# Ejercicios resueltos de Ecuaciones Diferenciales

# ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

# Métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

1. La población $P(t)$ de un suburbio de una gran ciudad en un instante cualquiera $t > 0$ se rige por el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} P' = P(10^{-1} - 10^{-7}P) \\ P(0) = 5000 \end{cases} , \tag{1.1}$$

en el que $t > 0$ se mide en meses. Se pide:

(a) Calcular el valor límite de la población.

(b) ¿En qué momento será la población igual a la mitad de su valor límite?

*Solución:* (a) Calculamos en primer lugar el tamaño de la población en un instante cualquiera resolviendo el problema (1.1). La ecuación diferencial que participa de (1.1) tiene sus variables separadas:

$$\frac{P'}{P(10^{-1} - 10^{-7}P)} = 1 \,. \tag{1.2}$$

Integrando (1.2) entre 0 y $t$ obtenemos

$$10^7 \int_{5000}^{P(t)} \frac{dQ}{Q(10^6 - Q)} = t \,,$$

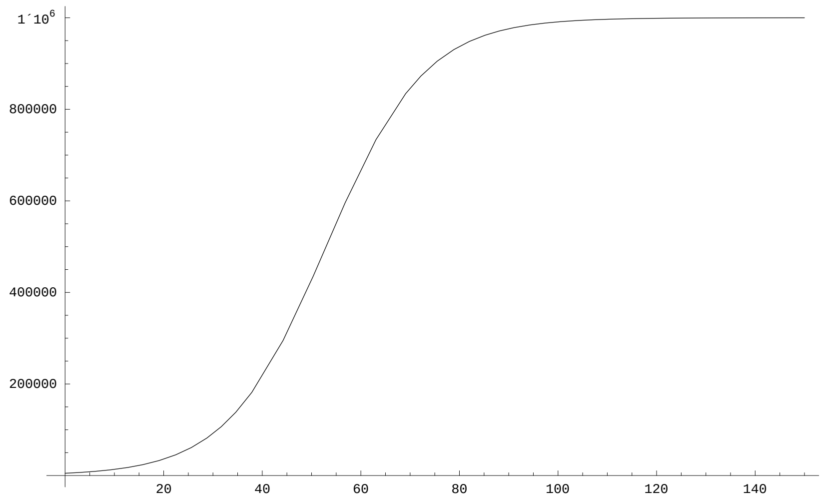



Figura 1.1: Representación gráfica de la solución en el intervalo $[0, 150]$

donde hemos efectuado el cambio de variable $Q = P(t)$. Teniendo en cuenta ahora que

$$\frac{1}{Q(10^6 - Q)} = 10^{-6}\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{10^6 - Q}\right),$$

concluimos tras una serie de cálculos rutinarios que la única solución a nuestro problema responde a la siguiente expresión:

$$P(t) = \frac{10^6 e^{\frac{t}{10}}}{199 + e^{\frac{t}{10}}}.$$

Consecuentemente, el valor límite de la población es

$$\lim_{t\to\infty}\{P(t)\} = 10^6,$$

como se deduce después de aplicar la regla de L'Hôpital.

(b) Para responder a esta cuestión tenemos que encontrar el valor $t_0 > 0$ para el que $P(t_0) = \frac{10^6}{2}$, es decir:

$$\frac{10^6 e^{\frac{t_0}{10}}}{199 + e^{\frac{t_0}{10}}} = \frac{10^6}{2} \Longleftrightarrow e^{\frac{t_0}{10}} = 199.$$

Tomando finalmente logaritmos neperianos concluimos que

$$t_0 = 10\log(199) \text{ meses} \approx 4{,}41 \text{ años}.$$

■

2. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $x' = e^t - \frac{2t}{t^2-1}$

   (b) $(x^2+9)y' + xy = 0$

   (c) $y' = 2xe^{-y}$

   (d) $x' = \frac{1+t}{t^2x^2}$

   (e) $x' = e^{t+x}$

*Solución:* (a) La ecuación diferencial tiene ya sus variables separadas. Integrando obtenemos

$$x(t) = e^t - \log(|t^2-1|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Separando las variables obtenemos

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{x^2+9}\,.$$

Integrando ahora con respecto a $x$ llegamos a

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2+9}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Separando las variables resulta $e^y y' = 2x$, de donde se obtiene la solución general

$$y(x) = \log(x^2+C)\,, \quad C \in \mathbb{R} : x^2 + C > 0\,,$$

sin más que integrar ambos miembros de la ecuación con respecto a la variable $x$. Obsérvese que, dado cualquier dato inicial $y(x_0) = y_0$, la solución sólo existe si

$$x^2 > -C = x_0^2 - e^{y_0}\,.$$

(d) Separando las variables obtenemos

$$x^2 x' = \frac{1+t}{t^2}\,.$$

Integrando ahora con respecto a $t$ en ambos miembros de la ecuación encontramos que la solución general viene dada por

$$x(t) = \left(3\log(|t|) - \frac{3}{t} + C\right)^{\frac{1}{3}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(e) Separando las variables resulta $e^{-x}x' = e^t$, de donde obtenemos la solución general

$$x(t) = -\log(C - e^t)\,, \quad C > e^t\,,$$

después de haber integrado la ecuación con respecto a la variable $t$. Obsérvese que, dado cualquier dato inicial $x(t_0) = x_0$, la solución sólo existe si

$$t < \log(C) \text{ con } C = e^{t_0} + e^{-x_0}\,.$$

■

3. Un reactor transforma plutonio 239 en uranio 238, que es relativamente estable para uso industrial. Después de 15 años se determina que el 0.0043 por ciento de la cantidad inicial de plutonio se ha desintegrado. Determina la semivida[1] de este isótopo si la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

*Solución:* Llamemos $A_0$ a la cantidad inicial ($t = 0$) de plutonio 239 y $x(t)$ a la cantidad de plutonio 239 que permanece sin desintegrar en el instante $t > 0$, con lo que $x'(t)$ indicará la velocidad de desintegración del plutonio 239. Como dicha velocidad es proporcional a la cantidad de isótopo restante (por hipótesis), la ley diferencial que rige el proceso de desintegración es

$$x' = \lambda x\,, \quad \text{sujeta a la condición inicial } x(0) = A_0\,, \tag{1.3}$$

con $\lambda < 0$ por tratarse de un proceso en el que la magnitud $x(t)$ está destinada a decrecer. La única solución del problema (1.3) es

[1]Tiempo necesario para que la cantidad inicial de átomos se reduzca a la mitad

$x(t) = A_0 e^{\lambda t}$. Para tener completamente determinada la solución necesitamos conocer el valor de la constante de desintegración $\lambda$, que puede encontrarse a través de la relación (establecida en el enunciado del ejercicio)

$$x(15) = \left(1 - \frac{0{,}0043}{100}\right) A_0 = \frac{99{,}9957}{100} A_0 \,,$$

por lo que ha de ser

$$A_0 e^{15\lambda} = \frac{99{,}9957}{100} A_0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{15} \log\left(\frac{99{,}9957}{100}\right) .$$

Finalmente, la semivida de este isótopo es el valor $t_0 > 0$ para el que se cumple la condición $x(t_0) = \frac{A_0}{2}$, es decir:

$$\begin{aligned} A_0 e^{\left(\frac{1}{15}\log\left(\frac{99{,}9957}{100}\right)\right)t_0} &= \frac{A_0}{2} \\ \Longleftrightarrow t_0 &= \frac{15\log(2)}{\log(100) - \log(99{,}9957)} = 241790 \text{ años} \,. \end{aligned}$$

■

4. Dadas $f, g$ dos funciones derivables, es sabido que la identidad

$$(fg)' = f'g' \tag{1.4}$$

es falsa en general. Si fijamos $f(x) = e^{x^3+2x}$, determina qué funciones $g$ satisfacen (1.4).

*Solución:* Por un lado

$$(fg)'(x) = e^{x^3+2x}((3x^2+2)g(x) + g'(x)) \,,$$

mientras que por otro lado

$$f'(x)g'(x) = e^{x^3+2x}(3x^2+2)g'(x) \,.$$

Entonces ha de cumplirse

$$(3x^2+1)g'(x) = (3x^2+2)g(x)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3x^2+2}{3x^2+1}\,.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial con variables separadas obtenemos

$$g(x) = Ce^{x+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

5. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$

   (b) $(t^2x^2 - 1)x' + 2tx^3 = 0$, haciendo $x = z^{-1}$

   (c) $x + (x-t)x' = 0$

   (d) $2t + 3x + (x+2)x' = 0$

*Solución:* (a) La ecuación puede reescribirse en forma canónica (con la derivada despejada) del siguiente modo:

$$y' = \frac{3x+y-2}{1-x}\,.$$

Veamos cómo podemos reducir esta ecuación diferencial a una de tipo homogéneo. Consideramos las rectas de ecuaciones

$$3x + y - 2 = 0\,, \quad 1 - x = 0\,,$$

las cuales se cortan en el punto $(x_0 = 1, y_0 = -1)$. A continuación se procede vía los siguientes cambios de variable:

$$X = x - x_0 = x - 1\,, \quad Y = y - y_0 = y + 1\,.$$

Entonces se tiene

$$Y' = y' = -\frac{Y+3X}{X} = -\frac{Y}{X} - 3\,, \tag{1.5}$$

que ya es una ecuación diferencial homogénea. Haciendo ahora el cambio de función incógnita $u = \frac{Y}{X}$ y usando (1.5) obtenemos

$$Y' = u + Xu' = -u - 3\,,$$

de donde se deduce que

$$u' = -\frac{2u+3}{X} \Longleftrightarrow \frac{u'}{2u+3} = -\frac{1}{X}\,.$$

Por tanto

$$u(X) = \frac{C}{X^2} - \frac{3}{2}\,, \quad C > 0\,.$$

Deshaciendo los cambios de variable anteriores para recuperar las variables originales llegamos a

$$y(x) = \frac{C}{x-1} - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}\,, \quad C > 0\,.$$

(b) Obviamente $x \equiv 0$ es solución. Busquemos todas las demás soluciones. Efectuando el cambio de función incógnita $x = z^{-1}$ en la ecuación obtenemos

$$-(t^2 z^{-2} - 1) z^{-2} z' + 2tz^{-3} = 0\,,$$

de donde resulta

$$z' = \frac{2tz^{-1}}{t^2 z^{-2} - 1} = \frac{2(\frac{z}{t})^{-1}}{(\frac{z}{t})^{-2} - 1}\,,$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Haciendo el cambio de variable $u = \frac{z}{t}$ obtenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$\left(\frac{1-u^2}{u+u^3}\right) u' = \frac{1}{t}\,. \tag{1.6}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1-u^2}{u+u^3} = \frac{1+3u^2}{u+u^3} - \frac{4u}{1+u^2}\,,$$

al integrar (1.6) con respecto a la variable $t$ llegamos a la siguiente expresión implícita para $u$:

$$\frac{|u|}{1+u^2} = C|t|\,, \quad C > 0\,.$$

Deshaciendo finalmente los dos cambios de variable efectuados[2] obtenemos

$$\frac{|x|}{1+t^2x^2} = C\,, \quad C > 0\,.$$

(c) La ecuación admite la solución trivial. Busquemos las restantes soluciones. Resolviendo la ecuación con respecto a la derivada obtenemos

$$x' = \frac{x}{t-x} = \frac{\frac{x}{t}}{1-\frac{x}{t}}\,,$$

que adopta la forma de una ecuación diferencial homogénea. El consabido cambio de variable $u = \frac{x}{t}$ conduce a

$$\left(\frac{1-u}{u^2}\right) u' = \frac{1}{t}\,,$$

cuyas soluciones satisfacen la relación implícita

$$-\frac{1}{u} - \log(|u|) = \log(|t|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$x\log(|x|) + t + Cx = 0\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(d) Resolviendo la ecuación con respecto a la derivada obtenemos

$$x' = -\frac{3x+2t}{x+2}\,,$$

que adopta la forma de una ecuación diferencial reducible a homogénea. Consideramos las rectas de ecuaciones

$$3x + 2t = 0\,, \quad x + 2 = 0\,,$$

que se cortan en el punto $(t_0 = 3, x_0 = -2)$. Efectuamos los siguientes cambios de variable:

$$T = t - t_0 = t - 3\,, \quad X = x - x_0 = x + 2\,.$$

Entonces

$$X' = x' = -\frac{3X+2T}{X} = -\frac{3\frac{X}{T}+2}{\frac{X}{T}}\,, \tag{1.7}$$

[2] $u = \frac{z}{t}$ y $x = z^{-1}$

que ya es homogénea. Haciendo ahora $u = \frac{X}{T}$ y usando (1.7) obtenemos

$$X' = u + Tu' = -\frac{3u+2}{u},$$

de donde se sigue que

$$\frac{u}{(u+1)(u+2)}\,u' = -\frac{1}{T}.$$

Por tanto, la siguiente relación implícita

$$\frac{(u(T)+2)^2}{|u(T)+1|} = \frac{C}{|T|}, \quad C > 0,$$

es satisfecha. Finalmente, deshaciendo los cambios de variable efectuados llegamos a

$$(x+2t-4)^2 = C|x+t-1|, \quad C > 0.$$

■

6. Encuentra la curva plana que pasa por $(1,1)$ y satisface la siguiente propiedad: dado un punto cualquiera de la misma, al considerar el corte de la recta tangente a la curva en dicho punto con el eje de ordenadas y el corte de la recta normal con el eje de abscisas, su distancia al origen es la misma.

*Solución:* Las ecuaciones de la recta tangente y normal en el punto $(t,x)$ son

$$(T-t)x' = X - x, \quad (T-t)\left(-\frac{1}{x'}\right) = X - x,$$

respectivamente, donde las variables están representadas con letras mayúsculas ($T$ para las ordenadas y $X$ para las abscisas). Llamando $(0,b)$ y $(a,0)$ a los puntos de corte de la recta tangente con el eje de ordenadas y de la recta normal con el eje de abscisas, respectivamente, obtenemos

$$-tx' = b - x, \quad (a-t)\left(-\frac{1}{x'}\right) = -x.$$

La propiedad que debe satisfacer la curva buscada es $|b| = |a|$, o equivalentemente
$$|x - tx'| = |xx' + t|\,, \tag{1.8}$$
junto con el dato inicial $x(1) = 1$. La condición (1.8) nos conduce a la resolución de los dos siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-t}{x+t} \\ x(1) = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = \frac{x+t}{t-x} \\ x(1) = 1 \end{cases},$$

asociados ambos a ecuaciones diferenciales homogéneas. El primero de ellos puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x' = \frac{\frac{x}{t}-1}{\frac{x}{t}+1} \\ x(1) = 1 \end{cases}.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{t}$ se llega a la siguiente ecuación diferencial con variables separadas:

$$\left(\frac{u+1}{u^2+1}\right) u' = -\frac{1}{t}\,,$$

con dato inicial asociado $u(1) = x(1) = 1$, cuya única solución[3] satisface la siguiente relación implícita:

$$2\arctan\left(\frac{x}{t}\right) + \log(x^2 + t^2) = \frac{\pi}{2} + \log(2)\,.$$

El tratamiento del segundo problema es análogo. La ecuación diferencial que se obtiene al efectuar el cambio de variable $u = \frac{x}{t}$ es

$$\left(\frac{1-u}{u^2+1}\right) u' = \frac{1}{t}\,,$$

con dato inicial asociado $u(1) = x(1) = 1$. La única solución de este problema de valores iniciales satisface

$$2\arctan\left(\frac{x}{t}\right) - \log(x^2 + t^2) = \frac{\pi}{2} - \log(2)\,.$$

■

[3] Es inmediato verificar las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución

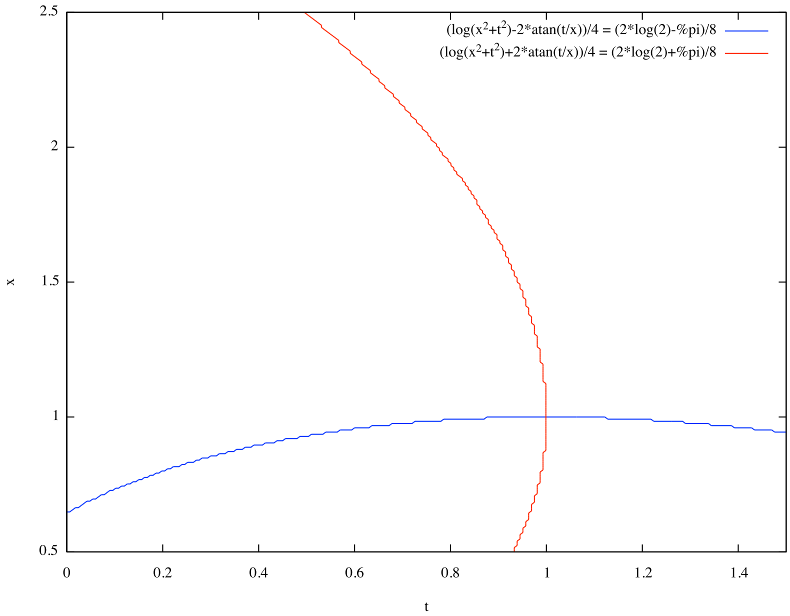



Figura 1.2: Representación gráfica de las soluciones del Ejercicio 6

7. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando (si procede) factores integrantes de la forma que se indica:

   (a) $\operatorname{sen}(tx) + tx\cos(tx) + t^2\cos(tx)x' = 0$

   (b) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{y} + x + \left(y - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{y^2}\right)y' = 0$

   (c) $(3xy^2 - 4y) + (3x - 4x^2y)y' = 0$, con $\mu(x,y) = x^n y^m$

   (Febrero 1993)

   (d) $xy'(y-1) - y = 0$, con $\mu(x,y) = \mu(y)$

   (e) $(t+1)^2 + (1+t^2)x' = 0$, con $\mu(t,x) = \mu(t+x)$

   (Febrero 1996)

   (f) $(1 + xy + y^2) + (1 + xy + x^2)y' = 0$, con $\mu(x,y) = \mu(xy)$

   (g) $(x + y^2) + 2(y^2 + y + x - 1)y' = 0$, con $\mu(x,y) = \mu(e^{ax+by})$

   (h) $2xyy' = x^2 + y^2 + 1$, con $\mu(x,y) = \mu(y^2 - x^2)$

*Solución:* (a) La ecuación es exacta con

$$P(t,x) = \operatorname{sen}(tx) + tx\cos(tx)\,, \quad Q(t,x) = t^2\cos(tx)\,.$$

En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t\cos(tx) - t^2 x \operatorname{sen}(tx) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P \Longrightarrow F(t,x) = t\operatorname{sen}(tx) + H(x)\,.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial x} = Q \Longrightarrow H' \equiv 0 \Longrightarrow H \equiv k \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto, la solución general responde a la siguiente relación implícita:

$$t\operatorname{sen}(tx) = C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) La ecuación es exacta con

$$P(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{y} + x\,, \quad Q(x,y) = y - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{y^2}\,.$$

En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \Longrightarrow F(x,y) = -\frac{\cos(2x)}{2y} + \frac{x^2}{2} + H(y)\,.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q \Longrightarrow H'(y) = y - \frac{1}{2y^2} \Longrightarrow H(y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y}\,.$$

Por tanto, la solución general responde a la siguiente relación implícita:

$$y^2 + x^2 + \frac{1}{y}\big(1 - \cos(2x)\big) = C \in \mathbb{R}\,.$$

(c) La ecuación no es exacta, ya que para las funciones

$$P(x,y) = y(3xy - 4)\,, \quad Q(x,y) = x(3 - 4xy)$$

no se satisface la condición de exactitud. En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(3xy - 2) \neq 3 - 8xy = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Buscamos $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que la función $\mu(x, y) = x^n y^m$ sea un factor integrante. Para ello imponemos exactitud sobre las funciones

$$P^\star(x, y) = y(3xy - 4)x^n y^m\,, \quad Q^\star(x, y) = x(3 - 4xy)x^n y^m\,,$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} 2(3xy - 2)x^n y^m &+ y(3xy - 4)x^n(my^{m-1}) \\ &= (3 - 8xy)x^n y^m + x(3 - 4xy)y^m(nx^{n-1}) \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$x^n y^m((3m + 4n)xy - (3n + 4m) - (7 - 14xy)) = 0\,. \tag{1.9}$$

Por tanto, para que $\mu(x, y) = x^n y^m$ sea un factor integrante para nuestra ecuación se ha de cumplir

$$3m + 4n = -14\,, \quad 3n + 4m = -7\,,$$

es decir, $m = 2$ y $n = -5$. Luego $\mu(x, y) = x^{-5}y^2$. Buscamos ahora $F(x, y)$ tal que, en primer lugar,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3 x^{-5}(3xy - 4) \Longrightarrow F(x, y) = -x^{-3}y^4 + x^{-4}y^3 + H(y)\,.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^{-4}y^2(3 - 4xy) = -4x^{-3}y^3 + 3x^{-4}y^2 + H'(y) \Longrightarrow H \equiv k \in \mathbb{R}\,.$$

Consecuentemente, la solución responde al siguiente esquema implícito:

$$x^{-4}y^3(1 - xy) = C \in \mathbb{R}\,.$$

(d) Sean $P(x, y) = -y$ y $Q(x, y) = x(y - 1)$. En este caso la ecuación no es exacta, ya que

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv -1\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y - 1\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=\mu(y)$. Para ello multiplicamos la ecuación por $\mu(y)$ e imponemos la condición de exactitud a las funciones

$$P^\star(x,y)=-y\mu(y)\,,\quad Q^\star(x,y)=x(y-1)\mu(y)\,.$$

Ha de cumplirse

$$-y\mu'(y)-\mu(y)=(y-1)\mu(y)\Longrightarrow \mu(y)=e^{-y}\,.$$

Buscamos finalmente $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-ye^{-y}\,,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x(y-1)e^{-y}\,.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}&F(x,y)=-xye^{-y}+H(y)\,,\\ &x(y-1)e^{-y}=-xe^{-y}+xye^{-y}+H'(y)\,,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $H\equiv k\in\mathbb{R}$. En consecuencia, la solución de la ecuación de partida responde a la siguiente relación implícita:

$$xye^{-y}=C\in\mathbb{R}\,.$$

(e) La ecuación no es exacta, ya que si

$$P(t,x)=(t+1)^2\,,\quad Q(t,x)=1+t^2\,,$$

se observa que

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0\neq 2t=\frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu(t,x)=\mu(t+x)$. La condición suficiente y necesaria que debe cumplirse para que en este caso $\mu(t+x)$ sea un factor integrante es la siguiente:

$$(t+1)^2\mu'(t+x)=2t\mu(t+x)+(1+t^2)\mu'(t+x)\,.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $\mu(t+x)=e^{t+x}$. Buscamos entonces $F(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t}=(t+1)^2e^{t+x}\Longrightarrow F(t,x)=(1+t^2)e^{t+x}+H(x)\,.$$

Finalmente, la función $H(x)$ queda determinada sin más que imponer la condición

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1+t^2)e^{t+x} + H'(x) = Q(t,x)\mu(t+x) = (1+t^2)e^{t+x}\,,$$

que nos conduce a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la solución $x(t)$ viene dada por la ley implícita

$$(1+t^2)e^{t+x} = C \in \mathbb{R}\,.$$

(f) La ecuación no es exacta, ya que si consideramos

$$P(x,y) = 1 + xy + y^2\,, \quad Q(x,y) = 1 + xy + x^2\,,$$

se observa que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y \neq y + 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \mu(xy)$. La condición suficiente y necesaria que debe cumplirse para que en este caso $\mu(xy)$ sea un factor integrante es la siguiente:

$$\begin{aligned}(x+2y)\mu(xy) &+ x(1+xy+y^2)\mu'(xy)\\ &= (y+2x)\mu(xy) + y(1+xy+x^2)\mu'(xy)\,.\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $\mu(xy) = e^{xy}$. Buscamos entonces $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (1+xy+y^2)e^{xy} \Longrightarrow F(x,y) = (x+y)e^{xy} + H(y)\,.$$

Finalmente, la función $H(y)$ queda determinada al imponer la condición

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2+xy+1)e^{xy} + H'(y) = Q(x,y)\mu(xy) = (1+xy+x^2)e^{xy}\,,$$

que nos conduce a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la solución $y(x)$ viene dada por la ley implícita

$$(x+y)e^{xy} = C \in \mathbb{R}\,.$$

(g) La ecuación no es exacta, ya que si consideramos

$$P(x,y) = x + y^2\,, \quad Q(x,y) = 2(y^2 + y + x - 1)\,,$$

se observa que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2 = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu = \mu(e^{ax+by})$, el cual habrá de verificar la siguiente condición suficiente y necesaria:

$$\begin{aligned} 2y\mu(e^{ax+by}) &+ b(x+y^2)e^{ax+by}\mu'(e^{ax+by}) \\ &= 2\mu(e^{ax+by}) + 2a(y^2+y+x-1)e^{ax+by}\mu'(e^{ax+by})\,, \end{aligned}$$

que nos conduce como única opción a elegir un factor integrante de la forma específica $\mu(x,y) = e^{x+2y}$. Buscamos ahora $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x+y^2)e^{x+2y} \Longrightarrow F(x,y) = (x-1+y^2)e^{x+2y} + H(y)\,.$$

Finalmente, la función $H(y)$ queda determinada al imponer la condición

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y+x-1+y^2)e^{x+2y} + H'(y) \\ &= Q(x,y)\mu(x,y) = 2(y^2+y+x-1)e^{x+2y}\,, \end{aligned}$$

que nos conduce nuevamente a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la solución $y(x)$ viene dada por la ley implícita

$$(x-1+y^2)e^{x+2y} = C \in \mathbb{R}\,.$$

(h) La ecuación no es exacta, ya que si consideramos

$$P(x,y) = x^2 + y^2 + 1\,, \quad Q(x,y) = -2xy\,,$$

se observa que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Buscamos un factor integrante de la forma $\mu = \mu(y^2 - x^2)$, el cual habrá de verificar la siguiente condición suficiente y necesaria:

$$\begin{aligned} 2y\mu(y^2-x^2) &+ 2y(x^2+y^2+1)\mu'(y^2-x^2) \\ &= -2y\mu(y^2-x^2) + 4x^2y\mu'(y^2-x^2)\,. \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación (con variables separadas) obtenemos

$$\mu(y^2 - x^2) = \frac{1}{(y^2 - x^2 + 1)^2} \,.$$

Buscamos ahora $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{(y^2 - x^2 + 1)^2} \Longrightarrow {}^4 F(x, y) = \frac{x}{y^2 - x^2 + 1} + H(y) \,.$$

Finalmente, la función $H(y)$ queda determinada al imponer la condición

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(y^2 - x^2 + 1)^2} + H'(y) \\ &= Q(x, y)\mu(y^2 - x^2) = -\frac{2xy}{(y^2 - x^2 + 1)^2} \,, \end{aligned}$$

que nos conduce a $H \equiv k \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la solución general $y(x)$ tiene las dos siguientes ramas:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + Cx - 1} \,, \quad C \in \mathbb{R} \,.$$

■

8. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Puede la función $\phi(t) = t^2$, definida para $t \in \mathbb{R}$, resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea? ¿Y una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea?

   (b) ¿Pueden las funciones $\phi(t) = e^t$ y $\psi(t) = e^{-t}$, definidas para $t \in \mathbb{R}$, resolver una misma ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea? ¿y una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea?

---

[4]Para calcular una primitiva de $\frac{x^2+y^2+1}{(y^2-x^2+1)^2}$ con respecto a la variable $x$ basta con observar que la siguiente descomposición es satisfecha:

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{(y^2 - x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x - \sqrt{1 + y^2})^2} + \frac{1}{(x + \sqrt{1 + y^2})^2}\right) \,.$$

En caso afirmativo, proporciona ejemplos explícitos.

*Solución:* (a) La función $\phi(t) = t^2$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, NO puede resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea: $x'(t) = a(t)x(t)$, ya que de hacerlo tendría que cumplirse

$$2t = a(t)t^2 \Longleftrightarrow a(t) = \frac{2}{t} \;\; \forall t \neq 0\,,$$

y el coeficiente $a(t)$ sólo estaría definido en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por el contrario, la respuesta es SI para el caso de la ecuación diferencial no homogénea: $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. En efecto, bastaría con encontrar funciones continuas $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $2t = a(t)t^2 + b(t)$. Por ejemplo, $a \equiv 0$ y $b(t) = 2t$.

(b) Las funciones $\phi(t) = e^t$ y $\psi(t) = e^{-t}$, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, NO pueden resolver una misma ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea, pues de hacerlo tendrían que verificarse las dos siguientes condiciones:

$$e^t = a(t)e^t\,, \quad -e^{-t} = a(t)e^{-t}\,,$$

que a la postre se traducen en que simultáneamente $a \equiv 1$ y $a \equiv -1$. Para el caso no homogéneo, las condiciones homólogas a las anteriores son

$$e^t = a(t)e^t + b(t)\,, \quad -e^{-t} = a(t)e^{-t} + b(t)\,,$$

que tras un cálculo sencillo conducen a las siguientes expresiones de los coeficientes:

$$a(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\,, \quad b(t) = -\frac{2}{e^t - e^{-t}}\,,$$

las cuales son sólo válidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

■

9. Calcula los valores de la constante $\mu \in \mathbb{R}$ que hacen que la ecuación diferencial $x' = (\mu + \cos^2 t)x$ tenga una solución $\pi$-periódica[5] no trivial.

[5] Es decir, $x(t) = x(t + \pi) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

*Solución:* Se trata de una ecuación diferencial con las variables separadas, cuya solución general[6] es

$$x(t) = Ce^{(\mu+\frac{1}{2})t+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t)}\,.$$

Al evaluarla en $t+\pi$ se obtiene

$$x(t+\pi) = Ce^{(\mu+\frac{1}{2})(t+\pi)+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t+2\pi)} = Ce^{(\mu+\frac{1}{2})(t+\pi)+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t)}\,,$$

luego la condición de $\pi-$periodicidad se reduce a $e^{(\mu+\frac{1}{2})\pi} = 1$, es decir, $\mu = -\frac{1}{2}$.

■

10. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales usando el método de variación de las constantes:

    (a) $x' - tx = 3t$

    (b) $y' = 5y + \cos(x)$

    (c) $x' = \left(\frac{2t}{t^2+1}\right) x + t^3$

    (d) $x' - 2x = 4e^{2t}$

*Solución:* (a) Resolviendo en primer lugar la correspondiente ecuación homogénea: $x' = tx$, que tiene sus variables separadas, obtenemos

$$x_h(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Asumimos ahora $C = C(t)$ y reconsideramos la ecuación diferencial completa. Se tiene

$$x' = (C' + Ct)e^{\frac{t^2}{2}} = t\big(Ce^{\frac{t^2}{2}}\big) + 3t\,,$$

[6]Para llegar a la expresión final de la misma es necesario calcular previamente una primitiva de $\cos^2(t)$, tarea que resulta bastante simple si se escribe

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\,.$$

luego $C'(t) = 3te^{-\frac{t^2}{2}}$. Por consiguiente

$$C(t) = -3e^{-\frac{t^2}{2}} + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

(b) La solución general de la ecuación homogénea: $y' = 5y$, es

$$y_h = Ce^{5x}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Variando la constante ($C = C(x)$) y volviendo a la ecuación completa se obtiene

$$(C' + 5C)e^{5x} = 5Ce^{5x} + \cos(x) \Longrightarrow C'(x) = \cos(x)e^{-5x}\,,$$

luego ha de ser

$$C(x) = \frac{1}{26}e^{-5x}(\operatorname{sen}(x) - 5\cos(x)) + K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

y, por tanto,

$$y(x) = \frac{1}{26}(\operatorname{sen}(x) - 5\cos(x)) + Ke^{5x}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

(c) La solución general de la ecuación homogénea: $x' = \frac{2t}{t^2+1}x$, es

$$x_h = C(t^2 + 1)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Variando la constante ($C = C(t)$) y volviendo a la ecuación completa se obtiene

$$C'(t^2 + 1) + 2Ct = 2Ct + t^3 \Longrightarrow C'(t) = \frac{t^3}{t^2 + 1}\,,$$

luego ha de ser

$$C(t) = \frac{1}{2}\big(t^2 - \log(t^2 + 1)\big) + K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

y, por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{2}\big(t^2 - \log(t^2 + 1) + K\big)(t^2 + 1)\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

(d) La solución general de la ecuación homogénea: $x' - 2x = 0$, es

$$x_h = Ce^{2t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Si asumimos $C = C(t)$ y recuperamos la ecuación completa, resulta

$$(C' + 2C - 2C)\, e^{2t} = 4\, e^{2t} \Longrightarrow C' \equiv 4 \Longrightarrow C(t) = 4t + K\,,\ K \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$x(t) = (4t + K)\, e^{2t}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

■

11. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales mediante la fórmula de variación de las constantes:

    (a) $x' + 3x = e^{-3t}\,, \quad x(1) = 5$

    (b) $x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad x(2) = 0$

    (c) $x' = \cosh(t)x + e^{\operatorname{senh}(t)}\,, \quad x(0) = 1$

    *Solución:* (a) La solución general de la ecuación homogénea (que tiene sus variables separadas) es

    $$x_h(t) = Ce^{-3t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

    Variando la constante ($C = C(t)$) y retomando la ecuación completa obtenemos

    $$(C' - 3C)e^{-3t} + 3Ce^{-3t} = e^{-3t} \Longrightarrow C(t) = t + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

    En consecuencia, la solución general de la ecuación completa viene dada por

    $$x(t) = (t + K)e^{-3t}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

    Imponiendo en última instancia la condición inicial $x(1) = 5$ concluimos que

    $$(1 + K)e^{-3} = 5 \Longrightarrow K = 5e^3 - 1\,,$$

    luego

    $$x(t) = (t + 5e^3 - 1)e^{-3t}\,.$$

    (b) Resolviendo la ecuación homogénea (que tiene sus variables separadas) obtenemos

    $$x_h(t) = Ct\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Sustituyendo entonces la expresión $x(t) = C(t)t$ en la ecuación completa llegamos a

$$C't + C - C = \frac{1}{1+t^2} \Longrightarrow C'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}$$
$$\Longrightarrow C(t) = \log\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces la solución general de la ecuación completa viene dada por

$$x(t) = \left(\log\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) + K\right) t\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo finalmente la condición inicial obtenemos

$$2\left(\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + K\right) = 0 \Longrightarrow K = -\log\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Por consiguiente, la solución buscada es

$$x(t) = t\log\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{2\sqrt{1+t^2}}\right)\,.$$

(c) La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h(t) = C\,e^{\operatorname{senh}(t)}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Si variamos la constante y ensayamos en la ecuación completa con $x(t) = C(t)e^{\operatorname{senh}(t)}$ obtenemos

$$(C' + C\cosh(t))e^{\operatorname{senh}(t)} = C\cosh(t)e^{\operatorname{senh}(t)} + e^{\operatorname{senh}(t)}$$
$$\Longrightarrow C' \equiv 1 \Longrightarrow C(t) = t + K\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto

$$x(t) = (t+K)\,e^{\operatorname{senh}(t)}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Al imponer finalmente $x(0) = 1$ se deduce que $K = 1$ y, en consecuencia, que la única solución de nuestro problema de valores iniciales es la dada por

$$x(t) = (t+1)e^{\operatorname{senh}(t)}\,.$$

■

12. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $a(t) \geq c > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y
$$\lim_{t\to\infty} \{b(t)\} = 0\,. \tag{1.10}$$
Demuestra que todas las soluciones de la ecuación diferencial
$$x' = -a(t)x + b(t)$$
tienden a cero cuando $t \to \infty$. (*Indicación*: usa la regla de L'Hôpital en el segundo término de la fórmula de variación de las constantes).

*Solución:* Las soluciones de la ecuación homogénea $x' = -a(t)x$ vienen dadas por
$$x_h(t) = Ce^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$
Variando la constante ($C = C(t)$) concluimos que la solución general de la ecuación lineal $x' = -a(t)x + b(t)$ es
$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \left( \int_{t_0}^t b(s)\, e^{\int_{t_0}^s a(\tau)\,d\tau}\, ds \right) e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\,, \tag{1.11}$$
donde hemos asumido $x(t_0) = x_0$ con $t_0$ y $x_0$ arbitrarios. Estudiamos en primer lugar el límite en infinito del primer término de (1.11):
$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{t\to\infty} \left\{ \left| x_0\, e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \right| \right\} &\leq |x_0| \lim_{t\to\infty} \left\{ e^{-\int_{t_0}^t c\,ds} \right\} \\ &= |x_0| \lim_{t\to\infty} \left\{ e^{-c(t-t_0)} \right\} = 0\,. \end{aligned}$$
Para el segundo término obtenemos
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{\int_{t_0}^t b(s)\, e^{\int_{t_0}^s a(\tau)\,d\tau}\, ds}{e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}} \right\} &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{b(t)\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}}{a(t)\, e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}} \right\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{b(t)}{a(t)} \right\} = 0\,, \end{aligned}$$
en virtud de (1.10) y del hecho de que $\left| \frac{1}{a(t)} \right| \leq \frac{1}{c}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Obsérvese que hemos utilizado la regla de L'Hôpital (tal como se indicaba en el enunciado) y el teorema fundamental del cálculo para resolver la eventual indeterminación planteada por el límite anterior.

■

13. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

   (a) $3tx' - 2x = \frac{t^3}{x^2}$

   (b) $x' = e^t x^7 + 2x$

   (c) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\log(x)}{x} y^2$

*Solución:* (a) Dividiendo la ecuación por $3t$, con $t \neq 0$, obtenemos

$$x' - \frac{2}{3t}x = \frac{t^2}{3}x^{-2}\,. \tag{1.12}$$

Multiplicando ahora la ecuación (1.12) por $x^2$ llegamos a

$$x^2 x' - \frac{2}{3t}x^3 = \frac{t^2}{3}\,,$$

que es equivalente a la ecuación

$$z' - \frac{2}{t}z = \frac{t^2}{3} \tag{1.13}$$

vía el cambio de variable $z = \frac{x^3}{3}$. La solución general de la ecuación (1.13) es

$$z(t) = t^2\left(\frac{t}{3} + C\right)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$x(t) = (t^3 + Ct^2)^{\frac{1}{3}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Multiplicando la ecuación por $x^{-7}$ obtenemos $x^{-7}x' = e^t + 2x^{-6}$. Planteamos el cambio de variable $z = \frac{1}{6}x^{-6}$, en cuyo caso la ecuación anterior puede reformularse como

$$z' + 12z = -e^t\,. \tag{1.14}$$

La solución general de (1.14) es

$$z(t) = -\frac{1}{13}e^t + Ce^{-12t}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$x(t) = \left( Ce^{-12t} - \frac{6}{13} e^t \right)^{-\frac{1}{6}} , \quad C \in \mathbb{R} .$$

(c) Multiplicando la ecuación por $y^{-2}$ obtenemos $y^{-2}y' = \frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{xy}$. Planteamos el cambio de variable $z = -\frac{1}{y}$, en cuyo caso la ecuación anterior puede reformularse como

$$z' = \frac{z}{x} + \frac{\log(x)}{x} . \tag{1.15}$$

La solución general de (1.15) es

$$z(x) = Cx - \log(x) - 1 , \quad C \in \mathbb{R} .$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$y(x) = \frac{1}{1 + \log(x) - Cx} , \quad C \in \mathbb{R} .$$

■

14. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de Riccati usando la solución particular proporcionada:

    (a) $y' = y^2 - xy + 1 , \quad y_p(x) = x$

    (b) $y' = x^{-4} - y^2 , \quad y_p(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

*Solución:* (a) Efectuamos el cambio de función incógnita

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - x} ,$$

de modo que

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} = \left( \frac{1}{u} \right)' &= y' - 1 = y^2 - xy \\ &= \left( \frac{1}{u} + x \right)^2 - x \left( \frac{1}{u} + x \right) = \frac{1}{u^2} + \frac{x}{u} , \end{aligned}$$

o equivalentemente $u' = -xu - 1$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución general viene dada por

$$u(x) = \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable concluimos que la solución de la ecuación de Riccati de partida es

$$y(x) = x + e^{\frac{x^2}{2}} \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^{-1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Efectuamos el cambio de función incógnita

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\,,$$

de modo que

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} &= \left(\frac{1}{u}\right)' = y' + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^4} - y^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^4} - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{1}{u^2} - \frac{2}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{u}\,, \end{aligned}$$

o equivalentemente $u' = 1 + \frac{2}{x}(1 - \frac{1}{x})u$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución general viene dada por

$$u(x) = x^2 \left(Ce^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}\right)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable concluimos que la solución de la ecuación de Riccati de partida es

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(x - 1 + \frac{1}{Ce^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}}\right)\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

15. Se considera la ecuación diferencial de Riccati

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2\,. \tag{1.16}$$

(a) Busca una solución particular de la forma $y = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Encuentra la solución que cumple $y(1) = 2$ y calcula, si es posible, el límite cuando $x \to \infty$ de dicha solución.

*Solución:* (a) La función $y = x^\alpha$ resuelve la ecuación diferencial (1.16) si y solamente si $\alpha x^{\alpha-1} = -x^{-2} - x^{\alpha-1} + x^{2\alpha}$, que únicamente admite la elección $\alpha = -1$. En consecuencia, la solución particular buscada es $y(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Para la solución particular encontrada en (a), consideramos el cambio de función incógnita

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - \frac{1}{x}}\,. \tag{1.17}$$

Entonces

$$\begin{aligned} -\frac{u'}{u^2} = \left(\frac{1}{u}\right)' &= y' + \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{y}{x} \\ &= \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

luego resolver el problema de valores iniciales asociado a (1.16) con dato inicial $y(1) = 2$ equivale a resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden $u' + \frac{u}{x} = -1$ con dato inicial $u(1) = 1$. La única solución de este problema puede calcularse fácilmente:

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3 - x^2}{x}\right).$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable (1.17) se llega a la solución del problema de Riccati de partida:

$$y(x) = \frac{x^2 + 3}{x(3 - x^2)}\,. \tag{1.18}$$

Finalmente, por la propia definición de solución de un problema de valores iniciales concluimos que no tiene sentido calcular el límite de (1.18) cuando $x \to \infty$ porque $y(x)$ tiene una asíntota en $x = \sqrt{3}$.

■

16. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales usando el método que convenga en cada caso:

   (a) $3e^t \tan(x) + (2 - e^t) \sec(x)^2 x' = 0$

   (b) $(3t^2 x + x^3)x' + 2t^3 = 0$

   (c) $xy' + y = y^2 \log(x)$

   (d) $t \cos(t + x) + \operatorname{sen}(t + x) + t \cos(t + x)x' = 0$

   (e) $(3tx + x^2) + (3tx + t^2)x' = 0$

   (f) $tx \cos(tx) + \operatorname{sen}(tx) + (t^2 \cos(tx) + e^x)x' = 0$

   (g) $3x + 3e^t x^{\frac{2}{3}} + tx' = 0$

   (h) $x' = \frac{1}{x+t}$

   (i) $y' = \frac{y}{2y \log(y)+y-x}$

   (j) $y' = 1 + e^{2x}$

   (k) $y' = \frac{y}{x}(\log(y) - \log(x))$

   (l) $xy' + y = 2x$

   (m) $y' = \log(x^y)$

   *Solución:* (a) Variables separadas: $x(t) = \arctan\left(\frac{C}{(2-e^t)^3}\right)$, $C \in \mathbb{R}$.

   (b) Homogénea: $x' = -\frac{2t^3}{3t^2x+x^3} = -\frac{2}{3\frac{x}{t}+(\frac{x}{t})^3}$. La solución general viene dada por la siguiente relación implícita:[7]

$$(x + t)^3(x^4 + 3t^2x^2 + 2t^4) = C(x + 2t)^3 , \quad C \in \mathbb{R} .$$

[7] El siguiente cálculo es útil:

$$\begin{aligned}\int \frac{u\,du}{u^4 + 3u^2 + 2} &= \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 + 3v + 2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dv}{v+1} - \int \frac{dv}{v+2}\right) = \frac{1}{2}\big(\log(v + 1) - \log(v + 2)\big)\end{aligned}$$

(c) Bernoulli: $y' + \frac{y}{x} = \frac{\log(x)}{x}\, y^2$. La solución general es[8]

$$y(x) = \frac{1}{Cx + \log(x) + 1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(d) Exacta con

$$P(t,x) = t\cos(t+x) + \operatorname{sen}(t+x)\,, \quad Q(t,x) = t\cos(t+x)\,.$$

En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \cos(t+x) - t\operatorname{sen}(t+x) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

La solución general viene dada por[9]

$$x(t) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{C}{t}\right) - t\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(e) Homogénea: $x' = -\frac{3tx+x^2}{3tx+t^2} = -\frac{3\frac{x}{t}+(\frac{x}{t})^2}{3\frac{x}{t}+1}$. La solución general viene dada por la siguiente relación implícita:

$$\frac{tx}{(t-x)^4} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(f) Exacta con

$$P(t,x) = tx\cos(tx) + \operatorname{sen}(tx)\,, \quad Q(t,x) = t^2\cos(tx) + e^x\,.$$

En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2t\cos(tx) - t^2 x\operatorname{sen}(tx) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

La solución general viene dada por la siguiente relación implícita:[10]

$$e^x + t^2\cos(tx) = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(g) Bernoulli: Para $t \neq 0$ se tiene $x' + \frac{3}{t}x = -\frac{3e^t}{t}x^{\frac{2}{3}}$. La solución general es

$$x(t) = \left(\frac{C - e^t}{t}\right)^3, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

[8] La integral $\int \frac{\log(x)}{x^2}\,dx$ se resuelve por partes

[9] $\int t\cos(t+x)\,dt = t\operatorname{sen}(t+x) + \cos(t+x)$ (por partes)

[10] $\int t\cos(tx)\,dt = \frac{t}{x}\operatorname{sen}(tx) + \frac{1}{x^2}\cos(tx)$ (por partes)

(h) Haciendo el cambio de variable $u = x + t$ obtenemos $u' = \frac{u+1}{u}$, que es una ecuación con las variables separadas cuya solución general viene dada por

$$u - \log(|u+1|) = C + t\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la siguiente expresión implícita para la solución:

$$x = \log(|x+t+1|) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Exacta con $P(x,y) = -y$ y $Q(x,y) = 2y\log(y) + y - x$. En efecto:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

La solución general viene dada por

$$y(x) = y(y\log(|y|) - x) = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(j) Variables separadas: Integrando en los dos miembros con respecto a $x$ obtenemos

$$y(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(k) Homogénea: $y' = \frac{y}{x}\log\left(\frac{y}{x}\right)$. La solución general viene dada por la siguiente expresión:

$$y(x) = xe^{Cx+1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(l) Lineal de primer orden: Si $x \neq 0$ se tiene $y' + \frac{y}{x} = 2$. La solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h(x) = \frac{C}{x}$, con $C \in \mathbb{R}$. Usando el método de variación de las constantes encontramos que la solución general de la ecuación completa viene dada por

$$y(x) = x + \frac{C}{x}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

(m) Variables separadas: $\frac{y'}{y} = \log(x)$, de donde se desprende que la solución general viene dada por

$$y(x) = Ce^{x(\log(x)-1)}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

■

17. Decide de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    (a) Una solución del problema de valores iniciales

    $$\begin{cases} x' = x^2 + t^2 \\ x(1) = 2 \end{cases},$$

    definida en un intervalo abierto que contenga a $[1, 2]$, satisface $x(2) = 1$.

    (b) La ecuación de Riccati $y' + y + y^2 + e^x = 0$ se transforma en una ecuación diferencial lineal de orden dos:

    $$z'' + a(x)z' + b(x)z + c(x) = 0\,,$$

    mediante el cambio de variable $y = \frac{z'}{z}$.

    (Septiembre 2003)

*Solución:* (a) FALSA. Claramente $x' \geq 0$, por lo que cualquier solución es creciente. Si además ha de satisfacer $x(1) = 2$ no puede darse $x(2) = 1$, pues para ello tendría que decrecer.

(b) VERDADERA. Derivando el cambio de variable obtenemos

$$y' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2,$$

luego la ecuación resultante en la nueva función incógnita $z(x)$ es $z'' + z' + e^x z = 0$, que es lineal y de segundo orden.

■

CAPÍTULO 2

# La ecuación lineal I: aspectos teóricos sobre la existencia y unicidad de solución y matrices fundamentales

1. Se considera la ecuación diferencial
$$x' = F(t,x)\,, \tag{2.1}$$
donde $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ es una función continua que satisface:

   (a) Dado cualquier $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, existe una única solución $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ del problema de valores iniciales constituido por la ecuación diferencial (2.1) y la condición inicial $x(t_0)=x_0$.

   (b) El conjunto de todas las soluciones de la ecuación (2.1) definidas en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

   Demuestra que (2.1) es una ecuación lineal homogénea.

   *Solución:* Se trata de probar que, bajo las condiciones (a) y (b), el segundo miembro de la ecuación diferencial (2.1) ha de ser de la forma $F(t,x)=a(t)x$ para alguna función $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. La condición (a) es necesaria para que (2.1) sea lineal. De (b) se desprende que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de (2.1), entonces cualquier combinación lineal de ellas también lo es. Por consiguiente
$$\begin{aligned}F(t,\lambda_1x_1(t)+\lambda_2x_2(t)) &= (\lambda_1x_1(t)+\lambda_2x_2(t))'\\ &= \lambda_1x_1'(t)+\lambda_2x_2'(t)=\lambda_1F(t,x_1)+\lambda_2F(t,x_2)\end{aligned}$$

para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que $F(t,x)$ debe ser lineal en la segunda variable, luego $F(t,x) = a(t)x$.

■

2. Se considera el problema de valores iniciales

$$t^\sigma x' = A(t)x\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad t \in (0,\infty)\,, \tag{2.2}$$

donde $\sigma \in (0,1)$, $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua y $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Por una solución de (2.2) entenderemos una función

$$x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N) \cap C^1((0,\infty), \mathbb{R}^N)$$

que satisface la condición inicial y la ecuación diferencial en $(0,\infty)$.

(a) ¿Se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad conocido para la ecuación diferencial lineal?

(b) Prueba que el problema (2.2) es equivalente a encontrar una función $x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$ que satisfaga

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,, \quad t \in (0,\infty)\,. \tag{2.3}$$

(c) Define la sucesión de iterantes de Picard asociada a (2.3) y prueba que converge uniformemente en compactos de $[0,\infty)$ hacia una función $\rho(t) \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$.

(d) Prueba que $\rho(t)$ resuelve (2.3), justificando de modo riguroso el paso al límite en la integral.

(e) Demuestra que la solución de (2.2) es única.

(f) Construye un problema de valores iniciales del tipo (2.2) cuya solución no pertenezca a $C^1([0,\infty), \mathbb{R}^N)$.

(Febrero 1990)

*Solución:* (a) En general NO. La ecuación puede reescribirse como $x' = B(t)x$ con $B(t) = \frac{A(t)}{t^\sigma}$, función que no podemos garantizar que sea continua en $t = 0$. Por tanto, no puede aplicarse el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales.

