UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE INGENIERÍA MECÁNICA

MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA

ESPACIOS VECTORIALES

RESOLUCIÓN N° 053-2016-D-FIME

ANDRES COLLANTE HUANTO

SEMESTRE 2016-B

CALLAO-PERU

INDICE

ESPACIOS VECTORIALES

La definición de un espacio vectorial envuelve un campo $\mathbb{K}$ arbitrario cuyos elementos se llaman escalares.

1 Definición

Se llama espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$[1], a un conjunto $V \neq \emptyset$, que tiene dos operaciones que son: la suma y el producto por un escalar

- La suma

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longrightarrow u + v \end{aligned}$$

- El producto por un escalar

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, \mu) &\longrightarrow \lambda\mu \end{aligned}$$

y satisface los siguientes axiomas, $\forall u, v, w \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$[S_1]$: $u + v = v + u$

$[S_2]$: $(u + v) + w = u + (v + w)$

$[S_3]$: $\exists$ un elementos $0 \in V$, llamado cero $/u + 0 = u\ \forall u \in V$

$[S_4]$: $\forall u \in V\ \exists$ un elemento $u' \in V/u + u' = 0$. El elemento u' se llama el opuesto de u y se denota por $u' = -u$

$[P_1]$: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$[P_2]$: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$[P_3]$: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

[1]En adelante consideraremos a $\mathbb{K}$ como el conjunto de los numeros reales

$[P_4]: \ 1 \cdot u = u$

NOTA

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$

1. Los elementos de V se llaman vectores
2. Los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman escalares
3. Se dice que V es un espacio vectorial racional si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$
4. Se dice que V es un espacio vectorial real si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
5. Se dice que V es un espacio vectorial complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1.1 Ejemplos

Ejemplos de espacio vectorial

1. $V = \mathbb{K}^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$ donde $\mathbb{K}$ es un campo arbitrario. Sean

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

elementos de V y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se definen las siguientes operaciones

$$u + v = (u_1 + v_1, , u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n), \ \alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$$

$V = \mathbb{K}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

2. En $V = \mathbb{R}^n, \ n = 2, 3, 4, \ldots$ toda recta o plano que pasa por el origen de coordenadas con las operaciones definidas en ejemplo 1, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Por ejemplo

$$\mathscr{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 5x + 4y = 0\}$$

y

$$\mathscr{P} = \{(x, y, z) = t(1, 2, 3) + r(0, 0, 1) / t, r \in \mathbb{R}\}$$

son espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

3. Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto arbitrario

$$\mathbb{K}^U = \{f : U \to \mathbb{K} / f \text{ es una función}\}$$

con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

para $x \in U,\ f, g \in \mathbb{K}^U,\ \alpha \in \mathbb{K},\ \mathbb{K}^U$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

4. Sea $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$, con las operaciones suma de polinomios y el producto de un escalar por un polinomio, $\mathbb{K}[x]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

5. Sea $I = [a, b]$, con $a < b$

$$C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$$

con las operaciones del ejemplo 3, $C(I)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

6. El conjunto

$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{ es diferenciable en } x = 2\}$$

con las operaciones del ejemplo 3, E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

7. Sea

$$D = \{f : [-2, 2] \to \mathbb{R} / f \text{ es integrable}\}$$

con las operaciones del ejemplo 3, D es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

8. Sea P_n el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n con las operaciones suma de polinomios y el producto de un escalar real por un polinomio, P_n es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

9. Sea $M_{m\times n}$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$

$$M_{m\times n} = \{[a_{ij}] / a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

con las operaciones usuales de suma de matrices y el producto de un escalar real por una matriz, $M_{m\times n}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

10. Además

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f''' - 5f' + 8f = 0\}$$

con las operaciones del ejemplo 3, F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2 Subespacios

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S \neq \emptyset$, $S \subset V$, S es un subespacio de V si S es un espacio vectorial con las operaciones de V

Ejemplos

1. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $0 \in V \Rightarrow \{0\}$ es un sub-espacio de V

2. $\mathscr{L} = \{a(1,0)/a \in \mathbb{R}\}$ es un sub-espacio de $\mathbb{R}^2$

