Ecuaciones diferenciales
Sistemas de Ecuaciones Diferenciales
Modelos matemáticos basados en EDOs

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

31 de mayo de 2025

Contenido

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by + e(t) \\ y'(t) = cx + dy + f(t) \end{cases}$$

$x(t), y(t) \equiv$ funciones incógnitas — $t \equiv$ variable independiente

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ — $e(t), f(t) \equiv$ funciones término independiente

Resolución:

1. En una de las ecuaciones despejamos una variable (en función de la otra y de su derivada) y la derivamos.
2. Sustituimos la variable despejada y su derivada en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación de segundo orden.
3. Resolvemos la ecuación de segundo orden.
4. Sustituimos esa solución y su derivada en la variable que habíamos despejado en el paso (1)

Si $e(t) = f(t) = 0$ en el sistema, la ecuación que se obtiene en el paso (2) es homogénea.

- Resolver sistema:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= 2y - x \end{cases}$$

Solución: Obtener ecuación de segundo orden
Derivamos la primera ecuación:

$$x'' = y'$$

Sustituimos y' desde la segunda ecuación:

$$x'' = 2y - x$$

Como $y = x'$, sustituimos:

$$x'' = 2x' - x$$

Reordenamos:

$$x'' - 2x' + x = 0$$

ecuación homogénea sea la solución de la forma $x = e^{rt} \Rightarrow x' = re^{rt}, x'' = r^2 e^{rt}$

$$r^2 e^{rt} - 2re^{rt} + e^{rt} = 0 \Rightarrow (r^2 - 2r + 1)e^{rt} = 0 \Rightarrow e^{rt} \neq 0, \quad (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (doble raíz)}$$

La solución general es:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$$

Obtener $y(t)$ a partir de $x(t)$, como $x' = y$, derivamos:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}[(C_1 + C_2 t)e^t] = C_2 e^t + (C_1 + C_2 t)e^t = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^t$$

Entonces:

$$y(t) = (C_1 + C_2(1+t))e^t$$

Solución general

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2 t)e^t \\ y(t) &= (C_1 + C_2(1+t))e^t \end{aligned}}$$

Ejemplos

wxMaxima

```
/* Definir el sistema de ecuaciones */
eq1: diff(x(t), t) = y(t);
eq2: diff(y(t), t) = 2*y(t) - x(t);

/* Resolver el sistema */
sol: desolve([eq1, eq2], [x(t), y(t)]);

/* Mostrar la solución */
sol;
```

```
(%i20) eq1: diff(x(t), t) = y(t);
       eq2: diff(y(t), t) = 2·y(t) − x(t);
```

eq1 $\frac{d}{d\,t}x(t)=y(t)$

eq2 $\frac{d}{d\,t}y(t)=2\,y(t)-x(t)$

```
(%i21) sol: desolve([eq1, eq2], [x(t), y(t)]);
```

sol $\left[x(t)=y(0)\,t\,\%e^{t}-x(0)\,t\,\%e^{t}+x(0)\,\%e^{t}, y(t)=y(0)\,t\,\%e^{t}-x(0)\,t\,\%e^{t}+y(0)\,\%e^{t}\right]$

```
→ sol;
```

Ejemplos - Sistema diferencial

Resolver sistema:

$$\begin{cases} x' &= -2x-4y+t \\ y' &= -x+y \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0)=0,\ y(0)=0$.

