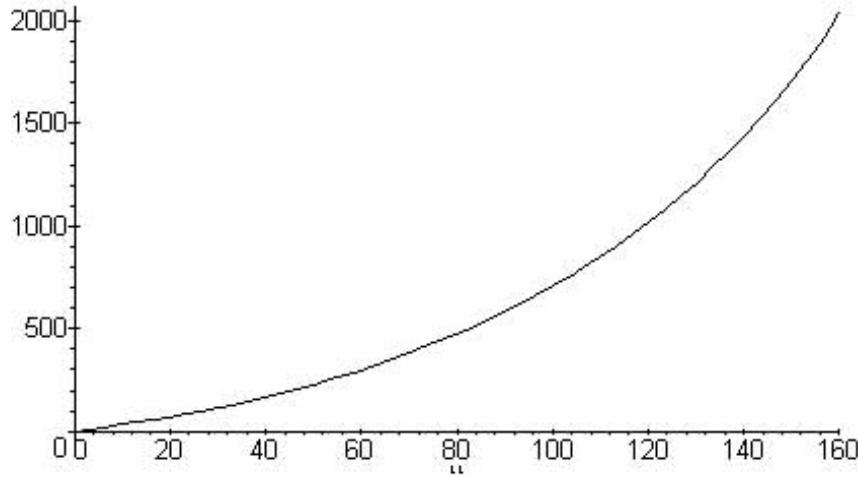


Figura 4.14: Velocidad del Cohete

integrando

$$v = v_0 + v_{gases} \ln \left(\frac{m_i}{m(t)} \right) - gt$$

si suponemos que el combustible se quema de la forma

$$m(t) = m_i(1 + \alpha t) \leftrightarrow \frac{dm}{dt} = \alpha = cte$$

La cantidad

$$E = v_{gases} \left| \frac{dm}{dt} \right|$$

se denomina el empuje del cohete.

4.3.6. Modelado de Concentración/Desliemiento de Soluciones

Otro de los problemas típicos donde se aplican exitosamente las ecuaciones diferenciales son los problemas de manejo de concentración de sustancias en soluciones líquidas. El principal objetivo, consiste en plantear el problema en término del problema de valores iniciales que gobierna el fenómeno (ecuación diferencial + condiciones iniciales). Para ello, en este tipo de problemas, siempre utilizaremos la regla intuitiva de

$$\text{Tasa de Cambio de la Concentración} = \text{Tasa de Ingreso} - \text{Tasa de Egreso}$$

Así, tendremos que para un problema típico en el cual inicialmente se encuentran diluidos en un recipiente (un tanque) y_0 gr de una sustancia en V_0 litros de un líquido. A este tanque le cae otro líquido con una concentración distinta de la misma sustancia a $v_{entrada}$ lit/min, mientras que v_{salida} lit/min salen del tanque. Si suponemos que dentro del tanque sucede algún proceso de homogenización de la solución, la pregunta típica es que queremos saber la cantidad de sustancia que se encuentra en el tanque en un tiempo t . A la

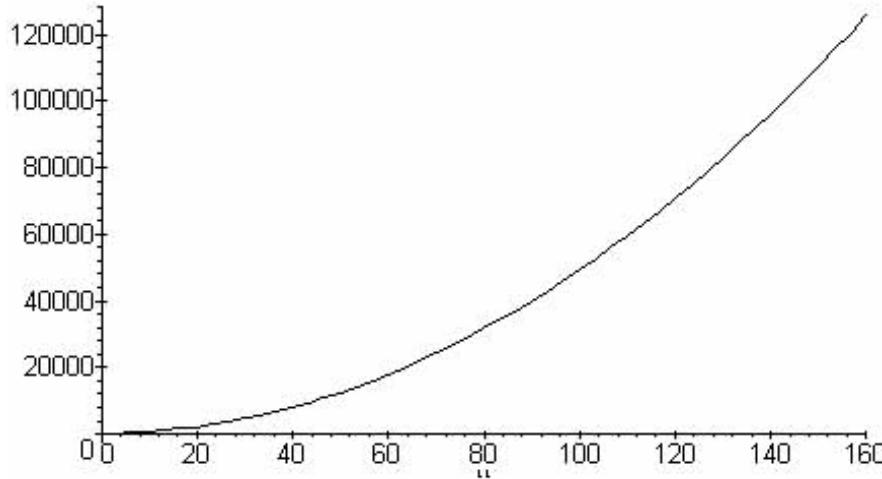


Figura 4.15: Posición del Cohete

concentración de la sustancia en el líquido de entrada (gr/lit), en un tiempo t , la denotaremos como $C(t)$ gr/lit. La figura (4.16) ilustra este proceso.

Para empezar notemos que, en esta situación el volumen no es constante. Por lo tanto, con el mismo espíritu de la “ley de balanceo” que hemos propuesto, si las velocidades de ingreso y egreso son constantes, nos queda que la variación del volumen inicial viene dada por la diferencia de estas velocidades, esto es

$$V'(t) = v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}} \Rightarrow V(t) = V_0 + (v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})t$$

con lo cual también hemos integrado una ecuación diferencial para encontrar como variará el volumen con el tiempo.

Para la construcción de la ecuación diferencial, procedemos de manera similar y si describimos la cantidad de sustancia en el tanque como $y(t)$, nos queda que la tasa de cambio de la cantidad de sustancia en el tanque será

$$y'(t) = \underbrace{v_{\text{entrada}} \left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}} \right) C(t) \left(\frac{\text{gr}}{\text{lit}} \right)}_{\text{Tasa de Ingreso}} - \underbrace{v_{\text{salida}} \left(\frac{\text{lit}}{\text{mín}} \right) \left(\frac{y(t)}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})t} \frac{\text{gr}}{\text{lit}} \right)}_{\text{Tasa de Egreso}}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial tomará la forma típica de una ecuación diferencial lineal de primer orden inhomogénea

$$y'(t) + y(t) \frac{v_{\text{sal}}}{V_0 + (v_{\text{ent}} - v_{\text{sal}})t} = v_{\text{ent}} C(t)$$

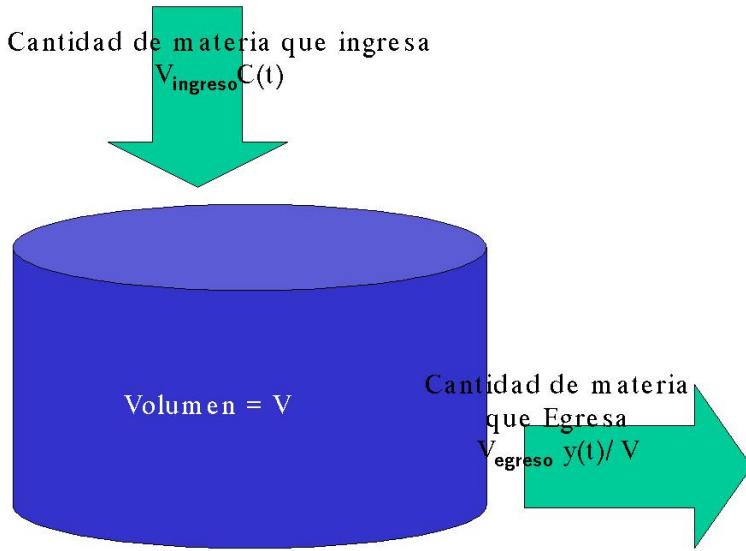


Figura 4.16: Soluciones y tanques

que tendrá por solución

$$y(t) = \underbrace{\frac{y_0}{(-V_0)} \left(\frac{v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}} \right)^{-\left(\frac{-v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}} \right)} ((-v_{ent} + v_{sal})t - V_0) \left(\frac{-v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}} \right)}_{\text{Respuesta a las Condiciones iniciales}} \\ - \underbrace{((-v_{ent} + v_{sal})t - V_0) \frac{v_{sal}}{-v_{ent} + v_{sal}} \int_0^t v_{ent} C(u) (u(v_{ent} - v_{sal}) + V_0) \left(\frac{v_{sal}}{v_{ent} - v_{sal}} \right) du}_{\text{Respuesta a la Excitación externa}}$$

Nótese lo genérico de esta solución. Por un lado, la concentración de la sustancia, $C(t)$, en la solución que entra al sistema es distinta a la concentración de la sustancia presente en el tanque, más aún, puede ser variable con el tiempo. Por otro lado esta solución presenta una singularidad (un infinito) cuando la velocidad de ingreso es igual a la velocidad de egreso. Para este caso en el cual el volumen del tanque permanece constante tendremos que resolver la ecuación diferencial

$$y'(t) + y(t) \frac{v_{sal}}{V_0} = v_{ent}C(t) \Rightarrow y(t) = \left(\int_0^t C(u) v_{entrada} e^{\left(\frac{v_{sal} u}{V} \right)} du + y_0 \right) e^{-\frac{v_{sal} t}{V}}$$

Tal y como hemos mencionado varias veces (y seguiremos mencionando) la solución general para una ecuación diferencial inhomogénea se compone de dos soluciones, la solución de la ecuación diferencial homogénea más la solución de la inhomogénea.

$$y_{\text{general}}(x) = y_{\text{homogénea}}(x) + y_{\text{inhomogénea}}(x)$$

Este ejemplo nos permite constatar el sentido cada una de estas soluciones, vale decir

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-\frac{v_{salida} t}{V}}}_{\text{Respuesta a las Condiciones Iniciales}} + \underbrace{e^{-\frac{v_{salida} t}{V}} \int_0^t C(u) v_{entrada} e^{\left(\frac{v_{salida} u}{V}\right)} du}_{\text{Respuesta a la Exitación externa}}$$

En esta es una visión que debemos conservar, en general para todas las ecuaciones lineales inhomogéneas independientes del orden de la ecuación diferencial, así recordando, dada una ecuación diferencial y su solución tal que se cumple la condición inicial $y(0) = y_0$ entonces siempre es posible

$$\frac{d}{dx} y(x) + p(x) y(x) = g(x) \Leftrightarrow y(x) = \underbrace{y_0 e^{\int_0^x -p(u) du}}_{\text{solución homogénea}} + \underbrace{e^{\int_0^x -p(u) du} \int_0^x g(u) e^{\int_u^x p(u) du} du}_{\text{Solución inhomogénea}}$$

donde ahora vemos claramente que la solución de la homogénea da cuenta a las condiciones iniciales del proceso y la solución de la inhomogénea provee la respuesta a la exitación externa al sistema.

Este comportamiento de las soluciones es útil si nos planteamos que al tratar de “limpiar” una piscina, a la cual le hemos añadido el doble de la cantidad de sulfatos permitida, y queremos saber cuanto tiempo tenemos que mantener abierta una entrada de 120 lits/min de agua sin sulfatos y la salida de la piscina que responde a 60 lits/min. La piscina en cuestión tiene 20 m de longitud, 10 m de ancho y 2 m de profundidad. Siguiendo los pasos anteriormente planteados, tendremos que

$$y'(t) + y(t) \left(\frac{v_{sal}}{V_0 + (v_{ent} - v_{sal}) t} \right) = 0 \Rightarrow y'(t) + y(t) \left(\frac{60 \left(\frac{\text{lit}}{\text{min}} \right)}{4 \times 10^5 \text{lit} + (120 - 60) t \left(\frac{\text{lit}}{\text{min}} \right)} \right) = 0$$

$$y'(t) + y(t) \left(\frac{60 \left(\frac{\text{lit}}{\text{min}} \right)}{4 \times 10^5 \text{lit} + 60 \left(\frac{\text{lit}}{\text{min}} \right) t} \right) = 0 \Rightarrow y(t) = 20000 \frac{y_0}{3t + 20000}$$

donde el volumen es $V = 400m^3 = 400(100cm)^3 = 4 \times 10^8 cm^3 = 4 \times 10^8 (10^{-3}\text{lit}) = 4 \times 10^5 \text{lit}$.

Con lo cual el tiempo para que la cantidad final decaiga a la mitad de la inicial surge de

$$y_0 = 20000 \frac{2y_0}{3t + 20000} \Rightarrow t \approx 6,666,66 \text{ minutos !!!!!}$$

Capítulo **5**

Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor a 1

Borrador Preliminar

5.1. Definiciones para comenzar

Definición

La ecuación diferencial

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + a_n(x) y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

es lineal de orden n . Obviamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= 0 &\Rightarrow \text{Homogénea} \\ \mathcal{F}(x) &\neq 0 &\Rightarrow \text{InHomogénea} \\ a_i(x) &= a_i = \text{ctes} \end{aligned}$$

Definición

Si los coeficientes $a_i = \text{ctes}$ entonces la ecuación diferencial lineal y homogénea, de orden n , tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Las raíces de este polinomio indicarán la forma de la solución.

Definición

Si el polinomio característico puede factorizarse

$$(r - m_1)^{k_1} (r - m_2)^{k_2} (r - m_3)^{k_3} \cdots (r - m_l)^{k_l} = 0$$

entonces diremos que las raíces $m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}, \dots, m_{k_l}$ tienen multiplicidades $k_1, k_2, k_3, \dots, k_l$, respectivamente.

5.2. Homogéneas, lineales, de segundo orden

La ecuación

$$a y'' + b y' + c y = 0 \Leftrightarrow a r^2 + b r + c = 0$$

tiene asociada ese polinomio característico y sus raíces m_1 y m_2 condicionan la solución de la manera siguiente

1. Si $m_1 \neq m_2$ y m_1 y m_2 son reales, entonces la solución es

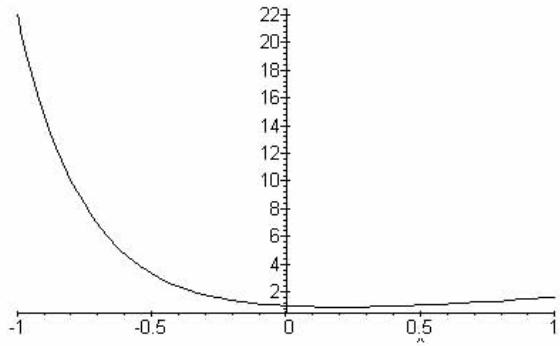
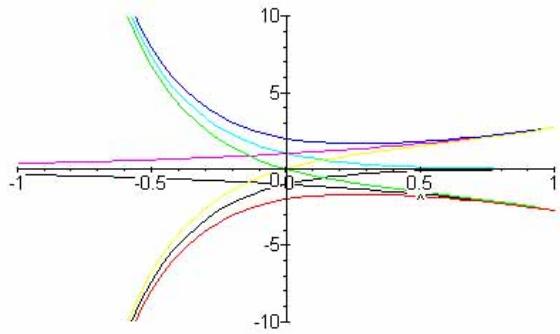
$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

2. Si $m_1 = m_2$ y m_1 y m_2 son reales, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

3. Si $m_1 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ y $m_2 = \bar{m}_1 = \alpha - i\beta$, entonces la solución es

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Figura 5.1: $y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$ Figura 5.2: $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

Ejemplos

La ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 0; \quad y(0) = 1 \wedge y'(0) = -1 \Leftrightarrow r^2 + 3r - 4 = (r + 4)(r - 1) = 0$$

tiene asociado ese polinomio característico y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$$

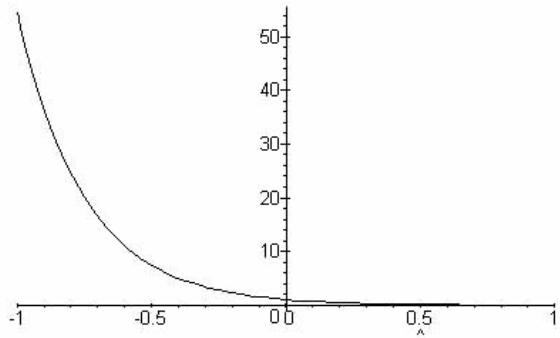
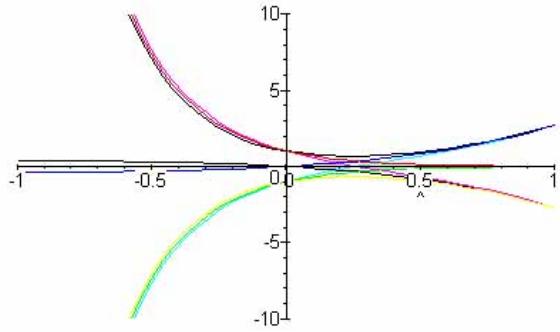
En la figura 5.1 se encuentra graficada esa solución particular. De igual modo, para distintos valores de $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ tendremos las gráficas representadas en la figura 5.2 ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

Otra ecuación podría ser

$$y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1 \wedge y'(0) = -1 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-x}$$

Figura 5.3: $y(x) = e^{-x}$ Figura 5.4: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

La gráfica para esta solución está representada en la figura 5.3

Para distintos valores de $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$ tendremos las gráficas representadas en la figura 5.4. Cabe seguir preguntando ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

Finalmente, la ecuación

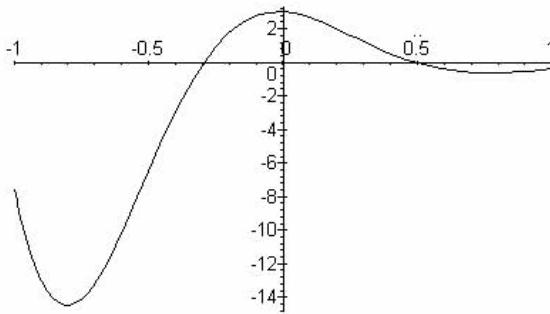
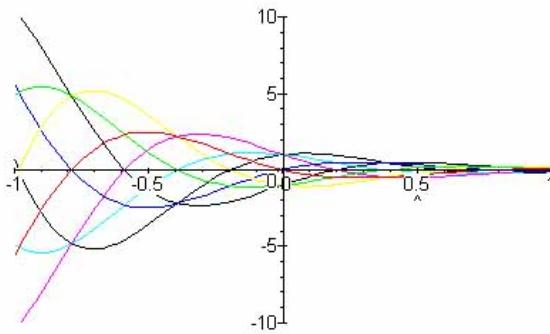
$$y'' + 4y' + 20y = 0; \quad y(0) = 3 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 4r + 20 = (r + 2)^2 + 16 = 0$$

con las siguientes soluciones $r = -2 \pm 4i$ y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-2x} \left(3 \cos 4x + \frac{5}{4} \sin 4x \right)$$

y su representación gráfica se encuentra en la figura 5.5 y para distintos valores de las constantes

Al igual que en los casos anteriores, para distintos valores de las constantes de integración, tendremos las gráficas de la figura 5.6

Figura 5.5: $y(x) = e^{-2x} (3 \cos 4x + \frac{5}{4} \sin 4x)$ Figura 5.6: $y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ para $C_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

5.3. Ecuaciones diferenciales de orden n

La ecuación

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_n y^{(n)}(x) = 0$$

con $a_i = ctes$ tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

el cual condicionará la solución de la siguiente forma

- Si m es una raíz real con multiplicidad $k \geq 2$ entonces las k soluciones asociadas con m serán de la forma

$$e^{mx}, x e^{mx}, x^2 e^{mx}, x^3 e^{mx}, \dots x^{k-1} e^{mx}$$

- Si m y \bar{m} son parejas de soluciones complejas, $\alpha \pm i\beta$, del polinomio característico y tienen multiplicidad k , entonces las soluciones correspondientes serán

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Ejemplos

- La ecuación

$$24y''' + 2y'' - 5y' - y = 0 \Leftrightarrow 24r^3 + 2r^2 - 5r - 1 = (3r + 1)(2r - 1)(4r + 1) = 0$$

consecuentemente con las raíces

$$m_1 = -\frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad m_3 = -\frac{1}{4},$$

y con la solución de la forma

$$y(x) = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{x/2} + C_3 e^{-x/4}$$

- La ecuación

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \Leftrightarrow r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3 = 0$$

con las raíces $m = -1$ con multiplicidad $k = 3$ y con una solución de la forma

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

- La ecuación

$$4y^{(4)} + 12y''' + 49y'' + 42y' + 10y = 0 \Leftrightarrow 4r^4 + 12r^3 + 49r^2 + 42r + 10 = (r^2 + 2r + 10)(2r + 1)^2 = 0$$

consecuentemente con las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad m_3 = -\frac{1}{2}, \text{ con multiplicidad 2}$$

Entonces la solución es de la forma

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + C_3 e^{-x/2} + C_4 x e^{-x/2}$$

- La ecuación

$$y^{(4)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0 \Leftrightarrow r^4 + 4r^3 + 24r^2 + 40r + 100 = (r^2 + 2r + 10)^2 = 0$$

con las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad \text{con multiplicidad 2.}$$

Entonces la solución es de la forma

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \operatorname{sen} 3x)$$

- La ecuación

$$4y''' + 33y' - 37y = 0;$$

con

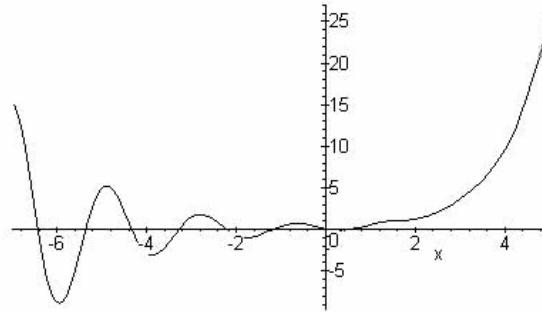
$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 3 \Leftrightarrow 4r^3 + 33r - 37 = (r - 1)(4r^2 + 4r + 37) = 0$$

consecuentemente con una solución general de la forma

$$y(x) = C_1 e^x + e^{-x/2}(C_2 \cos 3x + C_3 \operatorname{sen} 3x)$$

y con la solución particular

$$y(x) = \frac{8}{45} e^x - e^{-x/2} \left(\frac{8}{45} \cos 3x + \frac{19}{45} \operatorname{sen} 3x \right)$$

Figura 5.7: $y(x) = \frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}(\frac{8}{45}\cos 3x + \frac{19}{45}\sin 3x)$

5.4. Algunos métodos de solución para ecuaciones inhomogéneas

5.4.1. El Wronskiano

Definición: Independencia y Dependencia Lineal.

Sean n funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)$, cuando menos $n-1$ veces diferenciables. Entonces, el conjunto $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$, se dice linealmente dependiente en el intervalo I, si existen algunas constantes, $c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n$ distintas de cero tal que

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

Por el contrario, si no existe ninguna constante $c_i \neq 0$, se dirá que S es linealmente independiente.

Definición: Wronskiano

El conjunto $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$ de funciones, cuando menos $n-1$ veces diferenciables, conforman el Wronskiano,

$$W(S) = W(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x))$$

a través del siguiente determinante

$$W(S) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \cdots & f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si $W(S) \neq 0$ al menos en un punto dentro del intervalo I, entonces S es linealmente independiente

Definición: Conjunto Fundamental de Soluciones.

El conjunto $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$ de n soluciones no triviales a la ecuación diferencial:

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \dots + a_n(x) y^{(n)}(x) = 0, \quad (5.1)$$

Se le denomina conjunto fundamental de soluciones. La combinación lineal

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

también es solución de la ecuación diferencial (5.1) y se denomina como solución general de (5.1). Adicionalmente, si los coeficientes $a_i(x)$ son continuos en el intervalo abierto I para todo $i = 1, 2, \dots, n$, entonces la ecuación diferencial (5.1) tiene un conjunto fundamental de n soluciones linealmente independientes.

Definición: Soluciones Particulares y Generales.

Dada una ecuación diferencial lineal Inhomogénea

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_n(x) y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (5.2)$$

Si $y_p(x)$ es solución de (5.2) sin constantes arbitrarias, entonces $y_p(x)$ se denomina solución particular de (5.2). De igual modo, se denominará solución general de (5.2) a la suma de la solución, $y_h(x)$, de la ecuación homogénea (5.1) más la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

5.4.2. Métodos de los coeficientes indeterminados

Dada la ecuación diferencial

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (5.3)$$

con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ coeficientes constantes, el método de los coeficientes indeterminados se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0 \quad (5.4)$$

y obtenga $y_h(x)$.

2. Proponga la forma de la solución particular para la ecuación inhomogénea (5.3) siguiendo el siguiente procedimiento. Dada $\mathcal{F}(x) = b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + \cdots + b_n g_n(x)$, con los b_i coeficientes constantes, entonces

- a) Si $\mathcal{F}(x) = P(x)$, un polinomio, es decir $g_i(x) = x^m$ entonces proponga como solución particular a

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m$$

- b) Si $g_i(x) = x^m e^{kx}$ entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

$$y_p(x) = e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m)$$

- c) Si $g_i(x) = x^m e^{kx} \cos \beta x$ o $g_i(x) = x^m e^{kx} \operatorname{sen} \beta x$, entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

$$y_p(x) = \begin{aligned} &e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m) \cos \beta x + \\ &e^{kx} (\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x + \tilde{A}_2 x^2 + \tilde{A}_3 x^3 + \cdots + \tilde{A}_m x^m) \operatorname{sen} \beta x \end{aligned}$$

3. Determine el valor de los coeficientes A_i al sustituir la solución propuesta $y_p(x)$ en (5.3)
4. Construya las solución general $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Ejemplos

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$$

Tiene como solución de la homogénea

$$y_h = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$$

y proponemos como solución particular de la ecuación a

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + De^x$$

sustituimos su expresión en la ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} & 2A + De^x + \\ & 4(2Ax + B + De^x) + \\ & 4((Ax^2 + Bx + C) + De^x) + \\ & = 4x^2 + 6e^x \end{aligned}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4A &= 4 \\ 8A + 4B &= 0 \\ 2A + 4B + 4C &= 0 \\ 9D &= 6 \end{aligned}$$

y de allí el valor de los coeficientes

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = \frac{3}{2}; \quad D = \frac{2}{3}$$

y con ellos la solución general

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

Ejercicios

1. La ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x e^{3x} + 3\operatorname{sen}x$$

tiene como solución

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x e^{3x} - \frac{3}{2} e^{3x} + \frac{3}{10} \operatorname{sen}x + \frac{9}{10} \cos x$$

2. La ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3 e^{2x}$$

tiene como solución

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2 + 3x e^{2x}$$

5.4.3. Métodos de variación de parámetros

Dada la ecuación diferencial

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (5.5)$$

El método de variación de los parámetros se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0 \quad (5.6)$$

y obtenga $y_h(x)$.

2. Proponga como solución particular

$$y_p = u_1(x) y_{h1} + u_2(x) y_{h2}$$

donde las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son funciones a determinar en el método y las y_1 y y_2 son las soluciones a la ecuación homogénea (5.6).

3. Sustituya esta solución propuesta en la ecuación (5.5) para obtener, luego de algún nivel de álgebra elemental

$$\begin{aligned} & u_1(x) \underbrace{(a_0 y_1 + a_1 y'_1 + a_2 y''_1)}_{=0} + \\ & u_2(x) \underbrace{(a_0 y_2 + a_1 y'_2 + a_2 y''_2)}_{=0} + \\ & a_2 (u'_1 y_1 + u'_2 y_2)' + a_1 (u'_1 y_1 + u'_2 y_2) \\ & a_2 (u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2) = \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{aligned} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 &= 0 \\ a_2 (u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2) &= \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

con sus soluciones de la forma

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2} & y'_2 \\ \hline y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2} & y'_2 \\ \hline W(y_1, y_2) & \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x) \\ u'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2} \\ \hline y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} \\ \hline W(y_1, y_2) & \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x) \end{aligned}$$

e integrando se obtienen los coeficientes respectivos,

$$u_1(x) = \int \mathcal{G}_1(x) dx; \quad u_2(x) = \int \mathcal{G}_2(x) dx$$

para finalmente obtener la solución general

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$$

nótese que no incorporamos las constantes de integración en la funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$.

