Ecuaciones diferenciales
Ecuación Diferencial Lineal de Orden n

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

30 de mayo de 2025

Contenido

Definición de Ecuación Diferencial

Una **Ecuación Diferencial** es cualquier ecuación en la que:

- La incógnita es una función desconocida (**función incógnita**)
- Depende de una o más variables (**variables independientes**)
- Aparece derivada hasta un cierto orden (**orden de la ecuación**)

Tipos:

- **Ecuación diferencial ordinaria (EDO):** Función incógnita de **una variable**

$$2y'' - 3xy^3 = \cos(x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx} + 7y + x^3 = 0$$

- **Ecuación en derivadas parciales (EDP):** Función incógnita de **varias variables**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Nos centraremos en las **EDO's**.

Formas de Ecuación diferencial ordinarias (EDOs)

Para una EDO de orden n:

Forma general o implícita:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Forma explícita (cuando se puede despejar):

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$$

Solución Particular: Es cualquier función tal que al sustituirla por la función incógnita $y(x)$ (y sus derivadas por las derivadas de la función incógnita) hace que la ecuación se verifique para todos los valores de la variable independiente x.

Ejemplos:

- $f(x) = e^{-x}$ es solución de $y'' - y' - 2y = 0$
- Para $xy' + (y')^2 - y = 0$:
  - $f(x) = 2x + 4$ es solución
  - $f(x) = 3x + 9$ es solución
  - De hecho, cualquier funcion de la forma $f(x) = Cx + C^2$ con $C \in \mathbb{R}$ es una solución de dicha EDO

Solución General: Expresión que contiene **todas** las soluciones (depende de parametros o constantes arbitrarias).

EDOs de Primer Orden

Formas:

- Implícita: $F(x, y, y') = 0$
- Explícita: $y' = f(x, y)$

Caso más simple:

$$y' = f(x) \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow y(x) = \int f(x)dx$$

Ejemplos:

- $xy' = 0$
- $y' = x\ln(x)$

EDOs de Variables Separables

Pueden expresarse como:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = g(x)h(y) \Rightarrow g(x)dx = \frac{1}{h(y)}dy$$

Se resuelven integrando:

$$\int g(x)dx = \int \frac{1}{h(y)}dy$$

Ejemplos:

- $\frac{2}{y^3} + y' = 0$
- $1 + y^2 + xyy' = 0$
- $y' - 2y - \sin(x)y = 0$
- $xy' \ln(y) - 1 = x^2$

Ecuación lineal de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación que se puede escribir de la siguiente forma:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad \text{Ecuación completa}$$

donde $a_n(x), a_{n-1}, \ldots a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ son funciones que sólo dependen de la variable independiente x. Si en la ecuación anterior $g(x) = 0$:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad \text{Ecuación homogénea}$$

Ejemplo

- $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2 \Rightarrow y' + 3x^2y = x^2$ Ecuación lineal de primer orden
- $y' + 3x^2y = 0$ Ecuación homogénea asociada

Teorema: Solución general de la EDO lineal completa

- $y_P(x)$: solución particular de la completa.
- $y_H(x)$: solución general de la homogénea.

Entonces:

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) \quad \text{es la solición general de la completa}$$

EDO Lineal de Primer Orden

- $a(x)y' + b(x)y = g(x)$ Completa
- $a(x)y' + b(x)y = 0$ Homogénea

Entonces:

- $y_H(x)$ es solución general de la homogénea : La ecuación homogénea es de variables separables.
- $y_P(x)$ es la solición particular de la completa :

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) \quad \text{es la solición general de la completa}$$

Método de variación de la constante

1. Supongamos que conocemos $y_H(x)$.
2. Buscaremos $y_P(x) = y_H(x, c(x))$
3. Sustituimos y_P y su derivada en la ecuación completa para hallar $c'(x)$.
4. Integramos para obtener $c(x)$ y sustituimos en $y_P(x)$.

Ejemplos

- Resolver: $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2$

Solución:

La ecuación homegenea $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C \\
\ln y - \ln x &= \ln C \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln C \Rightarrow y = Cx
\end{aligned}$$

Consideremos a C como una funcion de x: $y(x) = C(x)x$ y sustituyendo en la ecuacion inicial, obtenemos

$$\frac{dC(x)}{dx} x + C(x)x - C(x)x\frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} x = x^2 \Rightarrow \int dC(x) = \int x\,dx \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

la solución general es por lo tanto

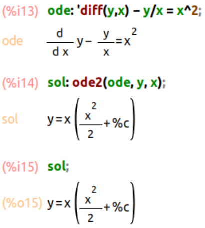
$$y = \left|\frac{1}{2}x^2 + C_1\right| x = \frac{1}{2}x^3 + C_1 x$$

wxMaxima

```
/* Definimos la ecuación diferencial */
ode: 'diff(y,x) - y/x = x^2;

/* Resolvemos la ecuación */
sol: ode2(ode, y, x);

/* Mostramos la solución */
sol;
```



Ejemplos

- Resolver: $\dfrac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\sin x$

  Solución:

  La ecuación homegenea $\dfrac{dy}{dx} - y\cot x = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - y\cot x &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cot x \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow \ln y = \ln\sin x + \ln C \\
\ln y - \ln\sin x &= \ln C \Rightarrow \ln\frac{y}{\sin x} = \ln C \Rightarrow y = C\sin x
\end{aligned}$$

  Consideremos a C como una funcion de x: $y(x) = C(x)\sin x$ y sustituyendo en la ecuacion inicial, obtenemos

$$\frac{dC(x)}{dx}\sin x + C(x)\cos x - C(x)\sin x\frac{\cos x}{\sin x} = 2x\sin x \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = 2x \Rightarrow \int dC(x) = \int 2x\,dx \Rightarrow C(x) = x^2 + C_1$$

  la solución general es por lo tanto

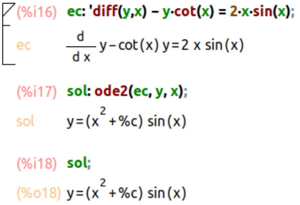
$$y = (x^2 + C_1)\sin x = x^2\sin x + C_1\sin x$$

wxMaxima

```
/* Definir la ecuación diferencial */
ec: 'diff(y,x) - y*cot(x) = 2*x*sin(x);

/* Resolver la ecuación */
sol: ode2(ec, y, x);

/* Mostrar la solución general */
sol;
```



Ejercicios

- Resolver: $\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x^2} = x\cos x$
- Hallar la solución particular de: $xy' + 2y = \sin x$, que pasa por $(\pi, 0)$
- Hallar la solución particular de: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} + 2 = 3x$, que pasa por $(1, 1)$

EDO Lineal de Segundo Orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \qquad \text{Completa}$$
$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad \text{Homogénea}$$

$$\text{Necesitamos: } \begin{cases} y_H(x) & \text{Solución general de la ecuación homogénea} \\ y_P(x) & \text{Solución particular de la ecuación completa} \end{cases}$$

ya que $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ es la solución general de la ecuación completa
Sistema Fundamental de Soluciones de una ecuación homegénea

- Un par de soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$ linealmente independientes (que no son múltiplos una de la otra).
- **Solución general:** $y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Teorema: Solución General de la EDO lineal homogénea de segundo orden $y_H(x)$.
Si $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuacion homegenea de segundo orden entonces la solucion general de dicha ecuacion es

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

para $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

LOS SISTEMAS FUNDAMENTALES NO SON FÁCILES DE OBTENER!

Ejemplo:

Las soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\} = \{e^x, x^2+2x+2\}$ forman un sistema fundamental de la ecuación diferencial $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ y' &= e^x \\ y'' &= e^x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= x^2+2x+2 \\ y' &= 2x+2 \\ y'' &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy'' - (x+2)y' + 2y &= 0 \\ x(e^x) - (x+2)(e^x) + 2(e^x) &= 0 \\ x(e^x) - xe^x - 2e^x + 2(e^x) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} xy'' - (x+2)y' + 2y &= 0 \\ x(2) - (x+2)(2x+2) + 2(x^2+2x+2) &= 0 \\ 2x - 2x^2 - 4x - 2x + 4 + 2x^2 + 4x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Solución general:

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

EDO Lineal de Segundo Orden Coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad \text{Completa}$$
$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{Homogénea}$$

$y_H(x)$ es la solución homegénea de la ecuación diferencial
Ecuación característica asociada a la ecuación homogénea

$$az^2 + bz + c = 0$$

Teorema: Solución General de la ED homogénea (coeficientes constantes).
Sea $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ las raices de la ecuacion diferencial.
Casos:

- **Raíces reales distintas,** $m_1 \neq m_2$**:** $y_H = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$
- **Raíces reales iguales,** $m_1 = m_2 = m$**:** $y_H = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$
- **Raíces complejas,** $m_1, m_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$**:** $y_H = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ donde

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

Coeficientes indeterminados (para la completa $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ **)** $y_P(x)$ es la solución particular de la ecuación diferencial

- Si $g(x) = P_n(x)$, entonces $y_P(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$, donde las constantes $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ son desconicidas
- Si $g(x) = e^{mx}$, entonces $y_P(x) = Ae^{mx}$, donde la constante A es desconicidas
- Si $g(x) = \sin(rx), \cos(rx)$, entonces $y_P(x) = A\cos(rx) + B\sin(rx)$, donde laz constantez A, B son desconicidas
- Si $g(x)$ es la suma de dos funciones de los tipos anteriores, buscaremos $y_P(x)$ como la suma de las correspondientes soluciones particulares.