   $\mathscr{P} = \{a(1,0,0) + b(0,1,0)/a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

3. Sea $V = \mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$ tiene infinitos sub-espacios. Veamos algunos de ellos

$$M = \{f(x) \in V/\text{grado}(f(x)) \leq 8\}$$
$$R = \{g(x^3)/g(x) \in V\}$$
$$S = \{h(x) \in V/h(-x) = -h(x)\}$$

Proposición. *Sea V un espacio vectorial, $S \neq \emptyset$, $S \subset V$, S es un subespacio de V si y sólo si*

$$\alpha u + \beta v \in S \quad \forall u, v \in S, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Ejemplos

1. Probar que $\mathscr{L} = \{a(1,0)/a \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

   Solución

$$\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^2, \ (1,0) \in \mathscr{L} \Rightarrow \mathscr{L} \neq \emptyset$$

Sea $b(1,0) \in \mathscr{L},\ c(1,0) \in \mathscr{L},\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\alpha b(1,0) + \beta c(1,0) = (\alpha b + \beta c)(1,0) \in \mathscr{L}$$

$$\therefore \mathscr{L} \text{ es un subespacio de } \mathbb{R}^2$$

2. Determinar si $W = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

   Solución

   $W \neq \emptyset$ pues $(1,0,0) \in W$ además $W \subset \mathbb{R}^3$

$$(1,0,0) + (1,0,0) = (2,0,0) \notin W$$

$$\therefore W \text{ no es sub-espacio de } \mathbb{R}^3$$

3. Probar que P_m es un sub-espacio de P_n donde $0 \leq m \leq n$

   Solución

   $P_m \neq \emptyset$ pues $0 \in P_m$, además $P_m \subset P_n$

   Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   Sean $p(x),\ q(x) \in \mathscr{P}_m$ entonces

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m,\ a_i \in \mathbb{R}$$
$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_m x^m,\ b_i \in \mathbb{R}$$

   y grado$(p(x)) \leq m$, grado$(q(x)) \leq m$

   Planteamos

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)x$$
$$+ \cdots + (\alpha a_{m-1} + \beta b_{m-1})x^{m-1} + (\alpha a_m + \beta b_m)x^m \in \mathscr{P}_m$$

$$\therefore P_m \text{ es sub-espacio de } P_n$$

4. Verificar que $S = \{g(x^3)/g(x) \in V\}$ es un subespacio de $V = \mathbb{R}[x]$

   Solución

   Vemos que

$$0 \in S \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad S \subset V$$

Sean $f(x^3), g(x^3) \in S$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha f(x^3) + \beta g(x^3) = (\alpha f + \beta g)(x^3) \in S$$

$$\therefore \text{ S es un subespacio de } V = \mathbb{R}[x]$$

5. Sea $C'[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}/f' \text{ es continua en } [0,1]\}$. Probar que $C'[0,1]$ es un subespacio de $C[0,1]$

   Solución

   $C'[0,1] \neq 0$ pues la función nulo $0 \in C'[0,1]$

   Veamos que $C'[0,1] \subset C[0,1]$

$$\begin{aligned} \text{Sea } f \in C'[0,1] &\longrightarrow f' \text{ es continua en } [0,1] \\ &\longrightarrow f \text{ es diferenciable en } [0,1] \\ &\longrightarrow f \text{ es continua en } [0,1] \\ &\longrightarrow f \in C[0,1] \end{aligned}$$

   Sean $f, g \in C'[0,1]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f \in C'[0,1] &\longrightarrow f' \text{ es continua en } [0,1] \\ &\longrightarrow \alpha f' \text{ es continua en } [0,1] \\ g \in C'[0,1] &\longrightarrow g' \text{ es continua en } [0,1] \\ &\longrightarrow \beta g' \text{ es continua en } [0,1] \end{aligned}$$

   Luego

$$\longrightarrow \alpha f' + \beta g' \text{ es continua en } [0,1]$$

$$\longrightarrow (\alpha f + \beta g)' \text{ es continua en } [0,1]$$

$$\longrightarrow \alpha f + \beta g \in C'[0,1]$$

$$\therefore C'[0,1] \text{ es un subespacio de } C[0,1]$$

2.1 Combinación lineal

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. El vector de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

se llama combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

2.2 Envolvente lineal

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S \neq \emptyset$ y $S \subset V$. Se llama envolvente lineal generada por S al conjunto de vectores que se puede poner como combinacion lineal de elementos de S

$$L[S] = \{\alpha v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m / v_1, \ldots, v_m \in S,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}, m \in \mathbb{N}\}$$

Al conjunto S se le llama conjunto generador de $L[S]$.

