

The background of the entire cover is a high-speed, close-up photograph of a blue liquid forming a deep, swirling vortex. The water's surface is highly reflective, with bright highlights and deep shadows that emphasize the fluid's motion and the spiral shape of the eddy. The colors range from a pale sky blue at the top to a deep, dark blue at the bottom of the vortex.

UNED

Mecánica de fluidos

Problemas y soluciones

Julio Hernández Rodríguez
Pablo Gómez del Pino
Claudio Zanzi

Subido por:



Interfase IQ

Libros de Ingeniería Química y más



<https://www.facebook.com/pages/Interfase-IQ/146073555478947?ref=bookmarks>

**Si te gusta este libro y tienes la posibilidad,
cómpralo para apoyar al autor.**

Mecánica de Fluidos

Problemas y soluciones

JULIO HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

PABLO GÓMEZ DEL PINO

CLAUDIO ZANZI

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamos públicos.

© *Universidad Nacional de Educación a Distancia*
Madrid 2016

www.uned.es/publicaciones

© *Julio Hernández Rodríguez, Pablo Gómez del Pino*
y Claudio Zanzi

ISBN electrónico: 978-84-362-7109-6

Edición digital: abril de 2016

Índice general

Prólogo

Nomenclatura

1 Introducción

- 1.1 Fuerza de superficie
- 1.2 Fuerza másica sobre una partícula fluida
- 1.3 Momento de fricción sobre un disco
- 1.4 Tensor de tensiones y fuerza de superficie
- 1.5 Viscosímetro troncocónico
- 1.6 Potencia de giro de un eje en un cojinete

2 Estática de fluidos

- 2.1 Atmósfera isoterma
- 2.2 Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles
- 2.3 Fuerza sobre una compuerta giratoria
- 2.4 Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme
- 2.5 Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme
- 2.6 Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería
- 2.7 Energía asociada a la tensión superficial en gotas de agua
- 2.8 Ascenso de agua por un tubo capilar con el extremo cerrado
- 2.9 Ascenso capilar de agua entre dos placas verticales paralelas
- 2.10 Equilibrio en un tubo capilar tras introducirlo verticalmente en agua por su extremo abierto

- 2.11 Medida de la aceleración de un depósito mediante un manómetro con forma de tubo en U parcialmente sumergido en el líquido que contiene
- 2.12 Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente sobre el terreno
- 2.13 Equilibrio de un gas en un depósito en rotación
- 2.14 Equilibrio de un émbolo dentro de un cilindro que contiene aceite
- 2.15 Cuerpo flotante sobre dos capas de líquidos inmiscibles
- 2.16 Tubo en U inmerso en un depósito giratorio
- 2.17 Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente en el fondo y separando dos líquidos
- 2.18 Compuerta recta e inclinada que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme
- 2.19 Compuerta con forma de cuadrante circular
- 2.20 Fuerza y momento que ejercen tres capas de líquidos inmiscibles sobre una compuerta
- 2.21 Equilibrio en un depósito con paredes articuladas y accionadas mediante muelles
- 2.22 Equilibrio de cuerpos totalmente sumergidos
- 2.23 Compuerta con forma de sector circular
- 2.24 Forma de la superficie libre y fuerzas sobre una compuerta en un depósito sometido a aceleración lineal

3 Cinemática de fluidos

- 3.1 Determinación de la velocidad de una partícula fluida a partir de su trayectoria en coordenadas cilíndricas
- 3.2 Determinación del campo de aceleración
- 3.3 Líneas de corriente y derivada sustancial de la concentración de un contaminante
- 3.4 Cálculo de la línea de traza (I)
- 3.5 Determinación del potencial de un campo de velocidad en coordenadas polares
- 3.6 Vórtice libre
- 3.7 Cinemática de un flujo estacionario e incompresible
- 3.8 Cálculo de la línea de traza (II)
- 3.9 Senda y aceleración de partículas fluidas y línea de traza
- 3.10 Aceleración de una partícula fluida
- 3.11 Posición y aceleración de una partícula fluida en un determinado instante

4 Ecuaciones de conservación en forma diferencial

- 4.1 Campo de velocidad en un flujo de un líquido
- 4.2 Campo de velocidad en un flujo incompresible
- 4.3 Campo de velocidad no estacionario y ley de variación de la densidad con el tiempo
- 4.4 Densidad de una partícula fluida en función del tiempo en un campo de velocidad estacionario
- 4.5 Función de corriente en un campo de velocidad en coordenadas polares
- 4.6 Función de corriente y flujo volumétrico (I)
- 4.7 Determinación del tensor de tensiones viscosas a partir del campo de velocidad
- 4.8 Determinación de la distribución de presión a partir del campo de velocidad
- 4.9 Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (I)
- 4.10 Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (II)
- 4.11 Función de corriente y flujo volumétrico (II)
- 4.12 Irrotacionalidad y determinación del potencial de velocidad y la distribución de presión a partir de la función de corriente
- 4.13 Evolución de la densidad y la presión en la expansión de un gas en un cilindro
- 4.14 Vorticidad, circulación y presión en un vórtice de Rankine
- 4.15 Posición y densidad de una partícula fluida en función del tiempo

5 Ecuaciones de conservación en forma integral

- 5.1 Variación de la densidad de un gas en un cilindro (I)
- 5.2 Incremento de la temperatura del agua a través de una turbina
- 5.3 Compresor de aire
- 5.4 Equilibrio de un sistema de émbolos y cilindros sobre el que incide un chorro de agua
- 5.5 Impacto oblicuo sobre un deflector plano del agua descargada por gravedad desde un depósito
- 5.6 Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un gas
- 5.7 Flujo a través del rotor y el estator en un compresor axial
- 5.8 Sistema de freno hidrodinámico de una plataforma mediante un deflector
- 5.9 Conducto acodado que atraviesa la pared de separación de dos recintos a distinta presión

- 5.10 Descarga de un chorro de agua desde un tubo vertical
- 5.11 Descarga de chorros de agua en depósitos e impacto oblicuo de un chorro sobre una placa plana que se mueve en dirección normal a sí misma
- 5.12 Flujo a través de una unión de tuberías en Y
- 5.13 Vehículo de colchón de aire
- 5.14 Acoplamiento hidro-neumático entre dos cilindros
- 5.15 Flujo de agua en una tubería acodada. Fuerza sobre la tubería y potencia disipada en el agua
- 5.16 Flujo de aire a través de una tubería porosa seguida de un difusor cónico
- 5.17 Flujo sobre una placa plana
- 5.18 Desviación de un chorro de líquido mediante un deflector
- 5.19 Flujo en un aspersor de riego plano (I)
- 5.20 Impacto normal de un chorro sobre una placa plana móvil
- 5.21 Propagación de una onda en un canal
- 5.22 Propulsión de un cohete
- 5.23 Depósito móvil autopropulsado mediante un chorro
- 5.24 Proceso de inflado de un globo
- 5.25 Flujo incompresible, no estacionario y unidimensional en un conducto con sección de área variable
- 5.26 Flujo en un aspersor de riego plano (II)
- 5.27 Turbina hidráulica
- 5.28 Generación de una ola en un cilindro por el movimiento de un pistón
- 5.29 Turbina eólica
- 5.30 Globo aerostático
- 5.31 Impacto de un chorro horizontal de agua sobre una placa plana suspendida y articulada en su extremo superior
- 5.32 Resalto hidráulico anular
- 5.33 Desplazamiento de un móvil a través de un conducto que contiene un fluido en reposo
- 5.34 Impacto de chorros normales y oblicuos sobre cuerpos en reposo y en movimiento
- 5.35 Bomba de inyección
- 5.36 Proceso de llenado con aire de un depósito desde otro depósito de grandes dimensiones
- 5.37 Flujo debido a una fuente bidimensional
- 5.38 Flujo en un aspersor de riego no plano
- 5.39 Ventilación y ensayo de incendio en un túnel de carretera

- 5.40 Flujo alrededor de un obstáculo
- 5.41 Regulación neumática del movimiento de los émbolos del Problema 5.14
- 5.42 Flujo a través de un conducto de sección rectangular y paredes porosas
- 5.43 Propulsión mediante un chorro de un cuerpo flotante
- 5.44 Flujo a través de un conducto acodado con sección de área variable
- 5.45 Fuerza y momento de fuerzas sobre un elemento de tubería con bifurcación
- 5.46 Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un flujo no uniforme idealizado
- 5.47 Variación de la densidad de un gas en un cilindro (II)

6 Análisis dimensional

- 6.1 Momento de fricción sobre un disco
- 6.2 Descarga del líquido contenido en un depósito a través de un tubo
- 6.3 Caída de presión en una válvula
- 6.4 Fuerza de empuje en hélices de avión
- 6.5 Caída de un cuerpo con movimiento oscilatorio
- 6.6 Transmisión de calor por convección natural entre un fluido y un cuerpo sólido
- 6.7 Ruptura de una gota en una corriente de gas
- 6.8 Semejanza en bombas hidráulicas
- 6.9 Transmisión de calor en un flujo por convección forzada entre dos placas planas paralelas
- 6.10 Flujo en la cámara de inyección de una máquina de fundición
- 6.11 Sistema de separación de semillas
- 6.12 Inyección de metal líquido en un molde
- 6.13 Explosión en aire
- 6.14 Semejanza parcial en ensayos con un metal líquido y con agua
- 6.15 Fuerza oscilatoria sobre un cuerpo romo inducida por desprendimiento de torbellinos
- 6.16 Impacto de una gota sobre una superficie sólida

7 Flujos con efectos de viscosidad dominantes

- 7.1 Flujo en la zona de entrada de una tubería
- 7.2 Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto bidimensional

- 7.3 Flujo entre dos placas planas paralelas
- 7.4 Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (I)
- 7.5 Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (I)
- 7.6 Flujo acimutal entre dos cilindros coaxiales
- 7.7 Flujo de aceite a través de un conducto
- 7.8 Flujo en un cojinete cilíndrico
- 7.9 Refrigerador de aceite
- 7.10 Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (II)
- 7.11 Viscosímetro de placa plana
- 7.12 Viscosímetro de cilindros concéntricos
- 7.13 Amortiguador de aceite
- 7.14 Ascenso de una burbuja de aire en un tubo que contiene aceite
- 7.15 Viscosímetro de cono y placa
- 7.16 Flujo de dos líquidos en capas superpuestas sobre un plano inclinado
- 7.17 Flujo de aceite con temperatura variable a través de un sistema de tubos en paralelo
- 7.18 Flujo sobre una cinta transportadora inclinada
- 7.19 Descarga no isoterma a través de un conducto del líquido contenido en un depósito cerrado
- 7.20 Flujo entre una placa plana y un disco giratorio
- 7.21 Flujo a través de un conducto bidimensional con paredes porosas
- 7.22 Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (II)

8 Flujos de fluidos ideales

- 8.1 Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto
- 8.2 Proceso de vaciado por gravedad del líquido contenido en un depósito a través de un orificio
- 8.3 Reloj de agua (clepsidra)
- 8.4 Caída de presión durante el cierre progresivo de una válvula en un conducto por el que circula agua
- 8.5 Bombeo de un líquido mediante una unión de tuberías en forma de T
- 8.6 Tobera convergente-divergente con condiciones conocidas en una cierta sección aguas arriba de la sección de garganta
- 8.7 Proceso de llenado con aire de un depósito inicialmente vacío a través de una tobera convergente
- 8.8 Flujo a través de un orificio practicado en la pared del cilindro superior del Problema [5.4](#)

ÍNDICE GENERAL

- 8.9 Flujo en una tobera convergente-divergente. Área mínima de la sección de garganta e influencia de la presión a la salida
- 8.10 Onda de choque en una tobera convergente-divergente
- 8.11 Procesos de descarga de un depósito a través de una tobera convergente-divergente con condiciones de tobera adaptada y de llenado mediante un compresor
- 8.12 Flujo en la tobera convergente-divergente de un motor cohete
- 8.13 Procesos de llenado de un depósito a través de una tobera convergente-divergente y de descarga mediante una bomba de vacío
- 8.14 Túnel supersónico
- 8.15 Proceso de vaciado del cilindro inferior del Problema [5.14](#)
- 8.16 Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (I)
- 8.17 Flujo compresible alrededor de un cuerpo romo
- 8.18 Hipótesis de flujo cuasiestacionario en el proceso de vaciado de un depósito
- 8.19 Determinación de la geometría de toberas
- 8.20 Determinación de las áreas de la sección en la que existe una onda de choque y de la sección de salida de una tobera convergente-divergente
- 8.21 Flujo a la salida de un motor cohete
- 8.22 Flujo alrededor de un cilindro en rotación
- 8.23 Influencia de la presión a la salida en el flujo en una tobera convergente-divergente
- 8.24 Ecuación de Bernoulli en flujos rotacionales
- 8.25 Apertura súbita del extremo inferior de un conducto que contiene agua
- 8.26 Tubo aspersor inclinado
- 8.27 Flujo de aire en una tubería seguida de una tobera convergente. Cierre de una válvula
- 8.28 Vórtice libre en el proceso de vaciado a través de un orificio de un depósito que contiene líquido
- 8.29 Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (II)
- 8.30 Acción del viento sobre un edificio
- 8.31 Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (I)
- 8.32 Onda de choque generada por una explosión en la atmósfera
- 8.33 Proceso de vaciado e inmersión del cubo del Problema [2.15](#)
- 8.34 Reflexión de una onda de choque normal sobre una pared

- 8.35 Mantenimiento de condiciones estacionarias en un depósito que se descarga a través de una tobera y es alimentado mediante un compresor
- 8.36 Flujo en una tobera convergente-divergente. Determinación de condiciones de funcionamiento a partir de la presión en una sección de área dada
- 8.37 Proceso de llenado con aire de un depósito a través de una tobera convergente-divergente
- 8.38 Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fueradediseño (II)
- 8.39 Impacto de dos chorros de agua coaxiales
- 8.40 Flujo en un estatorreactor

9 Flujos turbulentos

- 9.1 Pérdida de carga en una tubería con fugas distribuidas
- 9.2 Determinación del caudal a través de una fuga puntual en una tubería
- 9.3 Determinación del número de estaciones de bombeo en una instalación
- 9.4 Trasvase de agua mediante un sifón
- 9.5 Instalación de conducción de agua y aceite entre depósitos
- 9.6 Flujo en la zona acodada de un sifón con difusor a la salida
- 9.7 Sistema de ventilación de un conducto con extremos abiertos
- 9.8 Sistema de acondicionamiento de aire de un recinto
- 9.9 Sistemas de llenado mediante bombeo y de descarga de un depósito
- 9.10 Sistema de extracción de petróleo mediante agua salada
- 9.11 Cálculo de la pérdida de carga en una tubería con fugas mediante la ecuación de Blasius
- 9.12 Bombeo desde dos depósitos a un tercero más elevado
- 9.13 Tiempo de descarga por gravedad a través de una tubería del líquido contenido en un depósito
- 9.14 Caudal de descarga por gravedad de un depósito a través de una tubería con bifurcación
- 9.15 Diámetro de una tubería de descarga por gravedad de un depósito
- 9.16 Caudales en una tubería con bifurcación
- 9.17 Sistema de bombeo. Rotura en la tubería de impulsión
- 9.18 Cálculo de la presión necesaria en una instalación de riego

ÍNDICE GENERAL

- 9.19 Bomba con tubería de impulsión ramificada. Cálculo de los diámetros de las tuberías
- 9.20 Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (I)
- 9.21 Sistema de bombeo con dos bombas en serie
- 9.22 Detección de fuga en un oleoducto
- 9.23 Dimensiones básicas de una instalación de abastecimiento de agua
- 9.24 Sistema de extracción del líquido contenido en un depósito mediante otro líquido inmiscible
- 9.25 Conducción de agua con un tramo de tuberías en paralelo
- 9.26 Diseño básico de un sistema de bombeo desde dos depósitos
- 9.27 Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (II)
- 9.28 Flujo de agua a través del sistema de tubos en paralelo del Problema 7.17
- 9.29 Embalse con chimenea de equilibrio
- 9.30 Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (I)
- 9.31 Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (II)
- 9.32 Sistema de bombeo en circuito cerrado (I)
- 9.33 Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (III)
- 9.34 Hipótesis de flujo cuasiestacionario y tiempo de establecimiento del flujo en la descarga de un depósito por gravedad a través de una tubería
- 9.35 Sistema de bombeo en circuito cerrado (II)
- 9.36 Trasvase desde un depósito mediante bombeo con inyección lateral en la impulsión
- 9.37 Sistema de bombeo en circuito cerrado (III)

10 Flujos en canales abiertos

- 10.1 Canal de sección rectangular con cambio de pendiente
- 10.2 Canal con obstáculo en el fondo (I)
- 10.3 Canal con obstáculo en el fondo (II)
- 10.4 Canal con cambio en la forma de la sección
- 10.5 Canal de sección trapezoidal
- 10.6 Canal con obstáculo en el fondo (III)

Bibliografía

Apéndices

A Álgebra y cálculo vectorial y tensorial

- A.1 Coordenadas curvilíneas ortogonales
 - Definición
 - Bases de vectores
 - Factores de escala
 - Símbolos de Christoffel
 - Elementos diferenciales
 - Vector velocidad
 - Gradiente
 - Divergencia
 - Rotacional
 - Laplaciana
 - Derivada sustancial de un campo escalar
 - Derivada sustancial del campo de velocidad
(aceleración)
- A.2 Coordenadas cartesianas
 - Definición
 - Bases de vectores
 - Factores de escala
 - Símbolos de Christoffel
 - Elementos diferenciales
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Gradiente
 - Divergencia
 - Rotacional
 - Laplaciana
 - Derivada convectiva
- A.3 Coordenadas cilíndricas
 - Definición
 - Bases de vectores
 - Factores de escala
 - Símbolos de Christoffel
 - Elementos diferenciales
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Gradiente
 - Divergencia

- Rotacional
 - Laplaciana
 - Derivada convectiva
- A.4 Coordenadas esféricas
 - Definición
 - Bases de vectores
 - Factores de escala
 - Símbolos de Christoffel
 - Elementos diferenciales
 - Vector de posición
 - Vector velocidad
 - Gradiente
 - Divergencia
 - Rotacional
 - Laplaciana
 - Derivada convectiva

B Relación de ecuaciones

- B.1 Ecuaciones de conservación en forma integral
 - B.1.1 Ecuación de conservación de la masa
 - B.1.2 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento
 - B.1.3 Ecuación de conservación de la energía
- B.2 Ecuaciones de conservación en forma diferencial
 - B.2.1 Masa
 - Coordenadas cartesianas
 - Coordenadas cilíndricas
 - Coordenadas esféricas
 - B.2.2 Cantidad de movimiento
 - B.2.2.1 Fluidos en reposo
 - B.2.2.2 Flujo de un fluido incompresible con viscosidad uniforme
 - Coordenadas cartesianas
 - Coordenadas cilíndricas
 - Coordenadas esféricas
 - B.2.3 Energía interna
 - B.2.4 Entropía
- B.3 Flujos laminares, estacionarios y unidireccionales de líquidos
- B.4 Flujos de fluidos ideales
 - B.4.1 Ecuación de Euler-Bernoulli
 - B.4.2 Flujos de líquidos ideales

- B.4.2.1 Ecuación de Bernoulli
 - B.4.3 Flujos de gases ideales
 - B.4.3.1 Relaciones entre variables termodinámicas y magnitudes de remanso
 - B.4.3.2 Movimiento cuasiunidimensional en conductos con magnitudes de remanso constantes
 - B.4.3.3 Movimientos con superficies de discontinuidad. Ondas de choque normales
 - B.5 Flujos turbulentos
 - B.5.1 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos estacionarios en tuberías
 - B.5.2 Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos no estacionarios en tuberías de sección constante
 - B.6 Máquinas de fluidos
 - B.6.1 Ecuación de conservación de la energía
 - B.6.2 Definición de alturas y rendimientos
 - B.6.2.1 Bombas hidráulicas
 - B.6.2.2 Turbinas hidráulicas
 - B.6.3 Pérdidas de energía en la instalación
- C Propiedades físicas, tablas y diagramas**

Aquí podrá encontrar información adicional
y actualizada de esta publicación

Prólogo

Este texto es una edición ampliada de la primera parte del libro *Problemas de mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*, editado en 1996, dedicada a mecánica de fluidos. En esta segunda edición se han añadido nuevos problemas, cuyo número ha pasado de 93 a 224, y se ha mantenido la estructura y las características de la primera. La mayoría de los ejercicios han sido propuestos en exámenes de asignaturas del área de Mecánica de Fluidos de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Algunos ejercicios son adaptaciones de otros que fueron propuestos en exámenes de las escuelas de ingenieros industriales de la Universidad Politécnica de Madrid y de la Universidad de Murcia durante los periodos de colaboración o estancia de uno de los autores en dichas universidades.

Se han agrupado los problemas en diez capítulos, teniendo en cuenta la materia principal de la que tratan. En algunos casos, el contenido del problema se corresponde con materias de varios capítulos, aunque se ha procurado que, en la medida de lo posible, su resolución no requiera el conocimiento de materias de capítulos posteriores. Se ha dado un título a cada problema con objeto de facilitar su identificación, a pesar de que ello puede resultar impreciso en algunos casos. Para la mayoría de los problemas y ejercicios se presentan procedimientos de resolución detallados. En algunos casos se indican esquemáticamente los pasos a seguir y en otros se dan sugerencias para la resolución. En todos ellos se da la solución numérica. Se ha procurado citar las fuentes en los casos de problemas que son adaptación de ejercicios publicados por otros autores, aunque es posible que no en todos ellos se haya conseguido hacerlo de forma suficientemente precisa, bien porque no se haya identificado correctamente la primera publicación cuando se trata de ejercicios clásicos, en ocasiones presentados con diferentes variaciones, o bien por errores debidos a otras causas. Se han incluido tres apéndices, un apartado de nomenclatura y un índice alfabético de materias.

El primero de los apéndices contiene relaciones elementales de álgebra vectorial y tensorial; el segundo, una mera relación de ecuaciones frecuentemente utilizadas en la resolución de los problemas, y el tercero incluye algunas propiedades, tablas y diagramas.

La publicación de esta colección de problemas responde a una petición reiterada de los alumnos de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la UNED de disponer de un mayor número de ejercicios resueltos que hayan sido propuestos en exámenes de cursos anteriores. A ellos va, por tanto, principalmente dirigido este texto. Los problemas que se presentan tienen un grado de dificultad variable, generalmente moderado, y pueden ser de cierta utilidad en una etapa inicial en la que, después de haber estudiado los conceptos teóricos, el estudiante se dispone a resolver los primeros ejercicios. Sin embargo, es obvio que, para conseguir una adecuada asimilación de los conceptos y adquirir los recursos necesarios para resolver eficazmente problemas, se requiere abordar y resolver sin ayuda un número suficiente de ejercicios para los que no se disponga del procedimiento de resolución. Enfrentarse al mayor número posible de problemas es generalmente útil, pero lo realmente esencial es conseguir *resolver* problemas, no solo dar el primer paso de intentarlo. Tras sucesivos intentos, más o menos prolongados, de resolver un cierto número de ejercicios (seguidos, en su caso, de la consulta o el análisis del procedimiento de resolución), es imprescindible conseguir llegar a resolver un porcentaje significativo de problemas sin ayuda. Para ello, es importante no “repasar” problemas ya abordados pero que nunca se llegó a resolver, sino intentar resolverlos transcurridos unos días.

Antes de realizar los problemas que aquí se presentan es necesario que el lector haya estudiado los conceptos teóricos con un nivel similar al que habitualmente se utiliza en asignaturas de grado sobre mecánica de fluidos en escuelas de ingeniería. Cabe mencionar, a modo de ejemplo, que en la UNED se utiliza el libro de Antonio Crespo (2006) como texto base en diversas asignaturas de grado y máster dentro del ámbito de la ingeniería industrial. Este excelente libro aborda de forma clara y con el rigor adecuado todos los aspectos fundamentales de la Mecánica de Fluidos que resultan necesarios para resolver los problemas incluidos en el presente texto, así como otros sobre temas que no son tratados en ellos. Por supuesto, el lector puede utilizar otros textos de nivel similar para el estudio de los conceptos teóricos, pero queremos poner énfasis en que un estudio sistemático y suficientemente riguroso de los fundamentos de la Mecánica de Fluidos, que utilice un formalismo matemático de complejidad razonable, es esencial para conseguir una adecuada asimilación de la materia y adquirir la capacidad necesaria para resolver problemas de forma sistemática y eficaz.

Madrid, septiembre 2015

Los autores

Nomenclatura

Los vectores son representados por caracteres en negrita (ocasionalmente, en notación mediante índices).¹ Los tensores se denotan también por símbolos en negrita y con una doble barra, o mediante índices. Se supone que el lector está familiarizado con la notación de índices, también denominada notación de Einstein, utilizada, por ejemplo, en las ecuaciones (A.1.1), (A.1.4), (A.1.7) (véanse las correspondientes notas a pie de página) y (B.2.6). En notación matricial, los vectores se representan mediante vectores columna, que se denotan como $\{\mathbf{v}\}$ o $\{v_i\}$, o vectores fila, que se denotan como (\mathbf{v}) ($=\{\mathbf{v}\}^T$) o (v_i) , y los tensores, mediante matrices que se denotan como $[\tau_{ij}]$ o $[\overline{\overline{\mathbf{T}}}]$ (véase, por ejemplo, la nota 19 al pie de la página 455). El módulo de un vector se denota generalmente por el símbolo correspondiente en cursiva (p. ej.: $F = |\mathbf{F}|$). Las componentes del vector velocidad en coordenadas cartesianas se denotan generalmente por u , v y w . Las componentes del vector velocidad en coordenadas cilíndricas (Figura A.3.1) se denotan en general por v_r , v_θ y v_z .

Caracteres latinos

a	área
a	velocidad del sonido
\mathbf{a}	aceleración
A	área
A^*	área crítica
b	anchura
c	calor específico

¹ Aunque por razones de claridad se ha optado por utilizar caracteres en negrita (\mathbf{v}) para denotar vectores, como suele hacerse actualmente en la mayoría de los textos impresos, es importante tener en cuenta que en textos manuscritos debe hacerse constar el carácter vectorial de las magnitudes utilizando, por ejemplo, una flecha (\vec{v}) o una barra (\overline{v}) sobre el correspondiente símbolo.

c	celeridad de una onda de presión
c_p	calor específico a presión constante
C_c	coeficiente de contracción
C_d	coeficiente de descarga
C_v	coeficiente de velocidad
d	diámetro
D	diámetro
e	energía interna específica
\mathbf{e}	vector unitario
\mathbf{e}_i	vectores de la base física en sistemas de coordenadas curvilíneas
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$	vectores unitarios de la base en el sistema de coordenadas cilíndricas
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$	vectores unitarios de la base en el sistema de coordenadas esféricas
E	fuerza de empuje
E	módulo de elasticidad
f	factor de fricción
f	frecuencia
f_m	fuerza másica por unidad de masa
f_s	fuerza de superficie por unidad de área
f_v	fuerza másica por unidad de volumen
F	fuerza
F_s	resultante de las fuerzas de superficie
F_v	resultante de las fuerzas de volumen
Fr	número de Froude
g	aceleración de la gravedad ²
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	vectores de las bases natural y dual en sistemas de coordenadas curvilíneas
G	gasto (o flujo) másico
h	altura
h	entalpía específica
h	profundidad
h_c	profundidad crítica
h_n	profundidad normal
H	altura

² En la mayoría de los problemas se ha tomado $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Téngase en cuenta que utilizar en algunos problemas el valor de $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, por ejemplo, puede introducir cambios significativos en los resultados.

NOMENCLATURA

H_L	altura de pérdidas internas en una turbomáquina
H_m	altura manométrica
H_n	salto neto
H_u	altura útil (en bombas), salto útil (en turbinas)
H_φ	altura de pérdidas en la instalación (máquinas hidráulicas)
H_φ	altura de pérdidas de energía mecánica
ΔH	altura que proporciona ($-H_m$) o extrae (H_n) una máquina, ecuación (B.1.16)
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	vectores unitarios según x , y y z
k	conductividad térmica
K	coeficiente de pérdida de carga local
L	longitud
m	masa
\dot{m}	flujo másico
M	número de Mach
\mathbf{M}	momento de fuerzas
M_x	momento de giro alrededor de x
n	coeficiente de rugosidad de Manning
n	velocidad de giro
\mathbf{n}	vector unitario normal (saliente) a la superficie de control
p	presión
p_{at}	presión atmosférica
p_{sc}	máxima presión a la salida de la tobera para la que se alcanza bloqueo sónico
$p_{s, \text{ch}}$	presión a la salida de una tobera convergente-divergente para la que se produce una onda de choque normal situada en la sección de salida
p_{ss}	presión a la salida de una tobera convergente-divergente correspondiente a condiciones de tobera adaptada
p_v	presión de vapor
Δp_t	$\rho g H$ ($H = H_m$ o $H = H_n$)
P	perímetro
P	presión reducida
P_e	gradiente de presión reducida (signo opuesto)
\mathbf{q}	flujo de calor por conducción por unidad de área
Q	caudal
\dot{Q}_r, \dot{Q}_q	calor transmitido al fluido por unidad de tiempo y volumen por radiación y reacción química
$\dot{\bar{Q}}$	calor transmitido a un volumen fluido por unidad de tiempo

r	coordenada en sistemas cilíndrico y esférico (Figuras A.3.1 y A.4.1)
r_h	radio hidráulico
R	constante del gas
R	radio
Re	número de Reynolds
s	entropía específica
s	pendiente del canal
S_c	superficie del volumen de control
S_f	superficies fijas
S_m	superficies móviles
t	tiempo
T	temperatura
u	componente del vector velocidad absoluta según x
U	potencial de fuerzas másicas
U	velocidad media
v	componente del vector velocidad absoluta según y
v	módulo del vector velocidad absoluta
\boldsymbol{v}	velocidad absoluta
\boldsymbol{v}_c	velocidad de la superficie de control
$v^i, v_i, v_{(i)}$	componentes del vector \boldsymbol{v} en las bases natural, dual y física de un sistema de coordenadas curvilíneas
v_i	componentes del vector \boldsymbol{v} en un sistema de coordenadas cartesianas
v_r	componente radial del vector velocidad absoluta
v_z	componente axial del vector velocidad absoluta
v_θ	componente acimutal del vector velocidad absoluta
V_c	volumen de control
V_f	volumen fluido
w	componente del vector velocidad absoluta según z
w	módulo del vector velocidad relativa
\boldsymbol{w}	velocidad relativa
\dot{W}	potencia
$\dot{\bar{W}}$	potencia mecánica comunicada a un volumen fluido (potencia útil)
$\dot{\bar{W}}$	potencia mecánica intercambiada entre máquina y fluido (potencia útil)
\dot{W}_u	potencia útil
\dot{W}_t	potencia en el eje de la máquina

NOMENCLATURA

We	número de Weber
x	coordenada cartesiana
x_i, x_c^i	coordenadas cartesianas
x^i	coordenadas curvilíneas
\mathbf{x}	vector de posición
y	coordenada cartesiana
z	coordenada en sistemas cartesiano y cilíndrico
Δz	altura de un obstáculo en un canal

Caracteres griegos

α	ángulo
α	difusividad térmica
β	ángulo
β	coeficiente de expansión térmica
γ	relación de calores específicos
Γ	circulación de la velocidad
Γ_{jk}^i	símbolo de Christoffel de segunda especie
ϵ_{ijk}	coeficiente de permutación (ecuación (A.2.14))
ε	rugosidad absoluta
η	rendimiento
η_h	rendimiento hidráulico
η_m	rendimiento manométrico
η_t	rendimiento total
θ	coordenada acimutal (sistema de coordenadas cilíndricas, Figura A.3.1)
θ	coordenada esférica (Figura A.4.1)
θ	ángulo de contacto
λ	coeficiente de viscosidad en la ecuación (B.2.6)
μ	viscosidad dinámica
ν	viscosidad cinemática
ρ	densidad
σ	coeficiente de tensión superficial
$\bar{\bar{\tau}}, \tau_{ij}$	tensor de tensiones
$\bar{\bar{\tau}}', \tau'_{ij}$	tensor de tensiones viscosas
ϕ	potencial de velocidad
Φ_v	función de disipación viscosa
$\bar{\Phi}_v$	potencia disipada por efectos de viscosidad en un volumen de control.
$\bar{\Phi}_v$	potencia correspondiente a pérdidas hidráulicas en una máquina

φ	coordenada esférica (Figura A.4.1)
ψ	función de corriente
ω	vorticidad
Ω	velocidad angular

Subíndices

e	sección de entrada
g	sección de garganta de la tobera
n	componente en dirección de \mathbf{n}
s	sección de salida
0	magnitudes de remanso

Superíndices

T	vector columna, vector fila o matriz traspuestos
---	--

Capítulo 1

Introducción

Problema 1.1. Fuerza de superficie

En un cierto punto del campo fluido el tensor de tensiones¹ es plano y está definido por

$$\tau_{xx} = -p + a; \tau_{xy} = b; \tau_{yy} = -p + c.$$

Determinar,² en función de a , b , c y p , las componentes de la fuerza por unidad de área que se ejerce en dicho punto sobre una superficie de vector unitario normal \mathbf{n} , siendo $n_y = 2n_x$.

Solución

La fuerza por unidad de área que se ejerce en un punto sobre una superficie de vector unitario normal \mathbf{n} es $\mathbf{f}_s = \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \mathbf{n}$. En este caso, al ser $n_y = 2n_x$ y teniendo

¹ En la literatura en español sobre mecánica de fluidos muy frecuentemente se emplea el término *esfuerzo* para designar lo que se denomina *tensión* en otras áreas de la mecánica de medios continuos, en las que se distingue de forma precisa entre los conceptos de *esfuerzo* y *tensión*. Con objeto de evitar posibles confusiones en los estudiantes, se ha optado aquí por utilizar el término *tensión* en lugar de *esfuerzo*, aunque debe tenerse en cuenta lo que se acaba de comentar sobre otros usos.

² A lo largo de todo el texto se utilizará generalmente el infinitivo para hacer referencia a lo que se pide determinar o calcular en cada problema, debiéndose sobreentender expresiones del tipo *Se debe calcular...* / *Se pide determinar...* / *Se trata de determinar...*

en cuenta que $|\mathbf{n}| = (n_x^2 + n_y^2)^{1/2} = 1$, se tiene

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{Bmatrix},$$

resultando

$$\{\mathbf{f}_s\} = \begin{bmatrix} -p + a & b \\ b & -p + c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{Bmatrix},$$

o en notación vectorial,

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{\sqrt{5}}(a + 2b - p)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}(b + 2c - 2p)\mathbf{j}.$$

Problema 1.2. Fuerza másica sobre una partícula fluida

Una partícula fluida está sometida a la acción de la gravedad en un sistema de referencia dotado de una aceleración uniforme

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} - 2a_1\mathbf{k},$$

siendo $a_1 = 2 \text{ m s}^{-2}$ y z la coordenada vertical. Determinar la fuerza másica que se ejerce sobre la partícula fluida por unidad de masa en un sistema de referencia ligado a la partícula.

Solución

La fuerza másica por unidad de masa debida a la acción de la gravedad es

$$\mathbf{f}_{m1} = -g\mathbf{k}.$$

La debida a la aceleración uniforme del sistema de referencia es

$$\mathbf{f}_{m2} = -a_1\mathbf{i} + 2a_1\mathbf{k}.$$

Por tanto, la fuerza másica resultante sobre la partícula fluida por unidad de masa es

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_{m1} + \mathbf{f}_{m2} = -a_1\mathbf{i} - (g - 2a_1)\mathbf{k}.$$

Sustituyendo valores, resulta $\mathbf{f}_m = -2\mathbf{i} - 5,8\mathbf{k}$ (en m s^{-2}).

Problema 1.3. Momento de fricción sobre un disco

Un disco de diámetro D y espesor despreciable está situado coaxialmente en el interior de un depósito cilíndrico de sección circular, de altura $2h \ll D$, en una posición equidistante de las dos caras del depósito. El depósito está lleno de aceite de viscosidad μ , y el disco gira a una velocidad constante Ω . La velocidad del aceite es estacionaria y varía linealmente con la coordenada axial en superficies cilíndricas coaxiales con el eje del disco. Determinar el momento de fuerzas necesario para mover el disco.

Solución

La distribución de velocidad descrita supone que se han despreciado los efectos de borde en la periferia del disco. El fluido en contacto con la superficie del disco tiene una velocidad

$$v_{\theta D} = \Omega r$$

(r y θ son las coordenadas radial y acimutal, respectivamente), y el fluido en contacto con la superficie interior del depósito está en reposo. Si z es la coordenada axial, con origen en la superficie del disco, la distribución de velocidad en el aceite, teniendo en cuenta lo indicado en el enunciado, es

$$v_{\theta} = v_{\theta D} \frac{h - |z|}{h} = \Omega r \frac{h - |z|}{h}.$$

La distribución de la tensión cortante en la superficie del disco (igual a la existente en cualquier plano paralelo a esta) es, en valor absoluto,

$$|\tau_{z\theta}| = \mu \left| \frac{dv_{\theta}}{dz} \right| = \mu \frac{\Omega r}{h}.$$

El módulo del momento de las fuerzas de fricción que se transmite entre aceite y disco a través de ambas caras de este es

$$M = 2 \int_0^{D/2} r |\tau_{z\theta}| 2\pi r dr,$$

de donde se obtiene³

$$M = \frac{\mu \Omega \pi D^4}{16 h}.$$

³ La dirección del momento necesario para mover el disco es obviamente perpendicular al disco y el sentido coincide con el del vector velocidad de giro.

Problema 1.4. Tensor de tensiones y fuerza de superficie

En un flujo de un fluido newtoniano de viscosidad μ existe la distribución de velocidad siguiente:

$$\begin{aligned}u &= ay, \\v &= 0, \\w &= 0,\end{aligned}$$

siendo a una constante. Determinar el tensor de tensiones y la fuerza que se ejerce por unidad de área sobre una superficie de vector unitario normal $(0 \ 1 \ 0)$, en un punto en el que existe una presión p .

Solución

$$\begin{aligned}[\bar{\bar{\tau}}] &= \begin{bmatrix} -p & \mu a & 0 \\ \mu a & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}; \\f_s &= \mu a \mathbf{i} - p \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Problema 1.5. Viscosímetro troncocónico

Un viscosímetro consta de un elemento móvil de forma troncocónica con semiángulo en el vértice α y bases de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), que gira a una velocidad angular constante Ω dentro de un depósito fijo de forma cónica, coaxial con el elemento móvil y con el mismo semiángulo α , lleno de aceite. Entre las paredes del elemento móvil y del depósito existe una pequeña holgura de anchura $h \ll R_1$, en la que se supondrá que la velocidad del aceite varía linealmente. Determinar la viscosidad del aceite en función del momento de giro, M , que debe aplicarse al elemento móvil. (Se supondrán despreciables las tensiones cortantes en las bases del elemento móvil.)

Solución

La tensión cortante existente entre la pared del elemento móvil y la película de aceite viene dada por

$$\tau = \mu \left| dv_{\theta}/dy \right| ,$$

siendo y la distancia desde la superficie del elemento móvil. La velocidad, según se dice en el enunciado, varía linealmente:

$$v_{\theta} = \Omega r(1 - y/h),$$

siendo r la distancia al eje de rotación. Sustituyendo esta expresión en la anterior, resulta

$$\tau = \mu \frac{\Omega r}{h}.$$

El momento resistente que se ejerce sobre un elemento de área del cono móvil dA , situado a una distancia r , es

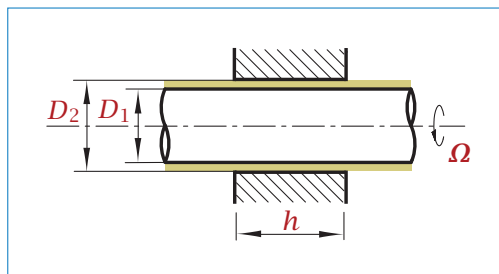
$$dM = r\tau dA = r\mu \frac{\Omega r}{h} 2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha}.$$

Integrando esta expresión entre R_1 y R_2 , y despejando la viscosidad, resulta

$$\mu = \frac{2Mh \sin \alpha}{\Omega \pi (R_2^4 - R_1^4)}.$$

Problema 1.6. Potencia de giro de un eje en un cojinete

El eje de la figura tiene un diámetro $D_1 = 120$ mm, gira con una velocidad angular $\Omega = 220 \text{ rev s}^{-1}$ y está dispuesto coaxialmente con un cojinete de longitud $h = 0,23$ m y diámetro $D_2 = 120,5$ mm.



Entre eje y cojinete existe un aceite de viscosidad $\mu = 0,01 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Calcular la potencia necesaria para mantener constante la velocidad de giro del eje, suponiendo que la velocidad del aceite varía linealmente en el hueco entre eje y cojinete.

Solución

La potencia necesaria para mantener constante la velocidad de giro del eje es $\dot{W} = M_{\text{res}}\Omega$, siendo M_{res} el momento resistente ejercido por el aceite sobre el eje,

$$M_{\text{res}} = \int_S \tau \frac{D_1}{2} dS,$$

donde S es la superficie del eje en contacto con el aceite y τ es la tensión cortante entre eje y aceite. La velocidad del aceite en el hueco entre eje y cojinete varia de forma lineal, y por tanto la tensión cortante entre eje y aceite puede calcularse de la siguiente forma:

$$\tau = \mu \left| \frac{dv}{dr} \right| = \mu \frac{2(v_m - v_0)}{D_2 - D_1},$$

donde v es la velocidad del aceite, r es la coordenada radial, y v_m y v_0 son las velocidades del aceite en contacto con el eje y con el cojinete, respectivamente. Al ser τ constante en toda la superficie del eje, se obtiene

$$\dot{W} = \tau \frac{1}{2} D_1 (\pi D_1 h) \Omega = \mu (v_m - v_0) \pi h \Omega D_1^2 / (D_2 - D_1),$$

y, sustituyendo valores, resulta

$$\dot{W} = 23,86 \text{ kW.}$$

Capítulo 2

Estática de fluidos

Problema 2.1. Atmósfera isoterma

Determinar la variación con la altura de la presión y la densidad en una atmósfera isoterma a temperatura $T = 288 \text{ K}$, suponiendo que la presión en la superficie del terreno es $p_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

Solución

Aplicando la ecuación (B.2.10) (con $U = gz$; eje z con sentido positivo hacia arriba) y utilizando la ecuación de estado de los gases perfectos, resulta

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -g \frac{p}{RT}. \quad (2.1.1)$$

Integrando desde $z = 0$ hasta una altura genérica z ,

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{g}{RT} dz,$$

se obtiene

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{gz}{RT} \right],$$

y teniendo en cuenta la ecuación de estado,

$$\rho = \frac{p_0}{RT} \exp \left(-\frac{gz}{RT} \right).$$

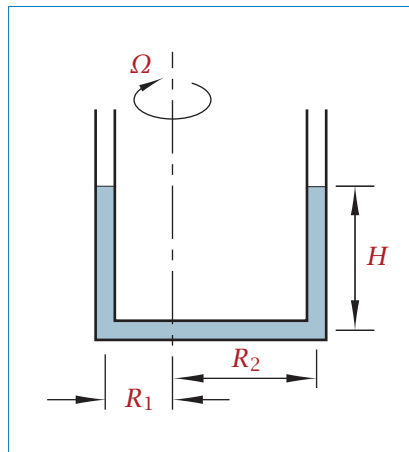
Sustituyendo valores, resulta

$$p = 1,013 \times 10^5 \exp(-1,19 \times 10^{-4} z), \quad \rho = 1,226 \exp(-1,19 \times 10^{-4} z)$$

(p en N m^{-2} , ρ en kg m^{-3} y z en m).

Problema 2.2. Rotación de un tubo en U que contiene dos líquidos inmiscibles

El tubo en U de la figura, abierto en los dos extremos, se encuentra inicialmente en reposo y lleno de agua hasta una altura $H = 12 \text{ cm}$ (situación representada en la figura).



A continuación se añade a una de las ramas (la que aparece a la derecha en la figura) una columna de aceite de densidad $\rho_{ac} = 800 \text{ kg m}^{-3}$, de altura $\Delta z = 5 \text{ cm}$. Se despreciarán los efectos de tensión superficial y se supondrá que el radio del tubo es pequeño frente a las restantes longitudes indicadas.

- a) Determinar la altura que alcanzará la superficie libre del líquido en cada una de las ramas.

A continuación se hace girar el tubo a una velocidad $\Omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$ alrededor del eje indicado en la figura ($R_1 = 6 \text{ cm}$, $R_2 = 12 \text{ cm}$).

b) Calcular el nuevo nivel que alcanzará el líquido en cada rama.

Explicar qué ocurriría si se aumentase progresivamente el valor de Ω a partir de la situación descrita en el apartado b).

Solución

a) Sean z_1 y z_2 las alturas que alcanza el agua en las ramas de la izquierda y de la derecha, respectivamente, una vez añadido el aceite. La conservación del volumen de agua requiere que se cumpla

$$z_1 + z_2 = 2H. \quad (2.2.1)$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua,

$$\frac{dp}{dU} = -\rho_{ag}, \quad (2.2.2)$$

entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda (1) y la superficie de separación agua-aceite (2), teniendo en cuenta que $U = gz$, se obtiene

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ag}g(z_1 - z_2). \quad (2.2.3)$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ac}g\Delta z. \quad (2.2.4)$$

De las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{ac}}{\rho_{ag}} \Delta z,$$

y, teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

$$z_1 = 0,14 \text{ m},$$

$$z_2 = 0,10 \text{ m}.$$

b) El potencial de fuerzas másicas es en este caso

$$U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2}.$$

Integrando de nuevo la ecuación (2.2.2) entre la superficie libre del agua en la rama de la izquierda y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene ahora

$$p_2 - p_{at} = \rho_{ag}g(z_1 - z_2) - \rho_{ag} \frac{\Omega^2}{2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (2.2.5)$$

Integrando la ecuación de la estática en el aceite entre la superficie libre del aceite en la rama de la derecha y la superficie de separación agua-aceite, se obtiene de nuevo la ecuación (2.2.4). De las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5) resulta

$$z_1 - z_2 = \frac{\rho_{ac}}{\rho_{ag}} \Delta z + \frac{\Omega^2}{2g} (R_1^2 - R_2^2),$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2.2.1), se obtiene finalmente

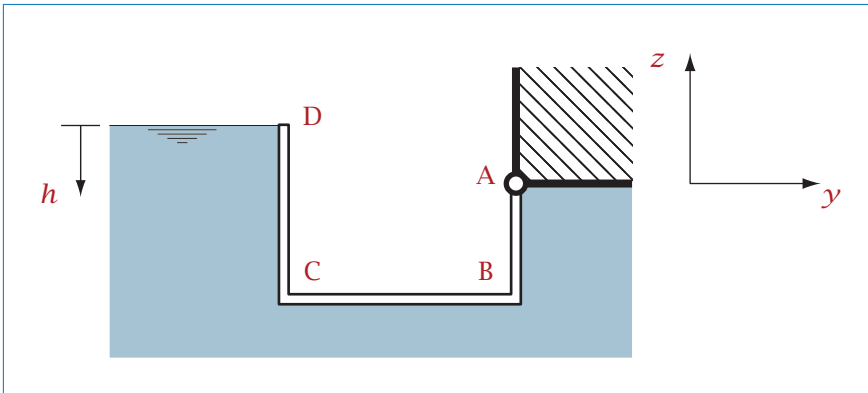
$$z_1 = 0,133 \text{ m},$$

$$z_2 = 0,107 \text{ m}.$$

Explíquese qué ocurriría si, a partir de esta situación de equilibrio, se aumentara progresivamente el valor de Ω .

Problema 2.3. Fuerza sobre una compuerta giratoria

La anchura de la compuerta ABCD de la figura es de 2 m, y las restantes dimensiones son $\overline{AB} = 1 \text{ m}$, $\overline{BC} = 2 \text{ m}$ y $\overline{CD} = 1,5 \text{ m}$. La superficie libre del agua alcanza el nivel indicado en la figura.



- a) Calcular la resultante de las fuerzas de superficie que ejerce el agua sobre la compuerta y el momento de dichas fuerzas respecto del eje A.
- b) Calcular el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre cada una de las caras de la compuerta.

Solución

a) La condición de equilibrio estático en el fluido es

$$dp/dh = \rho g, \quad (2.3.1)$$

siendo h la profundidad desde la superficie libre del agua.¹ Al ser el fluido de densidad constante, integrando se obtiene la distribución de presión

$$p = p_{\text{at}} + \rho gh,$$

donde p_{at} es la presión atmosférica. La fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua es

$$\mathbf{F}_1 = \int_{ABCD} -p \mathbf{n}_1 dS = \int_{ABCD} -(p_{\text{at}} + \rho gh) \mathbf{n}_1 dS,$$

siendo \mathbf{n}_1 el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el agua. Sobre la superficie exterior de la compuerta, en contacto con el aire, actúa la presión atmosférica, por lo que la fuerza que se ejerce sobre ella es

$$\mathbf{F}_2 = \int_{ABCD} -p_{\text{at}} \mathbf{n}_2 dS,$$

siendo \mathbf{n}_2 el vector unitario normal a la superficie de la compuerta, con sentido positivo desde la compuerta hacia el aire. Dado que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ en cada elemento de superficie de la compuerta, se obtiene que la fuerza total que se ejerce sobre la compuerta es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \int_{ABCD} -\rho gh \mathbf{n}_1 dS. \quad (2.3.2)$$

¹ En numerosos problemas se utilizará la profundidad, h , con sentido opuesto al de la coordenada z . Obsérvese el signo diferente en las ecuaciones (2.1.1) y (2.3.1).

Puede observarse que se obtiene esta misma expresión si solo se considera la fuerza que se ejerce sobre la superficie de la compuerta en contacto con el agua (sin tener en cuenta la que se ejerce sobre la superficie en contacto con el aire), siempre que se utilicen en el cálculo presiones manométricas en lugar de presiones absolutas (haciendo, por tanto, $p_{\text{at}} = 0$). En tal caso, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$ (ya que $\mathbf{F}_2 = 0$). Esto es lo que habitualmente se hará en otros problemas de este tipo, en los que aparecen líquidos en contacto con sólidos sometidos exteriormente a una presión atmosférica uniforme; es decir, se determinará la fuerza que se ejerce sobre la superficie del sólido en contacto con líquidos empleando en el cálculo presiones manométricas. Aunque, en este caso, para obtener la ecuación (2.3.2) se ha tenido en cuenta que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ al tratarse de una compuerta delgada, este resultado puede generalizarse a cuerpos de forma arbitraria teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas de presión (por ejemplo, las debidas a la presión atmosférica) que actúan uniformemente sobre una superficie cerrada es nula.

Se tomará un sistema de coordenadas con el eje x coincidente con el eje A (sentido saliente del papel positivo), el eje y en el plano de la figura, con dirección horizontal y sentido positivo hacia la derecha, y el eje z en dirección vertical y sentido positivo hacia arriba. Se va a descomponer la integral de la ecuación (2.3.2) en las contribuciones debidas a las tres superficies planas de la compuerta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{AB} &= - \int_{0,5}^{1,5} \rho g h \mathbf{j} b \, dh = -19\,600 \mathbf{j} \quad (\mathbf{n}_1 = \mathbf{j}), \\ \mathbf{F}_{BC} &= - \int_{-2}^0 \rho g (1,5) (-\mathbf{k}) b \, dy = 58\,800 \mathbf{k} \quad (\mathbf{n}_1 = -\mathbf{k}), \\ \mathbf{F}_{CD} &= - \int_0^{1,5} \rho g h (-\mathbf{j}) b \, dh = 22\,050 \mathbf{j} \quad (\mathbf{n}_1 = -\mathbf{j}), \end{aligned}$$

siendo b la anchura de la compuerta (valores de las fuerzas expresados en N). La fuerza resultante (expresada en N) es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC} + \mathbf{F}_{CD} = 2450 \mathbf{j} + 58\,800 \mathbf{k}.$$

Análogamente pueden obtenerse los momentos respecto del eje A de las fuerzas de superficie que se ejercen sobre cada una de las superficies planas (la única componente es según el eje x):²

$$\mathbf{M}_{AB} = \int_{0,5}^{1,5} \rho g h (h - 0,5) (-\mathbf{i}) b \, dh = -11\,433 \mathbf{i},$$

² En cualquier problema, en las ecuaciones en las que aparezcan valores numéricos de magnitudes dimensionales, sin indicación de las unidades en las que están expresados, se entenderá que estas serán las correspondientes del Sistema Internacional.

$$M_{BC} = \int_{-2}^0 \rho g(1,5) y i b dy = -58\,800 \text{ i},$$

$$M_{CD} = \int_0^{1,5} \rho g h(h - 0,5) i b dh = 11\,025 \text{ i}$$

(valores expresados en N m).

El momento total (expresado en N m) es

$$M = M_{AB} + M_{BC} + M_{CD} = -59\,208 \text{ i}.$$

(sentido entrante al papel).

b) Las coordenadas que definen los puntos de corte de las líneas de acción de las fuerzas con las correspondientes superficies planas son las siguientes (la coordenada x es siempre la del plano medio de la compuerta, al ser el problema bidimensional):

$$z_{AB} = -\frac{M_{AB}}{F_{AB}} = -0,5833 \text{ m},$$

$$y_{BC} = -\frac{M_{BC}}{F_{BC}} = -1 \text{ m},$$

$$z_{CD} = -\frac{M_{CD}}{F_{CD}} = -0,5 \text{ m}$$

(M_{AB} , F_{AB} , ..., denotan los módulos de los vectores correspondientes).

Es obvio que se podía anticipar el resultado $y_{BC} = -1 \text{ m}$, y también, si se han resuelto anteriormente otros problemas de este tipo, que la línea de acción de la fuerza sobre la cara CD debe estar a una distancia de $\frac{1}{3}\overline{CD}$ desde el punto C. También podría haberse calculado F_{BC} teniendo en cuenta que su módulo ha de ser igual al peso del líquido que existiría por encima de la cara BC hasta la superficie libre. Asimismo podría haberse utilizado el concepto de prisma de presiones, empleado fórmulas de momentos de inercia, etc. Aunque obviamente puede elegirse el procedimiento de resolución que se considere más conveniente, la experiencia demuestra que suelen cometerse menos errores si se utiliza un planteamiento de tipo más general y sistemático, como el empleado en este problema.

Problema 2.4. Distribución de presión en un líquido en reposo de densidad no uniforme

La densidad de un líquido contenido en un depósito varía linealmente con la profundidad, siendo de 1 g cm^{-3} en la superficie libre y de $1,2 \text{ g cm}^{-3}$ a una profundidad de 4 m. El gas situado sobre la superficie libre del líquido está a una presión absoluta de $1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$. Determinar la presión a una profundidad de 2 m.

Solución

La ley de variación de la densidad en el depósito viene dada por

$$\rho = 1000 + 50h \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ (profundidad) en m}). \quad (2.4.1)$$

Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática ($U = gz$; z es la coordenada vertical; $dz = -dh$),³

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \frac{dp}{dh} = \rho g,$$

una vez introducida la ecuación (2.4.1),

$$p(h = 2) = p(h = 0) + g \int_0^2 (1000 + 50h) dh,$$

se obtiene⁴

$$p(h = 2) = 138\,180 \text{ N m}^{-2}.$$

Problema 2.5. Compuerta vertical que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme

En la figura se representa una sección de un tanque de base cuadrada, de 3 m de lado, abierto a la atmósfera y dividido mediante una compuerta vertical en dos depósitos de iguales dimensiones. La compuerta puede girar sin ro-

³ Véase la nota 1 en pág. 34

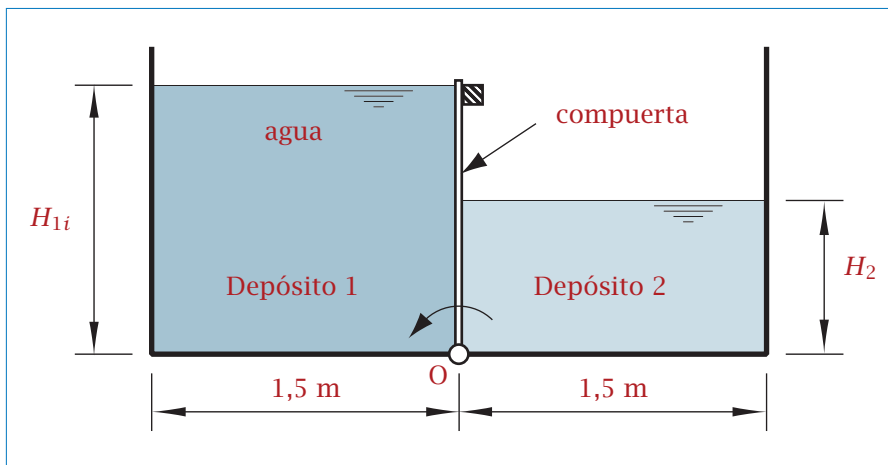
⁴ Véase la nota 2 en pág. 35

zamiento alrededor del eje O, en el sentido indicado en la figura. El depósito de la izquierda (1) contiene inicialmente agua hasta una altura $H_{1i} = 2,5$ m, y el de la derecha (2) un líquido de densidad no uniforme, ρ_2 , hasta una altura $H_2 = 1,5$ m. La variación de ρ_2 con la profundidad h puede aproximarse de la forma siguiente:

$$\rho_2 = \rho_0 = 800 \text{ kg m}^{-3}, \quad 0 \leq h \leq 0,5,$$

$$\rho_2 = \rho_0 (0,75 + h/2), \quad 0,5 < h \leq 1,5 \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ en m}).$$

- Determinar la ley de variación de la presión con la profundidad h en el líquido contenido en el depósito 2.
- Calcular la magnitud y el punto de aplicación de la fuerza ejercida sobre la compuerta por el líquido del depósito 2.



En un instante dado se abre a la atmósfera un orificio de área $A = 2 \text{ cm}^2$ situado en el fondo del depósito 1.

- Determinar la altura H_1 de la superficie libre del agua en el depósito 1 en el instante en que la compuerta comienza a girar. Se supondrá que la velocidad del agua en el depósito 1 es suficientemente pequeña, de forma que puede aplicarse la ecuación de la estática.

Solución

- Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática (con $U = gz$, y tomando h en

sentido opuesto a la coordenada vertical z , $dh = -dz$),

$$\frac{dp}{dh} = \rho_2 g,$$

se obtiene, para $0 \leq h \leq 0,5$,

$$p = \rho_0 g h = 7848 h, \quad (2.5.1)$$

y, para $0,5 < h \leq 1,5$,

$$p = \int_0^{0,5} \rho_0 g dh + \int_{0,5}^h \rho_0 g \left(0,75 + \frac{1}{2}h\right) dh,$$

de donde resulta finalmente

$$p = 490,5 + 5886 h + 1962 h^2 \quad (2.5.2)$$

(p es presión manométrica, en N m^{-2} ; h en m; se ha tomado $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$).

b) La fuerza sobre la compuerta debida al líquido del depósito 2 (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{S_c} p dS = \int_0^{1,5} p b dh,$$

siendo b la anchura de la compuerta y S_c su superficie en contacto con el líquido. Sustituyendo la distribución de presión obtenida en el apartado anterior,

$$F = b \int_0^{0,5} 7848 h dh + b \int_{0,5}^{1,5} (490,5 + 5886 h + 1962 h^2) dh,$$

e integrando, resulta

$$F = 28449 \text{ N.}$$

El momento de la distribución de fuerzas debidas a la presión (respecto del eje que coincide con la línea de contacto entre la superficie libre del agua y la compuerta, por ejemplo), debe ser igual al momento de la fuerza resultante sobre la compuerta:

$$\int_{S_c} p h dS = \int_0^{1,5} p b h dh = F h_m, \quad (2.5.3)$$

siendo h_m la profundidad del punto de aplicación de la fuerza resultante. De la ecuación (2.5.3), sustituyendo en ella las ecuaciones (2.5.1) y (2.5.2), se obtiene

$$h_m = \frac{b}{F} \left[\int_0^{0,5} 7848 h^2 dh + \int_{0,5}^{1,5} (490,5 h + 5886 h^2 + 1962 h^3) dh \right],$$

de donde resulta

$$h_m = 1,018 \text{ m.}$$

c) Es fácil deducir que la fuerza que ejerce sobre la compuerta el agua contenida en el depósito 1 es

$$F_1 = b\rho_1 g \frac{1}{2} H_1^2,$$

estando situada su línea de acción a una altura $H_1/3$ respecto del fondo del depósito. En el instante en que la compuerta empieza a girar, se igualan los momentos respecto del eje O de las fuerzas que se ejercen sobre ambas caras de la compuerta:

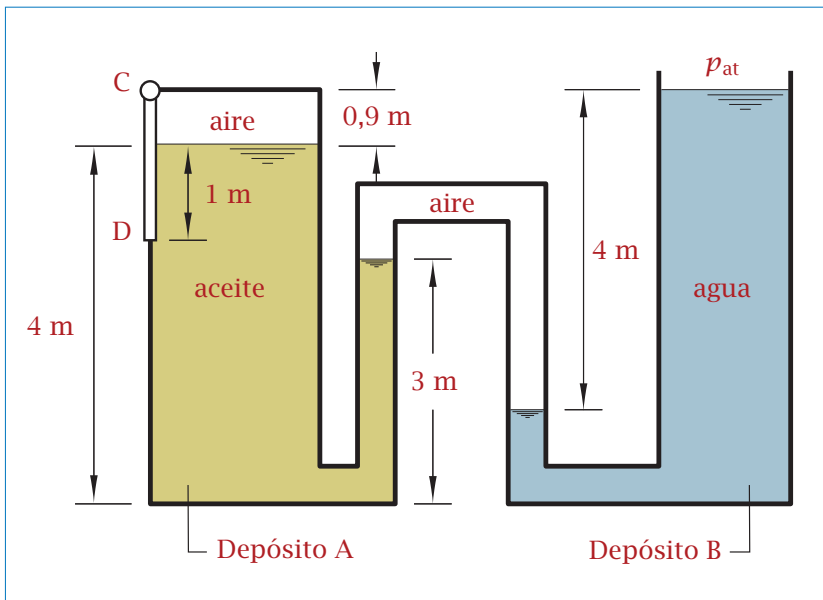
$$F(H_2 - h_m) = b\rho_1 g \frac{1}{2} H_1^2 \frac{1}{3} H_1,$$

de donde se obtiene

$$H_1 = 1,409 \text{ m.}$$

Problema 2.6. Equilibrio entre aire, agua y aceite en dos depósitos conectados por una tubería

En el sistema de la figura, la densidad del aceite contenido en el depósito A es uniforme e igual a 900 kg m^{-3} y el depósito B está abierto a la atmósfera.



Calcular:

- a) Las presiones del aire en el depósito A y en la tubería que conecta ambos depósitos.
- b) La magnitud (por unidad de anchura) y el punto de aplicación de la fuerza que se ejerce sobre la compuerta CD indicada en la figura.

Solución

a) Integrando la ecuación (B.2.10) de la estática en el agua (con $U = gz$), entre las superficies libres en el depósito B y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas $\Delta z_B = 4$ m), resulta

$$\rho_{\text{ag}} g \Delta z_B = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en la tubería,

$$p_T = (1000)(9,81)(4) = 39\,240 \text{ N m}^{-2}.$$

Análogamente, integrando la ecuación de la estática en el aceite, entre las superficies libres en el depósito A y en la tubería (entre las que existe una diferencia de cotas $\Delta z_A = 1$ m), resulta

$$p_A + \rho_{\text{ac}} g \Delta z_A = p_T,$$

de donde se obtiene la presión manométrica del aire en el depósito A,

$$p_A = 39\,240 - (900)(9,81)(1) = 30\,411 \text{ N m}^{-2}.$$

b) Se supondrá que el problema es bidimensional. La fuerza por unidad de anchura sobre la compuerta (horizontal y con sentido hacia la izquierda, evidentemente) es

$$F = \int_{-0,9}^1 p \, dh, \quad (2.6.1)$$

siendo h la profundidad desde la superficie libre del aceite en el depósito A. Se utilizarán presiones manométricas para tener en cuenta la fuerza debida a la presión atmosférica que actúa en la superficie exterior de la compuerta. La presión es $p = p_A$ para $h \leq 0$ y $p = p_A + \rho_{\text{ac}} gh$ para $h > 0$, con lo que, de la ecuación (2.6.1),

$$F = \int_{-0,9}^0 p_A \, dh + \int_0^1 (p_A + \rho_{\text{ac}} gh) \, dh = (30\,411)(1,9) + (900)(9,81) \frac{(1)^2}{2},$$

de donde resulta

$$F = 62\,195 \text{ N m}^{-1}.$$

El momento de la distribución de fuerzas debidas a la presión (respecto del eje horizontal contenido en el plano de la compuerta correspondiente a $h = 0$, por ejemplo), debe ser igual al momento de la fuerza resultante sobre la compuerta:

$$\int_{-0,9}^1 p h \, dh = F h_m, \quad (2.6.2)$$

siendo h_m la profundidad, respecto de la superficie libre del aceite, del punto de aplicación de la fuerza resultante. De la ecuación (2.6.2),

$$h_m = \frac{1}{F} \left[\int_{-0,9}^0 p_A h \, dh + \int_0^1 (p_A + \rho_{ac} g h) h \, dh \right],$$

de donde se obtiene

$$h_m = 9,377 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Problema 2.7. Energía asociada a la tensión superficial en gotas de agua

Determinar la energía asociada a la tensión superficial de una gota esférica de agua de 0,5 mm de diámetro y la energía necesaria para dividirla en diez gotas esféricas del mismo tamaño. Se supondrá un coeficiente de tensión superficial aire-agua: $\sigma = 72 \text{ dinas cm}^{-1}$.

Solución

La energía asociada a la gota de diámetro $D = 0,5 \text{ mm}$ es

$$E_D = \sigma 4\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = (0,072)(4)\pi \frac{(5 \times 10^{-4})^2}{4} = 5,655 \times 10^{-8} \text{ J.}$$

El diámetro de las diez gotas en las que se divide la gota de diámetro D es

$$d = \left(\frac{D^3}{10} \right)^{1/3} = 2,321 \times 10^{-4} \text{ m,}$$

y la energía asociada a cada una de ellas es

$$E_d = \sigma 4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (0,072)(4)\pi \frac{(2,321 \times 10^{-4})^2}{4},$$

de donde se obtiene

$$E_d = 1,218 \times 10^{-8} \text{ J.}$$

La energía necesaria es

$$\Delta E = 10E_d - E_D.$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\Delta E = 6,53 \times 10^{-8} \text{ J.}$$

Problema 2.8. Ascenso de agua por un tubo capilar con el extremo cerrado

Un tubo de diámetro $D = 0,05 \text{ mm}$, cerrado en uno de sus extremos, se halla en posición vertical, con el extremo abierto sumergido en agua contenida en un depósito abierto a la atmósfera. Determinar la presión existente en la burbuja de aire atrapada en la parte superior del tubo si el agua asciende por el capilar una altura $H = 50 \text{ cm}$. Se tomará un ángulo de contacto $\theta = 0^\circ$ y un coeficiente de tensión superficial $\sigma = 72 \text{ dinas cm}^{-1}$.

Solución

Si los efectos de tensión superficial son dominantes (justifíquese que en este caso esto es cierto), la superficie de separación aire-agua es de curvatura constante. La diferencia de presiones a ambos lados de la superficie de separación viene dada por

$$p_a - p_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.8.1)$$

siendo p_a la presión en el aire, p_b la presión en el agua, y R_1 y R_2 los radios de curvatura de las curvas que forman las intersecciones con la superficie de separación de dos planos ortogonales que contienen la normal a la superficie. Dado que el tubo es de sección circular y el ángulo de contacto es nulo, la superficie de separación es semiesférica, con $1/R_1 + 1/R_2 = 4/D$.

Aplicando la ecuación de la estática entre un punto de la superficie libre del agua en el depósito (abierto a la atmósfera) y un punto situado inmediatamente por debajo de la superficie de separación aire-agua en el tubo, se obtiene

$$p_{\text{at}} = p_b + \rho g H. \quad (2.8.2)$$

De las ecuaciones (2.8.1) y (2.8.2),

$$p_a - p_{\text{at}} = -\rho g H + \frac{4\sigma}{D} = -(1000)(9,81)(0,5) + \frac{(4)(7,2 \times 10^{-2})}{5 \times 10^{-5}},$$

de donde resulta una presión manométrica

$$p_a - p_{\text{at}} = 855 \text{ N m}^{-2}.$$

Problema 2.9. Ascenso capilar de agua entre dos placas verticales paralelas

Dos placas planas, rectangulares, paralelas y verticales, separadas una distancia de 0,1 mm, se sumergen parcialmente en el agua contenida en un depósito abierto, con uno de sus bordes paralelo a la superficie del agua, pudiendo suponerse el problema bidimensional. Determinar la altura a la que ascenderá el agua entre las placas. Calcular asimismo la fuerza que ejercerá el agua sobre las placas por unidad de anchura. Supóngase un ángulo de contacto nulo y $\sigma = 72 \text{ dinas cm}^{-1}$.

Solución

Si los efectos de tensión superficial son dominantes (justifíquese que esta hipótesis es aceptable), la superficie de separación aire-agua es de curvatura constante. La diferencia de presiones a ambos lados de la superficie de separación viene dada por

$$p_a - p_b = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.9.1)$$

siendo p_a la presión en el aire, p_b la presión en el agua, y R_1 y R_2 los radios de curvatura de las curvas que forman las intersecciones con la superficie de separación de dos planos ortogonales que contienen la normal a la superficie. Dada

la configuración geométrica del problema, y al ser nulo el ángulo de contacto, la superficie de separación es semicilíndrica, con $R_1 = d/2$ y $R_2 = \infty$, siendo d la distancia entre las placas.

Aplicando la ecuación de la estática entre un punto de la superficie libre del agua en el depósito y un punto situado inmediatamente por debajo de la superficie de separación aire-agua en la región entre placas, se obtiene

$$p_a = p_b + \rho gh, \quad (2.9.2)$$

siendo h la altura a la que asciende el agua entre las placas.

De las ecuaciones (2.9.1) y (2.9.2), resulta⁵

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d} = \frac{(2)(0,072)}{(1000)(9,81)(10^{-4})},$$

de donde se obtiene

$$h = 1,468 \times 10^{-1} \text{ m.}$$

La distribución de presión (manométrica) en el agua es

$$p = -\rho g z,$$

siendo z la coordenada vertical, con origen en la superficie libre del agua en el depósito. La fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre cada una de las placas (que tiende a juntarla con la otra) es

$$F = \int_0^h \rho g z \, dz = (1000)(9,81) \frac{(0,1468)^2}{2},$$

de donde resulta

$$F = 105,7 \text{ N m}^{-1}.$$

Problema 2.10. Equilibrio en un tubo capilar tras introducirlo verticalmente en agua por su extremo abierto

Un tubo de longitud $H = 10$ cm y diámetro $d = 0,1$ mm, cerrado en uno de sus extremos, se introduce verticalmente por su extremo abierto, hasta una profundidad de 2 cm, en el agua contenida en un depósito abierto a la

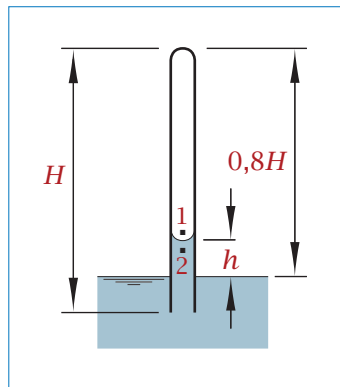
⁵ Los valores numéricos están expresados en unidades del Sistema

Internacional. Véase la nota 2 en pág. 35.

atmósfera. Se supondrá que el aire atrapado en el interior del tubo evoluciona isotérmicamente. La presión atmosférica es $p_{\text{at}} = 10^5 \text{ Pa}$, la tensión superficial aire-agua es $\sigma = 73 \text{ dinas cm}^{-1}$ y el ángulo de contacto es nulo. Determinar el nivel que alcanzará el agua en el tubo en situación de equilibrio. Comentar el resultado.

Solución

En la figura se representa la situación de equilibrio final. Los puntos 1 y 2 están a ambos lados de la superficie de separación aire-agua en el tubo. h es la altura a la que esta se encuentra con respecto a la superficie libre del agua en el depósito.



El equilibrio en la superficie de separación aire-agua dentro del tubo requiere que⁶

$$p_1 - p_2 = \frac{4\sigma}{d}.$$

Planteando la ecuación de la estática dentro del agua, se obtiene

$$p_2 = p_{\text{at}} - \rho gh.$$

Al ser isoterma la evolución que experimenta el aire atrapado en el tubo (la masa inicial de aire en el tubo se mantiene constante), deberá cumplirse

$$p_1(0,8H - h) = p_{\text{at}}H.$$

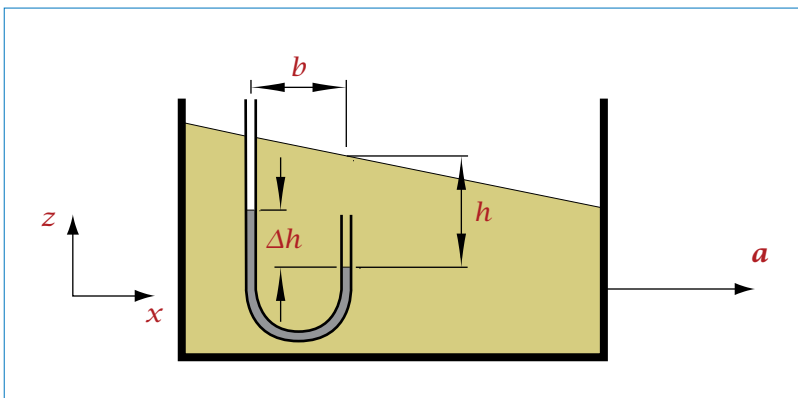
De las tres ecuaciones anteriores, sustituyendo valores, resulta

$$h = -17 \text{ mm.}$$

⁶ Véase, por ejemplo, el Problema 2.8.

Problema 2.11. Medida de la aceleración de un depósito mediante un manómetro con forma de tubo en U parcialmente sumergido en el líquido que contiene

El depósito de la figura, abierto a la atmósfera, contiene aceite de densidad $\rho_{ac} = 850 \text{ kg m}^{-3}$ y se mueve en dirección horizontal con una aceleración constante \mathbf{a} . El manómetro que se muestra en la figura, solidario con el depósito y contenido en un plano vertical paralelo a \mathbf{a} , contiene mercurio ($\rho_{Hg} = 13\,600 \text{ kg m}^{-3}$); el extremo de su rama derecha está sumergido en el aceite y el de la rama izquierda (que no contiene aceite) está abierto a la atmósfera. Teniendo en cuenta que las longitudes acotadas en la figura son $b = 30 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$ y $\Delta h = 10 \text{ cm}$, determinar el módulo de la aceleración del depósito, a , y el ángulo que forma la superficie libre del aceite con el plano horizontal.⁷



Solución

Denotaremos con los subíndices 1 y 2 las magnitudes en la superficie libre del mercurio en la rama de la izquierda del tubo y en la superficie de separación aceite-mercurio en la rama de la derecha, respectivamente. Integrando la ecuación

⁷ El enunciado de este problema, sin apenas modificaciones en el planteamiento, se ha tomado del texto de Pnueli y Gutfinger (1992).

(B.2.10), que, teniendo en cuenta que el potencial

$$U = gz + ax$$

, queda de la forma

$$dp + \rho g dz + \rho a dx = 0,$$

entre los extremos de la columna de mercurio en el tubo, resulta

$$p_1 - p_2 + \rho_{\text{Hg}}g(z_1 - z_2) + \rho_{\text{Hg}}a(x_1 - x_2) = p_{\text{at}} - p_2 + \rho_{\text{Hg}}g\Delta h - \rho_{\text{Hg}}ab = 0.$$

Por otra parte, integrando la ecuación (B.2.10) entre la superficie de separación aceite-mercurio en la rama de la derecha y la superficie libre del aceite sobre la vertical de dicha rama, se obtiene

$$p_2 - p_{\text{at}} - \rho_{\text{ac}}gh = 0.$$

De las dos ecuaciones anteriores, se obtiene

$$a = \frac{g}{b} \left(\Delta h - \frac{\rho_{\text{ac}}}{\rho_{\text{Hg}}} h \right) = 2,861 \text{ m s}^{-2}.$$

La superficie libre del aceite es equipotencial, por lo que está dada por el plano

$$U = gz + ax = \text{constante},$$

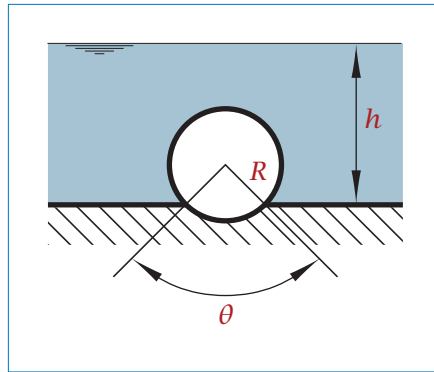
que forma un ángulo

$$\alpha = \arctan \left(-\frac{a}{g} \right) = -16,26^\circ$$

con la dirección horizontal.

Problema 2.12. Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente sobre el terreno

Se tiene un cilindro de radio $R = 0,5 \text{ m}$ y longitud $L = 1 \text{ m}$, apoyado longitudinalmente en el fondo de un embalse de agua a una profundidad $h = 3,5 \text{ m}$, tal como se indica en la figura. El área de contacto del cilindro con el suelo es $A = R\theta L$, siendo $\theta = 20^\circ$ el ángulo indicado en la figura. Se supondrá que el agua del embalse tiene una densidad uniforme $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.



- Determinar el valor mínimo de la masa del cilindro necesaria para que este permanezca en el fondo.
- Supóngase que, partiendo de una situación inicial de equilibrio con el cilindro apoyado, este pierde lastre y llega a tener una masa inferior a la calculada en el apartado anterior. Describir lo que ocurrirá en instantes posteriores.

Solución

- $m_{\min} = 91 \text{ kg}$.

Problema 2.13. Equilibrio de un gas en un depósito en rotación

Un depósito cilíndrico que contiene un gas perfecto a temperatura uniforme T gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante Ω . Determinar la ley de variación de la densidad del gas en el depósito teniendo en cuenta que en el eje, a una determinada altura $z = 0$, la densidad es ρ_0 . (Constante del gas: R .)

Solución

La condición de equilibrio en el gas contenido en el depósito es

$$dp + \rho dU = 0,$$

donde el potencial

$$U = gz - \Omega^2 r^2 / 2.$$

Diferenciando esta última expresión, resulta

$$dU = g dz - \Omega^2 r dr.$$

De la ecuación de estado del gas se deduce, tomando $T = \text{cte}$,

$$dp = RT d\rho.$$

Sustituyendo dp y dU en la condición de equilibrio, resulta

$$RT d\rho + \rho g dz - \rho \Omega^2 r dr = 0.$$

Integrando esta última expresión, teniendo en cuenta que $\rho = \rho_0$ en $r = 0, z = 0$, se obtiene

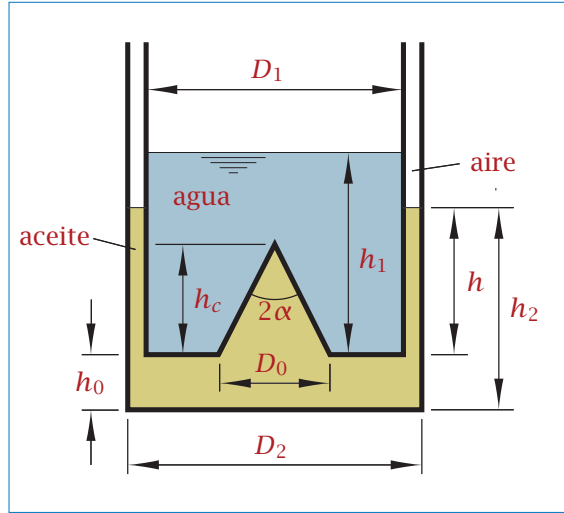
$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{1}{RT} \left(\frac{\Omega^2 r^2}{2} - gz \right) \right].$$

Problema 2.14. Equilibrio de un émbolo dentro de un cilindro que contiene aceite

Un émbolo hueco de diámetro D_1 , con la forma indicada en la figura, que contiene agua hasta una altura h_1 , está situado coaxialmente en el interior de un cilindro de diámetro $D_2 = 1,1 D_1$ que contiene aceite de densidad $\rho_{ac} = \frac{5}{6} \rho_{agua}$. En la cara inferior del émbolo hay una hendidura cónica de altura $h_c = \frac{1}{2} h_1$ y diámetro en la base $D_0 = \frac{1}{3} D_1$. En el instante inicial, dicha cara se mantiene a una altura $h_0 = \frac{1}{3} h_1$ sobre el fondo del cilindro, y sumergida en el aceite una profundidad $h = h_2 - h_0$. Se supondrá que las alturas de las paredes de émbolo y cilindro son lo suficientemente grandes como para que no rebosen el aceite ni el agua, que el peso del émbolo es despreciable y que tanto el cilindro como el émbolo están abiertos a la atmósfera. También se supondrá que el aceite llena completamente el interior de la hendidura cónica (no existe aire atrapado). Determinar, en la situación de equilibrio que se alcance una vez que se deja libre el émbolo:

- Profundidad h' a la que quedará sumergida en el aceite la cara inferior del émbolo.

- b) Altura h'_0 entre la cara inferior del émbolo y el fondo del cilindro. Coméntese el resultado.



Solución

a) En la situación de equilibrio, dado que el peso del émbolo es despreciable, la resultante de las fuerzas de superficie que sobre este ejercen el aceite y el agua (ambos en estado de reposo) es nula. La distribución de presión manométrica en el aceite es

$$p = \rho_{ac} g (h'_2 - z),$$

siendo z la coordenada vertical con origen en el fondo del cilindro y h'_2 la altura que alcanza el aceite en equilibrio estático. Debido a la simetría del problema, la fuerza que ejerce el aceite sobre el émbolo tiene solo componente vertical, que viene dada por

$$F_{ac} = \int_{S_{emb}} p n_z dS = \int_{S_{plana}} p dS + \int_{S_{cono}} p \sen \alpha dS,$$

siendo S_{emb} la superficie inferior del émbolo, formada por las partes plana, S_{plana} , y cónica, S_{cono} ; n_z la componente vertical del vector normal a dicha superficie inferior (con sentido saliente del volumen de aceite), y α el semiángulo del cono.

De la ecuación anterior, es inmediato escribir

$$F_{ac} = \rho_{ac} g h' \frac{\pi}{4} (D_1^2 - D_0^2) + \int_0^{D_0/2} \rho_{ac} g \sin \alpha \left[h' - h_c \left(1 - \frac{2r}{D_0} \right) \right] \frac{2\pi r}{\sin \alpha} dr,$$

siendo r la coordenada radial, con origen en el eje del cono (obsérvese que $z - h_0 = h_c (1 - 2r/D_0)$). Teniendo en cuenta las relaciones entre D_0 y D_1 , y h_1 y h_c , indicadas en el enunciado, resulta finalmente

$$F_{ac} = \frac{\pi}{4} \rho_{ac} g D_1^2 \left(h' - \frac{h_1}{54} \right).$$

La fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del émbolo es⁸

$$F_{ag} = \frac{\pi}{4} \rho_{ag} g D_1^2 \left(h_1 - \frac{h_1}{54} \right) = \frac{53}{216} \rho_{ag} g \pi D_1^2 h_1.$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores e introduciendo la relación entre densidades indicada en el enunciado, se obtiene

$$h' = 1,196 h_1.$$

Como era intuitivamente obvio (debido a la diferencia entre las densidades del agua y del aceite), la situación final de equilibrio se corresponde con un desnivel entre las superficies libre de agua y aceite de sentido opuesto al que aparece reflejado en la figura del enunciado.

Obsérvese que la solución obtenida solo es válida si satisface la ecuación de conservación de la masa (o, lo que es lo mismo en este caso, del volumen) de aceite. La única situación en la que esto no ocurre corresponde al caso de que no exista un volumen suficiente de aceite en el cilindro que permita que las fuerzas de presión equilibren el peso del agua, en el que resulta necesario que el émbolo se apoye en el fondo del cilindro para que se alcance el equilibrio estático. En tal caso, la altura de la superficie libre del aceite estará determinada por la ecuación de conservación del volumen,

$$(D_2^2 - D_1^2) h' = D_2^2 h_0 + (D_2^2 - D_1^2) h,$$

⁸ Obsérvese que los pasos necesarios para calcular F_{ag} son exactamente los mismos que los seguidos para determinar F_{ac} ; basta con sustituir la densidad del aceite por la del agua y h' (profundidad a la que se encuentra sumergida la parte plana de la base del émbolo dentro del aceite) por h_1 (profundidad a la que se encuentra dicha parte plana en el agua). Téngase en cuenta que el espesor del émbolo se ha supuesto despreciable, por lo que las cotas de las dos caras de la base del émbolo deben tomarse iguales. Obviamente, la fuerza F_{ag} es igual al peso del volumen de agua que contiene el émbolo.

de donde resulta (teniendo en cuenta que $h_2 = h + h_0$)

$$h' = \left(\frac{D_2^2}{D_2^2 - D_1^2} - 1 \right) h_0 + h_2 = \frac{D_1^2}{D_2^2 - D_1^2} h_0 + h_2 = 4,762 h_0 + h_2.$$

Obsérvese que la altura dada por esta última ecuación es la máxima que permite el volumen de aceite contenido en el cilindro (determinado por las alturas iniciales h_0 y h_2), y que obviamente se alcanza en la situación en la que el émbolo toca el fondo del cilindro.

Resumiendo,

$$h' = \min(1,196 h_1; 4,762 h_0 + h_2). \quad (2.14.1)$$

b) De la condición de conservación del volumen de aceite,

$$D_2^2 h_0 + (D_2^2 - D_1^2) h = D_2^2 h'_0 + (D_2^2 - D_1^2) h',$$

teniendo en cuenta la relación de diámetros indicada en el enunciado y el resultado del apartado anterior para h' , se obtiene⁹

$$h'_0 = \max(0,8264 h_0 + 0,1736 h_2 - 0,2076 h_1; 0). \quad (2.14.2)$$

Problema 2.15. Cuerpo flotante sobre dos capas de líquidos inmiscibles

Un cuerpo con forma de cubo de lado $L = 1$ m y masa $M = 500$ kg está hueco y abierto totalmente en una de sus caras. El espesor de las cinco paredes se supondrá despreciable. En un instante dado, el cuerpo se deja caer lentamente sobre el líquido en reposo contenido en un depósito abierto a la atmósfera, de volumen mucho mayor que el volumen del cuerpo, manteniéndose en todo momento vertical el eje perpendicular a la cara abierta, con esta hacia abajo, hasta que el cuerpo queda flotando libremente. El líquido en el que se sumerge el cuerpo no es homogéneo, sino que forma dos capas inmiscibles: la superior es de aceite de densidad $\rho_{ac} = 800$ kg m⁻³ y tiene un espesor $h_{ac} = 20$ cm, y la inferior es de agua y tiene un espesor mayor que el tamaño del cuerpo. Se supondrá que el aire que queda atrapado bajo

⁹ La condición para que el émbolo quede apoyado en el fondo del cilindro ($0,8264 h_0 + 0,1736 h_2 - 0,2076 h_1 \leq 0$, que hace $h'_0 = 0$ en la ecuación (2.14.2)) es obviamente igual a la que se deduce de relacionar entre sí los dos términos que intervienen en la función mínimo de la ecuación (2.14.1).

el cuerpo experimenta una evolución isoterma. La presión atmosférica, p_a , se tomará igual a 1 kgf cm^{-2} .

- a) Determinar el espesor de la capa de aceite que quedará atrapada en el interior del cubo durante el proceso de inmersión.
- b) En la posición de equilibrio estático final, determinar la presión y el volumen del aire en el interior del cubo, y la altura de la parte de este que queda sumergida en el líquido.
- c) Determinar la fuerza vertical que, a partir de la situación de equilibrio descrita, debe aplicarse sobre el centro de la cara superior para sumergir el cuerpo totalmente.

Solución

a) Se supondrá en primer lugar que durante el proceso de inmersión el cuerpo atraviesa totalmente la capa de aceite (lo que deberá ser comprobado posteriormente). En el instante en el que el borde inferior del cuerpo alcanza la superficie de separación del aceite y el agua, el espesor de la capa de aceite en el interior del cuerpo, h_1 , estará determinado por la condición de equilibrio estático dada por¹⁰

$$p'_a = p_a + \rho_{ac}g(h_{ac} - h_1), \quad (2.15.1)$$

siendo p'_a la presión del aire atrapado en el interior del cuerpo en el instante considerado, y por la relación de compresión del aire atrapado, que evoluciona isotérmicamente,

$$p'_a = p_a \frac{L}{L - h_1}. \quad (2.15.2)$$

De las ecuaciones (2.15.1) y (2.15.2), se obtiene

$$h_1 = 1,46 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Se comprueba fácilmente que la hipótesis inicial es cierta, ya que el peso del cuerpo, $Mg = 4905 \text{ N}$, es mayor que la fuerza de empuje que experimenta el cuerpo en la situación correspondiente al instante considerado, $(p'_a - p_a)L^2 = 1455 \text{ N}$.

¹⁰ Se supondrá que la velocidad a la que se introduce el cuerpo en el depósito es suficientemente pequeña, de forma que en todo momento puede aplicarse la ecuación de la estática, y que el volumen del depósito es suficientemente grande, de forma que puede considerarse despreciable la variación del espesor de la capa de aceite que se produce al introducir el cuerpo.

b) En la situación de equilibrio final el interior del cuerpo estará ocupado por un cierto volumen de aire, V , una capa de aceite de espesor h_1 y una capa de agua de espesor h_2 . La presión del aire se obtiene de la ecuación de equilibrio de fuerzas que actúan sobre el cuerpo,

$$(p_a'' - p_a)L^2 = Mg, \quad (2.15.3)$$

de donde resulta

$$p_a'' = 103005 \text{ N m}^{-2}.$$

Teniendo en cuenta la evolución isoterma del aire, se debe cumplir la relación

$$p_a''(L - h_1 - h_2) = p_a L, \quad (2.15.4)$$

de donde se obtiene $h_2 = 0,033 \text{ m}$.

El volumen de aire en el interior del cubo es

$$V = (L - h_1 - h_2)L^2 = 0,9524 \text{ m}^3.$$

La altura de la parte del cuerpo que queda sumergida en el agua, h_3 , se obtiene del equilibrio estático de los tres fluidos, dado por la ecuación

$$p_a'' = p_a + \rho_{ac}g(h_{ac} - h_1) + \rho_{ag}g(h_3 - h_2), \quad (2.15.5)$$

de donde resulta $h_3 = 0,385 \text{ m}$. La altura de la parte del cuerpo que queda sumergida en el líquido es

$$h_{ac} + h_3 = 0,585 \text{ m}.$$

c) La fuerza vertical que es necesario ejercer para que el cuerpo siga hundiéndose a partir de la situación de equilibrio aumenta a medida que este se sumerge en el líquido, alcanzando un valor máximo en el instante en el que la cara superior del cuerpo se encuentra a la altura de la superficie libre del aceite. Teniendo en cuenta que la evolución del aire es isoterma y la condición de equilibrio de los tres fluidos en contacto, se obtienen, para dicho instante, las siguientes ecuaciones:

$$p_a'''(L - h_1 - h_2') = p_a L, \quad (2.15.6)$$

$$p_a''' = p_a + \rho_{ac}g(h_{ac} - h_1) + \rho_{ag}g(h_3' - h_2'), \quad (2.15.7)$$

siendo h_2' y $h_3' = L - h_{ac}$ el espesor de la capa de agua en el interior del cuerpo y la altura de la parte del cuerpo que queda sumergida en el agua, respectivamente. De las ecuaciones (2.15.6) y (2.15.7) se obtiene $p_a''' = 106751 \text{ N m}^{-2}$.

La mínima fuerza que debe aplicarse para que el cuerpo se hunda totalmente será por tanto la que se deduce del equilibrio de fuerzas sobre el cuerpo en dicho instante,

$$F = (p_a''' - p_a)L^2 - Mg = 3746,3 \text{ N.}$$

Problema 2.16. Tubo en U inmerso en un depósito giratorio

Un depósito cilíndrico, abierto a la atmósfera, gira a una velocidad constante Ω alrededor de su eje. En el agua contenida en el depósito se ha sumergido un tubo¹¹ con forma de U que contiene mercurio ($\rho_m = 13\,600 \text{ kg m}^{-3}$). El tubo está dispuesto verticalmente, en un plano que contiene el eje del depósito, con una de sus ramas situada sobre dicho eje, y gira solidariamente con el depósito. La distancia entre las ramas verticales del tubo (que no necesariamente tienen la misma altura) es $d = 0,4 \text{ m}$. La rama interior situada sobre el eje del depósito tiene su extremo abierto sumergido en el agua, y el nivel de mercurio en ella está situado a una altura $h_1 = 1 \text{ m}$ por debajo de la superficie libre del agua en el eje del depósito. La diferencia de altura entre los niveles de mercurio en las ramas del tubo es $\Delta h = 0,6 \text{ m}$. Se supondrá que en ningún caso existen burbujas de aire dentro del tubo, que el radio del tubo es pequeño frente a la distancia entre sus ramas y que el problema es estacionario. Se despreciarán los efectos de la tensión superficial.

- a) Determinar la velocidad de giro del depósito en los dos casos siguientes:
 - a.1) El extremo de la rama exterior del tubo no está sumergido en el agua, sino que está abierto a la atmósfera, existiendo aire sobre la superficie libre del mercurio.
 - a.2) El extremo de la rama exterior del tubo está sumergido en el agua. Determinar además, en este caso, las presiones manométricas en las superficies de separación agua-mercurio en cada una de las ramas y la altura, h_2 , de la superficie libre del agua en el depósito sobre la vertical de la rama exterior con respecto a la superficie libre del mercurio en esta.
- b) Para el caso, descrito en el apartado a.1), en el que el extremo de la

rama exterior no está sumergido en el agua, teniendo en cuenta que el mercurio ocupa en el tubo una longitud total $L = 1,5$ m, suponiendo que la rama interior del tubo tiene una altura $H = 1,25$ m, y partiendo de la situación descrita en el primer párrafo del enunciado (la rama interior está llena de agua en la parte superior; compruébese que en esta posición de partida el extremo de la rama está al mismo nivel que la superficie libre del agua en el eje del depósito), determinar la velocidad de giro mínima necesaria para que todo el mercurio pase a la rama exterior del tubo. Se supondrá que la altura de la rama exterior del tubo es suficientemente grande, de forma que no se derrama mercurio.

- c) Describir (en un sistema de referencia fijo a tierra) el movimiento de una partícula fluida que en un cierto instante se encuentra a 20 cm del eje del depósito, cuando este gira a velocidad Ω .

Solución

a) a.1) Integrando la ecuación (B.2.10) (con $U = gz - \Omega^2 r^2/2$) entre la superficie de separación agua-mercurio en la rama interior y el punto de la superficie libre del agua situado sobre la vertical de dicha rama, y entre aquella y la superficie de separación agua-mercurio en la rama exterior (los subíndices 1 y 2 corresponden a las superficies del mercurio en las ramas interior y exterior, respectivamente), se obtiene

$$p_1 = \rho_a g h_1,$$

$$p_2 + \rho_m g \Delta h - \rho_m \frac{\Omega^2 d^2}{2} = p_1,$$

siendo ρ_a la densidad de agua. Teniendo en cuenta que $p_2 = 0$, resulta

$$\Omega = 8,035 \text{ rad s}^{-1}.$$

a.2) Integrando la misma ecuación (B.2.10) (con $U = gz - \Omega^2 r^2/2$) entre las superficies de separación agua-mercurio (en primer lugar, entre puntos del lado del agua, y, en segundo lugar, entre puntos del lado del mercurio) y entre estas (en un punto del lado del agua) y la superficie libre del agua en la vertical sobre

¹¹ El tubo está formado por dos ramas verticales, en general de distinta longitud, y un tramo horizontal.

las respectivas ramas, resulta

$$p_2 + \rho_a \left(g\Delta h - \frac{\Omega^2 d^2}{2} \right) = p_1,$$

$$p_2 + \rho_m \left(g\Delta h - \frac{\Omega^2 d^2}{2} \right) = p_1,$$

$$p_1 = \rho_a g h_1,$$

$$p_2 = \rho_a g h_2.$$

Obsérvese que, de las dos primeras ecuaciones, se deduce que la expresión entre paréntesis (potencial de fuerzas másicas en la superficie de separación agua-mercurio en la rama exterior del tubo) deber ser nula (ya que se ha tomado nulo el potencial en la misma superficie de la rama interior), lo que permite determinar el valor de

$$\Omega = 8,578 \text{ rad s}^{-1}$$

y deducir que

$$p_2 = p_1 = 9810 \text{ N m}^{-2}.$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que

$$h_2 = h_1 = 1 \text{ m}.$$

En realidad, las anteriores consideraciones son equivalentes a tener en cuenta que la superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles en reposo es una superficie de potencial de fuerzas másicas constante, como se demuestra, por ejemplo, en el texto de Crespo (2006).

b) Debe comprobarse en primer lugar que, en la situación inicial, tal como se indica en el enunciado, en la rama interior existe una altura h_1 de agua, lo que equivale a que el extremo de dicha rama esté exactamente a la altura de la superficie libre del agua en el eje del depósito. Esto se deduce de los valores de H , L , Δh y d . Si h_{m1} y h_{m2} son las alturas de mercurio en las ramas interior y exterior, respectivamente, de las condiciones $L = h_{m1} + h_{m2} + d$ y $h_{m2} - h_{m1} = \Delta h$ se deduce que $h_{m1} = (L - d - \Delta h)/2 = 0,25 \text{ m}$. Dado que, con este valor de h_{m1} , resulta $H = h_1 + h_{m1}$, efectivamente se comprueba que el extremo de la rama interior está inicialmente al mismo nivel que la superficie libre del agua en el eje del depósito. Esta situación inicial hace que, al aumentarse la velocidad de giro y descender el nivel de agua en el eje del depósito, la longitud de agua en el tubo permanezca constante e igual a h_1 . Por tanto, en la situación de equilibrio final

(el subíndice c denota el punto inferior de la rama exterior), integrando la ecuación (B.2.10) (con $U = gz - \Omega^2 r^2/2$) entre la superficie libre del agua en la rama interior y la superficie de separación agua-mercurio, y entre esta y la superficie libre de mercurio en la rama exterior, resulta

$$\rho_a g(h_1 - d) = p_c - \rho_a \frac{\Omega^2 d^2}{2},$$

$$\rho_m gL = p_c,$$

de donde se obtiene

$$\Omega = 49,27 \text{ rad s}^{-1}.$$

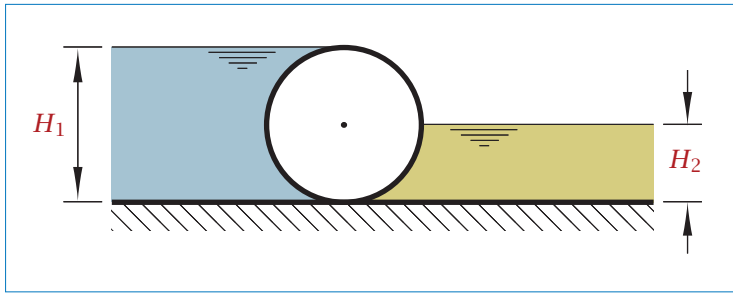
c) El movimiento de la partícula consiste en la superposición de un movimiento de traslación, como si fuera un sólido rígido, a lo largo de una circunferencia de 20 cm de diámetro, con centro en el eje del depósito y contenida en un plano perpendicular a este, y un movimiento de rotación alrededor de su centro, también como si fuera un sólido rígido, con un vector velocidad de giro igual al de rotación del depósito.

Problema 2.17. Equilibrio de un cilindro sumergido apoyado longitudinalmente en el fondo y separando dos líquidos

El cilindro de sección circular de la figura, de diámetro $D = 1 \text{ m}$, está apoyado sobre un plano horizontal y separa dos zonas estancas que contienen líquidos diferentes. En la zona de la izquierda, el líquido es agua y alcanza una altura $H_1 = D$. En la zona de la derecha, el líquido tiene una densidad ρ_2 y alcanza una altura $H_2 = D/2$.

- a) Determinar la fuerza y el momento por unidad de anchura que ejerce el líquido sobre el cilindro en condiciones de reposo, suponiendo que el líquido en la zona de la derecha es también agua.

En lo que sigue se supondrá que el cilindro puede deslizar sin rozamiento sobre el fondo.



- b) Determinar la masa mínima del cilindro, $m = m_{\min}$, y el valor de la densidad $\rho_2 = \rho_2^*$ necesarios para que el cilindro permanezca inmóvil y apoyado en el fondo.
- c) Describir qué ocurrirá si $m < m_{\min}$ o $\rho_2 \neq \rho_2^*$ (considérense separadamente los dos casos) y se parte de una posición de reposo en la que el cilindro toca el fondo.

Solución

a) Obsérvese que la presión ejercida por los fluidos en los que está inmerso el cilindro actúa en cada punto de su superficie en dirección normal a esta, lo que hace que la línea de acción de la fuerza resultante corte el eje del cilindro y que, por ello, el momento de giro sobre el cilindro sea nulo.

La contribución de la presión atmosférica a la distribución de la presión que se ejerce sobre toda la superficie del cilindro es uniforme, y, por tanto, como ya se ha discutido en otros problemas, proporciona una resultante nula. El problema se reduce a calcular la fuerza resultante debida a la presión manométrica que ejercen los líquidos a ambos lados del cilindro.

Tomando el origen de la coordenada vertical, z , en el plano sobre el que se apoya el cilindro y el eje x en dirección perpendicular al cilindro y con sentido positivo en la figura hacia la derecha, la componente horizontal puede expresarse como sigue:

$$F_x = \int_0^{H_1} p_1(z) dz - \int_0^{H_2} p_2(z) dz.$$

Teniendo en cuenta que $p_1(z) = \rho_1 g(H_1 - z)$, $p_2(z) = \rho_2 g(H_2 - z)$, $\rho_2 = \rho_1 = \rho$, $H_1 = D$ y $H_2 = D/2$, resulta

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^D \rho g(D - z) dz - \int_0^{D/2} \rho g(D/2 - z) dz \\ &= \rho g \frac{1}{2} D^2 - \rho g \frac{1}{8} D^2 = \frac{3}{8} \rho g D^2, \end{aligned}$$

y, sustituyendo valores,¹² $F_x = 3678,75 \text{ N m}^{-1}$.

Tomando el origen de la coordenada horizontal, x , en el eje del cilindro, la componente vertical puede expresarse de la forma siguiente:

$$F_z = - \int_{-D/2}^0 p_{1,\text{sup}} dx + \int_{-D/2}^0 p_{1,\text{inf}} dx + \int_0^{D/2} p_{2,\text{inf}} dx, \quad (2.17.1)$$

donde los tres sumandos del segundo miembro corresponden a las integrales sobre los tres cuadrantes de la superficie del cilindro mojada por el agua, desde el punto más alto del cilindro hasta el situado más a la derecha en la figura, y

$$p_{1,\text{sup}} = \rho g (D - z_{1,\text{sup}}),$$

$$p_{1,\text{inf}} = \rho g (D - z_{1,\text{inf}}),$$

$$p_{2,\text{inf}} = \rho g (D/2 - z_{2,\text{inf}}),$$

son las presiones sobre la superficie del cilindro en dichos cuadrantes, siendo $z_{1,\text{sup}}$, $z_{1,\text{inf}}$ y $z_{2,\text{inf}}$ las respectivas coordenadas verticales de la superficie del cilindro. Sustituyendo las anteriores expresiones para las distribuciones de presión en la ecuación (2.17.1), resulta

$$F_z = \rho g \int_{-D/2}^0 (z_{1,\text{sup}} - z_{1,\text{inf}}) dx + \rho g \int_0^{D/2} (D/2 - z_{2,\text{inf}}) dx.$$

Obsérvese que las dos integrales que aparecen en esta ecuación corresponden a las áreas de un semicírculo y de un cuadrante de círculo, por lo que es inmediato obtener, sin necesidad de resolver las integrales,

$$F_z = \frac{3}{16} \rho g \pi D^2,$$

y, sustituyendo valores, $F_z = 5778,57 \text{ N m}^{-1}$.

b) Compruébese que la componente horizontal de la fuerza que se ejerce sobre el cilindro es nula si

$$\rho_2 = \rho_2^* = 4\rho_1 = 4000 \text{ kg m}^{-3}.$$

Para este valor de ρ_2 , la fuerza de empuje es

$$F_z = \frac{3}{8} \rho_1 g \pi D^2 = 11\,557,13 \text{ N m}^{-1},$$

por lo que la masa mínima del cilindro que permite mantenerlo apoyado sobre el suelo es

$$m_{\text{min}} = F_z / g = \frac{3}{8} \rho_1 \pi D^2 = 1\,178,1 \text{ kg m}^{-1}.$$

¹² Se ha tomado $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

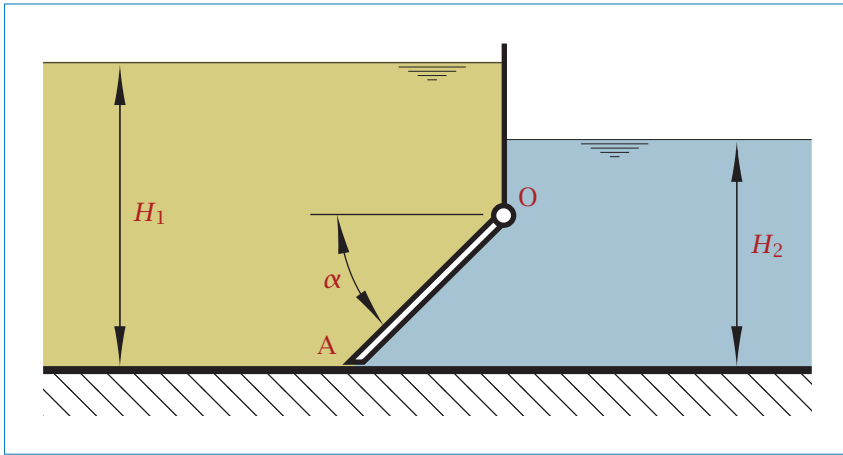
c) Si $m \geq m_{\min}$ y $\rho_2 \neq \rho_2^*$, suponiendo que el cilindro puede deslizarse sin rozamiento y que se mantiene la estanqueidad entre las dos zonas, y despreciando las tensiones viscosas sobre su superficie, el cilindro permanecerá en contacto con el fondo y se trasladará horizontalmente y sin girar en un sentido que dependerá del valor de ρ_2 .

Si $\rho_2 = \rho_2^*$ y $m < m_{\min}$, el cilindro iniciará un desplazamiento en dirección vertical, lo que dará lugar al trasvase de cada uno de los líquidos hacia la zona opuesta a la que ocupa inicialmente, a través del espacio inferior creado entre el cilindro y el fondo. El líquido más pesado fluirá hacia la izquierda, tendiendo a quedar localizado en el fondo, y el más ligero fluirá hacia la derecha, a través de la parte superior del espacio entre cilindro y fondo, tendiendo a ascender hacia la superficie libre. El movimiento del cilindro y de los fluidos puede llegar a ser muy complejo, y dependerá de las propiedades de los líquidos, de la masa del cilindro y de los volúmenes de líquido a ambos lados del cilindro.

Problema 2.18. Compuerta recta e inclinada que separa dos líquidos, uno de ellos de densidad no uniforme

La compuerta OA de la figura, de longitud $L = 1/\sqrt{2}$ m, que en la posición de equilibrio mostrada está inclinada un ángulo $\alpha = 45^\circ$, puede girar libremente alrededor del eje O y separa dos zonas estancas en las que existen dos líquidos diferentes. En la zona de la izquierda, el líquido alcanza una altura $H_1 = 1$ m y tiene una densidad que varía linealmente con la profundidad h :¹³ $\rho_1 = 500 + 300h$ (h en m; ρ_1 en kg m^{-3}). En la zona de la derecha, el líquido es agua. Considérese el problema bidimensional. Determinar:

- Fuerza por unidad de anchura que ejerce sobre la compuerta el líquido estratificado de la zona de la izquierda.
- Peso mínimo por unidad de anchura que debe tener la compuerta para que se mantenga la situación de equilibrio estático cuando la superficie libre del agua en la zona de la derecha es $H_2 = H_1$.
- Altura máxima, H_2 , que puede alcanzar el agua en el depósito de la derecha sin que se produzca la apertura de la compuerta, suponiendo que esta tiene un peso despreciable.



Solución

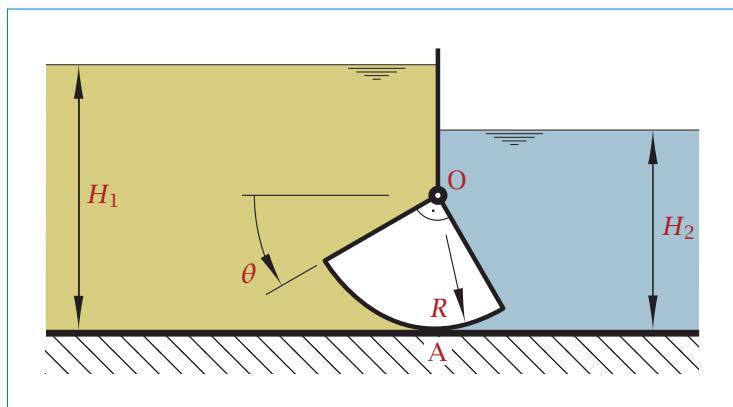
- a) 3208 N m^{-1} .
- b) 2820 N m^{-1} .
- c) $0,7125 \text{ m}$.

Problema 2.19. Compuerta con forma de cuadrante circular

La compuerta de la figura, con una sección transversal con forma de cuadrante de círculo de radio $R = 1 \text{ m}$, puede girar libremente alrededor del eje O y separa dos zonas estancas en las que existen dos líquidos diferentes. En la zona de la izquierda, el líquido tiene una densidad¹⁴ $\rho_1 = 500 \text{ kg m}^{-3}$ y la superficie libre está a una altura $H_1 = 1,5 \text{ m}$ sobre el fondo. En la zona de la

¹³ Debe tenerse en cuenta que los líquidos más comunes no tienen densidades tan bajas como 500 kg m^{-3} , que aparece como valor mínimo en este problema. Por ejemplo, la gasolina, e incluso el propano líquido a presión ambiente y -42°C , tienen densidades de aproximadamente 680 y 581 kg m^{-3} , respectivamente.

derecha, el líquido es agua y tiene una profundidad $H_2 = 1,2$ m. La posición de la compuerta se definirá mediante el ángulo θ indicado en la figura. Se considerará el problema bidimensional, y se supondrá que no existe fricción en el punto A entre la compuerta y el fondo.



Determinar, si existe, el valor del ángulo θ para el que la compuerta se encuentra en equilibrio estático, en los casos siguientes:

- Despreciando el peso de la compuerta.
- Suponiendo que la compuerta tiene una masa por unidad de anchura $m = 1500 \text{ kg m}^{-1}$ y que su centro de gravedad está sobre su plano de simetría, a una distancia $r = \frac{3}{4}R$ del eje de giro.¹⁵
- Teniendo en cuenta el peso de la compuerta, como en el caso anterior, pero en una situación en la que $H_2 = 0,8$ m.

Solución

a) El momento (por unidad de anchura) con respecto al eje de giro (sentido positivo entrante al papel) debido a la distribución de la presión que se ejerce sobre

¹⁴ Véase la nota 13 en pág. 63

¹⁵ Obsérvese que esta no sería la posición del centro de gravedad si la compuerta fuese de densidad uniforme.

la superficie plana de la compuerta en la zona de la izquierda es

$$\begin{aligned} M_1 &= - \int_0^R \rho_1 g (H_1 - R + \ell \sin \theta) \ell \, d\ell \\ &= -\rho_1 g \left(H_1 \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{3} \sin \theta \right), \end{aligned}$$

siendo ℓ la distancia desde un punto genérico de la superficie de la compuerta al eje de giro.

El momento correspondiente a la superficie plana de la compuerta en la zona de la derecha es

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_0^R \rho_2 g (H_2 - R + \ell \cos \theta) \ell \, d\ell \\ &= \rho_2 g \left(H_2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{3} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

La presión que se ejerce sobre la superficie circular de la compuerta da lugar a fuerzas sobre esta cuya línea de acción pasa por el eje O, por lo que no produce momento con respecto a dicho eje.

Despreciando el peso de la compuerta, para que esta permanezca en equilibrio estático debe satisfacerse la condición $M_1 + M_2 = 0$. Sustituyendo en esta expresión las ecuaciones anteriores y, en estas, los datos del enunciado, resulta $\theta = 59,59^\circ$.

b) El momento con respecto al eje de giro debido al peso de la compuerta es

$$M_c = -mg \cos (45^\circ + \theta) \frac{3}{4} R.$$

La condición de equilibrio estático de la compuerta es en este caso

$$M_1 + M_2 + M_c = 0.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores y los datos del enunciado, se obtiene $\theta = 38,15^\circ$.

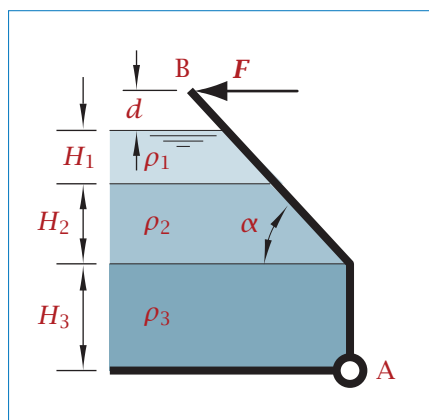
c) En este caso, el momento correspondiente a la superficie plana de la compuerta en la zona de la derecha es

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{\frac{R-H_2}{\cos \theta}}^R \rho_2 g (H_2 - R + \ell \cos \theta) \ell \, d\ell \\ &= \rho_2 g \left[(H_2 - R) \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} \cos \theta - \frac{(H_2 - R)^3}{6 \cos^2 \theta} \right]. \end{aligned}$$

Introduciendo esta ecuación en la condición de equilibrio estático del apartado anterior (las expresiones para M_1 y M_c son las mismas de los apartados anteriores), teniendo en cuenta ahora el nuevo valor de $H_2 = 0,8$ m indicado en el enunciado, se obtiene $\theta = 52,79^\circ$.

Problema 2.20. Fuerza y momento que ejercen tres capas de líquidos inmiscibles sobre una compuerta

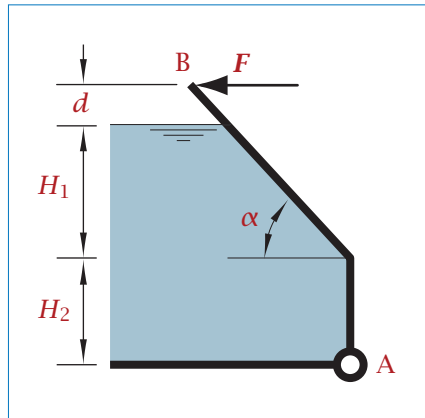
El depósito de la figura contiene tres capas de líquidos inmiscibles entre sí: aceite, agua y un tercero, cuyas densidades son, respectivamente, $\rho_1 = 800 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_2 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ y $\rho_3 = 1200 \text{ kg m}^{-3}$. La anchura (en dirección perpendicular al papel) del depósito es de 3 m, y los espesores de las tres capas de líquidos son $H_1 = 1,2$ m, $H_2 = 1,5$ m y $H_3 = 2$ m. La compuerta rígida AB, cuya parte superior está inclinada un ángulo $\alpha = 45^\circ$ con respecto a la dirección horizontal, puede girar sin rozamiento alrededor del eje A.



Calcular:

- Distribución de presión en los tres líquidos.
- Momento, respecto del eje A, de las fuerzas que se ejercen sobre el tramo vertical de la compuerta.