Ejemplo:

La ecuación inhomogénea de Cauchy¹-Euler²

$$a_0 y(x) + a_1 x y'(x) + \cdots + a_n x^n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

con los $a_i = ctes$, puede ser resuelta por este método. Consideremos una ecuación de orden 2

$$c y(x) + b x y'(x) + a x^2 y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

La solución de la homogénea se propone como $y_h = x^m$ por lo tanto

$$\begin{aligned} c y(x) + b x y'(x) + a x^2 y''(x) &= 0 \\ c x^m + b x m x^{m-1} + a x^2 m(m-1)x^{m-2} &= 0 \\ x^m (c + b m + a m(m-1)) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$am^2 + (b - a)m + c = 0$$

con

$$m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto

- Si $m_1 \neq m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

- Si $m_1 = m_2$ y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{m_1} (C_1 + C_2 \ln x)$$

- Si $m_1 = \bar{m}_2 = \alpha + i\beta$, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$$

Ahora para lograr la solución de la inhomogénea suponemos el caso $m_1 \neq m_2$ por lo tanto

$$y_{1h} = x^{m_1} \quad y_{2h} = x^{m_2}$$

$$u'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x)$$

$$u'_2 = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1 x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1 x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x)$$

¹Louis Augustin Baron de Cauchy (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales

²Leonhard Euler (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

La siguiente ecuación diferencial

$$x^2y'' - xy' + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea

$$y_h = x (C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x))$$

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x) y_{h1} + u_2(x) y_{h2}$$

calculando los coeficientes respectivos en donde el Wronskiano

$$W(x \cos(2 \ln x); x \operatorname{sen}(2 \ln x)) = 2x$$

por lo cual los coeficientes quedan

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \mathcal{G}_1(x) dx = \int \frac{x \operatorname{sen}(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \cos(2 \ln x) \\ u_2 &= \int \mathcal{G}_2(x) dx = \int \frac{x \cos(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \ln x) \end{aligned}$$

finalmente las solución particular será

$$y_p = x \left(\frac{1}{4} \cos^2(2 \ln x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2 \ln x) \right) = \frac{1}{4}x$$

y la general

$$y = x (C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)) + \frac{1}{4}x$$

5.4.4. Métodos de reducción de orden

Este método supone, por lo tanto

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

tendrá como primer solución no trivial para la ecuación homogénea, $y_{h1}(x)$, entonces la segunda solución vendrá dada por

$$y_{h2}(x) = y_{h1}(x) \int u(x) dx$$

donde $u(x)$ es la función incógnita a determinar. Sustituyendo esta expresión en la ecuación homogénea se obtiene

$$\begin{aligned} &\overbrace{(a_0(x) y_1(x) + a_1(x) y'_1(x) + a_2(x) y''_1(x))}^{=0} \int u(x) dx + \\ &+ a_2(x) y_1(x) u'(x) + (2a_2(x) y'_1(x) + a_1(x) y_1(x)) u(x) = 0 \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación diferencial para $u(x)$ tendremos que:

$$u(x) = \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_2} dx}}{y_1^2}$$

La ecuación

$$(x - 1)y''' + 2y'' = \frac{x + 1}{2x^2}$$

tiene como solución $y_1 = C_1x + C_2$ y como solución general

$$y = C_1x + C_2 + C_3 \ln|x - 1| + \frac{1}{2}x \ln|x|$$

5.5. Algunas aplicaciones de las ecuaciones de orden superior

5.5.1. Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es

$$\alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} + \gamma u \equiv \alpha \frac{d^2u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \gamma u = \Lambda(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x & \Rightarrow \text{Desplazamiento} \\ \frac{dx}{dt} & \Rightarrow \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow \text{Constante Elástica} \\ F(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Aplicada} \end{cases}$$

y circuitos eléctricos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Q & \Rightarrow \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{dQ}{dt} = I & \Rightarrow \text{Intensidad de Corriente} \\ L & \Rightarrow \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow \text{Capacitancia} \\ E(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Electromotriz} \end{cases}$$

Analicemos la ecuación que describe sistemas mecánicos y dejamos la cual describe sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos a analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir $F(t) = 0$, lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si $F(t) \neq 0$, es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

5.5.2. Oscilaciones libres

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 se denomina la frecuencia natural de oscilación y C_1 y C_2 las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si } \begin{cases} C_1 = A \cos \delta \\ C_2 = A \sin \delta \end{cases} \Rightarrow x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

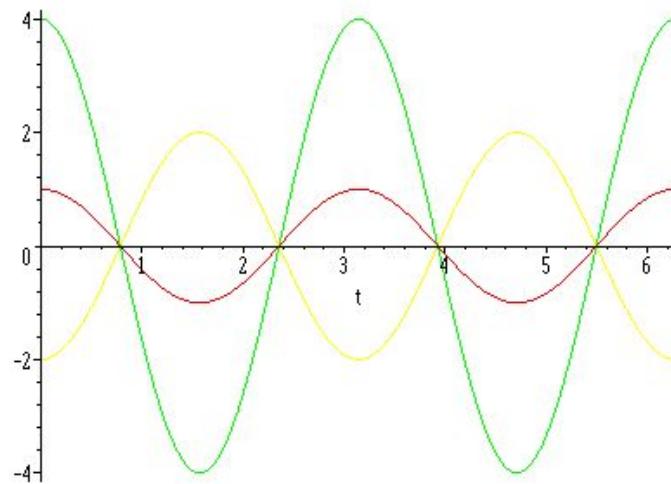


Figura 5.8: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

con R la amplitud y δ en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual $m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m En este caso la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sg. La ecuación diferencial que describe este movimiento será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 1; & \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0; \\ x(0) = 4; & \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ x(0) = -2; & \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0 \\ x(0) = 0; & \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1; \\ x(0) = 0; & \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 4; \\ x(0) = 0; & \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &x(t) = \cos(2t) \\ &x(t) = 4 \cos(2t) \\ &x(t) = -2 \cos(2t) \\ &x(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) \\ &x(t) = 2 \sin(2t) \\ &x(t) = -\sin(2t) \end{aligned}$$

5.5.3. Oscilaciones libres amortiguadas

Consideremos qué en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

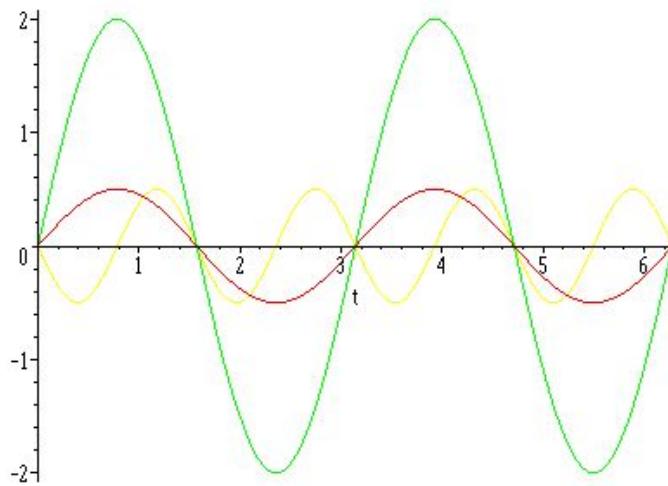


Figura 5.9: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad inicial no afectan la frecuencia natural

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Las raíces del polinomio característico asociado serán

$$r = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m} = -\frac{\eta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

por lo tanto la solución será

$$x(t) = C_1 e^{(-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t)} + C_2 e^{(-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t)}$$

de donde se deducen los siguientes casos

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \Leftarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \text{Sobreamortiguado}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\mu t} \quad \Leftarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{Crítico}$$

$$x(t) = e^{-\mu t} \left\{ C_1 \cos \left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] + C_2 \sin \left[\left(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] \right\} \quad \Leftarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \text{Subamortiguado}$$

Ejemplo Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual $m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento será $\eta = 0,60, 0,40$ y $0,15$. En todos los casos la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ rad/sg. y la cantidad subradical $(\mu^2 - \omega_0^2)$ corresponderá a los tres casos

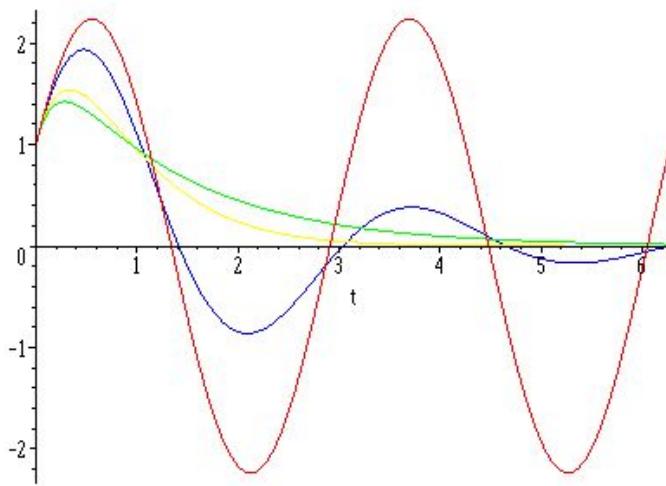


Figura 5.10: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

anteriormente mencionados. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento serán

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad & \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{5}} \right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{5}} \right) e^{-(3+\sqrt{5})t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad & \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = (1 + 6t) e^{-2t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad & \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{9}{\sqrt{15}} \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) \right] \end{aligned}$$

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, i.e. $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4$ m/s, tendremos la siguiente representación gráfica.

$$\begin{aligned} x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4; \quad & \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) e^{-(3+\sqrt{5})t} \\ x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4; \quad & \Rightarrow x(t) = (1 + 2t) e^{-2t} \\ x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4 \quad & \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[\frac{-7}{\sqrt{15}} \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2}t \right) \right] \end{aligned}$$

En todos los casos dado que $r_1, r_2 < 0$ se tiene que $x(t \rightarrow 0) \rightarrow 0$. El movimiento subamortiguado es

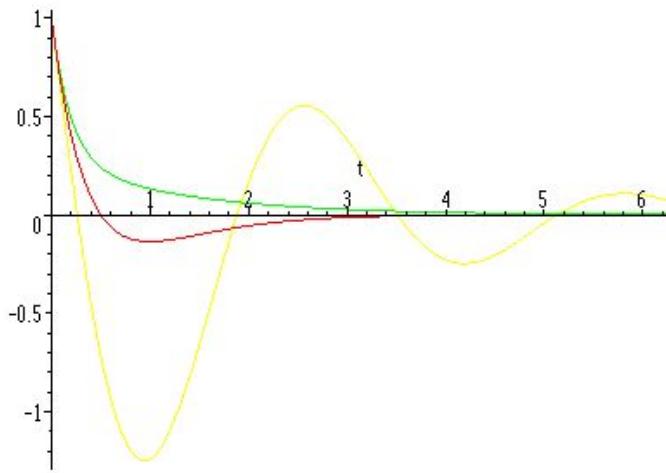


Figura 5.11: Oscilaciones Libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

periódico y el período viene descrito por

$$T_{am} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{si} \quad \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow T_{am} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right)$$

el cual siempre sera mayor que el periodo de oscilación natural del sistema.

5.5.4. Oscilaciones forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema tal que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

Oscilaciones forzadas no amortiguadas

En este caso $\mu = 0$ y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$

y tendrá como solución

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)}_{\text{inhomogénea}} = A \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)$$

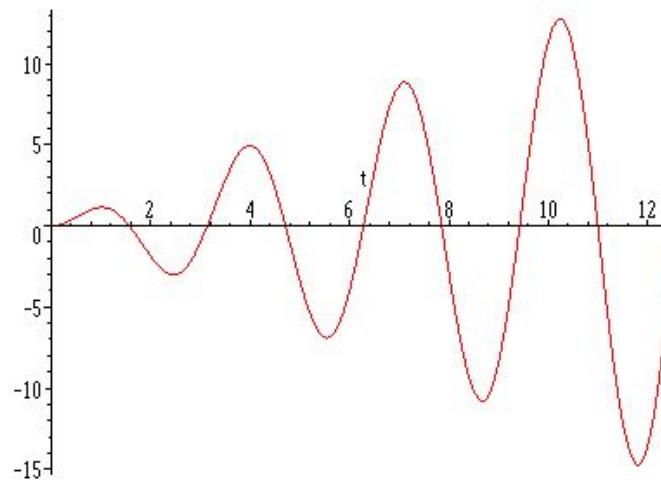


Figura 5.12: Oscilador armónico forzado con $\varpi = \omega_0^2$. Nótese el fenómeno de resonancia

con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ entonces

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \\ C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} [\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)]$$

dado que

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \cos \left[\left\{ \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) + \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\omega_0 t) &= \cos \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left[\left\{ \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) - \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ x(t) &= \underbrace{\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \left[\sin \left(\frac{\omega_0 - \varpi}{2} t \right) \right] \left[\sin \left(\frac{\omega_0 + \varpi}{2} t \right) \right]}_{\text{Envolvente}} \end{aligned}$$

Ejemplo El mismo sistema anterior en el cual $m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0,5 \cos(3t)$. Por lo tanto la ecuación

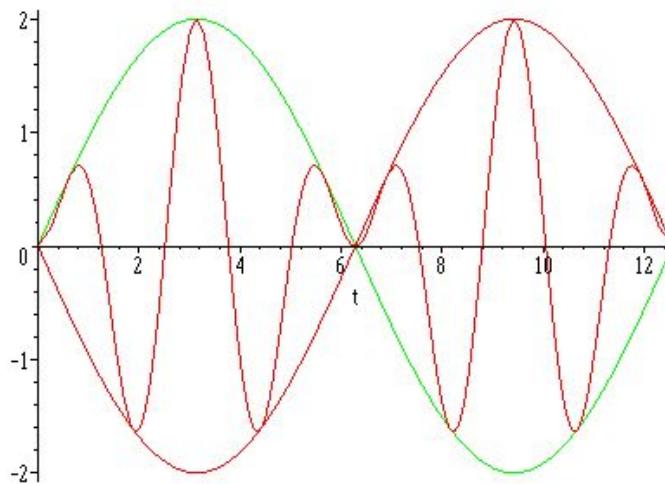


Figura 5.13: Oscilador armónico forzado. Nótese la envolvente de la función

diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(3t) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homog\'enica}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomog\'enea}} \equiv \underbrace{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \sin\left(\frac{5}{2}t\right)}_{\text{envolvente}}$$

Resonancia $\varpi = \omega_0$

En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)}_{\text{envolvente}}$$

Ejemplo El sistema anterior ($m = 0,1$ Kg. y $k = 0,4$ N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación $F = 0,5 \cos(2t)$. Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(2t) \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{5t}{4} \sin(2t)$$

5.5.5. Oscilaciones forzadas amortiguadas

En este caso $\mu \neq 0$ y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

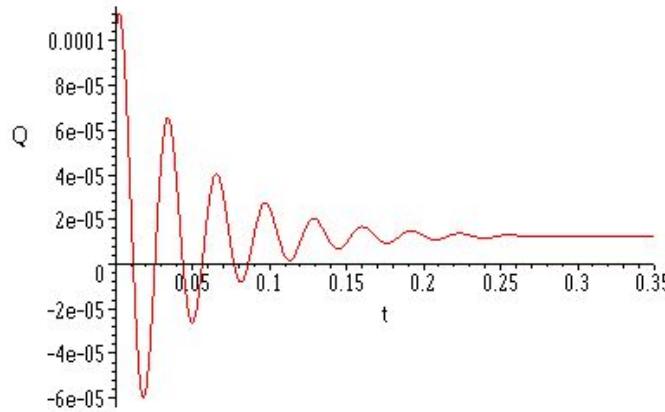


Figura 5.14: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 sg

la cual tendrá como solución

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + \frac{F_0}{m} \left(\frac{(\omega_0^2 - \varpi^2) \cos(\varpi t) + 2\mu\varpi \sin(\varpi t)}{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2} \right)$$

una vez más se puede convertir en

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término inhomogéneo que permanece oscilando. En términos Físico se pude decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales se disipa. Si no existiera disipación esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término inhomogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el termino inhomogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera para el caso para el cual tiene un máximo y es aquél en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

Ejemplo En un circuito RLC, cuyos componentes son $L = 1$ henry, $R = 40$ ohmios y $C = \frac{1}{40000}$ faradios, se le aplica un tensión de $V = 24$ voltios. Determine el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito.

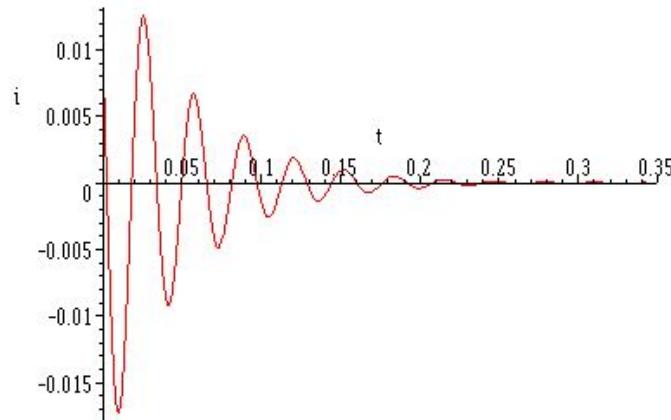


Figura 5.15: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltaje constante.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema

$$\begin{aligned} L \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) &\Rightarrow \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + 40 \frac{dQ(t)}{dt} + 40000 Q(t) = \frac{1}{2} \\ L \frac{d^2I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dE(t)}{dt} &\Rightarrow \frac{d^2I(t)}{dt^2} + 40 \frac{dI(t)}{dt} + 40000 I(t) = 0 \end{aligned}$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales tendremos como solución

$$\left. \begin{array}{l} Q(0) = 10^{-4} \\ I(0) = \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} = 10^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(t) = \frac{1}{8000} + e^{-20t} \left[\frac{47\sqrt{11}}{2640000} \sin(\sqrt{1160}t) + \frac{7}{8000} \cos(\sqrt{1160}t) \right] \\ I(t) = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} \left[\frac{1}{100} \cos(\sqrt{1160}t) - \frac{37\sqrt{11}}{6600} \sin(\sqrt{1160}t) \right] \end{array} \right.$$

Si en vez de un tensión constante de 0,5 V. la fuente de tensión es sinusoidal de la forma $E(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$ voltios las ecuaciones se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 40000 Q &= \frac{1}{2} \cos(180t) \quad \text{con } Q(0) = 10^{-4} \quad \wedge \quad I(0) = \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} = 10^{-2} \\ \frac{d^2I}{dt^2} + 40 \frac{dI}{dt} + 40000 I &= -90 \sin(180t) \end{aligned}$$

con sus correspondientes soluciones a las condiciones iniciales del sistema

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{1000} \left\{ e^{-20t} \left[\frac{293\sqrt{11}}{30140} \sin(60\sqrt{11}t) + \frac{91}{685} \cos(60\sqrt{11}t) \right] - \frac{9}{274} \cos(180t) + \frac{19}{548} \sin(180t) \right\} \\ I(t) &= \frac{1}{100} \left\{ e^{-20t} \left[\frac{103}{274} \cos(60\sqrt{11}t) - \frac{2461\sqrt{11}}{3014} \sin(60\sqrt{11}t) \right] + \frac{81}{137} \sin(180t) + \frac{171}{274} \cos(180t) \right\} \end{aligned}$$

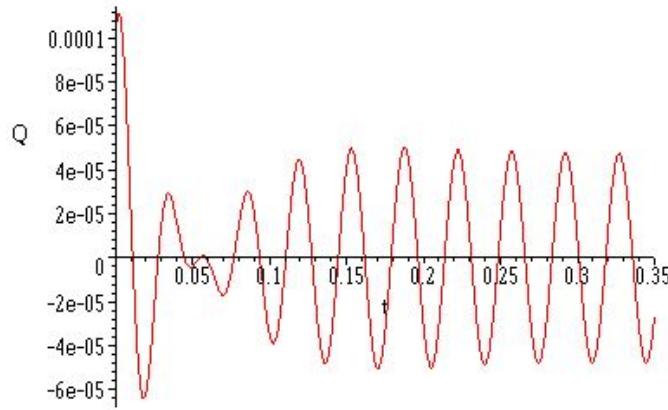


Figura 5.16: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$. Nótese el régimen transitorio ($0 \leq t \lesssim 0,17$) y estacionario ($t \gtrsim 0,17$).

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left. \begin{array}{l} 2\mu = \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{V_0}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^4 - 78400\omega^2 + 1600000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia excitatriz

5.5.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio

La fuerza elástica $F = -k x$ más allá de ser el caso más simple, representa la primera aproximación al movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable. Si recordamos que para una fuerza que derive de un potencial

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow F = -k x = -\frac{d\left(\frac{1}{2}k x^2\right)}{dx}$$

mas aun, un punto de equilibrio estable se define aquel en el cual no existen fuerzas externas, vale decir

$$F|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow -\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0$$

por lo cual, dado un potencial de una fuerza arbitraria siempre podemos expandirlo en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$

$$V(x) = v(x_0) + (x - x_0) \underbrace{\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 \frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_0} \dots$$

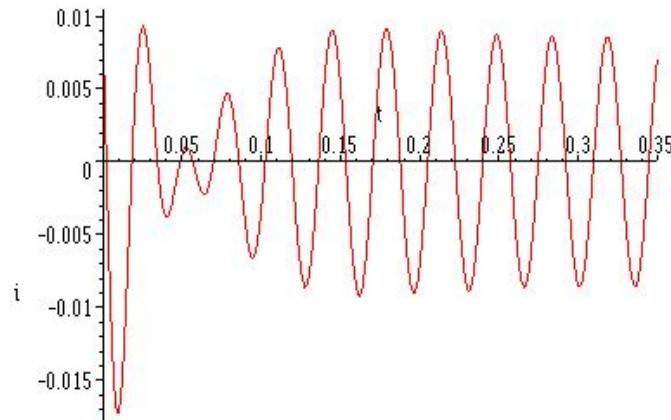


Figura 5.17: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$

Así, en general, alrededor de un punto de equilibrio $x = x_0$ la primera aproximación de una función potencial sera $V(x) \approx \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} \approx \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$. Así, un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{1}{6} x^6 - 2x^5 + \frac{35}{4} x^4 - \frac{50}{3} x^3 + 12x^2$$

Solución: $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$ Solución: que genera una fuerza

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = -(x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x)$$

tendrá dos puntos de equilibrio $x = 0$ y $x = 4$. En torno a $x = 0$ se podrá aproximar con un potencial parabólico

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 12x^2$$

tal y como se observa gráficamente

5.5.7. Péndulo simple con desplazamiento finito

El caso típico de esta aproximación lo constituye el péndulo simple: una masa m , empotrada a una varilla, de masa despreciable y de longitud L . La varilla se desplaza un ángulo θ de la vertical y se suelta. La Figura (5.20) muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo Físico. Desde la ancestral física general, aún en secundaria, era proverbial resolver este problema suponiendo ángulos pequeños. En esas tempranas épocas de nuestro conocimiento de Física era limitado y más limitado aún era nuestra capacidad para resolver ecuaciones diferenciales. A este “problema” se le conoce con el péndulo físico. Como siempre, aproximar es un arte y exploremos este arte. Como norma general tendremos que se debe aproximar al final. Pero no siempre. Si suponemos un cuerpo de masa constante, m , las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no

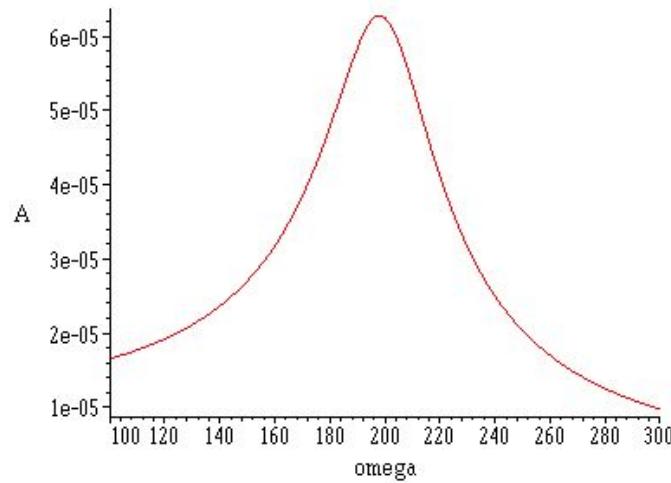


Figura 5.18: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e. $\varpi = \omega_0$

pueden ser otras que aquellas que provengan de las ecuaciones de Newton

$$\sum_{externas} \overrightarrow{F(r(t), v(t), t)} = \frac{d \overrightarrow{mv(t)}}{dt} = m \overrightarrow{a(t)} = m(a_r \hat{\mathbf{u}}_r + a_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta), \quad (5.7)$$

Es bueno recordar que hay que expresar la aceleración en un sistema de coordenadas móviles ($\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta$). Esto es

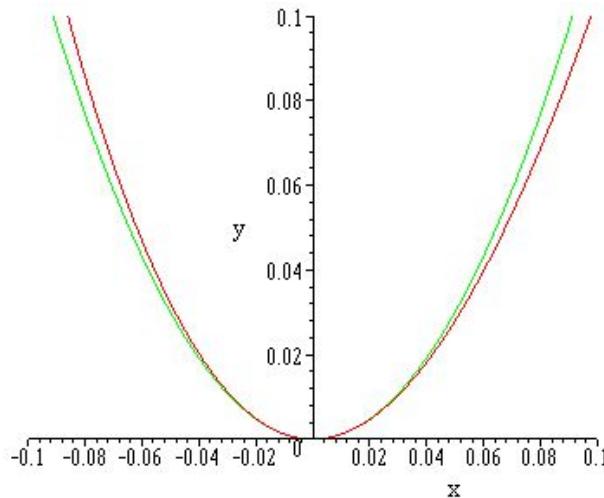
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_r &= \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = (-\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j}) \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta = \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta &= -\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -(\cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j}) \frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_r \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t) \hat{\mathbf{u}}_r \implies \vec{v}(t) = \frac{d(r(t) \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = \dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \vec{a}(t) &= \frac{d(\dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = (\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t)) \hat{\mathbf{u}}_r + (2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t)) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

es claro que si $r(t) = L = cte \implies \dot{r}(t) = \vec{v}(t) = \ddot{r}(t) = \vec{a}(t) = 0$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= L \hat{\mathbf{u}}_r \implies \vec{v}(t) = \frac{d(L \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \vec{a}(t) &= \frac{d(L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = \left(-L \left(\dot{\theta}(t)\right)^2\right) \hat{\mathbf{u}}_r + \left(L \ddot{\theta}(t)\right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

Figura 5.19: Aproximación por una parábola en torno a $x = 0$

Así, y para este caso particular, las ecuaciones de Newton quedan como

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} m a_r \equiv -mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \cos(\theta) \\ m a_\theta = mL\ddot{\theta}(t) = -mg \sin(\theta). \end{cases} \quad (5.8)$$

El caso que todos nos aprendimos de memoria, proviene de la suposición $\theta \approx \sin(\theta) \ll 1$ que implica:

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \\ mL\ddot{\theta}(t) = -mg\theta. \end{cases} \quad (5.9)$$

con lo cual, ahora, en este curso, sabemos que lo podemos integrar inmediatamente. Si suponemos que parte del reposo: $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$

$$L\ddot{\theta}(t) = -g\theta(t) \implies \theta(t) = C1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \implies \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

y el período puede ser integrado

$$\dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t)\dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \dot{\theta}(t)^2 + 2\frac{g}{L}\theta(t)^2 \implies \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \quad (5.10)$$

que no es otra cosa que la energía total del sistema. Por lo tanto sabemos que en el instante inicial, si soltamos la masa desde un ángulo θ_0 , la energía total es puramente potencial. Es decir

$$E_{total} = E_{potencial} = mgL(1 - \cos(\theta_0)) = 2mgL \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) \quad (5.11)$$

por otro lado, de la ecuación (5.10) podemos obtener el período de oscilación para el Péndulo Físico linealizado:

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \implies T = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L}}} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\right)$$

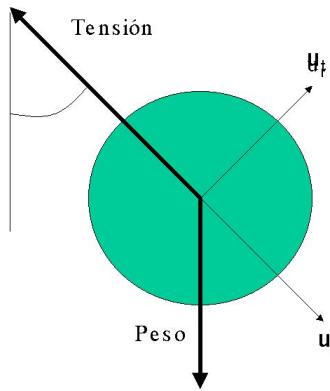


Figura 5.20: Diagrama de Cuerpo Libre, del P\'endulo F\'isico

Este caso tambi\'en se conoce con el nombre de oscilador arm\'onico simple o p\'endulo f\'isico linealizado. Igualmente podemos analizar el caso de general del p\'endulo amortiguado forzado linealizado. Vale decir, una masa, m ,atada a una varilla sin masa de longitud L ,y que oscila, inmersa en un fluido que la frena el movimiento de la masa con una fuerza, $-\eta \vec{v}(t)$ y que adicionalmente est\'a excitada por una fuerza exterior $F(t) = F_0 \cos(\varpi t)$. Recordamos que en este caso la ecuaci\'on en la direcci\'on tangente ($\hat{\mathbf{u}}_\theta$), es

$$mL \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \eta \frac{d\theta(t)}{dt} + mg \theta(t) = F_0 \cos(\varpi t) \implies \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2 \theta(t) = \frac{F_0}{mL} \cos(\varpi t)$$

donde, por costumbre, hemos rebautizado las constantes tales que $\mu = \frac{\eta}{2mL}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Por lo tanto, su soluci\'on tendr\'a la forma

$$\theta(t) = \underbrace{C_1 e^{(-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t)} + C_2 e^{(-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t)}}_{\text{soluci\'on homog\'enea} \equiv \text{r\'egimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{mL} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{soluci\'on inhomog\'enea} \equiv \text{r\'egimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuaci\'on caracter\'istica del P\'endulo F\'isico amortiguado libre ($F_0 = 0$) se derivan tres casos posibles:

- Subamortiguado: $\mu^2 - \omega_0^2 < 0$
- Sobreamortiguado: $\mu^2 - \omega_0^2 > 0$

Oscilador Armonico Simple, Evolucion temporal

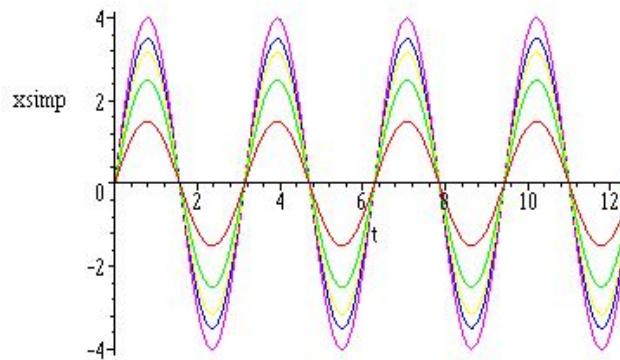


Figura 5.21: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

- Crítico $\mu^2 - \omega_0^2 = 0$

En el caso del Péndulo Físico amortiguado forzado ($F_0 \neq 0$) la física se hace mucho más rica y pueden ocurrir fenómenos de resonancia cuando $(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2 \rightarrow 0$.