(b) De la formulación diferencial (2.2) se pasa a la formulación integral (2.3) sin más que integrar convenientemente la ecuación entre 0 y $t$. Sean $x(t)$ una solución de (2.2) y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$x(t) - x(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t x'(s)\, ds = \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,,$$

luego

$$x(t) = x(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,.$$

Comprobemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \right\} = \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,. \tag{2.4}$$

Para ello demostraremos que la diferencia

$$\int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds - \int_\varepsilon^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds = \int_0^\varepsilon \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds$$

tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\varepsilon \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \right\| &\le \int_0^\varepsilon \frac{\|A(s)x(s)\|}{s^\sigma}\, ds \\ &\le M \int_0^\varepsilon s^{-\sigma}\, ds = \frac{M}{1-\sigma}\, \varepsilon^{1-\sigma} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue (2.4). El enunciado recíproco se comprueba derivando convenientemente la ecuación integral (2.3). Supongamos para ello que $x \in C([0,\infty), \mathbb{R}^N)$ satisface

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,.$$

En primer lugar, por la continuidad de $x(t)$ en $t = 0$ es inmediato comprobar que se recupera la condición inicial $x(0) = x_0$. Por otro lado, si $t > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds + \int_{t_0}^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \\ &= C + \int_{t_0}^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,, \end{aligned}$$

donde

$$C = \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds \in \mathbb{R}^N .$$

Finalmente, como la función $t \mapsto \frac{A(t)}{t^\sigma} x(t)$ es continua en $(0, \infty)$ podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo para concluir que

$$x'(t) = \frac{A(t)}{t^\sigma}\, x(t)\,, \quad t \in (0, \infty)\,.$$

(c) Definimos la sucesión de iterantes de Picard de la siguiente forma:

$$x_0(t) \equiv x_0\,, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds\,.$$

Veamos que la definición recursiva de esta sucesión tiene sentido:

- Es obvio que la función $x_0(t)$ está bien definida.
- Supongamos que $x_n(t)$ está bien definida y es continua en $[0, t]$ y comprobemos que $x_{n+1}(t)$ también lo cumple. La correcta definición de $x_{n+1}(t)$ es consecuencia de que $A(s)$ y $x_n(s)$ son acotadas en $[0, t]$ (por ser continuas) y de que $s^{-\sigma}$ es integrable en $[0, t]$ (por ser $0 < \sigma < 1$), de donde se desprende que $\frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)$ es integrable en $[0, t]$. Además, la función

$$t \mapsto \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds$$

  es continua, luego todas las iterantes $x_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}^N$ están bien definidas y son continuas.

Estudiamos a continuación la convergencia uniforme de $\{x_n(t)\}$ sobre compactos $I = [0, T] \subset [0, \infty)$. Haciendo uso del principio de inducción puede demostrarse que

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq \frac{\|x_0\| M_T^{n+1}}{(n+1)!(1-\sigma)^{n+1}}\, t^{(n+1)(1-\sigma)} \tag{2.5}$$

para todo $t \in I$, donde $M_T = \text{máx}_{t \in I}\{\|A(t)\|\}$. En efecto, evaluando las dos primeras diferencias: $x_1(t) - x_0(t)$ y $x_2(t) - x_1(t)$, ya podemos intuir que la cota que aparece en el segundo miembro de (2.5) es la adecuada:

$$\begin{aligned}
\|x_1(t) - x_0(t)\| &= \left\| \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_0 \, ds \right\| \\
&\leq \|x_0\| M_T \int_0^t s^{-\sigma} \, ds = \|x_0\| M_T \, \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma}\,, \\
\|x_2(t) - x_1(t)\| &\leq \int_0^t \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma} \|x_1(s) - x_0(s)\| \, ds \\
&\leq \frac{\|x_0\| M_T^2}{1-\sigma} \int_0^t s^{1-2\sigma} \, ds = \frac{\|x_0\| M_T^2}{2(1-\sigma)^2} \, t^{2(1-\sigma)}\,.
\end{aligned}$$

Con base en (2.5), supondremos cierta la siguiente estimación (hipótesis de inducción):

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \frac{\|x_0\| M_T^n}{n!(1-\sigma)^n} \, t^{n(1-\sigma)}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| &\leq \int_0^t \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma} \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| \, ds \\
&\leq \frac{\|x_0\| M_T^{n+1}}{n!(1-\sigma)^n} \, t^{n(1-\sigma)} \int_0^t s^{n-(n+1)\sigma} \, ds \\
&\leq \frac{\|x_0\| M_T^{n+1}}{(n+1)!(1-\sigma)^{n+1}} \, t^{(n+1)(1-\sigma)}\,.
\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_0\| M_T^k}{k!(1-\sigma)^k} \, t^{k(1-\sigma)}$ es convergente,[1] puede aplicarse el criterio de la mayorante de Weierstrass para concluir que la serie

$$x_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(x_{k+1}(t) - x_k(t)\big) \tag{2.6}$$

y, por consiguiente, la sucesión de sumas parciales

$$\{x_n(t)\} = \left\{ x_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \big(x_{k+1}(t) - x_k(t)\big) \right\}$$

[1] En efecto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|x_0\| M_T^k}{k!(1-\sigma)^k} \, t^{k(1-\sigma)} = \|x_0\| e^{\frac{M_T t^{1-\sigma}}{1-\sigma}}$$

convergen absoluta y uniformemente en $I$. Finalmente, como las iterantes $x_n(t)$ son continuas (como se comprobó anteriormente), el límite uniforme de (2.6) ha de ser una función $\rho(t)$ continua en $I$. Además, como $T$ es arbitrario y, por tanto, $\rho(t)$ es continua en cualquier compacto $[0, T]$, lo ha de ser también en $[0, \infty)$. En consecuencia $\rho \in C([0, \infty), \mathbb{R}^N)$.

(d) Para $t > 0$ fijo, tomamos el límite puntual $n \to \infty$ en la ecuación integral

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds\,,$$

de modo que

$$\rho(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds \right\}.$$

Para concluir comprobamos que la diferencia

$$\begin{aligned} D_n(t) = \left\| \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds - \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho(s)\, ds \right\| \\ = \left\| \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} (x_n(s) - \rho(s))\, ds \right\| \end{aligned}$$

converge hacia cero cuando $n \to \infty$. En efecto:

$$\begin{aligned} 0 \le D_n(t) \le \int_0^t \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma} \|x_n(s) - \rho(s)\|\, ds \\ \le \max_{0\le s\le t} \|x_n(s) - \rho(s)\| \max_{0\le s\le t} \|A(s)\| \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma}\,, \end{aligned}$$

de donde se deduce lo pretendido en virtud de la convergencia uniforme de $\{x_n\}$ hacia $\rho$ en $[0, t]$ (cf. ítem (c)). Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x_n(s)\, ds \right\} = \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma} x(s)\, ds\,,$$

lo que demuestra que $\rho(t)$ resuelve la ecuación integral (2.3).

(e) Comprobaremos equivalentemente (cf. (b)) que la ecuación (2.3) admite una única solución. Supongamos para ello que $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$ son dos soluciones de

$$\rho(t) = x_0 + \int_0^t \frac{A(s)}{s^\sigma}\, \rho(s)\, ds$$

que satisfacen la condición inicial $\rho_1(0) = \rho_2(0) = x_0$. Bastará con demostrar que

$$J = \{t \in [0, \infty) : \rho_1(t) = \rho_2(t)\} = [0, \infty)\,, \tag{2.7}$$

para lo cual haremos uso de la siguiente

**Proposición** 1. Sean $I \subset \mathbb{R}$ conexo y $J$ un subconjunto no vacío de $I$ que es simultáneamente abierto y cerrado relativo a $I$. Entonces $J = I$.

Por tanto, hemos de observar que el conjunto $J$ definido en (2.7) es no vacío, abierto y cerrado relativo a $[0, \infty)$.

- Que $J$ contiene algún elemento es evidente, ya que al menos $0 \in J$ pues $\rho_1(0) = \rho_2(0) = x_0$.
- También es inmediato concluir que $J$ es un cerrado relativo a $I$, ya que el conjunto de puntos en que coinciden dos funciones continuas es cerrado.
- Comprobaremos para acabar que cualquier punto $t_0 \in J$ es interior a $J$. Dicho de otro modo, demostraremos que dado cualquier $t_0 \in J$, existe $\varepsilon > 0$ para el que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, \infty) \subset J$. Evaluamos en primer lugar $\rho_1(t)$ y $\rho_2(t)$ en $t_0$:

  $$\rho_1(t_0) = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_1(s)\, ds\,,$$
  $$\rho_2(t_0) = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_2(s)\, ds\,.$$

  Restando ambas expresiones obtenemos

  $$0 = \rho_1(t_0) - \rho_2(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} (\rho_1(s) - \rho_2(s))\, ds\,,$$

  de donde se deduce que

  $$\int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_1(s)\, ds = \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_2(s)\, ds\,.$$

  Podemos escribir entonces

  $$\rho_1(t) = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_1(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_1(s)\, ds\,,$$
  $$\rho_2(t) = x_0 + \int_0^{t_0} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \frac{A(s)}{s^\sigma} \rho_2(s)\, ds\,.$$

Restando nuevamente ambas expresiones obtenemos

$$\rho_1(t) - \rho_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{A(s)}{s^\sigma}(\rho_1(s) - \rho_2(s))\, ds$$

para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, \infty)$. Sea ahora

$$\tau \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, \infty)$$

tal que

$$\|\rho_1(t) - \rho_2(t)\| \leq \|\rho_1(\tau) - \rho_2(\tau)\|$$

para todo $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, \infty)$. Obsérvese que tal $\tau$ existe porque la función $t \mapsto \|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|$ es continua. Entonces

$$\begin{aligned} \|\rho_1(\tau) - \rho_2(\tau)\| &\leq \int_{t_0}^{\tau} \frac{\|A(s)\|}{s^\sigma}\|\rho_1(s) - \rho_2(s)\|\, ds \\ &\leq \|\rho_1(\tau) - \rho_2(\tau)\|\, M_\varepsilon(t_0)\, \frac{(t_0+\varepsilon)^{1-\sigma} - t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}\,, \end{aligned}$$

donde $M_\varepsilon(t_0) = \text{máx}_{0 \leq s \leq t_0+\varepsilon}\{\|A(s)\|\}$. Luego

$$\|\rho_1(\tau) - \rho_2(\tau)\| \left(1 - M_\varepsilon(t_0)\, \frac{(t_0+\varepsilon)^{1-\sigma} - t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right) \leq 0\,. \quad (2.8)$$

Eligiendo $\varepsilon$ suficientemente pequeño, a saber:

$$\varepsilon < \text{mín}\left\{t_0, \left(\frac{1-\sigma}{M_\varepsilon(2t_0)} + t_0^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} - t_0\right\}\,,$$

se obtiene

$$M_\varepsilon(t_0)\, \frac{(t_0+\varepsilon)^{1-\sigma} - t_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} < 1\,,$$

por lo que sólo puede ser $\|\rho_1(\tau) - \rho_2(\tau)\| = 0$ para que se satisfaga (2.8). Consecuentemente

$$\|\rho_1(t) - \rho_2(t)\| = 0 \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, \infty)$$

o, lo que es lo mismo, $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap [0, \infty) \subset J$, con lo que concluye la prueba.

(f) Considérese, por ejemplo, el siguiente problema de valores iniciales unidimensional ($N = 1$):

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2\sqrt{t}} \\ x(0) = 1 \end{cases} .$$

Obsérvese que hemos elegido $\sigma = \frac{1}{2}$, $A(t) \equiv \frac{1}{2}$ y $x_0 = 1$. La única solución de este problema es $x(t) = e^{\sqrt{t}}$, de modo que $x'(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ no está definida en $t = 0$.

■

3. Sea $\Phi : I \to M_N(\mathbb{R})$ tal que $\Phi \in C^1(I)$. Demuestra que una condición necesaria y suficiente para que $\Phi$ sea una matriz fundamental de un sistema del tipo $x' = A(t)x$, con $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua, es

$$\det(\Phi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I\,.$$

*Solución:* Es evidente que $\det(\Phi(t)) \neq 0$ $\forall t \in I$ es una condición necesaria por la propia definición de matriz fundamental. Para ver que también es suficiente bastará con comprobar que $\Phi$ es una matriz solución de un sistema del tipo $x' = A(t)x$ con $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua, es decir, que se satisface $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Tómese entonces como matriz de coeficientes de dicho sistema $A(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1}$, que tiene sentido porque $\Phi(t)^{-1}$ existe para todo $t \in I$ en virtud de la condición $\det(\Phi(t)) \neq 0$ y es continua en $I$ porque $\Phi \in C^1(I)$.

■

4. Sea $\rho \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Demuestra que $\rho$ es solución de un sistema del tipo $x' = A(t)x$, con $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ continua, si y solamente si $\rho(t) = (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ o bien $\rho(t) \neq (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

*Solución: De izquierda a derecha*: Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(t_0) = (0,0)$. Se trata de probar que ha de ser $\rho(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto, las funciones $\rho(t)$ y $x(t) \equiv (0,0)$ son ambas soluciones (la primera de ellas por hipótesis) del problema de valores iniciales

$$x' = A(t)x\,, \quad x(t_0) = (0,0)\,,$$

las cuales, por la propiedad de unicidad de solución del mismo,[2] han de ser iguales. Luego $\rho(t) \equiv 0$.

*De derecha a izquierda*: Es evidente que $\rho(t) \equiv (0,0)$ es solución de $x' = A(t)x$. Supongamos entonces

$$\rho(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.9}$$

Construimos la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \rho_1(t) & -\rho_2(t) \\ \rho_2(t) & \rho_1(t) \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$\det(\Phi(t)) = \rho_1(t)^2 + \rho_2(t)^2 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gracias a (2.9). Por tanto, si $\Phi(t)$ fuese una matriz solución entonces

$$\begin{pmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\rho_2(t) \\ \rho_1(t) \end{pmatrix}$$

serían soluciones linealmente independientes de $x' = A(t)x$. En particular, $\rho(t)$ resolvería la ecuación $x' = A(t)x$ y habríamos concluido. Por tanto, buscamos que la matriz $\Phi(t)$ resuelva una ecuación del tipo $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, para lo que bastará con calcular

$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} \rho_1'(t) & -\rho_2'(t) \\ \rho_2'(t) & \rho_1'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\rho_1(t)^2 + \rho_2(t)^2} \begin{pmatrix} \rho_1(t) & \rho_2(t) \\ -\rho_2(t) & \rho_1(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\rho_1(t)\rho_1'(t)+\rho_2(t)\rho_2'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} & \frac{\rho_1'(t)\rho_2(t)-\rho_1(t)\rho_2'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} \\ \frac{\rho_1(t)\rho_2'(t)-\rho_2(t)\rho_1'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} & \frac{\rho_2(t)\rho_2'(t)+\rho_1(t)\rho_1'(t)}{\rho_1(t)^2+\rho_2(t)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conclusión, para esta elección de $A(t)$ se cumple $\rho' = A(t)\rho$.

■

5. Se considera la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} & \frac{1}{t+1} \\ t+1 & 0 & e^{-3t} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2]Se trata de un problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos, ya que por hipótesis $A : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ es continua

Encuentra los valores de $t$ para los que $\Phi$ es una matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea. Halla una matriz fundamental principal en cero.

*Solución:* Como $\det(\Phi(t)) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea para cualquier $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, en virtud del Ejercicio 3.[3]

Para calcular una matriz fundamental principal en $t = 0$ usaremos el siguiente resultado:

**Proposición 2.** Sean $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$ y $C \in M_N(\mathbb{R})$ una matriz de coeficientes constantes con $\det(C) \neq 0$. Entonces

(i) $\Phi(t)C$ es una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$.

(ii) Si $\Psi(t)$ es otra matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$, entonces existe $C \in M_N(\mathbb{R})$ constante con $\det(C) \neq 0$ tal que
$$\Psi(t) = \Phi(t)C \quad \forall t \in I\,.$$

Basta entonces con considerar
$$\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,$$
que es una matriz fundamental en virtud del resultado anterior. Además
$$\Psi(0) = \Phi(0)\Phi^{-1}(0) = \Phi(0)\Phi(0)^{-1} = I_N\,,$$
luego $\Psi$ es una matriz fundamental principal en cero. Calculémosla:
$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Entonces
$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{t+1} - e^{3t} & e^{3t} - \frac{1}{t+1} \\ 0 & e^{-3t} & t+1-e^{-3t} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

[3] La razón de excluir el punto $t = -1$ hay que buscarla en la correcta definición del dominio de la función $\frac{1}{t+1}$, que interviene como coeficiente de la matriz $\Phi(t)$

6. Se considera la matriz
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{t}) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) ¿Para qué intervalos de $\mathbb{R}$ puede ser $\Phi(t)$ una matriz fundamental de una ecuación diferencial lineal homogénea?

   (b) Construye dicha ecuación.

*Solución:* (a) Como $\det(\Phi(t)) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)$, $\Phi(t)$ será matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea[4] si
$$\frac{\pi}{t} \neq \left\{k\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$
es decir, para cualquier
$$t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2}{2k+1}, \frac{1}{k}\right).$$

(b) Se ha de cumplir $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, luego para todo $t$ localizado en algún intervalo de los encontrados en (a) se puede despejar
$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\cos(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{t^2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{t})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{t})} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\tan(\frac{\pi}{t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación satisfecha por $\Phi(t)$ es
$$x'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{t^2}\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{t^2}\tan(\frac{\pi}{t}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

■

[4] Nuevamente en virtud del Ejercicio 3

7. Sean
$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$
dos soluciones de $x' = A(t)x$. Se pide:
   (a) Encontrar $A(t)$ y determinar el conjunto $I$ de valores de $t$ para los que existe solución.
   (b) Dado $t_0 \in I$, hallar la matriz fundamental principal en $t_0$.

*Solución:* (a) Claramente
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & e^{-t} \\ e^t & \cos(t) \end{pmatrix}$$
es una matriz solución cuyo determinante,
$$\det(\Phi(t)) = \cos(t)^2 - 1 = -\operatorname{sen}(t)^2\,,$$
se anula si y solamente si $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Luego $\Phi(t)$ es una matriz fundamental si y solamente si $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En particular, si $t \neq k\pi$ existe $\Phi(t)^{-1}$. En este caso podemos despejar $A(t)$ de la identidad $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, de donde concluimos que
$$\begin{aligned} A(t) &= \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) & -e^{-t} \\ e^t & -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}(t)^2} \begin{pmatrix} -\cos(t) & e^{-t} \\ e^t & -\cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t)-1}{\operatorname{sen}(t)^2} & \frac{\cos(t)-\operatorname{sen}(t)}{e^t \operatorname{sen}(t)^2} \\ -\frac{e^t(\operatorname{sen}(t)+\cos(t))}{\operatorname{sen}(t)^2} & \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t)+1}{\operatorname{sen}(t)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
para todo $t \in I = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

(b) Calculamos
$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & e^{-t} \\ e^t & \cos(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{sen}(t)^2} \begin{pmatrix} -\cos(t_0) & e^{-t_0} \\ e^{t_0} & -\cos(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{t_0-t}-\cos(t_0)\cos(t)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} & \frac{e^{-t_0}\cos(t)-e^{-t}\cos(t_0)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} \\ \frac{e^{t_0}\cos(t)-e^t\cos(t_0)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} & \frac{e^{t-t_0}-\cos(t_0)\cos(t)}{\operatorname{sen}(t_0)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

8. Se considera el problema

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + x_2 + \cos(t) \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 + t \end{array}\right. , \quad x_1(0) = x_2(0) = 1\,.$$

Se pide:

(a) Comprobar que las funciones

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix},$$

constituyen un sistema fundamental de soluciones.

(b) Comprobar la fórmula de Jacobi–Liouville.

(c) Encontrar la (única) solución que verifica las condiciones dadas.

*Solución:* (a) Por un lado es inmediato comprobar que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son soluciones del correspondiente sistema homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 \end{array}\right.$$

o, lo que es lo mismo, que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

es una matriz solución del siguiente sistema con coeficientes constantes:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son linealmente independientes ya que

$$\det(\Phi(t)) = \det(f_1(t)|f_2(t)) = 4\,e^{6t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Por consiguiente, $f_1(t)$ y $f_2(t)$ forman un sistema fundamental de soluciones de nuestro problema.

(b) La fórmula de Jacobi–Liouville establece que

$$\det(\Phi(t)) = \det(\Phi(t_0))\, e^{\int_{t_0}^{t} \text{traza}(A(s))\, ds}$$

para cualquier matriz solución[5] $\Phi(t)$ y cualquier $t_0 \in I$ fijo.

En nuestro caso

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene traza$(A) = 6$ y

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

es una matriz solución (de hecho, es una matriz fundamental) con $\det(\Phi(t)) = 2e^{6t}$. Entonces la fórmula de Jacobi–Liouville es satisfecha:

$$\det(\Phi(t_0))e^{\int_{t_0}^t \text{traza}(A(s))\,ds} = 2e^{6t_0}\,e^{6(t-t_0)} = 2e^{6t} = \det(\Phi(t))\,.$$

(c) Buscamos en primer lugar una matriz fundamental principal en cero, $\Psi(t)$, para aplicar la fórmula de variación de las constantes:

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \Psi(t)\int_{t_0}^t \Psi(s)^{-1}b(s)\,ds\,,$$

donde en nuestro caso $t_0 = 0$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es la condición inicial y $b(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$ es el vector de términos independientes del sistema a resolver. Para ello consideramos la matriz fundamental $\Phi(t)$ de (2.10) y calculamos

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{5t} \\ e^t & 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^t - e^{5t} & e^{5t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{5t} & 3e^{5t} - e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Psi(t)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{-t} - e^{-5t} & e^{-5t} - e^{-t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-5t} & 3e^{-5t} - e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\Psi(t)x_0 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t)\Psi(s)^{-1}b(s) = \begin{pmatrix} 2\big(3e^{t-s} - e^{5(t-s)}\big)\cos(s) - 2\big(e^{t-s} - e^{5(t-s)}\big)s \\ 6\big(e^{t-s} - e^{5(t-s)}\big)\cos(s) + 2\big(3e^{5(t-s)} - e^{t-s}\big)s \end{pmatrix},$$

[5]No es necesario que sea una matriz fundamental

luego

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3I_1(t) - I_2(t) - I_3(t) + I_4(t) \\ 3I_1(t) - 3I_2(t) - I_3(t) + 3I_4(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$I_1(t) = \int_0^t e^{t-s} \cos(s)\, ds = \frac{1}{2}(e^t + \mathrm{sen}(t) - \cos(t)),$$

$$I_2(t) = \int_0^t e^{5(t-s)} \cos(s)\, ds = \frac{1}{26}(5e^{5t} + \mathrm{sen}(t) - 5\cos(t)),$$

$$I_3(t) = \int_0^t s\, e^{t-s}\, ds = e^t - t - 1,$$

$$I_4(t) = \int_0^t s\, e^{5(t-s)}\, ds = \frac{1}{25}(e^{5t} - 5t - 1).$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - \frac{99}{325} e^{5t} + \frac{38}{13}\,\mathrm{sen}(t) - \frac{34}{13}\cos(t) + \frac{8}{5}t + \frac{48}{25} \\ 2e^t - \frac{99}{325} e^{5t} + \frac{38}{13}\,\mathrm{sen}(t) - \frac{34}{13}\cos(t) + \frac{8}{5}t + \frac{48}{25} \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

9. Sea $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que existe $M > 0$ con

$$\|A(t)\| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sea $x(t)$ una solución de $x' = A(t)x$.

(a) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, obtén la ecuación satisfecha por $y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}x(t)$.

(b) Demuestra que la función $\varphi(t) = \|y_\lambda(t)\|^2$ es derivable y que

$$-(M+\lambda)\varphi(t) \leq \frac{1}{2}\varphi'(t) \leq (M-\lambda)\varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c) Deduce del apartado anterior la existencia de intervalos de valores de $\lambda$ para los que el límite cuando $t \to \infty$ de $y_\lambda(t)$ es o bien 0 o bien $\infty$.

*Solución:* (a) Claramente

$$y'_\lambda = e^{-\lambda t}(x' - \lambda x) = e^{-\lambda t}A(t)x - \lambda y_\lambda = A(t)y_\lambda - \lambda y_\lambda\,,$$

luego la ecuación diferencial satisfecha por $y_\lambda$ es

$$y'_\lambda = (A(t) - \lambda I_N)y_\lambda\,. \tag{2.11}$$

(b) Si denotamos $y^j_\lambda(t)$, $1 \le j \le N$, las componentes del vector $y_\lambda(t)$, el cuadrado de su norma puede escribirse como

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(y^j_\lambda(t)\right)^2,$$

luego la función $\varphi$ es derivable y

$$\varphi'(t) = 2\sum_{j=1}^{N} y^j_\lambda(t)(y^j_\lambda)'(t) = 2\langle y_\lambda(t), y'_\lambda(t)\rangle\,.$$

Usando ahora la ecuación (2.11) obtenemos

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) = y_\lambda(t)^T(A(t) - \lambda I_N)y_\lambda(t)\,.$$

También se tiene

$$|y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t)| \le \|y_\lambda(t)\|\|A(t)y_\lambda(t)\| \le \|A(t)\|\varphi(t) \le M\varphi(t)\,,$$

luego

$$y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t) \ge -M\varphi(t)\,.$$

Por un lado

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi'(t) &= y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t) - \lambda\varphi(t)\\ &\le |y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t)| - \lambda\varphi(t) \le (M-\lambda)\varphi(t)\,.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) = y_\lambda(t)^T A(t)y_\lambda(t) - \lambda\varphi(t) \ge -(M+\lambda)\varphi(t)\,.$$

Combinando ambas estimaciones obtenemos el resultado deseado.

(c) Por el ítem (b) sabemos que

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq 2(M-\lambda)\,,$$

de donde se concluye que

$$\varphi(t) \leq C_1\, e^{2(M-\lambda)t}\,, \quad C_1 > 0\,,$$

sin más que integrar. Por otra parte

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \geq -2(M+\lambda)\,,$$

luego

$$\varphi(t) \geq C_2\, e^{-2(M+\lambda)t}\,, \quad C_2 > 0\,.$$

Combinando ambas estimaciones obtenemos

$$C_2\, e^{-2(M+\lambda)t} \leq \varphi(t) \leq C_1\, e^{2(M-\lambda)t}\,.$$

Por consiguiente:

- Si $\lambda \in (M, \infty)$ entonces $\lim_{t\to\infty}\{\varphi(t)\} = 0$, luego

$$\lim_{t\to\infty}\{\|y_\lambda(t)\|\} = 0\,.$$

- Si $\lambda \in (-\infty, -M)$ entonces $\lim_{t\to\infty}\{\varphi(t)\} = \infty$, luego

$$\lim_{t\to\infty}\{\|y_\lambda(t)\|\} = \infty\,.$$

■

10. Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua y consideremos las ecuaciones diferenciales matriciales siguientes:

$$Y'(t) = A(t)Y(t)\,, \tag{2.12}$$

$$Z'(t) = -Z(t)A(t) \tag{2.13}$$

y

$$W'(t) = A(t)W(t) - W(t)A(t)\,, \tag{2.14}$$

donde $I$ es un intervalo real.

(a) Demuestra que cada una de estas ecuaciones admite una única solución una vez prefijada una condición inicial en $t_0 \in I$.

(b) Dadas $Y$ y $Z$ soluciones de (2.12) y (2.13), respectivamente, definidas en $I$ y tales que $Y(t_0)Z(t_0) = I_N$, demuestra que $W = YZ$ es solución de (2.14) y deduce que, para todo $t \in I$, se cumple $YZ = I_N$.

(c) Supongamos que para cada $t \in I$ la matriz $A(t)$ es antisimétrica ($A(t)^T = -A(t)$). Sea $Y$ una solución de (2.12) definida en $I$ que satisface que $Y(t_0)$ es una matriz ortogonal. Demuestra que entonces $Y(t)$ es ortogonal para todo $t \in I$.

*Solución:* (a) Llevamos a cabo la prueba para la ecuación (2.12), entendiendo que para las otras dos la argumentación es completamente análoga. Sean

$$Y(t) = (Y_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq N}\,, \quad A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq N}\,,$$

de modo que

$$Y'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(t)Y_{kj}(t) \quad \forall\, 1 \leq i,j \leq N\,.$$

Definimos

$$X(t) = \begin{pmatrix} Y_{11}(t) \\ Y_{12}(t) \\ \vdots \\ Y_{1N}(t) \\ Y_{21}(t) \\ \vdots \\ Y_{2N}(t) \\ \vdots \\ Y_{N1}(t) \\ \vdots \\ Y_{NN}(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces el problema

$$Y'(t) = A(t)Y(t)\,, \quad Y(t_0) = Y_0 \in M_N(\mathbb{R})\,,$$

es equivalente a

$$X'(t) = B(t)X(t)\,, \quad X(t_0) = X_0 = \begin{pmatrix} Y_{11}(0) \\ Y_{12}(0) \\ \vdots \\ Y_{1N}(0) \\ Y_{21}(0) \\ \vdots \\ Y_{2N}(0) \\ \vdots \\ Y_{N1}(0) \\ \vdots \\ Y_{NN}(0) \end{pmatrix}\,, \tag{2.15}$$

con $B : I \to M_{N^2}(\mathbb{R})$ continua definida como

$$B(t) = (D_{ij}(t))\,, \quad D_{ij}(t) = \mathrm{diag}(a_{ij}(t))\,.$$

Por tanto, existe una única solución del sistema lineal homogéneo (2.15).

(b) Se tiene

$$\begin{aligned}(YZ)'(t) &= Y'(t)Z(t) + Y(t)Z'(t) \\ &= A(t)(YZ)(t) + Y(t)(-Z(t)A(t)) \\ &= A(t)(YZ)(t) - (YZ)(t)A(t)\,,\end{aligned}$$

luego $W = YZ$ resuelve (2.14). Consideramos ahora el problema de valores iniciales

$$W'(t) = A(t)W(t) - W(t)A(t)\,, \quad W(t_0) = I_N\,,$$

cuya única solución es $W(t) = I_N$, puesto que

$$W'(t) = 0_{N\times N} = A(t)I_N - I_N A(t)\,.$$

Como por hipótesis $Y(t_0)Z(t_0) = I_N$, se satisface $Y(t)Z(t) = I_N$ para todo $t \in I$ por un argumento de unicidad de solución.

(c) Trasponiendo la ecuación (2.12) obtenemos

$$Y'(t)^T = Y(t)^T A(t)^T = -Y(t)^T A(t)\,,$$

por lo que podemos concluir que si $Y$ es solución de (2.12) entonces $Y^T$ es solución de (2.13). Como además $Y(t_0)Y(t_0)^T = I_N$ (recuérdese que $Y(t_0)$ es ortogonal por hipótesis), podemos aplicar los enunciados (a) y (b) para concluir que, en particular, $Y(t)Y(t)^T = I_N$ para todo $t \in I$ o, lo que es lo mismo, que $Y(t)$ es ortogonal.

■

11. Discute razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    (a) La matriz
    $$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & 1 \end{pmatrix}$$
    es una matriz fundamental de un sistema lineal $x' = A(t)x$, con $A(t)$ continua y definida en $\mathbb{R}$.

    (Septiembre 2003)

    (b) Se considera la ecuación
    $$x'' - 2tx' + (t^2 - 1)x = 0\,. \tag{2.16}$$
    El cambio de variable $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} u(t)$ reduce (2.16) a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

    (Septiembre 2003)

    (c) Las funciones
    $$x(t) = \int_0^1 \text{sen}(t^2 + s^2)\,ds\,, \quad y(t) = \int_0^1 \cos(t^2 + s^2)\,ds$$
    forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $x'' + 4t^2 x = 0$.

    (Diciembre 2002)

*Solución:* (a) FALSA. Como $\det(\Phi(t)) = 1 - \text{sen}(t)^2 = \cos(t)^2$, podemos concluir que $\Phi(t)$ sólo será una matriz fundamental de $x' = A(t)x$ si
$$t \neq \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(b) VERDADERA. Se tiene

$$x'(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(tu(t) + u'(t))\,,$$
$$x''(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(t^2u(t) + 2tu'(t) + u(t) + u''(t))\,,$$

por lo que, reescrita en términos de la nueva función incógnita $u(t)$, la ecuación resultante es

$$\begin{aligned} 0 = {} & e^{\frac{t^2}{2}}(t^2u(t) + 2tu'(t) + u(t) + u''(t)) \\ & - 2te^{\frac{t^2}{2}}(tu(t) + u'(t)) + e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 1)u(t) = e^{\frac{t^2}{2}}u''(t)\,, \end{aligned}$$

de donde deducimos que la ecuación original se reduce a $u'' = 0$, que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

(c) FALSA. Basta con comprobar que ni siquiera son soluciones:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2t\int_0^1 \cos(t^2 + s^2)\,ds = 2ty(t)\,, \\ x''(t) &= 2\int_0^1 \cos(t^2 + s^2)\,ds - 4t^2\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2 + s^2)\,ds \\ &= 2(y(t) - 2t^2x(t))\,, \\ y'(t) &= -2t\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2 + s^2)\,ds = -2tx(t)\,, \\ y''(t) &= -2\int_0^1 \operatorname{sen}(t^2 + s^2)\,ds - 4t^2\int_0^1 \cos(t^2 + s^2)\,ds \\ &= -2(x(t) + 2t^2y(t))\,. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x'' + 4t^2x = 2y \neq 0\,, \quad y'' + 4t^2y = -2x \neq 0\,.$$

■

CAPÍTULO 3

# La ecuación lineal II: forma canónica de Jordan, exponencial de una matriz y fórmula de variación de las constantes

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

   (a) $x' = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$

   (b) $x' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (c) $x' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$

   (d) $x' = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} x$

   Obtén además las soluciones de los problemas de valores iniciales correspondientes a los sistemas (b) y (c) con condiciones iniciales

   $$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   respectivamente.

*Solución:* (a) Escribimos $x' = A(t)x + b(t)$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Como $A(t) \equiv A$ tiene coeficientes constantes, podemos obtener explícitamente una matriz fundamental de la ecuación homogénea y así resolver la ecuación completa mediante la fórmula de variación de las constantes. Los valores propios de $A$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, con subespacios propios asociados

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

respectivamente. Por tanto, la matriz $A$ es diagonalizable y satisface $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= Pe^{Dt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} + e^t - \frac{5}{3}e^{2t} & -\frac{16}{3}e^{-t} + 2e^t + \frac{10}{3}e^{2t} \\ -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & \frac{8}{3}e^{-t} - \frac{8}{3}e^{2t} \\ \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{2}{3}e^{2t} & -\frac{4}{3}e^{-t} + e^t + \frac{4}{3}e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es una matriz fundamental (principal en $t = 0$) de la ecuación homogénea. Por consiguiente, si asumimos $x(0) = x_0$, la fórmula de variación de las constantes proporciona la única solución del problema no homogéneo:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(0,0,\mathrm{sen}(s))^T\,ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\,e^{-t} - \frac{5}{3}\,e^{2t} & \frac{2}{3}\,e^{-t} + e^{t} - \frac{5}{3}\,e^{2t} & -\frac{16}{3}\,e^{-t} + 2\,e^{t} + \frac{10}{3}\,e^{2t} \\ -\frac{4}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} & -\frac{1}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} & \frac{8}{3}\,e^{-t} - \frac{8}{3}\,e^{2t} \\ \frac{2}{3}\,e^{-t} - \frac{2}{3}\,e^{2t} & \frac{1}{6}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^{t} - \frac{2}{3}\,e^{2t} & -\frac{4}{3}\,e^{-t} + e^{t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} \end{pmatrix} x_0 \\
&\quad + \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{16}{3}\,e^{-(t-s)} + 2\,e^{t-s} + \frac{10}{3}\,e^{2(t-s)} \\ \frac{8}{3}\,e^{-(t-s)} - \frac{8}{3}\,e^{2(t-s)} \\ -\frac{4}{3}\,e^{-(t-s)} + e^{t-s} + \frac{4}{3}\,e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \mathrm{sen}(s)\,ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{8}{3}\,e^{-t} - \frac{5}{3}\,e^{2t} & \frac{2}{3}\,e^{-t} + e^{t} - \frac{5}{3}\,e^{2t} & -\frac{16}{3}\,e^{-t} + 2\,e^{t} + \frac{10}{3}\,e^{2t} \\ -\frac{4}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} & -\frac{1}{3}\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} & \frac{8}{3}\,e^{-t} - \frac{8}{3}\,e^{2t} \\ \frac{2}{3}\,e^{-t} - \frac{2}{3}\,e^{2t} & \frac{1}{6}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^{t} - \frac{2}{3}\,e^{2t} & -\frac{4}{3}\,e^{-t} + e^{t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} \end{pmatrix} x_0 \\
&\qquad\qquad + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t}(e^t-1)^2(16+5e^t) \\ \frac{4}{3}e^{-t}(e^{3t}+e^t-2) \\ \frac{2}{3}e^{2t} + e^t + \frac{4}{3}e^{-t} - 3 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

(b) Escribimos $x' = A(t)x + b(t)$ con

$$
A(t) = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Procediendo como en (a), los valores propios de $A$ son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = -1$, con subespacios propios asociados

$$
E_1 = \mathrm{Ker}[A - I] = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_2 = \mathrm{Ker}[A + I] = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,
$$

respectivamente. La forma canónica de Jordan de la matriz $A$ es entonces

$$
J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Para encontrar la matriz de paso $P$ que satisface $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ calculamos

$$
\mathrm{Ker}[(A - I)^2] = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.
$$

Elegimos entonces un vector

$$P_1 \in \mathrm{Ker}[(A-I)^2] \setminus \mathrm{Ker}[A-I]\,,$$

por ejemplo $(1,-2,0)^T$, como primera columna de $P$. La segunda columna de $P$ (llamémosla $P_2$) viene dada por

$$P_2 = (A-I)P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, elegimos $P_3 \in \mathrm{Ker}[A+I]$ como tercera columna de $P$, por ejemplo

$$P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la matriz exponencial de $Jt$ consideramos la siguiente descomposición:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (t+5)e^t - 4e^{-t} & 2(e^t - e^{-t}) & (t+6)e^t - 6e^{-t} \\ (t+2)e^t - 2e^{-t} & 2e^t - e^{-t} & (t+3)e^t - 3e^{-t} \\ 4e^{-t} - (t+4)e^t & 2(e^{-t} - e^t) & 6e^{-t} - (t+5)e^t \end{pmatrix}.$$

Empleando ahora la fórmula de variación de las constantes con

$$x(t_0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)^T$$

se obtiene

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(s,0,0)^T\,ds \\
&= \begin{pmatrix} (t-t_0+5)e^{t-t_0}-4e^{t_0-t} & 2(e^{t-t_0}-e^{t_0-t}) & (t-t_0+6)e^{t-t_0}-6e^{t_0-t} \\ (t-t_0+2)e^{t-t_0}-2e^{t_0-t} & 2e^{t-t_0}-e^{t_0-t} & (t-t_0+3)e^{t-t_0}-3e^{t_0-t} \\ 4e^{t_0-t}-(t-t_0+4)e^{t-t_0} & 2(e^{t_0-t}-e^{t-t_0}) & 6e^{t_0-t}-(t-t_0+5)e^{t-t_0} \end{pmatrix} x_0 \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s[(t-s+5)e^{t-s}-4e^{s-t}] \\ s[(t-s+2)e^{t-s}-2e^{s-t}] \\ s[4e^{s-t}-(t-s+4)e^{t-s}] \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} (t-t_0+5)e^{t-t_0}-4e^{t_0-t} & 2(e^{t-t_0}-e^{t_0-t}) & (t-t_0+6)e^{t-t_0}-6e^{t_0-t} \\ (t-t_0+2)e^{t-t_0}-2e^{t_0-t} & 2e^{t-t_0}-e^{t_0-t} & (t-t_0+3)e^{t-t_0}-3e^{t_0-t} \\ 4e^{t_0-t}-(t-t_0+4)e^{t-t_0} & 2(e^{t_0-t}-e^{t-t_0}) & 6e^{t_0-t}-(t-t_0+5)e^{t-t_0} \end{pmatrix} x_0 \\
&\quad + \begin{pmatrix} ((t_0+1)t+3t_0+3-t_0^2)e^{t-t_0}-4(1-t_0)e^{t_0-t}-8t+1 \\ ((t_0+1)t-t_0^2)e^{t-t_0}+2(t_0-1)e^{t_0-t}-3t+2 \\ (t_0^2-(t+2)t_0-t-2)e^{t-t_0}+4(1-t_0)e^{t_0-t}+7t-2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resolviendo para el dato inicial $x(0) = (0,0,1)^T$ se llega a

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{pmatrix} (t+5)e^{t}-4e^{-t} & 2(e^{t}-e^{-t}) & (t+6)e^{t}-6e^{-t} \\ (t+2)e^{t}-2e^{-t} & 2e^{t}-e^{-t} & (t+3)e^{t}-3e^{-t} \\ 4e^{-t}-(t+4)e^{t} & 2(e^{-t}-e^{t}) & 6e^{-t}-(t+5)e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} (t+3)e^{t}-4e^{-t}-8t+1 \\ te^{t}-2e^{-t}-3t+2 \\ -(t+2)e^{t}+4e^{-t}+7t-2 \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad = \begin{pmatrix} (2t+9)e^{t}-10e^{-t}-8t+1 \\ (2t+3)e^{t}-5e^{-t}-3t+2 \\ -(2t+7)e^{t}+10e^{-t}+7t-2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) En este caso

$$
J = A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2 + 5M\,, \quad \text{con } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Puede comprobarse que

$$
M^{2n} = -I_2\,, \quad M^{2n+1} = (-1)^n M\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.
$$

Por tanto, una matriz fundamental de nuestra ecuación diferencial es

$$
\begin{aligned}
e^{Jt} = e^{3tI_2}e^{5tM} &= e^{3t}(\cos(5t)I_2 + \operatorname{sen}(5t)M) \\
&= e^{3t}\begin{pmatrix} \cos(5t) & \operatorname{sen}(5t) \\ -\operatorname{sen}(5t) & \cos(5t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aplicando ahora la fórmula de variación de las constantes con

$$x(t_0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(e^{-s},0)^T\,ds \\
&= e^{3(t-t_0)}\begin{pmatrix} \cos(5(t-t_0)) & \operatorname{sen}(5(t-t_0)) \\ -\operatorname{sen}(5(t-t_0)) & \cos(5(t-t_0)) \end{pmatrix} x_0 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} e^{3t-4s}\cos(5(t-s)) \\ -e^{3t-4s}\operatorname{sen}(5(t-s)) \end{pmatrix} ds \\
&= e^{3(t-t_0)}\begin{pmatrix} \cos(5(t-t_0)) & \operatorname{sen}(5(t-t_0)) \\ -\operatorname{sen}(5(t-t_0)) & \cos(5(t-t_0)) \end{pmatrix} x_0 \\
&\quad + \frac{1}{41}\begin{pmatrix} e^{3t}(5\sin(5t)+4\cos(5t))-4 \\ e^{3t}(5\cos(5t)-4\operatorname{sen}(5t))-5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resolviendo finalmente para el dato inicial $x(0) = (0,1)^T$ se llega a

$$x(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} \cos(5t) & \operatorname{sen}(5t) \\ -\operatorname{sen}(5t) & \cos(5t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(5t) \\ \cos(5t) \end{pmatrix}.$$

(d) Escribimos $x' = A(t)x$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

El único valor propio de $A$ es $\lambda = -1$ (triple), que tiene como subespacio propio asociado

$$E = \operatorname{Ker}[A+I] = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La forma canónica de Jordan de la matriz $A$ es entonces

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Para encontrar la matriz de paso $P$ que satisface $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ observamos que $\mathrm{Ker}[(A+I)^2] = \mathbb{R}^3$. Elegimos

$$P_1 \in \mathrm{Ker}[(A+I)^2] \setminus \mathrm{Ker}[A-I] ,$$

por ejemplo $(1,0,0)^T$, como primera columna de $P$. La segunda columna de $P$ viene dada por

$$\mathrm{Ker}[A+I] \ni P_2 = (A+I)P_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Finalmente, elegimos $P_3 \in \mathrm{Ker}[A+I]$ como tercera columna de $P$, por ejemplo

$$P_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Por consiguiente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} .$$

Para calcular la matriz exponencial de $Jt$ consideramos la siguiente descomposición:

$$J = -I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que

$$e^{Jt} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} .$$

Por consiguiente

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}(1+7t) & -6te^{-t} & 5te^{-t} \\ 14te^{-t} & e^{-t}(1-12t) & 10te^{-t} \\ 7te^{-t} & -6te^{-t} & e^{-t}(1+5t) \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 \\ &= e^{t_0-t}\begin{pmatrix} 1+7(t-t_0) & -6(t-t_0) & 5(t-t_0) \\ 14(t-t_0) & 1-12(t-t_0) & 10(t-t_0) \\ 7(t-t_0) & -6(t-t_0) & 1+5(t-t_0) \end{pmatrix} x_0\,. \end{aligned}$$

■

2. Halla una base del espacio vectorial de soluciones del sistema $x' = A_i\,x$, $1 \leq i \leq 3$, en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(Febrero 1992).

*Solución:* (a) Comenzamos descomponiendo la matriz de coeficientes como suma de dos matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la primera de ellas diagonal y la segunda nilpotente. Entonces

$$e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de soluciones.

(b) En este caso la forma canónica de Jordan asociada a $A_2$ es $J_2 = A_2$ y la matriz de paso para la semejanza es $P = I_2$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{A_2 t} = e^{J_2 t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} J_2^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (-1)^n I_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n J_2 \\ &= \cos(t) I_2 + \operatorname{sen}(t) J_2 = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de soluciones.

(c) Llamemos $\Phi(t)$ a la matriz fundamental que se construye a partir de la base obtenida en (a):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que las matrices $\Phi(t)^T$ y $A_3$ conmutan. Teniendo en cuenta entonces que $A_3 = A_1^T$, se tiene

$$\left(\Phi(t)^T\right)' = \Phi'(t)^T = (A_1 \Phi(t))^T = \Phi(t)^T A_1^T = \Phi(t)^T A_3 = A_3 \Phi(t)^T,$$

luego

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de soluciones.

■

3. Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Demuestra los siguientes enunciados:

   (a) $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\, ds$ conmutan.

   (b) Si $A \in C^1(I)$ entonces $A$ y $A'$ conmutan.

(c) Si $A \in C^1(I)$ entonces

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)\, e^{A(t)} = e^{A(t)}A'(t)\,.$$

(d) Como consecuencia de (c), demuestra que si $A$ y $B$ conmutan entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B\,.$$

(e) Si $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan, entonces $F(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Calcula la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -t & t^2 \end{pmatrix}.$$

*Solución:* (a) Sea $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ una partición del intervalo $[0,t]$ y denotemos $S(A,P)$ la correspondiente suma de Riemann:

$$S(A,P) = \sum_{k=0}^{n-1} A(s_k)|t_{k+1} - t_k|\,,$$

con $s_k \in (t_k, t_{k+1})$. Como por hipótesis $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, se tiene $A(t)S(A,P) = S(A,P)A(t)$. Haciendo entonces tender a cero la norma de la partición[1] obtenemos

$$\|P\| \to 0 \Longrightarrow \{S(A,P)\} \to \int_0^t A(s)\,ds\,.$$

Por tanto,

$$A(t)\int_0^t A(s)\,ds = \Big(\int_0^t A(s)\,ds\Big)A(t)\,.$$

(b) Es evidente que podemos escribir

$$A'(t) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{A(t+h) - A(t)}{h}\right\},$$

[1] $\|P\| = \text{máx}\{|t_{k+1} - t_k|\,,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$

ya que esta propiedad es cierta para cada uno de los coeficientes de la matriz $A(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} A(t)A'(t) &= A(t)\lim_{h\to 0}\left\{\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{A(t)\left(\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\right)\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\right\}A(t) = A'(t)A(t)\,, \end{aligned}$$

para lo que hemos vuelto a usar la hipótesis general

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad \forall t,s\in I\,.$$

(c) Haremos uso de la siguiente

**Proposición** 3. Sea $I\subset\mathbb{R}$ acotado y $\{f_n : I\to\mathbb{R}\}$ una sucesión de funciones de clase $C^1(I)$. Supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente hacia una función $g$ y que existe $t_0\in I$ tal que la sucesión $\{f_n(t_0)\}$ es convergente. Entonces $\{f_n\}\to f$ uniformemente cuando $n\to\infty$, $f$ es de clase $C^1(I)$ y $f'=g$.

**Demostración.** Denotemos $\alpha := \lim_{n\to\infty}\{f_n(t_0)\}$. Fijado $\varepsilon>0$, se satisface

$$|f_n(t_0)-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1}$$

para valores suficientemente grandes de $n\in\mathbb{N}$. Definimos

$$f(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + \alpha\,.$$

Claramente $f\in C^1(I)$ y, en virtud del teorema fundamental del cálculo, $f'=g$ (que es una función continua por ser límite uniforme de una sucesión de funciones continuas). Para comprobar que $\{f_n\}\to f$ uniformemente escribimos

$$f_n(t) = \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\,ds + f_n(t_0)\,.$$

Usando la convergencia uniforme de $\{f_n'\}$ hacia $g$ se comprueba que, fijado $\eta>0$, se tiene

$$\Big|\int_{t_0}^{t}(f_n'(s)-g(s))\,ds\Big| \le \int_{t_0}^{t}|f_n'(s)-g(s)|\,ds < \eta|I| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2}$$

para valores suficientemente grandes de $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}|f_n(t) - f(t)| &= \Big| \int_{t_0}^{t} f_n'(s)\, ds + f_n(t_0) - \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds - \alpha \Big| \\ &\leq \Big| \int_{t_0}^{t} (f_n'(s) - g(s))\, ds \Big| + |f_n(t_0) - \alpha| < \varepsilon\end{aligned}$$

para valores suficientemente grandes de $n \in \mathbb{N}$, en virtud de (3.1) y (3.2).

■

Para cada $t \in I$,

$$e^{A(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(t)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{A(t)^k}{k!} \right\} .$$

Denotamos $\{S_n(t)\}$ la sucesión de sumas parciales de $e^{A(t)}$:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(t)^k}{k!} .$$

Un simple argumento inductivo nos permite afirmar que

$$\big(A(t)^k\big)' = kA'(t)A(t)^{k-1} .$$

En efecto, esta condición es trivialmente satisfecha para $k = 1$. Suponiéndola cierta para $k - 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\big(A(t)^k\big)' &= \big(A(t)A(t)^{k-1}\big)' \\ &= A'(t)A(t)^{k-1} + A(t)(k-1)A'(t)A(t)^{k-2} = kA'(t)A(t)^{k-1} ,\end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de conmutación demostrada en (b). Entonces

$$\begin{aligned}S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\big(A(t)^k\big)'}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} A'(t)\, \frac{A(t)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= A'(t)S_{n-1}(t) = S_{n-1}(t)A'(t) , \quad (3.3)\end{aligned}$$

ya que $A(t)$ y $A'(t)$ conmutan (nuevamente conforme a lo probado en (b)). Sea finalmente $J \subset I$ un intervalo compacto. Comprobaremos que la restricción de $e^{A(t)}$ a $J$ es derivable y $\frac{d}{dt}\big(e^{A(t)}\big) = A'(t)\,e^{A(t)}$. Para ello estimamos

$$\begin{aligned}\|S_n'(t) - A'(t)\,e^{A(t)}\| &= \|A'(t)S_{n-1}(t) - A'(t)e^{A(t)}\| \\ &\leq \|A'(t)\|\|S_{n-1}(t) - e^{A(t)}\| \leq C_J\|S_{n-1}(t) - e^{A(t)}\|\,,\end{aligned}$$

con $\|A'(t)\| \leq C_J$ para todo $t \in J$ (ya que $A'$ es continua sobre un compacto y, por tanto, acotada). Por otro lado

$$\begin{aligned}\|S_n(t) - e^{A(t)}\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{A(t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A(t)^k}{k!}\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A(t)^k}{k!}\right\| \\ &= \left\|\lim_{m\to\infty,\, m>n+1}\left\{\sum_{k=n+1}^{m}\frac{A(t)^k}{k!}\right\}\right\| \leq \lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{k=n+1}^{m}\left\|\frac{A(t)^k}{k!}\right\|\right\} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\|A(t)\|^k}{k!} \leq \frac{M_J^k}{k!} \to 0\,, \quad n\to\infty\,,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|A(t)\| \leq M_J$ para todo $t \in J$ (ya que $A$ es continua sobre un compacto y, por tanto, acotada). Por consiguiente, se ha probado que $\{S_n'(t)\} \to A'(t)\,e^{A(t)}$ cuando $n \to \infty$, uniformemente en $J$ (en cada componente). Además es claro que, por la propia definición de exponencial de una matriz, $\{S_n(t)\} \to e^{A(t)}$ puntualmente cuando $n \to \infty$. Estamos entonces en condiciones de aplicar la Proposición 3 para concluir que

$$\frac{d}{dt}\big(e^{A(t)}\big) = A'(t)\,e^{A(t)}\,.$$

Una argumentación completamente análoga permite concluir que también

$$\frac{d}{dt}\big(e^{A(t)}\big) = e^{A(t)}A'(t)\,,$$

sin más que proceder de la forma ya conocida a partir de la identidad conmutada $S_n'(t) = S_{n-1}(t)A'(t)$ de (3.3).