- c) Módulo de la fuerza horizontal F , indicada en la figura, necesaria para que la compuerta no gire, sabiendo que la distancia vertical, d , desde el punto de aplicación de F hasta la superficie libre del aceite es de 0,7 m.
- d) Repetir el apartado c) para el caso de que el ángulo α indicado en la figura fuera $180^\circ - \alpha$.
- e) Repetir el apartado c) suponiendo que las longitudes indicadas en la figura siguiente son $H_1 = 3$ m, $H_2 = 2$ m y $d = 0,5$ m, y que el único líquido que contiene el depósito está estratificado, con una densidad que varía linealmente con la profundidad entre los valores $\rho_1 = 800$ kg m⁻³, en la superficie libre, y $\rho_2 = 1200$ kg m⁻³, en el fondo del depósito.



Solución

a) La distribución de presión (manométrica) en las tres capas de líquido viene dada por

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_1 g h_1, \\ p_2 &= \rho_1 g H_1 + \rho_2 g h_2, \\ p_3 &= \rho_1 g H_1 + \rho_2 g H_2 + \rho_3 g h_3, \end{aligned}$$

donde h_1 , h_2 y h_3 son las profundidades en las tres capas de líquido, cada una de ellas referida al nivel de la superficie de separación con el fluido que está inmediatamente por encima.

b) El momento que se pide, que se denotará como M_3 , es el momento de las fuerzas ejercidas sobre la compuerta por la tercera capa de fluido, que se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_0^{H_3} p_3 b \, dh_3 (H_3 - h_3) \\ &= gb \int_0^{H_3} [(\rho_1 H_1 + \rho_2 H_2) H_3 + (\rho_3 H_3 - \rho_1 H_1 - \rho_2 H_2) h_3 - \rho_3 h_3^2] \, dh_3. \end{aligned}$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$M_3 = 1,919 \times 10^5 \text{ N m.}$$

c) Para calcular el módulo de la fuerza F es necesario calcular previamente los momentos, M_1 y M_2 , de las fuerzas ejercidas por la primera y segunda capas de fluido, respectivamente:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{H_1} p_1 \frac{b \, dh_1}{\sin \alpha} \left(H_3 \sin \alpha + \frac{H_2 + H_1 - h_1}{\sin \alpha} \right) \\ &= \rho_1 gb \int_0^{H_1} \left[\left(H_3 + \frac{H_2 + H_1}{\sin^2 \alpha} \right) h_1 - \frac{h_1^2}{\sin^2 \alpha} \right] \, dh_1, \\ M_2 &= \int_0^{H_2} p_2 \frac{b \, dh_2}{\sin \alpha} \left(H_3 \sin \alpha + \frac{H_2 - h_2}{\sin \alpha} \right) \\ &= gb \int_0^{H_2} \left[\left(\rho_1 H_1 H_3 + \frac{\rho_1 H_1 H_2}{\sin^2 \alpha} \right) + \left(\rho_2 H_3 + \frac{\rho_2 H_2 - \rho_1 H_1}{\sin^2 \alpha} \right) h_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_2}{\sin^2 \alpha} h_2^2 \right] \, dh_2, \end{aligned}$$

que resultan $M_1 = 9,832 \times 10^4 \text{ N m}$ y $M_2 = 2,477 \times 10^5 \text{ N m}$. El módulo de la fuerza horizontal F se calcula imponiendo el equilibrio de los momentos de las fuerzas respecto al eje A:

$$F = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{H_1 + H_2 + H_3 + d}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$F = 9,960 \times 10^4 \text{ N.}$$

d) Se deja al lector la resolución de este apartado.

e) La distribución de densidad en el líquido estratificado es

$$\rho(h) = \rho_1 + kh$$

(siendo $k = (\rho_2 - \rho_1)/(H_1 + H_2)$), y la de presión manométrica,

$$p(h) = \rho_1 gh + \frac{1}{2}kgh^2,$$

siendo h la profundidad en el líquido con respecto a la superficie libre ($0 \leq h \leq H_1 + H_2$).

Los momentos ejercidos sobre los tramos inclinado y vertical de la compuerta, M_1 y M_2 , son, respectivamente,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{H_1} (\rho_1 gh + \frac{1}{2}kgh^2) \frac{b \, dh}{\sin \alpha} \left(H_2 \sin \alpha + \frac{H_1 - h}{\sin \alpha} \right) \\ &= gb \int_0^{H_1} \left[\rho_1 \left(H_2 + \frac{H_1}{\sin^2 \alpha} \right) h + \left(\frac{1}{2}kH_2 + \frac{kH_1}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{\rho_1}{\sin^2 \alpha} \right) h^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{2 \sin^2 \alpha} h^3 \right] dh, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{H_1}^{H_1+H_2} (\rho_1 gh + \frac{1}{2}kgh^2) b \, dh (H_1 + H_2 - h) \\ &= gb \int_{H_1}^{H_1+H_2} \left[(\rho_1 (H_1 + H_2) h - [\rho_1 - \frac{1}{2}k(H_1 + H_2)] h^2 - \frac{1}{2}kh^3 \right] dh, \end{aligned}$$

obteniéndose $M_1 = 4,609 \times 10^5 \text{ N m}$ y $M_2 = 2,048 \times 10^5 \text{ N m}$. El módulo de la fuerza F , calculado de la misma forma que en el apartado anterior, es

$$F = 1,210 \times 10^5 \text{ N.}$$

Problema 2.21. Equilibrio en un depósito con paredes articuladas y accionadas mediante muelles

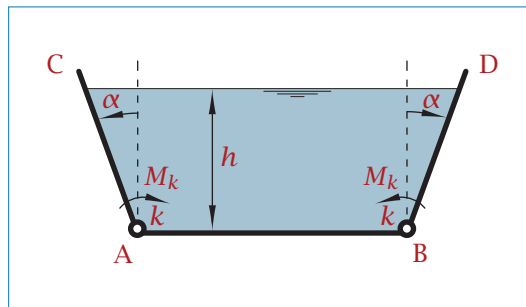
El depósito representado en la figura está formado por la base AB, que tiene una longitud de 1,5 m, y las dos compuertas laterales AC y BD, de longitud 90 cm, que pueden girar sin rozamiento alrededor de los ejes A y B indicados en la figura. Sobre cada compuerta actúa un muelle torsional que proporciona un par, M_k , directamente proporcional al ángulo α representado en la figura ($M_k = k\alpha$), que tiende a llevar las compuertas a la posición vertical ($\alpha = 0$). El depósito está inicialmente lleno con un volumen de agua $V = 600 \text{ l}$. La anchura del depósito es $b = 50 \text{ cm}$. En la situación de equilibrio estático, la altura alcanzada por el agua es $h = 75 \text{ cm}$.

Calcular:

- a) El módulo y la dirección de las fuerzas que ejerce el agua sobre las compuertas AC y BD.
- b) La constante k de los muelles torsionales.

A partir de un cierto instante, se añade lentamente más agua al depósito. Calcular:

- c) El volumen total de agua para el cual el líquido empieza a rebosar por encima de las compuertas del depósito (Nota. Para este último apartado, utilícese la aproximación $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$).



Solución

- a) El volumen V de agua que contiene el depósito es

$$V = b (\overline{AB} h + h^2 \tan \alpha).$$

Sustituyendo valores y despejando, se obtiene:

$$\tan \alpha = 0,133 \Rightarrow \alpha = 7,595^\circ = 0,133 \text{ rad}.$$

La distribución de presión en el depósito, en función de la profundidad z , medida a partir de la superficie libre del agua, es $p = \rho g z$. El módulo de la fuerza que ejerce el agua sobre cada compuerta es

$$F_c = \int_0^h \rho g z \frac{b dz}{\cos \alpha} = \frac{\rho g b h^2}{2 \cos \alpha} = \frac{(1000)(9,81)(0,5)(0,75)^2}{2 \cos (7,595^\circ)},$$

de donde resulta $F_c = 1391,74 \text{ N}$.

La fuerza sobre cada compuerta tiene dirección perpendicular a esta y sentido hacia el exterior del depósito. Es inmediato demostrar que el punto de aplicación está sobre la superficie de la compuerta, a una profundidad de $\frac{2}{3}h$.

b) El momento sobre cada compuerta es

$$\begin{aligned} M_c &= \int_0^h \rho g z \frac{b dz}{\cos^2 \alpha} (h - z) = \frac{\rho g b}{\cos^2 \alpha} \int_0^h (h - z) z dz \\ &= \frac{\rho g b}{6 \cos^2 \alpha} h^3 = 351,01 \text{ N m}. \end{aligned}$$

La constante k de los muelles torsionales se determina igualando el momento que se acaba de calcular con el debido a la deformación de los muelles:

$$M_c = M_k = k \alpha,$$

de donde se obtiene

$$k = M_c / \alpha = 2648,13 \text{ N m rad}^{-1}.$$

c) La altura h alcanzada por la superficie libre y el volumen V de agua en el momento en que el agua empieza a rebosar dependerá del ángulo α para el que se alcanza el equilibrio. La solución se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones no lineales para las incógnitas V , h y α :

$$\frac{\rho g b}{6k} h^3 = \alpha \cos^2 \alpha, \quad (2.21.1)$$

$$V = b (\overline{AB} h + h^2 \tan \alpha), \quad (2.21.2)$$

$$h = \overline{AC} \cos \alpha, \quad (2.21.3)$$

que expresan, respectivamente, la condición de equilibrio estático, la de conservación del volumen y la condición de rebosamiento. Sustituyendo la ecuación (2.21.3) en la ecuación (2.21.1), se obtiene una ecuación no lineal para α :

$$\frac{\rho g b \overline{AC}^3}{6k} = \frac{\alpha}{\cos \alpha}. \quad (2.21.4)$$

Para resolver la ecuación (2.21.4), puede sustituirse $\cos \alpha$ por el correspondiente desarrollo en serie de Taylor en el entorno de $\alpha = 0$:

$$\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 + \mathcal{O}(\alpha^4),$$

obteniéndose:

$$\frac{\rho g b \overline{AC}^3}{6k} = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2/2},$$

de donde resulta

$$K\alpha^2 + 2\alpha - 2K = 0, \quad (2.21.5)$$

con

$$K = \rho g b \overline{AC}^3 / (6k) = 0,225.$$

Resolviendo la ecuación (2.21.5), se obtiene $\alpha = 0,2196 \text{ rad} = 12,58^\circ$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.21.2) de conservación del volumen, teniendo en cuenta la ecuación (2.21.3),

$$\begin{aligned} V &= b(\overline{AB}\overline{AC} \cos \alpha + \overline{AC}^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha) \\ &= (0,5)[(1,5)(0,9) \cos(12,58^\circ) + (0,9)^2 \cos^2(12,58^\circ) \tan(12,58^\circ)], \end{aligned}$$

se obtiene finalmente el volumen de agua buscado,

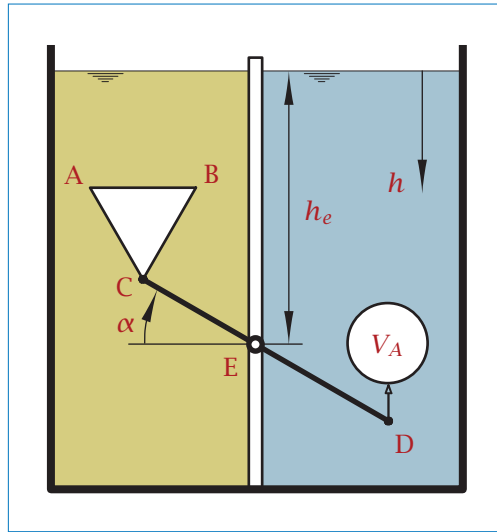
$$V = 0,7449 \text{ m}^3.$$

Problema 2.22. Equilibrio de cuerpos totalmente sumergidos

El depósito abierto representado en la figura está dividido por una compuerta impermeable, según se muestra en la figura. En la parte izquierda del depósito, un cuerpo de densidad $\rho_t = 400 \text{ kg m}^{-3}$, anchura $b = 50 \text{ cm}$ y sección transversal constante de forma triangular está sumergido en un líquido cuya densidad, ρ_1 , varía linealmente con la profundidad h . En la superficie libre, $\rho_1(0) = 1200 \text{ kg m}^{-3}$, y a la profundidad $h_E = 3 \text{ m}$, $\rho_1(h_E) = 1800 \text{ kg m}^{-3}$. El cuerpo está conectado en el punto C a una barra recta que puede girar sin rozamiento alrededor del eje E. Se supondrá que, al girar la barra, el cuerpo se mueve manteniendo la cara AB paralela a la superficie libre en todo momento. En el extremo D de la barra se halla conectada una boya de sección transversal constante de forma circular, de volumen V_A , paredes rígidas y peso despreciable, que está sumergida en todo momento en el agua ($\rho_2 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$) que contiene la parte derecha del depósito. Las longitudes representadas en la figura miden, respectivamente, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 75 \text{ cm}$, $\overline{CE} = 1,5 \text{ m}$ y $\overline{ED} = 1,25 \overline{CE}$. Se supondrá el problema bidimensional.

Calcular:

- La distribución de presión en el compartimiento de la izquierda en función de la profundidad h .
- La fuerza que ejerce el líquido sobre el cuerpo del compartimiento de la izquierda, suponiendo que la barra está inclinada un ángulo $\alpha = 30^\circ$, como se muestra en la figura.
- El volumen de la boya V_A , necesario para mantener en equilibrio la barra con una inclinación $\alpha = 30^\circ$.



Solución

- La densidad en la parte izquierda del depósito es

$$\rho_1(h) = 1200 + 200h \quad (\rho \text{ en kg m}^{-3}, h \text{ en m}),$$

y la presión,

$$p_1(h) = \int_0^h \rho_1 g \, dh = \int_0^h (1200 + 200h)g \, dh,$$

de donde resulta

$$p_1(h) = 981h^2 + 11772h \quad (p \text{ en Pa}, h \text{ en m}).$$

b) Debido a la simetría del problema, la fuerza hidrostática que ejerce el líquido sobre el cuerpo solo tendrá componente vertical. La fuerza total ejercida sobre las caras laterales del cuerpo es

$$\begin{aligned}
 F_z^{\text{lat}} &= 2 \int_{h_A}^{h_C} p_1 b \sin 30^\circ dS = 2b \int_{h_A}^{h_C} p_1 \sin 30^\circ \frac{dh}{\cos 30^\circ} \\
 &= 2b \tan 30^\circ \int_{h_A}^{h_C} (981 h^2 + 11\,772 h) dh \\
 &= 2b \tan 30^\circ \left[327(h_C^3 - h_A^3) + 5886(h_C^2 - h_A^2) \right], \quad (2.22.1)
 \end{aligned}$$

donde dS es el elemento diferencial de área en una de las caras laterales del cuerpo, y h_A y h_C son las profundidades de los puntos A y C del cuerpo,

$$\begin{aligned}
 h_A &= h_E - \overline{CE} \sin \alpha - \overline{AB} \cos 30^\circ \\
 &= 3 - (1,5)(0,5) - (0,75)(\sqrt{3}/2) = 1,60 \text{ m}, \\
 h_C &= h_E - \overline{CE} \sin \alpha = 3 - (1,5)(0,5) = 2,25 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.22.1), se obtiene

$$\begin{aligned}
 F_z^{\text{lat}} &= 2(0,5)(\sqrt{3}/3) \left\{ (327)[(2,25)^3 - (1,60)^3] \right. \\
 &\quad \left. + (5886)[(2,25)^2 - (1,60)^2] \right\} \\
 &= 9881,4 \text{ N}.
 \end{aligned}$$

La fuerza total (vertical) que se ejerce sobre el cuerpo, teniendo en cuenta también la fuerza hidrostática sobre la cara superior y el peso del cuerpo, es

$$\begin{aligned}
 F_z^{\text{tot}} &= F_z^{\text{lat}} - b \overline{AB} (981 h_A^2 + 11\,772 h_A) - \rho_t g \frac{1}{2} b \overline{AB}^2 \cos 30^\circ \\
 &= 9881,4 - (0,5)(0,75)[(981)(1,60)^2 + (11\,772)(1,60)] \\
 &\quad - (400)(9,81)(0,5)(0,5)(0,75)^2(\sqrt{3}/2),
 \end{aligned}$$

de donde resulta

$$F_z^{\text{tot}} = 1389,9 \text{ N}.$$

c) Para calcular el volumen V_A de la boya se debe plantear el equilibrio de momentos alrededor del eje E:

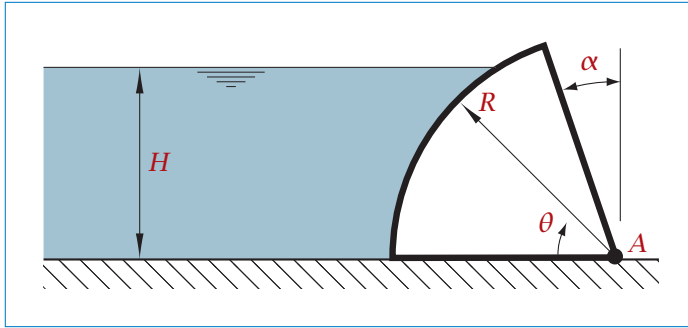
$$F_z^{\text{tot}} \overline{CE} = \rho_2 g V_A \overline{ED},$$

de donde se obtiene

$$V_A = \frac{F_z^{\text{tot}} \overline{CE}}{\rho_2 g \overline{ED}} = \frac{1389,9}{(1000)(9,81)(1,25)} = 0,11335 \text{ m}^3.$$

Problema 2.23. Compuerta con forma de sector circular

La compuerta de la figura, de sección transversal constante con forma de sector circular de radio $R = 10$ m y ángulo de $(90^\circ - \alpha) = 70^\circ$, se utiliza para remansar agua en un canal. La anchura de la compuerta (en dirección perpendicular al papel) es $b = 5$ m.



La profundidad del agua en el canal es $H = 8$ m. Determinar las componentes de la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la compuerta y el momento de las fuerzas que actúan sobre ella con respecto a la articulación A.

Solución

Se utilizará la coordenada θ indicada en la figura. El ángulo que abarca la superficie mojada de la compuerta es

$$\theta_0 = \arcsin(H/R) = 53,13^\circ, \quad (2.23.1)$$

y la profundidad a la que está sumergido un punto genérico de coordenada θ situado sobre la superficie de la compuerta es

$$h = H - R \sin \theta. \quad (2.23.2)$$

La fuerza que se ejerce sobre un elemento diferencial de la superficie de la compuerta es

$$dF = \rho g h b R n d\theta \quad (2.23.3)$$

siendo

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, -\sin \theta)$$

el vector normal a la compuerta (dirigido desde la superficie hacia A) en un sistema de coordenadas (x, y) , siendo x la coordenada horizontal, con sentido positivo hacia la derecha, e y la coordenada vertical, con sentido positivo hacia arriba.

La componente horizontal de la fuerza es

$$F_x = \int_0^{\theta_0} \rho g h b R \cos \theta d\theta. \quad (2.23.4)$$

De la ecuación (2.23.2), se deduce

$$dh = -R \cos \theta d\theta.$$

Introduciendo esta última relación en la ecuación (2.23.4), se obtiene

$$F_x = \int_H^0 -\rho g h b dh = \rho g b \frac{H^2}{2}. \quad (2.23.5)$$

De la ecuación (2.23.3), teniendo en cuenta las ecuaciones (2.23.2) y (2.23.1), se obtiene la componente vertical de la fuerza,

$$\begin{aligned} F_y &= \int_0^{\theta_0} \rho g b (H - R \sin \theta) R d\theta (-\sin \theta) \\ &= -\rho g b R \int_0^{\theta_0} (H \sin \theta - R \sin^2 \theta) d\theta \\ &= -\rho g b R \left[-H \cos \theta - \frac{R}{2} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \right]_0^{\theta_0} \\ &= -\rho g b R \left[H \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{2} \right) - \frac{R}{2} \theta_0 \right]. \end{aligned} \quad (2.23.6)$$

Sustituyendo valores en las ecuaciones (2.23.5) y (2.23.6), se obtiene

$$F_x = 1569,6 \text{ kN}$$

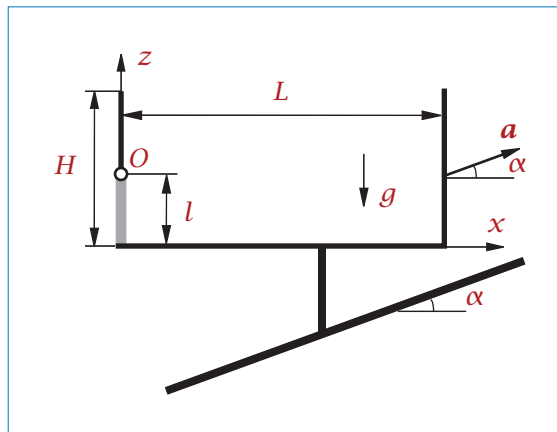
y

$$F_y = -472,6 \text{ kN.}$$

La dirección del elemento diferencial de fuerza, dF , que ejerce el agua sobre cualquier punto de la superficie de la compuerta ($0 \leq \theta \leq \theta_0$) pasa por la articulación A , por lo que el momento resultante con respecto a A es nulo.

Problema 2.24. Forma de la superficie libre y fuerzas sobre una compuerta en un depósito sometido a aceleración lineal

El depósito representado en la figura está abierto a la atmósfera y puede ascender sobre un plano inclinado con una aceleración constante, \mathbf{a} , que forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la dirección horizontal (eje x). El depósito tiene una sección horizontal cuadrada de lado $L = 3$ m y una altura $H = 2$ m, y se mueve con la disposición indicada en la figura, de manera que su fondo se mantiene horizontal en todo momento. La compuerta representada en la figura tiene una altura $l = 0,75$ m y una anchura L , y puede girar sin rozamiento alrededor del eje O .



Suponiendo que el depósito contiene 3000 l de agua (en la figura no se ha representado la superficie libre), determinar:

- Módulo y dirección de la fuerza y del momento que se ejercen sobre la compuerta cuando $a = 0$, y posición del punto de aplicación de la fuerza con respecto al eje O .
- Ángulo β (no representado en la figura), que forma la superficie libre del agua con el fondo del depósito, en función de a , g y α .

- c) Expresión analítica (utilizando el sistema de referencia con origen en la parte inferior de la compuerta, eje horizontal x y eje vertical z) de la distribución de presión absoluta en el agua cuando $a = 1,5 \text{ m s}^{-2}$. La presión atmosférica es $p_{\text{at}} = 100 \text{ kPa}$.
- d) Mínima aceleración a necesaria para que la compuerta quede totalmente sumergida, y momento que hay que ejercer sobre ésta para que no gire cuando el depósito se mueve con dicha aceleración.

Solución

- a) $F = -F_x = 1635 \text{ N}$; $M = M_y = 1045 \text{ N m}$ (momento con respecto a O ; eje y en sentido entrante al papel); $l - z_F = 0,6389 \text{ m}$.
- b) $\beta = \arctan \left(\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha} \right)$ (β es el ángulo que forma la superficie libre con la horizontal en sentido antihorario).
- c) $p(x, z) = 105,5 - 1,299 x - 10,56 z$ (p en kPa, x y z en m).
- d) $a_{\text{mín}} = 3,804 \text{ m s}^{-2}$; $M = -M_y = 4941 \text{ N m}$ (momento con respecto al eje O).

Capítulo 3

Cinemática de fluidos

Problema 3.1. Determinación de la velocidad de una partícula fluida a partir de su trayectoria en coordenadas cilíndricas

Determinar la velocidad de una partícula fluida que recorre la siguiente trayectoria, expresada en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}r &= r(t) = at, \\ \theta &= \theta(t) = bt^2, \\ z &= z(t) = ct,\end{aligned}$$

siendo a , b y c constantes.

Solución

La velocidad de una partícula fluida es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

siendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}[r(t), \theta(t), z(t)]$ la ecuación de su trayectoria. De la ecuación (A.1.21),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{g}_i = \frac{dx^1}{dt} \mathbf{g}_1 + \frac{dx^2}{dt} \mathbf{g}_2 + \frac{dx^3}{dt} \mathbf{g}_3,$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (A.3.1) a (A.3.3) y (A.3.9) a (A.3.11), resulta¹

$$\mathbf{v} = \frac{dr(t)}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta(t)}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{e}_z,$$

y, finalmente,

$$\mathbf{v} = a \mathbf{e}_r + 2abt^2 \mathbf{e}_\theta + c \mathbf{e}_z.$$

Problema 3.2. Determinación del campo de aceleración

Determinar el campo de aceleración correspondiente al siguiente campo de velocidad (a, b, c, d, e, f y g son constantes): $u = atx + by + cz$, $v = dty + ex$, $w = ftz + gy$.

Solución

La aceleración de una partícula fluida es²

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las componentes del campo de velocidad dado, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & [ax + (atx + by + cz)at + (dty + ex)b + (ftz + gy)c] \mathbf{i} \\ & + [dy + (atx + by + cz)e + (dty + ex)dt] \mathbf{j} \\ & + [fz + (dty + ex)g + (ftz + gy)ft] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

¹ Se puede partir también directamente de la ecuación (A.3.20),

$$d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z.$$

Asimismo, puede partirse de la ecuación (A.3.23), $\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$, y hallar

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} dz = \mathbf{e}_r dr + r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} d\theta + \mathbf{e}_z dz = \mathbf{e}_r dr + r \mathbf{e}_\theta d\theta + \mathbf{e}_z dz.$$

Un error frecuente consiste en no tener en cuenta en la ecuación anterior que \mathbf{e}_r depende de θ ($d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta d\theta$).

² La derivada sustancial de una magnitud φ , es decir, la derivada con respecto al tiempo de φ siguiendo una partícula fluida, se denotará por $D\varphi/Dt$.

Problema 3.3. Líneas de corriente y derivada sustancial de la concentración de un contaminante

Determinar y dibujar las líneas de corriente en el flujo definido por

$$u = x, \quad v = -y, \quad w = 0.$$

Supóngase a continuación que en $y > 0$ existe cierto contaminante en el fluido cuya concentración puede expresarse mediante la función

$$c(x, y, t) = x^2 y^n \exp(-at),$$

siendo a una constante positiva y n un número entero positivo. Determinar la variación en el tiempo de la concentración de contaminante siguiendo una partícula fluida y los posibles valores de a y n para los que dicha variación es nula.³

Solución

Las líneas de corriente se determinan imponiendo en cada punto el paralelismo entre un elemento diferencial de longitud y el vector velocidad:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}, \quad dz = 0.$$

Integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} xy &= C_1, \\ z &= C_2 \end{aligned}$$

(siendo C_1 y C_2 constantes), ecuaciones que definen una doble infinidad de líneas de corriente (dibújense).

La variación en el tiempo de la concentración siguiendo una partícula fluida viene dada por la derivada sustancial de $c(x, y, t)$,

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z}.$$

³ Enunciado adaptado de un problema propuesto por Acheson (1990).

Sustituyendo el campo de velocidad del enunciado y la expresión para $c(x, y, t)$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{Dc}{Dt} &= -ax^2y^n \exp(-at) + 2x^2y^n \exp(-at) - nx^2y^n \exp(-at) \\ &= (2 - n - a)x^2y^n \exp(-at),\end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\frac{Dc}{Dt} = (2 - n - a)x^2y^n \exp(-at).$$

Dado que a es una constante positiva y n un número entero positivo, obsérvese que la condición $Dc/Dt = 0$ se satisface solo en los tres casos siguientes:

$$\begin{aligned}n &= 0, & a &= 2; \\ n &= 1, & a &= 1; \\ n &= 2, & a &= 0.\end{aligned}$$

Coméntese el resultado. Obsérvese que, tanto si la distribución de concentración es estacionaria ($a = 0$) como no estacionaria ($a \neq 0$), existen combinaciones de parámetros que hacen $Dc/Dt = 0$ o $Dc/Dt \neq 0$.

Problema 3.4. Cálculo de la línea de traza (I)

En un cierto flujo bidimensional no estacionario las componentes de la velocidad son

$$u = ax/t, \quad v = by,$$

siendo a y b constantes. Determinar la curva que describe en cada instante un colorante que se inyecta en el punto $(1, 2)$, suponiendo despreciables los efectos de difusión.

Solución

Las ecuaciones que describen las trayectorias de las partículas fluidas que en sucesivos instantes t_0 pasaron por el punto (x_0, y_0) se obtienen integrando

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax}{t}$$

y

$$\frac{dy}{dt} = by,$$

con las condiciones iniciales $x = x_0$, $y = y_0$ en $t = t_0$. El resultado es

$$x = x_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^a,$$

$$y = y_0 \exp [b(t - t_0)].$$

Eliminando t_0 entre estas dos ecuaciones y sustituyendo $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$, se obtiene la línea de traza correspondiente al punto (1, 2), que coincide con la curva que se pide determinar en el enunciado:

$$y = 2 \exp [bt(1 - x^{-1/a})].$$

Problema 3.5. Determinación del potencial de un campo de velocidad en coordenadas polares

Dado el siguiente campo de velocidad bidimensional en coordenadas polares:

$$v_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta,$$

siendo a y U constantes, determinar, si existe, el potencial de velocidad.

Solución

Existirá una función potencial si el campo de velocidad es irrotacional, lo cual es cierto al ser nula la única componente posible, en este caso, del vector vorticidad ($\omega = \nabla \times \mathbf{v}$; véase la ecuación (A.3.38)):

$$\omega_x = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0.$$

Para determinar ϕ puede escribirse (ecuación (A.3.33))

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (3.5.1)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (3.5.2)$$

Integrando parcialmente la ecuación (3.5.1), resulta

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + f(\theta).$$

Derivando esta ecuación con respecto a θ y comparando el resultado con la ecuación (3.5.2), se obtiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{df}{d\theta} = r v_\theta = -U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta,$$

de donde se deduce que $f = \text{constante}$. Se obtiene por tanto

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \text{constante}.$$

Problema 3.6. Vórtice libre

Para el campo de velocidad bidimensional

$$\mathbf{v} = \frac{C}{r} \mathbf{e}_\theta,$$

siendo C una constante, determinar la distribución de vorticidad, el potencial de velocidad, la función de corriente y la circulación de la velocidad a lo largo de cualquier línea cerrada.

Solución

Demuéstrese que la vorticidad (véase la ecuación (A.3.38)),

$$\omega = \omega_x = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r},$$

es nula en todo el campo fluido excepto en el punto singular situado en $r = 0$, donde está concentrada; que el potencial de velocidad es

$$\phi = C\theta;$$

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA DE FLUIDOS

que la función de corriente es

$$\psi = -C \ln r$$

(obsérvese que tanto ϕ como ψ no están definidas en $r = 0$), y que la circulación del vector velocidad es

$$\Gamma = 0$$

a lo largo de cualquier línea cerrada que no rodee el punto $r = 0$, y

$$\Gamma = 2\pi C$$

a lo largo de cualquier línea cerrada que rodee dicho punto.

El flujo descrito en este problema se denomina torbellino o vórtice libre (o potencial).

Problema 3.7. Cinemática de un flujo estacionario e incompresible

El campo de velocidad bidimensional dado por

$$u = ax - y,$$

$$v = x + by$$

(siendo a y b constantes; $a > 0$) corresponde al flujo de un fluido que se comporta como incompresible.

- a) Determinar la relación entre las constantes a y b .
- b) Indicar si existe una función de corriente y, en su caso, determinarla.
- c) Indicar si existe un potencial de velocidad y, en su caso, determinarlo.
- d) Determinar la circulación del vector velocidad alrededor de una circunferencia de radio unidad, contenida en el plano xy , con centro en el origen de coordenadas.

Solución

a) Al ser el flujo incompresible,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

lo que implica

$$a + b = 0.$$

b) Al ser el flujo incompresible y bidimensional, puede definirse una función de corriente, ψ , que satisfaga

$$\begin{aligned}\partial\psi/\partial y &= u, \\ \partial\psi/\partial x &= -v.\end{aligned}$$

Integrando con respecto a y la primera expresión,

$$\partial\psi/\partial x = ax - y,$$

resulta

$$\psi = axy - \frac{1}{2}y^2 + c(x). \quad (3.7.1)$$

Derivando la ecuación (3.7.1) con respecto a x e igualando a $-v = -x - by$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ay + c'(x) = -(x + by),$$

teniendo en cuenta que $a + b = 0$ e integrando, resulta $c = -x^2/2 + \text{cte}$. Sustituyendo esta expresión de $c(x)$ en la ecuación (3.7.1), se obtiene finalmente

$$\psi = axy - \frac{1}{2}(y^2 + x^2) + \text{cte}.$$

c) No existe potencial de velocidad ya que el flujo no es irrotacional:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (1 + 1)\mathbf{k} = 2\mathbf{k} \neq 0.$$

d) Aplicando el teorema de Stokes,

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

resulta

$$\Gamma = \int_S 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} dS = 2\pi.$$

Problema 3.8. Cálculo de la línea de traza (II)

Determinar la traza en un cierto instante t correspondiente al punto (x_0, y_0) , para el campo de velocidad siguiente:

$$u = \frac{x}{1+t},$$

$$v = y.$$

Solución

La trayectoria de la partícula fluida que en el instante t_0 se encuentra en (x_0, y_0) viene dada por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t},$$

$$\frac{dy}{dt} = y,$$

con la condición inicial

$$x = x_0, y = y_0 \text{ en } t = t_0.$$

Integrando e imponiendo esta condición, resulta

$$x = x_0 \frac{1+t}{1+t_0},$$

$$y = y_0 \exp(t - t_0).$$

Eliminando t_0 de las ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación de la traza correspondiente al punto (x_0, y_0) en el instante t :

$$y = y_0 \exp \left[(t+1) \left(1 - \frac{x_0}{x} \right) \right].$$

Problema 3.9. Senda y aceleración de partículas fluidas y línea de traza

Para el siguiente campo de velocidad bidimensional:

$$u = x[\text{sen}(\omega t) + c],$$

$$v = -y[\text{sen}(\omega t) + c],$$

siendo c y ω constantes, determinar:

- Senda de cualquier partícula fluida que en algún instante pase por el punto (1,1). Coméntese el resultado.
- Aceleración en todo instante de la partícula fluida que en $t = 0$ se encuentra en el punto (1,1).
- Línea de traza correspondiente al origen de coordenadas. Coméntese el resultado.

Solución

a) $xy = 1.$

b)

$$\begin{aligned} a_x &= \{\omega \cos(\omega t) + [\text{sen}(\omega t) + c]^2\} \exp\left\{-\frac{1}{\omega}[\cos(\omega t) - 1] + ct\right\}, \\ a_y &= \{-\omega \cos(\omega t) + [\text{sen}(\omega t) + c]^2\} \exp\left\{\frac{1}{\omega}[\cos(\omega t) - 1] - ct\right\}. \end{aligned}$$

c) En general, para el punto (x_0, y_0) , la traza es

$$xy = x_0 y_0.$$

Obsérvese que el origen de coordenadas es un punto singular. Si $c \neq 0$, las partículas que están en el origen en $t \rightarrow -\infty$ dan lugar a una traza definida por $y = 0$, y las partículas que alcanzarían el origen en $t \rightarrow \infty$ producen una traza dada por $x = 0$.

Problema 3.10. Aceleración de una partícula fluida

Dado el siguiente campo de velocidad bidimensional:

$$u = x/(2t + 1),$$

$$v = y,$$

determinar, en el instante $t = 1$, la aceleración de la partícula fluida que en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto (1,1).

Solución

La trayectoria de la partícula fluida que en $t = 0$ está en (1,1) viene dada por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t + 1},$$

$$\frac{dy}{dt} = y,$$

con las condiciones $x = 1$, $y = 1$ en $t = 0$, de donde se obtiene

$$x = (2t + 1)^{1/2},$$

$$y = \exp(t).$$

En el instante $t = 1$, la partícula fluida está por tanto en $(\sqrt{3}, e)$, y su aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{j} \\ &= -\frac{x}{(2t + 1)^2} \mathbf{i} + y \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Sustituyendo valores, resulta

$$\mathbf{a} = -3^{-3/2} \mathbf{i} + e \mathbf{j}.$$

Problema 3.11. Posición y aceleración de una partícula fluida en un determinado instante

La partícula fluida que en el instante $t = 1$ se encontraba en el punto $(1, 2)$ se mueve en un flujo definido por

$$u = ax/t, \quad v = by,$$

siendo a y b constantes. Determinar la posición y aceleración de la partícula fluida en $t = 2$.

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 2^a \mathbf{i} + 2e^b \mathbf{j}, \\ \mathbf{a} &= a(a-1)2^{a-2} \mathbf{i} + 2b^2 e^b \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Ecuaciones de conservación en forma diferencial

Problema 4.1. Campo de velocidad en un flujo de un líquido

Comprobar si el campo de velocidad siguiente puede corresponder al movimiento de un líquido:

$$\begin{aligned}u &= x^2 + y^2, \\v &= -2ay(x + z), \\w &= bz^2\end{aligned}$$

(a y b son constantes).

Solución

Puede tratarse del movimiento de un líquido si la divergencia del vector velocidad (ecuación (A.2.11)),

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2[x(1 - a) + z(b - a)],$$

es nula, lo que ocurre si $a = b = 1$.

Problema 4.2. Campo de velocidad en un flujo incompresible

De un flujo incompresible se conocen dos componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned}u &= a(x^2 - z^2), \\v &= b,\end{aligned}$$

siendo a y b constantes.

Determinar la forma que debe tener la expresión de la componente w .
¿Puede el flujo ser no estacionario?

Solución

La divergencia del vector velocidad debe ser nula al ser el flujo incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 2ax + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Integrando esta ecuación, se obtiene

$$w = -2axz + f(x, y, t),$$

siendo f una función arbitraria de x , y y t .

La componente w puede ser, por tanto, no estacionaria.

Obsérvese que la condición que debe satisfacer el campo de velocidad es la misma que la utilizada en el Problema 4.1, en el que se preguntaba si el fluido podría ser un líquido. Explíquese si el fluido puede ser también un gas en cualquiera de los dos problemas. Explíquese asimismo si el fluido podría tener una densidad no uniforme.

Problema 4.3. Campo de velocidad no estacionario y ley de variación de la densidad con el tiempo

Supóngase un campo de velocidad definido por

$$u = u(x, t),$$

$$v = by,$$

$$w = cz,$$

siendo b y c constantes. La densidad es

$$\rho = \rho_0[a - \cos(\Omega t)],$$

siendo ρ_0 , Ω y a constantes ($\rho_0 > 0$). Determinar $u(x, t)$ si $u(0, t) = u_0$. Indicar si las constantes ρ_0 , Ω , a , b y c deben satisfacer alguna condición adicional.

Solución

Sustituyendo $\rho = \rho_0[a - \cos(\Omega t)]$ y el campo de velocidad del enunciado en la ecuación (B.2.1) de conservación de la masa, resulta

$$\rho_0 \Omega \sin(\Omega t) + \rho_0[a - \cos(\Omega t)] \left(\frac{\partial u}{\partial x} + b + c \right) = 0.$$

Integrando con respecto a x e imponiendo la condición de contorno

$$u(0, t) = u_0,$$

se obtiene

$$u = - \left[\frac{\Omega \sin(\Omega t)}{a - \cos(\Omega t)} + b + c \right] x + u_0.$$

Obsérvese que debe satisfacerse la condición

$$a > 1.$$

Problema 4.4. Densidad de una partícula fluida en función del tiempo en un campo de velocidad estacionario

Para el campo de velocidad

$$u = ax + by,$$

$$v = cx + dy,$$

siendo a , b , c y d constantes, determinar la densidad de una partícula fluida en función del tiempo suponiendo que la densidad inicial es ρ_0 .

Solución

De la ecuación (B.2.1) de conservación de la masa,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

sustituyendo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a + d,$$

se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(a + d) dt,$$

de donde, integrando, resulta

$$\rho = \rho_0 \exp [-(a + d)t].$$

Problema 4.5. Función de corriente en un campo de velocidad en coordenadas polares

Para el campo de velocidad del Problema 3.5, determinar, si existe, la función de corriente. Dibujar esquemáticamente las líneas de corriente e indicar el tipo de flujo al que pueden corresponder.

Solución

Para el flujo bidimensional del Problema 3.5 (obsérvese que no existe componente z y que v_r y v_θ no dependen de z), podrá definirse una función de corriente¹ si se satisface la ecuación de continuidad correspondiente a un flujo incompresible, que en este caso se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} = 0,$$

lo que se comprueba fácilmente que ocurre. Puede asegurarse por tanto que existe una función de corriente, que se determinará a partir de

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (4.5.1)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (4.5.2)$$

Integrando parcialmente la ecuación (4.5.1), resulta

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + f(r). \quad (4.5.3)$$

Derivando esta ecuación con respecto a r y teniendo en cuenta la ecuación (4.5.2), se deduce que f no depende de r , por lo que la función de corriente es

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \text{constante}.$$

En la región $r > a$, la función de corriente obtenida corresponde al flujo no viscoso y bidimensional alrededor de un cilindro circular de radio a inmerso en una corriente uniforme. Explíquese por qué este flujo no tiene lugar en la realidad, e indíquense las diferencias entre las distribuciones de magnitudes fluidas del flujo considerado y del flujo de un fluido real a altos números de Reynolds alrededor de un cilindro inmerso en una corriente uniforme.

¹ También puede definirse la función de corriente en flujos incompresibles con simetría axial ($v_\theta = 0$, y v_r y v_z no dependen de θ), y en flujos compresibles y estacionarios que sean bidimensionales o tengan simetría axial; sin embargo, en este último caso de flujos compresibles el concepto de función de corriente no es tan útil.

Problema 4.6. Función de corriente y flujo volumétrico (I)

Determinar, si existe, la función de corriente correspondiente al campo de velocidad $\mathbf{v} = ax\mathbf{i} - ay\mathbf{j}$, siendo a una constante. Calcular el flujo volumétrico (por unidad de longitud) a través de la parábola $y = x^2$, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Solución

Demuéstrese que el campo de velocidad del enunciado, correspondiente a un flujo incompresible bidimensional, admite la función de corriente

$$\psi = axy + \text{constante},$$

que el flujo volumétrico (por unidad de longitud) pedido es

$$Q = \psi(1, 1) - \psi(0, 0) = a,$$

y que este es el mismo a través de cualquier línea que una los puntos $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

Obsérvese que $\psi = \text{constante}$ determina las líneas de corriente obtenidas en el Problema 3.3.

Problema 4.7. Determinación del tensor de tensiones viscosas a partir del campo de velocidad

Determinar el tensor de tensiones viscosas en el flujo de un fluido de viscosidad μ en el que existe el siguiente campo de velocidad (a, b, c y d son constantes):

$$\begin{aligned}u &= ax + by + cz + dt, \\v &= bx - ay, \\w &= 0.\end{aligned}$$

Solución

Utilizando la ley de Navier-Poisson (ecuación (B.2.6)),

$$\tau'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij},$$

teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, se obtiene

$$\bar{\bar{\tau}}' = \mu \begin{bmatrix} 2a & 2b & c \\ 2b & -2a & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Problema 4.8. Determinación de la distribución de presión a partir del campo de velocidad

Para el campo de velocidad

$$\begin{aligned} u &= a(x^2 - y^2), \\ v &= -2axy, \\ w &= 0, \end{aligned}$$

donde a es una constante, determinar un campo de presión que satisfaga la ecuación

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$$

($\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$).

Solución

Introduciendo el campo de velocidad en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento del enunciado, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho[a(x^2 - y^2)2ax + 2axy2ay] &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho[-a(x^2 - y^2)2ay + 2axy2ax] &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \end{aligned}$$

y, agrupando términos,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2\rho a^2 x(x^2 + y^2), \quad (4.8.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho a^2 y(x^2 + y^2), \quad (4.8.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (4.8.3)$$

Integrando parcialmente la ecuación (4.8.1) resulta

$$p = -\rho \frac{a^2}{2} (x^2 + y^2)^2 + f_1(y, z). \quad (4.8.4)$$

Derivando esta ecuación con respecto a z y comparando con la ecuación (4.8.3), se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{df_1}{dz} = -\rho g,$$

de donde resulta

$$f_1(y, z) = -\rho g z + f_2(y). \quad (4.8.5)$$

Sustituyendo (4.8.5) en (4.8.4), derivando con respecto a y , y comparando con la ecuación (4.8.2), se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho a^2 y(x^2 + y^2) + \frac{df_2}{dy} = -2\rho a^2 y(x^2 + y^2),$$

de donde resulta $f_2 = \text{constante}$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.8.5), y esta a su vez en la ecuación (4.8.4), se obtiene finalmente

$$p = -\rho \left[\frac{a^2}{2} (x^2 + y^2)^2 + g z \right] + \text{cte}. \quad (4.8.6)$$

Obsérvese que el campo de presión obtenido corresponde al que proporciona la ecuación de Bernoulli (B.4.2):

$$p = -\rho \frac{v^2}{2} - \rho g z + \text{cte} = -\frac{1}{2}\rho [a^2(x^2 - y^2)^2 + 4a^2x^2y^2] - \rho g z + \text{cte}.$$

Esto se debe a que se trata de un flujo incompresible, al ser

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.8.7)$$

e irrotacional ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$). La condición de irrotacionalidad permite escribir

$$\mathbf{v} = \nabla \phi. \quad (4.8.8)$$

CAPÍTULO 4. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA DIFERENCIAL

Introduciendo la ecuación (4.8.8) en (4.8.7), resulta

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (4.8.9)$$

El término viscoso de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento resulta (utilizando las ecuaciones (4.8.8) y (4.8.9))

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \mu \nabla^2 (\nabla \phi) = \mu \nabla (\nabla^2 \phi) = 0. \quad (4.8.10)$$

El término convectivo,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}),$$

se simplifica teniendo en cuenta que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, obteniéndose

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (4.8.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.8.10) y (4.8.11) en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, teniendo en cuenta que el flujo es estacionario e integrando, se obtiene la ecuación (4.8.6).

Problema 4.9. Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (I)

Indicar el principio de conservación que expresa la ecuación siguiente y explicar el significado físico de cada uno de sus términos:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla (p + \rho U - p_{\text{at}}) = \mu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

¿Corresponde al movimiento de un gas o de un líquido? ¿Qué puede decirse acerca de la viscosidad del fluido? ¿Qué tipo de fuerzas másicas se consideran? Razonar las respuestas.

Solución

Consúltase alguno de los textos recomendados en la sección de bibliografía. La ecuación expresa la conservación de la cantidad de movimiento en un flujo de un

fluido que se comporte como incompresible. La viscosidad del fluido ha de ser uniforme en todo el campo fluido. Se consideran fuerzas másicas que deriven de un potencial.² Razónense estas respuestas.

Problema 4.10. Principios de conservación y ecuaciones generales de la mecánica de fluidos (II)

En el siguiente sistema de ecuaciones, indicar las variables dependientes y las magnitudes que pueden ser consideradas como datos o expresables en función de aquellas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla p &= \nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{T}}} + \rho \mathbf{f}_m \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) &= \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi_v + \dot{Q}_r + \dot{Q}_q.\end{aligned}$$

Simplificar el sistema para el caso de que el fluido sea un líquido. Explicar en qué consiste el desacoplamiento térmico.

² Obsérvese que, en el caso en que $U = gz$, introduciendo en la ecuación del enunciado la presión modificada $P = p + \rho gz - p_{at}$ resulta $\rho D\mathbf{v}/Dt + \nabla P = \mu \nabla^2 \mathbf{v}$, de forma que g ya no aparece. Si tampoco interviene g en las condiciones de contorno, lo que ocurre en cuerpos totalmente sumergidos, se deduce de lo anterior que la gravedad no influye en la distribución de velocidad en el flujo (obviamente, tampoco en la distribución de P). Por otra parte, la fuerza que ejerce el fluido sobre un cuerpo sumergido será

$$-\int p \mathbf{n} dS = -\int p_{at} \mathbf{n} dS + \int \nabla(\rho gz) dV - \int P \mathbf{n} dS = -\rho V \mathbf{g} - \int P \mathbf{n} dS,$$

siendo V el volumen del cuerpo (se ha tenido en cuenta que la primera integral del segundo miembro es nula, al ser p_{at} uniforme); se deduce entonces que el único efecto de la gravedad sobre el cuerpo consiste en que este experimenta una pérdida de peso igual al peso del fluido que desplaza (al no depender de g la distribución de P). La gravedad sí afectaría al flujo alrededor de un cuerpo sumergido, por ejemplo, en los casos de que este se encontrase en un canal abierto (la presencia del cuerpo inmerso en la corriente del canal en general afectaría a la forma de la superficie libre) y de que el cuerpo no estuviese en una posición fija sino que pudiera moverse debido a fuerzas de flotación.

Solución

Se pueden tomar como variables dependientes p , \mathbf{v} y T , por ejemplo. Las cinco ecuaciones escalares del enunciado, con las condiciones iniciales y de contorno que correspondan, permitirían en principio obtener las distribuciones de las variables dependientes mencionadas. Justifíquese que las restantes magnitudes que aparecen en las ecuaciones deberían ser datos o bien expresables en función de las variables dependientes.

Justifíquese que cuando el fluido es un líquido perfecto con viscosidad uniforme, el anterior sistema de ecuaciones queda de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla p &= \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}_m \\ \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v + \dot{Q}_r + \dot{Q}_q.\end{aligned}$$

Indicar alguna otra simplificación en este sistema que suele ser también aceptable cuando se analiza el movimiento de un líquido.

El desacoplamiento entre los problemas mecánico y térmico existe cuando el flujo es incompresible y la viscosidad no depende de la temperatura. Obsérvese que las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento pueden resolverse en tal caso independientemente de la ecuación de conservación de la energía. Una vez resuelto el problema mecánico, puede resolverse la ecuación de la energía para obtener la distribución de la temperatura.

Problema 4.11. Función de corriente y flujo volumétrico (II)

Determinar la función de corriente correspondiente al campo de velocidad del Problema 1.4. A partir de la función de corriente, determinar el caudal por unidad de anchura a través de la línea recta que une el origen de coordenadas con el punto $(1, 1, 0)$.

Solución

$$\psi = ay^2/2 + \text{constante}, \quad q = a/2.$$

Problema 4.12. Irrotacionalidad y determinación del potencial de velocidad y la distribución de presión a partir de la función de corriente

Indicar si el flujo definido por la función de corriente

$$\psi = a \exp(-by) \cos(bx),$$

siendo a y b constantes, es irrotacional. En su caso, determinar el potencial de velocidad. Determinar finalmente la distribución de presión, teniendo en cuenta que $p = 0$ en $(x, y) = (0, 0)$ y que la densidad del fluido, ρ , es uniforme.

Solución

Compruébese que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, siendo \mathbf{v} el vector velocidad correspondiente a la función de corriente dada.

Compruébese que el potencial de velocidad es

$$\phi = -a \exp(-by) \operatorname{sen}(bx),$$

y que la distribución de presión está dada por

$$p = \frac{1}{2} \rho a^2 b^2 [1 - \exp(-2by)].$$

Problema 4.13. Evolución de la densidad y la presión en la expansión de un gas en un cilindro

Un pistón se desplaza con velocidad constante U en el interior de un cilindro estanco de sección circular de diámetro D . El movimiento del pistón produce la expansión del gas contenido en el cilindro. En cada instante, se supondrá que la densidad ρ del gas en el cilindro es uniforme, y que la distribución de velocidad en el gas es $u = Ux/L$, siendo x la coordenada longitudinal, con origen en el extremo fijo del cilindro, y L la posición con respecto a dicho

origen de la superficie del pistón en contacto con el gas. En el instante inicial ($t = 0$), $L = L_0$ y $\rho = \rho_0$. Determinar:³

- a) Densidad del gas en función del tiempo.
- b) Distribución de presión en un instante t en el que $p(x = 0, t) = p_0(t)$.

Solución

a) De la ecuación (B.2.2),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0,$$

resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho U x / L)}{\partial x} = -\rho \frac{U}{L}.$$

Integrando,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} d\rho = -\int_0^t \frac{U}{L_0 + Ut} dt,$$

se obtiene

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \frac{L_0}{L_0 + Ut},$$

y, finalmente,

$$\rho = \frac{\rho_0 L_0}{(L_0 + Ut)}.$$

b) A partir de la ecuación (B.2.11), compruébese que

$$p(x, t) = p_0(t).$$

Problema 4.14. Vorticidad, circulación y presión en un vórtice de Rankine

Supóngase que el movimiento bidimensional de un fluido se puede aproximar como un vórtice de Rankine en el que la distribución de velocidad es $\mathbf{v} =$

³ Este ejercicio es una adaptación de un problema propuesto por Fox y McDonald (1995).

$v_\theta \mathbf{e}_\theta$, donde \mathbf{e}_θ es el vector unitario en dirección acimutal y

$$v_\theta = \begin{cases} \omega r & \text{en } r \leq R_0, \\ \omega R_0^2/r & \text{en } r > R_0, \end{cases}$$

siendo ω y R_0 constantes, y r la distancia al origen de coordenadas. Determinar:

- Distribución de vorticidad y circulación del vector velocidad a lo largo de cualquier circunferencia de radio r con centro en el origen.
- Distribución de presión. Se supondrá que el fluido tiene una densidad ρ , que actúa la fuerza gravitatoria perpendicularmente al plano del vórtice y que $p \rightarrow p_\infty$ para $r \rightarrow \infty$ y $z = 0$.

Supóngase en lo que sigue que el fluido es un líquido, y que existe una superficie libre en la que la presión es uniforme. Determinar:

- Diferencia entre las alturas que alcanza la superficie libre en $r = 0$ y $r \rightarrow \infty$.

Solución

a) De la ecuación (A.3.38), resulta

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{cases} 2\omega \mathbf{e}_z & \text{en } r < R_0, \\ 0 & \text{en } r > R_0. \end{cases}$$

La circulación del vector velocidad a lo largo de una circunferencia L_r de radio $r \leq R_0$ es⁴

$$\Gamma = \oint_{L_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\theta d\ell = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = \omega r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \omega r^2.$$

⁴ Mediante el teorema de Stokes, la circulación puede también calcularse a partir de la distribución del vector vorticidad. Para $r \leq R_0$,

$$\Gamma = \oint_{L_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\theta d\ell = \int_{S_r} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z dS = \int_0^r 2\omega 2\pi r dr = 2\pi \omega r^2,$$

y para $r \geq R_0$,

$$\Gamma = \int_0^{R_0} 2\omega 2\pi r dr + \int_{R_0}^r (0) 2\pi r dr = 2\pi \omega R_0^2.$$

CAPÍTULO 4. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA DIFERENCIAL

En una circunferencia de radio $r \geq R_0$,

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{\omega R_0^2}{r} r d\theta = 2\pi \omega R_0^2.$$

b) Compruébese que, para $r \leq R_0$, las ecuaciones (B.2.14), (B.2.15) y (B.2.16), de conservación de las tres componentes de la cantidad de movimiento, quedan de la forma siguiente:

$$-\omega^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.14.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (4.14.2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (4.14.3)$$

Integrando la ecuación (4.14.1), resulta

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + f_1(\theta, z), \quad (4.14.4)$$

siendo f_1 una función que, en principio, depende de θ y z . De la ecuación (4.14.2) se deduce que $f_1 = f_1(z)$. Teniendo esto en cuenta, introduciendo la ecuación (4.14.4) en (4.14.3) e integrando esta última, se obtiene

$$f_1 = -\rho g z + C_1, \quad (4.14.5)$$

siendo C_1 una constante. La ecuación (4.14.4) queda, por tanto, como sigue:

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C_1. \quad (4.14.6)$$

Para $r > R_0$, las ecuaciones (B.2.14), (B.2.15) y (B.2.16) quedan de la forma siguiente:

$$-\frac{\omega^2 R_0^4}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.14.7)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (4.14.8)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (4.14.9)$$

Integrando la ecuación (4.14.7), resulta

$$p = -\frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2 R_0^4}{r^2} + f_2(\theta, z), \quad (4.14.10)$$

siendo f_2 una función que, en principio, depende de θ y z . De la ecuación (4.14.8) se deduce también en este caso que

$$f_2 = f_2(z).$$

Teniendo esto en cuenta, introduciendo la ecuación (4.14.10) en (4.14.9) e integrando esta última, se obtiene

$$f_2 = -\rho g z + C_2, \quad (4.14.11)$$

siendo C_2 una constante. La ecuación (4.14.4) queda, por tanto, como sigue:

$$p = -\frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 R_0^4}{r^2} - \rho g z + C_2.$$

Imponiendo la condición de contorno indicada en el enunciado ($p \rightarrow p_\infty$ en $r \rightarrow \infty$ y $z = 0$), se deduce que $C_2 = p_\infty$, resultando, por tanto, para $r > R_0$,

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{\omega^2 R_0^4}{r^2} - \rho g z. \quad (4.14.12)$$

Igualando las ecuaciones (4.14.6) y (4.14.12) en $r = R_0$, se obtiene $C_1 = p_\infty - \rho \omega^2 R_0^2$, con lo que resulta finalmente, para $r \leq R_0$,

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \omega^2 (r^2 - 2R_0^2) - \rho g z. \quad (4.14.13)$$

c) De la ecuación (4.14.12), para $r \rightarrow \infty$, se obtiene

$$p_{z_\infty} = p_\infty - \rho g z_\infty,$$

y de la ecuación (4.14.13), para $r = 0$, resulta

$$p_{z_0} = p_\infty - \rho \omega^2 R_0^2 - \rho g z_0.$$

Si z_∞ y z_0 son las coordenadas de la superficie libre en $r \rightarrow \infty$ y $r = 0$, respectivamente, debe cumplirse $p_{z_\infty} = p_{z_0}$. Igualando las dos ecuaciones anteriores, resulta

$$z_\infty - z_0 = \frac{\omega^2 R_0^2}{g}.$$

Problema 4.15. Posición y densidad de una partícula fluida en función del tiempo

Para el campo de velocidad $\mathbf{v} = ax\mathbf{i} + (by + t)\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, siendo a , b y c constantes, determinar:

- Posición en función del tiempo de la partícula fluida que en $t = 0$ estaba situada en el origen.
- Densidad en función del tiempo de una partícula fluida que en $t = 0$ tenía una densidad ρ_0 .

Solución

a) Integrando las ecuaciones que definen la trayectoria de la partícula fluida,

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = by + t, \quad \frac{dz}{dt} = c,$$

con la condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, se obtiene⁵

$$x = x_0 \exp[a(t - t_0)],$$

$$y = y_0 \exp[b(t - t_0)] + \frac{1}{b} \exp[b(t - t_0)] \left(t_0 + \frac{1}{b} \right) - \frac{1}{b} \left(t + \frac{1}{b} \right), \quad (4.15.2)$$

$$z = z_0 + c(t - t_0).$$

⁵ La solución de la ecuación de primer orden lineal $y' = by + t$, con la condición inicial $y(t_0) = y_0$, viene dada por

$$y(t) = y_0 \exp[b(t - t_0)] + \int_{t_0}^t \exp[b(t - \tau)] \tau d\tau. \quad (4.15.1)$$

Obsérvese que el primer sumando del segundo miembro de la ecuación (4.15.1) es la solución, $y_h(t)$, de la ecuación homogénea $y' = by$ con la condición inicial $y_h(t_0) = y_0$, y que el segundo sumando es una solución particular, $y_p(t)$, de la ecuación completa obtenida con la condición inicial nula, $y_p(t_0) = 0$. Dado que en el presente problema $y_0 = 0$, la solución de la ecuación homogénea (primer término de la segunda ecuación de (4.15.2) es nula, por lo que la segunda ecuación de (4.15.3) corresponde a la solución particular de la ecuación completa que se acaba de mencionar. Los detalles sobre los posibles procedimientos de obtención de la solución particular de la ecuación completa pueden consultarse en cualquier libro sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, si se dispone de cierta experiencia, en problemas sencillos como el presente dicha solución particular puede obtenerse tras una simple inspección de la ecuación diferencial. No obstante, esto debe hacerse con cuidado. En el presente problema, por ejemplo, la función $y_p(t) = -t/b - 1/b^2$ es una solución particular de la ecuación completa, pero no satisface la condición inicial $y_p(0) = 0$ indicada, por lo que no es una solución válida que pueda sumarse a una solución $y_h(t)$ que satisfaga la condición inicial $y_h(t_0) = y_0$ para obtener $y(t)$.

Teniendo en cuenta que $t_0 = 0$ y $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, resulta⁶

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \frac{1}{b^2} [\exp(bt) - 1] - \frac{t}{b}, \\ z &= ct. \end{aligned} \quad (4.15.3)$$

b) De la ecuación (B.2.1) de conservación de la masa, expresándola de la forma siguiente:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{v} = a + b$ e integrando con la condición inicial $\rho(0) = \rho_0$, resulta

$$\rho = \rho_0 \exp[-(a + b)t].$$

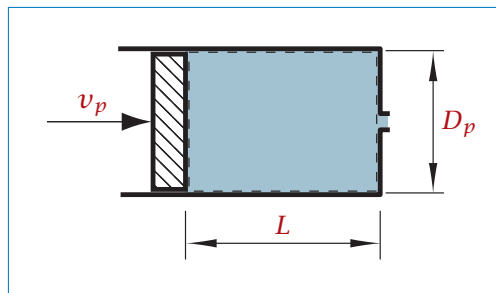
⁶ Otra forma de proceder en este problema, equivalente a la indicada en la nota anterior, consiste en obtener la solución $y(t)$ como suma de una solución de la ecuación homogénea del tipo $y_h(t) = k \exp(bt)$ (sin imponer la condición inicial $y_h(t_0) = y_0$) y una solución particular de la ecuación completa que no necesariamente satisfaga la condición inicial (por ejemplo, $y_p(t) = -t/b - 1/b^2$), y determinar a continuación la constante k que hace que la solución $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ satisfaga la condición inicial (para el ejemplo mencionado, $k = \exp(-bt_0)(y_0 + t_0 + 1/b)$).

Capítulo 5

Ecuaciones de conservación en forma integral

Problema 5.1. Variación de la densidad de un gas contenido en un cilindro (I)

El gas que contiene el cilindro de la figura, de diámetro $D_p = 10$ cm, es expulsado fuera de este mediante un émbolo que se mueve con una velocidad $v_p = 30$ m s⁻¹. Calcular la derivada de la densidad respecto del tiempo en un instante en el que la densidad del gas en el cilindro (que se supondrá uniforme) es $\rho = 0,98$ kg m⁻³, el flujo másico de gas saliente es $G = 0,05$ kg s⁻¹, y la longitud indicada en la figura es $L = 10$ cm.



Solución

Se puede partir de la ecuación (B.1.2) de conservación de la masa en forma integral, referida a un volumen de control variable en el tiempo. Se tomará un volumen de control cuya superficie, en el instante considerado, es la indicada en la figura con línea discontinua. La velocidad \mathbf{v}_c es nula excepto en la parte de S_c en contacto con la superficie del émbolo, donde es igual a la velocidad del émbolo.

Dado que en cada instante ρ se supone uniforme en el interior del cilindro,

$$\int_{V_c(t)} \rho \, dV = \rho(t) V_c(t). \quad (5.1.1)$$

Al evaluar la integral de superficie de la ecuación (B.1.2), debe tenerse en cuenta que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$ en la superficie del émbolo y que $\mathbf{v} = 0$ en las paredes del cilindro. En la sección de salida (donde $\mathbf{v}_c = 0$), $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}$ es igual a la velocidad de salida del gas, v_s , por lo que

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\text{salida}} \rho v_s \, dS = G. \quad (5.1.2)$$

Sustituyendo (5.1.1) y (5.1.2) en la ecuación (B.1.2), resulta

$$\frac{d(\rho V_c)}{dt} + G = V_c \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV_c}{dt} + G = 0. \quad (5.1.3)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dV_c}{dt} = A_p \frac{dL}{dt},$$

y que

$$\frac{dL}{dt} = -v_p$$

(v_p y A_p denotan la velocidad del émbolo y el área de su sección transversal, respectivamente), la ecuación (5.1.3), tras sustituir valores, resulta

$$\frac{\pi(0,1)^2}{4} (0,1) \frac{d\rho}{dt} - (0,98) \frac{\pi(0,1)^2}{4} (30) + 0,05 = 0$$

de donde se obtiene

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 230,3 \, \text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}.}$$

Problema 5.2. Incremento de la temperatura del agua a través de una turbina

Una turbina hidráulica funciona bajo un salto neto $H_n = 80$ m con un rendimiento hidráulico $\eta_h = 0,91$. Calcular el incremento de temperatura que experimenta el agua a través de la turbina. (Calor específico del agua $c = 1$ cal g⁻¹ K⁻¹.)

Solución

La ecuación (B.6.2) permite obtener el incremento de temperatura del fluido a través de una máquina hidráulica. Teniendo en cuenta que $e = cT$, siendo c el calor específico del líquido, y la definición de altura de pérdidas internas (ecuación (B.6.16)), resulta

$$T_s - T_e = \frac{gH_L}{c} + \frac{\dot{Q}}{Gc}. \quad (5.2.1)$$

El primer sumando del segundo miembro es el incremento de temperatura debido a la disipación de energía mecánica por efectos de viscosidad. Teniendo en cuenta la ecuación (B.6.18), se obtiene el incremento de temperatura que producirá la disipación viscosa en el problema planteado ($c = 4,2 \times 10^3$ J kg⁻¹ K⁻¹):

$$\Delta T = \frac{gH_L}{c} = g \frac{(1 - \eta_h)H_n}{c} = \frac{(9,8)(0,09)(80)}{4,2 \times 10^3} = 0,0168 \text{ K}.$$

Con carácter general puede decirse que, si bien la disipación viscosa es importante desde un punto de vista mecánico, su efecto es despreciable desde un punto de vista termodinámico en máquinas hidráulicas.¹

Problema 5.3. Compresor de aire

El aire experimenta en un compresor un proceso de compresión isentrópico y adiabático, siendo las condiciones a la entrada $p_1 = 1$ kgf cm⁻²,

¹ No obstante, existen procedimientos basados en consideraciones de tipo termodinámico para estimar el rendimiento de máquinas hidráulicas.

$v_1 = 40 \text{ m s}^{-1}$ y $T_1 = 300 \text{ K}$. Si el compresor descarga en un recinto donde existe una presión $p_2 = 8 \text{ kgf cm}^{-2}$, calcular la velocidad y la temperatura a la salida suponiendo que las secciones de entrada y salida tienen áreas iguales. Sabiendo que el gasto másico es de $0,1 \text{ kg s}^{-1}$, determinar la potencia del compresor y el área de las secciones de entrada y salida.

Solución

Al poder considerarse isentrópico el proceso que sufre el aire a través del compresor, se cumple

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma},$$

de donde se obtiene

$$\rho_2 = \frac{p_1}{RT_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} = \frac{9,8 \times 10^4}{(287)(300)} (8)^{1/1,4} = 5,027 \text{ kg m}^{-3}.$$

La temperatura a la salida se calcula mediante la ecuación de estado:²

$$T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2} = \frac{(8)(9,8 \times 10^4)}{(287)(5,027)} = 543,4 \text{ K}.$$

Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa, al ser iguales las áreas de las secciones de entrada y salida, se obtiene

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2,$$

de donde resulta $v_2 = 9,057 \text{ m s}^{-1}$.

La potencia comunicada por el compresor al fluido se calcula mediante la

² Obsérvese que, mientras que la presión en la sección de salida del compresor se ha tomado igual a la presión existente en el recinto de descarga (la presión en el recinto “impone” la presión en la sección de salida del compresor), obviamente no ocurre lo mismo con la temperatura en la sección de salida, que debe ser calculada y que será en general distinta de la temperatura del aire en el recinto. En situaciones en las que un chorro descarga en un recinto, frecuentemente puede tomarse la presión en la sección de salida del chorro igual a la presión en el recinto. Esto no ocurre, por ejemplo, en chorros subexpandidos y otras situaciones que aparecen en algunos problemas de flujo compresible del Capítulo 8.

ecuación (B.6.1) de conservación de la energía, teniendo en cuenta que $\dot{Q} = 0$:³

$$\begin{aligned}\dot{W} &= G \left[c_p(T_2 - T_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right] \\ &= (0,1) \left[(1004,5)(543,4 - 300) + \frac{(9,057)^2 - (40)^2}{2} \right],\end{aligned}$$

de donde resulta

$$\dot{W} = 24,38 \text{ kW.}$$

Por otra parte,

$$G = \rho_2 v_2 A,$$

de donde se obtiene

$$A = \frac{0,1}{(5,027)(9,057)} = 2,196 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Problema 5.4. Equilibrio de un sistema de émbolos y cilindros sobre el que incide un chorro de agua

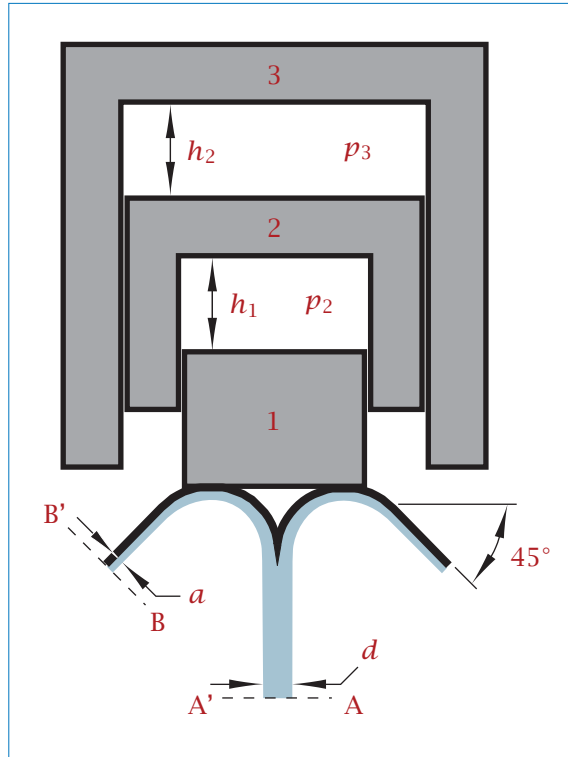
El émbolo 1, de diámetro $D_1 = 10$ cm, puede deslizarse sin rozamiento en el interior del cilindro 2; este, a su vez, actúa como un émbolo (de diámetro $D_2 = 15$ cm) que se desliza sin rozamiento en el interior del cilindro 3. El conjunto está dispuesto con el eje en posición vertical (como se indica en la figura, con el émbolo 1 en la parte inferior), siendo los pesos de los émbolos 1 y 2 de 80 N y 160 N, respectivamente (en el peso del émbolo 1 se incluye el peso del deflector que tiene en la parte inferior).

En el interior de los cilindros 2 y 3 están contenidas masas de aire $m_2 = 4 \times 10^{-4}$ kg y $m_3 = 8 \times 10^{-4}$ kg, respectivamente. Se supondrá que existe una perfecta estanqueidad entre émbolos y cilindros, y que la temperatura del aire en el interior de los cilindros es igual a 288 K. La presión atmosférica es $p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$. Se supondrá que el cilindro 3 está fijo, y que los émbolos 1 y 2 pueden deslizarse libremente. En el primer apartado que sigue, considérese

³ En general, el término correspondiente a la variación de energía cinética a través del compresor en la ecuación (B.6.1) es mucho menor que el debido a la variación de entalpía, como ocurre en este problema.

que no existe el chorro que aparece en la figura.

- a) Calcular las presiones p_2 y p_3 del aire en el interior de los cilindros 2 y 3, y las alturas h_1 y h_2 que definen las posiciones de los émbolos 1 y 2, respectivamente.



Se supondrá a continuación (considerando que se parte de las condiciones del apartado anterior) que sobre el deflector existente en la parte inferior del émbolo 1 se hace incidir, coaxialmente con este, un chorro de agua de sección circular de diámetro $d = 4 \text{ cm}$. El chorro es desviado como se indica en la figura, formándose una lámina de agua axisimétrica que, suficientemente lejos de la zona de incidencia, en la sección de salida B-B', tiene un área transversal $a = 1,26 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. En la sección A-A', suficientemente aguas arriba de la zona de incidencia, el chorro tiene una velocidad uniforme $v_e = 10 \text{ m s}^{-1}$. Sobre la superficie de separación aire-agua y en las secciones A-A'

y B-B', la presión es la atmosférica. Se despreciarán las fuerzas másicas sobre el agua.

- b) Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre el émbolo 1.
- c) Determinar las nuevas posiciones de equilibrio de los émbolos 1 y 2, suponiendo que el aire contenido en los cilindros experimenta una evolución isentrópica.

Solución

a) Estableciendo el equilibrio de fuerzas que actúan sobre el conjunto de los émbolos 1 y 2,

$$(p_{\text{at}} - p_3) \pi \frac{D_2^2}{4} = 160 + 80,$$

se obtiene

$$p_3 = p_{\text{at}} - 13\,581 = 84\,419 \text{ N m}^{-2}.$$

Utilizando la ecuación de estado, expresando la densidad del aire en el cilindro 3 en función de h_2 , resulta

$$\frac{p_3}{RT} = \rho_3 = \frac{m_3}{\pi \frac{D_2^2}{4} h_2};$$

sustituyendo valores, de esta ecuación se obtiene

$$h_2 = 0,0443 \text{ m.}$$

Estableciendo ahora el equilibrio de fuerzas que actúan sobre el émbolo 1, resulta

$$(p_{\text{at}} - p_2) \pi \frac{D_1^2}{4} = 80,$$

y sustituyendo valores, se obtiene

$$p_2 = 87\,814 \text{ N m}^{-2};$$

de la ecuación de estado, resulta

$$\frac{p_2}{RT} = \rho_2 = \frac{m_2}{\pi \frac{D_1^2}{4} h_1},$$

y sustituyendo valores se determina finalmente

$$h_1 = 0,0479 \text{ m.}$$

b) Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control limitado por la superficie libre del chorro, la superficie del deflector en contacto con el agua y las secciones A-A' y B-B', que en este caso se reduce a

$$\rho \int_{A-A', B-B'} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -F,$$

se obtiene

$$-\rho v_e^2 \frac{\pi d^2}{4} - \rho \left(\frac{\frac{\pi d^2}{4} v_e}{a} \right)^2 \cos 45^\circ a = -F_z,$$

de donde resulta, sustituyendo valores,

$$F_z = 214,28 \text{ N.}$$

c) De la condición de equilibrio en el émbolo 1,

$$(p_{at} - p'_2) \pi \frac{D_1^2}{4} = 80 - F_z = -134,28,$$

se determina, sustituyendo valores, $p'_2 = 115\,098 \text{ N m}^{-2}$.

Al ser isentrópica la evolución del aire en el interior del cilindro 2, puede escribirse

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p'_2}{\rho_2'^\gamma} \Rightarrow p_2 h_1^\gamma = p'_2 h_1'^\gamma,$$

de donde se obtiene

$$h_1' = 0,0395 \text{ m.}$$

Análogamente, estableciendo el equilibrio del conjunto formado por los émbolos 1 y 2,

$$(p_{at} - p'_3) \pi \frac{D_2^2}{4} = 160 + 80 - F_z = 25,72,$$

se determina $p'_3 = 96\,544 \text{ N m}^{-2}$.

Al ser también isentrópica la evolución del aire en el cilindro 3,

$$p_3 h_2^\gamma = p'_3 h_2'^\gamma,$$

de donde resulta

$$h_2' = 0,04025 \text{ m.}$$

Problema 5.5. Impacto oblicuo sobre un deflector plano del agua descargada por gravedad desde un depósito

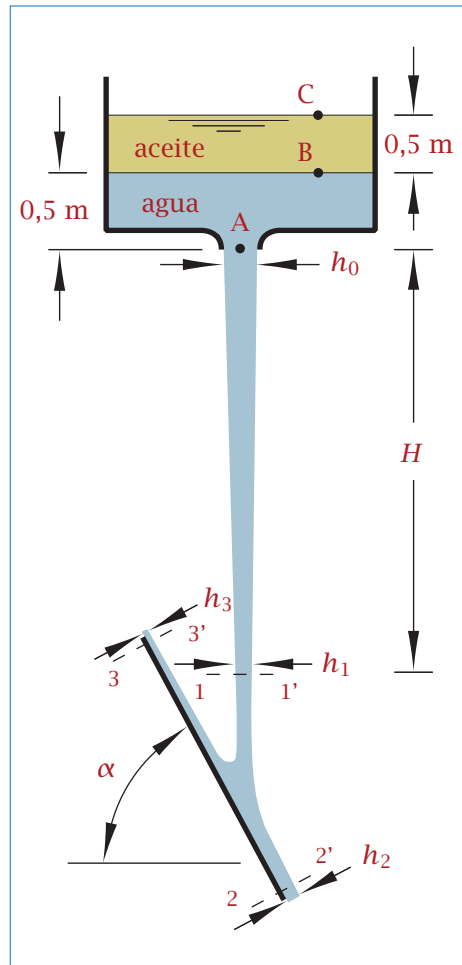
El depósito de la figura está abierto a la atmósfera y contiene dos capas de agua y aceite (densidad del aceite $\rho_{ac} = 800 \text{ kg m}^{-3}$), con los espesores indicados. El depósito se vacía a la atmósfera a través de una ranura de anchura $h_0 = 14 \text{ cm}$, situada en el fondo, pudiendo suponerse el proceso cuasies-tacionario al ser el depósito de grandes dimensiones. El chorro de agua saliente incide sobre un deflector y es desviado según se indica en la figura. El problema se considerará bidimensional y se despreciarán los efectos de la viscosidad.

Calcular:

- a) Velocidad de salida del agua del depósito.
- b) Anchura h_1 y velocidad v_1 del chorro a una altura $H = 4 \text{ m}$ por debajo del fondo del depósito, inmediatamente antes de incidir sobre el deflector. Despréciense los efectos de viscosidad y de contracción del chorro a la salida del depósito.

Al incidir sobre el deflector, inclinado un ángulo $\alpha = 60^\circ$, el chorro se divide en dos chorros de espesores h_2 y h_3 . Suficientemente lejos de la zona de incidencia (secciones 1-1', 2-2' y 3-3'), y en toda la superficie de separación agua-aire, se supondrá que la presión es la atmosférica. Se seguirán despreciando las fuerzas viscosas y se despreciarán, además, en los siguientes apartados, las fuerzas gravitatorias.

- c) Demostrar que $v_2 = v_3 = v_1$, siendo v_2 y v_3 las velocidades en las secciones 2-2' y 3-3', respectivamente.
- d) Aplicando las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento en dirección paralela al deflector al volumen de control limitado por la pared del deflector, la superficie de separación agua-aire y las secciones 1-1', 2-2' y 3-3', y teniendo en cuenta que no se ejerce fuerza de rozamiento sobre la pared del deflector, determinar los espesores h_2 y h_3 .
- e) Calcular la fuerza por unidad de anchura que ejerce el agua sobre el deflector.



Solución

a) Suponiendo el proceso estacionario y aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B (despreciando efectos de viscosidad y teniendo en cuenta que, obviamente, $\Delta H = 0$),

$$\left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_B = \left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_A,$$

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

y teniendo en cuenta que $v_B = 0$ (depósito de grandes dimensiones), $p_A = 0$ y $p_B = \rho_{ac}g(z_C - z_B)$ (ecuación de la estática),⁴ resulta

$$v_A = \sqrt{2g \left[z_B - z_A + (z_C - z_B) \frac{\rho_{ac}}{\rho_a} \right]}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$v_A = 4,2 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Suponiendo el flujo estacionario y aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre A y 1-1' (despreciando efectos de viscosidad y teniendo en cuenta que $\Delta H = 0$),

$$\left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_A = \left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_1,$$

y teniendo en cuenta que $p_A = p_1 = 0$, resulta

$$v_1 = \sqrt{v_A^2 + 2g(z_A - z_1)} = 9,8 \text{ m s}^{-1}.$$

Mediante la ecuación de conservación de la masa (despreciando los efectos de contracción del chorro a la salida del depósito),

$$h_0 v_A = h_1 v_1,$$

se obtiene

$$h_1 = 0,06 \text{ m}.$$

c) Al suponerse despreciables los efectos de viscosidad, puede escribirse

$$\left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_1 = \left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_2 = \left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_3. \quad (5.5.1)$$

Si no se tienen en cuenta las fuerzas gravitatorias, se pueden despreciar las diferencias de cotas en las igualdades anteriores. Teniendo en cuenta que, de acuerdo con lo indicado en el enunciado, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, de la ecuación (5.5.1) resulta $v_1 = v_2 = v_3 = 9,8 \text{ m s}^{-1}$.

⁴ En el problema se utilizarán presiones manométricas.

d) Aunque en este problema la aplicación de las ecuaciones de conservación es particularmente sencilla, se va a exponer a continuación de forma detallada. Se partirá de la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa en forma integral referida a un volumen de control fijo. Al considerarse el flujo estacionario, el primer término de (B.1.3) es nulo. La contribución a la integral del segundo término correspondiente a la superficie de separación agua-aire es nula, al ser en esta \mathbf{v} perpendicular a \mathbf{n} . En 1-1', $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_1$; en 2-2', $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_2$, y en 3-3', $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_3$. Al ser la densidad constante, la ecuación (B.1.3) queda de la forma

$$\int_{1-1'} -v_1 dS + \int_{2-2'} v_2 dS + \int_{3-3'} v_3 dS = 0.$$

Teniendo en cuenta que la velocidad es uniforme en las secciones 1-1', 2-2' y 3-3' ($v_1 = v_2 = v_3$), resulta

$$h_1 = h_2 + h_3. \quad (5.5.2)$$

Se considera a continuación la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral, referida a un volumen de control fijo. Recuerdese que el tensor de tensiones $\bar{\bar{\tau}}$ puede descomponerse haciendo $\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{\tau}}' - p\mathbf{I}$, siendo p la presión y $\bar{\bar{\tau}}'$ el tensor de tensiones viscosas.

En este problema, el término [1] de la ecuación (B.1.8) es nulo, al ser el flujo estacionario. La contribución a la integral del término [2] correspondiente a la superficie de separación agua-aire es nula, al ser en esta \mathbf{v} perpendicular a \mathbf{n} . Resulta, por tanto, para una anchura de chorro igual a la unidad, teniendo en cuenta que las velocidades son uniformes en cada una de las secciones 1-1', 2-2' y 3-3',

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{1-1'} \rho \mathbf{v}_1 (-v_1) dS + \int_{2-2'} \rho \mathbf{v}_2 v_2 dS + \int_{3-3'} \rho \mathbf{v}_3 v_3 dS \\ &= \rho (-v_1 \mathbf{v}_1 h_1 + v_2 \mathbf{v}_2 h_2 + v_3 \mathbf{v}_3 h_3). \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

El término [3] (resultante de las fuerzas de superficie que se ejercen sobre el volumen fluido) puede descomponerse en dos sumandos:

$$\int_{S_c} \bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{n} dS = -\mathbf{F} + \int_{S_c - S_{\text{deflector}}} (-p\mathbf{n} + \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (5.5.4)$$

siendo \mathbf{F} la fuerza que ejerce el agua sobre el deflector (igual y de signo opuesto a la que ejerce el deflector sobre el agua). La integral del último sumando está extendida a las secciones 1-1', 2-2' y 3-3' y a la superficie de separación agua-aire,

donde la presión es la atmosférica; como, además, los efectos de viscosidad son despreciables, dicha integral es nula,⁵ por lo que resulta finalmente

$$\int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\mathbf{F}. \quad (5.5.5)$$

Dado que se desprecian las fuerzas gravitatorias, el término [4] (resultante de las fuerzas másicas que se ejercen sobre el volumen fluido) es nulo.

La ecuación (B.1.8) queda finalmente en la forma

$$\rho(-v_1 \mathbf{v}_1 h_1 + v_2 \mathbf{v}_2 h_2 + v_3 \mathbf{v}_3 h_3) = -\mathbf{F}. \quad (5.5.6)$$

La proyección de la ecuación (5.5.6) en dirección paralela al deflector, teniendo en cuenta que \mathbf{F} es perpendicular a este (al no existir fuerza de rozamiento sobre el deflector, \mathbf{F} es debida tan solo a las fuerzas de presión, perpendiculares al deflector), resulta

$$-v_1^2 \cos 30^\circ h_1 + v_2^2 h_2 - v_3^2 h_3 = 0,$$

de donde se obtiene, teniendo en cuenta que $v_1 = v_2 = v_3$,

$$h_2 = h_3 + h_1 \cos 30^\circ. \quad (5.5.7)$$

A partir de las ecuaciones (5.5.2) y (5.5.7), se obtiene

$$h_3 = 0,004 \, \text{m},$$

$$h_2 = 0,056 \, \text{m}.$$

⁵ En la ecuación (5.5.4) pueden introducirse presiones manométricas o absolutas. En la primera opción (la que se ha seguido en el presente problema), \mathbf{F} es igual a la resultante de las fuerzas de superficie debidas a la presión manométrica (las fuerzas viscosas se han despreciado) que ejerce el agua sobre el deflector, y la presión en la integral del segundo miembro de la ecuación (5.5.4) es nula. Obviamente, la fuerza que se ejerce sobre la superficie del deflector en contacto con el agua será la suma de \mathbf{F} y la contribución debida a la presión atmosférica. No obstante, obsérvese que esta última contribución está compensada con la fuerza que ejerce el aire sobre el resto de la superficie del deflector que no esté en contacto con el agua, por lo que el efecto del impacto del agua se reducirá a la fuerza \mathbf{F} debida a la presión manométrica. En la segunda opción, la fuerza \mathbf{F} en la ecuación (5.5.4) incluiría además la contribución debida a la presión atmosférica, pero obsérvese que esta última contribución queda compensada con la integral de la presión atmosférica sobre la restante superficie del volumen de control, al ser la presión atmosférica uniforme sobre S_C . Esto es análogo a lo que ocurre, por ejemplo, en el cálculo de la fuerza sobre la compuerta del Problema 2.3, en el que se utilizaron presiones manométricas para calcular la fuerza debida a la presencia de agua (si no hubiese agua, al actuar uniformemente la presión atmosférica sobre toda la superficie de la compuerta, la fuerza de superficie neta sobre la compuerta sería nula). No es posible emplear, sin más, presiones manométricas en el término [3] de la ecuación (B.1.8) cuando en el problema que se trata de resolver aparecen cuerpos cuya superficie exterior está sometida a una presión no uniforme, como se verá que ocurre en el caso del Problema 5.9.

e) La componente de la ecuación (5.5.6) en dirección perpendicular al deflector (sentido positivo desde el deflector hacia fuera) es

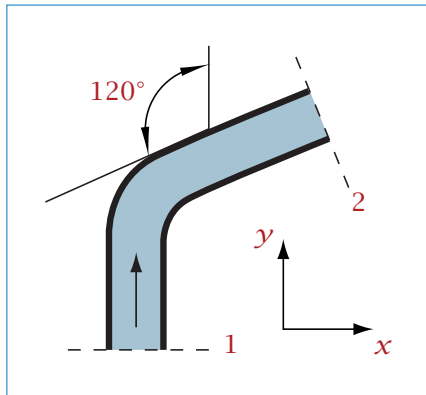
$$\rho v_1^2 \cos 60^\circ h_1 = -F, \quad (5.5.8)$$

resultando

$$F = -2881 \text{ N m}^{-1}.$$

Problema 5.6. Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un gas

Por el tramo de conducto de la figura, de sección de área constante $A = 10 \text{ cm}^2$, en el que existe un codo a 120° , circula aire a una temperatura constante de 20°C . Las magnitudes fluidas se supondrán uniformes en las secciones 1 y 2, en las que se conocen los siguientes datos: $p_1 = 1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$, $p_2 = p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ (presiones absolutas) y $v_1 = 60 \text{ m s}^{-1}$. La superficie exterior de la pared del conducto está sometida a la presión atmosférica, p_{at} . Calcular la velocidad en la sección de salida y la fuerza que se ejerce sobre el conducto.



Solución

Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa, utilizando el volumen de control limitado por las paredes del tubo y las secciones de entrada y salida,

se obtiene

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2,$$

de donde resulta, al ser $T_1 = T_2$,

$$v_2 = v_1 \frac{p_1}{p_2} = (60)(1,2) = 72 \text{ m s}^{-1}.$$

Las densidades ρ_1 y ρ_2 , que serán necesarias en el cálculo de la fuerza sobre el codo, se obtienen mediante la ecuación de estado:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT} = \frac{(1,2)(9,8 \times 10^4)}{(287)(293)} = 1,398 \text{ kg m}^{-3},$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT} = 1,165 \text{ kg m}^{-3}.$$

Para calcular la fuerza que se ejerce sobre el tubo, se aplicará la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral al volumen de control ya mencionado. Compruébese que se obtienen las dos ecuaciones siguientes (las fuerzas másicas son despreciables), correspondientes a las proyecciones sobre los ejes x e y indicados en la figura:

$$\rho_2 v_2^2 \cos 30^\circ A = -F_x - (p_2 - p_{\text{at}}) \cos 30^\circ A,$$

$$-\rho_1 v_1^2 A + \rho_2 v_2^2 \cos 60^\circ A = -F_y + (p_1 - p_{\text{at}})A - (p_2 - p_{\text{at}}) \cos 60^\circ A,$$

siendo F_x y F_y las componentes de la fuerza que se ejerce sobre el tubo. Obsérvese que a las presiones absolutas se les ha restado la presión atmosférica para tener en cuenta las fuerzas de superficie que se ejercen sobre la superficie exterior del tubo.⁶ Sustituyendo valores, se obtiene

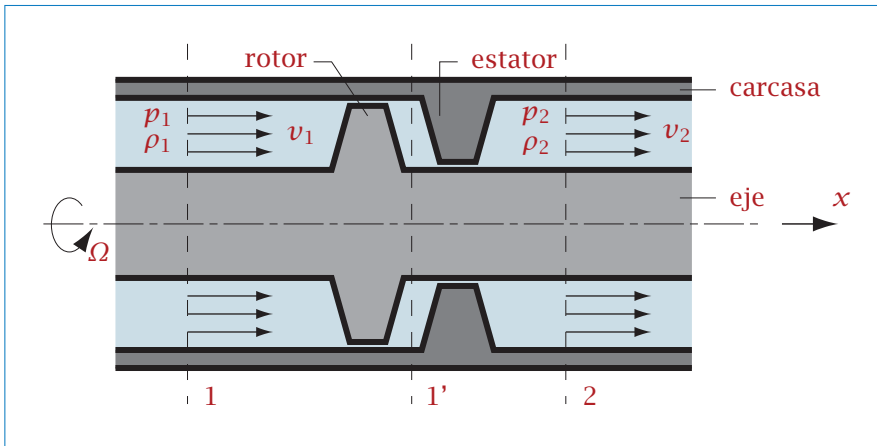
$$F_x = -5,23 \text{ N}, \quad F_y = 21,61 \text{ N}.$$

Problema 5.7. Flujo a través del rotor y el estator en un compresor axial

El compresor axial representado en la figura consta de un elemento móvil (rotor) y un elemento fijo (estator), dispuestos en el espacio existente entre un eje móvil y una carcasa exterior fija. Eje y carcasa son ambos de sección

⁶ Esto se ha explicado con mayor detalle en la nota 5 al pie de la página 121 del Problema 5.5.

circular constante y coaxiales. Los álabes del rotor están unidos al eje, y los del estator a la carcasa. El aire llega al compresor (sección 1) con condiciones uniformes: presión $p_1 = 100\,000 \text{ N m}^{-2}$, densidad $\rho_1 = 1,23 \text{ kg m}^{-3}$ y velocidad axial $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$. A continuación atraviesa el rotor y el estator, y sale del compresor (sección 2) con condiciones que se supondrán también uniformes: presión $p_2 = 150\,000 \text{ N m}^{-2}$, densidad ρ_2 y velocidad axial v_2 . En ambas secciones 1 y 2 la componente acimutal de la velocidad es nula.



- Suponiendo despreciables las fuerzas viscosas y que no hay transmisión de calor por conducción ni radiación, ni reacciones químicas, ni ningún otro proceso disipativo de transporte molecular, indicar qué variable termodinámica se mantiene constante a través del compresor. Calcular la densidad ρ_2 y la temperatura T_2 .
- Calcular la velocidad v_2 .
- Calcular la fuerza ejercida por el fluido sobre el compresor (rotor + estator), teniendo en cuenta que el área de la corona circular entre eje y carcasa es $A = 0,1 \text{ m}^2$. Se supondrán despreciables las fuerzas másicas.
- Calcular la potencia comunicada por el compresor al fluido.
- Si el rotor gira a una velocidad $n = 5000 \text{ rpm}$, calcular el momento de fuerzas que ejerce el rotor sobre el fluido.

- f) Tras atravesar el rotor, el aire sale con una componente acimutal de velocidad (sección 1') que es posteriormente cancelada por el estator, de forma que, como ya se ha indicado, en la sección 2 la velocidad solo tiene componente axial. Aplicando la ecuación de conservación del momento cinético, suponiendo que el espesor de la corona entre eje y carcasa es lo suficientemente pequeño como para que pueda tomarse en ella una coordenada radial constante $R_c = 0,4$ m, calcular dicha componente acimutal de la velocidad en la zona intermedia entre rotor y estator. ¿Cuánto vale el momento de fuerzas sobre el estator?

Solución

- a) La entropía se mantiene constante a través del compresor (justifíquese; ver ecuación (B.2.21)). Al ser el proceso adiabático e isentrópico, debe cumplirse

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma},$$

de donde se obtiene

$$\rho_2 = 1,23 \left(\frac{150\,000}{100\,000} \right)^{1/1,4} = 1,643 \text{ kg m}^{-3}.$$

La temperatura a la salida se calcula mediante la ecuación de estado:

$$T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2} = \frac{150\,000}{(287)(1,643)} = 318,1 \text{ K}.$$

- b) Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa, al ser iguales las áreas de las secciones de entrada y salida, se obtiene

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2,$$

de donde resulta

$$v_2 = 7,485 \text{ m s}^{-1}.$$

- c) Se aplicará la ecuación (B.1.7) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control limitado por las secciones de entrada y salida y las paredes interiores del compresor en contacto con el fluido. El término [1] se considerará nulo a pesar de que el flujo en el compresor, debido al movimiento del rotor, no puede ser estacionario. Esto es admisible ya que, en valor medio, la cantidad

de movimiento en el volumen de control permanecerá constante en el tiempo⁷. El término [4] se despreciará, de acuerdo con lo indicado en el enunciado. En cuanto al término [2], solo existirá contribución a la integral de superficie en las secciones de entrada y salida (en las paredes fijas del compresor, $\mathbf{v} = 0$, y en las móviles, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$):

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = (-\rho_1 v_1^2 A + \rho_2 v_2^2 A) \mathbf{i} \quad (5.7.1)$$

(\mathbf{i} es el vector unitario según el eje x , indicado en la figura). El término [3] queda de la forma siguiente:

$$\int_{S_c} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS = (p_1 - p_2) A \mathbf{i} - \mathbf{F}, \quad (5.7.2)$$

siendo \mathbf{F} la fuerza que se ejerce sobre el compresor. Sustituyendo (5.7.1) y (5.7.2) en (B.1.7), se obtiene

$$\mathbf{F} = [(1,23)(10)^2 - (1,643)(7,485)^2 + (100\,000 - 150\,000)](0,1)\mathbf{i} = -4997 \mathbf{i} \text{ N.}$$

d) La potencia comunicada por el compresor al fluido puede calcularse directamente utilizando la ecuación (B.6.1):

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \rho_1 v_1 A \left[c_p (T_2 - T_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right] \\ &= (1,23)(10)(0,1) \left\{ 1004,5 \left[318,1 - \frac{100\,000}{(287)(1,23)} \right] + \frac{(7,485)^2 - (10)^2}{2} \right\}, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\dot{W} = 42\,961 \text{ W.}$$

e) El módulo del momento de las fuerzas que ejerce el rotor sobre el fluido es

$$M = \frac{\dot{W}}{\Omega} = \frac{42\,961}{5000 \frac{2\pi}{60}} = 82,05 \text{ N m.}$$

f) Se aplicará la ecuación (B.1.11) de conservación del momento cinético a un volumen de control limitado por las paredes internas del compresor, la sección

⁷ Las fluctuaciones con respecto al valor medio del integrando del término [1] pueden dar lugar, por ejemplo, a la aparición de vibraciones en el compresor, pero no supondrán una contribución neta a la fuerza sobre este.

de entrada 1 y la sección 1'. El término [1] se desprecia por razones análogas a las indicadas en el apartado c) para la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. El término [4], aun en el caso de que no se hubiese despreciado la fuerza gravitatoria, sería nulo debido a la simetría del problema. Suponiendo que, tal y como se indica en el enunciado, puede tomarse un valor constante de $|\mathbf{x}| = R_c = 0,4 \text{ m}$ en la corona entre eje y carcasa, compruébese que el término [2] resulta igual a un vector según el eje de giro con módulo $R_c v_\theta G$, siendo v_θ la componente acimutal de la velocidad (contribución debida a la integral del término [2] extendida a la sección 1'). Por otra parte, el término [3] es precisamente el momento de fuerzas que ejerce el compresor sobre el fluido, M (demuéstrese esto). La componente acimutal de la velocidad es, por tanto,

$$v_\theta = \frac{M}{R_c G} = \frac{82,05}{(0,4)(1,23)(10)(0,1)} = 166,8 \text{ m s}^{-1}.$$

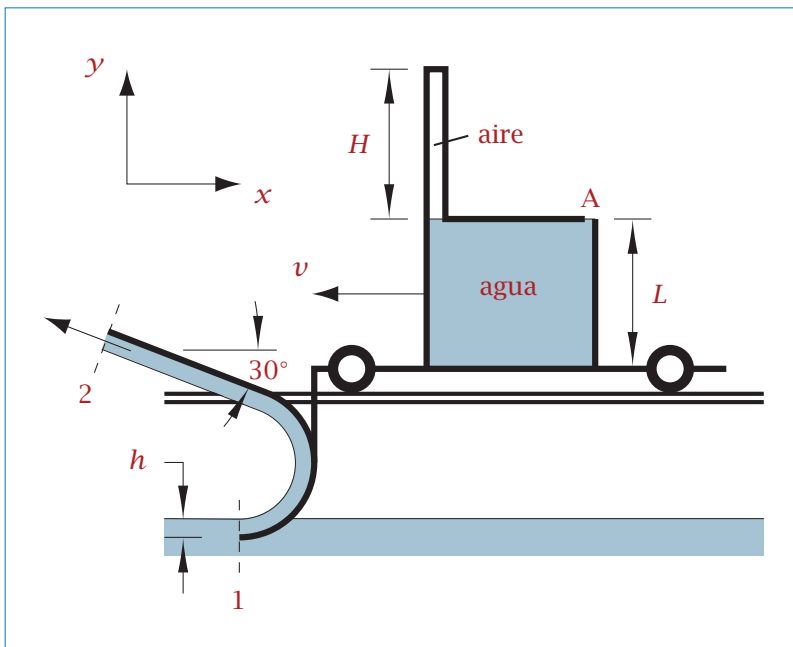
El momento de fuerzas sobre el estator es obviamente de igual módulo que el momento que se ejerce sobre el rotor y de sentido opuesto. Para deducir esto bastaría aplicar la ecuación de conservación del momento cinético a un volumen de control comprendido entre las secciones 1' y 2, o bien tener en cuenta que, al no existir componentes acimutales de velocidad en las secciones 1 y 2, el momento total sobre el compresor es nulo.

Problema 5.8. Sistema de freno hidrodinámico de una plataforma mediante un deflector

La plataforma móvil de la figura, con un peso total (incluido el depósito que transporta) de 15 000 N, se desplaza sobre un carril horizontal situado sobre un canal de agua. En la parte anterior de la plataforma existe un deflector de anchura $b = 0,2 \text{ m}$, cuyo extremo inferior puede sumergirse en el agua del canal a una profundidad variable h . El deflector actúa como freno hidrodinámico, recogiendo una lámina de agua de espesor h y desviándola como se indica en la figura, de manera que la velocidad del agua relativa al deflector, a la salida de este, forma un ángulo de 30° con la horizontal. La fuerza de frenado depende de la velocidad y la deceleración de la plataforma; sin embargo, se supondrá, en primera aproximación, que solo depende de la velocidad en cada instante (lo que equivale a suponer que el flujo es cuasiestacionario).

Supóngase que en el instante $t = 0$ en que se acciona el freno (sumergiendo el deflector una profundidad h), la plataforma se desplaza con una velocidad $v_0 = 50 \text{ m s}^{-1}$.

- Determinar, en función de h , la fuerza que se ejerce sobre el deflector en el instante inicial. Se supondrán despreciables las pérdidas por fricción y las fuerzas másicas.
- Si se mantiene un valor constante de $h = 4 \text{ cm}$, determinar la ecuación que describe el movimiento de la plataforma y calcular la deceleración que se produce en el instante inicial. Se despreciarán fuerzas de frenado distintas de la producida por el deflector.
- Debido a efectos de viscosidad, en el instante $t = 0$, cuando $h = 4 \text{ cm}$, se disipa en realidad una potencia de 4 kW en el fluido que circula sobre el deflector. Calcular, en dicho instante inicial, suponiendo que no hay adición externa de calor, la velocidad (que se supondrá uniforme) y el espesor de la lámina de agua en la sección de salida del deflector, la fuerza de frenado y el incremento de temperatura que se produce en el agua al circular sobre el deflector.



El depósito situado sobre la plataforma tiene forma de cubo con longitud de arista $L = 1$ m. En la posición indicada en la figura, tiene acoplado un tubo de altura $H = 1$ m, cerrado en su extremo. El depósito está abierto a la atmósfera mediante un pequeño orificio situado en el punto A. En el instante en que se acciona el freno (situación representada en la figura), el depósito está lleno de agua y el tubo contiene aire a la presión atmosférica $p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$.

- d) Si la deceleración inicial que se produce al accionar el freno fuese diez veces la calculada en el apartado b), y se mantiene constante en instantes posteriores (aumentando progresivamente h durante el proceso de frenado e invirtiendo finalmente el sentido de marcha), determinar la altura que alcanzaría el agua en el tubo acoplado al depósito en situación de equilibrio estático. Se supondrá que el aire sufre un proceso de compresión isoterma y que el volumen del tubo es despreciable frente al volumen del depósito. Indicar cómo se resolvería el problema si el proceso de compresión fuese isentrópico.

Solución

a) Al ser el flujo cuasiestacionario e incompresible y ser despreciables los efectos de viscosidad, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli (B.4.2) entre las secciones 1 y 2 indicadas en la figura:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2.$$

Despreciando los efectos de las fuerzas másicas y considerando que $p_1 = p_2 = p_{\text{at}}$, se obtiene $v_1 = v_2 = v_0 = 50 \text{ m s}^{-1}$.⁸

Para calcular la fuerza sobre el deflector puede suponerse que este está fijo, y que el agua se mueve hacia la derecha con una velocidad v_0 . Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control limitado por las secciones 1 y 2, la superficie de separación aire-agua y la superficie del deflector (teniendo en cuenta lo indicado en el enunciado sobre la cuasiestacionariedad del movimiento), compruébese que se obtienen las

⁸ Si aún no se ha estudiado la ecuación de Bernoulli, puede observarse que se obtiene el mismo resultado si se utiliza, por ejemplo, la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica, teniendo en cuenta que no se realiza trabajo sobre el fluido y que los efectos de fricción son despreciables.

siguientes componentes de la fuerza sobre el deflector en el instante inicial:

$$F_{x0} = \rho v_0^2 h b (1 + \cos 30^\circ) = 933\,013\,h, \quad (5.8.1)$$

$$F_{y0} = -\rho v_0^2 h b \sin 30^\circ = -250\,000\,h, \quad (5.8.2)$$

(F en N, h en m).

b) Es inmediato demostrar que, en cada instante, la componente horizontal de la fuerza que ejerce el agua sobre el deflector es

$$F_x = \rho v^2 h b (1 + \cos 30^\circ) = \rho h b (1 + \cos 30^\circ) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

siendo v la velocidad de la plataforma.

La componente F_x debe compensarse con la fuerza de inercia que experimenta el conjunto de la plataforma:

$$\rho h b (1 + \cos 30^\circ) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (5.8.3)$$

siendo $m = 15\,000/9,8 = 1531$ kg la masa de la plataforma. La ecuación (5.8.3) debe integrarse con las condiciones iniciales $x = x_0$ y $dx/dt = v_0$ en $t = 0$, siendo x_0 la posición inicial. Para la integración puede hacerse el cambio de variable $x^* = dx/dt$, resultando

$$x = x_0 - 400,7 - \frac{1}{9,763 \times 10^{-3}} \ln(0,02 - 9,763 \times 10^{-3} t)$$

(x en m, t en s).

La aceleración en el instante inicial,

$$d^2 x / dt^2|_0 = 24,41 \text{ m s}^{-2},$$

puede obtenerse de la ecuación (5.8.3), haciendo $dx/dt = v_0$.

c) La velocidad del agua a la salida del deflector se calcula en este caso aplicando la ecuación (B.1.16) al mismo volumen de control descrito anteriormente, teniendo en cuenta que no se realiza trabajo sobre el fluido, que $p_1 = p_2$, y que los efectos de las fuerzas másicas son despreciables:

$$v_2^2 = v_1^2 - \frac{2\bar{\Phi}_v}{G},$$

de donde se obtiene $v_2 = 49,8 \text{ m s}^{-1}$.

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

El espesor h_2 de la lámina de agua en la sección de salida del deflector se calcula mediante la ecuación de conservación de la masa:

$$h_2 = h_1 \frac{v_1}{v_2} = 0,0402 \text{ m.}$$

Compruébese que la fuerza de frenado en el instante inicial (que, recuérdese, es el considerado en este apartado) es en este caso

$$F_{x0} = b\rho(v_1^2 h_1 + v_2^2 \cos 30^\circ h_2) = 37\,251 \text{ N.}$$

Compárese este resultado con el que se obtiene de la ecuación (5.8.1) para $h = 0,04 \text{ m}$.

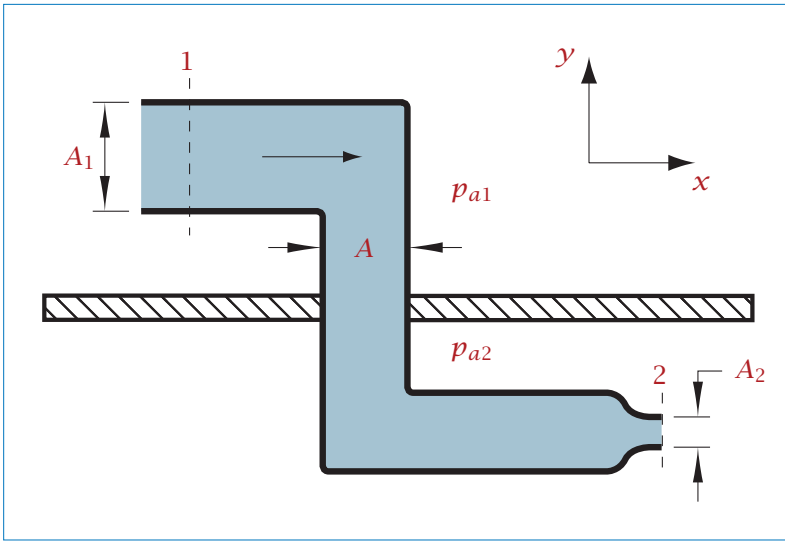
El incremento de temperatura se obtiene a partir de la ecuación (B.1.18):

$$\Delta T = \frac{\overline{\Phi}_v}{c\rho v_1 h_1 b} = \frac{4000}{(4180)(1000)(50)(0,04)(0,2)} = 2,4 \times 10^{-3} \text{ K.}$$

d) 0,707 m.

Problema 5.9. Conducto acodado que atraviesa la pared de separación de dos recintos a distinta presión

El tubo acodado de la figura atraviesa una pared que separa dos recintos en los que el aire está en reposo. En el recinto superior existe una presión $p_{a1} = 1,5 \text{ kgf cm}^{-2}$, y en el inferior, $p_{a2} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$. Por el interior del tubo circula aire con un gasto másico $G = 0,096 \text{ kg s}^{-1}$, que es descargado en el recinto inferior. Se quiere analizar el tramo de tubo representado en la figura, es decir, desde la sección 1, de área $A_1 = 20 \text{ cm}^2$, en la que la presión es $p_1 = 1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$ y la temperatura $T_1 = 340 \text{ K}$, hasta la sección 2 de descarga, de área $A_2 = 15 \text{ cm}^2$. El aire que circula por el interior del tubo es calentado con una potencia $\dot{Q} = 8640 \text{ W}$. La sección del tramo de tubo que atraviesa la pared es de área $A = 30 \text{ cm}^2$. Se considerará que el movimiento es estacionario, se supondrán uniformes las condiciones del flujo en las secciones de entrada y de salida del tubo, y se despreciarán las fuerzas másicas.



Calcular:

- Velocidad y temperatura del aire en la sección 2.
- Fuerza total que ejerce el aire sobre el tramo de conducto considerado.

Solución

a) Aplicando la ecuación (B.6.1) de conservación de la energía al volumen fluido limitado por el volumen de control limitado por las secciones de entrada y salida y la superficie interior del conducto, teniendo en cuenta que no se ejerce trabajo sobre el fluido, resulta

$$G[c_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)] = \dot{Q}, \quad (5.9.1)$$

donde

$$v_1 = \frac{G}{\rho_1 A_1} = \frac{GRT_1}{p_1 A_1}$$

puede obtenerse a partir de los datos facilitados en el enunciado, y

$$T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2} = \frac{p_2 A_2 v_2}{RG}. \quad (5.9.2)$$

Introduciendo esta última expresión en la ecuación (5.9.1), se obtiene una ecuación para la incógnita v_2 , de donde resulta

$$v_2 = 80 \text{ m s}^{-1}.$$

Finalmente, la temperatura del aire en la sección de descarga,

$$T_2 = 427,2 \text{ K},$$

se obtiene de la ecuación (5.9.2).

b) Al no existir una presión uniforme sobre la superficie exterior del conducto, se va a aplicar en primer lugar, con objeto de determinar la fuerza de superficie que ejerce sobre el conducto el fluido que circula por su interior, la ecuación (B.1.8) al mismo volumen de control que se acaba de describir en el apartado anterior, utilizando presiones absolutas al calcular el término [3]. A continuación se sumará a la fuerza obtenida la que se ejerce sobre la superficie exterior del conducto. Los términos [1] y [4] de la ecuación (B.1.8), de acuerdo con lo indicado en el enunciado, son nulos. La ecuación (B.1.8) proyectada en dirección horizontal (sentido positivo hacia la derecha) resulta

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{xi},$$

siendo F_{xi} la componente horizontal de la fuerza que ejerce sobre el conducto el fluido que circula por su interior. Es obvio que la componente vertical de dicha fuerza es nula, $F_{yi} = 0$.

La componente horizontal de la fuerza que se ejerce sobre la superficie exterior del conducto es

$$F_{xe} = -p_{a1} A_1 + p_{a2} A_2$$

(justifíquese). Obsérvese que solamente las fuerzas horizontales debidas a la presión que se ejercen sobre las caras exteriores de las paredes del tubo opuestas a las secciones de entrada y salida no están compensadas. De forma análoga, es inmediato determinar que la componente vertical de la fuerza sobre la superficie exterior del tubo es

$$F_{ye} = -p_{a1} A + p_{a2} A.$$

En este caso, solamente existen dos superficies horizontales opuestas entre sí, sometidas en su cara exterior a presiones diferentes.

Las componentes de la fuerza total que se pide en el enunciado, teniendo en cuenta que $p_2 = p_{a2}$,⁹ son

$$F_x = F_{xi} + F_{xe} = \rho_1 v_1^2 A_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 + (p_1 - p_{a1}) A_1$$

⁹ De nuevo en este caso se utiliza la condición de que la presión en la sección de salida del tubo coincide con la presión en el recinto de descarga, como ya se hizo, por ejemplo, en el Problema 5.3.

y

$$F_y = (p_2 - p_{a1})A.$$

Sustituyendo valores (ρ_1 y ρ_2 se obtienen a partir de la ecuación de estado, y las restantes magnitudes, o son datos o ya han sido calculadas), resulta

$$F_x = -62,72 \text{ N}$$

y

$$F_y = -147,2 \text{ N.}$$

En el caso de que la presiones p_{a1} y p_{a2} fuesen iguales (presión sobre la superficie exterior del conducto uniforme), obsérvese que hubiese bastado con aplicar la ecuación (B.1.8) utilizando presiones manométricas en el término [3], como se ha hecho en otros problemas.

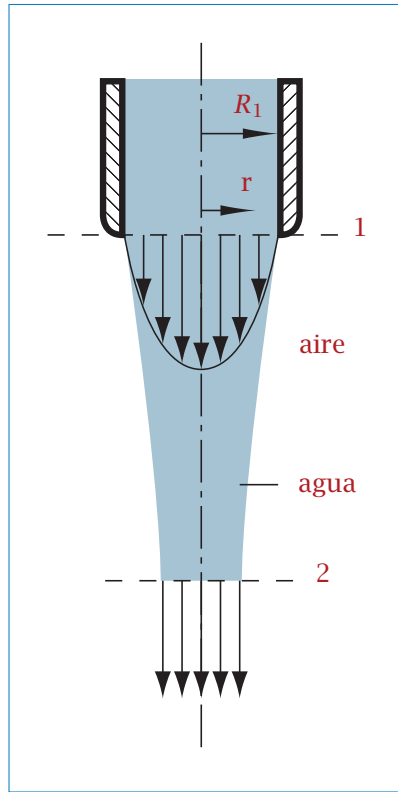
Problema 5.10. Descarga de un chorro de agua desde un tubo vertical

A través del tubo de la figura se descarga a la atmósfera un chorro de agua. A la salida del tubo (sección 1) la distribución de velocidad es parabólica:

$$v_1 = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right],$$

siendo r la distancia al eje, $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$ la velocidad en el eje y $R_1 = 0,5 \text{ mm}$ el radio del tubo. Aguas abajo de la sección 1, debido a que la viscosidad del aire es muy pequeña frente a la del agua, la tensión cortante en la superficie de separación aire-agua es despreciable, y el perfil de velocidad tiende a hacerse uniforme, de forma que en la sección 2, situada a una distancia suficientemente grande de la sección 1, puede considerarse que $v_2 = \text{constante}$.

Se supondrá que las tensiones normales en las secciones 1 y 2 y en toda la superficie del chorro son uniformes e iguales a la presión atmosférica, y que la distancia entre las secciones 1 y 2 es lo suficientemente pequeña como para que el efecto de las fuerzas gravitatorias sea despreciable. En la superficie de separación aire-agua se despreciarán las tensiones cortantes y los efectos de tensión superficial. Se considerará el proceso estacionario.



Calcular:

- Velocidad, v_2 , y radio del chorro, R_2 , en la sección 2.
- Potencia mecánica disipada y aumento de temperatura del agua entre las secciones 1 y 2.

Solución

a) Se utilizará un volumen de control fijo, limitado por las secciones 1 y 2 y por la superficie de separación aire-agua. Se aplicará en primer lugar la ecuación de conservación de la masa (B.1.3). El término [1] es nulo al ser el problema estacionario. La contribución al término [2] correspondiente a la superficie de separación agua-aire es nula, al ser en esta \mathbf{v} perpendicular a \mathbf{n} , quedando por tanto

$$-\int_0^{R_1} \rho v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right] 2\pi r dr + \rho v_2 \pi R_2^2 = 0,$$

de donde resulta

$$v_0 R_1^2 = 2 v_2 R_2^2. \quad (5.10.1)$$

Se aplicará a continuación la ecuación (B.1.8), de conservación de la cantidad de movimiento, al mismo volumen de control ya descrito. También en este caso es nulo el término no estacionario [1]. El término [3] es nulo al ser uniforme la presión sobre toda la superficie del volumen de control y despreciarse en ella los efectos de viscosidad y de tensión superficial. El término [4] también es nulo al despreciarse el efecto de las fuerzas gravitatorias. En cuanto al término [2], de nuevo es nulo el flujo convectivo a través de la superficie de separación aire-agua al ser en ella \mathbf{v} perpendicular a \mathbf{n} , quedando tan solo las contribuciones correspondientes a las secciones 1 y 2,

$$-\int_0^{R_1} \rho v_0^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]^2 2\pi r \, dr + \rho v_2^2 \pi R_2^2 = 0,$$

de donde se obtiene

$$\frac{1}{3} v_0^2 R_1^2 = v_2^2 R_2^2. \quad (5.10.2)$$

De las ecuaciones (5.10.1) y (5.10.2) resulta

$$v_2 = \frac{2}{3} v_0 = 1,33 \, \text{m s}^{-1}$$

y

$$R_2 = \sqrt{\frac{3}{4}} R_1 = 0,433 \, \text{mm}.$$

b) Se va a aplicar la ecuación (B.1.15) de conservación de la energía mecánica al mismo volumen de control del apartado anterior. La potencia mecánica disipada dentro del volumen de control viene dada por el término [4] de dicha ecuación. El término [1] es nulo al ser el flujo estacionario. El término [3] puede descomponerse de la forma

$$\int_{S_c} (\bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_{S_c} (\bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{S_c} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS, \quad (5.10.3)$$

siendo los dos sumandos del segundo miembro nulos, el primero de ellos por haberse despreciado los efectos de viscosidad en la superficie del volumen de control, y el segundo por ser uniforme la presión en S_c (dado que \mathbf{v} es perpendicular a \mathbf{n} en la superficie de separación aire-agua, este sumando se reduce a $\int_{S_1+S_2} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS$, que es igual a cero al ser $p_1 = p_2$ y cumplirse la ecuación de continuidad).