Es interesante considerar los gráficos tanto de la evolución del sistema en el espacio directo: $\theta(t)$ vs t ; como la evolución del sistema en el espacio de fases $\omega = \dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$. Las figuras (5.23) y (5.25) muestran la primera de estas evoluciones, es decir, la evolución del ángulo en el espacio directo. Las figuras (5.24) y (5.26) muestran la evolución del sistema en el espacio de fases. Es claro de la ecuación (5.10), en la cual aparece $\omega = \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$, que las curvas en el diagrama de fase tanto para el caso libre (figura (5.22)) como para los de los casos amortiguados (figuras (5.24) y (5.26)) corresponden a curvas de misma energía. En el caso del Péndulo Físico linealizado libre, corresponden a curvas de energía constante. en los otros casos el sistema va disipando energía debido al coeficiente de amortiguación.

Nótese que la disipación obliga al sistema a evolucionar al punto de equilibrio siguiendo trayectorias espirales en el espacio de fases. Claramente más rápidamente en el caso sobreamortiguado que en el subamortiguado. También sabemos que para el caso crítico ($\mu^2 - \omega_0^2 = 0$) el tiempo de evolución del sistema hasta llegar al punto de equilibrio será menor que en cualquiera de los casos sobreamortiguados. Dejamos al lector la comprobación de esta última afirmación.

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ($F_0 = 0$) se derivan tres casos posibles:

Ahora bien, la situación que nos interesa simular es la del péndulo físico para los casos en los cuales los ángulos de oscilación no necesariamente sean pequeños.

Denominaremos péndulo libre al caso en el cual no recurriremos a ninguna aproximación respecto al ángulo de oscilación. Recordemos que para este caso partimos de la ecuación (5.8) en la dirección tangente. Es decir

$$L\ddot{\theta}(t) = -g \sin(\theta) \implies \dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \left(\frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta(t) \right)$$

Oscilador Armónico Simple, Diagrama de Fase

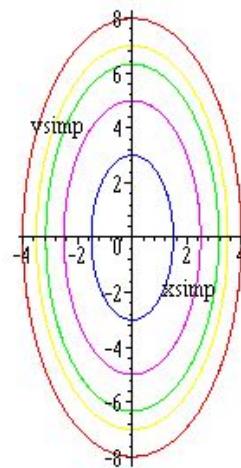


Figura 5.22: Diagrama de Fase para el Oscilador Armónico Simple. Nótese que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

Al igual que en la ecuación en la dirección tangente linealizada (5.10), nos encontramos con la Energía total del sistema. Con lo cual Es fácil despejar $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$ y construir los diagramas de fases del sistema. Otra vez, las líneas del diagrama de fase serán líneas de la misma energía. Así podemos graficar

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{C + \frac{2g}{L} \cos(\theta(t))} \quad (5.12)$$

para distintos valores de la constante $C = 4, 01; 4, 1; 6; 8; 10; 20$ y para el caso $\frac{g}{L} = 4$. La Figura (5.27) representa el diagrama de fase para estos casos. Las curvas cerradas (aquellas que tienen los valores de ángulos y velocidades acotadas) representan oscilaciones del sistema, mientras que las curvas abiertas (aquellas en las cuales las velocidades están acotadas pero no así el valor del ángulo) representan que el sistema rota. Nótese que el sistema presenta puntos de equilibrio inestable para $\theta(t) \approx \pm n\pi$ con $n = 0, 1, 2$. Lo cual era de esperarse por cuanto corresponde al ángulo en el cual el sistema varilla-masa se encuentran verticalmente dispuestos y el peso y la tensión son colineales y se anulan momentáneamente.

Otro enfoque, quizás más intuitivo para resolver este problema, pudo haber sido el análisis energético. Para ello sabemos que, por ser un sistema conservativo, la energía total viene definida por

$$E_{total} = \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{mgL(1 - \cos(\theta(t)))}_{\text{Energía Potencial}} \equiv \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2 + 2mgL \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

por consiguiente

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{\frac{2E_{total}}{mL^2} - \frac{4g}{L} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \equiv \pm 2\sqrt{\frac{g}{L} \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \right]} \quad (5.13)$$

donde hemos sustituido $E_{total} = 2mL \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)$ con θ_{\max} el ángulo máximo que alcanza el Péndulo Físico, por cuanto en ese punto la energía total es puramente potencial. Nótese que ese ángulo no necesariamente es el ángulo inicial, debido a que la velocidad inicial puede ser distinta de cero.

Oscilador Armónico Amortiguado, Evolución temporal

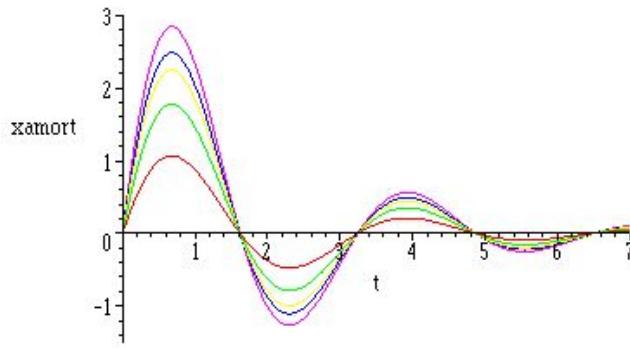


Figura 5.23: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Simple, Subamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0, 5$) libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

La ecuación (5.13) es claramente integrable por separación de variables y conduce a encontrar la expresión para el período:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{L} [\operatorname{sen}^2(\frac{\theta_{\max}}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2})]}} \quad \text{con } -\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad \text{y } \theta_0 = \theta(0)$$

La integral anterior, puede ser transformada en otra que aparece en las tablas integrales, si hacemos $\operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\theta_{\max}}{2})}$, con lo cual

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\frac{\theta_{\max}}{2}) \operatorname{sen}^2 \beta}} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\theta_{\max}}{2})} \\ \zeta(t) = \arcsin \left[\frac{\operatorname{sen}(\frac{\theta(t)}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{\theta_{\max}}{2})} \right] \end{cases} \quad (5.14)$$

Es claro que el recorrido entre $\zeta(0) = 0 \implies \theta = 0$ a $\theta = \theta_{\max} \implies \zeta(t) = \frac{\pi}{2}$ representa un cuarto del período, por consiguiente el período total del Péndulo Físico será:

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\frac{\theta_{\max}}{2}) \operatorname{sen}^2 \beta}}$$

Oscilador Armónico Subamortiguado, Diagrama de Fase

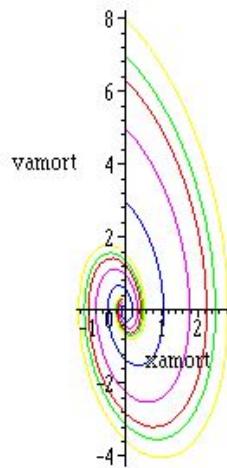


Figura 5.24: Evolución $\dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$ del Péndulo Físico Subamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3,5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediablemente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

5.5.8. Disgresión elíptica

En este punto haremos una disgresión respecto a las integrales elípticas, su clasificación y algunas de sus propiedades. En general encontrarán en la bibliografía que las integrales elípticas se dividen en

- *Integrales Elípticas de Primera Especie*

$$F(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} \iff F(x|m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

las cuales, para el caso particular $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $x = 1$, se puede reacomodar como una *Integral Elíptica de Primera Especie Completa*

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} \equiv \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1 \quad (5.15)$$

- *Integrales Elípticas de Segunda Especie*

$$E(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} d\beta \iff E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

y si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $x = 1$, entonces se obtiene una *Integral Elíptica de Segunda Especie Completa*

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta} d\beta \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

Oscilador Armónico Sobreamortiguado, Evolución temporal

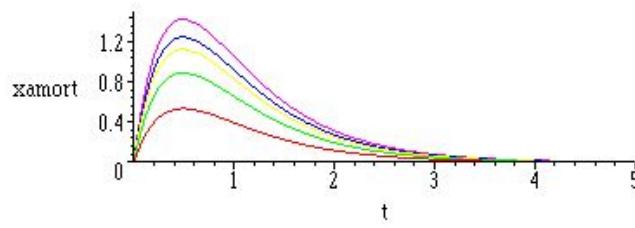


Figura 5.25: Evolución $\theta(t)$ vs t del Péndulo Físico Sobreamortiguado ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$) libre, para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$.

Adicionalmente, y también sin perder generalidad, dado que $0 \leq m \leq 1$, el denominador de la integral elíptica $K(m)$ de la ecuación (5.15) y equivalentemente de la ecuación (5.14) puede ser expandido en series de potencias. Con lo cual

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \beta m + \left(\frac{3}{8} \operatorname{sen}^4 \beta^2 \right) m^2 + \left(\frac{5}{16} \operatorname{sen}^6 \beta^3 \right) m^3 + \left(\frac{35}{128} \operatorname{sen}^8 \beta^4 \right) m^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} &= \frac{1}{2} \pi \left[1 + \left[\left(\frac{1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \beta \right] m + \left[\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \operatorname{sen}^4 \beta \right] m^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \operatorname{sen}^6 \beta \right] m^3 + O(m^4) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \operatorname{sen}^{2n} \beta$$

y siendo una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término como

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \operatorname{sen}^{2n} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} \beta d\beta$$

$$K(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n$$

Oscilador Armónico Sobreamortiguado, Diagrama de Fase

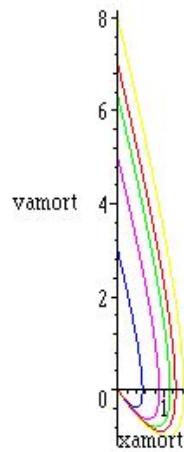


Figura 5.26: Físico Sobreamortiguado libre ($\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$. Nótese que la disipación lleva irremediablemente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

Del mismo modo se obtiene para las integrales elípticas completas de segunda especie que

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \operatorname{sen}^2 \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right]$$

Finalmente podemos mencionar la relación de “recurrencia” de Legendre para las Integrales Elípticas completas. Ella es

$$E(m) K(1-m) + E(1-m) K(m) - K(m) K(1-m) = \frac{\pi}{2}$$

Las integrales elípticas de primera y segunda especie, incompletas y completa deben resolverse numéricamente y tradicionalmente están tabuladas en algunas tablas integrales ³. En nuestros días también pueden ser resueltas numéricamente utilizando comandos de manipuladores simbólicos⁴.

³Abramowitz, M. y Stegun I.A (1964) *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York

⁴En el caso de MAPLEV se puede proceder directamente evaluando numéricamente la integral (5.14) a través del comando `evalf(int(...))` o mediante la función de biblioteca `EllipticF(z,k)` donde $z = \beta$ es al argumento del seno y $k = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ el parámetro (consulte la ayuda de MAPLE para más detalles).

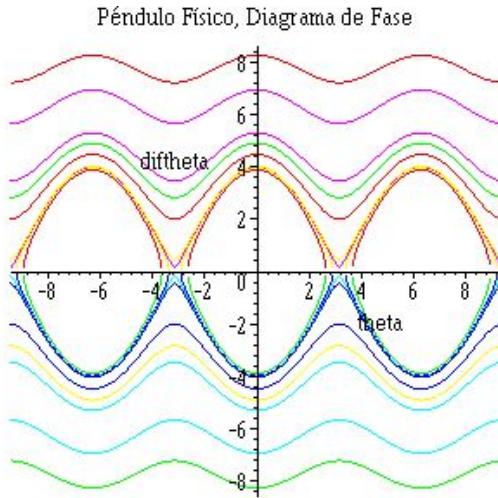


Figura 5.27: Diagrama de Fase para el P\'endulo F\'isico.

5.5.9. ¿Cu\'an buena es la aproximaci\'on lineal?

Utilizando la expansión en serie de la Integral El\'iptica completa de primera especie (5.14) del p\'endulo f\'isico, tendremos que se cumple

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \operatorname{sen}^2 \beta}} = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)\right) \implies$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \right)^{2n}$$

m\'as a\'un, dado que $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\max} - \frac{1}{48}\theta_{\max}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\max}^5 + O(\theta_{\max}^7)$ y que $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ tendremos

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left(\frac{1}{2}\theta_{\max} - \frac{1}{48}\theta_{\max}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\max}^5 + O(\theta_{\max}^7) \right)^{2n} \implies$$

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16}\theta_{\max}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\max}^4 \right)$$

y si realizamos un estimado de las correcciones al problema lineal que conlleva esta expansión veremos que a\'un para \'angulos $\theta_{\max} = \frac{\pi}{4}$ las correcciones son del orden de un p\'irico 4%, con lo cual la aproximaci\'on lineal resulta bien razonable. Para \'angulos $\theta_{\max} \gtrsim 1$ las correcciones comienzan a ser significativas y todo este esfuerzo de integraci\'on empieza a tener sentido. La siguiente tabla da una idea m\'as clara de este cambio en el per\'odo del p\'endulo y los errores relativos porcentuales respecto al per\'odo del p\'endulo f\'isico linealizado $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, cuando se consider\'an distintos valores del \'angulo m\'aximo, θ_{\max}

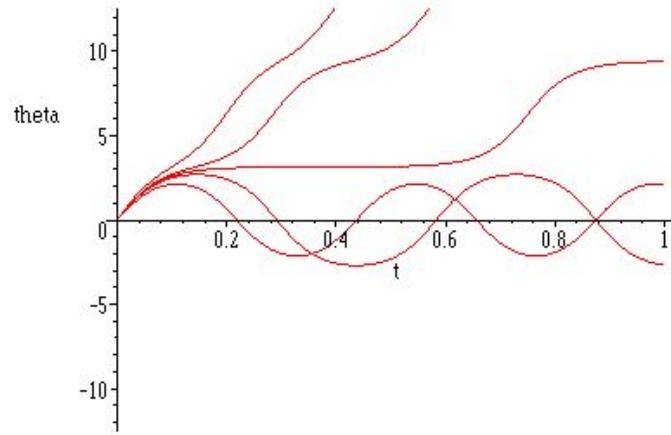


Figura 5.28: Integración numérica ($\theta(\tilde{t})$ vs \tilde{t} , con $0 \leq \tilde{t} \leq 10$) del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial: $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,83845$	$\theta_{\max} = \frac{\pi}{12}$	$\theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$	$\theta_{\max} = \frac{\pi}{4}$	$\theta_{\max} = \frac{\pi}{3}$	$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}$	$\theta_{\max} = \frac{2\pi}{3}$
T	2,85066	2,88786	2,95191	3,04617	3,35034	3,89685
$\epsilon = 100 \frac{ T - T_0 }{T}$	0,42821	1,71109	3,84368	6,81916	15,2786	37,1283

5.5.10. El péndulo físico: integración numérica

Tal y como indicamos en la primera sección de este proyecto, procedemos a convertir una ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Así, del mismo modo que en la ecuación (??) podremos escribir:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0 \sin(\theta) \implies \begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

con lo cual podemos adimensionalizar de dos varias formas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Si adicionalmente hemos adimensionalizado con $\tilde{t} = \frac{t}{t_{final}}$ por lo que $0 \leq \tilde{t} \leq 1$ y $\frac{1}{t_{final}} \frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\tilde{t}}$ y, adicionalmente: $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}$, con $\varphi_0 = \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} \neq 0$. De este modo el sistema queda escrito

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \varphi(t) & \implies \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \varphi_0 t_{final} \tilde{\varphi}(\tilde{t}) & \implies \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= \Lambda \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} &= -\omega_0 \sin(\theta(t)) & \implies \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= -\frac{\omega_0^2 t_{final}}{\varphi_0} \sin(\theta(\tilde{t})) & \implies \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} &= -\Gamma \sin(\theta(\tilde{t})) \end{aligned}$$

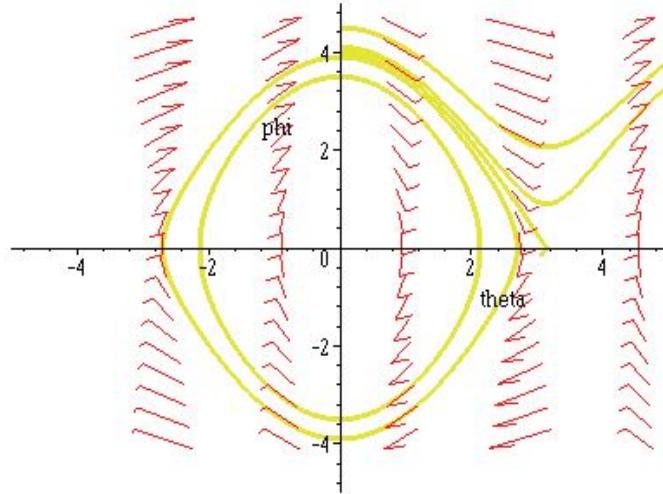


Figura 5.29: Diagrama de Fase para el P\'endulo F\'isico

N\'otese que las cantidades $\tilde{\varphi}(\tilde{t}), \theta(\tilde{t}), \tilde{t}, \Gamma$ y Λ son adimensionales. Acto seguido procedemos a integrar num\'ericamente el sistema de ecuaciones⁵.

La figura (5.28) ilustra la evoluci\'on del \'angulo $\theta(t)$ vs t , con $0 \leq t \leq 10$ del P\'endulo F\'isico, para distintos valores de la velocidad angular inicial: $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$. Mientras que la figura (5.29) (y tambi\'en la figura (5.27)) representan la evoluci\'on del sistema en el espacio de fases. $\theta(t)$ vs $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t)$. Las curvas cerradas en esta gr\'afica corresponden a las curvas oscilantes de la figura (5.28). Dado que el sistema parte de $\theta_0 = \theta(t=0)$ y seleccionamos el nivel de energ\'ia potencial igual a cero all\'i, cada una de estas curvas representan un valor de la energ\'ia cin\'etica inicial. El caso $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$ corresponde a la separatr\'iz, vale decir, la \'orbita que separa las curvas cerradas de las abierta. Es claro que en este caso le m\'ovil "subir\'a" y alcanzará un equilibrio inestable en la posici\'on vertical. En la figura (5.28) este caso viene ilustrado por la curva que se convierte en horizontal $0,25 \leq \tilde{t} \leq 0,5$, luego a partir de $\tilde{t} \approx 0,5$, la inexactitud del c\'alculo num\'ericamente genera perturbaciones que en teor\'ia no debieran existir.

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$$

⁵En MAPLEV podemos integrar el sistema de dos maneras distintas. La primera haciendo uso del comando `dsolve({sysED,CI}, numeric, vars, options)` donde `sysED` es el sistema de ecuaciones diferenciales, `CI` sus condiciones iniciales. Si necesit\'aramos un an\'alisis gr\'afico es mucho m\'as \'util el paquete `DEtools`.

Capítulo

6

Sistemas de ecuaciones diferenciales

6.1. Algunos comentarios iniciales

Cuando consideramos la evolución de sistemas con varios grados de libertad o con varias partículas, naturalmente arribamos al tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales. En estos sistemas encontramos varias variables dependientes de una sola variable independiente. El más natural de los ejemplos es el caso de un sistema de partículas que se mueve en el espacio bajo la acción de fuerzas externas:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1\left(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dr_n(t)}{dt}, t\right) &= \frac{d^2r_1(t)}{dt^2} \\ \mathbf{F}_2\left(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dr_n(t)}{dt}, t\right) &= \frac{d^2r_2(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_n\left(r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dr_n(t)}{dt}, t\right) &= \frac{d^2r_n(t)}{dt^2}\end{aligned}$$

Por otro lado, es importante acotar de que existe la posibilidad de convertir una ecuación diferencial ordinaria de orden superior es un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales. Es decir, dada una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)}(x) = F(y^{(n-1)}(x), y^{(n-2)}(x), \dots, y'''(x), y''(x), y'(x), y(x), x)$$

si hacemos el siguiente cambio variable

$$u_n = y^{(n-1)}(x); \quad u_{n-1} = y^{(n-2)}(x); \quad \dots \quad u_4 = y'''(x); \quad u_3 = y''(x); \quad u_2 = y'(x); \quad u_1 = y(x)$$

entonces construir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}u'_n(x) &= F_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_3, u_2, u_1, x) \\ u'_{n-1}(x) &= y^{(n-1)}(x) \\ &\vdots \\ u'_3(x) &= y'''(x) \\ u'_2(x) &= y''(x) \\ u'_1(x) &= y'(x)\end{aligned}$$

que puede ser generalizado a:

$$\begin{aligned}u'_n(x) &= F_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\ u'_{n-1}(x) &= F_{n-1}(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\ &\vdots &\vdots \\ u'_2(x) &= F_2(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, x) \\ u'_1(x) &= F_1(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, x)\end{aligned}$$

Para garantizar que existe solución al problema de valores iniciales se debe imponer algunas restricciones sobre las funciones $F_i(u_n, \dots, u_3, u_2, u_1, t)$ para ello existen un par de teoremas que garantice esa solución

Teorema 1: Sean las funciones F_1, F_2, \dots, F_n y sus derivadas:

$$\partial_1 F_1, \partial_1 F_2, \dots, \partial_1 F_n, \dots, \partial_i F_1, \partial_i F_2, \dots, \partial_j F_n, \dots, \partial_n F_1, \partial_n F_2, \dots, \partial_n F_n$$

continuas en una región R del espacio $(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$, que contiene al punto $(x_0, u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$ que caracteriza las condiciones iniciales. Entonces existe un intervalo $|x - x_0| < h$ en el cual existe una única solución: $u_1 = \phi_1(x), u_2 = \phi_2(x), \dots, u_n = \phi_n(x)$.

Hemos denotado $\partial_j F_i = \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ y $u_m^0 = u_m(x_0)$ las condiciones iniciales.

Teorema 2: Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u'_1 &= p_{11}(x) u_1 + p_{12}(x) u_2 + \dots + p_{1n}(x) u_n + g_1(x) \\ u'_2 &= p_{21}(x) u_1 + p_{22}(x) u_2 + \dots + p_{2n}(x) u_n + g_2(x) \\ &\vdots && \vdots \\ u'_n &= p_{n1}(x) u_1 + p_{n2}(x) u_2 + \dots + p_{nn}(x) u_n + g_n(x) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Si $p_{11}(x), p_{12}(x), \dots, p_{1n}(x) \dots p_{ij}(x) \dots p_{nn}(x)$ y $g_1(x) \dots g_n(x)$ son funciones continua en el intervalo $\alpha < x < \beta$ que contiene al punto $x = x_0$ entonces existe una única solución que satisface las condiciones iniciales $u_m^0 = u_m(x_0)$.

Ejemplo Dada la siguiente ecuación diferencial de tercer orden, no lineal

$$y''' = 3xy' - y^2y'', \quad \text{con: } y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 2,$$

Por el hecho de ser no lineal, los métodos anteriormente vistos no pueden ser aplicados aquí. Pero podemos construir un sistema de ecuaciones diferenciales equivalente a la ecuación anterior. Consideramos que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada y definamos las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} y(x) &= u_1(x) \\ y'(x) &= u'_1(x) = u_2(x) \\ y''(x) &= u''_1(x) = u'_2(x) = u_3(x) \\ y'''(x) &= u'''_1(x) = u''_2(x) = u'_3(x) \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación diferencial dada se puede escribir como:

$$y''' = 3xy' - y^2y'' \Rightarrow u'_3 = 3xu_2 - u_1^2u_3$$

ahora, el sistema de ecuaciones de primer orden equivalente a la ecuación diferencial problema es:

$$\begin{aligned} u'_1(x) &= u_2(x) \\ u'_2(x) &= u_3(x) \\ u'_3(x) &= 3xu_2 - u_1^2u_3 \end{aligned}$$

que debemos resolver para el conjunto de condiciones iniciales:

$$u_1(0) = y(0) = 1, u_2(0) = y'(0) = -1, u_3(0) = y''(0) = 2$$

por lo tanto, la función $u_1(x)$ que satisface este último sistema será la solución de la ecuación diferencial de nuestro problema. Es necesario entonces tener la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y a este cometido nos dedicaremos a continuación.

Notación Vectorial: El sistema lineal antes mencionado, es decir, las ecuaciones (6.6), puede condensarse en la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{P}(x) \mathbf{u}(x) + \mathbf{g}(x), \quad (6.2)$$

en la cual estamos representando

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u'_1(x) \\ u'_2(x) \\ \vdots \\ u'_n(x) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \cdots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) & \cdots & p_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \cdots & p_{nn}(x) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

El sistema (6.2) será homogéneo si $\mathbf{g}(x) = 0$, en caso contrario será un sistema no homogéneo.

6.1.1. Sistemas lineales homogéneos

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, es decir, de la forma

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) \quad (6.3)$$

procedemos de manera análoga al caso de una sola ecuación con coeficientes constantes. Se considera una solución de prueba de la forma: $\mathbf{y} = \xi e^{rx}$, donde r y el vector constante ξ son elementos a determinar. Al sustituir esta solución en (6.3), obtenemos: $\xi r e^{rx} = \mathbf{A}\xi e^{rx}$, con lo cual, el problema se reduce a la búsqueda de los autovalores y autovectores del sistema $\mathbf{A}\xi = r\xi$. En forma de matrices, la ecuación (6.3) es:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = e^{rx} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

con a_{ij} , y ξ_i como constantes.

Por lo tanto:

$$\mathbf{A}\xi = r\xi \Rightarrow (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0},$$

en forma de matrices, esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Es decir, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraico.

Ejemplo Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y'_2(x) &= 4y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

este sistema se puede representar de la siguiente forma

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad \text{si } \mathbf{y} = \xi e^{rx} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

primero que todo se calculan los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

para el autovalor $r_1 = 3$, (6.4) resulta en

$$-2\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ 2\xi_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

similarmente, para el segundo autovalor $r_2 = -1$, se tiene

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ -2\xi_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, la solución general del sistema será

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2 \mathbf{y}^{(2)}(x) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Obviamente el wronskiano de esta solución

$$W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x)] = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{vmatrix} = -4e^{-2x} \neq 0$$

garantiza que las dos soluciones son linealmente independientes.

Para el caso de matrices hermíticas, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$, vale decir, que la matriz \mathbf{A} coincide con su conjugada y traspuesta, $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^T)^*$, todos los autovalores son reales y la solución general para un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 x} + C_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 x} + \cdots + C_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n x}$$

Para el caso particular de matrices simétricas (hermíticas reales) los autovalores r_1, r_2, \dots, r_n y los autovectores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ resultan ser ambos son reales.

Consideremos ahora el caso cuando la matriz \mathbf{A} no es hermítica pero real. Entonces

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Ay} \Rightarrow \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rx} \Rightarrow (\mathbf{A} - r\mathbf{I}) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \lambda + i\mu \\ r_2 = \lambda - i\mu \end{cases}$$

esto significa que $r_1 = r_2^*$ y que $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (\boldsymbol{\xi}^{(2)})^*$, por lo cual $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ con \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores reales, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)}(x) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{(\lambda+i\mu)x} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{\lambda x} [\cos(\mu x) + i \operatorname{sen}(\mu x)] \\ &= e^{\lambda x} [\mathbf{a} \cos(\mu x) - \mathbf{b} \operatorname{sen}(\mu x)] + i e^{\lambda x} [\mathbf{a} \operatorname{sen}(\mu x) + \mathbf{b} \cos(\mu x)] \\ &= \mathbf{u}(x) + i\mathbf{v}(x). \end{aligned}$$

Es posible que se nos presente la siguiente situación: por un lado, algunos de los autovalores de la matriz real, \mathbf{A} , son números complejos, $r_1 = \lambda + i\mu$ y $r_2 = \lambda - i\mu$, pero el resto de las raíces resultan ser números reales: r_3, r_4, \dots, r_n . Por el otro lado, algunos de los autovectores son complejos: $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, pero el resto de autovectores no lo son: $\boldsymbol{\xi}^{(3)}, \boldsymbol{\xi}^{(4)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$.

