Ecuaciones diferenciales Parciales
Funciones Ortogonales y Series de Fourier

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

7 de julio de 2025

Contenido

Producto Escalar o Producto interno de funciones:

El producto escalar de dos funciones f_1 y f_2 definidas en un intervalo $[a, b]$ es el número

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$$

Entonces la norma que induce este producto escalar de una función f definida en el intervalo $[a, b]$ es el número

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Funciones ortogonales:

Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en el intervalo $[a, b]$si

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$$

Ejemplo: Las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ puesto que

$$\langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \int_{-1}^1 x^2\, x^3 dx = \int_{-1}^1 x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^1 = 0$$

Conjunto de funciones ortogonales:

Se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonales en el intervalo $[a,b]$ si

$$\langle \phi_m(x), \phi_n(x) \rangle = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \quad m \neq n$$

Si $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[[a,b]$ con la propiedad de que $\|\phi_n\| = 1$ para cualquier n, entonces se dice que $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es un conjunto ortonormal en el intervalo $[a,b]$.

Ejemplo: Demuestre que el conjunto $\{\phi_n(x) = \cos(nx)\}_0^{\infty}$ es ortogonal en el intervalo $[\pi, \pi]$.

$$\{\phi_n(x) = \cos(nx)\}_0^{\infty} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

Solution: Si hacemos las identificaciones $\phi(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, entonces debemos demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0 \cdot \phi_n dx = 0 \quad n \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m \cdot \phi_n dx = 0, \quad m \neq n$$

- En el primer caso $n \neq 0$, tenemos el conjunto $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$\langle \phi_0, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)dx = \left. \frac{\sin(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq 0$$

- Si m y n son ambos distintos de 0,

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m+n)x)}{(m+n)} + \frac{\sin((m-n)x)}{(m-n)} \right]_{\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n$$

Calcular las normas: En este ejemplo, determine las normas de cada función en el conjunto ortogonal.
Solution: De acuerdo con la ecuación

$$\|\phi_n\| = \left(\int_a^b \phi_n^2(x) dx \right)^{1/2}$$

calculamos las normas de cada función

- Para $\phi_0(x) = 1$,

$$\|\phi_0\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} dx \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}$$

  de modo que $\|\phi_0\| = \sqrt{2\pi}$.
- Para $\phi_n(x) = \cos(nx), \quad n > 0$, se debe cumplir

$$\|\phi_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos(2nx)] dx \right)^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

De esta forma el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \right\}$$

es ortonormal en $[-\pi, \pi]$.
Nota.: De manera análoga puede probarse que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

es ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

Es conocido que, dada una base ortogonal en un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier elemento de dicho espacio vectorial puede representarse como combinación lineal de los elementos de esa base. Nuestro objetivo es extender esta propiedad a un espacio de dimensión infinita.
Sea $\{\phi_n(x) = \cos(nx)\}_0^\infty$ un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ y sea f una función definida en ese intervalo. Los coeficientes $c_m, m = 0, 1, 2, \ldots$, para los que

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) + \ldots$$

se calculan multiplicando esta expresión por $\phi_m(x)$ e integrando en el intervalo $[a, b]$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = c_0\int_a^b f(x)\phi_0(x)\phi_m(x)dx + c_1\int_a^b f(x)\phi_1(x)\phi_m(x)dx + \ldots \\ + c_n\int_a^b f(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx + \ldots\end{aligned}$$

Por ortogonalidad, cada término del lado derecho de la última ecuación es cero, excepto cuando $n = m$. En este caso, se tiene

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = c_n\int_a^b f(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = c_n\int_a^b f(x)\phi_n^2(x)dx$$

Por tanto,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

donde los coeficientes cn vienen dados por

$$c_n = \frac{\int_a^b f(s)\phi_n^2(s)ds}{\int_a^b \phi_n^2(s)ds} = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2}$$

esto es,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^2} \phi_n$$

Este desarrollo se llama desarrollo en serie ortogonal de f (o también, serie de Fourier generalizada).
Nota.: El procedimiento anterior es formal, es decir, no se ha analizado si el desarrollo en serie anterior es convergente.

