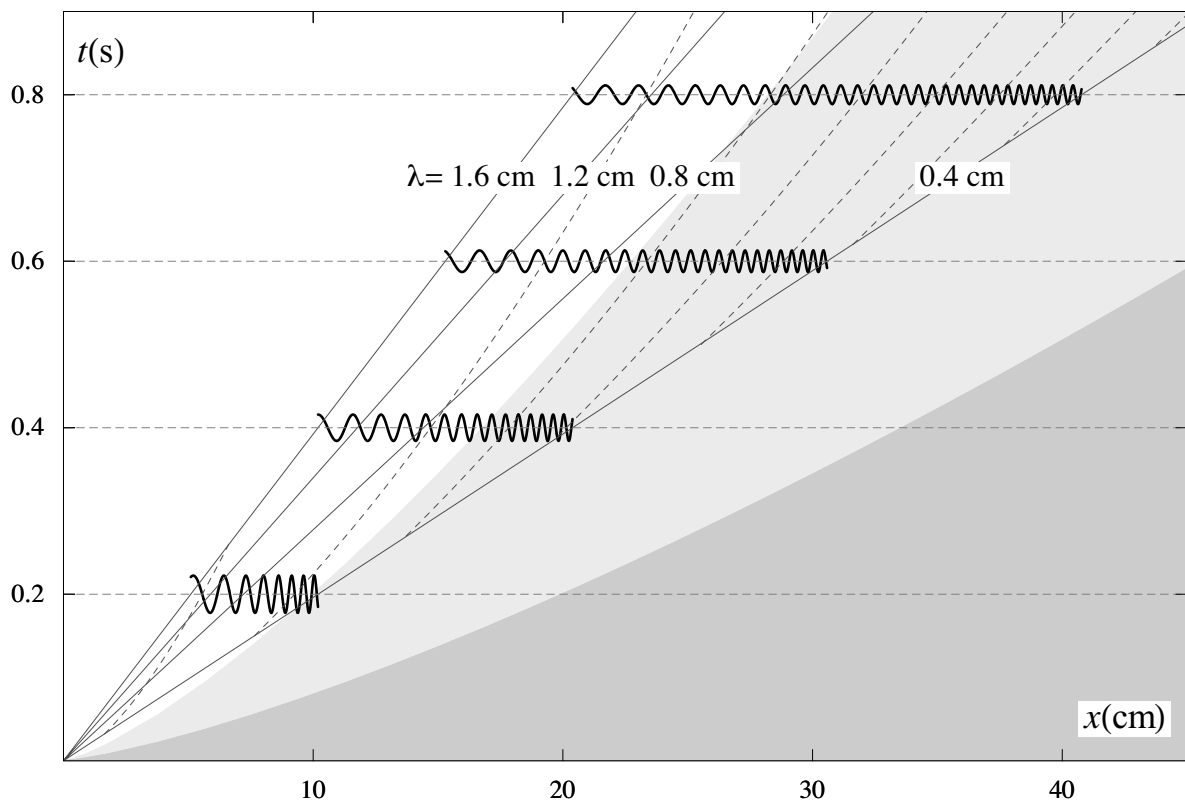


INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS

JULIO GRATTON



PRÓLOGO

Las presentes notas son el texto del curso Estructura de la Materia 1. Me he basado en buena medida en las notas del curso “Mecánica de Fluidos”, redactadas hace ya algunos años por el Prof. Roberto Gratton y el Prof. Javier Diez de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, sin embargo he incorporado varios tópicos nuevos, y ampliado considerablemente la discusión de otros.

Agradezco a los colegas que han tenido paciencia conmigo y se han prestado muy amablemente a discutir aspectos de los temas del curso, en particular los Prof. Fernando Minotti, Javier Diez y Roberto Gratton.

Pido disculpas por las erratas que seguramente se han deslizado en esta edición, y agradeceré que se me ponga al corriente de las que se encontraran.

Como bibliografía básica del curso puedo indicar los siguientes textos:

1. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1980.
2. L. D. Landau y E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1959.
3. A. Sommerfeld, *Mechanics of Continuous Media*, Academic Press, 1950.
4. E. Guyon, J-P. Hulin y L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, CNRS, 1991.
5. D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford 1990.
6. D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*, Van Nostrand, 1977.