Si se tiene en cuenta que se consideran despreciables los efectos de las fuerzas másicas, la ecuación (B.1.15) se reduce finalmente a

$$\int_{S_c} \rho \frac{1}{2} v^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\bar{\Phi}_v,$$

de donde resulta que la potencia mecánica disipada entre las secciones 1 y 2 es

$$\bar{\Phi}_v = \rho \int_0^{R_1} \frac{v_0^3}{2} \left[1 - \left(\frac{r}{R_1} \right)^2 \right]^3 2\pi r dr - \rho \frac{v_2^3}{2} \pi R_2^2 = 8,69 \times 10^{-5} \text{ W}.$$

El aumento de temperatura entre las secciones 1 y 2 puede calcularse mediante la aplicación de la ecuación de conservación de la energía interna (B.1.14) al volumen de control descrito anteriormente. Suponiendo que la temperatura es uniforme en cada una de las secciones 1 y 2, y que son nulos los términos [4] y [5] de la ecuación (B.1.14), resulta (ver ecuación (B.1.18))

$$e_2 - e_1 = c \Delta T = \frac{\bar{\Phi}_v}{G},$$

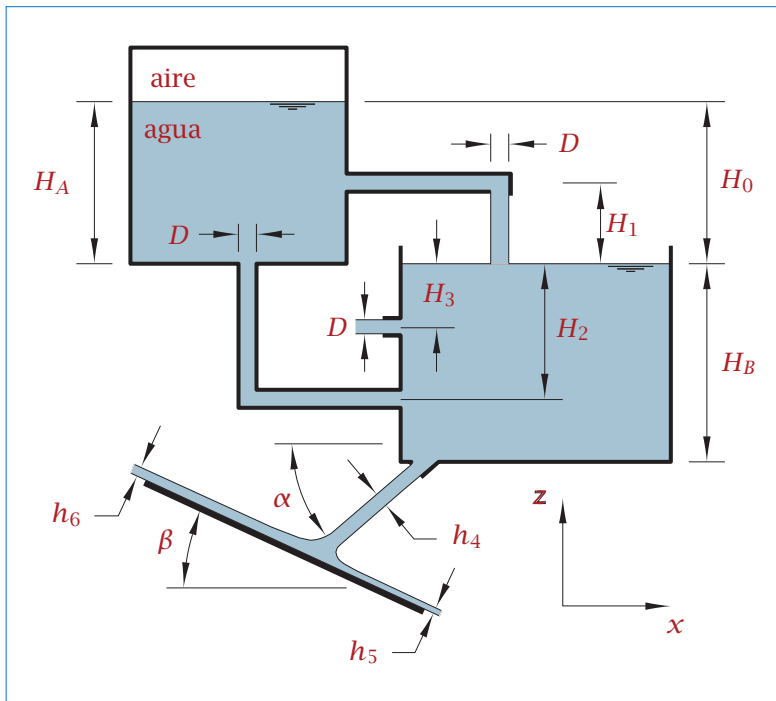
de donde se obtiene

$$\Delta T = \frac{\bar{\Phi}_v}{c \rho v_2 \pi R_2^2} = \frac{8,69 \times 10^{-5}}{(4180)(1000)(1,33)\pi(4,33 \times 10^{-4})^2} = 2,64 \times 10^{-5} \text{ K}.$$

Problema 5.11. Descarga de chorros de agua en depósitos e impacto oblicuo de un chorro sobre una placa plana que se mueve en dirección normal a sí misma

El depósito superior de la figura contiene agua hasta una altura $H_A = 2 \text{ m}$ y aire a una presión manométrica de $0,2 \text{ kgf cm}^{-2}$. El agua se trasvasa a un depósito inferior, en el que la superficie libre del agua se encuentra a una altura $H_0 = 2 \text{ m}$ por debajo de la superficie libre del agua en el depósito superior y a una altura $H_B = 3 \text{ m}$ sobre su fondo. El trasvase se realiza mediante dos tuberías, ambas de diámetro $D = 10 \text{ cm}$, en las que se supondrán despreciables las pérdidas de carga. Una de ellas está conectada al fondo del depósito superior, en un punto situado a una profundidad $H_2 = 2 \text{ m}$ del depósito inferior. La otra tubería está conectada al depósito superior en un punto situado a una altura $H_0 - H_1 = 1 \text{ m}$ por debajo de la superficie libre

del agua, y descarga sobre la superficie libre del agua en el depósito inferior desde la altura H_1 . El depósito inferior, a su vez, se descarga a través de los dos orificios indicados en la figura. El superior, situado a una profundidad $H_3 = 1$ m, tiene sección de forma circular de diámetro $D = 10$ cm, y el inferior, de forma rectangular y situado en el fondo, tiene acoplada una boquilla, inclinada un ángulo $\alpha = 30^\circ$, con una sección transversal de anchura $b = 30$ cm y espesor $h_4 = 3$ cm. Ambos depósitos tienen una sección horizontal constante de área $A = 25$ m².

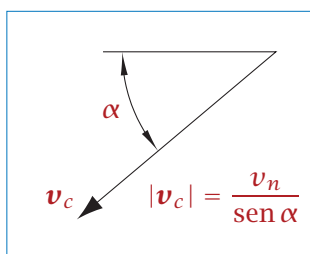


- Calcular las velocidades con que se moverán las superficies libres del agua en los dos depósitos. Explicar y justificar las hipótesis adoptadas.
- Calcular la fuerza que se ejerce sobre el depósito inferior.

El chorro de agua que sale por la boquilla rectangular del depósito inferior incide sobre la plataforma indicada en la figura, inclinada un cierto

ángulo β ($0 \leq \beta \leq 60^\circ$), y se divide en dos chorros de espesores h_5 y h_6 . Suficientemente lejos de la zona de incidencia del chorro y en toda la interfase aire-agua se supondrá que la presión es la atmosférica. Se despreciarán las fuerzas viscosas y las fuerzas másicas en el chorro. Se tratará el problema como si fuese bidimensional.

- c) Teniendo en cuenta que no se ejerce fuerza de rozamiento sobre la plataforma, determinar la profundidad del agua en el depósito inferior, H_B , y el ángulo β necesarios para que la fuerza por unidad de anchura sobre la plataforma sea de 150 N m^{-1} y $h_6 = \frac{9}{10} h_4$. Se supondrá que la plataforma está fija.
- d) Suponiendo $H_B = 3,262 \text{ m}$ y $\beta = 0^\circ$ y que la plataforma se mueve en dirección perpendicular a sí misma, alejándose del chorro, con una velocidad constante $v_n = 2 \text{ m s}^{-1}$, determinar la fuerza que se ejerce sobre la plataforma. Se sugiere utilizar un volumen de control que se mueva con la velocidad uniforme \mathbf{v}_c indicada en la figura siguiente:



Solución

a) En primer lugar se va a presentar, sin apenas comentarios o aclaraciones, la relación de ecuaciones que permiten resolver este primer apartado y las correspondientes soluciones numéricas. Como se ha mencionado anteriormente, es importante tratar de resolver el problema sin consultar siquiera esta mera relación de ecuaciones. Si se tienen dificultades, puede echarse un vistazo a las ecuaciones para tratar de encontrar alguna pista. En caso de que las dificultades persistan, quizás resulte necesario analizar las ecuaciones con mayor detenimiento. Como última opción, pueden leerse los comentarios que se incluyen más adelante sobre dudas y dificultades que ocasionalmente suelen aparecer en la resolución del problema. En todo caso, si no se ha resuelto el apartado sin ayuda, es conveniente

volver a abordarlo de nuevo pasado un tiempo.

Relación de ecuaciones. Solución numérica

Los subíndices que se van a utilizar corresponden a los puntos indicados en la Figura 5.11.1. La sección en la que se encuentra cada punto (ya sea una superficie libre, una sección transversal en un conducto o una superficie indicada con línea de trazos) se denominará igual que este. El subíndice 0 denotará condiciones en el aire contenido en el depósito superior y la diferencia entre las cotas de las superficies libres en los depósitos.

- Conservación de la energía mecánica específica en el conducto superior de descarga del depósito superior:

$$\frac{p_0}{\rho} + gH_0 = gH_1 + \frac{1}{2}v_1^2. \quad (5.11.1)$$

- Conservación de la energía mecánica específica en el conducto inferior de descarga del depósito superior:

$$\frac{p_0}{\rho} + gH_0 = \frac{1}{2}v_2^2. \quad (5.11.2)$$

- Conservación de la masa (que equivale a conservación del volumen, al ser la densidad uniforme) en el depósito superior:

$$v_A A = (v_1 + v_2) \frac{\pi D^2}{4} \quad (5.11.3)$$

(v_A positiva cuando el depósito se vacía).

- Conservación de la energía mecánica específica en la descarga del depósito inferior a través del orificio 3:

$$0 = \frac{1}{2}v_3^2 - gH_3. \quad (5.11.4)$$

- Conservación de la energía mecánica específica en la descarga del depósito inferior a través del orificio 4:

$$0 = \frac{1}{2}v_4^2 - gH_B. \quad (5.11.5)$$

- Conservación de la masa (o volumen) en el depósito inferior:

$$v_B A = v_3 \frac{\pi D^2}{4} + v_4 b h_4 - (v_1 + v_2) \frac{\pi D^2}{4} \quad (5.11.6)$$

(v_B positiva cuando el depósito se vacía).

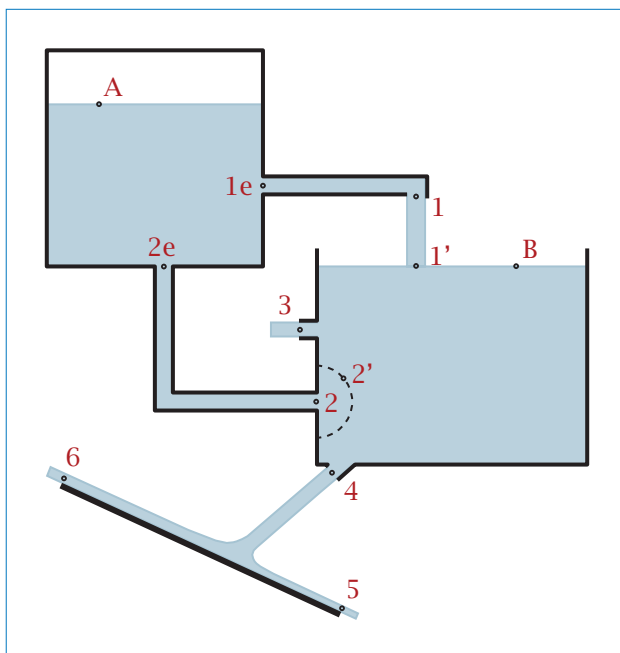


Figura 5.11.1
Notación utilizada para los subíndices.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$v_A = 5,19 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \quad (\text{sentido hacia abajo});$$

$$v_B = -1,04 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \quad (\text{sentido hacia arriba});$$

$$v_1 = 7,67 \text{ m s}^{-1};$$

$$v_2 = 8,86 \text{ m s}^{-1};$$

$$v_3 = 4,43 \text{ m s}^{-1};$$

$$v_4 = 7,67 \text{ m s}^{-1}.$$

Comentarios

A pesar de que el problema no es complicado, sí permite abordar con cierto detalle algunas dudas que con alguna frecuencia son planteadas por estudiantes en diferentes problemas. Puede ocurrir que el lector con cierta experiencia considere todas estas dudas irrelevantes, pero, también, que se haya planteado algunas de ellas.

Una dificultad que suele presentarse con cierta frecuencia en la resolución de este apartado es consecuencia de no despreciar, en la ecuación de conservación de la energía mecánica, el término de energía cinética en las superficies libres del agua en los depósitos (al no hacerlo, se complica la resolución del sistema de ecuaciones resultante).¹⁰ Esta simplificación es admisible debido a que los valores de las velocidades de descenso de dichas superficies libres son suficientemente pequeños, lo que a su vez está determinado por el hecho de que el área de la sección transversal de los depósitos es mucho mayor que la de los conductos de descarga.¹¹ Sin embargo, es obvio que las velocidades de descenso de las superficies libres no pueden despreciarse en la ecuación de conservación de la masa. Precisamente, es esta ecuación la que determina dichas velocidades en función de las velocidades de descarga a través de los conductos, debiendo ser estas a su vez obtenidas a partir de la ecuación de conservación de la energía mecánica, como veremos a continuación.

Si no se ha estudiado todavía la ecuación (B.4.2) de Bernoulli ni la ecuación (B.5.1) de conservación de la energía mecánica en flujos turbulentos unidimensionales, otra duda suele aparecer al tratar de aplicar la ecuación de conservación de la energía mecánica, expresada en una forma similar a la de la ecuación (B.1.16), al depósito superior. Dado que este depósito se descarga a través de dos conductos, en principio parece que la ecuación (B.1.16) debería ser generalizada a una situación en la que existen una sección de entrada y dos secciones de salida. Se abordará esta forma de enfocar la resolución del problema más adelante, en la página 149, y se supondrá en lo que sigue que ya se ha estudiado la ecuación de Bernoulli y la ecuación (B.5.1).

Con esta última premisa, no suele haber dificultades para determinar la velocidad de descarga a través del conducto superior, aunque no es del todo infrecuente que se cometa el error de considerar que dicha velocidad es $v_1 = \sqrt{2g(H_0 - H_1)}$,

¹⁰ La mencionada simplificación habrá sido aplicada por el lector en numerosos problemas. La confusión que en ocasiones aparece al resolver el presente ejercicio suele deberse al hecho de que explícitamente se pida determinar las velocidades de descenso de las superficies libres, lo que hace que se tienda a descartar la posibilidad de despreciar los términos de energía cinética correspondientes en la ecuación de conservación de la energía mecánica.

¹¹ El que un valor pequeño de un determinado parámetro o magnitud haga despreciable o no un cierto término en una ecuación (el término puede ser despreciable en todo el campo fluido o solo en determinadas regiones, en todo instante o solo en ciertas escalas de tiempo), y la estimación del error que se comete con la correspondiente simplificación, es una cuestión que aparece reiteradamente en mecánica de fluidos y que puede entrañar en ocasiones considerable dificultad. En el presente problema es fácil anticipar intuitivamente que la simplificación descrita está justificada, aunque en todo caso esto se comprobará posteriormente. El que una solución tenga limitaciones para describir la realidad (como muy frecuentemente ocurre en ingeniería) no significa que no tenga utilidad. En el problema que nos ocupa, estas limitaciones son, además, irrelevantes.

olvidando que en la superficie libre del agua en el depósito existe una presión manométrica no nula. Dado que, según se indica en el enunciado, pueden suponerse despreciables las pérdidas de carga, la energía mecánica específica en la superficie libre en el depósito, $p_0/\rho + gH_0$,¹² debe ser igual a la que tiene el agua en el orificio de descarga, $\frac{1}{2}v_1^2 + gH_1$, con lo que resulta

$$v_1 = \left[2g \left(H_0 - H_1 + \frac{p_0}{\rho g} \right) \right]^{1/2}.$$

Sí es más frecuente que llegue a surgir alguna duda con el conducto inferior. ¿Entre qué puntos cabe plantear la ecuación de Bernoulli? ¿Tiene sentido plantearla entre los puntos A y B, situados en las superficies libres del agua en los depósitos? Téngase en cuenta que la ecuación (B.4.2) de Bernoulli establece que la energía mecánica específica se mantiene constante¹³ en flujos de fluidos incompresibles de densidad uniforme en los que las fuerzas másicas derivan de un potencial, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (1) el flujo es estacionario (o cuasiestacionario),
- (2) los efectos de la viscosidad son despreciables.

Si se admiten estas hipótesis, la constancia de la energía mecánica específica entre los puntos A y B requeriría que

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gH_0 = \frac{1}{2}v_B^2, \quad (5.11.7)$$

siendo v_A y v_B las velocidades del agua en las superficies libres en los depósitos superior e inferior, respectivamente.¹⁴ Es inmediato darse cuenta de la inconsistencia de la ecuación anterior con las hipótesis mencionadas. Prescindiremos (sin pérdida de generalidad en la discusión que prosigue) de la existencia del conducto de descarga superior del depósito superior y de los orificios de descarga 3 y 4 del depósito inferior. La ecuación de continuidad determinaría que $v_A = v_B$ (dado que el área de la sección transversal es la misma en ambos depósitos), con lo que la ecuación (5.11.7) se reduce a la expresión $p_0/\rho + gH_0 = 0$, que obviamente resulta incompatible con las condiciones descritas en el enunciado.

¹² En adelante, la energía mecánica específica se tomará referida a la cota y a la presión en la superficie libre en el depósito inferior.

¹³ La constancia a lo largo de una línea de corriente se extiende a todo el campo fluido si todas las líneas de corriente proceden de una región donde la energía mecánica específica es uniforme, como ocurre en regiones en las que el fluido se encuentra en reposo (en el presente problema, en los depósitos).

¹⁴ La superficie libre es una superficie fluida, por lo que se mueve con la velocidad del agua.

La inconsistencia que se acaba de poner de manifiesto se debe obviamente a que no es posible adoptar simultáneamente las dos hipótesis mencionadas. En realidad, el movimiento del agua entre los depósitos respondería en principio a una de las dos situaciones extremas siguientes, o a una intermedia entre ambas:

- Si los efectos de la viscosidad fuesen despreciables, se producirían movimientos en masa de agua con una aceleración inicial que compensaría el desequilibrio inicial en presión y nivel de agua entre los depósitos. En definitiva, el movimiento sería no estacionario, no siendo aceptable la condición (1) anterior.
- Si el flujo se considera cuasiestacionario, deben existir necesariamente pérdidas de energía que compensen el mencionado desequilibrio de energía entre los depósitos, dado por $p_0/\rho + gH_0$. A pesar de que en el enunciado se indica que las pérdidas de energía en las tuberías son despreciables, sí existirá en todo caso la pérdida de la energía cinética del chorro de agua que se descarga en el depósito inferior.¹⁵

Obviamente, en ninguna de estas dos situaciones es posible aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos A y B. Dado que el área de las secciones transversales de los depósitos es mucho mayor que la del conducto de conexión entre estos, es razonable suponer que el problema es cuasiestacionario, y que estamos por tanto en la segunda situación descrita¹⁶ (lo que deberá ser confirmado *a posteriori*). Por la misma razón, cabe despreciar la energía cinética del agua en las superficies libres frente a la del chorro que descarga a través del conducto en el depósito inferior. La ecuación (B.5.1) de conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B situados en las superficies libres del agua en los depósitos puede entonces expresarse de la forma siguiente:

$$\frac{p_0}{\rho} + gH_0 = \frac{1}{2}v_2^2, \quad (5.11.8)$$

siendo v_2 la velocidad del agua en la tubería inferior. Es decir, el exceso de energía mecánica específica del agua en la superficie libre del depósito superior frente a la que existe en la superficie libre del depósito inferior es igual a la energía

¹⁵ La energía cinética del chorro que descarga en el depósito se disipa totalmente en el interior de este. Este es un fenómeno que aparece reiteradamente en numerosos problemas de capítulos posteriores, especialmente del Capítulo 9.

¹⁶ La primera situación descrita correspondería a un caso en el que las secciones transversales de los depósitos no fuesen excesivamente grandes en comparación con la del conducto. Obsérvese que, en el caso que nos ocupa, el hecho de que se alcanzasen velocidades apreciables en las superficies libres daría lugar a velocidades mucho mayores en el conducto (al ser $D^2 \ll A$), lo que sería incompatible con la hipótesis de que las pérdidas de carga fuesen despreciables.

cinética del chorro de descarga en el depósito inferior, que se disipa totalmente en el interior de este.

Es interesante observar que la ecuación (5.11.8) es consistente con suponer que la presión del agua en la sección de descarga de la tubería inferior (situada a una profundidad H_2) es igual a la presión a dicha profundidad que se deduce de la ecuación de la estática. Es decir, la ecuación (5.11.8) puede obtenerse aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto A, en la superficie libre del agua en el depósito superior, y el punto 2, en la sección de descarga de la tubería inferior,

$$\frac{p_0}{\rho} + gH_0 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 - gH_2, \quad (5.11.9)$$

si se toma

$$p_2 = \rho gH_2. \quad (5.11.10)$$

Obsérvese que, en la ecuación (5.11.9), el origen de cotas se ha tomado, como siempre, en la superficie libre del agua en el depósito inferior,¹⁷ y que el segundo sumando del segundo miembro es la energía cinética del agua en la sección de descarga (no aparece ningún término de pérdida de energía porque el flujo entre los puntos considerados se ha supuesto ideal; téngase en cuenta que la ecuación (5.11.9) resulta de aplicar la ecuación de Bernoulli). La equivalencia entre las ecuaciones (5.11.8) y (5.11.9) quizás resulte más clara si se tiene en cuenta que la ecuación (5.11.10) puede obtenerse como resultado de expresar que la energía mecánica específica en la sección de descarga de la tubería en el depósito, que viene dada por el segundo miembro de la ecuación (5.11.9), es igual a la energía mecánica específica en cualquier partícula fluida del depósito inferior que se encuentre en reposo¹⁸ más la energía cinética específica del chorro de descarga, $\frac{1}{2}v_2^2$, que se pierde en su totalidad.

La determinación de las velocidades v_3 y v_4 se hace de manera análoga a la seguida para calcular v_1 .

Veamos a continuación cómo podría abordarse la resolución de este apartado si aún no se hubiesen estudiado los movimientos turbulentos unidimensionales de líquidos en conductos ni la ecuación de Bernoulli. Es decir, se supondrá que se han estudiado ya las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos, pero no las simplificaciones que permiten deducir las ecuaciones (B.4.2) de Bernoulli y

¹⁷ Es obviamente indiferente tomar cualquier otro origen de cotas; lo que se quiere indicar es que las energías potenciales que aparecen en la ecuación (5.11.9) están referidas al origen mencionado.

¹⁸ Una partícula fluida estará en reposo si está suficientemente alejada de la zona de descarga. Obsérvese que su energía mecánica específica relativa será igual a cero, ya que se ha tomado el origen de cotas en la superficie libre y se están utilizando presiones manométricas.

(B.5.1) de conservación de la energía mecánica en flujos turbulentos unidimensionales. Se va a aplicar la ecuación de conservación de la energía mecánica (B.1.15) utilizando determinados volúmenes de control, para llegar en cada caso a una ecuación del mismo tipo que la ecuación (B.1.16). Si, por ejemplo, se prescinde de la existencia del conducto de descarga superior del depósito superior y de los dos orificios de descarga del depósito inferior, y se toman en la ecuación (B.1.16) los puntos A y B de la figura como los puntos 1 y 2, respectivamente, y se hace $H_\varphi = \frac{1}{2}v_2^2/g$, se obtiene la ecuación (5.11.2). De la misma forma, si se prescinde del conducto de descarga inferior del depósito superior, y se toman como puntos 1 y 2 en la ecuación (B.1.16) los puntos A y 1 de la figura, y se hace en este caso $H_\varphi = 0$, se obtiene la ecuación (5.11.1).¹⁹ Sin embargo, cabe en principio preguntarse si es correcto (veremos que sí lo es) analizar la descarga del depósito superior a través de un conducto prescindiendo de la existencia del otro, y si no sería más correcto aplicar la ecuación (B.1.15) utilizando un volumen de control que incluyese las superficies en las que se encuentran los puntos A, B, 1, 3 y 4, con lo que se obtendría²⁰

$$\begin{aligned} \rho v_A A \left[\frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + H_0 \right] &= \rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} \left[0 + \frac{v_1^2}{2g} + H_1 \right] - \rho v_B A \left[0 + \frac{v_B^2}{2g} + 0 \right] \\ &+ \rho v_3 \frac{\pi D^2}{4} \left[0 + \frac{v_3^2}{2g} - H_3 \right] + \rho v_4 \frac{\pi D^2}{4} \left[0 + \frac{v_4^2}{2g} - H_B \right] \\ &+ \overline{\Phi}_v, \end{aligned} \quad (5.11.11)$$

donde los términos en color gris se despreciarán. Obsérvese que, si se toma

$$\overline{\Phi}_v = \rho v_2 \frac{\pi D^2}{4} \frac{v_2^2}{2g},$$

la ecuación (5.11.11) puede obtenerse sumando las ecuaciones (5.11.1), (5.11.2), (5.11.4) y (5.11.5). Por otra parte, de la aplicación de la ecuación de conservación

¹⁹ Se ha supuesto que el flujo es cuasiestacionario y que las magnitudes fluidas son uniformes en cada una de las secciones de paso que delimitan el volumen de control, y se ha despreciado la energía cinética del agua en las superficies libres. La utilización de la ecuación (B.1.15) requiere que el fluido sea incompresible. La densidad es además uniforme en este caso.

²⁰ La energía que sale por la sección 1 entra de nuevo en el volumen de control a través de la sección 1', pero se pierde en su totalidad en el interior del depósito inferior. Se podría haber añadido en el segundo miembro el término de energía entrante a través de la sección 1' ($-\rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} [\frac{v_1^2}{2g} + H_1]$, igual en valor absoluto al de energía saliente a través de 1), pero obsérvese que se cancelaría con la correspondiente contribución a $\overline{\Phi}_v$. Se ha optado por no incluir ninguno de estos dos términos en la ecuación (5.11.11).

de la masa, utilizando el mismo volumen de control, se obtiene

$$\rho v_A A = -\rho v_B A + \rho v_3 \frac{\pi D^2}{4} + \rho v_4 \frac{\pi D^2}{4}. \quad (5.11.12)$$

Obsérvese que también esta ecuación puede obtenerse como suma de las ecuaciones (5.11.3) y (5.11.6).

Cabe hacer notar que, en lugar de las 6 ecuaciones (5.11.1) a (5.11.6) para las incógnitas v_A , v_B , v_1 , v_2 , v_3 y v_4 , ahora solo se dispone de las ecuaciones (5.11.11) y (5.11.12) para las mismas incógnitas. Este planteamiento y otros similares, aunque en principio correctos, es obvio que no permiten llegar a la solución. ¿Por qué ocurre esto? ¿En qué se diferencia un planteamiento de otro? La respuesta está relacionada con el carácter integral de la ecuación (B.1.15), cuya aplicación no permite obtener la solución si no se dispone de datos adicionales o no se introducen simplificaciones adecuadas.²¹ Las simplificaciones que es posible realizar en este caso son las que resultan de suponer que la energía mecánica específica del agua es uniforme en el interior de cada depósito. Con ello, es posible, por ejemplo, aplicar la ecuación (B.1.15) al conducto de descarga superior, entre su sección de entrada 1e y la sección 1,²² teniendo en cuenta que la energía específica en 1e es la misma que en A: $\frac{p_0}{\rho g} + H_0$ (referida a la que existe en la superficie libre en el depósito inferior). La ecuación (B.1.15), aplicada al volumen de control limitado por las secciones 1e y 1, queda con la forma de la ecuación (B.1.16), con $H_\varphi = 0$, y por tanto igual que la ecuación (5.11.1). De forma análoga, puede aplicarse la ecuación (B.1.15) utilizando un volumen de control limitado por las secciones 2e, de entrada al conducto inferior, y una sección 2' en el interior del depósito inferior, en la que puede suponerse que la energía cinética del agua es despreciable (la energía mecánica específica puede considerarse uniforme en el depósito excepto en una región en torno a la zona de descarga). Debe tenerse en cuenta en este caso que entre las secciones 2 y 2' se produce la disipación de la energía cinética del chorro que se descarga en el depósito, por lo que, en la ecuación (B.1.16) resultante, debe tomarse $H_\varphi = \frac{1}{2}v_2^2/g$. Con todo ello, se obtiene finalmente la ecuación (5.11.2). Deben seguirse razonamientos similares para analizar la descarga a través de las secciones 3 y 4, y obtener las ecuaciones (5.11.4) y (5.11.5).

b) En primer lugar se va a calcular la velocidad v_1' con la que incide el agua sobre la superficie libre, para lo que se aplicará la ecuación de conservación de la energía mecánica al chorro que cae, utilizando un volumen de control limitado

²¹ Simplificaciones que están implícitas cuando se utilizan las ecuaciones (B.4.2) y (B.5.1), o, por ejemplo, al aplicar más arriba la ecuación (B.1.15) a un conducto prescindiendo de la existencia de otros.

²² Se supone que las magnitudes fluidas son uniformes en cada sección.

por las secciones 1 y 1' (1' es la sección de impacto del chorro que cae desde el conducto superior y B la sección restante de la superficie libre). Es inmediato obtener la siguiente relación (la presión se supone uniforme en toda la superficie del volumen de control, la velocidad, uniforme en cada una de las secciones 1 y 1', y las pérdidas de energía, despreciables):²³

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H_1 = \frac{1}{2}\rho v_{1'}^2,$$

de donde se obtiene $v_{1'} = 8,86 \text{ m s}^{-1}$.²⁴ Aplicando la ecuación de conservación de la masa al chorro, utilizando el mismo volumen de control anterior, resulta

$$D^2 v_1 = d^2 v_{1'},$$

de donde se obtiene el diámetro del chorro en la sección de impacto 1', $d = 0,0931 \text{ m}$.

La fuerza sobre el depósito inferior se obtiene aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen fluido contenido en el volumen de control limitado por las paredes interiores del depósito y las secciones 2, 3, 4, B y 1'. Compruébese que se obtienen las dos expresiones siguientes (F es la fuerza que se ejerce sobre el depósito; los ejes x y z tienen, respectivamente, direcciones horizontal y vertical y sentidos positivos hacia la derecha y hacia arriba, según se indica en la figura del enunciado):

$$\rho v_{1'}^2 \frac{\pi d^2}{4} - \rho v_4^2 b h_4 \sin \alpha = -F_z - \rho A H_B g, \quad (5.11.13)$$

$$-\rho v_3^2 \frac{\pi D^2}{4} - \rho v_2^2 \frac{\pi D^2}{4} - \rho v_4^2 b h_4 \cos \alpha = -F_x + \rho g H_2 \frac{\pi D^2}{4},$$

de donde resulta²⁵

$$F_x = 1383 \text{ N},$$

$$F_z = -736\,019 \text{ N}.$$

c) Las incógnitas en este apartado son en principio H_B , β , v_4 , v_5 , v_6 , h_5 y h_6 . Las ecuaciones que resultan de la aplicación de las ecuaciones de conservación

²³ Si ya se ha estudiado la ecuación (B.4.2) de Bernoulli, es también inmediato deducir la misma expresión a partir de dicha ecuación directamente.

²⁴ ¿Por qué ha resultado ser $v_{1'}$ igual a v_2 ?

²⁵ Obsérvese que la principal contribución a F_z es debida al peso del agua. Téngase en cuenta que en los cálculos se ha supuesto $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ (tomar, por ejemplo, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ da lugar a una diferencia en el peso del agua calculado que resulta comparable a las contribuciones de los restantes términos en la ecuación (5.11.13)).

al volumen fluido limitado por las secciones 4, 5 y 6, la placa y la superficie libre del agua (suponiendo magnitudes fluidas uniformes en las secciones 4, 5 y 6) son las siguientes:

- Conservación de la masa:

$$v_4 h_4 = v_5 h_5 + v_6 h_6.$$

- Conservación de la cantidad de movimiento en direcciones paralela y perpendicular a la placa (despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria y suponiendo que la presión es uniforme en puntos de la superficie del volumen de control suficientemente alejados de la zona de impacto):

$$v_4^2 h_4 \cos(\alpha + \beta) + v_5^2 h_5 - v_6^2 h_6 = 0,$$

$$\rho v_4^2 h_4 \sin(\alpha + \beta) = 150.$$

- Conservación de la energía mecánica (despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria y suponiendo que la presión es uniforme en la superficie del volumen de control, lejos de la zona de impacto):

$$h_4 v_4^3 = h_5 v_5^3 + h_6 v_6^3. \quad (5.11.14)$$

- Se dispone, además, de la ecuación (5.11.5),

$$gH_B = \frac{1}{2} v_4^2,$$

- y de la relación siguiente, proporcionada en el enunciado:

$$h_6 = \frac{9}{10} h_4.$$

Obsérvese que solo se dispone de momento de 6 ecuaciones para determinar las 7 incógnitas antes mencionadas. Ocurre algo parecido a lo que ocurría en el primer apartado: es necesario introducir alguna simplificación o conocer algún dato adicional. La simplificación en este caso aparece de nuevo al tener en cuenta que el flujo puede considerarse ideal y que se cumplen las restantes condiciones necesarias para que se satisfaga la ecuación de Bernoulli; es decir, para poder suponer que la energía mecánica específica se mantiene uniforme en todo el campo fluido. Si, además, puede suponerse que la presión es también uniforme en regiones alejadas de la zona de impacto y que los efectos de la fuerza gravitatoria son despreciables, puede concluirse que el módulo de la velocidad del agua se mantiene uniforme en dichas regiones del campo fluido. Es decir,

$$v_4 = v_5 = v_6.$$

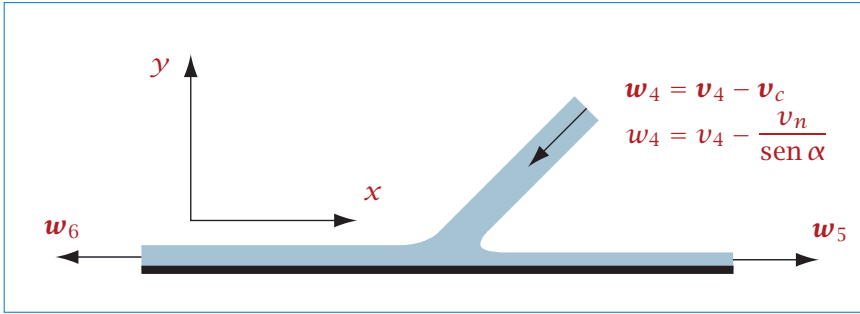


Figura 5.11.2

Movimiento relativo en un sistema de referencia que se mueve con el volumen de control.

Sustituyendo la ecuación (5.11.14) por estas dos igualdades, el sistema que debe resolverse para determinar H_B , β , v_4 , h_5 y h_6 es finalmente el siguiente:

$$\begin{aligned} h_4 &= h_5 + h_6, \\ h_4 \cos(\alpha + \beta) + h_5 - h_6 &= 0, \\ \rho v_4^2 h_4 \sin(\alpha + \beta) &= 150, \\ gH_B &= \frac{1}{2} v_4^2, \\ h_6 &= \frac{9}{10} h_4, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$H_B = 0,425 \text{ m},$$

$$\beta = 6,87^\circ.$$

d) En la Figura 5.11.2 se representan las velocidades relativas del agua en un sistema de referencia que se mueve con el volumen de control descrito en el enunciado, con una velocidad uniforme

$$\mathbf{v}_c = -\frac{v_n}{\tan \alpha} \mathbf{i} - v_n \mathbf{j}.$$

Obsérvese que en dicho sistema de referencia el flujo es estacionario, por lo que puede aplicarse la ecuación de Bernoulli y llegar a la conclusión²⁶ de que los

²⁶ Debe tenerse en cuenta que, tal como se indica en el enunciado, en toda la superficie de separación aire-agua la presión es la atmosférica, y que pueden despreciarse las fuerzas viscosas y las fuerzas másicas en el chorro. Debe suponerse además que las magnitudes fluidas son uniformes en cada una de las secciones 4, 5 y 6.

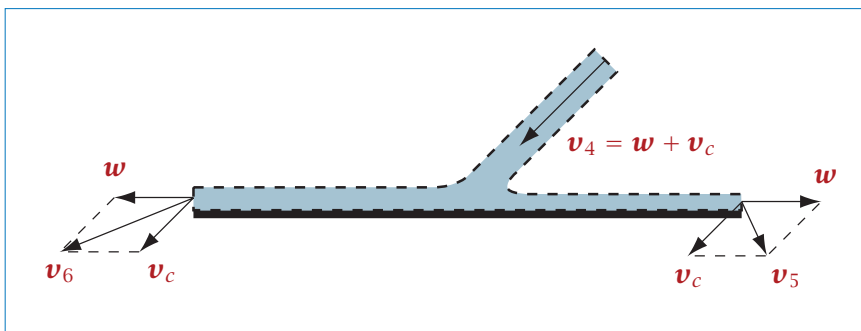


Figura 5.11.3

Velocidades absolutas y relativas en las secciones de entrada y salida del volumen de control.

módulos de las velocidades relativas a dicho sistema en las secciones 4, 5 y 6 deben ser iguales; es decir,²⁷

$$w_4 = w_5 = w_6 = v_4 - v_c = v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha},$$

siendo $v_4 = \sqrt{2gH_B}$, como ya se expresó en la ecuación (5.11.5).

Para calcular la fuerza que se ejerce sobre la plataforma se va a aplicar la ecuación (B.1.7) utilizando el volumen de control descrito en el enunciado. En la Figura 5.11.3 se representan la velocidad absoluta en la sección 4 y las velocidades absoluta y relativa en las secciones 5 y 6.

Tanto la forma geométrica del volumen de control como las magnitudes fluidas dentro de este se mantienen constantes en el tiempo, por lo que el primer término de la ecuación (B.1.7) es nulo. En toda la superficie del volumen de control, excepto en la superficie de la plataforma, la presión se supone uniforme e igual a la atmosférica y las tensiones viscosas se consideran despreciables, por lo que el primer término del segundo miembro de la ecuación (B.1.7) resulta igual (con sentido contrario), a la fuerza F que se ejerce sobre la plataforma. El último término es nulo, por haberse despreciado las fuerzas másicas.

Al haberse despreciado las tensiones viscosas, y debido a que la superficie de impacto del chorro sobre la plataforma es horizontal, la componente horizontal (según x) de F es nula, por lo que solo se considerará en lo que sigue la proyección de la ecuación (B.1.7) según el eje y . La contribución al término convectivo de la ecuación (B.1.7) (evaluado por unidad de anchura) correspondiente a la sección

²⁷ Esta es una simplificación que ya se ha hecho en numerosos problemas.

4, resulta²⁸

$$\int_{S_4} \rho v_y (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = \rho (-v_4 \sin \alpha) \left[- \left(v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) \right] h_4. \quad (5.11.15)$$

En la sección 5,²⁹

$$\int_{S_5} \rho v_y (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = \rho (-v_n) \left(v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) h_5, \quad (5.11.16)$$

y en la sección 6,

$$\int_{S_6} \rho v_y (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = \rho (-v_n) \left(v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) h_6. \quad (5.11.17)$$

De la ecuación de conservación de la masa, al ser $w_4 = w_5 = w_6$, se deduce nuevamente que $h_4 = h_5 + h_6$, por lo que la suma de las contribuciones de las ecuaciones (5.11.16) y (5.11.17) resulta

$$\int_{S_5+S_6} \rho v_y (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = -\rho v_n \left(v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) h_4. \quad (5.11.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.11.15) y (5.11.18) en la ecuación (B.1.7), se obtiene finalmente

$$\rho v_4 \sin \alpha \left(v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) h_4 - \rho v_n \left(v_4 - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) h_4 = -F_y,$$

de donde resulta, teniendo en cuenta la ecuación (5.11.5),

$$F_y = -\rho \left(\sqrt{2gH_B} - \frac{v_n}{\sin \alpha} \right)^2 h_4 \sin \alpha,$$

y, sustituyendo valores,

$$F_y = -1000 \left\{ [(2)(9,81)(3,262)]^{1/2} - \frac{2}{\sin 30^\circ} \right\}^2 (0,03) \sin 30^\circ,$$

se obtiene

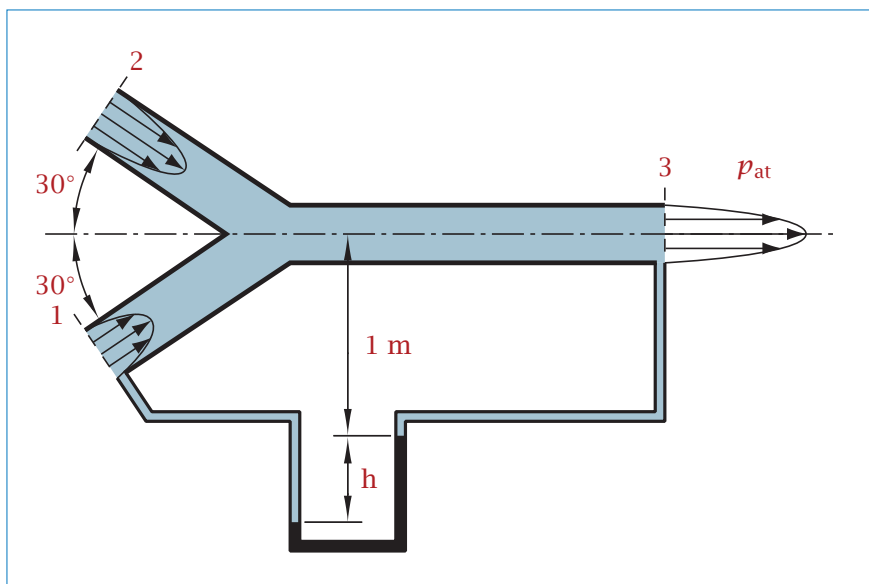
$$F_y = -240 \text{ N m}^{-1}.$$

²⁸ Obsérvese que \mathbf{v} y \mathbf{v}_c son paralelas a \mathbf{n} .

²⁹ Obsérvese que, en las ecuaciones (5.11.16) y (5.11.17), $\mathbf{v} - \mathbf{v}_c = \mathbf{w}$, vector que en cada una de las secciones 5 y 6 es paralelo a \mathbf{n} y tiene el mismo sentido que este.

Problema 5.12. Flujo a través de una unión de tuberías en Y

En la figura se representa una unión de tuberías en forma de Y, delimitada por las secciones 1, 2 y 3, por la que circula un fluido de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$. El fluido entra a través de las secciones 1 y 2, y se descarga a la atmósfera a través de la sección 3. Todos los tramos de tubería son de sección circular de diámetro $D = 5 \text{ cm}$.



Se supondrá que en las secciones 1, 2 y 3 el perfil de velocidad es parabólico:³⁰ $v = v_m(1 - 4r^2/D^2)$, siendo r la coordenada radial y v_m la velocidad en el centro. En las secciones 1 y 2 los caudales son $Q_1 = 0,002 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ y $Q_2 = 0,003 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, respectivamente. La presión manométrica en la sección 2, p_2 , es un 10% superior a la presión manométrica en la sección 1, p_1 . En el manómetro conectado entre las secciones 1 y 3 existe una diferencia de niveles del mercurio en las dos ramas $h = 30 \text{ cm}$ (la densidad del mercurio es $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg m}^{-3}$). Se despreciará D y la diferencia de cotas entre las secciones 1 y 3 frente a las longitudes acotadas en la figura. El peso del líquido contenido en las tuberías es de 150 N.

Determinar:

- a) Presiones manométricas en las secciones 1 y 2.
- b) Velocidad máxima, v_m , en las secciones 1, 2 y 3.
- c) Fuerza que ejerce el fluido sobre la unión de tuberías.

Solución

- a) $p_1 = 37\,670 \text{ N m}^{-2}$; $p_2 = 41\,437 \text{ N m}^{-2}$.

$$[p_1 + \rho gh = p_3 + \rho_{\text{Hg}}gh.]$$

- b) $v_{m1} = 2,037 \text{ m s}^{-1}$; $v_{m2} = 3,056 \text{ m s}^{-1}$; $v_{m3} = 5,093 \text{ m s}^{-1}$.

[Los resultados se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$Q_1 = v_{m1} \int_0^{D/2} \left(1 - 4 \frac{r^2}{D^2}\right) 2\pi r \, dr,$$

$$Q_2 = v_{m2} \int_0^{D/2} \left(1 - 4 \frac{r^2}{D^2}\right) 2\pi r \, dr,$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = v_{m3} \int_0^{D/2} \left(1 - 4 \frac{r^2}{D^2}\right) 2\pi r \, dr.]$$

- c) $F_x = 127,1 \text{ N}$; $F_z = -155,1 \text{ N}$ (eje x en dirección horizontal hacia la derecha; eje z en dirección vertical).

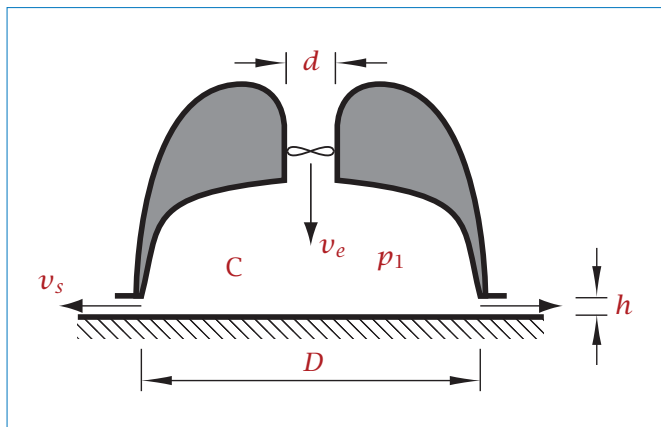
[Los resultados se obtienen aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen fluido que ocupa el volumen de control limitado por las paredes interiores y las secciones de entrada y salida de las tuberías:

$$\begin{aligned} & -\rho[(v_{m1}^2 + v_{m2}^2) \cos(30^\circ) - v_{m3}^2] \int_0^{D/2} \left(1 - 4 \frac{r^2}{D^2}\right)^2 2\pi r \, dr \\ & = (p_1 + p_2) \cos(30^\circ) \frac{\pi D^2}{4} - F_x, \\ & -\rho(v_{m1}^2 - v_{m2}^2) \int_0^{D/2} \left(1 - 4 \frac{r^2}{D^2}\right)^2 \sin(30^\circ) 2\pi r \, dr \\ & = (p_1 - p_2) \sin(30^\circ) \frac{\pi D^2}{4} - 150 - F_z.] \end{aligned}$$

³⁰ En el Capítulo 7 se verá que para que el perfil de velocidad en la sección 3 sea parabólico el tramo de tubería horizontal debe ser suficientemente largo.

Problema 5.13. Vehículo de colchón de aire

El vehículo de colchón de aire de la figura toma aire del exterior mediante una soplante situada en la parte superior. El aire es introducido en una cámara de sustentación, C, desde donde sale al exterior a través de una ranura anular de altura $h = 4 \text{ mm}$. Los diámetros que aparecen acotados en la figura son $D = 6 \text{ m}$ y $d = 0,8 \text{ m}$. El vehículo tiene un peso de $50\,000 \text{ N}$, y se mantiene suspendido en el aire debido a la sobrepresión creada en la cámara de sustentación. La velocidad del aire a través de la ranura es $v_s = 48 \text{ m s}^{-1}$. Se supondrá que en la cámara de sustentación el aire se encuentra en reposo y a una presión p_1 uniforme. Se considerará el aire como un fluido incompresible de densidad $\rho = 1,22 \text{ kg m}^{-3}$ y se despreciarán los efectos de las fuerzas másicas sobre el aire.



Calcular:

- Gasto másico de aire a través de la soplante.
- Presión manométrica p_1 en la cámara de sustentación.
- Potencia consumida por la soplante si su rendimiento es $\eta = 0,65$.
- Potencia disipada y variación de temperatura en el aire al pasar a través de la ranura. (Calor específico del aire a presión constante: $c_p = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.)

Solución

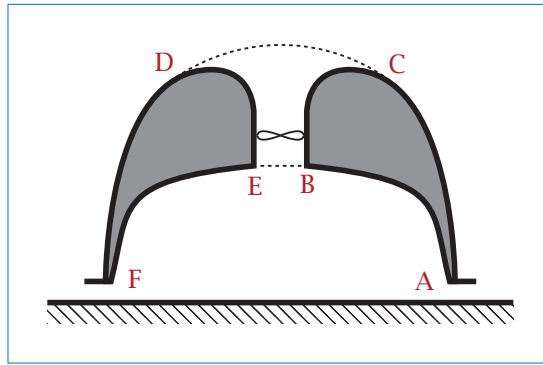
a) Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa al volumen de control constituido por la cámara de sustentación, se deduce que el gasto másico a través de la soplante es

$$G = \rho v_s \pi D h = (1,22)(48)\pi(6)(0,004) = 4,42 \text{ kg s}^{-1}.$$

b) La fuerza resultante que ejerce el aire sobre las superficies AB y EF de la figura siguiente es obviamente vertical, con sentido hacia arriba e igual a

$$F_{z1} = p_1 \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \quad (5.13.1)$$

(p_1 es presión manométrica, y se prescinde por tanto de la contribución de la presión atmosférica, como se ha hecho en otros problemas en los que también esto era posible).



Sobre las superficies AC y DF de la figura la presión manométrica es nula, por lo que la contribución a la fuerza resultante sobre el cuerpo del vehículo (si esta se calcula operando siempre con presiones manométricas, como se está haciendo) será nula.

Para determinar la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo del vehículo a través de las superficies CB y DE de la figura y a través del soporte que une la soplante al vehículo, se aplicará la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control BCDE. En la superficie CD, representada con línea discontinua, se supondrá que la presión manométrica es nula y que la velocidad del aire es suficientemente pequeña, de forma que puede despreciarse la correspondiente contribución al término convectivo. Compruébese que se obtiene

$$-\rho v_e^2 \frac{\pi d^2}{4} = p_1 \frac{\pi d^2}{4} - F_{z2}, \quad (5.13.2)$$

siendo F_{z2} la suma de la fuerza que ejerce el aire sobre el cuerpo del vehículo a través de la superficie de control y la fuerza transmitida por la soplante al vehículo.³¹

La fuerza total que ejerce el aire sobre el vehículo, teniendo en cuenta las ecuaciones (5.13.1) y (5.13.2), es

$$F_z = F_{z1} + F_{z2} = p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho v_e^2 \frac{\pi d^2}{4}. \quad (5.13.3)$$

Para mantener una situación de equilibrio, F_z debe ser igual al peso del vehículo. Igualando el último miembro de la ecuación (5.13.3) al peso, teniendo en cuenta que

$$v_e = \frac{G}{\rho \pi d^2 / 4} = 7,21 \text{ m s}^{-1},$$

despejando y sustituyendo valores, resulta

$$p_1 = \frac{50\,000}{\pi(6)^2/4} - (1,22)(7,21)^2 \frac{(0,8)^2}{(6)^2},$$

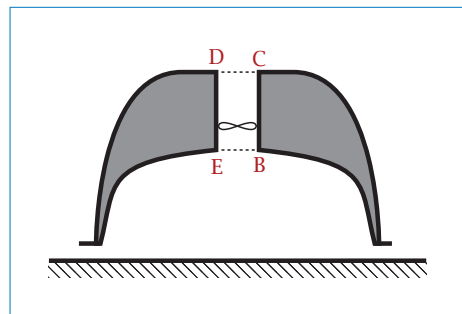
de donde se obtiene

$$p_1 = 1767 \text{ N m}^{-2}.$$

³¹ Es interesante analizar qué ocurriría si la superficie del vehículo en la zona de aspiración tuviese la forma indicada en el esquema adjunto. Suponiendo que puede aplicarse la ecuación de Bernoulli (B.4.2) (véase la nota a pie de página 8 del Problema 5.8, página 133) entre un punto arbitrario en el exterior del vehículo, suficientemente alejado de este, y un punto situado en la sección CD, se deduce que, en esta, en la que la velocidad es v_e , la presión manométrica es $-\frac{1}{2}\rho v_e^2$. Compruébese entonces que los términos convectivo y de fuerzas de superficie en dicha sección dan lugar en este caso a una contribución a la fuerza sobre las paredes del vehículo (transmitida por la soplante) igual a $-\frac{1}{2}\rho v_e^2 \pi d^2 / 4$; es decir, la fuerza sobre la soplante (que sigue teniendo sentido hacia arriba),

$$F_{z2} = \frac{1}{2} \rho v_e^2 \pi d^2 / 4 + p_1 \pi d^2 / 4,$$

es ahora menor. Obsérvese que la fuerza adicional que se produce en el caso de que los bordes de entrada estén suavizados se debe a que, sobre la parte curva de las superficies BC y DE, se ejerce una fuerza vertical hacia arriba debido a la existencia de una presión manométrica negativa originada por la aceleración del aire. En todo caso, debe tenerse en cuenta que $F_{z2} \ll F_{z1}$, por lo que las anteriores consideraciones tienen en este caso un interés principalmente instructivo. Sin embargo, en otros problemas sí pueden ser relevantes.



Obsérvese que el último término de la ecuación (5.13.3), que representa la contribución debida al chorro que sale a través de la superficie BE, es muy pequeño frente a la contribución debida a la presión existente en la cámara de sustentación.

c) La potencia consumida por la soplante se determina mediante la ecuación (B.6.11), teniendo en cuenta la ecuación (B.6.5). Si los puntos 0 y 1 se toman sobre las superficies CD y BE, respectivamente, puede ponerse

$$\dot{W}_t = \frac{G}{\eta_t} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_0^1 = \frac{G}{\eta_t} \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 \right). \quad (5.13.4)$$

Se ha tenido en cuenta que $p_0 = 0$ y $v_0 = 0$, y se han despreciado las fuerzas másicas. Sustituyendo valores, se obtiene

$$\dot{W}_t = \frac{4,42}{0,65} \left[\frac{1767}{1,22} + \frac{(7,21)^2}{2} \right] = 10\,026 \text{ W.}$$

d) De la ecuación (B.1.16), teniendo en cuenta la ecuación (B.1.17) y que $\Delta H = 0$, se deduce que la potencia disipada en la ranura es (puntos 1 y 2 dentro y fuera de la cámara de sustentación, respectivamente)

$$\overline{\Phi}_v = G \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{1}{2} v_s^2 \right) = 4,42 \left[\frac{1767}{1,22} - \frac{(48)^2}{2} \right] = 1310 \text{ W.}$$

La variación de temperatura que experimenta el aire al pasar a través de la ranura puede determinarse mediante la ecuación (B.6.1), teniendo en cuenta que no se ejerce trabajo sobre el fluido ni se intercambia calor:

$$c_p (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} v_s^2 = 0,$$

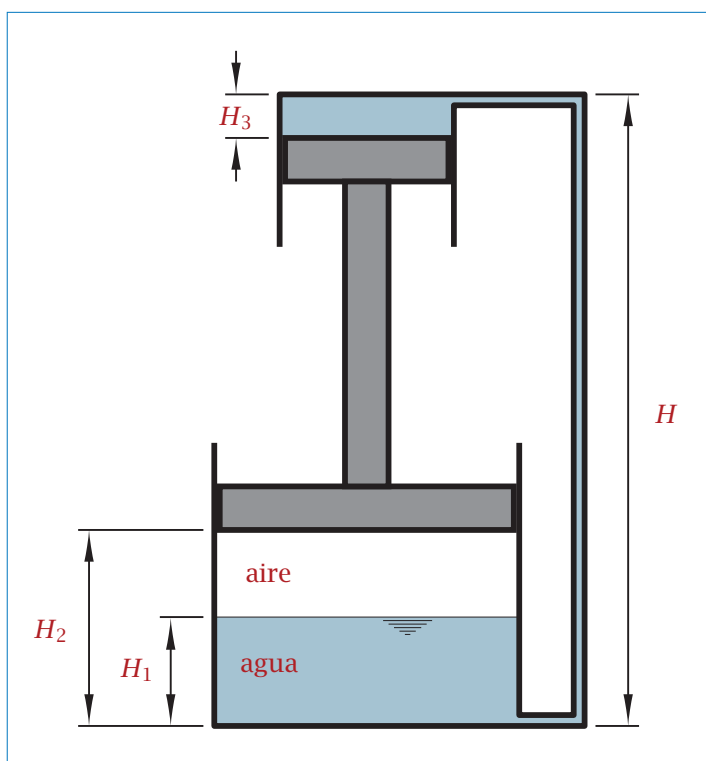
de donde resulta³²

$$T_2 - T_1 = -\frac{(48)^2}{(2)(1004)} = -1,15^\circ \text{C.}$$

³² Compruébese que este resultado también puede obtenerse a partir de la ecuación de conservación de la entropía (la ecuación (B.2.21) es la correspondiente forma diferencial), que en este caso se reduce a $T\Delta s = c_p \Delta T - \Delta p / \rho = \overline{\Phi}_v / G$.

Problema 5.14. Acoplamiento hidro-neumático entre dos cilindros

El cilindro inferior de la figura, de sección horizontal de área $A_2 = 10^{-2} \text{ m}^2$ y cerrado por la parte superior mediante un émbolo, contiene, en el instante inicial (condiciones denotadas con el subíndice i), agua hasta una altura $H_{1i} = 10 \text{ cm}$, y aire a una presión manométrica $p_{2i} = 10^4 \text{ Pa}$ (presión atmosférica, $p_{\text{at}} = 10^5 \text{ Pa}$) y una temperatura de 288 K . En dicho instante inicial, la altura de la base del émbolo sobre el fondo del cilindro es $H_{2i} = 2H_{1i}$. El cilindro superior, de sección horizontal de área $A_3 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, tiene acoplado un émbolo, solidario con el del cilindro inferior, que en el instante inicial se halla introducido hasta el fondo del cilindro ($H_{3i} = 0$).



Se supondrá que existe una perfecta estanqueidad entre cilindros y émbolos. Los extremos de ambos cilindros, entre los que existe una diferencia

de altura $H = 1$ m, están conectados mediante un tubo que, en el instante inicial, está completamente lleno de agua.

Supóngase en primer lugar que, a partir del instante inicial, los émbolos se mueven con una velocidad hacia abajo de 2 m s^{-1} .

- Calcular la velocidad a la que desciende la superficie libre del agua en el cilindro inferior. (Téngase en cuenta que el cilindro superior no contiene aire.)
- Calcular la derivada con respecto al tiempo, en el instante inicial, de la densidad del aire en el cilindro inferior.
- Repetir el apartado anterior suponiendo que existe en el cilindro inferior una fuga de aire constante de $0,01 \text{ kg s}^{-1}$.

Supóngase a continuación que, a partir de la misma situación inicial antes descrita, se deja deslizar libremente el conjunto de los émbolos sobre los cilindros hasta que se alcance una situación de equilibrio estático. El conjunto formado por los émbolos y su acoplamiento tiene un peso de 392 N . Se despreciará el rozamiento entre émbolos y cilindros. Se supondrá que el aire en el cilindro inferior experimenta un proceso isoterma y que no existen fugas.

- En la mencionada situación de equilibrio, determinar la presión del aire en el cilindro inferior, p_2 , las posiciones de los émbolos, H_2 y H_3 , y la presión que actúa sobre el émbolo superior, p_3 .

Solución

- 1 m s^{-1} .

[Conservación de volumen de agua, teniendo en cuenta que $A_2 = 2A_3$.]

- $13,3 \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}$.

[Este resultado se obtiene aplicando la ecuación (B.1.2) de conservación de la masa referida al volumen de control variable que coincide con el volumen ocupado por el aire en el cilindro inferior. Al ser nulo el término [2], dicha ecuación se reduce a

$$\frac{d(\rho V_c)}{dt} = 0,$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\frac{\rho}{V_c} \frac{dV_c}{dt} = -\frac{\frac{10^4 + 10^5}{(287)(288)}}{(10^{-2})(10^{-1})} 10^{-2} \frac{d(H_2 - H_1)}{dt} \\ &= -13,3 (-2 + 1) = 13,3 \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

c) $3,3 \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}$.

[La diferencia con respecto al apartado anterior consiste en que ahora el término [2] de la ecuación (B.1.2) no es nulo, sino igual a $0,01 \text{ kg s}^{-1}$.]

d) $p_2 = 69\,926 \text{ Pa}$; $H_3 = 0,07 \text{ m}$; $H_2 = H_{2i} - H_3 = 0,13 \text{ m}$; $p_3 = 61\,451 \text{ Pa}$ (presiones manométricas).

[Estos resultados pueden obtenerse del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}(p_{2i} + 10^5)(H_{2i} - H_{1i}) &= (p_2 + 10^5) \left[H_{2i} - H_3 - \left(H_{1i} - H_3 \frac{A_3}{A_2} \right) \right] \\ p_2 A_2 &= \text{Peso} + p_3 A_3 \\ p_2 &= p_3 + \rho g \left[H - H_3 - \left(H_{1i} - H_3 \frac{A_3}{A_2} \right) \right].\end{aligned}$$

Problema 5.15. Flujo de agua en una tubería acodada. Fuerza sobre la tubería y potencia disipada en el agua

En la figura se representa un tramo de tubería acodado, acoplado mediante juntas que evitan la transmisión de fuerzas hacia el resto de la tubería a través de las secciones 1 y 2, y solidario con un soporte vertical fijo al suelo. Las dimensiones indicadas en la figura son $L = 30 \text{ cm}$ y $H = 60 \text{ cm}$. El diámetro de la sección transversal se reduce desde $D_1 = 15 \text{ cm}$ en la sección 1 hasta $D_2 = 10 \text{ cm}$ en la sección 2. A través de la tubería circula un caudal de agua $Q = 56 \text{ l s}^{-1}$. Las presiones manométricas en las secciones 1 y 2 son, respectivamente, $p_1 = 140 \text{ kPa}$ y $p_2 = 100 \text{ kPa}$. Se supondrá en los dos primeros apartados que la velocidad del agua es uniforme en las secciones 1 y 2. Se despreciará el peso del agua contenida en la tubería. Determinar:

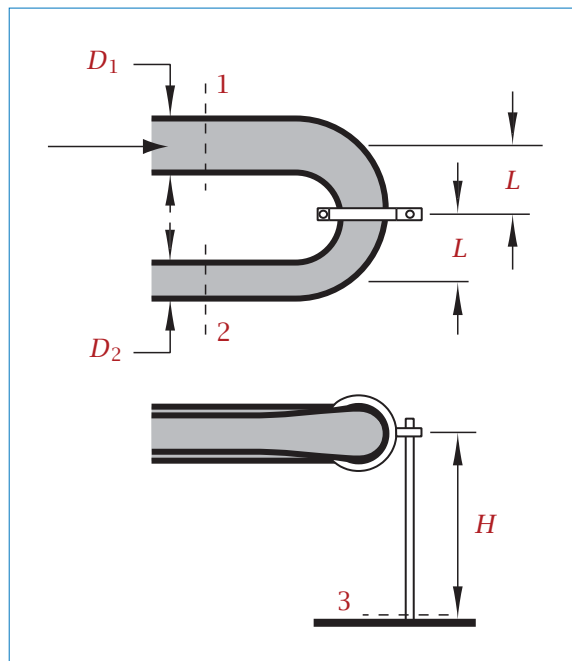
a) Fuerza y momento resultantes que se transmiten a través de la sección 3 del soporte.

- b) Potencia disipada en el agua entre las secciones 1 y 2.
- c) Repetir el apartado b) suponiendo que el agua entra con velocidad uniforme en la sección 1 y que en la sección 2 el perfil de velocidad es el siguiente:

$$u = U_c, \quad 0 \leq r \leq 0,4 D_2,$$

$$u = U_c \left(\frac{D_2 - 2r}{0,2 D_2} \right), \quad 0,4 D_2 \leq r \leq 0,5 D_2,$$

siendo r la coordenada radial y U_c una constante.



Solución

a) $F_x = 3836 \text{ N}$; $M_y = 2302 \text{ N m}$; $M_z = -440 \text{ N m}$. (El eje z es vertical en la figura inferior del enunciado, con sentido positivo hacia arriba; el eje x es horizontal y contenido en el plano del papel, con sentido positivo hacia la derecha; el sentido positivo del eje y es hacia el interior del papel en la figura inferior.)

b) 1098 W.

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

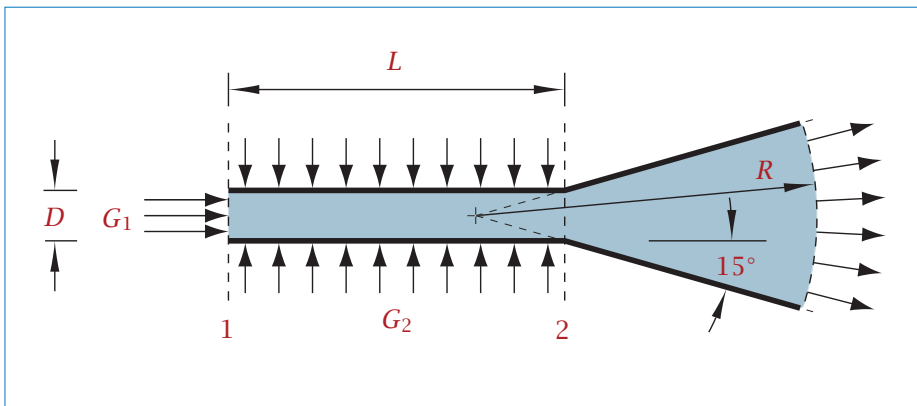
[Aplíquese la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica con $\Delta H = 0$.]

c) 605,7 W.

[En este caso es necesario calcular la integral del término [2] de la ecuación (B.1.15) de conservación de la energía mecánica para evaluar la energía cinética del agua en la sección 2. El resultado deberá introducirse en la ecuación (B.1.16) en lugar de $\rho Q v_2^2 / 2$, utilizado en el apartado anterior (v_2 era la velocidad, uniforme, en la sección 2). Previamente es necesario calcular $U_c = 8,767 \text{ m s}^{-1}$ mediante la ecuación de conservación de la masa.]

Problema 5.16. Flujo de aire a través de una tubería porosa seguida de un difusor cónico

A través de la sección 1 de la instalación de la figura circula un gasto másico de aire $G_1 = 0,03 \text{ kg s}^{-1}$. El aire se considerará incompresible, con densidad $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$. La tubería, de diámetro $D = 4 \text{ cm}$ y longitud $L = 1 \text{ m}$, es de pared porosa, a través de la cual se inyecta uniformemente a lo largo de toda la longitud L un gasto másico total de aire $G_2 = 0,04 \text{ kg s}^{-1}$. Aunque la inyección de aire se hace radialmente, supóngase que en cada sección transversal de la tubería la velocidad solo tiene componente longitudinal y el flujo es uniforme.



En la sección 2, en la que existe una presión manométrica $p_2 = -900$ Pa, se ha acoplado un difusor cónico, con un semiángulo de apertura $\alpha = 15^\circ$, que descarga a la atmósfera. A la salida del difusor se supondrá que la velocidad del aire en el casquete esférico subtendido por el cono (línea a trazos, radio de curvatura $R = 16$ cm) es uniforme y perpendicular al casquete en cada punto.

Determinar:

- Distribución de presiones a lo largo de la tubería. Se supondrá despreciable el rozamiento del aire con la pared. (Aplíquense las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento entre la sección 1 y una sección genérica.)
- Fuerza que ejerce el aire sobre el difusor.

Solución

a) Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa al volumen de control limitado por la sección 1 ($x = 0$), una sección genérica en la tubería de coordenada x y las paredes de la tubería, se obtiene

$$-\rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho v_x \frac{\pi D^2}{4} - \rho v_r \pi D x = 0$$

(siendo v_r la velocidad a través de la pared porosa); teniendo en cuenta que

$$G_1 = \rho v_1 \pi D^2 / 4$$

y

$$G_2 = \rho v_r \pi D L,$$

resulta

$$v_x = \frac{G_1}{\rho \pi D^2 / 4} + \frac{G_2}{\rho \pi D^2 / 4} \frac{x}{L}. \quad (5.16.1)$$

Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al mismo volumen de control descrito, teniendo en cuenta que no se ejerce fuerza de fricción sobre la tubería, demuéstrese que se obtiene

$$-\rho v_1^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho v_x^2 \frac{\pi D^2}{4} = p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_x \frac{\pi D^2}{4}. \quad (5.16.2)$$

Introduciendo la ecuación (5.16.1) en (5.16.2), se obtiene

$$p_x = p_1 - 1266,2 x - 844,3 x^2. \quad (5.16.3)$$

Imponiendo en la ecuación (5.16.3) la condición

$$p_{x=L} = p_2 = -900 \text{ Pa},$$

se determina $p_1 = 1210,5 \text{ Pa}$, con lo que finalmente resulta

$$p_x = 1210,5 - 1266,2 x - 844,3 x^2.$$

b) El área del casquete esférico en la salida del difusor es

$$A_s = \int_0^\alpha 2\pi R \sin \alpha' R d\alpha' = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha).$$

El gasto másico a través del difusor es, por tanto,

$$\dot{m} = \rho v_s A_s = \rho v_s 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = G_1 + G_2$$

(v_s es la velocidad en el casquete de salida), de donde resulta

$$v_s = \frac{G_1 + G_2}{2\pi \rho R^2 (1 - \cos \alpha)}. \quad (5.16.4)$$

Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control limitado por la sección 2, el casquete esférico de salida y las paredes del difusor, demuéstrese que se obtiene

$$-\rho v_2^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho v_s^2 \int_0^\alpha \cos \alpha' 2\pi R \sin \alpha' R d\alpha' = p_2 \frac{\pi D^2}{4} - F_x$$

(siendo F_x la fuerza sobre el difusor), de donde resulta

$$F_x = \rho v_2^2 \frac{\pi D^2}{4} - \rho v_s^2 \pi R^2 \sin^2 \alpha + p_2 \frac{\pi D^2}{4}.$$

Introduciendo en esta ecuación la expresión de v_s de la ecuación (5.16.4) y sustituyendo valores, se obtiene

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{(G_1 + G_2)^2}{\rho \pi D^2 / 4} - \frac{(G_1 + G_2)^2}{2\pi \rho R^2 (1 - \cos \alpha)} \frac{1 + \cos \alpha}{2} + p_2 \frac{\pi D^2}{4} \\ &= \frac{(0,07)^2}{1,2 \pi (0,04)^2 / 4} - \frac{(0,07)^2}{2\pi (1,2)(0,16)^2 (1 - \cos 15^\circ)} \frac{1 + \cos 15^\circ}{2} - 900 \frac{\pi (0,04)^2}{4}, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$F_x = 1,39 \text{ N}.$$

Problema 5.17. Flujo sobre una placa plana

Un líquido de densidad ρ fluye sobre una cara de una placa plana. En la sección S_1 , normal a la placa y situada en el borde de aguas arriba de esta, la velocidad del líquido es uniforme y paralela a la placa ($u = U$). En la sección S_2 , también normal a la placa, situada en su borde de aguas abajo, se supondrá que la componente de la velocidad paralela a la placa varía linealmente con la distancia a la placa, y , para $y \leq h$, y es constante ($u = U$) para $y \geq h$. Se supondrá que el flujo es bidimensional y estacionario. Se despreciarán las fuerzas másicas. Téngase se cuenta que la presión es uniforme en todo el campo fluido. Determinar:

- Flujo másico por unidad de anchura a través de una superficie, S_3 , paralela a la placa, situada a una distancia de esta igual o superior a h y limitada longitudinalmente por las secciones S_1 y S_2 .
- Fuerza horizontal que se ejerce sobre la placa por unidad de anchura.

Indicar en qué aspecto la descripción del flujo que se ha hecho no es realista.³³

Solución

a) Se utilizará en el análisis un volumen de control delimitado por la superficie de control formada por la superficie de la placa y las secciones S_1 , S_2 y S_3 . Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa a este volumen de control,³⁴ se obtiene

$$-\rho U h + \dot{m}_3 + \rho \int_0^h U \frac{y}{h} dy = 0,$$

siendo \dot{m}_3 el flujo másico por unidad de anchura saliente a través de S_3 . De la ecuación anterior resulta

$$\dot{m}_3 = \rho \frac{U h}{2}. \quad (5.17.1)$$

b) Obsérvese que, al existir un flujo másico a través de S_3 , la velocidad del fluido en dicho contorno debe tener, además de una componente U (sin perturbar por la

³³ Este problema se ha tomado del texto de Round y Garg (1986).

³⁴ Obsérvese que el tamaño del volumen de control en dirección normal a la placa, siempre que sea igual o superior a h , no influye en los resultados que se obtienen en este problema.

presencia de la placa) según el eje x (paralelo a la placa y con el mismo sentido que el flujo), una componente v_3 , con una cierta distribución sobre S_3 . Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento según x al mismo volumen de control indicado en el enunciado, teniendo en cuenta que la presión es uniforme, se obtiene

$$-\rho U^2 h + \rho \int_{S_3} U v_3 dx + \rho \int_0^h \left(U \frac{y}{h} \right)^2 dy = -F_x, \quad (5.17.2)$$

siendo F_x la componente según el eje x de la fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre la placa. Teniendo en cuenta en el segundo término de la ecuación (5.17.2) que

$$\rho \int_{S_3} v_3 dx = \dot{m}_3$$

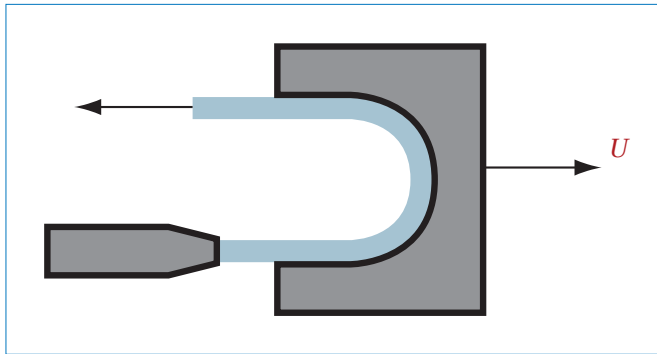
(obsérvese que no ha sido necesario conocer la distribución de v_3), y sustituyendo el resultado de la ecuación (5.17.1), de la ecuación (5.17.2) se obtiene finalmente

$$F_x = \frac{\rho U^2 h}{6}.$$

Obviamente, no es realista la distribución lineal de velocidad supuesta en la sección S_2 , aunque los resultados obtenidos podrían ser en cierta medida orientativos. Compárense dichos resultados con los que se obtienen para la capa límite laminar sobre una placa plana.

Problema 5.18. Desviación de un chorro de líquido mediante un deflector

A través de la tobera de la figura se descarga a la atmósfera un chorro de un líquido de densidad ρ , con un caudal Q y una sección transversal de área A . El chorro impacta sobre un deflector y es desviado según se indica en la figura. El deflector se mueve con una velocidad constante U , alejándose del chorro. Se supondrá en primer lugar que el módulo de la velocidad del líquido relativa al deflector en una sección transversal del chorro aguas abajo del deflector coincide con el que existe en una sección transversal del chorro incidente, y que en ambas secciones dicho módulo es uniforme. Se despreciarán las fuerzas másicas.



Determinar:

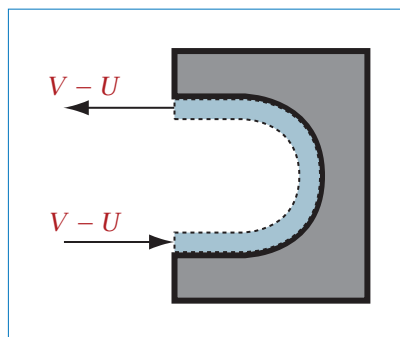
- Fuerza que ejerce el líquido sobre el deflector.
- Velocidad del deflector para la que resulta máxima la potencia transmitida a este para un caudal del chorro dado Q .

A continuación se supondrá que el módulo de la velocidad del líquido relativa al deflector se reduce en un 0,5 % entre las secciones de entrada y salida de este. Determinar:

- Potencia disipada en el líquido e incremento de la temperatura de este al circular por el deflector. (Calor específico del líquido: c .)

Solución

a) Se tomará un sistema de referencia que se mueve con el deflector y un volumen de control fijo limitado por la superficie indicada con línea discontinua en el esquema adjunto, formada por las secciones 1 y 2, la superficie de separación aire-líquido y la superficie del deflector.



La velocidad absoluta del chorro que sale de la tobera es

$$V = \frac{Q}{A},$$

y el módulo de la velocidad del líquido relativa al deflector en la sección 1 de la superficie de control es obviamente $V - U$. De acuerdo con lo indicado en el enunciado sobre la conservación del módulo de la velocidad relativa al deflector,³⁵ el módulo de la velocidad en la sección 2 será también $V - U$ (el sentido es obviamente el opuesto al de la velocidad en la sección 1). De la ecuación de conservación de la masa se deduce inmediatamente que el área de la sección transversal del chorro en la sección 2 es también igual a A . Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen fluido que en un instante dado coincide con el volumen de control descrito, teniendo en cuenta que la presión en la superficie libre y en las secciones 1 y 2 es uniforme e igual a la atmosférica³⁶ y despreciando las fuerzas másicas, compruébese que se obtiene la siguiente expresión del módulo de la fuerza sobre el deflector (que solo tiene componente horizontal, con sentido hacia la derecha en la figura):

$$F = 2\rho A \left(\frac{Q}{A} - U \right)^2.$$

b) La potencia transmitida al deflector es³⁷

$$\dot{W} = FU = 2\rho A \left(\frac{Q}{A} - U \right)^2 U.$$

³⁵ Ya se ha discutido en otros problemas (por ejemplo, en el Problema 5.8) bajo qué condiciones esta hipótesis sería aceptable.

³⁶ La uniformidad de la presión en las secciones 1 y 2 se deduce de la ecuación de Bernoulli (B.4.2), teniendo en cuenta la uniformidad de la velocidad en dichas secciones. Obviamente nada indica que el módulo de la velocidad relativa y, por tanto, la presión deban ser uniformes en todo el campo fluido. De hecho, la conservación de la cantidad de movimiento requiere que sobre el deflector se ejerza una presión que dé lugar a una fuerza que compense la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del chorro entre las secciones de entrada y salida. Si se analiza el movimiento de una partícula fluida, se observa que el cambio de dirección producido por el deflector da lugar a una fuerza centrífuga sobre la partícula que causa la aparición de un gradiente de presión, lo que hace que a través de cualquier sección transversal del chorro en la zona curva del deflector, desde la superficie libre hasta el deflector, la presión aumente y, por tanto, disminuya el módulo de la velocidad (que en la superficie libre es igual a $V - U$). De lo anterior se deduce que la velocidad media en cualquier sección transversal de la zona curva del deflector es inferior a $V - U$, y que el área de paso correspondiente es por tanto superior a A . En los anteriores comentarios se ha supuesto que los efectos de viscosidad son despreciables.

³⁷ Para que el deflector se mueva a velocidad constante U cuando el líquido ejerce sobre él una fuerza resultante F (con sentido positivo hacia la derecha en la figura), es obviamente necesario que exista una fuerza de igual módulo y sentido opuesto sobre el deflector (si no existiese esta

Como ejercicio, puede comprobarse que se obtiene el mismo resultado aplicando la ecuación (B.1.15) de conservación de la energía mecánica a un volumen de control similar al utilizado en el apartado anterior, en el que las secciones 1 y 2 son fijas y el resto de la superficie de control se mueve hacia la derecha con velocidad U .

Compruébese que el valor de U que maximiza \dot{W} para un caudal dado es

$$U = \frac{Q}{3A}.$$

c) La potencia disipada se determina aplicando la ecuación (B.1.16) al mismo volumen de control descrito anteriormente, teniendo en cuenta que en el sistema de referencia ligado al deflector no se realiza trabajo sobre el fluido, que $p_1 = p_2$, y que los efectos de las fuerzas másicas son despreciables:

$$\bar{\Phi}_v = \frac{1}{2}\rho Q (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}\rho Q (V - U)^2 (1 - 0,995^2).$$

El incremento de temperatura se obtiene a partir de la ecuación (B.1.18):

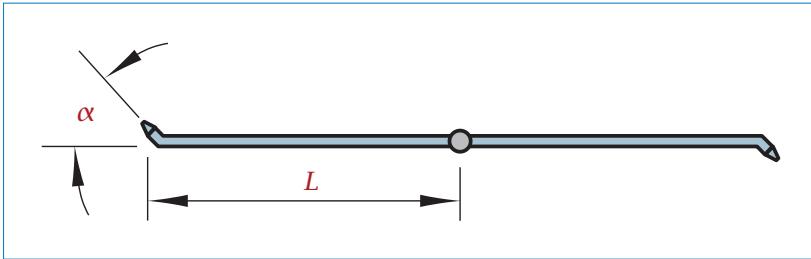
$$\Delta T = \frac{\bar{\Phi}_v}{c\rho Q} = \frac{(V - U)^2 (1 - 0,995^2)}{2c}.$$

Problema 5.19. Flujo en un aspersor de riego plano (I)

El agua entra en el aspersor de la figura (los dos brazos están contenidos en el plano horizontal del papel, que es el de rotación) a través de una tubería vertical de diámetro $D_1 = 0,05$ m, con una velocidad media $v_1 = 0,2$ m s⁻¹. El caudal de alimentación del aspersor se distribuye en partes iguales por los dos brazos. Éstos son de longitud $L = 0,4$ m y tienen acopladas en sus extremos sendas boquillas de diámetro $D_2 = 0,005$ m, cuyos ejes están con-

fuerza de frenado, el deflector tendería a acelerarse). Esta fuerza puede ejercerse sobre el deflector, por ejemplo, mediante un eje acoplado a un sistema de frenado o a un generador, que extraiga la potencia comunicada por el fluido al deflector (téngase en cuenta que, si no existen otras fuerzas que frenen el deflector, este ejercerá sobre el eje la misma fuerza F que el líquido ejerce sobre él, lo que es consistente con la conservación de la energía mecánica del deflector, que se mantiene constante).

tenidos en el plano de rotación y forman un ángulo $\alpha = 45^\circ$ con la dirección radial.



- Calcular el momento que se debe ejercer sobre el aspersor para mantenerlo sin girar.
- Cuando se deja girar libremente, el aspersor alcanza una velocidad de giro estacionaria $\Omega = 4 \text{ rad s}^{-1}$. Calcular en estas condiciones el momento de las fuerzas de fricción que tienden a frenar el aspersor.
- Calcular la velocidad de giro que alcanzaría el aspersor si no existiesen fuerzas de fricción que tendiesen a frenarlo.

Solución

a) La ecuación (B.1.11) de conservación del momento cinético, aplicada al volumen de control móvil limitado por las paredes interiores de los brazos, las secciones de salida del agua y una sección (horizontal) de la tubería de alimentación, se reduce a

$$\int_{S_s} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{M}, \quad (5.19.1)$$

siendo S_s la suma de las dos secciones de salida y \mathbf{M} el momento de fuerzas que ejerce el aspersor sobre el agua (que es el necesario para mantener inmóvil el aspersor, e igual y de sentido opuesto al que el agua ejerce sobre el aspersor). En la ecuación (B.1.11), obsérvese que los términos [1] y [4] son nulos, respectivamente, por ser el flujo estacionario y porque la fuerza gravitatoria no produce momento en dirección vertical y las componentes horizontales de los momentos sobre los brazos se compensan entre sí. La integral del término [2] sobre la superficie interior de los conductos es nula por ser $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$; la contribución de esta integral sobre la sección de entrada es obviamente también nula. El término [3] se reduce

a M ,³⁸ correspondiente a la integral sobre las paredes interiores de los conductos; la contribución correspondiente a la integral sobre las secciones de salida es nula por serlo la presión manométrica y despreciarse las tensiones viscosas, y la correspondiente a la presión en la sección de entrada es también nula dado que la distribución uniforme de presión sobre dicha sección obviamente tampoco produce momento.

Desarrollando el primer miembro de la ecuación (5.19.1), resulta

$$-2\rho L v_2 \sin \alpha v_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \mathbf{k} = M, \quad (5.19.2)$$

siendo v_2 el módulo de la velocidad del agua en la sección de salida del aspersor, que se determina a partir de la ecuación de conservación de la masa: $v_2 = \frac{1}{2} v_1 D_1^2 / D_2^2 = 10 \text{ m s}^{-1}$. Sustituyendo valores,

$$M = -(2)(1000)(0,4)(10)(\sin 45^\circ)(10) \frac{\pi (0,005^2)}{4} \mathbf{k},$$

se obtiene

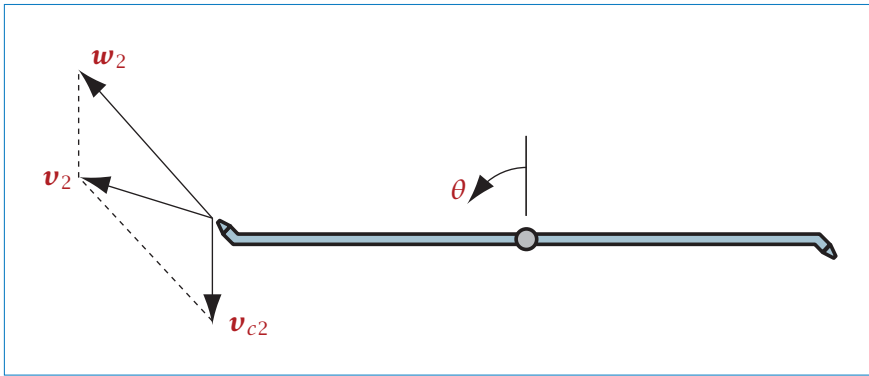
$$M = -1,111 \mathbf{k}$$

(en N m), siendo \mathbf{k} el vector unitario normal en dirección vertical, con sentido positivo saliente del papel en el esquema de la figura.

b) En el esquema adjunto se ha dibujado el triángulo de velocidades a la salida del aspersor. \mathbf{w}_2 es la velocidad del agua relativa al aspersor en la sección de salida, que tiene la dirección del eje de la boquilla, y cuyo módulo se obtiene, como en el apartado anterior, a partir de la ecuación de conservación de la masa: $w_2 = \frac{1}{2} v_1 D_1^2 / D_2^2 = 10 \text{ m s}^{-1}$. Obsérvese que, en la ecuación (5.19.1), $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{c2}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n} = w_2$ y $\mathbf{x} \times \mathbf{v}_2 = L \mathbf{e}_r \times (\mathbf{w}_2 + L\Omega \mathbf{e}_\theta) = (-Lw_2 \sin \alpha + L^2\Omega) \mathbf{k}$. La ecuación (5.19.1) queda por tanto de la forma

$$-2\rho L (w_2 \sin \alpha - L\Omega) w_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \mathbf{k} = M. \quad (5.19.3)$$

³⁸ El momento de fuerzas que el aspersor ejerce sobre el agua (igual y de signo opuesto que el que esta ejerce sobre aquel) coincide con el que debe ejercerse sobre el aspersor para impedir que gire, que es el que se pide.



Sustituyendo valores,

$$M = -(2)(1000)(0,4)[(10)(\text{sen } 45^\circ) - (0,4)(4)](10)\frac{\pi(0,005^2)}{4}k,$$

resulta finalmente

$$M = -0,859 \text{ k} \quad (\text{en N m}).$$

c) Si no existiesen fuerzas de fricción, el momento M en la ecuación (5.19.3) sería nulo, con lo que el aspersor deberá girar a una velocidad que anule el primer miembro de dicha ecuación, para lo que debe satisfacerse la condición

$$w_2 \text{ sen } \alpha - L\Omega = 0,$$

de donde resulta

$$\Omega = w_2 \text{ sen } \alpha / L = (10)(\text{sen } 45^\circ) / 0,4 = 17,68 \text{ rad s}^{-1}.$$

Problema 5.20. Impacto normal de un chorro sobre una placa plana móvil

Un chorro de un líquido de densidad ρ , con velocidad uniforme v_1 y sección transversal de área A , impacta perpendicularmente sobre una placa plana que se mueve con velocidad constante u en la misma dirección y sentido que el chorro. Se supondrán despreciables los efectos de la viscosidad, por lo que, suficientemente aguas abajo de la zona de impacto, la velocidad del líquido relativa a la placa es uniforme y coincidente en módulo con la veloci-

dad relativa incidente.³⁹ Se despreciarán posibles efectos de fuerzas másicas. Determinar, utilizando distintas alternativas para la elección del volumen de control, la fuerza que se ejerce sobre la placa.

Solución

Este problema es muy sencillo, pero resolverlo utilizando distintas alternativas en la elección del volumen de control puede ser instructivo. Se va a obviar el hecho de que, en realidad, suponer despreciables los efectos de la viscosidad y que la velocidad relativa se conserva no afecta a la solución del problema (es decir, que estas hipótesis no resultan necesarias).

Sistema de referencia ligado a la placa. Volumen de control fijo

En primer lugar se va a seguir el procedimiento más directo, que consiste en utilizar un sistema de referencia ligado a la placa y un volumen de control fijo. En la Figura 5.20.1 se han representado las velocidades absolutas \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 del líquido en un sistema de referencia ligado a tierra, en el que la placa se mueve con velocidad $u \mathbf{i}$ (se ha representado también la velocidad \mathbf{w}_2 relativa a la placa).⁴⁰ Sumando al campo de velocidad absoluta una velocidad $-u \mathbf{i}$, de sentido opuesto al de la velocidad de la placa, se obtiene el campo de velocidad en el sistema de referencia relativo a la placa. En la Figura 5.20.2 se ha representado en color azul el volumen de control fijo que se va a utilizar en este sistema de referencia relativo, limitado por la placa, la superficie libre del chorro y unas secciones de entrada y salida suficientemente alejadas de la zona de impacto. La ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento referida a un volumen de control fijo, teniendo en cuenta que la cantidad de movimiento en el volumen de control no varía en el tiempo, que las fuerzas másicas son despreciables y que la presión puede considerarse uniforme e igual a la presión atmosférica tanto en la superficie libre del chorro como en las secciones de entrada y salida del volumen

³⁹ Tal como se comentará, esta hipótesis no es necesaria para obtener la solución, pero permite describir de forma simplificada el flujo en el chorro deflectado, lo que, a su vez, facilita la explicación de cómo puede resolverse un problema utilizando distintos sistemas de referencia y volúmenes de control (aunque tampoco para ello sería necesaria esta hipótesis).

⁴⁰ No modifica sustancialmente el problema suponer que el chorro es bidimensional. Con esta simplificación, A será el área de la sección transversal del chorro por unidad de anchura y la fuerza que se obtenga será la correspondiente a un chorro de anchura unidad. El chorro incidente se dividirá en dos chorros de igual anchura. Teniendo en cuenta lo indicado en el enunciado sobre la conservación de la velocidad relativa en secciones suficientemente aguas abajo de la zona de impacto, de la ecuación de conservación de la masa se deduce que la anchura de cada uno de los chorros resultantes del impacto es $A/2$. En cualquier caso, téngase en cuenta lo indicado en la anterior nota al pie de esta misma página.

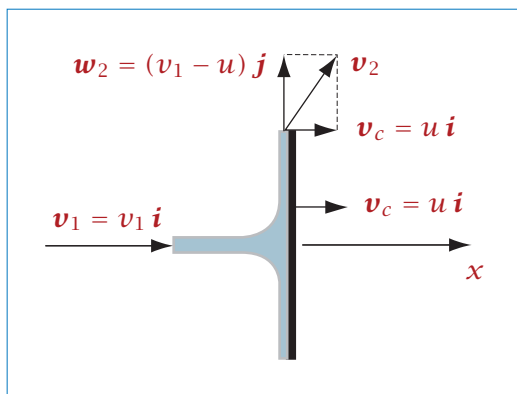


Figura 5.20.1
Sistema de referencia ligado a tierra.

de control, queda de la forma siguiente:

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{w} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS = -F,$$

siendo F la fuerza que se ejerce sobre la placa (se ha utilizado \mathbf{w} en lugar de \mathbf{v} para indicar que se trata de velocidades relativas). La contribución a la integral de la ecuación anterior correspondiente a la sección de entrada es

$$-\rho w_1^2 A \mathbf{i}.$$

Dado que la contribución correspondiente a la sección de salida es nula (no da lugar a componente en la dirección del chorro y las componentes transversales correspondientes a los dos chorros resultantes del impacto se compensan entre sí), se obtiene finalmente

$$F = \rho w_1^2 A \mathbf{i} = \rho (v_1 - u)^2 A \mathbf{i}. \quad (5.20.1)$$

Es obvio que este resultado pone de manifiesto lo indicado en el enunciado sobre el hecho de que la hipótesis de conservación de la velocidad relativa no afecta a la solución.⁴¹ Si se tiene una mínima experiencia en resolver problemas de este tipo, el resultado que se acaba de obtener podría haberse anticipado de forma inmediata. No obstante, como ya se ha indicado, el problema también se va a resolver a continuación utilizando un sistema de referencia ligado a tierra y un volumen de control variable.

⁴¹ ¿Ocurriría lo mismo si el chorro no incidiese perpendicularmente a la placa?

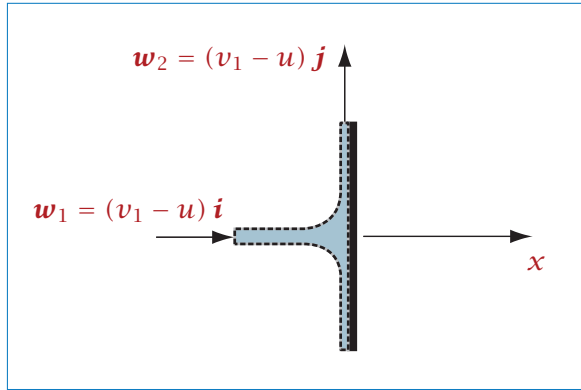


Figura 5.20.2

Sistema de referencia ligado a la placa. Volumen de control fijo.

Sistema de referencia ligado a tierra. Volumen de control variable con deformación

En primer lugar, se considerará un volumen de control deformable, que es fijo en la zona de la sección de entrada y se mueve con la velocidad de la placa en la zona donde el chorro se ve afectado por la presencia de esta. En la Figura 5.20.3 se ha representado en color azul el volumen de control en los instantes t y $t + \Delta t$. En el instante t , la línea de trazos representa la superficie del volumen de control. En el instante $t + \Delta t$, la línea de trazos representa, en posición desplazada, la superficie del volumen de control en el instante t . Utilizando el volumen de control descrito, la ecuación (B.1.7) queda de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{v} dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = -F. \quad (5.20.2)$$

Obsérvese que en este caso el primer término de la ecuación no se anula, ya que al aumentar de tamaño el volumen de control (en una magnitud por unidad de tiempo igual a uA , como se indica en la Figura 5.20.3) en una región donde la cantidad de movimiento por unidad de volumen es $\rho v_1 \mathbf{i}$, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{v} dV = \rho v_1 \mathbf{i} \frac{dV_c}{dt} = \rho v_1 u A \mathbf{i}.$$

Por otra parte, obsérvese que solo existe flujo convectivo a través de la superficie del volumen de control en las secciones de entrada y salida del chorro, por lo que

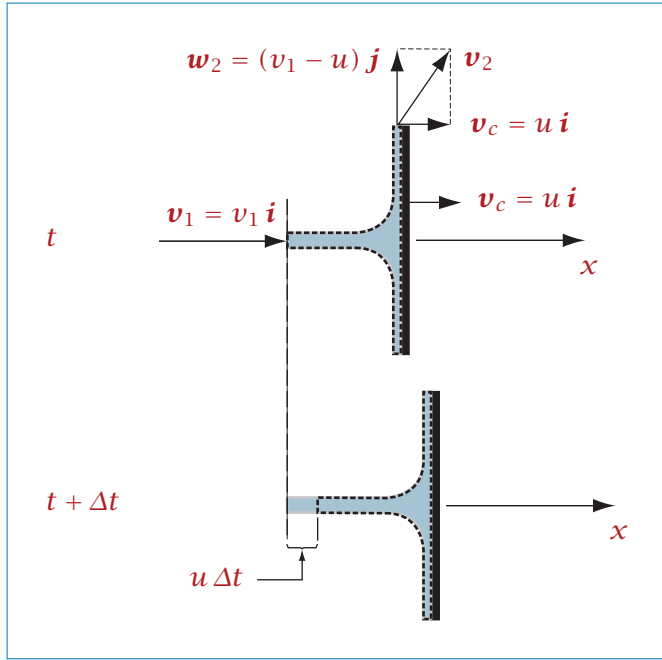


Figura 5.20.3

Sistema de referencia ligado a tierra. Volumen de control variable con deformación.

el término convectivo resulta

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS &= \rho v_1 \mathbf{i}(v_1 \mathbf{i} - 0) \cdot (-\mathbf{i})A \\
 &\quad + \rho[(v_1 - u)\mathbf{j} + u\mathbf{i}][(v_1 - u)\mathbf{j}] \cdot \mathbf{j} \frac{A}{2} \\
 &\quad + \rho[-(v_1 - u)\mathbf{j} + u\mathbf{i}][-(v_1 - u)\mathbf{j}] \cdot (-\mathbf{j}) \frac{A}{2} \\
 &= -\rho v_1^2 A \mathbf{i} + \rho u(v_1 - u)A \mathbf{i}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los dos últimos resultados en la ecuación (5.20.2), resulta

$$\boxed{\mathbf{F} = \rho(v_1 - u)^2 A \mathbf{i}.}$$

Sistema de referencia ligado a tierra. Volumen de control variable sin deformación

Algo más sencilla (aunque también de complejidad innecesaria, salvo que se introduzca como mero ejercicio) es la resolución cuando se utiliza un volumen

de control variable indeformable, que se mueve con la velocidad de la placa en un sistema de referencia ligado a tierra. La Figura 5.20.4 es ahora la equivalente a la Figura 5.20.3. Obsérvese que en este caso el primer término de la ecuación

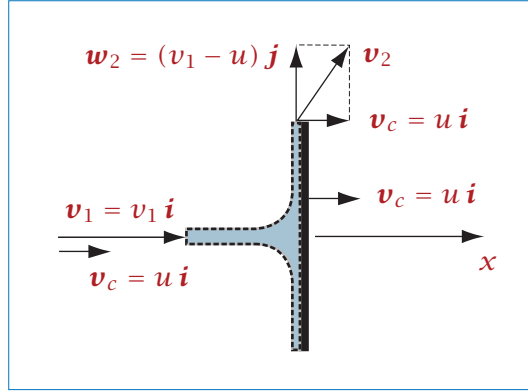


Figura 5.20.4

Sistema de referencia ligado a tierra. Volumen de control variable sin deformación.

(5.20.2) es nulo, mientras que el término convectivo es

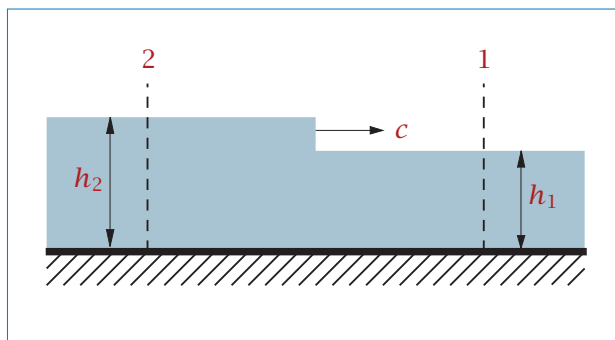
$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS &= \rho v_1 \mathbf{i} (v_1 \mathbf{i} - u \mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{i}) A \\
 &+ \rho [(v_1 - u) \mathbf{j} + u \mathbf{i}] [(v_1 - u) \mathbf{j}] \cdot \mathbf{j} \frac{A}{2} \\
 &+ \rho [-(v_1 - u) \mathbf{j} + u \mathbf{i}] [-(v_1 - u) \mathbf{j}] \cdot (-\mathbf{j}) \frac{A}{2} \\
 &= -\rho (v_1 - u)^2 A \mathbf{i},
 \end{aligned}$$

con lo que, de la ecuación (5.20.2), se obtiene

$$\boxed{\mathbf{F} = \rho (v_1 - u)^2 A \mathbf{i}.}$$

Problema 5.21. Propagación de una onda en un canal

La onda representada en la figura se propaga con una velocidad c hacia la derecha en un sistema de referencia ligado al canal que contiene el agua. Delante de la onda (a la derecha de esta en la figura), el agua se encuentra en reposo y tiene una profundidad h_1 . Detrás de la onda, el agua queda con una profundidad h_2 . Se supondrá que en las secciones 1 y 2 indicadas la distribución de presión es hidrostática, y que la velocidad del agua en la sección 2 es uniforme. La tensión cortante sobre la superficie del fondo del canal se considerará despreciable.



Determinar:

- Velocidad de propagación de la onda, c , y velocidad del agua en la sección 2, ambas respecto del sistema de referencia ligado al canal, en función de h_1 y h_2 . (Se sugiere aplicar las ecuaciones de conservación apropiadas a un volumen de control ligado a la onda.)
- Potencia disipada entre las secciones 1 y 2.
- Velocidad de propagación de la onda en el límite $(h_2 - h_1)/h_1 \ll 1$.

Solución

a)

$$c = \left[\frac{g(h_1 + h_2)h_2}{2h_1} \right]^{1/2},$$

$$v_2 = \left[\frac{g(h_1 + h_2)(h_1 - h_2)^2}{2h_1h_2} \right]^{1/2}.$$

b)

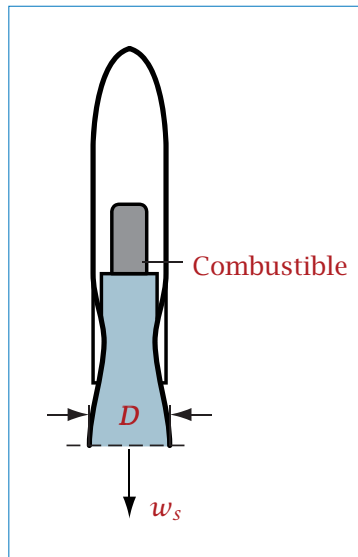
$$\overline{\Phi}_v = g\rho c \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_2}.$$

c)

$$c_{\text{lím}} = (gh_1)^{1/2}.$$

Problema 5.22. Propulsión de un cohete

Un cohete es propulsado mediante un chorro de gas que sale a través de una tobera con una sección de salida de diámetro $D = 15 \text{ cm}$. El gas es producido a partir de la combustión de un combustible sólido.⁴²



En la sección de salida de la tobera, la velocidad del gas relativa al cohete es $w_s = 1400 \text{ m s}^{-1}$, la densidad $\rho_s = 1,25 \text{ kg m}^{-3}$ y la presión $p_s = 1,2 \times 10^5 \text{ Pa}$ (estas condiciones se supondrán uniformes en la sección y constantes con el tiempo). La masa del cohete (incluyendo la del combustible que transporta)

en el instante del despegue, $t = 0$, es $m_0 = 500$ kg. Se supondrá una presión atmosférica $p_{\text{at}} = 10^5$ Pa, constante con la altura, que la fuerza de resistencia aerodinámica es despreciable y que la trayectoria del cohete es vertical.

- Determinar la masa del cohete (incluida la del combustible) en función del tiempo.
- Expresar, en función de datos conocidos, la relación de equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre el cohete en un instante genérico t en el que el cohete se mueve con una aceleración a , y determinar la aceleración del cohete en el instante $t = 0$.

Solución

- Aplicando la ecuación (B.1.2) de conservación de la masa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \, dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

al volumen material que en el instante considerado está contenido en el volumen de control limitado por la superficie exterior del cohete y la sección de salida del gas, teniendo en cuenta que, en esta, $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_c|$ es la velocidad w_s indicada en el enunciado, se obtiene

$$\frac{dm}{dt} + \rho_s w_s A = 0, \quad (5.22.1)$$

siendo m la masa del cohete (incluida la del combustible) y A el área de la sección de salida. Integrando la ecuación (5.22.1), resulta

$$m = m_0 - \rho_s w_s \frac{\pi D^2}{4} t,$$

siendo m_0 la masa inicial del cohete, y sustituyendo valores,

$$m = 500 - 30,925 \, t$$

(m en kg y t en s).

- La relación que se pide se va a obtener a partir de la ecuación (B.1.7) de conservación de la cantidad de movimiento,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{v} \, dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_c} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m \, dV, \quad (5.22.2)$$

⁴² La sustancia propulsora, que en la figura aparece denominada como combustible, es en realidad una mezcla de sustancias químicas que incluye el combustible y el oxidante.

referida al mismo volumen de control del apartado anterior. Obsérvese que esta ecuación no solo es aplicable a un volumen fluido, sino a cualquier sistema material que incluya sólidos (en el presente caso, el cohete y el combustible) y fluidos. En problemas del tipo considerado en el presente capítulo, es frecuente que sea preferible aplicar las ecuaciones de conservación a un sistema material que coincida con un volumen fluido, y posteriormente, en su caso, resolver la dinámica del sólido que interactúa con el fluido una vez determinado el sistema de fuerzas que este ejerce sobre aquel. La peculiaridad del presente problema (que hace más conveniente utilizar un volumen de control como el descrito) consiste en el cambio de fase del combustible. Obsérvese que el flujo másico de gas que sale del cohete viene dado por el ritmo de reducción de la masa de combustible sólido, no de la masa de gas en el cohete, que permanece prácticamente constante.

El problema se va a resolver sucesivamente utilizando dos procedimientos alternativos, basados en considerar dos sistemas de referencia diferentes: (1) un sistema ligado a tierra y (2) un sistema solidario con el cohete. En el primer caso, el volumen de control se mueve con la velocidad del cohete, que se denotará como u , y en el segundo, el volumen de control es obviamente fijo.

1) Sistema de referencia ligado a tierra

El primer término de la ecuación (5.22.2) es

$$\frac{d(mu)}{dt} \mathbf{k} = \left(ma + u \frac{dm}{dt} \right) \mathbf{k}$$

(obsérvese que se ha tenido en cuenta que la cantidad de movimiento en el flujo de gas se mantiene constante en el tiempo, al ser el flujo estacionario).

La única contribución al término convectivo es la correspondiente a la sección de salida, en la que

$$\mathbf{v} = (-w_s + u) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_c = u \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{n} = -\mathbf{k}$$

(\mathbf{k} es el vector unitario en dirección vertical).

Despreciando (tal como se indica en el enunciado) la fuerza de resistencia aerodinámica que ejerce el aire exterior sobre la superficie exterior del cohete (sobre la que actúa la presión atmosférica) y los efectos de la viscosidad en la sección de salida, el tercer término se reduce a $(p_s - p_{at})A \mathbf{k}$.

El último término, si se desprecia la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre el gas, es $-mg \mathbf{k}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (5.22.2) queda de la forma

$$ma + u \frac{dm}{dt} - \rho_s(w_s - u)w_s A = (p_s - p_{at})A - mg,$$

y haciendo uso de la ecuación (5.22.1), se obtiene finalmente

$$ma = \rho_s w_s^2 A + (p_s - p_{at})A - mg. \quad (5.22.3)$$

En el instante $t = 0$, en el que $m = m_0$,

$$a = \frac{\rho_s w_s^2 \pi D^2 / 4}{m_0} + \frac{(p_s - p_{at}) \pi D^2 / 4}{m_0} - g.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$a = 77,49 \text{ m s}^{-2}.$$

2) Sistema de referencia ligado al cohete

En este sistema de referencia, en la ecuación (5.22.2), $\mathbf{v}_c = 0$ y la velocidad \mathbf{v} es la velocidad relativa al cohete.

El primer término de la ecuación (5.22.2) es en este caso nulo, al ser nula la cantidad de movimiento de los sólidos (cohete y combustible) y estacionario el flujo de gas.

La única contribución al término convectivo es de nuevo la correspondiente a la sección de salida, en la que $\mathbf{v} = -w_s \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_c = 0$ y $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$.

Despreciando también ahora la fuerza de resistencia aerodinámica que ejerce el aire exterior sobre la superficie exterior del cohete (sobre la que incide un flujo de aire relativo de velocidad $-u \mathbf{k}$ y actúa la presión atmosférica) y los efectos de la viscosidad en la sección de salida, el tercer término se reduce a $(p_s - p_{at})A \mathbf{k}$.

El último término, si se desprecian las fuerzas gravitatoria y de inercia que se ejercen sobre el gas, es igual a la suma del peso, $-mg \mathbf{k}$, y la fuerza de inercia debida a la aceleración, $-ma \mathbf{k}$, que se ejercen sobre cohete y combustible.

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (5.22.2) queda en este caso de la forma

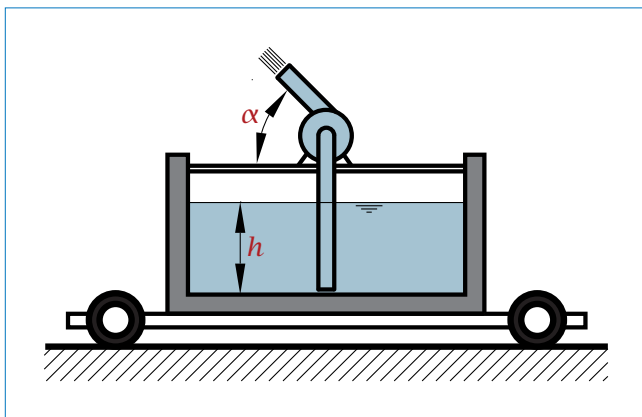
$$-\rho_s w_s^2 A = (p_s - p_{at})A - mg - ma,$$

que coincide con la de la ecuación (5.22.3).

Problema 5.23. Depósito móvil autopropulsado mediante un chorro

Una plataforma con ruedas, inicialmente en reposo, puede desplazarse sobre una superficie horizontal. La plataforma transporta un depósito de agua y una bomba que impulsa el agua a través de una tubería de radio $R = 5$ cm e inclinada un ángulo $\alpha = 45^\circ$. El depósito, que inicialmente está lleno de líquido hasta una altura $h_0 = 30$ cm, tiene una sección transversal de área $A = 1$ m². Se supondrá que el perfil de velocidad a la salida de la tubería es parabólico y viene dado por $v = v_0(h/h_0)^{1/2}(1 - r^2/R^2)$, siendo $h = h(t)$ la altura del nivel de agua en el depósito y $v_0 = 4$ m s⁻¹.

- Determinar, en el instante inicial, en el que el peso total del conjunto móvil es $P = 3000$ N, el caudal que impulsa la bomba y la aceleración de la plataforma. Se considerará despreciable la resistencia al avance de la plataforma.
- Calcular el tiempo que tarda en vaciarse el depósito.

**Solución**

- $Q = 15,71$ l s⁻¹, $a = 9,685 \times 10^{-2}$ m s⁻².
- 38,20 s.

Problema 5.24. Proceso de inflado de un globo

Determinar la variación con el tiempo de la masa de aire contenida en un globo esférico de radio R que se está inflando con aire de densidad ρ a través de un orificio de área A . El aire entra en el globo con una velocidad absoluta v , y el radio del globo aumenta con una velocidad dR/dt conocida.

Solución

Aplicando la ecuación (B.1.2) de conservación de la masa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \, dV + \int_{S_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

al volumen de aire contenido en el globo en un instante t , referida a un volumen de control variable cuya superficie está formada por las paredes y la sección de entrada del globo, y teniendo en cuenta que el primer sumando de la ecuación (5) es precisamente la variación con el tiempo de la masa de aire en el globo, dm_{globo}/dt , y que

$$\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS = -A\rho \left(v + \frac{dR}{dt} \right),$$

se obtiene

$$\frac{dm_{\text{globo}}}{dt} = A\rho \left(v + \frac{dR}{dt} \right).$$

Problema 5.25. Flujo incompresible, no estacionario y unidimensional en un conducto con sección de área variable

A través de un conducto convergente con sección transversal de área $A(x)$ (x es la coordenada a lo largo del conducto), circula un fluido incompresible de densidad ρ . Se supondrá que el flujo es no estacionario y unidimensional, con magnitudes fluidas uniformes en cada sección transversal, siendo despreciables los efectos viscosos y los debidos a la gravedad, de forma que se

satisface la siguiente ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

El caudal que circula por el conducto es una función del tiempo $Q(t)$. En la sección de coordenada x_1 se mide una presión $p(x_1, t)$. La densidad del fluido y las funciones $A(x)$, $Q(t)$ y $p(x_1, t)$ son conocidas.

- Determinar la velocidad del fluido en cualquier sección, $u(x, t)$.
- Encontrar una expresión que permita determinar la presión $p(x, t)$ en cualquier sección de coordenada x .
- Determinar la fuerza que se ejerce sobre las paredes del conducto entre una sección genérica de coordenada x y la sección de coordenada x_1 .
- Hacer aplicación de los apartados anteriores al caso en que

$$\begin{aligned}\rho &= 1, \\ x_1 &= 1, \\ Q(t) &= t + 1, \\ A(x) &= 2/(x + 1), \\ p(x_1, t) &= (t + 1)^2/2.\end{aligned}$$

Solución

a) Al ser el fluido incompresible, se debe conservar el caudal a lo largo del conducto, por lo que obviamente

$$u(x, t) = \frac{Q(t)}{A(x)}. \quad (5.25.1)$$

b) La presión se obtiene integrando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. Derivando la ecuación (5.25.1), resulta

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{A(x)} \frac{dQ(t)}{dt}, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= -\frac{Q(t)}{A^2(x)} \frac{dA(x)}{dx}.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

Sustituyendo estas expresiones y la ecuación (5.25.1) en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento del enunciado, se obtiene

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{1}{A(x)} \frac{dQ(t)}{dt} - \rho \frac{Q^2(x)}{A^3(x)} \frac{dA(x)}{dx}. \quad (5.25.2)$$

Integrando esta expresión entre x y x_1 , resulta

$$\boxed{p(x, t) = p(x_1, t) + \rho \frac{dQ(t)}{dt} \int_x^{x_1} \frac{dx}{A(x)} + \rho \frac{Q^2(t)}{2} \left[\frac{1}{A^2(x_1)} - \frac{1}{A^2(x)} \right]}. \quad (5.25.3)$$

c) Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral al volumen fluido que ocupa en cada instante el tramo de conducto considerado, entre x y x_1 , y despreciando los efectos viscosos y los debidos a la gravedad, resulta

$$\begin{aligned} \rho \frac{dQ(t)}{dt} \int_{V_0} \frac{1}{A(x)} dV + \rho Q^2(t) \left[\frac{1}{A(x)} - \frac{1}{A(x_1)} \right] \\ = p(x, t)A(x) - p(x_1, t)A(x_1) - F_x. \end{aligned}$$

Sustituyendo $dV = A(x)dx$, integrando y despejando en la ecuación anterior, se obtiene la fuerza sobre el conducto

$$\boxed{F_x = \rho \frac{dQ(t)}{dt} (x - x_1) + \rho Q^2(t) \left[\frac{1}{A(x)} - \frac{1}{A(x_1)} \right] + p(x, t)A(x) - p(x_1, t)A(x_1)},$$

donde $p(x, t)$ está dada por la ecuación (5.25.3).

d) Los resultados de los anteriores apartados quedan de la forma siguiente:

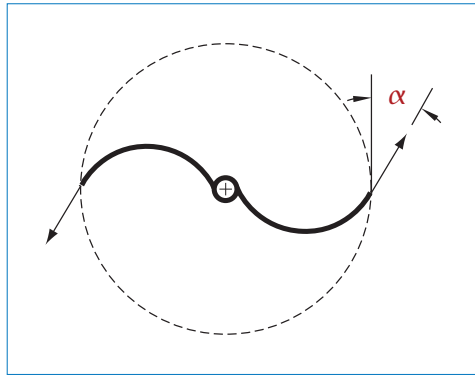
$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2}(t+1)(x+1),}$$

$$\boxed{p(x, t) = (t+1)^2 \left[1 - \frac{1}{8}(x+1)^2 \right] + \frac{1}{4} [3 - x(x+2)]}.$$

$$\boxed{F_x = (t+1)^2 \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) + \frac{2(t+1)^2}{x+1} \left[1 - \frac{1}{8}(x+1)^2 \right] + \frac{1}{2(x+1)} [3 - x(x+2)] + x - 1}.$$

Problema 5.26. Flujo en un aspersor de riego plano (II)

El aspersor de la figura tiene los dos brazos contenidos en un plano perpendicular al eje de giro. El agua entra a través de una tubería cuyo eje coincide con el de giro, con un caudal $Q = 2 \text{ l s}^{-1}$ que se distribuye en partes iguales por los dos brazos. La sección de salida de la boquilla acoplada a cada uno de los brazos tiene un diámetro $D = 1 \text{ cm}$ y se encuentra a una distancia $R = 0,5 \text{ m}$ del eje de giro. Los ejes de las boquillas están contenidos en el mismo plano de giro de los brazos y forman un ángulo $\alpha = 45^\circ$ con la dirección acimutal.



