Ecuaciones diferenciales
SEMANA 2

Henry R. Moncada

Universidad Nacional del Callao
Facultad de Ingeniería Mecánica y de Energía

16 de abril de 2025

Contenido

Objetivos

- Comprender el concepto de transformación lineal.
- Determinar el núcleo e imagen de una transformación.
- Aplicar estos conceptos al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Transformaciones Lineales

Definición de Tranformaciones lineales

Las transformaciones lineales son las funciones con las que trabajamos en el álgebra lineal. Se trata de funciones entre espacios vectoriales compatibles con la estructura, es decir con la suma y el producto por escalares.

Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \to W$ tal que

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{u})$, para todo $\mathbf{u} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Similarmente

Una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal si cumple:

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$. Verifique que T es una transformación lineal.

Solución

- Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, entonces:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \big(2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2),\ (x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)\big) \\ &= (2x_1 - y_1,\ x_1 + 3y_1) + (2x_2 - y_2,\ x_2 + 3y_2) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

  Se cumple la aditividad.

- Sea $\mathbf{u} = (x, y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x - \lambda y,\ \lambda x + 3\lambda y) \\ &= \lambda(2x - y,\ x + 3y) = \lambda T(x, y) = \lambda T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

  Se cumple la homogeneidad.

Por lo tanto, $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$ es una transformaciónes lineal que cumple las propiedades de aditividad (suma) y homogeneidad (multiplicación por un escalar).

Ejemplo

Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(x-y,2x,y+x)$. Verifique que T es una transformación lineal.

Solución

- Sean $\mathbf{u}=(x_1,y_1)$ y $\mathbf{v}=(x_2,y_2)$, donde $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \big((x_1+x_2)-(y_1+y_2),\ 2(x_1+x_2),\ (y_1+y_2)+(x_1+x_2)\big) \\ &= (x_1-y_1,\ 2x_1,\ y_1+x_1)+(x_2-y_2,\ 2x_2,\ y_2+x_2) \\ &= T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

  Se cumple la aditividad, $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})\in\mathbb{R}^3$.

- Sea $\mathbf{u}=(x,y)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\lambda\mathbf{u}) &= T(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x-\lambda y,\ 2\lambda x,\ \lambda y+\lambda x) \\ &= \lambda(x-y,\ 2x,\ y+x)=\lambda T(x,y)=\lambda T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

  Se cumple la homogeneidad, $T(\lambda\mathbf{u})\in\mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, $T(x,y)=(x-y,2x,y+x)$ es una transformaciónes lineal que cumple las propiedades de aditividad (suma) y homogeneidad (multiplicación por un escalar).

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)$. Verifique que T es una transformación lineal.

Solución

- Sean $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{v} = (y_1, y_2)$, donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \big((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),\ (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2),\ 3(x_2 + y_2)\big) \\ &= (x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 3x_2) + (y_1 + y_2,\ y_1 - y_2,\ 3y_2) \\ &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

  Se cumple la aditividad, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3$.

- Sea $\mathbf{u} = (x, y)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\lambda \mathbf{u}) &= T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 + \lambda x_2,\ \lambda x_1 - \lambda x_2,\ 3\lambda x_2) \\ &= \lambda(x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 3x_2) = \lambda T(x_1, x_2) = \lambda T(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

  Se cumple la homogeneidad, $T(\lambda \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 3x_2)$ es una transformaciónes lineal que cumple las propiedades de aditividad (suma) y homogeneidad (multiplicación por un escalar).

Ejemplo

Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(p(x)) = \frac{d^2 p(x)}{dx^2}$. Verifique que T es una transformación lineal.

Solución

- Para verificar que T es lineal, necesitamos demostrar que para todo $p(x), q(x) \in P_2(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(p(x) + q(x)) &= T(p(x)) + T(q(x)) \\ T(\alpha p(x)) &= \alpha T(p(x)) \end{aligned}$$

- Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 2a_2 \Rightarrow T(p(x)) = 2a_2$$

- Si tomamos $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

$$\begin{aligned} T(p+q) &= T((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x^2 + (a_0 + b_0)) = 2(a_2 + b_2) \\ &= 2a_2 + 2b_2 = T(p) + T(q) \\ T(\alpha p) &= 2\alpha a_2 = \alpha T(p) \end{aligned}$$

La transformación T definida por $T(p(x)) = \frac{d^2 p(x)}{dx^2}$ es una transformación lineal.

Ejemplo

Si A es una matriz real de orden $m \times n$, definimos la aplicación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por

$$T(x) = A\,x, \quad \text{donde } x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

Verifique que T es una transformación lineal.