Solución: Derivamos la segunda ecuación:

$$y''=-x'+y'$$

Sustituimos x' y y' usando el sistema:

$$\begin{aligned} y'' &= -(-2x-4y+t)+(-x+y) \\ &= 2x+4y-t-x+y \\ &= x+5y-t \Rightarrow y''-5y=x-t \qquad (1) \end{aligned}$$

De la segunda ecuación original:

$$x=y-y' \qquad (2)$$

Sustituimos (2) en (1):

$$y''-5y=(y-y')-t \Rightarrow y''-5y=y-y'-t$$

$$\boxed{y''+y'-6y=-t}$$

Solución homogénea: Sea la solución de la forma $y=x^{rx} \Rightarrow x'=rx^{rx}, x''=r^2x^{rx}$

$$\begin{aligned} r^2x^{rx}+rx^{rx}-6x^{rx} &= 0 \\ (r^2+r-6)x^{rx} &= 0 \\ x^{rx}\neq 0 \quad r^2+r-6 &= 0 \Rightarrow r=2,-3 \end{aligned}$$

Solución general de la homogénea:

$$\boxed{y_H(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}}$$

Solución particular: Probaremos $y_p(t)=At+B$:

$$y_p''+y_p'-6y_p=0+A-6(At+B)=A-6At-6B=-t$$

Igualamos:

$$-6At+(A-6B)=-t \Rightarrow \begin{cases} -6A=-1 \Rightarrow A=\frac{1}{6} \\ A-6B=0 \Rightarrow \frac{1}{6}-6B=0 \\ \qquad \Rightarrow B=\frac{1}{36} \end{cases}$$

Entonces:

$$\boxed{y_P(t)=\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}}$$

Ejemplos

Solución general:

$$\boxed{y(t) = y_H + y_P = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{36}}$$

De $x = y - y'$, derivamos $y(t)$:

$$y'(t) = 2C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}$$

Entonces:

$$x(t) = y(t) - y'(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{36} - (2C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6})$$

$$\boxed{x(t) = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36}}$$

Aplicar condiciones iniciales

- $y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{36} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -\frac{1}{36}$
- $x(0) = -C_1 + 4C_2 - \frac{5}{36} = 0$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= -\tfrac{1}{36} \\ -C_1 + 4C_2 &= \tfrac{5}{36} \end{aligned}\right\} (+) \Rightarrow 5C_2 = \frac{4}{36} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{45}, \quad C_1 = -\frac{11}{180}$$

Solución final

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= -\frac{11}{180}e^{2t} + \frac{1}{45}e^{-3t} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{36} \\ x(t) &= \frac{11}{180}e^{2t} + \frac{4}{45}e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36} \end{aligned}}$$

Ejemplos

wxMaxima

```
/* Definir el sistema de ecuaciones */
eq1: diff(x(t), t) = -2*x(t) - 4*y(t) + t;
eq2: diff(y(t), t) = -x(t) + y(t);

/* Condiciones iniciales */
ics: [x(0) = 0, y(0) = 0];

/* Resolver el sistema */
sol: desolve([eq1, eq2], [x(t), y(t)]);

/* Mostrar la solución */
sol;
/* Graficar x(t) y y(t) */
wxplot2d([rhs(sol[1]), rhs(sol[2])], [t, 0, 5],
        [legend, "x(t)", "y(t)"],
        [xlabel, "t"], [ylabel, "x(t), y(t)"]);
```

(%i23) eq1: diff(x(t), t) = −2·x(t) − 4·y(t) + t;
eq2: diff(y(t), t) = −x(t) + y(t);

eq1 $\frac{d}{d\,t}\,x(t)=-(4\,y(t))-2\,x(t)+t$

eq2 $\frac{d}{d\,t}\,y(t)=y(t)-x(t)$

(%i24) ics: [x(0) = 0, y(0) = 0];

ics $[x(0)=0,y(0)=0]$

(%i25) sol: desolve([eq1, eq2], [x(t), y(t)]);

sol $\left[x(t)=-\left(\frac{(16\,y(0)-4\,x(0)-1)\,\%e^{2\,t}}{20}\right)+\frac{(36\,y(0)+36\,x(0)+4)\,\%e^{-(3\,t)}}{45}+\frac{t}{6}-\frac{5}{36},y(t)=\frac{(16\,y(0)-4\,x(0)-1)\,\%e^{2\,t}}{20}+\frac{(9\,y(0)+9\,x(0)+1)\,\%e^{-(3\,t)}}{45}+\frac{t}{6}+\frac{1}{36}\right]$