Ejemplos

- Hallar la solución general de: $y'' - 2y' + y = 0$
  Solución: Sea la solcuion de la forma $y = x^{rx}$

$$y = x^{rx}, \quad y' = rx^{rx}, \quad y'' = r^2 x^{rx}$$

reeemplazando en la ecuacion diferencial, encontramos la ecuación característica:

$$r^2 x^{rx} - 2rx^{rx} + x^{rx} = (r^2 - 2r + 1)x^{rx} = 0 \Rightarrow x^{rx} \neq 0, \quad r^2 - 2r + 1 = 0$$

Esta ecuación es un trinomio cuadrado perfecto:

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

Solución general : Como hay una raíz doble real, la solución general es:

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x}$$

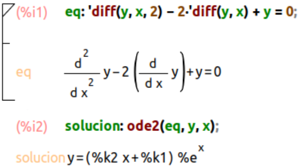
donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

wxMaxima

```
/* Definir la ecuación diferencial */
eq: 'diff(y, x, 2) - 2*'diff(y, x) + y = 0;

/* Resolver la ecuación */
sol: ode2(eq, y, x);

/* Mostrar la solución general */
sol;
```



Ejemplos

- Hallar la solución general de: $y'' + 4y' + 6y = 0$
  Solución: Sea la solución de la forma $y = x^{rx}$

$$y = x^{rx}, \quad y' = rx^{rx}, \quad y'' = r^2 x^{rx}$$

reeemplazando en la ecuacion diferencial, encontramos la ecuación característica:

$$r^2 x^{rx} + 4rx^{rx} + 6x^{rx} = (r^2 + 4r + 6)x^{rx} = 0 \Rightarrow x^{rx} \neq 0, \quad r^2 + 4r + 6 = 0$$

Esta ecuación es un trinomio cuadrado perfecto:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-4 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = -2 \pm i\sqrt{2}$$

Como las raíces son complejas conjugadas $r = -2 \pm i\sqrt{2}$, la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{(-2+i\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-2-i\sqrt{2})x} = e^{-2x}(C_1 e^{i\sqrt{2}x} + C_2 e^{-i\sqrt{2}x})$$

$$\boxed{y(x) = e^{-2x}\left(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x)\right)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

wxMaxima

```
/* Definir la ecuación diferencial */
ode: 'diff(y, x, 2) + 4*'diff(y, x) + 6*y = 0;

/* Resolver la ecuación diferencial */
sol: ode2(ode, y, x);

/* Mostrar la solución general */
sol;
```

(%i3) ode: 'diff(y, x, 2) + 4·'diff(y, x) + 6·y = 0;

ode $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y + 4\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 6\,y = 0$

(%i4) sol: ode2(ode, y, x);

sol $y = \%e^{-(2\,x)}\,(\%k1\,\sin(\sqrt{2}\,x) + \%k2\,\cos(\sqrt{2}\,x))$

(%i5) sol;

(%o5) $y = \%e^{-(2\,x)}\,(\%k1\,\sin(\sqrt{2}\,x) + \%k2\,\cos(\sqrt{2}\,x))$

Ejemplos

- Hallar la solución particular de: $y'' + y = 2x^2 + 1$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
  Solución:
  Solución homogénea:

$$y'' + y = 0$$

Sea la solución de la forma $y = x^{rx} \Rightarrow y' = rx^{rx}$, $y'' = r^2 x^{rx}$

$$y'' + y = r^2 x^{rx} + x^{rx} = (r^2 + 1)x^{rx} = 0 \Rightarrow x^{rx} \neq 0, \quad r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$\boxed{y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$$

Solución particular:

$$y'' + y = 2x^2 + 1$$

Dado que $g(x) = 2x^2 + 1$ proponemos:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y_p''(x) = 2A$$

Sustituimos en la ecuación:

$$y_p'' + y_p = 2A + (Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 1 \Rightarrow Ax^2 + Bx + (2A + C) = 2x^2 + 1$$

Igualamos coeficientes:

$$A = 2, \quad B = 0, \quad 2A + C = 1 \Rightarrow 2(2) + C = 1 \Rightarrow C = -3$$

Entonces:

$$\boxed{y_p(x) = 2x^2 - 3}$$

Solución general:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^2 - 3}$$

Ejemplos

Condiciones iniciales:

- $y(0) = 0$

$$y(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) + 2(0)^2 - 3 = C_1 - 3 = 0 \Rightarrow C_1 = 3$$

- $y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 4x$

$$y'(0) = -3 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = C_2 = 1$$

Solución final:

$$\boxed{y(x) = 3\cos x + \sin x + 2x^2 - 3}$$

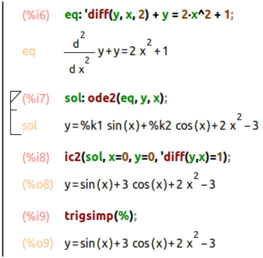
wxMaxima

```
/* Definir la ecuación diferencial */
eq: 'diff(y, x, 2) + y = 2*x^2 + 1;

/* Resolver la ecuación */
sol: ode2(eq, y, x);

/* Aplicar condiciones iniciales */
ic2(sol, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1);

/* Simplificar la solución */
trigsimp(%);
```



Ejercicios:

- Resolver con condiciones iniciales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,$y'' - 4y = e^{2x}$
- Hallar la solución general de:$y'' - y = \cos(x)$

Gracias por su atención

¿Preguntas?