(d) Definimos $A(t) := tA + B$, $t \in \mathbb{R}$. Como $A$ y $B$ conmutan por hipótesis, se tiene

$$\begin{aligned}A(t)A(s) &= (tA+B)(sA+B) = tsA^2 + tAB + sBA + B^2 \\ &= stA^2 + tBA + sAB + B^2 = (sA+B)(tA+B) = A(s)A(t)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos ahora $\Psi(t) := e^{A(t)} = e^{tA+B}$, de donde se deduce que

$$\Psi'(t) = \left(e^{tA+B}\right)' = A\, e^{tA+B} = A\Psi(t)$$

usando (c), lo que quiere decir que $\Psi(t)$ es una matriz solución de la ecuación lineal homogénea $x' = Ax$. Como también

$$\begin{aligned}\det(\Psi(t)) &= \det(\Psi(0))\, e^{\int_0^t \mathrm{traza}(A(s))\,ds} = \det(e^B)\, e^{\int_0^t \mathrm{traza}(sA+B)\,ds} \\ &= e^{\mathrm{traza}(B)(1+t)}\, e^{\int_0^t \mathrm{traza}(sA)\,ds} = e^{\mathrm{traza}(B)(1+t)+\frac{1}{2}\mathrm{traza}(A)\,t^2} > 0\end{aligned}$$

en virtud de la fórmula de Jacobi–Liouville, $\Psi(t)$ es además una matriz fundamental de $x' = Ax$. Pero es sabido que $e^{At}$ es también una matriz fundamental de $x' = Ax$, luego ha de existir una matriz regular $C$ con coeficientes constantes tal que $\Psi(t) = e^{At}C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. De evaluar esta expresión en $t = 0$ resulta $e^B = \Psi(0) = C$, luego ha de ser $e^{tA+B} = e^{At}\, e^B$. Evaluando la última expresión en $t = 1$ obtenemos el resultado esperado.

(e) Definimos $B(t) := \int_0^t A(s)\,ds$. Entonces $B'(t) = A(t)$ en virtud del teorema fundamental del cálculo, por lo que puede afirmarse que $B \in C^1(I)$. Además $B(t)$ y $B'(t)$ conmutan. Procediendo como en (c) obtenemos

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{B(t)}\right) = B'(t)\, e^{B(t)} = A(t)\, e^{B(t)} = A(t)F(t)\,.$$

Como también

$$\det(e^{B(t)}) = \det(e^{B(0)})\, e^{\int_0^t \mathrm{traza}(A(s))\,ds} = e^{\int_0^t \mathrm{traza}(A(s))\,ds} > 0$$

para todo $t \in I$, se concluye que $F(t)$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$ (además, puede comprobarse fácilmente que es principal en cero). En nuestro caso

$$\int_0^t A(s)\,ds = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}.$$

Las matrices $A(t)$ e $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan, por lo que basta con calcular

$$F(t) = e^{\begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{t^3}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & \frac{t^2}{2} \\ -\frac{t^2}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{t^3}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t^3}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{t^2}{2}) & \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) \\ -\operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) & \cos(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\frac{t^3}{3}} \cos(\frac{t^2}{2}) & e^{\frac{t^3}{3}} \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) \\ -e^{\frac{t^3}{3}} \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2}) & e^{\frac{t^3}{3}} \cos(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}.$$

■

4. Se considera la ecuación diferencial lineal $x' = Ax$ con $A \in M_N(\mathbb{R})$. Demuestra que si $\Phi$ es una matriz solución de dicha ecuación, también lo es $\Phi^{(m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ¿Se puede asegurar que si $\Phi$ es una matriz fundamental de la ecuación, entonces $\Phi^{(m)}$ también lo es? Proporciona un ejemplo que justifique la respuesta. Demuestra también que si $A$ es una matriz nilpotente, entonces $\Phi^{(p)} = 0$ para cualquier $p$ tal que $A^p = 0$ y, como consecuencia, todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios.

*Solución:* Razonamos por inducción. Dada $\Phi$ una matriz solución de $x' = Ax$, admitamos (hipótesis de inducción) que $\Phi^{(m-1)}$ también lo es, es decir, $\big(\Phi^{(m-1)}\big)' = A\Phi^{(m-1)}$. Entonces

$$\big(\Phi^{(m)}\big)' = \big(\big(\Phi^{(m-1)}\big)'\big)' = \big(A\Phi^{(m-1)}\big)' = A\Phi^{(m)}\,,$$

luego $\Phi^{(m)}$ también es una matriz solución de $x' = Ax$. No se puede asegurar que si $\Phi$ es una matriz fundamental de $x' = Ax$ entonces $\Phi^{(m)}$ también lo es. En efecto: si $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ y la matriz $A$ no es invertible, tampoco lo es $\Phi'$. Sirva como ejemplo $x' = 0$, de la que $\Phi(t) = I_N$ es la única matriz fundamental principal en tanto que $\Phi'(t) = 0_{N\times N}$ no es una matriz fundamental. Sean finalmente $A$ una matriz nilpotente para la que $A^p = 0$ y $\Phi$ una matriz solución de $x' = Ax$. Entonces

$$\Phi^{(p)}(t) = A\Phi^{(p-1)}(t) = A^2\Phi^{(p-2)}(t) = \cdots = A^p\Phi(t) = 0_{N\times N}\,.$$

Para ver que todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios basta con hacer notar que las soluciones de la ecuación son de la forma

$$x(t) = e^{At}x_0\,, \quad x_0 \in \mathbb{R}^N\,,$$

con la particularidad de que $e^{At}$ se expresa en términos de una suma finita ya que, a partir de la $p$–ésima, todas las potencias de $A$ son nulas. Es decir, toda solución es polinómica:

$$x(t) = x_0 + (Ax_0)t + \left(\frac{A^2}{2}x_0\right)t^2 + \ldots \left(\frac{A^{p-1}}{(p-1)!}x_0\right)t^{p-1}\,,$$

luego todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios.

■

5. Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial matricial

$$X' = AX - XA \tag{3.4}$$

con la condición inicial $X(0) = X_0 \in M_N(\mathbb{R})$. Se pide:

(a) Demostrar que el problema de valores iniciales tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.

(b) Demostrar que el problema de valores iniciales es equivalente a la ecuación integral

$$X(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X(s)A\,ds\,,$$

donde $X : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua.

(c) Se define la sucesión

$$X_0(t) = e^{At}X_0\,, \quad X_{n+1}(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X_n(s)A\,ds$$

para $t \in \mathbb{R}$ y $n \geq 0$. Demostrar que $\{X_n\}$ converge a la solución del problema de valores iniciales y que la convergencia es uniforme sobre compactos.

(d) Se efectúa en la ecuación (3.4) el cambio de variable

$$X(t) = Y(t)\, e^{-At}\,.$$

Resolver la ecuación en $Y(t)$ y obtener como consecuencia una expresión explícita de la solución del problema de valores iniciales para la ecuación (3.4).

(e) Supongamos que los valores propios de $A$ están en el eje imaginario y son simples. Demostrar entonces que todas las soluciones de (3.4) están acotadas en $(-\infty, \infty)$.

(Febrero 1994).

*Solución:* (a) Se trata simplemente de reescribir el problema de valores iniciales asociado a la ecuación (3.4) como un problema lineal en $\mathbb{R}^{N^2}$ y aplicar el resultado conocido de existencia y unicidad de soluciones al sistema lineal de coeficientes constantes resultante.

(b) Sea $X(t) = (X_1(t)|\ldots|X_N(t))$ una solución de (3.4) que satisface $X(0) = X_0$, donde $X_j(t)$ representan las columnas de la matriz solución $X(t)$, con $1 \leq j \leq N$. Claramente $X_j' = AX_j - XA_j$. Entendiendo entonces $b(t) = -X(t)A$ como la matriz de términos independientes del sistema y aplicando la fórmula de variación de las constantes obtenemos

$$X_j(t) = e^{At}(X_0)_j - \int_0^t e^{A(t-s)} \big(X(s)A\big)_j\, ds\,,$$

por lo que concluimos que $X(t)$ también resuelve la ecuación integral. Recíprocamente, si partimos ahora de una solución $X(t)$ de la ecuación integral:

$$X(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)} X(s)A\, ds = e^{At}X_0 - e^{At}\int_0^t e^{-As}X(s)A\, ds$$

y derivamos, se obtiene

$$\begin{aligned} X'(t) &= Ae^{At}X_0 - Ae^{At}\int_0^t e^{-As}X(s)A\, ds - e^{At}\big(e^{-At}X(t)A\big) \\ &= A\left(e^{At}X_0 - e^{At}\int_0^t e^{-As}X(s)A\, ds\right) - X(t)A = AX(t) - X(t)A\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado el ítem (c) del Ejercicio 3 y el teorema fundamental del cálculo integral.

(c) Claramente $X_0(t)$ está bien definida y es continua. Supuesto que $X_n(t)$ también lo cumple, entonces $X_{n+1}(t)$ está bien definida y es continua en $[0,t]$, ya que

$$\left\| \int_0^t e^{A(t-s)} X_n(s) A\, ds \right\| \leq \max_{0\leq s\leq t} \{\|X_n(s)\|\} \|A\| \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\, ds < \infty\,.$$

Estudiamos a continuación la convergencia uniforme de la sucesión de iterantes de Picard sobre compactos $[0,T]$ de $[0,\infty)$. Aplicando el principio de inducción se llega a

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leq \frac{\|X_0\|\|A\|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|A\|t} t^{n+1} \tag{3.5}$$

para todo $t \in [0,T]$. En efecto, si evaluamos en primer lugar las dos primeras diferencias: $X_1(t) - X_0(t)$ y $X_2(t) - X_1(t)$, ya podemos intuir que la cota que aparece en el segundo miembro de (3.5) es la correcta:

$$\begin{aligned}
\|X_1(t) - X_0(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} X_0(s) A\, ds \right\| \\
&\leq \int_0^t e^{\|A\|(t-s)} \|X_0(s)\| \|A\|\, ds \leq \int_0^t e^{\|A\|t} \|X_0\| \|A\|\, ds \\
&= e^{\|A\|t} \|A\| \|X_0\| t\,, \\
\|X_2(t) - X_1(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} (X_1(s) - X_0(s)) A\, ds \right\| \\
&\leq \int_0^t e^{\|A\|(t-s)} \|X_1(s) - X_0(s)\| \|A\|\, ds \\
&\leq \int_0^t e^{\|A\|(t-s)} \big(e^{\|A\|s} \|A\| \|x_0\| s\big) \|A\|\, ds \\
&= e^{\|A\|t} \|A\|^2 \|X_0\| \frac{t^2}{2}\,.
\end{aligned}$$

Consideramos la hipótesis de inducción siguiente:

$$\|X_n(t) - X_{n-1}(t)\| \leq e^{\|A\|t}\, \|A\|^n\, \|X_0\|\, \frac{t^n}{n!}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| &\le \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\|X_n(s) - X_{n-1}(s)\|\,\|A\|\,ds \\ &\le \int_0^t e^{\|A\|(t-s)}\Big(e^{\|A\|s}\|A\|^n\|X_0\|\frac{s^n}{n!}\Big)\|A\|\,ds \\ &= \frac{\|X_0\|\;\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\|A\|t}t^{n+1}\,.\end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|X_0\|\;\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\|A\|t}t^{n+1}$ es convergente,[2] podemos aplicar el criterio de comparación de Weierstrass para concluir que la serie

$$X_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\big(X_{k+1}(t) - X_k(t)\big) \tag{3.6}$$

y, por consiguiente, la sucesión de sumas parciales

$$\{X_n(t)\} = \Big\{X_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\big(X_{k+1}(t) - X_k(t)\big)\Big\}$$

convergen absoluta y uniformemente en $[0,T]$. Finalmente, como las iterantes $X_n(t)$ son todas continuas, el límite uniforme de (3.6) ha de ser una función (matricial) continua en $[0,T]$.

(d) Consideramos la transformación $X(t) = Y(t)e^{-At}$. Entonces la ecuación $X'(t) = AX(t) - X(t)A$ puede reescribirse en términos de la función incógnita $Y(t)$ de la siguiente forma:

$$Y'(t)\,e^{-At} - Y(t)A\,e^{-At} = AY(t)\,e^{-At} - Y(t)\,e^{-At}A\,.$$

Si tenemos en cuenta que $e^{-At}A = A\,e^{-At}$ en virtud del Ejercicio 3 (c) (con $A(t) = -At$), obtenemos $Y'(t) = AY(t)$ con dato inicial asociado $Y(0) = X_0$. La única solución de este nuevo problema es $Y(t) = e^{At}X_0$, por lo que deshaciendo el cambio de variable se deduce que

$$X(t) = e^{At}\,X_0\,e^{-At}\,.$$

[2] Se fuede comprobar fácilmente que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|X_0\|\;\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\|A\|t}t^{n+1} = \|X_0\|\,e^{2\|A\|t}$$

(e) Bastará con comprobar que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Si llamamos $J$ a la forma canónica de Jordan de la matriz $A$ y $P$ a la correspondiente matriz de paso, es sabido que $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$, luego

$$\|e^{At}\| \leq \|P\|\|e^{Jt}\|\|P^{-1}\,\| = C\|e^{Jt}\|\,, \quad C \geq 1\,.$$

La cuestión es la siguiente: ¿Es $\|e^{Jt}\|$ acotada? Bastaría con verificar que los coeficientes de la matriz $e^{Jt}$ son acotados, en cuyo caso la norma del máximo de $e^{Jt}$ sería finita y, por equivalencia, todas las demás normas. Admitamos que la matriz $J$ se expresa del siguiente modo:

$$J = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \Lambda_{\frac{N}{2}-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \Lambda_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix},$$

donde los bloques de Jordan son de la forma

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq \frac{N}{2}\,,$$

por ser todos los valores propios de $A$ imaginarios y simples. Por consiguiente, los elementos no nulos de $e^{Jt}$ son de la forma $\operatorname{sen}(b_j t)$ o $\cos(b_j t)$, luego $\|e^{Jt}\|_\infty \leq 2$. Como por (d) sabemos que

$$X(t) = e^{At}\,X_0\,e^{-At}\,,$$

se concluye que

$$\|X(t)\|_\infty \leq 4C^2\|X_0\|_\infty\,.$$

■

6. Se considera el problema de valores iniciales

$$x' = tAx\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{3.7}$$

donde $A \in M_N(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

   (a) Justifica que (3.7) tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.

(b) Construye la sucesión de iterantes de Picard asociada a (3.7).

(c) Utilizando (b), encuentra la solución de (3.7) y exprésala en términos de la exponencial de una matriz.

(d) Prueba que si todos los valores propios de $A$ tienen parte real negativa, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

(Diciembre 1993)

*Solución:* (a) La aplicación $B : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ definida como $B(t) = tA$ es continua, luego la existencia y unicidad de solución del problema (3.7) es inmediata a la luz del teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy asociado a una ecuación diferencial lineal.

(b) Definimos la sucesión de iterantes de Picard de la forma estándar, basándonos en la ecuación integral equivalente a (3.7):

$$x_0(t) \equiv x_0 \,, \quad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t sAx_n(s)\, ds \,.$$

Se puede comprobar fácilmente por inducción que

$$x_n(t) = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big( A \frac{t^2}{2} \Big)^k \right) x_0 \,. \tag{3.8}$$

(c) Para ello tomamos el límite puntual en la expresión (3.8) cuando $n \to \infty$. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \{x_n(t)\} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big( A \frac{t^2}{2} \Big)^k \right) x_0 \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \Big( A \frac{t^2}{2} \Big)^k \right\} x_0 = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big( A \frac{t^2}{2} \Big)^k \right) x_0 = e^{A\frac{t^2}{2}} x_0 \,. \end{aligned}$$

(d) Si llamamos $J$ a la forma canónica de Jordan de la matriz $A$ y $P$ a la correspondiente matriz de paso, se cumple

$$\big\| e^{A\frac{t^2}{2}} \big\| \leq \|P\| \big\| e^{J\frac{t^2}{2}} \big\| \|P^{-1}\| = C \big\| e^{J\frac{t^2}{2}} \big\| \,, \quad C \geq 1 \,.$$

Como

$$\|x(t)\| \le \left\|e^{A\frac{t^2}{2}}\right\| \|x_0\| \le C \left\|e^{J\frac{t^2}{2}}\right\| \|x_0\|,$$

basta con estudiar el comportamiento de $\left\|e^{J\frac{t^2}{2}}\right\|$. Sea $\lambda < 0$ cualquiera de los valores propios reales de $A$. Entonces el bloque de Jordan asociado a $\lambda$ es de la forma

$$J_\lambda = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{\lambda t^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^4}{8} & \frac{t^2}{2} & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{t^4}{8} & \frac{t^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente $\left\{\left\|e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}}\right\|\right\} \to 0$ cuando $t \to \infty$ por ser $\lambda < 0$. Por otro lado, si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ con $a < 0$, el bloque de Jordan asociado a $\lambda$ es de la forma

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -b & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -b & a \end{pmatrix},$$

luego

$$e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} = e^{\frac{at^2}{2}} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{t^2}{2} & t & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cos(\frac{bt^2}{2}) & \operatorname{sen}(\frac{bt^2}{2}) \\ -\operatorname{sen}(\frac{bt^2}{2}) & \cos(\frac{bt^2}{2}) \end{pmatrix},$$

y claramente $\left\{ \left\| e^{J_\lambda \frac{t^2}{2}} \right\| \right\} \to 0$ cuando $t \to \infty$ por ser $a < 0$.

■

7. Dada una matriz $A \in M_N(\mathbb{R})$, se define su seno por medio de la serie

$$\operatorname{sen}(\mathrm{A}) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Prueba que:

(a) La serie dada es convergente y, por tanto, el seno de una matriz está bien definido.

(b) $\|\operatorname{sen}(\mathrm{A})\| \leq e^{\|A\|} \quad \forall A \in M_N(\mathbb{R})$.

(c) La función $t \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sen}(tA) \in M_N(\mathbb{R})$ es de clase $C^2(\mathbb{R})$ y satisface la ecuación matricial $X'' + A^2 X = 0$.

(d) Calcula $\operatorname{sen}(tA)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Junio 1989).

*Solución:* (b) $\| \operatorname{sen}(A) \| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|A\|^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{\|A\|}$ para toda $A \in M_N(\mathbb{R})$.

(a) Inmediato a partir de (b), en virtud del principio de comparación de Weierstrass.

(c) Lo comprobamos para la correspondiente sucesión de sumas parciales y pasamos después al límite $n \to \infty$. Definimos para ello el término general de la sucesión de sumas parciales como sigue:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (tA)^{2k+1}.$$

Entonces

$$S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k+1} t^{2k}\,,$$

$$S_n''(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+3} t^{2k+1}\,,$$

$$A^2 S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+3} t^{2k+1}\,,$$

de donde se sigue que $S_n''(t) = -A^2 S_{n-1}(t)$. Razonando finalmente como en el Ejercicio 3 (c) podemos tomarl límites cuando $n \to \infty$ y obtenemos el resultado deseado.

(d) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} .$$

Se pretende resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, el siguiente sistema lineal:

$$X_{11}''(t) + X_{11}(t) = 0\,, \tag{3.9}$$

$$X_{12}''(t) + X_{12}(t) = 0\,, \tag{3.10}$$

$$X_{21}''(t) + 9X_{11}(t) + 4X_{21}(t) = 0\,, \tag{3.11}$$

$$X_{22}''(t) + 9X_{12}(t) + 4X_{22}(t) = 0\,. \tag{3.12}$$

En $t = 0$ ha de satisfacerse

$$X_{11}(0) = X_{12}(0) = X_{21}(0) = X_{22}(0) = 0$$

y también $X'(0) = A$, luego

$$X_{11}'(0) = 1\,, \quad X_{12}'(0) = 1\,, \quad X_{21}'(0) = 3\,, \quad X_{22}'(0) = 2\,.$$

Resolviendo (3.9) y (3.10) junto con las condiciones iniciales anteriores obtenemos

$$X_{11}(t) = \mathrm{sen}(t)\,, \quad X_{12}(t) = 0\,.$$

Entonces las ecuaciones (3.11) y (3.12) pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$X''_{21}(t) + 9\,\mathrm{sen}(t) + 4X_{21}(t) = 0\,, \tag{3.13}$$

$$X''_{22}(t) + 4X_{22}(t) = 0\,. \tag{3.14}$$

Resolviendo la ecuación (3.14) junto con los datos iniciales correspondientes obtenemos

$$X_{22}(t) = \mathrm{sen}(2t)\,.$$

■

8. Dada una matriz $A \in M_N(\mathbb{R})$, ¿cómo deben definirse las funciones hiperbólicas $\mathrm{senh}(A)$ y $\cosh(A)$? ¿Se satisface la identidad

$$\cosh(A)^2 - \mathrm{senh}(A)^2 = I_N?$$

*Solución:* De la forma más natural posible. Se definen

$$\mathrm{senh}(A) = \frac{e^A - e^{-A}}{2}\,, \quad \cosh(A) = \frac{e^A + e^{-A}}{2}\,,$$

y se cumple

$$\begin{aligned}&\cosh(A)^2 - \mathrm{senh}(A)^2 \\ &= \left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right)\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2}\right) - \left(\frac{e^A - e^{-A}}{2}\right)\left(\frac{e^A - e^{-A}}{2}\right) = I_N\,.\end{aligned}$$

■

9. Se considera la ecuación diferencial lineal

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = e^{-2t}\,. \tag{3.15}$$

Se pide:

(a) Construir un sistema equivalente.

(b) Determinar para dicho sistema una matriz fundamental principal en $t = 0$ y resolverlo. Hallar la solución particular que en $t_0 = 0$ toma el valor $(1, 1, 1)^T$.

(c) A partir de (b), encontrar la solución de la ecuación diferencial (3.15).

*Solución:* (a) Considerando

$$x := x_1\,, \quad x' = x_1' := x_2\,, \quad x'' = x_2' = x_1'' := x_3\,,$$

se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

(b) Resolvemos en primer lugar el sistema homogéneo

$$x' = Ax\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

El único valor propio de la matriz $A$ es $\lambda = -2$ (triple) y

$$\mathrm{Ker}[A + 2I] = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ker}[(A + 2I)^2] = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ker}[(A + 2I)^3] = \mathbb{R}^3\,.$$

Por tanto, la forma canónica de Jordan de $A$ es

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora la matriz de paso $P$ que hace válida la descomposición $A = PJP^{-1}$. Para ello, elegimos en primer lugar un vector

$$v \in \mathrm{Ker}[(A + 2I)^3] \setminus \mathrm{Ker}[(A + 2I)^2]\,,$$

por ejemplo $v = (1,0,0)^T$. Elegimos después $w \in \mathrm{Ker}[(A+2I)^2]$ de la siguiente forma:

$$w = (A+2I)v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, elegimos $u \in \mathrm{Ker}[A+2I]$ como

$$u = (A+2I)w = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Atendiendo a la siguiente descomposición de la matriz de Jordan como suma de una matriz diagonal y otra nilpotente:

$$J = -2I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puede calcularse

$$\begin{aligned} \Psi(t) = e^{At} = P\, e^{Jt} P^{-1} &= P(e^{-2t} I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2t^2+2t+1 & t(1+2t) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2+2t+1 & t(1-t) \\ 8t(t-1) & 4t(2t-3) & 2t^2-4t+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que es la matriz fundamental principal en $t = 0$ que buscábamos. Para resolver el sistema empleamos la fórmula de variación de las constantes:

$$x(t) = \Psi(t)x(t_0) + \Psi(t) \int_{t_0}^{t} \Psi(s)^{-1} b(s)\, ds,$$

donde $\Psi(t)$ es la matriz fundamental principal que acabamos de calcular, $t_0 = 0$,

$$\Psi(t)^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2t^2 - 2t + 1 & t(2t-1) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2 - 2t + 1 & t(t+1) \\ 8t(t+1) & 4t(2t+3) & 2t^2 + 4t + 1 \end{pmatrix}$$

y $b(t) = (0, 0, e^{-2t})^T$. Resulta entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t + 1 & t(1+2t) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2 + 2t + 1 & t(1-t) \\ 8t(t-1) & 4t(2t-3) & 2t^2 - 4t + 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left\{ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \frac{s^2}{2}\, ds \\ \int_0^t s(s+1)\, ds \\ \int_0^t (2s^2 + 4s + 1)\, ds \end{pmatrix} \right\} \\ &= e^{-2t} \left\{ \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t + 1 & t(1+2t) & \frac{t^2}{2} \\ -4t^2 & -4t^2 + 2t + 1 & t(1-t) \\ 8t(t-1) & 4t(2t-3) & 2t^2 - 4t + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \right. \\ &\qquad \left. + \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6}(8t^2 + 16t + 7) \\ -\frac{t^2}{6}(16t^3 + 16t^2 - 14t - 9) \\ \frac{t}{3}(16t^4 - 34t^2 - 6t + 3) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

La solución particular que en $t_0 = 0$ vale $(1, 1, 1)^T$ es

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t} \\ &\times \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t + 1 + t(1+2t) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}(8t^2 + 16t + 7) \\ -4t^2 - 4t^2 + 2t + 1 + t(1-t) - \frac{t^2}{6}(16t^3 + 16t^2 - 14t - 9) \\ 8t(t-1) + 4t(2t-3) + 2t^2 - 4t + 1 + \frac{t}{3}(16t^4 - 34t^2 - 6t + 3) \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{4t^5}{3} + \frac{8t^4}{3} + \frac{7t^3}{6} + \frac{9t^2}{2} + 3t + 1 \\ -\frac{8t^5}{3} - \frac{8t^4}{3} + \frac{7t^3}{3} - \frac{15t^2}{2} + 3t + 1 \\ \frac{16t^5}{3} - \frac{34t^3}{3} + 16t^2 - 23t + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) La (única) solución de la ecuación diferencial (3.15) que satisface $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$ es la primera componente de la solución (vectorial) encontrada en (b), es decir,

$$x(t) = \frac{4t^5}{3} + \frac{8t^4}{3} + \frac{7t^3}{6} + \frac{9t^2}{2} + 3t + 1\,.$$

$\blacksquare$

10. Por el método de los coeficientes indeterminados, halla una solución particular de

    (a) $x'' - 3x' + 7x = 5te^{2t}$

    (b) $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)$

    (c) $x'' - 2x' + 3x = t^3 + \mathrm{sen}(t)$

*Solución:* (a) El cambio de función incógnita $x(t) = e^{2t}u(t)$ conduce a

$$u''(t) + 5u'(t) + u(t) = 5t\,, \tag{3.16}$$

de manera que el segundo miembro es ahora un polinomio. Ensayamos entonces con una solución particular del tipo

$$u_p(t) = At + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

De este modo obtenemos $5A + At + B = 5t$, luego comparando términos del mismo orden en $t$ ha de cumplirse $A = 5$ y $B = -25$. Por tanto, $u_p(t) = 5t - 25$ es una solución particular de (3.16). Deshaciendo finalmente el cambio de variable se llega a que

$$x_p(t) = e^{2t}(5t - 25)$$

es una solución particular de la ecuación de partida.

(b) Resolvemos el problema en tres etapas:

(i) Consideramos la ecuación $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t) = \mathrm{Im}(5e^{3it})$. Como $\lambda = 3i$ no resuelve la ecuación característica $\lambda^2 + 4 = 0$, buscamos una solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y = 5e^{3it} \tag{3.17}$$

de la forma $u_1(t) = Ae^{3it}$, con $A \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_1(t)$ en (3.17) resulta $A = -1$. Por tanto, la solución particular de (3.17) que hemos encontrado es $u_1(t) = -e^{3it}$. Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t)$ es

$$v_1(t) = \mathrm{Im}(u_1(t)) = -\,\mathrm{sen}(3t)\,.$$

(ii) Consideramos ahora la ecuación $x'' + 4x = \cos(3t) = \mathrm{Re}(e^{3it})$ y buscamos una solución particular de

$$y'' + 4y = e^{3it} \tag{3.18}$$

de la forma $u_2(t) = Be^{3it}$, con $B \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_2(t)$ en (3.18) resulta $B = -\frac{1}{5}$. Por tanto, la solución particular de (3.18) que hemos encontrado es $u_2(t) = -\frac{1}{5}\,e^{3it}$. Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' + 4x = \cos(3t)$ es

$$v_2(t) = \mathrm{Re}(u_2(t)) = -\frac{1}{5}\cos(3t)\,.$$

(iii) Consideramos finalmente $x'' + 4x = \mathrm{sen}(2t) = \mathrm{Im}(e^{2it})$. En este caso $\lambda = 2i$ resuelve la ecuación característica, luego hemos de buscar una solución particular de

$$y'' + 4y = e^{2it} \tag{3.19}$$

de la forma $u_3(t) = Ct\,e^{2it}$, con $C \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_3(t)$ en (3.19) resulta $C = -\frac{i}{4}$. Por tanto, la solución particular de (3.19) que hemos encontrado es $u_3(t) = -\frac{t}{4}\,e^{2it}$. Concluimos entonces que una solución particular de la ecuación $x'' + 4x = \mathrm{sen}(2t)$ es

$$v_3(t) = \mathrm{Im}(u_2(t)) = -\frac{t}{4}\cos(2t)\,.$$

Como $L[x] := x'' + 4x$ es lineal, se tiene

$$\begin{aligned} L[v_1 + v_2 + v_3] = L[v_1] + L[v_2] + L[v_3] \\ = 5\,\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)\,, \end{aligned}$$

luego

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = -\,\mathrm{sen}(3t) - \frac{1}{5}\cos(3t) - \frac{1}{4}t\cos(2t)$$

es una solución particular de la ecuación de partida. Conocida la solución general de la ecuación homogénea:

$$x_h(t) = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

la solución general de $x'' + 4x = 5\,\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)$ es

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + v(t) \\ &= A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t) - \mathrm{sen}(3t) - \frac{1}{5}\cos(3t) - \frac{t}{4}\cos(2t)\,, \end{aligned}$$

con $A, B \in \mathbb{R}$.

(c) Como $L[x] := x'' - 2x' + 3x$ es lineal, podemos resolver el problema en dos etapas:

(i) Consideramos en primer lugar la ecuación $x'' - 2x' + 3x = t$ y conjeturamos la existencia de una solución particular de la forma $x_1(t) = At + B$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$-2A + 3(At + B) = t\,.$$

Comparando términos del mismo orden en $t$ concluimos que $A = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{2}{9}$, luego $x_1(t) = \frac{t}{3} + \frac{2}{9}$ constituye una solución particular del problema planteado en esta etapa.

(ii) Buscamos ahora una solución particular de

$$x'' - 2x' + 3x = \mathrm{sen}(t) = \mathrm{Im}(e^{it})\,.$$

Como $\lambda = i$ no es una solución de la ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$, buscamos una solución particular de la ecuación

$$y'' - 2y' + 3y = e^{it} \tag{3.20}$$

de la forma $y(t) = Ae^{it}$, con $A \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $u_2(t)$ en (3.20) resulta $A = \frac{1+i}{4}$. Por tanto, la solución particular de (3.20) que hemos encontrado es $y(t) = \frac{1+i}{4}\,e^{it}$. Concluimos pues que una solución particular de la ecuación $x'' - 2x' + 3x = \mathrm{sen}(t)$ es

$$x_2(t) = \mathrm{Im}(y(t)) = \frac{1}{4}(\mathrm{sen}(t) + \cos(t))\,.$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \frac{1}{4}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) + \frac{t}{3} + \frac{2}{9}$$

es una solución particular de la ecuación diferencial de partida.

■

11. Por el método de variación de las constantes, halla una solución particular de

    (a) $x'' + x = \operatorname{cotan}(t)$

    (b) $x'' + 4x = \sec(2t)$

    (c) $x'' - 6x' + 9x = \frac{e^{3t}}{t^2}$

    (d) $x'' - x = e^{-t}\operatorname{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t})$

*Solución:* (a) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{\cos(t), \operatorname{sen}(t)\}$. Por ello, buscamos una solución particular de $x'' + x = \operatorname{cotan}(t)$ del tipo

$$x(t) = A(t)\cos(t) + B(t)\operatorname{sen}(t)\,. \tag{3.21}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} x' &= A'\cos(t) - A\operatorname{sen}(t) + B'\operatorname{sen}(t) + B\cos(t)\,, \\ x'' &= A''\cos(t) - 2A'\operatorname{sen}(t) - A\cos(t) \\ &\quad + B''\operatorname{sen}(t) + 2B'\cos(t) - B\operatorname{sen}(t)\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.21) en la ecuación obtenemos

$$(A'' + 2B')\cos(t) + (B'' - 2A')\operatorname{sen}(t) = \operatorname{cotan}(t)\,.$$

Como condición adicional podemos usar

$$A'\cos(t) + B'\operatorname{sen}(t) = 0 \tag{3.22}$$

para simplificar los cálculos, de modo que $B' = -A'\text{cotan}(t)$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
x'(t) &= B\cos(t) - A\,\text{sen}(t)\,, \\
x''(t) &= (B' - A)\cos(t) - (B + A')\,\text{sen}(t) \\
&= -A'\left(\frac{\cos(t)^2}{\text{sen}(t)} + \text{sen}(t)\right) - A\cos(t) - B\,\text{sen}(t) \\
&= -\frac{A'}{\text{sen}(t)} - x(t)\,.
\end{aligned}$$

De aquí se desprende inmediatamente que, para que (3.21) sea una solución particular, debe cumplirse

$$-\frac{A'}{\text{sen}(t)} = \text{cotan}(t)\,,$$

es decir, $A(t) = -\,\text{sen}(t)$. De la condición (3.22) se deduce finalmente que

$$B(t) = \int \frac{\cos(t)^2}{\text{sen}(t)}\,dt = \cos(t) + \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\,.$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\text{sen}(t)$$

es una solución particular de $x'' + x = \text{cotan}(t)$.

(b) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{\cos(2t), \text{sen}(2t)\}$. Buscamos entonces una solución particular de $x'' + 4x = \sec(2t)$ de la forma

$$x(t) = A(t)\cos(2t) + B(t)\,\text{sen}(2t)\,. \tag{3.23}$$

Al derivar se obtiene

$$\begin{aligned}
x'(t) &= A'\cos(2t) - 2A\,\text{sen}(2t) + B'\,\text{sen}(2t) + 2B\cos(2t)\,, \\
x'' &= A''\cos(2t) - 4A'\,\text{sen}(2t) - 4A\cos(2t) \\
&\quad + B''\,\text{sen}(2t) + 4B'\cos(2t) - 4B\,\text{sen}(2t)\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora (3.23) en la ecuación resulta

$$(A'' + 4B')\cos(2t) + (B'' - 4A')\,\text{sen}(2t) = \sec(2t)\,.$$

Como condición adicional consideramos

$$A' \cos(2t) + B' \operatorname{sen}(2t) = 0\,, \tag{3.24}$$

de modo que $B' = -A'\operatorname{cotan}(2t)$ y, por tanto, las expresiones de $x'$ y $x''$ se reducen a

$$\begin{aligned} x' &= 2B\cos(2t) - 2A\operatorname{sen}(2t)\,, \\ x''(t) &= 2(B' - 2A)\cos(2t) - 2(2B + A')\operatorname{sen}(2t) \\ &= -2A'\left(\frac{\cos(2t)^2}{\operatorname{sen}(2t)} + \operatorname{sen}(2t)\right) - 4A\cos(2t) - 4B\operatorname{sen}(2t) \\ &= -\frac{2A'}{\operatorname{sen}(2t)} - 4x(t)\,. \end{aligned}$$

De aquí se desprende inmediatamente que, para que (3.23) sea una solución particular, debe cumplirse

$$-\frac{2A'}{\operatorname{sen}(2t)} = \sec(2t)\,,$$

es decir, $A(t) = \frac{1}{4}\log(\cos(2t))$. De la condición (3.24) se deduce finalmente que $B(t) = \frac{t}{2}$, luego

$$x(t) = \frac{1}{4}\log(\cos(2t))\cos(2t) + \frac{t}{2}\operatorname{sen}(2t)$$

es una solución particular de $x'' + 4x = \sec(2t)$.

(c) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^{3t}, te^{3t}\}$. Buscamos entonces una solución particular de

$$x'' - 6x' + 9x = \frac{e^{3t}}{t^2} \tag{3.25}$$

del tipo

$$x(t) = (A(t) + B(t)t)\,e^{3t}\,. \tag{3.26}$$

Al derivar se obtiene

$$x'(t) = (A' + B + B't + 3A + 3Bt)\,e^{3t}\,.$$

Las condiciones que imponemos para encontrar $A(t)$ y $B(t)$ son

$$A' + B't = 0\,, \quad B'(1+3t) + 3A' = \frac{1}{t^2} \Longrightarrow B' = \frac{1}{1+3t}\left(\frac{1}{t^2} - 3A'\right).$$

La primera de ellas (elegida libremente siempre que sea compatible con la segunda) contribuye a simplificar los cálculos, mientras que la segunda es necesaria para que (3.26) resuelva la ecuación diferencial. Obtenemos entonces

$$A(t) = \log(|t|)\,, \quad B(t) = -\frac{1}{t}\,,$$

por lo que

$$x(t) = (\log(|t|) - 1)\, e^{3t}$$

es una solución particular de (10.8).

(d) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea es $\{e^{-t}, e^{t}\}$. Buscamos entonces una solución particular de la forma

$$x(t) = A(t)\, e^{-t} + B(t)\, e^{t}\,. \tag{3.27}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} x'(t) &= (A' - A)\, e^{-t} + (B' + B)\, e^{t}\,, \\ x''(t) &= (A'' - 2A' + A)\, e^{-t} + (B'' + 2B' + B)\, e^{t}\,. \end{aligned}$$

Imponemos como primera condición

$$A'\, e^{-t} + B'\, e^{t} = 0 \Longrightarrow B' = -A'\, e^{-2t}\,, \tag{3.28}$$

de modo que las expresiones de $x'$ y $x''$ se reducen a

$$x'(t) = -A\, e^{-t} + B\, e^{t}\,, \quad x''(t) = (A - 2A')\, e^{-t} + B\, e^{t}\,.$$

Entonces (3.27) resuelve la ecuación diferencial

$$x'' - x = e^{-t}\, \mathrm{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t}) \tag{3.29}$$

si y solamente si

$$\begin{aligned} & -2A'e^{-t} = e^{-t}\, \mathrm{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t}) \\ & \qquad \Longrightarrow A' = -\frac{1}{2}\big(\, \mathrm{sen}(e^{-t}) + e^{t} \cos(e^{-t})\big) \\ & \qquad\qquad \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}\, e^{t} \cos(e^{-t})\,. \end{aligned}$$

Volviendo a (3.28) obtenemos

$$B' = \frac{1}{2}\, e^{-2t}\big(\operatorname{sen}(e^{-t}) + e^{t}\cos(e^{-t})\big)$$
$$\Longrightarrow B = \frac{1}{2}\, e^{-t}\cos(e^{-t}) - \operatorname{sen}(e^{-t})\,.$$

Por consiguiente,

$$x(t) = -e^{t}\operatorname{sen}(e^{-t})$$

es una solución particular de (3.29).

■

12. Previo rebajamiento del orden de las correspondientes ecuaciones diferenciales lineales, resuelve

    (a) $t^2x'' + t(t-4)x' + 2(3-t)x = 2t^4e^t$, con $x_1(t) = t^2$.

    (b) $(t^2-t)x''' + (3t-t^2-3)x'' - tx' + x = 0$, con $x_1(t) = \frac{1}{t}$ y $x_2(t) = t$.

    (c) $tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = (t^2+t-1)\,e^{2t}$, con $x_1(t) = e^t$.

    (d) $(1+t)x'' + (4t+5)x' + (4t+6)x = e^{-2t}$, con $x_1(t) = e^{at}$ y $a \in \mathbb{R}$ por determinar.

*Solución:* (a) Tomando $t_0 = 1$ se obtiene $x_1(1) = 1$, $x_1'(1) = 2$. Para resolver la ecuación homogénea necesitamos encontrar otra solución $x_2(t)$ tal que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ sean linealmente independientes. Elegimos para ello los siguientes datos iniciales: $x_2(1) = 0$, $x_2'(1) = 1$. El wronskiano de ambas soluciones en el punto $t_0 = 1$ es entonces

$$W(x_1,x_2)(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,,$$

por lo que tenemos garantizado que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ serán linealmente independientes. Para construir $x_2(t)$ usamos la fórmula de Jacobi–Liouville:

$$t^4\, e^{1-t} = e^{-\int_1^t (\frac{s-4}{s})\, ds} = W(x_1,x_2)(t)$$
$$= \begin{vmatrix} t^2 & x_2(t) \\ 2t & x_2'(t) \end{vmatrix} = t^2x_2'(t) - 2tx_2(t)\,,$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden (obsérvese que es aquí donde hemos conseguido rebajar el orden de la ecuación de partida) para $x_2(t)$:

$$x_2' - \frac{2}{t}x_2 = t^2 e^{1-t}\,,$$

que junto con la condición $x_2(1) = 0$ admite únicamente la solución

$$x_2(t) = t(t-1)\,.$$

Por tanto, $\{t^2, t(t-1)\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea

$$t^2 x'' + t(t-4)x' + 2(3-t)x = 0\,. \tag{3.30}$$

Podemos construir entonces la siguiente matriz fundamental de (3.30):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t(t-1) \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix},$$

a partir de la cual podemos construir a su vez la matriz fundamental principal en $t = 1$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} t(2-t) & t(t-1) \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando finalmente la fórmula de variación de las constantes con dato inicial $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$ para resolver la ecuación completa, obtenemos

$$x(t) = \begin{pmatrix} t(2-t)x_0^1 + t(t-1)x_0^2 \\ 2(1-t)x_0^1 + (2t-1)x_0^2 \end{pmatrix} + 2e \begin{pmatrix} t((2t+9) + e^{t-1}(t^3 - 6t^2 + 18t - 24)) \\ (4t+9) + e^{t-1}(t^4 - 2t^3 + 12t - 24)) \end{pmatrix}.$$

(b) Tomando $t_0 = 2$ se obtiene

$$x_1(2) = \frac{1}{2}\,, \quad x_1'(2) = -\frac{1}{4}\,, \quad x_1''(2) = \frac{1}{4}\,,$$
$$x_2(2) = 2\,, \quad x_2'(2) = 1\,, \quad x_2''(2) = 0\,.$$

Para resolver la ecuación necesitamos encontrar otra solución $x_3(t)$ de modo que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ sean linealmente independientes. Para ello elegimos, por ejemplo, los siguientes datos iniciales:

$$x_3(2) = 0\,, \quad x_3'(2) = 0\,, \quad x_3''(2) = 1\,.$$

El wronskiano de las tres soluciones en $t_0 = 2$ viene expresado por

$$W(x_1, x_2, x_3)(2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,,$$

por lo que tenemos garantizado que $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ serán linealmente independientes. Para construir $x_3(t)$ usamos nuevamente la fórmula de Jacobi–Liouville:

$$\begin{aligned} \frac{8(t-1)}{t^3}\, e^{t-2} = e^{-\int_2^t \left(\frac{3s-s^2-3}{s(s-1)}\right) ds} &= W\Big(\frac{1}{t}, t, x_3\Big)(t) \\ = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & t & x_3(t) \\ -\frac{1}{t^2} & 1 & x_3'(t) \\ \frac{2}{t^3} & 0 & x_3''(t) \end{vmatrix} &= \frac{2}{t} x_3''(t) + \frac{2}{t^2} x_3'(t) - \frac{2}{t^3} x_3(t)\,, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden (obsérvese que es aquí donde hemos conseguido rebajar el orden de la ecuación de partida) para $x_3(t)$:

$$t^2 x_3'' + t x_3' - x_3 = 4(t-1)\, e^{t-2}\,, \tag{3.31}$$

a resolver junto con las condiciones $x_3(2) = 0$ y $x_3'(2) = 0$. Es fácil comprobar que $\{t, \frac{1}{t}\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea, de modo que buscamos una solución particular de la ecuación completa del tipo

$$x_3(t) = A(t)t + \frac{B(t)}{t}$$

vía el método de variación de las constantes. Tenemos

$$x_3'(t) = A'(t)t + A(t) + \frac{B'(t)}{t} - \frac{B(t)}{t^2}\,.$$

Podemos encontrar las funciones $A(t)$ y $B(t)$ imponiendo, por ejemplo, $A't + \frac{B'}{t} = 0$ junto con la condición de resolubilidad

$$2A't^2 = 4(t-1)\, e^{t-2}\,,$$

de las cuales resultan

$$A = \frac{2}{t}\, e^{t-2}\,, \quad B = -2(t-2)\, e^{t-2}\,.$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (3.31) es

$$x_3(t) = \lambda_1 t + \frac{\lambda_2}{t} + 2\,e^{t-2} - \frac{2(t-2)}{t}\,e^{t-2} = \lambda_1 t + \frac{\lambda_2}{t} + \frac{4}{t}\,e^{t-2}\,,$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De imponer $x_3(2) = 0$ y $x_3'(2) = 0$ se sigue finalmente

$$x_3(t) = \frac{4}{t}\,e^{t-2} - t\,.$$

Por tanto, una base de soluciones de la ecuación

$$(t^2 - t)x''' + (3t - t^2 - 3)x'' - tx' + x = 0$$

es $\left\{t, \frac{1}{t}, \frac{4}{t}\,e^{t-2} - t\right\}$.
(c) Como en (a), podemos considerar $t_0 = 1$ de modo que

$$x_1(1) = x_1'(1) = e$$

y buscamos $x_2(t)$ tal que, por ejemplo,

$$x_2(1) = 0\,, \quad x_2'(1) = 1\,.$$

De este modo tenemos garantizado que las dos soluciones serán linealmente independientes:

$$W(x_1, x_2)(1) = \begin{vmatrix} e & 0 \\ e & 1 \end{vmatrix} = e \neq 0\,.$$

Para construir $x_2(t)$ usamos la fórmula de Jacobi–Liouville, de la que se deduce

$$\begin{aligned} t\,e^{2t-1} = e^{1+\int_1^t \left(\frac{2s+1}{s}\right) ds} &= W(e^t, x_2)(t) \\ &= \begin{vmatrix} e^t & x_2(t) \\ e^t & x_2'(t) \end{vmatrix} = e^t(x_2'(t) - x_2(t))\,, \end{aligned}$$

luego $x_2' - x_2 = t\,e^{t-1}$, que junto con la condición $x_2(1) = 0$ admite únicamente la solución

$$x_2(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) e^{t-1}\,.$$

Por tanto, una base de soluciones de la ecuación homogénea es

$$\mathcal{B} = \left\{ e^t, \frac{t^2 - 1}{2}\,e^{t-1} \right\}\,.$$

Resolvemos finalmente la ecuación completa. Para ello construimos en primer lugar una matriz fundamental del sistema:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{1}{2}(t^2-1)\,e^{t-1} \\ e^t & \frac{1}{2}(t^2+2t-1)\,e^{t-1} \end{pmatrix},$$

a partir de la cual podemos construir (multiplicando por la matriz de paso adecuada) la correspondiente matriz fundamental principal en $t = 1$:

$$\Psi(t) = \frac{e^{t-1}}{2} \begin{pmatrix} 3-t^2 & t^2-1 \\ 3-2t-t^2 & t^2+2t-1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando ahora la fórmula de variación de las constantes con dato inicial $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$ obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{e^{t-1}}{2} &\begin{pmatrix} x_0^1(3-t^2) + x_0^2(t^2-1) \\ x_0^1(3-2t-t^2) + x_0^2(t^2+2t-1) \end{pmatrix} \\ &\qquad + e^{t+1} \begin{pmatrix} t(e^{t-1}-t) \\ (2t+1)\,e^{t-1} - t(t+2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Para que $x_1(t) = e^{at}$ resuelva la ecuación homogénea ha de elegirse $a = -2$. Podemos considerar $t_0 = 0$, de modo que $x_1(0) = 1$ y $x_1'(0) = -2$. Buscamos entonces $x_2(t)$ tal que $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$. Se tiene

$$W(x_1, x_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

luego en virtud de la fórmula de Jacobi–Liouville

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+1}\,e^{-4t} = e^{-\int_0^t \left(\frac{4s+5}{s+1}\right) ds} &= W(x_1, x_2)(t) \\ &= \begin{vmatrix} e^{-2t} & x_2(t) \\ -2\,e^{-2t} & x_2'(t) \end{vmatrix} = e^{-2t}(x_2'(t) + 2x_2(t)). \end{aligned}$$

De este modo obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden para $x_2(t)$:

$$x_2' + 2x_2 = \frac{1}{t+1}\,e^{-2t},$$

que junto con la condición $x_2(0) = 0$ admite únicamente la solución

$$x_2(t) = \log(t+1)\,e^{-2t}.$$

Por tanto, $\left\{e^{-2t}, \log(t+1)\, e^{-2t}\right\}$ es una base de soluciones del sistema homogéneo. Para resolver el sistema completo construimos en primer lugar una matriz fundamental:

$$\Phi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & \log(t+1) \\ -2 & \frac{1}{t+1} - 2\log(t+1) \end{pmatrix},$$

a partir de la cual se obtiene fácilmente la matriz fundamental principal en $t = 0$:

$$\Psi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\log(t+1)+1 & \log(t+1) \\ -\frac{2}{t+1}[t+2(t+1)\log(t+1)] & \frac{1}{t+1} - 2\log(t+1) \end{pmatrix}.$$

Entonces la fórmula de variación de las constantes proporciona la siguiente solución para el dato inicial $x_0 = (x_0^1, x_0^2)^T$:

$$x(t) = e^{-2t} \left\{ \begin{pmatrix} x_0^1 + (2x_0^1 + x_0^2)\log(t+1) \\ \frac{1}{t+1}(x_0^2 - 2x_0^1 t) - 2(2x_0^1 + x_0^2)\log(t+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(t(t+2) - 2\log(t+1)) \\ \log(t+1) - \frac{t^2(t+2)}{2(t+1)} \end{pmatrix} \right\}.$$

■

13. Decide de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   (a) Existe una ecuación del tipo $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ con $a, b \in C(\mathbb{R})$ tal que $y(t) = t^5$ es solución.

   (Febrero 1989)

   (b) Existe una matriz nilpotente $A \in M_N(\mathbb{R})$ tal que $e^A$ es también nilpotente.

   (Febrero 1989)

   (c) Dadas $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ matrices fundamentales de un mismo sistema lineal homogéneo, se cumple que $\Phi(t)\Psi(t)^{-1}$ es constante.

   (Septiembre 1989)

(d) Si $A \in M_N(\mathbb{R})$ es antisimétrica (respectivamente simétrica), entonces $e^A$ es antisimétrica (respectivamente simétrica).

(Febrero 1991)

(e) Existe una solución no trivial de $x'' + \operatorname{sen}(t)x' = 0$ que satisface $x(0) = x(\pi) = 0$.

(Febrero 1994)

(f) $\{e^t, \operatorname{sen}(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial de la forma $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, con $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas.

(Junio 1994)

(g) Sean $f_1$ y $f_2$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a_1x' + a_2x = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Entonces el wronskiano $W(f_1, f_2)$ es constante si y sólo si $a_1 = 0$.

(h) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ con un valor propio $\alpha$ tal que

$$\dim(\operatorname{Ker}[A - \alpha I]) = 3\,.$$

Entonces su forma canónica de Jordan es $\alpha I_3$.

(Septiembre 2003)

*Solución:* (a) FALSA. Para que $y(t) = t^5$ fuese una solución tendría que cumplirse

$$b(t) = -\frac{5ta(t) + 20}{t^2}\,,$$

que no es continua en $t = 0$.

