Ecuaciones diferenciales
Ecuación de Bernoulli y ecuación de Riccati
Ecuaciones de Lagrange y Clairaut

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

21 de mayo de 2025

Contenido

Con esta entrada concluiremos el desarrollo de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden.
Presentaremos dos ecuaciones diferenciales no lineales más, conocidas como :

- Ecuación diferencial de Jacob Bernoulli y Jacopo Francesco Riccati.
- Ecuación diferencial de Lagrange y Clairaut.

Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

- $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo I.
- La solución general $y(x)$ es la suma de la solución homogénea $y_h(x)$ y una solución particular $y_p(x)$.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

La ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea está dada como

$$y_h(x) = ke^{-\int P(x)dx} = \frac{k}{\mu(x)}$$

Mientras que la solución particular tiene la forma

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx\right)$$

Método del Factor Integrante

- Escribir la ecuación diferencial lineal en la forma canónica

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- Definimos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{2}$$

- Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\mu(x)$:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x) \tag{3}$$

- La izquierda es la derivada del producto:

$$\frac{d}{dx}[y\ \mu(x)] = \frac{dy}{dx}\ \mu(x) + y\ \frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}\right) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + y\ \mu(x)P(x)$$

- Remplazando en (3) y integramos ambos lados:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \quad \Rightarrow \quad \mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C$$

- Finalmente, despejamos y:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + C\right)$$

Método de Variación de Parámetros

- La ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- Supongamos que la solución particular tiene la forma:

$$y_p(x) = k(x)e^{-\int P(x)dx}$$

  El método de variación de parámetros consiste en determinar la expresión explícita de $k(x)$.

- Derivamos $y_p(x)$:

$$\frac{dy_p}{dx} = k'(x)e^{-\int P(x)dx} - k(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

- Sustituimos en la ecuación original:

$$\begin{aligned}
&= \left[k(x)\frac{d}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\right) + \frac{dk(x)}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\right)\right] + P(x)k(x)e^{-\int P(x)dx} \\
&= \cancel{-k(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}} + \frac{dk(x)}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\right) + \cancel{P(x)k(x)e^{-\int P(x)dx}} \\
&= \frac{dk(x)}{dx}\left(e^{-\int P(x)dx}\right)
\end{aligned}$$

- Despejamos $k'(x)$:

$$k'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \Rightarrow \quad k'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

- Integremos ambos lados de la ecuación con respecto a x, obtenemos la forma explícita de $k(x)$

$$k(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

- Sustituimos en $y_p(x)$:

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Si consideramos el factor integrante (2) esta función la podemos escribir como

$$y_p(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + k(x)\right)$$

Teorema de Existencia y Unicidad

- Consideremos el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

- Si $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo que contiene a x_0, entonces existe una única solución $y(x)$ definida en ese intervalo que satisface la condición inicial.
- Este resultado garantiza que los métodos anteriores proporcionan soluciones únicas bajo las condiciones dadas.

Método para resolver ecuaciones lineales

Si bien es cierto que ya conocemos las formas explícitas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, es conveniente seguir una serie de pasos para resolverlas. Dichos pasos se describen a continuación.

1. Escribir la ecuación diferencial lineal en la forma canónica
$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$
2. Calcular el factor integrante $\mu(x)$ mediante la fórmula
$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$
3. Multiplicar a la ecuación diferencial en su forma canónica por el factor integrante en ambos lados de la ecuación. eal en la forma canónica
$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)\,y = \mu(x)Q(x)$$
4. Identificar que el lado izquierdo de la ecuación es la derivada de por y sustituir.
$$\frac{d}{dx}(\mu\,y) = \mu(x)Q(x)$$
5. Integrar la última ecuación y dividir por para obtener finalmente la solución general. En la última integración sí debemos considerar a la constante de integración.

Esta serie de pasos nos permiten obtener directamente la solución general de la ecuación diferencial lineal, es por ello que en el último paso sí debemos considerar a la constante de integración, dicha constante representa el resultado de juntar todas las contantes que podremos omitir en pasos intermedios.