Como bibliografía de consulta sugiero los siguientes libros

7. R. H. Flowers y E. Mendoza, *Propiedades de la Materia*, Limusa.
8. W. H. Li y S. H. Lam, *Principles of Fluid Dynamics*, Addison Wesley, 1964.
9. L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Infosearch, 1959.
10. R. B. Whitham, *Linear and Non Linear Waves*, Springer, 1977.
11. Ya. B. Zel'dovich y Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, 1967.
12. H. A. Barnes, J. F. Hutton y K. Walters, *An Introduction to Rheology*, Elsevier, 1989.
13. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, 1945.
14. J. J. Stoker, *Water Waves*, Wiley-Interscience, 1957.

Julio Gratton

Buenos Aires, octubre de 2002.

INDICE

1. Nociones básicas sobre los fluidos	1
Comportamiento mecánico de los fluidos	1
Hipótesis del continuo	3
Fuerzas de volumen y de superficie en un fluido	6
Propiedades generales de las fuerzas de superficie	6
El tensor de los esfuerzos	8
Resultante de las fuerzas de superficie sobre un elemento de volumen	11
Simetría del tensor de los esfuerzos	12
Descomposición del tensor de los esfuerzos	15
Presión en un fluido en reposo	17
2. Hidrostática	20
Principio de Arquímedes	20
Equilibrio en líquidos con estratificaciones de densidad	20
Equilibrio de la atmósfera	23
Estabilidad del equilibrio atmosférico	25
Condiciones de contorno en interfases	27
Tensión superficial	28
Contorno de equilibrio entre dos fluidos en reposo	31
Forma de una gota líquida	33
Línea de contacto triple y ángulo de contacto	33
Características de los coeficientes de tensión superficial	34
Cohesión de líquidos	36
3. Cinemática	38
Campo de velocidad	38
Elementos materiales	39
Líneas de corriente y trayectorias	39
Descripción Euleriana y Lagrangiana	40
Conservación de la masa	41
Derivada total de integrales materiales	42
Movimiento relativo en el entorno de un punto	43
4. Ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos	48
Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	48
La hipótesis del equilibrio termodinámico local	50
La ecuación de Euler	52
Relaciones constitutivas para fluidos Newtonianos	52
La ecuación de Navier-Stokes	53
Ecuación de la energía	54
Propiedades termomecánicas de fluidos reales	57

Fluidos no Newtonianos	59
5. Flujos ideales	64
Ecuaciones generales de los flujos ideales	64
Formas de la ecuación de Euler para flujos barotrópicos	65
Ecuaciones de evolución de la vorticidad	68
La ecuación de Helmholtz	69
Teorema de Kelvin	71
Movimientos vorticosos	73
Flujos viscosos, no barotrópicos y con fuerzas de volumen no conservativas	75
Clasificación de las diferentes clases de flujos	77
6. Flujos ideales incompresibles	79
El potencial de velocidad	79
Flujos incompresibles bidimensionales y la función corriente	82
Unicidad del potencial de velocidad y de la función corriente	83
Flujos potenciales incompresibles elementales	89
Flujo potencial en la proximidad del vértice de un diedro	95
Flujo alrededor de un cilindro circular	96
Fuerzas sobre un obstáculo en un flujo potencial	102
Potencial complejo	110
Comentarios sobre los flujos potenciales	121
7. Flujos viscosos	126
Ecuación de Navier-Stokes	126
Ecuación de la vorticidad	126
Difusión de la velocidad y la vorticidad	127
Flujos con vorticidad inicial nula y el origen de la capa límite	131
Significado del número de Reynolds	133
Número de Reynolds y semejanza dinámica	134
Aplicación del Principio de Semejanza al arrastre de cuerpos esféricos	136
8. Flujos viscosos unidireccionales y capa límite	140
Flujos unidireccionales	140
Flujo entre dos placas planas y paralelas	141
Conducto de sección circular: flujo de Poiseuille	143
La capa límite laminar	144
Teoría de Prandtl de la capa límite	147
Autosemejanza de la capa límite cuando la velocidad exterior es uniforme	150
Fuerza de arrastre viscoso	154
9. Ondas superficiales de gravedad	156
Ondas superficiales	156
Ondas superficiales de gravedad	156
Ecuaciones básicas	156
Ondas elementales monocromáticas	158

