Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Apuntes para el curso cuatrimestral de Cálculo,
ETS de Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid

Luis Felipe Prieto Martínez

Cuadernos de Matemáticas en Arquitectura e Ingeniería CMat_02

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. APUNTES PARA EL CURSO CUATRIMESTRAL DE CÁLCULO, ETS DE ARQUITECTURA, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID.

Serie: Cuadernos de Matemáticas en Arquitectura e Ingeniería
Materia: Cálculo
Número: CMat_02
Autor: Luis Felipe Prieto Martínez
ISSN: 2952-5837

Coordinación y edición: Ester Patiño Rodríguez

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE MADRID DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Versión 3.3, Febrero 2024.

La plantilla de LaTeXutilizada para elaborar este libro se ha descargado de
https://www.latextemplates.com/template/legrand-orange-book

Este libro trata de cómo podemos predecir el futuro. Para ello, de todo lo que disponemos es del conocimiento de cómo son las cosas y cuáles son las reglas que gobiernan las cosas que ocurrirán. Del Cálculo sabemos que el cambio es medido por la derivada. Usarla para describir cómo se modifica una cantidad es de lo que tratan las ecuaciones diferenciales.

P. Blanchard, R. L. Devaney y G. R. Hall, *Ecuaciones Diferenciales*.

Índice

Prólogo

Este texto contiene la segunda parte de las notas que he usado para dar clase en el curso 2022-23 en la asignatura de Cálculo de 1º del *Grado en Fundamentos de la Arquitectura* de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura (ETSAM) de la Universidad Politécnica de Madrid.

La ETSAM de la UPM ya tiene unos cuadernillos muy buenos tratando estos mismos contenidos (véase [PG]), pero de todas formas he querido escribir estas notas por los siguientes motivos: son una adaptación directa de mis propias clases para mis alumnos y además son más ajustadas a la temporarización que estamos siguiendo en un pasado más reciente.

Quiero agradecer encarecidamente el apoyo que me han ofrecido mis compañeros de la Sección Departamental del Departamento de Matemática Aplicada de la ETSAM, a la hora de redactar estas notas.

¿Qué es este texto?

Es importante que aclare que estas notas no deben ser consideradas como un libro de referencia sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's). Son más bien unos apuntes de clase pasados a ordenador que contienen, además, unas hojas de ejercicios.

Tengo que decir también que estas notas están diseñadas para ser cubiertas en, aproximadamente, un mes, a razón de 6 horas semanales. En ese tiempo no pueden desarrollarse muchos más contenidos, a parte de los que aparecen aquí.

En resulta de todo lo anterior, tengo que advertir al lector que este texto está *demasiado ajustado* al curso para el que está diseñado (para lo bueno y para lo malo) y que no es muy *versátil* (puede no ser una buena referencia para un propósito distinto al de superar esta asignatura).

Contenidos

Habiendo avisado y justificado que estas notas son sólo una introducción a un tema bastante extenso, en este texto estudiaremos exclusivamente las siguientes cuestiones y ejemplos que solo involucran funciones elementales:

- ¿Qué es una EDO (y sus conceptos asociados: soluciones, orden, etc.)?
- Métodos analíticos para resolución de algunas EDO's de Orden 1 (triviales, variables separables, lineales y de Bernoulli) y algunas aplicaciones.
- Métodos analíticos para resolución de EDO's de orden 2 lineales con coeficientes constantes.
- Métodos analíticos para resolución de sistemas de 2 EDO's de orden 1, lineales con coeficientes constantes y 2 incógnitas.

Quedan fuera muchos otros contenidos importantes que deberían incluirse en un curso básico de EDO's de mayor duración, como por ejemplo los siguientes:

- Modelización utilizando EDO's.
- Métodos analíticos para la resolución de otras EDO's de orden 1 (homogéneas, exactas, factores integrantes, cambios de variable, etc.)
- Métodos numéricos para resolver EDO's.
- Métodos cualitativos para el estudio de las EDO's.
- EDO's de orden superior o igual a 2 (lineales y no lineales).
- Transformada de Laplace para resolver EDO's.
- Métodos analíticos para la resolución de sistemas de EDO's de orden 1 lineales con coeficientes constantes con 3 o más ecuaciones e incógnitas.
- Métodos numéricos para la resolución de sistemas de EDO's de orden 1.
- Métodos cualitativos para el estudio de sistemas de EDO's de orden 1.
- Cuestiones sobre existencia y unicidad de soluciones, tanto para EDO's como para sistemas de EDO's.

Bibliografía Complementaria

Con anterioridad a este texto escribí, junto con Miguel García Bravo y José María Prieto Martínez, el libro *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ciencias e Ingeniería* (véase [GPP]). Aquel libro sí estaba pensado para un curso cuatrimestral y, aún siendo bastante sucinto, está algo más desarrollado y trata un mayor número de contenidos de la lista anterior.

Por otro lado, tenemos los cuadernillos de la ETSAM escritos por los profesores Ester Patiño y Pedro Galán que son una obra ampliada y más rigurosa cubriendo prácticamente el mismo temario que tratamos en este texto.

Por último, el libro de P. Blanchard, R. L. Devaney y G. R. Hall (véase [BDH]) es una referencia clásica, muy completa y muy adecuada a un curso de introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Introducción y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden 1

En este primer capítulo introducimos el concepto de ecuación diferencial ordinaria (EDO) y las definiciones básicas relacionadas (soluciones, orden, etc.) y mostraremos algunos ejemplos que ilustren su utilidad en diferentes contextos.

Después de eso, veremos cómo resolver analíticamente (esto es, calcular explícitamente una expresión analítica de la solución) de algunos tipos EDO's de orden 1. Hay que tener muy claro que no es posible resolver analíticamente cualquier EDO de orden 1 (¡y eso que son las más sencillas!) y que sólo existen métodos para resolver analíticamente "unas pocas". Nosotros aprenderemos a resolver:

- las EDO's triviales,
- las EDO's de variables separables,
- las EDO's lineales (homogéneas y no homogéneas) y
- las EDO's de Bernoulli.

Esto deja fuera muchas EDO's importantes. La intención es que, si el alumno algun día lo necesita resolver una EDO específica, haya aprendido las ideas básicas y así pueda comprender otros métodos.

Por último, se incluye una sección dedicada a problemas geométricos que tienen que ver con rectas tangentes y curvas ortogonales que pueden resolverse con EDO's de primer orden (las EDO's de primer orden tienen que ver con derivadas de funciones y, por lo tanto, con rectas tangentes y normales a gráficas de funciones).

1.1. Introducción. Integración directa.

Una **ecuación funcional** es una ecuación en la que las incógnitas son funciones. Por ejemplo, en las siguientes, la incógnita es $y(x)$:

$$ln(y(x)) = x^2, \qquad y(y(x)) = x.$$

Si en la ecuación funcional aparecen, no sólo las funciones-incógnita, sino también sus derivadas, como por ejemplo en

$$y'(x) = \sin(t), \qquad y'(x) = y(x), \qquad y'''(x) + y''(x) + y'(x) + y(x) + x = 0,$$

lo que tenemos es una **ecuación diferencial** (ED).

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En este curso, vamos a estudiar sólo ecuaciones diferenciales en las que todas las "funciones-incógnita" son funciones reales de una variable real. Las llamamos **ecuaciones diferenciales ordinarias** (**EDO**), para distinguirlas de las demás. Todos los ejemplos del párrafo anterior son EDO's. La derivada de orden más alto que aparece en una EDO, decide el **orden de la EDO**. Las EDO's del párrafo anterior tienen grados 1, 1 y 3, respectivamente.

! En los ejemplos anteriores de EDO's hemos denotado por $y(x)$ a la función incógnita y por x a la variable independiente. Esto será lo más habitual a lo largo del texto, aunque habrá algunas excepciones. Cuando esté claro quien es la función incógnita y quien la variable independiente, no escribiremos $y(x)$, sino sencillamente y. Por ejemplo, no escribiremos $y'(x) = y(x)$, sino $y' = y$.