- Calcular la velocidad de giro que alcanzaría el aspersor en ausencia de fuerzas de fricción que tiendan a frenarlo.
- Si la velocidad de giro del aspersor es en realidad un 20% inferior a la calculada en el apartado anterior, determinar la potencia disipada por fricción en el eje de giro.

Solución

a) Aplicando la ecuación (B.1.11) de conservación del momento cinético referida a un volumen de control variable cuya superficie la constituyen las paredes interiores y las secciones de entrada y salida del aspersor, resulta

$$2\rho R(w_2 \cos \alpha - u_2) w_2 A = -M_{\text{roz}}, \quad (5.26.1)$$

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

siendo

$$w_2 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{c2}) \cdot \mathbf{n}_2 = Q/(2A)$$

y

$$u_2 = \Omega R$$

la velocidad relativa del agua y la velocidad de arrastre en la sección de salida del aspersor, respectivamente (A representa el área de la sección de salida), y M_{roz} el momento de fuerzas debidas a la fricción del aspersor con el eje de giro.

En el caso de que no existan fuerzas de fricción ($M_{\text{roz}} = 0$), de la ecuación (5.26.1) resulta

$$u_2 = w_2 \cos \alpha,$$

de donde se obtiene

$$\Omega = u_2/R = w_2 \cos \alpha/R,$$

y sustituyendo valores,

$$\Omega = 18 \text{ rad s}^{-1}.$$

b) Si $\Omega' = 0,8 \Omega$, el momento de fuerzas debido a la fricción en el eje es

$$M'_{\text{roz}} = -2\rho R(w_2 \cos \alpha - \Omega' R)w_2 A,$$

y la potencia,

$$\dot{W}_{\text{roz}} = M'_{\text{roz}} \Omega'.$$

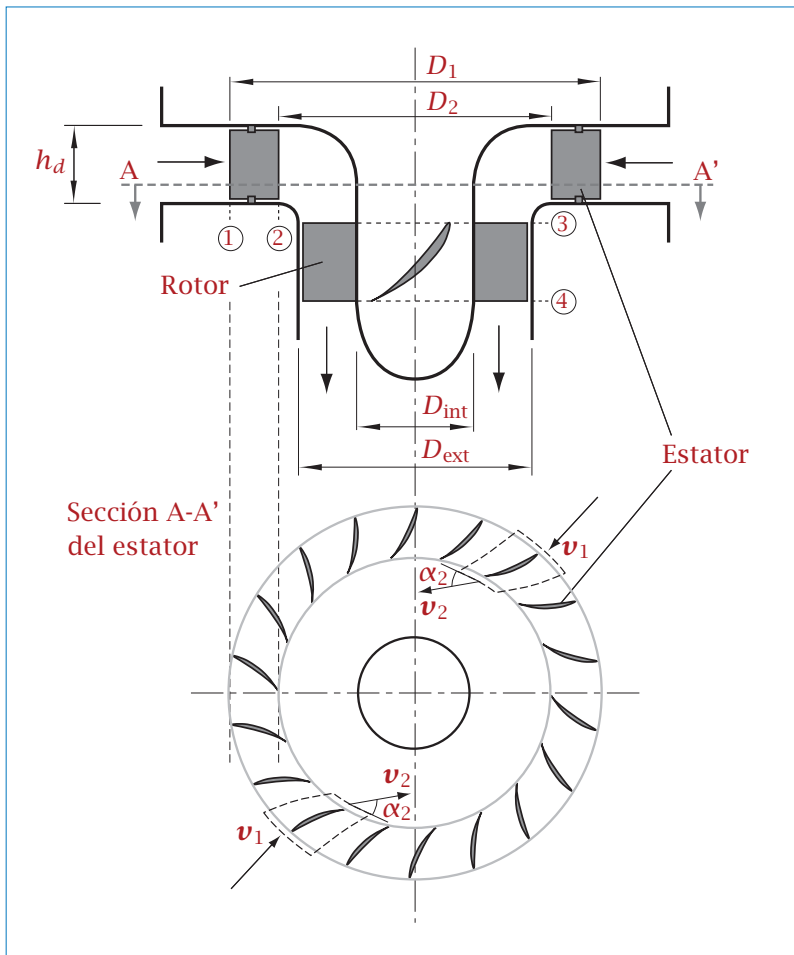
Sustituyendo valores, se obtiene $M'_{\text{roz}} = -1,8 \text{ N m}$ y

$$\dot{W}_{\text{roz}} = 25,92 \text{ W}.$$

Problema 5.27. Turbina hidráulica

La turbina hidráulica de eje vertical representada esquemáticamente en la figura consta de un órgano móvil (rotor) y un órgano fijo (estator). El flujo de agua entra radialmente por la sección 1, con velocidad $\mathbf{v}_1 = -v_{r1} \mathbf{e}_r$ y presión p_1 , atraviesa el estator y sale desviado un ángulo α_2 con una presión p_2 . En la parte inferior de la figura se representa una sección del estator según un plano horizontal, vista desde arriba. Aguas abajo de la sección 2, las líneas de corriente adoptan una forma helicoidal, siendo la velocidad del agua en la sección 3, situada inmediatamente aguas arriba del rotor, $\mathbf{v}_3 = v_{\theta 3} \mathbf{e}_\theta - v_{z3} \mathbf{e}_z$.

Finalmente, el agua atraviesa el rotor y sale con una velocidad puramente axial, $\mathbf{v}_4 = -v_{z4}\mathbf{e}_z$. El eje z coincide con el de la turbina, con sentido positivo hacia arriba, siendo \mathbf{e}_z el correspondiente vector unitario, y \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ son los vectores unitarios según las direcciones radial y acimutal. Se supondrá que todas las magnitudes en las secciones 1, 2, 3 y 4 son uniformes, incluso la componente $v_{\theta 3}$ en la sección 3, y que el flujo es estacionario.



Determinar:

- Componentes de la velocidad en la sección 2 y fuerza que se ejerce

sobre cada álabe del estator en función de α_2 , D_1 , D_2 , v_{r1} , p_1 , p_2 , h_d y del número de álaves del estator, n . (Se sugiere aplicar las ecuaciones de conservación que correspondan al volumen de control que aparece en la figura con línea discontinua.)

- b) Componentes de la velocidad en la sección 3, v_{θ_3} y v_{z_3} , en función de parámetros del apartado anterior y de los diámetros exterior, D_{ext} , e interior, D_{int} , que delimitan las secciones 3 y 4. Se supondrá que entre las secciones 2 y 3 el agua no ejerce momento de giro sobre las paredes interiores de la turbina. (Se sugiere utilizar el volumen de control formado por las secciones 2 y 3 y las paredes interiores de la turbina.)
- c) La potencia que desarrolla el rotor, que gira a una velocidad $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$.⁴³

Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la masa, que en este caso se reduce a $\int_{S_o} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, al volumen de control indicado en la figura, resulta

$$v_1 \frac{\pi D_1 h_d}{n} = v_2 \sin \alpha_2 \frac{\pi D_2 h_d}{n} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1 D_1}{D_2 \sin \alpha_2}, \quad (5.27.1)$$

de donde se deduce

$$\mathbf{v}_2 = -v_{r1} \frac{D_1}{D_2} \mathbf{e}_r + v_{r1} \frac{D_1}{D_2 \tan \alpha_2} \mathbf{e}_\theta.$$

Aplicando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, $\int_{S_o} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -\mathbf{F} - \int_{S_o} p \mathbf{n} dS$, al mismo volumen de control, y tomando $\mathbf{v}_2 = -v_{r2} \mathbf{e}_r + v_{\theta_2} \mathbf{e}_\theta$, resulta

$$-\rho \mathbf{v}_1 v_{r1} \frac{\pi D_1 h_d}{n} + \rho \mathbf{v}_2 v_{r2} \frac{\pi D_2 h_d}{n} = -\mathbf{F} - p_1 \mathbf{e}_r \frac{\pi D_1 h_d}{n} + p_2 \mathbf{e}_r \frac{\pi D_2 h_d}{n}, \quad (5.27.2)$$

de donde se obtiene

$$F_r = \pi h_d [\rho v_{r1}^2 (D_1^2/D_2 - D_1) + p_2 D_2 - p_1 D_1] / n$$

y

$$F_\theta = \rho \pi h_d v_{r1}^2 D_1^2 / (n D_2 \tan \alpha_2).$$

⁴³ Este problema es una adaptación de un problema propuesto por Spurk (1997).

b) Aplicando la ecuación de conservación del momento cinético al volumen de control formado por las secciones 2 y 3 y las paredes interiores de la turbina, que se reduce a⁴⁴

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0,$$

se obtiene

$$-\rho v_{r_2} \pi D_2 h_d \frac{D_2}{2} v_{\theta_2} \mathbf{e}_z + \rho \int_{D_{\text{int}}/2}^{D_{\text{ext}}/2} r v_{\theta_3} v_{z3} 2\pi r dr \mathbf{e}_z = 0, \quad (5.27.3)$$

y al ser v_{z3} y v_{θ_3} constantes con r ,

$$h_d v_{r_2} D_2^2 v_{\theta_2} = \frac{1}{6} v_{z3} v_{\theta_3} (D_{\text{ext}}^3 - D_{\text{int}}^3). \quad (5.27.4)$$

Por otro lado, aplicando la ecuación de conservación de la masa entre las secciones 1 y 3, se obtiene

$$v_{z3} = \frac{4v_{r_1} h_d D_1}{D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2}. \quad (5.27.5)$$

Sustituyendo la ecuación (5.27.5) en la ecuación (5.27.4) se puede deducir el valor de v_{θ_3} en función de los demás parámetros conocidos:

$$v_{\theta_3} = \frac{3}{2} \frac{v_{r_1} D_1 (D_{\text{ext}} - D_{\text{int}})}{(D_{\text{ext}} - D_{\text{int}}) D_{\text{ext}} - D_{\text{int}}) \tan \alpha_2}.$$

c) Aplicando la ecuación (B.1.11) de conservación del momento cinético entre las secciones 3 y 4, y teniendo en cuenta que la velocidad en la sección 4 es axial, se deduce el momento que ejerce el agua sobre la turbina:

$$M_x = \frac{1}{12} \rho v_{z3} v_{\theta_3} (D_{\text{ext}}^3 - D_{\text{int}}^3). \quad (5.27.6)$$

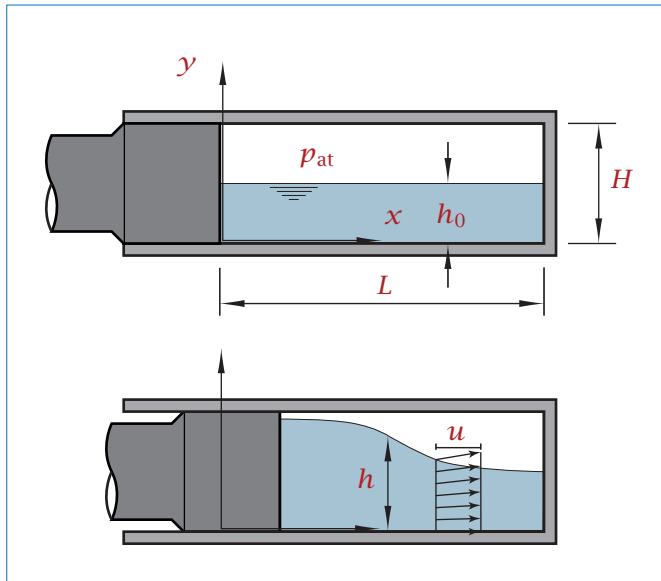
La potencia generada será

$$\dot{W} = \Omega M_x = \frac{1}{12} \rho \Omega v_{z3} v_{\theta_3} (D_{\text{ext}}^3 - D_{\text{int}}^3).$$

⁴⁴ Se tiene en cuenta que, de acuerdo con lo indicado en el enunciado, puede suponerse que las paredes interiores de la turbina no ejercen ningún momento de fuerzas sobre el fluido.

Problema 5.28. Generación de una ola en un cilindro por el movimiento de un pistón

El cilindro estanco de sección rectangular de la figura, de longitud L y altura H , contiene inicialmente agua en reposo hasta un nivel $h_0 = H/2$ y aire a presión atmosférica, p_{at} . El problema se considerará bidimensional.



En un instante dado ($t = 0$), el pistón de masa por unidad de anchura m , cuya superficie está situada en $x = 0$, comienza a moverse hacia la derecha, sin rozamiento, con una aceleración constante $a = \frac{2}{3}gh_0/L$, siendo g la aceleración de la gravedad, causando la formación de una ola en el agua. En cada instante, se supondrá que la componente horizontal de la velocidad absoluta del agua, u , es función exclusivamente de la coordenada x (es decir, $u = u(x, t)$) y que la distribución de presión en el agua viene dada por la ecuación de la estática. Se supondrá asimismo que el aire ($\gamma = 1,4$) se comprime isentrópicamente. La componente horizontal de la velocidad, u , y la altura de la superficie libre del agua sobre el fondo del cilindro, h , pueden determinarse en función de x y t a partir de las siguientes ecuaciones

paramétricas:

$$x = X(\tau) + \left[\frac{3}{2}X'(\tau) + (gh_0)^{1/2}\right](t - \tau),$$

$$u = X'(\tau),$$

$$(gh)^{1/2} = (gh_0)^{1/2} + X'(\tau)/2,$$

donde τ es el parámetro, $X'(t) = dX/dt = at$ la velocidad del pistón y $X(t)$ la coordenada x correspondiente a la posición de la superficie del pistón en función del tiempo.

En el instante $t = t_c = \frac{2}{3}(gh_0)^{1/2}/a$:

- a) Demostrar que $u = (\frac{2}{3}gh_0 - ax)^{1/2}$.
- b) Determinar la presión en la superficie del pistón en función de la coordenada vertical, y . (Densidad del agua: ρ .)
- c) Determinar la potencia por unidad de anchura del cilindro necesaria para mover el pistón.

Demuéstrese que el extremo más avanzado de la ola alcanza la pared final del cilindro en el instante t_c .

Solución

a) De acuerdo con lo indicado en el enunciado, la velocidad del pistón es $X'(t) = at$, y su posición,

$$X(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}[X'(t)]^2/a.$$

Introduciendo estas expresiones para $t = \tau$ en la primera ecuación del enunciado, teniendo en cuenta la segunda [$u = X'(\tau)$], resulta

$$x = \frac{1}{2}\frac{u^2}{a} + \left[\frac{3}{2}u + (gh_0)^{1/2}\right]\left(t - \frac{u}{a}\right),$$

de donde se obtiene, para $t = t_c$,

$$u = \left(\frac{2}{3}gh_0 - ax\right)^{1/2}. \quad (5.28.1)$$

b) En $t = t_c$, el pistón está en

$$x = \frac{1}{2}at_c^2 = \frac{2}{9}gh_0/a.$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación (5.28.1), y esta, a su vez, en la tercera del enunciado (teniendo en cuenta la segunda ecuación del enunciado), se obtiene

una altura de la superficie libre del agua en el pistón

$$h_c = \frac{16}{9}h_0.$$

La presión manométrica del aire en t_c es

$$p_0 = p_{at} \left[\left(\frac{L}{L - at_c^2} \right)^{\gamma} - 1 \right].$$

Al suponerse hidrostática, la distribución de presión manométrica en el pistón es

$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{16}{9}h_0 - y \right),$$

siendo y la coordenada vertical, con origen en el fondo del cilindro.

c) De la distribución de presión sobre el pistón se obtiene una fuerza sobre este que, sumada a la fuerza de inercia, da una resultante sobre el pistón, por unidad de anchura,

$$F = ma/b + p_0H + 8\left(\frac{2}{3}\right)^4 \rho g h_0^2$$

(siendo b la anchura del pistón). La potencia por unidad de anchura necesaria, teniendo en cuenta que el pistón se mueve con una velocidad $X' = at_c$, es

$$W = \frac{2}{3}(ma/b + p_0H)(gh_0)^{1/2} + 8\left(\frac{2}{3}\right)^5 \rho g^{3/2} h_0^{5/2}.$$

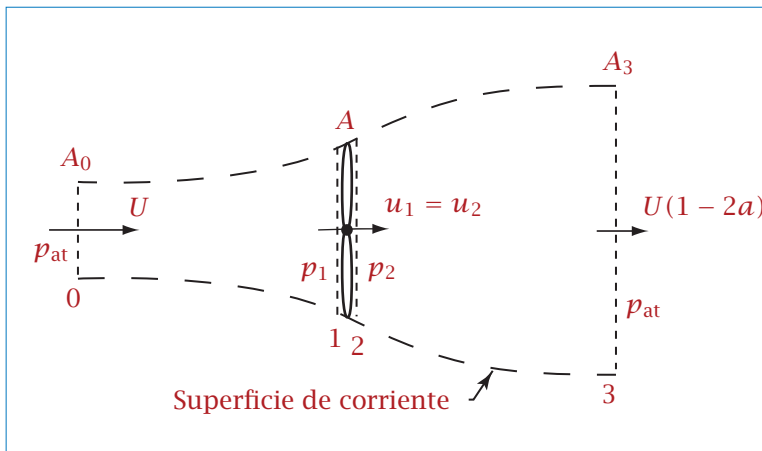
Problema 5.29. Turbina eólica

Una turbina eólica gira a velocidad angular Ω inmersa en un flujo uniforme de aire de densidad ρ , barriendo un disco de área A . El viento incidente tiene una velocidad U en la sección 0 de la figura, en la que no está perturbado por la presencia de la turbina. La velocidad del aire disminuye y la presión aumenta desde la sección 0 hasta la sección 1, situada inmediatamente aguas arriba de la turbina. A través de la turbina se produce un salto de presión, siendo esta en la sección 2, situada inmediatamente aguas abajo de la turbina, inferior a la presión atmosférica. Desde la sección 2 hasta la sección 3, la presión aumenta hasta ser de nuevo igual a la atmosférica y la velocidad sigue disminuyendo hasta alcanzar el valor $u_3 = U(1 - 2a)$, siendo a el denominado coeficiente de velocidad inducida, que se supondrá conocido para las condiciones del problema. En la figura se ha representado con línea

discontinua una superficie de corriente que idealmente separa el aire que atraviesa la aeroturbina del aire exterior. Se despreciará la posible resultante de las fuerzas de presión sobre dicha superficie de corriente. Se considerarán despreciables los efectos viscosos entre las secciones 0 y 1 y entre las secciones 2 y 3. El flujo se supondrá uniforme en cada una de las secciones transversales indicadas en la figura. Se despreciarán las fuerzas másicas, el aire se considerará incompresible y el flujo, estacionario. Además de a , son datos conocidos U , A y ρ .

Determinar:

- Velocidad $u_1 = u_2$ en la turbina, presiones manométricas p_1 y p_2 en las secciones 1 y 2, respectivamente, y áreas A_0 y A_3 del mencionado tubo de corriente idealizado en las secciones 0 y 3.
- Fuerza de empuje sobre la turbina.
- Potencia extraída por la turbina.
- Valor del coeficiente de velocidad inducida para el que la potencia extraída por la turbina es máxima.



Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento a los volúmenes de control limitados por la superficie de corriente y las secciones 0 y 3, y por la superficie de corriente y las secciones 1 y 2, y las ecuaciones de

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

conservación de la masa y de la energía mecánica a los volúmenes de control limitados, respectivamente, por la superficie de corriente y las secciones 0 y 1, y por la superficie de corriente y las secciones 2 y 3, resulta

$$-\rho U^2 A_0 + \rho U^2 (1 - 2a)^2 A_3 = -F_{\text{turbina}} = (p_2 - p_1)A, \quad (5.29.1)$$

$$A_0 U = A u_1 = A_3 U (1 - 2a), \quad (5.29.2)$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2}, \quad (5.29.3)$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{U^2 (1 - 2a)^2}{2}. \quad (5.29.4)$$

(p_1 y p_2 son presiones manométricas.) Sumando las ecuaciones (5.29.3) y (5.29.4), se obtiene

$$p_1 - p_2 = 2\rho U^2 a(1 - a).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.29.1) y teniendo en cuenta la ecuación (5.29.2), resulta

$$u_1 = u_2 = U(1 - a).$$

Introduciendo este valor de u_1 en (5.29.3) y (5.29.4), se obtiene

$$p_1 = \rho U^2 a(1 - a)$$

y

$$p_2 = -\rho U^2 a(1 - a),$$

respectivamente, y de la ecuación (5.29.2),

$$A_0 = A(1 - a)$$

y

$$A_3 = A(1 - a)/(1 - 2a).$$

b) De la segunda igualdad de la ecuación (5.29.1), teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, resulta

$$F_{\text{turbina}} = (p_1 - p_2)A = 2\rho U^2 a(1 - a)A.$$

c) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica al volumen de control limitado por la superficie de corriente y las secciones 0 y 3, resulta

$$\dot{W} = \rho A u_1 [U^2/2 - U^2(1 - 2a)^2/2] = 2\rho A U^3 a(1 - a)^2.$$

d) $\partial \dot{W} / \partial a$ se anula para $a = 1$ (corresponde a un mínimo) y para

$$a = 1/3,$$

valor que se comprueba que corresponde a un máximo. De la ecuación anterior se obtiene dicho máximo,

$$\dot{W} = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho A U^3,$$

que constituye el denominado límite de Betz.

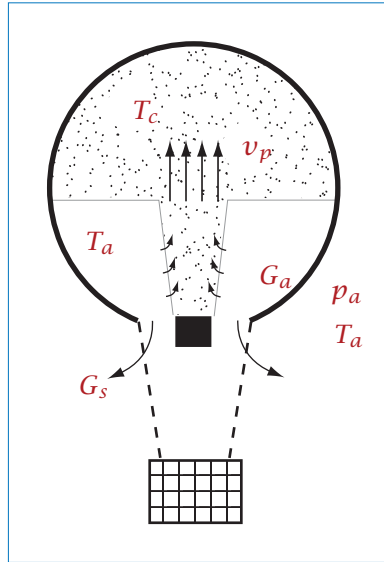
Obsérvese que solo un $16/27$ de la energía cinética del viento que por unidad de tiempo atraviesa la sección barrida por la turbina podría ser convertida en energía mecánica en el eje de la máquina. En realidad, la potencia extraída del viento es considerablemente inferior a este límite teórico⁴⁵ debido a las pérdidas que se producen en el proceso de conversión.

Problema 5.30. Globo aerostático

En la figura se representa un esquema idealizado de un globo aerostático con forma de esfera de diámetro $D = 10$ m. En el quemador se produce la reacción del combustible con el aire, formándose una llama y generándose productos de la combustión calientes que, debido a los efectos de flotación, dan lugar a un penacho. Se supondrá despreciable el gasto másico de combustible, y que los gases que produce la combustión tienen un peso molecular igual al del aire ($\gamma = 1,4$; $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). El ascenso de los gases de combustión provoca la ingestión en el penacho de un gasto másico de aire $G_a = 1,13 \text{ kg s}^{-1}$ (en el que se supondrá incluido el gasto másico del aire que interviene en la combustión). Dicho aire procede de la parte inferior del globo, en la que se supone que existe una temperatura uniforme $T_a = 20^\circ \text{C}$. El penacho alimenta una capa de gas caliente situada en la parte superior del globo, en la que las propiedades se supondrán uniformes. El área de la sección transversal del penacho a la altura a la que los gases entran en la

⁴⁵ Por otra parte, existen estimaciones del límite teórico de la potencia extraíble más precisas que la obtenida en este problema. Teniendo en cuenta, por ejemplo, la existencia de una resultante no nula de la componente axial de las fuerzas de presión que actúan sobre la superficie del volumen de control (que aquí se han supuesto despreciables, de acuerdo con lo indicado en el enunciado), se obtiene un límite ligeramente inferior.

capa caliente es $A_p = 0,9 \text{ m}^2$. En dicha sección, las magnitudes fluidas se supondrán uniformes. La potencia calorífica liberada en la combustión es $\dot{Q} = 300 \text{ kW}$. Se supondrá que el problema es cuasiestacionario, y que la presión puede considerarse uniforme dentro del globo y aproximadamente igual a la presión atmosférica, $p_a = 10^5 \text{ N m}^{-2}$.



- a) Determinar la temperatura, T_p , y la velocidad, v_p , de los gases en la parte superior del penacho, en la sección de entrada a la capa caliente. (Se supondrán despreciables las energías cinética y potencial y el calor transmitido por radiación y conducción.)

En un determinado instante, la capa caliente ocupa la mitad del volumen del globo, siendo la temperatura de los gases en su interior, T_c , uniforme e igual a $0,9T_p$. La pérdida de calor por unidad de tiempo del gas contenido en la capa caliente, $-\dot{Q}_c$, se estima en un 10% de $c_p G_a T_p$.

- b) Determinar en dicho instante los valores de dT_c/dt y dV_c/dt , siendo V_c el volumen de la capa caliente.
- c) En el mismo instante considerado en el apartado anterior, determinar el gasto másico, G_s , y la velocidad, v_s , del aire que sale del globo

a través del orificio inferior, que tiene una sección de paso de área $A_s = 2 \text{ m}^2$.

Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la energía al conjunto de llama y penacho, utilizando un volumen de control fijo, a través de cuya superficie (superficie lateral por la que se produce la ingestión de aire y la de entrada de aire para la combustión) entra un gasto de aire G_a y sale el mismo gasto⁴⁶ (a través de la sección de área A_p , de entrada a la capa caliente), resulta, con las hipótesis del enunciado

$$G_a(h_p - h_a) = \dot{Q}, \quad (5.30.1)$$

donde h_a y h_p son las entalpías a la entrada y a la salida del penacho, respectivamente. Teniendo en cuenta que $h = c_p T$ y $c_p = \gamma R / (\gamma - 1) = 1000,4 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, de la ecuación anterior, sustituyendo valores, se obtiene

$$T_p = 557,3 \text{ K}.$$

Aplicando la ecuación de conservación de la masa al volumen de control anterior, resulta

$$G_a = v_p A_p \rho_p. \quad (5.30.2)$$

Teniendo en cuenta que

$$\rho_p = \frac{p_a}{R T_p} = 0,625 \text{ kg m}^{-3}, \quad (5.30.3)$$

de la ecuación (5.30.2), sustituyendo valores, se obtiene

$$v_p = 2 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Aplicando las ecuaciones de conservación de la masa y la energía a la capa caliente, utilizando el volumen de control variable formado por la superficie interior del globo en contacto con la capa caliente y la superficie inferior idealizada de esta, resulta

$$\frac{d(\rho_c V_c)}{dt} = \frac{d\rho_c}{dt} V_c + \rho_c \frac{dV_c}{dt} = G_a, \quad (5.30.4)$$

$$e_c \frac{d(\rho_c V_c)}{dt} + \rho_c V_c \frac{de_c}{dt} - G_a h_p = \dot{Q}_c = -0,1 G_a c_p T_p, \quad (5.30.5)$$

⁴⁶ Al ser el flujo en el penacho cuasiestacionario, el flujo de masa neto a través de la superficie del volumen de control es nulo.

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

donde ρ_c , V_c y $e_c = c_v T_c$ son la densidad, el volumen y la energía interna de la capa caliente, respectivamente. Sustituyendo la ecuación (5.30.4) en la ecuación (5.30.5), teniendo en cuenta que, según se indica en el enunciado, $T_c = 0,9T_p$, resulta

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{G_a}{\rho_c V_c c_v} (0,9c_p T_p - 0,9c_v T_p). \quad (5.30.6)$$

Teniendo en cuenta que

$$\rho_c = \frac{p_a}{RT_c}$$

y

$$V_c = (2/3)\pi(D/2)^3,$$

y sustituyendo valores en la ecuación (5.30.6), resulta finalmente

$$\boxed{\frac{dT_c}{dt} = 1,25 \text{ K s}^{-1}.$$

De la ecuación (5.30.4),

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{G_a}{\rho_c} - \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_c}{dt} V_c,$$

y teniendo en cuenta que la presión no varía en el tiempo y que, por tanto,

$$(1/\rho_c) d\rho_c/dt = -(1/T_c) dT_c/dt,$$

resulta

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{G_a}{\rho_c} + \frac{V_c}{T_c} \frac{dT_c}{dt}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$\boxed{\frac{dV_c}{dt} = 2,28 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

c) Aplicando la ecuación (B.1.2) de conservación de la masa al volumen interior del globo no ocupado por la capa caliente, utilizando un volumen de control limitado por la superficie interior del globo en contacto con el aire a temperatura T_a y la superficie inferior de la capa caliente, resulta

$$-\rho_a \frac{dV_c}{dt} + G_s = 0,$$

de donde se obtiene

$$\boxed{G_s = 2,71 \text{ kg s}^{-1},}$$

y teniendo en cuenta que $G_s = \rho_s A_s v_s$, resulta finalmente

$$\boxed{v_s = \frac{G_s}{\rho_a A_s} = 1,14 \text{ m s}^{-1}.$$

Problema 5.31. Impacto de un chorro horizontal de agua sobre una placa plana suspendida y articulada en su extremo superior

Un chorro horizontal y bidimensional de agua, de altura b y velocidad uniforme U , incide sobre una placa plana rectangular, de altura H y masa por unidad de anchura m , que puede girar libremente alrededor de un eje horizontal O que coincide con uno de sus lados. En la situación correspondiente al esquema de la Figura 5.31.1, la placa está situada en posición vertical y perpendicular al plano del papel (el espesor con el que aparece dibujada es despreciable). La velocidad del chorro es perpendicular al plano vertical que contiene el eje de giro de la placa, e incide sobre dicho plano a una altura $H/2$ por debajo del eje. El centro de gravedad de la placa es equidistante de sus extremos. Se despreciarán los efectos gravitatorios sobre el agua y los efectos de la viscosidad (el agua abandona la placa con la misma velocidad U del chorro incidente). El problema se supondrá bidimensional.

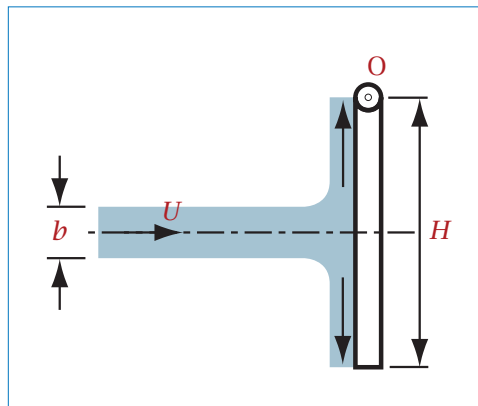


Figura 5.31.1

- En la situación de la Figura 5.31.1, determinar la aceleración angular de la placa suponiendo que esta gira alrededor del eje O , en sentido contrario al de las agujas del reloj, con una velocidad angular Ω .
- En la situación de equilibrio estático (Figura 5.31.2), determinar el

ángulo α que forma la placa con el plano vertical y los espesores de las láminas de agua sobre la placa que resultan de la división del chorro incidente.

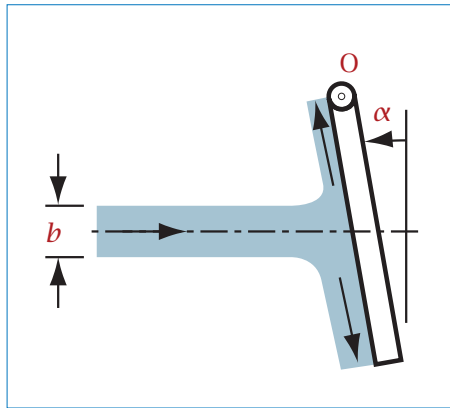


Figura 5.31.2

Supóngase en lo que sigue que la placa tiene fijada en su extremo una compuerta de masa despreciable, cuya sección tiene forma de arco de circunferencia con centro de curvatura situado sobre el eje de giro de la placa (véase la Figura 5.31.3). La compuerta retiene agua en un depósito abierto a la atmósfera, según se indica en la Figura 5.31.3. La superficie libre del agua en el depósito está a la misma altura que el eje de giro de la placa. En el punto A, situado a la misma altura que el eje del chorro, existe una junta que impide la fuga de agua y permite el deslizamiento de la compuerta.

- c) Determinar si el ángulo α obtenido en el apartado anterior se modificará en la nueva configuración (en su caso, hallar el nuevo valor).
- d) Determinar la fuerza por unidad de anchura que ejerce sobre la compuerta el agua contenida en el depósito.
- e) Hacer aplicación de las expresiones obtenidas en los apartados anteriores a un caso con los datos siguientes: $\Omega = 20 \text{ rpm}$; $H = 50 \text{ cm}$; $b = 5 \text{ cm}$; $U = 1 \text{ m s}^{-1}$; $m = 8 \text{ kg m}^{-1}$.

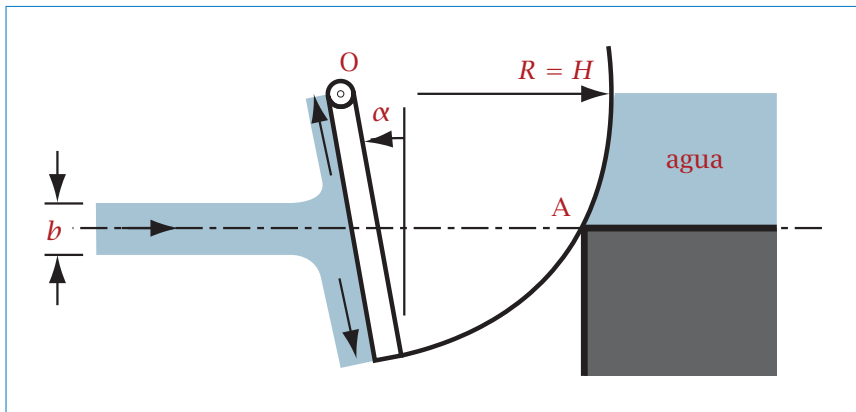


Figura 5.31.3

Solución

$$a) \alpha'' = \frac{3}{2} \frac{\rho(U - \Omega H/2)^2 b}{mH}.$$

$$b) \alpha = \arctan \frac{\rho U^2 b}{mg};$$

$$b_2 = \frac{b}{2}(1 - \sin \alpha) \text{ (chorro superior);}$$

$$b_3 = \frac{b}{2}(1 + \sin \alpha) \text{ (chorro inferior).}$$

c) No se modifica.

$$d) F_x = -\rho g H^2 / 8;$$

$$F_y = \rho g H^2 (\pi/3 - \cos 30^\circ) / 4.$$

$$e) \alpha'' = 4,26 \text{ rad s}^{-2};$$

$$\alpha = 32,5^\circ;$$

$$b_2 = 1,16 \text{ cm};$$

$$b_3 = 3,84 \text{ cm};$$

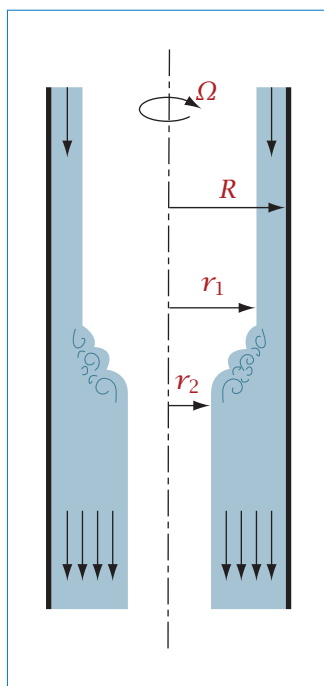
$$F_x = 306,6 \text{ N};$$

$$F_y = 111,1 \text{ N}$$

(la línea de acción de la fuerza pasa por el eje de giro).

Problema 5.32. Resalto hidráulico anular

El tubo cilíndrico de sección circular de la figura, de radio interior R y dispuesto verticalmente, gira a una velocidad angular Ω alrededor de su eje. En su interior existe un flujo anular, concéntrico con el eje del tubo y en forma de lámina en contacto con la pared, de un líquido de densidad ρ . En el centro del tubo existe aire a presión uniforme. Se supondrá que la componente longitudinal de la velocidad del líquido es uniforme en cada sección transversal y que la distribución de velocidad acimutal es la que correspondería al movimiento del líquido como sólido rígido. A una cierta altura se produce un incremento relativamente brusco del espesor de la lámina de líquido (resalto hidráulico), de forma que el valor de la coordenada radial de la superficie libre disminuye desde r_1 hasta r_2 entre las secciones inmediatamente aguas arriba y aguas abajo del resalto. En el tramo de conducto comprendido entre estas secciones se supondrá que los efectos gravitatorios no dan lugar a variaciones apreciables del espesor de la lámina de líquido.



Se supondrán despreciables los efectos de fricción con la pared del tubo.
Determinar:

- a) Distribución de la presión en el líquido en las secciones situadas aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico.
- b) Caudal de líquido que circula por el tubo.
- c) Potencia que se disipa en el resalto.
- d) Incremento de la temperatura del líquido a través del resalto. (Calor específico del líquido: c .) Coméntese el resultado.
- e) Hacer aplicación de las expresiones obtenidas en los apartados anteriores a un caso con los datos siguientes: $\Omega = 250$ rpm; $R = 30$ cm; $r_1 = 20$ cm; $r_2 = 10$ cm; $\rho = 1000$ kg m⁻³; $c = 1$ cal g⁻¹ K⁻¹.

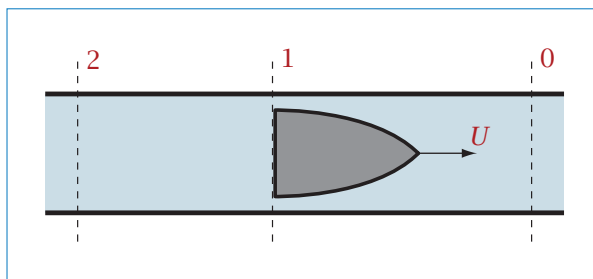
Solución

- a) $p_1 = \frac{1}{2}\rho\Omega^2(r^2 - r_1^2);$
 $p_2 = \frac{1}{2}\rho\Omega^2(r^2 - r_2^2).$
- b) $v_1 = \frac{\Omega}{2}[(a + b)b/a]^{1/2};$
 $v_2 = v_1 a/b;$
 $Q = \pi \frac{\Omega}{2}[(a + b)ab]^{1/2},$ siendo $a = R^2 - r_1^2$ y $b = R^2 - r_2^2.$
- c) $\Phi_v = \rho Q[\Omega^2(r_2^2 - r_1^2)/2 + v_1^2/2 - v_2^2/2].$
- d) $\Delta T = \Phi_v / (\rho Q c).$
- e) $p_1 = 342\,695(r^2 - 0,04);$
 $p_2 = 342\,695(r^2 - 0,01)$ (p_1 y p_2 en Pa y r en m);
 $v_1 = 5,97$ m s⁻¹;
 $v_2 = 3,73$ m s⁻¹;
 $Q = 0,938$ m³ s⁻¹;
 $\Phi_v = 547$ W;
 $\Delta T = 5,8 \times 10^{-4}$ K.

Problema 5.33. Desplazamiento de un móvil a través de un conducto que contiene un fluido en reposo

Un cuerpo como el indicado en la figura, con simetría axial y sección transversal en su cara posterior de área a , se desplaza coaxialmente, con velocidad constante U , a lo largo de un conducto de sección circular de área A que contiene un fluido en reposo de densidad constante ρ . En la sección 1, situada inmediatamente detrás de la cara posterior del móvil, se supondrá que la presión es uniforme. En la zona de paso entre el móvil y el conducto de dicha sección 1, se considerará que la velocidad del fluido es uniforme. Se supondrá despreciable la fricción del fluido con la pared del conducto. Se sugiere utilizar un sistema de referencia ligado al móvil. Determinar.⁴⁷

- Perfil de velocidad en la sección 1.
- Diferencia de presiones $p_0 - p_1$, siendo p_1 la presión en la sección 1 y p_0 la presión en el fluido sin perturbar delante del móvil. En la parte delantera del móvil (hasta la sección 1) se supondrá que los efectos de la viscosidad son despreciables y que, por tanto, la energía mecánica específica es uniforme.
- Fuerza de resistencia al avance que actúa sobre el móvil.
- Diferencia de presiones $p_2 - p_1$, siendo p_2 la presión en la sección 2, en la que la velocidad del fluido es nula.
- Potencia disipada entre las secciones 1 y 2 y potencia necesaria para desplazar el móvil.



Solución

a) En la zona de paso entre el móvil y el conducto,

$$u = U \frac{A}{A - a},$$

y en el resto de la sección, $u = 0$. (La velocidad u está referida a un sistema ligado al móvil, con sentido positivo hacia la izquierda.)

b)

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \frac{A^2}{(A - a)^2} \right].$$

c)

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 A \frac{a^2}{(A - a)^2}.$$

d)

$$p_2 - p_1 = \rho U^2 \frac{a}{A - a}.$$

e)

$$\Phi_v = \rho U^3 A \frac{a^2}{2(A - a)^2},$$

$$\dot{W} = FU = \rho U^3 A \frac{a^2}{2(A - a)^2}.$$

Problema 5.34. Impacto de chorros normales y oblicuos sobre cuerpos en reposo y en movimiento

Un chorro de agua de sección transversal de área A impacta sobre una de las caras verticales de un cuerpo paralelepédico de masa M que se encuentra apoyado en el suelo. La altura del cuerpo es H y la cara de apoyo en el suelo es cuadrada de lado b . El eje del chorro forma un ángulo α con la horizontal, y está contenido en el plano vertical perpendicular a la cara sobre la que impacta el chorro y que pasa por el centro de esta. El coeficiente de fricción estático entre el cuerpo y el suelo es μ . Se despreciarán los efectos de la gravedad sobre el agua y los efectos de la viscosidad, de forma que el módulo

⁴⁷ Parte de este enunciado es adaptación de un problema propuesto por Smits (2000).

de la velocidad del agua relativa al cuerpo en zonas suficientemente alejadas de la zona de impacto es uniforme.

Se supondrá en primer lugar que el cuerpo está inicialmente en reposo y que la velocidad del chorro aumenta progresivamente. Determinar:

- a) Velocidad del chorro necesaria para que el cuerpo empiece a deslizar.
- b) Máxima altura del punto de impacto para la que el cuerpo empieza a deslizar antes de que se inicie su volcado lateral.
- c) Valores numéricos de los resultados de los dos apartados anteriores si $A = 10 \text{ cm}^2$, $M = 100 \text{ kg}$, $b = 40 \text{ cm}$, $\alpha = 20^\circ$ y $\mu = 0,5$.

Se supondrá en lo que sigue que el chorro tiene una velocidad U conocida, y que el cuerpo se mueve por la acción del chorro con una velocidad $u_c = kU$, siendo k una constante ($0 \leq k \leq 1$).

- d) Suponiendo que el chorro es horizontal ($\alpha = 0$), determinar, en función de A , ρ , U y k , y en un sistema de referencia ligado a tierra, la potencia del chorro incidente, \dot{W}_1 , la potencia del chorro deflectado al abandonar el cuerpo, \dot{W}_2 , y la potencia consumida para mover el cuerpo, \dot{W}_c . Coméntese la relación que existe entre estas potencias. Determinése el valor de k para el que la relación \dot{W}_c/\dot{W}_1 es máxima.
- e) Suponiendo que el ángulo α es no nulo, determinar la fuerza que el chorro ejerce sobre el cuerpo en función de A , ρ , U , k y α .

Solución

a)

$$U_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu M g}{\rho A \cos \alpha}}.$$

b)

$$h_{\text{máx}} = \frac{b}{2\mu}.$$

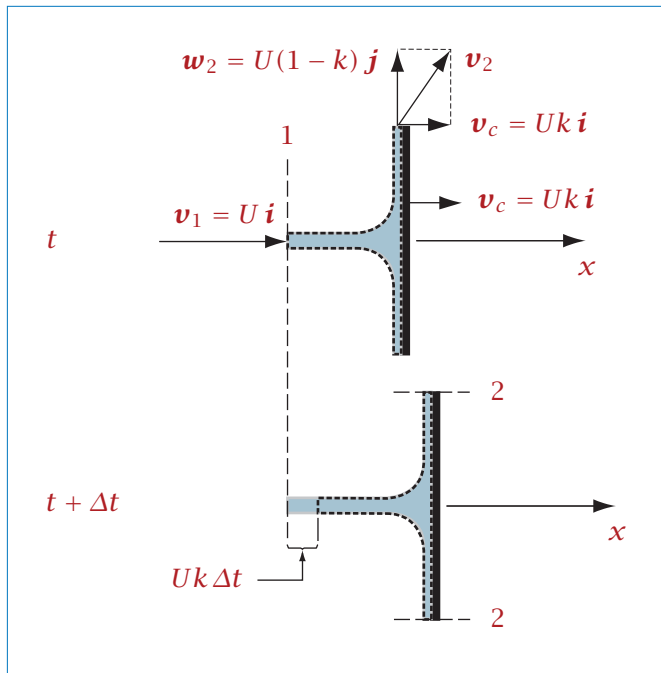
c) $U_{\text{máx}} = 22,847 \text{ m s}^{-1}$, $h_{\text{máx}} = 0,4 \text{ m}$.

d) Este apartado se resolverá de forma detallada. La ecuación (B.1.15), de conservación de la energía mecánica, teniendo en cuenta que se consideran despreciables los efectos de las fuerzas másicas (el potencial U desaparece por tanto de

la ecuación) y de la viscosidad (el término [4] es nulo y en el tensor de tensiones solo aparece la presión), queda de la forma siguiente:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = - \underbrace{\int_{S_c} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS}_{[3]}. \quad (5.34.1)$$

Esta ecuación se va a integrar utilizando un sistema de referencia ligado a tierra y un volumen de control deformable como el de la Figura 5.20.3, que se reproduce a continuación por comodidad (solo se representa la zona de impacto sobre la superficie del cuerpo). El volumen de control está dibujado en azul en dos instan-



tes separados un intervalo Δt . La superficie por la que entra el chorro incidente (sección 1) es fija ($\mathbf{v}_c = 0$), y el resto del volumen de control se desplaza siguiendo el movimiento del cuerpo ($\mathbf{v}_c = u_c \mathbf{i} = Uk \mathbf{i}$). Las secciones 1 y 2 (sección transversal del chorro deflectado) se tomarán suficientemente alejadas de la zona de impacto, de forma que la presión en ellas es uniforme e igual a la presión atmosférica.

Integrando el término [1] de la ecuación (5.34.1), teniendo en cuenta que, según se deduce de la figura, la variación de V_c en el intervalo Δt es igual a $UkA\Delta t$,

resulta

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{2} \rho U^2 U k A = \underbrace{\frac{1}{2} \rho U^3 k A}_{[a]}. \quad (5.34.2)$$

Integrando el término [2] de la ecuación (5.34.1), se obtiene

$$\int_{S_c} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{1}{2} \rho U^2 U A + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \int_{S_2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Teniendo en cuenta que, según se indica en el enunciado, la velocidad relativa del agua en las secciones 1 y 2 se conserva, de forma que $|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_c| = w_2 = w_1 = U(1 - k)$; que, por tanto,

$$v_2^2 = U^2(1 - k)^2 + U^2 k^2$$

(véase la figura), y que de la ecuación de conservación de la masa es inmediato deducir la igualdad de las áreas de las secciones transversales de los chorros incidente y deflectado ($A_2 = A_1 = A$),⁴⁸ la ecuación anterior queda como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS &= -\frac{1}{2} \rho U^3 A + \frac{1}{2} \rho [U^2(1 - k)^2 + U^2 k^2] U(1 - k) A \\ &= -\underbrace{\frac{1}{2} \rho U^3 A}_{[b]} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho U^3 (1 - k)(1 - 2k + 2k^2) A}_{[c]}. \end{aligned} \quad (5.34.3)$$

Finalmente, en el término [3] de la ecuación (5.34.1) solo existe la contribución correspondiente a la superficie de impacto, ya que la presión manométrica en las superficies de entrada y salida del volumen de control y sobre la superficie del chorro es nula:

$$-\int_{S_c} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = -Uk \int_{S_s} p dS = Uk F'_x = -Uk F_x, \quad (5.34.4)$$

siendo

$$-\int_{S_s} p dS = F'_x$$

la fuerza que la superficie de impacto, S_s , ejerce sobre el agua (dada la simetría del problema, esta fuerza solo tiene componente según el eje x),⁴⁹ igual en valor absoluto (con signo opuesto) a la que el agua ejerce sobre aquella, F_x .

⁴⁸ La superficie de área A_2 es una superficie axisimétrica, coaxial con el chorro que impacta.

Véase nota a pie de página 40 del Problema 5.20, p á g . 174.

⁴⁹ En realidad, obsérvese que en los restantes apartados de este problema, en los que $\alpha \neq 0$ y, por tanto, no existe simetría, la fuerza sobre el cuerpo también tendrá una única componente, F_x , al ser despreciables los efectos de fricción entre el agua y el cuerpo y actuar la presión en dirección normal a la superficie de este.

La fuerza F_x se determina a partir de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, tal como se hizo en el Problema 5.20 (ecuación (5.20.1)):

$$F_x = \rho AU^2(1 - k)^2.$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (5.34.4), resulta finalmente

$$-\int_{S_c} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS = -\underbrace{\rho AU^3 k(1 - k)^2}_{[d]}. \quad (5.34.5)$$

Obsérvese que los términos [b] y [c] en la ecuación (5.34.3) y el término [d] de la ecuación (5.34.5) son, respectivamente, las potencias

$$\dot{W}_1 = \frac{1}{2} \rho U^3 A,$$

$$\dot{W}_2 = \frac{1}{2} \rho U^3 (1 - k)(1 - 2k + 2k^2) A,$$

y

$$\dot{W}_c = \rho AU^3 k(1 - k)^2,$$

indicadas en el enunciado. Es inmediato comprobar, sustituyendo las ecuaciones (5.34.2), (5.34.3) y (5.34.5) en la ecuación (5.34.1), que

$$\dot{W}_1 = \frac{1}{2} \rho U^3 k A + \dot{W}_2 + \dot{W}_c. \quad (5.34.6)$$

Es decir, la potencia del chorro que sale, por ejemplo, de una boquilla en reposo situada al final de un conducto se emplea en aumentar la energía cinética del agua en el chorro⁵⁰ (término [a] en la ecuación (5.34.2)) y en mover el cuerpo, quedando la potencia restante en el chorro deflectado por el cuerpo. Obsérvese que, si $k = 0$ (el cuerpo está en reposo), toda la energía del chorro incidente se transfiere al chorro deflectado (al haberse supuesto despreciables las pérdidas de energía por fricción),⁵¹ mientras que, si $k = 1$ (el cuerpo se mueve a la velocidad del chorro), el chorro no es deflectado por el cuerpo ($\dot{W}_2 = 0$), porque no llega a alcanzarlo, y no se transmite potencia al cuerpo ($\dot{W}_c = 0$),⁵² por lo que toda la

⁵⁰ Este incremento de energía se debe a que la longitud del chorro va aumentando a medida que va saliendo el agua de la boquilla.

⁵¹ Obsérvese que en este caso la longitud del chorro incidente no aumenta y no se emplea potencia en mover el cuerpo, al estar este en reposo.

⁵² Obviamente, el cuerpo puede llegar a moverse a la velocidad del chorro solo si lo hace sin fricción (cuando el movimiento del cuerpo se debe exclusivamente a la acción del chorro), o bien si existe una fuerza exterior adicional sobre el cuerpo que compense la fuerza de fricción, de forma que la fuerza ejercida por el chorro sea nula.

potencia del chorro que sale de la boquilla se invierte en incrementar la energía cinética del chorro a medida que aumenta la longitud de este.⁵³

Compruébese que la relación

$$\frac{\dot{W}_c}{\dot{W}_1} = 2k(1 - k)^2$$

es máxima para

$$k = 1/3.$$

e)

$$F_x = \rho AU^2 \left(1 - \frac{k}{\cos \alpha}\right)^2 \cos \alpha.$$

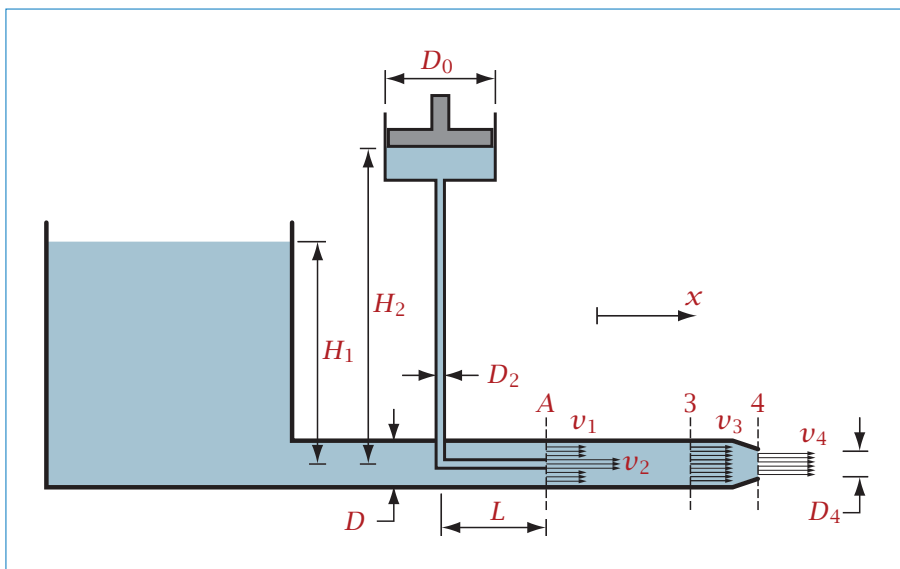
[Este apartado es idéntico al apartado d) (en el que el ángulo β es nulo) del Problema 5.11. Obsérvese que el ángulo α en este problema es el complementario del adoptado en el Problema 5.11.]

Problema 5.35. Bomba de inyección

En la instalación de la figura, el depósito de la izquierda, de grandes dimensiones y abierto a la atmósfera, que contiene un líquido de densidad $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ hasta una altura $H_1 = 0,5 \text{ m}$, se descarga a través de una tubería de diámetro $D = 2,5 \text{ cm}$ conectada al fondo (se tendrá en cuenta que $D \ll H_1$). Esta tubería descarga el líquido a la atmósfera a través de una boquilla de diámetro $D_4 = 1,5 \text{ cm}$ (sección 4). Para aumentar el caudal de descarga del depósito, se inyecta el mismo líquido en el centro de la tubería mediante un tubo de diámetro $D_2 = 0,5 \text{ cm}$, conectado al depósito superior de la figura, de sección transversal de diámetro $D_0 = 10 \text{ cm}$, en el que el líquido es impulsado por un pistón que se mueve hacia abajo con una velocidad $U = U_0 + at$, siendo t el tiempo y U_0 y a constantes. El depósito superior está completamente lleno de líquido (no contiene aire). El tramo horizontal del tubo por el que se inyecta el líquido tiene una longitud $L = 1,2 \text{ m}$. Se despreciarán los efectos viscosos en el flujo entre del depósito de la izquierda y la sección A en la que se inyecta el líquido. Se despreciarán asimismo las

⁵³ Puede ser interesante determinar si los resultados anteriores serían válidos para situaciones en las que $k < 0$ o $k > 1$, y, en su caso, discutir la ecuación (5.34.6).

fuerzas de fricción ejercidas por las paredes en toda la tubería. Se supondrá que las distribuciones de las velocidades v_1 , v_2 , v_3 y v_4 indicadas en la figura son uniformes.



- Suponiendo que el pistón del depósito superior está en reposo y que la velocidad $v_2 = 0$, determinar el caudal Q_a de descarga del depósito de la izquierda (suponiendo despreciables los efectos viscosos en toda la tubería), la fuerza horizontal que se ejerce sobre la instalación y la presión manométrica p_0 en el depósito superior, a la altura de la superficie del pistón en contacto con el líquido (situada a una altura $H_2 = 1$ m por encima del punto de inyección). Coméntese este último resultado y discútase la validez de las hipótesis adoptadas para su obtención.
- Suponiendo que $a = 0$, determinar el valor de la velocidad U_0 a la que debe desplazarse el pistón para conseguir un caudal $Q_b = 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ de descarga del depósito de la izquierda. (Se sugiere que se determine primero la presión necesaria en la sección A, y se aplique después la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento entre dicha sección y la de salida de la tubería.)

- c) Suponiendo que $a = 0,2 \text{ m s}^{-2}$ y que U_0 tiene el valor calculado en el apartado anterior, determinar la fuerza horizontal que se ejerce sobre el tubo de inyección en el instante $t = 0$ (se despreciarán los efectos del flujo exterior al tubo).

Solución

a) Al ser el flujo cuasiestacionario e incompresible y ser despreciables los efectos de viscosidad, puede aplicarse la ecuación de Bernoulli (B.4.2) entre dos puntos arbitrarios de la superficie libre en el depósito y de la sección 4, obteniéndose⁵⁴

$$v_4 = (2gH_1)^{0,5} = 3,132 \text{ m s}^{-1}.$$

El caudal de descarga es, por tanto,

$$Q_a = v_4 \pi D_4^2 / 4 = 5,535 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Demuéstrese que la fuerza horizontal que se ejerce sobre la instalación es

$$F_x = -\rho v_4^2 \pi D_4^2 / 4 = -1,734 \text{ N}.$$

Si fuese posible aplicar la ecuación de Bernoulli en la proximidad de la sección de salida del tubo de descarga del depósito superior, se deduciría que, en dicha sección de salida, S (en la que el fluido se encuentra en reposo, según se indica en el enunciado para este apartado), existiría la presión manométrica de remanso, es decir,

$$p_s = \frac{1}{2} \rho v_4^2.$$

Sin embargo, en la parte posterior del tubo de descarga se va a producir el desprendimiento de la corriente, lo que hace que no sea posible despreciar los efectos de la viscosidad ni, por tanto, aplicar la ecuación de Bernoulli.⁵⁵ La presión en S va a ser, en realidad, inferior a la presión de remanso, y alcanzará un valor del orden de las presiones estáticas existentes aguas arriba y aguas abajo de dicha sección, que en principio sí podrían ser determinadas de forma aproximada mediante la

⁵⁴ Si aún no se ha estudiado la ecuación de Bernoulli, véase la nota 8 del Problema 5.8, pág.129.

⁵⁵ Si sería posible aplicar la ecuación de Bernoulli (y por tanto la presión en S sí podría tomarse igual a la presión de remanso) si la sección de salida del tubo estuviese orientada en dirección opuesta a la de la figura.

ecuación de Bernoulli:⁵⁶

$$p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_4^2 - v_1^2),$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\rho(v_4^2 - v_3^2).$$

Por otra parte, de la condición de equilibrio estático del líquido en el depósito superior y en su tubo de descarga, resulta

$$p_0 = p_S - \rho g H_2.$$

Sustituyendo valores, si se supone, por ejemplo, que $p_S = p_1$, se obtiene

$$p_0 = -5595 \text{ N m}^{-2}.$$

b) Compruébese que la solución se obtiene a partir del siguiente sistema de ecuaciones, en el que v_1 , v_2 , v_4 y p_A son las incógnitas:⁵⁷

$$Q_b = v_1 \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4}, \quad (5.35.1)$$

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g H_1, \quad (5.35.2)$$

$$v_2 D_2^2 + v_1 (D^2 - D_2^2) = v_4 D_4^2, \quad (5.35.3)$$

$$-\rho v_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} - \rho v_1^2 \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} + \rho v_4^2 \frac{\pi D_4^2}{4} = p_A \frac{\pi D^2}{4}, \quad (5.35.4)$$

de donde se obtiene $v_2 = 19,35 \text{ m s}^{-1}$.

La velocidad U_0 se obtiene a partir de la ecuación de conservación de la masa,

$$U_0 D_0^2 = v_2 D_2^2,$$

de donde resulta

$$U_0 = 4,837 \text{ cm s}^{-1}.$$

c) La velocidad del líquido en el tubo de inyección se obtiene de la ecuación de conservación de la masa anterior,

$$v_2(t) = (U_0 + at) \frac{D_0^2}{D_2^2}.$$

⁵⁶ Téngase en cuenta que la relación de áreas en el ensanchamiento brusco de la sección de paso que se produce en la sección A debido a la presencia del tubo de inyección, $D^2/(D^2 - D_2^2) = 1,042$, es próxima a la unidad, lo que dará lugar a una pérdida de energía mecánica muy pequeña y un cambio pequeño en la presión estática.

⁵⁷ Obsérvese que se ha tomado una presión uniforme en la sección A igual a la presión que existe aguas arriba de esta en la tubería de descarga del depósito de la izquierda.

De la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento aplicada al líquido contenido en el tubo de inyección, resulta⁵⁸

$$\rho \frac{dv_2}{dt} \frac{\pi D_2^2}{4} L + \rho v_2^2(0) \frac{\pi D_2^2}{4} = -F_{\text{iny},x},$$

de donde se obtiene

$$F_{\text{iny},x} = -9,236 \text{ N.}$$

Problema 5.36. Proceso de llenado con aire de un depósito desde otro depósito de grandes dimensiones

Un depósito de volumen $V_1 = 0,12 \text{ m}^3$, que contiene aire a una presión $p_1 = 2 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$, es conectado en un instante dado a otro depósito de dimensiones muy grandes, en el que puede suponerse que se mantienen constantes y uniformes la temperatura, $T_0 = 300 \text{ K}$, y la presión, p_0 , que es superior a p_1 . En el instante inmediatamente posterior a la conexión se mide un gasto másico entre los dos depósitos $G = 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$.

- a) Enumerar las hipótesis (y discutir su justificación) que deberían utilizarse al aplicar la ecuación de conservación de la energía (B.1.12) al volumen de control limitado por las paredes interiores del depósito pequeño y la sección transversal del conducto que comunica los dos depósitos, de forma que dicha ecuación pueda simplificarse y adoptar la expresión siguiente:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

- b) A partir de la última ecuación y de la ecuación de conservación de la masa aplicada al mismo volumen de control del apartado anterior, determinar el ritmo de variación de la temperatura en el depósito pequeño en el instante inicial.

⁵⁸ Se ha despreciado el efecto del flujo exterior del líquido que fluye desde el depósito de la izquierda, tal como se indica en el enunciado.

Solución

a) Se deja al lector la resolución de este apartado.

b) La ecuación del apartado a) puede escribirse de la forma siguiente:⁵⁹

$$m_1 \frac{de}{dt} + e \frac{dm_1}{dt} + e \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{p}{\rho} \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (5.36.1)$$

siendo m_1 la masa de aire en el depósito de volumen V_1 y S la sección transversal del conducto que comunica los depósitos. Introduciendo en esta ecuación la ecuación de conservación de la masa, que puede escribirse como sigue:

$$\frac{dm_1}{dt} = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = G,$$

y teniendo en cuenta que

$$p = \rho RT$$

y

$$de = c_v dT,$$

resulta⁶⁰

$$m_1 c_v \frac{dT}{dt} = RT_1 G,$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{RT_1 G}{c_v \rho_1 V_1} = \frac{(\gamma - 1) T_1 G}{\frac{p_1}{RT_1} V_1} \\ &= \frac{(0,4)(300)(10^{-4})}{\frac{(2)(9,81)(10^4)}{(287)(300)}} 0,12 \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = 0,0439 \text{ K s}^{-1}.}$$

⁵⁹ Obsérvese que, en el instante inicial considerado, los valores de la energía interna que aparecen como factores en los sumandos segundo y tercero de la ecuación (5.36.1) (que son los que existen en el depósito pequeño y en el conducto, respectivamente) son iguales entre sí.

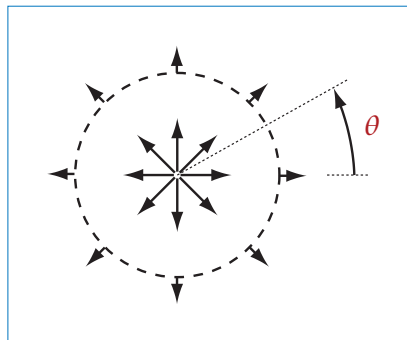
⁶⁰ Obsérvese que, en el instante inicial, $p/\rho = RT$ es uniforme en todo el campo fluido.

Problema 5.37. Flujo debido a una fuente bidimensional

- a) A partir de la ecuación de conservación de la masa (y teniendo en cuenta que $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$), demuéstrese que el campo de velocidad en el flujo estacionario e incompresible debido a una fuente bidimensional, con un caudal por unidad de longitud q , está determinado por la siguiente función de corriente: $\psi = q\theta/2\pi$, siendo θ la coordenada acimutal.
- b) Determinar la función de corriente y el campo de velocidad correspondientes a la superposición de la fuente descrita en el apartado anterior y un flujo uniforme de velocidad U .
- c) Determinar el campo de presión en el flujo debido a la fuente bidimensional. Despréciense las fuerzas másicas. ¿Puede obtenerse el campo de presión en el flujo que resulta de la superposición lineal de los flujos considerados en el apartado anterior (fuente bidimensional y flujo uniforme) sumando los campos de presión correspondientes a cada uno de ellos?

Solución

a) De la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa, aplicada a la superficie fluida⁶¹ que coincide con la superficie de control fija de la figura adjunta,



⁶¹ Se trata de un problema bidimensional, por lo que se considera una superficie fluida en lugar de un volumen fluido.

con forma de círculo de radio r y centro situado sobre la fuente, se obtiene, teniendo en cuenta la simetría del problema,

$$q = \oint_L \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = 2\pi r v_r \quad (5.37.1)$$

(L denota la circunferencia que delimita la superficie de control),⁶² de donde resulta⁶³

$$v_r = \frac{q}{2\pi r}.$$

Integrando $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, se obtiene

$$\psi = q\theta/2\pi.$$

b) El campo de velocidad correspondiente al flujo uniforme es

$$v_{r2} = U \cos \theta,$$

$$v_{\theta2} = -U \sin \theta.$$

El campo de velocidad que se pide puede obtenerse como superposición lineal de los correspondientes a la fuente y al flujo uniforme:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{q}{2\pi r} + U \cos \theta, \\ v_\theta &= -U \sin \theta. \end{aligned}$$

La función de corriente puede obtenerse como superposición lineal de las correspondientes a la fuente ($\psi_1 = q\theta/2\pi$) y al flujo uniforme ($\psi_2 = Ur \sin \theta$, que se obtiene integrando $v_{\theta2} = -U \sin \theta = -\partial\psi_2/\partial r$):

$$\psi = q\theta/2\pi + Ur \sin \theta + C.$$

⁶² El término [1] de la ecuación (B.1.3) es nulo por ser el flujo estacionario. La contribución al término [2] correspondiente a la circunferencia de radio r da lugar al segundo miembro de la ecuación (5.37.1). El caudal q del primer miembro corresponde a la contribución al término [2] debida a la fuente, que está situada en el centro de la superficie de control, y que constituye un punto singular del campo fluido. Obsérvese que la ecuación (B.1.3) se ha reducido en este caso a una relación que expresa la conservación del volumen (en realidad, del área, al ser el problema bidimensional).

⁶³ Obsérvese que la velocidad v_r no está definida en $r = 0$, lo que indica que la fuente es un punto singular en el flujo, como ya se ha comentado. En la figura, las flechas representan la velocidad del fluido en una circunferencia de radio muy pequeño.

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

Es interesante dibujar las líneas de corriente, situar el punto de remanso y explicar que la configuración considerada, formada por una fuente y un flujo uniforme, describe el flujo alrededor del denominado semi-óvalo de Rankine.

c) Las ecuaciones (B.2.14) y (B.2.15) de conservación de las dos componentes de la cantidad de movimiento (correspondientes a un flujo incompresible con viscosidad uniforme), teniendo en cuenta que el flujo es estacionario y despreciando las fuerzas másicas, se reducen a

$$\begin{aligned} \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right\}, \\ \rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo $v_r = q/(2\pi r)$ y $v_\theta = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \frac{q}{2\pi r} \frac{-q}{2\pi r^2} &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0, \end{aligned}$$

e integrando, resulta

$$p = p_0 + \int_{\infty}^r \frac{\rho q^2}{4\pi^2 r^3} dr = p_0 - \frac{\rho q^2}{8\pi^2 r^2},$$

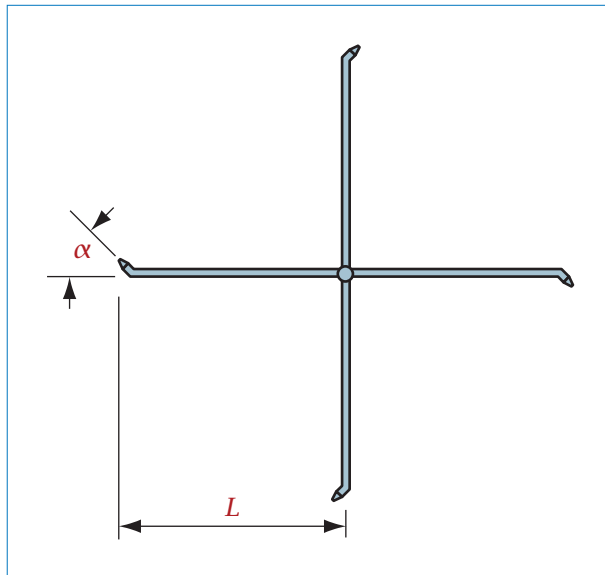
siendo la constante p_0 la presión en el límite $r \rightarrow \infty$.

Obsérvese que la expresión anterior puede obtenerse directamente aplicando la ecuación (B.4.2) de Bernoulli entre un punto de coordenada radial r y un punto en el infinito.

Explicar por qué no es posible obtener la distribución de presión en el flujo que resulta de la superposición de una fuente y un flujo uniforme sumando las distribuciones que se obtienen para cada uno de estos flujos elementales.

Problema 5.38. Flujo en un aspersor de riego no plano

El agua entra en el aspersor de la figura a través de una tubería vertical de diámetro $D_1 = 2,54$ cm, con una velocidad media $v_1 = 1,6$ m s⁻¹. Los cuatro brazos están contenidos en el plano horizontal, que es el de rotación. El caudal de alimentación del aspersor se distribuye en partes iguales por los cuatro brazos. Éstos son de longitud $L = 0,5$ m y tienen acopladas en sus extremos boquillas de diámetro $D_2 = 4$ mm. El eje de cada boquilla forma un ángulo $\beta = 60^\circ$ (no representado en la figura) con el plano de rotación, y el plano vertical que contiene dicho eje forma un ángulo $\alpha = 45^\circ$ con el plano vertical que contiene el brazo.



Calcular:

- Momento de las fuerzas que ejerce el agua sobre el aspersor cuando este está en reposo.
- Potencia necesaria para mantener el aspersor con una velocidad de giro igual a la mitad de la que alcanzaría girando libremente en ausencia de fuerzas de fricción.

Solución

Se planteará en primer lugar el problema con carácter general, antes de resolver los dos apartados del enunciado. La ecuación (B.1.11) de conservación del momento cinético,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}] dS}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{x} \times (\bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n}) dS}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}_m dV}_{[4]},$$

se va proyectar en la dirección del eje de giro del aspersor. Se utilizará un sistema de referencia ligado a tierra y un volumen de control móvil limitado por las paredes interiores de los brazos, las secciones de salida del agua y una sección horizontal de la tubería de alimentación. Se tomará un vector de posición, \mathbf{x} , con origen en el eje del aspersor.

En el sistema de referencia elegido, aunque el movimiento es no estacionario, el momento cinético del fluido en la dirección del eje de giro del aspersor se mantiene constante en el tiempo, por lo que la proyección en dicha dirección del término [1] es nula.

La fuerza de gravedad (única fuerza másica presente) no produce ninguna contribución a la proyección sobre el eje de giro del momento resultante,⁶⁴ por lo que la proyección del término [4] es también nula.

Despreciando las tensiones viscosas en las secciones de salida del agua y teniendo en cuenta que en dichas secciones la presión es la atmosférica, se obtiene que el término [3] es igual a $-\mathbf{M}$, siendo \mathbf{M} el momento de las fuerzas que el fluido ejerce sobre el aspersor.

El término [2], es decir, el flujo del momento cinético a través de la superficie de control, es obviamente distinto de cero solo en las secciones de salida del agua. Debido al movimiento rotatorio del aspersor, la velocidad de un punto genérico de la superficie de control es $\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, siendo $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_x$ la velocidad de giro del aspersor. En las superficies de salida del agua, $\mathbf{v}_c = \Omega L \mathbf{e}_\theta$. La velocidad absoluta del fluido, \mathbf{v} , puede descomponerse en la suma de una velocidad relativa al aspersor, \mathbf{w} , y de una velocidad de arrastre, $\mathbf{u} = \mathbf{v}_c$, de manera que, suponiendo que la velocidad del agua del aspersor es uniforme en la sección de

⁶⁴ Obsérvese además que, dada la geometría del aspersor, el momento resultante que se ejerce sobre el aspersor debido al peso del agua es nulo.

salida y normal a esta, se obtiene

$$[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}] = [(\underbrace{\mathbf{w} + \mathbf{v}_c}_{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n}] = w, \quad (5.38.1)$$

siendo w el módulo de la velocidad \mathbf{w} .

Por otra parte, la velocidad del agua relativa al aspersor, \mathbf{w} , puede descomponerse como sigue:

$$\mathbf{w} = w(\cos \beta \cos \alpha \mathbf{e}_r + \cos \beta \sin \alpha \mathbf{e}_\theta + \sin \beta \mathbf{e}_x).$$

por lo que, suponiendo que \mathbf{x} está contenido en el plano de rotación del aspersor (en realidad, basta con que su origen esté situado sobre el eje del aspersor para obtener los mismos resultados que se presentan a continuación), la proyección del momento cinético por unidad de masa en dirección del eje de giro, $(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x$, resulta

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x &= [\underbrace{L\mathbf{e}_r}_{\mathbf{x}} \times (\underbrace{\mathbf{w} + L\Omega\mathbf{e}_\theta}_{\mathbf{v}})] \cdot \mathbf{e}_x \\ &= (-Lw \sin \alpha \cos \beta + \Omega L^2) \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (5.38.2)$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (5.38.1) y (5.38.2) en el término [2], se obtiene la componente axial del momento de giro que se ejerce sobre el aspersor,

$$M = 4\rho Lw \frac{\pi D_2^2}{4} (w \sin \alpha \cos \beta - \Omega L). \quad (5.38.3)$$

El módulo de la velocidad relativa, w , se obtiene a partir de la ecuación de conservación del volumen de agua, imponiendo que el caudal de agua que entra en el aspersor a través de la tubería de alimentación es igual al caudal de agua que sale a través de las 4 secciones de salida,

$$v_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 4w \frac{\pi D_2^2}{4}. \quad (5.38.4)$$

a) El momento ejercido por el agua sobre el aspersor cuando este está en reposo se obtiene sustituyendo $\Omega = 0$ en la ecuación (5.38.3), obteniéndose

$$M_{(\Omega=0)} = 4\rho L \frac{\pi D_2^2}{4} w^2 \sin \alpha \cos \beta.$$

Sustituyendo en esta ecuación los datos del enunciado y el valor de $w = 16,13 \text{ m s}^{-1}$ que se obtiene a partir de la ecuación (5.38.4), resulta

$$M_{(\Omega=0)} = 2,31 \text{ N m.}$$

b) En ausencia de fuerzas de fricción, el aspersor alcanzaría la velocidad de giro correspondiente a $M = 0$ que se deduce de la ecuación (5.38.3),

$$\Omega_{(M=0)} = \frac{w}{L} \sin \alpha \cos \beta = 11,40 \text{ rad s}^{-1} = 109 \text{ rpm},$$

por lo que, girando a una velocidad $\Omega_2 = \Omega_{(M=0)}/2$, el momento correspondiente es

$$M_{(\Omega_2)} = 4\rho L \frac{w^2}{2} \frac{\pi D_2^2}{4} \sin \alpha \cos \beta = 1,16 \text{ N m},$$

y la potencia necesaria para mantener el aspersor con la velocidad de giro Ω_2 es

$$W_{(\Omega_2)} = M_{(\Omega_2)}\Omega_2 = 6,59 \text{ W}.$$

Problema 5.39. Ventilación y ensayo de incendio en un túnel de carretera

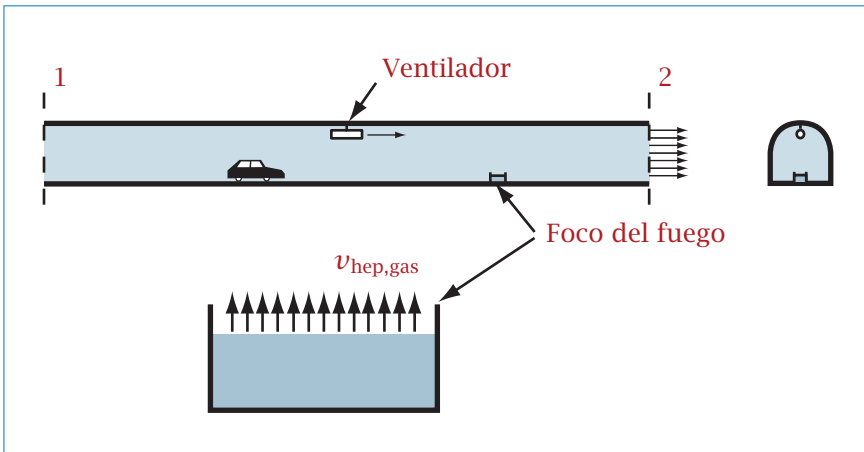
En un túnel de carretera de longitud $L = 800 \text{ m}$ y sección transversal de área $A = 80 \text{ m}^2$ y perímetro $P = 36 \text{ m}$ existe un único ventilador suspendido del techo, equidistante de las bocas de entrada y salida, que proporciona un flujo de aire en dirección longitudinal. Todas las magnitudes se considerarán uniformes en cada sección transversal del túnel. El ventilador en funcionamiento transmite una fuerza de empuje sobre el techo del túnel $E = 1500 \text{ N}$. El flujo de aire ejerce una tensión cortante $\tau = 0,016\rho v^2$ sobre las paredes del túnel, siendo ρ la densidad del fluido y v su velocidad. En el exterior del túnel, la presión $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ y la temperatura $T_0 = 25^\circ\text{C}$. La presión en la sección de la boca de entrada (sección 1) se tomará $p_1 = p_0 - \frac{1}{2}\rho_0 v^2$, siendo ρ_0 la densidad del aire ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) en el exterior del túnel. Los vehículos ejercen una fuerza de arrastre sobre el aire del túnel dada por la expresión $F_v = C_D \frac{1}{2}\rho_0 (v_v - v)^2 A_v N$ (si $v_v < v$, la fuerza F_v tendería a frenar el flujo de aire), siendo C_D y A_v el coeficiente de arrastre y el área frontal de un vehículo representativo, v_v la velocidad de los vehículos (signo positivo en el sentido de la ventilación) y N el número de vehículos en el túnel. El problema se supondrá cuasiestacionario.

a) Determinar la velocidad del aire en el túnel. Se dispone de los siguien-

tes datos, además de los ya indicados:

$$C_D = 0,6; v_v = 20 \text{ m s}^{-1}; A_v = 2 \text{ m}^2 \text{ y } N = 25,$$

y se supondrá que los vehículos circulan en el mismo sentido que el aire de ventilación.



Se quiere realizar un ensayo de incendio en el túnel, para lo que se utilizará heptano como combustible, que será quemado en un recipiente cilíndrico de diámetro $d = 1,4 \text{ m}$, situado en una sección equidistante entre el ventilador y la boca de salida del túnel (sección 2). El calor por unidad de masa de combustible liberado en la combustión es $\dot{Q} = 48 \text{ MJ kg}^{-1}$ y la densidad del heptano líquido es $\rho_{\text{hep,liq}} = 680 \text{ kg m}^{-3}$. Durante el ensayo se consumirá, a un ritmo que se supondrá constante, un volumen $V = 150 \text{ l}$ de combustible líquido en un tiempo de $18 \text{ min y } 24 \text{ s}$. La combustión tiene lugar tras la mezcla con el aire del heptano vaporizado, que se supondrá que tiene una densidad $\rho_{\text{hep,gas}} = 3 \text{ kg m}^{-3}$ (la vaporización es debida al calor transmitido desde la llama).

- Calcular la velocidad $v_{\text{hep,gas}}$ (que se supondrá uniforme) del combustible vaporizado y la potencia emitida por el fuego.
- Plantear el sistema de ecuaciones que permite determinar la velocidad y temperatura de los gases que salen del túnel en condiciones estacionarias (se supone que estas se alcanzan transcurrido un tiempo desde

el inicio del ensayo). Se supondrá que los gases calientes ocupan uniformemente toda la porción de túnel comprendida entre el foco del fuego y la sección de salida (en realidad, debido a la flotación, los gases se acumulan en la parte superior; en todo caso, sería necesaria una cierta distancia para uniformizar el flujo); que las paredes del túnel son adiabáticas, y que no hay vehículos en el túnel durante el ensayo. Obviamente, se despreciará el gasto másico de combustible frente al de aire que circula por el túnel. Tómese un calor específico $c_p = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Solución

a) Aplicando la ecuación (B.1.7) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control limitado por las secciones de entrada y salida del túnel, las superficies interiores de la paredes del túnel y la superficie de los vehículos,⁶⁵ compruébese que se obtiene la siguiente relación para su proyección horizontal

$$0 = E + \frac{1}{2} C_D \rho_0 (v_v - v)^2 A_v N - 0,016 \rho_0 v^2 PL - \frac{1}{2} \rho_0 v^2 A, \quad (5.39.1)$$

donde

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}.$$

Obsérvese que, en la ecuación (B.1.7), el término [1] es nulo por considerarse el problema estacionario;⁶⁶ el término [2] también se anula al ser iguales los flujos convectivos a través de las secciones de entrada y salida del túnel,⁶⁷ y el término

⁶⁵ También puede utilizarse un volumen de control que excluya el ventilador e incluya en la superficie que lo delimita una superficie que encierre el ventilador (de la que formarían parte la superficie y las secciones de entrada y salida de este).

⁶⁶ Aunque la existencia de vehículos en movimiento hace que el flujo de aire en el túnel sea estrictamente no estacionario, en una escala temporal suficientemente grande los efectos no estacionarios pueden ser ignorados, quedando la influencia de los vehículos plasmada a través del coeficiente C_D que se proporciona en el enunciado.

⁶⁷ En las superficies del volumen de control que coinciden con superficies sólidas fijas, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c = 0$, y en la superficie de los vehículos, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$, por lo que obviamente no se produce ninguna contribución al flujo convectivo.

Por otra parte, dado que se ha incluido el ventilador dentro del volumen de control, las secciones de entrada y salida de este no forman parte de la superficie de control. Si se hubiese elegido el volumen de control descrito en la nota a pie de página 65, obviamente el flujo de aire a través del ventilador atravesaría la superficie de control, y en principio sería necesario calcular las contribuciones a los términos [2] y [3] correspondientes a las secciones de entrada y salida del ventilador que formarían parte de dicha superficie. Sin embargo, el efecto global del ventilador sobre el volumen fluido se traduciría, en definitiva, en la fuerza de empuje E , que es dato del problema, y que

[3] da lugar a todos los sumandos que aparecen en el segundo miembro de la ecuación (5.39.1) (la proyección horizontal del término [4] es nula⁶⁸). El primer sumando, E , es el módulo de la fuerza de empuje que soporta el ventilador,⁶⁹ y que se transmite al techo del túnel a través del soporte que lo mantiene suspendido. Esta fuerza “aparece” en la zona de intersección entre la superficie del volumen de control y dicho soporte.⁷⁰ Los sumandos segundo y tercero corresponden a la fuerzas de impulsión y fricción ejercidas sobre el aire por los vehículos y por las paredes del túnel, respectivamente. El último sumando corresponde a la resultante de las fuerzas de presión sobre las secciones de entrada y salida del túnel.

Sustituyendo valores en la ecuación (5.39.1), se obtiene

$$v = 3,303 \text{ m s}^{-1}.$$

b) De la ecuación de conservación de la masa aplicada al recipiente que contiene el heptano, se obtiene

$$\rho_{\text{hep,liq}} v_{\text{hep,liq}} = \rho_{\text{hep,gas}} v_{\text{hep,gas}},$$

donde $v_{\text{hep,liq}}$ es la velocidad de descenso de la superficie libre de heptano, que viene dada por

$$v_{\text{hep,liq}} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{V}{t},$$

siendo t el tiempo en el que se consume el volumen V de combustible. Sustituyendo valores, de las dos ecuaciones anteriores resulta

$$v_{\text{hep,gas}} = 0,02 \text{ m s}^{-1}.$$

La potencia emitida por el fuego es

$$\dot{Q} = \rho_{\text{hep,liq}} \frac{V}{t} \dot{Q} = 4,435 \text{ MW}.$$

obviamente está determinada por un balance de cantidad de movimiento en el ventilador, en el que intervendrían las mismas contribuciones a los términos convectivo y de fuerzas de superficie que acaban de ser mencionadas.

⁶⁸ En todo caso, en ausencia de un incendio o de determinados contaminantes emitidos por los vehículos, la influencia de la fuerza gravitatoria sobre las características del flujo y la distribución de contaminantes será despreciable.

⁶⁹ La fuerza de empuje sobre el ventilador tiene sentido contrario al del flujo de aire. La fuerza que se deduce del término [3] es la que ejerce el ventilador sobre el volumen fluido, opuesta a la anterior.

⁷⁰ Si se hubiese utilizado el volumen de control descrito en la nota a pie de página 65, el efecto del ventilador quedaría reflejado en las contribuciones mencionadas en el segundo párrafo de la nota a pie de página 67, cuya suma sería igual al empuje E .

c) Compruébese que el sistema de ecuaciones que debe plantearse es el siguiente:

$$\begin{aligned}\rho_0 v &= \rho_s v_s, \\ -\rho_0 A v^2 + \rho_s A v_s^2 &= E - 0,016 \rho_0 v^2 P(0,75L) \\ &\quad - 0,016 \rho_s v_s^2 P(0,25L) \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_0 v^2 A, \\ \rho_0 A v \left[c_p (T_s - T_0) + \frac{1}{2} (v_s^2 - v^2) \right] &= E v + \dot{Q}, \\ \frac{p_0}{\rho_s} &= R T_s\end{aligned}$$

(el subíndice s denota condiciones aguas abajo del foco del fuego, y v es la velocidad del aire aguas arriba de este; obsérvese que se ha supuesto $p_s = p_0$ en la última ecuación). La solución del anterior sistema de ecuaciones es la siguiente: $v = 1,570 \text{ m s}^{-1}$, $v_s = 1,728 \text{ m s}^{-1}$, $T_s = 328,1 \text{ K}$ y $\rho_s = 1,062 \text{ kg m}^{-3}$.

Problema 5.40. Flujo alrededor de un obstáculo

Un líquido de densidad ρ fluye alrededor de un obstáculo bidimensional de sección circular, según se indica en la Figura 5.40.1. En la sección AB, situada suficientemente aguas arriba del obstáculo, la velocidad del líquido tiene una única componente, según el eje x y uniforme ($u = U_\infty$), y la presión manométrica es nula. En la sección CD, situada aguas abajo del obstáculo, se supondrá que la componente de la velocidad según el eje x varía linealmente con y en $|y| \leq h$,

$$u = U_0 + (U_\infty - U_0)|y|/h,$$

siendo U_0 una constante, y es constante ($u = U_\infty$) en $|y| \geq h$.

Se supondrá que el flujo es bidimensional y estacionario, y se utilizará en el análisis un volumen de control como el indicado en la figura con líneas a trazos, con las superficies laterales BC, CD y DA suficientemente alejadas del obstáculo, de forma que, sobre toda la superficie exterior del volumen de control, puede suponerse que las fuerzas de superficie se reducen a las debidas a la presión y que esta es igual a la presión en la sección AB, sin

perturbar por el obstáculo. Se despreciarán las fuerzas másicas.

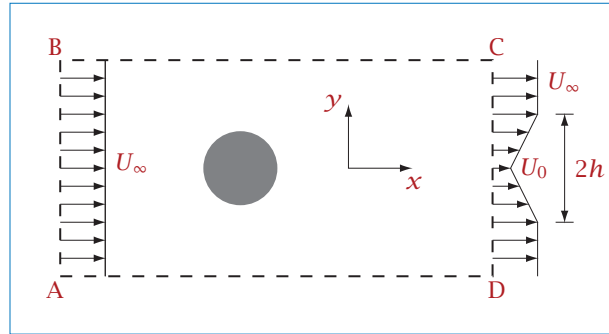


Figura 5.40.1
Obstáculo no confinado.

Determinar:

- Flujo másico a través de las superficies laterales BC y AD.
- Fuerza (por unidad de anchura) que se ejerce sobre el obstáculo.
- Valores de U_0 , y del flujo másico y la fuerza obtenidos en los apartados anteriores, para el caso de que el obstáculo cilíndrico de sección circular se sustituya por una placa plana de espesor despreciable, paralela al flujo y perpendicular al eje y , situada en $y = 0$, entre las secciones AB y CD, y con una longitud igual a la distancia entre estas últimas. En la sección CD se supondrá que existe el mismo tipo de perfil de velocidad descrito al principio del enunciado. Compárense dichos resultados con los que se obtienen para la capa límite laminar sobre una placa plana.

Se supondrá en lo que sigue que el cilindro está confinado en el centro de un canal de anchura H . La distribución de velocidad sigue siendo uniforme en la sección AB ($u = U_\infty$), y en la sección CD se supondrá que tiene la misma forma que antes: $u = U_0 + (U_1 - U_0)|y|/h$ en $|y| \leq h$, y $u = U_1$ en $|y| > h$, siendo U_1 una constante que debe ser determinada.

Se despreciarán los efectos de fricción sobre las paredes del conducto y se supondrá que la fuerza de arrastre sobre el cilindro es un 50% superior a

la calculada en el caso del apartado b).

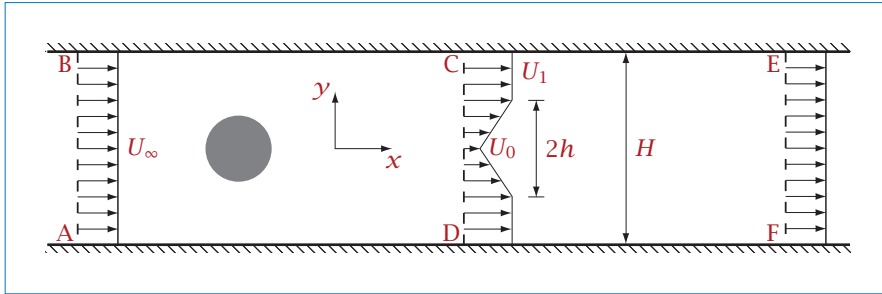


Figura 5.40.2
Obstáculo en el interior de un conducto.

Determinar:

- d) Velocidad U_1 .
- e) Presión (que se supondrá uniforme) en la sección CD.
- f) Presión en una sección EF, aguas abajo de la sección CD, en la que puede considerarse que la velocidad del líquido es uniforme.
- g) Potencia (por unidad de anchura) necesaria para mover el fluido entre las secciones AB y EF.

Solución

a) Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa al volumen de control indicado en el enunciado,⁷¹ representado en la Figura 5.40.1, se obtiene

$$-\rho U_\infty 2h + \dot{m}_{BC} + \dot{m}_{AD} + 2\rho \int_0^h \left[U_0 + (U_\infty - U_0) \frac{y}{h} \right] dy = 0,$$

siendo \dot{m}_{BC} y \dot{m}_{AD} los flujos másicos salientes a través de BC y AD (que obviamente son iguales entre sí, dada la simetría del problema). De la ecuación anterior resulta

$$\dot{m}_{BC} = \dot{m}_{AD} = \rho (U_\infty - U_0) \frac{h}{2}. \quad (5.40.1)$$

⁷¹ Obsérvese que la anchura del volumen de control elegido, $\overline{AB} = \overline{CD}$, siempre que sea superior a $2h$, no influye en los resultados que se obtienen en este apartado y en el siguiente.

b) Obsérvese que, al existir flujo másico a través de BC y AD, las velocidades en dichos contornos, además de una componente U_∞ según x (que se considera sin perturbar por la presencia del obstáculo), deben tener unas componentes v_{BC} y v_{AD} , respectivamente, con ciertas distribuciones (simétricas entre sí) sobre BC y AD. Aplicando la proyección según x de la ecuación (B.1.8), de conservación de la cantidad de movimiento, al mismo volumen de control de la figura, limitado por la superficie de control ABCD, teniendo en cuenta que en esta las fuerzas de superficie se suponen reducidas a las debidas a la presión, que se supone uniforme, y que el flujo es estacionario, y despreciando las fuerzas másicas, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & -\rho U_\infty^2 2h - \rho U_\infty^2 (\overline{AB} - 2h) + \rho \int_{BC} U_\infty v_{BC} dx + \rho \int_{AD} U_\infty v_{AD} dx \\
 & + 2\rho \int_0^h \left[U_0 + (U_\infty - U_0) \frac{y}{h} \right]^2 dy + \rho U_\infty^2 (\overline{AB} - 2h) = -F_x,
 \end{aligned} \tag{5.40.2}$$

siendo F_x la componente según x de la fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre el obstáculo. Teniendo en cuenta, en los sumandos tercero y cuarto de la ecuación (5.40.2), que

$$\rho \int_{BC} v_{BC} dx = \dot{m}_{BC},$$

y

$$\rho \int_{AD} v_{AD} dx = \dot{m}_{AD}$$

(obsérvese que no ha sido necesario conocer las distribuciones de v_{BC} y v_{AD}), y el resultado de la ecuación (5.40.1), de la ecuación (5.40.2) se obtiene finalmente

$$F_x = \rho [U_\infty^2 - U_0(2U_0 - U_\infty)] \frac{h}{3}. \tag{5.40.3}$$

Obviamente, no es realista la distribución lineal de velocidad supuesta en la sección CD , aunque puede ser en cierto modo ilustrativa de una situación real.

c) La condición de no deslizamiento del líquido sobre la placa requiere que

$$U_0 = 0.$$

Compruébese que se obtiene

$$\dot{m}_{BC} = \dot{m}_{AD} = \rho U_\infty h/2,$$

$$F_x = \rho U_\infty^2 h/3.$$

Compárese con los resultados correspondientes al flujo real en la capa límite laminar sobre una placa plana.

d) Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa al volumen de control limitado por la superficie ABCD de la Figura 5.40.2, resulta

$$U_1 = \frac{U_\infty H - U_0 h}{H - h}. \quad (5.40.4)$$

e) Aplicando la proyección según el eje x de la ecuación (B.1.8), de conservación de la cantidad de movimiento, al mismo volumen de control del apartado anterior, teniendo en cuenta que el flujo es estacionario, y despreciando las tensiones viscosas en la sección CD , la fricción en las paredes del conducto y las fuerzas másicas, se obtiene

$$-\rho U_\infty^2 H + 2\rho \int_0^h \left[U_0 + (U_1 - U_0) \frac{y}{h} \right]^2 dy + \rho U_1^2 (H - 2h) = -F'_x - p_{CD} H,$$

siendo F'_x la componente según x de la fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre el obstáculo. De la ecuación anterior, teniendo en cuenta la ecuación (5.40.3) y que $F'_x = 1,5F_x$, resulta

$$p_{CD} = \frac{\rho}{H} \left\{ U_\infty \left[U_\infty \left(H - \frac{h}{2} \right) - U_0 \frac{h}{2} \right] + (U_1 - U_0)^2 \frac{h}{3} - U_1^2 (H - h) \right\}.$$

Sustituyendo en esta la ecuación (5.40.4), se obtiene finalmente

$$p_{CD} = \frac{\rho}{H} \left\{ U_\infty \left[U_\infty \left(H - \frac{h}{2} \right) - U_0 \frac{h}{2} \right] + (U_\infty - U_0)^2 \frac{H^2}{(H - h)^2} \frac{h}{3} - (U_\infty H - U_0 h)^2 \frac{1}{(H - h)} \right\}.$$

f) Compruébese que, aplicando la proyección según x de la ecuación (B.1.8), de conservación de la cantidad de movimiento, al volumen de control limitado por la superficie ABEF, al suponerse despreciable la fuerza de fricción que ejercen las paredes del conducto, se obtiene

$$0 = -p_{EF} H - F'_x,$$

de donde resulta, teniendo en cuenta de nuevo la ecuación (5.40.3) y que $F'_x = 1,5F_x$,

$$p_{EF} = -\frac{1}{2}\rho[U_\infty^2 - U_0(2U_0 - U_\infty)] \frac{h}{H}.$$

g) Aplicando la ecuación (B.1.15) al volumen de control limitado por la superficie ABEF, teniendo en cuenta que no existen paredes móviles que ejerzan trabajo

sobre el fluido (el término [3] es nulo excepto en las secciones AB y EF), y haciendo uso de simplificaciones ya utilizadas en apartados anteriores, se obtiene

$$0 = -p_{\text{EF}}U_{\infty}H - \overline{\Phi}_v,$$

de donde resulta

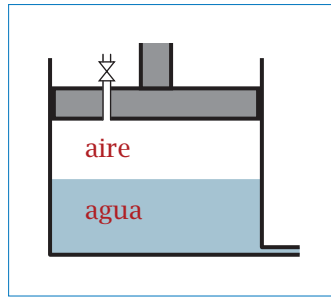
$$\overline{\Phi}_v = \frac{1}{2}\rho U_{\infty}h[U_{\infty}^2 - U_0(2U_0 - U_{\infty})].$$

Obsérvese que esta potencia coincide con la que sería necesaria para mover, con una velocidad U_{∞} , el obstáculo a lo largo del conducto, estando el líquido sin perturbar en reposo ($F'_x U_{\infty}$).

Problema 5.41. Regulación neumática del movimiento de los émbolos del Problema 5.14

El cilindro inferior de la figura del Problema 5.14, de sección horizontal de área $A_2 = 10^{-2} \text{ m}^2$ y cerrado por la parte superior mediante un émbolo, contiene, en un cierto instante t_i (condiciones denotadas con el subíndice i), agua hasta una altura $H_{1i} = 50 \text{ cm}$, y aire a una presión superior a la atmosférica ($p_{\text{at}} = 10^5 \text{ Pa}$) y una temperatura de 288 K . En dicho instante, la altura a la que se encuentra la base del émbolo sobre el fondo del cilindro es $H_{2i} = 2H_{1i}$. El cilindro superior, de sección horizontal de área $A_3 = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, tiene acoplado un émbolo, solidario con el del cilindro inferior, que en el instante t_i se halla a una altura por debajo del fondo del cilindro $H_{3i} = 1 \text{ cm}$.

Se supondrá que existe una perfecta estanqueidad entre cilindros y émbolos, y que el rozamiento entre ambos es despreciable. Los extremos de ambos cilindros, entre los que existe una diferencia de altura $H = 2 \text{ m}$, están conectados mediante un tubo que, en el instante t_i , está completamente lleno de agua. El conjunto formado por los émbolos y su acoplamiento tiene un peso de 400 N . Se supondrá que el sistema está en equilibrio en todo momento, de forma que los émbolos se mueven con una velocidad hacia abajo constante $U = 1 \text{ cm s}^{-1}$. Para conseguir que los émbolos se muevan de esta manera es necesario regular de forma continua la presión del aire en el cilindro inferior. Esto último se consigue permitiendo la salida de un gasto variable de aire a través de un orificio practicado en el émbolo inferior y una válvula de control.



Determinar, en función del tiempo:

- Volumen de aire en el cilindro inferior.
- Presión del aire en el cilindro inferior.
- Gasto de aire a través del orificio (se supondrá que en todo momento la temperatura del aire se mantiene constante, que su densidad es uniforme en el interior del cilindro y $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Solución

- $V_2(t) = 5 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-5} t$ (V_2 en m^3 , t en s).
- $p_2(t) = 6,538 \times 10^4 + 4,905 \times 10^1 t$ (p_2 en Pa, t en s).
- $G = 9,708 \times 10^{-5} + 5,934 \times 10^{-8} t$ (G en kg s^{-1} , t en s).

Problema 5.42. Flujo a través de un conducto de sección rectangular y paredes porosas

Por un conducto recto de sección transversal rectangular constante y longitud $L = 0,3 \text{ m}$ fluye un líquido con un caudal $Q_e = 250 \text{ l s}^{-1}$ a través de la sección de entrada, S_e . Dos de las caras laterales, S_1 y S_2 , son porosas, y a través de ellas entra y sale, respectivamente, un caudal (por unidad de

longitud) que varía parabólica y linealmente a lo largo del conducto:

$$q_1 = -0,033 (x^2/L^2),$$

$$q_2 = 0,012 (1 - x/L)$$

(en $\text{m}^3 \text{s}^{-1} \text{m}^{-1}$, con sentido saliente positivo; x es la coordenada longitudinal con origen en la cara S_e). Determinar:

- Caudal Q_s que sale a través de la cara de salida S_s .
- Posición a lo largo de la longitud del conducto de la sección en la que el caudal circulante es mínimo.

Solución

a) El caudal que fluye a través de la sección genérica de coordenada x se calcula a través de la ecuación de conservación de la masa:

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q_e - \int_0^x (q_1 + q_2) dx = Q_e - \int_0^x \left[0,033 \frac{x^2}{L^2} - 0,012 \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] dx \\ &= Q_e - 0,011 x^3/L^2 - 0,006 x^2/L + 0,012 x. \end{aligned}$$

Para calcular el flujo saliente en la sección final del conducto se sustituye $x = 0,3 \text{ m}$ en la ecuación anterior, obteniéndose

$$Q_s = Q(x = 0,3) = 0,2515 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}.$$

b) En la sección del conducto en la que el caudal circulante es mínimo,

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \Rightarrow -0,033 x^2/L^2 - 0,012 x/L + 0,012 = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación, se obtiene

$$x(Q_{\min}) = 0,1344 \text{ m}.$$

Compruébese que en $x = 0,1344 \text{ m}$ la función $Q(x)$ tiene un mínimo.

Problema 5.43. Propulsión mediante un chorro de un cuerpo flotante

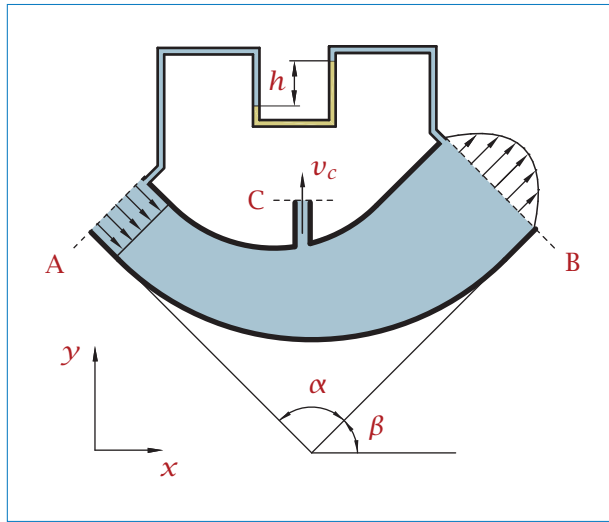
Un cuerpo flotante es autopropulsado mediante un chorro de agua de 25 mm de diámetro que sale en dirección opuesta al movimiento del cuerpo con una velocidad relativa respecto a este de 40 m s^{-1} . Suponiendo unitario el rendimiento de la bomba que genera el chorro y del motor que la mueve, calcular la potencia necesaria para que el cuerpo mantenga una velocidad constante de 5 m s^{-1} .

Solución

$$\dot{W} = 3,927 \text{ kW.}$$

Problema 5.44. Flujo a través de un conducto acodado con sección de área variable

A través del conducto de la figura circula un aceite de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$. Las secciones A, B y C del conducto son de forma circular, con diámetros $D_A = 8 \text{ cm}$, $D_B = 15 \text{ cm}$ y $D_C = 1 \text{ cm}$, respectivamente. En la sección de salida, B, se supondrá que el perfil de velocidad es parabólico: $v = v_m(1 - 4r^2/D_B^2)$, siendo v_m la velocidad en el centro de la sección y r la coordenada radial. Las velocidades en las secciones A y C se supondrán uniformes. La velocidad en la sección C es $v_C = 10 \text{ m s}^{-1}$ y el caudal entrante a través de A es de 20 l s^{-1} . Los ángulos α y β de la figura miden, respectivamente, 90° y 45° . En el manómetro de mercurio (densidad $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg m}^{-3}$) conectado entre las secciones A y B se mide una diferencia de alturas $h = 3 \text{ cm}$. Se supondrá que la presión es uniforme en las secciones A, B y C, que $p_B = p_C = p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ y que la diferencia de cotas entre las secciones A y B es despreciable. El volumen de aceite dentro del conducto entre las secciones A, B y C es de 10 l .



Determinar:

- Velocidad máxima, v_m , en la sección B y velocidad en la sección A.
- Presión en la sección A.
- Fuerza que se ejerce sobre el conducto.

Solución

- a) El caudal de aceite que sale a través de la sección S_B es

$$Q_B = \int_B v \, dS_B = \int_0^{R_B} v_m \left(1 - \frac{4r^2}{D_B^2} \right) 2\pi r \, dr$$

$$= \left[-v_m \pi \frac{D_B^2}{8} \left(1 - \frac{4r^2}{D_B^2} \right)^2 \right]_0^{R_B} = v_m \pi \frac{D_B^2}{8}.$$

El caudal entrante a través de la sección S_A es

$$Q_A = v_A \pi D_A^2 / 4,$$

y el caudal que sale por S_C es

$$Q_C = v_C \pi D_C^2 / 4.$$

Teniendo en cuenta que

$$Q_B = Q_A - Q_C,$$

CAPÍTULO 5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN FORMA INTEGRAL

a partir de las ecuaciones anteriores, y sustituyendo valores, se obtiene la velocidad máxima en la sección S_B y la velocidad media en S_A :

$$v_m = 2,175 \text{ m s}^{-1},$$

$$v_A = 3,979 \text{ m s}^{-1}.$$

b) A partir de la ecuación (B.2.10) de la estática de fluidos, es inmediato deducir que

$$p_A - p_B = (\rho_{\text{Hg}} - \rho)gh,$$

de donde se obtiene la presión (manométrica) en la sección A:

$$p_A = 3767 \text{ Pa.}$$

c) Considérese la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento, en la que desaparece el primer término al ser el flujo estacionario:

$$\underbrace{\int_S \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS}_{[1]} = \underbrace{\int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{f}_m dV}_{[3]}. \quad (5.44.1)$$

Se va a utilizar como volumen de control el volumen del tubo delimitado por las paredes interiores del conducto y las secciones S_A , S_B y S_C . La integral [1] va a tener componente no nula solo en las secciones S_A , S_B y S_C , al ser $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ nulo en cualquier punto de las paredes del tubo:

$$\begin{aligned} [1] &= \int_{S_A} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_A + \int_{S_B} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_B + \int_{S_C} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_C \\ &= \rho v_A^2 \frac{\pi D_A^2}{4} \mathbf{n}_A + \int_0^{R_B} \rho v_m^2 \left(1 - \frac{4r^2}{D_B^2}\right)^2 \mathbf{n}_B 2\pi r dr + \rho v_C^2 \frac{\pi D_C^2}{4} \mathbf{n}_C \\ &= \rho v_A^2 \frac{\pi D_A^2}{4} \mathbf{n}_A + \rho v_m^2 \frac{\pi D_B^2}{12} \mathbf{n}_B + \rho v_C^2 \frac{\pi D_C^2}{4} \mathbf{n}_C, \end{aligned}$$

donde \mathbf{n}_A , \mathbf{n}_B y \mathbf{n}_C son, respectivamente, los vectores unitarios normales a las secciones S_A , S_B y S_C , con sentido positivo saliente del volumen de control (p.ej.: $\mathbf{v}_A = -v_A \mathbf{n}_A \Rightarrow [\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]_{S_A} = -v_A \mathbf{n}_A(-v_A) = v_A^2 \mathbf{n}_A$). Las integrales [2] y [3] se reducen, respectivamente, a las siguientes expresiones:

$$[2] = -p_A \frac{\pi D_A^2}{4} \mathbf{n}_A - \mathbf{F},$$

$$[3] = -\rho g V_{AC} \mathbf{j},$$

donde F es la resultante de la fuerza ejercida por el fluido sobre el tubo y V_{AC} es el volumen total de aceite que contiene el tubo. Obsérvese que las secciones S_B y S_C no dan lugar a ninguna contribución en la integral [2], al ser en ambas la presión igual a la presión atmosférica.

Finalmente, la ecuación (5.44.1) queda de la siguiente forma:

$$\rho v_A^2 \frac{\pi D_A^2}{4} \mathbf{n}_A + \rho v_m^2 \frac{\pi D_B^2}{12} \mathbf{n}_B + \rho v_C^2 \frac{\pi D_C^2}{4} \mathbf{n}_C = -p_A \frac{\pi D_A^2}{4} \mathbf{n}_A - \mathbf{F} - \rho g V_{AC} \mathbf{j}.$$

Proyectando esta última ecuación en las direcciones x e y , se obtienen las componentes de F :

$$F_x = 42,65 \text{ N},$$

$$F_y = -158,9 \text{ N}.$$

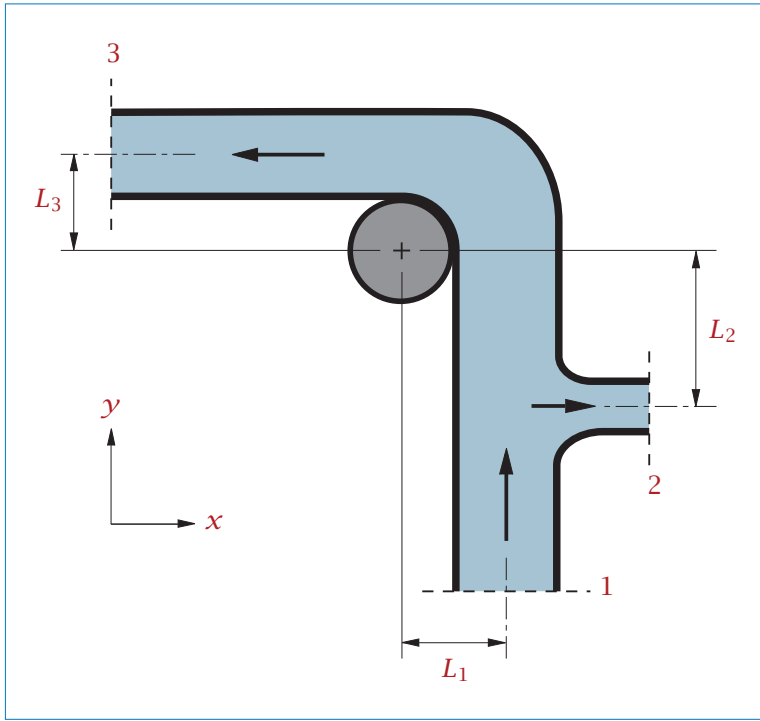
Problema 5.45. Fuerza y momento de fuerzas sobre un elemento de tubería con bifurcación

A través del tramo de tubería representado en la figura, que está fijado a un soporte cilíndrico de sección circular, circula agua según las direcciones del flujo indicadas. A través de la sección 1 entra un caudal de agua $Q = 50 \text{ l s}^{-1}$. Las presiones manométricas en las secciones 1, 2 y 3 son, respectivamente, p_1 , p_2 y p_3 . Los valores de los diámetros de las secciones transversales de la tubería en cada una de las secciones y de las longitudes indicadas en la figura son los siguientes: $D_1 = 30 \text{ cm}$; $D_2 = 15 \text{ cm}$; $D_3 = 25 \text{ cm}$; $L_1 = 30 \text{ cm}$; $L_2 = 70 \text{ cm}$; $L_3 = 40 \text{ cm}$. Se supondrá que las fuerzas másicas son despreciables y que todas las propiedades del flujo de agua en cada una de las secciones indicadas son uniformes.

Determinar:

- Expresión del momento torsor y de las componentes de la fuerza según los ejes x e y que se transmiten al soporte en función de las propiedades del flujo en las secciones 1, 2 y 3 y de los datos geométricos de la tubería.
- Valor de la velocidad en la sección 2 necesaria para que el momento torsor transmitido al soporte sea nulo, suponiendo que $p_1 = 5 \text{ kPa}$,

$p_3 = 4 \text{ kPa}$ y que la sección 2 descarga a la atmósfera ($p_2 = 0$).



Solución

a)

$$F_x = -(\rho v_2^2 + p_2) \frac{\pi D_2^2}{4} + (\rho v_3^2 + p_3) \frac{\pi D_3^2}{4},$$

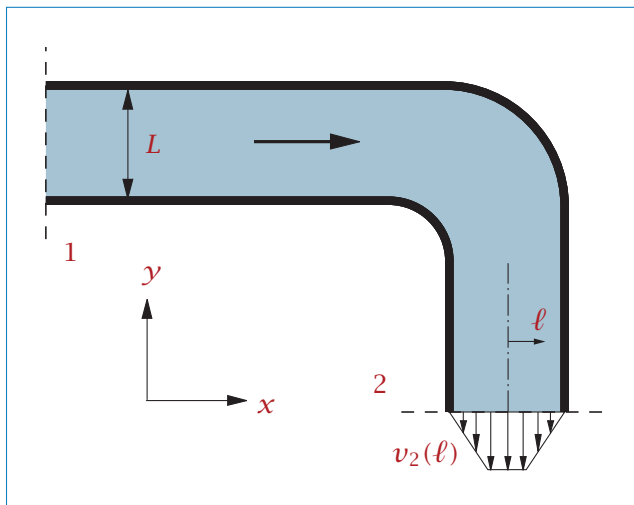
$$F_y = (\rho v_1^2 + p_1) \frac{\pi D_1^2}{4},$$

$$M_z = (\rho v_1^2 + p_1) \frac{\pi D_1^2}{4} L_1 - (\rho v_2^2 + p_2) \frac{\pi D_2^2}{4} L_2 - (\rho v_3^2 + p_3) \frac{\pi D_3^2}{4} L_3.$$

b) $v_2 = 1,675 \text{ m s}^{-1}$.

Problema 5.46. Fuerza sobre un tubo acodado por el que circula un flujo no uniforme idealizado

La tubería mostrada en la figura tiene, en sus tramos rectos, una sección transversal de anchura $L = 2 \text{ cm}$, y transporta en el sentido indicado un aceite de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$, que es descargado a la atmósfera a través de la sección 2. En la sección 1 de la tubería la velocidad del aceite es uniforme e igual a 1 m s^{-1} , y la presión manométrica es $p_1 = 3 \text{ kPa}$. La coordenada ℓ , representada en la figura, determina la distancia desde un punto genérico en una sección transversal al eje de la tubería, por lo que tomará valores iguales a 0 y $L/2$ en el centro y en la pared interior de la tubería, respectivamente. Se supondrá, para simplificar el problema, que la velocidad en la sección 2 de salida es, para $\ell \leq L/4$, uniforme e igual a v_{20} , y disminuye linealmente entre los valores v_{20} y 0 para $L/4 < \ell \leq L/2$. Entre las secciones 1 y 2 la tubería contiene 40 kg de aceite por unidad de anchura. El eje y tiene dirección vertical y sentido positivo hacia arriba. El problema se considerará bidimensional. Determinar la velocidad v_{20} y las componentes de la fuerza por unidad de anchura que se ejerce sobre la tubería en las direcciones x e y .