Teorema
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S \neq \emptyset$ y $S \subset V$

Se cumple las siguientes proposiciones

i) $S \subset L[S]$ y $L[S]$ es un subespacio de V.

ii) Si W es subespacio de V y $S \subset W$ entonces $L[S] \subset W$

NOTA

1. $L[S]$ se llama el subespacio generado por S.

2. $L[\emptyset] = \{0\}$

Definición
Si $L[S] = V$ se dice que S es un conjunto generador de V

Ejemplos

1. Probar que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$

Solución

Probemos que

$$L[\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}] = \mathbb{R}^3$$

Veamos que

$L[\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}] \subset \mathbb{R}^3$ obvio pues

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

Veamos que

$\mathbb{R}^3 \subset L[\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}]$

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) \in L[\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}]$

$$\therefore \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \text{ genera a } \mathbb{R}^3$$

2. Determinar si $\{(1,2),(1,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$

   Solución

   Veamos que $L[\{(1,2),(1,1)\}] = \mathbb{R}^2$

   $L[\{(1,2),(1,1)\}] \subset \mathbb{R}^2$ obvio

   Probemos que $\mathbb{R}^2 \subset L[\{(1,2),(1,1)\}]$

   Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(1,1)$$

$$\begin{matrix} \alpha + \beta = x \\ 2\alpha + \beta = y \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y-x \\ 0 & -1 & y-2x \end{array} \right)$$

   $\alpha = y - x \qquad \beta = 2x - y$

$$(x,y) = (y-x)(1,2) + (2x-y)(1,1)$$

$$\therefore \{(1,2),(1,1)\} \text{ genera a } \mathbb{R}^2$$

3. $A = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ genera a $\mathbb{R}[x]$

4. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ genera a P_n

5. Determinar si $\{1 + x, x^2, x - 2x^2\}$ genera a P_2

   Solución

   Veamos que $L[\{1 + x, x^2, x - 2x^2\}] = P_2$

   Probemos que $L[\{1 + x, x^2, x - 2x^2\}] \subset P_2$ obvio

   Probemos que $P_2 \subset L[\{1 + x, x^2, x - 2x^2\}]$

   Sea $a + bx + cx^2 \in P_2$

   $$a + bx + cx^2 = \alpha(1 + x) + \beta x^2 + \gamma(x - 2x^2)$$

   entonces

   $$a = \alpha$$
   $$b = \alpha + \gamma \to \gamma = b - a$$
   $$c = \beta - 2\gamma \to \beta = c + 2\gamma \to \beta = c + 2(b - a)$$

   $$a+bx+cx^2 = a(1+x)+(c+2b-2a)x^2+(b-a)(x-2x^2) \in L[\{1+x, x^2, x-2x^2\}]$$

   $$L[\{1 + x, x^2, x - 2x^2\}] \subset P_2$$

   $$\therefore \{1 + x, x^2, x - 2x^2\} \text{ genera a } P_2$$

6. Sea $S = \{1+x, x+x^2, 1+x+x^2, 1+2x+x^2\}$. Verificar que $1+2x+3x^2 \in L[S]$ (envolvente lineal de S)

   Solución

   $$1 + 2x + 3x^2 = \alpha(1 + x) + \beta(x + x^2) + \gamma(1 + x + x^2) + \eta(1 + 2x + x^2)$$
   $$1 = \alpha + \gamma + \eta$$
   $$2 = \alpha + \beta + \gamma + 2\eta$$
   $$3 = \beta + \gamma + \eta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz aumentada y realizamos operaciones elementales por filas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\gamma = 2$$

$$\alpha + \eta = -1 \rightarrow \alpha = -1 - \eta$$

$$\beta + \eta = 1 \rightarrow \beta = 1 - \eta$$

$$1+2x+3x^2 = (-1-\eta)(1+x)+(1-n)(x+x^2)+2(1+x+x^2)+\eta(1+2x+x^2)\ \forall \eta \in \mathbb{R}$$

$$1 + 2x + 3x^2 \in L[S]$$

7. Si $S = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$. Determinar el sub-espacio de $\mathbb{R}^3$ generado por S.