En este caso, la solución general sera

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{u}(x) + iC_2 \mathbf{v}(x) + C_3 \boldsymbol{\xi}^{(3)} e^{r_3 x} + C_4 \boldsymbol{\xi}^{(4)} e^{r_4 x} + \cdots + C_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{r_n x}.$$

Ejemplo Queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}y'_1(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\y'_2(x) &= 5y_1(x) - 3y_2(x)\end{aligned}$$

En forma de matrices lo que tenemos es

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Si utilizamos la siguiente solución de prueba $\mathbf{y} = \xi e^{rx}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se calculan los autovalores

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = -1 + i \\ r_2 = -1 - i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \\ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$$

finalmente la solución general será

$$\mathbf{y}(x) = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 2\cos(x) + \sin(x) \end{pmatrix} + iC_2 e^{-x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) + 2\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Para el caso que los autovalores de la matriz real, \mathbf{A} , estén repetidos k veces, es decir, $r_1 = r_2 = \dots = r_k = \rho$, y para los restantes r_{k+1}, \dots, r_n distintos, se deben considerar algunos puntos. Lo primero es notar que puede suceder que existan $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}$ autovectores linealmente independientes asociados al autovalor ρ de multiplicidad k . Entonces, el conjunto de vectores linealmente independientes siguientes: $\mathbf{y}^{(1)}(x) = \xi^{(1)} e^{\rho x}, \mathbf{y}^{(2)}(x) = \xi^{(2)} e^{\rho x}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}(x) = \xi^{(k)} e^{\rho x}$ serán soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (6.3). Pero si la matriz \mathbf{A} no es hermítica existirá un número menor de autovectores correspondientes al autovalor ρ de multiplicidad k y no será posible tener entonces las k soluciones necesarias del sistema (6.3). Por lo tanto, se necesitará construir las soluciones que faltan de alguna manera. Quizás sea conveniente detenerse en un ejemplo particular.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{aligned}y'_1(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\y'_2(x) &= y_1(x) + 3y_2(x)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Si repetimos el procedimiento anterior, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calculamos los autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y podemos ver que la multiplicidad es 2 y sólo podemos obtener un único autovector asociado al autovalor $\rho = r_1 = r_2 = 2$. Con este autovector podemos construir una solución linealmente independiente:

$$\mathbf{y}^{(1)}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resulta natural intentar buscar una segunda solución que contenga los términos xe^{2x} y e^{2x} . Propongamos entonces la siguiente solución de prueba

$$\mathbf{y}^{(2)}(x) = \boldsymbol{\zeta}^{(1)} xe^{2x} + \boldsymbol{\zeta}^{(2)} e^{2x},$$

donde $\boldsymbol{\zeta}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\zeta}^{(2)}$ son vectores constantes a determinar. Al sustituir esta solución de prueba en nuestra ecuación problema, resulta:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\zeta}^{(1)} xe^{2x} + (\boldsymbol{\zeta}^{(1)} + 2\boldsymbol{\zeta}^{(2)}) e^{2x} &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\zeta}^{(1)} xe^{2x} + \boldsymbol{\zeta}^{(2)} e^{2x}), \\ (2\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\zeta}^{(1)} xe^{2x} + (\boldsymbol{\zeta}^{(1)} + 2\boldsymbol{\zeta}^{(2)} - \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta}^{(2)}) e^{2x} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los términos xe^{2x} y e^{2x} en esta última expresión tenemos el siguiente par de ecuaciones de autovalores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta}^{(2)} &= \boldsymbol{\zeta}^{(1)} \end{aligned}$$

La primera ecuación es satisfecha si hacemos coincidir $\boldsymbol{\zeta}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}^{(1)}$, es decir, con el autovector correspondiente a $\rho = 2$ que calculamos anteriormente. Por otro lado, se tiene que

$$|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pero sin embargo, la segunda ecuación tiene solución

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1^{(2)} \\ \boldsymbol{\zeta}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como las filas son proporcionales, entonces resulta que:

$$-\boldsymbol{\zeta}_1^{(2)} - \boldsymbol{\zeta}_2^{(2)} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\zeta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde κ es un valor arbitrario. Hemos construido una segunda solución

$$\mathbf{y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x},$$

notemos que el último término de la ecuación anterior es un multiplo del único término de $\mathbf{y}^{(1)}(x)$, por lo tanto debe ser ignorado. En resumen: Las dos soluciones linealmente independientes son:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{(1)}(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}^{(2)}(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x},\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio demostrar que $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x)] \neq 0$. La solución general, será entonces

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} xe^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} \right].$$

6.1.2. Sistemas lineales inhomogéneos

Todo operador lineal hermítico \mathbf{A} ($\mathbf{A} : V \rightarrow V$), con n autovectores distintos tiene una representación matricial diagonal $\hat{\mathbf{A}}_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Mediante una transformación de similaridad: $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$, donde \mathbf{T} es una matriz unitaria: $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$, se trasforma la base de \mathbf{A} a la base donde $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. Este teorema es claro: a partir de que si \mathbf{A} tiene n autovalores distintos, tiene n autovectores linealmente independientes los cuales forman una base de V y en la cual la representación matricial de \mathbf{A} es diagonal. Pero como siempre es posible pasar de \mathbf{A} no diagonal a $\hat{\mathbf{A}}$ diagonal con los mismos autovalores mediante una transformación de similaridad $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$, esto queda demostrado. Lo anterior puede formalizarse de la siguiente manera

$$\langle v_i | \underbrace{\mathbf{T}^\dagger}_{1} \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^\dagger}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{T}}_{1} | v_j \rangle = \underbrace{\langle v_i |}_{\langle u_i |} \underbrace{\mathbf{T}^\dagger}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^\dagger}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{T}}_{| u_j \rangle} | v_j \rangle = \langle u_i | \hat{\mathbf{A}} | u_j \rangle = \lambda_j \langle u_i | u_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$$

Nos queda determinar la forma de la matriz unitaria de transformación \mathbf{T} . Para ello seleccionamos la base canónica $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_i\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ como base de partida de \mathbf{A} :

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_i\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$ la base de autovectores en la cual $\hat{\mathbf{A}}$ es diagonal. Por lo tanto \mathbf{T} es la matriz de transformación de una base a la otra. Identificando columna a columna nos damos cuenta que las columnas de la matriz \mathbf{T} son los autovectores de \mathbf{A}

$$\begin{aligned}|u_i\rangle &= \sum_{j=1}^n T_{ij} |e_j\rangle \Rightarrow \langle e_j | u_i \rangle = \langle e_j | \sum_{j=1}^n T_{ij} |e_j\rangle \Rightarrow \\ \langle e_j | u_i \rangle &= T_{ij} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots & u_n^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_n^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{T}^\dagger = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_2^{(n)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\end{aligned}$$

donde hemos denotado $u_i^{(m)}$ la componente m del vector j -esimo en la base $|e_i\rangle$, con $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, si los n autovalores y autovectores de \mathbf{A} son distintos y conocidos, \mathbf{A} se dice diagonalizable. Si \mathbf{A} es hermítica, $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$ es muy fácil construir la inversa de la matriz de transformación \mathbf{T} . Si los autovalores de \mathbf{A} son degenerados, vale decir si el número de autovectores linealmente independientes es menor que n , entonces \mathbf{A} no es diagonalizable y no existe una matriz de transformación \mathbf{T} (\mathbf{T} no tiene inversa) tal que $\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$.

Ocupémonos ahora del problema de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales inhomogéneo de la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x),$$

con:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y^{(1)}(x) \\ y^{(2)}(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x) \\ g^{(2)}(x) \\ \vdots \\ g^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

donde \mathbf{A} es una matriz constante y diagonalizable, $\mathbf{g}(x)$ continua en el intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$. La solución de este problema pasa por encontrar los autovalores $\{\lambda_i\}$ y autovectores $\{|u_i\rangle\}$ de \mathbf{A} , construir a partir de ellos la matriz \mathbf{T} y su hermética conjugada $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$, y a partir de ella hacer el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{T}\mathbf{z}(x) \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{z}' = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\hat{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}$$

por lo tanto

$$\mathbf{z}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{h}$$

donde

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{h} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}.$$

Entonces, lo que obtenemos es un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado:

$$z'_i(x) = \lambda_i z_i(x) + h_i(x)$$

Ejemplo Encontremos la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= -2y_1(x) + y_2(x) + 2e^{-x} \\ y'_2(x) &= y_1(x) - 2y_2(x) + 3x \end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2e^{-x} \\ 3x \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(x)$$

Donde los autovalores y autovectores de \mathbf{A} son

$$\lambda_1 = -3, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_h(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

donde $\mathbf{y}_h(x)$ es la solución general de la homogénea. Como \mathbf{A} es real y simétrica, construimos la matriz \mathbf{T} fácilmente con los autovectores normalizados. Esto es:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora cambiando variables $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ tendremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{z}' = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \mathbf{h} \Rightarrow \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-x} - 3x \\ 2e^{-x} + 3x \end{pmatrix}$$

con lo cual podemos escribir el siguiente sistema desacoplado de ecuaciones lineales de primer orden

$$z'_1 + 3z_1 = \sqrt{2}e^{-x} - \frac{3}{\sqrt{2}}x \quad y \quad z'_2 + 3z_2 = \sqrt{2}e^{-x} + \frac{3}{\sqrt{2}}x$$

como ya sabemos, la solución es inmediata

$$z_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) + C_1 e^{-3x} \quad y \quad z_2(x) = \sqrt{2}xe^{-x} + \frac{3}{\sqrt{2}}(x-1) + C_2 e^{-x}$$

y devolviendo el cambio de variables tenemos que

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ -z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) &= \frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{-3x} + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x - \frac{4}{3} + xe^{-x} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-z_1 + z_2) &= -\frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{-3x} + \left(\frac{C_2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + 2x - \frac{5}{3} + xe^{-x} \end{aligned}$$

si utilizamos unas nuevas constantes: $C_1 = \frac{C_1}{\sqrt{2}}$ y $C_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}}$, resulta que podemos escribir la solución de la forma:

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} xe^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De esta solución es fácil reconocer que los primeros dos términos se corresponden a la solución del sistema homogéneo y los restantes términos tienen que ver con una solución particular del sistema inhomogéneo.

Ejercicios

- Encuentre un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente para las siguientes ecuaciones
 - $y'' - 3x^2yy' = 0$
 - $y''' - 2x(y')^2 + 3xy'' - xy = 0$
- Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de dos ecuaciones diferenciales
 - $y'_1 = 3y_1 - 2y_2, \quad y'_2 = 2y_1 - 2y_2$
 - $y'_1 = y_1 - 2y_2, \quad y'_2 = 3y_1 - 4y_2$
 - $y'_1 = 2y_1 - y_2, \quad y'_2 = 3y_1 - 2y_2$
 - $y'_1 = y_1 + y_2, \quad y'_2 = 4y_1 - 2y_2$

3. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de tres ecuaciones diferenciales

$$a) y'_1 = y_1 + y_2 + 2y_3, \quad y'_2 = y_1 + 2y_2 + y_3, \quad y'_3 = 2y_1 + y_2 + y_3$$

$$b) y'_1 = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \quad y'_2 = 2y_1 + 2y_3, \quad y'_3 = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

$$c) y'_1 = y_1 + y_2 + y_3, \quad y'_2 = 2y_1 + y_2 - y_3, \quad y'_3 = -8y_1 - 5y_2 - 3y_3$$

$$d) y'_1 = y_1 - y_2 + 4y_3, \quad y'_2 = 3y_1 + 2y_2 - y_3, \quad y'_3 = 2y_1 + y_2 - y_3$$

4. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

$$a) y'_1 = 2y_1 - y_2 + e^x, \quad y'_2 = 3y_1 - 2y_2 + x$$

$$b) y'_1 = y_1 + \sqrt{3}y_2 + e^x, \quad y'_2 = \sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}e^x$$

$$c) y'_1 = 2y_1 - 5y_2 - \cos(x), \quad y'_2 = y_1 - 2y_2 + \operatorname{sen}(x)$$

$$d) y'_1 = y_1 + y_2 + e^{-2x}, \quad y'_2 = 4y_1 - 2y_2 - 2e^x$$

6.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales y el uso de operadores

En la clase anterior resolvimos algunos sistemas de ecuaciones diferenciales sacándole provecho a la notación matricial. Sin embargo, algunos sistemas son tan simples que tienen un método casi directo para su resolución, como podemos ver a continuación:

Ejemplo Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2e^{2t} \\ \dot{y} &= \frac{x^2 - y}{t}.\end{aligned} \quad t \neq 0.$$

Rápidamente nos damos cuenta que la primera ecuación puede ser integrada de manera directa:

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \Rightarrow x(t) = e^{2t} + C_1$$

al sustituir este resultado en la segunda ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(e^{2t} + C_1)^2 - y}{t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \frac{e^{4t} + 2C_1e^{2t} + C_1^2}{t}$$

esta última ecuación es lineal en y , por lo tanto la sabemos resolver:

$$y(t) = \frac{\frac{1}{4}e^{4t} + C_1e^{2t} + C_1^2t + C_2}{t}, \quad t \neq 0.$$

Anteriormente vimos algunas ventajas que aparecen por el hecho de utilizar la notación de operadores para encontrar una solución de una ecuación diferencial lineal de orden n . Recordemos que una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes se podía escribir de la siguiente manera:

$$P(\mathbf{D})y = Q(x). \tag{6.5}$$

donde

$$P(\mathbf{D}) = a_0 + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 + \cdots + a_n \mathbf{D}^n, \quad a_n \neq 0.$$

con: $a_2, a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes.

En el caso de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales podemos también hacer uso de esta notación:

$$\begin{aligned} P_{11}(\mathbf{D})y_1 + P_{12}(\mathbf{D})y_2 + P_{13}(\mathbf{D})y_3 + \cdots + P_{1n}(\mathbf{D})y_n &= Q_1(x) \\ P_{21}(\mathbf{D})y_1 + P_{22}(\mathbf{D})y_2 + P_{23}(\mathbf{D})y_3 + \cdots + P_{2n}(\mathbf{D})y_n &= Q_2(x) \\ &\vdots && \vdots \\ P_{n1}(\mathbf{D})y_1 + P_{n2}(\mathbf{D})y_2 + P_{n3}(\mathbf{D})y_3 + \cdots + P_{nn}(\mathbf{D})y_n &= Q_n(x). \end{aligned} \quad (6.6)$$

La solución del sistema (6.6) es el conjunto de funciones: $\{y_n(x)\}$, cada una de ellas definidas en un intervalo común I . Por ejemplo, para el siguiente sistema se tiene

$$\begin{aligned} 2y'_1(x) + 3y_1(x) + 5y'_2(x) - y_2(x) &= e^x & (2\mathbf{D} + 3)y_1 + (5\mathbf{D} - 1)y_2 &= e^x \\ y'_1(x) - y_1(x) + 3y'_2(x) + y_2(x) &= \operatorname{sen}(x) & (\mathbf{D} - 3)y_1 + (3\mathbf{D} + 1)y_2 &= \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Notemos también que el sistema (6.6) es un caso más general a los estudiados anteriormente, que eran de la forma:

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}(x).$$

Por cuestiones netamente didácticas nos detendremos en el caso $n = 2$, entendiendo que los resultados aquí obtenidos pueden extrapolarse para cualquier valor de n . Cuando $n = 2$, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} P_{11}(\mathbf{D})y_1 + P_{12}(\mathbf{D})y_2 &= Q_1(x) \\ P_{21}(\mathbf{D})y_1 + P_{22}(\mathbf{D})y_2 &= Q_2(x) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Estos sistemas al resolverse para las funciones incógnitas deben contener un número apropiado de constantes y para tal fin existe un teorema que garantiza el número correcto de constantes que deben aparecer.

Teorema: El número de constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución del sistema (6.7) debe ser igual al orden de la siguiente expresión:

$$\Delta \equiv P_{11}(\mathbf{D})P_{22}(\mathbf{D}) - P_{12}(\mathbf{D})P_{21}(\mathbf{D}) \quad (6.8)$$

con: $\Delta \neq 0$.

Si se da el caso que $\Delta = 0$, se dice que el sistema es *degenerado*. Notemos además que (6.8) tiene la forma de un determinante.

■ **Caso no degenerado:** $\Delta \neq 0$

El sistema (6.7) puede ser tratado como un sistema de ecuaciones algebraico. Esto significa que podemos manipular las filas a nuestra conveniencia para obtener su solución o utilizar cualquier técnica para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas desarrollado en cursos anteriores.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2\dot{x} - x + \dot{y} + 4y &= 1 \\ \dot{x} - \dot{y} &= t - 1. \end{aligned}$$

Tal vez sea conveniente adaptar el problema a nuestra notación, es decir, hacemos los siguientes cambios: $x(t) = y_1(x)$ y $y(t) = y_2(x)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 2y'_1(x) - y_1(x) + y'_2(x) + 4y_1(x) &= 1 \\ y'_1(x) - y'_2(x) &= x - 1. \end{aligned}$$

En la notación del operador diferencial sería:

$$\begin{aligned} (2D - 1)y_1 + (D + 4)y_2 &= 1 \\ Dy_1 - Dy_2 &= x - 1. \end{aligned}$$

Multipliquemos la primera ecuación por D y la segunda por $D + 4$:

$$\begin{aligned} (2D^2 - D)y_1 + (D^2 + 4D)y_2 &= D[1] \\ (D^2 + 4D)y_1 - (D^2 + 4D)y_2 &= (D + 4)[x - 1]. \end{aligned}$$

luego las sumamos para obtener:

$$(3D^2 + 3D)y_1 = 0 + D[x - 1] + 4(x - 1) = 1 + 4x - 4 = 4x - 3$$

esto significa que debemos resolver la siguiente ecuación

$$3y''_1 + 3y'_1 = 4x - 3$$

con la ayuda de algunos de los métodos anteriormente vistos se obtiene la respectiva solución:

$$y_1(x) = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x.$$

Al sustituir $y_1(x)$ en la segunda ecuación del sistema resulta:

$$\begin{aligned} D \left[C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x \right] - Dy_2 &= x - 1 \\ -C_2e^{-x} + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} - Dy_2 &= x - 1 \\ -C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} - Dy_2 &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y'_2 = -C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow y_2(x) = C_2e^{-x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + C_3.$$

Ahora podemos estudiar el tema del número de constantes que deben aparecer. Del teorema anterior vemos que el determinante

$$\Delta = (2D - 1)(-D) - (D)(D + 4) = -3D^2 - 3D$$

es de orden 2. Por lo tanto, según el teorema antes mencionado deben existir únicamente dos constantes. Esto significa que tenemos una constante demás. Podemos hallar una relación entre las constantes sustituyendo las dos soluciones encontradas en la primera ecuación del sistema, recordemos la la segunda ecuación ya fue utilizada para encontrar $y_2(x)$. Esto es

$$(2\mathbf{D} - 1) \left[C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x \right] + (\mathbf{D} + 4) \left[C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + C_3 \right] = 1$$

$$-6 - C_1 + 4C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = \frac{C_1 + 7}{4}$$

Por lo tanto, la solución al sistema será:

$$y_1(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x$$

$$y_2(x) = C_2 e^{-x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{C_1 + 7}{4}.$$

Ejercicio Resuelva

$$(\mathbf{D} + 3)y_1 + (\mathbf{D} + 1)y_2 = e^x$$

$$(\mathbf{D} + 1)y_1 + (\mathbf{D} - 1)y_2 = x.$$

En este caso Δ es de orden cero y no deben aparecer constantes arbitrarias.

■ **Caso degenerado: $\Delta = 0$**

Como puede suceder para los sistemas algebraicos el sistema de ecuaciones puede ser degenerado, es decir, podrá tener infinitas soluciones o no tener solución, por ejemplo, el sistema:

$$2x + 3y = 5$$

$$2x + 3y = 7,$$

no tiene solución. Y el sistema

$$2x + 3y = 0$$

$$4x + 6y = 0,$$

tiene infinitas soluciones. En ambos casos, el determinante conformado por los coeficientes de x y de y es cero. Notemos también que para el primer sistema, si despejamos y de la segunda ecuación

$$y = \frac{7 - 2x}{3}$$

y la sustituimos en la primera resulta:

$$2x + 3 \left[\frac{7 - 2x}{3} \right] = 5 \Rightarrow 7 = 5$$

No existe solución cuando el sistema no se reduce a una igualdad. Si hacemos lo mismo con el segundo sistema, despejamos y en una

$$y = -\frac{2x}{3}$$

y la sustituimos en la otra

$$2x + 3 \left[-\frac{2x}{3} \right] = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Existen infinitas soluciones si el sistema se reduce a una igualdad del tipo $0 = 0$. Con los sistemas de ecuaciones diferenciales pasa lo mismo. Veamos un par de ejemplos.

El sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{D}y_1 - \mathbf{D}y_2 &= x \\ \mathbf{D}y_1 - \mathbf{D}y_2 &= x^2.\end{aligned}$$

es degenerado porque $-\mathbf{D}^2 - (-\mathbf{D}^2) = 0$. Si despejamos $\mathbf{D}y_1$ de la segunda ecuación

$$\mathbf{D}y_1 = \mathbf{D}y_2 + x^2$$

y sustituimos en la primera:

$$\mathbf{D}y_2 + x^2 - \mathbf{D}y_2 = x \Rightarrow x^2 = x.$$

este sistema no tiene solución.

Ejercicio Demuestre que el siguiente sistema es degenerado y tiene infinitas soluciones

$$\begin{aligned}\mathbf{D}y_1 - \mathbf{D}y_2 &= x \\ 4\mathbf{D}y_1 - 4\mathbf{D}y_2 &= 4x.\end{aligned}$$

Volvamos al caso no degenerado. Como hemos mencionado el hecho de usar los operadores hace que el sistema puede ser tratado de manera similar al de un sistema algebraico, y por lo tanto, podemos utilizar cualquiera de los métodos para la resolución de sistemas algebraicos. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}P_{11}(\mathbf{D})y_1 + P_{12}(\mathbf{D})y_2 + P_{13}(\mathbf{D})y_3 &= Q_1(x) \\ P_{21}(\mathbf{D})y_1 + P_{22}(\mathbf{D})y_2 + P_{23}(\mathbf{D})y_3 &= Q_2(x) \\ P_{31}(\mathbf{D})y_1 + P_{32}(\mathbf{D})y_2 + P_{33}(\mathbf{D})y_3 &= Q_3(x).\end{aligned}\tag{6.9}$$

El determinante que podemos asociar a este sistema es:

$$\begin{aligned}\Delta &= P_{11}(\mathbf{D})P_{22}(\mathbf{D})P_{33}(\mathbf{D}) + P_{21}(\mathbf{D})P_{32}(\mathbf{D})P_{13}(\mathbf{D}) + P_{12}(\mathbf{D})P_{23}(\mathbf{D})P_{13}(\mathbf{D}) \\ &\quad - P_{31}(\mathbf{D})P_{22}(\mathbf{D})P_{13}(\mathbf{D}) - P_{32}(\mathbf{D})P_{23}(\mathbf{D})P_{11}(\mathbf{D}) - P_{21}(\mathbf{D})P_{12}(\mathbf{D})P_{33}(\mathbf{D})\end{aligned}$$

La manera usual de resolver este sistema es eliminar algunas de las variables, digamos y_3 , de manera que nos queda un sistema reducido a dos ecuaciones, digamos:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{11}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{12}(\mathbf{D})y_2 &= \tilde{Q}_1(x) \\ \tilde{P}_{21}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{22}(\mathbf{D})y_2 &= \tilde{Q}_2(x)\end{aligned}\tag{6.10}$$

Si de este sistema eliminamos y_2 , entonces lo que queda es una sola ecuación

$$\hat{P}_{11}(\mathbf{D})y_1 = \hat{Q}_1(x)\tag{6.11}$$

la cual podemos resolver para y_1 . Al sustituir este valor en cualquiera de las ecuaciones (6.10) se obtiene y_2 . Finalmente, la sustitución de y_1 y y_2 en cualquiera de las ecuaciones de (6.9) permite obtener y_3 . El número de constantes quedará determinado por el orden de Δ .

Otra manera de proceder es manipular el sistema (6.9) de manera tal que se obtenga un sistema equivalente triangular, es decir, de la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{11}(\mathbf{D})y_1 &= \tilde{Q}_1(x) \\ \tilde{P}_{21}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{22}(\mathbf{D})y_2 &= \tilde{Q}_2(x) \\ \tilde{P}_{31}(\mathbf{D})y_1 + \tilde{P}_{32}(\mathbf{D})y_2 + \tilde{P}_{33}(\mathbf{D})y_3 &= \tilde{Q}_3(x).\end{aligned}\quad (6.12)$$

Aquí, las soluciones se van obteniendo desde la primera ecuación hasta la última. Es bueno resaltar el hecho de que las soluciones obtenidas utilizando un sistema equivalente triangular contienen el número correcto de constantes requerido por el sistema. Entonces, para obtener un sistema equivalente triangular procedemos de la siguiente manera: decidimos dejar una de las ecuaciones sin intervenir y manipulamos las otras dos, repetimos este procedimiento las veces que sean convenientes hasta obtener el sistema deseado.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} - 2x + y - z &= t & (\mathbf{D} - 2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ -x + 2\dot{y} + y + 2z &= 1 & \Rightarrow -y_1 + (2\mathbf{D} + 1)y_2 + 2y_3 &= 1 \\ 2x + 6y + \dot{z} &= 0 & 2y_1 + 6y_2 + \mathbf{D}y_3 &= 0\end{aligned}$$

- Retenemos la primer ecuación del sistema
- Creamos un nuevo sistema multiplicando la primera ecuación por 2 y sumándola con la segunda, para de esta manera eliminar y_3 . Con el mismo fin, multiplicamos la primera por \mathbf{D} y la sumamos con la tercera. Con esto obtenemos:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D} - 2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ (\mathbf{D} - 5)y_1 + (2\mathbf{D} + 3)y_2 &= 2x + 1 \\ (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D} + 2)y_1 + (\mathbf{D} + 6)y_2 &= 1\end{aligned}$$

- Podemos retener la primera y tercera ecuación y cambiamos la segunda. Entonces multiplicamos la tercera por -2 y la sumamos con la segunda:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D} - 2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ (-2\mathbf{D}^2 + 6\mathbf{D} - 9)y_1 - 9y_2 &= 2x - 1 \\ (\mathbf{D}^2 - 2\mathbf{D} + 2)y_1 + (\mathbf{D} + 6)y_2 &= 1\end{aligned}$$

- Retenemos la primera y segunda ecuación y cambiamos la tercera. Lo podemos hacer multiplicando la segunda por $(\mathbf{D} + 6)/9$ y luego se suma con la tercera:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D} - 2)y_1 + y_2 - y_3 &= x \\ (-2\mathbf{D}^2 + 6\mathbf{D} - 9)y_1 - 9y_2 &= 2x - 1 \\ (-\mathbf{D}^3 + 3\mathbf{D}^2 + 9\mathbf{D} - 36)y_1 &= 12x + 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya se puede integrar la última ecuación:

$$y_1(x) = \frac{C_1}{3} e^{3x} - \frac{2C_2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{37}{9}x + C_3,$$

al sustituir $y_1(x)$ en la segunda ecuación resulta que simplemente queda despejar $y_2(x)$

$$\begin{aligned} (-2D^2 + 6D - 9) \left[\frac{C_1}{3} e^{3x} - \frac{2C_2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{37}{9}x + C_3 \right] - 9y_2 &= 2x - 1 \\ -3C_1 e^{3x} + 15C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 6x^2 - 29x + 22 - 9C_3 - 9y_2 &= 2x - 1 \end{aligned}$$

es decir:

$$y_2(x) = -\frac{C_1}{3} e^{3x} + \frac{5C_2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}x^2 - \frac{31}{9}x + \frac{23}{9} - C_3,$$

queda por último sustituir $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en la primera ecuación y despejar $y_3(x)$:

$$\begin{aligned} (D - 2) \left[\frac{C_1}{3} e^{3x} - \frac{2C_2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{37}{9}x + C_3 \right] + \left[-\frac{C_1}{3} e^{3x} + \frac{5C_2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}x^2 - \frac{31}{9}x + \frac{23}{9} - C_3 \right] - y_3 &= x \\ 4C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 2x^2 - \frac{31}{3}x + \frac{20}{3} - 3C_3 - y_3 &= x \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y_3(x) = 4C_2 e^{-\frac{3}{2}x} - 2x^2 - \frac{34}{3}x + \frac{20}{3} - 3C_3 - y_3.$$

No es necesario investigar sobre el número de constantes, en todo caso, y solo por curiosidad se puede ver que el determinante del sistema, al igual que para el sistema triangular, es de orden 3:

$$\Delta = \begin{bmatrix} D - 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2D + 1 & 2 \\ 2 & 6 & D \end{bmatrix} = 2D^3 - 3D^2 - 9D + 36.$$

6.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace

A diferencia del método anterior, el método de transformadas de Laplace solo se puede aplicar si además del sistema se suministran el conjunto completo de condiciones iniciales. Esto significa que la solución particular obtenida ya satisface las condiciones iniciales y no necesitamos evaluar las constantes arbitrarias que puedan resultar.

Como en capítulos anteriores resolvimos algunas ecuaciones diferenciales utilizando transformadas de Laplace, podemos pasar directamente a un ejemplo para ver como se aplica el método cuando se tienen sistemas de ecuaciones diferenciales (¡No necesariamente de primer orden!).

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 4x + \dot{y} &= 0 \\ -4\dot{x} + \ddot{y} + 2y &= 0 \quad \text{con: } x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, y(0) = -1, \dot{y}(0) = 2. \end{aligned}$$

En este caso el sistema consiste de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero debe quedar claro que el método se puede extender para sistemas con un número mayor de ecuaciones.