(b) FALSA. Sea $A$ una matriz nilpotente de orden $k$ (es decir, $A^k = 0$). Razonaremos por reducción al absurdo. Si existiese $n \in \mathbb{N}$ tal que $(e^A)^n = 0$, se tendría

$$0 = \det\big((e^A)^n\big) = \big(\det(e^A)\big)^n \neq 0\,,$$

lo que lleva a contradicción.

(c) FALSA. Se tiene

$$\begin{aligned}\left(\Phi(t)\Psi(t)^{-1}\right)' &= \Phi'(t)\Psi(t)^{-1} - \Phi(t)\Psi(t)^{-1}\Psi'(t)\Psi(t)^{-1}\\ &= A\Phi(t)\Psi(t)^{-1} - \Phi(t)\Psi(t)^{-1}A\Psi(t)\Psi(t)^{-1}\\ &= A\Phi(t)\Psi(t)^{-1} - \Phi(t)\Psi(t)^{-1}A\,,\end{aligned}$$

que es la matriz nula si y sólo si $\Phi(t)\Psi(t)^{-1}$ y $A$ conmutan. Baste por ejemplo considerar la ecuación $x'' = 0$ para observar que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son dos matrices fundamentales tales que

$$\Phi(t)\Psi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es una matriz constante.

(d) VERDADERA para el caso simétrico y FALSA para el caso antisimétrico. El contraejemplo para el caso antisimétrico es obvio: $0_N$ es antisimétrica, mientras que $e^{0_N} = I_N$ no lo es. Demostramos ahora la veracidad del enunciado para el caso simétrico. Para ello denotamos $S_n(X)$ la sucesión de sumas parciales de $e^X$. Se tiene

$$S_n(A^T) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A^T)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A^k)^T}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right)^T = (S_n(A))^T\,.$$

Tomando límites en la expresión anterior se obtiene $e^{A^T} = (e^A)^T$. Se concluye teniendo en cuenta que $e^{A^T} = e^A$, pues por hipótesis $A = A^T$.

(e) FALSA. Si asumimos $y = x'$, la ecuación puede reescribirse como una de primer orden del siguiente modo: $y' + \mathrm{sen}(t)y = 0$, que tiene sus variables separadas. En efecto:

$$\frac{y'}{y} = -\mathrm{sen}(t) \Longrightarrow y = Ce^{\cos(t)} \Longrightarrow x(t) = x(0) + C\int_0^t e^{\cos(s)}\,ds\,,$$

con $C \in \mathbb{R}$. Si asumimos $x(0) = 0$ entonces $x(\pi) = C\int_0^\pi e^{\cos(s)}\,ds$, que sólo se anula si $C = 0$.

(f) FALSA. Se tiene

$$W(e^t, \mathrm{sen}(t)) = \begin{vmatrix} e^t & \mathrm{sen}(t) \\ e^t & \cos(t) \end{vmatrix} = e^t(\cos(t) - \mathrm{sen}(t)),$$

que se anula para los valores $t = \frac{\pi}{4}(1+2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(g) VERDADERA. La matriz de coeficientes del sistema $2 \times 2$ asociado a la ecuación $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

La fórmula de Jacobi–Liouville establece que

$$W(f_1(t), f_2(t)) = W(f_1(t_0), f_2(t_0))\, e^{-a_1(t-t_0)},$$

de modo que $W(f_1(t), f_2(t))$ sólo puede ser constante si $a_1 = 0$.

(h) VERDADERA. De hecho, la única matriz $A \in M_3$ que cumple la condición $\dim(\mathrm{Ker}[A - \alpha I]) = 3$ es $A = \alpha I_3$, ya que el subespacio propio asociado al valor propio $\alpha$ es $\mathbb{R}^3$, es decir, $Ax = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

■

14. Se considera la ecuación diferencial $x'' + x = 0$. Denotemos $S(t)$ la única solución de esta ecuación que satisface $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$, y $C(t)$ la única solución que satisface $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$. Prueba las siguientes afirmaciones:

    (a) Las soluciones $S(t)$ y $C(t)$ son infinitamente derivables y están definidas en $\mathbb{R}$.

    (b) $S'(t) = C(t)$ y $C'(t) = -S(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

    (c) $S(t)^2 + C(t)^2 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

    (d) El wronskiano de $S(t)$ y $C(t)$ vale $-1$.

    (e) $S(t \pm a) = S(t)C(a) \pm C(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in \mathbb{R}$.

    (f) $C(t \pm a) = C(t)C(a) \mp S(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in \mathbb{R}$.

    (g) Existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mínimo tal que $C(\alpha) = 0$. Llamaremos a ese número $\frac{\pi}{2}$.

(h) $S(t+2\pi) = S(t)$ y $C(t+2\pi) = C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

*Solución:* (a) Es inmediato por la propia definición de solución, pues tanto $x^{(2k)}(t) = -x(t)$ como $x^{(2k+1)}(t) = -x'(t)$ son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.
(b) Como $S(t)$ resuelve $x'' + x = 0$ con $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$, se tiene

$$S''' + S' = 0\,, \quad 1 = S'(0) = S'''(0)\,, \quad 0 = S(0) = -S''(0)\,.$$

También sabemos que $C(t)$ resuelve $C'''(t) + C'(t) = 0$ con datos iniciales $C(0) = 1$ y $C'(0) = 0$, luego por unicidad ha de ser $S' = C$ y también $C' = S'' = -S$.
(c) Definimos $r(t) := S(t)^2 + C(t)^2$. Entonces

$$r'(t) = 2S(t)S'(t) + 2C(t)C'(t) = 2S(t)C(t) - 2C(t)S(t) = 0\,,$$

para lo que hemos utilizado lo probado en (b). Como consecuencia, la función $r(t)$ ha de ser constante. Además, como

$$r(0) = S(0)^2 + C(0)^2 = 1\,,$$

se deduce que $r \equiv 1$.
(d) Se tiene

$$\begin{aligned} W(S(t), C(t)) &= \begin{vmatrix} S(t) & C(t) \\ S'(t) & C'(t) \end{vmatrix} \\ &= S(t)C'(t) - S'(t)C(t) = -S(t)^2 - C(t)^2 = -1\,, \end{aligned}$$

en virtud de lo demostrado en (c).
(e) Definimos $g^a_\pm(t) := S(t)C(a) \pm C(t)S(a)$. Se tiene

$$\begin{aligned} (g^a_\pm)'(t) &= S'(t)C(a) \pm C'(t)S(a)\,, \\ (g^a_\pm)''(t) &= S''(t)C(a) \pm C''(t)S(a) \\ &= -S(t)C(a) \mp C(t)S(a) = -g^a_\pm(t)\,. \end{aligned}$$

En consecuencia, $g^a_\pm(t)$ satisface $x'' + x = 0$ con

$$\begin{aligned} &g^a_\pm(0) = \pm S(a)\,, \quad (g^a_\pm)'(0) = C(a)\,, \quad g^a_-(a) = 0\,, \\ &(g^a_-)'(a) = S'(a)C(a) - C'(a)S(a) = C(a)^2 + S(a)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Es evidente que $S(t \pm a)$ resuelve la ecuación diferencial $x'' + x = 0$ sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
S(t+a)(t=0) &= S(a) = g_+^a(0)\,,\\
S'(t+a)(t=0) &= S'(a) = C(a) = (g_+^a)'(0)\,,\\
S(t-a)(t=a) &= S(0) = 0 = g_-^a(a)\,,\\
S'(t-a)(t=a) &= S'(0) = 1 = (g_-^a)'(a)\,.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que ha de ser $S(t \pm a) = g_\pm^a(t)$ por unicidad.

(f) De (b) se deduce que $C(t \pm a) = S'(t \pm a)$, que a su vez es igual a $S'(t)C(a) \pm C'(t)S(a)$ gracias a (e). Por tanto

$$\begin{aligned}
C(t \pm a) &= S'(t)C(a) \pm C'(t)S(a)\\
&= C(t)C(a) \pm (-S(t)S(a)) = C(t)C(a) \mp S(t)S(a)\,,
\end{aligned}$$

donde se ha vuelto a utilizar (b).

(g) Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $C(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, \infty)$. Como $C(t)$ es continua y $C(0) = 1$, se ha de verificar $C(t) > 0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Entonces $C''(t) = -C(t) < 0$ en $[0, \infty)$, por lo que $C(t)$ ha de ser cóncava y $C'(t)$ decreciente en $[0, \infty)$. Luego para cualquier $t_0 > 0$ se tiene $C'(t_0) < 0$, es decir, la recta tangente a $C(t)$ en $t = t_0$ corta al eje de abscisas en algún punto, de modo que necesariamente ha de existir $\alpha \in [0, \infty)$ tal que $C(\alpha) = 0$. Esto contradice nuestra hipótesis de partida. Por consiguiente, $C(t)$ se anula en el intervalo $(0, \infty)$. Consideremos ahora el conjunto de todos los puntos en que $C(t)$ se anula:

$$A = \{\alpha > 0 : C(\alpha) = 0\}\,,$$

y veamos que admite un mínimo. Sea $\{\alpha_n\} \subset A$ una sucesión minimizante, es decir, $\{\alpha_n\} \to \alpha_0 = \inf(A)$ cuando $n \to \infty$. En última instancia se trata de comprobar que $\alpha_0 = \min\{A\}$. Pero gracias a la continuidad de $C(t)$ se concluye que

$$\{0\} = \{C(\alpha_n)\} \to C(\alpha_0) = 0$$

cuando $n \to \infty$, luego $\alpha_0 \in A$ y, por tanto, es su mínimo.

(h) Usando repetidamente lo demostrado en (e) se tiene

$$\begin{aligned}
S(t+2\pi) &= S(t)C(2\pi) + C(t)S(2\pi)\\
&= S(t)C(2\pi) + C(t)(2C(\pi)S(\pi))\\
&= S(t)C(2\pi) + C(t)\left(4C(\pi)S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = S(t)C(2\pi)\,,
\end{aligned}$$

para lo que se ha empleado también el resultado de (g). Por otro lado, con base en (f) y (c) se cumple

$$C(2\pi) = C(\pi)^2 - S(\pi)^2 = 1 - 2S(\pi)^2 = 1\,,$$

de donde se deduce que

$$S(t+2\pi) = S(t)\,, \quad C(t+2\pi) = C(t)C(2\pi) - S(t)S(2\pi) = C(t)\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

■

15. Sean

$$u(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\mathrm{sen}(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\,d\sigma\,, \quad v(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\cos(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\,d\sigma\,.$$

Demuestra que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ es solución de un sistema lineal homogéneo y resuelve dicho sistema.

*Solución:* Tenemos

$$u'(t) = \int_0^\infty \sqrt{\sigma}\,e^{-\sigma}\cos(t\sigma)\,d\sigma\,, \quad v'(t) = -\int_0^\infty \sqrt{\sigma}\,e^{-\sigma}\,\mathrm{sen}(t\sigma)\,d\sigma\,,$$

de cuyas expresiones se deducen (integrando por partes en repetidas ocasiones) las siguientes relaciones:

$$u' = \frac{1}{2(1+t^2)}\,(v - tu)\,, \quad v' = -\frac{1}{2(1+t^2)}\,(u + tv)\,.$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ resuelve el sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$ con

$$A(t) = \frac{1}{2(1+t^2)}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix}.$$

■

16. Sea $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ una solución de $x' = Ax$ con $A \in M_N(\mathbb{R})$. Demuestra que $t\varphi(t)$ es una solución de $x' = Ax + \varphi(t)$ y aplica este resultado para resolver

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} . \tag{3.32}$$

(Julio 2004)

*Solución:* Como $\varphi$ es una solución de $x' = Ax$, se tiene

$$(t\varphi(t))' = t\varphi'(t) + \varphi(t) = A(t\varphi(t)) + \varphi(t) ,$$

luego $t\varphi$ es solución de $x' = Ax + \ \varphi$.

Resolvemos en primer lugar el sistema homogéneo asociado a (3.32):

$$x' = Ax , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Los valores propios de $A$ son $\lambda_1 = 0$ (doble) y $\lambda_2 = 1$. Como además rango$(A - \lambda_1 I_3) =$ rango$(A) = 2$, la forma canónica de Jordan correspondiente a esta situación es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Para construir la matriz de paso elegimos

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}[A - I_3] , \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}[A]$$

y $w \in \mathbb{R}^3$ tal que $Aw = v$, por ejemplo

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Usando ahora la descomposición

$$J = B + N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\begin{aligned} A = PJP^{-1} &\Longrightarrow e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = Pe^{Bt}e^{Nt}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & 2(e^t - 1 - t) & 2(1 - e^t) + t \\ e^t - 1 & e^t - 2t & 1 - e^t + t \\ 2(e^t - 1) & 2(e^t - 1 - 2t) & 3 - 2(e^t - t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$ resuelve $x' = Ax$, por lo que

$$t\varphi(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix}$$

es una solución particular de la ecuación completa (3.32). Finalmente, la solución general de (3.32) puede expresarse de la siguiente forma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - 1 & 2(e^t - 1 - t) & 2(1 - e^t) + t \\ e^t - 1 & e^t - 2t & 1 - e^t + t \\ 2(e^t - 1) & 2(e^t - 1 - 2t) & 3 - 2(e^t - t) \end{pmatrix} x_0 + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix},$$

con $x_0 \in \mathbb{R}^3$ arbitrario.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 4

# Teoría de comparación de Sturm

1. Decide razonadamente si es verdadero o falso que las soluciones de la ecuación
$$x'' + \Big(\frac{\varepsilon t}{t+1}\Big)x = 0\,, \quad \varepsilon > 0\,, \tag{4.1}$$
tienen infinitos ceros.

(Septiembre 1990)

*Solución:* VERDADERO. Es claro que
$$\{q_\varepsilon(t)\} = \Big\{\,\frac{\varepsilon t}{t+1}\Big\} \to \varepsilon > 0 \quad \text{cuando } t \to \infty\,.$$
Por tanto, podemos garantizar la existencia de $t_0 > 0$ tal que
$$|q(t) - \varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t > t_0\,.$$
En particular, $q(t) > \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t > t_0$. Comparamos (4.1) con la ecuación
$$x'' + \frac{\varepsilon}{2}x = 0 \tag{4.2}$$
en $(t_0, \infty)$. Por el teorema de comparación de Sturm, entre dos ceros de cualquier solución de (4.2) debe existir al menos un cero de toda solución de (4.1). Ahora bien,
$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\,t\right)$$
es una solución de (4.2) con infinitos ceros en $(t_0, \infty)$, luego toda solución de (4.1) tiene infinitos ceros en $(t_0, \infty)$.

■

2. Estudia las propiedades de oscilación en $(0, \infty)$ de las ecuaciones

   (a) $x'' + x' + (\lambda + e^{-t})x = 0\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

   (b) $t^2x'' + tx' + \lambda t^2 x = 0\,,\ \lambda > 0$

   (c) $x'' - e^t x = 0$

*Solución:* (a) Multiplicando la ecuación por $e^t$ conseguimos reescribirla en forma autoadjunta:

$$(e^t x')' + q(t)x = 0\,, \quad q(t) = \lambda e^t + 1\,. \tag{4.3}$$

Claramente $q(t) > \lambda e^t$ para todo $t > 0$, luego podemos comparar (4.3) con la ecuación $(e^t x')' + \lambda e^t x = 0$, que es equivalente a

$$x'' + x' + \lambda x = 0\,. \tag{4.4}$$

Las raíces de la ecuación característica asociada a (4.4) son

$$\mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}\,,$$

luego debemos distinguir dos casos:

(i) $\lambda > \frac{1}{4}$ produce dos raíces complejas conjugadas, luego las soluciones de (4.4) adoptan la forma

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left\{ A \cos\left( \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\, t \right) + B \,\mathrm{sen} \left( \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\, t \right) \right\}$$

para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$. Todas ellas tienen infinitos ceros, luego toda solución de (4.3) tiene infinitos ceros.

(ii) Si $\lambda \leq \frac{1}{4}$ las soluciones de (4.4) tienen a lo sumo un cero, por lo que la teoría de Sturm no nos permite extraer conclusiones. En este caso es necesario comparar con otra ecuación.

(iia) Si $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, entonces $1 \leq \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)e^t$ para valores suficientemente grandes de $t$. Por tanto, podemos afirmar que existe $t_0 > 0$ tal que

$$q(t) \leq \frac{e^t}{4} \quad \forall t > t_0 > 0\,.$$

Comparamos entonces (superiormente) la ecuación (4.3) con

$$x'' + x' + \frac{x}{4} = 0\,, \tag{4.5}$$

cuyas soluciones son

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} + Bte^{-\frac{t}{2}}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

que tienen a lo sumo un cero. La teoría de Sturm indica entonces que las soluciones de (4.3) también tienen a lo sumo un cero.

(iib) Si $\lambda = \frac{1}{4}$ no podemos obtener conclusiones basándonos en la teoría de comparación de Sturm.

(b) El cambio de variable $x(t) = u(\sqrt{\lambda}t)$ conduce a la siguiente ecuación:

$$\lambda t^2 u''(\sqrt{\lambda}t) + \sqrt{\lambda}tu'(\sqrt{\lambda}t) + \lambda t^2 u(\sqrt{\lambda}t) = 0\,,$$

o bien

$$t^2u''(t) + tu'(t) + t^2u(t) = 0\,, \tag{4.6}$$

sin más que considerar la transformación $\sqrt{\lambda}t \mapsto t$. Obsérvese que esta ecuación ya no depende de $\lambda$, luego el comportamiento de las soluciones de

$$t^2x'' + tx' + \lambda t^2 x = 0 \tag{4.7}$$

tampoco. La ecuación (4.6), equivalente a (4.7), es una ecuación de Bessel de índice cero (ver Capítulo 6). Para analizarla planteamos el cambio de variable

$$u(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{t}}\,, \tag{4.8}$$

que nos lleva a

$$t^{\frac{3}{2}}y'' + \left(\frac{1}{4\sqrt{t}} + t^{\frac{3}{2}}\right)y = 0\,. \tag{4.9}$$

Como $t > 0$, podemos dividir la ecuación anterior por $t^{\frac{3}{2}}$ y obtenemos

$$y'' + q(t)y = 0\,, \quad q(t) = \frac{1}{4t^2} + 1\,.$$

Además, de (4.8) se deduce que los ceros positivos de $u(t)$ y de $y(t)$ son los mismos. Es obvio que $\{q(t)\} \to 1$ cuando $t \to \infty$, por lo que ha de existir $t_0 > 0$ tal que

$$q(t) > \frac{1}{2} \quad \forall t > t_0 > 0\,.$$

Podemos comparar entonces la ecuación (4.9) con $y'' + \frac{y}{2} = 0$, cuyas soluciones

$$y(t) = A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}\,,$$

tienen todas infinitos ceros (positivos). Consecuentemente, la teoría de comparación de Sturm se aplica para concluir que todas las soluciones de la ecuación de Bessel (4.6), y por consiguiente todas las soluciones de (4.7), tienen infinitos ceros (positivos).

(c) Se tiene $q(t) = -e^t < -1$ si $t > 0$. Las soluciones no triviales de $x'' - x = 0$ son de la forma $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$ y tienen a lo sumo un cero positivo, luego las soluciones de $x'' - e^t x = 0$ tienen a lo sumo un cero positivo.

■

CAPÍTULO 5

# La ecuación periódica

1. Se considera la ecuación escalar $x' = a(t)x$, con $a \in C(\mathbb{R})$ y $T$–periódica. Demuestra las siguientes propiedades:

   (a) La ecuación admite soluciones $T$–periódicas no triviales si y sólo si $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

   (b) Si la ecuación tiene soluciones $nT$–periódicas, con $n \in \mathbb{N}$, tales soluciones son $T$–periódicas.

   (c) Si $\varphi \in C(\mathbb{R})$ admite dos periodos $0 < T_1 < T_2$ y $T_2 \notin T_1\mathbb{Q}$, entonces $\varphi$ es constante.

   (d) La ecuación no admite otras soluciones periódicas (no triviales) que las $T$–periódicas, a menos que $a \equiv 0$.

*Solución:* (a) *De izquierda a derecha*: La solución general de la ecuación $x' = a(t)x$ es

$$x(t) = K\, e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Por hipótesis $x(t) = x(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego

$$\int_0^t a(s)\,ds = \int_0^{t+T} a(s)\,ds = \int_0^t a(s)\,ds + \int_t^{t+T} a(s)\,ds\,.$$

Esto implica que $\int_t^{t+T} a(s)\,ds = 0$. En particular, para $t = 0$ se concluye que $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

*De derecha a izquierda*: Consideremos una solución cualquiera

$$x(t) = k\, e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,,$$

para algún $k \in \mathbb{R}$. Esta solución será $T$–periódica si $x(t) = x(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, si

$$\int_0^t a(s)\,ds = \int_0^{t+T} a(s)\,ds = \int_0^t a(s)\,ds + \int_t^{t+T} a(s)\,ds$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, si

$$\Psi(t) := \int_t^{t+T} a(s)\,ds = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Pero $\Psi'(t) = a(t+T) - a(t) = 0$ por ser $a(t)$ $T$–periódica. Por consiguiente, $\Psi(t)$ es constante. Como además $\Psi(0) = 0$ por hipótesis, ha de ser $\Psi \equiv 0$. Esto implica que $x(t)$ es $T$–periódica.

(b) Sea

$$x(t) = x(0)\, e^{\int_0^t a(s)\,ds}$$

una solución $nT$–periódica. Entonces $x(nT) = x(0)$, lo que se traduce en $e^{\int_0^{nT} a(t)\,dt} = 1$ o, equivalentemente, $\int_0^{nT} a(t)\,dt = 0$. En tal caso

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{nT} a(t)\,dt \\ &= \int_0^T a(t)\,dt + \int_T^{2T} a(t)\,dt + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} a(t)\,dt \\ &= n\int_0^T a(t)\,dt\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$, el cambio de variable $t = u + (k-1)T$ y la $T$–periodicidad de $a(t)$ permiten concluir que

$$\int_{(k-1)T}^{kT} a(t)\,dt = \int_0^T a(u + (k-1)T)\,du = \int_0^T a(u)\,du\,.$$

Por tanto, $\int_0^T a(t)\,dt = 0$ en virtud de (5.1), lo que implica que $x(t)$ es $T$–periódica según lo probado en (a).

(c) Haremos uso del siguiente resultado algebraico:

**Teorema** 1. Todo subgrupo $G$ de $\mathbb{R}$ o bien es denso en $\mathbb{R}$ o bien es de la forma $G = \alpha\mathbb{Z}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

En nuestro caso consideramos

$$G = \{T \in \mathbb{R} : \varphi(t+T) = \varphi(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}\}\,,$$

es decir, el conjunto de los periodos de $\varphi \in C(\mathbb{R})$. En primer lugar observamos que $G$ es un subgrupo aditivo, ya que si $T_1, T_2 \in G$ entonces $\varphi(t+T_1) = \varphi(t)$ y $\varphi(t+T_2) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, por tanto,

$$\varphi(t+(T_1+T_2)) = \varphi((t+T_1)+T_2) = \varphi(t+T_1) = \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Luego $\overline{G} = \mathbb{R}$ o bien $G = \alpha\mathbb{Z}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si fuese $G = \alpha\mathbb{Z}$ y $T_1, T_2 \in G$, habrían de existir $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $T_1 = \alpha p$ y $T_2 = \alpha q$, lo que nos conduciría a la siguiente contradicción: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Por consiguiente, ha de ser $\overline{G} = \mathbb{R}$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, $x \in \mathbb{R}$ y $\{T_n\} \subset G$ tales que $\{T_n\} \to x - x_0 \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_0 + (x - x_0)) = \varphi\big(x_0 + \lim_{n\to\infty}\{T_n\}\big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\{\varphi(x_0+T_n)\} = \lim_{n\to\infty}\{\varphi(x_0)\} = \varphi(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\end{aligned}$$

luego $\varphi$ es necesariamente constante.

(d) Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que la ecuación $x' = a(t)x$ admitiese una solución $x(t)$ $\widetilde{T}$–periódica con $\widetilde{T} \neq T$ y $\widetilde{T} \neq T\mathbb{Q}$, ya que en caso contrario $x(t)$ también sería $T$–periódica según lo probado en (b). Entonces $a(t)$ es $T$–periódica (por hipótesis) y, como veremos a continuación, también $\widetilde{T}$–periódica. Observamos en primer lugar que si una función $f$ es $T$–periódica su derivada también lo es, ya que

$$\begin{aligned}f'(u+T) = \lim_{x\to u+T}&\left\{\frac{f(x)-f(u+T)}{x-u-T}\right\}\\ &= \lim_{v\to u}\left\{\frac{f(v+T)-f(u+T)}{v-u}\right\}\\ &= \lim_{v\to u}\left\{\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\right\} = f'(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Ahora bien, si $x(t)$ es una solución $\widetilde{T}$–periódica no trivial se tiene

$$a(t)x(t) = x'(t) = x'(t+\widetilde{T}) = a(t+\widetilde{T})x(t+\widetilde{T}) = a(t+\widetilde{T})x(t)\,,$$

luego $a(t)$ también es $\widetilde{T}$–periódica. De (c) se sigue que $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, y por (a) se tiene

$$\int_0^{\widetilde{T}} a(t)\,dt = a\widetilde{T} = 0 \Longrightarrow a \equiv 0\,,$$

lo que contradice una de las hipótesis satisfechas por $a(t)$.

■

2. Encuentra un sistema $T$–periódico con alguna solución periódica que no admita el periodo $T$.

*Solución:* Considérese el siguiente sistema 1–periódico:

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen}(2\pi t)x \\ y' = z \\ z' = -y \end{cases},$$

del que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

es una solución $2\pi$–periódica que no es 1–periódica.

■

3. Sea $C$ una matriz de monodromía del sistema $T$–periódico $x' = A(t)x$. Prueba que

$$\det(C) = \exp\left\{\int_0^T \operatorname{traza}(A(s))\, ds\right\}.$$

Decide si existe algún sistema periódico $2 \times 2$ con los siguientes multiplicadores característicos:

(a) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

(b) $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$.

(c) $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$.

(d) $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$.

*Solución:* Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero. Entonces $C = \Phi(T)$ es una matriz de monodromía. Usando la fórmula de Jacobi–Liouville para la matriz $\Phi(t)$ evaluada en $t = T$ obtenemos

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det(\Phi(T)) \\ &= \det(\Phi(0)) \exp\left\{\int_0^T \operatorname{traza}(A(s))\, ds\right\} \\ &= \exp\left\{\int_0^T \operatorname{traza}(A(s))\, ds\right\} . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como todas las matrices de monodromía son semejantes entre sí, todas tienen el mismo determinante. Por tanto, la identidad (5.2) es válida para cualquier matriz de monodromía.

Los casos (a) y (d) no pueden darse, ya que para cualquier matriz de monodromía $C$ ha de verificarse $\det(C) = \lambda_1\lambda_2$, que no puede ser ni negativo ni nulo en virtud de la expresión (5.2). Por el contrario, los casos (b) y (c) sí pueden ocurrir. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ilustra el caso expresado en (b) y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

el expresado en (c).

■

4. Dado el sistema $T$–periódico $x' = A(t)x$, denotemos $Z_T$ el conjunto de todas sus soluciones $T$–periódicas. Demuestra que $Z_T$ es un subespacio vectorial del conjunto de soluciones del sistema tal que $\dim(Z_T) = \dim(\operatorname{Ker}[C - I])$, donde $C$ es una matriz de monodromía.

*Solución:* Que $Z_T$ es un subespacio vectorial del espacio de soluciones es de comprobación inmediata. Verifiquemos la igualdad entre las dimensiones. Sea para ello $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en $t_0$. Podemos describir $Z_T$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z_T &= \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) : \varphi'(t) = A(t)\varphi(t),\ \varphi(t+T) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) : \varphi(t) = \Phi(t)x_0,\ \varphi(t+T) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

Definimos $L : \mathrm{Ker}[C - I] \to Z_T$ como $L(x_0) = \Phi(t)x_0$. La aplicación $L$ está bien definida, ya que dado $x_0 \in \mathrm{Ker}[C - I]$ se tiene que

$$\varphi(t) = \Phi(t)x_0$$

(a) es solución, pues $\Phi(t)$ es una matriz fundamental;

(b) es $T$–periódica, pues

$$\begin{aligned} &x_0 \in \mathrm{Ker}[C - I] \Longrightarrow Cx_0 = x_0 \\ &\Longrightarrow \Phi(t)x_0 = \Phi(t)Cx_0 = \Phi(t+T)x_0 \Longrightarrow \varphi(t+T) = \varphi(t)\,. \end{aligned}$$

Además, es inmediato comprobar que $L$ es un isomorfismo lineal. En consecuencia, se da la igualdad entre las dimensiones de $\mathrm{Ker}[C - I]$ y $Z_T$.

■

5. Se considera el sistema $2\pi$–periódico

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 & 0 \end{pmatrix} x\,, \quad p > 0. \tag{5.3}$$

Encuentra una matriz de monodromía y los multiplicadores característicos.

*Solución:* El sistema (5.3) equivale claramente a la ecuación lineal de segundo orden $x'' + p^2 x = 0$, de la que un sistema fundamental de soluciones es $\{\mathrm{sen}(pt), \cos(pt)\}$. Por tanto,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(pt) & \mathrm{sen}(pt) \\ -p\,\mathrm{sen}(pt) & p\cos(pt) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental. Esta matriz no es principal en cero, pero una manipulación algebraica sencilla en el coeficiente $\operatorname{sen}(pt)$ (y, por tanto, en su derivada) nos conduce a

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(pt) & \frac{1}{p}\operatorname{sen}(pt) \\ -p\operatorname{sen}(pt) & \cos(pt) \end{pmatrix},$$

que ya es principal en cero.[1] Por consiguiente, una matriz de monodromía viene dada por

$$C = \Psi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi p) & \frac{1}{p}\operatorname{sen}(2\pi p) \\ -p\operatorname{sen}(2\pi p) & \cos(2\pi p) \end{pmatrix}.$$

Para calcular los multiplicadores característicos basta con observar que el polinomio característico de la matriz $C$:

$$p_\lambda(C) = \det(C - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\cos(2\pi p)\lambda + 1\,,$$

se anula si y solamente si

$$\lambda = \cos(2\pi p) \pm i\operatorname{sen}(2\pi p)\,.$$

■

6. Sea $\widetilde{C}$ una matriz semejante a una matriz de monodromía $C$ del sistema $T$–periódico $x' = A(t)x$. ¿Es $\widetilde{C}$ una matriz de monodromía de dicho sistema?

*Solución:* SI. Como $\widetilde{C}$ y $C$ son semejantes, ha de existir una matriz regular $P$ tal que $\widetilde{C} = PCP^{-1}$. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Entonces $\Phi(t+T)$ también lo es y, como C es una matriz de monodromía, $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$. Por tanto,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)P^{-1}\widetilde{C}P \Longleftrightarrow \Phi(t+T)P^{-1} = \Phi(t)P^{-1}\widetilde{C}\,.$$

Finalmente, como $\Psi(t) = \Phi(t)P^{-1}$ también es una matriz fundamental (cf. Proposición 2) y se satisface $\Psi(t+T) = \Psi(t)\widetilde{C}$, podemos concluir que $\widetilde{C}$ es también una matriz de monodromía.

■

[1] Nótese que $\{\operatorname{sen}(pt), \frac{1}{p}\cos(pt)\}$ es también una base de soluciones

7. Se considera la ecuación de Hill $x'' + (a + bp(t))x = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y donde $p \in C(\mathbb{R})$ es $T$–periódica. Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos soluciones linealmente independientes tales que

$$f_1(0) = f_2'(0) = 1 \quad \text{y} \quad f_2(0) = f_1'(0) = 0\,.$$

   (a) Demuestra que los multiplicadores característicos satisfacen la ecuación
   $$\lambda^2 - D(a,b)\lambda + 1 = 0\,,$$
   donde $D(a,b) = f_1(T) + f_2'(T)$.

   (b) Demuestra que si $-2 < D(a,b) < 2$ entonces los multiplicadores característicos son complejos conjugados con módulo igual a 1 y las soluciones, al igual que sus primeras derivadas, están acotadas en $\mathbb{R}$.

   (c) Demuestra que si $D(a,b) < -2$, o bien $D(a,b) > 2$, entonces existe una solución no acotada.

   (d) Demuestra que si $D(a,b) = 2$ entonces existe una solución de periodo $T$. Asimismo, si $D(a,b) = -2$ entonces existe una solución de periodo $2T$ que no es $T$–periódica.

(Febrero 1978)

*Solución:* (a) La ecuación de Hill de nuestro problema es equivalente al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - bp(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,. \tag{5.4}$$

Como por hipótesis $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes, es sabido que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental, que además es principal en $t = 0$ por las condiciones del problema. Por tanto,

$$C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} f_1(T) & f_2(T) \\ f_1'(T) & f_2'(T) \end{pmatrix}$$

es una matriz de monodromía. Los multiplicadores característicos satisfacen entonces la ecuación

$$\begin{aligned} p_\lambda(T) &= (f_1(T)-\lambda)(f_2'(T)-\lambda) - f_1'(T)f_2(T) \\ &= \lambda^2 - (f_1(T)+f_2'(T))\lambda + f_1(T)f_2'(T) - f_1'(T)f_2(T) \\ &= \lambda^2 - D(a,b)\lambda + 1 = 0\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde se ha usado que

$$f_1(T)f_2'(T) - f_1'(T)f_2(T) = \det(C) = e^{\int_0^T \text{traza}(A(s))\,ds} = 1$$

en virtud del Ejercicio 3.

(b) Las soluciones de (5.5) son

$$\lambda = \frac{D(a,b) \pm \sqrt{D(a,b)^2-4}}{2} \quad \text{con } 0 \le D(a,b)^2 < 4\,,$$

es decir,

$$\lambda = \frac{D(a,b)}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4-D(a,b)^2}}{2}\,, \tag{5.6}$$

de donde se comprueba fácilmente que $|\lambda| = 1$. Como los dos multiplicadores característicos son complejos (conjugados) se tiene que el sistema es acotado, luego $x(t)$ y $x'(t)$ son funciones acotadas.

(c) En ambos casos se deduce a partir de (5.6) que al menos uno de los multiplicadores característicos es $> 1$ o $< -1$, luego tiene módulo $> 1$. Llamemos $\lambda_0$ a dicho multiplicador característico. Entonces existe una solución no trivial de (5.4), a la que denotamos $\varphi(t)$, que satisface $\varphi(t+T) = \lambda_0\varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si suponemos cierta la propiedad

$$\varphi(t+(n-1)T) = \lambda_0^{n-1}\varphi(t)\,,$$

un simple argumento inductivo nos permite concluir que

$$\varphi(t+nT) = \varphi(t+(n-1)T+T) = \lambda_0\varphi(t+(n-1)T) = \lambda_0^n\varphi(t)\,.$$

Por tanto

$$\{\|\varphi(t+nT)\|\} = \{\|\lambda_0^n\varphi(t)\|\} = \{|\lambda_0|^n\|\varphi(t)\|\} \to \infty$$

cuando $n \to \infty$, luego $\varphi(t)$ es no acotada.

(d) Si $D(a,b) = 2$, entonces $\lambda = 1$ resuelve la ecuación (cf. (a))

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0\,.$$

Por tanto, $\lambda = 1$ es un multiplicador característico del sistema (5.4), lo que se traduce en la existencia de una solución $T$–periódica del mismo. Si por el contrario $D(a,b) = 2$, entonces $\lambda = -1$ resuelve la ecuación

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0\,,$$

por lo que se trata de un multiplicador característico del sistema (5.4). Consecuentemente, se tiene garantizada la existencia de una solución $2T$–periódica de (5.4) que no es $T$–periódica.

■

8. Demuestra que la ecuación de Hill $x'' + p(t)x = 0$ con $p$ continua, $T$–periódica, negativa y no constantemente nula, no admite soluciones $T$–periódicas no triviales. Encuentra también criterios de no existencia de soluciones $T$–periódicas para la ecuación

$$x'' + cx' + p(t)x = 0\,, \quad c > 0\,, \tag{5.7}$$

*Solución:* Como $p(t) < 0$ por hipótesis, podemos usar la teoría de Sturm para comparar las soluciones de $x'' + p(t)x = 0$ con las rectas $x(t) = A + Bt$, las cuales resuelven la ecuación $x'' = 0$. Si la ecuación de Hill admitiese una solución $T$–periódica no trivial $u(t)$, podrían plantearse los dos siguientes casos:

- $u(t)$ se anula infinitas veces (por periodicidad, si tuviese al menos un cero habría de tener infinitos). Esta posibilidad conduce a una contradicción, ya que entre dos ceros consecutivos de $u(t)$ tendría que haber al menos un cero de cualquier solución de $x'' = 0$, lo cual es obviamente falso (considérese, por ejemplo, $x(t) \equiv k \neq 0$).

- $u(t)$ es una función $T$–periódica que no se anula, en cuyo caso tendría que tener signo constante. Entonces $u'' = -p(t)u$ también tendría signo constante, lo que significa que no cambiaría la concavidad de $u(t)$. Pero la única posibilidad de que $u(t)$ fuera continua, $T$–periódica, y tuviese curvatura con signo constante es que $u(t) \equiv C \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la única solución constante de la ecuación $x'' + p(t)x = 0$ es $x \equiv 0$, lo que nos lleva a contradicción (cf. Ejercicio 14).

La misma condición sobre la función $p(t)$ es suficiente para concluir que la ecuación (5.7) no admite soluciones $T$–periódicas no triviales. En efecto:

- Si $u(t)$ fuese una solución $T$–periódica no trivial de (5.7), la misma discusión que en la situación anterior es pertinente. Podemos comparar (5.7) con la ecuación $x'' + cx' = 0$ para concluir que $u(t)$ no puede anularse. De no ser así, entre dos ceros consecutivos de $u(t)$ tendría que existir al menos un cero de cualquier solución de $x'' + cx' = 0$. Pero las soluciones de $x'' + cx' = 0$ son $x(t) = A + Be^{-ct}$, que a lo más se anulan una vez.

- Si $u(t)$ no se anulara, habría de conservar el signo (bien fuera positivo o negativo). Entonces $(u' + cu)' = -p(t)u$ tendría también signo constante (porque $p(t)$ lo tiene), lo que se traduce en que $u' + cu$ sería estrictamente monótona. Pero sabemos que $u' + cu$ es $T$–periódica (cf. Ejercicio 1 (d), donde se prueba que la derivada de una función $T$–periódica es también $T$–periódica), lo que genera una contradicción.

■

9. Se considera la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, donde $A : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua y $T$–periódica. Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero y $C$ la correspondiente matriz de monodromía. Demuestra las siguientes afirmaciones:

   (a) $\Phi(t + nT) = \Phi(t)C^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Si $\lambda$ es un valor propio de $C$ con $|\lambda| > 1$, entonces existe una solución no acotada.

   (c) Si todos los multiplicadores característicos tienen módulo menor que 1, entonces todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$.

*Solución:* (a) Razonamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. La propiedad es conocida para $n = 1$: $\Phi(t + T) = \Phi(t)C$. Formulamos la siguiente hipótesis de inducción:

$$\Phi(t+(n-1)T) = \Phi(t)C^{n-1}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Phi(t+nT) = \Phi(t+(n-1)T+T) &= \Phi(t+(n-1)T)C \\ &= \Phi(t)C^{n-1}C = \Phi(t)C^n\,,\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

(b) Sea $x_0$ un vector propio de $C$ asociado al valor propio $\lambda$, esto es: $Cx_0 = \lambda x_0$, y sea $\Phi(t)x_0$ una solución del sistema $x' = A(t)x$. Entonces $\Phi(t+nT)x_0$ también es solución del sistema (por ser la matriz $A$ $T$–periódica) y satisface

$$\begin{aligned}\{\|\Phi(t+nT)x_0\|\} = \{\|\Phi(t)C^n x_0\|\} &= \{\|\Phi(t)\lambda^n x_0\|\} \\ &= \{|\lambda|^n \|\Phi(t)x_0\|\} \to \infty\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, para lo que hemos empleado el resultado de (a).

(c) Como por hipótesis el radio espectral de $C$ es $< 1$, es conocido que $\{\|C^n\|\} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto

$$\{\|\Phi(t+nT)\|\} = \{\|\Phi(t)C^n\|\} \leq \max_{0\leq t\leq T}\{\|\Phi(t)\|\}\{\|C^n\|\} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde nuevamente hemos hecho uso de lo demostrado en (a).

■

10. Resuelve las siguientes cuestiones:

   (a) Demuestra que si la matriz A tiene un valor propio de la forma $\frac{2k\pi i}{T}$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $x' = Ax$ tiene una solución $T$–periódica.

   (b) Demuestra que la ecuación diferencial $x'' = f(t)$, con $f$ continua y $T$–periódica, admite soluciones $T$–periódicas si y sólo si $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

   (c) Discute la existencia de soluciones $2\pi$–periódicas de la ecuación diferencial $y'' + \lambda^2 y = p(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p$ es continua y $2\pi$–periódica.

(d) Sea la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, con $A(t)$ continua y $T$–periódica. Demuestra que si uno de los multiplicadores característico es una raíz $n$–ésima de la unidad, entonces existe una solución periódica de periodo $nT$.

(e) Halla una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial $x' + (\text{sen}(t))x = f(t)$, con $f$ continua y $2\pi$–periódica, tenga solución $2\pi$–periódica.

(Septiembre 1987)

(f) Demuestra que si $\int_0^T \text{traza}(A(s))\, ds > 0$, entonces el sistema $T$–periódico $x' = A(t)x$ es no acotado.

(g) Decide de forma razonada si cada una de las siguientes ecuaciones admite una solución $\pi$–periódica:

$$x'' + 4x = \text{sen}(4t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(2t)\,, \quad x'' + 4x = \text{sen}(t)\,.$$

(Junio 2004)

(h) Prueba que el sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} x\,,$$

con $a, b \in C(\mathbb{R})$ y $T$–periódicas, admite soluciones $T$–periódicas no triviales si y solamente si $\int_0^T a(t)\, dt = 0$.

(Junio 2004)

*Solución:* (a) Si $\frac{2k\pi i}{T}$ es un valor propio de $A$ también lo es su conjugado. Por tanto, como $x' = Ax$ es un sistema lineal con coeficientes constantes, se deduce que $\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$ y $\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$ son soluciones. En particular, $x(t) = \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right)$ es una solución $T$–periódica:

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{T}(t+T)\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right).$$

(b) La ecuación se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de coeficientes del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es nilpotente, resulta fácil calcular la matriz fundamental principal en $t = 0$:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por tanto,

$$C = \Phi(T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de monodromía cuyo único valor propio es $\mu = 1$ (doble). Por el teorema de la alternativa de Fredhölm, la ecuación $x'' = f(t)$ admite soluciones $T$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^T y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución $T$–periódica de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \tag{5.8}$$

Sabemos que

$$(\Phi(t)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de (5.8) y que sus soluciones $T$–periódicas se construyen de la siguiente forma:

$$y(t) = (\Phi(t)^{-1})^T y_0 \,,$$
$$y_0 \in \mathrm{Ker}[I - \Phi(T)^T] = \mathrm{Ker} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -T & 0 \end{pmatrix} \right] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\} .$$

Por consiguiente, la ecuación $x'' = f(t)$ admite soluciones $T$–periódicas no triviales si y solamente si

$$u \int_0^T f(t)\, dt = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \,,$$

es decir, si y solamente si $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.

(c) La matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema homogéneo asociado es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda t) \\ -\lambda\operatorname{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix},$$

y una matriz de monodromía viene dada por

$$C = \Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\lambda) & \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(2\pi\lambda) \\ -\lambda\operatorname{sen}(2\pi\lambda) & \cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica asociada a $C$ es

$$\mu^2 - 2\cos(2\pi\lambda)\mu + 1 = 0,$$

de donde se concluye que $\mu = 1$ es un multiplicador característico si y sólo si $\cos(2\pi\lambda) = 1$, es decir, si y sólo si $\lambda \in \mathbb{Z}$. Por tanto:

(i) Si $\lambda \notin \mathbb{Z}$, entonces $\mu = 1$ no es un multiplicador característico y podemos afirmar, en virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm, que existe una única solución $2\pi$–periódica de la ecuación $y'' + \lambda^2 y = p(t)$.

(ii) Resta por estudiar el caso $\lambda \in \mathbb{Z}$, para el que $\mu = 1$ sí es un multiplicador característico.

(iia) Si $\lambda = 0$, el problema está resuelto en (b).

(iib) Si $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el teorema de la alternativa de Fredhölm afirma que la ecuación $y'' + \lambda^2 y = p(t)$ admite soluciones $2\pi$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución $2\pi$–periódica de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Sabemos que

$$(\Phi(t)^{-1})^T = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \lambda\operatorname{sen}(\lambda t) \\ -\frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de (5.9) y que sus soluciones $2\pi$–periódicas vienen dadas por

$$\begin{aligned} y(t) = (\Phi(t)^{-1})^T y_0 \,, \\ y_0 \in \mathrm{Ker}[I - \Phi(2\pi)^T] \\ = \mathrm{Ker}\left[\begin{pmatrix} 1-\cos(2\pi\lambda) & \lambda\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda) \\ -\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sen}(2\pi\lambda) & 1-\cos(2\pi\lambda) \end{pmatrix}\right] = \mathbb{R}^2 \,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, nuestra ecuación admite soluciones $2\pi$–periódicas no triviales si y solamente si

$$-\frac{u}{\lambda}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\lambda t)p(t)\,dt + v\int_0^{2\pi}\cos(\lambda t)p(t)\,dt = 0$$

para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$, es decir, si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\lambda t)p(t)\,dt = 0 = \int_0^{2\pi}\cos(\lambda t)p(t)\,dt \,.$$

(d) Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental principal en $t = 0$, de modo que $C = \Phi(T)$ es una matriz de monodromía. Sea también $\mu$ un multiplicador característico que satisface $\mu^n = 1$. Entonces ha de existir una solución no trivial $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ de $x' = A(t)x$ tal que

$$\begin{aligned} x(t+T) = \mu x(t) \,, \\ x(t+2T) = \mu x(t+T) = \mu^2 x(t) \,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x(t+nT) = \cdots = \mu^n x(t) = x(t) \,. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $x(t)$ es una solución $nT$–periódica.

(e) Se trata de una ecuación lineal no homogénea, cuya solución general es

$$x(t) = \left(\int_0^t f(s)\,e^{-\cos(s)}\,ds\right) e^{\cos(t)} \,.$$

Entonces $x(t) = x(t+2\pi)$ si y solamente si

$$\left(\int_0^t f(s)\,e^{-\cos(s)}\,ds\right) e^{\cos(t)} = \left(\int_0^{t+2\pi} f(s)\,e^{-\cos(s)}\,ds\right) e^{\cos(t+2\pi)} \,,$$

luego una condición suficiente y necesaria para que $x(t)$ sea $2\pi$–periódica es

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\cos(t)}\,dt = 0 \,,$$

ya que $f$ es $2\pi$–periódica por hipótesis.

(f) Sean $\Phi(t)$ una matriz fundamental principal en cero y $C = \Phi(T)$ una matriz de monodromía. La fórmula de Jacobi–Liouville proporciona (cf. Ejercicio 3)

$$\det(C) = e^{\int_0^T \text{traza}(A(s))\, ds} > 1\,,$$

ya que por hipótesis $\text{traza}(A(s)) > 0$. Esto quiere decir que necesariamente alguno de los multiplicadores característicos ha de ser mayor que 1. Por consiguiente, la propiedad demostrada en el Ejercicio 9 (b) nos permite concluir que existe una solución no acotada, luego el sistema es no acotado.

(g) La ecuación homogénea es la misma en los tres casos: $x'' + 4x = 0$, cuya solución general viene dada por

$$x(t) = A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Es claro, por tanto, que todas las soluciones de la ecuación homogénea son $\pi$–periódicas. Una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \frac{1}{2}\,\text{sen}(2t) \\ -2\,\text{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix},$$

que además es principal en cero. Conforme al teorema de la alternativa de Fredhölm, la ecuación completa tiene soluciones $\pi$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^\pi y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución $\pi$–periódica de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

donde $f(t)$ denota cada uno de los segundos miembros de las tres ecuaciones propuestas. Sabemos que

$$(\Phi(t)^{-1})^T = \begin{pmatrix} \cos(2t) & 2\,\text{sen}(2t) \\ -\,\text{sen}(t)\cos(t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de (5.10) y que sus soluciones $\pi$–periódicas vienen dadas por

$$y(t) = (\Phi(t)^{-1})^T y_0\,, \quad y_0 \in \text{Ker}[I - \Phi(\pi)^T] = \mathbb{R}^2\,.$$

Por consiguiente:

- La ecuación $x'' + 4x = \mathrm{sen}(4t)$ admite soluciones $\pi$–periódicas no triviales si y solamente si

$$-u \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(t)\cos(t)\,\mathrm{sen}(4t)\,dt + v \int_0^{\pi} \cos(2t)\,\mathrm{sen}(4t)\,dt = 0$$

para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$, lo cual es siempre cierto porque ambas integrales son nulas.

- La ecuación $x'' + 4x = \mathrm{sen}(2t)$ admite soluciones $\pi$–periódicas no triviales si y solamente si

$$-u \int_0^{\pi} \mathrm{sen}(t)\cos(t)\,\mathrm{sen}(2t)\,dt + v \int_0^{\pi} \cos(2t)\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = 0$$

para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}$. Esta identidad sólo es satisfecha si $u = 0$, luego la ecuación no admite soluciones $\pi$–periódicas.

- La ecuación $x'' + 4x = \mathrm{sen}(t)$ no admite soluciones $\pi$–periódicas, pues el segundo miembro no es $\pi$–periódico.

(h) El sistema es triangular, luego puede resolverse explícitamente. En efecto:

$$x_1(t) = Ae^{\int_0^t a(s)\,ds}, \quad x_2(t) = \left(A \int_0^t b(s)\,ds + B\right) e^{\int_0^t a(s)\,ds},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$, en virtud del método de los coeficientes indeterminados. Considerando sucesivamente $A = 0$, $B = 1$ y $A = 1$, $B = 0$ obtenemos una matriz fundamental (de hecho, principal en $t = 0$):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a(s)\,ds} & 0 \\ \left(\int_0^t b(s)\,ds\right)e^{\int_0^t a(s)\,ds} & e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix}.$$

Las soluciones del sistema son entonces de la forma

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a(s)\,ds} \\ \left(\int_0^t b(s)\,ds\right)e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- Si $\int_0^T a(s)\,ds = 0$, entonces $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\int_0^t a(s)\,ds} \end{pmatrix}$ es una solución (tómese $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$) $T$–periódica, pues $x(0) = x(T)$.

- Para demostrar la implicación contraria razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\int_0^T a(s)\,ds \neq 0$. Entonces cualquier solución $T$–periódica satisface

$$\lambda_1 = \lambda_1\, e^{\int_0^T a(s)\,ds}\,,$$
$$\lambda_2 = \lambda_1\Big(\int_0^T b(s)\,ds\Big)\, e^{\int_0^T a(s)\,ds} + \lambda_2\, e^{\int_0^T a(s)\,ds}\,,$$

  de donde se desprende que sólo puede ser $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, es decir, la solución trivial.

$\blacksquare$

11. Se considera la ecuación diferencial $x' = A(t)x$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1+\frac{3}{2}\cos^2(t) & 1-\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) \\ -1-\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) & -1+\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^2(t) \end{pmatrix}.$$

Comprueba que los autovalores de $A(t)$ son

$$\lambda_1 = (-1+i\sqrt{7})/4\,, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1}\,.$$

Verifica que $e^{\frac{t}{2}}\,(-\cos(t), \mathrm{sen}(t))^T$ es una solución no acotada de la ecuación anterior y calcula los multiplicadores y exponentes característicos. A raíz de lo anterior, concluye que la ecuación no tiene soluciones $\pi$–periódicas no triviales (*ejemplo de Markus y Yamabe*).