(%i26) sol;

(%o26) $\left[x(t)=-\left(\frac{(16\,y(0)-4\,x(0)-1)\,\%e^{2\,t}}{20}\right)+\frac{(36\,y(0)+36\,x(0)+4)\,\%e^{-(3\,t)}}{45}+\frac{t}{6}-\frac{5}{36},y(t)=\frac{(16\,y(0)-4\,x(0)-1)\,\%e^{2\,t}}{20}+\frac{(9\,y(0)+9\,x(0)+1)\,\%e^{-(3\,t)}}{45}+\frac{t}{6}+\frac{1}{36}\right]$

Modelo para dos poblaciones

Sistema de EDOs para poblaciones interactuantes

$$\begin{cases} x'(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t) & x(t), y(t) \equiv \text{poblaciones en el instante } t \\ y'(t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t) & t \equiv \text{tiempo}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Relación con la que conviven las especies según los coeficientes b y c:

- $b > 0; c > 0$ **Simbiosis:** las dos especies se benefician.
- $b < 0; c < 0$ **Competencia** las dos especies se perjudican
- $b > 0; c < 0$ ó $b < 0; c > 0$ **Depredación:** Una se beneficia (coef. positivo) y otra resulta perjudicada (coef. negativo)
- $b > 0; c = 0$ ó $b = 0; c > 0$ **Comensalismo:** Una se beneficia (coef. positivo) y la otra no resulta afectada
- $b < 0; c = 0$ ó $b = 0; c < 0$ **Amensalismo:** Una resulta perjudicada (coef. negativo) y la otra no resulta afectada

Ejemplos

- **Sistema de Población Tiburones-Rémoras:** Las rémoras son unos peces que cuentan con una ventosa en su extremidad superior que aprovechan para adherirse a los cuerpos de los tiburones, a los cuales usan como medio de trasporte sin que estos noten su presencia, aprovechando además para alimentarse de los restos de comida de sus anfitriones. La dinámica de estas dos especies en un cierto entorno natural viene dada por el siguiente sistema diferencial (el tiempo esta medido en años):

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases}$$

(a) Razonar a partir de las ecuaciones del sistema con qué tipo de relación coexisten estas especies y cuál de ellas viene representada por $x(t)$ y cuál por $y(t)$.

(b) Si el tamaño inicial de la población $x(0)$ es de 200 individuos y el de $y(0)$ es de 100, ¿cuál es el número de individuos de cada especie en cualquier instante?,

$$x(0) = 200,\, y(0) = 100$$

(c) Determinar al cabo de cuantos años la población de rémoras quintuplica a la de tiburones.

$$x(t) = 5y(t)$$

Ejemplos

Solución: Identificamos las poblaciones

$$\begin{cases} x(t) = \text{Población tiburones} \\ y(t) = \text{Población de rémoras} \end{cases}$$

Primero, resolvemos la ecuación para $y(t)$:

$$y' = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = 2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2\,dt \Rightarrow \ln|y| = 2t + C \Rightarrow y(t) = Ce^{2t}$$

Usando la condición $y(0) = 100$, se obtiene:

$$C = 100 \Rightarrow \boxed{y(t) = 100e^{2t}}$$

Sustituimos $y(t)$ en la ecuación de $x'(t)$:

$$x' = 2x + 100e^{2t}$$

Esta es una ecuación lineal no homogénea. Usamos el factor integrante $\mu(t) = e^{-2t}$:

$$x' - 2x = 100e^{2t} \Rightarrow e^{-2t}x' - 2xe^{-2t} = 100e^{2t}e^{-2t}$$

$$\frac{d}{dt}[x(t)e^{-2t}] = 100 \Rightarrow x(t)e^{-2t} = 100t + C \Rightarrow x(t) = e^{2t}(100t + C)$$