Ondas capilares	162
Ondas superficiales en capas de profundidad finita	165
Efecto de la viscosidad sobre las ondas superficiales	168
La relación de dispersión y la dispersión de trenes de ondas	168
Patrones de ondas de superficie producidos por una fuente puntiforme instantánea	180
Patrones de ondas en corrientes estacionarias	182
Patrón de ondas capilares alrededor de una línea de pesca	188
Arrastre por emisión de ondas	190
10. Ondas en el seno de un fluido	193
Las ecuaciones de la dinámica de gases	193
Perturbaciones compresivas de pequeña amplitud	194
La solución general de D'Alembert para pulsos sonoros planos	197
Soluciones elementales de la ecuación de ondas	202
La velocidad del sonido	203
El espectro de las ondas sonoras	204
Propiedades de las ondas sonoras	205
Las condiciones de incompresibilidad	209
Ondas internas de gravedad en fluidos estratificados	214
Las oscilaciones de Brunt-Väisälä y la estabilidad de un fluido estratificado	218
Las ondas de Lamb	220
Las ondas de superficie	221
Ondas internas en una estratificación exponencial	222
11. Ondas de amplitud finita	229
Ondas hiperbólicas	229
Ondas dispersivas	231
La onda de creciente como ejemplo de onda hiperbólica no lineal	235
La ecuación de Korteweg-de Vries para las ondas dispersivas no lineales en un canal	262
Soluciones periódicas y aperiódicas de la ecuación de Korteweg-de Vries	268
Conclusiones	273

1. NOCIONES BÁSICAS SOBRE LOS FLUIDOS

Comportamiento mecánico de los fluidos

La propiedad fundamental que caracteriza a los fluidos (líquidos y gases) es que carecen de rigidez y en consecuencia se deforman fácilmente. Por este motivo un fluido no tiene forma y diferentes porciones del mismo se pueden acomodar dentro del recipiente que lo contiene. En esto difieren de los sólidos, que en virtud de su rigidez tienen una forma definida, que sólo varía si se aplican fuerzas de considerable intensidad.

Sin embargo, la distinción entre sólidos y fluidos no es nítida, pues muchos materiales que se comportan como sólidos bajo ciertas circunstancias, en otras circunstancias se comportan como fluidos. Llamaremos *sólido simple* a un medio en el cual las posiciones relativas de sus elementos sufren cambios de pequeña magnitud cuando las fuerzas que actúan sobre él tienen cambios pequeños. Es decir: pequeñas fuerzas producen deformaciones pequeñas. Análogamente, llamaremos *fluido simple* a un medio en el cual las posiciones relativas de sus elementos sufren cambios no pequeños, aún cuando sean pequeños los cambios de las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras: fuerzas pequeñas dan lugar a deformaciones de gran magnitud.

Aquí conviene distinguir entre deformaciones con cambio de volumen pero sin cambio de forma (expansiones o contracciones puras) y deformaciones con cambio de forma pero sin cambio de volumen (distorsiones puras). En general, la deformación es una combinación de ambas.

Llamaremos *fluido* a una porción de materia incapaz de contrarrestar el efecto de fuerzas que producen deformaciones sin cambio de volumen. Esto no quiere decir que el fluido no opone resistencia a tales deformaciones, pero sí significa que esta resistencia tiende a cero cuando tiende a cero la *rapidez* con la cual se produce la deformación, independientemente de la *magnitud* de la deformación. En consecuencia, dicha resistencia limita la *rapidez* con la cual ocurre la deformación, *pero no su magnitud*.

Resumiendo, en un sólido la deformación tiende a cero si la fuerza que la produce tiende a cero, mientras que en un fluido es la rapidez de la deformación la que tiende a cero cuando la fuerza tiende a cero.

La distinción entre líquidos y gases, en lo referente a su comportamiento dinámico, es mucho menos fundamental. Típicamente, la densidad de una sustancia en la fase líquida suele ser mucho mayor (por varios órdenes de magnitud) que en la fase gaseosa¹, pero esto no afecta el tipo de movimiento, y sólo implica que se requieren fuerzas de diferente magnitud para producir la misma aceleración. La diferencia más significativa (en cuanto a sus efectos dinámicos) entre las propiedades mecánicas de líquidos y gases está en su *compresibilidad*. Los gases se comprimen más fácilmente que los líquidos: en consecuencia, cualquier movimiento que involucre variaciones apreciables de presión está acompañado por cambios de volumen que son mucho mayores en un gas que en un líquido. En general, podemos decir que los líquidos son poco compresibles y que los gases son bastante compresibles.