Solución

El sub-espacio generado por S es

$$L[S] = \{\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1)/\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

ecuación vectorial de un plano

Podemos hacer las siguientes operaciones

$$(x, y, z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x & = \alpha_1 \\ y & = \alpha_1 + \alpha_2 \\ z & = \alpha_2 \end{array}\right\} \rightarrow y = x + z$$

también se puede escribir como

$$L[S] = \{(x, y, z)/y = x + z\}$$

2.3 Operaciones con subespacios

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, sean V_1 y V_2 subespacios de V, se definen las siguientes operaciones:

$$V_1 \cap V_2 = \{u \in V / u \in V_1 \wedge u \in V_2\}$$
$$V_1 \cup V_2 = \{u \in V / u \in V_1 \vee u \in V_2\}$$
$$V_1 + V_2 = \{u_1 + u_2 \in V / u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$$

Proposición. *$V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$ son subespacios de V, en cambio no siempre $V_1 \cup V_2$ es un subespacio de V*

Ejemplo

1. Sea

$$V_1 = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$V_2 = \{m(0,1,0) + n(0,0,1) / m, n \in \mathbb{R}\}$$

   Determinar $V_1 \cap V_2$

   Solución

   V_1 es el plano XY y V_2 es el plano YZ

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = m(0,1,0) + n(0,0,1)$$
$$\alpha = 0$$
$$\beta = m$$
$$0 = n$$

$$V_1 \cap V_2 = \{r(0,1,0) / r \in \mathbb{R}\}$$

2. Sea

$$V_1 = \{\alpha(0,1,0) / \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$V_2 = \{\beta(0,0,1) / \beta \in \mathbb{R}\}$$

   Halle $V_1 + V_2$

Solución

$$V_1 + V_2 = \{\alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)/\alpha(0,1,0) \in V_1 \wedge \beta(0,0,1) \in V_2\}$$
$$V_1 + V_2 = \{\alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

es el plano YZ

3. Sea

$$V_1 = \{\alpha(1,0,0)/\alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$V_2 = \{\beta(0,1,0)/\beta \in \mathbb{R}\}$$

Determinar si $V_1 \cup V_2$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$

Solución

$$V_1 \cup V_2 = \{v \in V/v \in V_1 \vee v \in V_2\}$$

$$(1,0,0) \in V_1 \longrightarrow (1,0,0) \in V_1 \cup V_2$$
$$(0,1,0) \in V_2 \longrightarrow (0,1,0) \in V_1 \cup V_2$$

$$(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin V_1 \cup V_2$$
$$\therefore V_1 \cup V_2 \text{ no es subespacio de } \mathbb{R}^3$$

2.3.1 Suma directa

Sea V e.v.[2], sean V_1, V_2 subespacios de V. La suma $V_1 + V_2$ se llama suma directa si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. En este caso la suma se denota $V_1 \oplus V_2$

Ejemplo

1. Sean

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x - y + z = 0\}$$

[2]e.v. abreviatura de espacio vectorial

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -x+y+z=0\}$$

$$L = \{\lambda(1,1,2)/\lambda \in \mathbb{R}\}$$

Determine si $V_1 + V_2$ y $V_1 + L$ son sumas directas

Solución

Hallemos $V_1 \cap V_2$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x - y = 0 \longrightarrow x = y$$

$$z = 0$$

$$(x,y,z) = (x,x,0) = x(1,1,0)$$

$$V_1 \cap V_2 = \{x(1,1,0)/x \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$$

luego $V_1 + V_2$ no es suma directa

Hallemos $V_1 \cap L$

$$\left.\begin{array}{rl} x-y+z & = 0 \\ (x,y,z) & = \lambda(1,1,2) \end{array}\right\}$$

$$\to \lambda - \lambda + 2\lambda = 0 \to \lambda = 0$$

$$V_1 \cap L = \{0\}$$

Luego $V_1 + L$ es suma directa

3 Independencia Lineal, Bases y Dimensión

3.1 Independencia Lineal

Definición

Se dice que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e.v. son linealmente independientes si la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \ (\alpha_i \in \mathbb{K}) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

solución única. En caso contrario se dice que son linealmente dependiente.