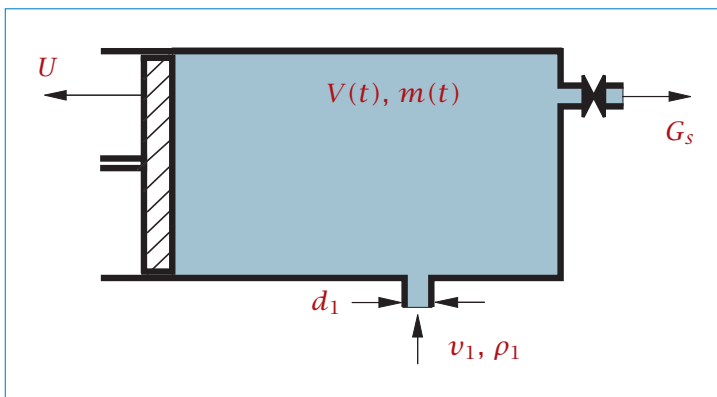
Solución

$$v_{20} = 1,333 \text{ m s}^{-1}; F_x = 76 \text{ N m}^{-1}; F_y = -373,4 \text{ N m}^{-1}.$$

Problema 5.47. Variación de la densidad de un gas contenido en un cilindro (II)

En el cilindro representado en la figura entra, a través de una tubería de sección circular de diámetro $d_1 = 10 \text{ cm}$, aire con velocidad $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$ y densidad $\rho_1 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, mientras que a través de una válvula sale un gasto másico constante de aire $G_s = 0,05 \text{ kg s}^{-1}$. La velocidad con la que se mueve el pistón es $U = 2 \text{ m s}^{-1}$. El volumen y la masa de aire contenido en el instante inicial en el cilindro son, respectivamente, $V_0 = 82 \text{ l}$ y $m_0 = 100 \text{ g}$. El área de la sección transversal del cilindro es $A = 100 \text{ cm}^2$. Se supondrá que las propiedades del aire contenido en el cilindro son uniformes en todo momento. Determinar:

- Expresiones, en función del tiempo, del volumen, $V(t)$, y de la masa de aire, $m(t)$, contenido en el cilindro.
- Valor de la derivada con respecto al tiempo de la densidad del aire contenida en el cilindro en el instante $t = 2 \text{ s}$.



Solución

- a) $V(t) = 0,082 + 0,02 t$ (V en m^3 , t en s),
 $m(t) = 0,1 + 4,425 \times 10^{-2} t$ (m en kg, t en s).
- b) $\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{t=2} = 0,1094 \text{ kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}$.

Capítulo 6

Análisis dimensional

Problema 6.1. Momento de fricción sobre un disco

Para la situación planteada en el Problema 1.3, demostrar que el análisis dimensional permite obtener una expresión para el momento de giro que incluye la obtenida analíticamente en dicho problema.

Solución

El momento de giro, M , es función de los parámetros Ω , μ , D y h . Aparecen por tanto en el problema 5 magnitudes dimensionales en las que intervienen 3 dimensiones fundamentales: masa, M , longitud, L , y tiempo, T . Compruébese que podrán formarse entonces $(5 - 3) = 2$ parámetros adimensionales. Se tomarán las tres magnitudes siguientes: Ω , μ y D , para adimensionalizar las dos restantes: M y h .¹ Aunque en este caso es muy fácil obtener directamente los parámetros adimensionales, vamos a seguir un procedimiento más sistemático, expresando

¹ Obsérvese que en el problema no interviene la densidad del fluido, ya que corresponde a un flujo estacionario con efectos de viscosidad dominantes, en el que el término convectivo es nulo. Se verá en otros problemas que la viscosidad no suele elegirse como parámetro para adimensionalizar los restantes, ya que lo que interesa es que los efectos viscosos aparezcan reflejados en un único número adimensional (como, por otra parte, también ocurrirá en este problema, ya que μ sólo se utilizará para adimensionalizar el único de los restantes parámetros (el momento de giro, M) que contiene la masa como dimensión fundamental).

los parámetros adimensionales de la forma siguiente:

$$\Pi_1 = M \Omega^a \mu^b D^c,$$

$$\Pi_2 = h \Omega^d \mu^e D^f,$$

e imponiendo la condición de que Π_1 y Π_2 sean adimensionales:

$$M^0 L^0 T^0 = (M L^2 T^{-2}) (T^{-1})^a (M L^{-1} T^{-1})^b (L)^c, \quad (6.1.1)$$

$$M^0 L^0 T^0 = (L) (T^{-1})^d (M L^{-1} T^{-1})^e (L)^f. \quad (6.1.2)$$

De la ecuación (6.1.1) se obtiene

$$0 = 1 + b$$

$$0 = 2 - b + c$$

$$0 = -2 - a - b,$$

de donde resulta $a = -1$, $b = -1$, $c = -3$. El primer parámetro adimensional es, por tanto,

$$\Pi_1 = \frac{M}{\Omega \mu D^3}.$$

De la ecuación (6.1.2) se obtiene

$$0 = e,$$

$$0 = 1 - e + f,$$

$$0 = -d - e,$$

de donde resulta $d = 0$, $e = 0$, $f = -1$. El segundo parámetro adimensional es, por tanto,

$$\Pi_2 = \frac{h}{D}.$$

La expresión buscada es del tipo

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

La expresión obtenida analíticamente en el Problema 1.3,

$$M = \frac{\mu \Omega \pi D^4}{16 h},$$

corresponde a

$$\Pi_1 \Pi_2 - \frac{\pi}{16} = 0.$$

Problema 6.2. Descarga del líquido contenido en un depósito a través de un tubo

Un depósito cilíndrico de grandes dimensiones contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ sometido a la acción de la gravedad, g . Sobre la superficie libre del líquido, situada a una altura h sobre el fondo del depósito, existe una presión manométrica Δp . El líquido se descarga a la atmósfera a través de un tubo horizontal de diámetro d , longitud L y rugosidad absoluta ε , conectado al fondo del depósito. Considérese el problema cuasiestacionario.

- Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional del caudal de descarga, Q , con los parámetros mencionados. Explicar el significado físico de los números adimensionales obtenidos.
- Indicar cómo se modifican los resultados si $p = 0$, los efectos de viscosidad son despreciables y $L = 0$ (no existe tubería, tan solo un orificio de diámetro d).

Solución

a) Justifíquese mediante el teorema Π que el número de parámetros adimensionales que intervienen en el problema es de seis, y que la dependencia funcional buscada puede expresarse, por ejemplo, de la forma siguiente:

$$\frac{Q}{d^2(\Delta p/\rho)^{1/2}} = F\left(\frac{\Delta p}{\rho g d}, \frac{(\rho \Delta p)^{1/2} d}{\mu}, \frac{h}{d}, \frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right). \quad (6.2.1)$$

Explicar el significado de cada parámetro adimensional, identificando el coeficiente de caudal y los números de Froude y Reynolds.

El enunciado de este problema podría haber sido más escueto: *Un depósito de grandes dimensiones contiene un líquido sobre cuya superficie libre, situada a una altura h sobre el fondo, existe una presión manométrica Δp . El líquido se descarga a la atmósfera a través de una tubería horizontal de sección circular, conectada al fondo del depósito. Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional del caudal de descarga, Q , con los parámetros que intervienen en el problema...* En tal caso, deberíamos identificar en primer lugar cuáles son los parámetros que caracterizan el fluido, la instalación y las condiciones de

operación que determinan el flujo. Para ello simplemente se deben plantear las ecuaciones que describen el flujo y las correspondientes condiciones de contorno, y determinar los parámetros que aparecen en ellas. En este caso, si suponemos que el flujo es estacionario al ser el depósito muy grande, las ecuaciones son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.2.2)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}, \quad (6.2.3)$$

que deberían ser resueltas con las condiciones de contorno apropiadas:

- En la superficie libre del líquido, situada a una altura h , la presión manométrica es Δp .
- En las paredes de la tubería (definidas geométricamente por el diámetro de la tubería, d , su longitud, L , y su rugosidad absoluta, ϵ), se impone la condición de no deslizamiento y de velocidad normal a la pared nula. (En el depósito, al ser de grandes dimensiones, puede suponerse que el fluido está en reposo, y la condición de contorno en la pared no tiene apenas influencia en la solución.)
- En la sección de salida de la tubería (definida geométricamente por d y por la distancia, L , a la que se encuentra desde el depósito), la presión manométrica es nula.

Como puede observarse, en el conjunto de ecuaciones y condiciones de contorno aparecen los siguientes parámetros: Δp , g , ρ , μ , h , d , L y ϵ . La solución (distribuciones de velocidad y presión en todo el campo fluido)² va a depender, por tanto, de ellos. Una magnitud como el caudal, Q , que se obtiene integrando la distribución de velocidad en una sección de la tubería, por ejemplo, dependerá también, por tanto, de dichos parámetros. Compruébese que los parámetros adimensionales que aparecen al adimensionalizar las ecuaciones y las condiciones de contorno son los de la ecuación (6.2.1).

b) Si se supone ahora que $\Delta p = 0$, obviamente Δp deja de intervenir como parámetro en el problema. El que los efectos de viscosidad sean despreciables significa que el término viscoso en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es muy pequeño frente a los restantes términos, por lo que desaparece de ella. La solución no dependerá entonces de la viscosidad. Los parámetros que aparecen en las correspondientes ecuaciones y condiciones de contorno serán,

² Es obvio que no se pretende resolver las ecuaciones. Sin embargo, el estudio de estas y de las correspondientes condiciones de contorno facilita el planteamiento correcto de un problema de análisis dimensional.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DIMENSIONAL

por tanto: ρ , g , d y h (evidentemente, tampoco intervienen ahora L y ε). El caudal viene entonces dado por la siguiente función:

$$Q = f(g, \rho, d, h). \quad (6.2.4)$$

La ecuación (6.2.4) relaciona cinco magnitudes dimensionales, y en ella intervienen tres dimensiones fundamentales: M, L y T. Demuéstrese mediante el teorema Π que el número de parámetros adimensionales que pueden formarse es igual a dos. Si se toman las magnitudes ρ , g y d para adimensionalizar las dos restantes, se obtienen los números adimensionales

$$\Pi_1 = \frac{Q}{g^{1/2} h^{5/2}}, \quad \Pi_2 = \frac{d}{h},$$

en los que, como se observa, no aparece la densidad, lo que, en realidad, podía haberse anticipado. En efecto, ρ es la única magnitud que contiene la dimensión fundamental M, por lo que no puede ser adimensionalizada con ninguna de las restantes. Esto significa que en la ecuación (6.2.4) no debería haberse incluido ρ ; es decir, el caudal no puede depender de ρ . La explicación de esto es muy simple si se inspecciona la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento,

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = \rho \mathbf{g}. \quad (6.2.5)$$

Teniendo en cuenta que el fluido es incompresible, dividiendo por ρ la ecuación (6.2.5) se obtiene

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{g},$$

ecuación en la que se observa que ρ solo aparece dividiendo a p . El sistema formado por las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento puede entonces resolverse para obtener las distribuciones de las variables \mathbf{v} y p/ρ , que lógicamente no van a depender de ρ ya que esta no aparece como parámetro en las ecuaciones (solo aparece en la nueva variable que se considera, p/ρ). Como el caudal se obtiene a partir de la distribución de velocidad, tampoco Q va a depender de ρ . No ocurriría lo mismo, obviamente, ni con el gasto másico, ni, por ejemplo, con la fuerza que se ejerce sobre el depósito. Por otra parte, una vez obtenida la distribución de p/ρ , podría obtenerse la distribución de p , que evidentemente sí dependerá de ρ .

Con respecto a la solución obtenida,

$$\boxed{\frac{Q}{g^{1/2} h^{5/2}} = F_1 \left(\frac{d}{h} \right)}, \quad (6.2.6)$$

podemos precisar algo más, para este caso tan sencillo, sobre la forma de la función F_1 . Utilizando la ecuación (B.4.2) de Bernoulli, y teniendo en cuenta un coeficiente de contracción C_c , puede obtenerse

$$Q = C_c \pi \frac{d^2}{4} \sqrt{2gh} = \text{cte} \left(\frac{d}{h} \right)^2 g^{1/2} h^{5/2}, \quad (6.2.7)$$

ecuación que debe compararse con (6.2.6).

Cabe hacer notar que el análisis dimensional tan solo nos ha permitido llegar hasta la ecuación (6.2.6), y que generalmente no es posible encontrar fácilmente una expresión analítica como la de la ecuación (6.2.7).

Problema 6.3. Caída de presión en una válvula

La caída de presión en una válvula, Δp , es función de la densidad, ρ , y la viscosidad, μ , del fluido que circula a través de ella, del caudal, Q , y del tamaño de la válvula, D .

- a) Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional de Δp con los parámetros mencionados.
- b) Simplificar la dependencia funcional encontrada en el apartado anterior e indicar cómo variará Δp cuando el caudal a través de la válvula aumenta al doble, manteniéndose fijos los restantes parámetros, en los dos casos siguientes:

b.1) Efectos de viscosidad despreciables.

b.2) Efectos de viscosidad dominantes.

Justificar las respuestas anteriores e indicar un criterio para distinguir cada uno de estos límites.

Solución

- a) La función

$$\Delta p = f(\rho, \mu, Q, D), \quad (6.3.1)$$

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DIMENSIONAL

relaciona cinco magnitudes dimensionales, y en ella intervienen tres dimensiones fundamentales: M, L y T. Compruébese que el número de parámetros adimensionales que pueden formarse es igual a dos (consúltase alguno de los textos incluidos en la sección de bibliografía). Se tomarán las tres magnitudes siguientes para adimensionalizar las tres restantes: D , Q y ρ . Para adimensionalizar Δp , puede observarse que $p \sim \rho v^2 \sim \rho(Q/D^2)^2$, por lo que puede tomarse

$$\Pi_1 = \Delta p D^4 \rho^{-1} Q^{-2}.$$

El número adimensional que se obtiene al adimensionalizar μ es el número de Reynolds,

$$\Pi_2 = \frac{\rho Q}{D \mu}.$$

La relación funcional buscada es del tipo

$$\Pi_1 = F(\Pi_2).$$

b) b.1) Si los efectos de viscosidad son despreciables, la función de la ecuación (6.3.1) se reduce a $\Delta p = f(\rho, Q, D)$. En este caso, el único número adimensional que puede formarse es $\Delta p D^4 \rho^{-1} Q^{-2}$, por lo que la dependencia funcional entre los parámetros que intervienen es del tipo

$$\frac{\Delta p D^4}{\rho Q^2} = \text{constante}.$$

Si el caudal aumenta al doble, es obvio que la caída de presión en la válvula se multiplicará por cuatro.

b.2) Si los efectos de viscosidad son dominantes, la función de la ecuación (6.3.1) se reduce a $\Delta p = f(\mu, Q, D)$ (la densidad, que aparece en el término convectivo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, desaparece como parámetro). El único número adimensional que ahora puede formarse es $\Delta p D^3 \mu^{-1} Q^{-1}$, por lo que la dependencia funcional entre los parámetros que intervienen es del tipo

$$\frac{\Delta p D^3}{\mu Q} = \text{constante}.$$

Se observa que en este caso la dependencia entre Δp y Q es lineal, y un aumento al doble del caudal dará lugar a que se duplique la caída de presión en la válvula.

Los dos límites analizados corresponden a casos en los que $Re \gg 1$ y $Re \ll 1$, respectivamente.

Problema 6.4. Fuerza de empuje en hélices de avión

Supóngase que la fuerza de empuje, F , y la potencia, \dot{W} , de una familia de hélices de avión geoméricamente semejantes dependen del diámetro de la hélice, D , de la velocidad de giro, Ω , de la velocidad del avión, U , de la velocidad del sonido, a , y de la densidad, ρ , y la viscosidad, μ , del aire. Simplificar la dependencia funcional de F y \dot{W} con los parámetros mencionados. Explicar el significado físico de los números adimensionales obtenidos. Discutir brevemente sobre la posibilidad de realizar ensayos de un modelo a escala reducida de un prototipo manteniendo semejanza total o parcial.

Solución

Las relaciones funcionales buscadas son del tipo³

$$\frac{F}{\rho U^2 D^2} = F_1 \left(\frac{U}{\Omega D}, \frac{U}{a}, \frac{\rho U D}{\mu} \right),$$

$$\frac{\dot{W}}{\rho U^3 D^2} = F_2 \left(\frac{U}{\Omega D}, \frac{U}{a}, \frac{\rho U D}{\mu} \right).$$

Explíquese el significado de los números adimensionales que aparecen. Para responder a la última cuestión del enunciado, téngase en cuenta que, para mantener el número del Reynolds en el modelo (diámetro D más pequeño que el del prototipo), funcionando también en aire, sería necesario aumentar U (y también Ω , para mantener el mismo valor del primer parámetro que aparece en la función). Dado que la velocidad del sonido en el aire, para una cierta temperatura, es un dato fijo, el número de Mach $M = U/a$ no puede mantenerse igual en ambas condiciones de funcionamiento de prototipo y modelo (lo cual puede ser aceptable

³ Dado que algunas de las magnitudes que se mencionan en el enunciado, fundamentalmente la velocidad del sonido, a , y la densidad, ρ , varían en el campo fluido (se trata de un flujo compresible), resultaría necesario especificar más el enunciado. Las magnitudes a y ρ podrían ser, por ejemplo, las correspondientes a las condiciones en el infinito (en puntos suficientemente alejados de la zona de perturbación introducida por la hélice). Otra posibilidad habría sido introducir en el enunciado dichas condiciones de referencia (p. ej., T_∞ y ρ_∞), la constante del gas, R , y la relación de calores específicos, γ . El resultado habría sido similar:

$$\frac{F}{\rho_\infty U^2 D^2} = F_1 \left(\frac{U}{\Omega D}, \frac{U}{\sqrt{\gamma R T_\infty}}, \frac{\rho_\infty U D}{\mu}, \gamma \right).$$

dentro de un cierto rango de M). (Discútase también sobre otras posibilidades de encontrar condiciones de ensayo semejantes o parcialmente semejantes.)

Problema 6.5. Caída de un cuerpo con movimiento oscilatorio

Un objeto experimenta un movimiento oscilatorio al caer libremente en el seno de un fluido incompresible. Se supone que la frecuencia, f , de dicho movimiento depende de la densidad del objeto, ρ_1 , de la densidad, ρ , y la viscosidad, μ , del fluido, de la aceleración de la gravedad, g , del tamaño del objeto, D , y de la forma geométrica de este. Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional de f con los parámetros mencionados.

Solución

La función $f = f(\rho_1, \rho, \mu, g, D)$, correspondiente a una forma geométrica determinada del objeto, relaciona seis magnitudes dimensionales, y en ella intervienen tres dimensiones fundamentales: M, L y T. Puede comprobarse que el número de parámetros adimensionales que pueden formarse es igual a tres. Se tomarán las tres magnitudes siguientes para adimensionalizar las tres restantes: D , g y ρ . Para adimensionalizar f , puede observarse que $\sqrt{g/D}$ tiene dimensiones de T^{-1} , luego

$$\Pi_1 = \frac{f}{\sqrt{g/D}}.$$

Para adimensionalizar μ , se puede tener en cuenta que \sqrt{gD} tiene dimensiones de velocidad (LT^{-1}), por lo que puede ponerse

$$\Pi_2 = \frac{\rho\sqrt{gD}D}{\mu}.$$

El tercer parámetro adimensional puede ser, obviamente,

$$\Pi_3 = \frac{\rho_1}{\rho}.$$

(Para obtener los números adimensionales puede utilizarse, si se prefiere, el método basado en el producto de potencias de las magnitudes dimensionales empleado en el Problema 6.1.)

La relación funcional buscada es del tipo

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \text{forma geométrica}).$$

Problema 6.6. Transmisión de calor por convección natural entre un fluido y un cuerpo sólido

Supóngase que el flujo de calor por unidad de área, q , transmitido por convección natural entre un fluido y un cuerpo depende, para una configuración geométrica determinada, de una diferencia de temperaturas ΔT , de la aceleración de la gravedad g , de la longitud característica del cuerpo L , y de las siguientes propiedades del fluido:⁴ viscosidad cinemática, ν , conductividad térmica, k , difusividad térmica,⁵ α , y coeficiente de expansión térmica,⁶ β . Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional de q con los parámetros mencionados, teniendo en cuenta que en las ecuaciones que describen el flujo los parámetros β y g aparecen siempre agrupados en el producto $g\beta$.

Solución

$$\frac{qL}{k\Delta T} = F\left(\frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}, \frac{\nu}{\alpha}\right).$$

[El parámetro del primer miembro es el número de Nusselt, Nu , y los que aparecen en el segundo miembro son los números de Grashof, Gr , y Prandtl, Pr . Obsérvese que se han tomado las siguientes magnitudes:⁷ k , ν , ΔT y L , para adimensionalizar q , $g\beta$ y α .]

⁴ También cabe hacer aquí las consideraciones de la nota a pie de página 3 del Problema 6.4, pág. 252. Si las propiedades del fluido varían (fundamentalmente con la temperatura en este caso) de forma apreciable en el campo fluido, los valores utilizados en el análisis deberán referirse a unas condiciones determinadas (por ejemplo, las correspondientes a puntos suficientemente alejados del cuerpo).

⁵ La difusividad térmica es $\alpha = k/(\rho c_p)$.

⁶ Si las variaciones de densidad en el flujo pueden considerarse pequeñas frente a la densidad misma, puede suponerse $\rho = \rho_\infty - \rho_\infty \beta(T - T_\infty)$, siendo $\beta = -(1/\rho_\infty)(\partial\rho/\partial T)_\infty$. Si el fluido es un gas perfecto, $\beta = 1/T_\infty$.

⁷ Obsérvese que k es la única magnitud que incluye la dimensión fundamental M, con la excepción de q , por lo que necesariamente debe ser una de las cuatro elegidas; las tres restantes se han seleccionado de forma que, junto con k , permitan adimensionalizar q , $g\beta$ y α , aunque caben otras alternativas de elección (por ejemplo, se puede elegir α en lugar de ν como una de las cuatro magnitudes con las que se adimensionalice; en tal caso, además de Nu y Pr , aparecería el parámetro $(Gr)(Pr)^2$ en lugar del número de Grashof).

Problema 6.7. Ruptura de una gota en una corriente de gas

Supóngase la situación hipotética en la que el diámetro de ruptura de una gota de líquido en una corriente de gas tan solo dependiese de la tensión superficial líquido-gas y de la velocidad y la densidad del gas. Una gota de un cierto compuesto orgánico se rompe si tiene un diámetro superior a $1,94 \times 10^{-4}$ m en una corriente de aire de 26 m s^{-1} , en la que existe una presión atmosférica de 10^5 Pa y una temperatura de 80°C . La tensión superficial entre dicho compuesto y el aire es de 22 dinas cm^{-1} . Determinar el diámetro de ruptura de una gota de agua en una corriente de aire de 14 m s^{-1} , en la que existe una presión de 10^5 Pa y una temperatura de 20°C . La tensión superficial agua-aire es de $72,8 \text{ dinas cm}^{-1}$.

Solución

Es muy fácil demostrar que el número de Weber,

$$\text{We} = \frac{\rho v^2 d}{\sigma}$$

(ρ y v son la densidad y la velocidad del gas, d el diámetro de ruptura y σ la tensión superficial líquido-gas), es el único parámetro adimensional que puede formarse con las magnitudes dimensionales que intervienen en el problema. La dependencia indicada en el enunciado del problema:

$$f(\rho, v, d, \sigma) = 0,$$

resulta entonces más simple: $F(\text{We}) = 0$, lo que equivale a expresar que $\text{We} = \text{constante}$. El número de Weber debe ser, por tanto, el mismo en ambas situaciones descritas en el enunciado.

La densidad del aire a una presión $p_1 = 10^5$ Pa y una temperatura $T_1 = 80^\circ\text{C}$ es

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{10^5}{(287)(353)} = 0,987 \text{ kg m}^{-3},$$

y a una presión $p_2 = 10^5$ Pa y una temperatura $T_2 = 20^\circ\text{C}$,

$$\rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{10^5}{(287)(293)} = 1,189 \text{ kg m}^{-3}.$$

Expresando la igualdad de We en ambas situaciones,

$$\frac{\rho_1 v_1^2 d_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 v_2^2 d_2}{\sigma_2},$$

y sustituyendo valores,

$$\frac{(0,987)(26)^2(1,94 \times 10^{-4})}{(0,022)} = \frac{(1,189)(14)^2 d_2}{(0,0728)},$$

se obtiene

$$d_2 = 1,84 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Problema 6.8. Semejanza en bombas hidráulicas

El incremento de presión, Δp_t , que experimenta un líquido de densidad ρ y viscosidad μ a través de una determinada bomba depende del tamaño de esta, D , de su velocidad de giro, Ω , y del caudal que circula, Q .

- a) Simplificar la dependencia funcional de Δp_t con los restantes parámetros mencionados.

Supóngase a continuación que una bomba de tamaño D_1 proporciona un incremento de presión Δp_{t1} y un caudal Q_1 girando a una velocidad Ω_1 .

- b) Determinar si es posible conocer, suponiendo despreciables los efectos de viscosidad, el caudal que suministrará una bomba geométricamente semejante a la anterior, de tamaño $D_2 = 2D_1$, girando a la misma velocidad de giro $\Omega_2 = \Omega_1$, proporcionando un incremento de presión $\Delta p_{t2} = 2\Delta p_{t1}$, y bombeando el mismo líquido.

Solución

- a) Es inmediato deducir

$$\frac{\Delta p_t}{\rho \Omega^2 D^2} = F \left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\rho D^2 \Omega}{\mu} \right).$$

- b) Si se desprecian los efectos de viscosidad, la relación obtenida en el apartado anterior se reduce a

$$\frac{\Delta p_t}{\rho \Omega^2 D^2} = F \left(\frac{Q}{\Omega D^3} \right).$$

Si se cumpliera la igualdad

$$\frac{\Delta p_{t1}}{\rho_1 \Omega_1^2 D_1^2} = \frac{\Delta p_{t2}}{\rho_2 \Omega_2^2 D_2^2}$$

(es decir, si las condiciones de funcionamiento consideradas fuesen semejantes), de la relación anterior se deduciría la igualdad

$$\frac{Q_1}{\Omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\Omega_2 D_2^3},$$

de donde se obtendría Q_2 . Sin embargo, no es posible resolver lo que se plantea en el enunciado al ser

$$\frac{\Delta p_{t1}}{\rho_1 \Omega_1^2 D_1^2} \neq \frac{\Delta p_{t2}}{\rho_2 \Omega_2^2 D_2^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p_{t1}}{\rho_1 \Omega_1^2 D_1^2}.$$

Problema 6.9. Transmisión de calor en un flujo por convección forzada entre dos placas planas paralelas

A través de un conducto formado por dos placas planas paralelas, separadas una distancia h , que se encuentran a temperaturas uniformes T_1 y T_2 , respectivamente, existe un flujo estacionario de un fluido de propiedades que se supondrán constantes con la temperatura. En la sección de entrada al conducto el fluido tiene una velocidad uniforme U y una temperatura T_1 . Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional de la distribución de temperatura con los distintos parámetros que intervienen en el problema. Se supondrá el fluido incompresible y newtoniano, y se despreciarán las fuerzas másicas, la transmisión de calor por radiación y la generación de calor por reacción química.

Solución

Teniendo en cuenta lo indicado en el enunciado, las ecuaciones que describen el movimiento son las siguientes (se ha eliminado también el término correspondiente a la disipación de energía mecánica en la ecuación de conservación de la

energía interna, lo que no afecta a la discusión):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p &= \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \rho c \mathbf{v} \cdot \nabla T &= k \nabla^2 T.\end{aligned}$$

Obsérvese que la solución de estas ecuaciones, con las correspondientes condiciones de contorno en las paredes y en la sección de entrada del conducto, va a depender de las siguientes magnitudes dimensionales: ρ , μ , k , c , U , T_1 , T_2 y h . En lugar de utilizar el teorema Π para simplificar la dependencia funcional de la solución con estos parámetros, como se hizo en el Problema 6.2, en este caso se va a utilizar el procedimiento alternativo que consiste en adimensionalizar las ecuaciones y condiciones de contorno. Para ello pueden introducirse las siguientes variables dependientes e independientes adimensionales:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \frac{\mathbf{v}}{U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}; \quad T^* = \frac{cT}{U^2}; \\ \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{h},\end{aligned}$$

con lo que las ecuaciones de conservación quedan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0, \\ \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* + \nabla^* p^* &= \frac{\mu}{\rho U h} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \\ \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* T^* &= \frac{k}{\rho c U h} \nabla^{*2} T^*,\end{aligned}\tag{6.9.1}$$

siendo $\nabla^* = h \nabla$. Las condiciones de contorno pueden escribirse como sigue:⁸

$$|\mathbf{v}^*| = 1 \text{ y } T^* = T_1^* \text{ en la sección de entrada al conducto, y} \tag{6.9.2}$$

$$|\mathbf{v}^*| = 0 \text{ y } T^* = T_1^* \text{ o } T^* = T_2^* \text{ en la paredes del conducto.} \tag{6.9.3}$$

A partir de las ecuaciones (6.9.1), (6.9.2) y (6.9.3), se deduce que la solución dependerá de

$$\frac{\rho U h}{\mu}, \quad \frac{\rho c U h}{k}, \quad T_1^* \text{ y } T_2^*, \tag{6.9.4}$$

⁸ El tratamiento de las condiciones de contorno en una sección a cierta distancia aguas abajo de la sección de entrada, que delimitaría el dominio de cálculo, requeriría una discusión detallada. En flujos como el considerado, suele ser frecuente poder suponer que en dicha sección las variaciones de las distintas magnitudes en dirección longitudinal del conducto son despreciables y que la presión es uniforme. Para obtener la distribución de presión sería en todo caso necesario fijar la presión en un punto del campo fluido.

o bien,

$$\frac{\rho U h}{\mu}, \frac{\mu c}{k}, T_1^* \text{ y } T_2^*.$$

siendo los dos primeros parámetros adimensionales en esta última relación los números de Reynolds y Prandtl, respectivamente, este último obtenido como cociente entre los dos primeros que aparecen en la ecuación (6.9.4) (el segundo de estos es el número de Peclet). En particular, la solución para la distribución de temperatura puede expresarse como sigue:

$$\frac{cT}{U^2} = f\left(\frac{x}{h}, \frac{\rho U h}{\mu}, \frac{\mu c}{k}, \frac{cT_1}{U^2}, \frac{cT_2}{U^2}\right).$$

Como ejercicio, se sugiere obtener este mismo resultado mediante la utilización del teorema Π .

Problema 6.10. Flujo en la cámara de inyección de una máquina de fundición

La inyección de metal líquido en un molde para fabricar una pieza se realiza desde un cilindro horizontal en el que el metal es impulsado por un pistón que se mueve con una aceleración $a = \beta \alpha^2 e^{\alpha t}$, siendo t el tiempo y α y β magnitudes constantes. El cilindro se llena parcialmente con un volumen de metal líquido que depende del tamaño de la pieza a fabricar, y a continuación se mueve el pistón a lo largo de toda la carrera del cilindro. Al no estar en general el cilindro totalmente lleno de líquido, el movimiento del pistón produce una ola que puede llegar a romperse, provocando que cierta cantidad de aire quede atrapada en el líquido, lo que dará lugar a porosidad en la pieza fabricada (en realidad, existen otros mecanismos que también incrementan la porosidad de la pieza). Se considerará el caso hipotético de que la masa de aire atrapado en la pieza, m , dependa de la carrera, L , y el diámetro, D , del cilindro; de la altura inicial que alcanza la superficie libre del metal líquido en el cilindro, h ; de la aceleración de la gravedad, g ; de la densidad del aire, ρ , y de los parámetros α y β que intervienen en la ley de aceleración del pistón antes indicada. Mediante análisis dimensional, simplificar la dependencia funcional de m con los restantes parámetros mencionados.

Solución

$$\frac{m}{\rho L^3} = f\left(\frac{D}{L}, \frac{h}{L}, \frac{\beta}{L}, \frac{\alpha^2 L}{g}\right).$$

Problema 6.11. Sistema de separación de semillas

Se quiere diseñar un sistema de separación de distintos tipos de semillas y otros productos agrícolas en función de su tamaño, d , y su densidad, ρ_s , en el que estos se dejan caer desde una tolva sobre un tanque con distintos compartimientos, siendo sometidos durante la caída a la acción de una corriente horizontal de aire (densidad ρ y viscosidad μ) de altura h y velocidad uniforme U . La sección de descarga de la tolva está a una altura H respecto del tanque. En el momento de caer dentro del tanque, una semilla de determinado tipo ha experimentado una desviación L respecto de la trayectoria vertical. El diseño de los compartimientos del tanque deberá tener en cuenta la dependencia de L respecto de los parámetros relevantes del problema.

Se trata de utilizar el análisis dimensional para obtener relaciones entre parámetros que puedan ser útiles en el diseño y en la realización de ensayos. Identificar los números adimensionales obtenidos. (Aceleración de la gravedad: g .)

Solución

La relación funcional $L = f(d, \rho_s, \rho, \mu, h, U, H, g)$ puede simplificarse aplicando el análisis dimensional, resultando, por ejemplo, para una configuración geométrica dada,

$$\frac{L}{H} = F\left(\frac{\rho U H}{\mu}, \frac{U^2}{H g}, \frac{\rho_s}{\rho}, \frac{d}{H}, \frac{h}{H}\right).$$

Problema 6.12. Inyección de metal líquido en un molde

Durante la inyección de metal líquido en un molde para fabricar una pieza, el aire inicialmente contenido en el molde, que se supondrá a la presión atmosférica p_0 , debe evacuarse al exterior con objeto de reducir la porosidad de la pieza fabricada. Esto se consigue mediante unos pequeños conductos denominados vientos, que comunican el molde con el exterior, a través de los cuales el aire es expulsado a medida que el metal va llenando el molde. Obviamente, los vientos deben disponerse en puntos del molde adecuados, de forma que el metal no llegue a obturarlos prematuramente y pueda evacuarse la mayor masa de aire posible. En lo que sigue se supondrá que el volumen del molde es V y que existe un único viento de longitud L y sección constante de área A y radio hidráulico R_h . La presión en el exterior del molde es constante, igual a p_0 . El flujo a través del viento se supondrá adiabático y con un factor de fricción constante f . El metal es inyectado con un caudal constante, y el llenado del molde se consigue en un tiempo muy corto, t_f . Antes de iniciarse el proceso de llenado, la velocidad del sonido del aire en el molde es a_0 . La constante del aire es R y la relación de calores específicos, γ . Se supondrá que la masa de aire, m , existente en el molde en un instante dado durante el proceso de llenado no depende de ningún otro parámetro que no haya sido mencionado. Se trata de indicar, de forma razonada, si puede asegurarse que m no dependerá tampoco de alguno de los parámetros mencionados, y utilizar el análisis dimensional para simplificar la dependencia de m con los parámetros restantes.

Solución

La masa de aire es función de los siguientes parámetros: $V, L, A, R_h, p_0, f, a_0, \gamma, t_f$. Explíquese por qué no puede depender de R . Mediante análisis dimensional se puede simplificar la relación

$$m = F(V, L, A, R_h, p_0, f, a_0, \gamma, t_f),$$

obteniéndose, por ejemplo,

$$\frac{ma_0^2}{p_0 L^3} = \mathcal{F}\left(\frac{V}{L^3}, \frac{A}{L^2}, \frac{R_h}{L}, f, \gamma, \frac{t_f a_0}{L}\right).$$

Problema 6.13. Explosión en aire

Una explosión en el aire produce una onda de choque esférica cuyo radio r es una cierta función del tiempo, t , de la energía liberada, E , y de la densidad del aire sin perturbar, ρ . Un determinado tiempo t_0 después de la explosión, la onda alcanza un radio r_0 cuando la energía liberada es E_0 . Determinéase la energía que debe liberarse para que la onda alcance, transcurrido el mismo tiempo t_0 desde la explosión, un radio igual a la décima parte de r_0 .

Solución

El radio de la onda de choque es función de los siguientes parámetros: t , E y ρ . Utilizando el análisis dimensional, la relación

$$r = f(t, E, \rho)$$

se puede simplificar, obteniéndose

$$r^5 \rho / (Et^2) = \text{constante.}$$

Para que exista semejanza entre las situaciones descritas en el enunciado debe cumplirse

$$\frac{r_0^5 \rho_0}{E_0 t_0^2} = \frac{r_1^5 \rho_1}{E_1 t_1^2},$$

de donde se obtiene, teniendo en cuenta que $r_1 = r_0/10$, $t_0 = t_1$ y $\rho_0 = \rho_1$,

$$E_1 = E_0 \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^5 = 10^{-5} E_0.$$

Problema 6.14. Semejanza parcial en ensayos con un metal líquido y con agua

Se quiere estudiar experimentalmente el flujo que tiene lugar en un prototipo de recipiente parcialmente lleno de un metal líquido, y analizar la posibilidad de realizar los ensayos sustituyendo el metal por agua. Se supondrá que cualquier magnitud en el flujo (por ejemplo, la forma de la superficie libre

o la fuerza que el metal ejerce sobre las paredes del recipiente) depende del tamaño del recipiente, L , de una velocidad típica del líquido, U , de la altura inicial de la superficie libre del líquido sobre el fondo del recipiente, h , de la aceleración debida a la gravedad, g , de la densidad, ρ , y la viscosidad, μ , del líquido, y de la tensión superficial aire-líquido, σ . Describir cómo podrían llevarse a cabo los experimentos con objeto de reproducir, o bien condiciones de semejanza total (si esto es posible, en cuyo caso deberá justificarse) o bien semejanza parcial (en este último caso deberán describirse las posibles alternativas). En cualquier caso, es imprescindible que el número de Froude en los ensayos con el modelo sea igual al del flujo en el prototipo. Los parámetros que pueden modificarse en los ensayos del modelo con agua son L , h y U .

Datos:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{agua}} &= 1000 \text{ kg m}^{-3}, & \rho_{\text{metal}} &= 2400 \text{ kg m}^{-3}, \\ \mu_{\text{agua}} &= 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}, & \mu_{\text{metal}} &= 1,3 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \\ \sigma_{\text{agua-aire}} &= 0,073 \text{ N m}^{-1}, & \sigma_{\text{metal-aire}} &= 0,914 \text{ N m}^{-1}.\end{aligned}$$

Solución

Cualquier magnitud en el flujo dependerá de los siguientes parámetros: L , U , h , g , ρ , μ y σ . Considerando, por ejemplo, el caso de la fuerza F que el metal ejerce sobre las paredes del recipiente, mediante análisis dimensional se puede simplificar la relación

$$F = f(L, U, h, g, \rho, \mu, \sigma),$$

obteniéndose, por ejemplo,

$$\frac{F}{\rho U^2 L^2} = \mathcal{F}\left(\frac{h}{L}, \frac{U^2}{gL}, \frac{\rho UL}{\mu}, \frac{\rho U^2 L}{\sigma}\right).$$

Compruébese que no es posible conseguir semejanza total. Sin embargo, sí es posible obtener semejanza parcial. Existen dos opciones: (1) mantener en los experimentos el mismo número de Weber que en el prototipo (además del número de Froude, por lo indicado en el enunciado), en cuyo caso se reproducirán adecuadamente los efectos de la tensión superficial, o bien (2) mantener la igualdad del número de Reynolds. Compruébese que en la primera de las dos opciones, que sería la más adecuada si los efectos de la viscosidad no fuesen importantes, se obtiene la siguiente relación entre los tamaños del prototipo y del modelo de cámara:

$$\frac{L_{\text{prot}}}{L_{\text{mod}}} = \left(\frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{metal}}} \frac{\sigma_{\text{metal-aire}}}{\sigma_{\text{agua-aire}}} \right)^{1/2} = 2,284.$$

La relación entre profundidades de líquido sería obviamente la misma, $h_{\text{prot}}/h_{\text{mod}} = 2,284$, y entre las velocidades típicas del líquido,

$$\frac{U_{\text{prot}}}{U_{\text{mod}}} = \left(\frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{metal}}} \frac{\sigma_{\text{metal-aire}}}{\sigma_{\text{agua-aire}}} \right)^{1/4} = 1,511.$$

Obsérvese que la relación entre los números de Reynolds en el prototipo y en el modelo es

$$\frac{(\text{Re})_{\text{prot}}}{(\text{Re})_{\text{mod}}} = \frac{\rho_{\text{metal}} \mu_{\text{agua}}}{\rho_{\text{agua}} \mu_{\text{metal}}} \frac{U_{\text{prot}} L_{\text{prot}}}{U_{\text{mod}} L_{\text{mod}}} = (1,486)(1,511)(2,284) = 6,373.$$

En la segunda opción, consistente en mantener $(\text{Re})_{\text{prot}} = (\text{Re})_{\text{mod}}$, además de $(\text{Fr})_{\text{prot}} = (\text{Fr})_{\text{mod}}$, compruébese que debe tomarse

$$\frac{L_{\text{prot}}}{L_{\text{mod}}} = \left(\frac{\rho_{\text{agua}}}{\rho_{\text{metal}}} \frac{\mu_{\text{metal}}}{\mu_{\text{agua}}} \right)^{2/3} = 0,6645.$$

La relación entre profundidades de líquido sería obviamente la misma, $h_{\text{prot}}/h_{\text{mod}} = 0,6645$, y entre las velocidades típicas del líquido,

$$\frac{U_{\text{prot}}}{U_{\text{mod}}} = \left(\frac{L_{\text{prot}}}{L_{\text{mod}}} \right)^{1/2} = 0,8152.$$

Obsérvese que la relación entre los números de Weber en el prototipo y en el modelo es

$$\begin{aligned} \frac{(\text{We})_{\text{prot}}}{(\text{We})_{\text{mod}}} &= \frac{\rho_{\text{metal}} \sigma_{\text{agua}}}{\rho_{\text{agua}} \sigma_{\text{metal}}} \left(\frac{U_{\text{prot}}}{U_{\text{mod}}} \right)^2 \frac{L_{\text{prot}}}{L_{\text{mod}}} \\ &= (0,1917)(0,8152)(0,6645) = 0,05624, \end{aligned}$$

por lo que los experimentos en el modelo solo serán útiles si la velocidad característica del líquido es suficientemente elevada, de forma que los números de Weber sean lo suficientemente altos como para que los efectos de la tensión superficial sean despreciables no solo en el prototipo sino también en el modelo.

Problema 6.15. Fuerza oscilatoria sobre un cuerpo romo inducida por desprendimiento de torbellinos

Cuando un fluido de densidad ρ y viscosidad μ incide con una velocidad uniforme U sobre un cuerpo romo bidimensional de tamaño D , se produce un desprendimiento alternativo de torbellinos que provoca la aparición de fuer-

zas oscilatorias sobre el cuerpo con una cierta frecuencia f . Se considerará que los efectos de la viscosidad del fluido en la frecuencia de desprendimiento son despreciables. Se quiere determinar si una torre que va a estar sometida a la acción del viento, con una sección transversal de cierto tamaño D_p y que tiene una frecuencia propia conocida f_p (debe por tanto evitarse que actúen sobre ella fuerzas debidas al viento con dicha frecuencia), puede presentar algún riesgo para determinado rango de velocidad del viento. Explíquese cómo podría llevarse a cabo, con dicho propósito, un experimento con un modelo a escala reducida de la torre, en un túnel en el que se disponga de instrumentación para medir la frecuencia de las fuerzas causadas por el desprendimiento de torbellinos. ¿Puede en principio utilizarse indistintamente un túnel aerodinámico o hidrodinámico?

Solución

Según se indica en el enunciado, en principio

$$f = f(\rho, U, D).$$

Mediante análisis dimensional se deduce que fD/U es el único parámetro adimensional que puede formarse (obsérvese que la densidad no aparece, al haberse despreciado la dependencia con la viscosidad), de manera que la relación funcional anterior puede simplificarse y expresarse de la forma siguiente: $F(fD/U) = 0$, por lo que fD/U debe ser constante en cualquier experimento que se realice:

$$\frac{fD}{U} = C.$$

Si se construye un modelo de tamaño D_m y se ensaya con una velocidad U_m , midiendo la frecuencia f_m de la fuerza que se ejerce sobre el modelo puede determinarse el valor de la constante $C = f_m D_m / U_m$. El rango de velocidad buscado estará alrededor del valor $U_p = f_p D_p / C$.

En principio, si se acepta estrictamente la hipótesis de considerar despreciables los efectos de la viscosidad, se deduce de lo anterior que sería indiferente utilizar agua o aire como fluido en los ensayos. Dichos efectos podrían condicionar de forma diferente los rangos de posibles condiciones de ensayo, según el tipo de fluido utilizado. La compresibilidad del aire solo podría llegar a tener influencia si el tamaño del modelo fuese suficientemente pequeño y se pretendiese mantener la igualdad del número de Reynolds.

Problema 6.16. Impacto de una gota sobre una superficie sólida

Una gota de un cierto líquido de densidad ρ , viscosidad μ y coeficiente de tensión superficial con aire σ , y tamaño típico d impacta perpendicularmente, con una velocidad U , sobre una superficie plana horizontal. Se supondrá que las características del flujo que se produce tras el impacto de la gota dependen únicamente de los parámetros mencionados.

- Mediante análisis dimensional, determinar una relación funcional simplificada entre el diámetro máximo, D , que alcanza la lámina de líquido depositado en la superficie tras el impacto de la gota y los restantes parámetros que intervienen en el problema.
- Supóngase a continuación que una gota de butanol de diámetro $d_{\text{but}} = 4 \text{ mm}$ impacta sobre una superficie plana con una velocidad $U_{\text{but}} = 3 \text{ m s}^{-1}$. Explicar si sería posible realizar un ensayo del impacto de una gota de agua de diámetro $d_{\text{ag}} = 0,25 \text{ mm}$ manteniendo condiciones de semejanza y, en su caso, indicar en qué condiciones.
- En el caso de que no fuera posible mantener las condiciones de semejanza con los datos proporcionados en el apartado b), indicar cuáles podrían ser las posibles condiciones de semejanza parcial.

Datos:

$$\rho_{\text{but}} = 810 \text{ kg m}^{-3}; \mu_{\text{but}} = 0,0037 \text{ Pa s}; \sigma_{\text{but}} = 0,025 \text{ N m}^{-1};$$

$$\rho_{\text{ag}} = 1000 \text{ kg m}^{-3}; \mu_{\text{ag}} = 0,001 \text{ Pa s}; \sigma_{\text{ag}} = 0,072 \text{ N m}^{-1}.$$

Solución

a) $\frac{D}{d} = f\left(\frac{\rho U d}{\mu}, \frac{\rho U^2 d}{\sigma}\right)$. Explíquese el significado físico de los parámetros adimensionales que intervienen.

b) Para que se mantengan condiciones de semejanza, tienen que cumplirse las condiciones $\text{Re}_{\text{but}} = \text{Re}_{\text{ag}}$ y $\text{We}_{\text{but}} = \text{We}_{\text{ag}}$, y, por tanto,

$$\frac{U_{\text{ag}}}{U_{\text{but}}} = \frac{\sigma_{\text{ag}} \mu_{\text{but}}}{\sigma_{\text{but}} \mu_{\text{ag}}}$$

y

$$\frac{d_{\text{ag}}}{d_{\text{but}}} = \frac{\rho_{\text{but}}}{\rho_{\text{ag}}} \frac{\sigma_{\text{but}}}{\sigma_{\text{ag}}} \left(\frac{\mu_{\text{ag}}}{\mu_{\text{but}}} \right)^2.$$

Es inmediato comprobar que, con los datos del problema, no resulta posible realizar un ensayo con agua en condiciones de semejanza (para ello, debería cumplirse $U_{\text{ag}} = 32,41 \text{ m s}^{-1}$ y $d_{\text{ag}} = 8,106 \times 10^{-2} \text{ mm}$).

c) Los números de Reynolds y de Weber para el ensayo con butanol son, respectivamente, $\text{Re}_{\text{but}} = 2627$ y $\text{We}_{\text{but}} = 1166$. Las posibles condiciones de semejanza parcial en el ensayo con agua consistirían en mantener el mismo número de Reynolds (lo que se consigue con $U_{\text{ag}} = 10,51 \text{ m s}^{-1}$, siendo entonces $\text{We}_{\text{ag}} = 378$), o bien el número de Weber (lo que se consigue con $U_{\text{ag}} = 18,46 \text{ m s}^{-1}$, siendo en este caso $\text{Re}_{\text{ag}} = 4614$).

Capítulo 7

Flujos con efectos de viscosidad dominantes

Problema 7.1. Flujo en la zona de entrada de una tubería

En el flujo laminar estacionario de un fluido de densidad ρ y viscosidad μ que tiene lugar en la región de entrada a una tubería de sección circular de radio R , el perfil de velocidad pasa de ser uniforme en la sección (1) de entrada (velocidad U_1 y presión p_1) a estar plenamente desarrollado en una sección (2) suficientemente aguas abajo, donde la presión es p_2 . Determinar:

- a) La distribución de velocidad en la sección 2.
- b) La fuerza de fricción que se ejerce sobre la pared de la tubería entre las secciones 1 y 2.

Solución

a) Integrando la ecuación (B.3.5) de conservación de cantidad de movimiento en forma diferencial correspondiente a un movimiento laminar, unidireccional y estacionario, con las condiciones de contorno apropiadas para una tubería de sección circular, se obtiene la siguiente distribución de velocidad, correspondiente al flujo plenamente desarrollado que existe aguas abajo de la sección 2 de la

tubería (flujo de Hagen-Poiseuille):¹

$$u = \frac{P_e}{4\mu} (R^2 - r^2), \quad (7.1.1)$$

donde P_e es el módulo (cambiado de signo) del gradiente de la presión reducida.

Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa al volumen de control limitado por la pared de la tubería y las secciones 1 y 2, resulta

$$\pi R^2 U_1 = \frac{P_e}{4\mu} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r \, dr = \pi R^4 \frac{P_e}{8\mu},$$

de donde se obtiene

$$P_e = \frac{8\mu U_1}{R^2}.$$

Introduciendo este resultado en la ecuación (7.1.1), resulta finalmente

$$u = 2U_1 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

b) Aplicando la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al mismo volumen de control antes descrito, se obtiene

$$-\rho U_1^2 \pi R^2 + \rho 4U_1^2 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^2 2\pi r \, dr = (p_1 - p_2) \pi R^2 - F,$$

siendo F la fuerza que se ejerce sobre el tubo (en la dirección del tubo y positiva cuando tiene sentido desde la sección 1 a la 2), de donde resulta²

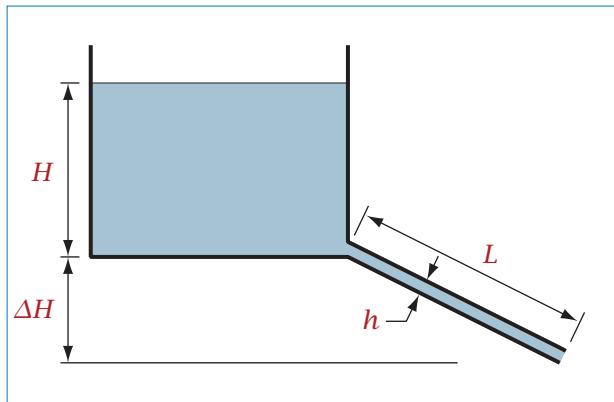
$$F = \pi R^2 (p_1 - p_2 - \frac{1}{3} \rho U_1^2).$$

¹ Es importante tener en cuenta que la ecuación (B.3.5) no es aplicable entre las secciones 1 y 2.

² Aunque no se dan datos numéricos en el enunciado para comprobarlo, obsérvese que, como es obvio, P_e no será igual a $(p_1 - p_2)/L$. El flujo entre las secciones 1 y 2 no corresponde al tipo de flujo con viscosidad dominante que se considerará en este capítulo, que solo tiene lugar, en la tubería considerada en este problema, en la región de flujo plenamente desarrollado, aguas abajo de la sección 2.

Problema 7.2. Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto bidimensional

Un depósito de grandes dimensiones contiene un líquido de densidad $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ y viscosidad $\mu = 1 \text{ poise}$. En el fondo del depósito se ha conectado un conducto inclinado de longitud $L = 1 \text{ m}$, de sección rectangular de anchura $b = 10 \text{ cm}$ y altura $h = 0,1 \text{ mm}$, que puede considerarse bidimensional. La superficie libre del líquido está a una altura $H = 10 \text{ cm}$ respecto del fondo del depósito. La sección de salida del conducto está situada a una altura $\Delta H = 5 \text{ cm}$ por debajo de la sección de entrada. Calcular el caudal que circula por el conducto.



Solución

Se supondrá que el flujo en el conducto es laminar y unidireccional, con efectos de viscosidad dominantes, lo que deberá justificarse posteriormente. El módulo del gradiente de presión reducida en la tubería, teniendo en cuenta que en el flujo de Hagen-Poiseuille la presión reducida ($P = p + \rho g z$) varía linealmente a lo largo de la tubería, es

$$P_e = -\frac{dP}{dx} = \frac{P_1 - P_2}{L}, \quad (7.2.1)$$

siendo

$$P_1 = p_{\text{at}} + \rho g(H + \Delta H)$$

y $P_2 = p_{\text{at}}$ las presiones reducidas en las secciones de entrada y salida de la tubería, respectivamente (el origen de la coordenada vertical se ha tomado en la sección de salida). Introduciendo estas expresiones en la ecuación (7.2.1) y sustituyendo valores, resulta

$$P_e = \frac{(1000)(9,8)(0,15)}{1} = 1470 \text{ N m}^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

El caudal se obtiene mediante la ecuación (B.3.7):

$$Q = \frac{P_e}{12\mu} h^3 b = \frac{1470}{(12)(0,1)} (10^{-4})^3 (0,1) = 1,225 \times 10^{-7} \text{ l s}^{-1}.$$

Justifíquense las hipótesis utilizadas.

Problema 7.3. Flujo entre dos placas planas paralelas

Entre dos placas planas y paralelas, separadas una distancia $h = 1 \text{ cm}$, circula un líquido de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu = 1 \text{ poise}$. La presión reducida experimenta una variación $\Delta P = 10 \text{ dinas cm}^{-2}$ en una longitud $L = 100 \text{ cm}$ en la dirección del movimiento. Determinar si el flujo entre las placas satisface o no las condiciones correspondientes a una corriente de Hagen-Poiseuille.

Solución

Suponiendo que se satisfacen las condiciones correspondientes a un flujo de Hagen-Poiseuille (esto se comprobará en los párrafos siguientes), demuéstrese que el gradiente de presión reducida es

$$P_e = \Delta P / L = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ dinas cm}^{-3},$$

y que la velocidad media del fluido entre las placas es

$$U = \frac{P_e}{12\mu} h^2 = \frac{0,1}{(12)(1)} (1)^2 = 0,00833 \text{ cm s}^{-1}.$$

Se van a justificar a continuación las aproximaciones que han permitido utilizar la ecuación (B.3.3). La unidireccionalidad del flujo requiere

$$h/L \ll 1.$$

Si el flujo fuese estrictamente unidireccional, se anularía de forma exacta el término convectivo en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. Dado que esto no se deduce necesariamente del enunciado, debe comprobarse que se satisface la siguiente condición, que permite despreciar el término convectivo frente al viscoso:

$$\frac{\rho U h}{\mu} \frac{h}{L} \ll 1.$$

Debe verificarse además que el número de Reynolds corresponde a flujo laminar.³

Obsérvese que no puede utilizarse la ecuación (B.3.3) si no se satisfacen ambas condiciones de unidireccionalidad⁴ y de flujo con efectos de viscosidad dominantes. Una elevada unidireccionalidad del movimiento tiende a favorecer que los efectos de viscosidad sean dominantes, pero obviamente no determina que lo sean. Por otra parte, es obvio que el que los efectos de viscosidad sean dominantes no implica que el flujo sea unidireccional.

En el problema planteado, se satisfacen aceptablemente las dos condiciones:

$$h/L = 1/100 = 0,01 \ll 1,$$

$$\frac{\rho U h}{\mu} \frac{h}{L} = \frac{(800 \times 10^{-3})(0,00833)(1)}{1} \frac{1}{100} = 6,66 \times 10^{-5} \ll 1,$$

siendo $Re = 6,66 \times 10^{-3}$.

Problema 7.4. Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (I)

Determinar la distribución de velocidad en el flujo laminar, bidimensional y unidireccional de un líquido de viscosidad cinemática ν que fluye sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con el plano horizontal, en una capa de espesor h .

³ En el flujo de Hagen-Poiseuille bidimensional, el número de Reynolds crítico obtenido teóricamente es de 5772 (basado en la velocidad máxima). Por encima de dicho valor, el flujo es inestable frente a perturbaciones infinitesimales. Experimentalmente se ha confirmado este valor, si bien con grandes dificultades para mantener el flujo estable para valores de Re próximos al crítico. En la práctica, el flujo se hace inestable al alcanzarse valores de Re inferiores al valor mencionado.

⁴ Se hace aquí referencia a que $h/L \ll 1$, no a que el flujo sea estrictamente unidireccional (sin componentes transversales de velocidad).

Solución

En un sistema de referencia con el eje x paralelo al plano inclinado (formando un ángulo α con la horizontal) y con el sentido del flujo, y el eje y perpendicular al eje x y sentido saliente del plano (véase ecuación (B.3.1)),

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dP}{dx} = 0, \quad (7.4.1)$$

donde $u = u(y)$ es la única componente de la velocidad⁵ y $P = P(x)$ es la presión reducida.

La presión reducida (que será constante en cada sección transversal perpendicular al eje x) en la superficie libre es

$$P = p_{\text{at}} - \rho g x \sin \alpha.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (7.4.1), resulta

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{g}{\nu} \sin \alpha = 0.$$

Integrando, se obtiene

$$\frac{du}{dy} + \frac{g}{\nu} y \sin \alpha = C_1. \quad (7.4.2)$$

La constante C_1 se determina imponiendo la condición de que la tensión cortante (y, por tanto, du/dy) en la superficie libre es nula, al ser la viscosidad del aire muy pequeña frente a la del líquido (y, por tanto, despreciable la resistencia por rozamiento que aquel ejerce sobre este):

$$C_1 = \frac{g}{\nu} h \sin \alpha.$$

Integrando de nuevo, imponiendo la condición de no deslizamiento en la pared, de la ecuación (7.4.2) se obtiene finalmente

$$u = \frac{g \sin \alpha}{\nu} y \left(h - \frac{y}{2} \right).$$

⁵ La estricta unidireccionalidad del movimiento que se menciona en el enunciado de este problema da lugar a la anulación exacta del término convectivo en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Problema 7.5. Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (I)

Un líquido de viscosidad μ fluye unidireccionalmente en régimen laminar a lo largo del espacio anular existente entre dos tubos coaxiales de gran longitud. El movimiento se debe a la existencia de un gradiente de presión reducida dP/dx , siendo x la coordenada a lo largo del eje. El radio del tubo interior es R_1 , y el del tubo exterior es R_2 . Determinar la velocidad del líquido en función de la coordenada radial, r .

Solución

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[r^2 - R_1^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r/R_1) \right].$$

[Debe integrarse la ecuación (B.3.5) con las condiciones de contorno de no deslizamiento en las paredes de los tubos.]

Problema 7.6. Flujo acimutal entre dos cilindros coaxiales

Un tubo vertical de gran longitud y radio R_2 gira sobre su eje con una velocidad angular Ω . Otro tubo de radio $R_1 < R_2$, que se encuentra en reposo, está dispuesto coaxialmente con el anterior. El espacio anular entre los tubos está lleno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ . Determinar:

- Componente acimutal de la velocidad, v_θ , en función de la coordenada radial, r .
- Momento por unidad de longitud de las fuerzas que se ejercen sobre cada uno de los tubos.
- Distribución de presión en el espacio entre los tubos.

Solución

a)

$$v_{\theta} = \frac{\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right).$$

[Esta distribución⁶ se obtiene integrando la ecuación (B.2.15) de conservación de la componente acimutal de la cantidad de movimiento, que, en este caso ($\mathbf{v} = v_{\theta}(r) \mathbf{e}_{\theta}$), queda como sigue:

$$0 = \mu \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_{\theta}) \right],$$

con las condiciones de contorno de no deslizamiento en las paredes de los cilindros.]

b)

$$M = 4\pi\mu\Omega \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

[Compruébese y justifíquese que sobre los dos tubos se ejercen momentos de igual módulo M y de sentido opuesto. Determinése en primer lugar la distribución de la tensión cortante en el flujo, $\tau_{r\theta}$:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{dv_{\theta}}{dr} - \frac{v_{\theta}}{r} \right),$$

expresión que se obtiene a partir de la ecuación (B.2.6), teniendo en cuenta las ecuaciones (B.2.7) y (A.3.35).]

c)

$$p = p_1 + \frac{\rho\Omega^2 R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left(\frac{r^2}{2} - 2R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} - \frac{1}{2} \frac{R_1^4}{r^2} \right).$$

[Esta distribución de presión se obtiene directamente integrando la ecuación (B.2.14) de conservación de la componente radial de la cantidad de movimiento, que, para las condiciones del enunciado, queda como sigue:

$$-\frac{v_{\theta}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr},$$

introduciendo previamente la expresión de v_{θ} obtenida en el apartado a). Se ha supuesto $p = p_1$ en $r = R_1$.]

⁶ La solución obtenida en este apartado es de las relativamente muy pocas soluciones exactas que pueden obtenerse en mecánica de fluidos. Obsérvese que es equivalente a la superposición de dos soluciones: las correspondientes a un movimiento de rotación del fluido como sólido rígido y a un vórtice libre (véase el Problema 3.6).

Problema 7.7. Flujo de aceite a través de un conducto

Determinar la potencia necesaria para transportar un caudal $Q = 50 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ de un aceite de densidad $\rho = 950 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu = 2 \text{ poise}$ a través de un conducto horizontal de diámetro $D = 10 \text{ cm}$ y longitud $L = 10 \text{ km}$. Explicar y justificar las hipótesis utilizadas.

Solución

La potencia que se pide es la que debería comunicar una bomba al aceite para producir en este un incremento de presión igual a la pérdida de presión reducida que se produce a lo largo del conducto para el caudal indicado (ver ecuación (B.6.3)):⁷

$$\dot{W} = Q\Delta p.$$

Se supondrá en principio que el flujo es laminar y aproximadamente unidireccional, con efectos de viscosidad dominantes (la validez de estas hipótesis deberá ser comprobada posteriormente). En un flujo de este tipo, cuando la tubería es de sección circular, el gradiente de presión reducida es (ecuación (B.3.6))

$$P_e = \frac{8\mu Q}{\pi R^4} = \frac{(8)(0,2)(50/3600)}{\pi(0,05)^4} = 1131,8 \text{ N m}^{-2} \text{ m}^{-1}.$$

La caída de presión reducida a lo largo del conducto es

$$\Delta P = P_e L = 1,132 \times 10^7 \text{ N m}^{-2},$$

por lo que la potencia necesaria será

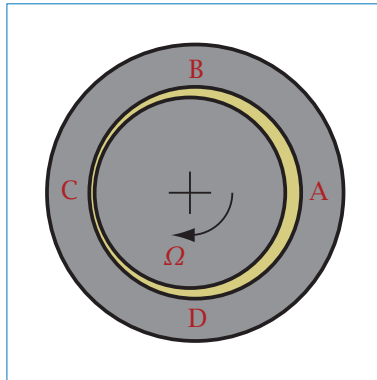
$$\dot{W} = \frac{50}{3600} 1,132 \times 10^7 = 1,572 \times 10^5 \text{ W}.$$

Compruébese que las hipótesis utilizadas son aceptables.

⁷ En realidad, la bomba debe comunicar al fluido una potencia $\dot{W} = Q\Delta p + \overline{\Phi}_v$ para que el incremento de potencia en el aceite al atravesar la bomba sea $Q\Delta p$, siendo $\overline{\Phi}_v$ la potencia correspondiente a las pérdidas hidráulicas en la bomba.

Problema 7.8. Flujo en un cojinete cilíndrico

Representar gráficamente, de forma cualitativa, la distribución de presión en el aceite e indicar el sentido de la fuerza entre el eje y el cojinete para la configuración de la figura (supóngase que no hay cavitación). El cojinete es fijo y el eje gira en el sentido indicado.

**Solución**

La fuerza tiende a juntar entre sí a eje y cojinete en la parte inferior (lo que ocurre, por ejemplo, si sobre el eje se ejerce una fuerza hacia abajo y el cojinete soporta al eje). Justifíquese.

Problema 7.9. Refrigerador de aceite

Un refrigerador de aceite está constituido por un conjunto de 100 tubos cilíndricos horizontales de sección circular, iguales y dispuestos en paralelo. El diámetro de los tubos es $D = 10^{-2}$ m y su longitud $L = 4$ m. El aceite tiene una densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$, y debe circular por los tubos con una velocidad media $U = 1 \text{ m s}^{-1}$. La viscosidad dinámica del aceite, debido a la variación de su temperatura al circular por los tubos, varía linealmente a

lo largo de cada tubo desde un valor $\mu_1 = 0,3 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ en la sección de entrada hasta $\mu_2 = 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ en la sección de salida.

Calcular la potencia que debe comunicarse al aceite para vencer la pérdida de carga en el refrigerador. Justificar las hipótesis adoptadas para resolver el problema.

Solución

Se supondrá en principio que el flujo en los tubos es laminar y aproximadamente unidireccional, con efectos de viscosidad dominantes. De acuerdo con los datos del enunciado, la ley de variación de la viscosidad con la coordenada x , según la dirección a lo largo de los tubos y con origen en la sección de entrada, viene dada por

$$\mu = 0,03 + 0,0175 x$$

(μ en $\text{kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, x en m).

En cada tubo se supondrá que se satisface localmente la ecuación (B.3.6),

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Despejando el gradiente de presión de esta ecuación, teniendo en cuenta que

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} = 7,854 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

y sustituyendo la ley de variación de μ , resulta

$$\frac{dp}{dx} = -(3,2 \times 10^5)(0,03 + 0,0175 x)$$

(p en N m^{-2} , x en m). Integrando esta ecuación entre las secciones de entrada y salida del tubo, se obtiene

$$p_1 - p_2 = 83\,200 \text{ N m}^{-2}.$$

La potencia que debe comunicarse al aceite es (véase Problema 7.7)

$$\dot{W} = Q_T(p_1 - p_2) = (100)(7,854 \times 10^{-5})(83\,200) = 653 \text{ W}$$

(Q_T es el caudal total que circula por el refrigerador).

Determinése el grado de validez de las hipótesis utilizadas.

Problema 7.10. Flujo longitudinal entre dos cilindros coaxiales (II)

A través del espacio anular formado entre dos cilindros coaxiales de longitud L y diámetros D_1 y D_2 ($D_1 < D_2$) circula en régimen laminar un caudal Q de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ .

- a) Indicar bajo qué condiciones el flujo es aproximadamente unidireccional y con efectos de viscosidad dominantes.

En lo que sigue se supondrá que se dan las condiciones del apartado anterior.

- b) Determinar la posición radial en la que el líquido alcanza la máxima velocidad.
- c) Determinar la presión manométrica en la sección de entrada del conducto si este descarga a la atmósfera, su eje se encuentra dispuesto en posición vertical y el flujo tiene sentido ascendente.

Solución

a)

$$\frac{D_2 - D_1}{L} \ll 1,$$

$$\frac{\rho Q / D_2}{\mu} \frac{D_2 - D_1}{L} \ll 1.$$

b) Compruébese que el máximo de velocidad (la función $u(r)$ fue obtenida en el Problema 7.5) se alcanza para

$$\frac{2r}{D_1} = \left[\frac{(D_2/D_1)^2 - 1}{2 \ln(D_2/D_1)} \right]^{1/2}.$$

c) La relación entre el gradiente de presión reducida y el caudal se determina

integrando la distribución de velocidad obtenida en el Problema 7.5 ($R = D/2$),

$$\begin{aligned} Q &= \int_{R_1}^{R_2} u \, 2\pi r \, dr \\ &= \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \int_{R_1}^{R_2} \left[r^2 - R_1^2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r/R_1) \right] 2\pi r \, dr \\ &= \frac{\pi}{8\mu} \frac{dP}{dx} \left\{ (R_2^2 - R_1^2) \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} - (R_2^2 + R_1^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

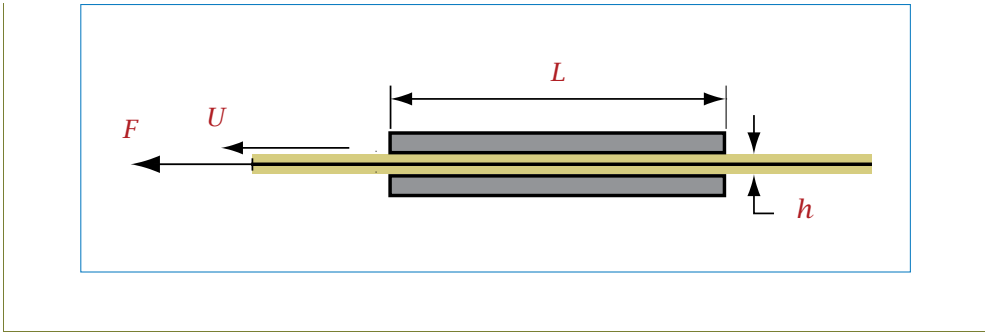
$$\frac{dP}{dx} = \frac{\rho g L - p_e}{L},$$

siendo p_e la presión manométrica en la sección de entrada. De las dos ecuaciones anteriores, resulta

$$p_e = \rho g L - \frac{8\mu Q L}{\pi (R_2^2 - R_1^2) \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} - (R_2^2 + R_1^2) \right]}.$$

Problema 7.11. Viscosímetro de placa plana

Se quiere medir la viscosidad de un líquido de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$ haciendo pasar una placa metálica que previamente se ha sumergido en el líquido, de forma que haya quedado recubierta de este, a través del espacio existente entre dos placas estacionarias, paralelas y horizontales, de longitud $L = 30 \text{ cm}$ y anchura $b = 15 \text{ cm}$, separadas una distancia $h = 1 \text{ mm}$. El líquido llena totalmente el espacio entre las placas. La placa móvil, de espesor despreciable, equidista de las placas fijas y es paralela a estas. La velocidad de la placa resulta ser $U = 1 \text{ cm s}^{-1}$ cuando se aplica una fuerza $F = 12 \text{ N}$ para moverla según se indica en la figura. Determinar la distribución de velocidad del líquido entre las placas para estas condiciones y la viscosidad del líquido. Justificar las hipótesis empleadas.



Solución

Integrando la ecuación (B.3.3), con $P_e = 0$,

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0,$$

siendo y la distancia desde la placa móvil, con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u &= U \text{ en } y = 0, \\ u &= 0 \text{ en } y = \pm h/2, \end{aligned}$$

se obtiene

$$u = U - \frac{2U}{h}|y| = 0,01 - 20|y| \quad (u \text{ en m s}^{-1}, y \text{ en m}).$$

La tensión cortante en la placa móvil es

$$\tau = \mu \left| \frac{du}{dy} \right| = \frac{2\mu U}{h}.$$

La fuerza de rozamiento sobre la placa móvil es

$$F = 2\tau Lb = \frac{4\mu ULb}{h}.$$

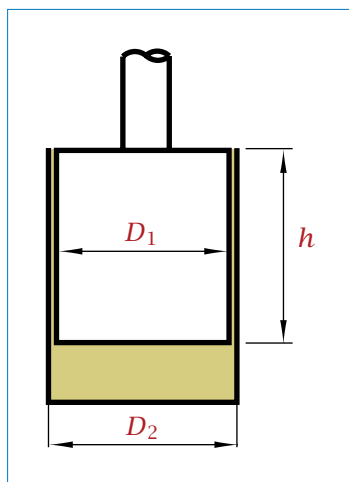
Sustituyendo valores, de esta última ecuación se obtiene

$$\mu = 6,67 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

Compruébese que el flujo es aproximadamente unidireccional, con efectos de viscosidad dominantes.

Problema 7.12. Viscosímetro de cilindros concéntricos

En el viscosímetro de cilindros concéntricos de la figura, el cilindro interior, de altura $h = 0,12$ m y diámetro $D_1 = 100$ mm, gira a una velocidad de 300 rpm, mientras que el cilindro exterior, de diámetro $D_2 = 102$ mm, está en reposo.



Para un fluido de viscosidad $\mu = 2$ poise y densidad $\rho = 850 \text{ kg m}^{-3}$, determinar:

- Velocidad del fluido situado entre las caras laterales de los cilindros en función de la coordenada radial.
- Par de giro que se medirá en el eje del cilindro móvil. Supóngase despreciable el rozamiento de la base del cilindro interior.

Justifíquense las hipótesis utilizadas.

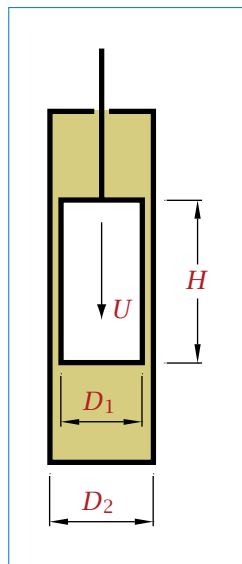
Solución

a) $v = 15,7[1 - 1000(r - D_1/2)]$ (r en m y v en m s^{-1}).

b) 0,59 N m.

Problema 7.13. Amortiguador de aceite

El amortiguador representado en la figura consta de un émbolo de diámetro $D_1 = 100$ mm y altura $H = 40$ cm que se mueve a una velocidad constante U en el interior de un cilindro, de diámetro $D_2 = 101$ mm, que contiene un líquido de viscosidad $\mu = 10^{-2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ a una cierta temperatura de diseño. Se supondrá que el flujo de líquido entre el émbolo y el cilindro es laminar, con efectos de viscosidad dominantes.



Determinar, en función de U :

- Caudal de líquido que circula a través del espacio entre cilindro y émbolo.
- Perfil de velocidad en el espacio entre cilindro y émbolo en función del gradiente de presión reducida.
- Gradiente de presión reducida en el líquido, en el espacio entre cilindro y émbolo.
- Fuerza de resistencia que actúa sobre el émbolo.

Indicar cualitativamente cómo afectará la temperatura al comportamiento del amortiguador.

Nota: En la resolución del problema puede utilizarse la expresión simplificada (ecuación (B.3.3))

$$-P_e = \frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$(y = r - D_1/2).$$

Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la masa,

$$\frac{dV_c}{dt} + \int_{S_c} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

al volumen de control variable indicado en la figura adjunta con líneas discontinuas, en el que solo la superficie en contacto con la cara inferior del émbolo es móvil, teniendo en cuenta que

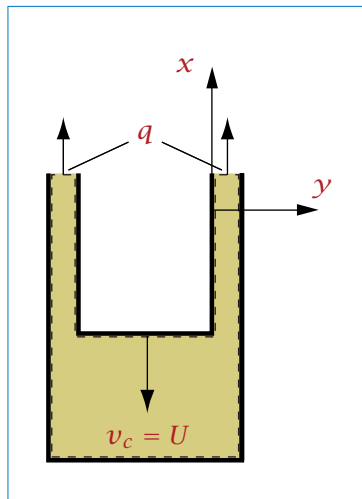
$$\frac{dV_c}{dt} = -\frac{\pi D_1^2}{4} U$$

y que

$$\int_{S_c} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = q, \quad (7.13.1)$$

se obtiene

$$q = -\frac{dV_c}{dt} = \frac{\pi D_1^2}{4} U.$$



b) Integrando la ecuación simplificada indicada en el enunciado,

$$\frac{dP}{dx} = -P_e = \mu \frac{d^2 u}{dy^2},$$

con las condiciones de contorno

$$u(y = 0) = U,$$

$$u(y = h) = 0,$$

siendo $h = (D_2 - D_1)/2$ el espesor de la película de aceite ($h \ll D_1$), resulta

$$u = \frac{P_e}{2\mu} (h - y) y + U \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

c) El caudal que circula entre el émbolo y el cilindro se puede expresar de la siguiente forma:

$$q = \pi D_1 \int_0^h u \, dy \quad (7.13.2)$$

(obsérvese que el segundo miembro resulta de aplicar la integral del primer miembro de la ecuación (7.13.1) a la única superficie del volumen de control a través de la que existe flujo). Sustituyendo en la ecuación (7.13.2) la expresión de u obtenida en el apartado anterior, integrando e igualando el resultado con la expresión del caudal obtenida en el apartado a), resulta

$$P_e = \frac{6\mu U}{h^3} \left[\frac{D_1}{2} - h \right]. \quad (7.13.3)$$

d) Sobre cada elemento de área dS de la superficie lateral del émbolo se ejerce una fuerza

$$dF = \tau_{yx} \, dS = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} dS = \mu \left[\frac{P_e}{2\mu} h - \frac{U}{h} \right] \pi D_1 \, dx.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la expresión para P_e de la ecuación (7.13.3) e integrando sobre la superficie lateral del émbolo, resulta

$$F = \frac{\mu \pi D_1 H U}{h^2} \left[\frac{3}{2} D_1 - 4h \right].$$

Problema 7.14. Ascenso de una burbuja de aire en un tubo que contiene aceite

Un tubo vertical de diámetro interior $D = 2$ cm, cerrado en su extremo inferior, contiene aceite de densidad $\rho = 950 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu = 0,5$ poise, en cuyo seno se halla sumergida una burbuja de aire que asciende por el tubo con una velocidad constante U . Se supondrá que los efectos debidos a la tensión superficial son despreciables y que la burbuja tiene una forma aproximadamente cilíndrica, existiendo entre la burbuja de aire y la pared del tubo una delgada película de aceite, de espesor uniforme $h = 1,5$ mm y longitud $L = 4$ cm (de acuerdo con lo anterior, L coincide aproximadamente con la longitud de la burbuja). Se supondrá que en la película el flujo es unidireccional y los efectos de viscosidad son dominantes. El flujo en la película podrá tratarse como si fuese bidimensional, considerándose que el espesor h es suficientemente pequeño frente al diámetro del tubo. Se trata de determinar:

- a) Caudal de aceite que desciende por la película en función de la velocidad de la burbuja U .
- b) Gradiente de presión reducida y distribución de velocidad en la película de aceite.⁸
- c) El valor de U .

Indicar si U depende de L y justificar la validez de las aproximaciones utilizadas para resolver el problema. Explicar qué causa el movimiento de la burbuja.

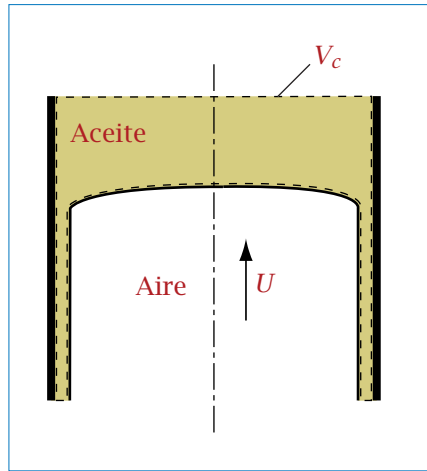
Solución

- a) Aplicando la ecuación de continuidad,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} dV + \int_{S_c} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (7.14.1)$$

al volumen de control, V_c , indicado con línea de trazos en la figura adjunta,

⁸ Téngase en cuenta que la presión en el interior de la burbuja es uniforme y que la tensión cortante en la superficie de separación aceite-aire es despreciable.



resulta

$$-\frac{\pi}{4}(D-2h)^2U + q = 0, \quad (7.14.2)$$

de donde se obtiene un caudal de aceite

$$q = \pi(D-2h)^2U/4. \quad (7.14.3)$$

b) El gradiente de presión reducida viene dado por $P_e = -dP/dx = [(p_1 + \rho gh_1) - (p_2 + \rho gh_2)]/(h_1 - h_2)$, siendo 1 y 2 dos puntos cualesquiera a distinta altura en la película; dado que la presión es uniforme a lo largo de la burbuja ($p_1 = p_2$), resulta

$$P_e = \rho g. \quad (7.14.4)$$

Integrando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, que en este caso se reduce a $P_e + \mu d^2u/dy^2 = 0$, resulta

$$u = -\frac{P_e}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1y + C_2. \quad (7.14.5)$$

Aplicando las condiciones de contorno $du/dy = 0$ en $y = h$ y $u = 0$ en $y = 0$, se obtiene $C_1 = P_e h/\mu$ y $C_2 = 0$, resultando finalmente, teniendo en cuenta el resultado de la ecuación (7.14.4),

$$u = \rho g y(h - y/2)/\mu.$$

c) El caudal de aceite en la película es

$$q = \int_0^h u \pi D dy = \pi D \frac{P_e h^3}{3\mu}. \quad (7.14.6)$$

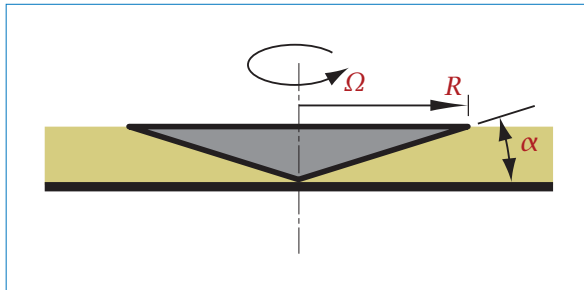
Igualando esta expresión a la de la ecuación (7.14.3), y teniendo en cuenta la ecuación (7.14.4), resulta

$$U = \frac{4D\rho gh^3}{3\mu(D-2h)^2} = 0,058 \text{ m s}^{-1}. \quad (7.14.7)$$

Obsérvese que U no depende de la longitud de la burbuja. Se comprueba que las hipótesis adoptadas pueden ser aceptables ($Re\,h/L = 0,062$ y $h/L = 0,038$). Explíquese qué causa el movimiento de la burbuja.

Problema 7.15. Viscosímetro de cono y placa

El viscosímetro esquematizado en la figura consta de un elemento móvil de forma cónica, con base de radio R y ángulo en la base α muy pequeño, que gira con una velocidad angular Ω alrededor de su eje, con el vértice apoyado en una placa plana en reposo, perpendicular a dicho eje.



Un líquido de viscosidad μ llena completamente el espacio entre el cono y la placa plana. Se supondrá que la velocidad del líquido solo tiene componente acimutal y que esta varía linealmente en el espacio entre el cono y la placa. Determinar la viscosidad del líquido en función del momento de giro, M , necesario para mover el elemento móvil.

Solución

$$\mu = \frac{3M \tan \alpha}{2\pi\Omega R^3}.$$

Problema 7.16. Flujo de dos líquidos en capas superpuestas sobre un plano inclinado

Considérese el flujo laminar, bidimensional y unidireccional de dos líquidos inmiscibles con la misma densidad ρ y viscosidades cinemáticas ν_1 y ν_2 , que fluyen sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con el plano horizontal en dos capas superpuestas de espesores h_1 y h_2 , respectivamente (en la capa inferior fluye el líquido al que corresponde el subíndice 1). Tómense unos ejes x e y paralelo y perpendicular, respectivamente, al plano inclinado, con origen en un punto de la superficie de este. Determinar:

- a) Distribución de presión reducida.
- b) Distribución de velocidad.

Solución

a) $P = P_0 - \rho g x \sin \alpha$, siendo $P(x = 0) = P_0$ un valor de referencia.

b)

$$u_1 = \frac{g \sin \alpha}{\nu_1} \left[(h_1 + h_2)y - \frac{y^2}{2} \right]$$

$$u_2 = \frac{g \sin \alpha}{\nu_2} \left[(h_1 + h_2)y - \frac{y^2}{2} \right] + \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right) g h_1 \sin \alpha \left(\frac{h_1}{2} + h_2 \right).$$

Problema 7.17. Flujo de aceite con temperatura variable a través de un sistema de tubos en paralelo

A través de un conjunto de 75 tubos cilíndricos horizontales de sección circular, iguales y dispuestos en paralelo, se impulsa un líquido de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$ a una velocidad media $U = 0,5 \text{ m s}^{-1}$. El diámetro de los tubos es $D = 10^{-2} \text{ m}$ y su longitud $L = 12 \text{ m}$. Se supondrá que, debido a la variación de la temperatura del líquido al circular por los tubos, su viscosidad dinámica varía linealmente a lo largo de cada tubo desde un valor

$\mu_1 = 0,5 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ en la sección de entrada hasta $\mu_2 = 1,5 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ en la sección de salida. La rugosidad de los tubos es $\varepsilon = 0,01 \text{ mm}$. Calcular la potencia que debe comunicarse al líquido. (Justifiquense las hipótesis adoptadas para resolver el problema.)

Solución

Se supondrá que el flujo es laminar, aproximadamente unidireccional y con efectos de viscosidad dominantes, para lo que resulta necesario que se satisfagan las condiciones siguientes:⁹

$$\text{Re} \lesssim 2300,$$

$$\frac{D}{L} \ll 1,$$

$$\frac{1}{52} \frac{\rho U D}{\mu} \frac{D}{L} \ll 1.$$

Se supondrá entonces que la ecuación (B.3.6) puede aplicarse localmente para expresar la distribución del gradiente de presión reducida en los tubos,

$$P_e(x) = \frac{8\mu(x)Q_i}{\pi R^4},$$

siendo por tanto el incremento de presión a través de los tubos

$$\Delta p = \int_0^L P_e(x) dx = \frac{8Q_i}{\pi R^4} \int_0^L \left(\mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{L} x \right) dx = 192 \text{ kPa}.$$

La potencia comunicada al líquido es

$$\dot{W} = Q\Delta p = 75 Q_i \Delta p = 565,5 \text{ W}.$$

Compruébese si las hipótesis iniciales son aceptables, especialmente la basada en la tercera de las condiciones arriba indicadas.

⁹ Se ha utilizado la tercera condición en lugar de la más restrictiva $\text{Re} D/L \ll 1$, de la que se ha hecho uso en otros problemas. La justificación de dicha condición puede encontrarse en el texto de Crespo (2006).

Problema 7.18. Flujo sobre una cinta transportadora inclinada

Una cinta transportadora plana recoge un líquido newtoniano de viscosidad $\mu = 2,5$ poise y densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$ en un depósito y lo transporta hasta otro más elevado. La longitud L de la cinta se puede variar, de forma que puede conseguirse mantener la misma altura de elevación requerida, $H = 2 \text{ m}$, para distintos valores del ángulo de inclinación de la cinta, α . Se supondrá que sobre la cinta, que se mueve con una velocidad constante U , se forma una película de fluido de espesor constante $h = 1,5 \text{ cm}$. Supóngase que el problema puede considerarse bidimensional. Determinar:

- El perfil de velocidad del líquido en la dirección normal a la cinta en función de la velocidad U y el ángulo α .
- El ángulo de inclinación de la cinta, $\alpha_{\text{máx}}$, a partir del cual no es posible realizar el transporte de líquido, en función de la velocidad de la cinta. Aplicación al caso en el que $U = 20 \text{ cm s}^{-1}$.
- La potencia por unidad de anchura necesaria para elevar un caudal por unidad de anchura $q = 2 \text{ l s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ con un ángulo de inclinación de la cinta $\alpha = 4^\circ$.
- Comentar la validez y el realismo de las hipótesis utilizadas.

Solución

$$\text{a) } u = U - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} y \left(h - \frac{y}{2} \right).$$

$$\text{b) } \alpha_{\text{máx}} = 4,873^\circ.$$

$$\text{c) } \dot{W} = 70,06 \text{ W m}^{-1}.$$

Problema 7.19. Descarga no isoterma a través de un conducto del líquido contenido en un depósito cerrado

Un depósito con forma cúbica de volumen $V = 1 \text{ m}^3$ contiene inicialmente un volumen $V/2$ de aceite de densidad $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$ y aire a una presión $p_0 = 2 \text{ kgf cm}^{-2}$ ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). El aceite y el aire están a una temperatura $T_0 = 100^\circ\text{C}$, y son enfriados a un ritmo de 1°C h^{-1} (se supondrá que la temperatura en el interior del depósito es uniforme en cada instante). Se supondrá la siguiente ley de variación de la viscosidad del aceite con la temperatura: $\mu = 1 + 5/T$ (T en $^\circ\text{C}$ y μ en poise). El aceite se descarga a la atmósfera ($p_a = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$) a través de una tubería horizontal de longitud $L = 2 \text{ m}$ y diámetro $D = 5 \text{ mm}$, conectada al fondo del depósito. Se supondrá en primer lugar que la temperatura del aceite se mantiene constante a lo largo de la tubería de descarga.

- Determinar el caudal de descarga de aceite en el instante inicial. Justifíquense las hipótesis adoptadas.
- Determinar la ecuación diferencial que permite describir las variaciones con el tiempo de la altura que alcanza la superficie libre del aceite y de la presión del aire en el depósito.
- Resolver de nuevo el apartado a) suponiendo ahora que el aceite es enfriado a lo largo de la tubería de descarga, de forma que su temperatura disminuye en $0,02^\circ\text{C mm}^{-1}$. Se supondrá que, localmente, en cada sección de la tubería, la relación entre el caudal y el gradiente de presión reducida viene dada por la ecuación (B.3.6) de Poiseuille.

Solución

a) $Q = 7,45 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

b)
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi(D/2)^4}{8l^2} \frac{10}{1 + \frac{5}{100 - t/3600}} \frac{1}{L} \left[p_0 \frac{l/2}{l-h} \frac{373 - t/3600}{T_0} - p_a + \rho gh \right],$$

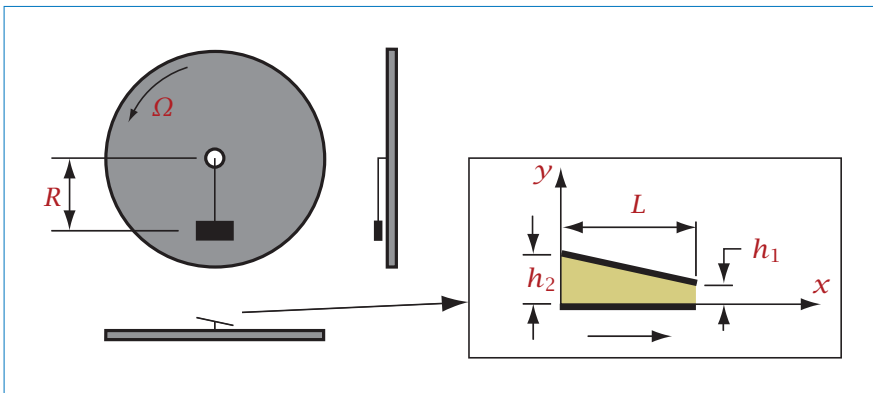
$$l = V^{1/3}$$

(longitudes en m; t en s; presiones en Pa; T_0 en K; ρ en kg m^{-3} ; g en m s^{-2}).

c) $Q = 7,36 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Problema 7.20. Flujo entre una placa plana y un disco giratorio

La pequeña placa plana rectangular representada en la figura está situada a una distancia $R = 5$ cm del centro de un disco giratorio de eje vertical, tal como se indica en la figura (se incluyen una vista en planta y dos vistas laterales). La placa plana se encuentra en una posición acimutal fija y puede moverse libremente en dirección vertical (perpendicular al plano del papel en la vista en planta). La fuerza que contrarresta el peso de la placa y la mantiene separada del disco es debida al efecto cuña que se consigue con la rotación del disco y una adecuada inclinación de la placa con respecto al plano horizontal. El disco gira a una velocidad $\Omega = 10\,000$ rpm. El tamaño de la placa indicado en la figura es $L = 25$ mm, y su masa por unidad de anchura en dirección radial es $m = 10$ g cm⁻¹. La viscosidad del fluido en el que están inmersos disco y placa es $\mu = 1,8 \times 10^{-5}$ kg m⁻¹ s⁻¹. Las anchuras máxima y mínima del canal entre disco y placa son h_2 y h_1 . Se supondrá que el flujo entre disco y placa es bidimensional.



Determinar, en función de h_1 y h_2 (no deberán sustituirse los valores numéricos de los restantes parámetros hasta el apartado e)):

- Distribución de velocidad en el espacio entre disco y placa en función del gradiente de presión.
- Flujo volumétrico (por unidad de anchura en dirección radial) y distribución de presión en el espacio entre disco y placa (la presión fuera

de dicho espacio es p_0).

- c) Fuerza vertical (por unidad de anchura en dirección radial) que ejerce el fluido sobre la placa.
- d) Relación $\xi = h_2/h_1$ para la que el valor de la fuerza obtenida en el apartado anterior es máxima.

Para la relación ξ obtenida en el apartado d), determinar:

- e) Valores de h_1 y h_2 .¹⁰

Solución

a) Se supondrá que el flujo es aproximadamente unidireccional, con efectos de viscosidad dominantes. Integrando la ecuación (B.3.3) con las condiciones de contorno $u = \Omega R$ en $y = 0$ y $u = 0$ en $y = h$, resulta

$$u = -\frac{1}{2\mu} y(h-y) \frac{dp}{dx} + \Omega R \left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (7.20.1)$$

b) El flujo volumétrico por unidad de longitud,

$$q = \int_0^h u \, dy,$$

teniendo en cuenta la expresión de la ecuación (7.20.1), resulta

$$q = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{\Omega R h}{2} \quad (7.20.2)$$

(obsérvese que q es obviamente constante, que $h = h(x)$ y $p = p(x)$, y que la anterior relación se satisface para cualquier sección de coordenada x). Despejando dp/dx en la ecuación (7.20.2) e integrando entre $x = 0$ y $x = L$,

$$\int_{p(0)}^{p(L)} dp = \int_0^L -\frac{12\mu q - 6\mu\Omega R h}{h^3} dx,$$

y teniendo en cuenta que $p(0) = p(L) = p_0$ y que $dx = \frac{L}{h_1 - h_2} dh$, puede escribirse

$$0 = \int_{h_2}^{h_1} -\frac{12\mu q - 6\mu\Omega R h}{h^3} \frac{L}{h_1 - h_2} dh,$$

¹⁰ Este problema es una adaptación de un problema propuesto por Pnueli y Gutfinger (1992).

de donde resulta

$$q = \Omega R \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}. \quad (7.20.3)$$

La distribución de presión se obtiene integrando la ecuación (7.20.2) entre $x = 0$ y una sección genérica de coordenada x ,

$$\int_{p(0)}^{p(x)} dp = \int_0^x -\frac{12\mu q - 6\mu\Omega R h}{h^3} dx = \int_{h_2}^h -\frac{12\mu q - 6\mu\Omega R h}{h^3} \frac{L}{h_1 - h_2} dh, \quad (7.20.4)$$

y sustituyendo la expresión de q de la ecuación (7.20.3), resultando

$$p = p_0 + 6\mu\Omega R L \frac{(h - h_1)(h_2 - h)}{h^2(h_2 - h_1)(h_1 + h_2)}. \quad (7.20.5)$$

Sustituyendo $h = h_2 - \frac{h_2 - h_1}{L} x$, se obtiene

$$p(x) = p_0 + 6\mu\Omega R L \frac{(h_2 - h_1)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L}}{h^2(h_2 - h_1)(h_1 + h_2)}.$$

c) La fuerza vertical que se ejerce sobre la placa es

$$F_y = \int_0^L (p - p_0) dx.$$

Sustituyendo la expresión de la ecuación (7.20.5) y $dx = \frac{L}{h_1 - h_2} dh$, resulta

$$F_y = 6\mu\Omega R \left[\frac{L}{h_1(\xi - 1)} \right]^2 \left(\ln \xi - 2 \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right),$$

siendo $\xi = h_2/h_1$.

d) Compruébese que el máximo de F_y se alcanza para

$$\xi = 2,19.$$

e) Haciendo $F_y = mg$ y sustituyendo valores, resulta

$$h_1 = 0,0968 \text{ mm}, \quad h_2 = 0,212 \text{ mm}.$$

Compruébese si las hipótesis utilizadas son razonables.

Problema 7.21. Flujo a través de un conducto bidimensional con paredes porosas

Se trata de resolver un problema similar al de Hagen-Poiseuille bidimensional. Entre dos placas planas, paralelas y de grandes dimensiones, separadas entre sí una distancia h , circula un fluido de densidad ρ y viscosidad cinemática ν , impulsado por un gradiente de presión constante dp/dx (el eje x es paralelo y el eje y perpendicular a las placas, con origen en una de ellas). La diferencia en este caso consiste en que las placas son porosas, existiendo un flujo transversal (que entra en el canal a través de una de las placas, situada en $y = 0$, y sale de él a través de la otra) superpuesto al longitudinal, de forma que, además de una componente u de la velocidad, según el eje x , hay una componente $v = V$ según y , uniforme en todo el campo fluido. Determinar la distribución de la componente u de la velocidad en el conducto en función de dp/dx , ρ , ν , V y h . Comprobar que, en el límite $V \rightarrow 0$, se obtiene la distribución de u correspondiente al flujo de Hagen-Poiseuille.

Solución

Suponiendo que, de acuerdo con lo indicado en el enunciado, se dan las condiciones correspondientes a un flujo de Hagen-Poiseuille, pero teniendo en cuenta que existe una componente transversal de la velocidad, compruébese que la ecuación (B.2.11) se reduce en este caso, no a la ecuación (B.3.1), sino a

$$V \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2u}{dy^2}.$$

Introduciendo el cambio de variable $s = du/dy$, la solución de la ecuación diferencial lineal resultante puede expresarse como suma de la solución de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación completa.¹¹ La solución de la ecuación homogénea,

$$\nu \frac{ds}{dy} - Vs = 0,$$

es

$$s_h = C_1 \exp(yV/\nu),$$

¹¹ Puede consultarse, por ejemplo, la nota a pie de página 6 del Problema 4.15, p á g . 108.

siendo C_1 una constante, y una solución particular de la ecuación diferencial completa es obviamente

$$s_p = -\frac{1}{\rho V} \frac{dp}{dx},$$

con lo que la solución de la ecuación completa es

$$s = \frac{du}{dy} = C_1 \exp(yV/\nu) - \frac{1}{\rho V} \frac{dp}{dx}.$$

Integrando la última ecuación, resulta

$$u = C_1 \frac{\nu}{V} \exp(yV/\nu) - \frac{1}{\rho V} \frac{dp}{dx} y + C_2,$$

siendo C_2 una constante. Imponiendo la condición $u = 0$ en $y = 0$ e $y = h$, se obtiene

$$C_2 = -\frac{\nu}{V} C_1 = -\frac{1}{\rho V [\exp(hV/\nu) - 1]} \frac{dp}{dx} h,$$

con lo que la solución buscada resulta finalmente

$$u = \frac{1}{\rho V} \frac{dp}{dx} \left[\frac{\exp(yV/\nu) - 1}{\exp(hV/\nu) - 1} h - y \right].$$

Compruébese que, en el límite $V \rightarrow 0$, se obtiene la distribución de u correspondiente al flujo de Hagen-Poiseuille (expresada la solución como cociente de dos funciones de V , hállese el límite del cociente entre las derivadas de tercer orden con respecto a V del numerador y denominador de la solución).

Problema 7.22. Flujo de una lámina de líquido sobre un plano inclinado (II)

Considérese el flujo laminar, bidimensional, unidireccional y estacionario de un líquido de densidad ρ y viscosidad cinemática ν que fluye sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con el plano horizontal, en una capa de espesor h . Determinar el caudal por unidad de anchura y la fuerza que ejerce el líquido sobre una superficie del plano inclinado de longitud L y anchura b .

Solución

$$q = \frac{\rho g \operatorname{sen} \alpha}{3\mu} h^3.$$

$$F = \rho g \operatorname{sen} \alpha h L b.$$

Capítulo 8

Flujos de fluidos ideales

Problema 8.1. Descarga por gravedad de un depósito a través de un conducto

Un depósito de grandes dimensiones y abierto a la atmósfera contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ hasta una altura $H = 1$ m, y se descarga a la atmósfera a través de una tubería horizontal de diámetro D y longitud L , conectada al fondo del depósito. Determinar el caudal de descarga en los dos casos siguientes (justificando las hipótesis empleadas):

a) $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$; $\mu = 0,01 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $D = 10 \text{ cm}$; $L = 1 \text{ m}$.

b) $\rho = 800 \text{ kg m}^{-3}$; $\mu = 0,1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$; $D = 1 \text{ cm}$; $L = 10 \text{ m}$.

Solución

En función de los datos correspondientes a cada uno de los dos casos que se consideran, parece en principio razonable hacer la hipótesis de que el flujo es ideal en el caso a),¹ y con efectos de viscosidad dominantes en el caso b).²

¹ Por una parte, aunque no puede calcularse directamente el número de Reynolds, ya puede anticiparse que va a ser relativamente alto, salvo que la velocidad del líquido en la tubería fuese muy pequeña. Por otra, la longitud de la tubería no es tan grande frente al diámetro como para esperar que los efectos de viscosidad sean importantes.

² Téngase en cuenta que la viscosidad y la longitud de la tubería son ahora diez veces mayores

Para el caso a), aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del líquido en el depósito y la sección de salida de la tubería, resulta

$$U = \sqrt{2gH} = 4,43 \text{ m s}^{-1},$$

siendo por tanto el caudal

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} = 0,035 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Puede comprobarse ahora que se cumple la condición

$$\frac{\rho U D}{\mu} \frac{D}{L} \gg 1,$$

necesaria para que la hipótesis adoptada sea válida. Sustituyendo valores, se obtiene que el término de la izquierda es igual a 44 300.

En el caso b), con la hipótesis adoptada de efectos de viscosidad dominantes, se cumple la ecuación (B.3.6),

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} P_e,$$

siendo el gradiente de presión reducida

$$P_e = -\frac{dP}{dx} = -\frac{(p_{\text{at}} + \rho g z_2) - (p_{\text{at}} + \rho g z_1)}{L} = \frac{\rho g H}{L} = 784 \text{ N m}^{-2} \text{ m}^{-1}$$

(z_1 y z_2 son las cotas de la superficie libre en el depósito y de la sección de salida de la tubería, respectivamente), con lo que finalmente resulta

$$Q = \frac{\pi (0,005)^4}{(8)(0,01)} 784 = 1,92 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Determinése en qué medida se satisfacen las condiciones

$$\frac{\rho U D}{\mu} \frac{D}{L} \ll 1,$$

$$\frac{D}{L} \ll 1,$$

que deben cumplirse (junto con la condición de que el número de Reynolds sea inferior al crítico) para que el flujo pueda considerarse unidireccional con efectos de viscosidad dominantes.

y el diámetro diez veces menor que en el caso a).

Problema 8.2. Proceso de vaciado por gravedad del líquido contenido en un depósito a través de un orificio

Como continuación del Problema 2.5, calcular el tiempo transcurrido desde el instante en que se abre el orificio hasta el instante en que la compuerta comienza a girar. Se supondrá flujo ideal en el orificio y que el proceso de vaciado es cuasiestacionario. Justificar estas hipótesis.

Solución

Aplicando la ecuación de conservación de la masa (B.1.2) al volumen de control variable limitado por la superficie interior del depósito, la superficie libre del agua y el orificio de salida (despreciando los efectos de contracción del chorro a la salida del depósito), resulta

$$A_D \frac{dH_1}{dt} + v_s A = 0, \quad (8.2.1)$$

siendo v_s la velocidad de salida a través del orificio y A_D el área de la sección horizontal del depósito. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del agua y la sección de salida, se obtiene

$$v_s = \sqrt{2gH_1}. \quad (8.2.2)$$

Sustituyendo (8.2.2) en (8.2.1) e integrando

$$- \int_{2,5}^{1,409} \frac{dH_1}{\sqrt{H_1}} = \frac{\sqrt{2g}A}{A_D} \int_0^t dt,$$

resulta

$$t = 4003 \text{ s.}$$

Justifíquense las hipótesis de flujo ideal en el orificio y proceso cuasiestacionario.

Problema 8.3. Reloj de agua (clepsidra)

Se quiere diseñar un recipiente cilíndrico de sección transversal de área variable, A , con un orificio en el fondo de diámetro D (se supondrá que $D^2 \ll A$).

El recipiente se dispondrá con su eje en dirección vertical. Determinar cuál debe ser la ley de variación de A con la altura si se quiere que, estando inicialmente lleno de agua hasta un nivel h_0 , el recipiente se vacíe totalmente en un tiempo t_0 , y que en todo instante t durante el proceso de vaciado el nivel h del agua sea tal que $(h_0 - h)/h_0 = t/t_0$. Se supondrá que el flujo es ideal y que el proceso de vaciado es cuasiestacionario. Se tomará un coeficiente de descarga a través del orificio igual a la unidad. Calcular el valor de D necesario para que $t_0 = 1$ día siendo $h_0 = 50$ cm y el área máxima $A_{h_0} = 0,5$ m². Comprobar si son aceptables las hipótesis utilizadas.

Solución

Aplicando la ecuación de conservación de la masa (B.1.2) al volumen de control variable limitado por la superficie interior del depósito, la superficie libre del agua y la sección de salida, resulta

$$A \frac{dh}{dt} + v_s C_c \frac{\pi D^2}{4} = 0, \quad (8.3.1)$$

siendo v_s la velocidad de salida y C_c el coeficiente de contracción. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del agua y la sección de salida, se obtiene

$$v_s = \sqrt{2gh}. \quad (8.3.2)$$

Teniendo en cuenta que, según se indica en el enunciado, $h = h_0(1 - t/t_0)$, resulta

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h_0}{t_0}. \quad (8.3.3)$$

Sustituyendo (8.3.2) y (8.3.3) en (8.3.1), se obtiene

$$A = C_c \sqrt{2gh} \frac{\pi D^2}{4} \frac{t_0}{h_0}. \quad (8.3.4)$$

Al indicarse en el enunciado que el coeficiente de descarga, $C_d = C_c C_v$,³ es igual a la unidad, obviamente deberá ser también igual a la unidad el coeficiente de contracción. Haciendo $h = h_0 = 50$ cm, $A = A_{h_0} = 0,5$ m², y $t_0 = 86\,400$ s en la ecuación (8.3.4), se obtiene el valor pedido del diámetro de la sección de salida,

$$D = 1,08 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

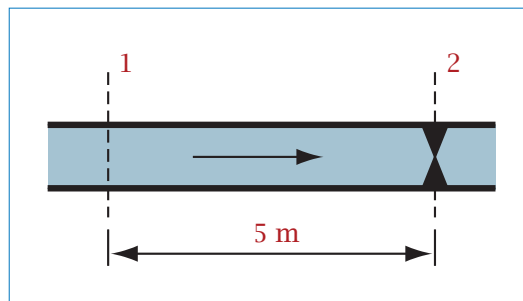
³ Si el flujo no fuese ideal, podría introducirse un coeficiente de velocidad, C_v , para tener en cuenta las pérdidas de energía, de forma que $v_s = C_v \sqrt{2gh}$. En tal caso, se obtendría $A = C_c C_v \sqrt{2gh} \frac{\pi D^2}{4} \frac{t_0}{h_0}$.

Problema 8.4. Caída de presión durante el cierre progresivo de una válvula en un conducto por el que circula agua

A través de la tubería horizontal de la figura, de longitud mucho mayor que su diámetro, circula un flujo de agua que puede suponerse ideal y con magnitudes fluidas uniformes. La válvula situada en el extremo del tubo, por el que circula inicialmente agua a velocidad v_0 , se cierra progresivamente en un tiempo t_0 , de forma que la velocidad en el tubo decrece linealmente con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$v = v_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right); \quad v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}, \quad t_0 = 0,1 \text{ s}.$$

Se supondrá que no existen efectos de compresibilidad. Determinar la diferencia de presiones $p_1 - p_2$ entre las secciones 1 y 2.



Solución

A partir de la ecuación (B.4.1) de Euler-Bernoulli, cuando el fluido es un líquido, se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = 0,$$

siendo x la coordenada según el eje del tubo. Dado que v y z no varían con x , resulta

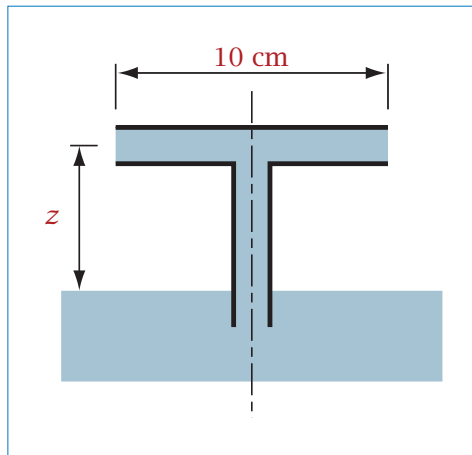
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} \right) = -\frac{dv}{dt} = \frac{v_0}{t_0}.$$

Integrando entre las secciones 1 y 2, se obtiene finalmente

$$p_2 - p_1 = \rho L \frac{v_0}{t_0} = (1000)(5) \frac{2}{0,1} = 10^5 \text{ N m}^{-2}.$$

Problema 8.5. Bombeo de un líquido mediante una unión de tuberías en forma de T

El dispositivo de la figura (unión de tuberías en forma de T) tiene la entrada del tubo inferior introducida en el líquido contenido en un depósito abierto a la atmósfera, y gira a una velocidad $\Omega = 1800 \text{ rpm}$ alrededor del eje vertical indicado, bombeando líquido y descargándolo a la atmósfera a través de las ramas de tubería horizontales. Se supondrá que el flujo es ideal. Determinar la altura z para la cual el dispositivo dejaría de bombear líquido.



Solución

Aplicando la ecuación de Bernoulli (B.4.2) entre la superficie libre del líquido en el depósito (1) y la sección de salida de las ramas de tubería horizontales (2),

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + U_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + U_2,$$

teniendo en cuenta que $U = gz - \Omega^2 r^2/2$, $p_1 = p_2$ y $z_2 - z_1 = z$, e imponiendo la condición de que la velocidad del líquido a través del dispositivo es nula ($v_1 = v_2 = 0$), se obtiene

$$gz = \frac{\Omega^2 r_2^2}{2},$$

de donde resulta, sustituyendo valores,

$$z = 4,53 \text{ m.}$$

Problema 8.6. Tobera convergente-divergente con condiciones conocidas en una cierta sección aguas arriba de la sección de garganta

En una cierta sección 1, de área A_1 , situada aguas arriba de la garganta de una tobera convergente-divergente, se tiene $v_1 = 200 \text{ m s}^{-1}$, $T_1 = 300 \text{ K}$ y $p_1 = 125\,000 \text{ N m}^{-2}$. El flujo es supersónico a la salida de la tobera. El área de la sección de garganta es $A_g = 25 \text{ cm}^2$ y el área de la sección de salida de la tobera es $A_s = 75 \text{ cm}^2$. El fluido que circula es aire. Calcular:

- Número de Mach M_1 en la sección 1.
- Área A_1 .
- Gasto másico a través de la tobera.
- Presión de remanso.
- Presión a la salida de la tobera necesaria para alcanzar condiciones de tobera adaptada.⁴
- Valor máximo que podría alcanzar la presión a la salida de la tobera manteniéndose el gasto másico calculado en el apartado c). (Se eliminará en este apartado la restricción indicada de que el flujo sea supersónico a la salida de la tobera.)

⁴ En una tobera adaptada el flujo es supersónico en toda la parte divergente y la presión en la sección de salida es igual a la presión a la salida de la tobera.

Solución

a) El número de Mach en la sección 1 es

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{200}{\sqrt{(1,4)(287)(300)}} = 0,576.$$

b) Se supondrá que se cumplen las condiciones de conservación de las magnitudes de remanso a lo largo de una línea de corriente:

- efectos de viscosidad despreciables,
- efectos de conducción de calor despreciables,
- no existe adición de calor,
- movimiento estacionario,
- trabajo de las fuerzas másicas despreciable.

Dado que todas las líneas de corriente proceden del depósito, donde las propiedades son uniformes, las magnitudes de remanso se conservarán en todo el campo fluido.

Aplicando la ecuación (B.4.9) para $M_1 = 0,576$, se obtiene $A_1/A^* = 1,218$. Al ser el flujo supersónico en la parte divergente de la tobera, esta se encuentra en condiciones de bloqueo sónico, siendo por tanto el área crítica $A^* = A_g$, por lo que

$$A_1 = 1,218A_g = (1,218)(25 \times 10^{-4}) = 3,045 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

c) El gasto másico a través de la tobera puede determinarse, por ejemplo, a partir de las condiciones en la sección 1:

$$G = \rho_1 v_1 A_1 = \frac{125\,000}{(287)(300)} (200)(3,045 \times 10^{-3}) = 0,884 \text{ kg s}^{-1}.$$

d) La presión de remanso puede determinarse a partir de la ecuación (B.4.4) (o bien a partir de la tabla correspondiente), de donde resulta

$$p_0 = 156\,519 \text{ N m}^{-2}.$$

e) Teniendo en cuenta de nuevo que el área crítica en este caso coincide con el área de la sección de garganta, entrando en las tablas correspondientes a flujo cuasiunidimensional con magnitudes de remanso constantes (Tabla C.3)⁵ con el

⁵ Las ecuaciones (B.4.3), (B.4.4), (B.4.5) y (B.4.9) se presentan tabuladas en la Tabla C.3.

CAPÍTULO 8. FLUJOS DE FLUIDOS IDEALES

valor $A_s/A^* = 75/25 = 3$ (en el rango $M > 1$, $M \approx 2,64$), se obtiene $p_s/p_0 \approx 0,047$, de donde resulta

$$p_s = 7356 \text{ N m}^{-2}.$$

f) La presión pedida es la máxima presión a la salida para la que se alcanza $M = 1$ en la sección de garganta, es decir, para la que se consigue $A^* = A_g$. Entrando en las tablas con $A_s/A^* = 75/25 = 3$ en el rango $M < 1$ (flujo subsónico; $M \approx 0,2$), se obtiene $p_s/p_0 \approx 0,973$, de donde resulta

$$p_s = 152\,293 \text{ N m}^{-2}.$$

Problema 8.7. Proceso de llenado con aire de un depósito inicialmente vacío a través de una tobera convergente

Un depósito de volumen $V = 1 \text{ m}^3$, en el que inicialmente existe el vacío, se llena a través de una tobera convergente que tiene una sección de área mínima (la de entrada al depósito) $A_s = 1 \text{ mm}^2$. En el exterior del depósito existen condiciones atmosféricas, siendo la presión $p_{at} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ y la temperatura $T_{at} = 288 \text{ K}$. Durante el proceso de llenado se supondrá que la temperatura del aire en el interior del depósito permanece constante e igual a la temperatura exterior, $T_d = T_{at} = 288 \text{ K}$.

Calcular:

- Gasto inicial a través de la tobera.
- Presión en el depósito a partir de la cual la tobera deja de estar bloqueada.
- Tiempo transcurrido desde el instante inicial hasta que la tobera deja de estar bloqueada.

Indicar si sería necesario añadir o extraer calor para mantener constante la temperatura en el interior del depósito.

Solución

a) $2,334 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$.

$$[G = A^* \rho_0 a_0 / 1,728 = 10^{-6} \frac{9,8 \times 10^4}{(287)(288)} \sqrt{(1,4)(287)(288)} / 1,728 \text{ (kg s}^{-1}\text{).}]$$

b) $0,528 \text{ kgf cm}^{-2}$.

c) 2682 s .

[En el instante en el que la tobera deja de estar bloqueada,

$$\rho_b = \frac{(0,528)(9,8 \times 10^4)}{(287)(288)} = 0,626 \text{ kg m}^{-3},$$

$$m_b = \rho_b V = 0,626 \text{ kg};$$

el tiempo transcurrido desde el inicio, al ser el gasto constante durante el vaciado, es $t = m_b / G$.]

Problema 8.8. Flujo a través de un orificio practicado en la pared del cilindro superior del Problema 5.4

Como continuación del Problema 5.4, supóngase que, en la situación de equilibrio calculada en el apartado a), se abre una pequeña tobera convergente, con área de la sección de garganta $A_g = 0,1 \text{ mm}^2$, que comunica el interior del cilindro 3 con el exterior (con la sección de garganta en la parte interior). Suponiendo el proceso cuasiestacionario, determinar el gasto másico a través de la tobera en el instante inicial. Comprobar si es aceptable la hipótesis de flujo cuasiestacionario. Si se supone conocida la carrera del cilindro 3, indicar cómo se calcularía el tiempo que tardaría el émbolo 2 en abandonar el cilindro 3 desde el instante en que se abre la tobera.

Solución

De la Tabla C.3, entrando con $p_3/p_0 = 84\,419/98\,000 = 0,86$, se obtiene $M =$

0,466. El gasto másico a través de la tobera es

$$G = \rho_s v_s A_s = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}} \frac{a_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/2}} M A_s$$

$$= \frac{\rho_0 a_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} M A_s.$$

Sustituyendo datos del enunciado y el valor de M que se acaba de calcular, se obtiene

$$G = 1,654 \times 10^{-5} \text{ kg s}^{-1}.$$

Justifíquese la hipótesis de flujo cuasiestacionario.

Para responder a la última cuestión del enunciado, téngase en cuenta que la presión p_3 se mantendrá constante mientras el émbolo 2 permanezca dentro del cilindro, y que la altura h_2 dependerá en cada instante de la masa de aire contenida en el cilindro 3 y de la temperatura, tal como se explicó en el apartado a) del Problema 5.4. La masa de aire contenida en el cilindro 3 aumentará a un ritmo constante, al ser p_3 constante. La altura h_2 aumentará linealmente con el tiempo solo si la temperatura del aire en el cilindro se mantiene constante.

