Ecuaciones diferenciales Parciales
Metodo Separación Variables

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

8 de julio de 2025

Contenido

El **método de separación de variables** consiste en suponer que la solución puede escribirse como un producto de funciones que dependen de una sola variable.
Por ejemplo, para una función $u(x,t)$, se propone:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Sustituyendo esta forma en la EDP original, se logra separar las variables y obtener ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) más simples.

Ejemplo 1: Separación de Variables y La Ecuación del Calor

Supóngase que una barra delgada de metal de longitud L se coloca en el eje x de un sistema coordenado xy

Consideramos la ecuación de calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \; t > 0$$

con condiciones iniciales (C.I) y condiciones de frontera (C.F.):

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad t > 0, \quad \text{(C.F.)}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad \text{(C.I)}$$

Nota: La **difusividad térmica** k mide la velocidad a la que la temperatura cambia dentro de una sustancia, ($k \propto$ conductividad térmica)

Solucion: El **método de separación de variables** buscar soluciones que sean de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Sustituyendo y dividiendo entre $X(x)T(t) = XT$,

$$\frac{\partial (XT)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 (XT)}{\partial x^2} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{k\,T}\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{depende solo de t}} = \underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{\text{depende solo de x}}$$

Por lo tanto, cada lado debe ser igual a una **constante** $-\lambda^2$ **(con signo negativo por conveniencia)**.

$$\frac{T'}{k\,T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Solución de las EDOs

Así se obtienen las dos ecuaciones:

$$\frac{T'}{k\,T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda^2 X & = & 0 \\ T' + k\lambda^2 T & = & 0 \end{cases}$$

Las soluciónes $u(x,t) = X(x)T(t)$ deben cumplir también las dos condiciones de contorno homogéneo.

- De la condición de frontera (C.F.) o límite
  - $u(0,t) = 0$ deducimos que
    $$X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
    .
  - $u(L,t) = 0$ deducimos que
    $$X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$$
    .
- Buscando soluciónes no triviales, podemos asumir que $T(t) \neq 0$, **NO es idénticamente cero**. Si $T(t) = 0$, $\forall t > 0$, llegaremos a la solución trivial $u(x,t) = 0$ **que NO nos interesa**.

Buscamos soluciónes no triviales $X(x)$ del problema del valor propio

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X & = & 0 \\ X(0) & = & 0 \\ X(L) & = & 0 \end{cases}$$

Solución de las EDOs

Buscamos soluciones para $X(x)$, dependiente de la posición x, sea la solucion de la forma $X = e^{rx}$

$$r^2 e^{rx} + \lambda^2 e^{rx} = 0$$

$$(r^2 + \lambda^2) e^{rx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{rx} \neq 0 \\ r^2 + \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\lambda \end{cases}$$

La solución para $X(x)$ se puede escribir

$$X(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x} \quad \text{ó} \quad X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

1. En $x = 0$:

$$X(0) = 0 \Rightarrow A\cos(0) + \cancel{B\sin(0)}^{0} = \cancel{A\cos(0)}^{1} = 0 \Rightarrow A = 0$$

2. En $x = L$:

$$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B & \neq & 0 \\ \sin(\lambda L) & = & 0 \end{cases}$$

esto se satisface si

$$\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. La solución para $X(x)$, $n \geq 1$:

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nota: Si las condiciones de contorno implican que $A = 0$ y $B = 0$, la única solución es trivial $X(x) = 0$.

Solución de las EDOs

Buscamos soluciones para $T(t)$, dependiente del tiempo t, es:

$$T' + k\lambda^2 T = 0$$

1. $$\frac{dT}{dt} + k\lambda^2 T = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = -k\lambda^2 dt$$
   $$\int \frac{dT}{T} = \int -k\lambda^2 dt \Rightarrow \ln T + c = -k\lambda^2 t + c$$
   despejando a $T(t)$
   $$T(t) = e^{-k\lambda^2 t} e^c$$
   seria útil señalar que $e^c = C =$ constante
2. La solución de la ecuación diferencial ordinaria es
   $$T_n(t) = C_n e^{-k\lambda_n^2 t}$$
   donde C_n es una constante arbitraria

Por tanto, hemos conseguido la **solucion en forma de producto, para cada** n

$$u(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$
$$u(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La solucion satisfacen la ecuación diferencial parcial y las condiciones de frontera (C.F.) para cada valor del entero positivo n

Solución de las EDOs

Para que la solución satisfaga la condición inicial (C.I.)

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

se tienen que elegir coeficientes constantes de modo que

$$u_n(x,0) = f(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

escribamos $f(x)$ como la serie sinusoidales

- En general, la condición inicial (C.I.) no se satisface con un solo término $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$. Por lo tanto, $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ no es una solución del problema dado.
- Sin embargo, gracias al principio de superposición, podemos construir la solución como una suma infinita de estos términos, dado que la ecuación es lineal y homogénea.

