ÁLGEBRA LINEAL - Pratica Calificada 1

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. (10 points) Resuelva

   (a) Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

   $$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

   donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

2. (10 points) Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

   (a)

   $$V = M_{22}; \quad H = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

3. (10 points) Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

   (a)

   $$\text{En } M_{22} : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (10 points) Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

   (a)

   $$\text{En } \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. (10 points) Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

   (a) Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 5z = 0$.

6. (10 points) Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

   (a) Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$en términos de la base dada.

   $$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7. (10 points) Resolver

   (a) Encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

   $$(1, 21, 25), (3, 2, 0), (22, 1, 7)$$

8. (10 points) Calcule los valores característicos y los espacios característicos de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

9. (10 points) Determine si la matriz dada A es diagonalizable. De ser así, encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$. Verifique que $AC = CD$ y que los elementos distintos de cero de D sean los valores característicos de A.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. (10 points) Resolver

   (a) Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada. Después verifique que $Q^A Q = D$, una matriz diagonal cuyas componentes diagonales son los valores característicos de A.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$