Solución

- Para $u, v \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) &= A(\lambda u) = \lambda(Au) = \lambda T(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

Ejemplo

La aplicación $T : P_2 \to P_3$, $T(p(x)) = xp(x)$ es lineal. En efecto, si $p, q \in P_2$,

$$\begin{aligned} T((p+q)(x)) &= x(p(x)+q(x)) = xp(x)+xq(x) = T(p(x))+T(q(x)) \\ T(\lambda p(x)) &= x(\lambda p(x)) = \lambda xp(x) = \lambda T(p(x)) \end{aligned}$$

Verifique que T es una transformación lineal.

Solución

- Sean $p, q \in P_2$, veamos:

$$T((p+q)(x)) = x(p(x)+q(x)) = xp(x)+xq(x) = T(p(x))+T(q(x))$$

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, y $p \in P_2$, veamos:

$$T(\lambda p(x)) = x(\lambda p(x)) = \lambda(xp(x)) = \lambda T(p(x))$$

Núcleo e Imagen de una Transformación

Definición de núcleo de T

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Se llama núcleo de T , y se denota por $N(T)$ o $ker(T)$, al subconjunto de V definido por $N(T) = \{v \in V | T(v) = 0_W\}$. Es decir, el núcleo de una aplicación es el conjunto de los vectores cuya imagen es el vector cero.

Núcleo (Ker)

El núcleo de T, denotado $\ker(T)$, es el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Definición de imagen de T

Se llama imagen de T, y se denota por $Im(T)$, al subconjunto de W dado por $Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists\ v \in V \text{ tal que } T(v) = w\}$ Esto es, la imagen es el conjunto de vectores del segundo espacio que son imagen de algún vector del primer espacio.

Imagen (Im)

La imagen de T, denotada $\mathrm{Im}(T)$, es el conjunto de todos los vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$ para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Núcleo e Imagen

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$.

Solución

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y, x - y, 3y) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0, x - y = 0, 3y = 0\}. \end{aligned}$$

  Como el sistema homogéneo $\{x + y = 0, x - y = 0, 3y = 0\}$ es compatible determinado, su única solución es la trivial. Por tanto, $N(T) = \{(0, 0)\}$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}\} = \{(x + y, x - y, 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x, 0) + (y, -y, 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = L\{(1, 1, 0), (1, -1, 3)\}. \end{aligned}$$

Ejemplo: Núcleo e Imagen

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x + y, 2x + 2y, x)$.

Solución

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, 2x + 2y = 0, x = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\} \\ &= \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = L\{(0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x + y, 2x + 2y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 2x, x) + (y, 2y, 0 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = L\{(1, 2, 1), (1, 2, 0)\}. \end{aligned}$$

Ejemplo: Núcleo e Imagen

Sea la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x - y, x + z)$.

Solución

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y, x + z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0, x + z = 0\} \end{aligned}$$

  El sistema $\{x - y = 0, x + z = 0\}$ es compatible indeterminado, siendo su solución $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$N(T) = L\{(1, 1, -1)\}$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x - y, x + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, x) + (-y, 0) + (0, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = L\{(1, 1), (-1, 0), (0, 1)\}\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo: Núcleo e Imagen

Sea la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x,y,z) = (x+y, x-2y, x+y+z)$.

Solución

- Su núcleo es

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y, x-2y, x+y+z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0, x-2y=0, x+y+z=0\} \end{aligned}$$

El sistema $\{x+y=0, x-2y=0, x+y+z=0\}$ es compatible determinado, su única solución es $(0,0,0)$. Por tanto

$$N(T) = L\{(0,0,0))\}$$

- Su imagen es

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x+y, x-2y, x+y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,x,x) + (y,-2y,y) + (0,0,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= L\{(1,1,1),(1,-2,1),(0,0,1)\} = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Ejemplo: Núcleo e Imagen

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + 3y)$.

- Para encontrar el núcleo, resolvemos $T(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ker(T) = \{(0, 0)\}$$

- La imagen está generada por las columnas de la matriz asociada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

Aplicación a Ecuaciones Diferenciales

- Las transformaciones lineales son útiles para representar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

  donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
  La solución del sistema depende de las propiedades de la matriz A, como sus valores propios y vectores propios.

- Esta forma utiliza directamente la idea de una aplicación lineal.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

  - Este sistema puede analizarse encontrando los autovalores y autovectores de la matriz A.
  - Las soluciones tienen la forma:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$$

    si A tiene autovalores reales distintos.
  - Una transformación definida por $T(x) = Ax$ es lineal.
  - Estas transformaciones permiten representar y analizar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
  - La conexión entre álgebra lineal y ecuaciones diferenciales es esencial para el estudio de sistemas dinámicos.