Ejemplos

1. Pruebe que $v_1 = (1,2,3),\ v_2 = (1,2,2),\ v_3 = (2,2,3)$ son l.i.

   Solución

   De

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,2,2) + \alpha_3(2,2,3) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow v_1, v_2 \text{ y } v_3 \text{ son linealmente independientes}$$

2. Sea $L[S] = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 / x - y + w = 0, 2x + y - w = 0, z + w = 0\}$. Halle un conjunto S que genere a $L[S]$

Solución

$$\begin{aligned} x-y+w&=0 \\ 2x+y-w&=0 \\ z+w&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-y+w=0 \longrightarrow y=w$$

$$x=0 \longrightarrow x=0$$

$$z+w=0 \longrightarrow z=-w$$

$$(x,y,z,w)=(0,w,-w,w)=w(0,1,-1,1)$$

$$L\left[S\right]=\{w(0,1,-1,1)/w\in\mathbb{R}\}$$

$$S=\{(0,1,-1,1)\}$$

3. Sea

$$A=\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \Big/ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Halle un conjunto S que genere al conjunto A

Solución

$$A=\left\{a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Big/ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$A=L\left[\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right]$$

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Definición

Un conjunto $A \subset V$ es l.i. si toda colección finita de elementos de A es linealmente independiente.

Ejemplo

$$A = \{1, x, x^2, \ldots\} \subset \mathbb{R}[x] \text{ es l.i.}$$

3.2 Bases

Sea V un espacio vectorial, un conjunto $S \subset V$ es una base si

(i) S genera V, es decir $L[S] = V$

(ii) S es linealmente independiente.

Ejemplos

1. Si $e_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0),\ j = 1, 2, \ldots, n$

   $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ llamada base canónica.

2. $\{(1, 2), (2, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

3. $\{1, x, x^2, \ldots\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$

4. $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de P_3

5. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base $M_{2\times 2}$

6. Halle una base de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$

   Solución

$$x - y + z = 0 \longrightarrow x = y - z$$
$$(x, y, z) = (y - z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

$$V = \{y(1,1,0) + z(-1,0,1)/y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$V = L\left[\{(1,1,0),(-1,0,1)\}\right]$$

$$S = \{(1,1,0),(-1,0,1)\} \text{ genera } V$$

es fácil ver que $(1,1,0)$ y $(-1,0,1)$ son l.i.

Así S es una base de V

Proposición. *Cualquier base de un espacio vectorial tiene la misma cantidad de elementos*

Ejemplos

1. $\{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

   $\{(1,2),(2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

2. $\{1, x, x^2\}$ base de P_2

   $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ base de P_2

Proposición. *De cualquier conjunto de generadores de V se puede extraer una base*

Ejemplo

Sea $A = \{(1,-3,2,0),(1,1,0,2),(2,-2,2,2),(0,-4,2,-2),(3,-1,2,4)\}$

Halle un subconjunto de A que sea una base de $L[A]$

Solución

$$\alpha_1(1,-3,2,0)+\alpha_2(1,1,0,2)+\alpha_3(2,-2,2,2)+\alpha_4(0,-4,2,-2)+\alpha_5(3,-1,2,4) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Formamos la matriz aumentada y por operaciones elementales por filas lo llevamos a la forma de una matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & +1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La columna 1 y 2 son pivote entonces la columna 1 y 2 de la matriz de coeficientes de (1) son una base de $L[A]$. Es decir

$$\{(1, -3, 2, 0), (1, 1, 0, 2)\}$$

es una base para $L[A]$

3.3 Dimensión

Definición

La dimensión de un espacio vectorial V es el número de elementos de una base. Este número se denota por $\dim V$