*Solución:* El polinomio característico asociado a $A(t)$ es

$$p_\lambda(t) = (1+\lambda)^2 - \frac{3}{2}(1+\lambda) + 1 = \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\,,$$

luego los valores propios de $A(t)$ son

$$\lambda = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-2}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{4}\,.$$

Que $e^{\frac{t}{2}}\,(-\cos(t), \mathrm{sen}(t))^T$ es una función no acotada es obvio. Además es una solución de nuestro sistema, ya que

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{t}{2}}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}[\mathrm{sen}(t)-\frac{1}{2}\cos(t)] \\ e^{\frac{t}{2}}[\cos(t)+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(t)] \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} -e^{\frac{t}{2}}\cos(t) \\ e^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

que reduce el sistema de Markus y Yamabe al siguiente sistema con coeficientes constantes:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

cuyas soluciones son fácilmente calculables:

$$y(t) = A \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variables obtenemos que las soluciones del sistema de partida son

$$y(t) = Ae^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + Be^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

En particular, la solución indicada en el enunciado del problema se obtiene sin más que considerar $A = -1$ y $B = 0$. Construimos finalmente la matriz fundamental principal en $t = 0$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} \cos(t) & e^{-t} \operatorname{sen}(t) \\ -e^{\frac{t}{2}} \operatorname{sen}(t) & e^{-t} \cos(t) \end{pmatrix},$$

de la que se obtiene la siguiente matriz de monodromía:

$$C = \Psi(\pi) = \begin{pmatrix} -e^{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, los multiplicadores característicos son $-e^{\frac{\pi}{2}}$ y $-e^{-\pi}$, en tanto que los exponentes característicos son $\frac{1}{2}$ y $-1$. Es obvio que el sistema no tiene soluciones $\pi$–periódicas no triviales, pues $\mu = 1$ no es un multiplicador característico.

■

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostraremos que si la ecuación diferencial $x'' = f(x, x')$ no tiene soluciones constantes, entonces tampoco tiene soluciones periódicas. Para ello se sugiere seguir los siguientes pasos:

(a) Si la ecuación no tiene soluciones constantes $c \in \mathbb{R}$, prueba que $f(c, 0) \neq 0$.

(b) Si la ecuación admite una solución $T$–periódica $x(t)$, prueba que existen $t_1$, $t_2$ tales que

$$x'(t_1) = x'(t_2) = 0\,, \quad x''(t_1) \leq 0 \leq x''(t_2)\,. \tag{5.11}$$

*Solución:* (a) $x(t) \equiv c \in \mathbb{R}$ es una solución constante de $x'' = f(x, x')$ si y solamente si $0 = c'' = f(c, c') = f(c, 0)$. Si la ecuación no tiene soluciones constantes, se deduce que $f(c, 0) \neq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

(b) $x \in C^2(\mathbb{R})$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos en $[0, T]$ y, por periodicidad, en todos los intervalos de la forma $[(n-1)T, nT]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Una vez probados (a) y (b) procedemos a comprobar que, si la ecuación $x'' = f(x, x')$ no tiene soluciones constantes, entonces tampoco tiene soluciones periódicas. Razonaremos por reducción al absurdo. Asumimos que la ecuación no admite soluciones constantes pero sí una solución $T$–periódica $x(t)$. En tal caso, de (b) se sigue que han de existir $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ satisfaciendo (5.11). Usando ahora (a) se tiene

$$\begin{aligned} 0 \geq x''(t_1) = f(x(t_1), x'(t_1)) = f(x(t_1), 0) = f(x_1, 0) \neq 0\,, \\ 0 \leq x''(t_2) = f(x(t_2), x'(t_2)) = f(x(t_2), 0) = f(x_2, 0) \neq 0\,. \end{aligned}$$

Luego $f(x_1, 0) < 0$ y $f(x_2, 0) > 0$. Como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua, debe existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c, 0) = 0$, lo que contradice (a).

■

13. Se considera la ecuación

$$x' = \begin{pmatrix} -1 + \cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} x\,.$$

(a) Calcula una matriz fundamental.

(b) Encuentra un cambio de variables que la transforme en una ecuación homogénea con coeficientes constantes.

(c) Estudia el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$.

(d) ¿Existe una función $b(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ y $2\pi$–periódica para la que la ecuación $x' = A(t)x + b(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, admite una solución $4\pi$–periódica que no es $2\pi$–periódica?

(Febrero 1990)

*Solución:* (a) Como el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1+\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

es triangular, las ecuaciones que lo componen están desacopladas y podemos optar por resolverlo para efectuar el cálculo de una matriz fundamental. La primera ecuación del sistema,

$$x_1'(t) = (-1+\cos(t))x_1(t)\,,$$

tiene por solución general

$$x_1(t) = Ae^{\operatorname{sen}(t)-t}\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

La segunda ecuación puede escribirse

$$x_2'(t) = \cos(t)x_1(t) - x_2(t) = A\cos(t)\,e^{\operatorname{sen}(t)-t} - x_2(t)\,,$$

cuya solución general es

$$x_2(t) = Ae^{\operatorname{sen}(t)-t} + Be^{-t}\,, \quad B \in \mathbb{R}\,.$$

Para extraer de la solución general

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{\operatorname{sen}(t)-t} \\ Ae^{\operatorname{sen}(t)-t} + Be^{-t} \end{pmatrix}$$

dos soluciones linealmente independientes, podemos considerar los datos iniciales $(1,0)^T$ y $(0,1)^T$ en $t=0$, para los que se obtiene

$$(e^{\operatorname{sen}(t)-t},\, e^{\operatorname{sen}(t)-t} - e^{-t})^T\,, \quad (0,\, e^{-t})^T\,.$$

Por tanto,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\operatorname{sen}(t)-t} & 0 \\ (e^{\operatorname{sen}(t)} - 1)e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental que además es principal en $t = 0$.

(b) Aplicamos la teoría de Floquet. Una matriz de monodromía es $C = \Phi(2\pi) = e^{-2\pi} I$, de donde $C^2 = e^{-4\pi} I$ y $-4\pi I$ es un logaritmo de $C^2$. Tenemos entonces que encontrar una matriz $R \in M_2(\mathbb{R})$ que satisfaga la relación $e^{2 \cdot 2\pi \cdot R} = C^2$, de donde se deduce fácilmente que ha de ser $R = -I$. El cambio de variables que se pide lo proporciona el teorema de Lyapunov:

$$x(t) = P(t)y(t)\,, \quad P(t) = \Phi(t)\, e^{-Rt} = \begin{pmatrix} e^{\operatorname{sen}(t)} & 0 \\ e^{\operatorname{sen}(t)} - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobémoslo. Por una parte se tiene

$$\begin{aligned} P'(t) &= \Phi'(t)\, e^{-Rt} - \Phi(t)\, e^{-Rt} R \\ &= A(t)\Phi(t)\, e^{-Rt} - \Phi(t)\, e^{-Rt} R = A(t)P(t) - P(t)R\,, \end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} A(t)P(t)y(t) &= A(t)x(t) = x'(t) = P'(t)y(t) + P(t)y'(t) \\ &= A(t)P(t)y(t) - P(t)Ry(t) + P(t)y'(t)\,, \end{aligned}$$

luego

$$P(t)y'(t) = P(t)Ry(t)\,.$$

Como la matriz $P(t)$ es regular, se concluye que

$$y'(t) = Ry(t) = -y(t)\,,$$

que es un sistema homogéneo con coeficientes constantes.

(c) El único multiplicador característico es $\mu = e^{-2\pi}$, que tiene módulo menor que uno. Entonces podemos aplicar el resultado del Ejercicio 9 (c) para concluir que todas las soluciones tienden a cero cuando $t \to \infty$, lo que significa que el sistema es convergente.

(d) Como $\mu = 1$ no es un multiplicador característico, el teorema de la alternativa de Fredhölm nos permite deducir que el sistema admite una única solución $2\pi$–periódica. Pero el sistema es también $4\pi$–periódico así como la función $b(t)$, de la que ya sabíamos que era $2\pi$–periódica. Entonces el teorema de la alternativa de Fredhölm vuelve a aplicarse, ahora para el caso $4\pi$–periódico, con el fin de concluir que la ecuación completa tiene una única solución $4\pi$–periódica. El razonamiento acaba al observar que esta solución ha de ser también $2\pi$–periódica, pues en caso contrario existirían dos soluciones $4\pi$–periódicas distintas.

■

14. Sea $a \in C(\mathbb{R})$, $2\pi$–periódica, no negativa y no idénticamente nula. Se considera la ecuación

$$x'' + \lambda a(t)x = 0\,, \tag{5.12}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que si $\lambda < 0$ entonces (5.12) no admite soluciones $2\pi$–periódicas distintas de la trivial.

(b) ¿Qué se puede decir si $\lambda = 0$?

(c) Da un ejemplo que ilustre que la conclusión del primer apartado no es cierta si $\lambda > 0$.

*Solución:* (a) Demostraremos en primer lugar que si $\lambda < 0$ entonces toda solución no trivial de (5.12) tiene a lo sumo un cero. Para ello comparamos con la ecuación $x'' = 0$. Aplicando el teorema de comparación de Sturm concluimos que, entre dos ceros consecutivos de una solución no trivial de (5.12), existe al menos un cero de las soluciones de la ecuación $x'' = 0$, que son las rectas $x(t) = At + B$. Pero no todas las rectas tienen ceros (considérese el caso $A = 0$ y $B \neq 0$), de lo que se desprende que toda solución no trivial de (5.12) tiene a lo más un cero. Concluimos el razonamiento por reducción al absurdo. Supongamos que $x(t)$ es una solución $2\pi$–periódica no trivial de (5.12). De anularse una vez lo haría infinitas veces (por periodicidad), luego $x(t)$ no puede anularse ni, por tanto, cambiar de signo. En consecuencia, de

$$x(t) = -\frac{x''(t)}{\lambda a(t)} \tag{5.13}$$

se deduce que $x''(t)$ no cambia de signo o, en otras palabras, que no varía la concavidad de $x(t)$. Ahora bien, el único modo de que

$x(t)$ sea continua y $2\pi$–periódica con curvatura de signo constante es $x(t) \equiv C \in \mathbb{R}$, lo que combinado con (5.13) implica que $C = 0$, lo cual es imposible.

(b) Que las soluciones son rectas, las cuales sólo son periódicas si son constantes.

(c) Tómese $\lambda = 1$ y $a(t) \equiv 1 \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. La ecuación que se obtiene es $x'' + x = 0$, de la que las funciones $2\pi$–periódicas $\text{sen}(t)$ y $\cos(t)$ conforman un sistema fundamental de soluciones.

■

15. Obtén la ecuación adjunta de la primera aproximación lineal de la ecuación del péndulo $x'' + \text{sen}(x) = 0$, y aplica el teorema de la alternativa de Fredhölm a la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ para determinar si tiene o no soluciones periódicas.

*Solución:* La primera aproximación lineal de la ecuación del péndulo $x'' + \text{sen}(x) = 0$ es $x'' + x = 0$, que puede reescribirse equivalentemente en términos del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

La ecuación adjunta es entonces

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} , \tag{5.14}$$

por lo que se observa que la linealización de primer orden de la ecuación del péndulo es autoadjunta. La matriz fundamental principal en $t = 0$ asociada a la parte homogénea de la ecuación $2\pi$–periódica $x'' + x = \cos(t)$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} ,$$

luego

$$C = \Phi(2\pi) = I_2$$

es una matriz de monodromía. Por consiguiente, el único multiplicador característico es $\mu = 1$ y, en virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm, la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ admite soluciones $2\pi$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para toda $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ solución $2\pi$–periódica de (5.14) o, equivalentemente, de $y'' + y = 0$. Sabemos que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (5.14) y que todas sus soluciones, que son de la forma

$$\begin{aligned} y(t) = \Phi(t) y_0 = \begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^1 \\ y_0^2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} y_0^1 \cos(t) + y_0^2 \operatorname{sen}(t) \\ y_0^2 \cos(t) - y_0^1 \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para cualesquiera $y_0^1, y_0^2 \in \mathbb{R}$, son $2\pi$–periódicas. Por consiguiente

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &\qquad = y_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 \, dt - y_0^1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t) \cos(t) \, dt = y_0^2 \pi \, , \end{aligned}$$

que sólo se anula si $y_0^2 = 0$. En consecuencia, podemos afirmar que la ecuación $x'' + x = \cos(t)$ no tiene soluciones $2\pi$–periódicas.

■

16. Decide, en cada caso, si existe una función que satisfaga

   (a) $y'' + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t) y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $y$ no idénticamente nula.

   (b) $y'' + \operatorname{sen}(t) y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

   (c) $y'' + y' + \frac{1}{2} y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

   (d) $y'' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

   (e) $y'' + \frac{1}{2} y = \operatorname{sen}(t)$, $y$ $2\pi$–periódica.

   (f) $y'' + y = \operatorname{sen}(t)$, $y$ $2\pi$–periódica.

*Solución:* (a) Como $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) \leq \frac{1}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos comparar la ecuación $y'' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)y = 0$ con $y'' + \frac{1}{2}y = 0$. Las soluciones de esta última son de la forma

$$y(t) = A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

En particular, eligiendo $A = B = 1$ obtenemos la solución

$$y(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right),$$

que no se anula en $(0, \pi)$. Por consiguiente, la teoría de Sturm garantiza que no existen soluciones (no triviales) de $y'' + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t)y = 0$ que satisfagan $y(0) = y(\pi) = 0$.

(b) Se trata de un problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial lineal de segundo orden, por lo que existe una única solución.

(c) Se trata de una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general es

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{t}{2}\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Al imponer las condiciones $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ obtenemos $A = 1$ y $B = -1$, luego el problema admite como única solución

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

(d) La solución general de la ecuación es

$$y(t) = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Al imponer las condiciones $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ obtenemos

$$A = \frac{1}{1 - e^{\sqrt{2}\pi}}, \quad B = -\frac{e^{\sqrt{2}\pi}}{1 - e^{\sqrt{2}\pi}},$$

luego el problema admite como única solución

$$y(t) = \frac{1}{1 - e^{\sqrt{2}\pi}}\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}(\pi - t)}\right).$$

(e) Resolvemos el sistema $2\pi$–periódico asociado a la ecuación homogénea:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t) & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}t) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{\sqrt{2}}{2}t) & \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}t) \end{pmatrix}$$

es fundamental y principal en $t = 0$, luego

$$C = \Phi(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\pi) & \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi) & \cos(\sqrt{2}\pi) \end{pmatrix}$$

es una matriz de monodromía. Calculando sus valores propios obtenemos los multiplicadores característicos del sistema, que en este caso vienen dados por $\cos(\sqrt{2}\pi) \pm i\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\pi)$. Como 1 no se encuentra entre los multiplicadores característicos, podemos concluir que la ecuación homogénea no admite soluciones $2\pi$–periódicas. Por consiguiente, la ecuación completa tiene una única solución $2\pi$–periódica en virtud del teorema de la alternativa de Fredhölm.

(f) La matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

es fundamental y principal en $t = 0$ para el sistema homogéneo $2\pi$–periódico asociado a nuestro problema:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, $C = \Phi(2\pi) = I$ es una matriz de monodromía, de donde se desprende que el único multiplicador característico del sistema es $\mu = 1$. Aplicando el teorema de la alternativa de Fredhölm concluimos que la ecuación $y'' + y = \mathrm{sen}(t)$ admite soluciones $2\pi$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} (y_1(t), y_2(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix} dt = 0$$

para cualquier solución $2\pi$–periódica $y(t)$ de la ecuación adjunta

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(obsérvese que en este caso es autoadjunta). Por tanto, las soluciones $2\pi$–periódicas de la ecuación adjunta son de la forma

$$y(t) = \Phi(t)y_0\,, \quad \text{con } y_0 \in \mathrm{Ker}[I - \Phi(2\pi)^T] = \mathbb{R}^2\,.$$

Es decir,

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \mathrm{sen}(t) \\ -\,\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. De este modo podemos concluir que $y'' + y = \mathrm{sen}(t)$ tiene soluciones $2\pi$–periódicas si y solamente si

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (z_2 \cos(t) - z_1 \,\mathrm{sen}(t))\,\mathrm{sen}(t)\,dt \\ &\qquad = x_2 \int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{sen}(t)\,dt - z_1 \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(t)^2\,dt = -z_1\pi = 0 \end{aligned}$$

para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, lo cual es obviamente falso. Por consiguiente, nuestro problema no admite soluciones $2\pi$–periódicas no triviales.

■

17. Se considera el sistema lineal

$$x' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\,\mathrm{sen}(t) \\ -\,\mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

Aplica el teorema de la alternativa de Fredhölm para demostrar que admite soluciones $2\pi$–periódicas.

*Solución:* Abordamos en primer lugar el sistema homogéneo asociado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2' = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_3' = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{array} \right. . \tag{5.15}$$

Una forma conveniente de resolverlo consiste en efectuar el cambio de variables

$$y_1 = x_1\,, \quad y_2 = x_1 - x_2\,, \quad y_3 = x_1 - x_3\,,$$

que conduce al siguiente sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_1 - y_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_3' = 0 \end{array} \right. .$$

De la tercera ecuación se deduce que $y_3 = k \in \mathbb{R}$. Efectuando ahora los cambios de variable

$$z_1 = 2y_1 - y_2\,, \quad z_2 = y_2\,,$$

llegamos a

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1' = -z_2 \\ z_2' = z_1 - k \end{array} \right. ,$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} . \tag{5.16}$$

La matriz fundamental principal en $t = 0$ para la parte homogénea del sistema (5.16) es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} .$$

Empleando la fórmula de variación de las constantes para resolver (5.16) con dato inicial $z(0) = z^0 = (z_1^0, z_2^0)^T$ obtenemos

$$\begin{aligned} z(t) &= \Phi(t)z^0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (z_1^0 - k)\cos(t) - z_2^0 \operatorname{sen}(t) + k \\ (z_1^0 - k)\operatorname{sen}(t) + z_2^0 \cos(t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Deshaciendo finalmente los cambios de variable concluimos que

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(x_2^0 - \frac{k}{2}\right)\operatorname{sen}(t) + \left(x_1^0 - \frac{k}{2}\right)\cos(t) + \frac{k}{2}\,, \\ x_2(t) &= \left(x_2^0 - \frac{k}{2}\right)\cos(t) - \left(x_1^0 - \frac{k}{2}\right)\operatorname{sen}(t) + \frac{k}{2}\,, \\ x_3(t) &= \left(x_2^0 - \frac{k}{2}\right)\operatorname{sen}(t) + \left(x_1^0 - \frac{k}{2}\right)\cos(t) - \frac{k}{2}\,. \end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema homogéneo (5.15) calculamos la matriz fundamental principal en $t = 0$ del mismo, a la que denotamos $\Psi(t)$. Para ello hacemos las siguientes consideraciones:

(i) Para calcular la primera columna de $\Psi(t)$ elegimos $x_1^0 = 1$ y $x_2^0 = x_3^0 = 0$. Entonces

$$0 = x_3^0 = x_3(0) = 1 - k \Longrightarrow k = 1\,,$$

luego

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,,$$
$$x_2(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,,$$
$$x_3(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\,.$$

(ii) Para calcular la segunda columna de $\Psi(t)$ elegimos $x_2^0 = 1$ y $x_1^0 = x_3^0 = 0$. En este caso

$$0 = x_3^0 = x_3(0) = -k \Longrightarrow k = 0\,,$$

luego

$$x_1(t) = \operatorname{sen}(t)\,, \quad x_2(t) = \cos(t)\,, \quad x_3(t) = \operatorname{sen}(t)\,.$$

(iii) Para calcular la tercera columna de $\Psi(t)$ elegimos $x_3^0 = 1$ y $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Entonces

$$1 = x_3^0 = x_3(0) = -k \Longrightarrow k = -1\,,$$

por lo que

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\,,$$
$$x_2(t) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\,,$$
$$x_3(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,.$$

Por consiguiente, la matriz fundamental principal en $t = 0$ asociada al sistema (5.15) es

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2} & \operatorname{sen}(t) & -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2} & \cos(t) & -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2} & \operatorname{sen}(t) & \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t) + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

de modo que

$$C = \Psi(2\pi) = I_3$$

es una matriz de monodromía. Claramente, el único multiplicador característico es $\mu = 1$, por lo que existen soluciones $2\pi$–periódicas de la ecuación homogénea. Usando el teorema de la alternativa de Fredhölm concluimos la existencia de soluciones $2\pi$–periódicas de la ecuación completa si y solamente si

$$\int_0^{2\pi} y(t)^T \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} dt = 0 \tag{5.17}$$

para toda $y(t)$ solución $2\pi$–periódica de la ecuación adjunta

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} y\,. \tag{5.18}$$

Una matriz fundamental de la ecuación (5.18) es $(\Psi(t)^{-1})^T$, que viene dada por

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 1 & \operatorname{sen}(t) - \cos(t) + 1 & \operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1 \\ -2\operatorname{sen}(t) & 2\cos(t) & -2\operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1 & \operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1 & -\operatorname{sen}(t) + \cos(t) + 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las soluciones $2\pi$–periódicas de (5.18) son de la forma $(\Psi(t)^{-1})^T y_0$, con

$$y_0 = (y_1, y_2, y_3)^T \in \operatorname{Ker}[I_3 - \Psi(2\pi)^T] = \mathbb{R}^3\,.$$

Por consiguiente, la integral de (5.17) responde a la expresión

$$-y_1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\,dt - y_2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\,dt + y_3 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\,dt\,,$$

que es nula para cualesquiera $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. De este modo se concluye la existencia de soluciones $2\pi$–periódicas de nuestro problema.

■

18. Se considera la ecuación $x'' + a(t)x = 0$, donde $a \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$, $a(t) > 0$ y $a'(t) \geq 0$ $\forall t \in [0,\infty)$. Demuestra que si $x(t)$ es una solución y $t_1$, $t_2$ son dos ceros consecutivos de $x'(t)$, con $t_1, t_2 \in [0,\infty)$, entonces $|x(t_1)| \leq |x(t_2)|$ (sugerencia: multiplicar la ecuación por $2x'(t)$ e integrar).

(Febrero 1990)

*Solución:* Multiplicando la ecuación $x'' + a(t)x = 0$ por $2x'(t)$ obtenemos

$$2x'x'' + 2a(t)xx' = 0 \Longleftrightarrow \big((x')^2\big)' + a(t)(x^2)' = 0\,.$$

Integrando esta última ecuación entre $t_1$ y $t_2$ (suponiendo $t_1 < t_2$) llegamos a

$$\begin{aligned} x'(t_2)^2 - x'(t_1)^2 &+ \int_{t_1}^{t_2} \big(a(t)x(t)^2\big)'\,dt - \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x(t)^2\,dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \big(a(t)x(t)^2\big)'\,dt - \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x(t)^2\,dt \\ &= a(t_2)x(t_2)^2 - a(t_1)x(t_1)^2 - \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x(t)^2\,dt = 0\,, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} a(t_2)x(t_2)^2 - a(t_1)x(t_1)^2 \quad &= \quad \int_{t_1}^{t_2} a'(t)x(t)^2\,dt \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \geq \frac{x(t_1)^2}{x(t_2)^2} := \lambda\,. \qquad (5.19) \end{aligned}$$

Como $a'(t) \geq 0$, sabemos que $a(t)$ es creciente en $[0,\infty)$, por lo que $\frac{a(t_2)}{a(t_1)} \geq 1$. En conclusión, ha de ser $\lambda \leq 1$ para que se satisfaga (5.19), de donde se sigue que $|x(t_1)| \leq |x(t_2)|$.

■

19. Discute el comportamiento asintótico de las siguientes ecuaciones según los valores de $\omega > 0$ y $c > 0$:

    (a) $y'' + \omega^2 y = 0\,.$

(b) $y'' - \omega^2 y = 0\,.$

(c) $y'' + 2cy' + \omega^2 y = 0\,.$

(d) $y'' - 2cy' + \omega^2 y = 0\,.$

*Solución:* (a) Reescrita en forma de sistema, la ecuación de segundo orden $y'' + \omega^2 y = 0$ adopta la forma

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz (de coeficientes del sistema) $A$ son $\lambda = \pm\omega i$, luego

$$\mu = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = 0\,.$$

Este es el caso en que hay que calcular el índice de cada uno de los valores propios:

$$\nu(\pm i\omega) = \text{mín}\left\{k \in \mathbb{N} : \text{Ker}[(A \mp i\omega I)^k] = \text{Ker}[(A \mp i\omega I)^{k+1}]\right\} = 1\,,$$

de donde se deduce que el sistema es acotado pero no convergente.

(b) En este caso la matriz de coeficientes del sistema equivalente es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm\omega$. Por tanto $\mu = \omega > 0$, de donde se concluye que el sistema es no acotado.

(c) Se trata de la ecuación del oscilador armónico amortiguado. La matriz de coeficientes del sistema equivalente depende de $\omega > 0$ y $c > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2c \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $A$ son $\lambda = -c \pm \sqrt{c^2 - \omega^2}$, que dan lugar a la siguiente casuística:

- Si $c \leq \omega$ entonces $\mu = -c < 0$. En consecuencia el sistema es convergente, luego todas las soluciones tienden asintóticamente hacia cero.

- Si $c > \omega$ entonces $\mu = -c + \sqrt{c^2 - \omega^2} < 0$, por lo que el sistema es también convergente.

(d) En este caso la matriz de coeficientes del sistema equivalente es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 2c \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $A$ son $\lambda = c \pm \sqrt{c^2 - \omega^2}$, que dan lugar a la siguiente casuística:

- Si $c \leq \omega$ entonces $\mu = c > 0$, por lo que el sistema es no acotado.
- Si $c > \omega$ entonces $\mu = c + \sqrt{c^2 - \omega^2} > 0$, luego el sistema tampoco es acotado.

$\blacksquare$

20. Discute, según el valor del parámetro $\gamma > 0$, la existencia de soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación del oscilador armónico forzado $x'' + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$, con $\omega > 0$. Calcula la solución que satisface $x(0) = x'(0) = 0$ mediante la fórmula de variación de las constantes y estudia su comportamiento en infinito en función del valor de $\gamma$.

*Solución:* Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

cuya matriz fundamental principal en $t = 0$ es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\omega}t) & \frac{1}{\sqrt{\omega}} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}t) \\ -\sqrt{\omega} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}t) & \cos(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix}.$$

Una matriz de monodromía viene dada entonces por

$$C = \Phi\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & \frac{1}{\sqrt{\omega}} \operatorname{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \\ -\sqrt{\omega} \operatorname{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & \cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \end{pmatrix}.$$

Los multiplicadores característicos son las raíces del polinomio

$$\mu^2 - 2\cos\Big(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}\Big)\mu + 1 = 0\,,$$

que vienen dadas por

$$\mu = \cos\Big(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}\Big) \pm i\,\mathrm{sen}\Big(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}\Big)\,.$$

Aplicamos finalmente el teorema de la alternativa de Fredholm para establecer los casos en que existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas. Claramente $\mu = 1$ es un multiplicador característico si y solamente si $\frac{\sqrt{\omega}}{\gamma} = k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Por tanto, si $\gamma \neq \frac{\sqrt{\omega}}{k}$ con $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, entonces existe una única solución $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódica. Si por el contrario $\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{k}$ para algún $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, entonces podemos garantizar la existencia de soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas si y solamente si se satisface la condición

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} y(t)^T \begin{pmatrix} 0 \\ F_0\,\mathrm{sen}(\gamma t) \end{pmatrix} dt = 0 \tag{5.20}$$

para toda solución $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódica $y(t)$ de la ecuación adjunta

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y\,. \tag{5.21}$$

Para verificar bajo qué condiciones se cumple (5.20) calculamos en primer lugar las soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de la ecuación (5.21), que son de la forma

$$[\Phi(t)^{-1}]^T y_0\,, \quad y_0 \in \mathrm{Ker}\Big[I_2 - \Phi^T\Big(\frac{2\pi}{\gamma}\Big)\Big]\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$[\Phi(t)^{-1}]^T = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\omega}t) & \sqrt{\omega}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\omega}t) \\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\omega}t) & \cos(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix},$$

$$I_2 - \Phi^\star\Big(\frac{2\pi}{\gamma}\Big) = \begin{pmatrix} 1-\cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & \sqrt{\omega}\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) & 1-\cos(\frac{2\pi\sqrt{\omega}}{\gamma}) \end{pmatrix},$$

se puede comprobar fácilmente que $\mathrm{Ker}\big[I_2 - \Phi^T\big(\frac{2\pi}{\gamma}\big)\big] = \mathbb{R}^2$, toda vez que $\frac{\sqrt{\omega}}{\gamma} \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Por consiguiente, las soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas de (5.21) son

$$[\Phi(t)^{-1}]^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos(\sqrt{\omega}t) + \sqrt{\omega}\, y_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}t) \\ y_2 \cos(\sqrt{\omega}t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\, y_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\omega}t) \end{pmatrix}$$

para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. En definitiva, a la luz de (5.20) puede afirmarse que existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas si y solamente si

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \Big(F_0\, y_2 \operatorname{sen}(\gamma t)\cos(\sqrt{\omega}t) - \frac{F_0}{\sqrt{\omega}}\, y_1 \operatorname{sen}(\gamma t)\operatorname{sen}(\sqrt{\omega}t)\Big)\, dt = 0$$

o, equivalentemente,

$$y_2 \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t)\cos(k\gamma t)\, dt = \frac{y_1}{k\gamma}\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t)\operatorname{sen}(k\gamma t)\, dt \tag{5.22}$$

para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. De hecho, podemos restringirnos al caso $k \in \mathbb{N}$ pues la identidad (5.22) permanece inalterada si consideramos $k \in -\mathbb{N}$. Si $k = 1$ (es decir, $\gamma = \sqrt{\omega}$) es obvio que no existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas, ya que (5.22) no se verifica para cualesquiera $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Estudiemos entonces (5.22) para el caso en que $\mathbb{N} \ni k \geq 2$. Basta con calcular (integrando por partes repetidamente)

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t)\cos(k\gamma t)\, dt = 0\,, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \operatorname{sen}(\gamma t)\operatorname{sen}(k\gamma t)\, dt = 0\,,$$

luego si $\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{k}$ para algún $\mathbb{Z} \ni k \neq \{-1, 0, 1\}$ entonces existen soluciones $\frac{2\pi}{\gamma}$–periódicas. Usando ahora la fórmula de variación de las constantes para resolver la ecuación $x'' + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t)$ con datos iniciales $x(0) = x'(0) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \ \mathrm{sen}(\gamma s) \end{pmatrix} ds \\
&= \Phi(t) \begin{pmatrix} -\frac{F_0}{\sqrt{\omega}} \int_0^t \mathrm{sen}(\gamma s)\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} s)\, ds \\ F_0 \int_0^t \mathrm{sen}(\gamma s) \cos(\sqrt{\omega} s)\, ds \end{pmatrix} \\
= \Phi(t) &\begin{pmatrix} \frac{F_0}{\omega-\gamma^2}(\mathrm{sen}(\gamma t)\cos(\sqrt{\omega} t) - \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}} \cos(\gamma t)\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t)) \\ \frac{F_0}{\omega-\gamma^2}(\sqrt{\omega}\, \mathrm{sen}(\gamma t)\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t) + \gamma \cos(\gamma t) \cos(\sqrt{\omega} t) - \gamma) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{F_0}{\omega-\gamma^2}(\mathrm{sen}(\gamma t) - \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}}\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t)) \\ \frac{F_0 \gamma}{\omega-\gamma^2}(\cos(\gamma t) - \cos(\sqrt{\omega} t)) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega - \gamma^2}\Big( \mathrm{sen}(\gamma t) - \frac{\gamma}{\sqrt{\omega}}\, \mathrm{sen}(\sqrt{\omega} t)\Big) .$$

■

## Capítulo 6

# Ecuaciones diferenciales con coeficientes analíticos

1. Se considera el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} x'' - t^2x' - 2tx = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{array}\right. . \tag{6.1}$$

Decide razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) El problema (6.1) posee una única solución analítica en $t = 0$.

(b) El problema (6.1) no tiene soluciones analíticas.

(c) La única solución analítica de (6.1) viene dada por

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{3n}}{3^n\, n!} .$$

*Solución:* Todos los coeficientes de la ecuación diferencial son analíticos en $t = 0$, luego $t = 0$ es un punto regular. Por consiguiente, el problema de valores iniciales planteado admite una única solución

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{6.2}$$

analítica en $t = 0$ y el enunciado (a) es verdadero, por lo que (b) ha de ser falso. Veamos que (c) es verdadero. Comenzamos sustituyendo la expresión (6.2) en la ecuación diferencial, de donde obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1} = 0\,.$$

Escribiendo la misma potencia de $t$ en cada una de las series anteriores llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+1)(n+2)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1}(n-1)t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}t^n = 0\,. \quad (6.3)$$

Observamos en primer lugar que el dato inicial $x(0) = 1$ equivale a considerar $c_0 = 1$, como se desprende fácilmente de (6.2). Derivando término a término en (6.2) para obtener $x'(t)$ y evaluando la expresión resultante en $t = 0$ obtenemos que ha de ser $c_1 = 0$ para que $x'(0) = 0$. Finalmente, agrupando los coeficientes asociados a potencias de $t$ del mismo orden en (6.3) se deduce

$$c_2 = 0\,, \quad c_3 = \frac{c_0}{3} = \frac{1}{3}\,, \quad c_n = \frac{c_{n-3}}{n} \quad \text{si } n \geq 4\,. \quad (6.4)$$

En particular, de (6.4) se sigue que sólo los coeficientes etiquetados con un subíndice múltiplo de tres son distintos de cero. En efecto:

$$c_6 = \frac{c_3}{6} = \frac{c_0}{3\cdot 6} = \frac{1}{3^2\cdot 2}\,,$$
$$c_9 = \frac{c_6}{9} = \frac{c_0}{3\cdot 6\cdot 9} = \frac{1}{3^3\cdot(3\cdot 2)}\,,$$
$$c_{12} = \frac{c_9}{12} = \frac{c_0}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} = \frac{1}{3^4\cdot(4\cdot 3\cdot 2)}\,, \quad (6.5)$$

etcétera. Razonando conforme al principio de inducción se puede concluir que la relación de recurrencia que liga a los coeficientes de $x(t)$ es la expresada en (c).

■

2. Se considera la ecuación diferencial

$$4(1+t)^2 x'' - 3(1-t^2)x' + 4x = 0\,.$$

Demuestra que el punto $t = -1$ es singular–regular y que la ecuación posee un sistema fundamental de soluciones con un elemento analítico y otro desarrollable en serie de Frobenius.

*Solución:* Los coeficientes de la ecuación diferencial

$$a_0(t) = 4(1+t)^2\,, \quad a_1(t) = -3(1-t^2)\,, \quad a_2(t) \equiv 4\,,$$

son analíticos. Además $a_0(-1) = 0$, por lo que $t = -1$ es un punto singular. Comprobemos que es singular–regular. La función

$$(1+t)\frac{a_1(t)}{a_0(t)} = -\frac{3(1+t)(1-t^2)}{4(1+t)^2} = -\frac{3(1-t)}{4}$$

es analítica en $t = -1$ por ser cociente de funciones analíticas. También

$$(1+t)^2\frac{a_2(t)}{a_0(t)} \equiv 1$$

es analítica en $t = -1$, por lo que $t = -1$ es un punto singular–regular. Reescribiendo la ecuación en la forma de Fuchs obtenemos

$$(1+t)^2 x'' + p_{-1}(t)(1+t)x' + q_{-1}(t)x = 0\,,$$

con

$$p_{-1}(t) = -\frac{3}{4}(1-t)\,, \quad q_{-1}(t) \equiv 1\,.$$

Haciendo ahora el cambio de variable $\tau = 1+t$ podemos desplazar la singularidad al origen y aplicar en consecuencia el teorema de Fuchs. Obtenemos así la ecuación

$$\tau^2 x''(\tau-1) + p_{-1}(\tau)\,\tau\, x'(\tau-1) + q_{-1}(\tau)x(\tau-1) = 0\,,$$

con

$$p_{-1}(\tau) = -\frac{3}{4}(2-\tau)\,, \quad q_{-1}(\tau) \equiv 1\,.$$

De este modo, la ecuación indicial asociada a $t = -1$ es

$$\begin{aligned} & s(s-1) + p_{-1}(\tau=0)\,s + q_{-1}(\tau=0) \\ & \qquad = s(s-1) - \frac{3s}{2} + 1 = s^2 - \frac{5s}{2} + 1 = 0\,, \end{aligned}$$

cuyas raíces son $s_1 = \frac{1}{2}$ y $s_2 = 2$. Como $s_2 - s_1 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, al aplicar el teorema de Fuchs encontramos el siguiente sistema fundamental de soluciones:

$$\varphi_1(\tau) = \sqrt{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^{n+\frac{1}{2}} ,$$

$$\varphi_2(\tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} \tau^n ,$$

que contiene un elemento analítico y otro desarrollable en serie de Frobenius.

■

3. Demuestra que la ecuación diferencial

$$4t^2 x'' + (t^2 + 1)x = 0$$

posee soluciones definidas en $\mathbb{R}$ y encuentra un sistema fundamental.

*Solución:* El punto $t = 0$ es singular–regular, puesto que la función $q_0(t) = \frac{t^2+1}{4}$ es analítica en 0. La ecuación indicial asociada a este punto es

$$s(s-1) + q_0(0) = s(s-1) + \frac{1}{4} = s^2 - s + \frac{1}{4} = 0 ,$$

cuya única raíz es $s = \frac{1}{2}$ (doble). Por tanto, el teorema de Fuchs garantiza que

$$\varphi_1(t) = \sqrt{|t|} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \;\text{ con } c_0 = 1 ,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \varphi_1(t) \log(|t|) + \sqrt{|t|} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \\ &= \sqrt{|t|} \left\{ \Big( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \Big) \log(|t|) + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \right\} \;\text{ con } c'_0 = 0 , \end{aligned}$$

es un sistema fundamental de soluciones (definidas en $\mathbb{R}$).

■

4. Estudia los puntos singulares–regulares y las raíces de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial hipergeométrica:

$$t(1-t)x'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)t]x' - \alpha\beta x = 0\,, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

*Solución:* Los coeficientes de la ecuación diferencial son analíticos:

$$a_0(t) = t(1-t)\,, \quad a_1(t) = \gamma - (1+\alpha+\beta)t\,, \quad a_2(t) = -\alpha\beta\,.$$

Además $a_0(0) = a_0(1) = 0$, por lo que $t = 0$ y $t = 1$ son puntos singulares. Veamos si son o no singulares–regulares. Se tiene en primer lugar que la función

$$t\frac{a_1(t)}{a_0(t)} = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)t}{1-t}$$

es analítica en $t = 0$ por ser cociente de funciones analíticas. Por la misma razón

$$t^2\frac{a_2(t)}{a_0(t)} = -\frac{\alpha\beta t}{1-t}$$

es analítica en $t = 0$, por lo que $t = 0$ es un punto singular–regular. Si efectuamos un estudio análogo para el punto $t = 1$ obtenemos que las funciones

$$(t-1)\frac{a_1(t)}{a_0(t)} = \frac{(1+\alpha+\beta)t - \gamma}{t}\,, \quad (t-1)^2\frac{a_2(t)}{a_0(t)} = \alpha\beta\left(\frac{t-1}{t}\right)\,,$$

son analíticas en $t = 1$, luego el punto $t = 1$ también es singular–regular.

Estudiamos a continuación la ecuación indicial asociada a $t = 0$. Para ello, reescribiendo la ecuación hipergeométrica en la forma de Fuchs obtenemos

$$t^2x'' + p_0(t)tx' + q_0(t)x = 0\,,$$

con

$$p_0(t) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)t}{1-t}\,, \quad q_0(t) = -\frac{\alpha\beta t}{1-t}\,.$$

De este modo, la ecuación indicial asociada a $t = 0$ es

$$s(s-1) + p_0(0)s + q_0(0) = s(s-1) + \gamma s = s^2 + (\gamma - 1)s = 0\,,$$

cuyas raíces son $s = 0$ y $s = 1 - \gamma$. Por otra parte, podemos reescribir también la ecuación hipergeométrica de la siguiente forma:

$$(1-t)^2 x'' + p_1(t)(1-t)x' + q_1(t)x = 0\,,$$

donde

$$p_1(t) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)t}{t}\,, \quad q_1(t) = -\frac{\alpha\beta(1-t)}{t}\,.$$

Haciendo ahora el cambio de variable $\tau = 1 - t$ se consigue desplazar la singularidad al origen y aplicar en consecuencia el teorema de Fuchs. Obtenemos así la ecuación

$$\tau^2 x''(1-\tau) + p_1(\tau)\,\tau\, x'(1-\tau) + q_1(\tau)x(1-\tau) = 0\,,$$

con

$$p_1(\tau) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)(1-\tau)}{1-\tau}\,, \quad q_1(\tau) = -\frac{\alpha\beta\tau}{1-\tau}\,.$$

De este modo, la ecuación indicial asociada a $t = 1$ es

$$\begin{aligned} s(s-1) &+ p_1(\tau=0)s + q_1(\tau=0) \\ &= s(s-1) + (\gamma-\alpha-\beta-1)s \\ &= s^2 + (\gamma-\alpha-\beta-2)s = 0\,, \end{aligned}$$

cuyas raíces son $s = 0$ y $s = \alpha + \beta - \gamma + 2$.

■

5. Encuentra la única solución de la ecuación diferencial

$$tx'' + x' - tx = 0$$

que pasa por $(0, 1)$.

*Solución:* Los coeficientes de la ecuación son $a_0(t) = t$, $a_1(t) \equiv 1$ y $a_2(t) = -t$, todos ellos representados por funciones analíticas. Claramente $a_0(0) = 0$, luego $t = 0$ es un punto singular. Estudiemos si es o no singular–regular. Para ello comprobamos que

$$t\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \equiv 1 \quad \text{es analítica en } t = 0\,,$$

$$t^2\frac{a_2(t)}{a_0(t)} = -t^2 \quad \text{es analítica en } t = 0\,,$$

luego $t = 0$ es un punto singular–regular. Podemos, pues, reescribir la ecuación diferencial en la forma de Fuchs:

$$t^2 x'' + p(t) t x' + q(t) x = 0\,,$$

donde $p(t) \equiv 1$ y $q(t) = -t^2$ son funciones analíticas en $t = 0$. La ecuación indicial asociada es la siguiente:

$$s(s-1) + p(0)s + q(0) = s(s-1) + s = s^2 = 0\,,$$

de la que $s = 0$ es una raíz doble. Por tanto, una base de soluciones es

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) = |t|^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \ \text{ con } c_0 = 1\,,& \\
\varphi_2(t) &= \varphi_1(t) \log(|t|) + |t|^0 \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \\
&= \Big( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \Big) \log(|t|) + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n \ \text{ con } c'_0 = 0\,,
\end{aligned}$$

y la única solución que pasa por $(0, 1)$ ha de ser necesariamente un múltiplo de $\varphi_1(t)$. Buscamos finalmente los coeficientes $c_n$. Para ello escribimos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\,, \quad x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}\,, \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}\,,$$

por lo que

$$t^2 x'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n\,, \quad t x' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n\,, \quad t^2 x = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^n\,.$$

Entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} t^n = 0\,.$$

Identificando términos del mismo orden en $t$ obtenemos

$$c_1 = 0\,, \quad n^2 c_n - c_{n-2} = 0\,,\ n \geq 2\,.$$

En consecuencia, concluimos que $c_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$; es decir, todos los coeficientes de orden impar son nulos. Para los coeficientes de orden par se tiene $c_n = \frac{c_{n-2}}{n^2}$ si $n \geq 2$, ley que escrita en términos de $c_0$ resulta

$$c_n = \frac{c_0}{2^n(\frac{n}{2}!)^2}, \quad n \text{ par}.$$

Luego

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n},$$

y la única solución que pasa por $(0,1)$ es aquella para la que $c_0 = 1$, es decir,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}.$$

■

6. Se considera la ecuación diferencial

$$t^2 x'' + \Big(\alpha^2\beta^2 t^{2\beta} + \frac{1}{4} - p^2\beta^2\Big)x = 0, \tag{6.6}$$

con $p, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Prueba que $x(t) = \sqrt{t} f(\alpha t^\beta)$ resuelve (6.6), donde $f$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden $p$.

(b) Teniendo en cuenta que $\frac{\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{t}}$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$, prueba que una solución de (6.6) con $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $p = \frac{1}{2}$ cumple $x(\sqrt{\pi}) = 0$.

(c) Demuestra que si $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $p = \frac{1}{2}$, entonces toda solución no trivial de (6.6) posee infinitos ceros positivos.

*Solución:* (a) Derivando sucesivamente $x(t) = \sqrt{t} f(\alpha t^\beta)$ se obtienen las expresiones

$$x'(t) = \alpha\beta t^{\beta-\frac{1}{2}} f'(\alpha t^\beta) + \frac{f(\alpha t^\beta)}{2\sqrt{t}},$$

$$x''(t) = \alpha^2\beta^2 t^{2\beta-\frac{3}{2}} f''(\alpha t^\beta) + \alpha\beta^2 t^{\beta-\frac{3}{2}} f'(\alpha t^\beta) - \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} f(\alpha t^\beta),$$

que sustituidas en (6.6) dan lugar a

$$\alpha^2\beta^2 t^{2\beta+\frac{1}{2}} f''(\alpha t^\beta) \\ + \alpha\beta^2 t^{\beta+\frac{1}{2}} f'(\alpha t^\beta) + (\alpha^2\beta^2 t^{2\beta} - \beta^2 p^2)\sqrt{t} f(\alpha t^\beta) = 0\,,$$

o equivalentemente

$$\alpha^2 t^{2\beta} f''(\alpha t^\beta) + \alpha t^\beta f'(\alpha t^\beta) + (\alpha^2 t^{2\beta} - p^2)\sqrt{t} f(\alpha t^\beta) = 0\,. \qquad (6.7)$$

Denotando $\xi = \alpha t^\beta$, la ecuación (6.7) puede reescribirse como

$$\xi^2 f''(\xi) + \xi f'(\xi) + (\xi^2 - p^2) f(\xi) = 0\,,$$

que es satisfecha si y sólo si $f$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden $p$.

(b) La ecuación resultante de elegir $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $p = \frac{1}{2}$ es

$$t^2 x'' + \left(4t^4 - \frac{3}{4}\right) x = 0\,. \qquad (6.8)$$

Por lo demostrado en (a), $x(t) = \sqrt{t} f(t^2)$ resuelve (6.8), donde $f$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$. En particular puede elegirse $f(t^2) = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t}$, de donde se concluye que $x(t) = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{\sqrt{t}}$ es una solución que satisface $x(\sqrt{\pi}) = 0$.

(c) Para valores positivos de $t$, la ecuación (6.8) puede reescribirse como

$$x'' + \left(\frac{16t^4 - 3}{4t^2}\right) x = 0\,.$$

Es sencillo comprobar que

$$\frac{16t^4 - 3}{4t^2} \geq 1 \quad \forall t \in \left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}, \infty\right) = I\,.$$

Podemos entonces comparar en $I$ con la ecuación $x'' + x = 0$, en cuyo caso el teorema de Sturm nos permite afirmar que las soluciones no triviales de (6.8) tienen infinitos ceros positivos.

■

CAPÍTULO 7

# Análisis local de existencia y unicidad de soluciones

1. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Decide razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) La sucesión es uniformemente acotada.

(b) La sucesión es equicontinua.

(c) Existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $[0,1]$.

*Solución:* (a) VERDADERA. Es evidente, ya que

$$|\operatorname{sen}(nx)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) FALSA. En efecto, basta con elegir $\varepsilon < 1$ y cualquier pareja de puntos $(x = 0, y_n = \frac{\pi}{2n})$, con $n = n(\delta) \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, para que

$$|x - y_n| = \frac{\pi}{2n} < \delta\,.$$

De este modo se tiene

$$|\operatorname{sen}(nx) - \operatorname{sen}(ny)| = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > \varepsilon\,.$$

(c) FALSA. De hecho, se puede comprobar que ni siquiera existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converja puntualmente. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $f \in C([0,1])$ y $\{f_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{f_n\}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}(x)\} = f(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. En particular,

$$f(0) = \lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}(0)\} = 0\,.$$

Como las funciones $f_{n_k}$ son continuas, dada cualquier sucesión $\{t_m\} \subset [0,1]$ tal que $\lim_{m\to\infty}\{t_m\} = 0$ se tiene

$$\lim_{m\to\infty} \{f_{n_k}(t_m)\} = f_{n_k}(0) = 0 = f(0) \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Podemos extraer entonces una subsucesión diagonal[1] $\{f_{n_k}(t_{n_k})\}$, de modo que

$$\lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}(t_{n_k})\} = 0 = f(0)\,.$$

Sin embargo, eligiendo $t_{n_k} = \frac{\pi}{2n_k}$ se observa que

$$f_{n_k}(t_{n_k}) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0 = f(0)\,,$$

lo que conduce a contradicción.

■

[1] La sucesión $\{f_{n_k}(t_{n_1})\}$ es acotada, por lo que admite una subsucesión convergente que denotamos $\{f_{1,n_k}(t_{n_1})\}$. La sucesión $\{f_{1,n_k}(t_{n_2})\}$ es también acotada, luego tiene una subsucesión convergente que denotamos $\{f_{2,n_k}(t_{n_2})\}$. Es claro que la sucesión $\{f_{2,n_k}\}$ converge tanto en $t_{n_2}$ como en $t_{n_1}$, pues es una subsucesión de $\{f_{1,n_k}\}$. Mediante este procedimiento obtenemos una familia numerable de subsucesiones de la sucesión original:

$$\begin{array}{cccc} f_{1,n_1}(t_{n_1}) & f_{1,n_2}(t_{n_1}) & f_{1,n_3}(t_{n_1}) & \dots \\ f_{2,n_1}(t_{n_2}) & f_{2,n_2}(t_{n_2}) & f_{2,n_3}(t_{n_2}) & \dots \\ f_{3,n_1}(t_{n_3}) & f_{3,n_2}(t_{n_3}) & f_{3,n_3}(t_{n_3}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array},$$

de manera que la sucesión que ocupa la $j$-ésima fila converge en $t_{n_1}, \dots, t_{n_j}$ y es una subsucesión de la que ocupa la fila inmediatamente superior. Por consiguiente, la sucesión diagonal $\{f_{k,n_k}\}$ es una subsucesión de $\{f_{n_k}\}$ que converge simultáneamente en todos los $t_{n_k}$

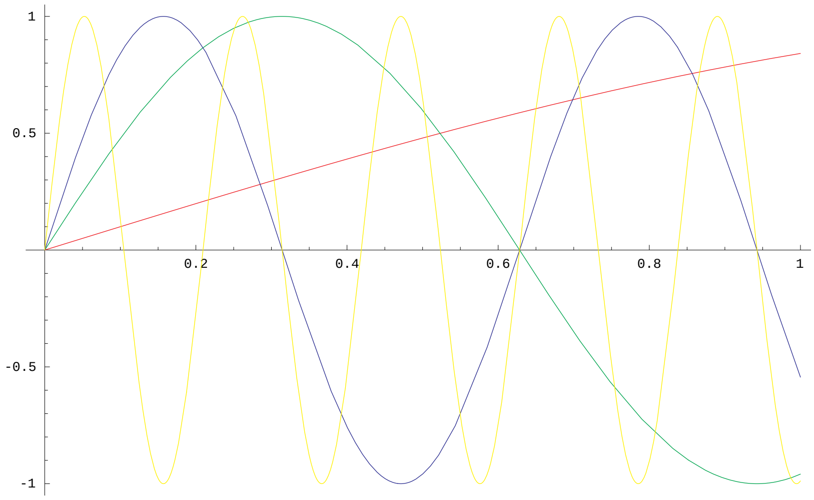



Figura 7.1: Representación gráfica de algunos términos de la sucesión de funciones del Ejercicio 1 en el intervalo $[0,1]$.

2. Demuestra que la sucesión de funciones $\{f_n(t)\} = \left\{\frac{\text{sen}(nt)}{\sqrt{n}}\right\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir acerca de la convergencia de $\{f_n'(t)\}$?