Como vimos anteriormente, utilizando la notación de las transformadas de Laplace el sistema se puede escribir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y_1''] - 4\mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[y_2'] &= 0 \\ -4\mathcal{L}[y_1'] + \mathcal{L}[y_2''] + 2\mathcal{L}[y_2] &= 0\end{aligned}$$

Donde también, hemos rebautizado las funciones de la siguiente manera: $y_1(x) = x(t)$ y $y_2(x) = y(t)$. Revisando las notas de las clases correspondientes a las transformadas de Laplace, podemos ver que el sistema anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}[y_1] - y_1'(0) - sy_1(0) - 4\mathcal{L}[y_1] + s\mathcal{L}[y_2] - y_2(0) &= 0 \\ -4s\mathcal{L}[y_1] + 4y_1(0) + s^2\mathcal{L}[y_2] - y_2'(0) - sy_2(0) + 2\mathcal{L}[y_2] &= 0\end{aligned}$$

al sustituir los respectivos valores para las condiciones iniciales y factorizando, resulta:

$$(s^2 - 4)\mathcal{L}[y_1] + s\mathcal{L}[y_2] = 0 \quad (6.13)$$

$$-4s\mathcal{L}[y_1] + (s^2 + 2)\mathcal{L}[y_2] - 2 + s = 0 \quad (6.14)$$

Este último sistema puede ser tratado como un sistema algebraico para $\mathcal{L}[y_1]$ y $\mathcal{L}[y_2]$. Si multiplicamos la primera por $4s$, la segunda por $s^2 - 4$ y luego las sumamos eliminamos $\mathcal{L}[y_1]$, resulta:

$$(s^4 + 2s^2 - 8)\mathcal{L}[y_2] = -s^3 + 2s^2 + 4s - 8$$

despejando $\mathcal{L}[y_2]$:

$$\mathcal{L}[y_2] = \frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{s^4 + 2s^2 - 8} = \frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{(s^2 + 4)(s^2 - 2)} = \frac{1}{6} \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{s + \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{s - \sqrt{2}} - \frac{8(s - 2)}{s^2 + 4} \right]$$

Ahora debemos buscar en nuestra tablita de transformadas de Laplace, para hallar las transformadas inversas:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}x}\right] &= \frac{1 + \sqrt{2}}{s + \sqrt{2}} \\ \mathcal{L}\left[(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}x}\right] &= \frac{1 - \sqrt{2}}{s - \sqrt{2}} \\ \mathcal{L}[-8 \cos(2x)] &= -8 \left[\frac{s}{s^2 + 2^2} \right] \\ \mathcal{L}[8 \sin(2x)] &= 8 \left[\frac{2}{s^2 + 2^2} \right]\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$y_2(x) = \frac{1}{6} \left[(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}x} + (1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}x} - 8 \cos(2x) + 8 \sin(2x) \right]$$

Para calcular $y_1(x)$, podemos sustituir $\mathcal{L}[y_2]$ en cualquiera de las ecuaciones (6.13) - (6.14) y resolver para $\mathcal{L}[y_1]$, esto es:

$$(s^2 - 4)\mathcal{L}[y_1] + s\mathcal{L}[y_2] = 0 \Rightarrow (s^2 - 4)\mathcal{L}[y_1] + s \left[\frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{(s^2 + 4)(s^2 - 2)} \right] = 0$$

esto es:

$$\mathcal{L}[y_1] = \frac{s(s-2)}{(s^2+4)(s^2-2)} = -\frac{1}{12} \left[\frac{2-\sqrt{2}}{s-\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} - 4 \left(\frac{s+2}{s^2+4} \right) \right]$$

Nuevamente, buscando en las tablas de transformadas de Laplace, término por término, se llega finalmente a:

$$y_1(x) = -\frac{1}{12} \left[(2-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}x} + (2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}x} - 4 \cos(2x) - 4 \sin(2x) \right].$$

Ejercicios

1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

a) $\dot{x} = -x^2$, $\dot{y} = -y$

b) $\dot{x} = 3e^{-t}$, $\dot{y} = x + y$

c) $\dot{x} = 2t$, $\dot{y} = 3x + 2t$, $\dot{z} = x + 4y + t$

d) $\dot{x} = 3x + 2e^{3t}$, $\dot{x} + \dot{y} - 3y = \operatorname{sen}(2t)$

e) $\ddot{x} + 4x = 3 \operatorname{sen}(t)$, $\dot{x} - \ddot{y} + y = 2 \cos(t)$

f) $\ddot{x} - 4x - 2\dot{y} + y = t$, $2\dot{x} + x + \ddot{y} + y = 0$

2. Verifique que los siguientes sistemas son degenerados. Encuentre las soluciones si existen

a) $\mathbf{D}x + 2\mathbf{D}y = e^t$, $\mathbf{D}x + 2\mathbf{D}y = t$

b) $\mathbf{D}x - \mathbf{D}y = e^t$, $3\mathbf{D}x - 3\mathbf{D}y = 3e^t$

c) $(\mathbf{D}^2 - 1)x + (\mathbf{D}^2 - 1)y = 0$, $(\mathbf{D}^2 + 4)x + (\mathbf{D}^2 + 4)y = 0$

d) $(\mathbf{D} - 2)x + (\mathbf{D} - 2)y = t$, $(\mathbf{D} + 3)x + (\mathbf{D} + 3)y = t$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

a) $(\mathbf{D} - 1)x = 0$, $-x + (\mathbf{D} - 3)y = 0$, $-x + y + (\mathbf{D} - 2)z = 0$

b) $(\mathbf{D} - 1)x = 0$, $3x + 2(\mathbf{D} + 1)y = 0$, $2y + (2\mathbf{D} - 3)z = 0$

c) $(\mathbf{D} - 2)x = 0$, $-3x + (\mathbf{D} + 2)y = 0$, $-2y + (\mathbf{D} - 3)z = 0$

d) $\mathbf{D}x - y + z = 0$, $-x + (\mathbf{D} - 1)y = 0$, $-x + (\mathbf{D} - 1)z = 0$

4. Resuelva los siguientes sistemas utilizando transformadas de Laplace

a) $\dot{x} - y = t$, $x - \dot{y} = 1$, $x(0) = 2$, $y(0) = 2$

b) $3\dot{x} + 3x + 2y = e^t$, $4x - 3\dot{y} + 3y = 3t$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$

c) $\dot{x} + \dot{y} - 4y = 1$, $x + \dot{y} - 3y = t^2$, $x(0) = 2$, $y(0) = -2$

d) $\ddot{x} - \dot{y} = 1 - t$, $\dot{x} + 2\dot{y} = 4e^t + x$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Capítulo

7

Métodos de soluciones por series

7.1. Otra vez Algebra de Series

- Las series se suman

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x - x_0)^n$$

- Las series se multiplican

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

con

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_j b_{n-j} + \cdots + a_{n-2} b_2 + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

- Las series se derivan

$$\frac{d [\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n]}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$$

Nótese como cambia el comienzo de la serie.

- Los índices en las series son mudos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j (x - x_0)^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k$$

en la última sumatoria hemos hecho $k = j - 1$, por lo cual $j = k + 1$.

- Las series se igualan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x - x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n \end{aligned}$$

por lo cual

$$b_n = a_{n+1} (n+1)$$

si la igualdad hubiera sido

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) (x - x_0)^n \implies a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)}$$

7.2. Un Ejemplo conocido.

Consideremos la conocida ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

se propone encontrar una solución entorno a $x = 0$ por lo tanto

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies \begin{cases} y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

$$y'' + y = 0 \implies \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$y'' + y = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k] x^k = 0$$

entonces

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + a_k = 0 \implies a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+2)(k+1)} \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots$$

por lo que

$$a_2 = \frac{-a_0}{2 \cdot 1}; \quad a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{-1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{(-a_0)}{2} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_0}{4!};$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{6!}$$

en general

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$$

Similarmente, para los impares se obtiene

$$a_3 = \frac{-a_1}{3 \cdot 2}; \quad a_5 = \frac{-a_3}{5 \cdot 4} = \frac{-1}{5 \cdot 4} \cdot \frac{(-a_1)}{3 \cdot 2} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{a_1}{5!};$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{7 \cdot 6} = \frac{-a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{-a_1}{7!}$$

de donde

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$$

De este modo, la solución deseada queda como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \frac{(-a_0)}{2!} x^2 + \frac{(-a_1)}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \frac{(-a_0)}{6!} x^6 + \frac{(-a_1)}{7!} x^7 + \dots$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left[\underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}} \right] + a_1 \left[\underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}} \right]$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

7.3. Otro Ejemplo menos conocido pero importante

Considere ecuación de Hermite¹ la cual aparece en la solución del oscilador armónico cuántico

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

Para resolver esta ecuación alrededor del punto $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1} \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \end{cases}$$

entonces la ecuación de Hermite queda como

$$\left[\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \right] - 2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j \right] + \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right] = 0$$

reacomodando índices queda como

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \right] - 2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^j \right] + \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right] = 0$$

o equivalentemente

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{j=1}^{\infty} [(j+2)(j+1)a_{j+2} - 2ja_j + \lambda a_j] x^j = 0$$

$$a_0 = -\frac{2a_2}{\lambda} \quad y \quad a_{j+2} = \frac{-(\lambda - 2j)}{(j+2)(j+1)} a_j \quad n \geq 1$$

¹Charles Hermite, (1822-1901). Matemático francés, especializado en el estudio de teoría de funciones. Profesor en la Universidad de París, ofreció importantes aportaciones al álgebra, las funciones abelianas y la teoría de las formas cuadráticas.

y tendrá como solución

$$y(x) = a_0 \left[1 - \underbrace{\frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6}_{y_0} - \dots \right] + a_1 \left[x + \underbrace{\frac{(2-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \dots}_{y_1} \right]$$

nótese que para valores pares de λ una u otra serie se corta y genera polinomios de la forma

λ	Ecuación de Hermite	Polinomio asociado
0	$y'' - 2xy' = 0$	$y_0(x) = 1$
2	$y'' - 2xy' + 2y = 0$	$y_1(x) = x$
4	$y'' - 2xy' + 4y = 0$	$y_0(x) = 1 - 2x^2$
6	$y'' - 2xy' + 6y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{2}{3}x^3$
8	$y'' - 2xy' + 8y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

También, puede ser definido a partir de una ecuación:

$$H_\lambda(x) = (-1)^\lambda e^{x^2} \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} e^{-x^2}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

o a través de una relación de recurrencia

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

Las ecuaciones antes mencionadas son ecuaciones homogéneas. En el caso que la ecuación diferencial a resolver por series sea una ecuación inhomogénea, se procederá del mismo modo como se propuso en el caso de que los coeficientes de la ecuación diferencial fueran constantes. Esto es se resuelve, por series la homogénea y luego se propone una solución particular, en forma de serie de potencias, la cual se iguala con la expansión, también en series de potencias, del término inhomogéneo. Como ejemplo, antes de proceder a casos más generales resolvamos la ecuación de Airy², pero inhomogénea planteada arriba. A pesar de su simplicidad, esta ecuación admite sólo soluciones en forma de serie. ahora el caso de la ecuación homogénea de Airy

$$y'' - xy = 0$$

Luego, compruebe, siguiendo el procedimiento arriba expuesto que una posible ecuación inhomogénea de Airy

$$y'' - xy = \exp(x)$$

tiene como solución la siguiente serie de potencias

$$y(x) = y(0) \underbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \right\}}_{y_1} + y'(0) \underbrace{\left\{ x + \frac{1}{12}x^4 + \dots \right\}}_{y_2} + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots}_{y_{ih}}$$

²George Biddell Airy (1801-1892) Matemático y Astrónomo Inglés con contribuciones importantes en la solución de ecuaciones diferenciales y su utilización en Astronomía. Mejoró significativamente las estimaciones teóricas de la órbita de Venus y la Luna. Igualmente realizó estudios matemáticos de la formación del arcoíris y la densidad de la tierra.

Nótese que los dos primeros términos corresponden a la solución de la ecuación homogénea y el último representa la serie que anula el término inhomogéneo. Hemos hecho patente la dependencia de las constantes de integración de las condiciones iniciales.

7.4. Método de Diferenciaciones Sucesiva

En general, dada la Ecuación diferencial

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y^{n-1}(x) + a_n(x) y^n(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (7.2)$$

Si los coeficientes $a_0(x) \cdots a_n(x)$ son funciones analíticas en $x = x_0$ (se pueden expresar como una serie de Taylor de $(x - x_0)$ que converge al valor de la función con un radio de convergencia de $|x - x_0| < \rho$), entonces, la ecuación diferencial 7.2 tendrá como solución única, $y = y(x)$ de la ecuación homogénea una serie de potencias la cual satisface las n condiciones iniciales

$$y(x_0) = c_1; \quad y'(x_0) = c_2; \quad y''(x_0) = c_3; \cdots \quad y''(x_0) = c_n$$

Adicionalmente, se expandirá en Taylor la función inhomogénea, esto es $\mathcal{F}(x) = \sum_{i=0}^n \mathcal{F}^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}$ y se

propondrá una solución particular de la inhomogénea, también en términos de una serie $y_{ih}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$.

Otra forma de hacerlo es proceder directamente y conservar el término inhomogéneo y a partir de la ecuación completa encontrar los coeficientes de la expansión por Taylor alrededor del punto en el cual se disponga de las condiciones iniciales. La solución en series de Taylor será

$$y_h(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0) \frac{x^2}{2!} + y'''(0) \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Así para la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - (x + 1)y' + x^2y = x; \quad \text{con } y(0) = 1; \quad y \quad y'(0) = 1.$$

los coeficientes de la expansión se obtienen de los valores de las derivadas en $x_0 = 0$, los cuales salen de las condiciones iniciales, de la ecuación diferencial esto es

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = (0) + (0 + 1)y'(0) - 0^2y(0) = 1$$

y de las derivadas de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y'''(x) &= y'(x) + (x + 1)y''(x) - 2x y(x) - x^2y'(x) + 1 \\ y'''(0) &= y'(0) + (0 + 1)y''(0) - 2(0) y(0) - 0^2y'(0) + 1 \\ y'''(0) &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

finalmente, la solución

$$y_h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Esta solución contiene las dos soluciones (la homogénea y la particular de la inhomogénea) sumadas

Dado $|x| < 1$ y la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = \exp(2x); \quad \text{con } y(0) = 1; \quad y \quad y'(0) = 1.$$

compruebe que tiene como solución general por series

$$y(x) = y(0) \left\{ 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{80}x^6 + \dots \right\} + y'(0)x + \left\{ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots \right\}$$

y al incorporar los valores de las condiciones iniciales se obtiene

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{180}x^6 - \frac{4}{315}x^7 - \frac{79}{10080}x^8 + \dots$$

7.5. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

En general, para encontrar la solución a la ecuación antes mencionada

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

Se expanden por series de potencias cada uno de los coeficientes $a_0(x) \dots a_n(x)$, la función $\mathcal{F}(x)$ y se expande también la serie

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}$$

luego de bastante transpiración se despejan los coeficiente $c_0 \dots c_n \dots$ veamos el ejemplo con la misma ecuación del ejemplo anterior.

$$y'' - (x+1)y' + x^2y = x; \quad \text{con } y(0) = 1; \quad \text{y } y'(0) = 1.$$

Como $x_0 = 0$, proponemos la siguiente expansión en series de potencias como solución:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \implies \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{cases}$$

y al sustituir

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} - (x+1) \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + x^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j = x$$

expandiendo

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^{j+2} = x$$

si hacemos $j-2 = l$ en el primer término, $j-1 = k$ en el tercero y $j+2 = m$ en el cuarto, tenemos

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) c_{l+2} x^l - \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^j - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

acomodando

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) c_{n+2} - n c_n - (n+1) c_{n+1}) x^n + \sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2} x^m = x$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 &= 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot c_3 - c_1 - 2 \cdot c_2 &= 1 \end{aligned}$$

y la relación de recurrencia para $n \geq 2$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - (n+1)c_{n+1} - c_{n-2} = 0$$

con la cual se obtienen todos los demás coeficientes.

Si la ecuación es

$$y'' + (\sin x)y' + (\exp x)y = 0$$

se expanden los coeficientes

$$y'' + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \right) y' + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \dots \right) y = 0$$

se propone la solución en términos de series de potencias

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \\ y''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \end{cases}$$

por lo cual

$$\left[\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} \right] + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right) \left[\sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1} \right] + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right) \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \right] = 0$$

acomodando

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + 2c_1 + c_0)x + (12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0)x^2 + (20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0)x^3 + \dots = 0$$

$$2c_2 + c_0 = 0$$

$$6c_3 + 2c_1 + c_0 = 0$$

$$12c_4 + 3c_2 + c_1 + c_0 = 0$$

$$20c_5 + 4c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 0$$

⋮

Ejercicio. Utilice el mismo método para la ecuación ejercicio anterior

$$y'' + \frac{x}{1-x^2}y' - \frac{1}{1-x^2}y = e^{2x}; \quad \text{con } y(0) = 1; \quad y \quad y'(0) = 1.$$

7.6. Los Puntos y las Estrategias

Dada una ecuación diferencial del tipo

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

Puntos ordinarios Un punto ordinario $x = x_0$ será aquel alrededor del cual $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ sean analíticas en ese punto o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{P(x)} = l_1 \quad \text{con } l_1 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{P(x)} = l_2 \quad \text{con } l_2 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto $x = x_0$.

Puntos singulares regulares Un punto $x = x_0$ se llamará punto singular regular si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = l_3 \quad \text{con } l_3 \text{ finito}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = l_4 \quad \text{con } l_4 \text{ finito}$$

O también, lo que es lo mismo, que $p(x)(x - x_0) = (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x)(x - x_0)^2 = (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ tengan una expansión en Taylor alrededor de ese punto.

Puntos singulares irregulares Ninguna de las anteriores

7.7. Ecuaciones e intervalos en puntos regulares

La ecuación de Legendre³

$$(1 - x^2)y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1)y = 0$$

tiene puntos regulares en $x \neq \pm 1$ y puntos singulares regulares en $x = \pm 1$. Pero es analítica en $x \in (-1, 1)$ lo tanto, todos los x son ordinarios si $x \in (-1, 1)$. En ese intervalo se propone una solución

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

³Adrien Marie Legendre (1752-1833). Matemático francés, encuadrado en la escuela de París, que surgió tras la revolución de 1789. Realizó una teoría general de las funciones elípticas y divulgó numerosos trabajos de investigadores jóvenes en el campo del análisis matemático.

por lo tanto

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

multiplicando y acomodando

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)a_{j+2}x^j - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

expandiendo

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_2 + \lambda(\lambda+1)a_0 \{(\lambda+2)(\lambda-1)a_1 + (3 \cdot 2)a_3\} x + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\lambda+n+1)(\lambda-n)a_n\} x^n \end{aligned}$$

donde hemos utilizado

$$-n(n-1) - 2n + \lambda(\lambda+1) = (\lambda+n+1)(\lambda-n)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{(\lambda+1)\lambda}{2} a_0 \\ a_4 &= \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} a_0 \\ a_{2n} &= (-1)^n \frac{(\lambda+2n-1)(\lambda+2n-3) \cdots (\lambda+1)\lambda(\lambda-2) \cdots (\lambda-2n+2)}{(2n)!} a_0 \end{aligned}$$

y las potencias impares serán

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} a_1 \\ a_5 &= \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} a_1 \\ a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\lambda+2n)(\lambda+2n-2) \cdots (\lambda+2)(\lambda-1) \cdots (\lambda-2n+1)}{(2n+1)!} a_1 \end{aligned}$$

y su solución general de la forma

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

con

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 - \frac{(\lambda+1)\lambda}{2} x^2 + \frac{(\lambda+3)(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)}{4!} x^4 + \dots \\ y_1(x) &= x - \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{3!} x^3 + \frac{(\lambda+4)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!} x^5 + \dots \end{aligned}$$

si $\lambda = 2n$ una de las series se corta solución es un polinomio de potencias pares y si $\lambda = 2n+1$ la otra se corta en uno de potencias impares

λ	Ecuación de Legendre	Polinomio Asociado
0	$(1 - x^2) y'' - 2x y' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 2 y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 6 y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 12 y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 20 y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

Los polinomios de Legendre son funciones que surgen en problemas de electrostática como solución de la ecuación de Legendre y son efectivamente polinomios para λ entero. Los Polinomios de Legendre también pueden ser generados a partir de la Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con $P_0(x) = 1$. También se dispone de una relación de recurrencia

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

7.8. El Método de Frobenius

Para la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias alrededor de puntos singulares regulares se utiliza el método de Frobenius⁴. Dada una ecuación diferencial

$$y'' + F_1(x) y' + F_2(x) y = 0 \iff y'' + \frac{f_1(x)}{(x - x_0)} y' + \frac{f_2(x)}{(x - x_0)^2} y = 0 \quad (7.3)$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen singularidades regulares en $x = x_0$ y por lo tanto $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas alrededor de ese punto entonces, la propuesta de solución será una serie de Frobenius

$$y(x) = (x - x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (7.4)$$

donde n es entero positivo, pero m puede ser entero positivo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Taylor) o entero negativo (entonces la serie de Frobenius es una serie de Laurent), o un racional. Por lo cual una serie de Frobenius incluye a las serie de Taylor y Laurent. Para hacer las cosas más simples supongamos, sin perder generalidad, $x_0 = 0$. Además, como $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas entonces

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad y \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (7.5)$$

por lo tanto

$$x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = 0 \iff x^2 y'' + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] y' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] y = 0$$

⁴Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) Matemático Alemán famoso por sus contribuciones en Teoría de Grupos y métodos para resolver ecuaciones diferenciales.

y con la propuesta de serie de Frobenius

$$\begin{aligned} y(x) &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n & \implies y'(x) &= mx^{m-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + x^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] \\ &\quad \Downarrow \\ y''(x) &= m(m-1)x^{m-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2mx^{m-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] + x^m \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right] \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \left\{ m(m-1)x^{m-2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2mx^{m-1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] + x^m \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right] \right\} + \\ &\quad + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left\{ mx^{m-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + x^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] \right\} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left\{ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} \end{aligned}$$

acomodando

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ m(m-1)x^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2mx^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] + x^m \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \right] \right\} + \\ &\quad + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left\{ mx^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + x^m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] \right\} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left\{ x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 0 &= x^m \left(\left\{ m(m-1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + 2m \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] + \left[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right] \left\{ m \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \right] \right\} + \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right] \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} \right) \end{aligned}$$

Expandiendo las series tendremos

$$0 = x^m \left\{ a_0 \underbrace{[m(m-1) + b_0 m + c_0]}_{EI(m)} \right\} + \quad (7.6)$$

$$+ x^{m+1} \left\{ a_1 \underbrace{[m(m+1) + b_0(m+1) + c_0]}_{EI(m+1)} + a_0 [b_1 m + c_1] \right\} + \quad (7.7)$$

$$+ x^{m+2} \left\{ a_2 \underbrace{[(m+2)(m+1) + b_0(m+2) + c_0]}_{EI(m+2)} + a_1 [b_1(m+1) + c_1] + a_0 [b_2 m + c_2] \right\} \quad (7.8)$$

$$+ x^{m+3} \left\{ a_3 \underbrace{[(m+3)(m+2) + b_0(m+3) + c_0]}_{EI(m+3)} + a_2 [b_1(m+2) + c_1] + \right. \\ \left. + a_1 [b_2(m+1) + c_2] + a_0 [b_3 m + c_3] \right\} + \dots \quad (7.9)$$

⋮

$$+ x^{m+n} \left\{ a_n \underbrace{[(m+n)(m+n-1) + b_0(m+n) + c_0]}_{EI(m+n)} + a_{n-1} [b_1(m+n-1) + c_1] + \right. \quad (7.10)$$

$$\left. + a_{n-2} [b_2(m+n-2) + c_2] + a_{n-3} [b_3(m+n-3) + c_3] + \dots \right. \quad (7.11)$$

$$\left. + a_1 [b_{n-1}(m+1) + c_{n-1}] + a_0 [b_n m + c_n] \right\} \quad (7.12)$$

+ ⋯

la cual puede ser reacomodada aún más, y toma la forma elegante y compacta de

$$0 = x^m \{a_0 EI(m)\} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_i EI(m+i) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k [(m+k)b_{i-k} + c_{i-k}] \right\} x^{m+i} \quad (7.13)$$

donde hemos identificado $EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0$. Como es de esperarse, este polinomio se anula si los coeficientes de $x^m \dots x^{m+i}$ se anulan. La primera de las ecuaciones que surge es la ecuación indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \implies EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0 \quad (7.14)$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m . Al anular el coeficiente de x^{m+i}

$$\left\{ a_i EI(m+i) + \sum_{k=0}^{i-1} a_k [(m+k)b_{i-k} + c_{i-k}] \right\} = 0 \quad (7.15)$$

obtendremos la relación de recurrencia para la serie de Frobenius, correspondientes a cada raíz de la ecuación indicadora (7.14). Dado que la ecuación indicadora es un polinomio de segundo grado para m , entonces de allí se derivan dos raíces m_1 y m_2 . Dependiendo de como sean estas raíces distinguiremos tres casos:

1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.

En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$y(x) = C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\|x\|^{m_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]}_{y_2(x)} \quad (7.16)$$

2. $m_1 = m_2$

En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ \underbrace{\|x\|^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned} \quad (7.17)$$

3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero positivo.

En este caso, la solución en términos de la serie de Frobenius para la ecuación diferencial será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ f \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Donde las constantes $a_n(m_1), a_n(m_2), B_n(m_1)$ y f , surgen de sustituir estas soluciones en la ecuación diferencial y resolver por el método de los coeficientes indeterminados. Nótese que hemos indicado explícitamente que los coeficientes $a_n = a_n(m_1); a_n = a_n(m_2); B_n = B_n(m_2)$ corresponden a las series de cada una de las raíces de la ecuación indicadora.

En resumen, si una ecuación diferencial $y'' + F_1(x)y' + F_2(x)y = 0$ presenta puntos singulares regulares para $F_1(x)$ y $F_2(x)$ en $x = x_0$. Lo que se traduce en que

$$y'' + \frac{f_1(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{f_2(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n \\ f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \end{cases}$$

es decir, que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ sean analíticas en torno a $x = x_0$. Entonces se aplica el método de Frobenius. Para ello,

1. se propone una solución en series de potencias de Frobenius:

$$y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con $m \in \Re \wedge n \in N$,

2. se sustituye en la ecuación diferencial y se aísla el término independiente (de orden cero en n). El coeficiente de este término se anula e implica la ecuación la indicadora o índice

$$a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$$

que no es otra cosa que un polinomio de segundo grado en m . De esta ecuación emergen dos raíces $m_2 \wedge m_1$, en función de estas raíces, procedemos de distinto modo

- a) si $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero entonces tendremos dos series de Frobenius

$$y(x) = C_1 x^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] + C_2 x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]$$

- b) si $m_1 = m_2$ tenemos que insertar un logaritmo

$$y(x) = x^{m_1} \left\{ (C_1 + C_2 \ln x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m) x^n \right] + C_2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) x^n \right] \right\}$$

- c) $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero positivo, entonces, como por arte de magia

$$y(x) = x^{m_1} \left\{ (C_1 + f \ln x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] \right\} + C_2 x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right]$$

3. Seguidamente se determina, según el caso, se determinan las relaciones de recurrencias para los distintos coeficientes $a_n = a_n(m_1); a_n = a_n(m_2); B_n = B_n(m_2); G_n = G_n(m_2)$ a partir de la ecuación (7.15)

$$\left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} = 0$$

tomando en cuenta los coeficientes de los desarrollos en series de potencias de las funciones

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

si anulamos los coeficientes de x^{m+n}

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)}$$

entonces se obtiene la relación de recurrencia, al menos para los casos (7.16) y (7.17) en los cuales $EI(m+n) \neq 0$. El caso $EI(m+n) = 0$, vale decir $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N será analizado en detalle más adelante.

7.8.1. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 \neq N$ con N entero.

En ese caso es claro que la resolver la ecuación indicadora y sustituir m_1 en el resto de los coeficientes, se va despejando todos los coeficientes $a_0 \cdots a_n$ en términos de a_0 . Igualmente al sustituir m_2 encontramos la otra solución y ambas son linealmente independientes y la solución será

$$y(x) = C_1 x^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] + C_2 x^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$$

Ejemplo, encuentre la solución en términos de series de Frobenius de la siguiente ecuación

$$x^2 y'' + x \left(x + \frac{1}{2} \right) y' - \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) y = 0$$

al dividir por x^2 identificamos que a $x = 0$ es un punto singular regular. Proponemos por lo tanto una serie de Frobenius $y(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como posible solución. La ecuación indicadora $EI(m) = m(m-1) + b_0 m + c_0 = 0$ queda ahora, como

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-1}{2} \end{array} \right\} &\iff m(m-1) + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2} = 0 & \iff \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 1 \end{array} \right\} &\iff f_1(x) = \frac{1}{2} + x \\ && \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -\frac{1}{2} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \end{array} \right\} &\iff f_2(x) = -\frac{1}{2} - x^2 \end{aligned}$$

los demás coeficientes $b_2 = b_3 = \dots = b_n = \dots = 0$ y $c_3 = c_4 = \dots = c_n = \dots = 0$.

