Ecuaciones diferenciales
Ecuación Cauchy-Euler

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

31 de mayo de 2025

Contenido

Ecuación de Cauchy-Euler

Se trata de una ecuación con coeficientes variables cuya solución general siempre se puede expresar en términos de potencias, senos, cosenos, funciones logarítmicas y exponenciales. Este método de solución es bastante similar al de las ecuaciones con coeficientes constantes porque se debe resolver la homogénea asociada.

Definición

La ecuación de Cauchy-Euler (o ecuación equidimensional) tiene la forma:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes reales.

- Característica: el grado de x^k coincide con el orden k de la diferenciación
- **Ejemplos:**
  - $x^3 y''' + 2x^2 y'' - 4y = 0$
  - $x^4 y^{(4)} + x^3 y''' - 4x^2 y'' + 6xy' + 8y = 0$

Método de solución

Para la solución de la ecuación diferencial de Cauchy, se supone una solución de la forma:

$$y = x^m$$

donde m es una constante por determinar.

Pasos:

1. Calcular las derivadas necesarias de $y = x^m$
2. Sustituir en la ecuación diferencial
3. Simplificar y obtener ecuación polinómica en m
4. Resolver para m y construir la solución general

Nota: Un método alternativo consiste en suponer que la solución tiene la forma

$$y = e^{mx}$$

donde m es una constante a determinar. Esta suposición permite transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica para m.

Ejemplo: Ecuación de tercer orden

Consideremos:

$$a_3x^3y''' + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$

Suponemos $y = x^m$, entonces:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

Sustituyendo:

$$a_3x^3[m(m-1)(m-2)x^{m-3}] + a_2x^2[m(m-1)x^{m-2}] + a_1x[mx^{m-1}] + a_0x^m = 0$$

Simplificando:

$$[a_3m(m-1)(m-2) + a_2m(m-1) + a_1m + a_0]x^m = 0$$

Como, $x^m \neq 0$ se tiene que la ecuación característica:

$$a_3m^3 + (a_2 - 3a_3)m^2 + (2a_3 - a_2 + a_1)m + a_0 = 0$$

Ejemplo: Ecuación de segundo orden

Consideremos:

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$$

Suponemos $y = x^m$, entonces:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo:

$$a_2x^2[m(m-1)x^{m-2}] + a_1x[mx^{m-1}] + a_0x^m = 0$$

Simplificando:

$$[a_2m(m-1) + a_1m + a_0]x^m = 0$$

Como, $x^m \neq 0$ se tiene que la ecuación característica:

$$a_2m^2 + (a_1 - a_2)m + a_0 = 0 \tag{1}$$

Caso 1: Raíces reales distintas

Si $m_1 \neq m_2$ son raíces reales, la solución general es:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

Ejemplo

Resolver:

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

Solución

Suponemos $y = x^m$, entonces:

$$y' = m x^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo:

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] + 2x[mx^{m-1}] + 2x^m = 0$$

Simplificando:

$$[m(m-1) + 2m + 2]x^m = 0$$

Como, $x^m \neq 0$ se tiene que la ecuación característica:

$$m^2 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 1, -2$$

Solución:

$$y = c_1 x + c_2 x^{-2}$$

Caso 1 - Wronskiano

Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1) , tales que $(m_1 \neq m_2)$. Entonces

$$y_1 = x^{m_1} \quad \text{y} \quad y_2 = x^{m_2}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones. El **Wronskiano** esta dado como

$$W(x^{m_1}, x^{m_2}) = \begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix} = m_2 x^{m_1+m_2-1} - m_1 x^{m_1+m_2-1}$$

Como

$$W(x^{m_1}, x^{m_2}) = (m_2 - m_1) x^{m_1+m_2-1} \neq 0$$

$\forall x \in \delta$, entonces la solución general de la ecuación de Cauchy - Euler para $x > 0$,, en el caso en el que las raíces son reales y distintas, es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

Ejemplo: Ecuación de tercer orden

Resolver:

$$x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$$

Solución

Suponemos $y = x^m$, entonces:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

Sustituyendo:

$$x^3[m(m-1)(m-2)x^{m-3}] + 5x^2[m(m-1)x^{m-2}] + 2x[mx^{m-1}] - 2x^m = 0$$

Simplificando:

$$[m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 2m - 2]x^m = 0$$

Como, $x^m \neq 0$ se tiene que la ecuación característica:

$$m^3 + 2m^2 + 2m - 2 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+1)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 1, m = -1, m = -2$$