Aunque no las veamos en este curso, conviene saber que las ecuaciones diferenciales en las que una o más de las funciones-incógnita son funciones de varias variables y las derivadas que aparecen son parciales se llaman **ecuaciones en derivadas parciales** (**EDP**). Son bastante más complicadas de estudiar, en general. Un ejemplo sería

$$f_x(x,y) = -f_y(x,y).$$

Solución de una EDO

Ejercicio Resuelto 1 **Dada la EDO $y' = (y+1)/(x+1)$, decide cuál de las siguientes funciones son soluciones de la EDO.**

(a) $\boldsymbol{y(x) = x}$. Tenemos que $y'(x) = 1$. Por otro lado, $\frac{y+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$. Sí es solución.
(b) $\boldsymbol{y(x) = 2x+1}$. Tenemos que $y'(x) = 2$. Por otro lado, $\frac{y+1}{x+1} = \frac{(2x+1)+1}{x+1} = 2$. Sí es solución.
(c) $\boldsymbol{y(x) = x^2 - 2}$. Tenemos que $y'(x) = 2x$. Pero $\frac{y+1}{x+1} = \frac{(x^2-2)+1}{x+1} = x-1$. No es solución.

Ejercicio Resuelto 2 **Invéntate dos EDO's que tengan como solución a $y(x) = sin^2(x)$.**

La EDO más sencilla que podemos utilizar es $y' = 2\sin x \cos x$ (obtenida derivando la solución). Podemos conseguir una segunda EDO dándonos cuenta de que $y' = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$. Utilizando esto, tendríamos que $y'' = 2\cos(2x)$ y, por lo tanto, que $y''' = -4\sin(2x)$. Por lo tanto $y''' = -4y'$ también es una posible respuesta.

Las ecuaciones diferenciales, como ya hemos visto en el primero de los ejercicios resueltos, pueden tener más de una solución. Cada una de esas soluciones decimos que es una **solución particular**. **Resolver una EDO** no consiste en encontrar una o dos soluciones particulares, sino en encontrar la **solución general**, esto es, el conjunto de todas las posibles soluciones. La mayoría de las EDO's que aparecerán en este curso tienen infinitas soluciones y, además, todas esas soluciones pueden escribirse en una única expresión, que depende de uno o más parámetros (como veremos en el próximo ejercicio resuelto).

EDO's triviales

Decimos que una EDO es **trivial** si es del tipo $y'(x) = f(x)$ (o puede expresarse así tras alguna manipulación sencilla). Se resuelven simplemente integrando (**integración directa**): la solución general es el conjunto de posibles primitivas de $f(x)$, esto es, $y(x) = \int f(x)dx$.

Ejercicio Resuelto 3 Encuentra la solución general de la EDO $y'(x) = x$.
El conjunto de todas las funciones cuya derivada es igual a x es, por definición, $\int xdx$, de modo que la solución general es $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Problemas de Valor Inicial

Dada una EDO, es muy frecuente que estemos interesados en encontrar una solución particular que cumpla una o más **condiciones iniciales**, esto es, una o más condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$ para dos valores conocidos x_0, y_0 o algo similar (en la siguiente sección quedará más claro por qué). A este tipo de problemas se les conoce como **problemas de valor inicial** (PVI).

Ejercicio Resuelto 4 Encuentra la solución general del PVI $\begin{cases} y'(x) = x \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$.
Ya hemos visto en el Ejercicio Resuelto anterior, que las soluciones de la EDO $y'(x) = x$ son aquellas de la forma $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$. La condición inicial $y(1) = \frac{3}{2}$, nos permite determinar esa C:

$$y(1) = \frac{1^2}{2} + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = 1.$$

La solución particular que nos piden es, por tanto, $y(x) = \frac{x^2}{2} + 1$.

La afirmación que vamos a hacer ahora no es una verdad matemática (teorema), pero es un principio que puede orientarnos: *si tenemos una EDO "sencilla" de orden n y n condiciones iniciales, entonces existe una única solución particular del PVI correspondiente.*

Ejercicio 1 En cada apartado, comprueba si las funciones y_1, y_2, y_3 son soluciones de la EDO correspondiente.
(a) $y' = (y^2 - 1)/(x^2 + 2x)$, $y_1(x) = 1 + x$, $y_2(x) = 1 + 2x$, $y_3(x) = 1$.
(b) $y' = y^2 - 2(x+1)y + (x+1)^2$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x + 2$.
■

Ejercicio 2 ¿Cuánto tiene que valer m para que $y(x) = x^m$ sea solución de $x^2y''(x) - 2y(x) = 0$?
■

Ejercicio 3 Invéntate una EDO no trivial que tenga como solución la que se indica en cada apartado: (a) $y(x) = \sin(x)$, (b) $y(x) = e^{x^2}$, (c) $y(x) = x^2 - 2x - 2$.
■

1.2. Modelos y EDO's. Variables separables.

El **Determinismo Científico** es un paradigma que considera que el mundo físico evoluciona en el tiempo según principios o reglas totalmente predeterminadas, llamadas las **Leyes Naturales**. Según Pierre-Simon Laplace: *una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que lo componen, (...) podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes y los del átomo más ligero.*

Pero descubrir esas leyes no es algo sencillo y por eso hay que utilizar modelos. Un **modelo** es una simplificación de la realidad a una situación (1) más susceptible de ser estudiada matemáticamente pero que (2) mantiene las características esenciales que influyen en el resultado.

El estudio de las EDO's siempre ha ido de la mano de la Modelización Matemática, porque su lenguaje es muy adecuado para enunciar algunos de los modelos más importantes.

Modelo poblacional exponencial o de Malthus

Supongamos que queremos hallar una función que nos diga, en cada instante t a partir de que comience el experimento ($t = 0$), el número de individuos $y(t)$ de una determinada población, sabiendo que comenzamos con y_0 individuos. Vamos a hacer un modelo muy sencillo que simplifique la situación real. Para ello, vamos a asumir los siguientes axiomas (que son muy discutibles).

1. El crecimiento de la población no depende de ningún factor externo (depredadores, etc.).
2. El lugar en el que vive la población tiene una cantidad ilimitada de recursos.
3. El crecimiento de la población es directamente proporcional al número de individos.

Una posible manera de describir la situación anterior es mediante el siguiente PVI, donde r es una constante:

$$\begin{cases} y' = ry \\ y(0) = y_0 \end{cases} .$$

Variables separadables

Decimos que una EDO es de **variables separables** si es del tipo $f(y(x))y'(x) = g(x)$ (o puede expresarse así tras alguna manipulación sencilla). Para resolverlas, integramos en los dos lados con respecto a x. Nótese que es posible usar un cambio de variable:

$$f(y(x))y'(x) = g(x) \Rightarrow \int f(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx \Rightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

En general, después de las integrales, hay que resolver una ecuación funcional para despejar y.

Ejercicio Resuelto 5 Resuelve la EDO $y' = ry$ (correspondiente al modelo exponencial). La función $y(t) = 0$ es una solución de la EDO. Dejando a un lado ese caso, podemos dividir toda le EDO por y llegando a:

$$\frac{y'}{y} = r \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int rdt \Rightarrow ln|y| = rt + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow y = De^{rt},\ D \neq 0.$$

Resumiendo los dos casos, la solución general de la EDO es $y(t) = De^{t}$, $D \in \mathbb{R}$.

Segunda Ley de Newton

Las fuerzas son las responsables de los cambios en las trayectorias de los objetos. Si tenemos un objeto de masa m que se mueve a lo largo de una recta y denotamos por $y(t)$ a su posición a lo largo del tiempo, y queda determinada por la EDO $my'' = F(t, y, y')$, donde F es una función que representa la fuerza. La fuerza es **conservativa** si depende sólo de la posición del objeto. En ese caso, tenemos una EDO bastante más sencilla:

$$my'' = F(y).$$

En [GPP] puede verse como hacer un cambio de variable a la EDO anterior para convertirla en una EDO de variables separables y relacionarla con la *Ley de Conservación de la Energía*. De cualquier modo, hay dos casos de dicha EDO que debemos destacar.

- **Problemas de caída libre:** Supongamos que el objeto se mueve verticalmente, $y(t)$ representa su altura y la única fuerza que interviene es la fuerza conservativa de la gravedad $F(y) = -mg$ (asumimos que es constante, siendo g la aceleración de la gravedad, que "apunta hacia abajo" y que hay ausencia de rozamiento). En este caso, la EDO correspondiente es:

  $$\cancel{m}y'' = -\cancel{m}g \Rightarrow y'' = -g.$$

  Para resolver esta EDO, simplemente integramos dos veces

  $$y'' = -g \Rightarrow y' = -gt + C \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D.$$

  En este contexto, se entiende muy bien el significado de las condiciones iniciales. Para determinar la trayectoria del móvil necesitamos conocer los datos de la velocidad inicial $y'(0) = v_0 = C$ y de la posición inicial $y(0) = y_0 = D$. Así, llegamos a la fórmula que aprendíamos en el instituto como solución de este problema.
- **Problemas de movimiento armónico simple:** Supongamos que el objeto se mueve horizontalmente y que la única fuerza que interviene corresponde a un muelle (no hay rozamiento). Este problema corresponde a la EDO $my'' = -ky$, donde k es la llamada **constante del muelle**. Aprenderemos a resolverla en el capítulo siguiente (Ejercicio Resuelto 14).