Aplicación en Ecuaciones Diferenciales

- En sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, las soluciones pueden entenderse como imágenes bajo una transformación lineal.
- El núcleo representa soluciones homogéneas ($\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} \in \ker(A - \lambda I)$).
- El estudio del núcleo e imagen permite entender el comportamiento del sistema y su espacio de soluciones.
- El núcleo e imagen son fundamentales para caracterizar las soluciones de sistemas homogéneos y no homogéneos.
- Estos conceptos son una base sólida para avanzar hacia métodos más avanzados como la diagonalización y el uso de funciones propias.

Definición

Dada una aplicación lineal $T : V \to W$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $N(T)$ es un subespacio vectorial de V.
2. $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W.

Definición

Se dice que una aplicación lineal $T : V \to W$ es un monomorfismo si T es una aplicación inyectiva, es decir, si elementos distintos de V tienen imágenes distintas en W,

$$v1 \neq v2 \Rightarrow T(v1) \neq T(v2)$$

Definición

Una aplicación lineal T es un monomorfismo si, y solo si,

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$

Definición

Se dice que una aplicación lineal $T : V \to W$ es un epimorfismo si es una aplicación sobreyectiva (epiyectiva), es decir, si para cualquier vector $w \in W$ existe al menos un vector $v \in V$ tal que $T(v) = w$

Definición

Se dice que una aplicación lineal $T : V \to W$ es un isomorfismo si es monomorfismo y epimorfismo.

Definición

Una aplicación lineal T es un isomorfismo si, y solo si, T es una aplicación lineal inyectiva y sobreyectiva.

Definición

Es posible caracterizar las aplicaciones lineales a partir de los conceptos de núcleo e imagen. Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Se cumplen las siguientes propiedades.

1. T es un monomorfismo si, y solo si, $N(T) = \{0_V\}$.
2. T es un epimorfismo si, y solo si, $Im(T) = W$.
3. T es un isomorfismo si, y solo si, $N(T) = \{0_V\}$ e $Im(T) = W$.

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$.

Solución

- Su núcleo es
$$N(T) = \{(0, 0)\}$$
por lo que T es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$Im(T) = L\{(1, 1, 0), (1, -1, 3)\}$$
Al no ser la imagen igual a $\mathbb{R}^3$, T no es un epimorfismo.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x + 2y, x)$.

Solución

- Su núcleo es
$$N(T) = L\{(0, 0, 1)\}$$
Como el núcleo no es $(0, 0, 0), T$ no es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$Im(T) = L\{(1, 2, 1), (1, 2, 0)\}$$
Al no ser la imagen igual a $\mathbb{R}^3$, T no es un epimorfismo.

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x - y, x + z)$.

Solución

- Su núcleo es
$$N(T) = \{(1, 1, -1)\}$$
por lo que T es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$Im(T) = \mathbb{R}^2$$
lo que prueba que T no es un epimorfismo.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - 2y, x + y + z)$.

Solución

- Su núcleo es
$$N(T) = L\{(0, 0, 0)\}$$
Luego T no es un monomorfismo.
- Su imagen es
$$Im(T) = \mathbb{R}^3$$
Por tanto, T no es un epimorfismo.
- Al ser monoformismo y epimorfismo, T es un isomorfismo.

- Sea V un espacio vectorial tal que $dim(V) = n$.
- Sean $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $w_1, \ldots, w_n$ un conjunto de n vectores de W.
- Entonces existe una única aplicación lineal, $T : V \to W$, tal que

$$T(v_i) = w_i, i = 1, \ldots, n$$

- O sea, una aplicación lineal está completamente determinada a partir de las imágenes de los vectores de una base de V (es decir, conociendo $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ para una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V).

Definición

Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Si $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V , entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un sistema de generadores del subespacio imagen $Im(T)$.

Ejemplo:

Supongamos que

$$T(1,0,0) = (1,2,1), T(0,1,0) = (1,2,0), T(0,0,1) = (0,0,0)$$

Entonces se obtiene la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y) = (x+y, 2x+2y, x)$$

.

Solución

- En efecto, veamos que dicha afirmación es correcta.

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= T(x(1,0,0)) + T(y(0,1,0)) + T(z(0,0,1)) \\ &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(1,2,1) + y(1,2,0) + z(0,0,0) = (x+y, 2x+2y, x). \end{aligned}$$

Ejemplo:

Definamos un endomorfismo sobre el subespacio vectorial

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$$

Solución

- Sabemos que el subespacio V lo podemos describir en términos de sus ecuaciones paramétricas o en términos de la base que lo genera.

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = \lambda + \nu, y = -\lambda, z = \mu, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= L\{(1, -1, 0), (1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Gracias por su atención

¿Preguntas?