Problema 8.9. Flujo en una tobera convergente-divergente. Área mínima de la sección de garganta e influencia de la presión a la salida

Una tobera convergente-divergente descarga un depósito en el que existe aire a una presión $p_0 = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_0 = 15^\circ\text{C}$. El área de la sección de salida de la tobera es $A_s = 1,3 \text{ mm}^2$.

Calcular:

- a) Área mínima de la sección de garganta que permita alcanzar un gasto másico de $2,5 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$.

Se supondrá en lo que sigue que el área de la sección de garganta es $A_g = 1 \text{ mm}^2$.

Calcular:

- b) Presión a la salida de la tobera necesaria para alcanzar el máximo gasto másico posible.

- c) Gasto másico cuando la presión a la salida es $p_s = 0,905 p_0$.
- d) Presión a la salida de la tobera para la que se produce una onda de choque normal en la sección de salida.⁶

Solución

a) El área mínima pedida será igual al área crítica correspondiente al gasto másico que debe alcanzarse y a las magnitudes de remanso del enunciado (ecuación (B.4.8)),

$$A_g = A^* = 1,728 \frac{G}{\rho_0 a_0}.$$

Sustituyendo en esta ecuación

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{9,8 \times 10^4}{(287)(288)} = 1,186 \text{ kg m}^{-3}$$

y

$$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0} = \sqrt{(1,4)(287)(288)} = 340,2 \text{ m s}^{-1},$$

resulta

$$A_g = 1,07 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

b) El máximo gasto másico posible se obtendrá cuando el área crítica (que va aumentando a medida que disminuye la presión a la salida de la tobera) se haga igual al área de la sección de garganta (una vez alcanzado este valor, el área crítica se mantendrá constante aunque disminuya la presión a la salida). Para esta condición ($A^* = A_g$), a partir de la ecuación (B.4.9), teniendo en cuenta que $A_s/A^* = 1,3$, se obtiene el número de Mach a la salida $M_s = 0,52$ (de los dos valores posibles, se elige el que es menor que la unidad, que será el correspondiente a la máxima presión a la salida para la que se alcanza bloqueo sónico). Utilizando la ecuación (B.4.4), para $M = 0,52$ se obtiene la presión pedida, $p_s = 0,832 \text{ kgf cm}^{-2}$. En lugar de utilizar las ecuaciones (B.4.9) y (B.4.4), puede emplearse la Tabla C.3;⁷ entrando con el valor $A_s/A^* = 1,3$ (en el rango $M < 1$, flujo subsónico), se obtiene directamente

$$p_s/p_0 = 0,832.$$

⁶ En algunos problemas del presente capítulo, sobre flujos ideales, aparecen ondas de choque normales, que obviamente constituyen discontinuidades a través de las cuales no se conservan todas las magnitudes de remanso, y en las que tienen lugar fenómenos disipativos.

⁷ Las ecuaciones (B.4.3), (B.4.4), (B.4.5) y (B.4.9) se presentan tabuladas en la Tabla C.3.

c) Debe comprobarse en primer lugar que las magnitudes de remanso se conservan a lo largo de la tobera (lo que no ocurrirá si existe una onda de choque). Si las magnitudes de remanso se conservan, a partir de las ecuaciones (B.4.4) y (B.4.9), sustituyendo $p_s/p_0 = 0,905$, puede obtenerse $A_s/A^* = 1,66 \Rightarrow A^* = 0,783 \text{ mm}^2$. Dado que el área de la sección de garganta, $A_g = 1 \text{ mm}^2$, es mayor que el valor del área crítica que se acaba de obtener, no existe bloqueo sónico, y por tanto las magnitudes de remanso se mantienen constantes en la tobera, pudiéndose aplicar las ecuaciones (B.4.3) a (B.4.5).⁸ El gasto másico pedido puede calcularse mediante

$$G = \rho_s v_s A_s = \rho_s M_s a_s A_s. \quad (8.9.1)$$

El número de Mach a la salida correspondiente a $p_s = 0,905 p_0$ se obtiene de la ecuación (B.4.4): $M_s = 0,38$. Mediante las ecuaciones (B.4.3) y (B.4.5) se obtiene $\rho_s = 0,931 \rho_0$ y $a_s = 0,986 a_0$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación (8.9.1), resulta

$$G = 0,931 \rho_0 (0,38) (0,986) a_0 (1,3 \times 10^{-6}),$$

e introduciendo los valores de ρ_0 y a_0 calculados en el apartado anterior, se obtiene

$$G = 1,83 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}.$$

d) Cuando se produce una onda de choque en la tobera, obviamente existe bloqueo sónico. Las condiciones inmediatamente aguas arriba de la onda de choque (sección 1) podrán obtenerse teniendo en cuenta que las magnitudes de remanso se conservan entre el depósito y dicha sección 1. Dado que la tobera está bloqueada, el área crítica coincide con el área de la sección de garganta ($A_g = A^*$). A partir de la ecuación (B.4.9) (o de la tabla correspondiente), introduciendo $A_1/A^* = A_s/A_g = 1,3$, se obtiene (en el rango $M > 1$, porque obviamente el flujo debe ser supersónico aguas arriba de la onda de choque) $M_1 = 1,66$. A partir de la ecuación (B.4.4) se obtiene $p_1 = 0,215 \text{ kgf cm}^{-2}$, y mediante la ecuación (B.4.11),⁹ se determina $p_2/p_1 = 3,048$, de donde resulta una presión aguas abajo de la onda de choque

$$p_2 = 0,655 \text{ kgf cm}^{-2}.$$

⁸ Habiéndose resuelto antes el apartado b), era inmediato deducir que la tobera no está bloqueada en las condiciones de este apartado, al ser ahora el valor de $p_s = 0,905 \text{ kgf cm}^{-2}$ superior al calculado en dicho apartado, $p_s = 0,832 \text{ kgf cm}^{-2}$.

⁹ Las ecuaciones (B.4.13), (B.4.11), (B.4.12) y (B.4.14) se presentan tabuladas en la Tabla C.4.

Problema 8.10. Onda de choque en una tobera convergente-divergente

Una tobera convergente-divergente funciona fuera de diseño descargando un depósito de grandes dimensiones en el que existe una presión $p_{01} = 206 \text{ kPa}$ y una temperatura $T_{01} = 37,88^\circ\text{C}$. El área de la sección de garganta es $A_g = 1290 \text{ mm}^2$ y el área de la sección de salida es $A_s = 2580 \text{ mm}^2$. En la parte divergente de la tobera, en la sección de área $A_c = 1935 \text{ mm}^2$, existe una onda de choque. El fluido es aire. Calcular:

- Número de Mach, M_1 , inmediatamente aguas arriba de la onda de choque.
- Gasto másico a través de la tobera.
- Número de Mach, M_2 , inmediatamente aguas abajo de la onda de choque.
- Presión de remanso, p_{02} , y área crítica, A_2^* , aguas abajo de la onda de choque.
- Presión a la salida de la tobera.

Solución

a) Se supondrá que aguas arriba de la onda de choque se cumplen las condiciones de conservación de las magnitudes de remanso p_{01} y T_{01} . Dado que existe una onda de choque en la parte divergente de la tobera, es obvio que la tobera está bloqueada y, por tanto, que $A^* = A_g$. Entrando con el valor $A_1/A^* = A_1/A_g = 1,5$ en la Tabla C.3 correspondiente a flujo de aire cuasiunidimensional con magnitudes de remanso constantes, se obtiene

$$M_1 = 1,85$$

(dentro del rango $M > 1$, ya que el flujo ha de ser supersónico aguas arriba de la onda de choque).

b) El gasto másico puede calcularse mediante la ecuación (B.4.8):

$$G = \frac{\rho_0 a_0 A^*}{1,728} = \frac{206\,000}{(287)(310,88)} \sqrt{(1,4)(287)(310,88)} \frac{1290 \times 10^{-6}}{1,728},$$

de donde resulta

$$G = 0,609 \text{ kg s}^{-1}.$$

c) El número de Mach inmediatamente aguas abajo de la onda de choque puede obtenerse, por ejemplo, a partir de las tablas que proporcionan las variaciones de propiedades a través de una onda de choque normal (Tabla C.4). Para $M_1 = 1,85$, se obtiene

$$M_2 = 0,606.$$

d) De la misma Tabla C.4 utilizada en el anterior apartado¹⁰ se obtiene

$$p_{02} = 0,79 p_{01} = 162,74 \text{ kPa},$$

$$A_2^* = 1,267 A_1^* = 1634 \text{ mm}^2.$$

(A_1^* es el área crítica aguas arriba de la onda de choque.)

e) Utilizando de nuevo las tablas correspondientes a flujo de aire cuasiunidimensional con magnitudes de remanso constantes, entrando con $A_s/A_2^* = 2580/1634 = 1,58$ se obtiene

$$p_s = 0,894 p_{02} = 145,54 \text{ kPa}.$$

Problema 8.11. Procesos de descarga de un depósito a través de una tobera convergente-divergente con condiciones de tobera adaptada y de llenado mediante un compresor

El aire contenido en un depósito de grandes dimensiones, en el que la presión es $p_0 = 7 \text{ kgf cm}^{-2}$ y la temperatura es $T_0 = 325^\circ\text{C}$, debe descargarse a la atmósfera ($p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$, $T_{\text{at}} = 25^\circ\text{C}$) a través de una tobera convergente-divergente. La velocidad del aire en el depósito es despreciable y las propiedades uniformes. Si existe un gasto másico $G = 3600 \text{ kg h}^{-1}$ en condiciones de tobera adaptada (véase la nota a pie de página 4 del Problema 8.6, pág.

¹⁰ Aunque en la Tabla C.4 no aparece representada la relación A_2^*/A_1^* , obsérvese, teniendo en cuenta la ecuación (B.4.8), por ejemplo, y que la entalpía de remanso se conserva a través de la onda de choque (siendo, por tanto, $a_{01} = a_{02}$), que $A_2^*/A_1^* = p_{01}/p_{02}$.

311), calcular:

- a) Presión, velocidad y área de la sección de la tobera en la garganta.
- b) Área de la sección de salida de la tobera.

Suponiendo que la temperatura del aire en el depósito, $T_0 = 325^\circ\text{C}$, se mantiene constante en el tiempo, calcular:

- c) Potencia necesaria de un compresor que aspire aire en condiciones atmosféricas y lo descargue en el depósito, manteniendo constante la masa de aire en este. Supóngase que el compresor funciona isentrópicamente y despréciase la energía cinética frente a la energía térmica.
- d) Calor que es necesario añadir o extraer del aire en el depósito.

Solución

- a) $362\,578\text{ N m}^{-2}$; $447,38\text{ m s}^{-1}$; $8,81 \times 10^{-4}\text{ m}^2$.
- b) $1,40 \times 10^{-3}\text{ m}^2$.
- c) $222,60\text{ kW}$.
- d) $78,748\text{ kW}$. (El calor debe añadirse.)

Problema 8.12. Flujo en la tobera convergente-divergente de un motor cohete

La tobera convergente-divergente de un motor cohete está diseñada para generar una fuerza de empuje $F = 30\,000\text{ N}$ funcionando a una altitud $z = 18\text{ km}$. Dentro de la cámara de combustión la presión es $p_0 = 1000\text{ kPa}$ y la temperatura es $T_0 = 2500\text{ K}$. La constante del gas que circula a través de la tobera es $R = 287\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$, y $\gamma = 1,4$. Se supondrá que la tobera está adaptada (véase la nota a pie de página 4 del Problema 8.6, pág. 311) y que la presión y la temperatura en la cámara de combustión son aproximadamente iguales a la presión y temperatura de remanso. Calcular:

- a) Presión atmosférica a 18 km de altitud (supóngase atmósfera estándar¹¹).¹²
- b) Densidad, temperatura y velocidad en la sección de salida de la tobera en las condiciones de funcionamiento de diseño.
- c) Área de la sección de salida de la tobera.
- d) Área de la sección de garganta.

Solución

- a) 7480 N m^{-2} .
- b) $\rho = 0,042 \text{ kg m}^{-3}$; $T = 617,29 \text{ K}$; $v = 1945 \text{ m s}^{-1}$.
- c) $0,189 \text{ m}^2$.
- d) $0,0191 \text{ m}^2$.

Problema 8.13. Procesos de llenado de un depósito a través de una tobera convergente-divergente y de descarga mediante una bomba de vacío

Un depósito con forma de paralelepípedo rectangular de base cuadrada de 2 m de lado contiene una masa de líquido que ocupa un volumen de 6 m^3 y pesa 70 560 N. En principio se supondrá que la densidad del líquido en el depósito es uniforme. En el extremo inferior de una de las paredes verticales del depósito existe una compuerta rectangular de altura $H = 0,3 \text{ m}$ y anchura $L = 2 \text{ m}$, que puede girar alrededor de un eje horizontal situado a lo largo de una de las aristas de la base del depósito. La parte superior del depósito, de grandes dimensiones, contiene aire a una temperatura constante $T_D = 288 \text{ K}$ y está comunicada con el ambiente exterior a través de una tobera

¹¹ En la atmósfera estándar, en $z = 0$ la presión es $1,013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$ y la temperatura, 15°C . La temperatura disminuye linealmente con la altura, en $6,5^\circ\text{C km}^{-1}$, hasta la cota $z = 11 \text{ km}$; a partir de esta, y hasta $z = 22 \text{ km}$, se supone que la temperatura se mantiene constante.

¹² Obsérvese que en este apartado se trata un problema de estática.

convergente-divergente; el área de la sección de garganta de la tobera es $A_g = 10 \text{ cm}^2$ y el área de la sección en la unión con el depósito es $A_s = 16 \text{ cm}^2$. El aire del depósito puede descargarse al exterior mediante un compresor (bomba de vacío). En el exterior del depósito la presión es $p_{at} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ y la temperatura $T_{at} = 288 \text{ K}$.

Se supondrá que las fuerzas másicas son despreciables en el aire, que el flujo es ideal en la tobera y que el compresor funciona isentrópicamente. Se despreciará la energía cinética frente a la energía térmica en la entrada y la salida del compresor. En todos los apartados que siguen se supondrán además condiciones estacionarias.

- a) Calcular la potencia mínima que debe suministrar el compresor al fluido para alcanzar el máximo gasto másico posible de aire a través del compresor.
- b) Calcular la potencia mínima que debe suministrar el compresor al fluido para que el momento necesario en el eje de la compuerta que impida que esta se abra hacia fuera del depósito no sea superior a 196 Nm .
- c) Describir las características del flujo en la tobera en las condiciones del apartado b).
- d) Aunque se ha supuesto en lo anterior que la densidad del líquido es uniforme, en realidad se sabe que existe una cierta estratificación. Suponiendo que la densidad varía linealmente en 200 kg m^{-3} por metro de profundidad, calcular el momento de fuerzas que se ejercería sobre la compuerta si las condiciones de funcionamiento del compresor fueran las calculadas en el apartado b).

Solución

- a) $2,132 \text{ kW}$.
- b) $2,828 \text{ kW}$.
- d) $173,5 \text{ Nm}$.

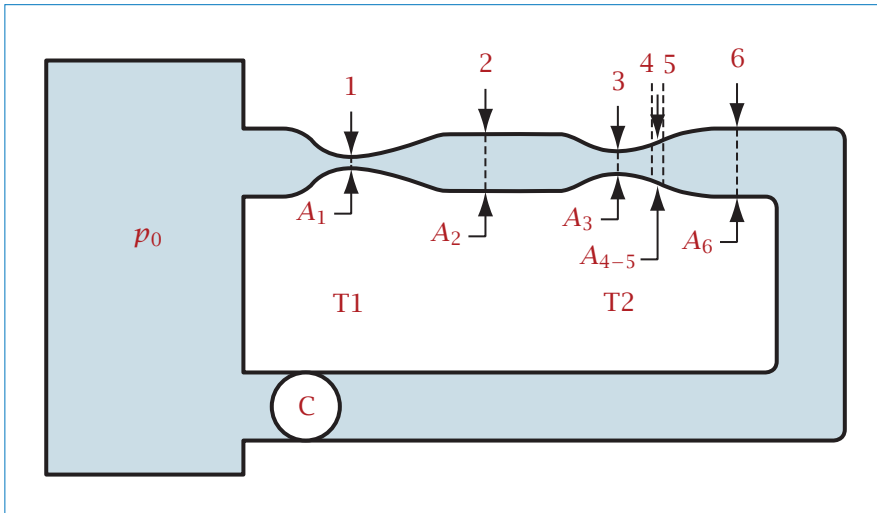
Problema 8.14. Túnel supersónico

El túnel supersónico de la figura está constituido por una tobera convergente-divergente T1, una zona de ensayo de sección constante, y otra tobera convergente-divergente T2, donde se recupera parte de la energía cinética del aire. La tobera T1 está conectada a un depósito de grandes dimensiones en el que la presión es $p_0 = 10^5 \text{ N m}^{-2}$ y la temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$. A_1 , A_2 , A_3 y A_6 son, respectivamente, las áreas de la sección de garganta de la tobera T1, de la sección de ensayo, y de las secciones de la garganta y de salida de la tobera T2, siendo $A_3 = 1,1 A_1$ y $A_6 = 3 A_1$. El valor de A_1 es el mínimo necesario para conseguir el gasto másico $G = 10 \text{ kg s}^{-1}$ que circula por el túnel. El número de Mach en la sección de ensayo es $M_2 = 2$. En la parte divergente de la tobera T2 existe una onda de choque en la sección de área $A_{4-5} = 1,2 A_1$. Desde la salida de la tobera T2, el aire es conducido hasta un compresor, donde sufre un proceso de compresión isentrópico y adiabático, y es finalmente descargado al depósito al que está acoplada la tobera T1. Las condiciones en el depósito antes indicadas se mantienen constantes en el tiempo (para lo que obviamente se necesitará extraer calor). Los conductos conectados al compresor son de sección de área constante e igual a A_6 . Se despreciarán los efectos de fricción y transmisión de calor en todos los conductos, y podrá suponerse que las magnitudes termodinámicas a la entrada del compresor son iguales a las que existen en la sección de salida de la tobera T2.

Calcular:

- a) Áreas A_1 y A_2 .
- b) Presión, p_2 , y temperatura, T_2 , en la sección de ensayo.
- c) Número de Mach, M_3 , en la sección de garganta de la tobera T2.
- d) Número de Mach, M_4 , presión, p_4 , y temperatura, T_4 , en la sección inmediatamente aguas arriba de la onda de choque.
- e) Número de Mach, M_5 , presión de remanso, p'_0 , y temperatura de remanso, T'_0 , en la sección inmediatamente aguas abajo de la onda de choque.
- f) Presión, p_6 , y temperatura, T_6 , en la sección de salida de la tobera T2.

- g) Potencia que comunica el compresor al aire. Indicar cuáles son los procesos que tienen lugar en la instalación en los que se disipa dicha potencia.



Solución

- a) El área A_1 mínima que permita un gasto másico $G = 10 \text{ kg s}^{-1}$ será igual al área crítica correspondiente a dicho gasto y las condiciones de remanso del depósito (ecuación (B.4.8)):

$$A_1 = A^* = 1,728 \frac{G}{\frac{p_0}{RT_0} \sqrt{\gamma RT_0}} = 1,728 \frac{10}{\frac{10^5}{(287)(300)} \sqrt{(1,4)(287)(300)}},$$

de donde resulta

$$A_1 = 0,0429 \text{ m}^2.$$

Para $M_2 = 2$, de la Tabla C.3 se obtiene $A_2/A^* = 1,69$, con lo que resulta

$$A_2 = 0,0725 \text{ m}^2.$$

- b) De la Tabla C.3, entrando con $M_2 = 2$, se obtiene

$$\frac{p_2}{p_0} = 0,128$$

CAPÍTULO 8. FLUJOS DE FLUIDOS IDEALES

y

$$\frac{T_2}{T_0} = 0,556,$$

resultando

$$p_2 = 12\,800 \text{ N m}^{-2},$$

$$T_2 = 166,8 \text{ K}.$$

c) Entrando con

$$\frac{A_3}{A^*} = \frac{1,1 A_1}{A_1} = 1,1$$

en la Tabla C.3 (en el rango $M > 1$), se obtiene

$$M_3 = 1,38.$$

d) De la Tabla C.3, entrando con

$$\frac{A_{4-5}}{A^*} = \frac{1,2 A_1}{A_1} = 1,2$$

(en el rango $M > 1$), se obtiene

$$M_4 = 1,54,$$

$$\frac{p_4}{p_0} = 0,257$$

y

$$\frac{T_4}{T_0} = 0,678,$$

resultando

$$p_4 = 25\,700 \text{ N m}^{-2},$$

$$T_4 = 203,4 \text{ K}.$$

e) Entrando con $M_4 = 1,54$ en la Tabla C.4, se obtiene

$$M_5 = 0,687$$

y

$$\frac{p'_0}{p_0} = 0,917$$

(p'_0 es la presión de remanso aguas abajo de la onda de choque), de donde resulta

$$p'_0 = 91\,700 \text{ N m}^{-2}.$$

La entalpía de remanso se conserva a través de la onda de choque, por lo que

$$T'_0 = T_0 = 300 \text{ K}.$$

f) Dado que¹³

$$\frac{A^{*'}}{A^*} = \frac{p_0}{p_0'}$$

($A^{*'}$ es el área crítica aguas abajo de la onda de choque), entrando con

$$\frac{A_6}{A^{*'}} = \frac{3A_1}{A_1 \frac{p_0}{p_0'}} = \frac{3A_1}{A_1/0,917} = 2,751$$

en la Tabla C.3 (en el rango $M < 1$, flujo subsónico), se obtiene

$$\frac{p_6}{p_0'} = 0,967$$

y

$$\frac{T_6}{T_0} = 0,99,$$

resultando

$$p_6 = 88\,708 \text{ N m}^{-2},$$

$$T_6 = 297 \text{ K}.$$

g) La ecuación (B.6.1), despreciando la variación de energía cinética frente a la variación de energía térmica y teniendo en cuenta que $\dot{Q} = 0$, se reduce a

$$\dot{W} = Gc_p(T_s - T_e),$$

donde, al ser isentrópico el flujo en el compresor,

$$T_s = T_e (p_s/p_e)^{(y-1)/y},$$

siendo, de acuerdo con lo indicado en el enunciado, $T_e = T_6$, $p_e = p_6$ y $p_s = p_0$. Sustituyendo valores, resulta

$$\dot{W} = 103,9 \text{ kW}.$$

Obsérvese que no solo se disipa energía en la onda de choque, sino también en la descarga al depósito del chorro que sale del compresor, cuya energía cinética se pierde (además, pueden existir otras pérdidas por fricción y locales, que se han supuesto despreciables en el problema).

¹³ Véase nota a pie de página 10 del Problema 8.10, pág. 313.

Problema 8.15. Proceso de vaciado del cilindro inferior del Problema 5.14

Como continuación del Problema 5.14, supóngase que, una vez alcanzado el equilibrio descrito en el último apartado, se quiere evacuar al exterior ($p_{\text{at}} = 10^5$ Pa) el aire contenido en el cilindro inferior a través de una tobera convergente-divergente. Determinar las áreas mínimas que deben tener las secciones de garganta y de salida de la tobera para conseguir inicialmente (en el momento de abrirse la tobera) un gasto másico de 10^{-5} kg s⁻¹.

Solución

La presión absoluta en el interior del cilindro inferior obtenida en el Problema 5.14 es $p_2 = 10^5 + 69\,926 = 1,7 \times 10^5$ Pa. De la Tabla C.3, teniendo en cuenta que la presión de remanso es $p_0 = p_2$ y la presión a la salida es $p_s = p_{\text{at}}$, se deduce que $p_s/p_0 = 0,588$ es superior al valor límite de 0,528, para el cual incluso una tobera convergente estaría bloqueada. El área crítica se obtiene de la ecuación (B.4.8),

$$A^* = 1,728 \frac{G}{\rho_0 a_0} = 1,728 \frac{10^{-5}}{\frac{1,7 \times 10^{-5}}{(287)(288)} \sqrt{(1,4)(287)(288)}} = 2,47 \times 10^{-8} \text{ m}^2.$$

El área mínima de la sección de salida se obtiene de la Tabla C.3; entrando con $p_s/p_0 = 0,588$, se determina $A_s/A^* = 1,01$, de donde resulta

$$A_{s, \text{mín}} = 2,49 \times 10^{-8} \text{ m}^2.$$

El área de la sección de garganta mínima es igual al área crítica (en este caso solo ligeramente inferior a $A_{s, \text{mín}}$),

$$A_{g, \text{mín}} = 2,47 \times 10^{-8} \text{ m}^2.$$

(Si se tratase de una tobera convergente, el área mínima de la sección de salida (garganta), sería igual al mismo valor obtenido de $A_{s, \text{mín}}$.)

Problema 8.16. Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (I)

Una tobera convergente-divergente está diseñada para que proporcione un número de Mach en la sección de salida de 1,8 cuando funciona con helio ($\gamma = 5/3$). La misma tobera se utiliza con aire ($\gamma = 1,4$) bajo ciertas condiciones que producen una onda de choque normal justo en la sección de salida de la tobera cuando la presión a la salida de esta es de 30 kPa.

Calcular:

- Relación entre las áreas de las secciones de salida y de garganta de la tobera, A_s/A_g .
- Número de Mach inmediatamente aguas arriba de la onda de choque.
- Presión de remanso aguas arriba de la onda de choque.

Solución

- $A_s/A_g = 1,352$.
- 1,715.
- 46,4 kPa.

Problema 8.17. Flujo compresible alrededor de un cuerpo romo

Un cuerpo romo se halla sumergido en una corriente de aire de velocidad $v_1 = 400 \text{ m s}^{-1}$, en la que existe una presión estática $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$. En el punto de remanso que se forma sobre la parte frontal de la superficie del cuerpo se mide una presión $p_A = 1,62 \times 10^5 \text{ Pa}$.

- Determinar la temperatura del aire en la corriente incidente.

Supóngase en lo que sigue que se reduce la temperatura del aire en la corriente incidente, manteniendo los valores antes indicados de velocidad

y presión estática, hasta que se alcanza en el punto de remanso sobre el cuerpo una presión $p_A = 2,78 \times 10^5$ Pa (situación en la que existe una onda de choque normal estacionaria aguas arriba del cuerpo).

- b) Determinar el valor de la temperatura que debe alcanzar el aire en la corriente incidente.

Solución

- a) Entrando con $p/p_0 = 0,617$ en la Tabla C.3, se obtiene $M = 0,86$. Dado que

$$M = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}} = 0,86,$$

teniendo en cuenta que $v = 400 \text{ m s}^{-1}$, se deduce

$$T = 538,4 \text{ K}.$$

- b) Los subíndices 1 y 2 indicarán, respectivamente, condiciones aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque. Se seguirá un procedimiento de tanteo, tomando inicialmente $T_1 = 200 \text{ K}$. Para este valor,

$$M_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = 1,41.$$

Entrando con $M_1 = 1,41$ en la Tabla C.4, se obtiene $M_2 = 0,735$ y $p_2 = 2,155 p_1 = 2,155 \times 10^5$ Pa. Por otra parte, entrando con el valor obtenido de $M_2 = 0,735$ en la Tabla C.3, se determina una relación $p_2/p_{02} = 0,698$, con lo que resulta $p_{02} = p_A = p_2/0,698 = 3,09 \times 10^5$ Pa.

Al haberse obtenido un valor de p_A superior al valor medido indicado en el enunciado ($2,78 \times 10^5$ Pa), la temperatura T_1 deberá ser mayor que la que se ha supuesto. Compruébese que con

$$T_1 = 225 \text{ K}$$

se obtiene un valor de la presión en el punto de remanso situado sobre el cuerpo, $p_A \approx 2,78 \times 10^5$ Pa, que se aproxima al medido.

Problema 8.18. Hipótesis de flujo cuasiestacionario en el proceso de vaciado de un depósito

El aire contenido en un depósito de volumen $V = 1 \text{ m}^3$ se descarga a través de una tobera convergente con una sección de área mínima de diámetro $D = 1 \text{ mm}$. En el depósito existe una presión $p_0 = 1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$. La presión a la salida de la tobera es $p_s = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$. Determinar la velocidad del aire en la sección de salida de la tobera y el gasto másico. Justificar que la utilización de la hipótesis de flujo cuasiestacionario puede ser aceptable.

Solución

De las relaciones

$$\left(\frac{p_0}{p_s}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{T_0}{T_s} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right),$$

sustituyendo $p_0/p_s = 1,2$, resulta $M_s = 0,517$ y $T_s = 284,77 \text{ K}$. Teniendo en cuenta que $a_s = (\gamma RT_s)^{1/2} = 338,26 \text{ m s}^{-1}$, se obtiene

$$v_s = a_s M_s = 174,91 \text{ m s}^{-1}.$$

Teniendo en cuenta que $\rho_s = p_s/(RT_s) = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, resulta un gasto másico

$$G = \rho_s v_s A_s = 1,649 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}.$$

El flujo puede considerarse cuasiestacionario si los órdenes de magnitud del término no estacionario y del término convectivo en las ecuaciones de conservación satisfacen la siguiente relación:

$$O\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \ll O(\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}),$$

es decir,

$$\frac{\rho_c \phi_c}{t_c} \ll \frac{\rho_c v_s \phi_c}{D},$$

siendo t_c el tiempo característico de variación de la magnitud ϕ , que será del orden del tiempo de vaciado del depósito, $t_c \sim \frac{p_0 - p_s}{RT_0} V/G = 1380 \text{ s}$, con lo que resulta

$$\frac{D}{v_s t_c} \sim 4 \times 10^{-9} \ll 1.$$

Problema 8.19. Determinación de la geometría de toberas

Se trata de descargar a la atmósfera, a través de una tobera, el aire contenido en un depósito de grandes dimensiones, en el que existe una presión $p_0 = 1,5 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$.

- Determinar el área crítica correspondiente a un gasto másico de descarga a través de la tobera igual a $0,1 \text{ kg s}^{-1}$.
- Calcular el área de la sección de salida de una tobera convergente necesaria para alcanzar un gasto másico de $0,08 \text{ kg s}^{-1}$ cuando la presión a la salida es de 1 kgf cm^{-2} .
- Calcular el área mínima de la sección de garganta de una tobera convergente-divergente con un sección de salida de área $A_s = 380 \text{ mm}^2$, necesaria para alcanzar el gasto másico de $0,08 \text{ kg s}^{-1}$ del apartado anterior.
- Para la tobera convergente-divergente con las características geométricas del apartado anterior, determinar la presión a la salida de la tobera para la que se consiguen condiciones de tobera adaptada.

Solución

- a) La ecuación (B.4.8) proporciona

$$A^* = 1,728 \frac{G}{\rho_0 a_0}.$$

Sustituyendo valores en esta ecuación, siendo

$$a_0 = (\gamma RT_0)^{1/2} = 347,2 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = 1,709 \text{ kg m}^{-3},$$

se obtiene

$$A^* = 2,912 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

- b) A partir de la Tabla C.3 (o de las relaciones correspondientes), entrando con $p_0/p_s = 1,5$, resulta $M_s = 0,7837$ y $T_s = 267,2 \text{ K}$. La velocidad en la sección de

salida es $v_s = a_s M_s = (\gamma R T_s)^{1/2} M_s = (327,7)(0,7837) = 256,8 \text{ m s}^{-1}$. Teniendo en cuenta que $\rho_s = p_s / (R T_s) = 1,279 \text{ kg m}^{-3}$, resulta

$$A_s = \frac{G}{\rho_s v_s} = 2,435 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

c) El área que se pide es el área crítica correspondiente a las condiciones de remanso y el gasto másico indicados,

$$A_g = A^* = 1,728 \frac{G}{\rho_0 a_0} = 1,728 \frac{0,08}{(1,709)(347,2)},$$

de donde resulta

$$A_g = 2,330 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Obsérvese que el resultado no depende del área A_s de la sección de salida.

d) De la Tabla C.3 (o mediante la ecuación (B.4.9)), entrando con $A_s / A^* = 380 / 233 = 1,631$ (con $M_s > 1$), se obtiene la presión que proporciona condiciones de tobera adaptada,

$$p_s = 20\,048 \text{ Pa.}$$

Problema 8.20. Determinación de las áreas de la sección en la que existe una onda de choque y de la sección de salida de una tobera convergente-divergente

El aire contenido en un depósito de grandes dimensiones, que se encuentra a una presión de 200 kPa y una temperatura de 330 K, se descarga, a través de una tobera convergente-divergente, a otro depósito en el que existe una presión constante de 150 kPa. En una determinada sección de la tobera hay una onda de choque. Inmediatamente aguas arriba de esta, la presión absoluta es de 50 kPa. El gasto másico a través de la tobera es de $0,1 \text{ kg s}^{-1}$. Determinar:

- Área de la sección de la tobera en la que existe la onda de choque.
- Área de la sección de salida de la tobera.

Solución

a) El área crítica aguas arriba de la onda de choque se determina mediante la ecuación (B.4.8),

$$A_1^* = 1,728 \frac{G}{\rho_{01} a_0},$$

utilizando las condiciones de remanso en el depósito:

$$\rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_0}$$

y

$$a_0 = (\gamma RT_0)^{1/2}.$$

Sustituyendo valores, resulta $A_1^* = 2,247 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

De la ecuación (B.4.4),

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

introduciendo $p_{01}/p_1 = 4$, se obtiene $M_1 = 1,559$, y de la ecuación (B.4.9),

$$\frac{A}{A^*} = \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} / M,$$

con los valores de M_1 y de A_1^* que se acaba de calcular, resulta

$$A_1 = 2,738 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

b) El área crítica y la presión de remanso aguas abajo de la onda de choque pueden obtenerse a partir de la ecuación (B.4.14),

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \left\{ \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left[\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right]^\gamma \right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}},$$

teniendo en cuenta que $A_2^*/A_1^* = p_{01}/p_{02}$ (tal como se comenta en la pág. 486). Compruébese que resulta $A_2^* = 2,469 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $p_{02} = 182\,021 \text{ Pa}$.

De la ecuación (B.4.4), introduciendo $p_{02}/p_s = 1,213$, resulta un número de Mach en la sección de salida $M_s = 0,533$, y de la ecuación (B.4.9), sustituyendo los valores de M_s y A_2^* calculados, se obtiene

$$A_s = 3,164 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Problema 8.21. Flujo a la salida de un motor cohete

Como continuación del Problema 5.22, describir cualitativamente las características del flujo a lo largo de la tobera y a la salida de esta, y determinar la presión de remanso. Supóngase $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ y $\gamma = 1,4$.

Solución

La temperatura en la sección de salida es

$$T_s = \frac{p_s}{R\rho_s} = \frac{1,2 \times 10^5}{(287)(1,25)} = 334,5 \text{ K},$$

y el número de Mach,

$$M_s = \frac{v_s}{a_s} = \frac{v_s}{(\gamma RT_s)^{1/2}} = \frac{1400}{[(1,4)(287)(334,5)]^{1/2}} = 3,819.$$

Sustituyendo los valores de p_s y M_s en la ecuación (B.4.4),

$$\frac{p_0}{p_s} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

se obtiene

$$p_0 = 142,7 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

El flujo es por tanto supersónico en la parte divergente y el gas sufre una aceleración a lo largo de toda la tobera. A la salida de esta, se produce una fuerte expansión para adaptar la presión del gas a la que existe en el exterior, que es muy inferior a la presión con la que sale el gas. En los textos de Crespo (2006) y White (2008), por ejemplo, puede encontrarse una descripción de las características generales de estos tipos de flujo y de los fenómenos que tienen lugar en ellos (expansión de Prandtl-Meyer).

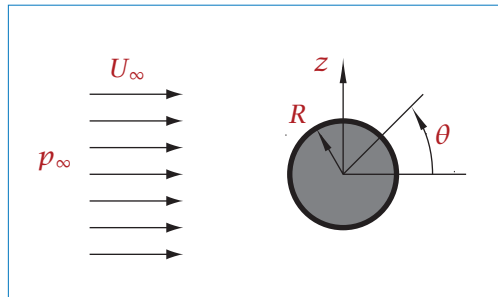
Problema 8.22. Flujo alrededor de un cilindro en rotación

Un cilindro de sección circular de radio R , con su eje en posición horizontal y sometido a un movimiento de rotación de velocidad constante alrededor de su eje, se encuentra sumergido en un líquido de densidad ρ que fluye a

una velocidad uniforme U_∞ . La presión estática en el líquido a la altura del eje del cilindro ($z = 0$), en puntos suficientemente alejados de este, es p_∞ . Supóngase una situación hipotética en la que el flujo pudiese ser considerado ideal, y la componente acimutal de la velocidad del líquido esté definida por

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} - \left[1 + (R/r)^2\right] U_\infty \sin \theta,$$

siendo Γ una constante conocida. Se tendrán en cuenta los efectos gravitatorios.



Determinar:

- Circulación de la velocidad alrededor del cilindro.
- Distribución de presión en la superficie del cilindro.
- Fuerza de sustentación que actúa sobre el cilindro.

Explicar razonadamente en qué medida la descripción del flujo considerada puede ser realista en distintas zonas del campo fluido, en el caso de que la velocidad de giro del cilindro sea pequeña.

Solución

- La circulación es igual a la constante Γ indicada en el enunciado.
- $p(\theta) = a_1 + a_2 \sin \theta + a_3 \sin^2 \theta$, donde

$$a_1 = \rho \left(\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 R^2} \right); \quad a_2 = \rho \left(\frac{\Gamma}{\pi R} U_\infty - gR \right); \quad a_3 = -2\rho U_\infty^2.$$

- $F = -\pi R a_2 = -\pi R \rho \left(\frac{\Gamma}{\pi R} U_\infty - gR \right).$

Problema 8.23. Influencia de la presión a la salida en el flujo en una tobera convergente-divergente

Un depósito de grandes dimensiones contiene aire ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\gamma = 1,4$) a una presión $p_0 = 350 \text{ kPa}$ y una temperatura $T_0 = 15^\circ \text{C}$, y se descarga a través de una tobera convergente-divergente con secciones de garganta y de salida de áreas $A_g = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ y $A_s = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, respectivamente. Utilícense las tablas C.3 y C.4.

- a) Describir las características del flujo y determinar el gasto másico a través de la tobera para los siguientes casos, siendo p_s la presión a la salida de la tobera:
 - a.1) $p_s = 330 \text{ kPa}$;
 - a.2) $p_s = 250 \text{ kPa}$;
 - a.3) $p_s = 100 \text{ kPa}$.
- b) Si en alguno de los tres casos existe una onda de choque dentro de la tobera, determinar el área de la sección en la que está situada. (En el proceso iterativo, tómense de las tablas valores aproximados, sin realizar interpolaciones.)

Solución

a) a.1) $G = 0,79 \text{ kg s}^{-1}$. La presión a la salida de la tobera es superior a la máxima necesaria para que se produzca bloqueo sónico, $p_{sc} = 295 \text{ kPa}$, por lo que este no existe.

a.2) $G = 1,25 \text{ kg s}^{-1}$. La presión a la salida de la tobera es inferior a $p_{sc} = 295 \text{ kPa}$ (por lo que existe bloqueo sónico) y superior a la presión correspondiente a tobera adaptada, p_{ss} . Existe una onda de choque en el interior de la tobera, ya que p_s es superior a la presión máxima necesaria para que la onda de choque normal se sitúe justo en la sección de salida, $p_{ch-s} = 228,2 \text{ kPa}$.

a.3) $G = 1,25 \text{ kg s}^{-1}$. También en este caso se produce bloqueo sónico y $p_{sc} > p_s > p_{ss}$. Existen ondas de choque oblicuas situadas en la salida de la tobera, ya que $p_{ch-s} > p_s > p_{ss}$.

b) En el segundo caso de los considerados en el apartado anterior existirá una onda de choque normal situada en la sección de área $A_{ch} \approx 1,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

Problema 8.24. Ecuación de Bernoulli en flujos rotacionales

Un depósito cilíndrico de sección circular de radio R , abierto a la atmósfera, contiene agua y gira a una velocidad angular constante Ω alrededor de su eje. Explicar por qué es erróneo el siguiente razonamiento:

“Aplicando la ecuación de Bernoulli ($p/\rho + \frac{1}{2}v^2 + gz = C$, siendo C constante en todo el campo fluido) en un sistema de referencia fijo a tierra (en el que $u = -\Omega y$, $v = \Omega x$ y, por tanto, $v^2 = \Omega^2(x^2 + y^2)$ en un sistema de coordenadas cartesianas con el eje z coincidente con el eje del depósito y sentido hacia arriba), se deduciría que las superficies de presión constante, y en particular la superficie libre del agua, vendrían dadas por $z = \text{constante} - \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$, lo que indica que la superficie libre del agua alcanzaría su máximo nivel en el eje del depósito”.

Solución

La ecuación de Bernoulli solo es aplicable, en este caso, a lo largo de una misma línea de corriente. Si el flujo fuese irrotacional, la constante de la ecuación de Bernoulli sería la misma en todo el campo fluido. Es obvio que el flujo descrito no es irrotacional, por lo que el razonamiento del enunciado es erróneo y conduce a una conclusión incorrecta. Adoptando un sistema de referencia ligado al depósito, el problema se reduce al del equilibrio estático del agua, sometida a las fuerzas de gravedad y centrífuga y las debidas a la presión.

Problema 8.25. Apertura súbita del extremo inferior de un conducto que contiene agua

Un tubo de sección constante, cuyo eje tiene forma de cuadrante de circunferencia de radio R , está dispuesto en un plano vertical, según se indica en la figura, y puede girar alrededor del eje z con una velocidad angular Ω . Su extremo superior está abierto a la atmósfera y el inferior está cerrado mediante un tapón. El tubo está inicialmente lleno de agua, y en un instante dado se retira el tapón, de forma que también el extremo inferior queda súbitamente abierto a la atmósfera. Se despreciarán los efectos viscosos y se supondrán

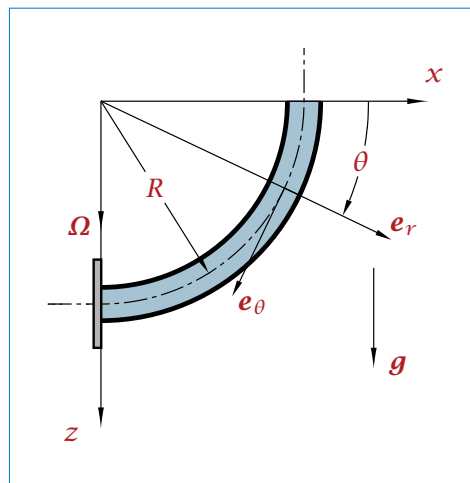
uniformes las magnitudes fluidas en cada sección transversal del tubo, considerando que el diámetro de su sección transversal es mucho menor que R .

Suponiendo en primer lugar que $\Omega = 0$, determinar, en el instante en que se retira el tapón:

- Aceleración del agua.
- Distribución de la presión en el tubo.

Se supondrá a continuación que el conducto puede girar.

- Determinar el valor de la velocidad de giro Ω necesario para que todo el volumen de agua se mantenga en el conducto cuando se retire el tapón.



Solución

a) Introduciendo $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta$ en la ecuación (B.2.5) de conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial, que queda de la siguiente forma al desprejarse el término viscoso:

$$\rho (\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla p = \rho \mathbf{g},$$

teniendo en cuenta que, según se deduce de las ecuaciones (A.3.33) y (A.3.42),

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{v_\theta^2}{r} \mathbf{e}_r,$$

resulta

$$\rho \left(a_\theta \mathbf{e}_\theta - \frac{v_\theta^2}{r} \mathbf{e}_r \right) + \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \rho \mathbf{g}, \quad (8.25.1)$$

siendo a_θ la componente acimutal de la aceleración del agua (que coincide con la aceleración local).¹⁴

Obsérvese que la ecuación (8.25.1) expresa el equilibrio acimutal y radial de las fuerzas que actúan sobre el agua.¹⁵ Teniendo en cuenta la hipótesis del enunciado de que el diámetro de la sección transversal del tubo es mucho menor que R y prescindiendo del equilibrio en dirección radial, suponiendo que la presión solo varía con θ , se tomará

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{dl},$$

siendo dl el módulo del vector $d\mathbf{l} = R d\theta \mathbf{e}_\theta$, tangente al eje del tubo.

Multiplicando escalarmente la ecuación (8.25.1) por el vector $d\mathbf{l}$, resulta

$$\rho a_\theta dl + dp = \rho g \cos \theta dl \quad (8.25.2)$$

(obsérvese que el término de aceleración convectiva no produce contribución). Integrando esta última ecuación a lo largo del tubo, entre sus extremos superior e inferior (subíndices 1 y 2, respectivamente), en los que la presión es la atmosférica,

$$\int_0^{\pi/2} \rho R (g \cos \theta - a_\theta) d\theta = \int_{p_1=0}^{p_2=0} dp = 0,$$

resulta

$$\rho R \left(g \sin \frac{\pi}{2} - a_\theta \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

¹⁴ Obsérvese que a_θ es uniforme en el tubo, al serlo en todo momento la velocidad por tener que satisfacerse la ecuación de continuidad, ser constante el área de la sección transversal del conducto y haberse supuesto que las magnitudes fluidas son uniformes en secciones transversales.

¹⁵ Si se prescindiase de la gravedad (el flujo debería estar forzado de otra forma), el gradiente de presión radial estaría compensado por la fuerza centrífuga. Es interesante ver que la hipótesis del enunciado que consiste en suponer que las magnitudes fluidas son uniformes en secciones transversales es, en sentido estricto, inconsistente con la condición de equilibrio radial, ya que el gradiente de presión solo podría ser nulo (presión uniforme en secciones transversales) si el radio de curvatura del conducto fuese infinito.

de donde se obtiene

$$a_\theta = \frac{2g}{\pi}.$$

b) Sustituyendo el valor de a_θ que se acaba de obtener en la ecuación (8.25.2), e integrando esta entre el extremo superior y un punto genérico intermedio entre este y el extremo inferior,

$$\int_{p_1=0}^{p(\theta)} dp = \int_0^\theta \rho g R \left(\cos \theta - \frac{2}{\pi} \right) d\theta,$$

se obtiene

$$p(\theta) = \rho g R \left(\sin \theta - \frac{2\theta}{\pi} \right).$$

c) En un sistema de referencia ligado al conducto, la fuerza másica que actúa sobre el agua es ahora (véase la ecuación (B.1.10))

$$\mathbf{f}_m = g\mathbf{e}_z + \Omega^2 x \mathbf{e}_x,$$

por lo que la ecuación (8.25.2) queda de la forma

$$\rho a_\theta dl + dp = \rho g \cos \theta dl - \rho \Omega^2 x \sin \theta dl,$$

o bien, sustituyendo $dl = R d\theta$ y $x = R \cos \theta$,

$$dp = \rho R \left(g \cos \theta - \frac{\Omega^2 R}{2} \sin 2\theta - a_\theta \right) d\theta. \quad (8.25.3)$$

Suponiendo ahora que el agua permanece en reposo al retirar el tapón ($a_\theta = 0$) e integrando como en el apartado a),

$$\int_0^{\pi/2} \rho R \left(g \cos \theta - \frac{\Omega^2 R}{2} \sin 2\theta \right) d\theta = \int_{p_1=0}^{p_2=0} dp = 0,$$

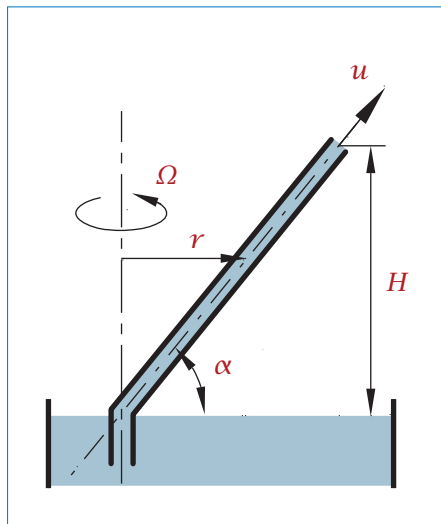
se obtiene

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g}{R}}.$$

Obsérvese que este resultado puede obtenerse de una forma más sencilla simplemente estableciendo el equilibrio estático del agua en el tubo, suponiendo que este está abierto en ambos extremos.

Problema 8.26. Tubo aspersor inclinado

El aspersor de la figura está constituido por un tubo acodado de sección uniforme y longitud L , que gira a velocidad angular constante Ω alrededor del eje indicado. El extremo superior del tubo está situado a una altura H sobre la superficie libre del líquido de densidad ρ contenido en un depósito de grandes dimensiones, en el que se halla sumergido su extremo inferior. Se supondrá que el flujo es ideal.



Determinar:

- Ley de variación de la presión a lo largo del tubo y punto en el que la presión es mínima.
- Valor mínimo de $\Omega = \Omega_1$ necesario para que se mantenga la circulación de líquido a través del tubo.
- Valor de $\Omega = \Omega_2$ por encima del cual se produce cavitación. (La presión de vapor es p_v y la presión atmosférica, p_{at} .)

Supóngase a continuación que inicialmente una válvula situada en el extremo superior del tubo impide la circulación de líquido y que el aspersor gira a velocidad angular constante Ω , manteniéndose totalmente cebado.

- d) Determinar la aceleración del líquido en el instante en que se abre la válvula. Comentar el resultado.

Solución

a) Aplicando la ecuación (B.4.2) de Bernoulli entre un punto intermedio del tubo y el extremo de este, teniendo en cuenta que el potencial de fuerzas másicas es

$$U = gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2},$$

resulta

$$p/\rho + \frac{u^2}{2} + gz - \frac{\Omega^2 r^2}{2} = p_a/\rho + \frac{u^2}{2} + gH - \frac{\Omega^2 (H/\tan \alpha)^2}{2},$$

donde $z = r \tan \alpha$. Despejando la presión, se obtiene

$$\frac{p - p_a}{\rho} = \frac{\Omega^2}{2} \left(r^2 - \frac{H^2}{\tan^2 \alpha} \right) + g(H - r \tan \alpha). \quad (8.26.1)$$

El mínimo se alcanza para

$$r = \frac{g \tan \alpha}{\Omega^2},$$

donde se cumple $dp/dr = 0$.

b) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre en el depósito y el extremo superior del tubo, resulta

$$0 = \frac{u^2}{2} + gH - \frac{\Omega^2 H^2}{2 \tan^2 \alpha}. \quad (8.26.2)$$

Para que se mantenga la circulación de líquido a través del tubo debe cumplirse $u > 0$, luego de la ecuación (8.26.2) se deduce que debe satisfacerse la condición

$$\Omega > \Omega_1 = \tan \alpha \sqrt{2g/H}.$$

c) Particularizando la ecuación (8.26.1) para $r = g \tan \alpha / \Omega^2$ (posición radial donde se alcanza el mínimo de presión calculado en el apartado a)) y sustituyendo el valor de la presión $p = p_v$, resulta la expresión

$$\Omega_2^4 \frac{H^2}{2 \tan^2 \alpha} - \left(\frac{p_a - p_v}{\rho} + gH \right) \Omega_2^2 + \frac{g^2 \tan^2 \alpha}{2} = 0,$$

de donde se obtiene el valor límite de $\Omega = \Omega_2$.

d) Integrando a lo largo del conducto la ecuación (B.4.1) de Euler-Bernoulli,

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz - \frac{\Omega^2 z^2}{2 \tan^2 \alpha} \right]_1^2 = 0,$$

denotando los límites 1 y 2 los puntos situados en los extremos inferior y superior del tubo, respectivamente. Teniendo en cuenta que en el instante en el que se abre la válvula la velocidad en el tubo es $v = 0$ y las presiones $p_2 = p_{\text{at}}$ y $p_1 = p_{\text{at}} + \rho gh$ (h es la profundidad a la que está sumergido el tubo), de la ecuación anterior se obtiene

$$aL + gH - \frac{\Omega^2 H^2}{2 \tan^2 \alpha} = 0,$$

siendo L la longitud del tubo y a la aceleración del líquido en el tubo. Despejando, resulta

$$a = \Omega^2 H^2 / (2L \tan^2 \alpha) - gH/L.$$

Si h fuese despreciable, $L = H / \sin \alpha$, con lo que resultaría

$$a = (\Omega \cos \alpha)^2 L / 2 - g \sin \alpha.$$

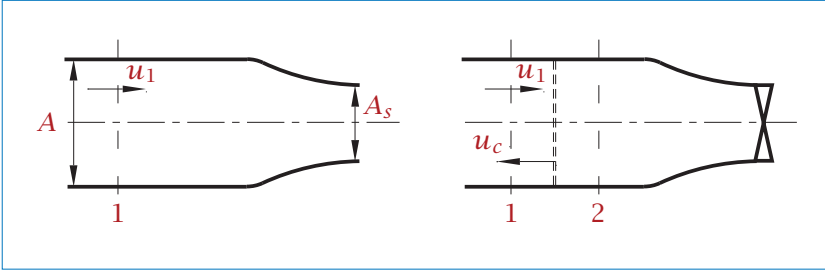
Problema 8.27. Flujo de aire en una tubería seguida de una tobera convergente. Cierre de una válvula

Una tubería de sección transversal de área $A = 15 \text{ cm}^2$ descarga aire en régimen estacionario a través de una tobera convergente situada en su extremo. En la sección 1 existe una presión $p_1 = 3 \text{ kgf cm}^{-2}$, una temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$ y el número de Mach es $M_1 = 0,6$.

- Determinar las magnitudes de remanso.
- Teniendo en cuenta que a la salida de la tobera el aire experimenta una fuerte expansión, determinar el área de la sección de la garganta, A_s .

Supóngase que en un momento dado se cierra de forma instantánea la salida de la tobera mediante una válvula, produciéndose una onda de choque que se propaga aguas arriba a lo largo de la tubería.

- c) Determinar la velocidad de propagación de la onda de choque, u_c . (Se sugiere adoptar un sistema de referencia ligado a la onda, en el que $u'_1 = u_1 + u_c$.)
- d) Determinar la presión detrás de la onda de choque, p_2 .



Solución

a) Entrando con el valor $M_1 = 0,6$, de la Tabla C.3 se obtiene $p_1/p_0 = 0,784$ y $T_1/T_0 = 0,933$. Teniendo en cuenta los valores de p_1 y T_1 del enunciado, resulta

$$p_0 = 3,83 \text{ kgf cm}^{-2}, \quad T_0 = 321,5 \text{ K}.$$

b) La expansión a la salida se produce cuando la presión en la sección de salida de la tobera es superior a la del recinto de descarga, y en una tobera convergente esto ocurre cuando $p_{\text{exterior}} < p_{sc}$,¹⁶ por lo que se deduce que existe bloqueo sónico. En estas condiciones, $A_s = A^*$. De la Tabla C.3 se puede obtener $A/A^* = 1,19$ para $M_1 = 0,6$. Teniendo en cuenta que $A_1 = 15 \text{ cm}^2$, resulta

$$A_s = A^* = 12,6 \text{ cm}^2.$$

c) Adoptando un sistema de referencia ligado a la onda, esta se mantiene estacionaria, con velocidades del aire

$$u'_1 = u_1 + u_c$$

y

$$u'_2 = u_c$$

¹⁶ En este y otros problemas del presente capítulo, la presión p_{sc} denota la máxima presión a la salida de la tobera para la que se alcanza bloqueo sónico.

antes y después de la onda, respectivamente. Dividiendo las ecuaciones anteriores por a_1 y a_2 , respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned} M'_1 &= M_1 + \frac{u_c}{a_1}, \\ M'_2 &= \frac{u_c}{a_2}, \end{aligned} \quad (8.27.1)$$

donde $M_1 = 0,6$ es un dato conocido. Eliminando u_c en (8.27.1), resulta

$$M'_1 = M_1 + \frac{a_2}{a_1} M'_2 \quad (8.27.2)$$

donde $a_2/a_1 = f_1(M'_1)$ y $M'_2 = f_2(M'_1)$. La solución se obtiene iterando. Para un valor $M'_1 = 1,42$, de la Tabla C.4 se obtiene $a_2/a_1 = (T_2/T_1)^{1/2} = 1,126$ y $M'_2 = 0,731$, valores que, sustituidos en (8.27.2), proporcionan $M'_1 \approx 1,42$. Sustituyendo este valor de M'_1 en la ecuación (8.27.1), se deduce la velocidad de la onda,¹⁷

$$u_c = (M'_1 - M_1)\sqrt{\gamma RT_1} = 284,7 \text{ m s}^{-1}.$$

d) De la Tabla C.4, con $M'_1 = 1,42$, se obtiene $p_2/p_1 = 2,186$, y como $p_1 = 3 \text{ kgf cm}^{-2}$, resulta¹⁸

$$p_2 = 6,56 \text{ kgf cm}^{-2}.$$

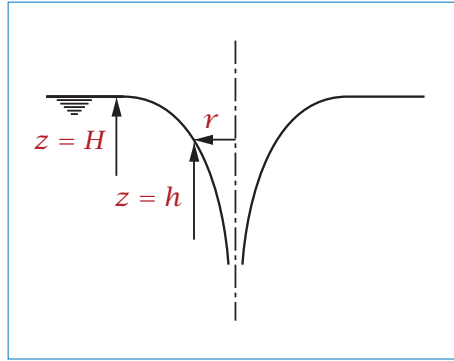
Problema 8.28. Vórtice libre en el proceso de vaciado a través de un orificio de un depósito que contiene líquido

Un depósito de pequeña profundidad, abierto a la atmósfera, se vacía del líquido que contiene a través de un orificio que existe en su fondo, formándose un vórtice libre en el que la velocidad es esencialmente acimutal e inversamente proporcional a la distancia r al eje del torbellino. La velocidad acimutal del agua es $v_{\theta_0} = 10 \text{ cm s}^{-1}$ a una distancia $r_0 = 40 \text{ cm}$. Determinar la circulación de la velocidad a lo largo de cualquier línea cerrada y la altura

¹⁷ Obsérvese que, resolviendo numéricamente la ecuación (8.27.2) (utilizando las ecuaciones (B.4.12) y (B.4.13)), se obtendrían, de forma más precisa que utilizando las tablas, los valores $M'_1 = 1,423$, $M'_2 = 0,7303$, $a_2/a_1 = 1,127$, $u_c/a_1 = 0,8228$ y $u_c = 285,7 \text{ m s}^{-1}$.

¹⁸ Mediante la ecuación (B.4.11), y a partir de los resultados numéricos obtenidos de forma precisa en el apartado anterior, se obtendría $p_2 = 6,586 \text{ kgf cm}^{-2}$.

de la superficie libre del agua (con respecto al nivel H indicado en la figura) en función de r . Explíquese cómo sería realmente el flujo en la proximidad del eje.



Solución

De acuerdo con lo indicado en el enunciado,

$$v_{\theta} = \frac{C}{r},$$

siendo C una constante que puede determinarse a partir de la condición indicada para r_0 :

$$C = v_{\theta_0} r_0 = 0,04 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Compruébese que el vector vorticidad es nulo en cualquier punto del campo fluido excepto en el eje $r = 0$, donde existe una singularidad. La circulación a lo largo de cualquier línea cerrada que no rodee dicho eje es nula,

$$\Gamma = 0.$$

La circulación alrededor de líneas cerradas que rodean el eje $r = 0$ viene dada por

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} v_{\theta} r d\theta,$$

de donde se obtiene

$$\Gamma = (0,08)\pi$$

(en $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$).

CAPÍTULO 8. FLUJOS DE FLUIDOS IDEALES

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre dos puntos de la superficie libre (en la que se cumple $p = 0$) situados a alturas h y H , resulta

$$\rho g H = \rho g h + \rho v_{\theta}^2 / 2,$$

de donde se obtiene

$$h = H - \frac{v_{\theta}^2}{2g} = H - \frac{8 \times 10^{-4}}{gr^2}$$

(magnitudes de longitud en m y g en m s^{-2}).

En la realidad, el efecto de la viscosidad del líquido hace que la velocidad en las proximidades del eje $r = 0$ no tienda a infinito, y que la vorticidad no se encuentre concentrada en dicho eje sino que exista un núcleo viscoso en el que la velocidad no es inversamente proporcional a r y en el que, por tanto, la vorticidad no es nula.

Problema 8.29. Tobera convergente-divergente funcionando con helio o aire (II)

Una tobera convergente-divergente está diseñada para que proporcione un gasto másico $G = 0,46 \text{ kg s}^{-1}$ con un número de Mach en la sección de salida $M_s = 1,8$ cuando descarga helio [$\gamma_{\text{He}} = 5/3$, $R_{\text{He}} = 2078 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$] desde un depósito de grandes dimensiones en el que existe una presión de remanso $p_0 = 100 \text{ kPa}$ y una temperatura de remanso $T_0 = 300 \text{ K}$.

- a) Determinar las áreas de las secciones de garganta y de salida de la tobera.

Supóngase a continuación que la misma tobera se utiliza para descargar aire [$\gamma_{\text{aire}} = 1,4$, $R_{\text{aire}} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$], en lugar de helio, con las mismas condiciones de remanso en el depósito y una presión a la salida de la tobera p_s . Se pide determinar el gasto másico de aire a través de la tobera y describir las características del flujo en la tobera en los dos casos siguientes:

- b) $p_s = 20 \text{ kPa}$.
c) $p_s = 64,9 \text{ kPa}$.

En concreto, se deberá determinar la presión, la temperatura y el número de Mach en las secciones de garganta y de salida de la tobera. Si en algún caso existe una onda de choque, se determinará, además, el área de la sección en la que se localice la onda, la presión y la temperatura delante y detrás de la onda, y las magnitudes de remanso detrás de la onda.

Solución

a) Despejando el área de la sección A de la ecuación

$$G = \rho v A = \rho_0 a_0 A M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1+\gamma}{2(1-\gamma)}}, \quad (8.29.1)$$

donde $\rho_0 = p_0 / (R_{\text{He}} T_0) = 0,1604 \text{ kg m}^{-3}$ y $a_0 = \sqrt{\gamma R_{\text{He}} T_0} = 1019,3 \text{ m s}^{-1}$, se obtiene

$$A_g = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

en la sección de la garganta ($M_g = 1$), y

$$A_s = 6,76 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

en la de salida.

b) Entrando en la Tabla C.3 con $A_s/A_g = 1,352$, se obtienen las presiones de referencia¹⁹ $p_{sc} = 0,837 p_0 = 83,7 \text{ kPa}$ y $p_{ss} = 0,209 p_0 = 20,9 \text{ kPa}$. Al ser $p_s < p_{ss}$ la tobera estará bloqueada, con lo que

$$M_g = 1,$$

y el flujo será isentrópico en toda la tobera. Entrando en la Tabla C.3 con $M_g = 1$ y $A_s/A^* = 1,352$, se obtienen las condiciones en la sección de la garganta,

$$p_g = 0,528 p_0 = 52,8 \text{ kPa},$$

$$T_g = 0,833 T_0 = 249,9 \text{ K},$$

y en la sección de salida,

$$p_s = 20,9 \text{ kPa},$$

¹⁹ En este y otros problemas del presente capítulo, las presiones p_{sc} y p_{ss} denotan, respectivamente, la máxima presión a la salida de la tobera para la que se alcanza bloqueo sónico y la presión a la salida de una tobera convergente-divergente correspondiente a condiciones de tobera adaptada (véase la nota a pie de página 4 del Problema 8.6, pág. 305).

CAPÍTULO 8. FLUJOS DE FLUIDOS IDEALES

$$M_s = 1,71,$$

$$T_s = 0,63 T_0 = 189 \text{ K},$$

respectivamente.

Particularizando la ecuación (8.29.1) para las condiciones en la sección de la garganta, teniendo en cuenta que $\rho_0 = p_0 / (R_{\text{aire}} T_0) = 1,165 \text{ kg m}^{-3}$ y $a_0 = \sqrt{\gamma_{\text{aire}} R_{\text{aire}} T_0} = 346,6 \text{ m s}^{-1}$, se obtiene el gasto

$$G = 0,578 \rho_0 a_0 A_g = 1,17 \text{ kg s}^{-1}.$$

c) En este caso $p_{sc} > p_s > p_{ss}$, por lo que la tobera estará bloqueada, y si además $p_s > p_{s,\text{ch}}$ (siendo $p_{s,\text{ch}}$ la presión a la salida para la que se produce una onda de choque normal justo en la sección de salida), existirá una onda de choque en la parte divergente de la tobera.

Para determinar $p_{s,\text{ch}}$ se entra en la Tabla C.4 con $M_1 = 1,71$ y $p_1 = p_{ss} = 20 \text{ kPa}$, con lo que se obtiene $p_{s,\text{ch}} = p_2 = 3,245 p_1 = 64,9 \text{ kPa}$. Dado que este valor $p_{s,\text{ch}}$ coincide con el de p_s indicado en el enunciado, se deduce que la onda de choque estará situada justo en la sección de salida.

El gasto y las condiciones en la garganta serán iguales a los calculados en el apartado anterior:

$$G = 1,17 \text{ kg s}^{-1}, p_g = 52,8 \text{ kPa}, T_g = 249,9 \text{ K}.$$

Las condiciones en la sección de salida justo antes de la onda de choque serán iguales a las calculadas en el apartado anterior para la sección de salida, esto es,

$$p_{s1} = 20,9 \text{ kPa},$$

$$M_{s1} = 1,71,$$

$$T_{s1} = 189 \text{ K},$$

y las condiciones justo después, se obtienen de la Tabla C.4, resultando

$$p_{s2} = 64,9 \text{ kPa},$$

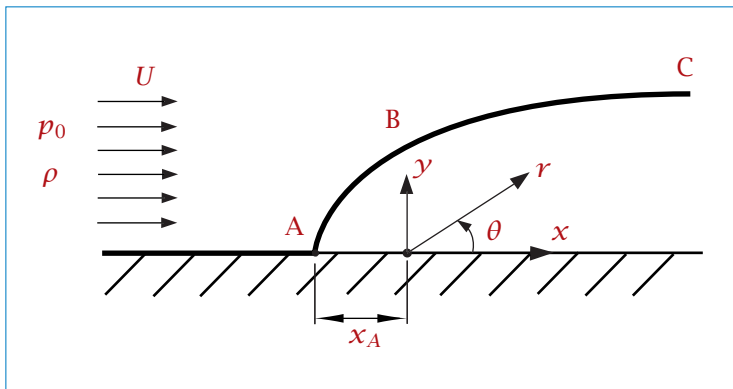
$$M_{s2} = 0,64,$$

$$T_{s2} = 276,9 \text{ K}.$$

Problema 8.30. Acción del viento sobre un edificio

Un viento uniforme con velocidad U incide sobre la pared lateral de un hangar de gran longitud y sección transversal constante. La dirección del viento es horizontal y perpendicular a la dirección longitudinal del hangar. La línea ABC de la figura representa la sección transversal del hangar. El problema se considerará bidimensional, y se supondrá que el flujo alrededor del hangar se puede aproximar mediante un campo de velocidad que deriva de la siguiente función potencial: $\phi = ar \cos \theta + b \ln r$, siendo a y b constantes que deberán ser determinadas. El origen del sistema de referencia está situado a unas distancias x_A e y_B de los puntos A y B de la pared del hangar, correspondientes a $\theta = \pi$ y $\theta = \pi/2$, tal como se indica en la figura. La presión en puntos suficientemente alejados del hangar es p_0 . La densidad del aire es ρ . Se supondrá que las fuerzas másicas son despreciables.

- Determinar los valores de las constantes a y b .
- Indicar si las coordenadas x_A e y_B pueden ser arbitrarias o deben satisfacer alguna relación. En el segundo caso, determinar dicha relación. Nota: $\mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta$.
- Determinar la distribución de presión en la pared del hangar.
- Definir los flujos elementales cuya superposición es equivalente al flujo planteado.



Solución

a) La velocidad del fluido se determina como sigue (véanse las ecuaciones (A.3.24), (A.3.25) y (A.3.33)):

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \left(a \cos \theta + \frac{b}{r} \right) \mathbf{e}_r - a \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (8.30.1)$$

Las constantes a y b se determinan mediante dos condiciones:

- La velocidad incidente $v_r(\infty, \pi) = -U$, de donde se deduce

$$a = U.$$

- El punto A es un punto de remanso, en el que $v_r(x_A, \pi) = 0$, por lo que debe satisfacerse

$$b = ax_A = Ux_A.$$

b) Los puntos A y B deben encontrarse sobre la misma línea de corriente, por lo que puede anticiparse que su situación no puede ser arbitraria. Integrando la ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r,$$

donde ψ es la función de corriente, resulta

$$\psi = ar \sin \theta + b\theta + f(r). \quad (8.30.2)$$

Teniendo en cuenta que $v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, derivando la ecuación (8.30.2) con respecto a r y comparando el resultado con $-v_\theta$ (véase la ecuación (8.30.1)), se deduce

$$\psi = ar \sin \theta + b\theta + \text{constante}.$$

Igualando los valores de ψ en A y B, se obtiene la condición buscada:

$$y_B = x_A \pi / 2.$$

c) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto suficientemente alejado de la pared y un punto P situado sobre esta, resulta

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \frac{p_P}{\rho} + \frac{1}{2} \left[\left(U \cos \theta + \frac{Ux_A}{r} \right)^2 + (U \sin \theta)^2 \right], \quad (8.30.3)$$

de donde se obtiene

$$p_P = p_0 - \frac{1}{2} \rho U^2 \left(\frac{x_A^2}{r^2} + 2 \frac{x_A}{r} \cos \theta \right).$$

d) El flujo es equivalente a la superposición de un flujo uniforme de velocidad

$$\mathbf{v} = U \mathbf{i}$$

y una fuente bidimensional con la distribución de velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{q}{2\pi r} \mathbf{e}_r,$$

de intensidad $q = 2\pi x_A U$.

Problema 8.31. Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (I)

Determinar las áreas que deben tener las secciones de garganta y de salida de una tobera convergente-divergente que debe descargar a la atmósfera ($p_a = 100$ kPa), en condiciones de tobera adaptada, un gasto másico de aire $G = 1,1$ kg s⁻¹ desde un depósito de grandes dimensiones en el que existe una presión $p_0 = 280$ kPa y una temperatura $T_0 = 60^\circ\text{C}$. Describese con detalle el flujo en la tobera diseñada cuando esta se utiliza para descargar un depósito que contiene aire con las mismas condiciones para las que ha sido diseñada, pero con una presión a la salida que no es la atmosférica sino que tiene un valor de 180 kPa.

Solución

De la ecuación (B.4.8), se obtiene

$$A_g = A^* = 1,772 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

A partir de la Tabla C.3, entrando con $p_s/p_0 = p_a/p_0 = 0,357$, se obtiene $A_s/A^* = 1,076$ ($M_s = 1,31$), resultando por tanto

$$A_s = 1,907 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

También a partir de la Tabla C.3, entrando con $p_a/p_0 = 0,357$, se obtiene la máxima presión a la salida de la tobera para la que esta está bloqueada, $p_{sc} = 0,7 p_0 = 196$ kPa. Por tanto, para la presión de 180 kPa indicada en el enunciado

(superior a la correspondiente a tobera adaptada), la tobera estará bloqueada. Se deja al lector que compruebe que la presión de 180 kPa es superior a la necesaria para que la onda de choque quede situada justo en la sección de salida de la tobera, y que, por tanto, existirá una onda de choque en la parte divergente.

Problema 8.32. Onda de choque generada por una explosión en la atmósfera

Una onda de choque generada por una explosión en la atmósfera se propaga radialmente en aire en reposo ($\gamma = 1,4$; $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Al pasar la onda por un determinado punto, se mide un incremento de temperatura en el aire de 450°C . La presión y la temperatura en la atmósfera sin perturbar son $T_0 = 15^\circ\text{C}$ y $p_0 = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$. Determinar el incremento de presión que se produce a través de la onda y la velocidad de propagación de esta. Indicar cómo se determinaría la velocidad de propagación de la onda si la medida de la que se dispone es de la velocidad del aire detrás de la onda.

Solución

$\Delta p = 8,65 \text{ kgf cm}^{-2}$, $v_c = 986,5 \text{ m s}^{-1}$. [Utilícese un sistema de referencia ligado a la onda.]

Problema 8.33. Proceso de vaciado e inmersión del cubo del Problema 2.15

Como continuación del Problema 2.15, supóngase que, partiendo de la posición de equilibrio del apartado b), en un cierto instante se abre un pequeño orificio de 1 mm^2 de área en la cara superior del cuerpo. La temperatura del aire dentro del cubo se tomará igual a 15°C . Determinar el tiempo que tardará el cuerpo en sumergirse totalmente.

Solución

El equilibrio de fuerzas que actúan sobre el cuerpo requiere que la presión del

aire en su interior permanezca constante durante el proceso de vaciado e igual a la presión que se alcanzó en la situación de equilibrio, $p_a'' = 103005 \text{ Pa}$. La capa de aceite en el interior del cuerpo está en equilibrio con el líquido contenido en el depósito, por lo que permanecerá inmóvil con respecto a la superficie libre del líquido en el recipiente mientras se hunde el cuerpo.

Se supondrá que las magnitudes de remanso que existen en el aire en el interior del cuerpo, $p_0 = p_a''$ y $T_0 = 288 \text{ K}$, se conservan en el flujo de aire que sale a través del orificio. Al ser la presión y la temperatura de remanso y la presión en el exterior constantes, también lo será el gasto, que puede expresarse de la forma siguiente:

$$G = \rho_0 a_0 M_s A_s \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \quad (8.33.1)$$

donde $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0} = 340,2 \text{ m s}^{-1}$, $\rho_0 = p_0 / (R T_0) = 1,246 \text{ kg m}^{-3}$ y el subíndice s denota magnitudes en la sección de salida. El número de Mach en la sección de salida puede obtenerse a partir del cociente entre la presión de remanso y la presión en la sección de salida (que es igual a la presión en el exterior, al ser $p_a > 0,528 p_0$),

$$\frac{p_0}{p_a} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Despejando y sustituyendo valores, resulta $M_s = 0,265$. De la ecuación (8.33.1), se obtiene $G = 1,077 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1}$.

Compruébese que el error que se habría cometido en el cálculo del gasto si el flujo se hubiese supuesto incompresible es pequeño.

Aplicando la ecuación de conservación de la masa al volumen de control limitado por las paredes del cubo, la sección de salida del orificio y la superficie libre del aceite en el interior del cubo, resulta

$$\rho_0 L^2 \frac{dh}{dt} + G = 0, \quad (8.33.2)$$

donde h es la altura de la capa de aire en el interior del cubo, que variará desde $h_i = L - (h_2 + h_1)$, correspondiente a la situación de equilibrio de partida, hasta $h_f = (h_{ac} + h_3) - (h_2 + h_1)$, correspondiente al instante en el que la cara superior del cuerpo alcanza la superficie libre del líquido en el depósito. La diferencia $h_i - h_f = L - (h_{ac} + h_3) = 0,415 \text{ m}$ es precisamente la altura de la parte del cuerpo que sobresale fuera del líquido en la situación de equilibrio inicial. Integrando la ecuación (8.33.2) entre los límites h_i y h_f , se obtiene

$$t = 4802 \text{ s.}$$

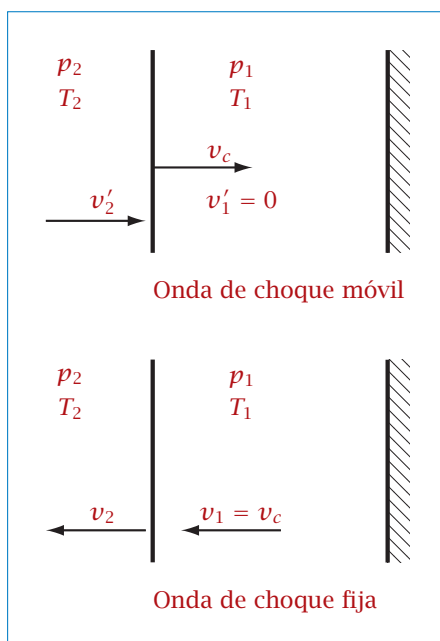
Problema 8.34. Reflexión de una onda de choque normal sobre una pared

Una onda de choque normal se mueve en aire ($\gamma = 1,4$; $R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) a una velocidad de 700 m s^{-1} . Delante de la onda, el aire está en reposo, a una presión de 10^5 Pa y una temperatura de 288 K . En un cierto instante, la onda choca frontalmente contra una pared y es reflejada por esta. Determinar:

- Presión, temperatura y velocidad del aire detrás de la onda incidente.
- Presión detrás de la onda reflejada y velocidad de propagación de la onda reflejada.

Solución

a) En la figura se representa esquemáticamente el problema planteado en los sistemas de referencia ligados a tierra y a la onda de choque.



Se trata de determinar p_2 , T_2 y $v'_2 = v_c - v_2$, siendo v_c la velocidad de propagación de la onda y v_2 la velocidad del aire perturbado por la onda, relativa a esta.

Entrando en la Tabla C.4 con $M_1 = v_1 / (\gamma R T_1)^{1/2} = 700 / [(1,4)(287)(288)]^{1/2} \approx 2,06$, se obtiene

$$T_2 = 1,737 T_1 \approx 500 \text{ K},$$

$$p_2 = 4,784 p_1 = 4,784 \times 10^5 \text{ Pa}$$

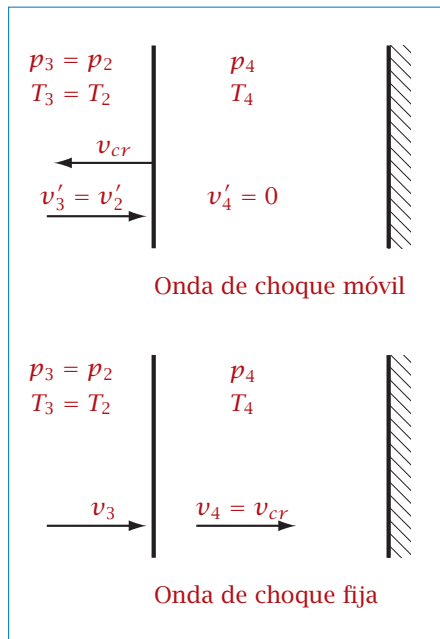
$$\text{y } v_2 = M_2 (\gamma R T_2)^{1/2} = 0,567 [(1,4)(287)(500)]^{1/2} \approx 254 \text{ m s}^{-1}.$$

La velocidad absoluta del aire perturbado por el paso de la onda de choque es

$$v'_2 \approx 700 - 254 = 446 \text{ m s}^{-1}$$

(en el sentido de propagación de la onda).

b) Se ha representado esquemáticamente en la figura adjunta el problema de la onda de choque reflejada en los sistemas de referencia ligados a tierra y a la onda (en el segundo caso, obviamente la pared se mueve con respecto a la onda, aunque la velocidad de la pared no se ha indicado ni en la figura siguiente ni en la anterior).



Téngase en cuenta que la velocidad absoluta del aire detrás de la onda reflejada debe ser nula. Se trata de determinar v_{cr} y p_4 .

Se supondrá inicialmente, por ejemplo, un valor de $v_{cr} = 340 \text{ m s}^{-1}$. En el sistema de referencia ligado a la onda, la velocidad delante de esta sería entonces $v_3 = v'_2 + v_{cr} = 446 + 340 = 786 \text{ m s}^{-1}$, y el número de Mach correspondiente, $M_3 = v_3 / (\gamma R T_3)^{1/2} = 1,75$. Entrando en la Tabla C.4 con este valor de M_3 , se obtiene $M_4 \approx 0,63$,

$$p_4 \approx 3,4 p_3 = 1,6 \times 10^6 \text{ Pa}$$

y $T_4 \approx 1,5 T_3 = 750 \text{ K}$, de donde se deduce

$$v_{cr} = v_4 = M_4 (\gamma R T_4)^{1/2} \approx 346 \text{ m s}^{-1}.$$

Con este valor de v_{cr} pueden repetirse los pasos anteriores, continuándose el procedimiento iterativo hasta conseguirse una solución con precisión suficiente.

Problema 8.35. Mantenimiento de condiciones estacionarias en un depósito que se descarga a través de una tobera y es alimentado mediante un compresor

En un depósito de grandes dimensiones, que contiene aire ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\gamma = 1,4$) y se descarga a través de una tobera convergente-divergente, deben mantenerse constantes en el tiempo una presión $p_0 = 6 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_0 = 340^\circ\text{C}$. Para ello se dispone de un compresor con una potencia máxima $\dot{W} = 200 \text{ kW}$ y un rendimiento $\eta_t = 0,9$, que aspira aire desde el exterior, en donde la presión y la temperatura son $p_e = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ y $T_e = 25^\circ\text{C}$, y de un sistema que permite añadir o extraer calor del aire contenido en el depósito. La tobera tiene secciones en la garganta y de salida con áreas $A_g = 10 \text{ cm}^2$ y $A_s = 15 \text{ cm}^2$. La velocidad del aire en el depósito es despreciable y las propiedades uniformes. Se supondrá que el compresor funciona isentrópicamente. Determinar:

- Presión mínima que puede existir en el recinto en el que descarga la tobera que permita mantener las condiciones estacionarias descritas.

- b) Calor que debe añadirse o extraerse del aire contenido en el depósito cuando la presión a la salida de la tobera es la calculada en el apartado anterior.
- c) Valor máximo del área de la sección de garganta que debería tener una nueva tobera convergente-divergente que sustituyese a la anteriormente descrita (de igual área de sección de salida), si la presión a la salida de la tobera es de 4 kgf cm^{-2} y en el depósito deben mantenerse constantes en el tiempo las mismas condiciones indicadas en el enunciado.

Solución

- a) $p_{\text{mín}} = 528\,225 \text{ N m}^{-2}$.
- b) $\dot{Q} = -104\,616 \text{ W}$ (debe extraerse).
- c) $A_{g,\text{máx}} = 9,361 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Problema 8.36. Flujo en una tobera convergente-divergente. Determinación de condiciones de funcionamiento a partir de la presión en una sección de área dada

Un depósito de grandes dimensiones contiene un gas ($R = 2078,5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\gamma = 5/3$) en reposo a una presión $p_0 = 2 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_0 = 100 \text{ K}$. El gas es descargado al ambiente exterior a través de una tobera convergente-divergente con un área de la sección de garganta $A_g = 1 \text{ cm}^2$ y un área de la sección de salida $A_s = 2 \text{ cm}^2$. La presión en el ambiente exterior es p_a .

- a) Determinar la máxima presión a la salida para la que se alcanzaría bloqueo sónico y la presión a la salida correspondiente a tobera adaptada.

Supóngase a continuación que en una sección de área $A_b = 1,5 \text{ cm}^2$, la presión es $p_b = 1,7 \text{ kgf cm}^{-2}$.

- b) Calcular el gasto másico de gas a través de la tobera y la presión

ambiente p_a .

Nota: Se supondrá que no se dispone de tablas y sí de las ecuaciones (B.4.6) y (B.4.4).

Solución

a) A partir de la primera ecuación proporcionada en la nota del enunciado, se deduce la ecuación (B.4.9):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) / \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (8.36.1)$$

En condiciones de bloqueo, en la ecuación anterior puede sustituirse

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{A_s}{A_g}.$$

Sustituyendo los datos de las áreas proporcionados en el enunciado, de la ecuación (8.36.1) se obtienen las dos soluciones siguientes: $M_s = 0,298$ y $M_s = 2,40$, que corresponden a los dos valores característicos de la presión a la salida de la tobera que se pedía calcular:²⁰

$$p_{sc} = 1,859 \text{ kgf cm}^{-2}$$

y

$$p_{ss} = 0,137 \text{ kgf cm}^{-2},$$

respectivamente, obtenidos a partir de la segunda ecuación proporcionada en el enunciado,

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (8.36.2)$$

b) En primer lugar se va a comprobar que la sección de área A_b que se indica en el enunciado no puede estar situada en la parte convergente de la tobera. De la ecuación (8.36.2) se obtiene $M_b = 0,449$, y sustituyendo este valor en la ecuación (8.36.1) se obtiene $A^* = 1,05 \text{ mm}^2$. Dado que este valor del área crítica es superior al área de la sección de garganta, no es posible que en la sección de área $A_b = 1,5 \text{ mm}^2$ de la parte convergente de la tobera exista la presión p_b indicada en el enunciado.

²⁰ Véase la nota a pie de página 19 del Problema 8.29, pág.342.

La sección indicada en el enunciado debe encontrarse, por tanto, en la parte divergente de la tobera. No es necesario demostrar que existe bloqueo sónico, ya que ello se deduce del cálculo del área crítica realizado en el párrafo anterior. Es inmediato observar que debe existir una onda de choque aguas arriba de la sección de área A_b , ya que la presión p_b es superior a la que correspondería a un flujo isentrópico ($0,252 \text{ kgf cm}^{-2}$). Denotaremos en lo que sigue las condiciones aguas arriba y aguas abajo de la onda de choque con los subíndices 1 y 2. A partir de las siguientes ecuaciones (téngase en cuenta que $T_{02} = T_0$):

$$\begin{aligned}\rho_{02} &= p_{02}/(RT_0), \\ p_{02} &= p_b \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_b^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \\ A_b &= \frac{G}{\rho_{02} a_0 M_b} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_b^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \\ A_1^* &= A_g = \frac{G}{\rho_{01} a_0} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}},\end{aligned}$$

se obtiene $M_b = 0,428$, $p_{02} = 1,972 \text{ kgf cm}^{-2}$, $\rho_{02} = 0,931 \text{ kg m}^{-3}$ y

$$G = 0,0313 \text{ kg s}^{-1}.$$

Finalmente, de la ecuaciones

$$\begin{aligned}A_s &= \frac{G}{\rho_{02} a_0 M_s} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \\ p_{02}/p_s &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},\end{aligned}$$

se obtiene $M_s = 0,303$ y

$$p_a = p_s = 1,829 \text{ kgf cm}^{-2}.$$

Problema 8.37. Proceso de llenado con aire de un depósito a través de una tobera convergente-divergente

Un depósito de grandes dimensiones, inicialmente vacío, se llena con aire procedente del exterior, donde existe una presión $p_{\text{ext}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$ y una temperatura $T_{\text{ext}} = 298 \text{ K}$, a través de una tobera convergente-divergente con

áreas de las secciones de salida (sección que está dentro del depósito) y de garganta $A_s = 2 \text{ mm}^2$ y $A_g = 1,5 \text{ mm}^2$, respectivamente. Se supondrá que la temperatura en el depósito se mantiene constante e igual a la temperatura del aire exterior. El volumen del depósito es $V = 1 \text{ m}^3$. Determinar:

- a) Tiempo que debe transcurrir para que se alcance en el depósito una presión $p_d = 0,3 \text{ kgf cm}^{-2}$.
- b) Presión y temperatura en la sección de salida de la tobera (sección de descarga en el depósito) en los siguientes casos:
 - b.1) $p_d = 0,5 \text{ kgf cm}^{-2}$;
 - b.2) $p_d = 0,7 \text{ kgf cm}^{-2}$.

Describanse las características del flujo en cada caso.

Solución

- a) Entrando en la Tabla C.3 con $A_s/A_g = A_s/A^* = 1,33$, se obtiene²¹

$$p_{sc} = 0,841 p_0 = 0,841 \text{ kgf cm}^{-2} \quad (M_{sc} = 0,51),$$

$$p_{ss} = 0,205 p_0 = 0,205 \text{ kgf cm}^{-2} \quad (M_{ss} = 1,69).$$

Al ser $p_d < p_{sc}$, la tobera está bloqueada tanto en el instante considerado como en instantes anteriores, con lo que el gasto de aire es constante e igual a

$$G = 0,579 \rho_0 a_0 A_g = 3,44 \times 10^{-4} \text{ kg s}^{-1},$$

siendo $a_0 = \sqrt{\gamma R T_0} = 346,0 \text{ m s}^{-1}$ y $\rho_0 = p_0/(R T_0) = 1,147 \text{ kg m}^{-3}$. La masa en el depósito en el instante considerado es $M = p_d V/(R T_d) = 0,34 \text{ kg}$. El tiempo transcurrido es

$$t = M/G = 1010 \text{ s}.$$

Justifíquense las hipótesis utilizadas.

- b) En ambos casos aparece una onda de choque, ya que $p_{ss} < p_d < p_{sc}$. La presión de salida máxima para la que la onda de choque está situada en la sección de salida, $p_d^* = 0,65 \text{ kgf cm}^{-2}$ (para este valor la onda de choque es normal), se obtiene de la Tabla C.4 entrando con $M_1 = M_{ss}$ y tomando $p_1 = p_{ss}$.

²¹ Véase la nota a pie de página 19 del Problema 8.29, pág. 348.

b.1) Onda de choque oblicua a la salida de la tobera, con

$$p_s = p_{ss} = 0,205 \text{ kgf cm}^{-2};$$

de la Tabla C.3, resulta

$$T_s = 0,636T_0 = 189,5 \text{ K.}$$

b.2) Onda de choque normal en la parte divergente de la tobera, con

$$p_s = p_d = 0,7 \text{ kgf cm}^{-2}.$$

Mediante un proceso iterativo, que puede comenzarse asignando un valor de tanteo al área de la sección donde se encuentra la onda de choque, A_{ch} , y utilizando las Tablas C.3 y C.4, resulta $A_{ch} \approx 1,9 \text{ mm}^2$ y

$$T_s \approx 278 \text{ K.}$$

Problema 8.38. Diseño básico de una tobera convergente-divergente. Funcionamiento fuera de diseño (II)

- a) Diseñar una tobera convergente-divergente que debe descargar a la atmósfera ($p_a = 100 \text{ kPa}$) un gasto másico de aire de 1 kg s^{-1} desde un depósito de grandes dimensiones en el que existe una presión de 300 kPa y una temperatura de 57°C .
- b) Describir con detalle el flujo en la tobera diseñada cuando se utiliza para descargar un depósito que contiene aire con las mismas condiciones para las que ha sido diseñada, pero con una presión a la salida que no es la atmosférica sino que tiene un valor de 199 kPa .

Solución

a) $A_g = 15,0 \text{ cm}^2$; $A_s = 16,35 \text{ cm}^2$.

b) Describese el flujo (obsérvese que se formará una onda de choque en la sección de salida).

Problema 8.39. Impacto de dos chorros de agua coaxiales

Dos chorros de agua con forma cilíndrica de sección circular de radio R , coaxiales y con velocidades del mismo módulo, U , y sentidos opuestos, impactan entre sí generando un chorro radial (perpendicular al eje de los chorros) axisimétrico, con forma de película de espesor h , variable con la distancia r al eje de simetría. Suponiendo despreciables los efectos viscosos y las fuerzas másicas, determinar la variación del espesor h en función de r .

Solución

Aplicando la ecuación (B.1.3) de conservación de la masa a un volumen de control limitado por la superficie exterior del chorro (a través de la que no hay flujo de líquido), las secciones transversales de los dos chorros, que son círculos de radio R , y una sección transversal del chorro radial situada a una distancia $r > R$ desde el eje de los chorros incidentes, que tiene forma de superficie lateral de un cilindro de altura h y radio r , se obtiene

$$2(\pi R^2 v_1) = 2\pi r h v_2.$$

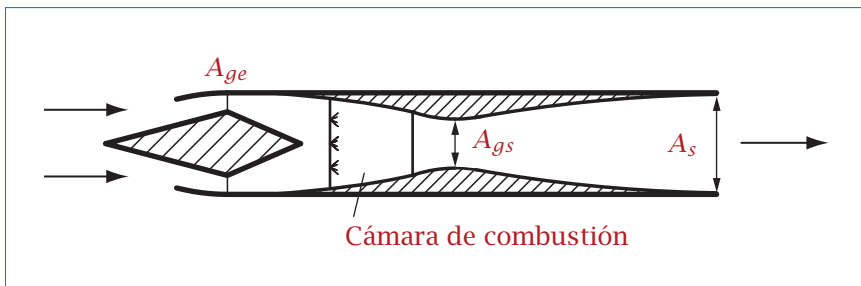
Al ser despreciables los efectos viscosos y las fuerzas másicas, y suponiendo que la presión en las secciones 1 y 2 es uniforme e igual a la presión en el exterior de los chorros, de la ecuación (B.4.2) de Bernoulli es inmediato deducir que $v_1 = v_2 = U$, por lo que de la ecuación anterior resulta finalmente

$$h = R^2/r.$$

Problema 8.40. Flujo en un estatorreactor

En la figura se muestra el esquema del estatorreactor de un avión supersónico que vuela a una altitud de 20 000 m sobre el nivel del mar y a una velocidad constante de 600 m s^{-1} . La temperatura atmosférica es de 15°C a nivel del mar ($z = 0$), y disminuye linealmente con la altura, en $6,5^\circ\text{C km}^{-1}$, hasta la cota $z = 11 \text{ km}$; a partir de esta, y hasta $z = 22 \text{ km}$, se supone que la temperatura se mantiene constante. La presión a nivel del mar es de 1,013 bar. En

este tipo de motores no existen partes móviles; la alta velocidad relativa del aire hace que la compresión dinámica sea lo suficientemente importante como para que no sea necesario un compresor mecánico. El flujo en la sección de entrada es supersónico y se decelera a lo largo del conducto de entrada, llegando a alcanzar condiciones subsónicas. Se supondrá que el flujo se decelera isentrópicamente hasta alcanzar $M = 1$ en una sección cuya área es $A_{ge} = 0,2 \text{ m}^2$. El combustible se inyecta a través de una serie de inyectores situados en la sección de entrada de la cámara de combustión, se evapora de forma instantánea y se mezcla con el aire antes de quemarse. El calor de combustión del combustible utilizado es de 46 MJ kg^{-1} . La proporción entre el gasto de combustible inyectado y el gasto de aire que entra en el motor es del 3%. La mezcla de gases producto de la combustión se considerará como un gas perfecto con un peso molecular y una relación de calores específicos iguales a los del aire ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\gamma = 1,4$). Los productos de la combustión se descargan a través de una tobera convergente-divergente, en la que el flujo se acelera hasta alcanzar de nuevo el régimen supersónico. El flujo es isentrópico en toda la parte divergente, y la presión en la sección de salida es igual a la presión a la salida de la tobera. El área de la sección de salida es $A_s = 0,5 \text{ m}^2$.



Se considerarán despreciables el efecto del rozamiento con las paredes, el calor comunicado al exterior a través de las paredes del motor, las fuerzas másicas, y la cantidad de movimiento, la energía cinética y la entalpía del combustible inyectado.

Determinar:

- Presión y densidad del aire a la altura de vuelo del avión. (Si no se ha resuelto este apartado, utilícese en los siguientes apartados la solución $p = 5400 \text{ Pa}$ y $\rho = 0,09 \text{ kg m}^{-3}$.)

CAPÍTULO 8. FLUJOS DE FLUIDOS IDEALES

- b) Presión y temperatura de remanso de la corriente de aire incidente sobre el avión y gasto de aire que entra en el estatorreactor.
- c) Temperatura y velocidad relativa al avión de los gases que salen del estatorreactor.
- d) Fuerza de empuje generada sobre el estatorreactor.
- e) Área de la sección de la garganta, A_{gs} .

Solución

- a) $p(20 \text{ km}) = 5455 \text{ Pa}$; $\rho(20 \text{ km}) = 0,0878 \text{ kg m}^{-3}$.
- b) $p_{01} = 45,00 \text{ kPa}$; $T_{01} = 395,6 \text{ K}$; $G = 18,29 \text{ kg s}^{-1}$.
- c) $T_s = 715,6 \text{ K}$; $v_s = 1419 \text{ m s}^{-1}$.
- d) $F = 15,76 \text{ kN}$.
- e) $A_{gs} = 0,165 \text{ m}^2$.

Capítulo 9

Flujos turbulentos

Problema 9.1. Pérdida de carga en una tubería con fugas distribuidas

El caudal de alimentación de una tubería de conducción de agua, de diámetro $D = 10$ cm y longitud $L = 5$ km, es $Q_1 = 10 \text{ l s}^{-1}$. Debido a las numerosas fugas y tomas de agua que existen a lo largo de la tubería, puede estimarse que su caudal disminuye uniformemente en 6 l/hora por metro de longitud de tubería. Calcular la pérdida de carga a lo largo de la tubería. Supóngase un factor de fricción constante $f = 0,02$.

Solución

En un tramo elemental de tubería de longitud dl se producirá una pérdida de altura (ecuación (B.5.2), prescindiendo de las pérdidas locales)

$$dH_\varphi = f \frac{v^2}{2g} \frac{1}{D} dl. \quad (9.1.1)$$

De acuerdo con los datos del enunciado, la variación del caudal a lo largo de la tubería está dada por

$$Q = Q_1 - q_f l,$$

siendo

$$q_f = \frac{6 \times 10^{-3}}{3,6 \times 10^3} = 1,667 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

La velocidad del agua será

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4}{\pi D^2} (Q_1 - q_f l).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (9.1.1) e integrando, resulta

$$H_\varphi = \frac{8f}{g\pi^2 D^5} \int_0^L (Q_1 - q_f l)^2 dl.$$

Resolviendo la integral y sustituyendo valores,

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{8f}{g\pi^2 D^5} \left(Q_1^2 L + q_f^2 \frac{L^3}{3} - 2 Q_1 q_f \frac{L^2}{2} \right) \\ &= \frac{(8)(0,02)}{(9,81)\pi^2(0,1)^5} \left[(0,01)^2 (5 \times 10^3) + (1,667 \times 10^{-6})^2 \frac{(5 \times 10^3)^3}{3} \right. \\ &\quad \left. - (0,01)(1,667 \times 10^{-6})(5 \times 10^3)^2 \right], \end{aligned}$$

se obtiene

$$H_\varphi = 32,90 \text{ m.}$$

Problema 9.2. Determinación del caudal a través de una fuga puntual en una tubería

A través de una tubería de acero (rugosidad absoluta $\varepsilon = 0,046 \text{ mm}$) de 50 cm de diámetro y 100 km de longitud se transporta agua ($\mu = 0,01 \text{ poise}$). A lo largo de la tubería existen manómetros situados cada 2 km. En un momento dado se detecta una fuga. Las caídas de presión medidas entre dos manómetros consecutivos en las proximidades de los extremos de la tubería son de 3000 Pa y 2500 Pa. Determinar el caudal de fuga.

Solución

Obviamente, las caídas de presión de 3000 Pa y 2500 Pa corresponden, respectivamente, a los extremos de entrada y salida de la tubería (debido a la fuga, el caudal a la salida es menor, por lo que también será menor la pérdida de carga). Por otra parte, del enunciado se desprende que la fuga no tiene lugar en las

proximidades de la entrada ni de la salida, al mantenerse constantes en dichas zonas las caídas de presión entre dos manómetros consecutivos. La caída de presión de 3000 Pa corresponde, por tanto, al tramo inicial de tubería, por el que circula un caudal Q_1 , y la de 2500 Pa al tramo final, por el que circula un caudal $Q_2 = Q_1 - \Delta Q$, siendo ΔQ el caudal de fuga. Se trata de determinar Q_1 y Q_2 , a partir de las respectivas caídas de presión, para obtener ΔQ .

En las proximidades de la entrada, sustituyendo valores en la ecuación (B.5.3) (prescindiendo de las pérdidas locales):

$$\frac{\Delta p_1}{\rho g} = f_1 \frac{L}{D} \frac{v_1^2}{2g}, \quad (9.2.1)$$

y suponiendo un valor de $f_1 = 0,012$ (obtenido aproximadamente del diagrama de Moody, para valores elevados de Re y $\varepsilon/D = 9,2 \times 10^{-5}$), resulta

$$\frac{3000}{(9,81)(1000)} = 0,012 \frac{2000}{0,5} \frac{v_1^2}{(2)(9,81)},$$

de donde se obtiene $v_1 = 0,35 \text{ m s}^{-1}$. El número de Reynolds correspondiente a esta velocidad es $Re_1 = (0,35)(0,5)(1000)/10^{-3} = 1,75 \times 10^5$. Para este valor de Re y $\varepsilon/D = 9,2 \times 10^{-5}$, del diagrama de Moody se obtiene $f_1 \approx 0,0165$. Para este nuevo valor de f_1 , de la ecuación (9.2.1) se obtiene ahora un valor de $v_1 = 0,3 \text{ m s}^{-1}$, al que corresponde un número de Reynolds $(Re)_1 = 1,5 \times 10^5$. Para este valor de Re , del diagrama de Moody se obtiene $f_1 \approx 0,017$. De la ecuación (9.2.1), sustituyendo este valor de f_1 , resulta finalmente $v_1 = 0,2957 \text{ m s}^{-1}$, que consideraremos suficientemente aproximado (el número de Reynolds correspondiente es de $1,48 \times 10^5$). Con esta velocidad media se obtiene un caudal $Q_1 = v_1 \pi D^2 / 4 = 5,806 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Para obtener el caudal Q_2 se seguirá el mismo procedimiento iterativo empleado para determinar Q_1 . Puede comenzarse suponiendo para f_2 el valor correspondiente a Re elevados y la rugosidad relativa de la tubería, o uno ligeramente superior al obtenido para f_1 (ya que el número de Reynolds será ahora inferior). Compruébese que el valor de $f_2 = 1,746 \times 10^{-2}$ proporciona un valor suficientemente aproximado de $v_2 = 0,2676 \text{ m s}^{-1}$, al que le corresponde un caudal $Q_2 = 5,254 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

El caudal de fuga buscado es

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = 5,524 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Problema 9.3. Determinación del número de estaciones de bombeo en una instalación

Se trata de transportar un caudal $Q = 63 \text{ l s}^{-1}$ de un líquido de densidad $\rho = 930 \text{ kg m}^{-3}$ desde un depósito hasta otro más elevado. Para ello se utiliza una tubería de diámetro interior $D = 20 \text{ cm}$ y longitud $L = 10 \text{ km}$, que descarga en el fondo del depósito superior. En la superficie libre del líquido en el depósito superior, situada a 5 m sobre el fondo, existe una presión de 3 kgf cm^{-2} . La máxima presión admisible en la tubería es de 10 kgf cm^{-2} , y la mínima presión que se requiere (para mantener determinadas condiciones en el líquido a lo largo de toda la tubería) es de 3 kgf cm^{-2} . La presión del líquido a la entrada de la tubería es de 3 kgf cm^{-2} . La tubería salva el desnivel de 200 m que existe entre sus puntos de conexión con los depósitos con una pendiente constante. Supóngase un factor de fricción $f = 0,02$. Se despreciarán las pérdidas locales.

Se trata de reducir al mínimo posible el número de estaciones de bombeo a lo largo del conducto, y de que todas ellas funcionen con la misma potencia. Determinar:

- a) Altura manométrica que deben proporcionar el conjunto de las estaciones de bombeo.
- b) Número de estaciones de bombeo necesarias.
- c) Posible localización de las estaciones a lo largo de la conducción.

Solución

a) $H_m = 409,97 \text{ m}$.

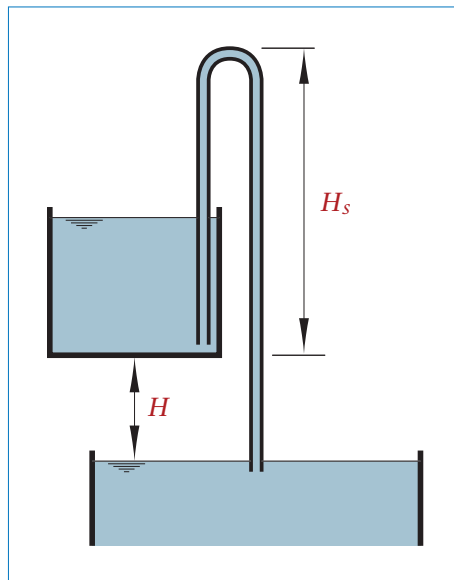
b) Se necesitan seis estaciones de bombeo. Cada una deberá proporcionar una altura de 68,33 m.

c) La primera estación debe situarse a la entrada de la tubería (justifíquese). Existen diversas posibilidades para situar las cinco restantes. Una posibilidad es situarlas equidistantes entre sí y de la primera, con una separación de 1666,7 m. Otra consiste en situar las 5 estaciones siguientes a 1687,2 m (máxima distancia posible) de la precedente. Otra posibilidad consiste en situar la segunda estación a 1563,8 m (mínima distancia posible) de la primera, y cada una de las siguientes a

1687,2 m de la precedente. Cabe obviamente cualquier otra posibilidad, siempre que se mantengan las distancias mínima y máxima indicadas.

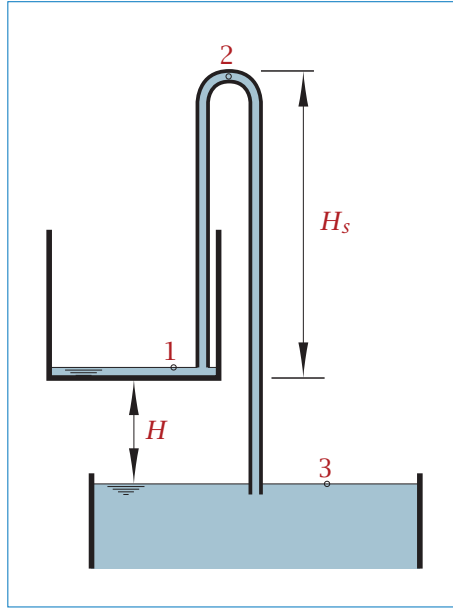
Problema 9.4. Trasvase de agua mediante un sifón

En la instalación de la figura se utiliza un sifón de sección circular de diámetro uniforme $D = 1$ cm para trasvasar agua entre dos depósitos abiertos a la atmósfera. El fondo del depósito superior (donde se encuentra la sección de entrada del sifón) está a una altura constante $H = 8$ m respecto de la superficie libre del agua en el depósito inferior. Supóngase un factor de fricción constante $f = 0,02$, y un coeficiente de pérdida de carga local a la entrada del sifón $K = 1$. Determinar el valor máximo de la altura H_s indicada en la figura que permitirá el vaciado completo del depósito. Se despreciará la longitud de la zona acodada del sifón. La presión de vapor del agua es $p_v = 0,02$ kgf cm⁻² y la presión atmosférica $p_{at} = 1$ kgf cm⁻². Se supondrá que el problema puede considerarse cuasiestacionario.



Solución

La situación más desfavorable durante el proceso de vaciado es la representada en la figura siguiente (el depósito superior está prácticamente vacío). El máximo valor posible de H_s será aquel para el que, en dicha situación, se alcanza la presión de vapor del agua en el punto 2 de la figura.



Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre los puntos 2 y 3 de la figura en las condiciones límite mencionadas, resulta

$$\frac{p_v}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_s + H = \frac{p_{at}}{\rho g} + f \frac{H_s + H}{D} \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g},$$

y sustituyendo valores,

$$0,2 + \frac{v^2}{2g} + H_s + 8 = 10 + 0,02 \frac{H_s + 8}{0,01} \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g},$$

de donde se obtiene

$$\frac{v^2}{g} = \frac{H_s - 1,8}{H_s + 8}. \quad (9.4.1)$$

Aplicando la ecuación (B.1.16) entre los puntos 1 y 2 de la figura en las mismas condiciones límite, resulta

$$\frac{p_{at}}{\rho g} + H = \frac{p_v}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + H_s + H + f \frac{H_s}{D} \frac{v^2}{2g} + K \frac{v^2}{2g},$$

y sustituyendo valores, se obtiene

$$9,8 = (H_s + 1)v^2/g + H_s. \quad (9.4.2)$$

De las ecuaciones (9.4.1) y (9.4.2), se obtiene

$$H_s = 7,016 \text{ m.}$$

Justifíquese que la situación más desfavorable es la que se ha considerado (la correspondiente al final del proceso de vaciado del depósito superior).

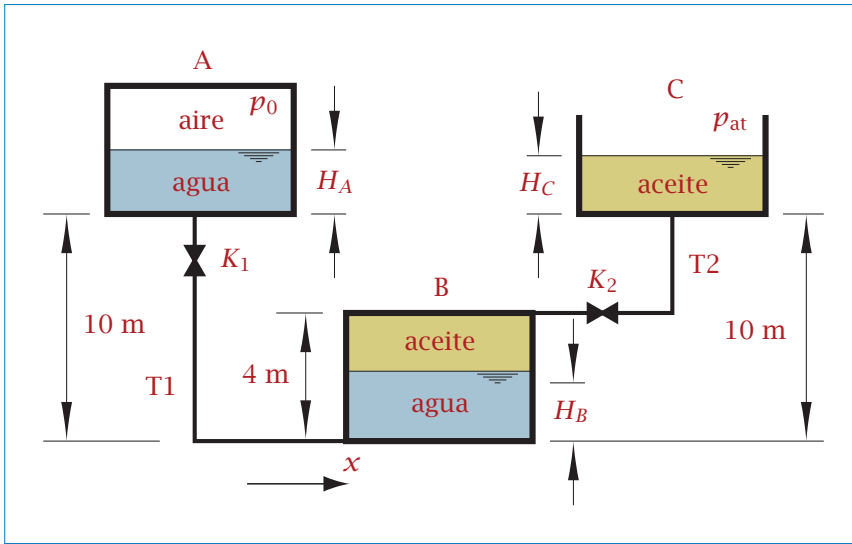
Problema 9.5. Instalación de conducción de agua y aceite entre depósitos

En la instalación de la figura, el depósito cerrado A contiene agua hasta una altura $H_A = 2 \text{ m}$ y aire; la presión absoluta del aire es $p_0 = 1,2 \text{ kgf cm}^{-2}$. El agua se trasvasa desde el depósito A al B mediante la tubería T1, de longitud $L_1 = 20 \text{ m}$, conectada según se indica en la figura. El depósito B, de 4 m de altura, contiene agua en la parte inferior, hasta una altura $H_B = 2 \text{ m}$, y aceite de densidad $\rho_c = 800 \text{ kg m}^{-3}$ en la parte superior (el depósito no contiene aire). El aceite del depósito B se trasvasa hasta el depósito C (abierto a la atmósfera) mediante la tubería T2, de longitud $L_2 = 15 \text{ m}$, indicada en la figura. La altura del agua en el depósito C es $H_C = 2 \text{ m}$. Todas las tuberías son de diámetro $D = 10 \text{ cm}$ y rugosidad $\varepsilon = 0,04 \text{ mm}$.

Los coeficientes de pérdida de carga en las válvulas, cuando se encuentran totalmente abiertas, son $K_1 = 3$ y $K_2 = 2$. Se despreciarán las pérdidas locales en codos y en las salidas de las tuberías T1 y T2 desde los depósitos A y B, respectivamente. Los tres depósitos son de grandes dimensiones, y el problema puede considerarse cuasiestacionario. La presión atmosférica es $p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$. Las viscosidades del agua y del aceite son, respectivamente, $\mu_a = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ y $\mu_c = 10^{-2} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Se supondrá que las válvulas están completamente abiertas.

Calcular:

- Caudal que circula a través de las tuberías.
- Componente horizontal de la fuerza que ejerce el agua sobre el depósito B. (El depósito B es de sección horizontal rectangular y las tuberías T1 y T2 están conectadas en caras opuestas del depósito.)



Solución

a) Se denotarán con \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} los puntos situados, respectivamente, sobre las superficies de separación aire-agua en el depósito A, aceite-agua en el depósito B y aire-aceite en el depósito C. Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre los puntos \mathcal{A} y \mathcal{B} (teniendo en cuenta que, obviamente, $\Delta H = 0$), se obtiene

$$\left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_{\mathcal{A}} = \left[\frac{p}{\rho_a g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_{\mathcal{B}} + H_{\varphi, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}}. \quad (9.5.1)$$

En esta expresión, $v_{\mathcal{A}} = v_{\mathcal{B}} = 0$, $p_{\mathcal{A}} = 1,2 - 1 = 0,2 \text{ kgf cm}^{-2}$, $z_{\mathcal{A}} - z_{\mathcal{B}} = 10 \text{ m}$, y

$$H_{\varphi, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}} = \left(f_1 \frac{L_1}{D} + K_1 \right) \frac{v_1^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g}. \quad (9.5.2)$$

El último sumando de la ecuación (9.5.2) corresponde a la energía cinética del chorro que entra en el depósito B desde la tubería T1, que se pierde al disiparse en forma de energía interna en el interior del depósito.

De forma análoga puede aplicarse la ecuación de conservación de la energía mecánica entre los puntos \mathcal{B} y \mathcal{C} ,

$$\left[\frac{p}{\rho_c g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_B = \left[\frac{p}{\rho_c g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_C + H_{\varphi, B \rightarrow C}, \quad (9.5.3)$$

En esta expresión, $v_B = v_C = 0$, $p_C = 0$, $z_B - z_C = -10$ m, y

$$H_{\varphi, B \rightarrow C} = \left(f_2 \frac{L_2}{D} + K_2 \right) \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (9.5.4)$$

El último sumando de la ecuación (9.5.4) corresponde a la energía cinética del chorro que entra en el depósito C desde la tubería T2.

Mediante la aplicación de la ecuación de conservación del volumen de líquido al depósito B,

$$\frac{dV_B}{dt} + \int_{S_B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = -v_1 \frac{\pi D^2}{4} + v_2 \frac{\pi D^2}{4} = 0$$

(ya que $dV_B/dt = 0$), se deduce que $v_1 = v_2 = v$.

Tomando, por ejemplo, $f = 0,016$ (valor correspondiente a $\varepsilon/D = 4 \times 10^{-4}$ para altos números de Reynolds) en las dos tuberías, las ecuaciones (9.5.1) y (9.5.3) quedan de la forma

$$12 = \frac{p_B}{\rho_a g} + 7,2 \frac{v^2}{2g},$$

$$\frac{p_B}{\rho_c g} = 10 + 5,4 \frac{v^2}{2g},$$

de donde se obtiene $v = 2,61 \text{ m s}^{-1}$. Para este valor de v , los números de Reynolds y los factores de fricción (obtenidos a partir del diagrama de Moody) que resultan en cada una de las tuberías son los siguientes:

$$(\text{Re})_{T1} = \frac{(1000)(2,61)(0,1)}{10^{-3}} = 261\,000 \Rightarrow f_1 = 0,018,$$

$$(\text{Re})_{T2} = \frac{(800)(2,61)(0,1)}{10^{-2}} = 20\,880 \Rightarrow f_2 = 0,027.$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones (9.5.1) y (9.5.3), se obtiene

$$v = 2,439 \text{ m s}^{-1},$$

$$Q = 1,916 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Podrían repetirse los pasos anteriores de forma iterativa para obtener mayor precisión en el resultado.

b) Se aplicará la proyección en dirección horizontal de la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al volumen de control limitado por la superficie de separación agua-aceite, la superficie del depósito B en contacto con el agua y la sección de entrada desde la tubería T1. El término [1] es nulo, al ser el flujo estacionario, y el término [4] no tendrá componente horizontal al actuar el peso en dirección vertical. La velocidad del agua será nula en toda la superficie del volumen de control excepto en la sección de entrada del chorro procedente de la tubería T1, por lo que, para la proyección del término [2] (sentido positivo hacia la derecha), se obtiene

$$\int_S \rho_a v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho_a v (-v) \frac{\pi D^2}{4} = -\rho_a \frac{\pi D^2}{4} v^2 \quad (9.5.5)$$

(el valor de v se ha obtenido en el apartado anterior).

El término [3] puede descomponerse en tres sumandos:

$$\begin{aligned} \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS &= -\mathbf{F} + \int_{S_{\text{ent}}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{sep}}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\mathbf{F} - \int_{S_{\text{ent}}} p \mathbf{n} dS - \int_{S_{\text{sep}}} p \mathbf{n} dS, \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

siendo \mathbf{F} la fuerza que ejerce el agua sobre el depósito (igual y de signo opuesto a la que ejerce el depósito sobre el agua). La integral del último sumando, extendida a la superficie de separación agua-aceite, no tiene componente en dirección horizontal; en S_{sep} las fuerzas de superficie son debidas a la presión ($\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$), que actúa perpendicularmente a la superficie y, por tanto, en dirección vertical. La integral del segundo sumando está extendida a la sección de entrada desde la tubería T1; se han supuesto despreciables los efectos de viscosidad en dicha sección ($\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n}$).