De esta forma el conjunto

$$\left\{1, \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \ldots, \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \ldots, \right\}$$

es ortogonal en $[-p, p]$. Sea f una función que admite un desarrollo en serie del conjunto anterior, es decir:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ se determinan del modo que se comentó anteriormente, excepto en el caso de a_0 en el que, por conveniencia en la notación, se escribe. Entonces

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(s)ds \tag{2}$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(s) \cos\left(\frac{n\pi s}{p}\right) ds \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(s) \sin\left(\frac{n\pi s}{p}\right) ds \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

La serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi s}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi s}{p}\right)\right] \tag{5}$$

se llama serie de Fourier de f, y los números reales a_n y b_n, coeficientes de Fourier.

Ejemplo 1:

Nota: Esta serie no converge para cualquier f. Habrá que imponer condiciones que garanticen la convergencia de la serie de Fourier de una función dada.
Ejemplo: En este ejemplo se calcula la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Solution:
De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} ds = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos(ns) ds = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, & \text{si n es impar} \\ 0, & \text{si n es par} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin(ns) ds = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & \text{si n es impar} \\ \frac{1}{n\pi}(-1 + (-1)^{\frac{n}{2}}), & \text{si n es par} \end{cases}$$

Por tanto la serie de Fourier es

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\cos(x) + \sin(x) - \sin(2x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \dots \right)$$

Ejemplo 2: $f(x) = x^2$ en $(-2, 2)$

La función $f(x) = x^2$ es par en el intervalo $(-2, 2)$ y por tanto su desarrollo de Fourier será en serie de cosenos. De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier.

Solution:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 s^2 ds = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_{-p}^{p} s^2 \cos\left(\frac{n\pi s}{p}\right) ds = \frac{16(-1)^n}{n^2\pi^2} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Entonces la serie de Fourier es

$$\frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right)$$

De manera similar, cuando f es impar en el intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

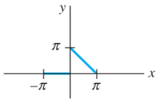
$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{p} s\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

y la serie de Fourier es

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p} x\right)$$

Ejemplo 3:

Ejemplo: Desarrollo en serie de Fourierla de la función



$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Solution:

En la figura vemos la gráfica de f: Con $p = \pi$ tenemos, según las ecuaciones,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right] = \frac{\overbrace{-\cos n\pi}^{(-1)^n} + 1}{n^2\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}$$

En forma semejante vemos que,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}$$

La serie

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)\right]$$

Observe que a_n, definida por la ecuación (4) se reduce a a_0 por la ecuación (3), cuando se hace $n = 0$. Pero como muestra el ejemplo, esto quizá no sea el caso después de evaluar la

Ejemplo 4:

Obtener la serie de Fourier trigonométrica de la función periódica de período 2π dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \cos(5x) & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Solution:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(5x)dx = \left.\frac{\sin(5x)}{5x}\right|_0^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(5x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 1 \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-5)x)}{n-5} + \frac{\sin((n+5)x)}{n+5}\right]_0^{\pi} = 0, \quad n \neq 5 \\ a_5 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(5x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(10x)}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\sin(10x)}{10}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(5x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos((n-5)x)}{n-5} + \frac{\cos((n+5)x)}{n+5}\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\overbrace{\cos((n-5)\pi) - \cos 0)}^{-(-1)^n - 1}}{n-5} + \frac{\overbrace{\cos((n+5)\pi) - \cos 0)}^{-(-1)^n - 1}}{n+5}\right]_0^{\pi}, \quad n \neq 5$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[(-1)^n + 1\right]\frac{n+5+n-5}{n^2-25} = \frac{1}{\pi}\frac{2n}{n^2-25}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si n es impar} \quad n \neq 5 \\ \frac{1}{\pi}\frac{2n}{n^2-25} = \frac{4k}{\pi(4k^2-25)} & \text{si n es par} \quad n \neq 2k \end{cases}$$

$$b_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(5x)\sin(nx)dx = \frac{1}{10\pi}\sin(5x)\Big|_0^{\pi}$$

Las primitivas tienen fórmulas distintas para $n = 5$ y para $n \neq 5$

$$a_n = 0 \quad \forall n \neq 5, \quad a_5 = \frac{1}{2}$$

$$b_5 = 0, \quad b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2-25)}, \quad b_n = 0, \quad \forall n \text{ impar}$$

La serie

$$f(x) = \frac{\cos(5x)}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-25}\sin(2kx)$$

Conclusiones

- Las series de Fourier representan funciones en términos de bases ortogonales.
- Las funciones ortogonales simplifican la resolución de PDEs en condiciones de frontera.
- El cálculo de coeficientes mediante integrales permite aproximar soluciones numéricas.

¿Preguntas?