Solución:

$$y = c_1x^1 + c_2x^{-1} + c_3x^{-2}$$

Caso 2: Raíces reales repetidas

Si $m_1 = m_2$ (raíz doble), la solución general es:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$$

Ejemplo

Resolver:

$$x^2 y'' - xy' + y = 0$$

Solución

Suponemos $y = x^m$, entonces:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

Sustituyendo:

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] - x[mx^{m-1}] + x^m = 0$$

Simplificando:

$$[m(m-1) - m + 1]x^m = 0$$

Como, $x^m \neq 0$ se tiene que la ecuación característica:

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1, (\text{raiz doble})$$

Solución con $m = 1$ (doble):

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

Caso 2 - Wronskiano

Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1) , tales que $(m_1 \neq m_2)$. Entonces

$$y_1 = x^{m_1} \quad \text{y} \quad y_2 = x^{m_1} \ln x$$

forman un conjunto fundamental de soluciones. El **Wronskiano** esta dado como

$$\begin{aligned} W(x^{m_1}, x^{m_1} \ln x) &= \begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_1} \ln x \\ m_1 x^{m_1 - 1} & m_1 x^{m_1 - 1} \ln x + x^{m_1 - 1} \end{vmatrix} \\ &= m_x^{2m_1 - 1} \ln x + x^{2m_1 - 1} - m_1 x^{2m_1 - 1} \ln x = x^{2m_1 - 1} \end{aligned}$$

Como

$$W(x^{m_1}, x^{m_1} \ln x) = x^{2m_1 - 1} \neq 0$$

$\forall x \in \delta$, entonces la solución general de la ecuación de Cauchy - Euler para $x > 0$, en el caso en el que las raíces son reales y distintas, es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x$$

Para ecuaciones de orden superior, si es una raíz de multiplicidad m_1, entonces se puede demostrar que

$$x^{m_1}, x^{m_1} \ln x, x^{m_1} (\ln x)^2, \ldots, x^{m_1} (\ln x)^{m_1 - 1}$$

son m_1 soluciones linealmente independientes. En correspondencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de estas soluciones.

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Si $m = \alpha \pm i\beta$, la solución general es:

$$y = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

Ejemplo

Resolver:

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0$$

Solución

Suponemos $y = x^m$, entonces:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

Sustituyendo:

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] + x[mx^{m-1}] + 4x^m = 0$$

Simplificando:

$$[m(m-1) + m + 4]x^m = 0$$

Como, $x^m \neq 0$ se tiene que la ecuación característica:

$$m^2 - m + m + 4 = 0 \Rightarrow m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i$$

Solución con $m = \pm 2i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$):

$$y = x^0[c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)]$$

$$y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x)$$

Caso 3 - Wronskiano

Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1) , tales que $(m_1 \neq m_2)$. Entonces

$$y_1 = x^{\alpha}(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}(x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

ó

$$y_1 = 2x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = 2ix^{\alpha}\sin(\beta \ln x))$$

forman un conjunto fundamental de soluciones. El **Wronskiano** esta dado como

$$W(2x^{\alpha}\cos(\beta \ln x), 2ix^{\alpha}\sin(\beta \ln x)) \quad = \quad \beta x^{2\alpha - 1} \neq 0$$

Con esto se concluye que

$$y_1 = 2x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = 2ix^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$$

constituyen un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial. Así, la solución general de la ecuación de Cauchy - Euler para $x > 0$, en el caso en el que las raíces son complejas conjugadas, es

$$y = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)\right]$$

Cambio de variable

Existen ciertas ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables que pueden convertirse en ecuaciones con coeficientes constantes mediante un cambio adecuado de variables. Este tipo de transformación es especialmente útil para simplificar el proceso de resolución.
Un ejemplo importante de este tipo es la ecuación diferencial de Cauchy–Euler , en su caso homogéneo y de segundo orden, que tiene la forma general:

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \tag{2}$$

Haciendo $x = e^t$ $(t = \ln x)$, se transforma en:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - a_0) \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes reales y $a_0 \neq 0$.

Ventaja

Mediante el cambio de variable $x = e^t$ (o equivalentemente $t = lnx$), esta ecuación puede transformarse en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes , facilitando así su solución analítica.