Las propiedades mecánicas de sólidos, líquidos y gases están directamente relacionados con la estructura molecular de la materia y con la naturaleza de las fuerzas entre moléculas. Esto se puede entender cualitativamente considerando la energía potencial de interacción $V(r)$ entre dos

¹ No siempre es así, por ejemplo, cerca del punto crítico las densidades de las fases líquida y gaseosa son casi iguales.

moléculas como función de la distancia r que separa sus centros. Para valores pequeños de r (del orden de 10^{-8} cm) la interacción entre las moléculas es de origen cuántico y puede ser atractiva o repulsiva, de acuerdo con la posibilidad de intercambio de los electrones de los orbitales externos de las mismas. Cuando dicho intercambio es posible, la interacción es atractiva y da lugar a una reacción química². Cuando el intercambio no es posible, la interacción es repulsiva. La forma típica de $V(r)$ en este último caso se representa cualitativamente en la Fig. 1.1. La fuerza de repulsión ($-dV/dr$) se debe a la impenetrabilidad de los orbitales electrónicos de las moléculas, y disminuye muy rápidamente a medida que r aumenta. Para distancias mayores entre los centros de las moléculas (unos 10^{-7} - 10^{-8} cm) la fuerza es débilmente atractiva. Esta fuerza de *cohesión* disminuye con r , primero como r^{-7} y luego como r^{-8} para r grande. Su origen es la polarización eléctrica de cada molécula debido a la influencia de la otra. Cuando la separación es r_0 (alrededor de $3\text{-}4 \times 10^{-8}$ cm para las moléculas más simples), la energía potencial de interacción es mínima y las moléculas están en equilibrio.

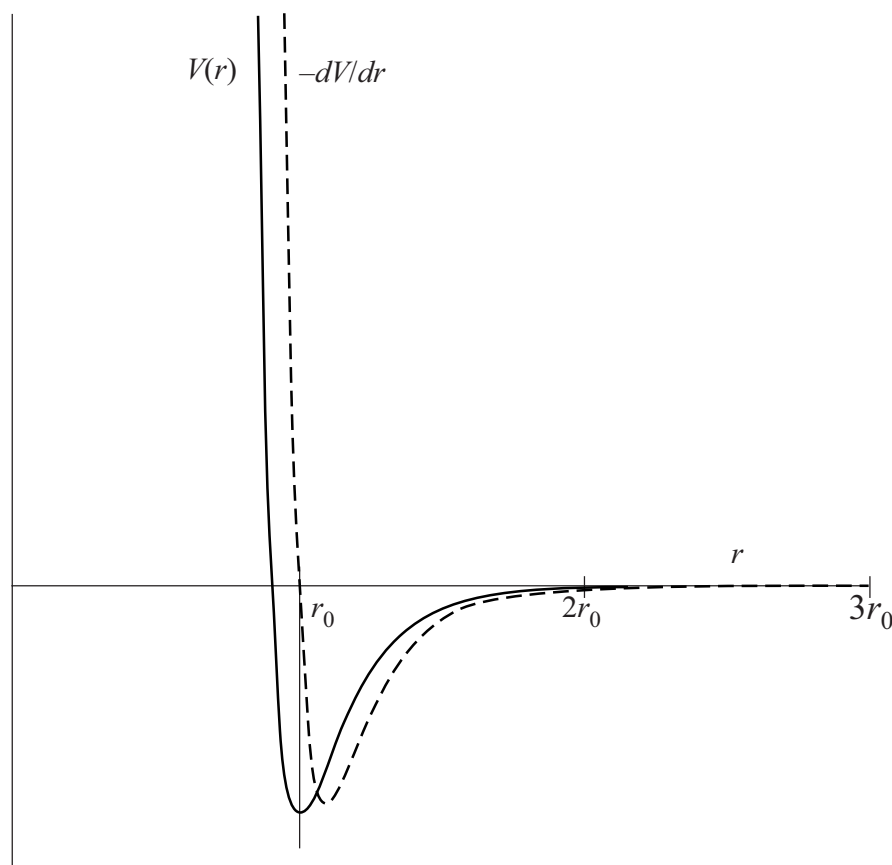


Fig. 1.1. Energía potencial (línea llena) y fuerza de interacción (línea de trazos) entre dos moléculas en función de la distancia entre centros. Se ha supuesto que las moléculas no reaccionan químicamente entre sí. Se puede apreciar que, en primera aproximación, las moléculas comportan como esferas rígidas de radio $r_0/2$. Observe que ya para una separación $2r_0$ la interacción es prácticamente nula. El diagrama es cualitativo.