Usando la condición $x(0) = 200$, se obtiene:

$$x(0) = e^{0}(100 \cdot 0 + C) = C = 200 \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{2t}(100t + 200)}$$

Ejemplos

Conclusión

- La población de tiburones $x(t)$ crece como $e^{2t}(100t+200)$
- La población de rémoras $y(t)$ crece como $100e^{2t}$
- Ambas especies crecen exponencialmente, pero la de tiburones tiene un crecimiento modificado por el término t

¿Queremos hallar t cuándo la población de rémoras es 5 veces la de tiburones?

$$\begin{aligned} x(t) &= 5y(t) \Rightarrow 200\cancel{e^{2t}} + 100t\cancel{e^{2t}} = 5 \cdot 100\cancel{e^{2t}} \\ 200 + 100\,t &= 5 \cdot 100 \Rightarrow \boxed{t = 3 \text{ años}} \end{aligned}$$

Conclusión: El instante en que la población de rémoras es 5 veces la de los tiburones habría ocurrido **3 años en el pasado**, lo cual indica que a partir de $t=0$ (cuando comienza la observación), las rémoras ya eran proporcionalmente más numerosas.

Ejemplos

La dinámica de tiburones $x(t)$ y rémoras $y(t)$ está dada por el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases}$$

Escribimos el sistema como:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- **Matriz del sistema:** Sea $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, entonces el sistema es.

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Autovalores :** Buscamos los autovalores de A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ (autovalor doble)}$$

- **Autovectores:** Buscamos un vector $\mathbf{v}_1$ tal que $(A - 2I)\mathbf{v}_1 = 0$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora buscamos un vector generalizado $\mathbf{v}_2$ tal que:

$$(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- **Solución general:** La solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 e^{2t}\mathbf{v}_1 + c_2 t e^{2t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{2t}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{X}(t) &= c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 t e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}c_1 + c_2 t\\ c_2\end{pmatrix}}$$

- Usando las condiciones iniciales $x(0) = 200$, $y(0) = 100$

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = e^{0}\begin{pmatrix}c_1 + c_2(0)\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}200 + 100t\\ 100\end{pmatrix}}$$

- **Conclusión**
  - La población de tiburones $x(t)$ crece como $e^{2t}(c_1 + c_2 t)$
  - La población de rémoras $y(t)$ crece como $c_2 e^{2t}$
  - Ambas especies crecen exponencialmente, pero la de tiburones tiene un crecimiento modificado por el término t

Ejemplos

Sistema diferencial

La dinámica de dos poblaciones viene dada por el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Si el tamaño inicial de la población x es 100 y el de la población y es 40:

(a) ¿Cómo se comportan dichas poblaciones en cada instante?

(b) ¿Coincide en algún momento el número de individuos de ambas poblaciones?

(c) ¿Se extinguirá a la larga alguna de ellas? ¿Cuál es la tendencia final de ambas?

Solución: Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Denotamos:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- **Autovalores del sistema :** Calculamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

  Resolviendo:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3$$

- **Autovectores**
  Para $\lambda_1 = -1$:

$$(A+I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Para $\lambda_2 = -3$:

$$(A+3I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- **Solución general**

$$\vec{X}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \\ y(t) = c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t} \end{cases}$$

- **Usamos condiciones iniciales**

$$\left.\begin{array}{rcl} x(0) & = & c_1 + c_2 = 100 \\ y(0) & = & c_1 - c_2 = 40 \end{array}\right\} \text{(Sumando y restando)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2c_1 & = & 140 \Rightarrow c_1 = 70 \\ c_2 & = & 30 \end{array}\right.$$

- **Solución particular**

$$\boxed{x(t) = 70e^{-t} + 30e^{-3t}, \quad y(t) = 70e^{-t} - 30e^{-3t}}$$

Solución con $x(0) = 100$, $y(0) = 40$:

$$\begin{cases} x(t) = 70e^{-t} + 30e^{-3t} \\ y(t) = 70e^{-t} - 30e^{-3t} \end{cases}$$