Aplicamos el cambio de variable:

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituyendo en la ecuación original (2), se obtiene una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes en la variable t:

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.
Finalmente, resuelta esta ecuación (15), se deshace el cambio y por sustitución se obtiene la solución del problema dado.
Conclusión La ecuación de Cauchy–Euler se transforma, con el cambio $x = e^t$, en una ecuación con coeficientes constantes, que se puede resolver aplicando los métodos habituales: ecuación característica y combinación lineal de soluciones.

Ejemplos

Resolver:

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$$

Solución
Suponemos $y = x^m$ Derivadas:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustitución:

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] + 5x[mx^{m-1}] + 3x^m = 0$$

Simplificación:

$$m(m-1) + 5m + 3 = 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 3 = 0$$

Raíces: $m = -1$, $m = -3$ Solución general:

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^3}$$

Ejemplos

Ejemplo

Resolver $x^2y'' - 2xy' - 2y = x4e^x$

Solución
Es una ecuación de Cauchy-Euler no homogénea. Resolveremos en dos partes:

1. La ecuación homogénea asociada:
$$x^2y'' - 2xy' - 2y = 0$$
2. Una solución particular de la completa.

Ecuación homogénea : Usamos la sustitución estándar: $y = x^r$. Entonces:

$$y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación homogénea:

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} - 2x \cdot rx^{r-1} - 2x^r = 0 \Rightarrow r(r-1)x^r - 2rx^r - 2x^r = 0$$

$$x^r\left[r(r-1) - 2r - 2\right] = 0 \Rightarrow x^r\left[r^2 - r - 2r - 2\right] = 0 \Rightarrow x^r(r^2 - 3r - 2) = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$r^2 - 3r - 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Entonces la solución general de la homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} + C_2 x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}$$

Solución particular: La forma del término no homogéneo es: $x^4 e^x$
Proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = x^k P(x) e^x$$

Dado que e^x no aparece en la homogénea, proponemos:

$$y_p(x) = x^4(Ax + B)e^x = (Ax^5 + Bx^4)e^x$$

Calculamos derivadas:

$$y_p = (Ax^5 + Bx^4)e^x$$

$$y_p' = [5Ax^4 + 4Bx^3]e^x + (Ax^5 + Bx^4)e^x = [5Ax^4 + 4Bx^3 + Ax^5 + Bx^4]e^x$$

$$y_p'' = [20Ax^3 + 12Bx^2 + 5Ax^4 + 4Bx^3 + 5Ax^4 + 4Bx^3 + Ax^5 + Bx^4]e^x$$

(Simplificamos derivadas usando software o calculadora si deseas. El objetivo es sustituir y_p, y_p', y_p'' en la ecuación original y resolver para A y B).
Solución general

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} + C_2 x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}} + y_p(x)}$$

donde $y_p(x)$ es una función de la forma $(Ax^5 + Bx^4)e^x$, y los coeficientes A y B se determinan por sustitución.

Ejemplos

Ejemplo

Resolver $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$

Solución Usando el cambio de variable $x = e^t$, es decir, $t = \ln x$
Cambio de variable Sea $y(x) = u(t)$, con $t = \ln x \Rightarrow x = e^t$. Entonces:

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}u'$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}u'\right) = -\dfrac{1}{x^2}u' + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{d}{dx}(u')$

  Pero $u' = \dfrac{du}{dt}$, y $\dfrac{d}{dx}u' = \dfrac{du'}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}u''$
- Por lo tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}u' + \frac{1}{x^2}u'' = \frac{1}{x^2}(u'' - u')$$

Sustitución en la ecuación Sustituimos en la ecuación original

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}(u'' - u')\right) + 10x \cdot \frac{1}{x}u' + 8u = x^2$$

$$\Rightarrow u'' - u' + 10u' + 8u = x^2 = e^{2t}$$

$$\Rightarrow u'' + 9u' + 8u = e^{2t}$$

Resolver la EDO con coeficientes constantes

- **Homogénea:**

$$u'' + 9u' + 8u = 0$$

  Ecuación característica:

$$r^2 + 9r + 8 = 0 \Rightarrow r = -1, \; -8$$

  Solución general de la homogénea:

$$u_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-8t}$$

- **Particular:** Probaremos con $u_p(t) = Ae^{2t}$
  Sustituimos:

$$u_p' = 2Ae^{2t}, \quad u_p'' = 4Ae^{2t}$$

$$u_p'' + 9u_p' + 8u_p = (4A + 18A + 8A)e^{2t} = 30Ae^{2t} \Rightarrow 30A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{30}$$