NOTA

1. Si $V = \{0\} \Rightarrow \dim V = 0$

2. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $V \Rightarrow \dim V = n$

3. Si V tiene una base infinita $\Rightarrow \dim V = \infty$

Ejemplos

1. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$

2. $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base de $P_3 \Rightarrow \dim P_3 = 4$

3. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2\times 2} \Rightarrow \dim M_{2\times 2} = 4$

4. $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ es una base de $\mathbb{R}[x] \Rightarrow \dim \mathbb{R}[x] = \infty$

Proposición (Completación de una base)**.** *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial,* $\dim V = n$. *Si $v_1, v_2, \ldots, v_r,\ r < n$ son l.i. en $V \Rightarrow \exists\, v_{r+1}, \ldots v_n / \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ es una base de V*

Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^2$ tenemos el vector $v_1 = (1,0)$ completando a una base

$$(1,0),\ (0,1)$$

2. En P_3 tenemos los vectores $1, x$ completando a una base

$$1, x, x^2, x^3$$

Corolario

Si $\dim V \geq 1$ todo vector $v \neq 0$ forma parte de una base de V.

Proposición. *Sea S sub-espacio de V ocurre*

1. $\dim S \leq \dim V$

2. $\dim V < \infty$ *y* $\dim V = \dim S \Longrightarrow S = V$

3. $\dim V = \infty$ *la afirmación anterior es falsa en general*

Ejemplo

1. En $\mathbb{R}^3$ sea

$$\mathscr{L} = \{\lambda(1,2)/\lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathscr{P} = \{a(1,0,0) + b(0,1,0)/a, b \in \mathbb{R}\}$$

   entonces $dim(\mathscr{L}) \leq dim(\mathbb{R}^3)$ y $dim(\mathscr{P}) \leq dim(\mathbb{R}^3)$

2. Sea
$$V = L[\{1, x, x^2, \ldots\}] \text{ y } S = L[\{x, x^2, x^3, \ldots\}]$$

   entonces $\dim V = \dim S = \infty$ y $S \neq V$

Proposición. *Si V_1 y V_2 son sub-espacios de V ($\dim V < \infty$) $\Rightarrow$*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Ejemplo

1. Sea los espacios vectoriales

$$V_1 = \{\alpha(1,0,0)/\alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$V_2 = \{\beta(0,1,0)/\beta \in \mathbb{R}\}$$

   Halle $dim(V_1 \cap V_2)$

   Solución

   La suma de espacios V_1 y V_2 es

$$V_1 + V_2 = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

   Luego

$$\dim(V_1 + V_2) = 2,\ \dim V_1 = 1,\ \dim V_2 = 1$$
$$2 = 1 + 1 - \dim(V_1 \cap V_2)$$
$$\rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 0$$

Proposición. *Sea V un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, $\dim V = n$*

$$S \textit{ es linealmente independiente } \Longleftrightarrow S \textit{ genera a } V$$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\dim V = n$, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $v \in V$

El vector de coordenadas de v respecto a la base B es

$$(v)_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

donde

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

La matriz de coordenadas de v respecto a la base B es

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ejemplos

1. Sea $v = (3, 4)$, $\qquad B = \{(1, 0), (0, 1)\}$

   Halle $(v)_B$ y $[v]_B$

   Solución

$$(3, 4) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1)$$

$$\alpha_1 = 3\,, \quad \alpha_2 = 4$$

$$(v)_B = (3, 4) \text{ y } [v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Sea $v = (3, 4)$, $\qquad B_1 = \{(1, 3), (-1, 2)\}$