Ejemplo

Determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x - 1 - 4xy$$

Solución :

Paso 1: Escribir a la ecuación diferencial en la forma canónica, dividir ambos lados por x^2+1 para obtener la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$$

Paso 2: Identificar $P(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ y $Q(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$

Paso 3: Calcular el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{4x}{x^2+1}dx} = e^{2\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^2$$

Paso 4: Multiplicar ambos lados de la ecuación por $\mu(x)$:

$$(x^2+1)^2\frac{dy}{dx} + 4x(x^2+1)y = (x^2+1)(x^2+2x-1)$$

Paso 5: Reconocer el lado izquierdo como la derivada del producto:

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^2 y\right] = (x^2+1)(x^2+2x-1)$$

Paso 6: Integrar ambos lados:

$$\int \frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^2 y\right] dx = \int (x^2+1)(x^2+2x-1)dx$$

Paso 7: Calcular la integral del lado derecho:

$$\int (x^2+1)(x^2+2x-1)dx = \int (x^4+2x^3-x^2+x^2+2x-1)dx = \int (x^4+2x^3+2x-1)dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^2 - x + C$$

Paso 8: Despejar $y(x)$:

$$(x^2+1)^2 y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^2 - x + C$$

$$y(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^2 - x + C\right)$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden formulada por Jacob Bernoulli en el siglo XVI

Definición

La ecuación diferencial

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\, y^n \tag{4}$$

donde n es cualquier número real, se llama ecuación de Bernoulli.

Si a la ecuación de Bernoulli la dividimos por la función $a_1(x) \neq 0$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\, y = \frac{g(x)}{a_1(x)}\, y^n$$

Definimos las siguientes funciones.

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Entonces una ecuación de Bernoulli se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n \tag{5}$$

La ecuación (5) es también una definición común de ecuación de Bernoulli.

- Si $n = 0$, la ecuación de Bernoulli se reduce a una **ecuación diferencial lineal no homogénea**.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$$

- Si $n = 1$, la ecuación de Bernoulli se reduce a una **ecuación diferencial lineal homogénea**.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y \Rightarrow \frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))\, y = 0$$

Si definimos $R(x) = P(x) - Q(x)$

$$\frac{dy}{dx} + R(x)\, y = 0$$

- Si $n \neq 0$, y $n \neq 1$, sustituimos

$$\begin{aligned} u(x) &= y^{1-n} && (6) \\ \frac{du(x)}{dx} &= (1-n)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n-1}\frac{du(x)}{dx} && (7) \end{aligned}$$

en la ecuación de Bernoulli en la forma (5).

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

Dividimos toda la ecuación por $y^n \neq 0$,

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x) \tag{8}$$

Sustituyamos (6) y (7) en la ecuación (8). es

$$\frac{1}{1-n}\frac{du(x)}{dx} + P(x)\, u(x) = Q(x) \tag{9}$$

Multipliquemos por $1-n$ en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{du(x)}{dx} + (1-n)\, P(x)\, u(x) = (1-n)\, Q(x)$$

Definimos las funciones

$$R(x) = (1-n)\, P(x) \quad \text{y} \quad S(x) = (1-n)\, Q(x)$$

$$\frac{du(x)}{dx} + R(x)\, u(x) = S(x)$$

Método para resolver ecuaciones de Bernoulli

1. El primer paso es escribir a la ecuación de Bernoulli en la forma (5)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

2. Dividimos toda la ecuación por y^ny consideramos el cambio de variable $u = y^{1-n}$, así como la respectiva derivada

$$\frac{du(x)}{dx} = (1-n)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}$$

3. Sustituimos

$$u(x) = y^{1-n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n-1}\frac{du(x)}{dx}$$

en la ecuación resultante del paso anterior y haciendo un poco de álgebra podremos reducir la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal de primer orden no homogénea.

4. Resolvemos la ecuación resultante usando el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales lo que nos permitirá obtener la función $u(x)$.
5. Regresamos a la variable original para obtener finalmente la solución $y(x)$.