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

  que satisface la ecuación diferencial parcial y la función en $x = 0$.
- Para determinar los coeficientes C_n, aplicamos la condición inicial (C.I.), sustituyendo $t = 0$ en la solucion, se obtiene

  $$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

- Lo que muestra que la última expresión es el desarrollo de $f(x)$ en una **serie seno de Fourier en el intervalo** $0 < x < L$. Por lo tanto, los coeficientes se definen como

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx,$$

  donde C_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$.

- Se concluye que la solución del problema de condiciones de frontera está dada por la serie infinita está dada por la serie infinita

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

C_n son los coeficientes de Fourier

Por tanto, para resolver nuestro problema sólo necesitamos saber cómo calcular los coeficientes de Fourier de cualquier función.

$$\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{L}{2} & m = n \end{cases}$$

donde m y n son enteros positivos, podemos calcular los coeficientes C_n

$$f(x)\sin\frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}$$

Si integramos en el intervalo $[0, L]$

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

integración elemental tenemos $m = n$

$$\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx = C_n \int_0^L f(x)\sin^2\frac{m\pi x}{L}dx$$

Finalmente, despejando C_n

$$C_m = \frac{\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx}{\int_0^L \sin^2\frac{m\pi x}{L}dx} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

Por tanto, recapitulando todo lo que hemos hecho, la solución de nuestro problema de conducción del calor es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

Se concluye que la solución del problema de condiciones de frontera está dada por la serie infinita está dada por la serie infinita

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Ejemplo 2: Separación de Variables y La Ecuación del Calor

Consideremos la ecuación del calor en una varilla unidimensional $0 \leq x \leq L,\ t \geq 0$, con extremos aislados:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0$$

Las condiciones de frontera (C.F.) y condiciones inicial (C.I.) son:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

La constante k es la difusividad térmica.
Solucion: Proponemos una solución de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Sustituyendo en la ecuacion diferencial parcial (EDPs ó PDEs):

$$X(x)T'(t) = k\ X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{k\ T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

Esto nos lleva a dos ecuacion diferencial ordinarias (EDOs ó ODEs) independientes:

$$T'(t) + k\lambda^2 T(t) = 0$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

Solución de las EDOs

Como las soluciones $u(x,t) = X(x)T(t)$ deben cumplir también las dos condiciones de frontera (C.F.) **(ó condiciones de contorno, condicion límite)**

- $u^{'}(0,t) = 0$ deducimos que $X^{'}(0)T(t) = 0 \Rightarrow X^{'}(0) = 0$.
- $u^{'}(L,t) = 0$ deducimos que $X^{'}(L)T(t) = 0 \Rightarrow X^{'}(L) = 0$.

La ecuación para $X(x)$ es:

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

La solución para $X(x)$ es:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

la derivada seria

$$X'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$$

1. En $x = 0$:

$$X'(0) = 0 \Rightarrow -A\lambda\sin(0) + B\lambda\cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

2. En $x = L$:

$$X'(L) = 0 \Rightarrow -A\lambda\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda A & \neq & 0 \\ \sin(\lambda L) & = & 0 \end{array} \right.$$

   esto se satisface si

$$\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. Las solución para $X(x)$

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución de las EDOs

Buscamos la soluciones para $T(t)$, dependiente del tiempo t

$$T' + k\lambda^2 T = 0$$

resolviendo

- $$\frac{dT}{dt} + k\lambda^2 T = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = -k\lambda^2 dt$$
$$\int_0^T \frac{dT}{T} = \int_0^t -k\lambda^2 dt \Rightarrow \ln T + c = -k\lambda^2 t + c$$
$$T(t) = e^{-k\lambda^2 t} e^c$$
- donde C_n es una constante arbitraria y las soluciones temporales
$$T_n(t) = C_n e^{-k\lambda_n^2 t}$$

Por tanto, hemos conseguido la solucion en forma de producto, para cada n

$$u(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$
$$u(x,t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Solución de las EDOs

Los coeficientes se obtienen usando la condición inicial (C.I):

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Por tanto, si

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

entonces

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Para hallar los coeficientes A_n en este caso, debemos usar las fórmulas:

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \neq 0 \\ L & n = m = 0 \end{cases}$$

para n y m enteros no negativos. Si $n = 0$ ó $m = 0$, estamos considerando la autofunción $X_0(x) = 1$. Usando estas relaciones de ortogonalidad, pueden obtenerse los valores de A_n :

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad \forall n \geq 1$$

Ejemplo 3: Separación de Variables

Resolver la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

para las condiciones de frontera

$$u(0,y) = 5 + e^{2y} + 2e^{4y}$$
$$u(x,0) = 3e^{x} + 5e^{2x}$$

Solucion: El método de separación de variables es tratar de encontrar soluciones que sean sumas o productos de funciones de una variable.

- Proponemos solución por separación de variables:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

- Calculamos las derivadas:

$$u_{yy} = XY'', \quad u_{xy} = X'Y'$$

- Sustituimos en la PDE:

$$XY'' = 2X'Y' \Rightarrow \frac{Y''}{Y'} = 2\frac{X'}{X} = -\lambda$$

  donde λ es la constante de separación.