   Halle $(v)_{B1}$ y $[v]_{B1}$

   Solución

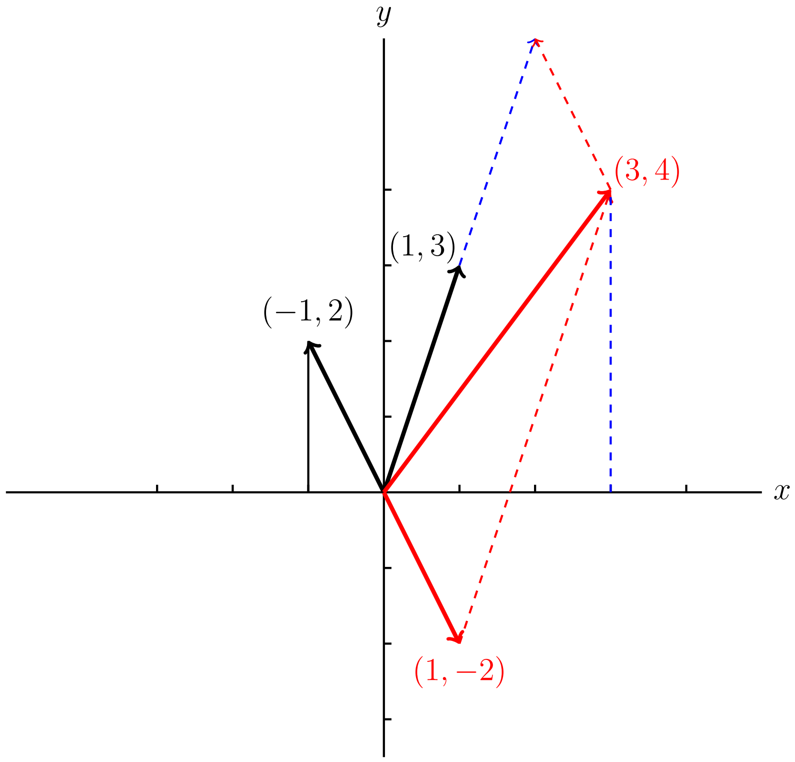
$$(3, 4) = \alpha_1(1, 3) + \alpha_2(-1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(v)_{B_1} = (2, -1) \text{ y } [v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



4 Matriz de cambio de base

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ $\dim V = n$

$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dos bases de V

Sea $w \in V$

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n \quad \beta_i \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= m_1u_1 + m_2u_2 + \cdots + m_nu_n \qquad m_i \in \mathbb{R}\\
v_2 &= n_1u_1 + n_2u_2 + \cdots + n_nu_n \qquad n_i \in \mathbb{R}\\
&\vdots\\
v_n &= f_1u_1 + f_2u_2 + \cdots + f_nu_n \qquad f_i \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[w]_{B_2} &= [\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n]_{B_2}\\
[w]_{B_2} &= \alpha_1[v_1]_{B_2} + \alpha_2[v_2]_{B_2} + \cdots + \alpha_n[v_n]_{B_2}\\
[w]_{b_2} &= \begin{bmatrix}[v_1]_{B_2} & [v_2]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\\
[w]_{B_2} &= \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & \cdots & f_1\\ m_2 & n_2 & \cdots & f_2\\ \vdots & & & \vdots\\ m_n & n_n & \cdots & f_n\end{pmatrix}}_{p}[w]_{B_1}
\end{aligned}
$$

$$P[w]_{B_1} = [w]_{B_2}$$

P matriz de cambio de base de B_1 a B_2

Observación

1. $|P| \neq 0$ (P es no singular)
2. Si $P[w]_{B_1} = [w]_{B_2}$ entonces $P^{-1}[w]_{B_2} = [w]_{B_1}$, donde P^{-1} es la matriz cambio de base de B_2 hacia B_1

Ejemplos

1. Sea

$$B_1 = \{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$$

$$B_2 = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$$

bases de $\mathbb{R}^3$, halle la matriz de cambio de base de B_1 a B_2

Solución

$$(1,1,1) = \alpha_1(0,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,1,1)$$
$$(1,2,2) = \beta_1(0,0,1) + \beta_2(0,1,1) + \beta_3(1,1,1)$$
$$(1,2,3) = \gamma_1(0,0,1) + \gamma_2(0,1,1) + \gamma_3(1,1,1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - f_1}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $v = (3,5,6)$, considere las bases del ejemplo (1). Halle $[v]_{B_1},\ [v]_{B_2}$

Solución

$$(3,5,6) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,2) + \alpha_3(1,2,3)$$