   *Solución:* La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ hacia cero en $\mathbb{R}$ es obvia, ya que
$$|f_n(t)| = \left|\frac{\text{sen}(nt)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$
   Por otro lado,
$$f_n'(t) = \sqrt{n}\cos(nt)$$
   genera una sucesión oscilante que no tiene límite. Basta por ejemplo con considerar
$$\lim_{n\to\infty}\{f_n'(0)\} = \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = \infty\,.$$
   ■

3. Sean $I$ un intervalo compacto y $f_n \in C^1(I,\mathbb{R}^N)$ una sucesión de funciones tal que $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada. Demuestra que $\{f_n\}$ es equicontinua.

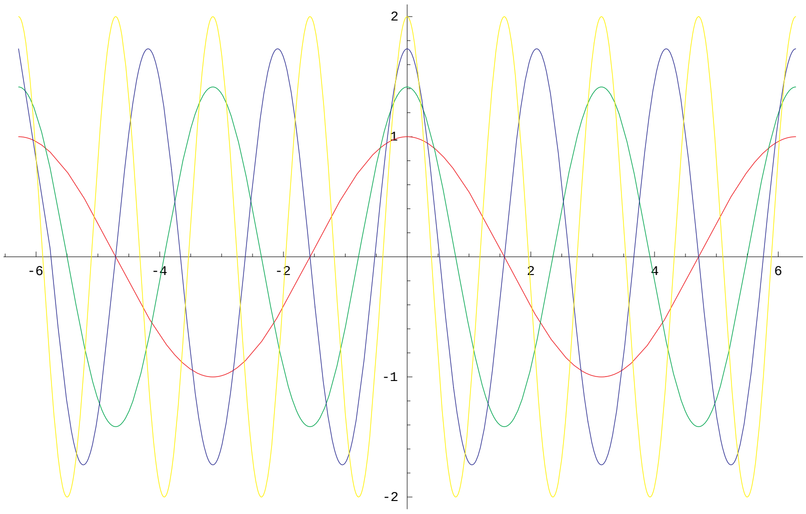



Figura 7.2: Representación gráfica de los cuatro primeros elementos de la sucesión $\{f_n'\}$ del Ejercicio 2 en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$

*Solución:* Como $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada, ha de existir una constante $M > 0$ tal que

$$\|f_n'(x)\| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I.$$

Como además $f_n \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el teorema del valor medio para concluir que dados $x, y \in I$ tales que $|x - y| < \delta$, existe $z \in \text{Int}(I)$ que satisface

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \|f_n'(z)\| |x - y| < M\delta.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, basta entonces con elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ para deducir la equicontinuidad de $\{f_n\}$.

■

4. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada, equicontinua y tal que

$$\lim_{|t| \to \infty} \{f_n(t)\} = 0 \quad \text{uniformemente en } n.$$

Prueba que existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia una función $f \in C(\mathbb{R})$.

*Solución:* Sea $\varepsilon > 0$. De la condición

$$\lim_{|t|\to\infty} \{f_n(t)\} = 0 \quad \text{uniformemente en } n \in \mathbb{N}$$

se desprende la existencia de $R = R(\varepsilon) > 0$ (independiente de $n$) tal que

$$|f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R} : |t| > R\,. \tag{7.1}$$

Por otro lado, de la equicontinuidad de $\{f_n\}$ se deduce que si $t, s \in [-R, R]$ son tales que $|t - s| < \delta$, entonces

$$|f_n(t) - f_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Tomemos ahora un recubrimiento finito del compacto $[-R, R]$:

$$[-R, R] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a_i, \delta)\,, \quad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}\,.$$

En virtud del principio de selección de Cantor,[2] existe una sucesión parcial de $f_n$ convergente en $H = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Por tanto, para cualquier $a_i \in H$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon, a_i)$ tal que, si $\sigma(n), \sigma(m) \geq n_0$, entonces

$$|f_{\sigma(n)}(a_i) - f_{\sigma(m)}(a_i)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

De este modo, dado $t \in [-R, R]$ podemos afirmar que existe $a_{i_0}$ tal que $|t - a_{i_0}| \leq \delta$ y

$$\begin{aligned}|f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(m)}(t)| &\leq |f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(n)}(a_{i_0})| \\ &\quad + |f_{\sigma(n)}(a_{i_0}) - f_{\sigma(m)}(a_{i_0})| + |f_{\sigma(m)}(a_{i_0}) - f_{\sigma(m)}(t)| \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Además, de (7.1) se deduce que

$$|f_{\sigma(n)}(t) - f_{\sigma(m)}(t)| \leq |f_{\sigma(n)}(t)| + |f_{\sigma(m)}(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| > R$, de donde se deduce que la sucesión $\{f_{\sigma(n)}\}$ es uniformemente de Cauchy y, por tanto, converge uniformemente hacia una función continua (ya que todas las funciones $f_n$ son continuas).

■

[2]Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada y sea $H$ un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Entonces existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge puntualmente en $H$ hacia una función $f : H \to \mathbb{R}$

5. Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq n \\ t-n\,, & n < t < n+1 \\ 1\,, & t \geq n+1 \end{cases} .$$

Prueba que $f_n$ es uniformemente acotada y equicontinua y que converge puntualmente hacia $f \equiv 0$, pero no lo hace uniformemente.

*Solución:* Es evidente que $|f_n(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, de donde resulta la acotación uniforme. Pasemos a estudiar la equicontinuidad. Sea $\varepsilon \leq 1$ y tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}$.

- Si $t, s \leq n$, entonces $|f_n(t) - f_n(s)| = 0 < \varepsilon$.
- Si $t, s \geq n+1$, entonces $|f_n(t) - f_n(s)| = 0 < \varepsilon$.
- Si $t, s \in (n, n+1)$, entonces
$$|f_n(t) - f_n(s)| = |t-n-s+n| = |t-s| < \delta < \varepsilon\,.$$
- Si $t \in (n, n+1)$ y $s \leq n$, entonces
$$|f_n(t) - f_n(s)| = |t-n| \leq |t-s| < \delta < \varepsilon\,.$$
- Si $t \geq n+1$ y $s \in (n, n+1)$, entonces
$$|f_n(t) - f_n(s)| = |1-t+n| \leq |t-s| < \delta < \varepsilon\,.$$

Dado $t \in \mathbb{R}$, siempre podemos encontrar $N = N(t)$ tal que, si $n > N$, entonces $t \leq n$, luego $f_n(t) = 0$ y, por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente hacia cero cuando $n \to \infty$.

Comprobemos finalmente que $\{f_n\}$ no admite sucesiones parciales que converjan uniformemente. Razonamos por reducción al absurdo. Si existiese una tal sucesión parcial $\{f_{n_k}\}$, su límite uniforme habría de ser cero por coincidencia con el límite puntual. En otros términos: para todo $\varepsilon > 0$, existiría un índice $N = N(\varepsilon)$ tal que, si $n_k \geq N$, entonces

$$|f_{n_k}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Pero esto no es factible, ya que con sólo elegir $\varepsilon > 1$ y $t > n_k + 1$ se llega a contradicción.

■

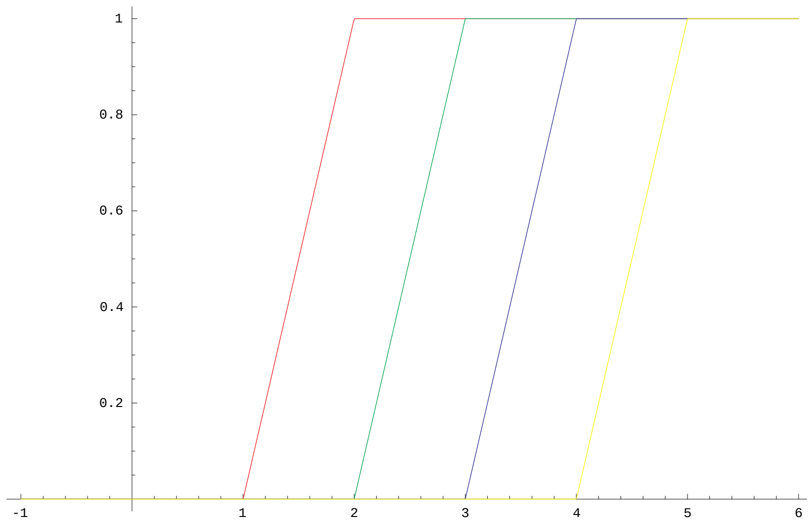



Figura 7.3: Representación gráfica de los cuatro primeros términos de la sucesión de funciones del Ejercicio 5

6. Se considera la ecuación diferencial

$$x'' - t^2 x = 0\,.$$

¿Para qué valores de $\varepsilon$ la función $z(t) = e^{\frac{t^4}{12}}$ es una solución $\varepsilon$–aproximada de la ecuación en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$?

*Solución:* Una función $\Phi$ de clase $C^1$ a trozos es una solución $\varepsilon$–aproximada de $x' = F(t,x)$ en $[a,b]$ si

$$\|\Phi'(t) - F(t,\Phi(t))\| < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b] \cap \mathrm{Dom}(\Phi)\,,$$

donde $\Phi$ sea derivable. En nuestro caso, $x'' - t^2 x = 0$ puede reescribirse en forma vectorial como $(u_1,u_2)' = (u_2, t^2 u_1)$. Sea entonces $\Phi(t) = \Big(e^{\frac{t^4}{12}}, \frac{t^3}{3}\,e^{\frac{t^4}{12}}\Big)$, luego $\Phi'(t) = \Big(\frac{t^3}{3}\,e^{\frac{t^4}{12}}, t^2\,e^{\frac{t^4}{12}} + \frac{t^6}{9}\,e^{\frac{t^4}{12}}\Big)$. Tenemos

$$\|\Phi'(t) - F(t,\Phi(t))\| = \left\|\left(0, \frac{t^6}{9}\,e^{\frac{t^4}{12}}\right)\right\| = \frac{t^6}{9}\,e^{\frac{t^4}{12}} := h(t)\,.$$

La función $h(t)$ alcanza su valor máximo en los puntos $t = \pm\frac{1}{2}$:

$$h\Big(-\frac{1}{2}\Big) = h\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{576}\,e^{\frac{1}{192}}\,,$$

luego $\Phi$ es una solución $\varepsilon$–aproximada de $x'' - t^2 x = 0$ en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ si y sólo si

$$\varepsilon > \frac{1}{576}\, e^{\frac{1}{192}}\,.$$

■

7. Se considera el problema de valores iniciales

$$(P)\left\{\begin{array}{l} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. ,$$

donde $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es continua, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ es un abierto y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Sean $a, b > 0$ y $|\cdot|$ una norma vectorial en $\mathbb{R}^N$ tales que el conjunto

$$\mathcal{R} = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\Big\}$$

está contenido en $\Omega$. Sea también $M \geq 0$ tal que

$$|F(t,x)| \leq M \quad \forall (t,x) \in \mathcal{R}\,.$$

Fijado $\alpha \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$, definimos la siguiente sucesión (llamada sucesión de *iterantes de Picard*):

$$\left\{\begin{array}{l} \phi_0(t) \equiv x_0\,, \\ \phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \phi_k(s))\, ds\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \end{array}\right.$$

para todo $t \in I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

(a) Prueba que $\phi_k(t)$ está bien definida y es continua en $I$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Prueba que si la función $F$ es localmente lipschitziana en la variable $x$, entonces la sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente hacia la solución de $(P)$.

*Solución:* (a) Las iterantes de Picard están bien definidas, ya que

$$\Big| \int_{t_0}^{t} F(s, \phi_k(s))\, ds \Big| \leq \int_{t_0}^{t} |F(s, \phi_k(s))|\, ds \leq M|t - t_0| < \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, si $x_0 \in \mathcal{R}$ entonces

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t) - x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |F(s, \phi_k(s))| \, ds \\ &\leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \,, \end{aligned}$$

luego $x_{n+1}(t) \in \mathcal{R}$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

(b) Llamemos $L$ a la constante de Lipschitz de $F$. Comprobaremos en primer lugar (usando un argumento inductivo) que se satisface la siguiente estimación para la diferencia entre dos iterantes de Picard consecutivas:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{M\alpha L^k}{k!} |t - t_0|^k \,. \tag{7.2}$$

La condición (7.2) es satisfecha para $k = 1$, ya que

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |F(s, x_1(s)) - F(s, x_0(s))| \, ds \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_0(s)| \, ds \leq L \int_{t_0}^{t} \Big( \int_{t_0}^{\tau} |F(s, x_0(s))| \, ds \Big) \, d\tau \\ &\leq LM \int_{t_0}^{t} |\tau - t_0| \, d\tau \leq LM\alpha |t - t_0| \,. \end{aligned}$$

Supongamos (hipótesis de inducción) que

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \frac{M\alpha L^{k-1}}{(k-1)!} |t - t_0|^{k-1} \,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |F(s, x_k(s)) - F(s, x_{k-1}(s))| \, ds \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |x_k(s) - x_{k-1}(s)| \, ds \leq \frac{M\alpha L^k}{(k-1)!} \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^{k-1} \, ds \\ &= \frac{M\alpha L^k}{k!} |t - t_0|^k \,. \end{aligned}$$

Estudiemos ahora la convergencia de la sucesión de iterantes de Picard. Comenzamos escribiendo $x_n$ como una serie telescópica:

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \big( x_k(t) - x_{k-1}(t) \big) \,, \quad t \in I \,.$$

Para cada $t \in I$, la serie

$$\sum_{k \geq 1} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| \tag{7.3}$$

está dominada por la serie $\sum_{k\geq 1} \frac{M\alpha^k L^{k-1}}{(k-1)!}$, la cual es convergente.[3] Por tanto, el criterio de la mayorante de Weierstrass establece que la serie (7.3) es absolutamente convergente en $I$ y converge uniformemente en cada compacto de $I$, es decir: cuando $n \to \infty$,

$$\{x_n\} \to x \quad \text{uniformemente en } J \ \ \forall J \subset I \text{ compacto}\,.$$

Además $x(t)$ es continua en $I$, pues dado $t \in I$ existe un compacto $J \subset I$ para el que $t \in \text{Int}(J) \subset J$ y la función $x(t)$ es continua en $J$. Sea $t \in I$ fijo (aunque arbitrario) y consideremos $J = [t_0, t]$ (o bien $J = [t, t_0]$). Como $\{x_n\} \to x$ uniformemente en $J$ cuando $n \to \infty$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_J F(s, x_n(s))\, ds \right\} = \int_J \lim_{n\to\infty} \{F(s, x_n(s))\}\, ds = \int_J F(s, x(s))\, ds\,,$$

para lo que se ha empleado el teorema de la convergencia dominada y la continuidad de $F$. Tomando ahora el límite $n \to \infty$ en la expresión

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_J F(s, x_n(s))\, ds$$

obtenemos

$$x(t) = x_0 + \int_J F(s, x(s))\, ds$$

y, por tanto, la existencia de soluciones de (P). Para observar la unicidad suponemos que $x(t)$ e $y(t)$ son dos soluciones de (P), en cuyo caso

$$x(t) = x_0 + \int_J F(s, x(s))\, ds\,, \quad y(t) = x_0 + \int_J F(s, y(s))\, ds\,.$$

Entonces

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_J |F(s, x(s)) - F(s, y(s))|\, ds \leq L \int_J |x(s) - y(s)|\, ds\,.$$

Una aplicación inmediata del lema de Gronwall nos conduce finalmente a que ha de ser

$$|x(t) - y(t)| \leq 0 \quad \forall t \in I\,,$$

[3] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\alpha^k L^{k-1}}{(k-1)!} = M\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1} L^{k-1}}{(k-1)!} = M\alpha\, e^{L\alpha}$

luego $x(t) = y(t)$ en $I$.

■

8. Escribe los primeros términos del esquema de iteración de Picard para cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales y, cuando sea posible, encuentra explícitamente la solución:

   (a) $x' = x + 2\,, \quad x(0) = 2.$

   (b) $x' = x^{\frac{4}{3}}\,, \quad x(0) = 0.$

   (c) $x' = x^{\frac{4}{3}}\,, \quad x(0) = 1.$

   (d) $x' = \text{sen}(x)\,, \quad x(0) = 0.$

   (e) $x' = \frac{x}{2}\,, \quad x(1) = 1.$

*Solución:* El esquema iterativo de Picard es el siguiente:

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv \text{dato inicial} = x(t_0) = x_0\,, \\ x_{n+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x_n(s))\, ds\,. \end{aligned}$$

(a) $F(t,x) = x + 2$, luego se trata de una ecuación lineal. Tenemos

$x_0(t) \equiv 2\,,$

$$x_1(t) = 2 + \int_0^t 4\, ds = 2 + 4t = 2(1+2t)\,,$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = 2 + \int_0^t (2(1+2s)+2)\, ds &= 2 + 4\int_0^t (1+s)\, ds \\ = 2(1+t)^2 &= 2(1+2t+t^2)\,, \end{aligned}$$

$$x_3(t) = 2 + \int_0^t (4+4s+4s^2)\, ds = 2\Big(1+2t+t^2+\frac{1}{3}t^3\Big)\,,$$

$$x_4(t) = 2 + \int_0^t \Big(4+4s+2s^2+\frac{2}{3}s^3\Big)\, ds = 2\Big(1+2t+t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4\Big)\,.$$

En este caso la solución explícita es fácilmente calculable por tratarse de un problema lineal:

$$x(t) = 2(2e^t - 1)\,.$$

(b) $F(t,x) = x^{\frac{4}{3}}$, luego

$$0 \equiv x_0(t) = x_1(t) = x_2(t) \dots$$

Por tanto, la sucesión de iterantes de Picard converge hacia cero. Si resolvemos el problema de valores iniciales por separación de variables obtenemos que $x \equiv 0$ es solución, pero en general no podemos garantizar la unicidad.

(c) $F(t,x) = x^{\frac{4}{3}}$, luego

$$\begin{aligned} x_0(t) &\equiv 1\,, \\ x_1(t) &= 1 + \int_0^t ds = 1 + t\,, \\ x_2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)^{\frac{4}{3}}\,ds = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}\,, \\ x_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}\right) ds = 1 + \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{4}{3}} \int_1^{t+1} \left(4 + 3u^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} du\,, \end{aligned}$$

que da lugar a una sucesión convergente a pesar de que las integrales no sean expresables en términos de funciones elementales. Si resolvemos el problema de valores iniciales por separación de variables obtenemos

$$x(t) = \frac{27}{(3-t)^3}\,, \quad t \neq 3\,.$$

(d) $F(t,x) = \mathrm{sen}(x)$, luego

$$0 \equiv x_0(t) = x_1(t) = x_2(t) \dots$$

Por tanto, la sucesión de iterantes de Picard converge hacia cero.

(e) $F(t,x) = \frac{x}{2}$, luego se trata de una ecuación lineal homogénea.

Tenemos

$$x_0(t) \equiv 1\,,$$

$$x_1(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{2}\,ds = \frac{1}{2}(1+t)\,,$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t \frac{1}{4}(1+s)\,ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}(1+t)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2} + t + \frac{1}{2}t^2\right)\,,$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 1 + \int_1^t \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4} + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}\right)ds \\ &= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}(t-1) + \frac{1}{4}(t^2-1) + \frac{1}{12}(t^3-1)\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{29}{3} + 5t + t^2 + \frac{t^3}{3}\right)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(t) &= 2 + \int_0^t \left(4 + 4s + 2s^2 + \frac{2}{3}s^3\right)ds \\ &= 2\left(1 + 2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4\right)\,. \end{aligned}$$

La única solución del problema de valores iniciales es

$$x(t) = e^{\frac{t-1}{2}}\,.$$

■

9. (*Ejemplo de Müller*) Se considera el problema de valores iniciales

$$(P)\left\{\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{array}\right.\,,$$

donde $f : (-\infty, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función

$$f(t,x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R} \\ 2t & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } t^2 < x \end{array}\right.\,.$$

(i) Prueba que $(P)$ tiene una única solución.

(ii) Calcula la sucesión de iterantes de Picard. ¿Es convergente?

*Solución:* (i) Demostraremos en primer lugar que $f$ es continua en $(-\infty, 1) \times \mathbb{R}$.

(a) *Continuidad de $f$ en los puntos $(0, x)$, con $x \neq 0$.*
Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(0, x)$ cuando $n \to \infty$. Se trata de comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = f(0, x) = 0\,.$$

(a1) Si $x > 0$ y $\{t_n\} \to 0^+$, para valores de $n$ suficientemente grandes se tiene que $x_n > t_n^2$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{-2t_n\} = 0\,.$$

(a2) Si $x < 0$ y $\{t_n\} \to 0^+$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{2t_n\} = 0\,.$$

(b) *Continuidad de $f$ en los puntos $(t, t^2)$, con $0 < t < 1$.*
Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(t, t^2)$ cuando $n \to \infty$.

(b1) Si $x_n > t_n^2$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{-2t_n\} = -2t = f(t, t^2)\,.$$

(b2) Si $x_n \leq t_n^2$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} &= \lim_{n\to\infty} \left\{2t_n - \frac{4x_n}{t_n}\right\} \\ &= 2t - \frac{4t^2}{t} = -2t = f(t, t^2)\,. \end{aligned}$$

(c) *Continuidad de $f$ en los puntos $(t, 0)$, con $0 < t < 1$.*
Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(t, 0)$ cuando $n \to \infty$.

(c1) Si $x_n \geq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \left\{2t_n - \frac{4x_n}{t_n}\right\} = 2t = f(t, 0)\,.$$

(c2) Si $x_n < 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{2t_n\} = 2t = f(t, 0)\,.$$

(d) *Continuidad de $f$ en $(0, 0)$.*
Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión convergente hacia $(0, 0)$ cuando $n \to \infty$.

(d1) Si $t_n < 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{0\} = 0 = f(0, 0)\,.$$

(d2) Si $0 < t_n < 1$ y $x_n > t_n^2$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{-2t_n\} = 0 = f(0, 0)\,.$$

(d3) Si $0 < t_n < 1$ y $0 \le x_n \le t_n^2$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \{-2t_n\} \quad &\le \quad \lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \left\{2t_n - \frac{4x_n}{t_n}\right\} \le \lim_{n\to\infty} \{2t_n\} = 0\,, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = 0 = f(0, 0)\,.$$

(d4) Si $0 < t_n < 1$ y $x_n < 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{f(t_n, x_n)\} = \lim_{n\to\infty} \{2t_n\} = 0 = f(0, 0)\,.$$

Por consiguiente, el teorema de Cauchy–Peano garantiza la existencia de al menos una solución de (P). Veamos finalmente que (P) admite una única solución.

(a) Si $t \le 0$, entonces $f(t, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el problema a resolver en este caso es

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 0 \\ x(0) = 0 \end{array} \right. ,$$

cuya única solución es la trivial.

(b) Si $0 < t < 1$ existen dos posibilidades:

(b1) Si fuese $f(t,x) = 2t$ en algún intervalo, entonces el problema a resolver sería

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2t \\ x(0) = 0 \end{array} \right. ,$$

que admite por única solución a la función $x(t) = t^2$. Pero entonces se tendría

$$x' = f(t,x) = 2t - \frac{4x}{t} = 2t - \frac{4t^2}{t} = -2t\,,$$

que conduce a contradicción.

(b2) Si fuese $f(t,x) = -2t$ en algún intervalo, entonces el problema a resolver sería

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -2t \\ x(0) = 0 \end{array} \right. ,$$

que admite por única solución a la función $x(t) = -t^2$. Sin embargo, la función $x(t)$ tendría que ser positiva para que $f(t,x) = -2t$, lo cual contradice lo anterior.

La conclusión es, por consiguiente, que ha de ser $x' = 2t - \frac{4x}{t}$ si $0 < t < 1$. Resolviendo esta ecuación lineal junto con el dato inicial $x(0) = 0$ obtenemos $x(t) = \frac{t^2}{3}$. Luego

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ \text{ si } \ t \leq 0 \\ \frac{t^2}{3} \ \text{ si } \ 0 < t < 1 \end{array} \right.$$

es una solución de (P). Veamos finalmente que se trata de la única solución de (P). Para ello haremos uso de la siguiente

**Proposición** 4 (Unicidad local a la derecha). Sea $F(t,x)$ una función continua en las dos variables y decreciente en la segunda. Sean también $x_1 : [t_0, \alpha_1) \to \mathbb{R}$ y $x_2 : [t_0, \alpha_2) \to \mathbb{R}$ soluciones del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. .$$

Entonces

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in [t_0, \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2\})\,.$$

**Demostración.** Se define la función

$$d(t) := (x_1(t) - x_2(t))^2\,, \quad t \in [t_0, \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) = I\,.$$

Claramente $d \in C^1(I)$. Además $d(t_0) = 0$ y $d(t) \geq 0$ para todo $t \in I$. Derivando y usando que $F$ es decreciente en $x$ obtenemos

$$\begin{aligned} d'(t) &= 2(x_1(t) - x_2(t))(x_1'(t) - x_2'(t)) \\ &= 2(x_1(t) - x_2(t))(F(t, x_1(t)) - F(t, x_2(t)) \leq 0\,, \end{aligned}$$

por lo que sólo puede ser $d \equiv 0$ $\forall t \in I$ o, lo que es lo mismo, $x_1 = x_2$ en $I$.

■

De este modo podríamos concluir, previa comprobación de que $f$ es decreciente en $x$, la unicidad de solución a la derecha de $t_0 = 0$ para el problema de valores iniciales (P). La unicidad a la izquierda de 0 es clara, pues si $t \leq 0$ necesariamente ha de ser $x \equiv 0$. Comprobemos, por tanto, que $f$ es decreciente en la segunda variable.

(a) Si $t \leq 0$, entonces $f(t, x) = f(t, y) = 0$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Si $0 < t < 1$, podemos distinguir los siguientes casos:

  (b1) Si $x < y < 0$, se tiene $f(t, x) = f(t, y) = 2t$.

  (b2) Si $t^2 < x < y$, se tiene $f(t, x) = f(t, y) = -2t$.

  (b3) Si $0 \leq x < y \leq t^2$, se tiene

$$f(t, x) = 2t - \frac{4x}{t} > 2t - \frac{4y}{t} = f(t, y)\,.$$

  (b4) Si $x < 0$ y $0 \leq y \leq t^2$, se tiene $f(t, x) = 2t$ y $f(t, y) = 2t - \frac{4y}{t}$, luego $f(t, x) > f(t, y)$.

  (b5) Si $x < 0 < t^2 < y$, se tiene $f(t, x) = 2t$ y $f(t, y) = -2t$, luego $f(t, x) > f(t, y)$.

  (b6) Si $0 \leq x \leq t^2 < y$, se tiene

$$f(t, x) = 2t - \frac{4x}{t} > -2t = f(t, y)\,.$$

(ii) La sucesión de iterantes de Picard es la siguiente:

$$x_0(t) \equiv x_0 = 0\,,$$

$$x_1(t) = \int_0^t f(s,0)\,ds = \begin{cases} 0 \ \text{ si } t \le 0 \\ \int_0^t 2s\,ds = t^2 \ \text{ si } t > 0 \end{cases},$$

$$x_2(t) = \int_0^t f(s, x_1(s))\,ds$$

$$= \begin{cases} 0 \ \text{ si } t \le 0 \\ \int_0^t f(s,s^2)\,ds = \int_0^t \left(2s - \frac{4s^2}{s}\right) ds = -t^2 \ \text{ si } t > 0 \end{cases},$$

$$x_3(t) = \int_0^t f(s, x_2(s))\,ds$$

$$= \begin{cases} 0 \ \text{ si } t \le 0 \\ \int_0^t f(s,-s^2)\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2 \ \text{ si } t > 0 \end{cases}.$$

En general, se puede demostrar por inducción que

$$x_{2n}(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ t \le 0 \\ -t^2 \ \text{ si } 0 < t < 1 \end{cases}, \quad x_{2n+1}(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ t \le 0 \\ t^2 \ \text{ si } 0 < t < 1 \end{cases},$$

lo que permite concluir que las sucesiones parciales $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n+1}\}$ convergen, aunque no hacia la solución de (P). En consecuencia, podemos afirmar que la sucesión de iterantes de Picard no es convergente.

■

10. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y localmente lipschitziana y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que la ecuación

$$x' = f(x)\,, \quad y' = g(x)y$$

tiene una única solución para unas condiciones iniciales dadas. Calcula la solución en el siguiente caso particular:

$$\begin{cases} x' = 2|x|\,, \quad y' = \sqrt{|x|}y \\ x(0) = 1\,, \quad y(0) = 3 \end{cases}.$$

*Solución:* Consideremos en primer lugar el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Por ser $f$ continua y localmente lipschitziana, este problema admite una única solución $x(t;t_0,x_0)$ definida en $I=[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$. Sustituyendo esta solución en la segunda ecuación podemos plantear el siguiente otro problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t)=G(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases},$$

con $G(t,y)=g(x(t;t_0,x_0))y(t)$. Como $g$ es continua por hipótesis, la composición $g(x(t;t_0,x_0))$ también lo es. Además $G(t,y)$ es lineal en $y$, por lo que concluimos la existencia de una única solución. En efecto:

$$\begin{aligned}\|G(t,y)-G(t,z)\| &= \|G(t,y-z)\| \\ &= \|x(t;t_0,x_0)(y-z)\| \leq \max_{t\in I}\{|x(t;t_0,x_0)|\}\|y-z\|,\end{aligned}$$

es decir, $G$ es localmente lipschitziana en la segunda variable.

Estudiamos finalmente el caso particular

$$\begin{cases} x'=2|x|, & y'=\sqrt{|x|}y \\ x(0)=1, & y(0)=3 \end{cases}.$$

La única solución de
$$\begin{cases} x'=2|x| \\ x(0)=1 \end{cases}$$

es $x(t)=e^{2t}$. Por tanto, para concluir hemos de resolver el problema

$$\begin{cases} y'(t)=e^t y \\ y(0)=3 \end{cases},$$

que admite por única solución $y(t)=3e^{e^t-1}$.

■

11. Estudia la existencia y unicidad de solución de los siguientes problemas de valores iniciales:

    (a) $x'=|x|+(2-x^2-t^2)\,,\quad x(t_0)=x_0\,.$

    (b) $x'=g(x)+\frac{1}{t-2}\,,\quad x(t_0)=x_0\,,$

    $$\text{donde } g(x)=\begin{cases} \cos(x) & \text{si } x\geq 0 \\ 1 & \text{si } x<0 \end{cases}.$$

*Solución:* (a) La existencia de soluciones está garantizada por la continuidad de la función $F(t,x) = |x| + (2 - x^2 - t^2)$ en ambas variables. Además, $F$ es sublineal en la segunda variable puesto que

$$F(t,x) \leq |x| + 2$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, lo que garantiza la unicidad de solución.

(b) La función $F(t,x) = g(x) + \frac{1}{t-2}$ es continua porque $g(x)$ lo es, lo que garantiza la existencia de soluciones. La unicidad puede deducirse como consecuencia de la sublinealidad de $F$, ya que

$$|F(t,x)| \leq |g(x)| + \frac{1}{|t-2|} \leq 1 + \frac{1}{|t-2|}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

■

12. Para las siguientes funciones, halla una constante de Lipschitz en la región indicada o bien demuestra que no existe:

    (a) $f(x) = |x|\,, \quad x \in (-\infty, \infty)$.

    (b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}\,, \quad x \in [-1,1]$.

    (c) $f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in [1,\infty)$.

    (d) $f(x,y) = (x+2y, -y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (e) $f(x,y) = \frac{xy}{1+x+y}\,, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$.

    (f) $f(x) = x\log(|x|)\,, \quad x \neq 0\,, \quad f(0) = 0\,, \quad x \in [-1,1]$.

*Solución:* (a) Se tiene

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que puede tomarse $L = 1$.

(b) NO existe. Si existiese tal constante, llamémosla $L$, habría de satisfacer

$$\frac{|x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|}{|x-y|} \leq L \quad \forall x,y \in [-1,1]\,.$$

Para comprobar que no es posible basta con tomar $y = 0$ y $x = \varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee.

(c) Se tiene

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|} \right| = \left| \frac{x-y}{xy} \right| \leq |x - y| \quad \forall x, y \geq 1\,,$$

por lo que puede tomarse $L = 1$.

(d) Se tiene

$$\begin{aligned} &\|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})\|_1 = \|(x+2y,-y) - (\tilde{x}+2\tilde{y},-\tilde{y})\|_1 \\ &\quad = \|(x-\tilde{x}+2(y-\tilde{y}),\tilde{y}-y)\|_1 = |x-\tilde{x}+2(y-\tilde{y})| + |\tilde{y}-y| \\ &\qquad \leq |x-\tilde{x}| + 3|y-\tilde{y}| \leq 3\|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\|_1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \end{aligned}$$

por lo que puede tomarse $L = 3$.

(e) NO existe. Si existiese tal constante, llamémosla $L$, habría de satisfacer

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| &= \left| \frac{xy}{1+x+y} - \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{1+\tilde{x}+\tilde{y}} \right| \\ &= \left| \frac{xy(1+\tilde{x}+\tilde{y}) - \tilde{x}\tilde{y}(1+x+y)}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})} \right| \\ &= \left| \frac{y\tilde{y}(x-\tilde{x}) + x\tilde{x}(y-\tilde{y}) + xy - \tilde{x}\tilde{y}}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})} \right| \\ &= \left| \frac{y\tilde{y}(x-\tilde{x}) + x\tilde{x}(y-\tilde{y}) + y(x-\tilde{x}) + \tilde{x}(y-\tilde{y})}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})} \right| \\ &= \left| \frac{y(1+\tilde{y})(x-\tilde{x}) + \tilde{x}(1+x)(y-\tilde{y})}{(1+x+y)(1+\tilde{x}+\tilde{y})} \right| \leq L\|(x,y)-(\tilde{x},\tilde{y})\|_1\,, \end{aligned}$$

para $(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$, $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 < \frac{1}{2}$. Para comprobar que no es posible basta con tomar $0 < \varepsilon < 1$ y

$$(x,y) = \left( -\frac{1}{2}, \varepsilon - \frac{1}{2} \right), \quad (\tilde{x},\tilde{y}) = (0,0)\,,$$

de donde resulta $\|(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})\|_1 < 1$, en tanto que

$$|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right|$$

puede hacerse tan grande como se desee para valores de $\varepsilon$ suficientemente próximos a cero.

(f) NO existe. Si existiese tal constante, llamémosla $L$, habría de satisfacer

$$\frac{|x\log(|x|) - y\log(|y|)|}{|x-y|} \leq L \quad \forall x, y \in [-1, 1] \,.$$

Para comprobar que no es posible basta con tomar $y = 0$ (nótese que $f(y) = 0$) y $x = \varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee.

■

13. Se dice que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal a trozos si existen
$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = +\infty$$
tales que $f$ es lineal en cada intervalo $(x_i, x_{i+1})\,, i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$; es decir,

$$f(x) = a_i x + b_i \quad x \in (x_i, x_{i+1})\,, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k-1\,, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}\,.$$

Prueba que las funciones lineales a trozos son globalmente lipschitzianas.

*Solución:* Es inmediato comprobar que la condición de Lipschitz es satisfecha en cada subintervalo $(x_i, x_{i+1})$. En efecto, dados cualesquiera $x, y \in (x_i, x_{i+1})$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| = |a_i x + b_i - (a_i y + b_i)| = |a_i||x - y| \,.$$

Consideremos ahora el caso en que $x \in (x_i, x_{i+1})$ e $y \in (x_j, x_{j+1})$, con $i, j = 0, 1, \cdots, k-1$, $i < j$. Entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| \leq{}& |f(x) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})| \\
&+ \cdots + |f(x_{j-1}) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| \\
\leq{}& |a_i||x - x_{i+1}| + |a_{i+1}||x_{i+1} - x_{i+2}| \\
&+ \cdots + |a_{j-1}||x_{j-1} - x_j| + |a_j||x_j - y| \\
\leq{}& \Big(\sum_{n=i}^{j} |a_n|\Big)|x - y| \,.
\end{aligned}$$

Por tanto, $f$ es globalmente lipschitziana con constante de Lipschitz $L = \sum_{n=0}^{k-1} |a_n|$.

■

14. Sea $X = C([-1,1];\mathbb{R})$ y consideremos la aplicación $T : X \to X$ definida por

$$T(x)(t) = \frac{1}{2}\big(x(t)^2 + 1 - t^2\big)\,.$$

   (a) Demuestra que $T$ tiene un único punto fijo $z(t)$ que satisface

   $$0 \leq z(t) \leq 1 \quad \forall t \in [-1,1]\,.$$

   Encuentra dicho punto fijo.

   (b) Demuestra que si se toma $x_0(t) = 1$ y se define

   $$x_{k+1} = T(x_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

   entonces $\{x_k\}$ converge uniformemente hacia $z$.

   (c) Como consecuencia, obtén una demostración del teorema de aproximación de Weierstrass (observa que cada $x_k$ es un polinomio).

*Solución:* (a) $z(t)$ es un punto fijo de $T$ si y solamente si

$$\frac{1}{2}\big(z(t)^2 + 1 - t^2\big) = z(t) \quad \forall t \in [-1,1]\,,$$

ecuación que produce dos soluciones: $z_\pm(t) = 1 \pm |t|$. Por tanto, sólo $z_-$ satisface la condición $0 \leq z_-(t) \leq 1$ para todo $t \in [-1,1]$.

(b) Veamos en primer lugar que la sucesión $\{x_k\}$ es decreciente. Se tiene

$$0 < 1 - \frac{t^2}{2} = T(x_0) = x_1 \leq 1 = x_0\,.$$

Razonamos entonces conforme al principio de inducción suponiendo cierta la propiedad $x_k \leq x_{k-1}$ y demostrando que $x_{k+1} \leq x_k$. En efecto:

$$x_{k+1} = T(x_k) = \frac{1}{2}(x_k^2 + 1 - t^2) \leq \frac{1}{2}(x_{k-1}^2 + 1 - t^2) = T(x_{k-1}) = x_k\,.$$

Por tanto, podemos concluir que la sucesión $\{x_k\}$ es monótona (decreciente) y acotada ($0 \leq x_k \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$), de donde se deduce la existencia de $\lim_{k\to\infty}\{x_k(t)\} = y(t)$ para todo $t \in [-1,1]$. Claramente ha de ser $y \equiv z$, ya que $y(t)$ es un punto fijo de $T$ no negativo:

$$0 \leq T(y)(t) = T\big(\lim_{k\to\infty}\{x_k(t)\}\big) \\ = \lim_{k\to\infty}\{T(x_k)(t)\} = \lim_{k\to\infty}\{x_{k+1}(t)\} = y(t)$$

gracias a la continuidad de $T$. Finalmente, puede aplicarse el teorema de Dini[4] para argumentar que la convergencia es uniforme.

(c) Observamos en primer lugar que cualquier función continua en $[-1,1]$ puede aproximarse uniformemente por poligonales. Para ello basta con considerar una partición del intervalo $[-1,1]$:

$$-1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$$

tan fina como se desee y construir en cada subintervalo, pongamos $[t_{i-1}, t_i]$, el segmento

$$p_i \equiv \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right) t + \frac{f(t_{i-1})t_i - f(t_i)t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}},$$

el cual constituye el $i$–ésimo tramo de la poligonal aproximante de $f(t)$. La cuestión ahora es: ¿podemos aproximar cualquier poligonal uniformemente por polinomios? La respuesta es afirmativa, ya que cualquier arco de poligonal puede escribirse en términos de $z_-$ sin más que someterlo a los cambios de variable pertinentes (homotecias y traslaciones). En efecto, si consideramos un arco de poligonal definido en el intervalo $[t_{i-2}, t_i]$, podemos transportar el primero de sus tramos (es decir, el definido sobre $[t_{i-2}, t_{i-1}]$) al intervalo $[-1,0]$ mediante el cambio de variable lineal

$$t = (t_{i-1} - t_{i-2})z_-(\tau) + t_{i-2}, \quad \tau \in [-1,0],$$

mientras que el segundo tramo de poligonal (es decir, el definido sobre $[t_{i-1}, t_i]$) puede ser transportado al intervalo $[0,1]$ mediante el cambio de variable lineal

$$t = t_i - (t_i - t_{i-1})z_-(\tau), \quad \tau \in [0,1].$$

[4] Si $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una sucesión monótona de funciones continuas que converge puntualmente en $I$ hacia una función continua $f$, entonces también converge uniformemente hacia $f$ en $[0,1]$

En definitiva, cualquier poligonal puede expresarse en términos de la función continua $z_-$, de la cual sabemos por (b) que puede ser aproximada uniformemente por polinomios en $[-1,1]$. Esto concluye la prueba.

$\blacksquare$

15. Demuestra que existe una función continua en $[0,1]$ que satisface

$$f(t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

¿Es única?

*Solución:* Denotamos $X = C([0,1])$ y definimos una aplicación $T : X \to X$ de la siguiente forma:

$$[T(f)](t) = \frac{1}{3}\int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds\,.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\|T(f) - T(g)\|_\infty &= \max_{0\le t\le 1}\{|[T(f)](t) - [T(g)](t)|\}\\ &\le \frac{1}{3}\int_0^1 s^2\,|\operatorname{sen}(f(s)) - \operatorname{sen}(g(s))|\, ds\\ &\le \frac{1}{3}\int_0^1 s^2\,|f(s) - g(s)|\, ds \le \frac{1}{9}\|f-g\|_\infty\,,\end{aligned}$$

luego $T$ es contractiva y, por el teorema de punto fijo de Banach, admite un único punto fijo.

$\blacksquare$

16. Prueba que existe una única función continua en $[0,1]$ que cumple

$$x(t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\, ds \quad \forall t \in [0,1]\,.$$

*Solución:* Probaremos en primer lugar la siguiente

**Proposición** 5. Sean $X$ un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una aplicación tales que existe $k \in \mathbb{N}$ para el que $T^k$ es contractiva. Entonces $T$ tiene un único punto fijo.

**Demostración.** Por el teorema de punto fijo de Banach, existe un único elemento $x \in X$ tal que $T^k(x) = x$. Entonces

$$T^k(T(x)) = T(T^k(x)) = T(x),$$

por lo que $T(x)$ es también un punto fijo de $T^k$ que ha de coincidir necesariamente con $x$. Por consiguiente, $x$ es además un punto fijo de $T$. Veamos que es el único. Si $y \in X$ fuese otro punto fijo de $T$ también lo sería de $T^k$, pues

$$\begin{aligned} T^k(y) = T^{k-1}(T(y)) = T^{k-1}(y) = T^{k-2}(T(y)) \\ = T^{k-2}(y) = \cdots = T(y) = y. \end{aligned}$$

En consecuencia, ha de ser $y = x$.

■

Derivando en la ecuación integral obtenemos

$$x'(t) = \cos(t) + \frac{x(t)}{\sqrt{t}} := F(t,x) \quad \forall t \in [0,1].$$

Es evidente que $F(t,x)$ no es lipschitziana en un entorno del punto $(0,x)$ (ni siquiera está definida en $t = 0$), por lo que no podemos valernos del teorema de Cauchy–Picard–Lindelöf. Consideremos entonces el espacio $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ y la aplicación $T : X \to X$ definida como

$$T(x)(t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\, ds.$$

La aplicación $T$ está bien definida, pues $x$ es continua y $\frac{1}{\sqrt{s}}$ es integrable en $[0,t]$, luego su producto es integrable: $|\frac{x(s)}{\sqrt{s}}| \leq \frac{\|x\|_\infty}{\sqrt{s}}$. Sin embargo, $T$ no es contractiva:

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} \|x-y\|_\infty\, ds = 2\sqrt{t}\|x-y\|_\infty \quad \forall t \in [0,1].$$

Comprobamos finalmente que $T^4$ sí es contractiva, por lo que la proposición anterior nos permite deducir la existencia de un único punto fijo de $T$. En efecto:

$$|T^2(x)(t) - T^2(y)(t)| \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\,|T(x)(s) - T(y)(s)|\,ds \leq 2t\|x-y\|_\infty\,,$$

$$|T^3(x)(t) - T^3(y)(t)| \leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\,|T^2(x)(s) - T^2(y)(s)|\,ds \leq \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\|x-y\|_\infty\,,$$

$$\begin{aligned}|T^4(x)(t) - T^4(y)(t)| &\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\,|T^3(x)(s) - T^3(y)(s)|\,ds \\ &\leq \frac{2}{3}t^2\|x-y\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|x-y\|_\infty\,,\end{aligned}$$

luego $T^4$ es contractiva.

■

17. Demuestra el Teorema de Cauchy–Picard–Lindelöf usando un argumento de punto fijo.

*Solución:* El enunciado del teorema es el siguiente:

*Considérese el problema de valores iniciales*

$$(P)\left\{\begin{array}{l} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right. \quad ,$$

*donde* $F : D \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$*,* $D$ *es un dominio de* $\mathbb{R}^{N+1}$ *y* $(t_0, x_0) \in D$*. Si* $F(t,x)$ *es continua en las dos variables y localmente lipschitziana con respecto a la segunda,*[5] *entonces (P) admite una única solución* $x(t)$ *definida en un entorno de* $t_0$*.*

El problema (P) puede reescribirse en términos del problema integral equivalente

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s,x(s))\,ds\,.$$

[5]Es decir: si $D = I \times \Omega$, para cada $x \in \Omega$ existen una bola abierta $B(x,r)$ y una constante $L = L(x)$ tales que, si $y, z \in \Omega \cap B(x,r)$, entonces $\|f(y) - f(z)\| \leq L\|y-z\|$

Sean $a, b > 0$ tales que (cf. Ejercicio 7)

$$\mathcal{R} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\big\} \subset D\,,$$

$M \geq 0$ tal que

$$\|F(t,x)\| \leq M \quad \forall (t,x) \in \mathcal{R}\,,$$

y $\alpha \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Definimos

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq b\big\} \subseteq \mathcal{R}\,.$$

Sea $I \subseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ un entorno compacto de $t_0$ y consideremos el espacio de Banach $X = C(I, \mathbb{R}^N)$ dotado de la norma del máximo:

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in I}\{\|x(t)\|\}\,.$$

Consideremos también el siguiente subconjunto (métrico) de $X$:

$$A = \{x \in X : x(t_0) = x_0,\ \|x(t) - x_0\|_\infty \leq b\}\,.$$

Veamos que $A$ es cerrado (y, por tanto, completo). Sea para ello $\{x_n\}$ una sucesión de $A$ tal que $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x$ (nótese que esta convergencia es uniforme). Entonces

- $x \in X$,
- $\lim_{n\to\infty}\{x_n(t_0)\} = x_0 = x(t_0)$,
- para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces

  $$\|x(t) - x_0\|_\infty \leq \|x(t) - x_n(t)\|_\infty + \|x_n(t) - x_0\|_\infty < \varepsilon + b\,,$$

  luego $\|x(t) - x_0\|_\infty \leq b$.

Por tanto $x \in A$ y $A$ es cerrado, luego completo. Definimos ahora $T : A \to A$ como $T(x) = T_x : I \to \mathbb{R}^N$ con

$$T_x(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds\,.$$

Veamos que $T$ está bien definida:

(i) $T_x$ es continua por tratarse de una composición de funciones continuas.

(ii) $T_x(t_0) = x_0$.

(iii) $\|T_x(t) - x_0\|_\infty = \left\| \int_{t_0}^t F(s, x(s))\, ds \right\|_\infty \leq M\alpha \leq b$.

Luego $T_x \in A$. $T$ es, por tanto, una aplicación de un espacio métrico completo en sí mismo. Si conseguimos demostrar que $T$ es contractiva podremos aplicar el teorema de punto fijo de Banach para concluir la existencia de un único punto fijo de $T$, que a la postre será la solución que buscamos.

Sean $x_1, x_2 \in A$. Se tiene

$$\|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t (F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s)))\, ds \right\|$$
$$\leq \int_{t_0}^t \|F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))\|\, ds \leq L(x_0) \int_{t_0}^t \|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds$$
$$\leq L(x_0)\|x_1 - x_2\|_\infty |t - t_0|\,,$$

luego

$$\|T_{x_1} - T_{x_2}\|_\infty \leq L(x_0)\|x_1 - x_2\|_\infty \alpha\,.$$

Por consiguiente, si exigimos $L(x_0)\alpha < 1$ (basta con tomar $\alpha$ suficientemente pequeño) tendremos demostrada la contractividad de $T$, de donde se concluye que existe un único elemento $x \in A$ tal que $T_x = x$ o, lo que es lo mismo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))\, ds \quad \forall t \in I\,.$$

■

CAPÍTULO 8

# Análisis global de existencia y unicidad de soluciones

1. (a) Demuestra el siguiente principio de comparación de soluciones:

   *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y $f : D \to \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana en la segunda variable. Sean también $\varphi_1, \varphi_2$ dos soluciones de $x' = f(t,x)$ definidas en un intervalo abierto $I$ y $t_0 \in I$. Si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$, entonces $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ $\forall t \in I$.*

   (b) Si en el apartado anterior se sustituye la ecuación $x' = f(t,x)$ por $x'' = f(t,x)$, ¿se sigue cumpliendo el principio de comparación?

   (c) Demuestra que el problema de valores iniciales

   $$\begin{cases} x' = x^2 + x - 2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$ y que dicha solución admite límites en $\pm\infty$. Calcula dichos límites.

*Solución:* (a) Supongamos que existiese (un primer) $t_0 \leq t^\star \in I$ tal que $\varphi_1(t^\star) = \varphi_2(t^\star)$, de modo que $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ $\forall t < t^\star$. Al ser $f$ continua y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable, el teorema de Cauchy–Picard–Lindelöff garantiza la unicidad local de solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t^\star) = \varphi_1(t^\star) \end{cases},$$

luego la situación anterior no es posible.

(b) Si la ecuación es de segundo orden, el principio de comparación establecido en (a) ya no es válido. Un ejemplo sencillo viene dado por la ecuación del oscilador armónico $x'' + \omega^2 x = 0$, de la que es conocido que sus soluciones (combinaciones lineales de senos y cosenos) se cortan infinitas veces.

(c) En primer lugar observamos que los puntos de equilibrio de la ecuación son $x \equiv 1$ y $x \equiv -2$. Como $f$ es continua y localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable (es un polinomio) se tiene, por el principio de comparación de soluciones demostrado en (a), que la solución de nuestro problema de valores iniciales no puede cortar a ninguna otra solución de la ecuación (en particular a los puntos de equilibrio). En conclusión, nuestra solución no puede tener asíntotas y, por tanto, está definida en $\mathbb{R}$.

Para demostrar que existen los límites en $\pm\infty$ haremos uso de la siguiente

**Proposición** 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y localmente lipschitziana. Cualquier solución no constante de $x' = f(x)$ es estrictamente monótona.

De este modo, la solución $x(t)$ es estrictamente monótona (de hecho $x'(0) = -2 < 0$, luego $x(t)$ es estrictamente decreciente). Al ser $x(t)$ monótona y acotada, existe $\lim_{t\to\pm\infty}\{x(t)\}$.

Comprobemos que $\lim_{t\to+\infty}\{x(t)\} = -2$ (la comprobación de la propiedad $\lim_{t\to-\infty}\{x(t)\} = 1$ es análoga). Supongamos para ello que se cumpliera $\lim_{t\to+\infty}\{x(t)\} = k > -2$. Entonces debe satisfacerse $\lim_{t\to+\infty}\{x'(t)\} = 0$. Tomando entonces límites en la ecuación $x' = x^2 + x - 2$ obtenemos $0 = k^2 + k - 2$, de donde resulta $k = 1$ o bien $k = -2$, llegando así a una contradicción.