Si m es la masa de una molécula y ρ la densidad de la sustancia, el número de moléculas por unidad de volumen es $n = \rho/m$ y la distancia media entre ellas es $d \approx n^{-1/3}$. Para un gas en

² No trataremos el caso de medios en los que están ocurriendo reacciones químicas.

condiciones normales de temperatura y presión, $n \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, luego $d \approx 5 \times 10^{-7} \text{ cm}$, que es del orden de $10 r_0$; en cambio, para sólidos y líquidos, $n \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ y entonces $d \approx 5 \times 10^{-8} \text{ cm}$, del orden de r_0 . En consecuencia, en un gas las moléculas están (término medio) tan lejos una de otra que las fuerzas repulsivas o atractivas de corto alcance que se ejercen entre ellas se pueden despreciar³, salvo durante las colisiones. En cambio en los líquidos y los sólidos, las moléculas están todo lo cercanas entre sí que se lo permite su repulsión mutua, y cada molécula está siempre dentro del rango de interacción de varias otras moléculas vecinas.

En el caso de un sólido cristalino el arreglo de las moléculas es *ordenado* y prácticamente permanente. Debido a su energía térmica cada molécula efectúa oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio en la red cristalina. Dicha estructura se mantiene prácticamente intacta hasta que la temperatura del sólido alcanza el punto de fusión. Al fundirse, la densidad de la mayoría de las sustancias disminuye⁴ sólo ligeramente (unos pocos %), pero esta pequeña variación de la distancia media es suficiente para producir cambios muy importantes de su estructura.

El conocimiento del estado líquido todavía es incompleto. Sin embargo, se sabe que el arreglo de las moléculas es *parcialmente* ordenado: las moléculas forman grupos que se mueven en conjunto y cambian continuamente, perdiendo moléculas e incorporando otras. Esta es la razón por la cual cualquier fuerza aplicada a un líquido produce una deformación sin límite pero sin cambio de volumen.

Veremos más adelante que el mecanismo microscópico por el cual un líquido opone resistencia a los cambios de forma es diferente al que se tiene en el caso de un gas. Sin embargo a nivel macroscópico los efectos son análogos. Por lo tanto, en la descripción macroscópica del movimiento de gases y líquidos se emplean las mismas ecuaciones, y se los trata conjuntamente en una disciplina denominada *Mecánica de Fluidos*. Dentro de la Mecánica de Fluidos se distinguen ulteriormente dos ramas: la *Hidrodinámica*, que estudia el movimiento de fluidos con densidad constante (incompresibles), y la *Dinámica de Gases*, que hace lo propio con fluidos de densidad variable (compresibles). Debe quedar claro, sin embargo, que un mismo fluido (por ejemplo el aire) se puede comportar como compresible o como incompresible, según las circunstancias. Por lo tanto dicha distinción no se refiere a la naturaleza del fluido (composición química, densidad, temperatura, etc.) sino al *tipo de movimiento* que está ocurriendo. Las condiciones bajo las cuales el movimiento de un fluido involucra (o no) variaciones de su densidad, o sea, que pueda ser tratado como compresible (o incompresible) las aclararemos más adelante en el Capítulo 10. Mientras tanto daremos a la “compresibilidad” o “incompresibilidad” del flujo bajo estudio el carácter de hipótesis *a priori*, sujeto a establecer después los criterios para decidir cuál hipótesis se debe aplicar en cada situación concreta. Sin embargo podemos adelantar que en la mayoría de los casos de interés práctico, los líquidos se comportan como incompresibles; en cambio, para los gases se pueden dar ambos tipos de movimiento.

Hipótesis del continuo

Hemos visto en la sección anterior que las moléculas de un gas están separadas por regiones vacías cuyas dimensiones lineales son mucho mayores que las de las moléculas mismas. Pero incluso en un líquido, en el cual las moléculas están estrechamente empaquetadas, la masa (que

³ Es por este motivo que un gas muy enrarecido y cuya temperatura es muy elevada se comporta como un gas perfecto.

⁴ Un caso excepcional es el del agua, en que el hielo es menos denso que el agua líquida.

reside esencialmente en los núcleos atómicos) dista mucho de estar distribuida uniformemente en el espacio. Otras magnitudes, además de la masa, tienen también distribuciones espaciales altamente no uniformes en la escala microscópica.

Sin embargo, en muchas aplicaciones de interés práctico tan sólo nos interesa el comportamiento de la materia en una escala macroscópica, mucho mayor que la distancia intermolecular media d . Este es el caso de la Mecánica de Fluidos, y gracias a ello podemos ignorar la estructura molecular de la materia cuando describimos su movimiento.

La hipótesis básica de la Mecánica de Fluidos consiste en suponer que en escala macroscópica, un fluido se comporta como si estuviera dotado de una estructura perfectamente continua, o, si se quiere, como si no tuviera estructura alguna. De acuerdo con ello, magnitudes como la masa, la cantidad de movimiento y la energía, asociadas con la materia contenida en una pequeña parcela del fluido, se consideran uniformemente distribuidas en el volumen de la parcela (en vez de estar concentradas en una pequeña fracción de éste, como realmente ocurre).