Deflexión de una viga

Las vigas sufren deformaciones que pueden ser debidas a su propio peso o a la acción de fuerzas externas. Pensemos en una viga (suponemos que es *homogénea*, *isotrópica* y *con sección transversal constante*) sobre la que actuarán fuerzas verticales. Podemos decir que este problema es bidimensional, contenido en Plano XZ, y que la viga (antes de ser sometida a las fuerzas) tiene un *eje de simetría* que es una recta y que coincide con el Eje OX. La curva $z = u(x)$ que describe la deformación que experimenta la viga, esto es, su desviación respecto al eje de simetría, se conoce como **curva de deflexión** o **curva elástica**. En estos problemas, suele considerarse que el Eje OZ está orientado de forma contraria a la habitual ("arriba negativo y abajo positivo"). En este caso, $u(x)$ viene determinada por la EDO

$$EIu'''' = \omega(x),$$

donde al producto EI (constante) se le conoce como **rigidez a la flexión de la viga** y $\omega(x)$ es la **carga por unidad de longitud**. Los detalles del desarrollo están muy bien explicados en [PG].

Ejercicio 4 Calcula la solución de los siguientes ecuaciones diferenciales o PVI's en cada caso:

(a) $y' = \dfrac{y}{x}$, (b) $y'\sqrt{x^2+1} = xe^{-y}$, (c) $y' = xy^2$, (d) $\begin{cases} y' = -\frac{x}{ye^{x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$, (e) $\begin{cases} yy' - e^x = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases}$.

1.3. Algunos métodos más para resolver EDO's de orden 1

Ya conocemos dos tipos de ecuaciones, las EDO's triviales y las EDO's de variables separables, y un método para resolver cada uno de los dos tipos.

No existe un método para resolver analíticamente cualquier EDO, así que nosotros sólo vamos a aparender a resolver algunos tipos. Incluso dentro de aquellas familias de EDO's que tienen un método de resolución, es posible que nos topemos con alguna que involucre una integral que no podamos resolver (por ejemplo $y' = e^{-x^2}$) o una ecuación funcional que no podamos resolver.

Ecuaciones lineales homogéneas

Decimos que una EDO es **lineal homogénea** si es del tipo $y'(x) = a(x)y(x)$ (o puede expresarse así tras alguna manipulación sencilla).

Teorema 1 La EDO anterior es de variables separables:

$$y'(x) = a(x)y(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = a(x) \Rightarrow \int \frac{1}{y(x)}dy = \int a(x)dx \Rightarrow ln|y| = \int a(x)dx.$$

Además, si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son dos de sus soluciones particulares y $\lambda \in \mathbb{R}$, también son soluciones:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x), \qquad y(x) = \lambda \cdot y_1(x).$$

Ejercicio Resuelto 6 Resuelve la EDO $y' = -\frac{2}{x}y$.
La función $y(x) = 0$ es una solución de la EDO. Dejando a un lado ese caso, podemos dividir toda le EDO por y llegando a:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{2}{x}dx \Rightarrow \ln|y| = \ln x^{-2} + C,\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \frac{D}{x^2},\ D \neq 0.$$

Reuniendo los dos casos, la solución general de la EDO es $y(x) = \frac{D}{x^2}$, $D \in \mathbb{R}$.

Ecuaciones lineales no homogéneas

Decimos que una EDO es **lineal** si es del tipo $y'(x) = a(x)y(x) + r(x)$ (o puede expresarse así tras alguna manipulación sencilla).

Teorema 2 Para resolver $y'(x) = a(x)y(x) + r(x)$ hay que:

1. Resolver la **EDO lineal homogénea asociada** $y'(x) = a(x)y(x)$.
2. Usar el **Método de Variación de Constantes**. Supongamos que Supongamos la solución general de la homogénea asociada es $y(x) = D \cdot y_h(x)$, con $D \in \mathbb{R}$. Entonces podemos encontrar una solución particular de la EDO original del tipo

$$y_p(x) = D(x) \cdot y_h(x).$$

3. La solución general de la EDO original es $y(x) = y_p(x) + D \cdot y_h(x)$, con $D \in \mathbb{R}$.

Ejercicio Resuelto 7 **Resuelve la EDO $y' = -\frac{2}{x}y + x^2$.**

1. Resolvemos $y' = -\frac{2}{x}y$. La solución general es $y(x) = \frac{D}{x^2}$, $D \in \mathbb{R}$ (Ejercicio Resuelto 6).
2. Ahora, buscamos una solución particular del tipo $y_p(x) = \frac{D(x)}{x^2}$. La derivada de esa solución particular será $y_p'(x) = \frac{D'(x)x^2 - 2D(x)x}{x^4}$. Sustituyendo esas dos expresiones en la EDO original obtenemos:

$$\frac{D'(x)x^2 - 2D(x)x}{x^4} = -\frac{2}{x}\frac{D(x)}{x^2} + x^2 \Rightarrow D'(x)x - \cancel{2D(x)} = -\cancel{2D(x)} + x^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D'(x) = x^4 \Rightarrow D(x) = \frac{x^5}{5} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

   Sólo necesitamos una solución particular. Tomamos $C = 0$ y nos quedamos con $y_p(x) = \frac{x^3}{5}$.
3. La solución general es, por lo tanto, $y(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{E}{x^2}$, $E \in \mathbb{R}$.

Ecuación de Bernoulli

Decimos que una EDO es **de Bernoulli** si es del tipo $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)(y(x))^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (o puede expresarse así tras alguna manipulación sencilla).

Teorema 3 Si en la EDO anterior pasamos y^α dividiendo y hacemos el cambio de variable

$$u = y^{1-\alpha}, \qquad u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

llegamos a una EDO lineal:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \Rightarrow y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u = q(x).$$

Ejercicio Resuelto 8 **Resuelve la EDO de Bernoulli $y' - \frac{2y}{x} = -x^2y^2$.**

$y(x) = 0$ es una solución. Dejando ese caso a un lado, podemos dividir toda la ecuación por y^2 y hacer el cambio de variables $u = \frac{1}{y}$, $u' = -\frac{y'}{y^2}$:

$$y' - \frac{2y}{x} = -x^2y^2 \Rightarrow y'y^{-2} - \frac{2}{x}y^{-1} = -x^2 \Rightarrow u' + \frac{2}{x}u = x^2.$$

Ya conocemos la solución general de esta EDO del ejercicio resuelto anterior: $u(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Para terminar, deshacemos el cambio de variable:

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}},\ C \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \frac{5x^2}{x^5 + D},\ D \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5 Encuentra la solución de los siguientes PVI:

$$(a)\ \begin{cases} y' = -\frac{x}{ye^{x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} yy' - e^x = 0 \\ y(0) = 4 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} (x+1)y + y' = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} y + y' = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} yy' - 2y^2 = e^x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

■

1.4. Aplicaciones a problemas geométricos

El matemático francés Pierre de Fermat fue de los primeros en estudiar el *Problema de la Tangente*, que fue una de las motivaciones originales para desarrollar el *Cálculo Diferencial*. Hay muchísimos problemas geométricos que involucran tangentes que se resuelven utilizando EDO's de orden 1.

Familias uniparamétricas de curvas

Una **curva implícita** es el conjunto de puntos del plano que cumple una ecuación del tipo $F(x,y) = 0$, donde F es una función de dos variables. Si $F(x,y)$ depende de un parámetro C, entonces no tenemos una curva, sino una **familia uniparamétrica de curvas**. Por ejemplo $x^2+y^2-1=0$ es una curva (en este caso un círculo), mientras que $x^2+y^2-C=0$, $C>0$, corresponde a una familia uniparamétrica de curvas (en este caso un conjunto de círculos, uno por cada posible valor de C).

Como ya hemos dicho, en los casos "sencillos" se cumple el siguiente principio: *una EDO tiene como solución general un conjunto de funciones $y(x)$ que dependen de una constante.* Por lo tanto, podemos ver la solución general de una EDO como una familia uniparamétrica de curvas.