Ejemplo

- Resolver la ecuación de Bernoulli

$$3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$$

Solución :
El primer paso es escribir la ecuación de Bernoulli en la forma (5).

$$\begin{aligned}
3(1+x^2)\frac{dy}{dx} &= 2xy(y^3-1) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2xy(y^3-1)}{3(1+x^2)} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2xy^4}{3(1+x^2)} - \frac{2xy)}{3(1+x^2)} \\
\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x}{3(1+x^2)}\right)y &= \left(\frac{2x)}{3(1+x^2)}\right)y^4
\end{aligned}$$

La última relación muestra a la ecuación en la forma (5) con, ahora dividamos toda la ecuación por y^4.

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x}{3(1+x^2)}\right)y^{-3} = \left(\frac{2x)}{3(1+x^2)}\right) \tag{10}$$

Consideremos la sustitución

$$u = y^{1-n} = y^{1-4} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}, \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

De donde,

$$\frac{1}{y^4}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{du}{dx} \qquad \text{y} \qquad y^{-3} = u$$

Sustituimos estos resultados en la ecuación (10).

$$-\frac{1}{3}\frac{du}{dx} + \frac{2x}{3(1+x^2)}\,u = \frac{2x}{3(1+x^2)}$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x}{(1+x^2)}\,u = \frac{2x}{(1+x^2)} \tag{11}$$

Establecemos las siguientes funciones.

$$R(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \qquad \text{y} \qquad S(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$$

A partir de aquí aplicamos el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales. La ecuación ya se encuentra en su forma canónica. Determinemos el factor integrante dado por

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx}$$

Resolvamos la integral del exponente omitiendo la constante de integración.

$$\int R(x)dx = -\int \frac{2x}{1+x^2}dx = -\ln|1+x^2|$$

Por lo tanto,

$$\mu(x) = e^{-\ln|1+x^2|} = \frac{1}{1+x^2}$$

Multipliquemos a la ecuación (11) por el factor integrante.

$$\frac{1}{1+x^2}\frac{du}{dx} + \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{2x}{(1+x^2)}\right)u = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{2x)}{(1+x^2)}\right)$$

El lado izquierdo de la ecuación es la derivada del producto del factor integrante $\mu(x)$ por la función $u(x)$. Seguidamente integramos ambos lados de la ecuación con respecto a x

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{1+x^2}\right)dx = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \int \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{1+x^2}\right)dx = -\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$$

En el lado izquierdo aplicamos el teorema fundamental del cálculo y en el lado derecho consideramos la sustitución $a(x) = 1 + x^2$ para resolver la integral.

$$\frac{u}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + c \quad \Rightarrow \quad u = 1 + (1+x^2)c$$

Regresamos a la variable original $u = y^{-3}$.

$$y^3 = \frac{1}{1+(1+x^2)c}$$

Por lo tanto, la solución general (implícita) de la ecuación diferencial de Bernoulli

$$3(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1) \quad \text{es} \quad \frac{1}{y^3} = 1 + (1+x^2)c$$

Ecuación de Riccati

Definición

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = q_o(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 \tag{12}$$

se llama ecuación de Riccati.

resolver la ecuación de Riccati requiere del conocimiento previo de una solución particular de la ecuación, llamemos a dicha solución $\hat{y}(x)$. Si hacemos la sustitución

$$y(x) = \hat{y}(x) + \frac{1}{u(x)} \tag{13}$$

Derivemos esta ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{dx} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} \tag{14}$$

Como $\hat{y}(x)$ es una solución de la ecuación de Riccati, entonces satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = q_o(x) + q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 \tag{15}$$

Sustituyendo (14) en (16) obtenemos la siguiente ecuación.

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = q_o(x) + q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} \tag{16}$$

Ahora podemos igualar la ecuación (16) con la ecuación de Riccati (12).

$$
\begin{aligned}
q_o(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2 &= q_o(x) + q_1(x)\hat{y} + q_2(x)\hat{y}^2 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} \\
\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= q_1(x)(\hat{y} - y) + q_2(x)(\hat{y}^2 - y^2)
\end{aligned}
$$

En la última relación sustituimos la función (2).