Para aclarar esta idea mediante un ejemplo, y a la vez dar una definición operativa de las magnitudes que caracterizan el estado de un fluido, nos ocuparemos de la noción de *densidad*.

Consideremos el cociente $\rho(L) = M(V)/V$ entre la masa $M(V)$ contenida en un volumen V de una porción del fluido y el volumen mismo, como función de la dimensión lineal característica $L = V^{1/3}$ de la porción. Una representación cualitativa de $\rho(L)$ se da en la Fig. 1.2.

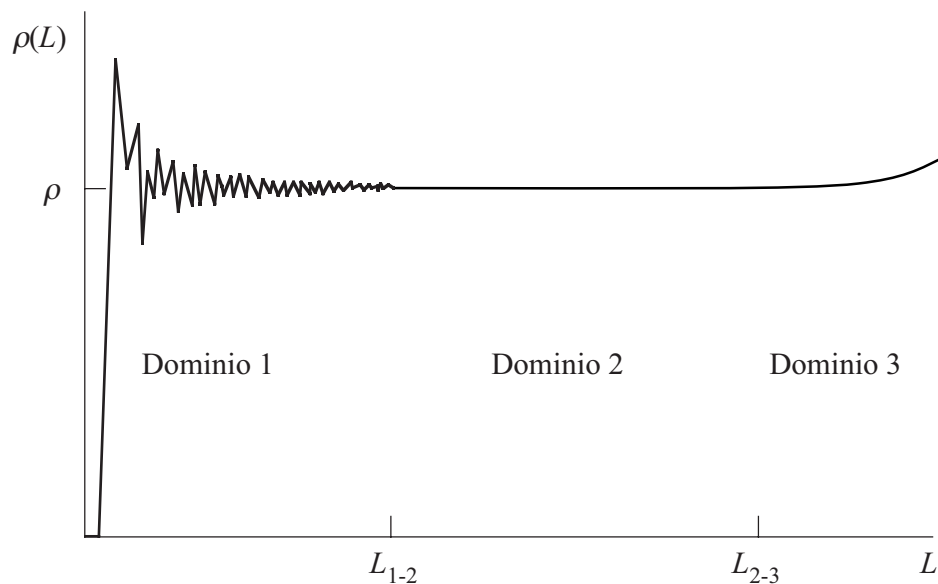


Fig. 1.2. Comportamiento de la densidad media $\rho(L) = M(V)/V$ como función de L . En la escala microscópica (dominio 1) $\rho(L)$ tiene fluctuaciones irregulares de gran magnitud, y por lo tanto el concepto de densidad media carece de significado físico. Sin embargo, se puede observar que en el dominio 2 tiene sentido hablar de la densidad del medio, dado que allí $\rho(L)$ es independiente del tamaño L de la muestra.

En la Fig. 1.2 se pueden distinguir claramente tres dominios diferentes:

Dominio 1: para valores muy pequeños de L , del orden de d , la granulosidad de la materia produce variaciones bruscas de $\rho(L)$; este es el dominio microscópico.

Dominio 2: en un intervalo en que el valor de L es pequeño en la escala macroscópica, pero grande respecto de d , $\rho(L)$ se mantiene prácticamente constante e independiente de L .

Dominio 3: cuando L es muy grande, $\rho(L)$ ya no se mantiene constante.

El límite L_{1-2} entre los dos primeros dominios depende del estado de condensación; para un gas a presión y temperatura normales $L_{1-2} \approx 10^{-5} - 10^{-6}$ cm, y para un líquido o un sólido $L_{1-2} \approx 10^{-7}$ cm. El límite L_{2-3} entre los dos últimos dominios (macroscópicos) depende de las particularidades del sistema sobre escalas grandes, que habitualmente suelen ser mayores que 1 mm, excepto cerca de superficies especiales (por ejemplo, interfases líquido-gas), que se observan como discontinuidades macroscópicas. En consecuencia podemos concluir que en el intervalo $L_{1-2} < L < L_{2-3}$ (región 2) tiene sentido definir una densidad ρ del elemento del fluido, pues ρ no depende ni de la forma ni de la dimensión del volumen de muestreo V . De manera análoga podemos definir una densidad de cantidad de movimiento, de energía, ..., etc., y por consiguiente también una velocidad del fluido.