Igualando (9.5.5) y la proyección horizontal de (9.5.6), se obtiene

$$-\rho_a v^2 \pi D^2 / 4 = -F_x + p_{\text{ent}} \pi D^2 / 4,$$

siendo F_x la componente horizontal de la fuerza que el agua ejerce sobre el depósito y p_{ent} la presión manométrica en la sección de entrada:

$$p_{\text{ent}} = p_{\mathcal{A}} + \rho_a g z_{\mathcal{A}} - \left(f_1 \frac{L_1}{D} + K_1 \right) \rho_a \frac{v^2}{2} - \rho_a \frac{v^2}{2} = 1,148 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}.$$

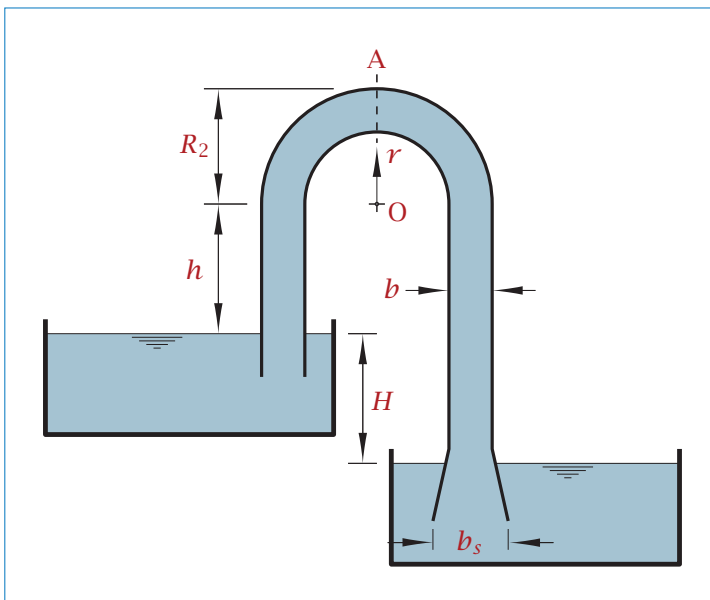
De las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$F_x = 948,4 \text{ N}$$

(al ser positiva, de acuerdo con el criterio adoptado, la fuerza es hacia la derecha). De forma análoga podría calcularse la fuerza que ejerce el aceite sobre el depósito.

Problema 9.6. Flujo en la zona acodada de un sifón con difusor a la salida

A través del sifón representado en la figura se trasvasa agua entre dos depósitos de grandes dimensiones que están abiertos a la atmósfera. La diferencia entre las cotas de las superficies libres del agua en los depósitos es $H = 1$ m. La sección transversal del conducto es de forma cuadrada, con lado $b = 0,1$ m constante en toda su longitud excepto en la zona de descarga. La sección de salida tiene forma de cuadrado de lado $1,6b$. La zona acodada del conducto tiene forma semicircular con centro en O y radio exterior $R_2 = 0,6$ m. El punto O se encuentra a una altura $h = 0,5$ m por encima de la superficie libre del agua en el depósito superior.



- a) Suponiendo que la pérdida de carga en el interior del conducto es $2v_b^2/(2g)$, siendo v_b la velocidad media del agua en la zona de conducto con sección de lado b , determinar el caudal trasvasado.

- b) Suponiendo que las líneas de corriente en la zona acodada son arcos de circunferencia con centro en O y radio r que varía desde $R_1 = R_2 - b$ hasta R_2 , que el flujo es ideal hasta la sección A y que el caudal trasvasado es el calculado en el apartado anterior, determinar las distribuciones de presión y velocidad en la sección A.

Solución

a) Al ser los depósitos de grandes dimensiones, se supondrá que el flujo es cuasiestacionario (en todo caso, no se dispone de datos para resolver el problema sin esta hipótesis). Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre las superficies libres del agua en los depósitos (subíndices 1 y 2 para los depósitos superior e inferior, respectivamente),

$$\left[\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_1 = \left[\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \right]_2 + H_{\varphi 1-2},$$

donde $v_1 = v_2 = 0$, $p_1 = p_2 = p_{at}$, $z_1 - z_2 = H$ y

$$H_{\varphi 1-2} = 2 \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_s^2}{2g}, \quad (9.6.1)$$

siendo v_s la velocidad del agua en la sección de descarga del conducto en el depósito inferior, que se supondrá uniforme, resulta

$$H = 2 \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_s^2}{2g}. \quad (9.6.2)$$

El último sumando de la ecuación (9.6.1) corresponde a la energía cinética del chorro que entra en el depósito inferior, que se pierde al disiparse en forma de energía interna en el interior del depósito.

Aplicando la ecuación de continuidad entre cualquier sección del conducto de tamaño b y la sección de descarga, se obtiene

$$v_s = v_b \left(\frac{b}{1,6b} \right)^2 = 0,3906 v_b. \quad (9.6.3)$$

De las ecuaciones (9.6.2) y (9.6.3), resulta

$$v_b = 3,019 \text{ m s}^{-1}.$$

Finalmente, el caudal que circula a través del sifón es

$$Q = v_b b^2 = 3,019 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

b) En el sistema de coordenadas cilíndricas indicado en la nomenclatura, pero sustituyendo la coordenada z por x , con origen en O y el eje x en dirección perpendicular al papel, siendo r y θ las coordenadas radial y acimutal, la ecuación (B.2.14) de conservación de la componente radial de la cantidad de movimiento en la zona acodada del sifón queda de la forma siguiente (se supone flujo estacionario e ideal):

$$v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (p + \rho g r \cos \theta).$$

Dado que, según se indica en el enunciado, $v_x = v_r = 0$, se obtiene finalmente

$$\frac{v_A^2}{g r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_A}{\rho g} + r \right).$$

Por otra parte, aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre en el depósito superior y un punto genérico de la sección A, resulta

$$\frac{p_{at}}{\rho g} = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + h + r. \quad (9.6.4)$$

De las dos ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\frac{v_A^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_A^2}{2} \right).$$

Integrando esta última ecuación, resulta

$$v_A = \frac{C}{r},$$

siendo C una constante que puede determinarse aplicando la ecuación de conservación de la masa,

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} b v_A dr$$

de donde resulta

$$C = \frac{Q}{b \ln(R_2/R_1)}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene la distribución de velocidad pedida,

$$v_A = \frac{1,656}{r}$$

(v_A en m s^{-1} , r en m).

De la ecuación (9.6.4), puede hallarse la distribución de presión,

$$\frac{p_A - p_{at}}{\rho g} = -0,5 - r - \frac{0,1398}{r^2}$$

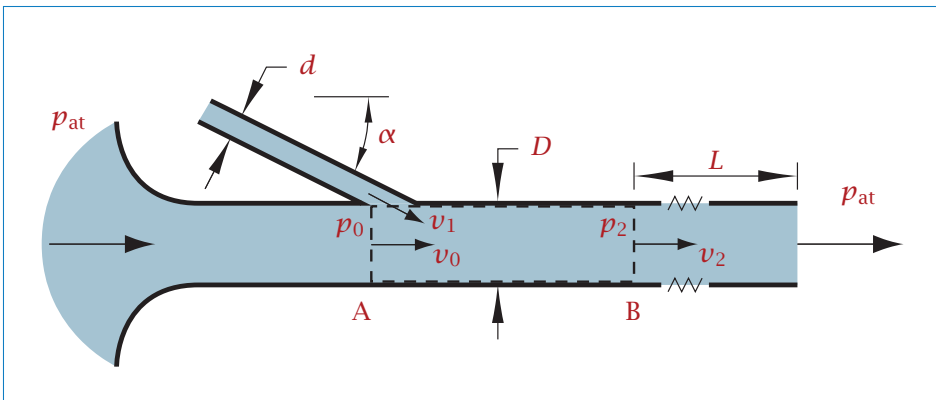
($p_A/\rho g$ en m, r en m).

Problema 9.7. Sistema de ventilación de un conducto con extremos abiertos

El esquema de la figura representa un sistema de ventilación de un conducto cilíndrico horizontal de diámetro $D = 1$ m, abierto a una atmósfera en reposo en sus dos extremos. El sistema está basado en la inyección lateral de aire a través de un tubo de diámetro d , dispuesto con un pequeño ángulo de inclinación α respecto del conducto a ventilar. La velocidad v_1 en el tubo lateral es uniforme. En la sección A, situada aguas arriba de la zona de inyección, la presión es p_0 .

En una sección B situada a cierta distancia aguas abajo de la sección A, se supone que el flujo se ha hecho uniforme, siendo la velocidad v_2 . El aire arrastrado tiene en A una velocidad v_0 , también uniforme. Se supondrá que el aire se comporta como un fluido incompresible de densidad $\rho = 1,25 \text{ kg m}^{-3}$.

La longitud del conducto desde la sección B hasta la sección de salida es $L = 100$ m. El factor de fricción en el conducto es $f = 0,025$.



- a) Suponiendo despreciable la pérdida de carga entre la entrada al conducto y la sección A, determinar la presión p_0 en A en función de v_0 .
- b) Determinar la presión p_2 en la sección B en función de v_2 .
- c) Suponiendo despreciables las tensiones viscosas entre las secciones A y B (la distancia entre A y B es mucho menor que L), expresar las velocidades v_1 y v_0 en función de v_2 . Comentar el resultado.
- d) Calcular el valor de d para el que se anula la velocidad v_0 . Supóngase en este apartado y en el siguiente que el ángulo α es muy pequeño.
- e) Suponiendo $d = 0,2$ m, calcular la velocidad v_1 necesaria para obtener una velocidad $v_0 = 5$ m s⁻¹.

Solución

a) $p_0 = 98\,100 - 0,6250v_0^2$ N m⁻² (v_0 en m s⁻¹).

b) $p_2 = 98\,100 + 1,563v_2^2$ N m⁻² (v_2 en m s⁻¹).

c)

$$\left[a^2 \left(1 + \frac{f}{2} \frac{L}{D} \right) - a \cos \alpha \right] v_1^2 + \left[2av_0 \left(1 + \frac{f}{2} \frac{L}{D} \right) \right] v_1 + v_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{f}{2} \frac{L}{D} \right) = 0,$$

$$v_2 = av_1 + v_0,$$

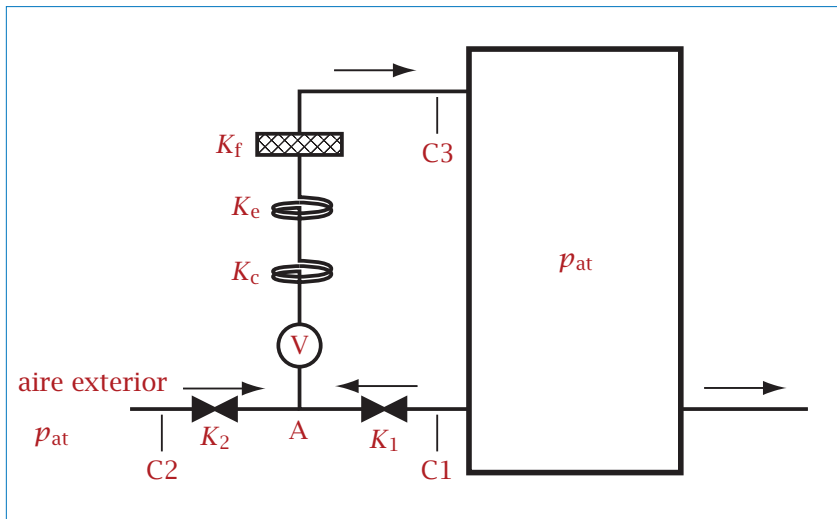
siendo $a = (d/D)^2$.

d) $d = 0,6667$ m.

e) $v_1 = 49,17$ m s⁻¹.

Problema 9.8. Sistema de acondicionamiento de aire de un recinto

En la figura se representa un sistema para acondicionar el aire de un recinto. El conducto C1, a través del cual se extrae aire del recinto, tiene una longitud $L_1 = 50$ m y un diámetro $D_1 = 65$ cm. En el punto A, dicho aire se mezcla con aire procedente del exterior, que es introducido a través del conducto C2, de longitud despreciable y diámetro $D_2 = 30$ cm. En los conductos C1 y C2 existen válvulas para regular el caudal, con coeficientes de pérdida de carga locales K_1 y K_2 , respectivamente. El aire mezclado en A pasa sucesivamente, por medio del conducto C3, de longitud L_3 (que debe ser determinada) y diámetro $D_3 = 65$ cm, a través de un ventilador, dos serpentines, uno de calefacción y otro de enfriamiento (con coeficientes de pérdida de carga locales $K_c = 6$ y $K_e = 7$, respectivamente), y un filtro (con coeficiente de pérdida de carga $K_f = 10$), y es finalmente transportado hasta el recinto.



Se utilizará la siguiente curva característica del ventilador:

$$H_m = 0,7 \left[1 - (Q/12)^2 \right]; \quad H_m \text{ en m de c. de agua, } Q \text{ en m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Todos los conductos son de chapa de acero galvanizado, con rugosidad $\varepsilon = 0,65$ mm. Se despreciarán las fuerzas másicas y las pérdidas de carga en

elementos distintos de los mencionados. Se supondrá una densidad del aire constante, $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$, y una viscosidad $\mu = 1,8 \times 10^{-4} \text{ poise}$.

Si el caudal desplazado por el ventilador es $Q_3 = 20\,000 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$ y el caudal de aire captado del exterior es $Q_2 = 2\,000 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$, y suponiendo un valor de $K_1 = 5$ y que el recinto que debe ser acondicionado está a la presión atmosférica, calcular:

- Caudal, Q_1 , y factor de fricción, f_1 , en el conducto C1.
- Presión manométrica en el punto A.
- Valor del coeficiente de pérdida de carga K_2 .
- Potencia consumida por el ventilador, suponiendo un rendimiento total del 70%.
- Longitud del conducto C3, L_3 .
- Demostrar que la relación entre el caudal de retorno desde el depósito y el caudal de aire procedente del exterior, Q_1/Q_2 , se mantiene constante aunque varíe el coeficiente de pérdida de carga local K_f como consecuencia del ensuciamiento del filtro (siempre que el factor de fricción f_1 pueda considerarse que se mantiene constante con el caudal y que en las válvulas de los conductos C1 y C2 se mantiene fijo el grado de apertura).

Solución

- a) Aplicando la ecuación de continuidad al nodo A, se obtiene

$$Q_1 = Q_3 - Q_2 = 5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

La velocidad en el conducto C1 es

$$v_1 = \frac{Q_1}{\pi D_1^2/4} = \frac{5}{\pi (0,65)^2/4} = 15,07 \text{ m s}^{-1},$$

y el número de Reynolds,

$$(\text{Re})_1 = \frac{\rho v_1 D_1}{\mu} = \frac{(1,2)(15,07)(0,65)}{1,8 \times 10^{-5}} \approx 6,529 \times 10^5.$$

Entrando en el diagrama de Moody con Re_1 y $\varepsilon/D_1 = 10^{-3}$, se obtiene

$$f_1 = 0,02.$$

b) Aplicando la ecuación (B.5.1) (utilizando la ecuación (B.5.3)) entre el recinto y el nodo A, a través del conducto C1, resulta

$$0 = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + K_1 \right) \frac{v_1^2}{2g}$$

(p_A es presión manométrica). Sustituyendo valores, se obtiene

$$p_A = -1027 \text{ N m}^{-2}.$$

c) Aplicando de nuevo la ecuación (B.5.1) entre el exterior y el nodo A a través del conducto C2, se obtiene

$$\frac{p_A}{\rho g} = -(K_2 + 1) \frac{v_2^2}{2g},$$

de donde resulta, sustituyendo valores,

$$K_2 = 26,71.$$

d) De la curva característica del ventilador, introduciendo $Q = Q_3$, resulta

$$H_m = 0,7 \left[1 - \left(\frac{20\,000/3600}{12} \right)^2 \right] \frac{1000}{1,2} = 458,3 \text{ m. (m de c. de aire)}$$

La potencia consumida por el ventilador se determina mediante la ecuación (B.6.11). Compruébese que se obtiene

$$\dot{W}_t = 42,82 \text{ kW.}$$

e) Compruébese que, en el conducto C3, $v_3 = 16,74 \text{ m s}^{-1}$, $\text{Re}_3 \approx 7,255 \times 10^5$ y $\varepsilon/D_3 = 10^{-3}$, obteniéndose del diagrama de Moody $f_3 = 0,02$.

Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre el nodo A y el recinto a acondicionar, a través del conducto C3, teniendo en cuenta que $\Delta H = -H_m$, se obtiene

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} = \left(f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_f + K_c + K_e + 1 \right) \frac{v_3^2}{2g} - H_m$$

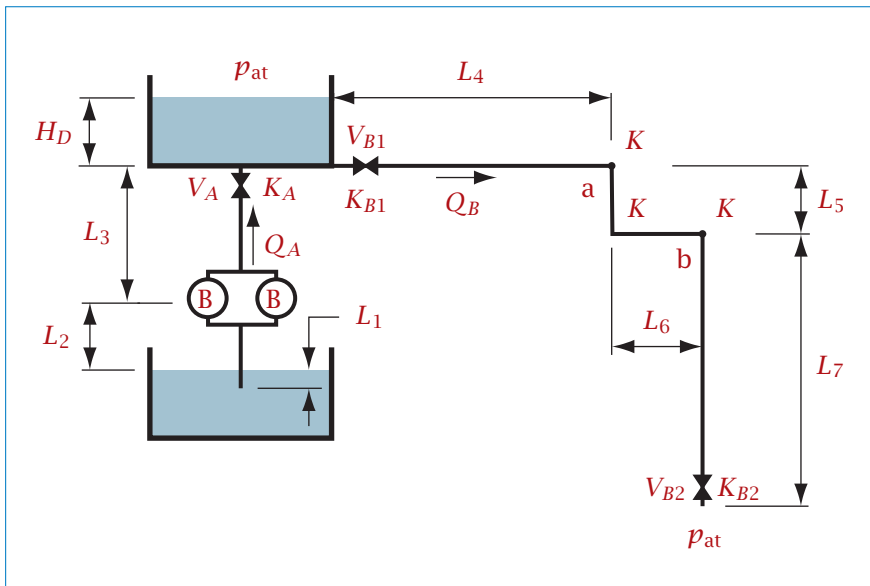
(el último sumando, igual a la unidad, dentro del paréntesis del segundo miembro corresponde a la energía cinética del chorro que descarga en el depósito). De la ecuación anterior, sustituyendo valores, se determina

$$L_3 = 96,69 \text{ m.}$$

f) Aplíquese la ecuación (B.5.1) entre el exterior y el nodo A a través del conducto C2, y entre el recinto y el nodo A a través del conducto C1.

Problema 9.9. Sistemas de llenado mediante bombeo y de descarga de un depósito

En la instalación representada en la figura, el depósito superior, de sección transversal de área $A = 4 \text{ m}^2$, se llena mediante dos bombas idénticas dispuestas en paralelo que toman agua desde el depósito inferior, y se vacía a través de la tubería indicada.



La curva característica de cada una de las bombas, para la velocidad de giro nominal, puede aproximarse por la ecuación

$$H_m = 30 \left[1 - \left(\frac{Q}{0,04} \right)^2 \right]; H_m \text{ en m, } Q \text{ en m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Todas las tuberías tienen el mismo diámetro $D = 10$ cm y la misma rugosidad $\varepsilon = 0,1$ mm. Ambos depósitos están abiertos a la atmósfera ($p_{\text{at}} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$). Los valores de las longitudes de las tuberías y los coeficientes de pérdida de carga en las válvulas (cuando están totalmente abiertas) y los correspondientes a otras pérdidas locales indicados en la figura son los siguientes: $L_1 = 0,5$ m; $L_2 = 2$ m; $L_3 = 8$ m; $L_4 = 30$ m; $L_5 = 4$ m; $L_6 = 5$ m; $L_7 = 18$ m; $K = 0,5$; $K_A = 5$; $K_{B1} = 4$.

- a) Calcular el caudal impulsado por las bombas, cuando $H_D = 5$ m, en los dos casos siguientes: 1) Ambas bombas giran a la velocidad nominal Ω_n . 2) Ambas bombas giran a una velocidad $2\Omega_n$.
- b) Suponiendo cerrada la válvula V_{B1} y totalmente abierta la válvula V_A , calcular el tiempo transcurrido hasta alcanzarse una altura $H_D = 5$ m si el depósito está inicialmente vacío y las bombas giran a la velocidad nominal.
- c) Manteniendo cerrada la válvula V_A y totalmente abierta la válvula V_{B1} , y partiendo de una altura inicial de agua en el depósito superior $H_D = 5$ m, se procede a vaciar este hasta alcanzar una altura $H_D = 1$ m manteniendo fijo un cierto grado de apertura de la válvula V_{B2} . Determinar el valor del coeficiente K_{B2} de pérdida de carga en la válvula V_{B2} necesario para evitar que se produzca cavitación en la tubería durante el proceso de vaciado. (Presión de vapor del agua $p_v = 0,025 \text{ kgf cm}^{-2}$.)
- d) Al alcanzarse la altura $H_D = 1$ m al final del proceso de vaciado descrito en el apartado c), se cierra bruscamente (cierre instantáneo) la válvula V_{B2} . Determinar la sobrepresión que se producirá en la válvula y el tiempo que tardará la onda de presión originada en alcanzar el depósito. Se supondrán despreciables las pérdidas de energía. El espesor de la pared de la tubería $e = 1$ mm y el módulo de elasticidad del material $E = 10^{11} \text{ N m}^{-2}$. Explicar qué ocurriría si, en lugar de la válvula V_{B2} , se cierra bruscamente la válvula V_{B1} .

Solución

- a) Curva característica en el caso 1):

$$H_m = 30 \left[1 - \left(\frac{Q}{0,08} \right)^2 \right] = 30 - 4687,5 Q^2.$$

Curva característica en el caso 2):

$$H_m = 120 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{Q}{0,08} \right)^2 \right] = 120 - 4687,5 Q^2.$$

Curva característica de la instalación:¹

$$\begin{aligned} H_i &= 2 + 8 + 5 + \left(0,02 \frac{0,5 + 2 + 8}{0,1} + 5 + 1 \right) \frac{8 Q^2}{\pi^2 (9,81) (0,1)^4} \\ &= 15 + 6692,8 Q^2. \end{aligned}$$

(Alturas en m; Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.) Igualando H_m a H_i en cada uno de los casos considerados, se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} Q_{\Omega_n} &= 0,0363 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}, \\ Q_{2\Omega_n} &= 0,0961 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

b) Igualando H_m a H_i ,

$$30 - 4687,5 Q^2 = 10 + H_D + 6692,8 Q^2,$$

se obtiene

$$Q = \frac{\sqrt{20 - H_D}}{106,7}.$$

Integrando

$$Q = A \frac{dH_D}{dt} = \frac{\sqrt{20 - H_D}}{106,7}$$

y sustituyendo valores, se obtiene el tiempo transcurrido,

$$t = 511,3 \text{ s.}$$

c) Las condiciones más desfavorables se producen al final del proceso de vaciado, cuando se alcanza $H_D = 1$ m. Aplicando en estas condiciones la ecuación (B.5.1) entre la superficie libre del agua en el depósito y la sección de descarga de la tubería, resulta

$$\begin{aligned} 23 &= \left(0,02 \frac{30 + 4 + 5 + 18}{0,1} + 4 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + K_{B2} \right) \frac{8 Q^2}{\pi^2 (9,81) (0,1)^4} \\ &\quad + \frac{8 Q^2}{\pi^2 (9,81) (0,1)^4}. \end{aligned}$$

¹ Se ha tomado un valor constante de $f = 0,02$, si bien, para el rango de caudales de funcionamiento que se obtienen, f varía ligeramente con el número de Reynolds. Dichas variaciones resultan en todo caso difíciles de apreciar en el diagrama de Moody, por lo que solo se podrían tener en cuenta de forma más precisa utilizando, por ejemplo, la fórmula de Colebrook.

Obsérvese que los puntos donde puede alcanzarse antes la presión de vapor del agua son los puntos a y b indicados en la figura. Si se aplica la ecuación (B.5.1) entre el punto a, por ejemplo, y la sección de salida de la tubería, con la condición de que en a la presión sea igual a la presión de vapor, resulta

$$0,25 + 22 + \frac{8 Q^2}{\pi^2 (9,81) (0,1)^4} = 10 + \left(0,02 \frac{4 + 5 + 18}{0,1} + 0,5 + 0,5 \right. \\ \left. + K_{B2} \right) \frac{8 Q^2}{\pi^2 (9,81) (0,1)^4} + \frac{8 Q^2}{\pi^2 (9,81) (0,1)^4}.$$

De esta ecuación y de la anterior se obtiene

$$Q = 3,364 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

y

$$K_{B2} = 6,705.$$

Debe comprobarse ahora que la presión que existe en el punto b en estas condiciones es superior a la presión de vapor. Si no hubiese ocurrido así, habría sido necesario plantear la ecuación (B.5.1) entre el punto b (en lugar de a) y la sección de salida, suponiendo que la presión en b es la presión de vapor.

d) La velocidad del agua en la tubería antes del cierre es

$$v = \frac{4 Q}{\pi D^2} = \frac{(4)(3,364 \times 10^{-2})}{\pi (0,1)^2} = 4,283 \text{ m s}^{-1}.$$

La celeridad de la onda de presión está dada por

$$c^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{\rho D}{E e}}.$$

Sustituyendo valores (la velocidad del sonido en el agua es $a = 1400 \text{ m s}^{-1}$), resulta $c = 813,7 \text{ m s}^{-1}$. La sobrepresión creada es

$$\Delta p = \rho c v.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$\Delta p = 3,485 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}.$$

El tiempo que tardará la onda en alcanzar el depósito es

$$t = \frac{L}{c},$$

siendo L la longitud total de la tubería de descarga. Sustituyendo valores en la expresión anterior, se obtiene

$$t = 0,07 \text{ s}.$$

Problema 9.10. Sistema de extracción de petróleo mediante agua salada

En ciertos casos se utiliza agua salada para extraer petróleo mediante el procedimiento que a continuación se describe para un caso concreto. Desde la superficie de la tierra se inyecta agua salada mediante una tubería vertical de longitud $L_a = 3$ km, rugosidad $\varepsilon_a = 0,05$ mm y diámetro D_a (que debe ser determinado), hasta la parte inferior de una bolsa de petróleo. El agua salada, al tener mayor densidad que el petróleo, desplaza a este de la bolsa, forzándolo a subir por una tubería de igual longitud y rugosidad que la anterior, $L_p = 3$ km y $\varepsilon_p = 0,05$ mm, y diámetro $D_p = 5$ cm. El espesor de la bolsa se considerará despreciable frente a la profundidad de 3 km y la presión en ella se supondrá uniforme. La producción del pozo ha de ser de 300 barriles/día ($1 \text{ barril} = \frac{1}{7} \text{ m}^3$). Se despreciarán las pérdidas locales, incluidas las energías cinéticas de los chorros de salida. Se supondrá que el agua salada entra a presión atmosférica en la tubería de bajada y que la tubería de subida descarga a la atmósfera.

- a) Suponiendo que la densidad y la viscosidad del petróleo son $\rho_p = 900 \text{ kg m}^{-3}$ y $\mu_p = 0,02$ poise, respectivamente, calcular la pérdida de carga (o caída de presión reducida en este caso) en la tubería de subida y la presión manométrica en la bolsa, p_b .
- b) Suponiendo que la densidad del agua salada es $\rho_a = 1030 \text{ kg m}^{-3}$, calcular la pérdida de carga en la tubería de bajada.
- c) Suponiendo que la bolsa siempre está llena de líquido (no contiene gas) y que los dos líquidos, agua salada y petróleo, se mantienen en capas separadas, de manera que el caudal volumétrico de agua es el mismo que el de petróleo, calcular el diámetro de la tubería de bajada, D_a , sabiendo que la viscosidad del agua es $\mu_a = 0,01$ poise (en un primer tanteo se sugiere tomar $f = 0,03$).

En lo que sigue se supondrá que por la tubería de subida circula una sustancia más densa y viscosa que el petróleo, de densidad $\rho_b = 1010 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu_b = 10$ poise, de forma que el flujo se hace más lento, resultando ser laminar en ambas tuberías para este caso concreto. El fluido de bajada

seguirá siendo agua salada. Todas las características de las tuberías son las antes indicadas, y D_a el calculado en el apartado c).

- d) Calcular el caudal que circula por ambas tuberías y la presión en la bolsa, p_b .

Solución

- a) $\Delta p_p = 6,394 \times 10^4 \text{ N m}^{-2}$; $p_b = 2,655 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$.
 b) $\Delta p_a = 3,762 \times 10^6 \text{ N m}^{-2}$.
 c) $D_a = 2,216 \times 10^{-2} \text{ m}$.
 d) $Q = 2,926 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; $p_b = 3,030 \times 10^7 \text{ N m}^{-2}$.

Problema 9.11. Cálculo de la pérdida de carga en una tubería con fugas mediante la ecuación de Blasius

En una tubería horizontal de longitud L y sección de área A , por la que circula un líquido de densidad ρ y viscosidad cinemática ν , se producen fugas que pueden representarse suponiendo que existe un caudal de fugas por unidad de longitud uniforme a lo largo de toda su longitud. Los caudales en la entrada y en la salida de la tubería son, respectivamente, Q_1 y Q_2 . Se supondrá que la tubería es hidráulicamente lisa, de forma que el factor de fricción viene dado por la ecuación de Blasius: $f = 0,3164/\text{Re}^{0,25}$. Calcular la presión en la sección de entrada teniendo en cuenta que la tubería descarga a la atmósfera.

Solución

Al ser la presión en la sección de salida igual a la atmosférica y estar la tubería dispuesta en posición horizontal, la presión manométrica en la sección de entrada será la necesaria para compensar la caída de presión debida a la fricción que se produce a lo largo de la tubería. En un tramo elemental de tubería de longitud dl se producirá una pérdida de altura (ecuación (B.5.2), prescindiendo de las pérdidas locales)

$$dH_\varphi = f \frac{v^2}{2g} \frac{1}{D} dl.$$

CAPÍTULO 9. FLUJOS TURBULENTOS

Sustituyendo en esta ecuación la expresión de Blasius para el factor de fricción, resulta

$$dH_\varphi = \frac{0,3164 \nu^{0,25}}{2gD^{1,25}} \nu^{1,75} dl. \quad (9.11.1)$$

La variación del caudal a lo largo de la tubería, según se indica en el enunciado, viene dada por

$$Q = Q_1 - \frac{Q_1 - Q_2}{L} l,$$

y la velocidad del líquido es

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q_1}{A} - \frac{Q_1 - Q_2}{AL} l.$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (9.11.1) e integrando, resulta

$$H_\varphi = \frac{0,0575 \nu^{0,25} L}{gD^{1,25} A^{1,75}} \frac{Q_1^{2,75} - Q_2^{2,75}}{Q_1 - Q_2}.$$

La presión en la sección de entrada será

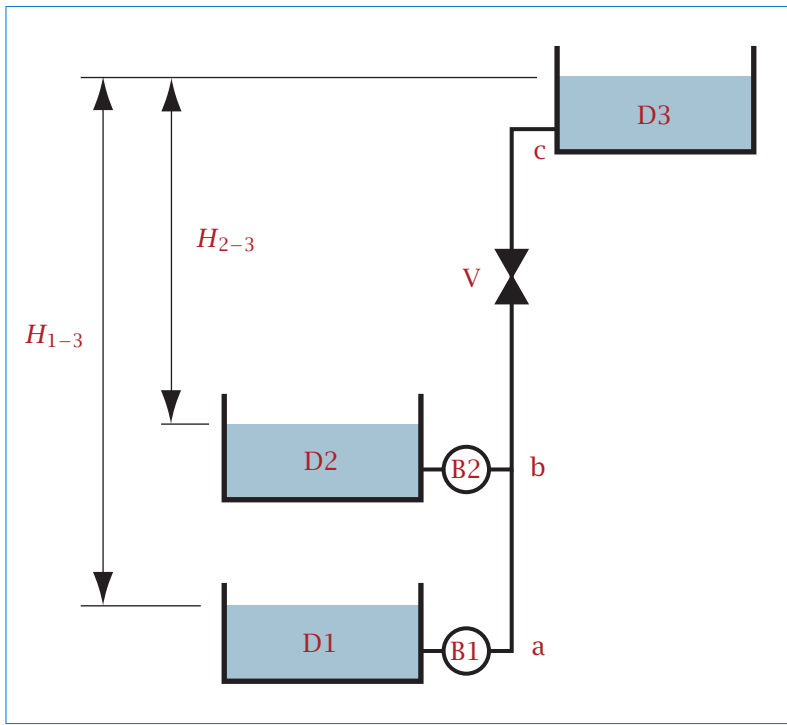
$$p = p_{\text{at}} + \rho g H_\varphi.$$

Problema 9.12. Bombeo desde dos depósitos a un tercero más elevado

En la figura se representa una instalación para trasvasar agua desde dos depósitos (D1 y D2) a otro más elevado (D3) mediante dos bombas idénticas (B1 y B2) y un sistema de tuberías. Los tres depósitos son de grandes dimensiones y están abiertos a la atmósfera. La curva característica de las bombas es la siguiente:

$$H_m = 40 + 100 Q - 900 Q^2$$

(Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$, H_m en m).



Las longitudes de las tuberías (a–b) y (b–c) son $L_{ab} = 50$ m y $L_{bc} = 100$ m, y sus diámetros, $D_{ab} = 25$ cm y $D_{bc} = 35$ cm, respectivamente. Se despreciarán las longitudes de las restantes tuberías representadas en la figura. Las diferencias entre los niveles del agua en los depósitos son $H_{1-3} = 25$ m y $H_{2-3} = 15$ m. Para un cierto grado de apertura de la válvula V, el caudal de agua impulsado por la bomba B1 es $Q_1 = 0,15$ m³ s⁻¹.

Se supondrá un factor de fricción $f = 0,02$ en las tuberías (a–b) y (b–c). Se despreciarán todas las pérdidas de carga locales para cuyo cálculo no se disponga de datos.

Determinar:

- Caudal que impulsa la bomba B2.
- Coefficiente de pérdida de carga en la válvula V.

Solución

a) Se supondrá que el problema puede considerarse cuasiestacionario. Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre la superficie

libre del agua en el depósito D1 y el punto b, se deduce que la altura total en b es

$$H_b = H_1 + H_{m1} - H_{\varphi ab}, \quad (9.12.1)$$

siendo H_1 la altura total en la superficie libre del agua en el depósito D1, H_{m1} la altura manométrica de la bomba B1 y $H_{\varphi ab}$ la altura de pérdidas por fricción en la tubería (a–b). Si se toma como origen de la coordenada vertical z la superficie libre del agua en el depósito D1, la altura total H_1 será nula (al ser nulas la velocidad del agua y la presión manométrica en dicha superficie). La ecuación (9.12.1) puede entonces escribirse de la forma

$$H_b = 40 + 100 Q_1 - 900 Q_1^2 - f \frac{L_{ab}}{D_{ab}} \frac{8 Q_1^2}{\pi^2 D_{ab}^4 g}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene

$$\begin{aligned} H_b &= 40 + (100)(0,15) - (900)(0,15)^2 - (0,02) \frac{50}{0,25} \frac{(8)(0,15)^2}{\pi^2 (0,25)^4 (9,81)} \\ &= 32,85 \text{ m.} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito D2 y el punto b, teniendo en cuenta que, según se indica en el enunciado, pueden despreciarse las pérdidas, resulta

$$H_b = H_2 + H_{m2}, \quad (9.12.2)$$

siendo $H_2 = H_{1-3} - H_{2-3} = 10 \text{ m}$ (de acuerdo con la referencia de cotas adoptada y teniendo en cuenta las consideraciones hechas sobre H_1) la altura total en la superficie libre del agua en el depósito D2. Sustituyendo valores, la ecuación (9.12.2) queda de la forma

$$32,85 = 10 + 40 + 100 Q_2 - 900 Q_2^2;$$

reordenando términos, resulta finalmente

$$900 Q_2^2 - 100 Q_2 - 17,15 = 0.$$

De esta ecuación se determina

$$Q_2 = 0,2044 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

b) Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito D3 y el punto b, resulta

$$H_3 = H_b - H_{\varphi bc}, \quad (9.12.3)$$

siendo $H_3 = H_{1-3} = 25$ m la altura total en la superficie libre del agua en el depósito D3 (de nuevo son nulas las alturas correspondientes a la energía cinética y la presión manométrica en dicha superficie) y $H_{\varphi bc}$ la altura de pérdidas (incluye pérdidas en la válvula V y por fricción en la tubería, y la correspondiente a la energía cinética del chorro de salida en el depósito D3). La ecuación (9.12.3) queda de la forma

$$H_{1-3} = H_b - \left(f \frac{L_{bc}}{D_{bc}} + K_v + 1 \right) \frac{8(Q_1 + Q_2)^2}{\pi^2 D_{bc}^4 g},$$

siendo K_v el coeficiente buscado. Sustituyendo valores en la ecuación anterior,

$$25 = 32,85 - \left(0,02 \frac{100}{0,35} + K_v + 1 \right) \frac{(8)(0,15 + 0,2044)^2}{\pi^2 (0,35)^4 (9,81)},$$

se obtiene finalmente

$$K_v = 4,633.$$

Problema 9.13. Tiempo de descarga por gravedad a través de una tubería del líquido contenido en un depósito

Un depósito cilíndrico de grandes dimensiones, abierto a la atmósfera, con sección transversal de área A , contiene un líquido cuya superficie libre se encuentra inicialmente a una altura H respecto del fondo, donde se encuentra acoplada una tubería horizontal de longitud L y diámetro D que descarga a la atmósfera. El factor de fricción en la tubería es f . En la sección de entrada a la tubería desde el depósito se supondrá un coeficiente de pérdida de carga local K . Determinar el tiempo que transcurrirá desde la situación inicial indicada hasta el instante en que la superficie libre del líquido en el depósito alcance una altura $H/3$ respecto del fondo.

Una vez obtenida la expresión que se pide, hacer aplicación a un caso con los siguientes datos:

$$A = 5 \text{ m}^2; H = 3 \text{ m}; L = 5 \text{ m}; D = 10 \text{ cm}; f = 0,02; K = 0,5,$$

indicando y justificando las hipótesis utilizadas para resolver el problema.

Solución

Se supondrá que el flujo en la tubería es unidimensional, cuasiestacionario y turbulento, hipótesis que se justificarán al final, para los valores numéricos de los parámetros del problema. Aplicando la ecuación (B.5.1) de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito y el extremo de la tubería de descarga, resulta

$$H = \frac{v^2}{2g} + \left(f \frac{L}{D} + K\right) \frac{v^2}{2g}, \quad (9.13.1)$$

siendo v la velocidad del líquido en la tubería. De la aplicación de la ecuación de conservación de la masa referida al volumen de control fijo que en cada instante coincide con el volumen de agua contenido en el depósito y la tubería, se obtiene

$$v \frac{\pi D^2}{4} + A \frac{dH}{dt} = 0.$$

Despejando v de la ecuación (9.13.1), introduciendo la expresión resultante en la ecuación anterior e integrando,

$$-\frac{\pi D^2}{4A} \left(\frac{2g}{1 + f \frac{L}{D} + K} \right)^{1/2} \int_0^t dt = \int_H^{H/3} \frac{dH}{H^{1/2}},$$

resulta

$$t = \frac{8A}{\pi D^2} \left(\frac{1 + f \frac{L}{D} + K}{2g} \right)^{1/2} H^{1/2} (1 - 1/\sqrt{3}).$$

Sustituyendo los valores numéricos,

$$t = \frac{(8)(5)}{\pi 0,1^2} \left(\frac{1 + 0,02 \frac{5}{0,1} + 0,5}{(2)(9,81)} \right)^{1/2} \sqrt{3} (1 - 1/\sqrt{3}),$$

se obtiene

$$t = 332,7 \text{ s.}$$

Compruébese que $L/(vt) = 5 \times 10^{-3} \ll 1$, $\text{Re} = 2,8 \times 10^5 > 2300$, $D/L = 0,02 \ll 1$. Se han tomado la densidad y la viscosidad del agua, y la velocidad $v = 2,8 \text{ m s}^{-1}$, que se obtiene de la ecuación (9.13.1) para una altura $H/3$ en lugar de H en el primer miembro. La hipótesis de flujo turbulento solo dejaría de ser aceptable si se tratase de un líquido mucho más viscoso que el agua.

Problema 9.14. Caudal de descarga por gravedad de un depósito a través de una tubería con bifurcación

Un depósito de grandes dimensiones, abierto a la atmósfera, contiene un líquido que se descarga a través de una tubería T1, de diámetro $D_1 = 200$ mm y longitud $L_1 = 200$ m, que en su extremo se bifurca en dos tuberías, T2 y T3, de diámetros $D_2 = D_3 = 100$ mm y longitudes $L_2 = L_3 = 100$ m. Las tuberías T2 y T3 descargan a la atmósfera, estando situados sus extremos a la misma altura $H = 20$ m por debajo de la superficie libre del líquido en el depósito. En la tubería T3 se producen fugas que pueden considerarse distribuidas uniformemente a lo largo de toda su longitud, de forma que el caudal en su sección de descarga a la atmósfera es igual a la mitad del que entra en la tubería. Se supondrá un factor de fricción $f = 0,01$ en las tres tuberías. Determinar los caudales de descarga en los extremos de la tuberías T2 y T3.

Solución

Se supondrá que no se producen pérdidas de energía en la bifurcación ni en la entrada a la tubería T1 desde el depósito. La conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito y la sección de salida de la tubería T2 requiere que

$$H = f \frac{L_1}{D_1} \frac{8 Q_1^2}{\pi^2 D_1^4 g} + \left(f \frac{L_2}{D_2} + 1 \right) \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 D_2^4 g}. \quad (9.14.1)$$

La variación de la velocidad a lo largo de la tubería T3 viene dada por

$$v_3 = \frac{4 Q_{3i}}{\pi D_3^2} \left(1 - \frac{x}{2L_3} \right),$$

siendo Q_{3i} el caudal que entra en la tubería T3 y x la coordenada longitudinal, con origen en la bifurcación. La conservación de la energía mecánica en las tuberías T2 y T3 requiere que

$$\left(f \frac{L_2}{D_2} + 1 \right) \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 D_2^4 g} = f \frac{1}{D_3} \frac{1}{2g} \int_0^{L_3} v_3^2 dx + \frac{8 (Q_{3i}/2)^2}{\pi^2 D_3^4 g}.$$

Resolviendo la integral del segundo término en esta ecuación, resulta

$$\left(f \frac{L_2}{D_2} + 1 \right) \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 D_2^4 g} = \left(f \frac{L_3}{D_3} \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \right) \frac{8 Q_{3i}^2}{\pi^2 D_3^4 g}. \quad (9.14.2)$$

CAPÍTULO 9. FLUJOS TURBULENTOS

De las ecuaciones (9.14.1) y (9.14.2), teniendo en cuenta que

$$Q_1 = Q_2 + Q_{3i},$$

se obtiene

$$Q_2 = 0,0409 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

y $Q_{3i} = 0,0551 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. El caudal de descarga en la tubería T3 es

$$Q_{3d} = Q_{3i}/2 = 0,0275 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Problema 9.15. Diámetro de una tubería de descarga por gravedad de un depósito

Se quiere descargar a la atmósfera el agua contenida en un depósito abierto a la atmósfera, de grandes dimensiones, a través de una tubería recta conectada a la pared del depósito. El punto de conexión de la tubería al depósito se encontrará a una altura $H = 11 \text{ m}$ por debajo de la superficie libre del agua en el depósito. La tubería, de rugosidad $\varepsilon = 0,015 \text{ mm}$, deberá tener una longitud $L = 100 \text{ m}$ y una inclinación respecto del plano horizontal con un ángulo $\alpha = 5^\circ$ hacia arriba (sección de descarga por encima del punto de conexión al depósito). Se debe determinar el diámetro de la tubería necesario para conseguir un caudal de descarga de $Q = 28 \text{ l s}^{-1}$.

Solución

Aplicando la ecuación (B.1.16) de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito y la sección de descarga de la tubería, resulta

$$H = L \sin \alpha + \left(f \frac{L}{D} + 1 \right) \frac{v^2}{2g}, \quad (9.15.1)$$

donde

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2}, \quad (9.15.2)$$

y^2

$$f = \left[-0,87 \ln \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{\text{Re} f^{1/2}} \right) \right]^{-2}, \quad (9.15.3)$$

siendo

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}. \quad (9.15.4)$$

Las ecuaciones (9.15.1) a (9.15.4) pueden resolverse de forma iterativa para las 4 incógnitas D , v , Re y f , obteniéndose

$$D = 0,137 \text{ m.}$$

Problema 9.16. Caudales en una tubería con bifurcación

Una tubería (T1) horizontal de longitud $L_1 = 400 \text{ m}$ y diámetro $D_1 = 10 \text{ cm}$ se bifurca en dos tuberías, una de ellas (T2) de longitud $L_2 = 300 \text{ m}$ y diámetro $D_2 = 7 \text{ cm}$, y la otra (T3) de longitud $L_3 = 200 \text{ m}$ y diámetro $D_3 = 4 \text{ cm}$. La tubería T1 toma agua a una presión manométrica de 500 kPa , y las tuberías T2 y T3 descargan (en un punto sumergido) en un depósito abierto a la atmósfera, cuya superficie libre se encuentra a una altura de 1 m por debajo del punto de bifurcación. La rugosidad relativa de las tres tuberías es $\varepsilon/D = 2 \times 10^{-4}$. Se despreciarán las pérdidas de carga locales. Calcular los caudales que circulan por las tuberías.

Solución

$$Q_1 = 0,0158 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

$$Q_2 = 0,0123 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

$$Q_3 = 0,0035 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

² La ecuación (9.15.3) expresa la fórmula aproximada de Colebrook. El factor de fricción f puede obtenerse también mediante el diagrama de Moody.

Problema 9.17. Sistema de bombeo. Rotura en la tubería de impulsión

En una instalación se aspira un líquido de densidad $\rho = 830 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu = 0,02$ poise desde un depósito abierto a la atmósfera, en el que la superficie libre del líquido está situada 2 m por debajo del grupo de bombeo, y se impulsa, a una presión manométrica $p_1 = 15 \text{ kgf cm}^{-2}$, a través una tubería horizontal. Dicha tubería, de longitud $L = 10 \text{ km}$, diámetro $D = 1 \text{ m}$ y rugosidad $\varepsilon = 0,2 \text{ mm}$, descarga en un depósito, siendo la presión manométrica en la sección de salida de la tubería $p_2 = 5 \text{ kgf cm}^{-2}$. En la tubería de aspiración, el conjunto de las pérdidas locales y las debidas al rozamiento equivalen a 0,5 m de columna de agua. Utilícese el diagrama de Moody.³

- Determinar el caudal Q que circula por la tubería.
- El grupo de bombeo está formado por 4 bombas idénticas acopladas en serie, que giran a una velocidad igual al doble de la velocidad nominal para poder suministrar la presión p_1 . Determinar la curva característica de cada bomba para el régimen de giro mencionado y para el nominal, sabiendo que la altura máxima que proporciona cada bomba en régimen nominal es de 14 m, y que la curva es de la forma $H_m/H_0 = 1 - (Q/Q_0)^2$.
- En la sección central de la tubería, equidistante de la bomba y del depósito de descarga, se produce una rotura por la que sale un caudal $q = 1 \text{ l s}^{-1}$. Calcular el área del orificio producido por la rotura y la velocidad de salida del líquido suponiendo que las perturbaciones en las distribuciones de velocidad y presión dentro de la tubería debidas a la rotura son despreciables; considérese la descarga ideal y estacionaria y tómese un coeficiente de contracción $C_c = 0,8$.
- La rotura genera dos ondas de presión. La que se propaga aguas arriba deja tras ella un caudal $Q + q/2$, y la que se propaga aguas abajo, $Q - q/2$. Indicar razonadamente de qué tipo de ondas de presión se trata y calcular: la velocidad de propagación de las ondas, la variación de presión que producen ambas ondas a su paso, y el tiempo que tardan en llegar a los extremos de la tubería. La velocidad del sonido en el líquido es 1200 m s^{-1} , el módulo de elasticidad de la tubería es

$1,7 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, y el espesor de la tubería, 1 cm. Nota: $\Delta p = \rho c \Delta v$; $1/c^2 = 1/a^2 + \frac{\rho}{E} \frac{D}{e}$.

- e) Cuando las ondas de presión llegan a unos detectores situados en las secciones de entrada y salida de la tubería, se cierran unas válvulas situadas en dichas secciones. Calcular la masa de líquido que se derrama a través de la rotura. Supóngase que la rotura se produce en la parte superior de la tubería, y que por tanto esta queda llena de líquido en la situación final de equilibrio, que obviamente se alcanzará cuando la presión en la tubería se iguale a la presión ambiente. Utilícese la siguiente expresión que relaciona el incremento de presión, Δp , en una sección de la tubería con el correspondiente incremento de masa por unidad de longitud, $\Delta(\rho A)$ (debido a la variación de ρ y a la dilatación de la tubería):

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{A} \frac{\Delta(\rho A)}{\Delta p},$$

siendo c la velocidad de propagación de una onda de presión, cuya expresión se ha dado en el apartado anterior, y A el área de la sección de la tubería. Determinar si el tiempo que se tarda en accionar el cierre de las válvulas (no se tendrá en cuenta el tiempo de cierre de estas) influye significativamente en la masa de líquido derramado.

Solución

a) $Q = 3,196 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ ($f = 1,427 \times 10^{-2}$, $\text{Re} = 1,689 \times 10^6$).

b) En régimen nominal:

$$H_m/14 = 1 - (Q/3,785)^2,$$

y a una velocidad de giro igual al doble de la nominal:

$$H_m/56 = 1 - (Q/7,570)^2$$

(Q en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$, H_m en m).

c) $v_s = 48,62 \text{ m s}^{-1}$; $A_s = 2,571 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.

d) $c = 919,5 \text{ m s}^{-1}$; $\Delta p = 485,9 \text{ Pa}$; $t = 5,438 \text{ s}$.

³ Enunciado adaptado de un problema propuesto por Crespo (2006).

e) $m = 9112 \text{ kg}$.

Problema 9.18. Cálculo de la presión necesaria en una instalación de riego

En una instalación de riego una bomba impulsa el agua a través de una tubería principal de 3 km de longitud y 30 cm de diámetro, de la que derivan cincuenta tuberías secundarias. El caudal a través de cada una de las tuberías secundarias es $q_i = 1 \text{ l s}^{-1}$. La tubería principal descarga en un depósito abierto a la atmósfera, en el que la superficie libre del agua está a una altura $\Delta z = 2 \text{ m}$ por encima de la bomba. El punto de descarga está sumergido. Determinar la presión en la sección de salida de la bomba si al final de la tubería principal se recoge un caudal $q_f = 5 \text{ l s}^{-1}$. Se considerará un factor de fricción constante $f = 0,02$, que el caudal disminuye uniformemente a lo largo de la tubería principal y que las pérdidas de carga locales son despreciables.

Solución

El caudal que circula por la tubería principal en un punto situado a una distancia l de la salida de la bomba es

$$Q = Q_1 - q^* l,$$

siendo $Q_1 = 55 \text{ l s}^{-1}$ el caudal a la salida de la bomba, $q^* = 50 q_i / L$ y L la longitud total de la tubería. Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la sección de salida de la bomba y la superficie libre del agua en el depósito resulta

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \Delta z + H_\varphi, \quad (9.18.1)$$

siendo

$$H_\varphi = \int_0^L \frac{8fQ^2}{\pi^2 g D^5} dl = \frac{8f}{\pi^2 g D^5} \left(Q_1^2 L + \frac{q^{*2} L^3}{3} - Q_1 q^* L^2 \right).$$

Sustituyendo valores en esta última ecuación, se obtiene $H_\varphi = 2,27 \text{ m}$. De la ecuación (9.18.1), teniendo en cuenta que $v_1 = 4 Q_1 / (\pi D^2)$ y sustituyendo valores, resulta

$$p_1 = 41879 \text{ Pa.}$$

Problema 9.19. Bomba con tubería de impulsión ramificada. Cálculo de los diámetros de las tuberías

Una bomba que tiene una curva característica $H = 25 (1 - Q^2/0,16)$ (H en m y Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$), toma agua de un depósito A cuya superficie libre está situada 10 m por encima de su eje y la impulsa a través de una tubería que se ramifica en otras tres: una tubería T_1 , de longitud $L_1 = 20$ m, que descarga un caudal $Q_1 = 50 \text{ l s}^{-1}$ en el fondo de un depósito B cuya superficie libre está situada 3 m por encima de la superficie libre del depósito A ; una segunda tubería T_2 , de longitud $L_2 = 100$ m, que descarga a la atmósfera un caudal $Q_2 = 60 \text{ l s}^{-1}$ en un punto situado 18 m por debajo de la superficie libre del depósito B ; y una tercera T_3 , de longitud $L_3 = 200$ m, cuyo extremo está también abierto a la atmósfera y situado 23 m por debajo de la superficie libre del depósito B , que transporta un caudal $Q_3 = 180 \text{ l s}^{-1}$. La rugosidad de las tres tuberías es $\varepsilon = 0,1$ mm. Considerando despreciables las pérdidas por rozamiento en las tuberías de conexión entre el depósito A y la bomba y entre la bomba y el punto de ramificación, así como las pérdidas locales y los términos de energía cinética en la ecuación de conservación de la energía mecánica, determinar los diámetros de las tres tuberías.

Solución

La altura manométrica que suministra la bomba es

$$H_m = 25[1 - (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2/0,16] = 11,82 \text{ m}.$$

Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica a una tubería cualquiera de las tres en las que se ramifica la tubería principal, sin tener en cuenta las pérdidas locales y los términos de energía cinética, resulta

$$H_m + \Delta z_i = H_{\varphi_i},$$

siendo Δz_i la diferencia de cotas entre la superficie libre del depósito A y el punto de descarga de la tubería i si esta se realiza a la atmósfera, o la superficie libre del agua en el depósito si la descarga se hace en el fondo de un depósito, y

$$H_{\varphi_i} = 8f_i L_i Q_i^2 / (\pi^2 g D_i^5)$$

la pérdida de carga por rozamiento a lo largo de la tubería i . Para obtener el diámetro de las tres tuberías es necesario seguir un procedimiento iterativo, puesto que $f_i = f_i(\varepsilon/D_i, (\text{Re})_i)$.

CAPÍTULO 9. FLUJOS TURBULENTOS

En el caso de la tubería 1 ($\Delta z_1 = -3$ m), suponiendo un valor $D'_1 = 0,2$ m, para el que resulta $\varepsilon/D'_1 = 0,0005$ y $(\text{Re})'_1 = 4 Q_1 / (\pi \nu D'_1) = 3,2 \times 10^5$, del diagrama de Moody resulta $f'_1 = 0,0183$. Sustituyendo este último valor en la ecuación de conservación de la energía mecánica se obtiene $D''_1 = 0,097$ m. Si se repite la iteración con este nuevo valor, resulta $\varepsilon/D''_1 = 0,001$ y $(\text{Re})''_1 = 6,4 \times 10^5$, y, del diagrama de Moody, $f''_1 = 0,02$, con lo que finalmente se obtiene $D'''_1 = 0,1$ m, valor que se puede adoptar como resultado final:

$$D_1 = 0,1 \text{ m.}$$

Se procede de la misma forma en las tuberías 2 ($\Delta z_2 = 15$ m) y 3 ($\Delta z_3 = 20$ m), resultando

$$D_2 = 0,12 \text{ m, } D_3 = 0,2 \text{ m,}$$

respectivamente.

Problema 9.20. Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (I)

Se quiere conectar dos depósitos de grandes dimensiones y abiertos a la atmósfera, que contienen agua, mediante una tubería de longitud $L = 1$ km y diámetro $D = 20$ cm. El punto de descarga de la tubería en el depósito inferior está sumergido. La diferencia entre las alturas de las superficies libres del agua en los depósitos es $H = 10$ m. La tubería debe salvar una elevación del terreno que hace que en un tramo se alcancen cotas que están por encima del nivel de la superficie del agua en el depósito superior. El tramo de tubería ascendente desde el depósito superior hasta el punto de la tubería más elevado tiene una longitud $L_1 = 400$ m, y el tramo descendente desde dicho punto al depósito inferior tiene una longitud $L_2 = 600$ m. La rugosidad de la tubería es $\varepsilon = 0,4$ mm. La presión de vapor del agua es $p_v = 0,02$ kgf cm⁻².

Determinar:

- Caudal que se trasvasa.
- Máxima altura que podría alcanzar el punto de la tubería más elevado con respecto a la superficie del agua en el depósito superior.

Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre de ambos depósitos, resulta

$$H = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \left(1 + f \frac{L}{D} \right), \quad (9.20.1)$$

siendo f el factor de fricción de la tubería. Despejando de esta ecuación y sustituyendo valores, se obtiene

$$Q = \sqrt{\frac{(10)\pi^2(9,81)(0,2)^4}{8 + 8\frac{1000}{0,2}f}}. \quad (9.20.2)$$

Iterando, resulta, para $f = 0,024$ (que corresponde a un valor de $Re = 2,5 \times 10^5$ y a una rugosidad adimensional $\varepsilon/D = 0,002$), un caudal

$$Q = 0,04 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

b) La altura máxima, h , será aquella para la que se alcance la presión de vapor en el punto más elevado de la tubería. Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre en el depósito superior y el punto más elevado de la tubería, en el que la presión manométrica en las condiciones límite es $p_2 = (p_v - p_{at})$, tomando $p_{at} = 1 \text{ kgf cm}^{-2}$, resulta

$$\frac{p_v - p_a}{\rho g} + h = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \left(1 + f \frac{L_1}{D} \right), \quad (9.20.3)$$

de donde se obtiene

$$h = 5,75 \text{ m}.$$

Problema 9.21. Sistema de bombeo con dos bombas en serie

Un depósito de sección transversal constante de área $A = 1250 \text{ m}^2$ y altura $H_D = 15 \text{ m}$ contiene inicialmente agua hasta una altura $h = h_i = 5 \text{ m}$. En el fondo del depósito se ha conectado una tubería horizontal de vaciado, de longitud $L_1 = 1 \text{ km}$ y diámetro $D_1 = 20 \text{ cm}$, en cuyo extremo existe una válvula que tiene una constante de pérdida de carga $K = 5$ cuando está totalmente abierta. El depósito se llena mediante dos bombas iguales conectadas en serie, que toman agua desde un depósito en el que el ni-

vel de la superficie libre, que se supondrá que se mantiene constante, se encuentra a una altura de 10 m por debajo de la superficie libre que inicialmente tiene el agua en el depósito superior. Las tuberías de aspiración y de impulsión tienen el mismo diámetro $D_2 = 15$ cm, y una longitud total entre ambas $L_2 = 20$ m. En la tubería de impulsión, cuyo extremo está conectado al fondo del depósito superior, existe una válvula que tiene un coeficiente de pérdida de carga $K_2 = 3$ cuando está totalmente abierta. Se despreciarán las pérdidas de carga locales que no puedan ser determinadas con los datos que se proporcionan. La rugosidad de todas las tuberías es $\varepsilon = 0,2$ mm. La curva característica de las bombas, correspondiente a la velocidad de giro nominal, se aproximará mediante la siguiente expresión lineal: $H_B = H_{B0} (1 - Q/Q_0)$; $H_{B0} = 10$ m, $Q_0 = 0,10 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Una de las bombas gira a velocidad nominal y la otra a una velocidad un 40% superior a la nominal. En paralelo con la bomba que gira a velocidad nominal existe una válvula unidireccional que impide que la bomba proporcione una altura negativa en cualquier condición de funcionamiento. Se pide:

- a) Determinar la curva característica del acoplamiento formado por las dos bombas en serie. Describir el funcionamiento del conjunto formado por la disposición en paralelo de la bomba girando a la velocidad nominal y la válvula unidireccional.
- b) Si a partir de la situación inicial descrita, en la que $h = h_i = 5$ m, entran en funcionamiento las bombas y se abren totalmente las válvulas, determinar cómo evolucionará el sistema. En concreto, se debe determinar la situación final de equilibrio (depósito vacío, o depósito lleno con el agua rebosando, o una situación de equilibrio diferente). ¿Llegará en algún momento a circular agua por la válvula unidireccional? Indicar cómo se calcularía el tiempo que se tardará en alcanzar dicha situación de equilibrio.
- c) Describir lo que ocurriría si, unos instantes después de abrir las válvulas de vaciado y de impulsión de la bomba y poner en marcha la bomba, alcanzado ya el régimen cuasiestacionario y siendo h todavía prácticamente igual al valor inicial de 5 m, se cierran instantáneamente ambas válvulas. Velocidad del sonido: 1400 m s^{-1} ; espesor de las tuberías: 5 mm; módulo de elasticidad del material de las tuberías: $2 \times 10^6 \text{ kgf cm}^{-2}$.

Nota: $c^2 = [1/a^2 + \rho D/(Ee)]^{-1}$.

Solución

a) La curva característica de la bomba que gira a velocidad $\Omega = 1,4\Omega_n$ es $H_{1,4} = 19,6(1 - Q/0,14)$, y la curva característica del acoplamiento en serie

$$H_{\text{serie}} = H + H_{1,4} = 29,6(1 - Q/0,123)$$

(en ambos casos, H en m y Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$).

b) Se alcanzará una situación de equilibrio intermedia si para una altura del líquido en el depósito superior $h < H_D$ se igualan los caudales de entrada y salida de dicho depósito. Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica a ambas tuberías,

$$h = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(1 + K_1 + f_1 \frac{L_1}{D_1} \right), \quad (9.21.1)$$

$$29,6 \left(1 - \frac{Q}{0,123} \right) = (h + 5) + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(1 + K_2 + f_2 \frac{L_2}{D_2} \right), \quad (9.21.2)$$

siendo Q el caudal en la situación de equilibrio y f_1 y f_2 los factores de fricción en las tuberías descarga y alimentación, respectivamente; eliminando h entre las ecuaciones (9.21.1) y (9.21.2), y sustituyendo valores, resulta

$$(962,2 + 2,577 \times 10^5 f_1 + 2,176 \times 10^4 f_2) Q^2 + 240,65 Q - 24,6 = 0. \quad (9.21.3)$$

Iterando, se obtiene $Q = 0,045 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$ para $f_1 = 0,021$ y $f_2 = 0,0215$ (que en el diagrama de Moody corresponden a $(\text{Re})_1 = 2,7 \times 10^5$ y $\varepsilon_1/D_1 = 0,001$ y $(\text{Re})_2 = 3,65 \times 10^5$ y $\varepsilon_2/D_2 = 0,0013$, respectivamente). De la ecuación (9.21.1), se obtiene

$$h = 11,6 \text{ m.}$$

Para el caudal obtenido, la bomba que gira a velocidad nominal proporciona una altura manométrica positiva, por lo que la válvula unidireccional no actúa. La cuestión que debe plantearse es si en algún momento hasta que se alcance la situación de equilibrio puede llegar a actuar. De hecho, obsérvese que falta por confirmar que la situación de equilibrio que acaba de ser calculada es correcta, ya que, si la válvula unidireccional actuara en algún momento, las ecuaciones (9.21.1) y (9.21.2) deberían ser modificadas para determinar el punto de funcionamiento. Para confirmar que la situación de equilibrio calculada es correcta, basta con comprobar que la referida bomba proporciona una altura positiva en la situación más desfavorable, que sería la inicial, en la que el caudal sería el máximo que circule durante todo el proceso de llenado.

CAPÍTULO 9. FLUJOS TURBULENTOS

El ritmo de variación de la altura del líquido en el depósito superior viene dada por

$$A_D \frac{dh}{dt} = [Q_1(h) - Q_2(h)],$$

siendo $Q_1(h)$ y $Q_2(h)$ los caudales de las tuberías de descarga y alimentación, cuyas expresiones se pueden obtener de las ecuaciones (9.21.1) y (9.21.2), respectivamente. Integrando, resulta

$$t = \int_{h_i}^h \frac{A_D}{Q_1(h) - Q_2(h)} dh. \quad (9.21.4)$$

c) Aguas arriba de cada válvula se genera una onda de compresión y aguas abajo de la válvula de la tubería de alimentación se genera una onda de expansión. La velocidad de propagación de las ondas, según se indica en el enunciado, viene dada por $c = [1/a + \rho D/(Ee)]^{1/2}$. Sustituyendo los valores correspondientes a las tuberías de descarga y alimentación, resulta

$$c_1 = 1186,6 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$c_2 = 1230,7 \text{ m s}^{-1},$$

respectivamente.

El fluido experimenta unos incrementos de velocidad en el sentido de propagación de la onda

$$\Delta v_1 = v_1 = Q_1/(\pi D_1^2/4) = 1,3 \text{ m s}^{-1}$$

y

$$\Delta v_2 = \pm v_2 = \pm Q_2/(\pi D_2^2/4) = \pm 2,32 \text{ m s}^{-1}$$

(siendo $\Delta v > 0$ aguas arriba de la válvula y $\Delta v < 0$ aguas abajo), donde $Q_1 = 0,0278 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ y $Q_2 = 0,063 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ son los caudales que circulan por las tuberías de descarga y alimentación en el instante inicial, y que se obtienen de las ecuaciones (9.21.1) y (9.21.2), respectivamente, haciendo $h = h_i$. El incremento de presión que se produce en las tuberías viene dado por $\Delta p = \rho c \Delta v$, resultando

$$\Delta p_1 = 15,7 \text{ kgf cm}^{-2}$$

en la tubería de descarga, y

$$\Delta p_2 = \pm 29,1 \text{ kgf cm}^{-2}$$

en la tubería de alimentación. En realidad, la depresión que se produce aguas abajo de la válvula de la tubería de alimentación está limitada por el valor de la presión existente en ese punto en el momento del cierre. Describanse brevemente los procesos que tendrían lugar al propagarse las ondas a lo largo de las tuberías.

Problema 9.22. Detección de fuga en un oleoducto

Para transportar petróleo a una profundidad $H = 50$ m bajo la superficie del mar se utiliza una tubería de diámetro $D = 0,4$ m. A lo largo de un tramo de tubería aproximadamente horizontal se han colocado tres manómetros separados entre sí una distancia $L = 5$ km. Aguas abajo del tercer manómetro se ha medido un caudal, Q_s , un 2 % inferior al caudal de entrada a la tubería, Q_e , lo que obviamente indica la existencia de fugas. Se supondrá que existe un único punto de fuga en la tubería. Los manómetros primero, segundo y tercero miden presiones manométricas $p_1 = 7,2$ kgf cm⁻², $p_2 = 5,15$ kgf cm⁻² y $p_3 = 3,15$ kgf cm⁻², respectivamente. Supóngase que la densidad del agua del mar, ρ_m , se puede considerar uniforme e igual a 1030 kg m⁻³, y que la densidad y la viscosidad del petróleo son $\rho_p = 900$ kg m⁻³ y $\mu = 0,02$ poise, respectivamente. La rugosidad de la tubería es $\varepsilon = 0,4$ mm.

- Indicar razonadamente si la fuga se encuentra antes o después del segundo manómetro.
- Determinar el caudal de fuga y la distancia desde el punto de fuga al segundo manómetro.
- Determinar el área del orificio de fuga, suponiendo que el proceso de descarga es ideal.

Solución

a) La posición del punto de fuga debe satisfacer dos condiciones: que la presión en el interior de la tubería sea superior a la que existe en el exterior, y que sea compatible con los valores de pérdidas de carga y caudal y restantes datos indicados en el enunciado. La presión del agua en el exterior de la tubería,

$$p_{\text{ext}} = \rho_m g H = 5,15 \text{ kgf cm}^{-2},$$

resulta igual a la medida en el segundo manómetro, por lo que el punto de fuga estará localizado (si se satisface la segunda condición) aguas arriba de dicho manómetro.

b) Dado que el punto de fuga se encuentra entre los manómetros 1 y 2, la pérdida de carga entre los manómetros 2 y 3 vendrá dada por

$$H_{f_{2-3}} = \frac{p_2 - p_3}{\rho_p g} = f_s \frac{L}{D^5} \frac{8 Q_s^2}{\pi^2 g}, \quad (9.22.1)$$

siendo f_s el factor de fricción aguas abajo del punto de fuga. De la ecuación anterior, haciendo uso del diagrama de Moody,⁴ teniendo en cuenta que $\varepsilon/D = 0,001$, y sustituyendo valores, se obtiene $Q_s = 162,82 \text{ l s}^{-1}$. El caudal de fuga será, por tanto,

$$Q_f = 0,02 \frac{Q_s}{0,98} = 3,3229 \text{ l s}^{-1}.$$

Si x es la distancia entre el manómetro 2 y el punto de fuga, la pérdida de carga entre los manómetros 1 y 2 puede expresarse como sigue:

$$H_{f_{1-2}} = \frac{p_1 - p_2}{\rho_p g} = f_e \frac{L - x}{D^5} \frac{8 Q_e^2}{\pi^2 g} + f_s \frac{x}{D^5} \frac{8 Q_s^2}{\pi^2 g}, \quad (9.22.2)$$

siendo f_e el factor de fricción aguas arriba del punto de fuga y $Q_e = Q_s/0,98 = 166,14 \text{ l s}^{-1}$. De la ecuación anterior, utilizando el diagrama de Moody,⁵ y sustituyendo valores, se obtiene⁶

$$x = 1885 \text{ m.}$$

⁴ Utilizando la fórmula de Colebrook (ecuación (9.15.3)) e iterando, resulta $f_s = 0,02078$ y $\text{Re}_s = 233\,223$. Obviamente, a partir del diagrama de Moody no es posible conseguir una precisión tan elevada (precisión que, por otra parte, no resulta necesaria si se tiene en cuenta la incertidumbre experimental).

⁵ En este caso, en el proceso iterativo se llega a $f_e = 0,02075$ y $\text{Re}_e = 237\,982$.

⁶ Es conveniente destacar que, en el caso de que la presión en el exterior de la tubería hubiese sido inferior a la presión del petróleo en cualquier sección de la tubería, no podría haberse descartado que el punto de fuga estuviese localizado entre los manómetros 2 y 3. Compruébese que el sistema de ecuaciones que debe plantearse bajo tal suposición, correspondiente al formado por las ecuaciones (9.22.1) y (9.22.2),

$$H_{f_{1-2}} = \frac{p_1 - p_2}{\rho_p g} = f_e \frac{L}{D^5} \frac{8 Q_e^2}{\pi^2 g},$$

$$H_{f_{2-3}} = \frac{p_2 - p_3}{\rho_p g} = f_e \frac{x}{D^5} \frac{8 Q_e^2}{\pi^2 g} + f_s \frac{L - x}{D^5} \frac{8 Q_s^2}{\pi^2 g},$$

siendo x la distancia desde el manómetro 2 hasta el punto de fuga, se satisface para $Q_e = 164,80 \text{ l s}^{-1}$, $Q_s = 161,60 \text{ l s}^{-1}$, $\text{Re}_e = 236\,199$, $\text{Re}_s = 231\,475$, $f_e = 0,02076$, $f_s = 0,02079$, $x = 1838,5$.

c) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica en la sección de la tubería donde se produce la fuga, entre un punto situado dentro de la tubería y otro en el orificio de salida, donde se supondrá que la presión es p_{ext} , resulta⁷

$$\frac{p_i}{\rho_p} = \frac{p_{\text{ext}}}{\rho_p} + \frac{v_f^2}{2}, \quad (9.22.3)$$

donde v_f es la velocidad del petróleo en el orificio de salida y p_i , la presión del petróleo en la sección de la tubería en la que se encuentra el orificio,

$$p_i = p_1 - \rho_p g f_e \frac{L - x}{D^5} \frac{8 Q_e^2}{\pi^2 g}.$$

Sustituyendo valores, se obtiene $p_i = 579\,181 \text{ N m}^{-2}$ y $v_f = 12,82 \text{ m s}^{-1}$. Para el área del orificio, resulta

$$A_f = Q_f / v_f = 2,592 \text{ cm}^2.$$

Problema 9.23. Dimensiones básicas de una instalación de abastecimiento de agua

Una instalación de abastecimiento de agua consta de un depósito elevado abierto a la atmósfera, en el que la superficie libre del líquido se encuentra a 100 m de altura sobre el nivel del terreno, y una tubería principal conectada al depósito, compuesta de dos tramos en serie. El primer tramo, de longitud $L_1 = 300 \text{ m}$ y diámetro D_1 , en el que se supondrá un factor de fricción $f_1 = 0,012$, desciende desde el depósito hasta la superficie del terreno, y el segundo, horizontal, de longitud L_2 y diámetro $D_2 = D_1/2$, en el que se supondrá un factor de fricción $f_2 \approx 0,015$, tiene 100 tomas de agua distribuidas uniformemente a lo largo de toda su longitud, siendo iguales los caudales que salen por todas ellas. En la sección entre ambos tramos de la tubería principal se requiere una presión mínima $p_{i, \text{mín}} = 8 \text{ kgf cm}^{-2}$. Se supondrá que las pérdidas locales son despreciables, y que puede considerarse que el caudal disminuye linealmente y de forma continua en el segundo tramo de la tubería principal, hasta anularse en la sección final de esta, en la

⁷ Se ha despreciado la contracción del chorro y, de acuerdo con lo indicado en el enunciado, la pérdida de energía debida a efectos de la viscosidad.

que la presión es la atmosférica. Determinar:

- a) Longitud mínima del segundo tramo de tubería. (Despréciase la energía cinética específica en cualquier sección frente a las pérdidas de energía mecánica específica debidas a la fricción a lo largo de cada tramo de tubería.)
- b) Diámetros máximos de ambos tramos si L_2 tiene el valor mínimo calculado en el apartado anterior y el caudal máximo que se puede derivar por cada toma es $q_i = 5 \text{ l s}^{-1}$.

Solución

- a) $L_2 = 90 \text{ m}$.
- b) $D_1 = 0,327 \text{ m}$,
 $D_2 = 0,163 \text{ m}$.

Problema 9.24. Sistema de extracción del líquido contenido en un depósito mediante otro líquido inmiscible

Dos depósitos, que se denominarán D1 y D2, contienen, respectivamente, un líquido L1, de densidad $\rho_1 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu_1 = 0,01$ poise, y un líquido L2 más ligero, inmiscible con el anterior, de densidad $\rho_2 = 800 \text{ kg m}^{-3}$ y viscosidad $\mu_2 = 0,02$ poise. Ambos depósitos D1 y D2 están comunicados con un tercer depósito subterráneo, D0, a través de las respectivas tuberías rectas T1 y T2. Todo el volumen del depósito D0 está ocupado por dos capas superpuestas de los líquidos mencionados. La tubería T1, de longitud $L_1 = 500 \text{ m}$, rugosidad $\varepsilon_1 = 0,05 \text{ mm}$ y diámetro $D_1 = 25 \text{ cm}$, inyecta el líquido L1 en el depósito D0 por la parte inferior de este. La tubería T2, que tiene igual longitud y rugosidad que la anterior y un diámetro $D_2 = 20 \text{ cm}$, está acoplada a la parte superior del depósito D0, y permite la extracción del líquido L2. La diferencia de altura entre la superficie libre en el depósito D1, abierto a la atmósfera, y la superficie de separación de los líquidos L1 y L2 en el depósito D0 es $\Delta h = 60 \text{ m}$ (se puede considerar constante dado que los depósitos D1 y D0 tienen grandes dimensiones). El depósito D2

está cerrado y contiene aire a una presión manométrica $p_0 = 2 \text{ kgf cm}^{-2}$, que se mantiene constante, independientemente de la altura del líquido en D2. Desde el fondo del depósito D2 sale una tercera tubería T3, horizontal, de diámetro $D_3 = 10 \text{ cm}$, longitud despreciable y provista de una válvula, que descarga a la atmósfera un caudal Q de líquido L2. La tubería T3 se encuentra a una altura $H = 40 \text{ m}$ por debajo de la superficie libre del líquido en el depósito D1. Se despreciarán las pérdidas de carga local en las salidas desde los depósitos hacia las distintas tuberías.

- a) Determinar la presión en la superficie de separación de los líquidos en el depósito D0 cuando la superficie libre en el depósito D2 se mantiene constante en el tiempo y se descarga un caudal $Q = 30 \text{ l s}^{-1}$ a través de la tubería T3.
- b) En una situación en la que el grado de apertura de la válvula de la tubería T3 corresponde a un coeficiente de pérdida de carga en dicha válvula $K = 10$, y en la que el nivel de la superficie libre en el depósito D2 se mantiene constante en el tiempo, determinar el caudal que circula por la instalación y la diferencia de altura entre las superficies libres en los depósitos D1 y D2.

Solución

- a) $p = 5,82 \times 10^5 \text{ Pa}$.
- b) $Q = 66,8 \text{ l s}^{-1}$; $h = 32,3 \text{ m}$.

Problema 9.25. Conducción de agua con un tramo de tuberías en paralelo

Un sistema de tuberías consta de un primer tramo, de longitud $L_1 = 1000 \text{ m}$ y diámetro $D_1 = 60 \text{ cm}$, que transporta agua desde el punto de entrada A hasta el punto B, del que parten tres tuberías conectadas en paralelo que se unen de nuevo en el punto C. Las longitudes y diámetros de estas tres tuberías son los siguientes: $L_2 = 1200 \text{ m}$, $D_2 = 30 \text{ cm}$; $L_3 = 800 \text{ m}$, $D_3 = 40 \text{ cm}$; $L_4 = 700 \text{ m}$, $D_4 = 25 \text{ cm}$. Desde el punto de conexión C parte un tramo final

hasta el punto de descarga D, con una longitud $L_5 = 10$ km y un diámetro D_5 . Todas las tuberías son de hierro fundido, con rugosidad $\varepsilon = 0,25$ mm. Para simplificar el problema, en las tres tuberías en paralelo se supondrá un factor de fricción igual a 0,019. Todas las tuberías son horizontales. Calcular el diámetro D_5 que debe tener el último tramo de tubería, de forma que la altura de pérdida de carga entre los puntos de entrada y descarga, A y D, sea $H_{AD} = 17$ m cuando se transporta un caudal $Q = 0,5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Solución

$\Delta p_{AB}/\rho g = 4,4$ m; $\Delta p_{BC}/\rho g = 10,2$ m; $\Delta p_{CD}/\rho g = 2,4$ m; $D_5 = 1,08$ m.

Problema 9.26. Diseño básico de un sistema de bombeo desde dos depósitos

Se quiere trasvasar agua desde dos depósitos D1 y D2 hasta otro más elevado D3, en el que la superficie libre del agua está a unas alturas $H_{1-3} = 20$ m y $H_{2-3} = 10$ m sobre las superficies libres en D1 y D2, respectivamente. El caudal de agua impulsado desde el depósito D1 debe ser $Q_1 = 0,1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Para ello, se pretende utilizar en principio dos bombas idénticas de las que ya se dispone (una para cada depósito), cuya curva característica es la siguiente (Q en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$, H_m en m):

$$H_m = 20 + 50 Q - 500 Q^2,$$

que tomen agua desde los depósitos D1 y D2, respectivamente, y la impulsen a través de sendas tuberías de longitudes $L_1 = 35$ m y $L_2 = 15$ m y diámetros $D_1 = 12$ cm y $D_2 = 8$ cm. Se despreciarán las longitudes de las tuberías de aspiración.

Las tuberías de impulsión se unen en sus extremos, y a partir del punto de unión el agua procedente de ambos depósitos se impulsa a través de una única tubería, de longitud $L_3 = 75$ m y diámetro $D_3 = 22$ cm, en la que existe una válvula V3 con un coeficiente de pérdida de carga $K_3 = 3,5$, y cuyo extremo final está sumergido en el agua contenida en el depósito D3.

Los tres depósitos son de grandes dimensiones y están abiertos a la atmósfera. Se supondrá un factor de fricción $f = 0,02$ en todas las tuberías.

Se despreciarán todas las pérdidas de carga locales para cuyo cálculo no se disponga de datos.

- a) Calcular el caudal total que se trasvasa al depósito superior.
- b) Determinar si en la tubería que impulsa el agua desde el depósito D1 es suficiente utilizar una de las dos bombas de las que se dispone, instalando una válvula V1 en serie, en cuyo caso se calculará el coeficiente de pérdida de carga que debe tener esta, o bien es necesaria una bomba adicional en serie, en cuyo caso se calculará la altura manométrica que debe proporcionar la nueva bomba.

Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito D2 y el punto N de conexión entre las tuberías de impulsión, y entre N y la superficie libre en el depósito D3, resulta

$$H_{2-3} + H_{m_2} = H_N + f \frac{L_2}{D_2} \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 g D_2^4}, \quad (9.26.1)$$

$$H_N = H_{1-3} + \frac{8 Q_3^2}{\pi^2 g D_3^4} \left(f \frac{L_3}{D_3} + K_3 + 1 \right), \quad (9.26.2)$$

siendo $H_{m_2} = 20 + 50 Q_2 - 500 Q_2^2$ y H_N la altura total en N. La superficie libre del agua en el depósito D1 se ha tomado como origen de cotas. Eliminando H_N entre las dos ecuaciones y sustituyendo $Q_3 = Q_1 + Q_2$, resulta

$$20 + 50 Q_2 - 500 Q_2^2 = H_{1-3} - H_{2-3} + \frac{f L_2 8 Q_2^2}{D_2 \pi^2 g D_2^4} + \frac{8 (Q_1 + Q_2)^2}{\pi^2 g D_3^4} \left(\frac{f L_3}{D_3} + K_3 + 1 \right), \quad (9.26.3)$$

de donde se obtiene, sustituyendo valores, $Q_2 = 0,025 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, resultando

$$Q_3 = 0,125 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

b) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre del agua en el depósito D1 y el punto de conexión N, resulta

$$H_{m_1} = H_N + f \frac{L_1}{D_1} \frac{8 Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} + H_{L_1}, \quad (9.26.4)$$

donde se ha supuesto que es necesaria una válvula que produzca una pérdida de carga H_{L_1} para conseguir un caudal $Q_1 = 0,1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, y donde $H_{m_1} = 20 + 50 Q_1 - 500 Q_1^2$. Eliminando H_N entre las ecuaciones (9.26.2) y (9.26.4), resulta

$$H_{m_1} = H_{1-3} + f \frac{L_1}{D_1} \frac{8 Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} + H_{L_1} + \frac{8 Q_3^2}{\pi^2 g D_3^4} \left(f \frac{L_3}{D_3} + K_3 + 1 \right), \quad (9.26.5)$$

de donde se obtiene $H_{L_1} = -29,5 \text{ m}$. El signo negativo indica que, en realidad, en la tubería que sale del depósito D1 es necesaria una bomba adicional en serie que proporcione una altura manométrica

$$H_m = 29,5 \text{ m},$$

en lugar de una válvula.

Problema 9.27. Trasvase de agua entre depósitos mediante una tubería salvando una elevación del terreno (II)

Dos depósitos que contienen agua, de grandes dimensiones y abiertos a la atmósfera, están comunicados entre sí mediante una tubería con dos tramos que debe salvar una elevación del terreno. Cada uno de los extremos de la tubería está conectado al fondo de cada depósito. El punto de unión entre los dos tramos, P, que es el de mayor elevación de la tubería, está situado a una altura $H_1 = 5 \text{ m}$ por encima de la superficie libre del agua en el depósito 1 y a una altura $H_2 = 10 \text{ m}$ por encima de la superficie libre en el depósito 2. El primer tramo de tubería, que parte del depósito 1, tiene una longitud $L_1 = 50 \text{ m}$, y el segundo tiene una longitud $L_2 = 100 \text{ m}$ y un diámetro $D_2 = 20 \text{ cm}$. Ambos tramos tienen una rugosidad $\varepsilon = 0,2 \text{ mm}$. Se despreciarán las pérdidas de carga locales en la zona de entrada de la tubería desde el depósito 1 y en la zona de unión entre los dos tramos de tubería. Se tomará una presión de vapor $p_v = 0,02 \text{ kgf cm}^{-2}$. Calcular el diámetro mínimo del primer tramo de la tubería, D_1 , que permite trasvasar agua desde el depósito 1 al 2.

Solución

Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre el punto P y la superficie libre en el depósito 2, se obtiene

$$\frac{p_v}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + H_2 = \frac{p_{at}}{\rho g} + \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + 1\right) \frac{v_2^2}{2g}, \quad (9.27.1)$$

y sustituyendo valores,

$$0,2 + 10 = 10 + \left(f_2 \frac{100}{0,2}\right) \frac{v_2^2}{2g}. \quad (9.27.2)$$

Dado que f_2 depende de v_2 , debe seguirse un procedimiento iterativo. En el diagrama de Moody debe entrarse con $\varepsilon/D_2 = 10^{-3}$. La solución es

$$v_2 = 0,601 \text{ m s}^{-1},$$

para la que

$$f_2 = 0,0217, (\text{Re})_2 = 120178.$$

8

Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la superficie libre en el depósito 1 y el punto P, se obtiene

$$\frac{p_{at}}{\rho g} = H_1 + \frac{p_v}{\rho g} + \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + 1\right) \frac{v_1^2}{2g}, \quad (9.27.3)$$

y sustituyendo valores,

$$4,8 = \left(f_1 \frac{50}{D_1} + 1\right) \frac{v_1^2}{2g}. \quad (9.27.4)$$

Dado que f_1 y $v_1 = v_2 D_2^2 / D_1^2$ dependen de D_1 , también ahora debe seguirse un procedimiento iterativo. La solución es

$$D_1 = 0,0957 \text{ m},$$

para la que

$$f_1 = 0,0243, v_1 = 2,623 \text{ m s}^{-1}, (\text{Re})_1 = 251079.$$

⁸ Las soluciones en este problema han sido obtenidas haciendo uso de la fórmula de Colebrook (ecuación (9.15.3)) para calcular los factores de fricción. Es obvio que la utilización del diagrama de Moody no permite obtener soluciones tan precisas.

Problema 9.28. Flujo de agua a través del sistema de tubos en paralelo del Problema 7.17

Como continuación del Problema 7.17, suponiendo que el líquido especificado en su enunciado es sustituido por agua que circula isotérmicamente por los tubos, calcular la velocidad del agua si esta es impulsada con la misma potencia calculada en dicho problema.

Solución

Se supondrá en principio que el flujo es turbulento, y que el caudal a través de cada tubo satisfará, por tanto, la expresión

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = f \frac{8 Q_i^2 L}{\pi^2 g D^5}.$$

Dado que f depende del caudal, el caudal se obtiene mediante un procedimiento iterativo, resultando $Q_i = 1,4 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, con $f = 0,0285$, y por tanto una velocidad media

$$U = 1,78 \text{ m s}^{-1}.$$

El número de Reynolds es $\text{Re} = 1,78 \times 10^4$, por lo que la hipótesis inicial era correcta.

Problema 9.29. Embalse con chimenea de equilibrio

En una instalación hidráulica existe un embalse de grandes dimensiones, abierto a la atmósfera, en el que el agua alcanza una altura $H_E = 100 \text{ m}$ sobre el fondo. El embalse está comunicado con un depósito D, también abierto a la atmósfera, con sección horizontal constante con la altura de área $A_D = 10 \text{ m}^2$, mediante una tubería de diámetro $D_1 = 1 \text{ m}$, longitud $L_1 = 1 \text{ km}$ y rugosidad $\varepsilon_1 = 0,2 \text{ cm}$. Esta tubería es horizontal y sus extremos están conectados a los fondos de embalse y depósito. El depósito D es a su vez descargado a la atmósfera mediante una tubería conectada a su fondo, que consta de dos tramos. El primer tramo tiene un diámetro $D_2 = 30 \text{ cm}$, una longitud $L_2 = 100 \text{ m}$ y una rugosidad $\varepsilon_2 = 0,006 \text{ cm}$. El segundo tramo

tiene un diámetro $D_3 = 15$ cm, una longitud $L_3 = 50$ m y una rugosidad $\varepsilon_3 = 0,003$ cm. El extremo de la tubería termina en una boquilla de diámetro $D_4 = 5$ cm, y está situado a una altura $H_s = 60$ m por debajo del fondo del depósito. Se despreciarán las pérdidas de carga locales para cuyo cálculo no se disponga de datos.

- Determinar la altura de la superficie libre del agua en el depósito D en un cierto instante en el que dicha superficie se eleva a una velocidad de 1 cm s^{-1} .
- Describir los procesos que tienen lugar en toda la instalación cuando se cierra instantáneamente una válvula situada en el extremo de la tubería de descarga del depósito D.

Solución

- a) $H_D = 99,912$ m. ($Q_1 = 0,2066 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$; $Q_2 = 0,1066 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.)

Problema 9.30. Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (I)

Una instalación hidráulica permite elevar agua desde los depósitos D1 y D2 a un tercer depósito más elevado D3. Las superficies libres del agua en los depósitos D2 y D3 se encuentran a alturas $H_2 = 1$ m y H_3 por encima de la superficie libre en el depósito D1. Desde los depósitos D1 y D2, las bombas B1 y B2, respectivamente, toman agua mediante tuberías de aspiración de longitudes $L_{a1} = 2$ m y $L_{a2} = 0,5$ m, y la impulsan a través de tuberías de longitudes $L_{i1} = 6$ m y $L_{i2} = 5$ m, respectivamente, cuyos extremos se unen en un nodo P, desde donde parte una tubería de longitud $L_{a3} = 10$ m en cuyo extremo está conectada la bomba B3, que impulsa agua hasta el fondo del depósito D3 mediante una tubería de longitud $L_{i3} = 15$ m. Los diámetros de los tramos de tuberías cuyas longitudes se han denotado con los subíndices 1, 2 y 3 son, respectivamente, $D_1 = 0,1$ m, $D_2 = 0,2$ m y $D_3 = 0,3$ m. El nodo P está además conectado con el fondo del depósito D2 mediante una tubería de longitud $L_4 = 1,5$ m y diámetro $D_4 = 0,05$ m, en la que existe una válvula con un coeficiente de pérdida de carga local $K_4 = 5$. Se supondrá un factor de

fricción en todas las tuberías $f = 0,02$. Las bombas B1, B2 y B3 tienen, respectivamente, las siguientes curvas características: $H_{m1} = 30 [1 - (Q_1/0,02)^2]$, $H_{m2} = 40 [1 - (Q_2/0,025)^2]$ y $H_{m3} = 50 [1 - (Q_3/0,04)^2]$ (H_m en m y Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$). Se despreciarán todas las pérdidas locales que no puedan determinarse a partir de los datos proporcionados.

Determinar el valor máximo de la altura H_3 por encima del cual no es posible bombear agua al depósito D3.

Solución

Del sistema de ecuaciones

$$30 \left[1 - \left(\frac{Q_1}{0,02} \right)^2 \right] + 50 \left[1 - \left(\frac{Q_3}{0,04} \right)^2 \right] = H_3 + \left(f \frac{L_{a1}}{D_1} + f \frac{L_{i1}}{D_1} \right) \frac{v_1^2}{2g} + \left(f \frac{L_{a3}}{D_3} + f \frac{L_{i3}}{D_3} + 1 \right) \frac{v_3^2}{2g},$$

$$40 \left[1 - \left(\frac{Q_2}{0,025} \right)^2 \right] + 50 \left[1 - \left(\frac{Q_3}{0,04} \right)^2 \right] = H_3 - H_2 + \left(f \frac{L_{a2}}{D_2} + f \frac{L_{i2}}{D_2} \right) \frac{v_2^2}{2g} + \left(f \frac{L_{a3}}{D_3} + f \frac{L_{i3}}{D_3} + 1 \right) \frac{v_3^2}{2g},$$

$$40 \left[1 - \left(\frac{Q_2}{0,025} \right)^2 \right] = \left(f \frac{L_{a2}}{D_2} + f \frac{L_{i2}}{D_2} \right) \frac{v_2^2}{2g} + \left(f \frac{L_4}{D_4} + K_4 + 1 \right) \frac{v_4^2}{2g},$$

$$v_1 = \frac{4 Q_1}{\pi D_1^2},$$

$$v_2 = \frac{4 Q_2}{\pi D_2^2},$$

$$v_3 = \frac{4 Q_3}{\pi D_3^2},$$

$$v_4 = \frac{4 Q_4}{\pi D_4^2},$$

$$Q_3 + Q_4 = Q_1 + Q_2,$$

se obtiene, sustituyendo valores y mediante un proceso iterativo,

$$H_{3,\text{máx}} = 78,78 \text{ m.}$$

[En cualquier problema en general, y especialmente en problemas como este, se recomienda plantear siempre de forma clara la ecuación o el sistema de ecuaciones que permiten resolverlo, identificando las incógnitas y sin sustituir los valores numéricos de los parámetros conocidos, antes de iniciar el procedimiento (iterativo en este caso) para su resolución.]

Problema 9.31. Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (II)

En una instalación se eleva agua desde un depósito inferior D1 a otros dos depósitos D2 y D3, en los que la superficie libre se encuentra situada, en el instante inicial, a unas alturas $H_2 = 18 \text{ m}$ y $H_3 = 20 \text{ m}$, respectivamente, por encima de la superficie libre del agua en el depósito D1. Una bomba toma agua del depósito D1 y la impulsa a través de una tubería T1 de longitud $L_1 = 15 \text{ m}$ y diámetro $D_1 = 15 \text{ cm}$, que posteriormente se bifurca en dos tuberías T2 y T3, de longitudes $L_2 = L_3 = 10 \text{ m}$ y diámetros $D_2 = D_3 = 10 \text{ cm}$, cada una de ellas respectivamente conectada con la parte inferior de los depósitos D2 y D3. En la tubería T2 existe una válvula V, con un coeficiente de pérdida de carga K_v , que permite regular el caudal en dicha tubería. La curva característica de la bomba es $H = 30[1 - (Q/0,04)^2]$ (H en m y Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$). Se supondrá el mismo factor de fricción en las tres tuberías, $f = 0,02$. Debido a las dimensiones de los depósitos D1 y D2, puede suponerse que el nivel de agua en ellos se mantiene constante, mientras que el del depósito D3 (aunque también de grandes dimensiones) va aumentando sensiblemente con el tiempo. Despréciense las pérdidas locales, excepto la que existe en la válvula V y la pérdida de energía cinética de los chorros de salida. Determinar:

- Caudal que suministra la bomba en el instante inicial y valor del coeficiente de pérdida de carga de la válvula, teniendo en cuenta que en dicho instante los caudales de las tuberías T2 y T3 son iguales.
- Máximo nivel que puede alcanzar el agua en el depósito D3 (supóngase que el valor de K_v es el calculado en el apartado anterior).

Solución

- Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre las super-

ficies libres en los depósitos D1 y D3, resulta

$$30 \left[1 - \left(\frac{Q_1}{0,04} \right)^2 \right] - H_3 = f \frac{8 Q_1^2 L_1}{\pi^2 g D_1^5} + \frac{8 Q_3^2}{\pi^2 g D_3^4} \left(f \frac{L_3}{D_3} + 1 \right),$$

de donde, teniendo en cuenta que $Q_1 = 2 Q_2 = 2 Q_3$, se obtiene

$$Q_1 = 0,0225 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre las superficies libres en los depósitos D1 y D2, resulta

$$30 \left[1 - \left(\frac{Q_1}{0,04} \right)^2 \right] - H_2 = f \frac{8 Q_1^2 L_1}{\pi^2 g D_1^5} + \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(f \frac{L_2}{D_2} + 1 + K_v \right),$$

de donde se obtiene

$$K_v = 19,1.$$

b) De las ecuaciones anteriores, teniendo en cuenta que ahora $Q_3 = 0$, se obtiene $Q_1 = Q_2 = 0,018 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ y

$$H_{3,\text{máx}} = 23,8 \text{ m}.$$

Problema 9.32. Sistema de bombeo en circuito cerrado (I)

Una instalación consta de un depósito cerrado, lleno parcialmente de agua, una bomba centrífuga y tuberías de conexión. El aire existente sobre la superficie libre del agua en el depósito está a una presión p_0 . La bomba, situada a una altura $H = 20 \text{ m}$ por debajo de la superficie libre del agua en el depósito, tiene una curva característica que puede aproximarse por la expresión siguiente: $H = 40[1 - (Q/0,04)^2]$ (H en m y Q en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$), y eleva agua hasta el depósito mediante una tubería T1, de longitud $L_1 = 400 \text{ m}$, diámetro $D_1 = 10 \text{ cm}$ y rugosidad $\varepsilon_1 = 0,1 \text{ mm}$, en la que existen dos codos, cada uno de ellos con un coeficiente de pérdida de carga local $K_1 = 0,5$. Del depósito sale una tubería T2, de longitud $L_2 = 2000 \text{ m}$, diámetro $D_2 = 15 \text{ cm}$ y rugosidad $\varepsilon_2 = 0,2 \text{ mm}$, cuyo extremo está conectado con la aspiración de la bomba (formando, por tanto, un circuito cerrado). Los puntos de conexión de las tuberías con el depósito están por debajo del nivel de la superficie libre. La tubería T2 tiene acoplada una válvula que permite regular el caudal, con un coeficiente de pérdida de carga, K_2 , dependiente del grado de apertura.

Se despreciarán las pérdidas de carga locales que no puedan determinarse a partir de los datos proporcionados. Calcular:

- El caudal que circula por el circuito cuando el coeficiente de pérdida de carga de la válvula es $K_2 = 6$.
- El valor máximo de la presión p_0 que puede existir en el depósito sin que se alcance una presión superior a 7 kgf cm^{-2} en algún punto del circuito, para el mismo valor de K_2 del apartado anterior.
- El máximo valor que puede tener el coeficiente K_2 para que no se alcance una presión en la aspiración de la bomba inferior a $0,9 p_0$, suponiendo que el valor de la presión p_0 existente en el depósito es el calculado en el apartado anterior. Supóngase (solo en este apartado) un factor de fricción en las tuberías $f = 0,022$.

Solución

a) Aplicando la ecuación de conservación de la energía mecánica entre la impulsión de la bomba y la superficie libre en el depósito, entre la superficie libre en el depósito y la aspiración de la bomba, y entre la aspiración y la impulsión de la bomba, resulta, respectivamente,

$$\frac{p_{\text{imp}}}{\rho g} + \frac{v_{\text{imp}}^2}{2g} + z_{\text{imp}} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + 2K_1 + 1 \right), \quad (9.32.1)$$

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = \frac{p_{\text{asp}}}{\rho g} + \frac{v_{\text{asp}}^2}{2g} + z_{\text{asp}} + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_2 \right), \quad (9.32.2)$$

$$40 \left[1 - \left(\frac{Q}{0,04} \right)^2 \right] + \frac{p_{\text{asp}}}{\rho g} + \frac{v_{\text{asp}}^2}{2g} + z_{\text{asp}} = \frac{p_{\text{imp}}}{\rho g} + \frac{v_{\text{imp}}^2}{2g} + z_{\text{imp}}. \quad (9.32.3)$$

Sumando las tres ecuaciones, se obtiene

$$40 \left[1 - \left(\frac{Q}{0,04} \right)^2 \right] = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + 2K_1 + 1 \right) + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + K_2 \right) \quad (9.32.4)$$

(la altura que proporciona la bomba es la necesaria para compensar las pérdidas de altura en la instalación; esta expresión podría haberse planteado directamente). Utilizando el diagrama de Moody, mediante iteraciones, resulta finalmente

$$Q = 0,0168 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$

con $f_1 = 0,021$ y $f_2 = 0,022$.

b) Haciendo $p_{\text{imp}} = 7 \text{ kgf cm}^{-2}$, de la ecuación (9.32.1) se obtiene

$$p_0 = 3,02 \text{ kgf cm}^{-2}.$$

c) Haciendo $p_{\text{asp}} = 0,9 p_0$, sumando las ecuaciones (9.32.1) y (9.32.3), y despejando, se obtiene $Q = 0,0131 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Finalmente, de la ecuación (9.32.2) se obtiene

$$K_2 = 530.$$

Problema 9.33. Altura máxima de elevación en un sistema de bombeo (III)

En la instalación hidráulica de la figura se eleva agua desde los depósitos D1 y D2 a un tercer depósito más elevado D3. Las tuberías de aspiración e impulsión de cada bomba se denotan con los subíndices a e i , respectivamente, seguidos del número que corresponde a la bomba a la que están conectadas. Las magnitudes geométricas de la instalación son las siguientes:

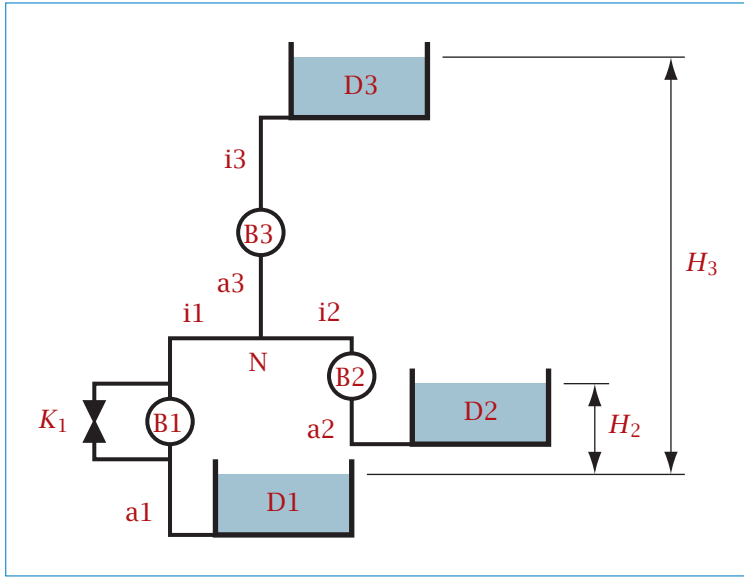
$L_{a1} = 2,5 \text{ m}$; $L_{i1} = 5,5 \text{ m}$; $L_{a2} = 1,5 \text{ m}$; $L_{i2} = 4 \text{ m}$; $L_{a3} = 9 \text{ m}$; $L_{i3} = 16 \text{ m}$;
 $D_{i1} = D_{a1} = D_1 = 0,1 \text{ m}$; $D_{i2} = D_{a2} = D_2 = 0,2 \text{ m}$; $D_{i3} = D_{a3} = D_3 = 0,29 \text{ m}$;
 $H_2 = 1,2 \text{ m}$.

La altura H_3 no es conocida. El diámetro de la tubería en la que se encuentra la válvula conectada en paralelo con la bomba B1, que tiene un coeficiente de pérdida de carga $K_1 = 6$, es $D_v = 0,05 \text{ m}$, y su longitud es despreciable. Se supondrá un factor de fricción en todas las tuberías $f = 0,016$. Las bombas B1, B2 y B3 tienen, respectivamente, las siguientes curvas características:

$$\begin{aligned} H_{m1} &= 28 \left[1 - (Q_{1b}/0,021)^2 \right], \\ H_{m2} &= 36 \left[1 - (Q_2/0,026)^2 \right], \\ H_{m3} &= 60 \left[1 - (Q_3/0,042)^2 \right] \quad (H_m \text{ en m y } Q \text{ en m}^3 \text{ s}^{-1}), \end{aligned}$$

donde Q_{1b} es el caudal que circula por la bomba (al plantear las ecuaciones, se denotará con Q_1 el que circula por las tuberías a1 e i1). Se despreciarán todas las pérdidas locales que no puedan determinarse a partir de los datos proporcionados.

Determinar el valor máximo de la altura H_3 a partir del cual no es posible bombear agua al depósito D3.



Solución

Aplicando la ecuación (B.5.1) de conservación de la energía mecánica entre las superficies libres del agua en los depósitos D1, D2 y D3, se obtiene

$$28 \left[1 - \left(\frac{Q_{1b}}{0,021} \right)^2 \right] + 60 \left[1 - \left(\frac{Q_3}{0,042} \right)^2 \right] = \frac{Q_1}{|Q_1|} \left(f \frac{L_{a1}}{D_1} + f \frac{L_{i1}}{D_1} \right) \frac{v_1^2}{2g} + \left(f \frac{L_{a3}}{D_3} + f \frac{L_{i3}}{D_3} + 1 \right) \frac{v_3^2}{2g} + H_3,$$

$$H_{m2} \left[1 - \left(\frac{Q_2}{0,026} \right)^2 \right] + 60 \left[1 - \left(\frac{Q_3}{0,042} \right)^2 \right] = \left(f \frac{L_{a2}}{D_2} + f \frac{L_{i2}}{D_2} \right) \frac{v_2^2}{2g} + \left(f \frac{L_{a3}}{D_3} + f \frac{L_{i3}}{D_3} + 1 \right) \frac{v_3^2}{2g} + H_3 - H_2.$$

En el acoplamiento en paralelo de la bomba B1 y la válvula,

$$28 \left[1 - \left(\frac{Q_{1b}}{0,021} \right)^2 \right] = K_1 \frac{v_{1v}^2}{2g}.$$

CAPÍTULO 9. FLUJOS TURBULENTOS

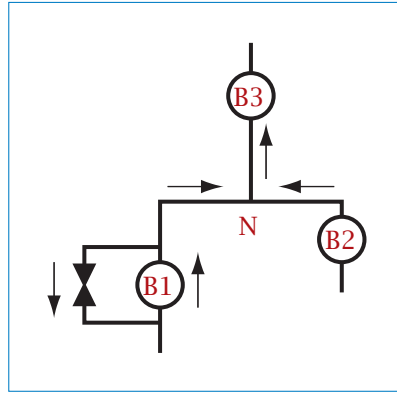
Por otra parte,

$$v_1 = \frac{4 Q_1}{\pi D_1^2}, \quad v_2 = \frac{4 Q_2}{\pi D_2^2}, \quad v_3 = \frac{4 Q_3}{\pi D_3^2}, \quad v_{1v} = \frac{4 Q_{1v}}{\pi D_v^2},$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2,$$

$$Q_1 = Q_{1b} - Q_{1v}.$$

Obsérvese que se ha tomado el criterio de signos para los caudales indicado en el siguiente esquema (las flechas indican el sentido positivo):



De las ecuaciones anteriores, haciendo $Q_3 = 0$, se obtiene

$$H_{3,\text{máx}} = 86,93 \text{ m.}$$

Combruébese que resulta $Q_1 = -0,0139 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $Q_2 = 0,0139 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $Q_{1b} = 0,00447 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $Q_{1v} = 0,0184 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

Problema 9.34. Hipótesis de flujo cuasiestacionario y tiempo de establecimiento del flujo en la descarga de un depósito por gravedad a través de una tubería

Un depósito cilíndrico de grandes dimensiones, abierto a la atmósfera y con sección transversal de área A , contiene un líquido cuya superficie libre está inicialmente a una altura H con respecto al fondo, donde se halla conectada una tubería horizontal de longitud L y diámetro D ($D/L \ll 1$), que descarga

en régimen turbulento a la atmósfera a través de una válvula situada en su extremo. El factor de fricción en la tubería es f . En la sección de entrada a la tubería desde el depósito se supondrá un coeficiente de pérdida de carga local K_e . En el instante inicial, se abre instantáneamente la válvula, para la que se supondrá un coeficiente de pérdida de carga K_v .

- Suponiendo que el flujo puede suponerse cuasiestacionario, determinar el tiempo que transcurrirá desde la situación inicial indicada hasta el instante en el que la superficie libre del líquido en el depósito alcance una altura $H/4$ con respecto al fondo. Hacer aplicación a un caso con los siguientes datos: $A = 5 \text{ m}^2$; $H = 3 \text{ m}$; $L = 5 \text{ m}$; $D = 10 \text{ cm}$; $f = 0,02$; $K_e = 0,5$; $K_v = 0,5$.
- Determinar un tiempo típico de establecimiento del flujo; es decir, el que transcurre desde el instante inicial hasta aquel en que se alcanza una cierta fracción del caudal de descarga cuasiestacionario correspondiente a la altura inicial H .
- Indicar las relaciones que deben satisfacerse entre los parámetros que intervienen en el problema para que sean aceptables las hipótesis adoptadas para resolver el apartado a) y determinar en qué medida se satisfacen para los datos numéricos proporcionados.

Solución

a)

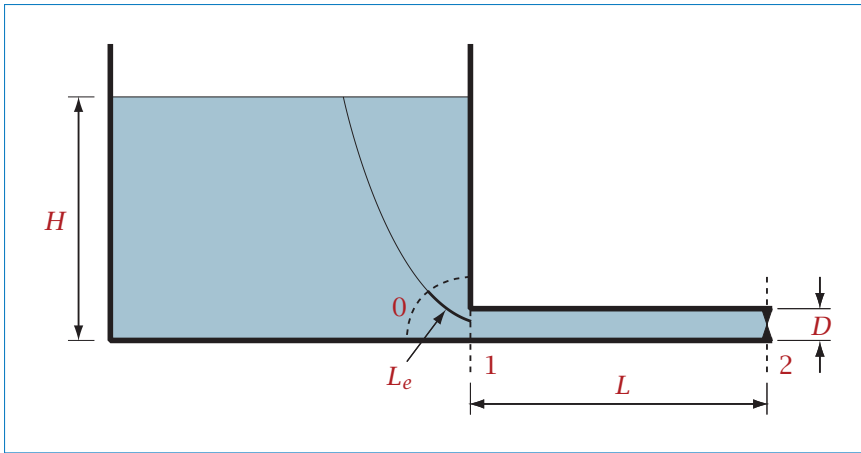
$$t = \frac{4A}{\pi D^2} \sqrt{\frac{f \frac{L}{D} + K_e + K_v + 1}{2g}} H^{1/2} = 431,17 \text{ s.}$$

b) La ecuación (B.5.5) de conservación de la energía mecánica entre las secciones 1 y 2 indicadas en la figura adjunta, teniendo en cuenta que U es el potencial gravitatorio y obviamente $U_1 = U_2 = 0$, y que $p_2 = 0$ (se utilizarán presiones manométricas en lo que sigue), queda de la forma

$$\frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2} v^2 \left(f \frac{L}{D} + K_e + K_v \right) + L \frac{dv}{dt}. \quad (9.34.1)$$

La presión en la sección 1 puede determinarse integrando la ecuación (B.4.1) de Euler-Bernoulli entre la superficie libre del agua en el depósito y la sección 1:

$$gH - \frac{p_1}{\rho} - \frac{1}{2} v^2 = L_e \frac{dv}{dt}, \quad (9.34.2)$$



siendo L_e el tamaño de la zona dentro del depósito (delimitada de forma simbólica en la figura por la sección 0, indicada con línea discontinua), aguas arriba de la sección 1, en la que la aceleración que se produce en el fluido al abrir la válvula es apreciable. Despejando p_1/ρ en la ecuación (9.34.2) y sustituyendo en (9.34.1), se obtiene

$$gH = \frac{1}{2}v^2 \left(f \frac{L}{D} + K_e + K_v + 1 \right) + (L + L_e) \frac{dv}{dt}. \quad (9.34.3)$$

Dado que $D/L \ll 1$, cabe deducir que $L_e \ll L$. Despreciando L_e frente a L en la ecuación anterior, esta puede integrarse para obtener la solución

$$v = v_\infty \tanh \frac{t}{t_c},$$

siendo

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2gH}{f \frac{L}{D} + K_e + K_v + 1}}$$

la velocidad que se alcanzará en estado cuasiestacionario para una altura de la superficie libre del agua en el depósito igual a H , y

$$t_c = \frac{v_\infty L}{gH}$$

un tiempo característico de establecimiento del flujo.⁹

Sustituyendo valores, resulta

$$v_\infty = 4,429 \text{ m s}^{-1},$$

⁹ Obsérvese que $v(t = t_c) = 0,762 v_\infty$.

$$t_c = 0,753 \text{ s.}$$

Puede comprobarse que, por ejemplo, en $t = 2 \text{ s}$ se alcanza el 99% del valor de la velocidad correspondiente a flujo cuasiestacionario. Obsérvese que t_c es del orden del tiempo de residencia de una partícula fluida en la tubería.

- c) Determinése en qué medida las hipótesis adoptadas son aceptables.

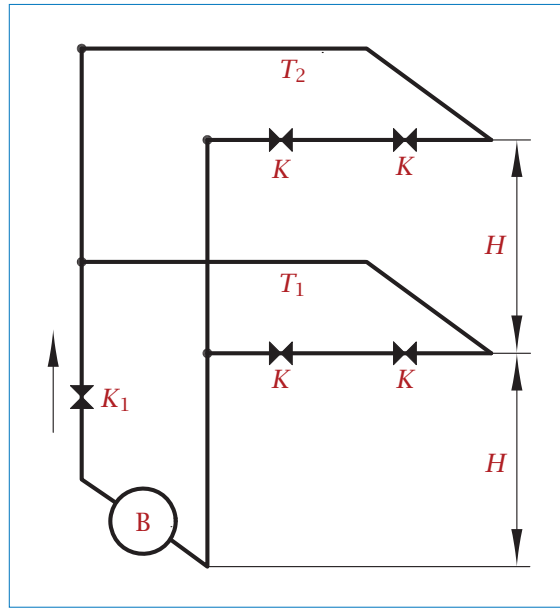
Problema 9.35. Sistema de bombeo en circuito cerrado (II)

La bomba B impulsa un caudal de agua $Q = 2,5 \text{ l s}^{-1}$ en el sistema cerrado de tuberías representado en la figura, formado por los tramos horizontales T_1 y T_2 y por las tuberías verticales que los conectan con la bomba. El desnivel que existe entre la bomba y la tubería T_1 y entre las tuberías T_1 y T_2 es $H = 3 \text{ m}$. Los diámetros, longitudes y factores de fricción de las tuberías T_1 y T_2 son, respectivamente, $D_1 = 20 \text{ mm}$, $L_1 = 20 \text{ m}$, $f_1 = 0,015$, y $D_2 = 18 \text{ mm}$, $L_2 = 16 \text{ m}$, y $f_2 = 0,012$. En todas las tuberías verticales, de diámetro $D = 25 \text{ mm}$, el factor de fricción es $f = 0,015$. Se despreciarán las longitudes de las restantes tuberías representadas en la figura. Todas las válvulas instaladas en las tuberías T_1 y T_2 tienen un coeficiente de pérdida de carga $K = 5$, mientras que la válvula instalada en la tubería de impulsión de la bomba tiene un coeficiente de pérdida de carga $K_1 = 10$.

Se despreciarán todas las pérdidas de carga locales para cuyo cálculo no se disponga de datos y la altura correspondiente a la energía cinética del agua frente a la altura debida a la presión.

Calcular:

- Los caudales que circulan a través de las tuberías T_1 y T_2 .
- El punto de la instalación en el que se alcanza el mínimo valor de la presión y la presión mínima necesaria en la impulsión de la bomba para que no se produzca cavitación en la instalación (presión de vapor del agua en las condiciones de funcionamiento: $p_v = 0,02 \text{ kgf cm}^{-2}$).
- La potencia consumida por la bomba, teniendo en cuenta que su rendimiento total es $\eta = 0,85$.