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= q_1(x)\left[\hat{y} - \left(\hat{y} + \frac{1}{u}\right)\right] + q_2(x)\left[\hat{y}^2 - \left(\hat{y}^2 + \frac{1}{u}\right)^2\right] \\
&= q_1(x)\left(\hat{y} - \hat{y} - \frac{1}{u}\right) + q_2(x)\left(\hat{y}^2 - \hat{y}^2 - 2\hat{y}\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) \\
&= q_1(x)\left(-\frac{1}{u}\right) + q_2(x)\left(-2\frac{\hat{y}}{u} - \frac{1}{u^2}\right) \\
\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= -\frac{q_1(x)}{u} - 2q_2(x)\frac{\hat{y}}{u} - \frac{q_2(x)}{u^2}
\end{aligned}
$$

Multipliquemos ambos lados de la ecuación por u^2.

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= -q_1(x)u - 2q_2(x)\hat{y}u - q_2(x) \\
&= -\left(q_1(x) + 2q_2(x)\hat{y}\right)u - q_2(x) \\
\frac{du}{dx} + \left(q_1(x) + 2q_2(x)\hat{y}\right)u &= -q_2(x) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Definamos las funciones

$$R(x) = q_1(x) + 2q_2(x)\hat{y} \quad \text{y} \quad S(x) = -q_2(x)$$

Por lo tanto, la ecuación (17) queda de la siguiente forma.

$$\frac{du}{dx} + R(x)u = S(x) \tag{18}$$

Queda demostrado que la sustitución (2) convierte a la ecuación de Riccati en una ecuación diferencial lineal y, por tanto, puede ser resuelta con el método de resolución de ecuaciones lineales.

Método para resolver ecuaciones de Riccati

1. El primer paso es escribir a la ecuación de Riccati en la forma (12) y estar seguros de que conocemos previamente una solución particular $\hat{y}$ de la ecuación.
2. Como queremos reducir la ecuación de Riccati en una ecuación lineal no homogénea consideramos la sustitución
$$y(x) = \hat{y}(x) + \frac{1}{u(x)}$$
con $\hat{y}$ la solución particular dada. Si se deseara reducirla a una ecuación de Bernoulli se hace la sustitución
$$y(x) = \hat{y}(x) + u(x)$$
3. Debido a que $\hat{y}$ es solución de la ecuación de Riccati, el siguiente paso es derivar la sustitución $y(x) = \hat{y}(x) + \frac{1}{u(x)}$ y en el resultado sustituir $\frac{d\hat{y}}{dx}$ por la ecuación de Riccati para la solución particular, esto es
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{dx} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = [q_1(x) + q_2(x)\hat{y} + q_3(x)\hat{y}^2] - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$
4. Igualamos la ecuación anterior con la ecuación de Riccati original en la forma (12) y hacemos la sustitución
$$y(x) = \hat{y}(x) + \frac{1}{u(x)}$$
5. Hecho lo anterior y haciendo un poco de álgebra podremos reducir la ecuación de Riccati en una ecuación lineal de primer orden y así aplicar el método de resolución para este tipo de ecuaciones.
6. Una vez obtenida la función $y(x)$ la sustituimos en $u(x)$ para obtener la solución deseada.

Realicemos un ejemplo para poner en practica este método.

Ejemplo

Resolver la ecuación de Riccati
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$
dada la solución particular $\hat{y} = \frac{2}{x}$

Solución :

La ecuación diferencial prácticamente se encuentra en la forma de la ecuación (12), sólo para que sea claro escribimos
$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{4}{x^2}\right) + \left(-\frac{1}{x}\right) y + y^2$$
Comencemos por verificar que la solución particular dada efectivamente satisface la ecuación de Riccati. Por un lado,
$$\frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{2}{x^2}$$
Por otro lado,
$$\begin{aligned} -\frac{4}{x^2} - \frac{\hat{y}}{x} + \hat{y}^2 &= -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x}\right)^2 \\ &= -\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$
En efecto,
$$\frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{\hat{y}}{x} + \hat{y}^2 = -\frac{2}{x^2}$$

El siguiente paso es hacer la sustitución (2).

$$y(x) = \hat{y}(x) + \frac{1}{u(x)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$$

De acuerdo a (16), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$

Igualemos este resultado con la ecuación de Riccati original.

$$\begin{aligned} -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2 &= -\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} \\ -\frac{y}{x} + y^2 &= -\frac{2}{x} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} \\ \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= \frac{2}{x} + \frac{y}{x} - y^2 \end{aligned}$$