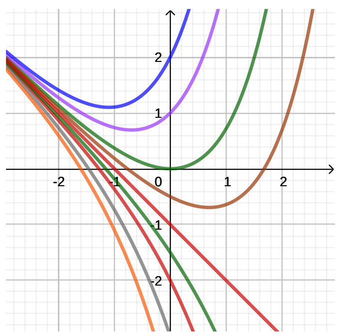
Ejercicio Resuelto 9 **Hallar la familia de curvas que verifican que la pendiente de la recta tangente a cada uno de sus puntos es igual a la suma de las coordenadas de dicho punto. De entre todas ellas, determinar la curva que pasa por el punto $(0,2)$.**
Nos piden que hallemos la solución del siguiente PVI correspondiente a la EDO lineal:

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

- La solución de la EDO homogénea asociada $y' = y$ es $y = De^x$, $D \in \mathbb{R}$ (Ej. Resuelto 5).
- Buscamos una solución particular del tipo $y_p = D(x)e^x$ (método de variación de constantes). Se tiene que $y_p' = D'(x)e^x + D(x)e^x$, así que sustituimos en la EDO original:

$$D'(x)e^x + \cancel{D(x)e^x} = \cancel{D(x)e^x} + x \Rightarrow D'(x) = xe^{-x}.$$

  Integrando por partes concluimos que una posible elección de $D(x)$ es $D(x) = -(1+x)e^{-x}$, y por lo tanto una posible solución particular es $y_p = -1-x$.
- La solución de la EDO es $y = -1-x+De^x$, $D \in \mathbb{R}$ (familia uniparamétrica de curvas).



Vemos que $y(0) = -1+D = 2 \Rightarrow D = 3$ y, por tanto, la solución correspondiente es $y(x) = -1-x+3e^x$ (es, de hecho, la línea azul de la imagen).

Recíprocamente: *dada una familia uniparamétrica de curvas "sencillas" puede ser posible encontrar una EDO que las tenga como solución general.* Para hallarla, debemos considerar que y es una función de x, aislar el parámetro en uno de los dos miembros y derivar respecto de x.

Ejercicio Resuelto 10 Encuentra una EDO cuya solución sea la familia uniparamétrica de curvas (circunferencias) $x^2+y^2=C, C>0$.

Consideramos y como una función de x y derivamos en los dos lados de la expresión respecto de x, obteniendo:

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Familias de curvas ortogonales

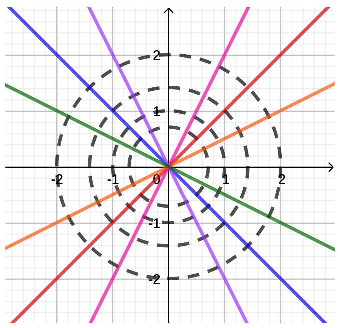
Dos curvas que se cortan en un punto son **ortogonales** cuando las rectas tangentes a las curvas en dicho punto son perpendiculares. Dos familias uniparamétrias de curvas son **ortogonales** si cualquier elemento de la primera es ortogonal a todos los elementos de la segunda (y viceversa).

Recordemos el siguiente resultado, similar a uno ya conocido del Bachillerato:

Teorema 4 Si las gráficas de dos funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son ortogonales y se cortan en el punto $P=(x_0,y_0)$, entonces $y_1'(x_0)=-\frac{1}{y_2'(x_0)}$.

Ejercicio Resuelto 11 Calcula la familia uniparamétrica de curvas ortogonal a las circunferencias $x^2+y^2=C, C>0$.

Ya hemos hallado (ejercicio resuelto anterior) la EDO cuyas soluciones son esas circunferencias. La EDO correspondiente a la familia de curvas ortogonales a las circunferencias será $y'=\frac{y}{x}$. Es de variables separables y muy sencilla de resolver. Las solución es el haz de rectas $y=Dx$, $D\in\mathbb{R}$.



Ejercicio 6 Halla la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,3)$ y que tiene pendiente $\frac{y}{x^2}$ en cada uno de sus puntos.

■

Ejercicio 7 Prueba que la curva que cumple que en todos sus puntos la pendiente de la recta tangente es proporcional a la abscisa del punto es una parábola.

■

Ejercicio 8 Encuentra las curvas ortogonales a la familia uniparamétrica de curvas $x^2+2y^2=C$, $C>0$. Dibuja en un mismo diagrama unos cuantos elementos de cada una de las familias (utiliza colores diferentes para las dos familias).

■

Ejercicios Finales

Ejercicio 1 Resuelve (cuando sea posible) las siguientes EDO's:

(a) $y' - 2xy = x$
(b) $y' = (1+x^2)(1+y)$
(c) $(x^2+4)y' = xy$
(d) $yy' = e^x$
(e) $2yy' + \sin x = 0$
(f) $y' = (3x^2+1)y + 9x^2 + 3$
(g) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
(h) $y' = -3y + e^x$
(i) $y' = \frac{y}{x} + x^2 - 1$
(j) $y' - 5y = 1$
(k) $y' - 2xy = 2x^3$
(l) $y' + xy = xe^{-x^2}y^{-3}$
(m) $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$
(n) $y' - y = x^3\sqrt[3]{y}$
(ñ) $y' + 2xy = xy^2$
(o) $y' = \frac{1}{x}y = x\sqrt{y}$
(p) $yy' - 2y^2 = e^x$
(q) $y - xy' = y^2$
(r) $yy' + x = \frac{y^2}{x}$
(s) $y' + xy = xy^{-3}$
(t) $y' - y = -\frac{x}{y}$

Ejercicio 2 Resuelve los siguientes PVI's:

$(a)\ \begin{cases} y(x+1) + y' = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$ $\quad (b)\ \begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad (c)\ \begin{cases} y + y' = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad (d)\ \begin{cases} y' = \frac{4x^3 - y^3}{3xy^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Ejercicio 3 En este curso hemos aprendido a resolver 4 tipos de ecuaciones diferenciales: EDO's triviales, EDO's de variables separables, EDO's lineales (homogéneas y no homogéneas) y de Bernoulli. Esta clasificación no es perfecta y algúnas ecuaciones pueden pertenecer a más de un tipo (por ejemplo, ya hemos explicado que las EDO's lineales homogéneas son un tipo de EDO's de variables separables).
A continuación, hay una lista con varias EDO's. Indica, en cada caso, si la EDO pertenece a alguno de los 4 tipos anteriores (como hemos dicho, puede pertenecer a más de uno) o si, por el contrario, no se puede resolver por los métodos que hemos visto en este curso. Después re-escribe las EDO's que sí pertenecen a alguno de los 4 tipos que hemos nombrado en la *forma habitual* ($y' = f(x)$ para las triviales; $f(y)y' = g(x)$ para las de variables separables; $y' = a(x)y + r(x)$ para las lineales; $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ para las de Bernoulli).

(a) $y' = x + y$
(b) $y' = 2xy$
(c) $y' = \cos(x)$
(d) $y' = \sin(x) + y$

(e) $y' = e^{-x} + y$
(f) $y' = x^2 - 2x + y$
(g) $y' = (1+x^2)/(1+y^2)$
(h) $y' = (1+y^2)/(1-x^2)$
(i) $y' = x^2 + y^2$
(j) $y' = \sin(x) + \cos(y)$
(k) $y' = e^{-x} - y^2$
(l) $y' = x^2 - 2x + y^3$
(m) $y' = y^2 - 2xy + x^2$
(n) $y' = x^3 + y^3$
(ñ) $y' = x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 5y$

Ejercicio 4 Vamos a justificar el *Método de Variación de Constantes* (ver Teorema 2). Dada una EDO lineal $y' = a(x)y + r(x)$, supongamos que y_h es una solución de la EDO homogénea asociada. Demostrar que un cambio de variable del tipo $y = D(x)y_h$ convierte a la EDO en una EDO trivial.

Ejercicio 5 Considérese un objeto que se encuentra en un ambiente cuya temperatura es constante e igual a $T_{ext.}$. Denotemos por $T(t)$ a la temperatura (en grados Celsius) del objeto en el instante t (mediremos el tiempo en minutos) y supongamos que $T(0) = T_0 > T_{ext.}$. La **Ley de Enfriamiento de Newton** establece que la variación de la temperatura del objeto es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del mismo y la temperatura exterior.
(a) Escribe la EDO que describe el proceso anterior (y que dependerá de un parámetro).
(b) Resuélve la EDO del apartado anterior.
(c) Siendo $T(t)$ la solución que has calculado en el apartado anterior, calcula el límite $\lim_{t\to+\infty} T(t)$. Interpreta el resultado obtenido en el contexto de las temperaturas descrita en el enunciado.
(d) Supongamos que el objeto ha tardado 10 minutos en bajar de 100º a 90º. ¿Cuántos minutos más tardará en llegar a los 50º?