■

2. Demuestra el siguiente principio de comparación de soluciones de distintas ecuaciones diferenciales:

   *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y sean $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que*
$$F_1(t,x) < F_2(t,x) \quad \forall\,(t,x) \in D\,.$$

*Sea $\varphi_i$ una solución de $x' = F_i(t,x)$ definida en un intervalo abierto $I$ ($i = 1,2$) y sea $t_0 \in I$. Entonces, si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$ se tiene que*

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad t \in I\,.$$

*Solución:* Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existiese un primer instante $t_0 < t^\star \in I$ en el que $\varphi_1(t^\star) = \varphi_2(t^\star)$. Definimos entonces la siguiente *función distancia* entre ambas soluciones:

$$d(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t)\,.$$

Se cumple

$$d'(t^\star) = \varphi_2'(t^\star) - \varphi_1'(t^\star) = F_2(t^\star, \varphi_2(t^\star)) - F_1(t^\star, \varphi_1(t^\star)) > 0$$

por hipótesis, luego $d(t)$ es creciente en un entorno de $t^\star$. Por consiguiente, ha de existir $\varepsilon > 0$ tal que $t_0 < t^\star - \varepsilon < t^\star$ y

$$d(t^\star - \varepsilon) < d(t^\star) = 0\,.$$

Como $d(t_0) > 0$ y $d(t^\star - \varepsilon) < 0$, el teorema de Bolzano asegura la existencia de $t_1 \in (t_0, t^\star - \varepsilon)$ tal que $d(t_1) = 0$ o, lo que es lo mismo, $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$. Esto contradice el hecho de que $t^\star > t_1$ sea el primer instante posterior a $t_0$ en el que $\varphi_1$ y $\varphi_2$ toman el mismo valor.

■

3. Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua y globalmente lipschitziana con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Demuestra que la solución $x(t;y)$ de

   $$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = y \end{cases}$$

   está definida en $\mathbb{R}$.

   (b) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Se define $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

   $$P(y) = x(t_0; y)\,.$$

   Demuestra que $P$ es biyectiva.

*Solución:* (a) Como $f$ es continua y (en particular) localmente lipschitziana con respecto a $x$, tenemos garantizada la existencia local de una única solución $x(t)$ del problema de valores iniciales. Como $f$ es además globalmente lipschitziana en la segunda variable (con constante de Lipschitz $L > 0$) se verifica

$$\|f(t,x)\| \leq \|f(t,x) - f(t,0)\| + \|f(t,0)\| \leq L\|x\| + \|f(t,0)\| \,,$$

es decir, $f$ es sublineal. El resto del razonamiento lo hacemos por reducción al absurdo. Supongamos que la solución está definida en $I = (\omega_-, \omega_+)$ con $\omega_+ < \infty$ (el mismo argumento es válido para comprobar la prolongabilidad de la solución hacia la izquierda). Entonces habría de cumplirse

$$\lim_{t\to\omega_+,\ t<\omega_+} \{\|x(t)\|\} = \infty \,. \tag{8.1}$$

Reescribimos la ecuación en forma integral como

$$x(t) = y + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \,,$$

de donde resulta la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq \|y\| + \int_0^t \|f(s,x(s))\|\, ds \\ \leq \|y\| + \int_0^t \big(L\|x(s)\| + \|f(s,0)\|\big)\, ds \\ \leq \|y\| + \sup_{0\leq t<\omega_+} \{\|f(t,0)\|\}\, \omega_+ + L\int_0^t \|x(s)\|\, ds \,.\end{aligned}$$

Usando finalmente el lema de Gronwall obtenemos

$$\|x(t)\| \leq \Big(\|y\| + \sup_{0\leq t<\omega_+} \{\|f(t,0)\|\}\, \omega_+\Big)\, e^{L\omega_+} \,,$$

lo que demuestra que $x(t)$ es acotada. Pero esto es incompatible con la condición (8.1), luego ha de ser $\omega_+ = \infty$.

(b) Estudiemos en primer lugar la inyectividad. Para ello supongamos que $P(x_0) = P(y_0)$, es decir: $x(t_0; x_0) = x(t_0; y_0)$. Esta condición conduce necesariamente a que $x_0 = y_0$, pues en caso contrario se violaría la unicidad de solución en un entorno de $t_0$. Por otro lado, demostrar la sobreyectividad de $P$ equivale a encontrar $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(t_0; x_0) = v$, dado $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Para ello consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = v \end{cases},$$

del que sabemos (por (a)) que admite una única solución definida en $\mathbb{R}$. Si denotamos $x(t; t_0, v)$ dicha solución, bastará con tomar $x_0 = x(0; t_0, v)$.

■

4. Se considera la ecuación $x' = f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} -4 - x, & x \leq -1 \\ x(4 - x^2), & -1 < x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Se pide:

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, demostrar que existe una única solución de la ecuación que cumple $x(0) = x_0$, a la que denotemos $x(t; x_0)$.

(b) Demostrar que $x(t; x_0)$ está definida en $(-\infty, \infty)$ cualquiera que sea $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Solución:* (a) La unicidad (local) de solución está garantizada por el teorema de Cauchy–Picard–Lindelöff, ya que $f$ es continua y localmente lipschitziana (basta, por ejemplo, con observar que $f'$ es acotada).

(b) Los equilibrios de la ecuación son $x \equiv 4, x \equiv 0$ y $x \equiv -4$. Si elegimos $x_0 > 4$ y aplicamos el teorema de comparación del Ejercicio 1 (comparamos con la solución $x \equiv 4$), obtenemos que $x(t) > 4 \ \forall t \in I$. En este caso $f(x) = 4 - x$, que es globalmente lipschitziana. Esto nos permite concluir en virtud del Ejercicio 3 (a). El razonamiento es análogo si $x_0 < -4$, comparando en este caso con la solución $x \equiv -4$. Finalmente, si $x_0 \in (-4, 4)$ basta con aplicar el principio de comparación del Ejercicio 1 (a) como se hizo en el apartado (c) del mismo ejercicio.

■

5. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Admite el problema de valores iniciales
   $$\begin{cases} x' = \text{sen}(tx) \\ x(t_0) = x_0 > 0 \end{cases}$$
   una solución positiva definida en $\mathbb{R}$? La solución que pasa por $(1,1)$, ¿puede pasar por $(2,3)$? Prueba que la solución que pasa por $(0,2)$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

   (b) ¿Puede ser $x(t) = t^2$ una solución en $(0,1)$ de la ecuación
   $$x' = f(t,x)$$
   si $|f(t,x)| < 1$, con $t, x \in (0,1)$?

*Solución:* (a) La función $f(t,x) = \text{sen}(tx)$ es continua en las dos variables y localmente lipschitziana en la segunda, por lo que existe una única solución maximal del problema de valores iniciales. Además $f$ es sublineal: $|f(t,x)| \leq 1$, por lo que la solución está definida en $\mathbb{R}$.

Veamos que la solución ha de ser positiva. Si no lo fuese, tendría que existir $t^\star \in \mathbb{R}$ tal que $x(t^\star) = 0$. Entonces $x(t)$ resolvería el problema de valores iniciales
$$\begin{cases} x' = \text{sen}(tx) \\ x(t^\star) = 0 \end{cases}.$$
Pero la única solución de este problema es $x \equiv 0$, lo cual es absurdo porque $x(t_0) = x_0 > 0$ por hipótesis.

La solución que pasa por $(1,1)$ cumple
$$x(t) = 1 + \int_1^t \text{sen}(sx(s))\, ds\,,$$
por lo que
$$x(2) = 1 + \int_1^2 \text{sen}(sx(s))\, ds \leq 1 + 1 = 2\,.$$
En conclusión, la solución que pasa por $(1,1)$ NO puede pasar por $(2,3)$.

Finalmente demostramos que la solución que pasa por $(0, 2)$ tiene un mínimo local en $t = 0$. En primer lugar, es claro que $t = 0$ es un punto crítico de $x(t)$ ya que $x'(0) = \text{sen}(0) = 0$. Como además $x''(0) = x(0)\cos(0) = 2 > 0$, $x(t)$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

(b) NO. De serlo, se cumpliría $x'(t) = 2t = f(t, x)$ $\forall t \in (0, 1)$. Además, $|f(t, x)| = 2t < 1$ si y sólo si $0 < t < \frac{1}{2}$. Basta con elegir, por ejemplo, $t = \frac{3}{4}$ para observar que $f(t, x(t)) = 2t = \frac{3}{2} > 1$, lo que contradice la condición de crecimiento sobre $f$.

■

6. Se considera el problema de valores iniciales

$$x' = \frac{1}{t^2 + x^2}, \quad x(0) = x_0 \geq 1\,. \tag{8.2}$$

Se pide:

(a) Probar que existe una única solución $x(t)$ definida en $(-\infty, \infty)$.

(b) Demostrar que existen $\lim_{t\to\infty}\{x(t)\}$ y $\lim_{t\to-\infty}\{x(t)\}$.

(c) Encontrar acotaciones para dichos límites.

*Solución:* (a) Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(t, x) = \frac{1}{t^2 + x^2}\,.$$

La existencia de soluciones se deduce de la continuidad de $F(t, x)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ por medio del teorema de Cauchy–Peano. Por otro lado, la unicidad de solución maximal de (8.2) se sigue del teorema de Picard–Lindelöf, ya que $F$ es (en particular) de clase $C^1$ en la segunda variable y, por tanto, localmente lipschitziana. Fijado $x_0 \geq 1$, sea $I = (\omega_-, \omega_+)$ el intervalo maximal en el que está definida la solución $x(t)$ de (8.2) (el cual, por supuesto, ha de contener al punto $t_0 = 0$). Comprobemos que ha de ser $\omega_+ = \infty$ y $\omega_- = -\infty$. Observamos en primer lugar que $x(t)$ es estrictamente creciente, ya que $x' > 0$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Claramente $x(t) > x_0$ para todo $t > 0$, luego $t^2 + x^2 > t^2 + x_0^2 \geq t^2 + 1$ si $t > 0$. Entonces podemos comparar la ecuación de partida con $y' = \frac{1}{t^2+1}$. En efecto, la solución general de $y' = \frac{1}{t^2+1}$ viene dada por

$$y(t) = \arctan(t) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{8.3}$$

Entonces, al ser

$$\frac{1}{t^2+x^2} < \frac{1}{t^2+1} \quad \forall (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}\,,$$

podemos elegir $C = x_0 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, y concluir que

$$x(t) < \arctan(t) + x_0 + \varepsilon \quad \forall t \geq 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,$$

en virtud del principio de comparación del Ejercicio 2. Se deduce entonces que $x(t)$ no tiene asíntotas a la derecha de cero, luego ha de ser $\omega_+ = \infty$.[1] Comprobamos finalmente que $\omega_- = -\infty$. Podemos distinguir las dos siguientes situaciones:

- Si $x(t) > -1$ para todo $t < 0$, entonces es claro que $\omega_- = -\infty$.
- En caso contrario debe existir $t^*$ tal que $x(t^*) = -1$,[2] de modo que
$$x(t) < -1 \quad \forall t < t^*$$
en virtud del crecimiento estricto de $x(t)$. Se tiene
$$x(t)^2 > \lambda^2 \geq 1 \Longrightarrow t^2 + x^2 > t^2 + 1 \Longrightarrow F(t,x) < \frac{1}{t^2+1} \tag{8.5}$$
para todo $(t,x) \in (\omega_-, t^*) \times \mathbb{R}$. Usamos el siguiente resultado:

[1]Nótese que, una vez comprobado que la solución $x(t)$ no tiene asíntotas, cabría aún la posibilidad de que alcanzara en tiempo finito la frontera del dominio $D$ en que está definida la ecuación, lo que impediría su prolongación hasta $\infty$. En otras palabras, podría suceder lo siguiente:

$$\exists\, \{t_n\} \to \omega_+ \text{ tal que } \{x(t_n)\} \to \overline{x} \text{ con } (\omega_+, \overline{x}) \in \mathrm{Fr}(D)\,. \tag{8.4}$$

No es este el caso aquí, ya que el dominio de nuestra ecuación es $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, cuya frontera está constituida únicamente por el origen de coordenadas. De darse (8.4) habría de ser $\omega_+ = 0$, lo que es imposible puesto que $x(t)$ ha de estar definida en un intervalo abierto que contenga al punto $t_0 = 0$ en que se plantea el dato inicial

[2]Recuérdese que $x(0) \geq 1$

**Proposición** 7. Sean $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto y $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que

$$F_1(t,x) < F_2(t,x) \quad \forall (t,x) \in D\,.$$

Sean también $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$ soluciones respectivas de $x' = F_1(t,x)$ y $x' = F_2(t,x)$. Entonces existe a lo más un punto $\bar{t}$ para el que $\varphi_1(\bar{t}) = \varphi_2(\bar{t})$.

**Demostración.** Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existen $t_1 < t_2$ tales que

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)\,, \quad \varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2)\,.$$

Definimos

$$d(t) := \varphi_2(t) - \varphi_1(t)\,.$$

Claramente $d(t_1) = d(t_2) = 0$. Además

$$d'(t_1) = \varphi_2'(t_1) - \varphi_1'(t_1) = F_2(t_1, \varphi_2(t_1)) - F_1(t_1, \varphi_1(t_1)) > 0\,,$$
$$d'(t_2) = \varphi_2'(t_2) - \varphi_1'(t_2) = F_2(t_2, \varphi_2(t_2)) - F_1(t_2, \varphi_1(t_2)) > 0\,,$$

lo que contradice el hecho de que $t_1$ y $t_2$ sean puntos consecutivos en los que $\varphi_1$ y $\varphi_2$ coinciden.

∎

Eligiendo ahora $C = -\arctan(t^*) - 1 - \delta$, con $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño en (8.3), se tiene

$$y(t^*) = -1 - \delta < -1 = x(t^\star)\,.$$

La cuestión a responder es entonces: ¿qué puede ocurrir a la izquierda de $t^*$? La disyuntiva es clara: o bien

$$\arctan(t) - \arctan(t^*) - 1 - \delta = y(t) \leq x(t) \quad \text{en } (\omega_-, t^*)\,,$$

en cuyo caso concluimos directamente que $\omega_- = -\infty$, o bien existe un único punto $t_1$ (según la Proposición 7) en el que $x(t_1) = y(t_1)$ y las gráficas de $x(t)$ e $y(t)$ intercambian su posición relativa, es decir, $x(t) < y(t)$ si $t < t_1$ y $x(t) > y(t)$ si $t > t_1$. La segunda alternativa no puede darse. De ser así, podríamos valernos de (8.5) para aplicar el principio de comparación del Ejercicio 2, el cual nos permitiría deducir que, por ser $x(t_2) < y(t_2)$ para todo $t_2 < t_1$ (porque las soluciones no pueden cortarse dos veces), entonces $x(t) < y(t)$ para todo $t \geq t_2$, lo que contradice el hecho de que, por ejemplo, $x(t_1) = y(t_1)$.

(b) y (c) Hemos demostrado que

$$x_0 \leq x(t) < \arctan(t) + x_0 + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} + x_0 + \varepsilon \quad \forall t \geq 0\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,$$

luego $x(t)$ es estrictamente creciente y está acotada superiormente. Por tanto, existe $\lim_{t\to\infty}\{x(t)\}$ y

$$1 \leq x_0 \leq \lim_{t\to\infty}\{x(t)\} \leq \frac{\pi}{2} + x_0\,.$$

Por otro lado, hemos comprobado también que

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} - x_0 &\leq -\frac{\pi}{2} - x_0 - \arctan(t^*) \\ &\leq \arctan(t) - \arctan(t^\star) - 1 - \delta \\ &< x(t) \leq -1 \end{aligned}$$

para cualesquiera $t \leq t^*$ y $\delta > 0$, luego existe $\lim_{t\to-\infty}\{x(t)\}$ y

$$-\frac{\pi}{2} - x_0 \leq \lim_{t\to-\infty}\{x(t)\} \leq -1\,.$$

■

7. Se considera la ecuación $x' = \operatorname{sen}(x^2)$. Estudia la existencia, unicidad y prolongabilidad del correspondiente problema de valores iniciales y demuestra que todas las soluciones de esta ecuación son acotadas.

*Solución:* La función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, en particular continua y localmente lipschitziana. Por tanto, cualquier problema de valores iniciales asociado a la ecuación $x' = f(x)$ admite una única solución definida en un entorno del dato inicial. Además, como $f$ es sublineal ($|f(x)| \leq 1$) la solución es prolongable a $\mathbb{R}$. Finalmente, los puntos de equilibrio de la ecuación son

$$x \equiv \pm\sqrt{k\pi}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

por lo que todas las soluciones de nuestra ecuación están acotadas.

■

8. La solución de

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = y^2, & x(0) = 1 \\ y' = \operatorname{sen}(x), & y(0) = 1 \end{array}\right. ,$$

¿está definida en $\mathbb{R}$?

*Solución:* SI. Es evidente que $-1 \leq y' = \operatorname{sen}(x) \leq 1$. Integrando esta cadena de desigualdades entre 0 y $t > 0$ obtenemos

$$-t \leq y(t) - 1 \leq t \Longleftrightarrow 1 - t \leq y(t) \leq 1 + t\,,$$

con lo que concluimos que $y(t)$ está definida hasta $+\infty$. Análogamente, si integramos entre $t < 0$ y 0 podemos afirmar que $y(t)$ también está definida hasta $-\infty$. Por otro lado, usando la primera ecuación se obtiene

$$0 \leq x'(t) = y(t)^2 \leq (1+t)^2\,, \quad t > 0\,.$$

Integrando entre 0 y $t > 0$ se obtiene

$$0 \leq x(t) - 1 \leq \frac{1}{3}(1+t)^3 \Longleftrightarrow 1 \leq x(t) \leq 1 + \frac{1}{3}(1+t)^3\,,$$

luego $x(t)$ está definida hasta $+\infty$. El caso de prolongación hasta $-\infty$ es análogo.

■

9. ¿Existe una única solución del problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \operatorname{máx}\{t, x\} \\ x(0) = 0 \end{array}\right.$$

definida en $(-\infty, \infty)$?

*Solución:* La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x) := \operatorname{máx}\{t, x\} = \frac{1}{2}(t+x) + \frac{1}{2}|t - x|$$

es continua. Además

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &\leq \left| \frac{t+x}{2} + \frac{|t-x|}{2} - \frac{t+y}{2} - \frac{|t-y|}{2} \right| \\
&\leq \frac{|x-y|}{2} + \left| \frac{|t-x|}{2} - \frac{|t-y|}{2} \right| \\
&\leq \frac{|x-y|}{2} + \left| \frac{t-x}{2} - \frac{t-y}{2} \right| = |x-y|\,,
\end{aligned}$$

luego $f$ es globalmente lipschitziana en la segunda variable y, por tanto, existe una única solución definida en $\mathbb{R}$ (ver Ejercicio 3 (a)) .

■

10. Decide si cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales tiene su solución definida en el intervalo que se indica:

    (a) $x' = e^x,\ x(0) = 1$ en $[0, \infty)$.

    (b) $x' = \log(x),\ x(1) = \pi$ en $[1, \infty)$.

    (c) $x''' + \operatorname{sen}(t)x - \log(t) = 1,\ x(1) = x'(1) = x''(1) = 7$ en $(0, \infty)$.

*Solución:* (a) Se trata de una ecuación con las variables separadas. Al resolverla obtenemos

$$x(t) = -\log\left(-t + \frac{1}{e}\right),$$

cuyo intervalo de definición es $(-\infty, \frac{1}{e})$.

(b) El único punto de equilibrio de la ecuación es $x \equiv 1$. Como además $x(1) = \pi$, el principio de comparación del Ejercicio 1 nos permite concluir que $x(t) > 1\ \forall t \in (\omega_-, \omega_+)$. Asimismo, la condición $\log(x) \leq x\ \forall x > 1$ asegura que el segundo miembro es sublineal, por lo que la solución está definida en $\mathbb{R}$.

(c) Al reescribir la ecuación en forma vectorial obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\operatorname{sen}(t)x_1 + \log(t) + 1 \end{pmatrix} = F(t, x_1, x_2, x_3)\,.$$

Claramente $F(t,x)$ es continua en $(0,\infty) \times \mathbb{R}^3$. Además, se tiene

$$\begin{aligned}
&\|F(t,x_1,x_2,x_3) - F(t,\tilde{x_1},\tilde{x_2},\tilde{x_3})\|_1 \\
&\qquad = \|(x_2-\tilde{x_2}, x_3-\tilde{x_3}, -\operatorname{sen}(t)(x_1-\tilde{x_1}))^T\|_1 \\
&\qquad = |x_2-\tilde{x_2}| + |x_3-\tilde{x_3}| + |\operatorname{sen}(t)||x_1-\tilde{x_1}| \\
&\qquad\qquad \leq \|(x_1,x_2,x_3)^T - (\tilde{x_1},\tilde{x_2},\tilde{x_3})^T\|_1 ,
\end{aligned}$$

luego $F(t,x)$ es globalmente lipschitziana en la segunda variable. Por consiguiente (cf. Ejercicio 3 (a)), la única solución del problema de valores iniciales está definida en $(0,\infty)$.

■

11. El intervalo maximal de definición de la solución $x(t) = \sqrt{1-t}$ del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2t-2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

es $(-\infty,1)$ y $\lim_{t\to 1^-}\{x(y)\} = 0$. ¿Hay contradicción con los resultados de prolongación conocidos?

*Solución:* NO. Dada $f(t,x)$ continua en las dos variables y localmente lipschitziana en la segunda, podemos prolongar una solución de $x' = f(t,x)$ bien hasta que explote (es decir, hasta topar con una asíntota) bien hasta que esta alcance la frontera del dominio de $f$. En el caso que nos trae, el dominio de $f(t,x) = \frac{x}{2t-2}$ es $D(f) = (\mathbb{R}\setminus\{1\}) \times \mathbb{R}$. Para hablar de solución se requiere que el conjunto en el que está definida sea un abierto conexo, luego consideraremos $D_1 = (-\infty,1) \times \mathbb{R}$ en detrimento de $D_2 = (1,\infty) \times \mathbb{R}$, con el fin de garantizar la pertenencia al mismo del dato inicial. En todo caso, la condición $\lim_{t\to 1^-}\{x(t)\} = 0$ en $D_1$ permite concluir que la solución ha alcanzado la frontera de $D_1$ (en efecto, $(1,0) \in \mathrm{Fr}(D_1)$), por lo que es maximal.

■

12. (a) Prueba que toda solución de la ecuación del péndulo con rozamiento

$$mx'' + bx' + \frac{mg}{l}\operatorname{sen}(x) = 0$$

está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Prueba que la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases},$$

con $\mu > 0$, está definida en $[0, \infty)$.

*Solución:* (a) Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{b}{m}x_2 - \frac{g}{l}\operatorname{sen}(x_1) \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, x_2) - f(\tilde{x_1}, \tilde{x_2})\|_1 \\ &\quad = |x_2 - \tilde{x_2}| + \left|\frac{b}{m}(\tilde{x_2} - x_2) + \frac{g}{l}(\operatorname{sen}(\tilde{x_1}) - \operatorname{sen}(x_1))\right| \\ &\quad \leq \left(1 + \frac{b}{m}\right)|x_2 - \tilde{x_2}| + \frac{g}{l}|\operatorname{sen}(\tilde{x_1}) - \operatorname{sen}(x_1)| \\ &\quad \leq \left(1 + \frac{b}{m}\right)|x_2 - \tilde{x_2}| + \frac{g}{l}|x_1 - \tilde{x_1}| \\ &\quad \leq L\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \end{pmatrix}\right\|_1, \end{aligned}$$

con

$$L = \text{máx}\left\{1 + \frac{b}{m}, \frac{g}{l}\right\}.$$

Luego $f$ es globalmente lipschitziana en $(x_1, x_2)$, por lo que toda solución de la ecuación del péndulo con rozamiento está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Definimos la función (de energía)

$$E(t) := x(t)^2 + x'(t)^2\,,$$

que no es otra cosa que el cuadrado de la norma euclídea del vector $(x_1, x_2)$. Se tiene

$$E'(t) = -2\mu x'(t)^2(x(t)^2 - 1)\,, \quad t \in [0, \omega_+)\,,$$

luego

$$E'(t) \leq 2\mu x'(t)^2 \leq 2\mu E(t)\,.$$

Integrando entre 0 y $t$:

$$E(t) \leq x_0^2 + v_0^2 + 2\mu \int_0^t E(s)\, ds\,.$$

Por el lema de Gronwall:

$$0 \leq E(t) \leq (x_0^2 + v_0^2)\, e^{2\mu t}\,, \quad t \in [0, \omega_+)\,.$$

Por tanto,

$$0 \leq \limsup_{t \to \omega_+} \{E(t)\} \leq (x_0^2 + v_0^2)\, e^{2\mu\omega_+}\,.$$

Finalmente, si $\omega_+$ fuese finito también lo sería $\limsup_{t\to\omega_+}\{E(t)\}$, lo cual se revela absurdo sin más que tener en cuenta que

$$\lim_{t\to\omega_+} \left\{\|(x_1, x_2)\|_2^2\right\} = \lim_{t\to\omega_+} \left\{x(t)^2 + x'(t)^2\right\} = \infty\,.$$

■

CAPÍTULO 9

# Dependencia continua y diferenciable respecto de datos iniciales y parámetros. Estabilidad

1. Decide de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   (a) Sea $x_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \geq 0$, la solución de

   $$\begin{cases} x'' + \varepsilon x' + x^3 = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} .$$

   Entonces $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \{x_\varepsilon(t)\} = x_0(t) \quad \text{para cada } t \geq 0 .$$

   (b) Sea $x_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \geq 0$, la solución de

   $$\begin{cases} \varepsilon x' + x^3 = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} .$$

   Entonces $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y

   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \{x_\varepsilon(t)\} = 0 \quad \text{para cada } t \geq 0 .$$

   (c) Sea $x_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la solución de

   $$\begin{cases} x' + \varepsilon \operatorname{sen}(x) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} .$$

Entonces $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0,1]$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{x_\varepsilon''(t)\} = 0 \quad \text{uniformemente en } [0,1]\,.$$

*Solución:* (a) VERDADERA. Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\varepsilon x_2 - x_1^3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Claramente, las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

son continuas $\forall (x_1, x_2, \epsilon) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_0^+$. Luego la solución general es de clase $C^1$ con respecto al parámetro $\varepsilon$ y, en particular,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{x_\varepsilon(t)\} = x_0(t) \quad \forall\, t \geq 0\,.$$

Veamos que $x_\varepsilon(t)$ está definida en $[0,\infty)$. Para ello definimos la función (energía) $E : I \to \mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$E(t) := \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4\,,$$

donde $I = [0, \omega_+)$ es el intervalo maximal de existencia de $x(t)$. Tenemos

$$E'(t) = -\varepsilon x'(t)^2 \leq 0\,,$$

lo que implica que $E(t)$ es decreciente, luego

$$0 < \frac{1}{2}x'(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4 \leq E(0) = \frac{1}{4} \quad \forall t \in I\,.$$

Por tanto, $x(t)$ y $x'(t)$ son acotadas y, consecuentemente,

$$\|(x(t), x'(t))\|_1 = |x(t)| + |x'(t)|$$

es acotada. Entonces, por el teorema de prolongación $\omega_+ = \infty$.

(b) FALSA. La ecuación puede integrarse mediante el método de separación de variables, en virtud del cual obtenemos

$$x_\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2t}}\,,$$

que está definida en $[0, \infty)$. Al pasar al límite se concluye que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \{x_\varepsilon(t)\} = 0 \quad \forall t > 0\,,$$

pero no en $t = 0$.

(c) VERDADERA. La función $f(t, x, \varepsilon) = -\varepsilon \operatorname{sen}(x)$ es sublineal para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}$ fijo (aunque arbitrario), ya que $|f(t, x, \varepsilon)| \leq \varepsilon$. Por tanto, $x_\varepsilon(t)$ está definida en $\mathbb{R}$ para cualquier valor de $\varepsilon$. Además, se tiene

$$0 \leq |x_\varepsilon''| = |-\varepsilon \cos(x_\varepsilon) x_\varepsilon'| \leq |\varepsilon||x_\varepsilon'| = |\varepsilon||-\varepsilon \operatorname{sen}(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon^2\,,$$

lo que implica la convergencia uniforme de $\{x_\varepsilon''(t)\}$ hacia cero cuando $\varepsilon \to 0$. También podría haberse abordado el problema de forma directa, resolviendo la ecuación diferencial por el método de variables separadas. En efecto, la única solución del problema de valores iniciales es

$$x_\varepsilon(t) = 2 \arctan\left( \tan\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\varepsilon t} \right).$$

A partir de esta expresión las conclusiones son inmediatas.

■

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase uno y $T$–periódica ($T > 0$) en la variable $t$, es decir:

$$F(t, x) = F(t + T, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotemos $x(t; x_0)$ la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, con $x_1 < x_2$, tales que

$$F(t, x_1) > 0\,, \quad F(t, x_2) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{9.1}$$

Se pide:

(a) Probar que la función $P : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$P(x_0) = x(T; x_0)$$

está bien definida y es continua.

(b) Demostrar que existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

(c) Deducir que la solución $x(t; x^*)$ es una función $T$–periódica.

*Solución:* (a) Como $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, en particular es localmente lipschitziana, luego el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal. Además, el hecho de que $x_0 \in [x_1, x_2]$ unido a la hipótesis (9.1) garantiza que dicha solución está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular para $t = T$.[1] Consecuentemente, la aplicación $P$ está bien definida. La continuidad de $P$ es una aplicación inmediata del teorema de dependencia continua de la solución respecto de las condiciones iniciales.

(b) Consideramos la función $Q : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$Q(x) := P(x) - x\,.$$

Claramente $Q$ es continua en función de lo establecido en (a). Demostraremos entonces que

$$Q(x_1) = P(x_1) - x_1 > 0\,, \quad Q(x_2) = P(x_2) - x_2 < 0\,, \tag{9.2}$$

en cuyo caso podríamos aplicar el teorema de Bolzano para concluir la existencia de $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $0 = Q(x^*) = P(x^*) - x^*$. Basta entonces con probar (9.2). Distinguimos para ello cuatro situaciones.

(i) $x(0) = x_0 > x_1$. Supongamos que existiera un primer punto $t_1 > 0$ en el que se alcanzase $x_1$ (es decir, $x(t_1) = x_1$). En ese caso se tendría $x'(t_1) \leq 0$ porque $x(t)$ tiene que decrecer para

[1] En caso contrario, $x(t; x_0)$ tendría que desarrollar una asíntota en tiempo finito. Para que esto ocurriese, la solución tendría que *escapar* a través de $x_1$ (decreciendo) o de $x_2$ (creciendo), y ambos comportamientos se oponen a lo establecido en la condición (9.1)

alcanzar $x_1$, luego $x'(t_1) = F(t_1, x(t_1)) = F(t_1, x_1) > 0$ (por hipótesis), lo cual es contradictorio. La contradicción viene de suponer que $x(t)$ corta a $x_1$. Ha de ser, por tanto, $x(t) > x_1$ para todo $t \geq 0$.[2]

(ii) $x(0) = x_0 < x_2$. Razonamos como en el apartado anterior. Supongamos ahora que $x(t)$ corta a $x_2$ (es decir, que existe $t_2 > 0$ tal que $x(t_2) = x_2$). En tal caso ha de ser $x'(t_2) > 0$, pero por otro lado $x'(t_2) = F(t_2, x(t_2)) = F(t_2, x_2) < 0$ (por hipótesis), lo que da lugar a una contradicción. Por tanto, $x(t) < x_2$ para todo $t \geq 0$.

(iii) $x(0) = x_0 = x_1$. En este caso

$$x'(0) = F(0, x(0)) = F(0, x_0) = F(0, x_1) > 0$$

y es válida la misma discusión que en (a).

(iv) $x(0) = x_0 = x_2$. En este caso

$$x'(0) = F(0, x(0)) = F(0, x_0) = F(0, x_2) < 0$$

y es válida la misma discusión que en (b).

(c) Las funciones $x(t; x^*)$ y $x(t+T; x^*)$ resuelven la ecuación diferencial $x' = F(t, x)$ y satisfacen la misma condición inicial. En efecto:

$$\begin{aligned} x'(t+T; x^*) = F(t+T, x(t+T)) = F(t, x(t+T))\,, \\ x(t=0) = x(T; x^*) = x^*\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $x^*$ es un punto fijo de $P$ según lo demostrado en (b). Entonces, por el teorema de existencia y unicidad ha de ocurrir que

$$x(t; x^*) = x(t+T; x^*) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

es decir, $x(t; x^*)$ es $T$–periódica.

■

[2] Obsérvese que no podemos aplicar el principio de comparación de soluciones del Ejercicio 1 del capítulo anterior porque $x(t) \equiv x_1$ no es una solución de la ecuación diferencial

3. Dado $\varepsilon > 0$, sea $x(t;\varepsilon)$ la solución maximal del problema de valores iniciales
$$\begin{cases} \varepsilon x' = x^2 + (1-\varepsilon)t \\ x(0) = 1 \end{cases} .$$

   (a) Prueba que, para todo $T > 0$ y todo $s \in (0,1)$, se verifica
$$\lim_{\varepsilon \to 1} \{x_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{1-t}$$
   uniformemente en $[-T, s]$.

   (b) Calcula $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;1)$.

   (c) ¿Se puede aplicar el teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros para calcular $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)$?

*Solución:* (a) Para $\varepsilon = 1$ el problema de valores iniciales a resolver es
$$x' = x^2 \,, \quad x(0) = 1 \,,$$
cuya única solución $x(t) = \frac{1}{1-t}$ está definida en el intervalo $(-\infty, 1)$. Por el teorema de continuidad de la solución con respecto a parámetros se tiene que
$$\lim_{\varepsilon \to 1} \{x_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{1-t}$$
uniformemente en compactos de $(-\infty, 1)$, lo que permite concluir la prueba.

(b) Denotemos $\xi(t) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;1)$ y $F(t,x,\varepsilon) = \frac{x^2}{\varepsilon} + \big(\frac{1}{\varepsilon} - 1\big)t$, de modo que $x' = F(t,x,\varepsilon)$. Planteamos el problema variacional asociado
$$\xi'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t; x(t;1), 1)\, \xi(t) + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(t; x(t;1), 1) \,, \quad \xi(0) = 0 \,,$$
que en nuestro caso es
$$\xi'(t) = \Big(\frac{2}{1-t}\Big)\, \xi(t) + \frac{t^2 - t - 1}{(1-t)^2} \,, \quad \xi(0) = 0 \,.$$
La única solución de este problema (lineal no homogéneo) es
$$\xi(t) = \frac{t}{(1-t)^2} \left( \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - 1 \right) .$$

(c) NO, ya que $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}$ no están definidas en $\varepsilon = 0$.

$\blacksquare$

4. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sea $x(t;\varepsilon)$ la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = (1+\varepsilon)x - \varepsilon x^2 - 1 \\ x(0) = 2 \end{cases} .$$

Se pide:

(a) Demostrar que si $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $x(t;\varepsilon)$ está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Probar que para todo $T > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $-\varepsilon_0 < \varepsilon < 0$, entonces $x(t;\varepsilon)$ está definida en $[0, T]$.

(c) Calcular $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t;0)$.

(Junio 1995)

*Solución:* (a) Los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial son aquellos que satisfacen $(1+\varepsilon)x - \varepsilon x^2 - 1 = 0$, a saber:

$$x = \frac{1 + \varepsilon \pm |\varepsilon - 1|}{2\varepsilon} .$$

Si consideramos $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2}]$, los puntos de equilibrio son entonces

$$x \equiv 1 , \quad x \equiv \frac{1}{\varepsilon} \in [2, \infty] .$$

Por tanto, si $\varepsilon > 0$ se tiene

$$1 < x(t;\varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall t \in (\omega_-, \omega_+) = I ,$$

es decir, la solución de nuestro problema de valores iniciales está atrapada entre dos soluciones constantes, luego $I = \mathbb{R}$. Si por el contrario $\varepsilon = 0$, el problema a resolver es entonces

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ x(0) = 2 \end{cases} ,$$

cuya única solución $x(t) = 1 + e^t$ está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Es una aplicación directa del teorema de dependencia continua de la solución respecto de parámetros, ya que

$$F(t, x, \varepsilon) = (1 + \varepsilon)x - \varepsilon x^2 - 1$$

es continua y el problema de valores iniciales admite una única solución maximal para $(t_0, x_0, \varepsilon_0) = (0, 2, 0)$ (esta solución fue calculada en (a), donde además se apuntó que el intervalo maximal de definición de la misma es $\mathbb{R}$).

(c) Denotemos $\xi(t) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t; 0)$. El problema variacional asociado es

$$\begin{cases} \xi'(t) = x(t; 0) + \xi(t) - x(t; 0)^2 = \xi - e^t - e^{2t} \\ \xi(0) = 0 \end{cases},$$

cuya única solución viene dada por

$$\xi(t) = (1 - t - e^t)e^t \,.$$

■

5. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ x_2' = -x_1 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)x_2 \end{cases}.$$

Pasando a coordenadas polares, estudia las propiedades de estabilidad del origen segun los valores de $\varepsilon$.

*Solución:* Denotamos

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t; x^0) \\ x_2(t; x^0) \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Es claro que el par $(x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0)$ resuelve el sistema con $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$. La estabilidad del origen significa que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left\| x^0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Longrightarrow \left\| x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \,.$$

O bien, en términos de las coordenadas polares $x_1(t) = \rho(t)\cos(\theta(t))$, $x_2(t) = \rho(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t))$:

$$\rho(0) < \delta \Longrightarrow \rho(t) < \varepsilon \quad \forall t > 0\,.$$

Nuestro sistema puede reescribirse de la siguiente forma en coordenadas polares $(\rho(t), \theta(t))$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' \cos(\theta) - \rho \operatorname{sen}(\theta)\theta' = \rho[\operatorname{sen}(\theta) + \varepsilon\rho^2 \cos(\theta)] \\ \rho' \operatorname{sen}(\theta) + \rho \cos(\theta)\theta' = -\rho[\cos(\theta) - \varepsilon\rho^2 \operatorname{sen}(\theta)] \end{array} \right. .$$

Multiplicando la primera ecuación por $\cos(\theta(t))$ y la segunda por $\operatorname{sen}(\theta(t))$ y sumando ambas obtenemos

$$\rho'(t) = \varepsilon\rho(t)^3 . \tag{9.3}$$

Si ahora multiplicamos la primera ecuación por $-\operatorname{sen}(\theta(t))$, la segunda por $\cos(\theta(t))$ y las sumamos, obtenemos

$$\rho(t)\theta'(t) = -\rho(t) . \tag{9.4}$$

De (9.4) se obtiene $\theta' \equiv -1$, es decir, $\theta(t) = \theta_0 - t$. Un análisis simple de la ecuación (9.3) con dato inicial $\rho(0) = \rho_0$ nos permite concluir que la única solución del correspondiente problema de valores iniciales es

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - 2\varepsilon\rho_0^2 t}} . \tag{9.5}$$

Distinguimos los siguientes casos:

(a) $\varepsilon > 0$. El denominador de (9.5) se anula en $t = \frac{1}{2\varepsilon\rho_0^2}$, luego $\rho(t)$ está definida en $[0, \frac{1}{2\varepsilon\rho_0^2})$. Por tanto, si $\varepsilon > 0$ no puede hablarse de estabilidad.[3]

(b) $\varepsilon = 0$. En este caso se tiene $\rho(t) \equiv \rho_0$ y, por tanto, la solución trivial es estable pero no asintóticamente estable (basta con elegir $\delta = \varepsilon$ en la definición de estabilidad).

(c) $\varepsilon < 0$. En este caso $\rho(t) < \rho_0$, luego el origen es estable. Además $\{\rho(t)\} \to 0$ cuando $t \to \infty$, lo cual significa que

$$\left\{ \left\| x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \right\} = \{\|x(t)\|\} = \{\rho(t)\} \to 0$$

cuando $t \to \infty$. Por consiguiente, la solución trivial es asintóticamente estable.

[3]Lo cual no significa que la solución trivial sea inestable, sino que no tiene sentido discutir la estabilidad de la misma porque no está globalmente definida

■

6. Se considera la ecuación escalar autónoma

$$x' = -(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_n),$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ con $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ y $n$ es impar. Denotemos $x(t; x_0)$ la solución de la ecuación que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

(a) Demuestra que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, $x(t; x_0)$ es prolongable hasta $\infty$.

(b) Demuestra que existe el límite cuando $t \to \infty$ y es finito para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

(c) Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

(d) Esboza la gráfica de las soluciones.

(Febrero 1989)

*Solución:* (a) Claramente $f(x) = -(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_n)$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ (en particular, localmente lipschitziana), por lo que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución local. Distinguimos los siguientes casos:

(i) Si $x_0 \in (p_i, p_{i+1})$ para cualquier $1 \leq i \leq n - 1$, se tiene que $p_i < x(t; x_0) < p_{i+1}$ para todo $t \in I = (\omega_-, \omega_+)$ (cf. Ejercicio 1 del capítulo anterior). Luego la solución $x(t; x_0)$ es prolongable a $\mathbb{R}$ por estar acotada en una banda.[4]

[4]Este argumento ha sido empleado en varias ocasiones con anterioridad

(ii) Si $x_0 > p_n$ se concluye, por la misma razón que en (i), que $x(t;x_0) > p_n$ para todo $t \in I$. Además, en virtud de la definición de $f(x)$ se sabe que $x'(t;x_0) < 0$ para todo $t \in I$, luego $p_n < x(t;x_0) < x_0$ para todo $t \in (t_0, \omega_+)$. Si fuese $\omega_+ < \infty$, habría de existir una sucesión $\{t_n\} \to \omega_+$ de modo que $\{\|x(t_n;x_0)\|\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$, lo que contradice el hecho de que $x(t;x_0)$ es acotada.

(iii) Si $x_0 < p_1$ entonces $x(t;x_0) < p_1$ para todo $t \in I$. Usando nuevamente la definición de $f(x)$ y teniendo en cuenta que $n$ es impar, se deduce que $x'(t;x_0) > 0$ para todo $t \in I$, luego $x_0 < x(t;x_0) < p_1$ para todo $t \in (t_0, \omega_+)$. Razonando como en (ii) se concluye que ha de ser $\omega_+ = \infty$.

(b) Hacemos la misma distinción que en el apartado anterior:

(i) Si $x_0 \in (p_i, p_{i+1})$ para cualquier $1 \leq i \leq n-1$, sabemos por (a) que la solución $x(t;x_0)$ es acotada. Para comprobar que es también monótona observamos que su derivada

$$x'(t;x_0) = -(x-p_1)\ldots(x-p_{i-1})(x-p_i)(x-p_{i+1})\ldots(x-p_n)$$

no cambia de signo. En efecto: $\text{signo}(x'(t;x_0)) = (-1)^{n-i}$, por lo que $x(t;x_0)$ es monótona y acotada.

(ii) Si $x_0 > p_n$, sabemos que $p_n < x(t;x_0) < x_0$ y $x'(t;x_0) < 0$, por lo que $x(t;x_0)$ es decreciente y acotada. Por consiguiente, existe $\text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\}$ y $p_n \leq \text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\} < x_0$.

(iii) Si $x_0 < p_1$, sabemos que $x_0 < x(t;x_0) < p_1$ y $x'(t;x_0) > 0$, por lo que $x(t;x_0)$ es creciente y acotada. Por consiguiente, existe $\text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\}$ y $x_0 < \text{lím}_{t\to\infty}\{x(t;x_0)\} \leq p_1$.

(c) Usamos el primer método de Lyapunov. Para ello calculamos en primer lugar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(x-p_2)(x-p_3)\ldots(x-p_n)$$
$$-(x-p_1)(x-p_3)\ldots(x-p_n) - \ldots (x-p_1)(x-p_1)\ldots(x-p_{n-1})\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_i) = -(p_i-p_1)(p_i-p_2)\ldots(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})\ldots(p_i-p_n)\,,$$

de donde se desprende que

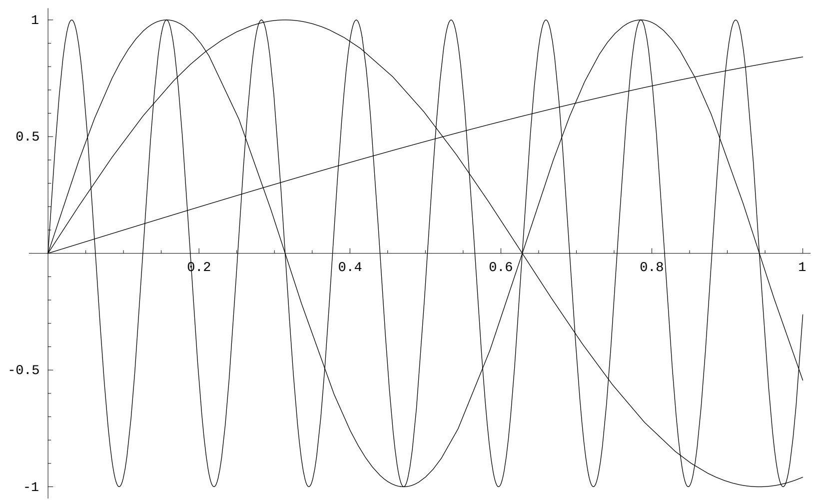
$$\text{signo}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_i)\right) = (-1)^{n-i+1}\,.$$

Finalmente, como $n$ es impar por hipótesis, se tiene que:

(i) Si $i$ es par, $p_i$ es inestable.

(ii) Si $i$ es impar, $p_i$ es asintóticamente estable.

(d) El comportamiento de las soluciones viene representado en la siguiente figura:




■

7. Se considera la ecuación

$$x'' + g(x) = 0\,,$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz–continua. Sea $p \in \mathbb{R}$ un punto de equilibrio aislado tal que la función $G(x) = \int_0^x g(z)\,dz$ alcanza en $p$ un máximo local estricto. Prueba que $p$ es un punto de equilibrio inestable.

*Solución:* Reescrita en forma de sistema, la ecuación $x'' + g(x) = 0$ se lee

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g(x) \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,.$$

Como $(p, 0)$ es un punto de equilibrio, ha de ser $g(p) = 0$. Para estudiar la estabilidad de este punto construimos la matriz Jacobiana

$$J[F](p,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(p) & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm\sqrt{-g'(p)}$. Finalmente, como $G(x)$ alcanza en $p$ un máximo local estricto por hipótesis, ha de verificarse[5]

$$g'(p) = G''(p) < 0\,,$$

luego

$$\mu_p = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(J[F](p,0))\} > 0\,,$$

lo que indica que el punto de equilibrio $(p, 0)$ es inestable conforme al primer método de Lyapunov.

■

8. Encuentra dos funciones $a, b \in C(\mathbb{R})$ tales que la ecuación lineal escalar $x' = a(t)x$ sea asintóticamente estable, $x' = (a(t) + b(t))x$ sea inestable y además

$$\lim_{t\to\infty}\{b(t)\} = 0\,.$$

*Solución:* Un ejemplo sencillo de ecuación lineal escalar asintóticamente estable es $x' = -\frac{x}{t}$, ya que todas sus soluciones satisfacen

$$\{x(t)\} = \left\{\frac{K}{t}\right\} \to 0 \quad \text{cuando } t \to \infty\,, \quad K \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que la solución trivial es un atractor; luego podemos elegir

$$a(t) = -\frac{1}{t}\,.$$

[5]En virtud del teorema fundamental del cálculo, ya que $g$ es continua por hipótesis

Si ahora elegimos
$$b(t) = \frac{2}{t},$$
entonces $x' = (a(t) + b(t))x$ es exactamente $x' = \frac{x}{t}$, que es inestable. En efecto, ahora las soluciones son de la forma

$$\{x(t)\} = \{Kt\} \to \infty \quad \text{cuando } t \to \infty\,, \quad K \in \mathbb{R}\,,$$

por lo que la solución trivial es inestable. Además, es obvio que

$$\lim_{t\to\infty} \{b(t)\} = 0\,.$$

■

9. Se consideran la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} 2z+4 & \text{si } z < -1 \\ -2z & \text{si } |z| < 1 \\ 2z-4 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

y la ecuación
$$x'' + f(x') + x = 0\,.$$

   (a) Estudia la existencia, unicidad y prolongación de sus soluciones.

   (b) Estudia las propiedades de estabilidad de sus puntos de equilibrio.

*Solución:* (a) Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - f(x_2) \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,.$$

Como $f$ es continua, $F$ también lo es. Por tanto, existen soluciones de nuestra ecuación. Por otra parte, como $f$ es lineal a trozos es globalmente lipschitziana (cf. Ejercicio 13 del Capítulo 7) y, como consecuencia, $F$ también lo es. Luego existe una única solución definida en $\mathbb{R}$ del problema de valores iniciales asociado a nuestra ecuación.

(b) El único punto de equilibro es $(0,0)$, ya que $f(0) = 0$. Tenemos

$$J[F](x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -f'(y) \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que, aunque $f$ no es derivable, sí lo es en un entorno de 0; luego $J[F]$ existe en un entorno de $(0,0)$. En efecto,

$$f'(0) = -2 \Longrightarrow J[F](0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El único valor propio de $J[F](0,0)$ es $\lambda = 1$ (doble), luego $\mu = 0$. Por tanto, $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable.

$\blacksquare$

10. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones y sistemas:

   (a) $x'' - 2xe^{-x^2} = 0$.

   (b) $x'' + 2x' + 5x + x^3 = 0$.

   (c) $x' = y + x - x^3$, $y' = -x$.

   (d) $x'' + x|x| = 0$.

   (e) $x' = f(x+y)$, $y' = -f(x-y)$, donde

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0 \\ 3z^2 + 2z & \text{si } z < 0 \end{cases}.$$

*Solución:* (a) Escrita vectorialmente la ecuación adopta la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 e^{-x_1^2} \end{pmatrix} = F(x_1, x_2),$$

luego el único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. Calculamos

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2(1-2x_1^2)e^{-x_1^2} & 0 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm\sqrt{2}$. Entonces $\mu = \sqrt{2} > 0$ y, conforme al primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio es inestable.

(b) Reescribimos en primer lugar la ecuación como un sistema de primer orden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 - 5x_1 - x_1^3 \end{pmatrix} = F(x_1, x_2)\,.$$

Claramente $F(x_1, x_2)$ se anula si y sólo si $x_2 = 0$ y $x_1 = 0, \pm\sqrt{-5}$, luego el único punto de equilibrio es $p = (0, 0)^T$. Calculamos

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 - 3x_1^2 & -2 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = -1 \pm 2i$. Entonces $\mu = -1 < 0$ y, según el primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

(c) En este caso

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y + x - x^3 \\ -x \end{pmatrix} = F(x, y)\,,$$

luego el único punto de equilibrio es $p = (0, 0)^T$. Calculamos

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Entonces $\mu = \frac{1}{2} > 0$ y, según el primer método de Lyapunov, el punto de equilibrio es inestable.

(d) Escrita vectorialmente la ecuación adopta la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1|x_1| \end{pmatrix} = F(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_2, -x_1^2)^T & \text{si } x_1 \geq 0 \\ (x_2, x_1^2)^T & \text{si } x_1 < 0 \end{cases},$$

luego el único punto de equilibrio es $p = (0, 0)^T$. En este caso el primer método de Lyapunov no proporciona información ($\lambda = 0$ doble $\Longrightarrow \mu = 0$). Consideramos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) := \frac{|x_1|^3}{3} + \frac{x_2^2}{2}\,.$$

Claramente $V(0,0) = 0$, $V(x,y)$ es definida positiva en un entorno de $p$ y

$$V'(x_1, x_2) = (x_1|x_1|, x_2) \cdot (x_2, -x_1|x_1|) = 0\,,$$

luego $p$ es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable.

(e) Escrita vectorialmente la ecuación adopta la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(x+y) \\ -f(x-y) \end{pmatrix} = F(x,y)\,.$$

Teniendo en cuenta la definición de $f$ se puede comprobar fácilmente que los únicos puntos de equilibrio son

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$J[F](p) = J[F](r) = \begin{pmatrix} f'(0) & f'(0) \\ -f'(0) & f'(0) \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$J[F](q) = \begin{pmatrix} f'(-\frac{2}{3}) & f'(-\frac{2}{3}) \\ -f'(-\frac{2}{3}) & f'(-\frac{2}{3}) \end{pmatrix}(q) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

En el primer caso los valores propios son $\lambda_p = 2 \pm 2i \Longrightarrow \mu = 2 > 0$, mientras que en el segundo caso son $\lambda_q = -2 \pm 2i \Longrightarrow \mu = -2 < 0$. En consecuencia, conforme al primer método de Lyapunov los puntos de equilibrio $p$ y $r$ son inestables mientras que $q$ es asintóticamente estable.