En la última ecuación sustituimos $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} &= \frac{2}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right) - \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 \\ &= \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{xu} - \left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{xu} + \frac{1}{u^2}\right) \\ &= \frac{4}{x} + \frac{1}{xu} - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{xu} - \frac{1}{u^2} = -\frac{3}{xu} - \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}u = -1$$

Esta expresión tiene la forma de una ecuación diferencial lineal (18), de donde podemos determinar que

$$R(x) = \frac{3}{x} \quad \text{y} \quad S(x) = -1$$

La ecuación de Riccati ha sido reducida a una ecuación lineal no homogénea, ahora apliquemos el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Calculemos el factor integrante $\mu(x) = e^{\int R(x)dx}$

$$\int R(x)dx = \int \frac{3}{x}dx = 3\ln|x|$$

El factor integrante es

$$\mu(x) = e^{3\ln|x|} = x^3$$

Multipliquemos la ecuación diferencial por el factor integrante.

$$\begin{aligned} x^3\frac{du}{dx} + x^3\left(\frac{3}{x}\right)u &= -x^2 \\ x^3\frac{du}{dx} + 3x^2u &= -x^3 \end{aligned}$$

Identificamos que el lado izquierdo de la ecuación corresponde a la derivada del producto entre el factor integrante $\mu(x)$ y la función $u(x)$, entonces

$$\frac{dx^3u}{dx} = -x^3$$

Integramos ambos lados de la ecuación con respecto a x.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx^3u}{dx}dx &= \int -x^3dx \\ x^3u &= \frac{x^4}{4}+c \\ u(x) &= \frac{x}{4}+\frac{c}{x^3} \end{aligned}$$

Ya determinamos el valor de $u(x)$, ahora sólo lo sustituimos en la función $y=\frac{2}{x}+\frac{1}{u}$ Por lo tanto, la solución general de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2$$

es

$$y(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{\frac{c}{x^3}-\frac{x}{4}}=\frac{2}{x}+\frac{4x^3}{4c-x^4}$$

Ecuación de Lagrange

Una ecuación diferencial de Lagrange (o de D'Alembert) tiene la forma:

$$y = xg(y') + f(y')$$

Denotando $p = y' = \frac{dy}{dx}$, se reescribe como:

$$y = xg(p) + f(p) \tag{19}$$

Método de solución:

1. Sustituimos $p = \frac{dy}{dx}$.
2. Derivamos ambos lados respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + 2p \cdot \frac{dp}{dx}$$

3. Simplificamos y resolvemos la ecuación resultante para encontrar $p(x)$.
4. Sustituimos $p(x)$ en la ecuación original para obtener $y(x)$.

Nota: Para $g(p) = p$ obtenemos la ecuación de Clairaut.

Ejemplo

Demostrar que derivando respecto a x la ecuación de Lagrange, obtenemos una ecuación lineal en x como función de p. Concluir que la solución general de la ecuación de Lagrange se puede expresar en la forma paramétrica.

$$\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = x(p, C)g(p) + f(p) \end{cases}$$

donde p es el parámetro y C una constante de integración.

Solución:

Derivando respecto a x la ecuacion (19), $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = g(p) + xg'(p)p' + f'(p)p'$$

Reordenando:

$$p - g(p) = \left(xg'(p) + f'(p)\right) p'$$

sabemos que $p^{'} = \frac{dp}{dx}$, entonces

$$\frac{dx}{dp} = \frac{g'(p)}{p - g(p)}x + \frac{f'(p)}{p - g(p)}$$

Esta es una ecuación lineal en x como función de p.