Solución

a) De la ecuación de conservación de la masa, se deduce

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (9.35.1)$$

siendo Q el caudal impulsado por la bomba y Q_1 y Q_2 los caudales que circulan a través de las tuberías T_1 y T_2 , respectivamente. Por otro lado, al estar la tubería T_1 conectada en paralelo con la tubería T_2 y el tramo superior de las tuberías verticales, las alturas de pérdidas correspondientes tienen que ser iguales, por lo que

$$\frac{8 Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(2K + \frac{f_1 L_1}{D_1} \right) = \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{2fH}{D} \right) + \frac{8 Q_2^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(2K + \frac{f_2 L_2}{D_2} \right). \quad (9.35.2)$$

Despejando Q_2 en la ecuación (9.35.2) y sustituyendo en la ecuación (9.35.1), resulta

$$Q_1 = 1,336 \text{ l s}^{-1},$$

$$Q_2 = 1,164 \text{ l s}^{-1}.$$

b) El punto de la instalación en el que se alcanza el valor más bajo de la presión es el codo de la tubería T_2 situado aguas abajo de las dos válvulas, en el que el agua empieza a descender. Imponiendo que en dicho punto el valor de la presión sea igual a la presión de vapor, p_v , se obtiene

$$p_{\text{imp}} = p_v + \rho g \left[2H + \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \left(K_1 + \frac{fH}{D} \right) + \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{fH}{D} \right) + \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(2K + \frac{f_2 L_2}{D_2} \right) \right].$$

Sustituyendo valores, resulta

$$p_{\text{imp}} = 4,350 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

c) La altura manométrica que proporciona la bomba debe ser igual a la altura de pérdidas en la instalación,

$$H_m = \frac{8Q^2}{\pi^2 g D^4} \left(K_1 + \frac{2fH}{D} \right) + \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(2K + \frac{f_1 L_1}{D_1} \right),$$

y la correspondiente potencia consumida por la bomba es

$$\dot{W} = \rho g Q H_m / \eta.$$

Sustituyendo valores, resulta

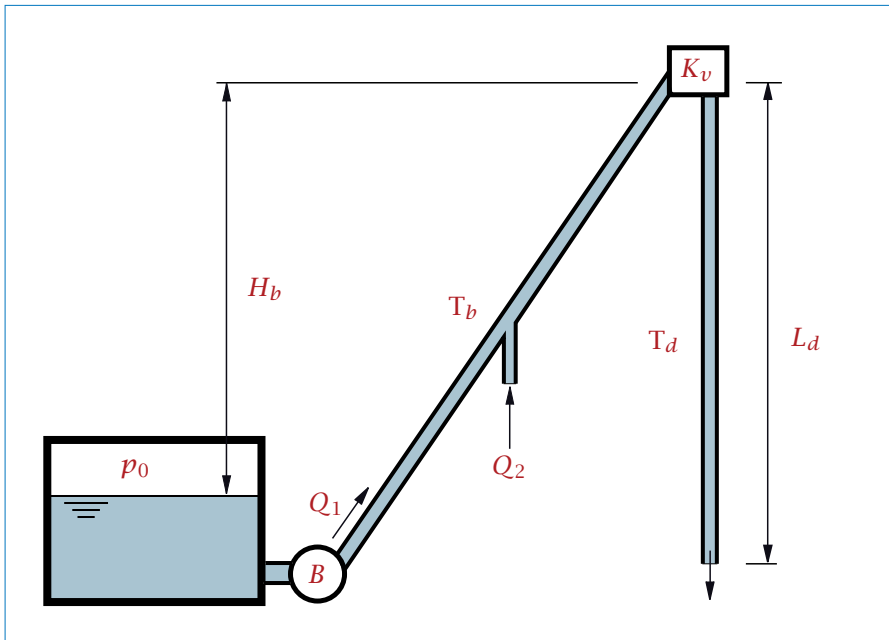
$$H_m = 41,036 \text{ m,}$$

$$\dot{W} = 1,184 \text{ kW.}$$

Problema 9.36. Trasvase desde un depósito mediante bombeo con inyección lateral en la impulsión

En la instalación mostrada en la figura, el agua contenida en un depósito cerrado de grandes dimensiones es elevada mediante una bomba y la tubería T_b hasta un dispositivo que está instalado a una altura $H_b = 7 \text{ m}$ por encima de la superficie libre del agua en el depósito inferior, y es posteriormente descargada a la atmósfera mediante la tubería vertical T_d . En la sección media de la tubería T_b se introduce, mediante una tubería secundaria, un caudal constante de agua $Q_2 = 5 \text{ l s}^{-1}$. La presión manométrica del aire contenido en

la parte superior del depósito es $p_0 = 25$ kPa. Las longitudes y los diámetros de las tuberías T_b y T_d son los siguientes: $L_b = 20$ m, $L_d = 10$ m, $D_b = D_d = 10$ cm. El coeficiente de pérdida de carga en el dispositivo, referido a la energía cinética del agua en la tubería T_b , es $K_v = 10$. Se supondrá para ambas tuberías un factor de fricción $f = 0,015$, que la longitud de la tubería de aspiración (que conecta el depósito con la bomba) es despreciable, y que la curva característica de la bomba puede aproximarse por la expresión $H_m = 40[1 - (Q/0,05)^2]$ (H_m en m; Q en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$). Se despreciarán las pérdidas de carga a las que no se haya hecho referencia.



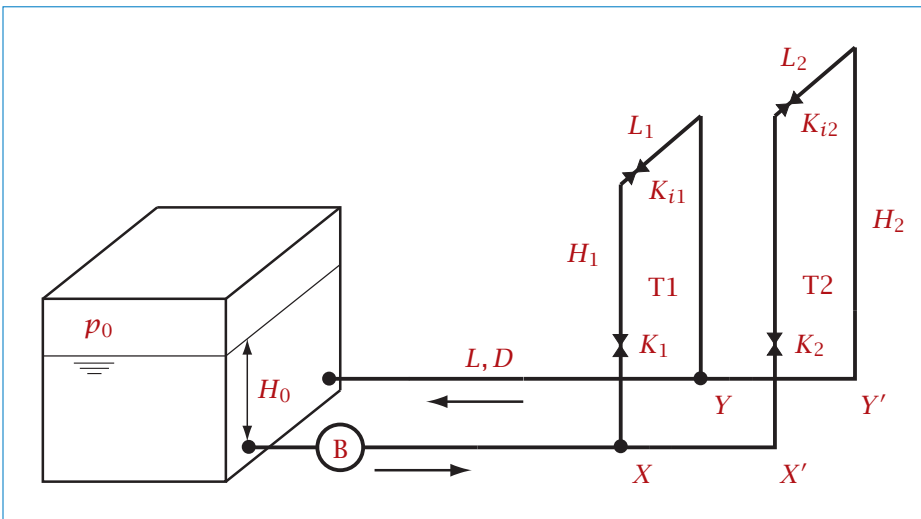
- Calcular el caudal descargado por la tubería T_d .
- Comprobar, para las condiciones de funcionamiento consideradas, que no se produce cavitación en ningún punto de la instalación (presiones ambiente y de vapor: $p_a = 100$ kPa y $p_v = 2000$ Pa, respectivamente).
- Calcular la máxima longitud de la tubería T_d (suponiendo que no se modifiquen los restantes datos del enunciado) para la que no se produce cavitación en ningún punto de la instalación.

Solución

- a) $Q = Q_1 + Q_2 = 42,68 \text{ l s}^{-1}$.
- b) $p_{\min} = 24,05 \text{ kPa } (> p_v)$.
- c) $L_{d,\max} = 13,09 \text{ m}$.

Problema 9.37. Sistema de bombeo en circuito cerrado (III)

En el circuito cerrado mostrado en la figura una bomba impulsa el agua almacenada en un depósito cerrado a través de las tuberías T1 y T2, conectadas en paralelo en los nodos X e Y. Ambas tuberías están formadas por dos tramos verticales y un tramo horizontal. Los nodos X e Y están conectados al fondo del depósito mediante dos tuberías horizontales idénticas, de diámetro $D = 10 \text{ cm}$ y longitud $L = 500 \text{ m}$. La curva característica de la bomba puede aproximarse por la expresión $H_m = 60[1 - (Q/0,06)^2]$ (H_m en m y Q en $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$). Las longitudes de las tuberías T1 y T2 que se indican en la figura son $H_1 = 20 \text{ m}$, $H_2 = 30 \text{ m}$ (longitudes de cada uno de los tramos verticales) y $L_1 = L_2 = 10 \text{ m}$ (tramos horizontales).



Los coeficientes de pérdida de carga de las válvulas situadas en los tramos horizontales de las tuberías, cuando están completamente abiertas, son $K_{i1} = K_{i2} = 5$. Las tuberías T1 y T2 tienen el mismo diámetro $D_1 = D_2 = 7$ cm. Considérese un factor de fricción igual a 0,015 en todas las tuberías. Se supondrá despreciable la longitud de los tramos horizontales $X - X'$ e $Y - Y'$ de la tubería T2, que conectan los nodos X e Y con los correspondientes tramos verticales. La presión absoluta del aire contenido en la parte superior del depósito es p_0 , y la altura de la superficie libre del agua sobre el punto de conexión de las tuberías al depósito es $H_0 = 6$ m. (Antes de resolver numéricamente el problema, se deberán plantear de forma clara las ecuaciones correspondientes a cada apartado, sin sustituir valores numéricos.)

- Suponiendo que las válvulas de la tubería T2 están completamente cerradas, calcular el coeficiente de pérdida de carga en la válvula situada en el tramo vertical, K_1 , necesario para que el caudal que circula a través de la tubería T1 sea igual a 10 l s^{-1} .
- Para las condiciones de funcionamiento del apartado anterior, determinar la presión p_0 mínima necesaria para que no se produzca cavitación en la tubería T1 (presión absoluta de vapor de agua: $p_v = 2000 \text{ Pa}$).
- Suponiendo que todas las válvulas de la instalación están completamente abiertas, determinar los coeficientes de pérdida de carga en las válvulas situadas en los tramos verticales de las tuberías, K_1 y K_2 , necesarios para que los caudales impulsados a través de las tuberías T1 y T2 sean iguales a 10 y 5 l s^{-1} , respectivamente, y la presión p_0 mínima necesaria para que no se produzca cavitación en ningún punto de la instalación. Comentar el resultado.

Solución

- a) $K_1 = 117,5$.

[La solución se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$H_m = \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{2fL}{D} + 1 \right) + \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(f \frac{2H_1 + L_1}{D_1} + K_{i1} + K_1 \right) .]$$

- b) $p_0 = 66,64 \text{ kPa}$ (presión absoluta).

[La solución se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{p_0}{\rho g} + H_m = \frac{p_v}{\rho g} + H_1 - H_0 + \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D^4} \left[\frac{fL}{D} \right] + \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left[\frac{f(H_1 + L_1)}{D_1} + K_{i1} + K_1 + 1 \right],$$

utilizando el valor de K_1 obtenido en el apartado a).]

c) $K_1 = 66,16$, $K_2 = 307,5$.

$p_{0,\min} = 94,25$ kPa (presión absoluta).

[Los valores de K_1 y K_2 se obtienen como solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= Q_1 + Q_2, \\ \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(f \frac{2H_1 + L_1}{D_1} + K_{i1} + K_1 \right) &= \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(f \frac{2H_2 + L_2}{D_2} + K_{i2} + K_2 \right), \\ H_m &= \frac{8Q_{\text{tot}}^2}{\pi^2 g D^4} \left(f \frac{2L}{D} + 1 \right) + \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(f \frac{2H_1 + L_1}{D_1} + K_{i1} + K_1 \right). \end{aligned}$$

Las presiones absolutas mínimas en el aire contenido en el depósito necesarias para que no se produzca cavitación en las tuberías T1 y T2, $p_{01} = -10,36$ kPa y $p_{02} = 94,25$ kPa, respectivamente, se obtienen mediante las ecuaciones siguientes, utilizando los valores de K_1 y K_2 obtenidos en este mismo apartado:

$$\begin{aligned} \frac{p_{01}}{\rho g} + H_m &= \frac{p_v}{\rho g} + H_1 - H_0 + \frac{8Q_{\text{tot}}^2}{\pi^2 g D^4} f \frac{L}{D} + \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g D_1^4} \left(f \frac{H_1 + L_1}{D_1} + K_{i1} + K_1 + 1 \right), \\ \frac{p_{02}}{\rho g} + H_m &= \frac{p_v}{\rho g} + H_2 - H_0 + \frac{8Q_{\text{tot}}^2}{\pi^2 g D^4} f \frac{L}{D} + \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g D_2^4} \left(f \frac{H_2 + L_2}{D_2} + K_{i2} + K_2 + 1 \right). \end{aligned}$$

El valor mínimo de p_0 necesario para que no se produzca cavitación en ningún punto de la instalación tiene que ser obviamente el valor más grande entre p_{01} y p_{02} : $p_{0,\min} = \max[p_{01}, p_{02}] = 94,25$ kPa. Explíquese el significado físico del signo negativo de p_{01} .]

Capítulo 10

Flujos en canales abiertos

Problema 10.1. Canal de sección rectangular con cambio de pendiente

Un canal de sección rectangular de 6 m de anchura transporta un caudal de $12 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. En un primer tramo, en el que el flujo es uniforme, el canal tiene una cierta pendiente, siendo la velocidad media del agua 6 m s^{-1} . A partir de una cierta sección se produce un cambio brusco de pendiente, y el canal se hace horizontal, lo que provoca la aparición de un resalto hidráulico.

- a) Calcular la pendiente del primer tramo del canal, suponiendo un coeficiente de rugosidad de Manning $n = 0,01$.
- b) Justificar que el resalto puede producirse.
- c) Calcular la profundidad y la velocidad aguas abajo del resalto.
- d) Calcular la potencia disipada en el resalto.

Solución

a) La profundidad normal (la correspondiente a flujo uniforme) del agua en el primer tramo del canal es

$$h_n = \frac{Q}{U_1 b} = \frac{12}{(6)(6)} = 0,33 \text{ m},$$

siendo Q el caudal, U_1 la velocidad media y b la anchura del canal.

Utilizando la fórmula de Manning,

$$U_1 = \frac{1}{n} r_h^{2/3} s^{1/2},$$

sustituyendo los valores de $U_1 = 6 \text{ m s}^{-1}$, $n = 0,01$, y el radio hidráulico $r_h = bh_n / (b + 2h_n) = 0,3 \text{ m}$, se obtiene una pendiente

$$s = 0,0179.$$

b) El número de Froude en el primer tramo del canal es $(Fr)_1 = U_1 / \sqrt{gh_n} = 3,32$. El flujo es, por tanto, supercrítico, y puede pasar a ser subcrítico a través de un resalto hidráulico.

c) Mediante la aplicación de la ecuación de continuidad a un volumen de control limitado por la superficie libre del agua, las paredes del canal, y dos secciones situadas, respectivamente, aguas arriba (sección 1) y aguas abajo (sección 2) del resalto, se obtiene

$$U_1 h_1 = U_2 h_2, \quad (10.1.1)$$

siendo h_1 y h_2 las profundidades del agua en las secciones 1 y 2, respectivamente, y U_1 y U_2 las correspondientes velocidades medias del agua.

De la aplicación de la ecuación (B.1.8) de conservación de la cantidad de movimiento al mismo volumen de control, suponiendo que la fricción con las paredes del canal es despreciable, e imponiendo distribuciones hidrostáticas de presión en las secciones 1 y 2 ($p_1 = \rho g(h_1 - z)$, $p_2 = \rho g(h_2 - z)$, siendo z la altura sobre el fondo del canal), se obtiene

$$\rho(U_1^2 h_1 - U_2^2 h_2) = \rho g \left(\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right). \quad (10.1.2)$$

De las ecuaciones (10.1.1) y (10.1.2), eliminando la solución correspondiente a $h_1 = h_2$, se obtiene una ecuación de segundo grado de la que resulta (eliminando la raíz negativa)

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8(Q/b)^2}{gh_1^3}} - 1 \right]. \quad (10.1.3)$$

Si se tiene en cuenta la ecuación de conservación de la energía mecánica puede comprobarse que el resalto solo es posible si $h_2 > h_1$.

CAPÍTULO 10. FLUJOS EN CANALES ABIERTOS

De la ecuación (10.1.3) se obtiene

$$h_2 = 1,407 \text{ m},$$

y sustituyendo valores en la ecuación (10.1.1) resulta

$$U_2 = 1,42 \text{ m s}^{-1}.$$

d) La potencia disipada en el resalto es $\dot{W} = \rho Q \Delta E$, siendo ΔE la disminución de energía específica a través del resalto,

$$\Delta E = \frac{U_1^2}{2} + gh_1 - \left(\frac{U_2^2}{2} + gh_2 \right) = 6,47 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2},$$

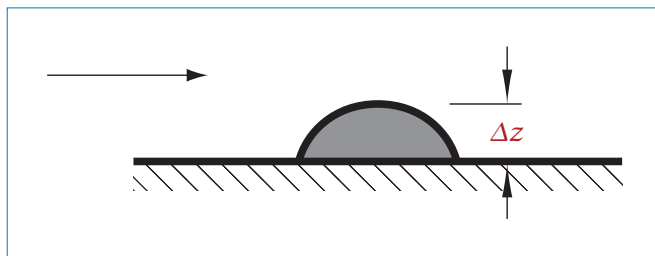
con lo que se obtiene

$$\dot{W} = 77,6 \text{ kW}.$$

Problema 10.2. Canal con obstáculo en el fondo (I)

Un canal de sección rectangular de 1,2 m de anchura transporta un caudal de agua de $0,76 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. La pendiente del canal es 0,00055 y el coeficiente de rugosidad de Manning es $n = 0,01$.

a) Calcular la profundidad correspondiente a flujo uniforme.



Supóngase que en una cierta sección del canal existe en el fondo un pequeño obstáculo de sección constante en dirección transversal al canal.

Calcular:

- b) Profundidad del agua sobre el obstáculo si este tiene una altura $\Delta z = 0,09$ m.
- c) Altura del obstáculo necesaria para que el flujo sobre este sea crítico.

Solución

a) Mediante la fórmula de Manning,

$$U_1 = \frac{1}{n} r_h^{2/3} s^{1/2}, \quad (10.2.1)$$

expresando U_1 y r_h en función del caudal Q , de la anchura b y de la profundidad h_1 ,

$$\frac{Q}{bh_1} = \frac{1}{n} \left(\frac{bh_1}{b + 2h_1} \right)^{2/3} s^{1/2},$$

sustituyendo valores y siguiendo un procedimiento iterativo, se obtiene

$$h_1 = 0,6 \text{ m.}$$

b) Aplicando las ecuaciones de conservación de la masa y de la energía mecánica entre las secciones 1 (suficientemente aguas arriba del obstáculo) y 2 (sobre el obstáculo), se obtiene

$$h_1 U_1 = h_2 U_2, \quad (10.2.2)$$

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta z. \quad (10.2.3)$$

Introduciendo $U_2 = U_1 h_1 / h_2$ (ecuación (10.2.2)) y $U_1 = Q / (bh_1)$ en la ecuación (10.2.3), se obtiene

$$h_2^3 + \left(\Delta z - h_1 - \frac{Q^2}{2gb^2h_1^2} \right) h_2^2 + \frac{Q^2}{2gb^2} = 0.$$

Sustituyendo los valores de Q , b , h_1 y Δz y siguiendo un procedimiento de tanteo, resulta

$$h_2 \approx 0,5 \text{ m.}$$

c) La profundidad crítica es

$$h_c = \left[\frac{(Q/b)^2}{g} \right]^{1/3} = 0,345 \text{ m.}$$

De la ecuación (10.2.2), con $h_2 = h_c = 0,345$ m, se obtiene $U_2 = 1,837$ m s⁻¹, y de la ecuación (10.2.3) resulta

$$\Delta z = 0,14 \text{ m.}$$

Problema 10.3. Canal con obstáculo en el fondo (II)

Un canal de sección rectangular de anchura $b = 0,5$ m tiene en una cierta sección un pequeño obstáculo en el fondo, de altura $\Delta z = 0,04$ m y de sección constante en dirección transversal al canal. Aguas arriba del obstáculo, el flujo es subcrítico y la profundidad del agua, correspondiente a flujo uniforme, es $h_1 = 0,07$ m. Sobre el obstáculo, las condiciones del flujo son críticas.

- Calcular el caudal.
- Calcular la pendiente del canal suponiendo un coeficiente de rugosidad de Manning $n = 0,01$.
- Describir cómo se modificarían las características del flujo si, para el caudal obtenido y la misma profundidad h_1 del enunciado, se aumenta la altura del obstáculo.

Solución

a) Mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y de la energía mecánica (suponiendo despreciables los efectos de fricción) a un volumen de control limitado por la superficie libre del agua, las paredes del canal y del obstáculo, y dos secciones transversales situadas, respectivamente, suficientemente aguas arriba del obstáculo (sección 1) y sobre este (sección 2), se obtiene

$$U_1 h_1 = U_2 h_2, \quad (10.3.1)$$

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta z, \quad (10.3.2)$$

siendo h_1 y h_2 las profundidades del agua en las secciones 1 y 2, respectivamente, y U_1 y U_2 las correspondientes velocidades medias del agua.

Al existir condiciones críticas en el flujo sobre el obstáculo, el número de Froude en la sección 2 debe ser igual a la unidad:

$$(\text{Fr})_2^2 = \frac{q^2}{h_2^3 g} = 1 \quad (10.3.3)$$

($q = Uh$ es el caudal por unidad de anchura), de donde se obtiene

$$\frac{U_2^2}{2g} = \frac{h_2}{2}. \quad (10.3.4)$$

De las ecuaciones (10.3.1) y (10.3.4), resulta

$$\frac{U_1^2}{2g} = \frac{U_2^2}{2g} \frac{h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^3}{2h_1^2}, \quad (10.3.5)$$

e introduciendo las ecuaciones (10.3.4) y (10.3.5) en la ecuación (10.3.2), se obtiene

$$h_2^3 - 3h_1^2 h_2 + (h_1 - \Delta z)2h_1^2 = 0.$$

De las tres raíces de esta ecuación,

$$h_2 = \begin{cases} -0,12 \text{ m}, \\ 0,11 \text{ m}, \\ 0,02 \text{ m}, \end{cases}$$

la primera es obvio que no tiene sentido físico, y la segunda supone un incremento de la profundidad con respecto a la de la sección 1, h_1 , por lo que tampoco es posible, ya que en esta última sección el flujo es subcrítico y, por tanto, la profundidad debe ser superior a la profundidad crítica que se alcanza en la sección 2, según se indica en el enunciado. La profundidad sobre el obstáculo es, por tanto,

$$h_2 = h_c = 0,02 \text{ m}.$$

El caudal, $Q = qb$, puede obtenerse de la segunda igualdad de la ecuación (10.3.3),

$$Q = h_2^{3/2} g^{1/2} b = 0,00463 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

b) La pendiente del canal puede determinarse mediante la fórmula de Manning (ecuación (10.2.1)). Sustituyendo $U_1 = Q/(bh_1)$,

$$Q = \frac{bh_1}{n} r_h^{2/3} s^{1/2}.$$

Teniendo en cuenta que

$$r_h = h_1 b / (b + 2h_1),$$

despejando en la ecuación anterior y sustituyendo valores, resulta

$$s = 8,43 \times 10^{-5}.$$

c) Se deja al lector la resolución de este apartado.

Problema 10.4. Canal con cambio en la forma de la sección

Un canal que transporta un caudal de agua de $6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ consta de dos tramos. La sección transversal del primer tramo tiene forma rectangular, con una anchura de 2,5 m, y la del segundo es trapezoidal, con base de 1 m y lados de pendiente 2:1 (horizontal:vertical). El cambio de sección se hace en una zona de transición en la que se supondrán despreciables las pérdidas de energía. En el tramo de sección rectangular la profundidad es de 1,5 m. Determinar:

- a) Profundidad del agua aguas abajo de la zona de transición.
- b) Profundidad crítica en cada tramo.

Solución

a) Aplicando las ecuaciones de conservación de la masa y de la energía mecánica entre una sección en el tramo de sección rectangular y otra en el tramo de sección trapezoidal, resulta

$$Q = v_1 h_1 b_1 = v_2 (b_0 h_2 + 2h_2^2), \quad (10.4.1)$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (10.4.2)$$

Despejando h_2 en la ecuación (10.4.2) y sustituyendo en (10.4.1), de donde se deduce a su vez $v_1 = Q/(h_1 b_1) = 1,6 \text{ m s}^{-1}$, resulta

$$6 = v_2 \left[\left(1,63 - \frac{v_2^2}{2g} \right) + 2 \left(1,63 - \frac{v_2^2}{2g} \right)^2 \right], \quad (10.4.3)$$

de donde se obtiene $v_2 = 0,9 \text{ m s}^{-1}$, e introduciendo este valor en (10.4.1),

$$h_2 = 1,59 \text{ m}.$$

b) La altura crítica, en el tramo de sección rectangular, viene dada por

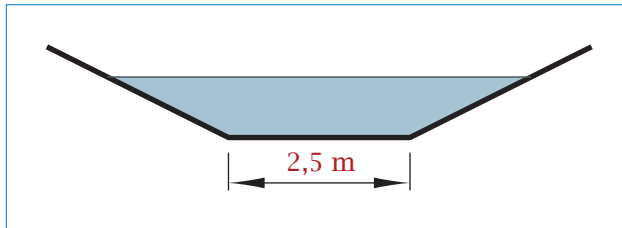
$$h_{c1} = [Q^2 / (b^2 g)]^{1/3} = 0,84 \text{ m},$$

y en el de sección trapezoidal, se obtiene de $(Fr)_2^2 = bQ^2 / gA^3 = 1$, donde $A = (b_0 h_2 + 2h_2^2)$ y $b = \partial A / \partial h_2 = b_0 + 4h_2$. Sustituyendo valores e iterando, resulta

$$h_{c2} = 0,91 \text{ m}.$$

Problema 10.5. Canal de sección trapezoidal

Un canal de sección trapezoidal de 2,5 m de base y con paredes laterales de pendiente 1:2 debe transportar un caudal de $25 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. El coeficiente de rugosidad de Manning es $n = 0,015$.



Calcular:

- Profundidad crítica.
- Pendiente crítica.
- Pendiente necesaria para conseguir un flujo uniforme con una profundidad de 3,6 m.

Solución

a) $h_c \approx 1,49 \text{ m}.$

b) $s_c = 2,486 \times 10^{-3}.$

c) $4,98 \times 10^{-5}$.

Problema 10.6. Canal con obstáculo en el fondo (III)

Un canal horizontal de sección rectangular de anchura b tiene en el fondo un obstáculo de altura máxima H y sección constante en dirección transversal al canal. El flujo de agua es estacionario y alcanza las condiciones críticas en la zona más elevada del obstáculo, donde la profundidad es h_2 . Suficientemente lejos del obstáculo el flujo es uniforme, subcrítico aguas arriba y supercrítico aguas abajo, con profundidades $h_1 = 2H$ y h_3 , respectivamente. Los efectos de fricción pueden considerarse despreciables. H y b son datos en el problema (además de la densidad del agua, ρ , y la aceleración debida a la gravedad, g). Determinar:

- a) Profundidades h_2 y h_3 , y caudal Q que circula por el canal.
- b) Fuerza que ejerce la corriente sobre el obstáculo.
- c) ¿Cabe esperar que se forme un resalto hidráulico aguas abajo del obstáculo?

Solución

a) $h_2/H = 0,69$, $h_3/H = 0,31$.

b) $F/(\rho g H^2 b) = 1,05$.

Bibliografía

- Acheson, D.J., *Elementary fluid dynamics*, Oxford University Press, 1990.
- Aris, R., *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Dover, Nueva York, 1989.
- Audoye, P., *Mécanique des fluides*, Masson, 1992.
- Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- Crespo, A., *Mecánica de fluidos*, Thomson, 2006.
- Douglas, J.F.; Matthews, R.D., *Solving problems in fluid mechanics*, vols. 1 y 2, 3.^a ed., Longman, 1996.
- Fox, R.W.; McDonald, A.T., *Introducción a la mecánica de fluidos*, 2.^a ed., McGraw-Hill, 1995.
- Gerhart, P.M.; Gross, R.J.; Hochstein, J.I., *Fundamentals of fluid mechanics*, 2.^a ed., Addison-Wesley, 1992.
- Granger, R.A., *Fluid mechanics*, Dover, 1995.
- Liñán, A.; Rodríguez, M.; Higuera, F.J., *Apuntes de mecánica de fluidos*, Tomos I y II, Sección de Publicaciones de la ETSIAE, UPM, 2012.
- Mott, R.L., *Applied fluid mechanics*, 5.^a ed., Prentice-Hall, 2000.
- Parker, S.P. (Ed.), *Fluid mechanics source book*, McGraw-Hill, 1988.
- Pnueli, D.; Gutfinger, C., *Fluid mechanics*, Cambridge University Press, 1992.
- Potter, M.C.; Wiggert, D.C., *Mechanics of fluids*, Prentice-Hall, 1991.
- Round, G.F.; Garg, V.K., *Applications of fluid dynamics*, Edward Arnold, 1986.

- Rouse, H., *Elementary mechanics of fluids*, Dover, 1978.
- Sédille, M., *Turbo-machines hydrauliques et thermiques*, Tomo II, Masson & Cie, 1967.
- Shames, I.H., *Mecánica de fluidos*, 3.^a ed., McGraw-Hill, 1995.
- Sharpe, G.J., *Solving problems in fluid dynamics*, Longman, 1994.
- Smits, A.J., *A physical introduction to fluid mechanics*, John Wiley & Sons, 2000.
- Spurk, J.H., *Fluid mechanics*, Springer-Verlag, 1997.
- Spurk, J.H., *Fluid mechanics: problems and solutions*, Springer-Verlag, 1997.
- White, F.M., *Mecánica de fluidos*, McGraw-Hill, 2008.
- Young, D.F., Munson, B.R., Okiishi, T.G., *A brief introduction to fluid mechanics*, John Wiley & Sons, 1997.

Apéndice

Apéndice A

Álgebra y cálculo vectorial y tensorial

En este apéndice se presentan algunas relaciones elementales de álgebra y cálculo vectorial y tensorial. Las deducciones de algunas de ellas pueden consultarse, por ejemplo, en el libro de Aris (1989) incluido en la bibliografía.

A.1. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Definición

Los sistemas de coordenadas curvilíneas son sistemas de localización de puntos en el espacio (localmente) euclídeo que utilizan coordenadas que son funciones invertibles de las habituales coordenadas cartesianas. Las coordenadas curvilíneas se denotarán en lo que sigue¹ como x^1, x^2, x^3 , y las coordenadas cartesianas,² como x_c^1, x_c^2, x_c^3 . Las relaciones funcionales mencionadas se expresarán por tanto de la forma siguiente:³

$$x^i = x^i(x_c^1, x_c^2, x_c^3), \quad (\text{A.1.1})$$

¹ Es frecuente en la literatura denotar las coordenadas curvilíneas utilizando superíndices, tal como se hace en este apéndice, en lugar de subíndices. Debe evitarse la confusión de los superíndices con exponentes que indiquen orden de derivación o potencia.

² Más adelante, las coordenadas cartesianas se denotarán como x, y, z . La notación utilizada en esta sección, basada en índices, permitirá escribir expresiones de forma más compacta.

³ Se supone que el lector está familiarizado con la notación mediante índices. La expresión $x^i = x^i(x_c^1, x_c^2, x_c^3)$ es una forma compacta de representar las tres relaciones funcionales siguientes: $x^1 = x^1(x_c^1, x_c^2, x_c^3)$, $x^2 = x^2(x_c^1, x_c^2, x_c^3)$ y $x^3 = x^3(x_c^1, x_c^2, x_c^3)$.

o bien,

$$x_c^i = x_c^i(x^1, x^2, x^3). \quad (\text{A.1.2})$$

Bases de vectores

Los vectores unitarios de la base estándar del sistema cartesiano se denotarán como⁴ $\mathbf{e}_1^c, \mathbf{e}_2^c, \mathbf{e}_3^c$. El vector de posición de un punto del espacio con coordenadas cartesianas (x_c^1, x_c^2, x_c^3) se expresa en la base del sistema cartesiano,

$$\{\mathbf{e}_1^c, \mathbf{e}_2^c, \mathbf{e}_3^c\}, \quad (\text{A.1.3})$$

de la forma siguiente:⁵

$$\mathbf{x} = x_c^1 \mathbf{e}_1^c + x_c^2 \mathbf{e}_2^c + x_c^3 \mathbf{e}_3^c = x_c^i \mathbf{e}_i^c. \quad (\text{A.1.4})$$

En el sistema de coordenadas curvilíneas, los vectores unitarios que en cada punto son tangentes a cada una de las tres líneas en las que dos coordenadas se mantienen constantes (y en las que, por tanto, la tercera coordenada varía) se denotarán respectivamente como $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, y forman la denominada base física,

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}. \quad (\text{A.1.5})$$

Los vectores de la base física pueden expresarse en función de la base del sistema cartesiano como sigue:⁶

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{g}_k}{\|\mathbf{g}_k\|}, \quad (\text{A.1.6})$$

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k} = \frac{\partial x_c^i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i^c. \quad (\text{A.1.7})$$

Los vectores covariantes $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$, que en este apéndice se tomarán ortogonales, y que no son necesariamente unitarios (a diferencia esto último de los vectores de la base física, que sí son ortonormales), forman la denominada base natural,

$$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}. \quad (\text{A.1.8})$$

Obsérvese que el vector \mathbf{g}_k tiene la dirección en la que el extremo de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$ se mueve cuando se aumenta x^k , manteniéndose constantes las otras dos coordenadas.⁷ Por otra parte, dado que las dimensiones de las coordenadas curvilíneas

⁴ Más adelante, los vectores unitarios de la base cartesiana se denotarán como $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

⁵ Obsérvese que, en notación de índices (en la que se utiliza el denominado convenio de Einstein), $x_c^i \mathbf{e}_i^c$ es una forma simplificada de expresar $\sum_{i=1}^3 x_c^i \mathbf{e}_i^c$.

⁶ Véase la nota 11 al pie de la página 451.

⁷ A partir de la ecuación (A.1.2), puede escribirse $d\mathbf{x} = (\partial \mathbf{x} / \partial x^k) dx^k$, y de la ecuación (A.1.7), resulta $d\mathbf{x} = \mathbf{g}_k dx^k$. Obviamente, no es posible deducir, a partir de esta última ecuación, una expresión del tipo $\mathbf{x} = x^k \mathbf{g}_k$ (es decir, una expresión similar a la de la ecuación (A.1.4) para sistemas de coordenadas cartesianas), dado que los vectores \mathbf{g}_k en general dependen de x^1, x^2 y x^3 .

no son necesariamente iguales entre sí, los vectores de la base natural tampoco tendrán necesariamente las mismas dimensiones.⁸

Es útil definir una base dual, o base recíproca, de vectores contravariantes,⁹

$$\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\} \quad (\text{A.1.9})$$

que satisfaga la condición

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i,$$

siendo δ_j^i la delta de Kronecker ($\delta_j^i = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$). Es fácil deducir¹⁰ que los vectores de la base dual pueden expresarse de la forma siguiente:¹¹

$$\mathbf{g}^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^c} = \frac{\partial x^k}{\partial x_c^i} \mathbf{e}_i^c. \quad (\text{A.1.10})$$

Obsérvese que cada vector \mathbf{g}^k de la base dual es perpendicular a superficies de x^k constante, con sentido positivo según valores de x^k crecientes. Dado que en este apéndice se está considerando el caso de que los vectores de la base natural,

⁸ Por ejemplo, obsérvese que, de las coordenadas cilíndricas r, θ, z (véase la Sección A.3), solo r y z tienen dimensiones de longitud, mientras que θ no tiene dimensiones, por lo que \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_3 son adimensionales, mientras que \mathbf{g}_2 tiene dimensiones de longitud.

⁹ Obsérvese que en la base dual de vectores contravariantes, $\{\mathbf{g}^k\}$, k aparece como superíndice, mientras que en la base natural de vectores covariantes (ecuación (A.1.8)) k aparece como subíndice.

¹⁰ Obsérvese que, a partir de las ecuaciones (A.1.7) y (A.1.10), es inmediato deducir que se satisface

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^c} \cdot \frac{\partial x^c}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

¹¹ Las ecuaciones (A.1.7) y (A.1.10) representan de forma compacta, respectivamente,

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial x_c^1}{\partial x^k} \mathbf{e}_1^c + \frac{\partial x_c^2}{\partial x^k} \mathbf{e}_2^c + \frac{\partial x_c^3}{\partial x^k} \mathbf{e}_3^c$$

y

$$\mathbf{g}^k = \frac{\partial x^k}{\partial x_c^1} \mathbf{e}_1^c + \frac{\partial x^k}{\partial x_c^2} \mathbf{e}_2^c + \frac{\partial x^k}{\partial x_c^3} \mathbf{e}_3^c.$$

Se trata de nuevo, simplemente, de simplificar la notación, evitando escribir los correspondientes símbolos de sumatorio que aparecen en las expresiones siguientes:

$$\mathbf{g}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_c^i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i^c,$$

$$\mathbf{g}^k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial x_c^i} \mathbf{e}_i^c.$$

De acuerdo con lo indicado en la nota 3 al pie de la página 440, cada una de las expresiones anteriores es, a su vez, una forma compacta de representar tres ecuaciones, correspondientes a $k = 1, 2$ y 3 .

$\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, sean ortogonales, estos tienen la misma dirección (aunque en general no el mismo módulo) que los respectivos vectores de la base dual, $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$.

Factores de escala

Los módulos de los vectores \mathbf{g}_k de la base natural,

$$h_k = \|\mathbf{g}_k\|, \quad (\text{A.1.11})$$

se denominan factores de escala. De las ecuaciones (A.1.6) y (A.1.7), resulta

$$\mathbf{g}_k = h_k \mathbf{e}_k, \quad (\text{A.1.12})$$

y

$$h_k = \left[\left(\frac{\partial x_c^1}{\partial x^k} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_c^2}{\partial x^k} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_c^3}{\partial x^k} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{A.1.13})$$

Análogamente,

$$\mathbf{g}^k = \frac{1}{h_k} \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.1.14})$$

Símbolos de Christoffel

Como ya se ha indicado, los vectores de la base de un sistema de coordenadas curvilíneas, a diferencia de lo que ocurre en un sistema cartesiano, son en general funciones de la posición,¹² por lo que resulta necesario conocer sus derivadas con respecto a las coordenadas. Para expresar de forma compacta algunos de los operadores que intervienen en las ecuaciones de Navier-Stokes, es útil introducir, por ejemplo, los denominados símbolos de Christoffel de segunda especie, que pueden definirse como sigue:¹³

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j}, \quad (\text{A.1.15})$$

donde \mathbf{g}^k es el vector k de la base dual y $\partial \mathbf{g}_i / \partial x^j$ es la derivada del vector i de la base natural con respecto a la coordenada j . A partir de la ecuación (A.1.15), es inmediato deducir la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k, \quad (\text{A.1.16})$$

¹² Como ejemplo, obsérvese que el vector de posición de un punto en un sistema de coordenadas esféricas (véase la Sección A.4) es simplemente $\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r$, y que la dependencia de \mathbf{x} con θ y φ es precisamente a través del vector de la base \mathbf{e}_r .

¹³ Es importante tener en cuenta que los símbolos de Christoffel no son tensores.

que indica que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^1 , Γ_{ij}^2 y Γ_{ij}^3 son las componentes en la base natural de la derivada del vector i de la base natural con respecto a la coordenada j .

En sistemas de coordenadas ortogonales, como los considerados en este apéndice, los símbolos de Christoffel pueden expresarse en función de los factores de escala de la forma siguiente:

$$\Gamma_{pq}^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r, p \text{ y } q \text{ son diferentes entre sí,} \\ \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} & \text{si } \begin{cases} p = q = r = i = j, \\ \text{o } q = r = i, p = j, \\ \text{o } p = r = i, q = j, \end{cases} \\ -\frac{h_i}{h_j^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} & \text{si } p = q = i, r = j. \end{cases} \quad (\text{A.1.17})$$

Elementos diferenciales

$$d\mathbf{x} = h_1 dx^1 \mathbf{e}_1 + h_2 dx^2 \mathbf{e}_2 + h_3 dx^3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.1.18})$$

$$dS = h_2 h_3 dx^2 dx^3 \mathbf{e}_1 + h_1 h_3 dx^1 dx^3 \mathbf{e}_2 + h_1 h_2 dx^1 dx^2 \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.1.19})$$

$$dV = h_1 h_2 h_3 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (\text{A.1.20})$$

Vector velocidad

Las componentes de un vector en la base natural de vectores covariantes se denominan contravariantes, y las componentes en la base dual de vectores contravariantes se denominan covariantes.

- Vector expresado en la base natural:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{g}_i = v^i \mathbf{g}_i \\ &= \frac{dx^1}{dt} \mathbf{g}_1 + \frac{dx^2}{dt} \mathbf{g}_2 + \frac{dx^3}{dt} \mathbf{g}_3 = v^1 \mathbf{g}_1 + v^2 \mathbf{g}_2 + v^3 \mathbf{g}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.1.21})$$

v^1 , v^2 y v^3 son las componentes contravariantes del vector \mathbf{v} .^{14, 15}

- Vector expresado en la base dual:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{g}^1 + v_2 \mathbf{g}^2 + v_3 \mathbf{g}^3. \quad (\text{A.1.22})$$

¹⁴ Obsérvese que cada componente contravariante v^i puede obtenerse mediante el producto escalar de \mathbf{v} por el correspondiente vector \mathbf{g}^i de la base dual de vectores contravariantes.

¹⁵ Los superíndices de las componentes contravariantes no deben ser confundidos con exponentes de potencias.

v_1 , v_2 y v_3 son las componentes covariantes del vector \mathbf{v} .¹⁶

- Vector expresado en la base física:¹⁷

$$\mathbf{v} = v_{(i)} \mathbf{e}_i = v_{(1)} \mathbf{e}_1 + v_{(2)} \mathbf{e}_2 + v_{(3)} \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.1.23})$$

Las componentes en las tres bases están relacionadas de la forma siguiente:

$$v_{(i)} = \frac{v_i}{h_i}, \quad (\text{A.1.24})$$

$$v_{(i)} = h_i v^i. \quad (\text{A.1.25})$$

Gradiente

- De un campo escalar:¹⁸

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.1.26})$$

¹⁶ Obsérvese que cada componente covariante v_i puede obtenerse mediante el producto escalar de \mathbf{v} por el correspondiente vector \mathbf{g}_i de la base natural de vectores covariantes.

¹⁷ Obsérvese la notación utilizada para las componentes del vector \mathbf{v} en la base física, $v_{(i)}$.

¹⁸ A modo de ejemplo, se indica a continuación la forma de deducir la ecuación (A.1.26). A partir de la expresión del gradiente de un campo escalar en coordenadas cartesianas,

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_c^i} \mathbf{e}_i^c,$$

aplicando la regla de la cadena, resulta

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x_c^i} \mathbf{e}_i^c,$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (A.1.10) y (A.1.14), se obtiene

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \mathbf{g}^k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \mathbf{e}_k.$$

- De un campo vectorial:^{19, 20}

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j. \quad (\text{A.1.27})$$

Divergencia

- De un campo vectorial:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + v^k \Gamma_{ik}^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_1 h_2 h_3 v^i)}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial \left(h_1 h_2 h_3 \frac{v_{(i)}}{h_i} \right)}{\partial x^i} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 h_3 v_{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_3 h_1 v_{(2)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^3} (h_1 h_2 v_{(3)}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.1.28})$$

- De un campo tensorial:²¹

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = \left(\frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \tau^{kj} \Gamma_{kj}^i + \tau^{ik} \Gamma_{kj}^j \right) \mathbf{g}_i. \quad (\text{A.1.29})$$

¹⁹ La diferenciación covariante de las componentes contravariantes de un campo vectorial, v^i , que puede interpretarse como una generalización a sistemas de coordenadas curvilíneas de la diferenciación parcial en sistemas de coordenadas cartesianas, $\partial v_c^i / \partial x_c^j$, puede expresarse de forma compacta como sigue:

$$v_{/j}^i (= v_{,j}^i) = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma_{jk}^i,$$

con lo que el gradiente del campo vectorial puede expresarse de la forma siguiente:

$$\nabla \mathbf{v} = v_{/j}^i \mathbf{g}_i \mathbf{g}^j.$$

²⁰ El producto tensorial o diádico de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es un tensor de segundo orden que se denotará como \mathbf{ab} (aunque también es frecuente utilizar la notación $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$). Las componentes del tensor son

$$[\mathbf{ab}]_{ij} = a_i b_j.$$

En notación matricial (véase el primer párrafo de la sección de nomenclatura),

$$[\mathbf{ab}] = \{\mathbf{a}\} \{\mathbf{b}\}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

²¹ τ^{ij} y $\tau_{(ij)}$ denotan, respectivamente, las componentes del tensor en la base natural y en la base física ($\bar{\bar{\tau}} = \tau^{ij} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = \tau_{(ij)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$). Téngase en cuenta que $\tau^{ij} = \tau_{(ij)} / (h_i h_j)$ y que $\mathbf{g}_i = h_i \mathbf{e}_i$.

Rotacional

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ h_1 v_{(1)} & h_2 v_{(2)} & h_3 v_{(3)} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} (h_3 v_{(3)}) - \frac{\partial}{\partial x^3} (h_2 v_{(2)}) \right] \mathbf{e}_1 \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^3} (h_1 v_{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x^1} (h_3 v_{(3)}) \right] \mathbf{e}_2 \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 v_{(2)}) - \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 v_{(1)}) \right] \mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{A.1.30}$$

Laplaciana

- De un campo escalar:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right) \right].
\end{aligned} \tag{A.1.31}$$

- De un campo vectorial:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{v} &= \left\{ \frac{1}{h_1} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x^1} + \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_2}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial (h_1 v_{(1)})}{\partial x^3} - \frac{\partial (h_3 v_{(3)})}{\partial x^1} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial (h_2 v_{(2)})}{\partial x^1} - \frac{\partial (h_1 v_{(1)})}{\partial x^2} \right) \right) \right] \right\} \mathbf{e}_1 \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{h_2} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_3}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial (h_2 v_{(2)})}{\partial x^1} - \frac{\partial (h_1 v_{(1)})}{\partial x^2} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_3 v_{(3)})}{\partial x^2} - \frac{\partial (h_2 v_{(2)})}{\partial x^3} \right) \right) \right] \right\} \mathbf{e}_2 \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{h_3} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x^3} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_3 v_{(3)})}{\partial x^2} - \frac{\partial (h_2 v_{(2)})}{\partial x^3} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial (h_1 v_{(1)})}{\partial x^3} - \frac{\partial (h_3 v_{(3)})}{\partial x^1} \right) \right) \right] \right\} \mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{A.1.32}$$

Derivada sustancial de un campo escalar

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v_{(i)}}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v_{(1)}}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} + \frac{v_{(2)}}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{v_{(3)}}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial x^3}.
\end{aligned} \tag{A.1.33}$$

Derivada sustancial del campo de velocidad (aceleración)

La ecuación (A.1.33) obviamente no puede en general aplicarse a las componentes de un campo vectorial para determinar la derivada sustancial de este.

- Componentes en la base natural:

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i v^k \right). \quad (\text{A.1.34})$$

- Componentes en la base física:

$$\begin{aligned} a_{(i)} &= \frac{\partial v_{(i)}}{\partial t} + \frac{h_i}{h_j} v_{(j)} \left[\frac{\partial (v_{(i)}/h_i)}{\partial x^j} + \frac{1}{h_k} \Gamma_{jk}^i v_{(k)} \right] \\ &= \frac{\partial v_{(i)}}{\partial t} + \frac{v_{(j)}}{h_j} \left(\frac{\partial v_{(i)}}{\partial x^j} + \frac{v_{(i)}}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial x^j} - \frac{v_{(j)}}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x^i} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1.35})$$

Las componentes en ambas bases están relacionadas de la forma siguiente:

$$a_{(i)} = h_i a^i.$$

A.2. Coordenadas cartesianas

Definición

Las coordenadas, salvo en expresiones con notación mediante índices, se denotarán como sigue:

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= y, \\ x^3 &= z. \end{aligned}$$

El sistema de coordenadas se indica en la Figura A.2.1.

Bases de vectores

Los vectores unitarios de la base se denotarán como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}^1 = \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{g}^2 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{g}^3 = \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

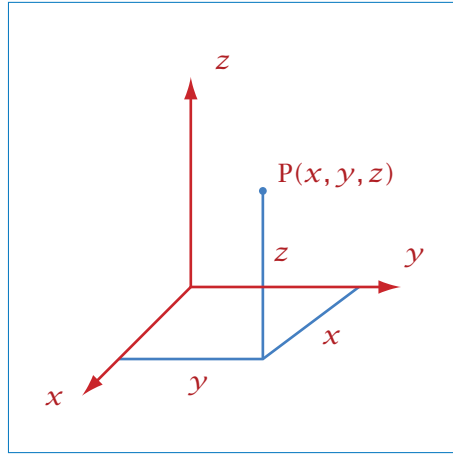


Figura A.2.1
Sistema de coordenadas cartesianas.

Factores de escala

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1.$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \quad \forall i, j, k.$$

Elementos diferenciales

$$d\mathbf{x} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}, \quad (\text{A.2.1})$$

$$dS = dy dz \mathbf{i} + dx dz \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}, \quad (\text{A.2.2})$$

$$dV = dx dy dz. \quad (\text{A.2.3})$$

Vector de posición

$$\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = x_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.2.4})$$

²² En esta sección, en expresiones con notación mediante índices, se prescinde, por simplicidad, del índice c para denotar los vectores (cartesianos) unitarios \mathbf{e}_i^c . Además, con objeto de mantener la misma notación que en otros capítulos y en el Apéndice B, las coordenadas (cartesianas) se denotan como x_i en lugar de x^i .

Vector velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} = \frac{dx_i}{dt} \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}_i. \quad (A.2.5)$$

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \{v_i\}. \quad (A.2.6)$$

Gradiente

- De un campo escalar:²⁶

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i. \quad (A.2.7)$$

$$\begin{aligned} \{\nabla \phi\} &= \{\nabla\} \phi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \phi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \phi = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\} = \{\partial_i \phi\} = \{\phi_{,i}\}. \end{aligned} \quad (A.2.8)$$

²³ Con objeto de familiarizar al lector con distintos tipos de notación, las relaciones que se incluyen en esta sección se expresan de forma tanto vectorial como matricial. Se utilizan asimismo, para ambos tipos de expresiones, varias formas alternativas de notación mediante índices.

²⁴ En esta sección, dado que las componentes en las bases natural, dual y física son iguales ($v^i = v_i = v_{(i)}$) al ser $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, en expresiones con notación mediante índices las componentes del vector velocidad se denotan siempre como v_i . Obsérvese que la notación adoptada puede producir confusión entre la componente v del vector velocidad según y y el módulo de \mathbf{v} , o incluso con la componente v_i de este según x_i . Algún inconveniente de este tipo suele ser, en mayor o menor medida, generalmente inevitable cualquiera que sea la notación utilizada.

²⁵ También es posible utilizar la expresión $\{\mathbf{v}\}_i = v_i$.

²⁶ El operador ∇ se representa en notación matricial por un vector columna con las componentes que se indican:

$$\{\nabla\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} = \{\partial_i\}.$$

Obsérvese que una coma en el subíndice (último término de la ecuación (A.2.8)) indica derivada con respecto a la coordenada correspondiente al índice que le sigue.

- De un campo vectorial:²⁷

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j. \quad (\text{A.2.9})$$

$$\begin{aligned} [\nabla \mathbf{v}] &= [\{\nabla\} \{\mathbf{v}\}^T]^T = \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \right]^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.10}) \\ &= \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \{v_i\}^T \right]^T = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = [v_{i,j}]. \end{aligned}$$

Divergencia

- De un campo vectorial:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \{\nabla\}^T \{\mathbf{v}\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.2.11}) \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}^T \{v_i\} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

- De un campo tensorial:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} &= \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \mathbf{j} \quad (\text{A.2.12}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{k} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

²⁷ También es posible utilizar la expresión $[\nabla \mathbf{v}]_{ij} = \partial v_i / \partial x_j = v_{i,j}$.

$$\begin{aligned}
 \{\nabla \cdot \bar{\bar{\mathbf{r}}}\} &= \left(\{\nabla\}^T \{\bar{\bar{\mathbf{r}}}\}^T \right)^T = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}^T [\tau_{ij}]^T \right)^T = \left\{ \frac{\partial \tau_{xj}}{\partial j} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tau_{yj}}{\partial j} \right\} = \left\{ \frac{\partial \tau_{zj}}{\partial j} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{A.2.13}$$

Rotacional

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
 &= \epsilon_{ijk} v_{k,j} \mathbf{e}_i.
 \end{aligned}
 \tag{A.2.14}$$

El coeficiente de permutación $\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$.²⁸

²⁸ Compruébese que

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la permutación } (ijk) \text{ es par: } (123), (231), (312); \\ -1 & \text{si la permutación } (ijk) \text{ es impar: } (132), (213), (321); \\ 0 & \text{si existe algún índice repetido en } (ijk). \end{cases}$$

Laplaciana

- De un campo escalar:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= \nabla \cdot \nabla \phi = \{\nabla\}^T \{\nabla \phi\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}.\end{aligned}\quad (\text{A.2.15})$$

- De un campo vectorial:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 u \mathbf{i} + \nabla^2 v \mathbf{j} + \nabla^2 w \mathbf{k} = \nabla^2 v_i \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.2.16})$$

$$\begin{aligned}\{\nabla^2 \mathbf{v}\} &= \{\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}\} = \left(\{\nabla\}^T [\nabla \mathbf{v}]^T \right)^T \\ &= \left(\{\nabla\}^T [\{ \{\nabla\} \{ \mathbf{v} \}^T]^T]^T \right)^T = \left(\{\nabla\}^T \{\nabla\} \{ \mathbf{v} \}^T \right)^T \\ &= \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \{v_i\}^T \right)^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right\}.\end{aligned}\quad (\text{A.2.17})$$

Derivada convectiva

- De un campo escalar:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \nabla \phi &= \{\mathbf{v}\}^T \{\nabla \phi\} = u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \{v_i\}^T \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\} = v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.\end{aligned}\quad (\text{A.2.18})$$

- De un campo vectorial:²⁹

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla u \mathbf{i} + \mathbf{v} \cdot \nabla v \mathbf{j} + \mathbf{v} \cdot \nabla w \mathbf{k} \\
 &= \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\
 &\quad + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{k} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i.
 \end{aligned} \tag{A.2.21}$$

²⁹ Cabe hacer la siguiente observación sobre la notación de determinadas operaciones elementales de álgebra matricial. Desarrollando el segundo miembro de la primera igualdad de la ecuación (A.2.10), se obtiene

$$[\nabla \mathbf{v}] = [\{\nabla\}\{\mathbf{v}\}^T]^T = \{\mathbf{v}\}\{\nabla\}^T. \tag{A.2.19}$$

Obsérvese que en el término $\{\mathbf{v}\}\{\nabla\}^T$ de la expresión resultante el operador $\{\nabla\}^T$ actúa “hacia atrás” sobre el vector $\{\mathbf{v}\}$, de forma que

$$\{\mathbf{v}\}\{\nabla\}^T = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Considérense ahora las dos primeras igualdades de la ecuación (A.2.22),

$$\{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\} = (\{\mathbf{v}\}^T [\nabla \mathbf{v}]^T)^T = (\{\mathbf{v}\}^T \{\nabla\} \{\mathbf{v}\}^T)^T. \tag{A.2.20}$$

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación (A.2.20) y sustituyendo después $[\nabla \mathbf{v}]$ por el último término de la ecuación (A.2.19), se obtiene

$$(\{\mathbf{v}\}^T [\nabla \mathbf{v}]^T)^T = [\nabla \mathbf{v}] \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\} \{\nabla\}^T \{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

Obsérvese que, en los dos últimos términos de esta ecuación, debe tenerse en cuenta que $\{\nabla\}^T$ también opera “hacia atrás”, sobre el vector $\{\mathbf{v}\}$ que le precede; en caso contrario, se obtiene la siguiente expresión incorrecta:

$$\{\mathbf{v}\} \{\nabla\}^T \{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \{\mathbf{v}\} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \neq \{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\}.$$

Compruébese que en el último término de la ecuación (A.2.20), sin embargo, el operador $\{\nabla\}$ actúa “hacia adelante”, sobre el vector $\{\mathbf{v}\}^T$ que le sigue en $\{\mathbf{v}\}^T \{\nabla\} \{\mathbf{v}\}^T$.

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\} &= \left(\{\mathbf{v}\}^T [\nabla \mathbf{v}]^T \right)^T = \left(\{\mathbf{v}\}^T \{\nabla\} \{\mathbf{v}^T\} \right)^T \\
&= \left(\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \left(\{\mathbf{v}_j\}^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \{\mathbf{v}_i\}^T \right)^T = \left\{ \begin{matrix} v_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ v_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \\ v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \end{matrix} \right\} = \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\}.
\end{aligned} \tag{A.2.22}$$

A.3. Coordenadas cilíndricas

Definición

Las coordenadas se denotarán como sigue:

$$x^1 = r, \tag{A.3.1}$$

$$x^2 = \theta, \tag{A.3.2}$$

$$x^3 = z. \tag{A.3.3}$$

El sistema de coordenadas se indica en la Figura A.3.1. Obsérvese que se ha tomado

$$x = r \cos \theta, \tag{A.3.4}$$

$$y = r \sin \theta. \tag{A.3.5}$$

Bases de vectores

■ Base física

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \tag{A.3.6}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \tag{A.3.7}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \mathbf{k}. \tag{A.3.8}$$

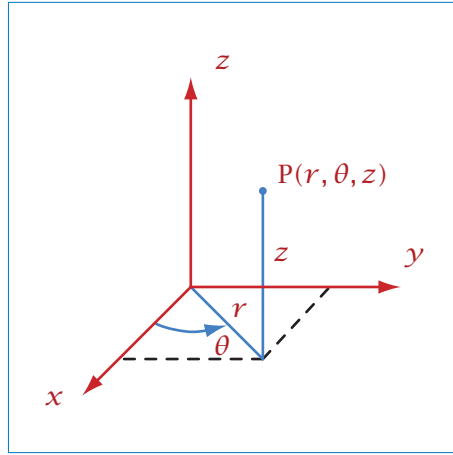


Figura A.3.1
Sistema de coordenadas cilíndricas.

■ Base natural

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_r, \quad (\text{A.3.9})$$

$$\mathbf{g}_2 = r \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{A.3.10})$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.3.11})$$

■ Base dual

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{e}_r, \quad (\text{A.3.12})$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}, \quad (\text{A.3.13})$$

$$\mathbf{g}^3 = \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.3.14})$$

Factores de escala

$$h_1 = 1, \quad (\text{A.3.15})$$

$$h_2 = r, \quad (\text{A.3.16})$$

$$h_3 = 1. \quad (\text{A.3.17})$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad (\text{A.3.18})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \quad (\text{A.3.19})$$

Los restantes Γ_{jk}^i son nulos.

Elementos diferenciales

$$d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z, \quad (\text{A.3.20})$$

$$dS = r d\theta dz \mathbf{e}_r + dr dz \mathbf{e}_\theta + r dr d\theta \mathbf{e}_z, \quad (\text{A.3.21})$$

$$dV = r dr d\theta dz. \quad (\text{A.3.22})$$

Vector de posición

$$\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.3.23})$$

Vector velocidad

- Componentes en la base física ($\mathbf{v} = v_{(i)} \mathbf{e}_i$)

$$v_{(1)} = v_r, \quad (\text{A.3.24})$$

$$v_{(2)} = v_\theta, \quad (\text{A.3.25})$$

$$v_{(3)} = v_z. \quad (\text{A.3.26})$$

- Componentes en la base natural ($\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$)

$$v^1 = v_r, \quad (\text{A.3.27})$$

$$v^2 = \frac{v_\theta}{r}, \quad (\text{A.3.28})$$

$$v^3 = v_z. \quad (\text{A.3.29})$$

- Componentes en la base dual ($\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$)

$$v_1 = v_r, \quad (\text{A.3.30})$$

$$v_2 = r v_\theta, \quad (\text{A.3.31})$$

$$v_3 = v_z. \quad (\text{A.3.32})$$

Gradiente

- De un campo escalar:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.3.33})$$

- De un campo vectorial:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial z} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \\ & + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.3.34})$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{en la base } \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}). \quad (\text{A.3.35})$$

Divergencia

- De un campo vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.3.36})$$

- De un campo tensorial:³⁰

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = & \left(\frac{\partial \tau_{(rr)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{(r\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{(rz)}}{\partial z} + \frac{\tau_{(rr)} - \tau_{(\theta\theta)}}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{(\theta r)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{(\theta\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{(\theta z)}}{\partial z} + \frac{2\tau_{(\theta r)}}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{(zr)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{(z\theta)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{(zz)}}{\partial z} + \frac{\tau_{(zr)}}{r} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.3.37})$$

Rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.3.38})$$

³⁰ Véase la nota 21 al pie de la página 446.

Laplaciana

- De un campo escalar:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.3.39})$$

- De un campo vectorial:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = & \left[\nabla^2 v_r - \frac{1}{r^2} \left(v_r + 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \mathbf{e}_r \\ & + \left[\nabla^2 v_\theta - \frac{1}{r^2} \left(v_\theta - 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \nabla^2 v_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.3.40})$$

Derivada convectiva

- De un campo escalar:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi = v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (\text{A.3.41})$$

- De un campo vectorial:³¹

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{v_\theta^2}{r} \mathbf{e}_r + \frac{v_r v_\theta}{r} \mathbf{e}_\theta \\ = \left(\mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\mathbf{v} \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ + (\mathbf{v} \cdot \nabla v_z) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.3.42})$$

A.4. Coordenadas esféricas*Definición*

Las coordenadas se denotarán como sigue:

$$x^1 = r, \quad (\text{A.4.1})$$

$$x^2 = \theta, \quad (\text{A.4.2})$$

$$x^3 = \varphi. \quad (\text{A.4.3})$$

El sistema de coordenadas utilizado se indica en la Figura A.4.1.

³¹ Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en coordenadas cartesianas, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \neq (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

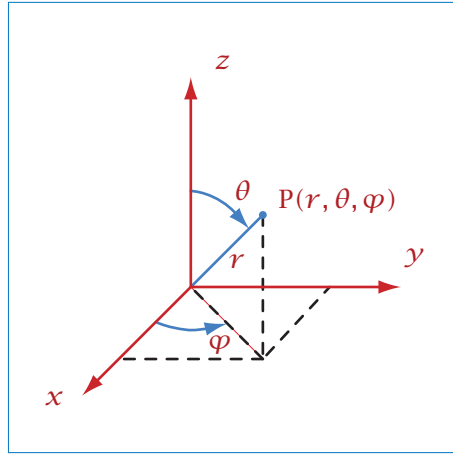


Figura A.4.1
Sistema de coordenadas esféricas.

Obsérvese que se ha tomado³²

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (\text{A.4.4})$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (\text{A.4.5})$$

$$z = r \cos \theta. \quad (\text{A.4.6})$$

Bases de vectores

■ Base física

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \quad (\text{A.4.7})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \quad (\text{A.4.8})$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (\text{A.4.9})$$

■ Base natural

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_r, \quad (\text{A.4.10})$$

$$\mathbf{g}_2 = r \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{A.4.11})$$

$$\mathbf{g}_3 = r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{A.4.12})$$

³² Téngase en cuenta que no en todos los libros se utiliza la definición de coordenadas introducida aquí, especialmente en lo que se refiere a la coordenada φ , siendo también frecuente tomar esta como el ángulo complementario del indicado en la Figura A.4.1.

■ Base dual

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{e}_r, \quad (\text{A.4.13})$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{A.4.14})$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{A.4.15})$$

Factores de escala

$$h_1 = 1, \quad (\text{A.4.16})$$

$$h_2 = r, \quad (\text{A.4.17})$$

$$h_3 = r \sin \theta. \quad (\text{A.4.18})$$

Símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.4.19})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta, \quad (\text{A.4.20})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta. \quad (\text{A.4.21})$$

Los restantes Γ_{jk}^i son nulos.

Elementos diferenciales

$$d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{A.4.22})$$

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r + r \sin \theta dr d\varphi \mathbf{e}_\theta + r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{A.4.23})$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (\text{A.4.24})$$

Vector de posición

$$\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r. \quad (\text{A.4.25})$$

Vector velocidad

■ Componentes en la base física ($\mathbf{v} = v_{(i)} \mathbf{e}_i$)

$$v_{(1)} = v_r, \quad (\text{A.4.26})$$

$$v_{(2)} = v_\theta, \quad (\text{A.4.27})$$

$$v_{(3)} = v_\varphi. \quad (\text{A.4.28})$$

- Componentes en la base natural ($\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i$)

$$v^1 = v_r, \quad (\text{A.4.29})$$

$$v^2 = \frac{v_\theta}{r}, \quad (\text{A.4.30})$$

$$v^3 = \frac{v_\varphi}{r \sin \theta}. \quad (\text{A.4.31})$$

- Componentes en la base dual ($\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$)

$$v_1 = v_r, \quad (\text{A.4.32})$$

$$v_2 = r v_\theta, \quad (\text{A.4.33})$$

$$v_3 = r \sin \theta v_\varphi. \quad (\text{A.4.34})$$

Gradiente

- De un campo escalar:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{A.4.35})$$

- De un campo vectorial:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} = & \frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varphi \\ & + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi \\ & + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \right) \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.4.36})$$

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - v_\varphi \cot \theta \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r + v_\theta \cot \theta \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.37})$$

(en la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$).

Divergencia

- De un campo vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.4.38})$$

- De un campo tensorial:³³

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} = & \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right. \\ & \left. + \frac{2\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{r\theta} \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \right. \\ & \left. + \frac{3\tau_{\theta r} + \tau_{r\theta} + (\tau_{\theta\theta} - \tau_{\varphi\varphi}) \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right. \\ & \left. + \frac{3\tau_{\varphi r} + \tau_{r\varphi} + (\tau_{\theta\varphi} + 2\tau_{\varphi\theta}) \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.4.39})$$

Rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(v_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r \\ & + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.4.40})$$

Laplaciana

- De un campo escalar:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.41})$$

³³ Véase la nota 21 al pie de la página 455.

- De un campo vectorial ($\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} = & \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\nabla^2 v_z + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.4.42})$$

Derivada convectiva

- De un campo escalar:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi = v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.4.43})$$

- De un campo vectorial:³⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = & (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \mathbf{e}_r + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \mathbf{e}_\varphi \\ = & \left(\mathbf{v} \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(\mathbf{v} \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\mathbf{v} \cdot \nabla v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.4.44})$$

³⁴ Obsérvese que $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \neq (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

Apéndice B

Relación de ecuaciones

En este apéndice se presentan algunas ecuaciones a las que se hace referencia en los ejercicios. Téngase en cuenta que se trata tan solo de una mera relación, no exhaustiva, de ecuaciones, y que no se han incluido explicaciones detalladas sobre su deducción, condiciones de validez, etc. La notación utilizada se corresponde con la que aparece en la sección de nomenclatura.

B.1. Ecuaciones de conservación en forma integral

B.1.1. Ecuación de conservación de la masa

Expresa que la masa de un volumen fluido (sistema material) $V_f(t)$ permanece constante en el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \, dV = 0. \quad (\text{B.1.1})$$

Referida a un volumen de control variable en el tiempo, $V_c(t)$, que en el instante considerado coincide con el volumen fluido, y cuya superficie S_c se mueve con velocidad \mathbf{v}_c , puede escribirse de la forma

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \, dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, dS}_{[2]} = 0. \quad (\text{B.1.2})$$

El término [1] expresa la variación en el tiempo de la masa contenida en el volumen de control $V_c(t)$ y el término [2] el flujo de masa saliente a través de S_c . Si el

volumen de control es fijo ($\mathbf{v}_c = 0$),

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = 0. \quad (\text{B.1.3})$$

B.1.2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Expresa que la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento asociada a un volumen fluido es igual a la resultante de las fuerzas de superficie y de volumen que actúan sobre él:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v. \quad (\text{B.1.4})$$

Utilizando un volumen de control variable en el tiempo $V_c(t)$, cuya superficie S_c se mueve con velocidad \mathbf{v}_c , e introduciendo

$$\mathbf{F}_s = \int_{S_c} \mathbf{f}_s dS = \int_{S_c} \bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (\text{B.1.5})$$

$$\mathbf{F}_v = \int_{V_c} \mathbf{f}_v dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m dV, \quad (\text{B.1.6})$$

resulta

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{v} dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} \bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} dS}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m dV}_{[4]}, \quad (\text{B.1.7})$$

donde el término [1] expresa la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento del fluido contenido en el volumen de control $V_c(t)$; el término [2] es el flujo convectivo de cantidad de movimiento saliente a través de S_c ; [3] es la resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre el volumen fluido a través de S_c , y [4] es la resultante de las fuerzas de volumen que se ejercen sobre el volumen fluido. Si el volumen de control es fijo,¹

$$\underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} \bar{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} dS}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m dV}_{[4]}. \quad (\text{B.1.8})$$

El tensor de tensiones $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ puede descomponerse haciendo

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \bar{\bar{\mathbf{T}}}' - p\mathbf{I}, \quad (\text{B.1.9})$$

¹ Véase la nota a pie de página 20 en la página 446, en relación con el tensor que aparece en el término [2] de la ecuación (B.1.8).

APÉNDICE B. RELACIÓN DE ECUACIONES

siendo p la presión, $\bar{\tau}$ el tensor de tensiones viscosas e \mathbf{I} el tensor identidad.

Las fuerzas de volumen más frecuentes son las debidas a la gravedad, $\mathbf{f}_m = \mathbf{g}$, y al movimiento no uniforme del sistema de referencia,

$$\mathbf{f}_m = -\mathbf{a} - (\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t) \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \quad (\text{B.1.10})$$

siendo \mathbf{a} y $\boldsymbol{\Omega}$, respectivamente, la aceleración uniforme y la velocidad angular del sistema de referencia, y \mathbf{x} , el vector de posición.

A partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento puede deducirse la siguiente ecuación de *conservación del momento cinético*:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_f(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} \, \mathrm{d}V &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_c(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} \, \mathrm{d}V}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S}_{[2]} \\ &= \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{x} \times (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n}) \, \mathrm{d}S}_{[3]} + \underbrace{\int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}_m \, \mathrm{d}V}_{[4]}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.11})$$

donde el término [1] representa la variación en el tiempo del momento cinético en el volumen de control; [2] es el flujo convectivo saliente de momento cinético a través de la superficie del volumen de control; [3] es el momento resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre el fluido a través de la superficie del volumen de control, y [4] es el momento resultante de las fuerzas de volumen que actúan sobre el fluido que ocupa el volumen de control. En definitiva, la ecuación (B.1.11) expresa que la variación en el tiempo del momento cinético de un volumen fluido es igual al momento resultante de las fuerzas que actúan sobre él.

B.1.3. Ecuación de conservación de la energía

Expresa que la variación en el tiempo de la *energía total (interna+cinética)* de un volumen fluido es igual a la suma del trabajo realizado por unidad de tiempo sobre el volumen fluido por las fuerzas de superficie y de volumen, y el calor comunicado al volumen fluido por unidad de tiempo. Utilizando un volumen de control variable en el tiempo $V_c(t)$, cuya superficie S_c se mueve con velocidad \mathbf{v}_c , puede escribirse:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_c(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \, \mathrm{d}V &+ \underbrace{\int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S}_{[2]} \\ &= \underbrace{\int_{V_c} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}V}_{[3]} + \underbrace{\int_{S_c} (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}S}_{[4]} + \underbrace{\int_{S_c} (-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S}_{[5]} + \underbrace{\int_{V_c} \dot{Q}_{r,q} \, \mathrm{d}V}_{[6]}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.12})$$

El término [1] representa la variación en el tiempo de la energía total en el volumen de control; [2] es el flujo convectivo de energía total que sale a través de la superficie del volumen de control; [3] es la potencia de las fuerzas másicas que actúan sobre el fluido contenido en el volumen de control; [4] es la potencia de las fuerzas de presión y viscosas que se ejercen sobre el fluido a través de la superficie de control; [5] es el flujo de calor por conducción que se comunica al fluido a través de la superficie de control (\mathbf{q} tiene sentido saliente), y [6] el calor comunicado por unidad de tiempo al fluido que ocupa el volumen de control por radiación y reacción química.

Si se supone que las fuerzas másicas derivan de una función potencial, U , independiente del tiempo, la ecuación anterior puede expresarse de la forma

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + U \right) dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + U \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} (\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{[3]} + \underbrace{\int_{S_c} (-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dS}_{[4]} + \underbrace{\int_{V_c} \dot{Q}_{r,q} dV}_{[5]}. \quad (\text{B.1.13})$$

La ecuación (B.1.13) expresa que la variación en el tiempo de la suma de la *energía total (interna+cinética)* y la *energía potencial* de un volumen fluido se debe al trabajo por unidad de tiempo de las *fuerzas de superficie* que actúan sobre el volumen fluido y al calor comunicado al volumen fluido por unidad de tiempo.

Para *fluidos incompresibles*, la ecuación de conservación de la *energía interna* de un volumen fluido, referida a un volumen de control variable en el tiempo, puede expresarse de la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho e dV = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho e dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho e (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = \underbrace{\int_{V_c} \Phi_v dV}_{[3]} + \underbrace{\int_{S_c} (-\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dS}_{[4]} + \underbrace{\int_{V_c} \dot{Q}_{r,q} dV}_{[5]}. \quad (\text{B.1.14})$$

Restando las ecuaciones (B.1.13) y (B.1.14) se obtiene la ecuación de conservación de la *energía mecánica* para un volumen fluido, referida a un volumen de

APÉNDICE B. RELACIÓN DE ECUACIONES

control variable en el tiempo, válida para *fluidos incompresibles*,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) dV}_{[1]} + \underbrace{\int_{S_c} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} dS}_{[2]} = \underbrace{\int_{S_c} (\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_{[3]} - \underbrace{\int_{V_c} \Phi_v dV}_{[4]}. \quad (\text{B.1.15})$$

En varios problemas se hace uso de la siguiente forma simplificada de la ecuación (B.1.15) de conservación de la *energía mecánica*:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U \right)_2 = gH_\varphi + g\Delta H, \quad (\text{B.1.16})$$

$$\Delta H = \begin{cases} -H_m & \text{en bombas,} \\ H_n & \text{en turbinas.} \end{cases}$$

Corresponde a un flujo estacionario en un sistema con secciones de entrada (1) y salida (2) únicas (en las que las magnitudes fluidas pueden suponerse uniformes²), en el que se produce una pérdida de altura H_φ por efectos de viscosidad, y que puede contener una máquina hidráulica que incremente (en el caso de bombas) o disminuya (en el caso de turbinas) la altura total del fluido que circula a través de ella.³ El flujo obviamente debe ser incompresible. La altura H_φ es

$$H_\varphi = \frac{\bar{\Phi}_v}{gG}, \quad (\text{B.1.17})$$

siendo $\bar{\Phi}_v$ el término [4] de la ecuación (B.1.15).

También en flujos estacionarios e incompresibles a través de sistemas con secciones de entrada (1) y salida (2) únicas (en las que las propiedades se suponen uniformes), la ecuación (B.1.14) de conservación de la *energía interna* en forma

² Para tener en cuenta la no uniformidad de las magnitudes fluidas en las secciones 1 y 2 podrían utilizarse valores medios en cada sección en el primer miembro de la ecuación (B.1.16) e introducir una corrección que tenga en cuenta el efecto de la no uniformidad en el cálculo de las integrales de la ecuación (B.1.15).

³ En la Sección B.6.2 se definen los conceptos de altura manométrica, H_m , y salto neto, H_n , en bombas y turbinas hidráulicas. Téngase en cuenta que cuando la ecuación (B.1.16), tal como se ha escrito, se aplica a una instalación en la que existe una máquina, H_φ no incluye las pérdidas en el interior de la máquina. El balance de energía en el interior de la máquina se expresa mediante la ecuación (B.6.3). En realidad, la ecuación (B.6.3) se deduce de la ecuación (B.1.16) haciendo $H_\varphi = 0$.

integral puede expresarse de la forma siguiente:

$$e_2 - e_1 = \frac{\overline{\Phi}_v}{G} + \frac{\dot{\overline{Q}}}{G}, \quad (\text{B.1.18})$$

siendo $\dot{\overline{Q}}$ la suma de los términos [4] y [5] de la ecuación (B.1.14).

B.2. Ecuaciones de conservación en forma diferencial

B.2.1. Masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{B.2.1})$$

Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.2.2})$$

Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (\text{B.2.3})$$

Coordenadas esféricas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0. \quad (\text{B.2.4})$$

B.2.2. Cantidad de movimiento

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} + \rho \mathbf{f}_m. \quad (\text{B.2.5})$$

El tensor de tensiones viscosas puede expresarse mediante la ley de Navier-Poisson:

$$\tau'_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \delta_{ij}, \quad (\text{B.2.6})$$

siendo S_{ij} el tensor velocidad de deformación,

$$\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + [\nabla \mathbf{v}]^T \right). \quad (\text{B.2.7})$$

APÉNDICE B. RELACIÓN DE ECUACIONES

En la ecuación anterior, el tensor gradiente de velocidad, $\nabla \mathbf{v}$, puede expresarse, en coordenadas cartesianas, como sigue:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (\text{B.2.8})$$

y en coordenadas cilíndricas y esféricas, respectivamente, mediante las ecuaciones (A.3.35) y (A.4.37). La divergencia del vector velocidad, $\nabla \cdot \mathbf{v}$, en coordenadas cilíndricas y esféricas, se expresa en las ecuaciones (A.3.36) y (A.4.38), respectivamente.

B.2.2.1. Fluidos en reposo

Si es posible encontrar un sistema de referencia respecto del cual el fluido está en reposo, la ecuación (B.2.5) se reduce a

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}_m, \quad (\text{B.2.9})$$

y si las fuerzas másicas derivan de un potencial U , resulta

$$\frac{dp}{dU} = -\rho. \quad (\text{B.2.10})$$

B.2.2.2. Flujo de un fluido incompresible con viscosidad uniforme

(Se supone que las fuerzas másicas se reducen a la gravitatoria, siendo z el eje vertical.)

Coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (\text{B.2.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \quad (\text{B.2.12})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w - g \quad (\text{B.2.13})$$

(véanse las ecuaciones (A.2.18) y (A.2.15)).

Coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (\text{B.2.14})$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \quad (\text{B.2.15})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z - g \quad (\text{B.2.16})$$

(véanse las ecuaciones (A.3.41) y (A.3.39)).

Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right) & \\ - g \cos \theta, & \end{aligned} \quad (\text{B.2.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\theta + \frac{v_r v_\theta - v_\varphi^2 \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ + \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) &+ g \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{B.2.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi + v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ + \nu \left(\nabla^2 v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right). & \end{aligned} \quad (\text{B.2.19})$$

(véanse las ecuaciones (A.4.43) y (A.4.41)).

B.2.3. Energía interna

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi_v + \dot{Q}_r + \dot{Q}_q. \quad (\text{B.2.20})$$

B.2.4. Entropía

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi_v + \dot{Q}_r + \dot{Q}_q. \quad (\text{B.2.21})$$

B.3. Flujos laminares, estacionarios y unidireccionales de líquidos

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo se reduce a (consúltense condiciones de validez)

$$\mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + P_e = 0, \quad (\text{B.3.1})$$

siendo

$$P_e = - \frac{d(p + \rho U)}{dx} \quad (\text{B.3.2})$$

el módulo (cambiado de signo) del gradiente de la presión reducida, $P = p + \rho g z$. En flujos bidimensionales,

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + P_e = 0. \quad (\text{B.3.3})$$

En coordenadas cilíndricas,

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] + P_e = 0, \quad (\text{B.3.4})$$

y si el flujo es axisimétrico,

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + P_e = 0. \quad (\text{B.3.5})$$

En tuberías de sección circular de radio R ,

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} P_e. \quad (\text{B.3.6})$$

En conductos bidimensionales de anchura h ,

$$Q = \frac{P_e}{12\mu} h^3 b. \quad (\text{B.3.7})$$

B.4. Flujos de fluidos ideales

B.4.1. Ecuación de Euler-Bernoulli

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = 0 \quad (\text{B.4.1})$$

(consúltense las condiciones de validez de esta ecuación).

B.4.2. Flujos de líquidos ideales

B.4.2.1. Ecuación de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + U = \text{constante.} \quad (\text{B.4.2})$$

Recuérdese que las condiciones bajo las que puede aplicarse esta ecuación a lo largo de una línea de corriente son las siguientes (véase, por ejemplo, el texto de Crespo (2006)):

- Efectos de la viscosidad despreciables.
- Flujo estacionario o cuasiestacionario.
- Densidad del fluido uniforme.
- Fuerzas másicas derivan del potencial U .

Si el flujo es, además, irrotacional, la constante del segundo miembro de la ecuación es la misma para todas las líneas de corriente.⁴

B.4.3. Flujos de gases ideales

B.4.3.1. Relaciones entre variables termodinámicas y magnitudes de remanso

Cuando las magnitudes de remanso se conservan en todo el campo fluido, para gases caloríficamente perfectos se satisfacen las siguientes relaciones entre las magnitudes estáticas y las de remanso:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{e_0}{e} = \frac{h_0}{h} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (\text{B.4.3})$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (\text{B.4.4})$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (\text{B.4.5})$$

Las ecuaciones (B.4.3), (B.4.4) y (B.4.5) se presentan tabuladas en la Tabla .

⁴ Esto ocurre, por ejemplo, cuando todas las líneas de corriente proceden de una región donde el fluido está en reposo.

APÉNDICE B. RELACIÓN DE ECUACIONES

B.4.3.2. Movimiento cuasiunidimensional en conductos con magnitudes de remanso constantes

La siguiente expresión (válida para gases caloríficamente perfectos) permite relacionar (por ejemplo, para un gasto y unas magnitudes de remanso determinados) el número de Mach en cada sección de una tobera con el área de la sección:

$$A = \frac{G}{\rho_0 a_0 M} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (\text{B.4.6})$$

El área crítica se obtiene haciendo $M = 1$ en la ecuación anterior:

$$A^* = \frac{G}{\rho_0 a_0} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (\text{B.4.7})$$

Para aire ($\gamma = 1,4$),

$$A^* = 1,728 \frac{G}{\rho_0 a_0}. \quad (\text{B.4.8})$$

Dividiendo las ecuaciones (B.4.6) y (B.4.7), se obtiene

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (\text{B.4.9})$$

La ecuación (B.4.9) se presenta tabulada para $\gamma = 1,4$ en la Tabla C.3.

B.4.3.3. Movimientos con superficies de discontinuidad. Ondas de choque normales

Las siguientes relaciones determinan el salto de propiedades a través de una onda de choque normal para un gas perfecto:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}, \quad (\text{B.4.10})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma + 1} [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)], \quad (\text{B.4.11})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (\text{B.4.12})$$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}. \quad (\text{B.4.13})$$

La disminución de la presión de remanso a través de una onda de choque normal viene dada por

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \left\{ \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left[\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right]^\gamma \right\}^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \quad (\text{B.4.14})$$

El aumento del área crítica a través de una onda de choque normal viene dada por

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{(\gamma - 1)M_2^2 + 2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} \right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)}. \quad (\text{B.4.15})$$

La entalpía de remanso se conserva a través de la onda de choque.

Las ecuaciones (B.4.13), (B.4.11), (B.4.12) y (B.4.14) se presentan tabuladas en la Tabla C.4. La relación A_2^*/A_1^* , expresada por la ecuación (B.4.15), puede obtenerse también de la Tabla C.4, teniendo en cuenta que $A_2^*/A_1^* = p_{01}/p_{02}$ (esto puede deducirse a partir de la ecuación (B.4.8), si se tiene en cuenta que la entalpía de remanso se conserva a través de la onda de choque, y que, por tanto, $a_{01} = a_{02}$).

B.5. Flujos turbulentos

B.5.1. Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos estacionarios en tuberías

Entre dos secciones, denotadas con subíndices 1 y 2, situadas a lo largo de una tubería (la sección 2 aguas abajo de la sección 1) por la que circula un fluido incompresible en condiciones estacionarias, suponiendo que la tubería es de sección gradualmente variable y tiene un radio de curvatura de su línea media grande frente al radio hidráulico, la disminución de energía mecánica específica viene dada por (ver ecuación (B.1.16))

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right)_2 = gH_\varphi, \quad (\text{B.5.1})$$

donde v es la velocidad media en una sección y

$$H_\varphi = \int_1^2 \frac{fv^2}{8gr_h} dl + \sum K \frac{v^2}{2g} \quad (\text{B.5.2})$$

es la suma de la altura de pérdidas debidas a la fricción y las alturas de pérdidas locales,⁵ siendo f el factor de fricción.⁶ Si la tubería es de sección circular ($r_h =$

⁵ En los elementos en los que se producen las pérdidas de carga locales pueden existir cambios bruscos de sección en el conducto. Entre dichos elementos se incluyen los estrechamientos y ensanchamientos correspondientes a las secciones de conexión de una tubería con un depósito.

⁶ Existe cierta confusión en la literatura sobre la denominación del factor de fricción f . El factor de fricción f de la ecuación (B.5.2) es igual a cuatro veces el denominado coeficiente de fricción, C_f ($f = 4C_f = 4\sigma_p/(\frac{1}{2}\rho v^2)$, siendo σ_p la tensión cortante en la pared). En algunos textos se utiliza λ para denotar el factor de fricción f . En ocasiones, se denomina a f coeficiente de fricción, en lugar de factor de fricción, e incluso en algunos textos se denomina factor de fricción a lo que

APÉNDICE B. RELACIÓN DE ECUACIONES

$D/4$) constante,

$$H_{\varphi} = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum K \frac{v^2}{2g}. \quad (\text{B.5.3})$$

B.5.2. Ecuación de conservación de la energía mecánica en flujos no estacionarios en tuberías de sección constante

Con hipótesis equivalentes a las de la sección anterior, pero suponiendo ahora que el flujo es no estacionario, de forma que la velocidad media en la tubería (que será uniforme a lo largo de esta al suponerse constante el área de su sección transversal, A) es

$$v(t) = \frac{Q(t)}{A}, \quad (\text{B.5.4})$$

la conservación de la energía mecánica entre dos secciones 1 y 2 de la tubería, separadas una longitud L , se puede expresar como sigue:⁷

$$\left(\frac{p}{\rho} + U \right)_1 - \left(\frac{p}{\rho} + U \right)_2 = gH_{\varphi} + L \frac{dv}{dt}, \quad (\text{B.5.5})$$

donde⁸

$$H_{\varphi} = \frac{f v |v|}{8g r_h} L. \quad (\text{B.5.6})$$

B.6. Máquinas de fluidos

B.6.1. Ecuación de conservación de la energía

Para *máquinas de fluidos*, suponiendo que en las secciones de entrada y salida de la máquina las propiedades son uniformes y los efectos de viscosidad despre-

aquí se ha definido como coeficiente de fricción (es menos equívoco denominar a C_f factor de fricción de Fanning, como se hace en alguna ocasión). Generalmente, en el diagrama de Moody se representa el factor de fricción f (aunque se le denomine coeficiente de fricción), si bien en ocasiones, aunque infrecuentes, se representa $f/4$ en lugar de f . Las denominaciones que se utilizan aquí son generalmente las más extendidas.

⁷ La ecuación (B.5.5) es el resultado de integrar la siguiente ecuación a lo largo de la tubería, entre las secciones 1 y 2:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = - \frac{f v |v|}{8 r_h},$$

siendo l la coordenada a lo largo del conducto. Obsérvese que, para $f = 0$, de la ecuación anterior se obtiene la ecuación B.4.1 de Euler-Bernoulli para el caso de un fluido de densidad constante.

⁸ Obsérvese que v^2 se ha expresado como $v|v|$ para tener en cuenta que el término de pérdida de energía específica debida a las fuerzas de fricción (primer término del segundo miembro de la ecuación (B.5.5)) deber estar precedido de signo positivo cuando el signo de la velocidad es positivo; es decir, cuando el fluido circula en el sentido que va de la sección 1 a la sección 2.

ciables, y que la masa y la energía en el volumen de control considerado no varían en el tiempo, de la aplicación de la ecuación (B.1.13) se obtiene

$$\left(h + \frac{1}{2}v^2 + U\right)_s - \left(h + \frac{1}{2}v^2 + U\right)_e = \frac{\dot{W}}{G} + \frac{\dot{Q}}{G}. \quad (\text{B.6.1})$$

El primer término del segundo miembro procede del término [3] de la ecuación (B.1.13). \dot{W} es la potencia mecánica intercambiada entre máquina y fluido.

En *máquinas hidráulicas*, la ecuación (B.1.14) de conservación de la *energía interna* en forma integral (suponiendo propiedades uniformes en las secciones de entrada y salida de la máquina) puede expresarse de la forma siguiente:

$$e_s - e_e = \frac{\overline{\Phi}_v}{G} + \frac{\dot{Q}}{G}. \quad (\text{B.6.2})$$

(Obsérvese que esta ecuación coincide con la ecuación (B.1.18).)

Restando las ecuaciones (B.6.1) y (B.6.2) se obtiene la ecuación de conservación de la *energía mecánica* en máquinas hidráulicas:⁹

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U\right)_s - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U\right)_e = \frac{\dot{W}}{G} - \frac{\overline{\Phi}_v}{G}. \quad (\text{B.6.3})$$

Esta ecuación, que lógicamente también puede aplicarse a elementos de máquinas (rodetes, distribuidores, difusores, etc.), coincide con la ecuación (B.1.16).

B.6.2. Definición de alturas y rendimientos

B.6.2.1. Bombas hidráulicas

En bombas hidráulicas,

$$\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U\right]_e^s > 0.$$

La energía específica que transmiten los álabes de la máquina al fluido,

$$\frac{\dot{W}}{G} = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U\right]_e^s + \frac{\overline{\Phi}_v}{G}, \quad (\text{B.6.4})$$

⁹ Esta ecuación también puede obtenerse directamente a partir de la ecuación (B.1.15), y es un caso particular de la ecuación (B.1.16). En este caso, las secciones 1 y 2 de entrada y salida del volumen de control coinciden con las secciones de entrada y salida de la máquina, por lo que $H_{\varphi} = 0$; el segundo miembro es, por tanto, ΔH , y $\overline{\Phi}_v$ es la potencia correspondiente a pérdidas hidráulicas en el interior de la máquina.

debe ser, por tanto, positiva; una parte se emplea en incrementar la energía mecánica específica del fluido entre las secciones de entrada y salida de la bomba y el resto se disipa debido a efectos de viscosidad.¹⁰ Los tres términos de la ecuación (B.6.3) pueden expresarse en función de las “alturas” que se definen a continuación:

- *Altura manométrica* o altura efectiva de elevación,¹¹ H_m :

$$gH_m = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_e^s. \quad (\text{B.6.5})$$

- *Altura útil*¹² o altura teórica de elevación, H_u :

$$gH_u = \frac{\dot{W}}{G}. \quad (\text{B.6.6})$$

- *Altura de pérdidas internas*, H_L :

$$gH_L = \frac{\bar{\Phi}_v}{G}. \quad (\text{B.6.7})$$

La ecuación (B.6.3) puede entonces expresarse de la forma:

$$H_m = H_u - H_L. \quad (\text{B.6.8})$$

A la magnitud

$$\dot{W} = \dot{W}_u = GgH_u$$

¹⁰ En una turbomáquina, la fricción en el fluido produce turbulencia, y parte de la energía cinética del flujo medio se transforma en energía cinética turbulenta, que finalmente se disipa en forma de energía térmica. Aunque se han supuesto distribuciones uniformes de propiedades en la sección de salida de la máquina, en realidad el fluido sale de esta con cierta energía cinética turbulenta que se disipará y transformará en energía térmica fuera de la máquina. En $\bar{\Phi}_v$ se supondrá incluida la contribución debida a dicha energía cinética turbulenta.

¹¹ Existe una gran disparidad en la denominación de las distintas alturas por diferentes autores. Algunos, por ejemplo, distinguen entre altura de elevación (en m de columna del líquido bombeado) y altura manométrica (en m de c.a.). Otros llaman a H_m altura efectiva, altura suministrada o incluso altura útil.

¹² Se le denomina también altura de Euler, por ser la altura definida por la ecuación de Euler para turbomáquinas. No suele ser frecuente esta denominación de altura útil; de hecho, como se ha indicado en la nota anterior, a veces incluso se llama altura útil a lo que aquí se designa como altura manométrica. Sin embargo, el significado físico de H_u es el mismo en bombas que en turbinas, para las que sí se emplea la denominación de altura o salto útil (aparentemente con más sentido que en bombas al ser la altura que “se aprovecha”), por lo que se juzga más acertado emplear la misma denominación para definir lo que tanto en bombas como en turbinas es la altura intercambiada entre rodete y fluido. Si se prefiere, no obstante, puede utilizarse la denominación de altura teórica de elevación.

se la denomina *potencia útil*¹³ de la bomba. Utilizando la siguiente definición de *rendimiento manométrico*:

$$\eta_m = \frac{H_m}{H_u} = \frac{H_m}{H_m + H_L}, \quad (\text{B.6.9})$$

la potencia útil puede escribirse de la forma

$$\dot{W}_u = \frac{1}{\eta_m} GgH_m. \quad (\text{B.6.10})$$

El *rendimiento total* de la bomba es

$$\eta_t = \frac{GgH_m}{\dot{W}_t}, \quad (\text{B.6.11})$$

siendo \dot{W}_t la potencia que comunica el motor de accionamiento al eje de la bomba, denominada *potencia en el eje* o al freno. Este rendimiento puede expresarse como

$$\eta_t = \eta_o \eta_v \eta_m, \quad (\text{B.6.12})$$

siendo η_o y η_v los rendimientos orgánico (que tiene en cuenta las pérdidas por fricción entre elementos sólidos de la máquina) y volumétrico (que tiene en cuenta las fugas).

B.6.2.2. Turbinas hidráulicas

Se definen a continuación alturas y rendimientos utilizados en el estudio de turbinas hidráulicas, de forma análoga a como se ha hecho para bombas.¹⁴ Ahora, la ecuación (B.6.3) se considerará aplicada entre las secciones de entrada y salida de una máquina hidráulica que funcione como turbina. En turbinas,

$$\left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_e^s < 0.$$

La energía específica que transmiten los álabes de la máquina al fluido debe ser, por tanto, negativa ($\bar{W} < 0$). Una parte de la disminución de energía mecánica

¹³ De nuevo, con el adjetivo útil se hace referencia a potencia transmitida entre fluido y rodete.

¹⁴ Aunque la notación empleada es muy similar en bombas y turbinas, las definiciones de alturas y rendimientos (y la correspondiente denominación o notación en algunos casos), si bien corresponden a conceptos análogos, son obviamente diferentes para ambos tipos de máquinas. La altura manométrica, H_m , la altura útil, H_u , y el rendimiento manométrico, η_m , en bombas, se corresponden, respectivamente, con el salto neto, H_n , el salto útil, H_u , y el rendimiento hidráulico, η_h , en turbinas.

APÉNDICE B. RELACIÓN DE ECUACIONES

específica del fluido entre las secciones de entrada y salida de la turbina,

$$\left| \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_e^s \right| = \left| \frac{\dot{W}}{G} \right| + \frac{\bar{\Phi}_v}{G}, \quad (\text{B.6.13})$$

se emplea en producir trabajo sobre el rodete y otra parte se disipa debido a efectos de viscosidad. Los tres términos de la ecuación (B.6.3) se expresan, en este caso, en función de las “alturas” que se definen a continuación:

- *Salto neto*, H_n :

$$gH_n = - \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_e^s. \quad (\text{B.6.14})$$

- *Salto útil*, H_u :

$$gH_u = - \frac{\dot{W}}{G}. \quad (\text{B.6.15})$$

- *Altura de pérdidas internas*, H_L :

$$gH_L = \frac{\bar{\Phi}_v}{G}. \quad (\text{B.6.16})$$

La ecuación (B.6.3) puede entonces expresarse de la forma:

$$H_n = H_u + H_L. \quad (\text{B.6.17})$$

A la magnitud

$$\dot{W} = \dot{W}_u = -GgH_u$$

se la denomina *potencia útil* de la turbina. Utilizando la siguiente definición de *rendimiento hidráulico*:

$$\eta_h = \frac{H_u}{H_n} = \frac{H_n - H_L}{H_n}, \quad (\text{B.6.18})$$

la potencia útil puede escribirse de la forma

$$\dot{W}_u = \eta_h GgH_n. \quad (\text{B.6.19})$$

El *rendimiento total* de la turbina es

$$\eta_t = \frac{\dot{W}_t}{GgH_n}, \quad (\text{B.6.20})$$

siendo \dot{W}_t la potencia extraída en el eje de la turbina, denominada *potencia en el eje* o al freno. Este rendimiento puede expresarse como

$$\eta_t = \eta_o \eta_v \eta_h \quad (\text{B.6.21})$$

siendo η_o y η_v los rendimientos orgánico (que tiene en cuenta las pérdidas por fricción entre elementos sólidos de la máquina) y volumétrico (que tiene en cuenta las fugas).

B.6.3. Pérdidas de energía en la instalación

Los puntos $e0$ y $s0$ representarán los límites físicos de la instalación considerada, y e y s , como anteriormente, los de la máquina. La variación de energía mecánica específica entre $e0$ y $s0$ puede expresarse de la forma siguiente:

$$E_{s0} - E_{e0} = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_s^{s0} + \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_e^s + \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_{e0}^e. \quad (\text{B.6.22})$$

La *altura de pérdidas en la instalación*, H_φ , se define por la expresión

$$gH_\varphi = g(H_{\varphi s} + H_{\varphi e}) = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_{s0}^s + \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + U \right]_e^{e0}. \quad (\text{B.6.23})$$

En instalaciones de bombeo se define el concepto de *altura geométrica*, H_g , mediante la expresión

$$gH_g = E_{s0} - E_{e0}, \quad (\text{B.6.24})$$

con lo que la ecuación (B.6.22), teniendo en cuenta (B.6.5), puede ponerse de la forma¹⁵

$$H_g = H_m - H_\varphi. \quad (\text{B.6.25})$$

En instalaciones con turbinas se introduce el concepto análogo de *salto bruto*, H_b :

$$gH_b = E_{e0} - E_{s0}, \quad (\text{B.6.26})$$

con lo que la ecuación (B.6.22), teniendo en cuenta (B.6.14), puede escribirse de la forma

$$H_b = H_n + H_\varphi. \quad (\text{B.6.27})$$

¹⁵ Obsérvese que las ecuaciones (B.6.25) y (B.6.27) están incluidas en la ecuación (B.1.16).

Apéndice C

Propiedades físicas, tablas y diagramas

Tabla C.1
Propiedades físicas del agua a presión atmosférica.

T (°C)	ρ (kg m ⁻³)	μ (kg m ⁻¹ s ⁻¹)	ν (m ² s ⁻¹)	p_v (kPa)	Pr
0	1000	1,788×10 ⁻³	1,788×10 ⁻⁶	0,611	13,4
10	1000	1,307×10 ⁻³	1,307×10 ⁻⁶	1,227	9,5
20	998	1,003×10 ⁻³	1,005×10 ⁻⁶	2,337	7,1
30	996	0,799×10 ⁻³	0,802×10 ⁻⁶	4,242	5,5
40	996	0,657×10 ⁻³	0,662×10 ⁻⁶	7,375	4,3
50	988	0,548×10 ⁻³	0,555×10 ⁻⁶	12,34	3,5

Tensión superficial agua-aire a 20°C: $\sigma = 0,0728 \text{ N m}^{-1}$.
Calor latente de vaporización a 100°C: $2,257 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.
Calor latente de fusión del hielo a 0°C: $0,334 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$.
Densidad del hielo: $\rho = 920 \text{ kg m}^{-3}$.
Velocidad del sonido a 25°C: $a \approx 1500 \text{ m s}^{-1}$.

Tabla C.2

Propiedades físicas del aire seco a presión atmosférica.

T (°C)	ρ (kg m ⁻³)	μ (kg m ⁻¹ s ⁻¹)	ν (m ² s ⁻¹)	Pr
0	1,293	$1,71 \times 10^{-5}$	$1,33 \times 10^{-5}$	0,72
10	1,247	$1,76 \times 10^{-5}$	$1,41 \times 10^{-5}$	0,72
20	1,200	$1,81 \times 10^{-5}$	$1,50 \times 10^{-5}$	0,72
30	1,165	$1,86 \times 10^{-5}$	$1,60 \times 10^{-5}$	0,71
40	1,127	$1,90 \times 10^{-5}$	$1,69 \times 10^{-5}$	0,71
60	1,060	$2,00 \times 10^{-5}$	$1,88 \times 10^{-5}$	0,71

Constante del gas:

$$R = 287,0 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Otras propiedades a 20°C y 1 atm:

$$c_p = 1004,68 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1};$$

$$c_v = 717,63 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1};$$

$$\gamma = 1,4;$$

$$a = 340,6 \text{ m s}^{-1}.$$

Tabla C.3

Flujo cuasiunidimensional con magnitudes de remanso constantes (para un gas perfecto con $\gamma = 1,4$).

M	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	M	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0
0,00	...	1,000	1,000	1,000	0,62	1,17	0,772	0,831	0,929
0,01	57,87	0,9999	0,9999	0,9999	0,64	1,16	0,759	0,821	0,924
0,02	28,94	0,9997	0,9999	0,9999	0,66	1,13	0,747	0,812	0,920
0,04	14,48	0,999	0,999	0,9996	0,68	1,12	0,734	0,802	0,915
0,06	9,67	0,997	0,998	0,999	0,70	1,09	0,721	0,792	0,911
0,08	7,26	0,996	0,997	0,999	0,72	1,08	0,708	0,781	0,906
0,10	5,82	0,993	0,995	0,998	0,74	1,07	0,695	0,771	0,901
0,12	4,86	0,990	0,993	0,997	0,76	1,06	0,682	0,761	0,896
0,14	4,18	0,986	0,990	0,996	0,78	1,05	0,669	0,750	0,891
0,16	3,67	0,982	0,987	0,995	0,80	1,04	0,656	0,740	0,886
0,18	3,28	0,978	0,984	0,994	0,82	1,03	0,643	0,729	0,881
0,20	2,96	0,973	0,980	0,992	0,84	1,02	0,630	0,719	0,876
0,22	2,71	0,967	0,976	0,990	0,86	1,02	0,617	0,708	0,871
0,24	2,50	0,961	0,972	0,989	0,88	1,01	0,604	0,698	0,865
0,26	2,32	0,954	0,967	0,987	0,90	1,01	0,591	0,687	0,860
0,28	2,17	0,947	0,962	0,985	0,92	1,01	0,578	0,676	0,855
0,30	2,04	0,939	0,956	0,982	0,94	1,00	0,566	0,666	0,850
0,32	1,92	0,932	0,951	0,980	0,96	1,00	0,553	0,655	0,844
0,34	1,82	0,923	0,944	0,977	0,98	1,00	0,541	0,645	0,839
0,36	1,74	0,914	0,938	0,975	1,00	1,00	0,528	0,632	0,833
0,38	1,66	0,905	0,931	0,972	1,02	1,00	0,516	0,623	0,828
0,40	1,59	0,896	0,924	0,969	1,04	1,00	0,504	0,613	0,822
0,42	1,53	0,886	0,917	0,966	1,06	1,00	0,492	0,602	0,817
0,44	1,47	0,876	0,909	0,963	1,08	1,01	0,480	0,592	0,810
0,46	1,42	0,865	0,902	0,959	1,10	1,01	0,468	0,582	0,805
0,48	1,38	0,854	0,893	0,956	1,12	1,01	0,457	0,571	0,799
0,50	1,34	0,843	0,885	0,952	1,14	1,02	0,445	0,561	0,794
0,52	1,30	0,832	0,877	0,949	1,16	1,02	0,434	0,551	0,788
0,54	1,27	0,820	0,868	0,945	1,18	1,02	0,423	0,541	0,782
0,56	1,24	0,808	0,859	0,941	1,20	1,03	0,412	0,531	0,776
0,58	1,21	0,796	0,850	0,937	1,22	1,04	0,402	0,521	0,771
0,60	1,19	0,784	0,840	0,933	1,24	1,04	0,391	0,512	0,765

Tabla C.3. (continuación)

M	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	M	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0
1,26	1,05	0,381	0,502	0,759	1,98	1,66	0,132	0,235	0,561
1,28	1,06	0,371	0,492	0,753	2,00	1,69	0,128	0,230	0,556
1,30	1,07	0,361	0,483	0,747	2,02	1,72	0,124	0,225	0,551
1,32	1,08	0,351	0,474	0,742	2,04	1,75	0,120	0,220	0,546
1,34	1,08	0,342	0,464	0,736	2,06	1,78	0,116	0,215	0,541
1,36	1,09	0,332	0,455	0,730	2,08	1,81	0,113	0,210	0,536
1,38	1,10	0,323	0,446	0,724	2,10	1,84	0,109	0,206	0,531
1,40	1,11	0,314	0,437	0,718	2,12	1,87	0,106	0,201	0,526
1,42	1,13	0,305	0,429	0,713	2,14	1,90	0,103	0,197	0,522
1,44	1,14	0,297	0,420	0,707	2,16	1,94	0,100	0,192	0,517
1,46	1,15	0,289	0,412	0,701	2,18	1,97	0,097	0,188	0,513
1,48	1,16	0,280	0,403	0,695	2,20	2,01	0,094	0,184	0,508
1,50	1,18	0,272	0,395	0,690	2,22	2,04	0,091	0,180	0,504
1,52	1,19	0,265	0,387	0,684	2,24	2,08	0,088	0,176	0,499
1,54	1,20	0,257	0,379	0,678	2,26	2,12	0,085	0,172	0,495
1,56	1,22	0,250	0,371	0,672	2,28	2,15	0,083	0,168	0,490
1,58	1,23	0,242	0,363	0,667	2,30	2,19	0,080	0,165	0,486
1,60	1,25	0,235	0,356	0,661	2,32	2,23	0,078	0,161	0,482
1,62	1,27	0,228	0,348	0,656	2,34	2,27	0,075	0,157	0,477
1,64	1,28	0,222	0,341	0,650	2,36	2,32	0,073	0,154	0,473
1,66	1,30	0,215	0,334	0,645	2,38	2,36	0,071	0,150	0,469
1,68	1,32	0,209	0,327	0,639	2,40	2,40	0,068	0,147	0,465
1,70	1,34	0,203	0,320	0,634	2,42	2,45	0,066	0,144	0,461
1,72	1,36	0,197	0,313	0,628	2,44	2,49	0,064	0,141	0,456
1,74	1,38	0,191	0,306	0,623	2,46	2,54	0,062	0,138	0,452
1,76	1,40	0,185	0,300	0,617	2,48	2,59	0,060	0,135	0,448
1,78	1,42	0,179	0,293	0,612	2,50	2,64	0,059	0,132	0,444
1,80	1,44	0,174	0,287	0,607	2,52	2,69	0,057	0,129	0,441
1,82	1,46	0,169	0,281	0,602	2,54	2,74	0,055	0,126	0,437
1,84	1,48	0,164	0,275	0,596	2,56	2,79	0,053	0,123	0,433
1,86	1,51	0,159	0,269	0,591	2,58	2,84	0,052	0,121	0,429
1,88	1,53	0,154	0,263	0,586	2,60	2,90	0,050	0,118	0,425
1,90	1,56	0,149	0,257	0,581	2,62	2,95	0,049	0,115	0,421
1,92	1,58	0,145	0,251	0,576	2,64	3,01	0,047	0,113	0,418
1,94	1,61	0,140	0,246	0,571	2,66	3,06	0,046	0,110	0,414
1,96	1,63	0,136	0,240	0,566	2,68	3,12	0,044	0,108	0,410

Tabla C.3. (continuación)

M	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	M	A/A^*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0
2,70	3,18	0,043	0,106	0,407	2,86	3,71	0,034	0,089	0,379
2,72	3,24	0,042	0,103	0,403	2,88	3,78	0,033	0,087	0,376
2,74	3,31	0,040	0,101	0,400	2,90	3,85	0,032	0,085	0,373
2,76	3,37	0,039	0,099	0,396	2,92	3,92	0,031	0,083	0,370
2,78	3,43	0,038	0,097	0,393	2,94	4,00	0,030	0,081	0,366
2,80	3,50	0,037	0,095	0,389	2,96	4,08	0,029	0,080	0,363
2,82	3,57	0,036	0,093	0,386	2,98	4,15	0,028	0,078	0,360
2,84	3,64	0,035	0,091	0,383	3,00	4,23	0,027	0,076	0,357

Tabla C.4

Variación de magnitudes a través de una onda de choque normal.

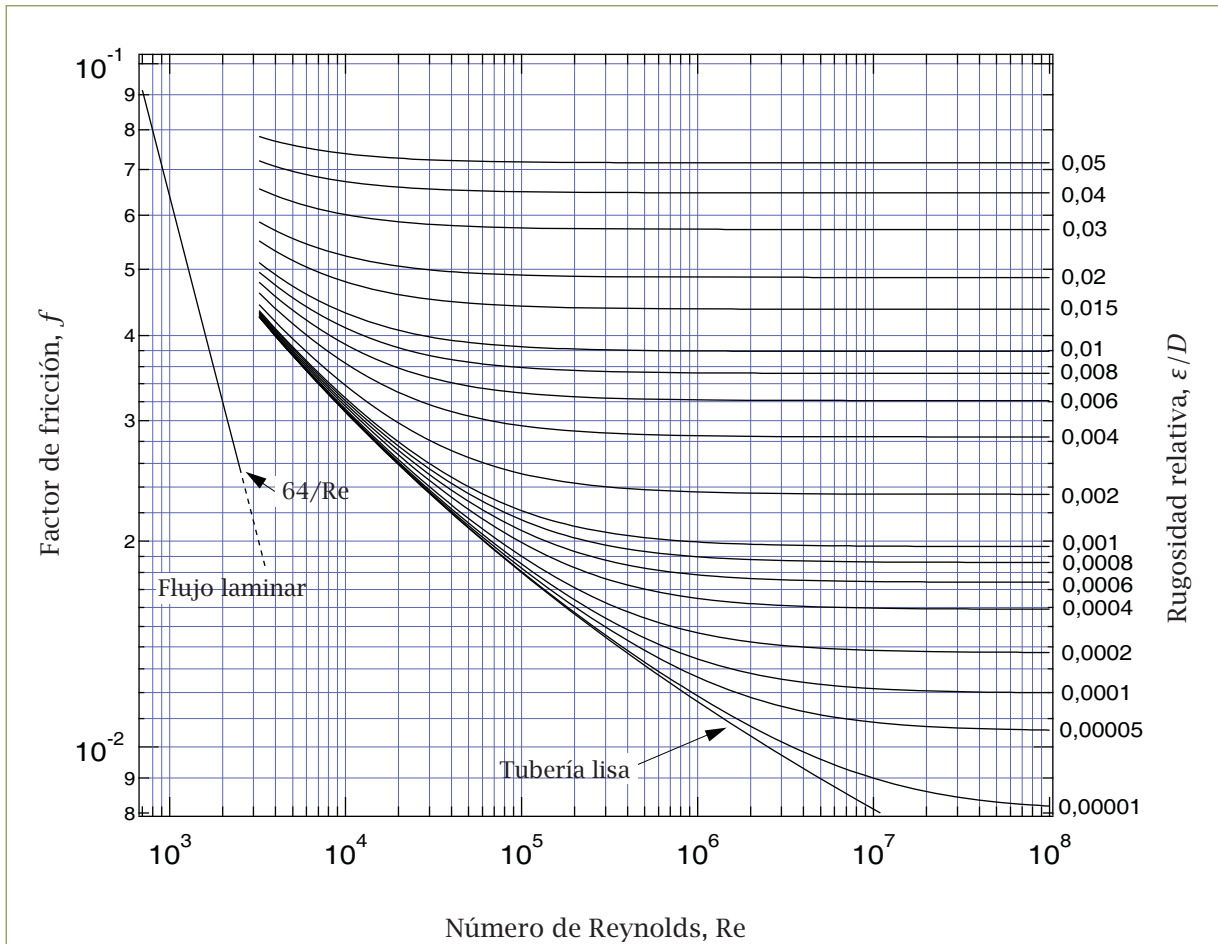
M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,64	0,657	2,971	1,416	0,880
1,02	0,980	1,047	1,013	1,000	1,66	0,651	3,048	1,430	0,872
1,04	0,962	1,095	1,026	1,000	1,68	0,646	3,126	1,444	0,864
1,06	0,944	1,144	1,039	1,000	1,70	0,641	3,205	1,458	0,856
1,08	0,928	1,194	1,052	0,999	1,72	0,635	3,285	1,473	0,847
1,10	0,912	1,245	1,065	0,999	1,74	0,631	3,366	1,487	0,839
1,12	0,896	1,297	1,078	0,998	1,76	0,626	3,447	1,502	0,830
1,14	0,882	1,350	1,090	0,997	1,78	0,621	3,530	1,517	0,821
1,16	0,868	1,403	1,103	0,996	1,80	0,617	3,613	1,532	0,813
1,18	0,855	1,458	1,115	0,995	1,82	0,612	3,698	1,547	0,804
1,20	0,842	1,513	1,128	0,993	1,84	0,608	3,783	1,562	0,795
1,22	0,830	1,570	1,140	0,991	1,86	0,604	3,869	1,577	0,786
1,24	0,818	1,627	1,153	0,988	1,88	0,600	3,957	1,592	0,777
1,26	0,807	1,686	1,166	0,986	1,90	0,596	4,045	1,608	0,767
1,28	0,796	1,745	1,178	0,983	1,92	0,592	4,134	1,624	0,758
1,30	0,786	1,805	1,191	0,979	1,94	0,588	4,224	1,639	0,749
1,32	0,776	1,866	1,204	0,976	1,96	0,584	4,315	1,655	0,740
1,34	0,766	1,928	1,216	0,972	1,98	0,581	4,407	1,671	0,730
1,36	0,757	1,991	1,229	0,968	2,00	0,577	4,500	1,688	0,721
1,38	0,748	2,055	1,242	0,963	2,02	0,574	4,594	1,704	0,711
1,40	0,740	2,120	1,255	0,958	2,04	0,571	4,689	1,720	0,702
1,42	0,731	2,186	1,268	0,953	2,06	0,567	4,784	1,737	0,693
1,44	0,723	2,253	1,281	0,948	2,08	0,564	4,881	1,754	0,683
1,46	0,716	2,320	1,294	0,942	2,10	0,561	4,978	1,770	0,674
1,48	0,708	2,389	1,307	0,936	2,12	0,558	5,077	1,787	0,665
1,50	0,701	2,458	1,320	0,930	2,14	0,555	5,176	1,805	0,656
1,52	0,694	2,529	1,334	0,923	2,16	0,553	5,277	1,822	0,646
1,54	0,687	2,600	1,347	0,917	2,18	0,550	5,378	1,839	0,637
1,56	0,681	2,673	1,361	0,910	2,20	0,547	5,480	1,857	0,628
1,58	0,675	2,746	1,374	0,903	2,22	0,544	5,583	1,875	0,619
1,60	0,668	2,820	1,388	0,895	2,24	0,542	5,687	1,892	0,610
1,62	0,663	2,895	1,402	0,888	2,26	0,539	5,792	1,910	0,601

APÉNDICE C. PROPIEDADES FÍSICAS, TABLAS Y DIAGRAMAS

Tabla C.4. (continuación)

M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
2,28	0,537	5,898	1,929	0,592	2,68	0,497	8,213	2,322	0,431
2,30	0,534	6,005	1,947	0,583	2,70	0,496	8,338	2,343	0,424
2,32	0,532	6,113	1,965	0,575	2,72	0,494	8,465	2,364	0,417
2,34	0,530	6,222	1,984	0,566	2,74	0,493	9,592	2,396	0,410
2,36	0,527	6,331	2,003	0,557	2,76	0,491	8,721	2,407	0,403
2,38	0,525	6,442	2,021	0,549	2,78	0,490	8,850	2,429	0,396
2,40	0,523	6,553	2,040	0,540	2,80	0,488	8,980	2,451	0,389
2,42	0,521	6,666	2,060	0,532	2,82	0,487	9,111	2,473	0,383
2,44	0,519	6,779	2,079	0,523	2,84	0,485	9,243	2,496	0,376
2,46	0,517	6,894	2,098	0,515	2,86	0,484	9,376	2,518	0,370
2,48	0,515	7,009	2,118	0,507	2,88	0,483	9,510	2,541	0,364
2,50	0,513	7,125	2,138	0,499	2,90	0,481	9,645	2,563	0,358
2,52	0,511	7,242	2,157	0,491	2,92	0,480	9,781	2,586	0,352
2,54	0,509	7,360	2,177	0,483	2,94	0,479	9,918	2,609	0,346
2,56	0,507	7,479	2,198	0,475	2,96	0,478	10,055	2,632	0,340
2,58	0,506	7,599	2,218	0,468	2,98	0,476	10,194	2,656	0,334
2,60	0,504	7,720	2,238	0,460	3,00	0,475	10,333	2,679	0,328
2,62	0,502	7,842	2,260	0,453					
2,64	0,500	7,965	2,280	0,445					
2,66	0,499	8,088	2,301	0,438					

Diagrama de Moody





Juan del Rosal, 14
28040 MADRID
Tel. Dirección Editorial: 913 987 521

Este libro está principalmente destinado a los estudiantes de las diversas asignaturas del área de Mecánica de fluidos de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la UNED, aunque también puede ser de utilidad para otros estudiantes universitarios de ingeniería, especialmente en la etapa inicial en la que, después de haber estudiado los conceptos teóricos, se disponen a abordar los primeros ejercicios. Para la mayoría de los 224 problemas y ejercicios se proporcionan procedimientos de resolución detallados. En algunos casos se indican esquemáticamente los pasos a seguir y en otros se dan sugerencias para su resolución. En todos ellos se da la solución numérica. El enfoque utilizado para resolver los problemas, que presentan un grado de dificultad variable, está basado en un formalismo matemático de complejidad razonable, con el que se pretende facilitar una adecuada asimilación de la materia y la adquisición de los recursos necesarios para resolver problemas de forma sistemática y eficaz.



ISBN: 978-84-362-7003-7



9 788436 270037