Ejercicio 6 Vamos a estudiar un nuevo modelo poblacional. En el contexto y notación del Modelo Poblacional Exponencial (que vimos en la Sección 1.2), vamos a cambiar los Axiomas 2 y 3 por los siguientes:
2.' El lugar en el que vive la población tiene una cantidad limitada de recursos. Supongamos que tiene una capacidad máxima de C individuos.
3.' El crecimiento de la población es directamente proporcional al número de individuos y también a la cantidad de recursos disponibles.
En base a lo anterior, la EDO que describe la evolución de la población y a lo largo del tiempo t es

$$y' = ky(C-y), \qquad C, k > 0.$$

A la EDO anterior se le llama **Ecuación Logística**.
(a) Resuelve la EDO anterior (necesitarás utilizar el Método de Descomposición en Fracciones Simples), suponiendo que la población inicial es $y(0) = y_0 > 0$. Este es el llamado **Modelo Logístico de Verhulst**.
(b) Siendo $y(t)$ la solución que has calculado en el apartado anterior, calcula el límite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$. Interpreta el resultado obtenido en el contexto de la población descrita en el enunciado.

Ejercicio 7 Sea $y(x)$ una función con la propiedad de que, para cualquier valor de la x, el crecimiento de $y(x)$ es inversamente proporcional a x.
(a) Escribe la condición anterior como una EDO.
(b) Utilizando sólo y exclusivamente la información del enunciado (sin resolver la EDO) trata de hacer un esbozo de la gráfica de la función.
(c) Encuentra la familia de curvas correspondientes a gráficas de las funciones $y(x)$ que cumplen la propiedad anterior.

Ejercicio 8 Encuentra la familia de curvas C^1 que cumplen que, para cualquiera de sus puntos P:

(a) El segmento contenido en la recta tangente a la curva en P y limitado por los ejes de coordenadas está bisecado por P.
(b) La distancia de P al origen de coordenadas es igual a la longitud del segmento de recta normal a la curva en P comprendido entre P y el eje OY.
(c) Siendo Q el punto de corte de la recta normal a la curva en P con el eje OX, la abscisa de Q es igual al cuadrado de la ordenada de P.
(d) La recta tangente a la curva en P corta al eje OY en un punto Q cuya ordenada es el cuadrado de la ordenada de P.
(e) La pendiente de la recta tangente a la curva en P es igual a la ordenada de P aumentada en 3 unidades.

Ejercicio 9 Para cada una de las familias de curvas que has calculado en el ejercicio anterior, encuentra, si existe, el elemento (la curva de la familia) que pasa por el punto $(1,1)$.

Ejercicio 10 Encuentra la familia uniparamétrica de curvas ortogonales a cada una de las siguientes familias.

(a) Curvas solución de $y' = x$.
(b) Curvas solución de $y' = y$.
(c) Curvas solución de $y' = y^2$.
(d) $x^2 - y^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$.
(e) $x^{2/3} + y^{2/3} = a$, $a > 0$ (astroides).

Después, para cada uno de los apartados, representa en un mismo diagrama varios elementos de la familia de curvas que aparece en el enunciado y varios elementos de la familia ortogonal que has calculado. Utiliza el ordenador cuando sea necesario.

Ejercicio 11 En el contexto y notación de los problemas de deflexiones de vigas explicados en la Sección 1.2, vamos a calcular la curva de deflexión $u(x)$ de una viga empotrada.

Consideremos una viga que tiene uno de sus extremos en el punto $(0,0)$ y el otro en el punto $(L,0)$ (L es la longitud de la viga) y sobre ela que actua una carga que se distribuye uniformemente (esto es, $\omega(x)$ es constante, digamos que igual a ω_0). La condición de que esta viga esté **empotrada** quiere decir que está fijada en ambos extremos. Esta restricción se traduce en cuatro condiciones iniciales (dos por cada extremo), que dan lugar al PVI

$$\begin{cases} EIu'''' = \omega_0 \\ u(0) = u'(0) = u(L) = u'(L) = 0 \end{cases}.$$

Resuélve el PVI anterior. Después, para los valores $EI = 1, L = 6, \omega_0 = 2$, representa gráficamente (puedes utilizar el ordenador, si quieres) la función $u(x)$ para x en el intervalo $[0,L]$ (recuerda que, en estos problemas, el eje vertical se suele orientar de la forma contraria a la habitual).

Ejercicios de las Oposiciones de Profesores de Enseñanza Secundaria

Ejercicio 1 — Castilla y León 2004. Demostrar que si todas las normales a una curva suficientemente regular pasan por un punto fijo, dicha curva está contenida (como conjunto de puntos) en una circunferencia.

Ejercicio 2 — Extremadura 2002. Hallar, en cada caso, las ecuaciones de las curvas que cumplen las siguientes condiciones:
(a) La pendiente de la tangente en un punto cualquiera (x,y) es la mitad de la pendiente de la recta que une ese punto con el origen.
(b) La normal en cada punto, la recta que une ese punto con el origen y el eje OX forman un triángulo isósceles que tiene al eje OX como lado desigual.
(c) El segmento de la normal trazada en cualquier punto (x,y) que tiene por extremos a ese punto y su intersección con OX es cortado en dos partes iguales por el eje OY.

Ejercicio 3 — Murcia 2000. Un zorro camina en línea recta cuando, de pronto, cruza, perpendicularmente a su trayectoria y también en línea recta, un conejo. El zorro inicia una persecución en el instante en que el conejo pasa a la mínima distancia de él. Despues mantiene su cabeza y el resto de su cuerpo constantemente apuntados en la dirección del conejo. Con el objetivo de atacar en el momento oportuno, ajusta su marcha para mantener invariable la distancia c, que es la mínima mencionada anteriormente. Hallar la ecuación de la curva que describe el zorro durante la persecución y representarla gráficamente.

Ejercicio 4 — Extremadura 1998. Hallar la familia de todas las curvas planas que cumplen la siguiente condición: si trazamos la tangente en un punto cualquiera (x,y) de la curva, la distancia entre dicho punto y el punto Q de corte de la tangente con el eje OX es igual a la distancia entre ese punto Q y el origen de coordenadas.

Ejercicio 5 — Extremadura 1996. Por un punto (x,y) de una curva que pasa por el origen de coordenadas, se trazan rectas paralelas a los ejes de coordenadas. Hallar las ecuaciones de las curvas que dividen al rectángulo formado por las dos rectas y los ejes coordenados en dos partes tales que el área de una de ellas sea el triple de la otra.

2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden 2 lineales con coeficientes constantes

En este capítulo aprenderemos a resolver analíticamente EDO's de orden 2 lineales con coeficientes constantes, esto es, ecuaciones del tipo

$$y'' + Ay' + By = g(x).$$

La intención es introducir algunas ideas que son extrapolables a otras EDO's de orden mayor o igual a 2 (lineales o no). Nótese que, como ya ocurría con las EDO's de orden 1, en general no es posible resolver analíticamente cualquier EDO de orden superior o igual a 2.

Cabe destacar que, entre las EDO's lineales que se estudian en este capítulo, se incluyen algunos ejemplos importantes de la Física (por los motivos que se explican en la Subsección *Segunda Ley de Newton* de la Sección 1.2).

2.1. Caso homogéneo

Teoría

Dos funciones $y_1(x), y_2(x)$ son linealmente independientes si no son proporcionales. Un criterio muy útil para decidir si dos funciones son linealmente independientes se basa en el siguiente determinante, llamado **wronskiano**:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Si el wronskiano es dinstinto de 0 en algún punto x_0, entonces $y_1(x), y_2(x)$ son linealmente independientes.

Ejercicio Resuelto 12 **Utiliza el wronskiano para demostrar que $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ son linealmente independientes siempre y cuando $r_1 \neq r_2$.**
En este caso, el wronskiano es

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{r_1 x_0} e^{r_2 x_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = e^{r_1 x_0} e^{r_2 x_0} (r_2 - r_1)$$

y esa expresión es distinta de 0 si y solo si $r_1 \neq r_2$.

En relación a las EDO's de orden 2 lineales homogéneas con coeficientes constantes, se tiene lo siguiente (comparar con Teorema 1):

Teorema 5 Dada la EDO $y'' + Ay' + By = 0$, si $y_1(x), y_2(x)$ son dos de sus soluciones particulares y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$y_1(x) + y_2(x), \qquad \lambda y_1(x)$$

también son soluciones. Más aún, si podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de la EDO, $y_1(x), y_2(x)$, la solución general de la misma es

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Método

Falta, entonces, aprender a encontrar dos soluciones linealmente independientes de la EDO $y'' + Ay' + By = 0$. Definimos la **ecuación característica** de la EDO anterior como la ecuación (polinómica) de segundo grado $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ (recomiendo ver anexo para recordar algunas cosas de las ecuaciones de segundo grado).