Nótese que, $g(p) = p$, anula el denominador, en tal caso obtenemos la **ecuación de Clairaut**.
Sea $x = x(p, C)$ la solución general de la ecuación lineal anterior. Sustituyendo en (19)

$$y = xg(p) + f(p)$$

obtenemos la solución general en paramétricas de la ecuación de Lagrange

$$\begin{cases} x = x(p, C) \\ y = x(p, C)g(p) + f(p) \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la solución general en forma implicita de la ecuación

$$y = x + (y')^2 - \frac{2}{3}(y')^3$$

Solución:

La ecuación se puede expresar en la forma, $p = \frac{dy}{dx}$

$$y = x + p^2 - \frac{2p^3}{3}$$

por tanto es una ecuación de Lagrange con

$$g(p) = 1, \quad f(p) = p^2 - \frac{2}{3}p^3$$

Derivando respecto de x

$$p = 1 + 2pp' - 2p^2p' \Rightarrow \cancel{p-1} = 2p\cancel{(1-p)}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = -2p \Rightarrow x = C - p^2$$

Sustituyendo:

$$y = x + p^2 - \frac{2}{3}p^3 = (C - p^2) + p^2 - \frac{2}{3}p^3 = C - \frac{2}{3}p^3$$

por lo tanto

$$\begin{cases} x = C - p^2 \Rightarrow (p^2)^3 = (C - x)^3 \\ y = C - \frac{2}{3}p^3 \Rightarrow (p^3)^2 = \left(\frac{3}{2}(C - y)\right)^2 \end{cases}$$

Eliminando p

$$\frac{9}{4}(C - y)^2 = (C - x)^3$$

Ecuación de Clairaut

La ecuación de Clairaut es un caso particular de la de Lagrange con $g(p) = p$:

$$y = xp + f(p)$$

Derivando respecto a x:

$$p = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow 0 = (x + f'(p))\frac{dp}{dx}$$

Entonces, las soluciones generales son:

$$y = xp + f(p)$$

Y la solución singular se obtiene eliminando p entre:

$$x + f'(p) = 0 \quad \text{y} \quad y = xp + f(p)$$

Características:

- La solución general es una familia de rectas.
- Existe una solución singular que es la envolvente de la familia de soluciones generales.

Ejemplo

Resolver la ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + \log y'$$

Solución:

La ecuación se puede expresar en la forma, $p = \frac{dy}{dx}$.

$$y = xp + \log p$$

por tanto es una ecuación de Lagrange con

$$g(p) = 1, \quad f(p) = \log p$$

Derivando respecto de x

$$\cancel{p} = \cancel{p} + xp' + \frac{1}{p}p' \Rightarrow 0 = (x + \frac{1}{p})\frac{dp}{dx}$$

Solución general:

$$y = xp + \log p$$

Solución singular:

$$x + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{x}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$y = x\left(-\frac{1}{x}\right) + \log\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$y = -1 + \log\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Ejemplo

Resolver la ecuación de Clairaut:

$$y = 2xy' + \log y'$$

Solución:

La ecuación se puede expresar en la forma, $p = \frac{dy}{dx}$.

$$y = 2xp + \log p$$

por tanto es una ecuación de Lagrange con

$$g(p) = 2, \quad f(p) = \log p$$

Derivando respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

$$p = 2p + 2xp' + \frac{1}{p}p'$$

$$-p = \left(2x + \frac{1}{p}\right)p' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{-p}{2x + \frac{1}{p}}$$

Solución general: tomar $p = C$

$$y = 2xC + \log C$$

Solución singular:

$$2x + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{2x}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$y = 2x\left(-\frac{1}{2x}\right) + \log\left(-\frac{1}{2x}\right)$$

$$y = -1 + \log\left(-\frac{1}{2x}\right)$$

Ejemplo

Resolver la ecuación:

$$y = y'x + \frac{a}{y'}$$

Solución:

Esta es una ecuación de Clairaut con $p = \frac{dy}{dx}$.

$$y = px + \frac{a}{p}$$

Derivando respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = p'x + p - a\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \cancel{p} = p'x + \cancel{p} - a\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$0 = p'x - a\frac{1}{p^2}p' \Rightarrow 0 = \left(x - \frac{a}{p^2}\right)p'$$

Solución general: tomar $p = C$

$$y = Cx + \frac{a}{C}$$

Solución singular:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{p^2} \Rightarrow p^2 = \dfrac{a}{x} \\ y = \dfrac{2a}{p} \Rightarrow p^2 = \left(\dfrac{2a}{y}\right)^2 \end{cases}$$

Eliminando p, obtenemos la parábola:

$$y^2 = 4ax$$

Gracias por su atención

¿Preguntas?