En base a estas definiciones podemos enunciar la Hipótesis del Continuo de la manera siguiente:

En una descripción del movimiento de un fluido, tal que concierna muestreos sobre dimensiones mayores o iguales que L_{1-2} , la materia, la cantidad de movimiento y la energía se pueden suponer uniformemente distribuidas dentro de los elementos de volumen considerados.

Matemáticamente, esto equivale a considerar que

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(V)}{V}, \dots, \text{etc.} \quad (1.1)$$

aunque, en realidad, tal límite no existe.

En consecuencia, vamos a suponer que en cada punto⁵ \mathbf{r} en el seno de un fluido, es posible definir una densidad ρ , una velocidad \mathbf{u} , una aceleración \mathbf{a} , etc.; en general, dichas magnitudes dependerán de la posición \mathbf{r} y del tiempo t .

Debe quedar claro que la Hipótesis del Continuo *no* implica que todo rastro de la granulosidad de la materia desaparece de las ecuaciones macroscópicas del movimiento. En estas ecuaciones quedan coeficientes⁶ que no se pueden calcular o estimar sin recurrir a modelos microscópicos. Pero el cálculo de dichos coeficientes es misión de la Mecánica Estadística, y no nos vamos a ocupar de él en este curso.

No es fácil, en general, justificar la Hipótesis del Continuo y establecer su rango de validez en términos del comportamiento de la materia real. A los fines de estas notas podemos aceptar que su justificación radica en el comportamiento macroscópico de los fluidos tal como resulta de la observación y los experimentos. En tal sentido le daremos el valor de principio fundado en la experiencia. De esta forma aceptaremos como resultados experimentales que la densidad, la velocidad, la aceleración, ..., etc. de un elemento de fluido suficientemente pequeño son independientes del tamaño y la forma de dicho elemento, sin preocuparnos por el límite inferior del Dominio 2 (esto es, operando como si este límite no existiera). Precisamente, para nosotros el sustento de la Hipótesis del Continuo consiste en la observación empírica que la existencia de ese límite se irrelevante en lo que se refiere a la descripción macroscópica del movimiento del fluido.

⁵ En lo sucesivo indicaremos las magnitudes vectoriales y tensoriales con símbolos en negrita.

⁶ Coeficientes de viscosidad, de conductividad térmica, de tensión superficial e interfacial, etc..

Fuerzas de volumen y de superficie en un fluido

Consideremos un elemento de fluido de volumen V rodeado por una superficie cerrada S . Distinguiremos dos clases de fuerzas que actúan sobre el fluido contenido en dicho elemento: fuerzas de volumen y fuerzas de superficie.

Fuerzas de volumen

Son las fuerzas que *no dependen de la interacción del fluido en V con el fluido que lo rodea*. Por lo tanto existirían también si V estuviera rodeado por el vacío. Ejemplos de esta clase de fuerzas son el peso y las fuerzas ficticias o inerciales⁷ (si estudiamos el movimiento del fluido en un referencial no inercial). En el caso de fluidos conductores de la electricidad, como los plasmas, habrá que considerar también a la fuerza de Lorentz. Nosotros nos limitaremos en este curso a la gravedad y a las fuerzas inerciales.

Estas fuerzas se llaman *de volumen* porque se pueden considerar distribuidas uniformemente dentro de V . Dado el carácter de las fuerzas de gravedad e inerciales, las podremos escribir como

$$\mathbf{F} = M\mathbf{g} = \mathbf{g} \int_V \rho dV \quad (1.2)$$

Aquí M indica la masa contenida en V , y el último paso es posible gracias a la Hipótesis del Continuo⁸. Debe quedar claro que \mathbf{g} no es solamente la aceleración de la gravedad: en un referencial no inercial general incluye también las aceleraciones lineal y de Coriolis.

Fuerzas de superficie

Son las fuerzas que *dependen de la interacción del fluido en V con el fluido adyacente* y por lo tanto se ejercen sobre V a través de S . Naturalmente, por la Tercera Ley de Newton, el fluido en V ejerce fuerzas iguales y contrarias sobre el fluido adyacente. Del punto de vista físico estas fuerzas pueden tener dos orígenes: (1) el transporte de cantidad de movimiento por migración de moléculas a través de S (en gases y líquidos), y (2) las fuerzas intermoleculares, que las moléculas de un lado de S ejercen sobre las moléculas del otro lado de S (en líquidos solamente). En ambos casos destacamos el carácter superficial de estas fuerzas (recordemos que las fuerzas intermoleculares son de corto alcance).