  Entonces:

$$u_p(t) = \frac{1}{30}e^{2t}$$

- **Solución general en t**

$$u(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-8t} + \frac{1}{30}e^{2t}$$

Volver a variable x
Recordamos que $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$, así que:

$$y(x) = u(\ln x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-8} + \frac{1}{30}x^2$$

Respuesta final

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-8} + \frac{1}{30}x^2}$$

Ejemplo

Ejemplo

Resolver $x^2y'' - xy' - 3y = 2x^2$

Solución
Ecuación homogénea asociada

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0$$

Proponemos una solución de la forma $y = x^m$. Entonces:

$$y = x^m, \quad y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituimos en la ecuación:

$$x^2[m(m-1)x^{m-2}] - x[mx^{m-1}] - 3x^m = 0$$

$$m(m-1)x^m - mx^m - 3x^m = 0 \Rightarrow [m(m-1) - m - 3]x^m = 0$$

$$[m^2 - m - m - 3]x^m = (m^2 - 2m - 3)x^m = 0$$

Ecuación característica:

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 3, \; m = -1$$

Entonces la solución general de la homogénea es:

$$y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^{-1}$$

Solución particular
Proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = Ax^2$$

Entonces:

$$y_p' = 2Ax, \quad y_p'' = 2A$$

Sustituimos en la ecuación original:

$$x^2(2A) - x(2Ax) - 3(Ax^2) = 2x^2 \Rightarrow 2Ax^2 - 2Ax^2 - 3Ax^2 = 2x^2 \Rightarrow (-3A)x^2 = 2x^2$$

$$-3A = 2 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

Entonces:

$$y_p(x) = -\frac{2}{3}x^2$$

Solución general de la ecuación completa

$$\boxed{y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-1} - \frac{2}{3}x^2}$$

Solución homogénea:

$$y_h(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^3$$

Solución particular (adivinando $y_p = Ax^2$):

$$y_p(x) = -\frac{2}{3}x^2$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^3 - \frac{2}{3}x^2$$

Ejemplo

Ejemplo

Resolver $x^2y'' - xy' - 3y = 2x^3$

Solución

Solución homogénea

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0$$

Proponemos una solución de la forma $y = x^m$. Entonces:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

Sustituyendo:

$$x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} - x \cdot mx^{m-1} - 3x^m = 0 \Rightarrow m(m-1)x^m - mx^m - 3x^m = 0$$

$$x^m[m(m-1) - m - 3] = 0 \Rightarrow x^m[m^2 - m - m - 3] = x^m[m^2 - 2m - 3] = 0$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3,\ m = -1$$

Entonces, la solución general de la homogénea es:

$$y_h(x) = C_1x^3 + C_2x^{-1}$$

Solución particular

Usamos el método de coeficientes indeterminados. La no homogénea es:

$$x^2y'' - xy' - 3y = 2x^3$$

Proponemos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = Ax^3$$

Calculamos:

$$y_p' = 3Ax^2, \quad y_p'' = 6Ax$$

Sustituimos en la ecuación:

$$x^2(6Ax) - x(3Ax^2) - 3Ax^3 = 6Ax^3 - 3Ax^3 - 3Ax^3 = 0$$

¡Da cero! Esto significa que x^3 ya es solución de la homogénea, por lo tanto debemos multiplicar por x **(método del anulamiento):**

$$y_p(x) = Ax^4 \Rightarrow y_p' = 4Ax^3, \quad y_p'' = 12Ax^2$$

Sustituimos:

$$x^2(12Ax^2) - x(4Ax^3) - 3Ax^4 = 12Ax^4 - 4Ax^4 - 3Ax^4 = 5Ax^4$$

Queremos que sea igual a $2x^3 \Rightarrow 5Ax^4 = 2x^3 \Rightarrow A = \dfrac{2}{5x}$

Pero esto no tiene sentido (A constante). Entonces intentamos:

$$y_p = Ax^4 \Rightarrow \text{obtenemos: } 5Ax^4 = 2x^3 \Rightarrow A = \frac{2}{5x} \Rightarrow \text{contradicción}$$

$\Rightarrow$ En lugar de x^4, probamos una forma más general:

$$y_p(x) = Ax^3 \ln x$$

Entonces:

$$y_p' = A(3x^2 \ln x + x^2), \quad y_p'' = A(6x \ln x + 5x)$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^2[A(6x \ln x + 5x)] - x[A(3x^2 \ln x + x^2)] - 3Ax^3 \ln x$$

$$= Ax^3(6 \ln x + 5) - Ax^3(3 \ln x + 1) - 3Ax^3 \ln x$$

$$= Ax^3[(6 \ln x + 5) - (3 \ln x + 1) - 3 \ln x] = Ax^3(6 \ln x + 5 - 3 \ln x - 1 - 3 \ln x) = Ax^3(1) \Rightarrow Ax^3 = 2x^3 \Rightarrow A = 2$$