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3,5,6) = \beta_1(0,0,1) + \beta_2(0,1,1) + \beta_3(1,1,1)$$

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

se verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P[v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

Ejercicios

1. Determine si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales, justifique su respuesta

   (a) $V = \{f : R \to R/2f(0) = f(1)\}$

   (b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

2. Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes $a = (2, 2i, 2+2i, -2i)$, $b = (-i, 0, 2, 2-i, 1+i)$, $c = (0, -1, 0, 1)$, $d = (3i, -2-i, 3i-5, -i)$

3. Probar que los siguientes conjuntos son linealmente independientes

   (a) $\{x, x^2, x^3\}$

   (b) $\{\operatorname{sen} x, \cos x, x \cos x\}$

   (c) $\{x^2 e^x, xe^x, e^x\}$

4. Hallar el valor de β para que $g = -x+y+3z$, $f = 5x-2y+9z$, $h = x-\beta y+2\beta z$ sean linealmente dependientes

5. Sea el subespacio $V = L\left[\{t+t^2, 1-3t+2t^2, -3+11t-4t^2\}\right]$

   (a) ¿V es un subespacio de P_2?

   (b) Diga si los vectores $a = 1-t+t^2$, $b = -3+6t-9t^2$ pertenecen a V

   (c) Determine la condición entre m, n y p para que el vector $m(1+t)+n(1-t)+pt^2$ pertenezca a V

6. Considere los siguientes subespacios de

$$V = L\left[\{1+2x+3x^2+x^3, 4-x+3x^2+6x^3, 5+x+6x^2+12x^3\}\right]$$

$$U = L\left[\{1-x+x^2+x^3, 2-x+4x^2+5x^3\}\right]$$

   (a) Halle una base para $U \cap V$ y su dimensión

   (b) Extienda la base hallada en a) a una base V y luego a una base de U

   (c) Halle una base para $U + V$ y su dimensión

7. Sea $W \subset P_n / \quad W = \{p(x)/p(2) = 1\}$. Diga si W es un subespacio.

8. Sean los subespacios $U = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z)/x = y = z\}$. Halle $U \oplus V$

9. Sea U el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 0 \\ 3x - 8y + kz &= 0 \end{aligned}$$

Halle el valor de k de modo que $\dim(U)$ sea $0, 1, 2$

10. Diga si es verdad o falso la siguiente proposición, justifique su respuesta

$$L\left[\{\text{sen}^2 x, \cos^2 x, \text{sen}^2 x + 2, 8\text{sen}^2 x - \cos^2 x\}\right] = L\left[\{1, \text{sen}^2 x\}\right]$$

11. Sea el espacio vectorial $V = \{f/f : [-3, 3] \to \mathbb{R}\}$ con las operaciones usuales, $S = \{f \in V/f(x) = f(-x)\}$, $T = \{f \in V/f(x) = -f(-x)\}$

   (a) Pruebe que S y T son subespacios de V

   (b) Calcule $S \cap T$

   (c) Pruebe que $V = S + T$

12. En $\mathbb{R}^3$ considere los subespacios

$$W_1 = \{(x, y, z)/2x + 3y + 3z = 0\}, \qquad W_2 = L[\{(0, 0, 1), (-1, 1, 0)\}]$$

Halle una base y dimensión de

   (a) $W_1 \cap W_2$

   (b) $W_1 + W_2$

13. Sean las bases $S_1 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ y $S_2 = \{t^2 + 1, t, 1\}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Halle

(a) $(\beta)_{S_2}$ si $\beta = 3t^2 - 2t + 1$

(b) La base S_1, si P es la matriz cambio de base de S_2 a la base S_1

REFERENCIALES

[1] Kolman Bernard. Algebra Lineal con aplicaciones y matlab. Sexta edición. Prentice Hall, México 1999.

[2] Grossman Stanley I. "Algebral lineal". Ed. Mc. Graw Hill 1995.

[3] Kreyszyg, Erwin. "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería". Vol 1. Editorial Limusa, 1996.

[4] Carlos Chavez V. "Algebra lineal". Editorial Moshera 2012.