Teorema 6 Dada la EDO $y'' + Ay' + By = 0$:

- Si la ecuación característica tiene dos soluciones distinas r_1, r_2, entonces las funciones $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO (Ejercicio Resuelto 12).
- Si la ecuación característica tiene una única raíz doble r, entonces las funciones $y_1(x) = e^{rx}$, $y_2(x) = xe^{rx}$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO (Ejercicio 9).

En el primero de los dos casos anteriores, sería posible que r_1, r_2 fueran raíces complejas conjugadas: $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$. En este caso, podemos utilizar la *Fórmula de Euler* (ver

Anexo) para demostrar:

Teorema 7 Dada la EDO $y'' + Ay' + By = 0$, si la ecuación característica tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$, entonces $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO.

Ejercicio Resuelto 13 Resuelve la EDO $y'' + 7y' + 12y = 0$.
En primer lugar, buscamos las soluciones de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -3, -4.$$

La solución general es, por lo tanto, $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio Resuelto 14 — Ley de Hooke. Un objeto se mueve a lo largo de una recta siguiendo un movimiento armónico simple con equilibrio en $x = 0$ si su movimiento está determinado por la EDO $mx'' = -kx$, donde $k > 0$ es la constante del oscilador. Sabiendo que en el instante $t = 0$ el móvil se encuentra en la posición x_0 y tiene velocidad v_0, determina las ecuaciones de dicho móvil (con una expresión que no involucre números complejos).
En primer lugar, resolvemos la EDO. Buscamos las soluciones de la ecuación característica:

$$m\lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{k}m.$$

Denotemos $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (este parámetro es la **frecuencia angular**). Una posible expresión de la solución general es la formada por combinaciones lineales de $y_1(x) = e^{i\omega x}$, $y_2(x) = e^{-i\omega x}$. Pero nos han pedido una expresión en la que no aparezcan números complejos. Así que, como las dos raíces del polinomio característico son $0 \pm \omega i$, la una posible expresión de la solución general es

$$x(t) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ajustamos ahora el valor de las dos constantes a partir de las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 \\ x'(0) = v_0 \Rightarrow C_2 = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t)}$$

Ejercicio Resuelto 15 Resuelve la EDO $y'' - 2y' + y = 0$.
Hallamos las soluciones de la ecuación característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ (raiz doble). Dos soluciones linealmente independientes serán $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ y la solución general:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 9 Utiliza el wronskiano para demostrar que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^{rx}$ son linealmente independientes.

■

Ejercicio 10 Calcula la solución de los siguientes PVI's:

$$(a) \begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y'' - y' - 30y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = -4 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

■

2.2. Caso no homogéneo

La manera de resolver las EDO's de orden 2 lineales no homogéneas con coeficientes constantes es muy similar a la de resolver las EDO's de orden 1 lineales (ver Teorema 2).

Teorema 8 Para resolver $y''(x)+Ay'(x)+By(x)=g(x)$ tenemos que:

1. Primero hallamos la solución general de la **EDO lineal homogénea asociada** $y''(x)+Ay'(x)+By(x)$. Supongamos que es $y(x)=C_1y_2(x)+C_2y_2(x)$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
2. Después, buscamos una solución particular $y_p(x)$ de la EDO no homogénea.
3. La solución general de la EDO original es $y(x)=y_p(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

La principal diferencia, respecto al caso de orden 1, es el método que vamos a emplear para hallar la solución particular. Utilizaremos el llamado **método de los coeficientes indeterminados** o **método de tanteo**, que nos servirá para resolver los casos más sencillos.

! Es posible utilizar el **Método de Variación de Constantes**, en su versión para orden superior. En la notación del Teorema anterior, buscaríamos soluciones del tipo $C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, donde impondríamos una condición extra, que es $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)$. Pero este método es bastante tedioso, incluso en los casos más fáciles, así que no lo usaremos aquí.

La idea general del Método de Tanteo consiste en buscar soluciones particulares que "se parezcan" a la función $g(x)$. Veamos los siguientes ejemplos sencillos:

Teorema 9 — Método de Tanteo I. Sea la EDO $y''(x)+Ay'(x)+By(x)=g(x)$ y sea $p(\lambda)$ el polinomio de la ecuación característica. Para cada uno de los casos de $g(x)$ que aparecen más abajo, buscaremos una solución particular del tipo que se indica.

- $$\boxed{\text{Polinomio de grado } k}\Rightarrow\begin{cases} p(0)\neq 0 \text{ (Caso no Deg.)}\Rightarrow y_p(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_kx^k \\ p(0)=0 \text{ (Caso Deg.)}\Rightarrow \begin{cases} y_p(x)=x(C_0+\ldots+C_kx^k) \text{ ó} \\ y_p(x)=x^2(C_0+\ldots+C_kx^k)\end{cases}\end{cases}$$
- $$\boxed{e^{rx}}\Rightarrow\begin{cases} g(x) \text{ no es solución de la homogénea (Caso no Deg.)}\Rightarrow y_p(x)=Ce^{rx} \\ g(x) \text{ sí es solución de la homogénea (Caso Deg.)}\Rightarrow \begin{cases} y_p(x)=Cxe^{rx} \text{ ó} \\ y_p(x)=Cx^2e^{rx}\end{cases}\end{cases}$$
- $$\boxed{\sin(rx)}\Rightarrow\begin{cases} g(x) \text{ no sol. de la hom. (Caso no Deg.)}\Rightarrow y_p(x)=C_1\sin(rx)+C_2\cos(rx) \\ g(x) \text{ sol. de la hom. (Caso Deg.)}\Rightarrow \begin{cases} y_p(x)=x(C_1\sin(rx)+C_2\cos(rx)) \text{ ó} \\ y_p(x)=x^2(C_1\sin(rx)+C_2\cos(rx))\end{cases}\end{cases}$$

  (equiv. para $\boxed{\cos(rx)}$)

Ejercicio Resuelto 16 Resuelve la EDO $y''-2y'+y=x^2$.

1. Resolvemos en primer lugar la EDO homogénea asociada, para lo que hay que resolver la ecuación característica $\lambda^2-2\lambda+1\Rightarrow\lambda=1$ (raiz doble). Por lo tanto, su solución general es $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.
2. Buscamos una solución particular mediante el método de tanteo. El teorema anterior nos dice que debemos probar con un polinomio de grado 2 (0 no es una solución de la

ecuación característica):

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y_p'(x) = 2Ax + B \Rightarrow y_p''(x) = 2A.$$

Sustituyendo todo en la ecuación original, despejamos el valor de los parámetros A, B, C:

$$2A - 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 \Rightarrow Ax^2 + (B - 4A)x + (C - 2B + 2A) = x^2.$$

Concluimos que $A = 1, B = 4, C = 6$ y que la solución particular es $y_p(x) = x^2 + 4x + 6$.

3. La solución general es $y(x) = x^2 + 4x + 6 + C_1e^x + C_2xe^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

En el siguiente Teorema, aparecen algunos casos más, pero tengamos claro que el Método de Tanteo no vale para cualquier función $g(x)$.

Teorema 10 — Método de Tanteo II. Sea la EDO $y''(x) + Ay'(x) + By(x) = g(x)$, $p(\lambda)$ el polinomio de la ecuación característica y $q(x)$ un polinomio de grado k. Para cada uno de los casos de $g(x)$ que aparecen más abajo, buscaremos una solución particular del tipo que se indica.

- $$\boxed{q(x)e^{rx}} \Rightarrow \begin{cases} e^{rx} \text{ no sol. de la hom. (Caso no Deg.)} \Rightarrow y_p(x) = (C_0 + \ldots + C_kx^k)e^{rx} \\ e^{rx} \text{ sol de la hom. (Caso Deg.)} \Rightarrow \begin{cases} y_p(x) = x(C_0 + \ldots + C_kx^k)e^{rx} \text{ ó} \\ y_p(x) = x^2(C_0 + \ldots + C_kx^k)e^{rx} \end{cases} \end{cases}$$

- $$\boxed{q(x)\sin(bx)e^{ax}} \Rightarrow \begin{cases} \sin(bx)e^{ax} \text{ no sol. de la hom. (Caso no Deg.)} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p(x) = ((C_0 + \ldots + C_kx^k)\sin(bx) + (D_0 + \ldots + D_kx^k)\cos(bx))e^{ax} \\ \sin(bx)e^{ax} \text{ sol. hom. (Caso Deg.)} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_p(x) = x((C_0 + \ldots + C_kx^k)\sin(bx) + (D_0 + \ldots + D_kx^k)\cos(bx))e^{ax} \end{cases}$$

(equiv. para $\boxed{q(x)\cos(bx)e^{ax}}$)

Ejercicio Resuelto 17 Resuelve la EDO $y'' + y = e^{-x}\cos(x)$.