■

11. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x' = -6y^5 e^{x+y}, \\ y' = 2(x-1)e^{x+y} \end{cases}.$$

Prueba que tiene un único punto de equilibrio que es estable pero no es un atractor.

*Solución:* En este caso

$$f(x,y) = -2e^{x+y}\begin{pmatrix} 3y^5 \\ 1-x \end{pmatrix},$$

luego el único punto de equilibrio es $(1,0)$. La matriz Jacobiana de $f$ viene dada por

$$J(f) = -2e^{x+y} \begin{pmatrix} 3y^5 & 3y^4(y+5) \\ -x & 1-x \end{pmatrix},$$

luego

$$J(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2e & 0 \end{pmatrix}.$$

Estamos en el caso en que $\mu = 0$, por lo que el primer método de Lyapunov no aporta información.

Construimos la función de Lyapunov

$$V(x,y) := (x-1)^2 + y^6 .$$

Es claro que $V(1,0) = 0$ y $V$ es definida positiva. Además

$$V'(x,y) = 4e^{x+y}\langle (x-1, 3y^5), (-3y^5, x-1)\rangle = 0 ,$$

luego el punto de equilibrio $(1,0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

12. Sea $p$ un punto de equilibrio de la ecuación

$$x' = f(x) , \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) ,$$

de la cual suponemos que todas sus soluciones son prolongables hasta $\infty$. Demuestra que si $p$ es un atractor, entonces el conjunto

$$A = \left\{ q \in \mathbb{R}^N : \lim_{t\to\infty} \{x(t;q)\} = p \right\}$$

es abierto.

*Solución:* Denotemos $B_\delta(q) \subset \mathbb{R}^N$ la bola euclídea centrada en $q$ de radio $\delta$. Probaremos que dado $q \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(q) \subset A$. Como por hipótesis $p$ es un atractor, existe $\eta > 0$ tal que se cumple lo siguiente: si $\|y - p\| < \eta$, entonces $x(t;y)$ está definida en $[0,\infty)$ y

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t;y)\} = p .$$

Es decir, si $\|y - p\| < \eta$ entonces $y \in A$. Por otro lado, si $q \in A$ existe $t_0 > 0$ tal que, si $t \geq t_0$, entonces

$$\|x(t; q) - p\| < \frac{\eta}{2}\,. \tag{9.6}$$

Además, como $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ por hipótesis (en particular es continua y localmente lipschitziana) podemos aplicar el teorema de dependencia continua de la solución respecto de datos iniciales para concluir que existe $\delta > 0$ tal que, si $\|q - \tilde{q}\| < \delta$, entonces

$$\|x(t; \tilde{q}) - x(t; q)\| < \frac{\eta}{2} \quad \forall t \in [0, t_0]\,. \tag{9.7}$$

Sea $y = x(t_0; \tilde{q})$. Usando (9.6) y (9.7) obtenemos

$$\|y - p\| \leq \|y - x(t_0; q)\| + \|x(t_0; q) - p\| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta\,.$$

Se deduce, por tanto, que $x(t; y)$ está definida en $[0, \infty)$ y

$$\lim_{t\to\infty} \{x(t; y)\} = p\,,$$

luego $y \in A$. Por un lado, la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x) \\ x(0) = y \end{array} \right.$$

es $x(t; y)$; por otro lado, también es solución $\varphi(t) = x(t + t_0; \tilde{q})$. En efecto, $\varphi(0) = x(t_0; \tilde{q}) = y$. Entonces

$$x(t; y) = \varphi(t)$$

por unicidad. De este modo, dado $q \in A$ hemos encontrado $\delta > 0$ (el de (9.7)) tal que, si $\|q - \tilde{q}\| < \delta$, entonces $\tilde{q} \in A$. Por consiguiente, $A$ es abierto.

■

13. Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación

$$x'' + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0\,.$$

¿Son estables? ¿son asintóticamente estables?

*Solución:* Reescribiendo la ecuación de segundo orden en forma de sistema obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1^3 - 3x_1^2 - 3x_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -(x_1+1)^3 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)\,.$$

Consecuentemente, el único punto de equilibrio es $(x_1, x_2) \equiv (-1, 0)$.

La matriz Jacobiana de $f$ es

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3(x_1+1)^2 & 0 \end{pmatrix},$$

luego

$$J(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estamos en el caso en que $\mu = 0$, por lo que el primer método de Lyapunov no aporta información.

Construimos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) := \frac{x_2^2}{2} + \int_{-1}^{x_1} (u+1)^3\, du = \frac{x_2^2}{2} + \frac{(x_1+1)^4}{4} \geq 0\,.$$

Es claro que $V(-1,0) = 0$, luego $V$ es definida positiva. Además

$$V'(x_1, x_2) = \langle ((x_1+1)^3, x_2), (x_2, -(x_1+1)^3) \rangle = 0\,,$$

por lo que el punto de equilibrio $(-1, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

14. Proporciona ejemplos explícitos de ecuaciones autónomas

$$x' = f(x)\,, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)\,,$$

que verifiquen las siguientes propiedades:

(a) Tiene exactamente dos puntos de equilibrio, ambos inestables.

(b) Tiene exactamente un punto de equilibrio y es estable, pero no asintóticamente estable.

(c) Tiene una infinidad de puntos de equilibrio y todos ellos son inestables.

(Febrero 1990)

(d) Tiene una solución asintóticamente estable, pero el primer método de Lyapunov no proporciona información.

(e) Todas las soluciones están definidas y acotadas en $[0, \infty)$ y al menos una de ellas es inestable.

(f) Tiene una solución estable y otra inestable.

(Junio 1991)

*Solución:* (a) $x' = x^2(x-1)^2$. Los puntos de equilibrio son $x \equiv 0$ y $x \equiv 1$, en tanto que las soluciones no constantes son estrictamente monótonas (crecientes). En consecuencia, no todas pueden tender hacia los puntos de equilibrio. Podemos aplicar el teorema de inestabilidad de Cetaev con las funciones $V_0(x) = x$ (para el punto de equilibrio $x = 0$) y $V_1(x) = x - 1$ (para el punto de equilibrio $x = 1$). Se tiene

$$V_0(0) = 0\,, \quad V_0'(x) = x' > 0 \text{ en un entorno reducido de } 0\,,$$
$$V_1(1) = 0\,, \quad V_1'(x) = x' > 0 \text{ en un entorno reducido de } 1\,.$$

Además, podemos considerar las sucesiones

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0\,, \quad \{y_n\} = \left\{1 + \frac{1}{n}\right\} \to 1\,,$$

para las cuales se verifica que $V_0(x_n) > 0$ y $V_1(y_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $x'' + 4x = 0$ o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -4x_1 \end{pmatrix},$$

cuyo único punto de equilibrio es $p = (0,0)^T$. En este caso los valores propios del sistema son $\lambda = \pm 2i \Longrightarrow \mu = 0$, luego el primer método de Lyapunov no proporciona información. Podemos considerar la función de Lyapunov

$$E(x_1, x_2) := 2x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}\,.$$

Es claro que $E(p) = 0$ y $E(x_1, x_2)$ es definida positiva en un entorno de $p$. Además

$$E'(x_1, x_2) = (4x_1, x_2) \cdot (x_1', x_2')^T = (4x_1, x_2) \cdot (x_2, -4x_1)^T = 0\,,$$

luego $p$ es estable pero no asintóticamente estable.

(c) $x' = \operatorname{sen}(x)^2$. Los puntos de equilibrio son $x_k = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Para ver que son todos inestables consideramos las funciones

$$V_k(x) = x - k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Se tiene que $V_k(x_k) = 0$, $V_k' = x' = \operatorname{sen}(x)^2 > 0$ en cualquier entorno reducido de $p_k$ y $V_k\big(x_k + \frac{1}{n}\big) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el teorema de inestabilidad de Cetaev nos permite concluir.

(d) Podemos usar el ejemplo del Ejercicio 5 con $\varepsilon = -1$:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}.$$

El único punto de equilibrio es $p = (0, 0)^T$ y la matriz jacobiana de

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

evaluada en $p$ es

$$J[F](p) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son $\lambda = \pm i \Longrightarrow \mu = 0$. Por tanto, el primer método de Lyapunov no aporta información.

Otro ejemplo sencillo de analizar es $x' = -x^3$.

(e) Sirve el ejemplo del apartado (c).

(f) $x' = x(x - 1)$, pues $x \equiv 0$ es estable (de hecho, es asintóticamente estable) y $x \equiv 1$ es inestable.

∎

15. Se considera el siguiente sistema presa–depredador de Lotka–Volterra:

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \end{cases},$$

donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son constantes positivas. Se trata de estudiar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ a través de los siguientes pasos:

(a) Utiliza el cambio de variables $p = \log(x)$, $q = \log(y)$ para transformar la ecuación de Lotka–Volterra en un sistema de la forma

$$\begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q) \end{cases},$$

donde $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (este tipo de sistemas reciben el nombre de *Hamiltonianos*). Determina la función $H$.

(b) Se define $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $V(x,y) := H(\log(x), \log(y))$. Comprueba que $V$ alcanza en $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ un mínimo estricto.

(c) Como consecuencia del apartado anterior, determina las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

(Septiembre 1992)

*Solución:* (a) Derivando el cambio de variables se obtiene

$$p' = \frac{x'}{x} = a - by = a - be^q\,, \quad q' = \frac{y'}{y} = -c + dx = -c + de^p\,.$$

Si ha de ser

$$p' = a - be^q = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q)\,,$$

hemos de elegir la función $H(p,q)$ de la forma

$$H(p,q) = be^q - aq + f(p)\,,$$

donde $f$ es una función por determinar que sólo depende de $p$. Como además se ha de cumplir

$$-c + de^p = q' = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q)\,,$$

se deduce que $f(p) = de^p - cp$ y, por tanto,

$$H(p,q) = be^q - aq + de^p - cp\,.$$

(b) Se tiene

$$V(x,y) = by - a\log(y) + bx - c\log(x)\,.$$

Entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = d - \frac{c}{x}\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = b - \frac{a}{y}\,,$$

por lo que el único punto crítico de $V$ es $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. Para comprobar que se trata de un mínimo construimos la matriz Hessiana de $V$,

$$H[V](x,y) = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}\,,$$

de modo que

$$H[V]\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big) = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

(c) Denotamos

$$F(p,q) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ \frac{\partial H}{\partial p}(p,q) \end{pmatrix}$$

y $J[F]$ denota la matriz jacobiana de $F$. Se puede comprobar fácilmente que el primer método de Lyapunov no proporciona información, ya que los valores propios de $J[F](\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ son complejos puros. Definimos entonces la siguiente función de Lyapunov:

$$\widetilde{V}(x,y) = V(x,y) - V\Big(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\Big)\,.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{V}'(x,y) &= V'(x,y) = \nabla V(x,y)\cdot(x',y') \\ &= \Big(d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y}\Big)\cdot((a-by)x, (dx-c)y) \\ &= (dx-c)(a-by) + (by-a)(dx-c) = 0\,, \end{aligned}$$

luego $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

16. Se pide:

   (a) Demostrar que, dado $\lambda > 0$, la ecuación $\lambda x + e^x = 0$ tiene una única raíz real a la que denotaremos por $x_\lambda$.

   (b) Probar que la función

$$V(x,y) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{1}{2}y^2$$

   alcanza su mínimo absoluto en el punto $(x_\lambda, 0)$.

   (c) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$x'' + \lambda x + e^x = 0\,, \quad \lambda > 0\,.$$

(Diciembre 1996)

*Solución:* (a) Definimos $f(x) := \lambda x + e^x$. Como $f(-\frac{1}{\lambda}) = e^{-\frac{1}{\lambda}} - 1 < 0$ y $f(0) = 1$, el teorema de Bolzano asegura que existe al menos una raíz real de $f$ en $I = [-\frac{1}{\lambda}, 0]$. Además $f'(x) = \lambda + e^x > 0$, luego $f$ es estrictamente creciente. Por tanto, la raíz $x_\lambda$ de $f$ es única.

(b) Calculamos las derivadas parciales de $V$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda x + e^x\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = y\,.$$

Por lo establecido en (a), el único punto crítico de $V$ es $(x_\lambda, 0)$. Comprobemos que se trata de un mínimo. Se tiene

$$H(V) = \begin{pmatrix} \lambda + e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego

$$H_\lambda := H(V)(x_\lambda, 0) = \begin{pmatrix} \lambda + e^{x_\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $H_\lambda$ son $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = \lambda + e^{x_\lambda}$, ambos positivos. Por tanto, $H_\lambda$ es definida positiva y, consecuentemente, $(x_\lambda, 0)$ es un mínimo de $V$. De hecho, es el mínimo absoluto de $V$ porque es único.

(c) En forma vectorial el problema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \end{pmatrix},$$

luego $F(x, y) = (y, -\lambda x - e^x)^T$. El único punto de equilibrio es, por tanto, $(x_\lambda, 0)$. Al evaluar la matriz jacobiana de $F$ en este punto obtenemos

$$J[F](x_\lambda, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda - e^{x_\lambda} & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se sigue con facilidad que el primer método de Lyapunov no proporciona información. Consideramos entonces la siguiente modificación de la energía mecánica del sistema como función de Lyapunov:

$$\widetilde{V}(x, y) := V(x, y) - V(x_\lambda, 0) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{y^2}{2} - V(x_\lambda, 0).$$

Usando (b), se tiene

$$\widetilde{V}(x_\lambda, 0) = 0, \quad \widetilde{V}(x, y) > 0 \ \forall (x, y) \neq (x_\lambda, 0), \quad \widetilde{V}'(x, y) \equiv 0,$$

de donde se concluye que el punto $(x_\lambda, 0)$ es estable pero no asintóticamente estable.

■

CAPÍTULO 10

# Series de Fourier, problemas de contorno, ecuaciones en derivadas parciales y cálculo de variaciones

1. Una de las cuestiones principales de la teoría de ecuaciones de evolución en derivadas parciales consiste en resolver un problema de valores iniciales para una ecuación dada, es decir, predecir el comportamiento futuro del sistema conocido su estado actual. En muchas ocasiones es posible demostrar que esto siempre puede hacerse y que además la solución es única. En la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se puede además invertir el proceso en el siguiente sentido: dado el estado actual del sistema es posible también reconstruir el pasado del mismo. A menudo es conveniente representar esta propiedad en términos de un grupo de transformaciones temporales $T(t)$ que permite expresar la solución $u(t;u_0)$ asociada al dato inicial $u_0$ de la siguiente forma: $u(t;u_0) = T(t)u_0$. Los operadores $T(t)$ satisfacen las siguientes propiedades:

$$T(t)T(s) = T(s)T(t) = T(t+s)\,, \quad \lim_{t\to 0}\{T(t)\} = T(0) = I\,,$$

donde $I$ denota el operador identidad. En el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales la situación es muy diferente. De hecho, en muchos casos es necesario restringir el estudio de la evolución de las soluciones al futuro ($t > 0$), en cuyo caso el análogo del grupo uniparamétrico $T(t)$ es un semigrupo de transformaciones $S(t)$, definido solamente para instantes $t > 0$. Un semigrupo *fuertemente continuo* $S(t)$ es aquel que satisface

$$S(t)S(s) = S(s)S(t) = S(t+s)\ \forall t,s > 0\,, \quad \lim_{t\to 0^+}\{S(t)\} = S(0) = I\,.$$

En tal caso, $u(t; u_0) = S(t)u_0$ es la solución asociada al dato inicial $u(t = 0) = u_0$.

Para constatar lo anteriormente expuesto consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Au\,,$$

donde $A$ es la extensión de $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a $L^2(\mathbb{R})$.

(a) Comprueba que $A$ admite el conjunto infinito de vectores propios $\{\text{sen}(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$, asociados a los valores propios $\lambda_k = k^2$.

(b) Calcula la solución $u(t, x)$ asociada al siguiente dato inicial:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(kx)}{k}\,.$$

(c) ¿Qué conclusiones pueden extraerse del cálculo de $\|u(\cdot, x)\|_{L^2(\mathbb{R})}$?

*Solución:* (a) es consecuencia de un cálculo directo:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\text{sen}(kx)) = k^2\,\text{sen}(kx)\,.$$

Para resolver (b) empleamos el método de separación de variables (nótese que una de las ecuaciones que resultan de aplicar dicho método ya ha sido resuelta en el apartado (a)) y el principio de superposición de soluciones (en serie de Fourier) para la ecuación del calor, de donde se obtiene que la solución requerida es

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, e^{-k^2 t}\,\text{sen}(kx)\,.$$

Finalmente, para dar respuesta a (c) observamos en primer lugar que, para valores $t > 0$, $\|u(\cdot, x)\|_{L^2((0,\infty))}$ es acotada. En efecto:

$$\|u(\cdot, x)\|_{L^2((0,\infty))} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\|e^{-k^2 t}\|_{L^2((0,\infty))} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6\sqrt{2}}\,.$$

Sin embargo, al extender la solución a tiempos negativos obtenemos

$$\|u(\cdot,x)\|_{L^2((-\infty,0))} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\right) \|e^{-t}\|_{L^2((-\infty,0))}\,,$$

que es divergente.

■

2. Determina los valores propios y las funciones propias del problema

$$x'' + 4x' + (4+9\lambda)x = 0\,, \quad x(0) = x'(1) = 0\,.$$

(Septiembre 2004)

*Solución:* Se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, por lo que resolvemos en primer lugar la ecuación característica asociada:

$$\mu^2 + 4\mu + (4+9\lambda) = 0\,.$$

Si $\lambda = 0$, la única raíz de la ecuación característica es $\mu = -2$ con multiplicidad dos, luego las soluciones de $x'' + 4x' + 4x = 0$ son

$$x(t) = Ae^{-2t} + Bt\,e^{-2t}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo las condiciones de contorno obtenemos $A = B = 0$, lo que conduce a la solución trivial. Por consiguiente, $\lambda = 0$ no puede ser un valor propio del problema de contorno. Para $\lambda < 0$ obtenemos $\mu = -2 \pm 3\sqrt{|\lambda|}$, que da lugar a las soluciones

$$x(t) = Ae^{(-2+3\sqrt{|\lambda|})t} + Be^{(-2-3\sqrt{|\lambda|})t}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo las condiciones de contorno volvemos a encontrarnos con $A = B = 0$, por lo que no hay valores propios negativos del problema de contorno. Finalmente, para valores $\lambda > 0$ obtenemos $\mu = -2 \pm 3\sqrt{\lambda}\,i$, luego las soluciones de $x'' + 4x' + (4+9\lambda)x = 0$ son de la forma

$$x(t) = e^{-2t}\big(A\operatorname{sen}(3\sqrt{\lambda}\,t) + B\cos(3\sqrt{\lambda}\,t)\big)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Al imponer las condiciones de contorno se deduce que

$$B = 0\,, \quad 3\sqrt{\lambda}\cos(3\sqrt{\lambda}) = 2\operatorname{sen}(3\sqrt{\lambda})\,.$$

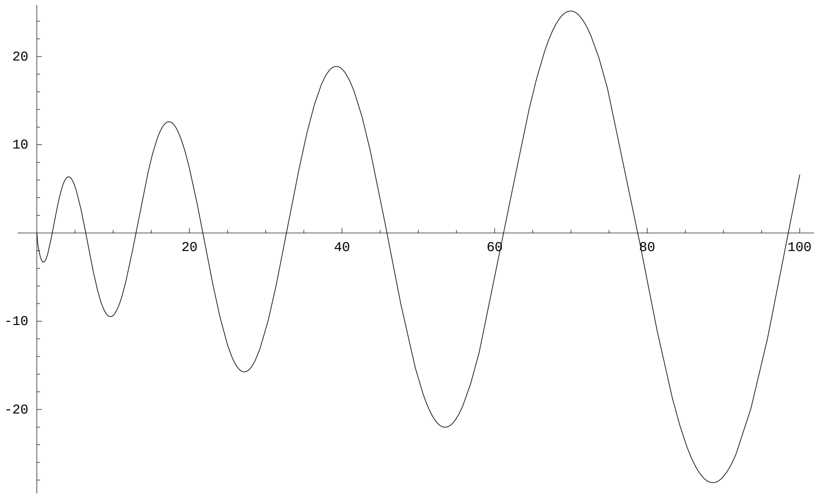



Figura 10.1: Las soluciones de la ecuación (10.1) son los ceros de la función representada: 0, 2,03042, 6,41195, 12,9904, 21,7629 ...

Por tanto, los valores propios del problema de contorno son aquellos $\lambda > 0$ que satisfacen la ecuación

$$3\sqrt{\lambda}\cos(3\sqrt{\lambda}) = 2\,\mathrm{sen}(3\sqrt{\lambda})\,, \tag{10.1}$$

en tanto que las funciones propias asociadas vienen dadas por

$$x_\lambda(t) = Ae^{-2t}\,\mathrm{sen}(3\sqrt{\lambda}\,t)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,,$$

para aquellos valores $\lambda > 0$ que resuelven (10.1).

■

3. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ es
   $$2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}\,.$$

   (b) El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x$ converge hacia $f$ en $(-\pi, \pi)$.

(c) El problema de contorno

$$\begin{cases} (tx')' + \frac{x}{t} = -\frac{1}{t}\,, & 1 \leq t \leq e^{\pi} \\ x'(1) = 1 \\ x(e^{\pi}) + x'(e^{\pi}) = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones.

(d) Los valores propios del problema de contorno

$$t^2x'' + tx' = -\lambda x\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad x'(1) = x(e^{\pi}) = 0\,,$$

son $\lambda_n = n\pi$ para todo $n \geq 1$, y las funciones propias son

$$x_n(t) = \cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\log(t)\right)\,.$$

(e) La función $u(t,x) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$ es una solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$ y alcanza su máximo en la frontera de $D$ como consecuencia del principio del máximo.

(Septiembre 2003)

*Solución:* (a) VERDADERA. El desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x$ en $(-\pi,\pi)$ es

$$x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(n(x+\pi)) + b_n\operatorname{sen}(n(x+\pi))\right\}\,,$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\cos(n(x+\pi))\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\,,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\operatorname{sen}(n(x+\pi))\,dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Claramente $a_0 = 0$ y, por ser la función $x\cos(nx)$ impar,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Por otro lado

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{(-1)^n}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n} = -\frac{2}{n}\,.$$

Entonces

$$x \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n(x+\pi))}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\,.$$

(b) VERDADERA. La complitud del sistema trigonométrico garantiza la convergencia en $L^2(-\pi,\pi)$.

(c) FALSA. Podemos reescribir la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$t^2x'' + tx' + x = -1\,, \tag{10.2}$$

que admite como solución particular la función constante $x \equiv -1$. Basta entonces con encontrar la solución general de la ecuación homogénea $t^2x'' + tx' + x = 0$, que es de tipo Euler. Es conocido que el cambio de variable $t = e^s$ transforma esta última en una ecuación lineal con coeficientes constantes, a saber: $y'' + y = 0$, cuya solución general es

$$y(s) = A\cos(s) + B\operatorname{sen}(s)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable y tomando en consideración la solución particular encontrada anteriormente se deduce que la solución general de la ecuación (10.2) es

$$x(t) = A\cos(\log(t)) + B\operatorname{sen}(\log(t)) - 1\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando ahora las condiciones de contorno obtenemos que la única solución del problema planteado es

$$x(t) = (1 + e^{-\pi})\cos(\log(t)) + \operatorname{sen}(\log(t)) - 1\,.$$

(d) FALSA. Si $x_n(t) = \cos\big(\big(\frac{2n+1}{2}\big)\log(t)\big)$ fuese una función propia del problema planteado asociada al valor propio $\lambda_n = n\pi$, habría de resolver la ecuación

$$t^2x_n'' + tx_n' + n\pi x_n = 0\,.$$

Pero

$$
\begin{aligned}
x_n'(t) &= -\left(\frac{2n+1}{2t}\right)\operatorname{sen}\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\log(t)\right), \\
x_n''(t) &= \left(\frac{2n+1}{2t^2}\right)\operatorname{sen}\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\log(t)\right) \\
&\quad -\left(\frac{2n+1}{2t}\right)^2\cos\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)\log(t)\right),
\end{aligned}
$$

en cuyo caso resulta la relación

$$n\pi = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2,$$

que es absurda.

(e) FALSA. Es inmediato comprobar que la función

$$u(t,x) = \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(x)$$

resuelve la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Sin embargo, $u = 0$ en la frontera de $D$ mientras que, por ejemplo, $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. El motivo es que no existe un principio del máximo estándar para la ecuación de ondas.

■

4. Sea la función $f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}$ definida en el intervalo $[0,\pi]$.

   (a) Calcula el desarrollo en serie de Fourier de senos de $f$.

   (b) ¿Converge dicho desarrollo uniformemente en $[0,\pi]$?

   (c) ¿Satisfacen sus coeficientes la identidad de Parseval?

   (d) Demuestra que

$$\cos(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{\operatorname{sen}(2kx)}{k(1-4k^2)}.$$

*Solución:* (a) La serie de Fourier de senos de $f$ se define como

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

en el intervalo $[0, \pi]$. En nuestro caso se tiene

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big( \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi} \Big) \operatorname{sen}(nx)\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \left( \frac{n}{n^2-1}(1 + (-1)^n) + \frac{1}{n}(\cos(n\pi) - 1) + \frac{2}{\pi}\Big( -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\Big)\right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big( \frac{n^2}{1-n^2}(1 + (-1)^n) + 1 + \cos(n\pi)\Big)$$

$$= -\frac{2}{n(1-n^2)\pi}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ -\frac{4}{n(1-n^2)\pi} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases},$$

luego

$$f(x) \approx -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{n(1-4n^2)} .$$

(b) SI, ya que $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua, $f'(x) = \frac{2}{\pi} - \operatorname{sen}(x)$ también lo es (habría bastado con que fuese continua a trozos) y $f(0) = f(\pi) = 0$.

(c) NO. Por un lado

$$\|f\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi \Big( \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}\Big)^2 dx$$

$$= \int_0^\pi \cos(x)^2\, dx - 2\int_0^\pi \cos(x)\, dx + \pi$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi x^2\, dx + \frac{4}{\pi}\int_0^\pi x(\cos(x) - 1)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{4\pi}{3} - \frac{8}{\pi} - 2\pi = \frac{5\pi^2 - 48}{6\pi},$$

mientras que por otro lado[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{\pi}\, b_n)^2 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1-4n^2)^2} = \frac{5\pi^2 - 48}{3\pi} .$$

Podríamos haber llegado a la misma conclusión por medio de la siguiente justificación teórica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \|f_{impar}\|^2_{L^2([-\pi,\pi])} = 2\|f\|^2_{L^2([0,\pi])}, \tag{10.3}$$

[1]Obsérvese que el sistema de senos es ortonormal sólo si sus elementos están normalizados a la unidad, es decir, si consideramos el sistema $\left\{ \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que los coeficientes de Fourier asociados pasan a ser de la forma $\sqrt{\pi}\, b_n$

donde $f_{impar}$ denota la extensión impar de $f$ al intervalo $[-\pi, \pi]$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los coeficientes de Fourier del desarrollo trigonométrico de $f_{impar}$ (de entre los cuales los únicos no nulos son $c_n = \sqrt{\pi}\, b_n$, que preceden a los senos del desarrollo).[2]

(d) Como el desarrollo en serie de senos converge uniformemente hacia $f$ podemos escribir

$$\cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi} = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2nx)}{n(1-4n^2)}\,,$$

luego

$$\cos(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2nx)}{n(1-4n^2)}\,.$$

■

5. (a) Resuelve mediante el método de separación de variables el siguiente problema mixto para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u, & t > 0,\ x \in [0,\pi], \\ u(0,x) = 3\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(3x), & x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

(Junio 2002)

(b) Resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ u(0,x) = f(x), & x \in [0,\pi], \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

donde $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = 1 + 5\cos(3x)$. Demuestra además que

$$\lim_{t\to\infty}\{u(t,x)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

[2]Obsérvese que (10.3) no es otra cosa que la identidad de Parseval aplicada al desarrollo de Fourier de $f_{impar}$ respecto del sistema trigonométrico, que es bien sabido que es ortogonal y completo

uniformemente en $[0, \pi]$ e interpreta físicamente el resultado.

(Junio 2003)

(c) Resuelve el siguiente problema mixto para la ecuación del telégrafo mediante el método de separación de variables:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0,\ x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = \operatorname{sen}(x), & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(Julio 2003)

(d) Encuentra una solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen}(x), & t \in \mathbb{R},\ x \in (0, \pi), \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0, & x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(*Sugerencia:* Búscala de la forma $u(t, x) = v(x) + w(t, x)$, con $v(0) = v(\pi) = 0$ y $w$ una solución de la ecuación de ondas homogénea). ¿Hay más soluciones?

(Junio 2004)

*Solución:* (a) Consideremos soluciones de la forma $u(t, x) = v(t)w(x)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación del calor obtenemos

$$v'(t)w(x) - v(t)w''(x) = v(t)w(x) \Longleftrightarrow \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} + 1\,,$$

de donde se concluye que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)} + 1\,,$$

o equivalentemente

$$v'(t) + \lambda v(t) = 0\,, \quad w''(x) + (1 + \lambda)w(x) = 0\,.$$

Al resolver la primera de las ecuaciones se obtiene $v(t) = ke^{-\lambda t}$, con $k \in \mathbb{R}$. Estudiemos cómo son las soluciones de la segunda. Si $\lambda = -1$ entonces $w'' = 0$, luego

$$w(x) = Ax + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ obtenemos $w(0) = w(\pi) = 0$, luego $A = B = 0$ y la única solución en este caso es $w \equiv 0$. Considerando ahora $\lambda < -1$ obtenemos

$$w(x) = Ae^{(1+\lambda)x} + Be^{(-1-\lambda)x}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno se observa nuevamente que $A = B = 0$, lo que conduce a la solución trivial. Analizamos finalmente el caso en que $\lambda > -1$. Se tiene

$$w(x) = A\cos(\sqrt{1+\lambda}\,x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{1+\lambda}\,x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando las condiciones de contorno obtenemos

$$B\,\mathrm{sen}(\sqrt{1+\lambda}\,\pi) = 0\,,$$

que genera soluciones no triviales si y solamente si $\lambda = n^2 - 1$, con $n \in \mathbb{N}$. En última instancia, teniendo en cuenta la condición inicial $u(0, x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(3x)$, se deduce que la solución al problema de difusión planteado es

$$u(t, x) = 3\,\mathrm{sen}(x) + e^{-8t}\,\mathrm{sen}(3x)\,.$$

(b) Igual que en (a), buscamos soluciones con las variables separadas: $u(t, x) = v(t)w(x)$. Insertando esta expresión en la ecuación del calor obtenemos

$$v'(t)w(x) = v(t)w''(x)\,,$$

de donde se concluye que

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}\,.$$

Resolvemos en primer lugar

$$v'(t) + \lambda v(t) = 0\,,$$

de donde resulta $v(t) = ke^{-\lambda t}$, con $k \in \mathbb{R}$. Por otro lado, la solución general de la ecuación para $w(x)$ es

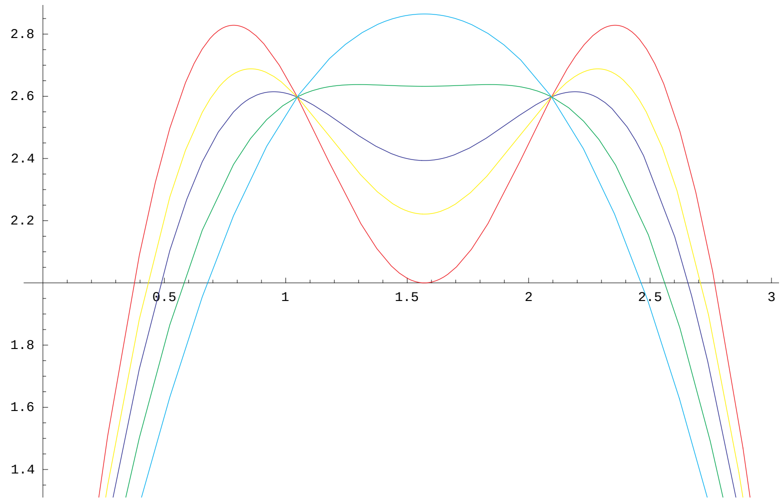



Figura 10.2: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (a)

- $w(x) = Ax + B$ si $\lambda = 0$,
- $w(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ si $\lambda > 0$,
- $w(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x)$ si $\lambda < 0$,

para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$. El único caso viable es el tercero. Aplicando las condiciones de frontera se obtiene $w'(0) = w'(\pi) = 0$, de donde se deduce que ha de ser $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, para que existan soluciones no triviales. Finalmente, teniendo en cuenta la condición inicial $u(0,x) = 1 + 5\cos(3x)$, se concluye que la solución al problema de difusión planteado es

$$u(t,x) = 1 + 5e^{-9t}\cos(3x)\,.$$

Claramente

$$\lim_{t\to\infty}\{u(t,x)\} = 1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1 + 5\cos(3x))\,dx\,,$$

lo que significa que la distribución de temperaturas se estabiliza a tiempo largo en el promedio del dato inicial sobre el intervalo $[0,\pi]$.

(c) Buscamos soluciones de la forma $u(t,x) = v(t)w(x)$. Sustituyen-

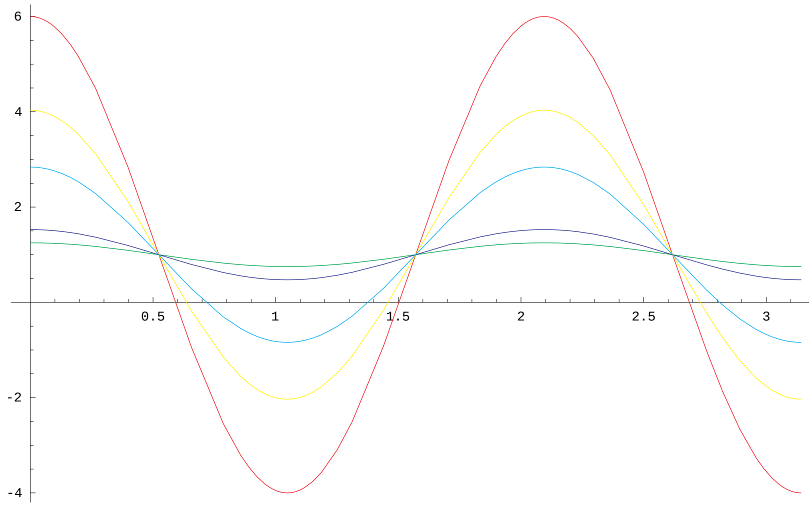



Figura 10.3: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (b).

do esta expresión en la ecuación del telégrafo obtenemos

$$(v''(t) + 2v'(t) + v(t))w(x) = v(t)w''(x) \iff \frac{v''(t) + 2v'(t) + v(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)},$$

de donde se concluye que

$$\frac{v''(t) + 2v'(t) + v(t)}{v(t)} = -\lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Separando las ecuaciones para $v(t)$ y $w(x)$ obtenemos

$$v''(t) + 2v'(t) + (1+\lambda)v(t) = 0, \quad w''(x) + \lambda w(x) = 0.$$

La ecuación para $w(x)$ está sujeta a la misma discusión llevada a cabo en el apartado anterior, por lo que sólo el caso en que $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, genera (las siguientes) soluciones no triviales:

$$w(x) = k\,\mathrm{sen}(nx), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Resolvemos entonces la ecuación

$$v''(t) + 2v'(t) + (1+n^2)v(t) = 0,$$

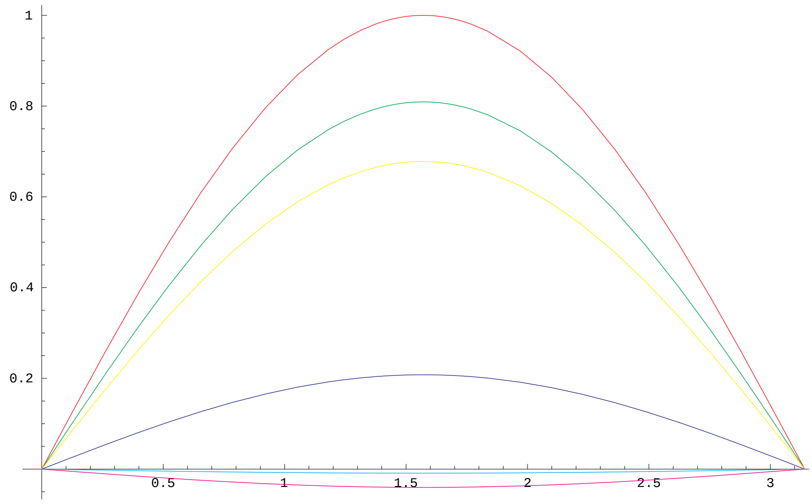



Figura 10.4: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (c)

cuya solución general viene dada por

$$v(t) = e^{-t}(A\cos(nt) + B\,\mathrm{sen}(nt))\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Por consiguiente

$$u(t,x) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(nx)(c_1\cos(nt) + c_2\,\mathrm{sen}(nt))\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Imponiendo finalmente las condiciones iniciales obtenemos

$$u(t,x) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(x)(\cos(t) + \mathrm{sen}(t))\,.$$

(d) Sustituyendo la expresión sugerida en la ecuación de ondas obtenemos

$$w_{tt}(t,x) - v''(x) - w_{xx}(t,x) = -v''(x) = \mathrm{sen}(x)\,,$$

para lo que se ha usado que $w$ resuelve la ecuación de ondas homogénea. Por tanto,

$$v(x) = \mathrm{sen}(x) + Ax + B\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando ahora las condiciones $v(0) = v(\pi) = 0$ se deduce que ha de elegirse $A = B = 0$, por lo que $v(x) = \mathrm{sen}(x)$. Por otro lado, aplicando las condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ se obtiene $w(t,0) = w(t,\pi) = 0$. Finalmente, haciendo uso de los datos iniciales $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$ se llega a

$$w(0,x) = -\operatorname{sen}(x)\,, \quad w_t(0,x) = 0\,.$$

Sólo falta por determinar la función $w(t,x)$. Pero sabemos que $w(t,x)$ resuelve el siguiente problema mixto para la ecuación de ondas homogénea:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in (0,\pi), \\ w(0,x) = -\operatorname{sen}(x),\ w_t(0,x) = 0, & x \in [0,\pi], \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Buscamos soluciones con variables separadas: $w(t,x) = \alpha(t)\beta(x)$. Entonces

$$\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta''(x)}{\beta(x)} = -\lambda\,.$$

Comenzamos resolviendo el problema de contorno

$$\begin{cases} \beta''(x) + \lambda\beta(x) = 0\,, & x \in (0,\pi) \\ \beta(0) = \beta(\pi) = 0 \end{cases},$$

que únicamente admite soluciones no triviales si $\lambda = n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, de donde se desprende fácilmente que ha de ser

$$\beta(x) = k\operatorname{sen}(nx)\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Resolvemos a continuación la ecuación $\alpha''(t) + n^2\alpha(t) = 0$:

$$\alpha(t) = A\cos(nt) + B\operatorname{sen}(nt)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto

$$w(t,x) = c_1\cos(nt)\operatorname{sen}(nx) + c_2\operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen}(nx)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

que resuelta junto con las correspondientes condiciones iniciales proporciona

$$w(t,x) = -\cos(t)\operatorname{sen}(x)\,.$$

En definitiva, la solución buscada es

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x) = (1-\cos(t))\operatorname{sen}(x)\,.$$

■

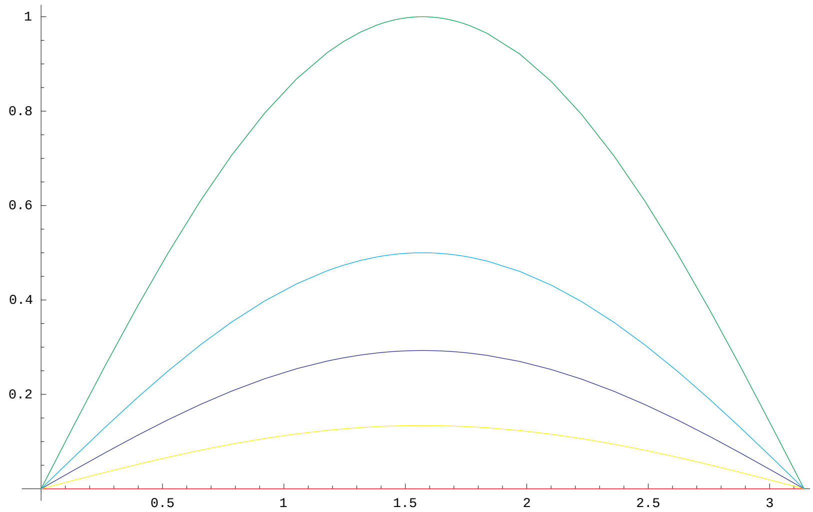



Figura 10.5: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 5 (d)

6. Se considera el funcional $\mathcal{F} : C^1([x_0, x_1]) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx\,,$$

donde $F \in C^2([x_0, x_1] \times D)$, $D$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$ y $F$ es una función convexa.

   (a) Deduce de forma justificada la ecuación de Euler–Lagrange que deben satisfacer los posibles extremos locales de $\mathcal{F}$ que sean de clase $C^2([0,1])$. ¿Cuáles son las condiciones de contorno que han de satisfacer las extremales?

   (b) Demuestra que $y \in C^2([0,1])$ es solución del problema de minimización si y sólo si es una extremal.

   (c) Calcula el mínimo de

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^2 \left\{ 2y^2 + \frac{x^2}{2}(y')^2 - 4y \right\} dx$$

   en $C^1([1,2])$.

(Junio 2004)

*Solución:* (a) Sean $y \in C^2([0,1])$ un extremo local de $\mathcal{F}$ y $\varphi \in C^2([0,1])$ una función test arbitraria. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, consideremos la perturbación de $y(x)$ determinada por

$$y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon\varphi(x)\,.$$

Claramente $y_\varepsilon \in C^2([0,1])$. Podemos hacer la deducción (sin pérdida de generalidad) para el caso en que $y \in C^2([0,1])$ es un mínimo local de $\mathcal{F}$, luego $\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi] \geq \mathcal{F}[y]$. Esto equivale a afirmar que la función $\varepsilon \mapsto \mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]$ alcanza un mínimo en $\varepsilon = 0$. Por tanto, derivando la integral con respecto al parámetro $\varepsilon$ obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon}\big(\mathcal{F}[y+\varepsilon\varphi]\big)(\varepsilon=0) \\
&\quad= \Big(\int_0^1 \{F_y(x, y(x)+\varepsilon\varphi(x), y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\varphi(x) \\
&\quad+ F_p(x, y(x)+\varepsilon\varphi(x), y'(x)+\varepsilon\varphi'(x))\varphi'(x)\}\,dx\Big)(\varepsilon=0) \\
&\quad= \int_0^1 \{F_y(x,y(x),y'(x))\varphi(x) + F_p(x,y(x),y'(x))\varphi'(x)\}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Integrando ahora por partes se concluye que

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^1 \Big\{F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}(F_p(x,y(x),y'(x)))\Big\}\varphi(x)\,dx \\
+ F_p(1,y(1),y'(1))\varphi(1) - F_p(0,y(0),y'(0))\varphi(0) \quad (10.4)
\end{aligned}$$

para toda función $\varphi \in C^2([0,1])$. En particular, si elegimos $\varphi \in C^2([0,1])$ tal que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, se obtiene

$$\int_0^1 \Big\{F_y(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}(F_p(x,y(x),y'(x)))\Big\}\varphi(x)\,dx = 0\,.$$

Una aplicación directa del lema fundamental del cálculo de variaciones nos permite concluir que

$$F_y - \frac{dF_p}{dx} = 0\,, \qquad (10.5)$$

por lo que necesariamente

$$F_p(1,y(1),y'(1))\varphi(1) - F_p(0,y(0),y'(0))\varphi(0) = 0 \qquad (10.6)$$

para toda $\varphi \in C^2([0,1])$, en virtud de (10.4). Finalmente, la arbitrariedad de la función test $\varphi$ nos permite deducir de (10.6) que las condiciones de contorno han de ser

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x=0) = \frac{\partial F}{\partial y'}(x=1) = 0\,. \tag{10.7}$$

(b) El funcional $\mathcal{F}$ es convexo por ser la función $F$ convexa. Asimismo, $\mathcal{D}$ es convexo por ser el conjunto $D$ convexo. Demostraremos que $y(x)$ es un mínimo en $\mathcal{D}$ del funcional $\mathcal{F}$ si y solamente si $y(x)$ es una extremal, es decir, resuelve la ecuación de Euler-Lagrange asociada a $\mathcal{F}$.

En (a) se comprobó que cualquier mínimo local de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$ satisface la ecuación (10.5). Comprobemos ahora el enunciado recíproco. Supongamos para ello que $y \in \mathcal{D}$ resuelve (10.5). Dado cualquier elemento $u \in \mathcal{D}$, podemos considerar una combinación convexa arbitraria $\lambda u + (1-\lambda)u$, con $0 < \lambda < 1$. Entonces, por ser $\mathcal{F}$ convexo se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[y+t(u-y)] &= \mathcal{F}[tu+(1-t)y] \\ &\le t\mathcal{F}[u] + (1-t)\mathcal{F}[y] = \mathcal{F}[y] + t(\mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[y])\,,\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{\mathcal{F}[y+t(u-y)]-\mathcal{F}[y]}{t} \le \mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[y]\,.$$

Tomando límites en la desigualdad anterior cuando $t \to 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dt}\big(\mathcal{F}[y+t(u-y)]\big)(t=0) \\ &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\mathcal{F}[y+t(u-y)]-\mathcal{F}[y]}{t}\right\} \le \mathcal{F}[u]-\mathcal{F}[y]\,,\end{aligned}$$

luego $\mathcal{F}[y] \le \mathcal{F}[u]$ para todo $u \in \mathcal{D}$, con lo que concluye la prueba.

(c) Denotemos

$$F(y,p) = 2y^2 + \frac{x^2p^2}{2} - 4y\,.$$

La ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional planteado es (cf. (10.5))

$$0 = (4y-4) - \frac{d}{dx}(x^2y') = 4y - 4 - 2xy' - x^2y''\,. \tag{10.8}$$

La función constante $y \equiv 1$ es una solución particular de esta ecuación. Por tanto, para construir la solución general de la misma basta con conocer la solución general de la ecuación homogénea

$$x^2y'' + 2xy' - 4y = 0\,,$$

que es de tipo Euler. Haciendo el cambio de variable $x = e^z$ podemos reducirla a una con coeficientes constantes, a saber: $u'' + u' - 4u = 0$, cuya solución general es

$$u(z) = Ae^{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}z} + Be^{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}z}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos que la solución general de (10.8) es

$$y(x) = Ax^{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} + Bx^{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}} + 1\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando finalmente las condiciones de contorno (10.7) en el intervalo $[1, 2]$, es decir: $y'(1) = y'(2) = 0$, concluimos que la única solución del problema de minimización es $y \equiv 1$.

$\blacksquare$

7. Sea $\Omega = [0, T] \times [0, 2\pi]$. Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\cos(2x) \right\} d(x, t)$$

definido en el dominio

$$D = \{u \in C(\Omega) : u(0, x) = u(T, x) = u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0\}\,,$$

donde $t \in [0, T]$ y $x \in [0, 2\pi]$.

(a) Demuestra que si $u \in C^2(\Omega)$, entonces la ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional anterior es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{sen}(2x)\,.$$

(b) Calcula una solución del problema mixto consistente en la ecuación de ondas de (a) junto con las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$u(0, x) = \operatorname{sen}(2x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0\,, \quad u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0\,.$$

(*Sugerencia:* Búscala de la forma $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\operatorname{sen}(\frac{nx}{2})$).

(c) ¿Es única la solución del problema planteado en (b)?

(Septiembre 2003)

*Solución:* (a) Denotemos

$$F(u,q,p) = q^2 - p^2 + p\cos(2x)\,.$$

La ecuación de Euler–Lagrange asociada al problema variacional planteado es

$$F_u - \frac{dF_q}{dt} - \frac{dF_p}{dt} = 0\,,$$

donde hemos denotado $q = \frac{\partial u}{\partial t}$ y $p = \frac{\partial u}{\partial x}$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= -2\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) - \frac{d}{dx}\Big(-2\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(2x)\Big) \\ &= -2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\mathrm{sen}(2x)\,. \end{aligned}$$

(b) Si, como indica la sugerencia, buscamos una solución de la forma $u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\,\mathrm{sen}(\frac{nx}{2})$, debe satisfacerse (formalmente)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(u_n''(t) + \frac{n^2}{4}u_n(t)\Big)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) = \mathrm{sen}(2x)$$

junto con las condiciones iniciales y de contorno, que aportan las relaciones adicionales

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) = \mathrm{sen}(2x)\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) = 0\,.$$

De este modo hemos de resolver los problemas

$$\begin{aligned} &u_4''(t) + 4u_4(t) = 1\,, \quad u_4(0) = 1\,, \quad u_4'(0) = 0\,, \\ &u_n''(t) + \frac{n^2}{4}u_n(t) = 0\,, \quad u_n(0) = 0\,, \quad u_n'(0) = 0\,, \quad n \neq 4\,, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$u_4(t) = \frac{3\cos(2t) + 1}{4}\,, \quad u_n(t) \equiv 0 \;\; \text{si } n \neq 4\,.$$

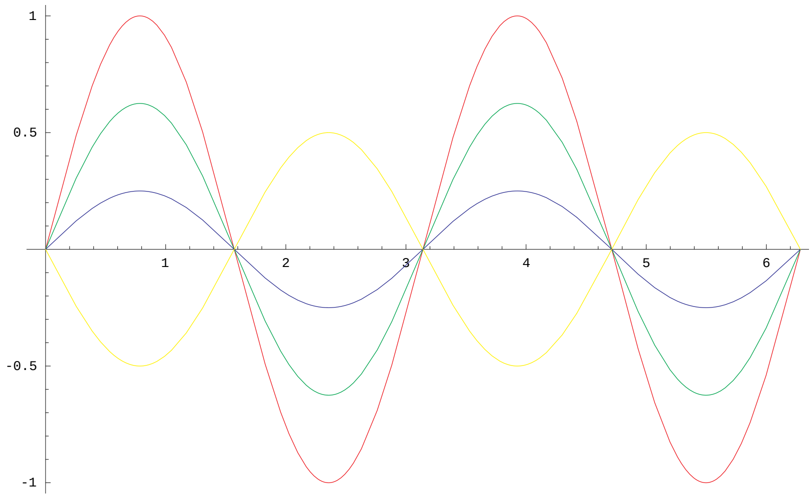



Figura 10.6: Evolución temporal de la solución del Ejercicio 7 (b)

Luego
$$u(t,x) = \left(\frac{3\cos(2t)+1}{4}\right)\operatorname{sen}(2x)$$
es una solución del problema planteado en (a)-(b).

(c) SI. Supongamos que $u_1$ y $u_2$ resolviesen el problema planteado en el ítem (b). Entonces $v := u_1 - u_2$ habría de satisfacer el siguiente problema homogéneo:
$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 \\ v(0,x) = v_t(0,x) = 0 \\ v(t,0) = v(t,2\pi) = 0 \end{cases} . \tag{10.9}$$
La función de energía asociada a (10.9) viene dada por
$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(v_t^2 + v_x^2\right) dx \,.$$
Claramente $E'(t) = 0$, como se desprende de una sencilla integración por partes. Por consiguiente
$$E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(v_t(0,x)^2 + v_x(0,x)^2\right) dx = 0$$
para todo $t \geq 0$, ya que $v_t(0,x) = 0 = v_x(0,x)$. Consecuentemente se ha de cumplir $v_t \equiv 0 \equiv v_x$, de donde se desprende que $v$ es constante. Como $v(t,0) = 0$ (cf. (10.9)), ha de ser $v \equiv 0$. En conclusión, $u_1 \equiv u_2$.