(a) Ambas poblaciones decrecen exponencialmente
(b) Coinciden cuando $x(t) = y(t) \Rightarrow t = \frac{1}{2}\ln(3)$
(c) Ambas tienden a extinguirse ($\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$)

Modelo general para una población

$$\frac{dp}{dt} = \text{ numero de nacimientos} - \text{ numero de muertos} = \beta(t) \cdot p(t) - \delta(t) \cdot p(t)$$

$$\frac{dp}{dt} = (\beta(t) - \delta(t)) \cdot p(t)$$

donde:

- $p(t) =$ numero de individuos en el instante t
- $\beta(t) = \text{ índice de natalidad} = \frac{\text{numero de nacimientos}}{\text{numero de individuos}} = \frac{\text{numero de nacimientos}}{p(t)}$
  numero de nacimientos $= \beta(t)p(t)$
- $\delta(t) = \text{ índice de mortalidad} = \frac{\text{numero de muertos}}{\text{numero de individuos}} = \frac{\text{numero de muertos}}{p(t)}$
  numero de muertos $= \delta(t)p(t)$

Modelo de Malthus

Sea $\beta(t) = \beta$, $\delta(t) = \delta$ constantes:

$$\beta(t) - \delta(t) = \beta - \delta = K$$

$$\frac{dp}{dt} = Kp(t) \Rightarrow \int \frac{dp}{p(t)} = \int K dt \Rightarrow \ln p(t) = Kt + C$$

Solución:

$$p(t) = Ce^{Kt}$$

Ley de Newton del enfriamiento/calentamiento

La variación de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo a los largo del tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior $E(t)$ y dicha temperatura.

$$\frac{dT(t)}{dt} = K(E(t) - T(t))$$

- $T(t)$ = temperatura del cuerpo
- $E(t)$ = temperatura exterior
- $K > 0$ = constante de proporcionalidad (depende de la propiedades físicas del cuerpo)

Versión extendida:

$$\frac{dT(t)}{dt} = K(E(t) - T(t)) + A(t)$$

donde $A(t)$ = tasa de variación adicional (calefacción, aire acondicionado, luces, aparatos electricos, etc.)

Ejemplo: Enfriamiento del vino

- Vino sale de cava a 10°C, ambiente a 23°C
- En 10 minutos llega a 15°C
- Solución de la EDO:

$$T(t) = 23 - 13e^{-Kt}$$

- Calcular K con $T(10) = 15$:

$$15 = 23 - 13e^{-10K} \Rightarrow K \approx 0{,}0446$$

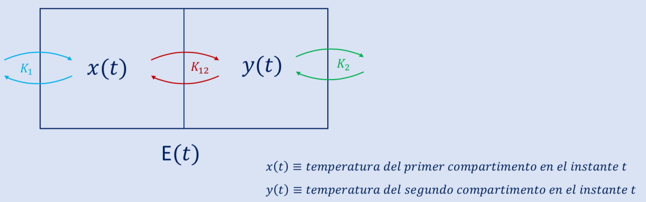
- Tiempo para llegar a 18°C:

$$18 = 23 - 13e^{-0{,}0446t} \Rightarrow t \approx 22{,}3 \text{ min}$$

Modelo de temperaturas para dos compartimentos

$$x'(t) = K_1(E(t) - x(t)) + K_{12}(y(t) - x(t)) + A_1(t)$$
$$y'(t) = K_2(E(t) - y(t)) + K_{12}(x(t) - y(t)) + A_2(t)$$

- $x(t)$ = temperatura primer compartimento
- $y(t)$ = temperatura segundo compartimento
- $\frac{1}{K_1}, \frac{1}{K_2}, \frac{1}{K_{12}}$ = constantes de tiempo
- $A_1(t), A_1(t)$ = tasas de variación adicional



Gracias por su atención

¿Preguntas?