1. Resolvemos la EDO homogénea asociada. La ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ tiene como soluciones $\pm i$, por lo que la solución general es $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. Buscamos una solución particular por el método de tanteo. De acuerdo al teorema anterior, buscamos una solución del tipo:

$$y_p(x) = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = (-A + B)e^{-x}\cos x + (-A - B)e^{-x}\sin x \Rightarrow y_p''(x) = -2Be^{-x}\cos x + 2Ae^{-x}\sin x.$$

Sustituyendo en la EDO original, llegamos a:

$$(2Ae^{-x}\sin x - 2Be^{-x}\cos x) + (Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x) = e^{-x}\cos x \Rightarrow A = \frac{1}{5}, B = -\frac{2}{5}.$$

Por lo tanto, la solución particular es $y_p(x) = \frac{1}{5}e^{-x}\cos x - \frac{2}{5}e^{-x}\sin x$.

3. La solución general es $y_p(x) = \frac{1}{5}e^{-x}\cos x - \frac{2}{5}e^{-x}\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 11 Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' + 4y' + 4y = 2x^2 - 3x + 6$

(b) $y'' - 2y' - 3y = 2\sin x$

(c) $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$

(d) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$

(e) $y'' - 2y' = x + 2e^{2x}$

■

Ejercicios Finales

Ejercicio 1 Utiliza el wronskiano para estudiar la independencia lineal de los siguientes conjuntos de funciones:
(a) $\{e^x, e^{4x}\}$
(b) $\{\sin x, \cos x\}$

Ejercicio 2 El wronskiano puede definirse para un conjunto de 3 o más funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$W(y_1,\ldots,y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

Al igual que en el caso de dos funciones, si el wronskiano es distinto de 0 en algún punto x_0 eso quiere decir que las funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ son linealmente independientes. Utiliza esto para estudiar la independencia lineal de los siguientes conjuntos de funciones:
(a) $\{1, x, x^2\}$
(b) $\{x^2-1, 1, x^2+x, x+1\}$
(c) $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$, siendo los números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ todos diferentes. Para resolver este apartado tendrás que calcular un determinante bastante interesante llamado **Determinante de Vandermonde**.

Ejercicio 3 Resuelve las siguientes EDO's lineales homogéneas con coeficientes constantes:
(a) $y'' - 4y = 0$
(b) $y'' + 6y' + 12y = 0$
(c) $y'' + y' - 6y = 0$
(d) $y'' - 2y' + 2y = 0$
(e) $y'' - 6y' + 9y = 0$
(f) $y'' + 8y' - 8y = 0$

Ejercicio 4 En la Sección 2.1 hemos estudiado la ecuación del Movimiento Armónico Simple. Ahora vamos a estudiar la ecuación del Movimiento Armónico Amortiguado. Esta ecuación se obtiene de la anterior (que era $mx'' = -kx$) añandiendo un término que representa el rozamiento:

$$mx'' = -ax' - kx, \qquad a, k, m > 0.$$

Aunque lo más frecuente es considerar que la fuerza de rozamiento no depende de la velocidad, en este modelo es muy común considerar que sí lo hace (lo cual sí es más común en la modelización de fuerzas de rozamiento en medios fluidos).
Supongamos que $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Resuelve el PVI en función de esos parámetros. Utiliza un ordenador para hacer un esbozo de la gráfica de la solución en cada uno de los casos.

Ejercicio 5 Encuentra una EDO lineal homogénea de orden 2 que tenga como solución a la función que se indica en cada apartado:
(a) $y(x) = xe^{-2x}$
(b) $y(x) = \cos(2x)$

Ejercicio 6 Los Teoremas 5, 6 y 7 siguen siendo ciertos para EDO's lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden superior a 2, siempre y cuando hagamos las correspondientes modificaciones. Dada la EDO $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ se define la ecuación característica como la ecuación polinómica $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. En resumen, se tiene lo siguiente:

- Si $y_1(x), y_2(x)$ son dos de sus soluciones particulares y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $y_1(x) + y_2(x)$, $\lambda y_1(x)$ también son soluciones.
- Si podemos encontrar n soluciones linealmente independientes de la EDO, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, la solución general de la misma es $y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.
- Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son soluciones distinas de la ecuación característica, entonces las funciones $y_1(x) = e^{r_1 x}, \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}$ son soluciones linealmente independientes de la EDO.
- Si la ecuación característica tiene una raíz r de multiplicidad m, entonces las funciones $y_1(x) = e^{rx}, \ldots, y_m(x) = x^{m-1}e^{rx}$ son m soluciones linealmente independientes de la EDO.
- Si la ecuación característica tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$, entonces $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$ son dos soluciones linealmente independientes de la EDO.

No se ha incluido un estudio más detallado de las EDO's lineales homogéneas con coeficientes constandes de orden superior a 2 por dos motivos. El primero es que resolver ecuaciones polinómicas de orden superior a 2 es más complicado y el segundo es que los posibles casos que aparecen (raíces de multiplicidad mayor que dos, que pueden ser complejas, etc.) complican bastante un estudio exhaustivo.

No obstante, con estos principios generales, ya sabes lo suficiente para resolver las siguientes EDO's:

(a) $y''' - 2y'' + y' - y = 0$

(b) $y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

Ejercicio 7 Resuelve las siguientes EDO's lineales con coeficientes constantes:

(a) $y'' + 3y' + 2y = \sin(x)$

(b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

(c) $y'' + 5y' + 6y = 3x^2 + 4x + 1$

(d) $y'' - 2y' + y = 2x^2 - x + 1$

(e) $y'' + y' - 6y = cos(2x)$

(f) $y'' - 2y' + 2y = 2xe^x$

(g) $y'' + y' + 4y = e^{3x}cos(x)$

Ejercicio 8 Resuelve los siguientes PVI's:

(a) $\begin{cases} y'' - 9y = 10x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 + 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

Ejercicio 9 Considera la EDO $y'' + ay' + by = f(x)$. A partir de la información que te dan en cada uno de los apartados, determina $a, b, f(x)$ y halla la solución general.

(a) $-2 + i$ es una solución de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada y $f(x) = x^2$.

(b) $x^2 + 1$ es una solución particular y $a = -2$, $b = 5$.

(c) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x + 3e^x$, $y_3(x) = x - e^{-x}$ son soluciones particulares.

(d) -5 es una solución doble de la ecuación característica de la EDO homogénea asociada y $\tan x$ es una solución particular.

(e) $f(x) = e^x \cos x$, y $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ son soluciones de la EDO homogénea.

Ejercicios de las Oposiciones de Profesores de Enseñanza Secundaria

Ejercicio 1 — Castilla y León 2002. Un disco de radio r rueda sin deslizamiento por debajo de la recta $y = 0$ dando una vuelta completa. Inicialmente, su centro está en $O = (0, -r)$ y uno de sus puntos en $P = (0,0)$. Al rodar el disco, el punto P genera una curva que denotaremos por C.
Tenemos un cuenco cuya sección tiene la forma de C. Admitiendo que al dejar caer una bola situada en el punto de la superficie del cuenco dicha bola rueda sobre ella y se rige por la ley de caída libre $v^2 = 2gh$, donde g es la aceleración de la gravedad y v es la velocidad de la bola en el punto que se encuentra a una diferencia de altura h respecto del punto donde se soltó, hallar el tiempo que tarda la bola en llegar al fondo del cuenco.

3. Sistemas de 2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden 1 lineales con coeficientes constantes y 2 incógnitas

La intención de este capítulo es introducir, aunque sea sólo “una pincelada muy pequeña, muy pequeña”, los sistemas de EDO’s.

Para no introducir nuevos conceptos, lo que vamos a explicar es un truco que permite convertir los sistemas de 2 EDO’s de orden 1 lineales con coeficientes constantes y 2 incógnitas en EDO’s de orden 2 lineales con coeficientes constantes. Lamentablemente, en este caso este truco no es tan sencillo de generalizar a orden superior (como sí ocurría en el capítulo anterior).