Ecuaciones separadas:

1.
$$\frac{X'}{X} = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \int_0^X \frac{dX}{X} = -\frac{\lambda}{2}\int_0^x dx \Rightarrow \ln X = -\frac{\lambda}{2}x + a$$
$$X(x) = Ae^{-\frac{\lambda}{2}x}e^a \Rightarrow X(x) = Ae^{-\frac{\lambda}{2}x}$$

2.
$$\frac{Y''}{Y'} = -\lambda \Rightarrow Y'' + \lambda Y' = 0$$
Sea
$$Y = e^{ry}, \quad Y^{'} = re^{ry}, \quad Y^{''} = r^2 e^{ry}$$

$$Y'' + \lambda Y' = 0 \Rightarrow (r^2 + \lambda r)e^{ry} = 0 \Rightarrow r^2 + \lambda r = r(r+\lambda) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} r & = & 0 \\ r & = & -\lambda \end{array} \right.$$

$$Y(y) = Be^0 + Ce^{-\lambda y} = B + Ce^{-\lambda y}$$

Solución general:

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = Ae^{-\frac{\lambda}{2}x}\left(B + Ce^{-\lambda y}\right) = A'e^{-\frac{\lambda}{2}x} + B'e^{-\frac{\lambda}{2}x-\lambda y}$$

- Usamos la **condicion de frontera (C.F.)** en $x = 0$, se tendría

$$u(0,y) = 5 + e^{2y} + 2e^{4y} = A' + B'e^{-\lambda y}$$

no se puede establecer así la igualdad porque hay dos exponenciales, entonces se utiliza superposición

$$u(x,y) = A_1e^{-\frac{\lambda_1}{2}x} + B_1e^{-\frac{\lambda_1}{2}x-\lambda_1 y} + A_2e^{-\frac{\lambda_2}{2}x} + B_2e^{-\frac{\lambda_2}{2}x-\lambda_2 y}$$

usando nuevamente condiciones se tiene

$$\begin{aligned} u(0,y) = 5 + e^{2y} + 2e^{4y} &= A_1 + B_1e^{-\lambda_1 y} + A_2 + B_2e^{-\lambda_2 y} \\ &= (A_1 + A_2) + B_1e^{-\lambda_1 y} + B_2e^{-\lambda_2 y} \end{aligned}$$

de la igualdad se observa que

$$A_1 + A_2 = 5, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4$$

sustituyendo los valores encontrados

$$u(x,y) = A_1e^{x} + e^{x+2y} + A_2e^{2x} + 2e^{2x+4y}$$

- Usamdo la **condicion de frontera (C.F.)** en $y = 0$, se tendría

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= A_1 e^x + e^x + A_2 e^{2x} + 2e^{2x} = 3e^x + 5e^{2x} \\
&= (A_1 + 1)e^x + (A_2 + 2)e^{-2x} = 3e^x + 5e^{2x}
\end{aligned}
$$

igualando los coeficientes

$$
A_1 + 1 = 3 \Rightarrow A_1 = 2, \quad A_2 + 2 = 5 \Rightarrow A_2 = 3
$$

por último, la solución es

$$
u(x,y) = 2e^x + e^{x+2y} + 3e^{2x} + 2e^{2x+4y}
$$

que satisface las condiciones de frontera dadas.

Ejemplo 4: Separación de Variables

Resolver la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

sujeta a

$$u(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

Solucion: Utilizando el método de separación de variables, se propone

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Sustituyendo en la PDE:

$$X'Y + XY' = XY,$$

lo que al dividir por XY da:

$$\frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 1.$$

igualando con la constante de separación para determinar las ecuaciones diferenciales ordinarias, se tiene

$$\frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y} = \lambda,$$

Ecuaciones ODE:

$$X' = \lambda X,$$

$$Y - Y' = \lambda Y \Rightarrow Y' = (1 - \lambda)Y$$

Solución de las EDOs

Soluciones generales:

- $$X' = \lambda X \Rightarrow \int \frac{dX}{X} = \int \lambda dx \Rightarrow \ln X = \lambda x + a \Rightarrow X = e^{\lambda x} e^{a} = Ae^{\lambda x}$$

- $$Y' = (1-\lambda)Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = (1-\lambda))dy \Rightarrow \ln Y = (1-\lambda)y + b \Rightarrow Y = e^{(1-\lambda)y} e^{b} = Be^{(1-\lambda)y}$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = \left(Ae^{\lambda x}\right)\left(Be^{(1-\lambda)y}\right)$$

por lo que la solucion general es

$$u(x,y) = \sum_k C_k e^{\lambda_k x}\, e^{(1-\lambda_k)y}$$

Usando la condición de frontera (C.F.):

$$u(0,y) = \sum_k C_k e^{-\lambda_k y} = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

por el **principio de superposición**,

$$u(0,y) = C_1 e^{-\lambda_1 y} + C_2 e^{-\lambda_2 y} = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

identificamos

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 3, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$
$$u(x,y) = 2e^{2x-y} + 3e^{3x-2y}$$

¿Preguntas?