- El primer término del coeficiente de x^{m+n} , puede ser escrito en términos de genéricos, como

$$EI(m+n) = (m+n)(m+n-1) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_0} (m+n) + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \right)}_{c_0} = m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \quad (7.19)$$

- El segundo término de ese mismo coeficiente, es una sumatoria en la cual intervienen los coeficientes de las expansiones de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ (ecuación (7.5)). Como de esta expansión sobrevive $b_1 = 1$ significa que sólo aparecen el coeficiente para el cual $n-k=1 \Rightarrow k=n-1$ y como también sobrevive $c_2 = -1$, tendremos que $n-k=2 \Rightarrow k=n-2$, también estará presente. Esto es

$$a_{n-1} \left[(m+n-1) \cdot \underbrace{1}_{b_1} \right] + a_{n-2} \left[\underbrace{(-1)}_{c_2} \right] \quad (7.20)$$

En definitiva el coeficiente completo se escribe como

$$a_n \left[m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right] + a_{n-1} [m+n-1] - a_{n-2} = 0 \quad (7.21)$$

con lo cual la relación de recurrencia general será

$$a_n = \frac{a_{n-2} - a_{n-1} [m + n - 1]}{m^2 + 2mn - \frac{1}{2}m + n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} \quad \text{para } n \geq 2 \quad (7.22)$$

Dependiendo del valor de m tendremos una relación de recurrencia para la primera de las series $m = 1$ o para la segunda, $m = -\frac{1}{2}$. Analicemos caso por caso. Para el caso particular $m = 1$, se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_n = (a_{n-2} - na_{n-1}) \frac{2}{2n^2 + 3n} \quad \text{para } n \geq 2$$

y se encuentra a_1 al utilizar el coeficiente de x^{m+1} (ecuación (7.7))

$$a_1 \left[1(1+1) + \frac{1}{2}(1+1) - \frac{1}{2} \right] + a_0 [1+0] = 0 \implies a_1 = -\frac{2}{5}a_0$$

con lo cual

$$n = 2 \implies a_2 = \frac{1}{7}(-2a_1 + a_0) = \frac{1}{7}\left(\frac{4}{5}a_0 + a_0\right) = \frac{9}{35}a_0 \implies a_2 = \frac{9}{35}a_0$$

$$n = 3 \implies a_3 = \frac{2}{27}(-3a_2 + a_1) = \frac{2}{27}\left(\frac{-27}{35}a_0 - \frac{2}{5}a_0\right) = -\frac{82}{945}a_0 \implies a_3 = -\frac{82}{945}a_0$$

$$n = 4 \implies a_4 = \frac{1}{22}(-4a_3 + a_2) = \frac{1}{22}\left(\frac{328}{945}a_0 - \frac{9}{35}a_0\right) = \frac{571}{20790}a_0 \implies a_4 = \frac{571}{20790}a_0$$

⋮

⋮

Así la primera solución será

$$y_1(x) = a_0 x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \dots \right)$$

Del mismo modo se construye la segunda solución linealmente independiente a partir de $m = -\frac{1}{2}$. Así, la relación de recurrencia para los coeficientes de la serie de Frobenius $m = -\frac{1}{2}$ será:

$$a_n = \left(a_{n-2} - \left(n - \frac{3}{2} \right) a_{n-1} \right) \frac{2}{2n^2 - 3n} \quad \text{para } n \geq 2$$

y

$$a_1 \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] + a_0 \left[-\frac{1}{2} \right] = 0 \implies a_1 = -a_0$$

por lo cual

$$n = 2 \implies a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + a_0 = \frac{1}{2}a_0 + a_0 = \frac{3}{2}a_0 \implies a_2 = \frac{3}{2}a_0$$

$$n = 3 \implies a_3 = \frac{2}{9} \left(-\frac{3}{2}a_2 + a_1 \right) = \frac{2}{9} \left(\frac{-9}{4}a_0 - a_0 \right) = -\frac{13}{18}a_0 \implies a_3 = -\frac{13}{18}a_0$$

$$n = 4 \implies a_4 = \frac{1}{10} \left(-\frac{5}{2}a_3 + a_2 \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{65}{36}a_0 + \frac{3}{2}a_0 \right) = \frac{119}{360}a_0 \implies a_4 = \frac{119}{360}a_0$$

⋮

⋮

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = C_1 x \left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 + \dots \right)$$

$$+ C_2 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 + \dots \right)$$

Nótese que esta solución vale para $0 < \|x\| < \infty$ por cuanto para $x < 0$, la segunda solución se hace imaginaria pero se puede resolver haciendo $C_2 = i C_3$

Como ejercicio resuelva

$$2x^2 y'' - x y' - (x + 1) y = 0$$

7.8.2. $m_1 = m_2$.

Del mismo modo, si tenemos una ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x \underbrace{[x F_1(x)] y'}_{f_1(x)} + \underbrace{[x^2 F_2(x)]}_{f_2(x)} y = 0 \iff L\{y\} = x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = 0 \quad (7.23)$$

donde en la cual $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen singularidades regulares en $x = 0$ pero $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son analíticas para ese punto, vale decir

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

se aplica el Método de Frobenius. Pero antes de proceder a ilustrar este caso en al cual ambas raíces coinciden, veamos, un poco de dónde surge la forma general de la solución (7.17). Para ello reacomodemos la ecuación diferencial (7.23) de la forma

$$x^2 y'' + x f_1(x) y' + f_2(x) y = \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x f_1(x) \frac{d}{dx} + f_2(x) \right\} y \equiv \mathcal{L}\{y\} = 0$$

donde $\mathcal{L}\{\bullet\}$ está concebido como un operador lineal. Es ilustrador mostrar de dónde sale la forma curiosa de la solución de la ecuación diferencial (7.17). Para ello, recordamos que

$$\mathcal{L}\{y\} \equiv x^m \{a_0 EI(m)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} x^{m+n}$$

si anulamos los coeficientes de x^{m+n} entonces

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \iff a_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k) b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)}$$

considerando $EI(m+n) \neq 0$ por lo tanto, para los a_n seleccionados (que anulen el coeficiente x^{m+n}) y considerando el caso $m_1 = m_2$

$$\mathcal{L}\{y\}(m, x) = \{a_0 EI(m)\} x^m = a_0 (m - m_1)^2 x^m$$

Nótese que estamos considerando $\mathcal{L}\{y\}(m, x)$ como una función de m , y x . Por lo cual evaluando en $m = m_1$

$$\mathcal{L}\{y\}(m, x)|_{m=m_1} = a_0(m - m_1)^2 x^m|_{m=m_1} = 0$$

pero además podemos intentar derivar respecto a la constante m

$$\frac{\partial \{\mathcal{L}\{y\}(m, x)\}}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x f_1(x) \frac{d}{dx} + f_2(x) \right\} y = \left\{ x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x f_1(x) \frac{d}{dx} + f_2(x) \right\} \frac{\partial y}{\partial m}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m, x) = \frac{\partial}{\partial m} \left(a_0(m - m_1)^2 x^m \right) = a_0 \left[(m - m_1)^2 x^m \ln x + 2(m - m_1) x^m \right]$$

y comprobamos que también se anula al evaluarla en $m = m_1$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m, x)|_{m=m_1} = a_0 \left[(m - m_1)^2 x^m \ln x + 2(m - m_1) x^m \right]|_{m=m_1} = 0$$

por lo tanto $\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m, x)|_{m=m_1}$ también es solución, con lo cual la segunda toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial m}\right\}(m, x)|_{m=m_1} &= \frac{\partial}{\partial m} \left\{ \|x\|^m \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right] \right\}|_{m=m_1} \\ &= (x^{m_1} \ln x) \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] + x^{m_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(m)}{\partial m} \Big|_{m=m_1} x^n \right] \end{aligned}$$

y la solución general tendrá la forma

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \\ &\quad + C_2 \underbrace{\left\{ \|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right] \ln x + \|x\|^{m_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(m_1) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned}$$

Analicemos, como ejemplo un caso particular de la ecuación de Bessel⁵

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 + \nu^2) y = 0$$

⁵**Fredrich Wilhel Bessel** (1784-1846). Astrónomo y matemático alemán. Aportó notables contribuciones a la astronomía posicional, la geodesia y la mecánica celeste. Particularmente, se dedicó a aumentar la exactitud de las mediciones de la posición y el movimiento de los astros. La precisión de sus mediciones hizo posible que determinara pequeñas irregularidades en los movimientos de Urano lo condujo a predecir la existencia de Neptuno. Análogos razonamientos lo llevaron a especular sobre la presencia de estrellas compañeras en Sirio y Procyon. A partir de datos registrados en el siglo XVII, calculó la órbita del cometa Halley

Una vez más, la ecuación viene parametrizada por ν y dependiendo de su valor tendremos una familia de soluciones. Consideremos el caso $\nu = 0$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

la ecuación indicadora $EI(m) = m(m-1) + b_0m + c_0 = 0$ nos queda como

$$m = 0 \iff m(m-1) + m = 0 \iff \begin{cases} b_0 = 1 \iff f_1(x) = 1 \\ c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \iff f_2(x) = x^2$$

los demás coeficientes $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$. Con lo cual $EI(n) = n(n-1) + n = n^2$, Por lo tanto, la relación de recurrencia se obtiene del coeficiente de x^{m+n}

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}]}{EI(m+n)} \quad \text{dado que } \begin{cases} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow k=n-1 \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k=2 \Rightarrow k=n-2 \end{cases}$$

$$a_n(m) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(m) [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}]}{(m+n)(m+n-1) + (m+n)} = \frac{a_{n-1}(m) (m+n+1) + a_{n-2}(m)}{(m+n)^2}$$

tomando $m = 0$, se tiene

$$a_n(0) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(0) [kb_{n-k} + c_{n-k}]}{n^2} \quad \text{con } \begin{cases} b_1 \neq 0 \Rightarrow n-k=1 \Rightarrow k=n-1 \\ c_2 \neq 0 \Rightarrow n-k=2 \Rightarrow k=n-2 \end{cases}$$

con lo cual

$$a_n(0) = -\frac{a_{n-2}(0)[c_2] + a_{n-1}(0)[(n-1)b_1]}{n^2} = -\frac{a_{n-2}(0) + a_{n-1}(0)(n-1)}{n^2} \quad \text{para } n \geq 2$$

Otra vez, al anular el coeficiente para x^{m+1} (ecuación (7.7)) se obtiene $a_1[0(0+1) + 1 \cdot (0+1) + 0] + a_0[0 \cdot 0 + 0] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. Con lo cual es claro que se anulan todos los coeficientes impares, y así

$$a_{2n}(0) = -\frac{a_{2n-2}(0)}{(2n)^2} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 n = 1 &\implies a_2(0) = -\frac{1}{4}a_0(0) & \implies a_2(0) = -\frac{1}{4}a_0(0) \\
 n = 2 &\implies a_4(0) = -\frac{1}{(2 \cdot 2)^2}a_2(0) = \frac{1}{(2 \cdot 2)^2 2^2}a_0(0) & \implies a_4(0) = \frac{1}{(2 \cdot 2)^2 2^2}a_0(0) \\
 n = 3 &\implies a_6(0) = -\frac{1}{(2 \cdot 3)^2}a_4(0) = -\frac{1}{(2 \cdot 3)^2} \left[\frac{1}{(2 \cdot 2)^2 2^2}a_0(0) \right] & \implies a_6(0) = \frac{-1}{(2 \cdot 3)^2 2^3}a_0(0) \\
 &\vdots & \vdots \\
 n = l &\implies a_{2l}(0) = -\frac{a_{2l-2}(0)}{(2l)^2} = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2}a_0(0) & \implies a_{2l}(0) = \frac{(-1)^l}{2^{2l} (l!)^2}a_0(0)
 \end{aligned}$$

por lo tanto la primera de las soluciones será

$$y_1(x) = a_0 \underbrace{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right]}_{J_0(x)}$$

Donde $J_0(x)$ se conoce como la función de Bessel de primera especie de orden cero.

Para calcular la segunda solución de la ecuación de Bessel se sustituye

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad \text{en la ecuación } x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

para ello se requieren sus derivadas

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= J_0(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \quad \Rightarrow y'_2(x) = J'_0(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (0) n x^{n-1} \quad \text{y} \\
 &\Downarrow \\
 y''_2(x) &= J''_0(x) \ln x + 2 \frac{J'_0(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n(n-1) x^{n-2}
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= x^2 \left[J''_0(x) \ln x + 2 \frac{J'_0(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1) x^{n-2} \right] + \\
 &\quad + x \left[J'_0(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^{n-1} \right] + x^2 \left[J_0(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \right]
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$0 = \left(\underbrace{x^2 J''_0(x) + x J'_0(x) + J x^2}_= 0 (x) \right) \ln x + 2 J'_0(x) x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+2}$$

y finalmente

$$B_1x + 2^2B_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (B_nn^2 + B_{n-2})x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

es claro que para los coeficientes impares se obtiene $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = b_{2n+1} = \dots = 0$ ya que

$$B_1x + 2^2B_2x^2 + (3^2B_3 + B_1)x^3 + (4^2B_4 + B_2)x^4 + (5^2B_5 + B_3)x^5 + \dots = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

mientras que para las potencias pares tendremos la relación de recurrencia

$$B_{2n} = \frac{1}{(2n)^2} \left[\frac{(-1)^{n+1} n}{2^{2(n-1)} (n!)^2} - b_{2n-2} \right]$$

entonces

$$\begin{aligned} B_2 &= 2 \frac{1}{2^2 (1!)^2} \\ B_4 &= \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} \left(-\frac{4}{2^2 (2!)^2} - 2 \frac{1}{2^2 (1!)^2} \right) = -\frac{1}{4^2 2^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ B_6 &= \frac{1}{(6)^2} \left[\frac{3}{2^4 (3!)^2} - b_4 \right] = \frac{1}{6^2} \left[\frac{3}{2^4 (3!)^2} + \frac{1}{4^2 2^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{6^2 4^2 2^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &\vdots \\ B_{2k} &= \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} (k!)^2} \left(\underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1}_{H_k} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} (k!)^2} H_k \end{aligned}$$

Así la segunda solución puede tomar la forma de

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} H_n x^{2n}$$

y por lo tanto la solución general tendrá la forma

$$y(x) = A_1 J_0(x) + A_2 \left[J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} H_n x^{2n} \right]$$

es costumbre en Física reacomodar la segunda solución de la forma

$$y_2(x) \equiv Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right) J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} H_n x^{2n} \right]$$

donde γ se conoce como la constante de Euler-Mascheroni⁶ y tiene un valor

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \ln(n) \right) \cong 0,5772$$

⁶**Lorenzo Mascheroni** (1750-1800) Monje Italiano, nacido en Bergamo, Lombardo-Veneto. Profesor de Algebra y Geometría en la Universidad de Pavia y luego Rector de la misma. Además de poeta, se destaco por sus contribuciones al Cálculo y a la Mecánica.

y así, finalmente

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$



Comportamiento de las funciones de Bessel de orden cero. De primera especie $J_0(x)$ y de segunda especie $Y_0(x)$

Nótese que tanto la función de Bessel de orden cero, de primera especie, $J_0(x)$, como la función de Bessel de orden cero, de segunda especie, $Y_0(x)$, tienen un comportamiento oscilatorio cuando $x \rightarrow \infty$, que $J_0(0) = 1$, mientras que $Y_0(x)$ se comporta como $\frac{2}{\pi} \ln x$ cuando $x \rightarrow 0$.

7.8.3. $m_1 \neq m_2 \wedge m_1 - m_2 = N$ con N entero.

En general, la ecuación indicadora para este caso, $m_1 - m_2 = N \Rightarrow m_1 = N + m_2$, con $m_1 > m_2$. Este caso nos lleva a la ecuación (7.13)

$$0 = x^m \{a_0 EI(m)\} + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} x^{m+n} \quad (7.24)$$

$$+ \left\{ a_N EI(m+N) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m+k)b_{N-k} + c_{N-k}] \right\} x^{m+N} + \quad (7.25)$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \right\} x^{m+n} \quad (7.26)$$

donde esta m es la menor de las raíces y $m + N$ la mayor. Anulando el término $\{a_0 EI(m)\}$ coeficiente de x^m nos lleva a la ecuación indicadora:

$$EI(m+N) = (m+N)(m+N-1) + b_0(m+N) + c_0 = EI(m) = (m)(m-1) + b_0(m) + c_0 = 0.$$

por lo tanto $EI(m + N) = 0$ anula al coeficiente del término a_n para $n = N$, esto es la ecuación (7.12), consecuentemente eso significa que se derivan dos casos

- $EI(m + N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m + N + k) b_{n-k} + c_{n-k}] = 0$

En este caso la solución en serie de Frobenius, partiendo de la raíz mayor de la ecuación indicadora, $m + N$, quedará en términos de a_0 y no será linealmente independiente a la solución provista por la raíz menor, por consiguiente la solución proveniente de esta raíz menor, m , será la solución general. Esto quiere decir que en (7.18) la constante $f = 0$ y por consiguiente la solución será

$$y(x) = a_0 \underbrace{\|x\|^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m) x^n \right]}_{y_1(x)} + a_N \underbrace{\|x\|^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m + N) x^n \right]}_{y_2(x)} \quad (7.27)$$

- $EI(m + N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m + N + k) b_{n-k} + c_{n-k}] \neq 0$

En este caso la raíz mayor de la ecuación indicadora $m + N$ determinará una de las soluciones, la constante $f \neq 0$ y la solución general tendrá la forma de

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \\ &+ C_2 \underbrace{\left\{ f \underbrace{\|x\|^{m_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(m_1) x^n \right]}_{y_1(x)} \ln x + \|x\|^{m_2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(m_2) x^n \right] \right\}}_{y_2(x)} \end{aligned}$$

La ecuación de Bessel de orden fraccionario puede ilustrar el primero de estos casos, resolvámosla

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) y = 0$$

una vez más, la expansión en serie de Frobenius de $y(x)$ nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \iff m(m-1) + m - \frac{1}{4} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 1 \iff f_1(x) = 1 \\ c_0 = -\frac{1}{4} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{array} \right\} \iff f_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$$

los demás coeficientes $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$. Dado que $N = 1$ se tiene que la ecuación (7.12)

$$\left\{ a_1 \underbrace{[(m+1)(m+1-1) + b_0(m+1) + c_0]}_{EI(m+N)} + a_0 [b_1(m+1-1) + c_1] + \dots \right\} = 0 \quad (7.28)$$

$$\left\{ \underbrace{a_1 \left[\left(\left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \right) + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right) - \frac{1}{4} \right] + a_0 [0]}_{EI \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right)} \right\} = 0 \Rightarrow a_1 [0] + a_0 [0] = 0 \quad (7.29)$$

con lo cual cualquier valor de a_1 y a_0 estarán permitidos. La relación de recurrencia proviene de anular el coeficiente de x^{m+n} , para $m = -\frac{1}{2}$. Vale decir

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \Rightarrow \quad (7.30)$$

$$a_n \left[\left(\left(-\frac{1}{2} \right) + n \right) \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + n - 1 \right) + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) + n \right) - \frac{1}{4} \right] + a_{n-1} [0] + a_{n-2} [1] = 0 \quad (7.31)$$

$$a_n (n^2 - n) = -a_{n-2} \quad (7.32)$$

los coeficientes serán

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2}a_0$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}a_1$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1$$

$$n = 6 \Rightarrow a_6 = -\frac{1}{30}a_4 = -\frac{1}{720}a_0$$

$$n = 7 \Rightarrow a_7 = -\frac{1}{42}a_5 = -\frac{1}{5040}a_1$$

⋮

⋮

Por lo cual, la solución general será

$$y(x) = a_0 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots \right) + a_1 x^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots \right)$$

Para considerar el segundo caso, $EI(m+N) = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N-1} a_k [(m+N+k)b_{n-k} + c_{n-k}] \neq 0$ analicemos la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x(2-x) y' + (2-x^2) y = 0$$

una vez más, la expansión en serie de Frobenius de $y(x)$ nos lleva a una ecuación indicadora del tipo

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} m &= 2 \\ m &= 1 \end{aligned} \right\} \iff m(m-1) - 2m + 2 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{aligned} b_0 &= -2 \\ b_1 &= 1 \end{aligned} \right\} \iff f_1(x) = -2 + x \\ \left. \begin{aligned} c_0 &= 2 \\ c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \iff f_2(x) = x^2 + 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

los demás coeficientes $b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$ y $c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$. Dado que $N = 1$ se tiene que la ecuación (7.12) para $m = 1$

$$a_1 [(m+1)m - 2(m+1)+2] + a_0 [m] = a_1 [2-4+2] + a_0 [2] = a_1 [0] + a_0 [1] = 0 \quad (7.33)$$

y no conduce a nada por cuanto $a_0 = 0$, mientras que, para $m = 2$ se obtiene

$$a_1 [(m+1)m - 2(m+1)+2] + a_0 [m] = a_1 [3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2] + a_0 [1] = a_1 [1] + a_0 [1] = 0 \quad (7.34)$$

por lo cual la relación de recurrencia para $m = 2$ nos queda

$$a_n EI(m+n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k [(m+k)b_{n-k} + c_{n-k}] = 0 \Rightarrow \quad (7.35)$$

$$a_n [(2+n)(2+n-1) - 2(2+n)+2] + a_{n-1}[1+n] + a_{n-2}[1] = 0 \quad (7.36)$$

$$a_n (n^2 + n) + a_{n-1}(n+1) = -a_{n-2} \quad (7.37)$$

los coeficientes serán

$$\begin{aligned} n = 2 &\implies 6a_2 = -3a_1 - a_0 = 3a_0 - a_0 \implies a_2 = \frac{1}{3}a_0 \\ n = 3 &\implies 12a_3 = -4a_2 - a_1 = -\frac{4}{3}a_0 + a_0 \implies a_3 = -\frac{1}{36}a_0 \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Por lo cual, la solución general será

$$y_1(x) = a_0 x^2 \left(1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{36}x^3 + \dots \right)$$

y la segunda solución linealmente independiente será

$$y_2(x) = u(x) - B_1 y_1(x) \ln x \quad (7.38)$$

y queda como ejercicio demostrar la relación de recurrencia para los coeficientes B_n de la serie que describe

$$u(x) = x \left(\sum_{i=0}^{\infty} B_i x^i \right) \quad (7.39)$$

7.9. Revisitando a Bessel

La Ecuación de Bessel es

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2) y = 0; \quad k \in \mathbb{R} \quad (7.40)$$

obviamente $x = 0$ es una singularidad regular, por lo tanto el método de Frobenius nos permite afirmar que si $x = x_0$ corresponde a un polo regular de la ecuación

$$x^2 y'' + x \tilde{P}(x) y' + \tilde{Q}(x) y = 0;$$

la solución vendrá expresada de la forma

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con r real y determinado a través de las raíces de la ecuación indicadora

$$r^2 + (\tilde{P}(x_0) - 1)r + \tilde{Q}(x_0) = 0$$

y donde $\tilde{P}(x)$ y $\tilde{Q}(x)$ son funciones analíticas en el entorno de $x = x_0$ y por lo tanto

$$\tilde{P}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

Para la Ecuación de Bessel

$$\tilde{P}(x) = 1 \Rightarrow b_0 = 1 \quad \wedge \quad \tilde{Q}(x) = (x^2 - k^2) \Rightarrow c_0 = -k^2; \quad c_2 = 1$$

los demás coeficientes b 's y c 's se anulan. La ecuación indicadora y sus raíces quedan como

$$m(m-1) + m - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm k$$

Donde, para $r = k$ proponemos

$$y_1(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Al hacer las cuentas

$$\begin{aligned} (x^2 - k^2) y_1(x) &= x^k \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n - x^k \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n \\ xy'_1(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+p) a_n x^n \\ x^2 y''_1(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} (k+p)(k+p-1) a_n x^n \end{aligned}$$

la ecuación de Bessel queda como

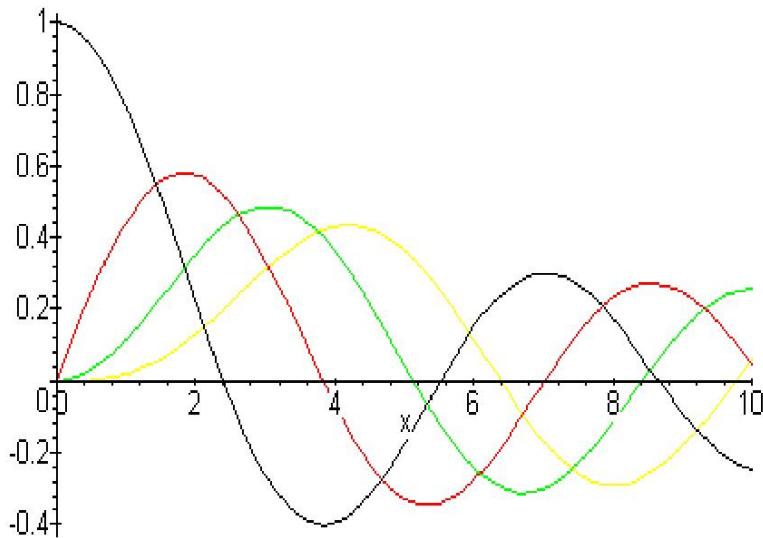
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [(k+n)(k+n-1) + (k+n) - k^2] a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n &= 0 \\ (2n+1) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [k(2n+k) a_k + a_{n-2}] x^n &= 0 \end{aligned}$$

y por consiguiente obtenemos la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2k+n)}$$

donde es claro que $a_1 = 0$. Adicionalmente, si suponemos

$$a_0 = \frac{1}{2^k \Gamma(k+1)}$$

Figura 7.1: Funciones de Bessel, de orden k de primera especie

tendremos

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_3 = a_5 = \dots = 0 \\
 a_2 &= -\frac{a_0}{2(2k+2)} \\
 a_4 &= \frac{a_0}{2 \cdot 4 (2k+2) (2k+4)} \\
 &\vdots \\
 a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n! (k+1) (k+2) \cdots (k+n)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera de las soluciones será

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}$$

la *Función de Bessel, de orden k de primera especie*.

Si $k = 0$ entonces

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Para el caso particular de $k = m$ entero positivo la función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Para encontrar la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel el método de Frobenius propone tres casos dependiendo el valor de k

$$\begin{cases} r_1 - r_2 \neq \text{entero} \Rightarrow k \neq \text{entero} \\ r_1 = r_2 = r \Rightarrow k = 0 \\ r_1 - r_2 = \text{entero} \Rightarrow k = \text{entero} \end{cases}$$

Caso 1: $r_1 - r_2 \neq \text{entero} \Rightarrow k \neq \text{entero}$.

La solución general será de la forma

$$y(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x)$$

donde

$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \quad x > 0$$

Para $x < 0$ se debe reemplazar x^{-k} por $\|x\|^{-k}$. Nótese que esta última expresión también es válida para k semientero, i.e. $k = n + \frac{1}{2}$.

Caso 2: $r_1 = r_2 = r \Rightarrow k = 0$.

La solución general será de la forma

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n + J_0(x) \ln x$$

y los coeficientes \tilde{a}_n se encuentran mediante el tradicional método de sustituirlos en la ecuación de Bessel para $k = 0$

$$xy'' + y' + xy = 0;$$

De donde se obtiene

$$\begin{aligned} xK_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{n+1} + xJ_0(x) \ln x = \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{a}_{n-2} x^{n-1} + xJ_0(x) \ln x \\ K'_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + (J_0(x) \ln x)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{a}_n x^{n-1} + J'_0(x) \ln x + \frac{J_0(x)}{x} \\ xK''_0(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\tilde{a}_n x^{n-1} + xJ''_0(x) \ln x + 2J'_0(x) - \frac{J_0(x)}{x} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2 \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}] x^{n-1} + \underbrace{[xJ''_0 + J'_0 + xJ_0]}_{=0} \ln x + 2J'_0(x) = 0$$

Acomodando y derivando la expresión para J_0 tendremos

$$\tilde{a}_1 + 4\tilde{a}_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} [n^2 \tilde{a}_n + \tilde{a}_{n-2}] x^{n-1} = -2J'_0(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n-1}} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} x^{2n-1}$$

Ahora multiplicando la expresión por x y separando las sumatorias en sus términos pares e impares, tendremos

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1x + \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)^2 \tilde{a}_{2n+1} + \tilde{a}_{2n-1}] x^{2n+1} &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} [(2n)^2 \tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2}] x^{2n} + 4\tilde{a}_2x^2 &= x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}\end{aligned}$$

Por lo cual $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_5 = \dots = 0$ mientras que

$$4\tilde{a}_2 = 1; \quad (2n)^2 \tilde{a}_{2n} + \tilde{a}_{2n-2} = (-1)^{n+1} \frac{2n}{2^{2n} (n!)^2} \quad n > 1$$

De esta forma los coeficientes quedan como:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_2 &= \frac{1}{2^2} \\ \tilde{a}_4 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^4 \cdot (2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{2n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}\right\}\end{aligned}$$

La expresión para la solución general de la ecuación de Bessel para $k = 0$ será

$$K_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}\right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + J_0(x) \ln x$$

En Física, es costumbre expresar esta solución de una forma equivalente pero ligeramente diferente:

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}\right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{2}{\pi} J_0(x) \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma\right]$$

donde, una vez más, $\gamma = 0,577215664901\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni.