Entonces:

$$y_p(x) = 2x^3 \ln x$$

Solución general

$$\boxed{y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-1} + 2x^3 \ln x}$$

Ejemplo

Ejemplo

Usar el cambio de variable $x = e^t$ para convertir la ecuación de Cauchy - Euler

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 13y = 4 + 3x$$

en una ecuación de coeficiente constantes y obtener la solución general.

Solución Consideremos el cambio de variable$x = e^t$, usando,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

la ecuación de Cauchy - Euler queda como sigue

$$x^2\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] - 3x\left[\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\right] + 13y = 4 + 3x$$

esto es,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 4 + 3e^t$$

ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0$$

$$k^2 - 4k + 13 = 0 \Rightarrow k_1 = 2 + 3i, \quad k_2 = 2 - 3i$$

Identificamos que $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, entonces la solución complementaria, en la variable t, es

$$y_H = C_1 e^{2t}\cos(3t) + C_2 e^{2t}\sin(3t)$$

Las funciones correspondientes al conjunto fundamental de soluciones son

$$y_1(x) = e^{2t}\cos(3t) \text{ y } y_2(x) = e^{2t}\sin(3t)$$

Las derivadas correspondientes son

$$\frac{dy_1}{dx} = 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t) \text{ y } \frac{dy_2}{dx} = e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t)$$

El **Wronskiano** esta dado como

$$W = \begin{vmatrix} e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 2e^{2t}\cos(3t) - 3e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\sin(3t) + 3e^{2t}\cos(3t) \end{vmatrix} = 3e^{4t}$$

La ecuación diferencial ya se encuentra en su forma estándar, así que la función g es

$$g(t) = 4 + 3e^{t}$$

Ahora podemos sustituir las funciones correspondientes en la solución particular para la variable t

$$y_P(x) = y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

$$y_P(x) = -2e^{2t}\cos(3t)\int \frac{(e^{2t}\sin(3t))(4+3e^{t})}{3e^{4t}}dt + e^{2t}\sin(3t)\int \frac{(e^{2t}\cos(3t))(4+3e^{t})}{3e^{4t}}dt$$

$$y_P(x) = -2e^{2t}\cos(3t)\left[\frac{4}{3}\int \frac{\sin(3t)}{e^{2t}}dt + \int \frac{\sin(3t)}{e^{t}}dt\right] + 2e^{2t}\sin(3t)\left[\frac{4}{3}\int \frac{\cos(3t)}{e^{2t}}dt + \int \frac{\cos(3t)}{e^{t}}dt\right]$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin(3t)}{e^{2t}}\,dt &= -\frac{2}{13}e^{-2t}\sin(3t) - \frac{3}{13}e^{-2t}\cos(3t) \\
\int \frac{\sin(3t)}{e^{t}}\,dt &= -\frac{3}{10}e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{10}e^{-t}\sin(3t) \\
\int \frac{\cos(3t)}{e^{2t}}\,dt &= -\frac{2}{13}e^{-2t}\cos(3t) + \frac{3}{13}e^{-2t}\sin(3t) \\
\int \frac{\cos(3t)}{e^{t}}\,dt &= -\frac{3}{10}e^{-t}\sin(3t) - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(3t)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estos resultados en $y_P(t)$ reduciendo la expresión obtendremos la solución particular

$$y_P(x) = \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^{t}$$

Por tanto, la solución general en términos de la variable t es

$$y(x) = y_H + y_P = C_1 e^{2t}\cos(3t) + C_2 e^{2t}\sin(3t) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^{t}$$

Ejercicios propuestos

1. $x^2y'' + xy' + 9y = 0$
2. $x^2y'' - xy' + y = 0$
3. $x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$
4. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
5. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
6. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$
7. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$
8. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
9. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$
10. $x^2y'' - 2xy' + 1{,}25y = 0$
11. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
12. $x^3y''' + 2x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
13. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ con $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$
14. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ con $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$
15. $x^2y'' + 4xy' + 4y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
16. $x^2y'' + 2xy' + 5y = 0$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
17. $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$ con $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

Gracias por su atención

¿Preguntas?