3.1. Reducción a una EDO de orden 2 lineal con coeficientes constantes

Introducción

Un sistema de EDO's es un conjunto de dos o más EDO's en las que aparecen dos o más funciones incógnita. También hay PVI's asociados a sistemas de EDO's, que incluyen condiciones iniciales para todas las funciones incógnita (véase Ejercicio Resuelto 18).

Los sistemas de este capítulo tienen 2 EDO's y 2 incógnitas. Generalmente, denotaremos por t a la variable independiente y por $x(t), y(t)$ o por $y_1(t), y_2(t)$ a las funciones incógnita.

! En este contexto, cada pareja $(x(t), y(t))$ pueden interpretarse como una **trayectoria** en el plano: una función que a cada instante de tiempo le asocian una posición en el plano. No profundizaremos en esta cuestión.

Caso lineal de orden 1 con coeficientes constantes

Sólo aprenderemos a resolver sistemas de EDO's de orden 1 lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases} \qquad \text{o, equiv.,} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Este tipo de sistemas, tienen detrás toda una teoría similar a la que ya hemos visto para las EDO's lineales de orden 1 y 2 (Sección 1.2 y Capítulo 2).

- Se define el **sistema homogéneo asociado** como aquel obtenido del anterior al sustituir $f(t) = g(t) = 0$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema homogéneo asociado, también lo es $\lambda(x(t), y(t))$.
- Si $(x(t), y(t))$, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ son dos soluciones del sistema homogéneo asociado, entonces la suma $(x(t), y(t)) + (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ también lo es.
- La solución del Sistema (3.1) puede expresarse como la suma de una solución particular y la solución general del sistema homogéneo asociado, esto es,

$$\underbrace{(x_p(t), y_p(t))}_{\text{(sol. particular)}} + \underbrace{C_1(x(t), y(t)) + C_2(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))}_{\text{(sol. general hom.)}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

El truco de reducción

Resolver una EDO lineal de orden 2 con coeficientes constantes es equivalente a resolver un sistema con 2 EDO's de orden 1 lineal con coeficientes constantes y 2 incógnitas y viceversa.

Teorema 11 Toda EDO de orden 2 lineal con coeficientes constantes se puede escribir como el siguiente sistema:

$$y'' + Ay' + By = f(t) \Rightarrow \begin{cases} x' = -Ax - By + f(t) \\ y' = x \end{cases} .$$

Teorema 12 Para convertir el Sistema (3.1) en una EDO de orden 2 lineal con coeficientes constantes, hacemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = ax' + by' + f'(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \\ y = \frac{x' - ax - f(t)}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = ax' + b(cx + dy + g(t)) + f'(t) \\ y = \frac{x' - ax - f(t)}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = ax' + b(cx + d(\frac{x' - ax - f(t)}{b}) + g(t)) + f'(t) \\ y = \frac{x' - ax - f(t)}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' - (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})x' + (\det \boldsymbol{A})x = \\ \qquad = -df(t) + bg(t) + f'(t) \\ y = \frac{x' - ax - f(t)}{b} \end{cases}$$

Este último teorema es el que nos interesa a nosotros: reduce la resolución de sistemas a un problema ya conocido.

Ejercicio Resuelto 18 **Resuelve el PVI** $\begin{cases} \boldsymbol{y_1' = 2y_1 + 3y_2} \\ \boldsymbol{y_2' = 2y_1 + 3y_2} \\ \boldsymbol{y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2} \end{cases}$.

Reducimos el sistema a una EDO de segundo orden:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 3y_2' \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_1' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 3(2y_1 + 3y_2) \\ y_2 = \frac{y_1' - 2y_1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1'' = 2y_1' + 3(2y_1 + \cancel{3}\frac{y_1' - 2y_1}{\cancel{3}}) \\ y_2 = \frac{y_1' - 2y_1}{3} \end{cases}$$

Resolvemos la EDO de arriba que, una vez simplificada, es $y_1'' - 5y_1' = 0$. Su ecuación característica es $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, que tiene dos soluciones distintas: 0 y 5. Por lo tanto la solución general es $y_1(t) = C_1 + C_2 e^{5t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
De ahí y de la segunda EDO del último sistema obtenemos que

$$y_2(t) = \frac{5C_2e^{5t} - 2(C_1 + C_2e^{5t})}{3} \Rightarrow y_2(t) = -\frac{2}{3}C_1 + C_2e^{5t}.$$

Puede escribirse todo junto de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + C_2e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Si aplicamos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y_2(0) = -\frac{2}{3}C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{5} \\ C_2 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

La solución es $y_1(t) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5}e^{5t}$, $y_2(t) = \frac{2}{5} + \frac{8}{5}e^{5t}$.

Ejercicio 12 Resuelve el sistema de EDO's $\begin{cases} y_1' = 6y_1 + y_2 + 6t \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 - 10t + 4 \end{cases}$.

Ejercicios Finales

Ejercicio 1 Resuelve los siguientes sistemas de EDO's o PVI's, según corresponda:

(a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -x - y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = 9x - 4y \\ y' = 8x - y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = -3x \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x - y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x' = -3x + 16y \\ y' = -x + 5y \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 1$

(h) $\begin{cases} x' = -3y \\ y' = 4x + 6y \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

(i) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -3x + 6y \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 2$

(j) $\begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = 3x - 2y + t \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x' = 5x + 3y + 1 \\ y' = -6x - 4y + e^t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

(l) $\begin{cases} x' = 2x - y + \cos(t) \\ y' = 5x - 2y + \sin(t) \end{cases}$

(m) $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$

Ejercicio 2 En este ejercicio, vamos a estudiar algunos aspectos de las **Ecuaciones de Lotka-Volterra**, un sistema con 2 EDO's y 2 funciones incógnitas, pero que no es lineal.

Dicho sistema corresponde a un modelo muy importante que describe un tipo de interacción entre dos especies que viven en un mismo entorno. Denotemos por $x(t)$ al número de individuos de una población de presas y por $y(t)$ al número de individuos de una población de depredadores. Un modelo muy sencillo para describir la interacción entre esas dos especies es el siguiente:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = -\gamma y + \delta xy \end{cases}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0.$$

Se supone que las presas se reproducen de forma directamente direccional al número de individuos y que, además, tienen una mortalidad directamente proporcional a *la frecuencia con la que se encuentran con los depredadores* (esto está representado por el término $-\beta xy$). Por su parte, el número de muertes entre los depredadores es directamente proporcional a su número y el número de nacimientos es también directamente proporcional a *la frecuencia con la que se encuentran con las presas* (entendiéndose que, a mayor alimentación, mayor reproducción).
(a) Utiliza un ordenador para representar las gráficas de las soluciones, para diferentes valores de los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
(b) Utiliza un ordenador para representar las curvas correspondientes a las soluciones.
(c) ¿Qué conclusiones puedes extraer, en base a la información anterior?

Anexo

Sobre las ecuaciones (polinómicas) de segundo grado

Consideremos la ecuación de segundo grado $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Para calcular sus soluciones se utiliza la fórmula $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Dependiendo del signo del **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ la solución puede tener 2 soluciones reales distintas ($\Delta > 0$), 1 única solución real doble ($\Delta = 0$) o 2 soluciones complejas distintas ($\Delta < 0$).
- En el último de los casos, las dos soluciones deben ser **conjugadas**, esto es, si una de ellas es $a + bi$, entonces la otra será $a - bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Consideremos ahora la ecuación de segundo grado $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (que corresponde al caso $a = 1$).

- Sean λ_1, λ_2 las dos soluciones de la EDO (pueden ser distintas o una única raíz doble). Entonces $b = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c = \lambda_1 \lambda_2$. ¡Esto no es cierto si $a \neq 1$!

Fórmula de Euler

Esta fórmula relaciona números complejos, ángulos, senos, cosenos y exponenciales. Permite pasar un número complejo de forma binómica a polar y viceversa:

$$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Un caso particular muy importante es: $e^{i\pi} = -1$ (o equiv. $e^{i\pi} + 1 = 0$).

Bibliografía

[BDH] P. Blanchard, R. L. Devaney y G. R. Hall (2012). *Ecuaciones Diferenciales*, Thompson.

[GPP] M García Bravo, J. M. Prieto Martínez, L. F. Prieto Martínez (2021). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Ciencias e Ingeniería*, manuscrito.

[PG] M. E. Patiño Rodríguez, P. Galán del Sastre (2012 y 2013). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden I y II* y *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior I y II*, Cuadernos del Instituto Juan de Herrera.