Caso 3: $r_1 - r_2 = \text{entero} \Rightarrow k = \text{entero}$.

La solución general será de la forma

$$K_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^{k+n} + C J_n(x) \ln x$$

Procediendo de forma equivalente a la situación anterior tenemos que la solución general podrá expresarse (luego de una laboriosa faena) como

$$\begin{aligned}K_k(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{2k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+k}]}{n! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + J_k(x) \ln x\end{aligned}$$

Y finalmente la *Función de Bessel de orden k de segunda especie o Función de Neumann*

$$Y_k(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} - \frac{H_k}{\pi k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [H_n + H_{n+k}]}{n! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} + \frac{2}{\pi} J_k(x) \left[\ln \frac{x}{2} + \gamma \right]$$

En ambos casos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Más aún

$$Y_k(x) = \frac{2}{\pi} J_k(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-n-1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-k} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} [\psi(n+1) + \psi(n+k+1)]$$

donde $\psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$ es la función Digamma con

$$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ \psi(1) = -\gamma$$

También es costumbre definir la función de Bessel de segunda especie en términos de las de primera especie

$$N_k(x) = Y_k(x) = \frac{J_k(x) \cos k\pi - J_{-k}(x)}{\sin k\pi}$$

Nótese que para $k = m$ entero, aparentemente no está definida. Pero, aplicando la regla de L'Hospital

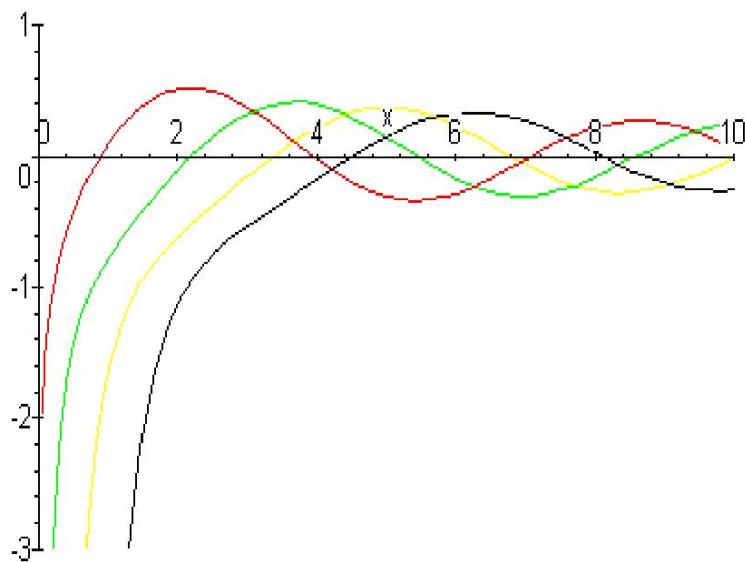
$$N_m(x) = \frac{\frac{d}{dk} [J_k(x) \cos k\pi - J_{-k}(x)]}{\frac{d}{dk} [\sin k\pi]} \Bigg|_{k=m} \\ = \frac{-\pi J_n(x) \sin n\pi + \left\{ \cos n\pi \frac{d}{dk} J_k(x) - \frac{d}{dk} J_{-k}(x) \right\}}{\pi \cos n\pi} \Bigg|_{k=m} \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{d}{dk} J_k(x) - (-1)^n \frac{d}{dk} J_{-k}(x) \right\}_{k=m}$$

De este modo, la soluciones generales para la ecuación de Bessel, se expresan según el caso en

$$Z_k(x) = C_1 J_k(x) + C_2 J_{-k}(x); \quad k \neq \text{entero}$$

$$\tilde{Z}_k(x) = C_1 J_k(x) + C_2 Y_k(x); \quad k = 0 \quad \vee \quad \text{entero}$$

Las funciones $Z_k(x)$ y $\tilde{Z}_k(x)$ se denominan *Funciones Cilíndricas de orden k*

Figura 7.2: Funciones de Bessel de orden k de segunda especie o Funciones de Neumann

ν	$r_{J0\nu}$	$r_{J1\nu}$	$r_{J3\nu}$	$r_{Y0\nu}$	$r_{Y1\nu}$	$r_{Y2\nu}$
1	2.404825558	3.831705970	5.135622302	0.8935769663	2.197141326	3.384241767
2	5.520078110	7.015586670	8.417244140	3.957678419	5.429681041	6.793807513
3	8.653727913	10.17346814	11.61984117	7.086051060	8.596005868	10.02347798
4	11.79153444	13.32369194	14.79595178	10.22234504	11.74915483	13.20998671
5	14.93091771	16.47063005	17.95981949	13.36109747	14.89744213	16.37896656
6	18.07106397	19.61585851	21.11699705	16.50092244	18.04340228	19.53903999
7	21.21163663	22.76008438	24.27011231	19.64130970	21.18806893	22.69395594
8	24.35247153	25.90367209	27.42057355	22.78202805	24.33194257	25.84561372
9	27.49347913	29.04682854	30.56920450	25.92295765	27.47529498	28.99508040
10	30.63460647	32.18967991	33.71651951	29.06403025	30.61828649	32.14300226

Cuadro 7.1: Los ceros de las funciones de Bessel $J_n(x)$ y de la función de Newmann $Y_n(x)$.

7.9.1. Otras Formas de la Ecuación de Bessel

Haciendo los cambios de variables correspondientes llegamos a

$$u''(x) + \frac{1-2\alpha}{x} u'(x) + \left[(\beta\nu x^{\nu-1})^2 + \frac{\alpha^2 - k^2\nu^2}{x^2} \right] u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = x^\alpha Z_k(\beta x^\nu)$$

o también

$$u''(x) + \alpha x^\nu u(x) = 0$$

con

$$u(x) = \sqrt{x} Z_{\frac{1}{\nu+2}} \left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\nu+2} x^{1+\frac{\nu}{2}} \right)$$

7.9.2. Relaciones de Recurrencia:

Las funciones de Bessel tienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} xJ_{k+1}(x) - 2k J_k(x) + xJ_{k-1}(x) &= 0 \\ J_{k+1}(x) + 2J'_k(x) - J_{k-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Para demostrar estas relaciones partimos por demostrar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} [x^k J_k(x)]' &= x^k J_{k-1}(x) \\ [x^{-k} J_k(x)]' &= -x^{-k} J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

De la expresión para $J_k(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2k} \right]' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+k)x^{2n+2k-1}}{2^{2n+k}\Gamma(n+1)\Gamma(n+k+1)} \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+(k-1)}}{2^{2n+(k-1)}\Gamma(n+1)\Gamma(n+k)} \\ &= x^k J_{k-1}(x) \end{aligned}$$

Unos cambios apropiados nos llevan a demostrar las segunda de las relaciones y al desarrollar las derivadas

$$\begin{aligned} [x^k J_k(x)]' &= kx^{k-1} J_k(x) + x^k J'_k(x) = x^k J_{k-1}(x) \\ [x^{-k} J_k(x)]' &= -kx^{-k-1} J_k(x) + x^{-k} J'_k(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x) \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} kJ_k(x) + xJ'_k(x) &= xJ_{k-1}(x) \\ -kJ_k(x) + xJ'_k(x) &= -xJ_{k+1}(x) \end{aligned}$$

Al sumar y restar miembro a miembro obtenemos las relaciones de recurrencia. Es obvia la importancia que adquieren $J_1(x)$ y $J_0(x)$ para generar el resto de las funciones de Bessel.

7.9.3. Funciones de Bessel y Funciones Elementales

Las funciones de Bessel de orden semientero, $k = \frac{1}{2}$ se expresa como

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

pero como

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n+1}{2} \right\} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2^n}$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} x^{2n} \\ &= \frac{x}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left\{ 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right\} = \frac{1}{\sqrt{2x}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sin x \end{aligned}$$

Finalmente, y otra vez invocando a las propiedades de la función Gamma: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

Equivalentemente se puede demostrar que

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

y ahora utilizando las relaciones de recurrencia tendremos que

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) + \frac{1}{x} J_{1/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \right] \end{aligned}$$

Así mismo

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) + \frac{3}{x} J_{3/2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{3 \cos x}{x^2} - \frac{3 \sin x}{x} - \cos x \right] \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(xdx)^n} \left(\frac{\cos x}{x} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(xdx)^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad n = -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

Las funciones de Bessel de orden semientero son las únicas funciones de Bessel que pueden ser expresadas en términos de funciones elementales.

7.9.4. Reflexión:

Las funciones de Bessel cumplen con

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Para el caso $k = m$ entero positivo la Función de Bessel de primera especie toma la forma de

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}$$

Si $k = -m$ es un entero negativo los primeros m términos de la serie anterior se anulan ya que $\Gamma(n) \rightarrow \infty$ para $n = -1, -2, -3, \dots$ y la serie se arma como

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m}}{(l+m)! l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+m} \\ J_{-m}(x) &= (-1)^m J_m(x) \end{aligned}$$

7.9.5. Función Generatriz

La función generatriz para las Funciones de Bessel es

$$\mathcal{B}(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}$$

desarrollando las dos series para las exponentiales

$$\begin{aligned} e^{\frac{xt}{2}} &= 1 + \frac{x}{2}t + \frac{x}{2^2 2!} t^2 + \dots + \frac{x^n}{2^n n!} t^n + \dots \\ e^{\frac{x}{2t}} &= 1 - \frac{x}{2}t^{-1} + \frac{x}{2^2 2!} t^{-2} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} t^{-n} + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto multiplicando ambas series

$$\mathcal{B}(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} t^n \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} t^{-n} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

7.9.6. Representación Integral para las Funciones de Bessel

En la expresión anterior para la función generatriz se realiza el siguiente cambio de variable $t = e^{i\theta}$ de este modo

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \cos(x \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$$

y por lo tanto

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) + i \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

igualando partes reales e imaginarias y recordando que $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, para anular los términos impares en la serie de la parte real y los pares en la de la parte imaginaria, podemos escribir

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta)$$

$$\operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \operatorname{sen}([2n+1]\theta)$$

Multiplicando miembro a miembro en la primera de ellas por $\cos(2k\theta)$ (y por $\cos([2k+1]\theta)$) y la segunda por $\operatorname{sen}([2k+1]\theta)$ (y por $\operatorname{sen}(2k\theta)$). Integrando (en $0 \leq \theta \leq \pi$), también miembro a miembro y término por término en las series, se obtienen

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos(2n\theta) d\theta$$

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos([2n+1]\theta) d\theta$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}([2n+1]\theta) d\theta$$

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}(2n\theta) d\theta$$

Sumando miembro a miembro primera con cuarta y segunda con tercera tendremos la expresión integral para las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\cos(n\theta) - x \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

ya que todos sabemos que

$$\cos(n\theta - x \operatorname{sen} \theta) = \cos(2n\theta) \cos(x \operatorname{sen} \theta) + \operatorname{sen}(2n\theta) \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} \theta)$$

7.9.7. Ortogonalidad de las Funciones de Bessel

Ortogonalidad:

Haciendo el caso particular de $\alpha = 0$ y $\nu = 1$ en la primera de las expresiones equivalentes para la ecuación de Bessel, tendremos

$$u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) + \left[\beta^2 - \frac{k^2}{x^2} \right] u(x) = 0$$

donde

$$u(x) = J_k(\beta x)$$

multiplicando por x la ecuación diferencial puede ser reescrita como

$$[x J'_k(\beta x)]' + \left[\beta^2 x - \frac{k^2}{x} \right] J_k(\beta x) = 0$$

suponiendo k real y positivo, planteamos la ecuación para dos índices diferentes β_1 y β_2 por lo tanto quedan como

$$\begin{aligned}[xJ'_k(\beta_1 x)]' + \left[\beta_1^2 x - \frac{k^2}{x} \right] J_k(\beta_1 x) &= 0 \\ [xJ'_k(\beta_2 x)]' + \left[\beta_2^2 x - \frac{k^2}{x} \right] J_k(\beta_2 x) &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando apropiadamente por $J_k(\beta_1 x)$ y $J_k(\beta_2 x)$, Integrando y restando miembro a miembro tendremos que

$$\begin{aligned}(\beta_2^2 - \beta_1^2) \int_0^1 x J_k(\beta_1 x) J_k(\beta_2 x) dx &= \int_0^1 \left\{ J_k(\beta_2 x) [xJ'_k(\beta_1 x)]' - J_k(\beta_1 x) [xJ'_k(\beta_2 x)]' \right\} dx \\ &= \int_0^1 [J_k(\beta_2 x) x J'_k(\beta_1 x) - J_k(\beta_1 x) x J'_k(\beta_2 x)]' dx \\ &= J_k(\beta_2 x) x J'_k(\beta_1 x) - J_k(\beta_1 x) x J'_k(\beta_2 x) \Big|_{x=0}^{x=1}\end{aligned}$$

para β_i las raíces de los polinomios de Bessel, i.e. $J_k(\beta_i) = 0$ podemos deducir que las funciones de Bessel son ortogonales

$$(\beta_i^2 - \beta_j^2) \int_0^1 x J_k(\beta_i x) J_k(\beta_j x) dx \propto \delta_{ij}$$

Más aún partiendo de la ecuación de Bessel original se puede llegar a

$$\|J_k(\beta x)\|^2 = \frac{1}{2} [J'_k(\beta)]^2 + \frac{\beta^2 - k^2}{2\beta^2} [J_k(\beta)]^2$$

Capítulo

8

Funciones Especiales

8.1. Algunas funciones Especiales

8.1.1. Función Gamma e Integrales de Probabilidad

Es la generalización del factorial $n!$ el cual sólo está definido para enteros, mientras que $\Gamma(z)$ está definida para toda variable compleja z con parte real positiva.

$\Gamma(z)$ se define indistintamente como:

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv (z-1)! \equiv \prod_{n=1}^{z-1} (z-n) \quad \operatorname{Re} z > 0 \\ \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ \frac{1}{\Gamma(z)} &= ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\end{aligned}$$

donde n es un entero positivo y

$$\gamma = 0,577215664901\cdots$$

se conoce como la constante de Euler-Mascheroni:

También es frecuente encontrar $\Gamma(z)$ con algunas variantes cosméticas:

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right) \right]^{z-1} dt = k^z \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} dt$$

Para probar la equivalencia de las dos primeras definiciones inventamos la siguiente función de dos variables

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt \quad \operatorname{Re} z > 0$$

y como es conocido que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z)$$

Con lo cual queda demostrada la primera de propuestas de Euler.

Para construir la segunda partimos de la misma función $F(z, n)$ y un cambio estratégico de variable $u = \frac{t}{n}$.

$$F(z, n) = n^z \int_0^n (1-u)^n u^{z-1} du \quad \operatorname{Re} z > 0$$

Un par de integraciones por partes nos llevan a comprobar

$$\begin{aligned}F(z, n) &= n^z \left\{ (1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right\} \\ &= n^z \left\{ (1-u)^{n-2} u^{z+1} \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \Big|_0^1 + \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du \right\}\end{aligned}$$

que el primer término se anula siempre. Repitiendo el proceso n veces

$$\begin{aligned} F(z, n) &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n-1)} \right\} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\ &= n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)} \right\} \end{aligned}$$

Una vez más, haciendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \left\{ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n)} \right\} \equiv \Gamma(z)$$

Se completa la equivalencia para la primera y segunda definiciones de Euler.

En particular, de la primera de las definiciones se tiene por integración directa

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

mientras que de la segunda, si $z = n = 1, 2, 3, \dots$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Finalmente la tercera de las definiciones de la función $\Gamma(z)$ viene expresada en término de un producto infinito (Weierstrass). Este puede demostrarse partiendo de la segunda definición de Euler

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(\frac{m}{m+z} \right) n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} n^z \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z \ln n}$$

Ahora bien, multiplicando y dividiendo por

$$\prod_{m=1}^n e^{z/m} = e^{z(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m})}$$

nos queda

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{z((\sum_{m=1}^n \frac{1}{m}) - \ln n)} \right\} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z/m} \right\}$$

Donde, la serie exponente del primero de los términos converge a un valor constante y cual ha quedado bautizado como la constante de *Euler-Mascheroni*

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right) - \ln n \right\}$$

$$\gamma = 0,5772156649015328606065112\dots$$

Con lo cual queda demostrada la tercera de las propuestas para expresar la Función Gamma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Es fácil comprobar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z \Gamma(z) \\ \Gamma(z) \Gamma(1-z) &= \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi z} \\ 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \Gamma(2z)\end{aligned}$$

La primera de ellas (la relación de recurrencia) es trivial y se obtiene integrando por partes la definición integral de Euler.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = z e^{-t} t^{z-1} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z)$$

El primer sumando de la integración por partes se anula siempre. Esta propiedad es válida $\forall z$ con $z \neq 0, -1, -2, \dots$.

La segunda de las propiedades (fórmula de reflexión) se comprueba también partiendo de definición integral de Euler con el siguiente cambio de variable $t = u^2$.

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \Gamma(1-z) &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-1} du \cdot 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{1-2z} dv \\ &= 4 \iint_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} du dv\end{aligned}$$

si ahora hacemos $u = \rho \cos \varphi$ y $v = \rho \sin \varphi$, la integral anterior queda como

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \Gamma(1-z) &= 4 \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1} \varphi d\varphi \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cot^{2z-1} \varphi d\varphi\end{aligned}$$

Finalmente, si

$$\varphi = \operatorname{arccot} \sqrt{x}; \quad d\varphi = \frac{-dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

nos queda

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Es inmediato volver a comprobar

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Del mismo modo, si utilizamos además la relación de recurrencia encontramos

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z \sin \pi z}$$

La *fórmula de duplicación* y puede comprobarse partiendo de la definición del límite de Euler, así

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \sqrt{\pi}$$

Hay que hacer notar que en el numerador sustituimos directamente las expresiones para del límite de Euler y en la del denominador, adicionalmente sustituimos n por $2n$

$$\Gamma(2z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{2z(2z+1) \cdots (2z+n)} n^{2z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2z(2z+1) \cdots (2z+2n)} (2n)^{2z}$$

por lo cual se tiene la siguiente expresión dentro del argumento del límite

$$\frac{2^{2z-1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \right) \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+\frac{1}{2})(z+\frac{3}{2}) \cdots (z+\frac{1}{2}+n)} n^{z+\frac{1}{2}} \right)}{\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2z(2z+1)(2z+2) \cdots (2z+2n)} (2n)^{2z} \right)}$$

la cual se reacomoda como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2z-1} (n!)^2 2z(2z+1)(2z+2) \cdots (2z+2n)}{(2n)! z(z+\frac{1}{2})(z+1)(z+\frac{3}{2})(z+2) \cdots (z+\frac{1}{2}+n)(z+n)} \cdot \frac{n^{2z+\frac{1}{2}}}{(2n)^{2z}}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+\frac{1}{2})(z+1)(z+\frac{3}{2})(z+2) \cdots (z+\frac{n}{2})(2^{n-1})}{z(z+\frac{1}{2})(z+1)(z+\frac{3}{2})(z+2) \cdots (z+\frac{1}{2}+n)(z+n)} \cdot \frac{2^{2z-1} (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{n^{z+\frac{1}{2}}}{2^{2z} n^{2z}}$$

Entonces

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{n-2})(n!)^2 \sqrt{n}}{(2n)!}$$

por lo cual se deduce que el valor de lado izquierdo de la ecuación es independiente del valor de z por lo tanto es el mismo valor para cualquier z y lo evaluamos para $z = \frac{1}{2}$

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

con lo cual queda comprobada la fórmula de duplicación.

Otras propiedades que van quedar como curiosidad y sin demostración son:

$$\begin{aligned} \Gamma(nz) &= (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(z + \frac{k}{n} \right) \\ \binom{z}{w} &= \frac{z!}{w!(z-w)!} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\Gamma(z-w+1)} \end{aligned}$$

A partir de $\Gamma(z)$ se definen otras funciones especiales, las cuales se expresan conjuntamente con sus propiedades como

8.1.2. La Funciones Digamma y Poligamma

Para evitar tratar con derivadas de los factoriales es costumbre trabajar con sus derivadas logarítmicas. A partir de la segunda definición

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= z! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \\ \ln(z!) &= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n!) + z \ln n - \ln(z+1) - \ln(z+2) - \cdots - \ln(z+n))\end{aligned}$$

ahora derivando,

$$\frac{d}{dz} \ln(z!) \equiv \mathbf{F}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)} - \cdots - \frac{1}{(z+n)} \right)$$

y finalmente acomodando, para llegar a la definición más conocida

$$\mathbf{F}(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+n)} - \frac{1}{n} \right)$$

También se le conoce como función Psi

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)) \equiv \mathbf{F}(z-1) = \frac{d}{dz} \ln((z-1)!)$$

con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \frac{1}{z} + \psi(z) \\ \psi(z-1) - \psi(z) &= \pi \cot \pi z \\ \psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 &= 2\psi(2z)\end{aligned}$$

De donde se pueden deducir

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = \gamma$$

La función $\psi(z)$ puede ser expresada en términos de integrales definidas, para ello notamos que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln t \, dt$$

y sustituyendo la identidad de Frullani

$$\ln t = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \, dx$$

tendremos

$$\begin{aligned}
 \Gamma'(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-xt}) e^{-t} t^{z-1} dt \\
 &= \int_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt - \int_0^\infty \frac{dx}{x} \int_0^\infty e^{-t(x+1)} t^{z-1} dt \\
 &= \Gamma(z) \int_0^\infty \frac{dx}{x} [e^{-x} - (x+1)^{-z}]
 \end{aligned}$$

ya que $\Gamma(z) = k^z \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} dt$ y por lo tanto

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} [e^{-x} - (x+1)^{-z}]$$

También daremos (sin demostración) otras expresiones

$$\begin{aligned}
 \psi(z) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt \\
 \psi(z) &= -\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^{z-1}}{1-x} dx
 \end{aligned}$$

La Función Poligamma se obtiene derivando en forma repetida la Función Digamma

$$\psi^{(m)}(z+1) = \mathbf{F}^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m} \mathbf{F}(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^{m+1}} \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

y cuya serie puede ser expresada en términos de la función Zeta de Riemann

$$\zeta(m) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$$

como

$$\mathbf{F}^{(m)}(0) = -1)^{m+1} m! \zeta(m+1)$$

de esta forma es posible desarrollar en serie de Maclaurin

$$\ln(n!) = -\gamma + \frac{z^2}{2} \zeta(2) - \frac{z^3}{3} \zeta(3) + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n} \zeta(n) + \dots$$

8.1.3. La Aproximación de Stirling

El comportamiento asintótico de las funciones especiales será tratado en una clase aparte. Pero la importancia de la Aproximación de Stirling obliga a que se trate en este punto. Supongamos que consideramos el caso $z \equiv x \in \mathbb{R}$. Por lo cual estamos interesados en el caso $x \gg 1$. Partimos de

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t+x \ln t} dt$$

haciendo $t = xu$ tenemos que

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{-x(u-\ln u)} du$$

Ahora bien, el integrando tendrá su máximo en $u = 1$ donde la exponencial tiene su mínimo y es entorno a ese punto que desarrollará en series de Taylor

$$u - \ln u = 1 + \frac{1}{2}(u-1)^2 - \frac{1}{3}(u-1)^3 + \frac{1}{4}(u-1)^4 + \dots$$

por lo cual

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^\infty e^{-x(u-\ln u)} du \approx x^x \int_0^\infty du e^{-x(1+\frac{1}{2}(u-1)^2 - \frac{1}{3}(u-1)^3 + \dots)} du$$

Otro cambio de variable $v = \sqrt{x}(u-1)$ nos lleva

$$\Gamma(x) \approx \frac{x^x e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\sqrt{x}}^\infty dv e^{-\frac{1}{2}v^2} \exp\left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots\right)$$

Para valores $x \gg 1$ se expande, en series de Taylor los exponentiales que contengan términos $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &\approx \frac{x^x e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^\infty dv e^{-\frac{1}{2}v^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots \right)^2 + \\ &\left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{3\sqrt{x}}v^3 - \frac{1}{4x}v^4 + \frac{1}{5x^{\frac{3}{2}}}v^5 - \dots \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando que

$$\int_{-\infty}^\infty dv e^{-\frac{1}{2}v^2} v^n = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & n = 0 \\ \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}$$

e integrando término a término, tendremos que

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \dots \right\}$$

8.1.4. La función Beta

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{Re } x > 0 \wedge \text{Re } y > 0$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

La Función Integral de Probabilidad

La función Integral de Probabilidad para una variable compleja arbitraria z como

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

Obviamente $\Phi(0) = 0$ y $\Phi(\infty) = 1$. A partir de esta función se define la **Función Error y su complemento**

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}(z) &= \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z) \\ \operatorname{erfc}(z) &= \int_z^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(z)]\end{aligned}$$

**Función Gamma Incompleta $\gamma(z, \alpha)$ y
Función Gamma Complementaria $\Gamma(z, \alpha)$**

$$\begin{aligned}\gamma(z, \alpha) &= \int_0^\alpha e^{-t} t^{z-1} dt \\ \Gamma(z, \alpha) &= \int_\alpha^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\end{aligned}$$

las cuales claramente cumplen con

$$\gamma(z, \alpha) + \Gamma(z, \alpha) = \Gamma(z)$$

y resumen

$$\begin{aligned}\gamma(z+1, \alpha) &= z\gamma(z, \alpha) - \alpha^z e^{-\alpha} \\ \Gamma(z+1, \alpha) &= z\Gamma(z, \alpha) + \alpha^z e^{-\alpha}\end{aligned}$$

Capítulo

9

El problema de Sturm-Liuoville

Borrador Preliminar

9.1. El problema de Sturm-Liuoville

9.1.1. Cálculo Operacional

Toda ecuación diferencial puede ser descrita de la siguiente forma

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Rightarrow \mathbb{D}F(x) = f(x) \quad (9.1)$$

donde $\mathbb{D}(\bullet)$ es un operador diferencial lineal, tal y como los estudiamos en su momento. De esta forma

$$\mathbb{D}(Ax^n + Bx^m) = A\mathbb{D}(x^n) + B\mathbb{D}(x^m) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1} \quad (9.2)$$

y en muchos aspectos ese operador diferencial $\mathbb{D}(\bullet)$ puede ser tratado como un número más.

De esta forma una ecuación diferencial homogénea puede ser descrita en forma de operadores como

$$a y'' + b y' + c y = 0 \Rightarrow \mathbb{O}|y\rangle = 0 \Leftrightarrow (a \mathbb{D}^2 + b \mathbb{D} + c)|y\rangle = 0 \quad (9.3)$$

y consecuentemente

$$(\mathbb{D} - r_1)(\mathbb{D} - r_2)|y\rangle = 0 \quad \text{con } r_1 \text{ y } r_2 \text{ raíces de } ar^2 + br + c = 0, \quad (9.4)$$

con soluciones, como era de esperarse de la forma

$$\begin{array}{lll} r_1 = r_2 = r & \text{reales} & \Rightarrow y(x) = (A + Bx)e^{rx} \\ r_1 \neq r_2 & \text{reales} & \Rightarrow y(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} \\ r_1 = r_2^* & \text{complejas } r_1 = \alpha + i\beta & \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) \end{array} \quad (9.5)$$

Esta notación también se presta para algunas curiosidades. Para una ecuación diferencial genérica con coeficientes constantes se tiene

$$y'' - 3 y' + 2 y = x^2 \Rightarrow (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y = x^2 \Rightarrow (\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)y = x^2. \quad (9.6)$$

más aún

$$y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)} \Rightarrow y = \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 2)} - \frac{x^2}{(\mathbb{D} - 1)} \quad (9.7)$$

por lo cual expandiendo

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 1} = \frac{-1}{1 - \mathbb{D}} = -1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \dots \quad (9.8)$$

$$\frac{1}{\mathbb{D} - 2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1 - \frac{\mathbb{D}}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \dots \quad (9.9)$$

de donde

$$y = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathbb{D}}{4} - \frac{\mathbb{D}^2}{8} - \frac{\mathbb{D}^3}{16} - \dots \right) x^2 - (-1 - \mathbb{D} - \mathbb{D}^2 - \mathbb{D}^3 - \mathbb{D}^4 - \dots) x^2 \quad (9.10)$$

por lo tanto tendremos la solución particular de la ecuación $y'' - 3 y' + 2 y = x^2$

$$y = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - (-x^2 - 2x - 2) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad (9.11)$$

Las operaciones que se usaron arriba están relacionadas muy estrechamente con las propiedades de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (9.12)$$

En el mismo espíritu anterior podemos asociar una ecuación diferencial de segundo orden a un operador diferencial

$$\underbrace{\left(P(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} + R(x) \right)}_{\mathbb{L}} u(x) = 0 \Rightarrow (P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)) |u\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L}|u\rangle = 0. \quad (9.13)$$

Donde las funciones $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ son funciones reales, definidas en el intervalo $[a, b]$ y que cumplen con las siguientes exigencias

- $P''(x), Q'(x)$ y $R(x)$ existen y son continuas en $[a, b]$, y
- $P(x)$ no contiene ceros en (a, b) .

9.1.2. Operadores diferenciales de segundo orden

Consideremos el espacio de Hilbert de funciones continuas en $[a, b]$, en el cual representaremos a esas funciones como $|u\rangle$ y los operadores lineales actúan en ese espacio de Hilbert de la forma acostumbrada $\mathbb{L}|u\rangle = |\tilde{u}\rangle$. Entonces, a través de la definición del producto interno podemos construir

$$\langle v | \tilde{u} \rangle = \langle \tilde{u} | v \rangle^* \Leftrightarrow \langle v | \mathbb{L}|u\rangle = \langle u | \mathbb{L}^\dagger |v\rangle^*. \quad (9.14)$$

Sabemos que, los operadores hermíticos (o autoadjuntos: $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$) tendrá autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ reales y los correspondientes autovectores $\{|w_1\rangle, |w_2\rangle, |w_3\rangle, \dots, |w_n\rangle\}$ serán ortogonales, $\langle w^i | w_j \rangle \propto \delta_j^i$.

El hecho que construyamos una ecuación de autovalores con \mathbb{L} de la forma expresada en (9.13) implica una ecuación de la forma

$$\mathbb{L}|v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle \Leftrightarrow (P(x)\mathbb{D}^2 + Q(x)\mathbb{D} + R(x)) |v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle. \quad (9.15)$$

Con lo cual estaríamos resolviendo una familia de ecuaciones diferenciales homogéneas del tipo

$$P(x) \frac{d^2 y_i(x)}{dx^2} + Q(x) \frac{dy_i(x)}{dx} + (R(x) - \lambda_i) y_i(x) = 0, \quad (9.16)$$

parametrizadas por el parámetro λ_i . Más aún, con esta estrategia podremos integrar ecuaciones diferenciales de la forma

$$P(x) \frac{d^2 y_i(x)}{dx^2} + Q(x) \frac{dy_i(x)}{dx} + (R(x) - \lambda_i w(x)) y_i(x) = 0, \quad (9.17)$$

si consideramos productos internos generalizados con funciones peso $w(x)$ de la forma

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx w(x) g^*(x) f(x). \quad (9.18)$$

Varios son los ejemplos de esta forma general de abordar las ecuaciones diferenciales como un problema de autovalores. Entre ellos podemos mencionar:

- El oscilador armónico:

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)}_{\mathbb{L}} y(x) = -\omega^2 y(x). \quad (9.19)$$

- La ecuación de Legendre:

$$\underbrace{\left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \right)}_{\mathbb{L}} P_n(x) = -n(n+1) P_n(x). \quad (9.20)$$

En general toda las familias de polinomios ortogonales, $p_n(x)$ con producto interno definido como

$$\langle \mathbf{p}^m | \mathbf{p}_n \rangle = \int_a^b w(x) p_m(x) p_n(x) dx = h_n \delta_{mn},$$

con $w(x) > 0$ una función peso en $a \leq x \leq b$.

Esto es:

$$\underbrace{\left(P(x) \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} \right)}_{\mathbb{L}} p_n(x) = -\alpha_n p_n(x) = 0 \quad (9.21)$$

Donde las expresiones para $P(x)$, $Q(x)$ y α_n se encuentran especificadas en la Tabla (9.1)

Polinomio	$P(x)$	$Q(x)$	α_n
P_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
T_n	$1 - x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
H_n	1	$-2x$	$2n$
L_n	x	$1 - x$	n
L_n^α	x	$1 - x + \alpha$	n
$P_n^{\alpha\beta}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - x(2 + \alpha + \beta)$	$n(n + \alpha + \beta + 1)$

Cuadro 9.1: Funciones para determinar la ecuación diferencial para la cual son solución los polinomios ortogonales. Con P_n Legendre, T_n Tchebychev 1E; U_n Tchebychev 2E; H_n Hermite; L_n Laguerre; $L_n^\alpha(x)$ Laguerre G; $P_n^{\alpha\beta}(x)$ Jacobi

- La ecuación de Bessel

$$\underbrace{\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 \right)}_{\mathbb{L}} J_k(x) = k^2 J_k(x); \quad k \in \mathbb{R}. \quad (9.22)$$

9.1.3. Operadores diferenciales autoadjuntos

Es claro que las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ tendrán algunas restricciones adicionales a las expresadas arriba, de tal forma que se garantice que el operador \mathbb{L} sea autoadjunto (hermítico).

Para encontrar esas restricciones a los coeficientes, partimos de la definición de producto interno en un espacio de funciones. En general, vimos que, para un espacio de funciones continuas y continuamente diferenciales en $[a, b]$ una posible definición de producto interno es

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) f(x) \Rightarrow \langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) \mathbb{L}f(x), \quad (9.23)$$

es decir

$$\langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \int_a^b dx g^*(x) P(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \int_a^b dx g^*(x) Q(x) \frac{df(x)}{dx} + \int_a^b dx g^*(x) R(x) f(x). \quad (9.24)$$

Integrando por partes la primera y segunda integral tendremos

$$\int_a^b dx g^*(x) P(x) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \left(P(x) g^*(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{d(P(x) g^*(x))}{dx} \right) \Big|_a^b + \int_a^b dx f(x) \frac{d^2(P(x) g^*(x))}{dx^2} \quad (9.25)$$

y

$$\int_a^b dx g^*(x) Q(x) \frac{df(x)}{dx} = f(x) Q(x) g^*(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx f(x) \frac{d(Q(x) g^*(x))}{dx} \quad (9.26)$$

Con lo cual podremos escribir:

$$\begin{aligned} \langle g | \mathbb{L} | f \rangle &= \int_a^b dx f(x) \underbrace{\left(P(x) \frac{d^2}{dx^2} + \left(2 \frac{dP(x)}{dx} - Q(x) \right) \frac{d}{dx} + \left(R(x) - \frac{dQ(x)}{dx} + \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \right) \right) g^*(x)}_{\mathbb{L}^\dagger} \\ &\quad + \left(f(x) \left(Q(x) - \frac{dP(x)}{dx} \right) g^*(x) + P(x) \left(\frac{df(x)}{dx} g^*(x) - \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) \right) \right) \Big|_a^b \end{aligned} \quad (9.27)$$

donde hemos identificado por \mathbb{L}^\dagger al operador adjunto de \mathbb{L} . Ahora bien, si queremos que \mathbb{L} sea autoadjunto (o hermítico) $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\dagger$, entonces se debe cumplir que

$$2 \frac{dP(x)}{dx} - Q(x) = Q(x) \quad y \quad - \frac{dQ(x)}{dx} + \frac{d^2 P(x)}{dx^2} = 0 \quad (9.28)$$

y ambas se satisfacen idénticamente si

$$Q(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (9.29)$$

Estas restricciones sobre $P(x)$ y $Q(x)$ son aparentes, porque siempre podremos construir un operador diferencial autoadjunto a partir de cualquier operador diferencial de segundo orden. En efecto, como $P(x)$ únicamente puede tener raíces en los extremos del intervalo $[a, b]$, siempre podremos definir

$$h(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \left(\int_a^x \frac{Q(t)}{P(t)} dt \right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}(x) = h(x)P(x) \\ \bar{Q}(x) = h(x)Q(x) \end{cases} \quad (9.30)$$

con lo cual se cumple inmediatamente la condición (9.29), a saber

$$\frac{d\bar{P}(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \exp \left(\int_a^x \frac{Q(t)}{P(t)} dt \right) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp \left(\int_a^x \frac{Q(t)}{P(t)} dt \right) = \bar{Q}(x) \quad (9.31)$$

y entonces $h(x)\mathbb{L}$ siempre será auto adjunto.

Entonces, al utilizar (9.29) en (9.13) es fácil convencerse que todo operador autoadjunto puede ser escrito como

$$\mathbb{L} \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{d(\bullet)}{dx} \right) + R(x). \quad (9.32)$$

Adicionalmente, la ecuación general (9.27) quedaría escrita como:

$$\langle g | \mathbb{L} | f \rangle = \underbrace{\int_a^b dx f(x) \mathbb{L}^\dagger g^*(x)}_{\langle f | \mathbb{L}^\dagger | g \rangle^*} + P(x) \left(\frac{df(x)}{dx} g^*(x) - \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) \right) \Big|_a^b. \quad (9.33)$$

Claramente, si \mathbb{L} es autoadjunto y $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta, el segundo término se debe anular, y allí habrán de incidir las condiciones de borde que se impongan al problema.

9.1.4. El Sistema Sturm-Liouville

Evidentemente, si consideramos que $f(x)$ y $g(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial autoadjunta (que puede ser representada por un operador lineal de segundo orden autoadjunto \mathbb{L}), entonces la ecuación de autovalores

$$\mathbb{L} |u_i\rangle = -\lambda_i |u_i\rangle \Leftrightarrow \left(\frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{d}{dx} \right) + R(x) \right) u_i(x) = -\lambda_i w(x) u_i(x) \quad (9.34)$$

donde, λ_i son los autovalores, $u_i(x)$ las autofunciones soluciones y $w(x) > 0$ es la función peso descrita en (9.18). Claramente esta ecuación (9.34) debe ser complementada con las condiciones de frontera

$$P(x) u_j^*(x) \frac{du_i(x)}{dx} \Big|_a^b = 0 \quad \forall i, j \quad (9.35)$$

Las ecuaciones (9.34) y (9.35) constituyen Sistema Sturm-Liouville y también se le refiere como el problema de Sturm-Liouville.

Se distinguen dos posibles situaciones con las condiciones de frontera:

1. **Condiciones Regulares:** Para este caso se especifican los valores de una combinación de las funciones y las derivadas:

$$\beta_1 u_i(x) + \gamma_1 \frac{du_i(x)}{dx} = C_1 \quad y \quad \beta_2 u_i(x) + \gamma_2 \frac{du_i(x)}{dx} = C_2$$

en los extremos $x = a$ y $x = b$. Estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones. Claramente de ésta pueden derivarse cuatro tipos de condiciones de frontera

- a) **Condiciones Regulares Puras:** Para este caso se especifican los valores para la combinación lineal completa, con $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$
- b) **Condiciones de Dirichlet:** Para este caso se especifican los valores de la función $u_i(x)$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$
- c) **Condiciones de Neumann:** Para este caso se especifican los valores de las derivadas $\frac{du_i(x)}{dx}$ en los extremos, $x = a$ y $x = b$. Esto es para $\beta_1 = \beta_2 = 0$
- d) **Condiciones Mixtas:** Cuando se especifican los valores de un tipo de condiciones de frontera en un extremo y otro en el otro. Esto es para $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ o $\gamma_1 = \beta_2 = 0$

2. **Condiciones Periódicas:** Para este caso el valor de la función y su derivada es el mismo en los extremos $u_i(a) = u_i(b)$ y $\frac{du_i(x)}{dx} \Big|_a = \frac{du_i(x)}{dx} \Big|_b$. Otra vez, estos valores son finitos en todo el intervalo de validez de las funciones.
3. **Condiciones Singulares:** Para este caso encontramos valores singulares para las funciones y sus derivadas.

9.1.5. Algunos ejemplos ilustrativos

Vamos a analizar el caso muy simple de la ecuación diferencial tipo oscilador armónico libre. Esto es:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \lambda y(x) = 0, \quad (9.36)$$

y veremos como cambia cuando se tienen en cuenta distintos tipos de condiciones de frontera.

Condición Regular con

$$y(0) = 0 \wedge \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Este caso corresponde una condición de frontera regular con $\gamma_1 = \beta_2 = 0$ y, en principio, tendrá soluciones distintas para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$

$\lambda = 0$ La solución será de la forma $y(x) = C_1x + C_2$ como $y(0) = 0$ tendremos que $C_2 = 0$ y como $\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = 0$ necesariamente $C_1 = 0$. Con lo cual la única solución es $y(x) = 0$ y λ no será un autovalor de la ecuación (9.36).

$\lambda < 0$ Podemos re-escribirla con $\lambda = -\mu^2$. Entonces la solución general para (9.36) tendrá la forma $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen

$$0 = C_1 + C_2 \quad \wedge \quad 0 = \mu(C_1 e^{\mu \pi} + -C_2 e^{-\mu \pi})$$

y otra vez, tendremos como única solución $0 = C_1 = C_2$ y λ no será un autovalor de la ecuación (9.36).

$\lambda > 0$ Para éste caso usamos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = C_2 \mu \cos(\mu \pi) = 0 \Rightarrow \mu_n = \pm \frac{2n+1}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Es decir, tendremos infinitos autovalores asociados con infinitas autofunciones $y_i(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$ para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

En primer lugar, es importante señalar que, por ser \mathbb{L} un operador hermítico sus autovalores son reales y cumplen $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$, es decir, son crecientes para índices crecientes de las autofunciones. En segundo lugar que las infinitas autofunciones forman una base ortogonal y, por lo tanto la suma de todas esas soluciones, también será solución de (9.36), con las condiciones de frontera: $y(0) = 0 \wedge \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = 0$ y $\lambda > 0$ puede ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad (9.37)$$

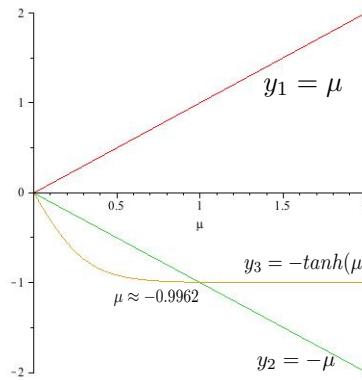


Figura 9.1: Las posibles soluciones $\mu = -\tanh(\mu \pi)$, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ para el intervalo $[0, 2]$ se muestra claramente en la figura. Para $\mu > 0$ no existe solución, pero para $\mu < 0$, se encuentra numéricamente que $\mu \approx -0,9962$

Este hecho nos permitirá resolver el problema inhomogéneo, $\mathbb{L}|u\rangle = |f\rangle$, y será analizado en detalle más adelante.

Condición Regular con

$$y(0) = 0 \wedge y(\pi) + \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=\pi} = 0.$$

Para este caso tendremos una condición de frontera regular con $\gamma_1 = 0$ y, en principio, tendrá soluciones distintas para $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, y $\lambda < 0$.

$\lambda = 0$ Se cumplen las mismas situaciones que el caso anterior y se demuestra que sólo es posible la solución trivial $y(x) = 0$.

$\lambda < 0$ Una vez más hacemos $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen:

$$C_1 = -C_2 \quad \wedge \quad 0 = (C_1 e^{\mu \pi} + C_2 e^{-\mu \pi}) + \mu (C_1 e^{\mu \pi} - C_2 e^{-\mu \pi})$$

con lo cual

$$\mu = -\frac{(e^{\mu \pi} - e^{-\mu \pi})}{(e^{\mu \pi} + e^{-\mu \pi})} \equiv -\tanh(\mu \pi).$$

Esta ecuación trascendente se tiene que resolver numéricamente. Si $\mu > 0$ no existirá solución para $\mu = -\tanh(\mu \pi)$. Esto se ilustra claramente en la figura 9.1. No hay punto de corte entre las dos funciones. Por lo tanto volvemos al caso de la solución trivial $y(x) = 0$. Si $\mu < 0$ entonces, al resolver numéricamente, encontramos que $\mu \approx -0,9962$, con lo cual $\lambda \approx -0,9924$ y consecuentemente $y(x) \approx C_1 (e^{-0,9962 x} - e^{0,9962 x})$.

$\lambda > 0$ En éste caso una vez más hacemos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ y, para este caso

$$y(\pi) = 0 = C_2 (\sin(\mu \pi) + \mu \cos(\mu \pi)) \Rightarrow \mu = -\tan(\mu \pi).$$

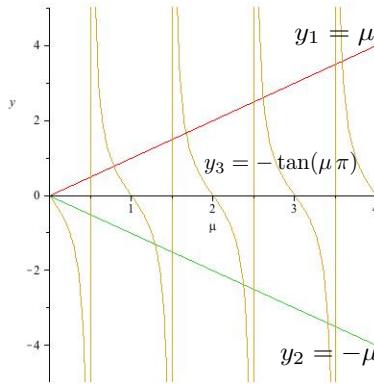


Figura 9.2: Las posibles soluciones de $\mu = -\tan(\mu \pi)$, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ para el intervalo $[0, 4]$ se muestra claramente en la figura. Tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ existen infinitas soluciones.

Otra vez, la ecuación trascendente $\mu = -\tan(\mu \pi)$, se tiene que resolver numéricamente. No obstante, procedemos a analizar una posible representación gráfica que se muestra en la Figura 9.2. Claramente, tanto para $\mu > 0$ como para $\mu < 0$ existen infinitas soluciones. Si resolvemos numéricamente para el caso $\mu > 0$ encontramos que:

$$\mu_1 \approx 0,7876, \mu_2 \approx 1,6716, \mu_3 \approx 2,6162 \dots \Rightarrow \lambda_1 \approx 0,6204, \lambda_2 \approx 2,7943, \lambda_3 \approx 6,8446 \dots$$

Del mismo modo, para $\mu < 0$ se obtiene:

$$\tilde{\mu}_1 \approx -1,2901, \tilde{\mu}_2 \approx -2,3731, \tilde{\mu}_3 \approx -3,4092 \dots \Rightarrow \tilde{\lambda}_1 \approx 1,6644, \tilde{\lambda}_2 \approx 5,6314, \tilde{\lambda}_3 \approx 11,6225 \dots$$

Por lo tanto la solución, se podrá escribir,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\mu_n x) - \sin(|\tilde{\mu}_n| x) \quad (9.38)$$

Condiciones Periódicas

Para las condiciones de frontera periódicas tendremos: $y(0) = y(L)$ y $\frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=L}$. Una vez más se distinguen tres escenarios.

$\lambda = 0$. En este caso, la solución vuelve a ser $y(x) = C_1 x + C_2$ y las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_2 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=L} \Rightarrow C_2 = C_2.$$

Por lo tanto, para $\lambda = 0$, la solución (9.36) con condiciones de borde periódicas, será $y(x) = C_2$

$\lambda < 0$. Una vez más, $\lambda = -\mu^2$ y la solución general tendrá la forma $y(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$. Las condiciones de frontera imponen

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - e^{\mu L}) = C_2 (e^{-\mu L} - 1)$$

y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L} \Rightarrow C_1 (1 - e^{\mu L}) = -C_2 (e^{-\mu L} - 1) .$$

Por lo tanto, $C_1 = C_2 = 0$, y obtenemos la solución trivial $y(x) = 0$ para valores de $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$. Al igual que en los casos anteriores hacemos $\lambda = \mu^2$ y la solución será del tipo $y(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$. Las condiciones de frontera imponen:

$$y(0) = y(L) \Rightarrow C_1 (1 - \cos(\mu L)) = C_2 \sin(\mu L)$$

y

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=L} \Rightarrow C_2 (1 - \cos(\mu L)) = -C_1 \sin(\mu L)$$

con lo cual, al resolver para C_2 se obtiene

$$2C_1 (1 - \cos(\mu L)) = 0 \Rightarrow \cos(\mu L) = 1 \Rightarrow \mu_n = \pm \frac{2n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \text{ para } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

por lo cual, para cada autovalor λ_n tendremos asociadas dos autofunciones: $y_1(x) = \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$ y $y_2(x) = \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$

Condiciones Singular

Aquí se presentan uno o más infinitos en el intervalo de validez $x \in [a, b]$. En esta sección analizaremos únicamente el caso para el cual los puntos singulares estén en los extremos $x = a$ y $x = b$. En este caso, la ecuación (9.34), vale decir

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i w(x)|u_i\rangle \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{du_i(x)}{dx} \right) + (R(x) + \lambda_i w(x)) u_i(x) = 0, \quad (9.39)$$

tendremos $P(a) = 0$ o $P(b) = 0$ o ambos. La aparición de polos en el intervalo de validez de las ecuaciones diferenciales fue lo que motivó el uso del método de Frobenius que se discutió en la sección 7.8. Particularmente, la ecuación de Bessel (7.40) en la sección 7.9 representa este caso. Tal y como discutimos en esas secciones, si incluimos $x = 0$ en el intervalo de validez de la ecuación esta presenta un polo en uno de los extremos del intervalo. Es decir, en la ecuación de Bessel escrita en forma autoadjunta:

$$x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - n^2) y = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy(x)}{dx} \right) + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x} \right) y(x) = 0, \quad (9.40)$$

identificamos: $P(x) = x$, $R(x) = -\frac{n^2}{x}$, $\lambda = k^2$ y finalmente $w(x) = x$. Tal y como mostramos en (7.9) la solución general de esta ecuación es:

$$y(x) = C_1 J_n(kx) + C_2 Y_n(kx) \quad \text{con } y(a=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y(x) = C_1 J_n(kx) \quad (9.41)$$

La condición de borde $y(a=0) = 0$ impone que $C_2 = 0$ porque $Y_n(kx \rightarrow 0) \rightarrow \infty$.

Si adicionalmente, imponemos $y(b) = 0$, entonces se cumplirá que $J_n(k a) = 0$ por lo cual $k a = r_{Jn\nu}$, donde $r_{Jn\nu}$ con $\nu = 1, 2, 3, \dots$ son las raíces de la función de Bessel $J_n(x)$, tal y como se expresan en la Tabla 7.1. Entonces, al igual que en los casos anteriores tendremos

$$k_n = \frac{r_{Jn\nu}}{a} \Rightarrow \lambda_n = \frac{r_{Jn\nu}^2}{a^2} \Rightarrow y_\nu(x) = C_1 J_n\left(\frac{r_{Jn\nu}}{a} x\right) \quad (9.42)$$

De esta forma se tendrán las funciones asociadas con los autovalores y los ceros de la función de Bessel reescalarán el argumento de la función.

9.1.6. Función de Green

Consideremos ahora la solución de caso inhomogéneo

$$\mathbb{L}|y\rangle = |f\rangle \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + R(x)y(x) = f(x) . \quad (9.43)$$

Claramente

$$\mathbb{L}|u_i\rangle = -\lambda_i|u_i\rangle \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} C^i|u_i\rangle . \quad (9.44)$$

donde $\{|u_i\rangle\}$ son las autofunciones de \mathbb{L} . Por lo tanto podemos expresar (9.43) de la forma

$$|f\rangle = \mathbb{L}|y\rangle \Rightarrow |f\rangle = \mathbb{L}\left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i|u_i\rangle\right) = \sum_{i=0}^{\infty} C^i\mathbb{L}|u_i\rangle = -\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i|u_i\rangle , \quad (9.45)$$

para finalmente proyectar (9.43) a lo largo de las mismas autofunciones $|u_i\rangle$ y dado que las funciones $\{|u_i\rangle\}$ son ortogonales, obtenemos los coeficientes C^i

$$\langle u^j |f\rangle = -\sum_{i=0}^{\infty} C^i\lambda_i \underbrace{\langle u^j |u_i\rangle}_{\delta_{ij}} \Rightarrow C^j = \frac{1}{\lambda_j} \frac{\langle u^j |f\rangle}{\langle u^j |u_j\rangle} \Leftrightarrow C^j = \frac{\int_a^b dx u_j^*(x) w(x)f(x)}{\int_a^b dx u_j^*(x) w(x)u_j(x)} . \quad (9.46)$$

Por lo tanto,

$$|y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i} \frac{\langle u^i |f\rangle}{\langle u^i |u_i\rangle} \right) |u_i\rangle \Leftrightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{\int_a^b d\xi u_i^*(\xi) w(\xi)f(\xi)}{\int_a^b d\xi u_i^*(\xi) w(\xi)u_i(\xi)} \right) u_i(x) . \quad (9.47)$$

Siempre se puede normalizar las autofunciones y con ello se simplifica la expresión anterior

$$\langle \hat{u}^i | \hat{u}_i \rangle = 1 \Leftrightarrow \int_a^b d\xi \hat{u}_i^*(\xi) w(\xi) \hat{u}_i(\xi) = 1 \Rightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_a^b d\xi \hat{u}_i^*(\xi) w(\xi)f(\xi) \right) \hat{u}_i(x) , \quad (9.48)$$

donde

$$|\hat{u}_i\rangle = \frac{|u_i\rangle}{\sqrt{\langle u^i | u_i \rangle}} \Leftrightarrow \hat{u}_i(x) = \frac{u_i}{\sqrt{\int_a^b d\xi u_i^*(\xi) w(\xi)u_i(\xi)}} . \quad (9.49)$$

De este modo, tendremos

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left(\int_a^b d\xi \hat{u}_i^*(\xi) w(\xi)f(\xi) \right) \hat{u}_i(x) = \int_a^b d\xi \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x) \right)}_{G(x,\xi)} w(\xi)f(\xi) . \quad (9.50)$$

Por lo tanto, la solución al problema de Sturm-Liouville se puede expresar en términos de la función de Green como

$$y(x) = \int_a^b d\xi G(\xi, x)w(\xi)f(\xi) , \quad \text{con: } G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x) . \quad (9.51)$$

Para ejemplificar esta técnica, consideremos la ecuación diferencial del oscilador armónico forzado

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \cos(\bar{\omega}t) , \quad \text{con: } x(0) = x(\pi) = 0 \quad \text{donde } \ddot{x} \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (9.52)$$

Resolvemos primero el problema de autovalores

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \lambda x(t) \Rightarrow x(t) = A \cos\left(t \sqrt{\omega^2 - \lambda}\right) + B \sin\left(t \sqrt{\omega^2 - \lambda}\right) \quad (9.53)$$

Las condiciones de frontera imponen

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad y \quad x(\pi) = 0 \Rightarrow \sin\left(\pi \sqrt{\omega^2 - \lambda}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 - \lambda} = n \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.54)$$

Las autofunciones tendrán la forma de $x_n(t) = A_n \sin(n t)$. Al normalizarlas tendremos $x_n(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(n t)$. De este modo la función de Green y la solución quedan como:

$$G(\tau, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n \tau) \sin(n t)}{\omega^2 - n^2} \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\tau \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n \tau) \sin(n t)}{\omega^2 - n^2} \right) \cos(\bar{\omega} \tau), \quad (9.55)$$

con lo cual

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n t)}{\omega^2 - n^2} \int_0^\pi d\tau \sin(n \tau) \cos(\bar{\omega} \tau) \Rightarrow x(t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\bar{\omega} (1 \pm \cos(\bar{\omega} \pi))}{\bar{\omega}^2 - \omega^2 + \lambda} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n t)}{\omega^2 - n^2}. \quad (9.56)$$

la cual constituye la solución más general para la ecuación del oscilador armónico forzado (9.52).

Inspirados en el nuestra motivación inicial, (9.43), podemos extenderla para considerar las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(\mathbb{L} + \lambda) |y\rangle = |f\rangle \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + (R(x) + \lambda w(x)) y(x) = f(x) \quad (9.57)$$

donde $y(x)$ estará sometida a algunas de las condiciones de frontera expresadas en 9.1.4. Una vez más resolvemos el problema de autovalores para encontrar las autofunciones en las cuales expandiremos todas las funciones involucradas en el problema. Esto es, en general y siguiendo el esquema presentado en (9.44)

$$\mathbb{L} |\hat{u}_i\rangle = -\lambda_i |\hat{u}_i\rangle \Rightarrow |f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} F^i |\hat{u}_i\rangle \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \langle \hat{u}^i |f\rangle |\hat{u}_i\rangle \quad (9.58)$$

donde hemos supuesto que las autofunciones fueron normalizadas, $\langle \hat{u}^j | \hat{u}_i \rangle = \delta_i^j$. Con lo cual

$$(\mathbb{L} + \lambda) |y\rangle = |f\rangle \Rightarrow (\mathbb{L} + \lambda) \left(\sum_{i=0}^{\infty} C^i |\hat{u}_i\rangle \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle \hat{u}^i |f\rangle |\hat{u}_i\rangle \Rightarrow C^i (\lambda_i + \lambda) - \langle \hat{u}^i |f\rangle = 0 \quad (9.59)$$

y se sigue que

$$C^i = \frac{\langle \hat{u}^i |f\rangle}{(\lambda_i + \lambda)} \Rightarrow |y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\langle \hat{u}^i |f\rangle}{(\lambda_i + \lambda)} \right) |\hat{u}_i\rangle \Leftrightarrow y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\int_a^b d\xi w(\xi) \hat{u}_i^*(\xi) f(\xi)}{\lambda_i + \lambda} \right) \hat{u}_i(x), \quad (9.60)$$

intercambiando sumatorias e integrales tendremos

$$y(x) = \int_a^b d\xi w(\xi) f(\xi) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x)}{\lambda_i + \lambda} \Rightarrow G(\xi, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{u}_i^*(\xi) \hat{u}_i(x)}{\lambda_i + \lambda}, \quad (9.61)$$

podemos identificar claramente la función de Green. Nótese que para el caso $\lambda_i + \lambda = 0$, es decir si λ en (9.57) coincide con alguno de los autovalores del operador \mathbb{L} , la función de Green se hace infinita y este esquema presenta dificultades para su aplicación.

Capítulo 10

Apéndice