Es conveniente definir las fuerzas de superficie asociándolas con elementos de superficie planos $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, identificados por su área dS y su normal \mathbf{n} . Más aún, se suelen expresar las fuerzas de superficie en términos de los *esfuerzos* (denominación que indica las fuerzas por unidad de superficie). Debe quedar claro, sin embargo, que lo que nos interesará establecer, para cada elemento de volumen del fluido, es la resultante de las fuerzas de superficie, calculada sobre el área que lo limita.

Propiedades generales de las fuerzas de superficie

En la Fig. 1.3 hemos representado dos elementos de fluido separados por una superficie plana dS (para una representación más cómoda, los hemos dibujado desplazados). Por convención, la fuerza $d\mathbf{F}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$ es la fuerza de superficie que ejerce el fluido hacia el cual se dirige \mathbf{n} sobre el

⁷ Por ejemplo, la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis; esta última es muy importante en las aplicaciones de la Mecánica de Fluidos a la Meteorología y a la Oceanografía.

⁸ Se ha supuesto también que \mathbf{g} no depende de la posición.

fluido desde donde proviene \mathbf{n} . De este modo (ver la figura), $d\mathbf{F}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$ es la fuerza de superficie que la porción 2 del fluido ejerce sobre la porción 1.

En términos del esfuerzo $\boldsymbol{\Sigma}$, se tiene:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) dS \quad (1.3)$$

Notar que, en general, $d\mathbf{F}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ no son paralelos a \mathbf{n} .

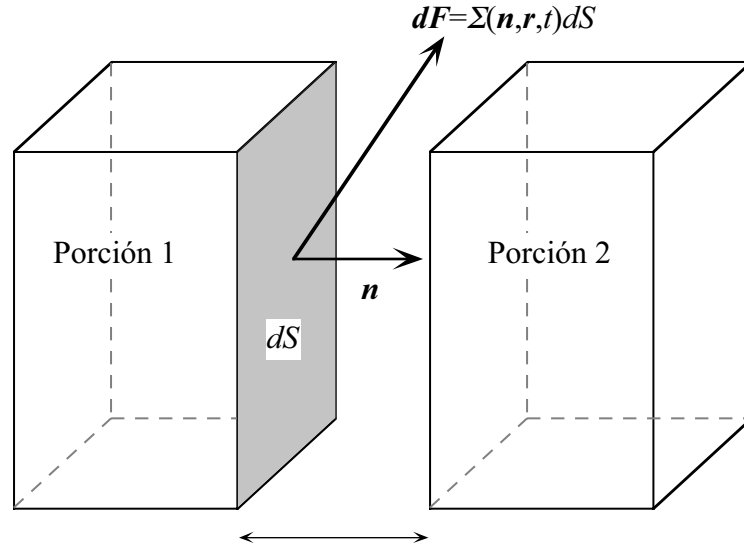


Fig. 1.3. Fuerza de superficie que la porción 2 del fluido ejerce sobre la región 1. Ambas porciones son adyacentes, pero en el esquema se las ha desplazado para que la visualización sea más cómoda.

Por el Principio de Acción y Reacción, la fuerza ejercida por 1 sobre 2 debe ser igual y contraria a la ejercida por 2 sobre 1. Por lo tanto debe ser:

$$\boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

Para comenzar a aclarar la relación entre las fuerzas de superficie así definidas y su resultante sobre un elemento de volumen es útil estudiar un ejemplo.

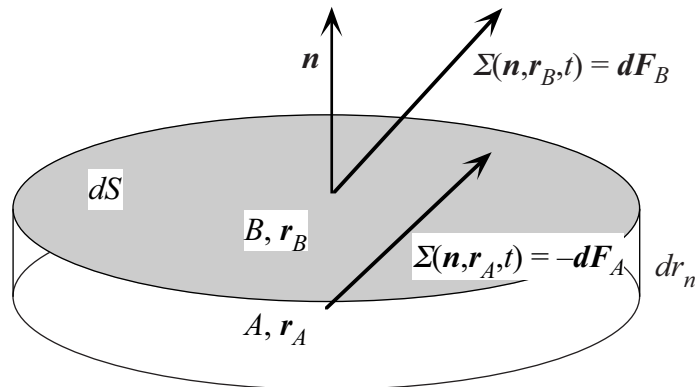


Fig. 1.4. Fuerzas de superficie que se ejercen sobre dos caras planas y paralelas que limitan un elemento fluido. El contorno lateral del elemento es arbitrario.

Sea una pequeña porción chata de fluido, limitada por dos superficies planas y paralelas A y B ($\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_B = \mathbf{n}$) de igual área dS , y cuyo contorno lateral es arbitrario (Fig. 1.4). En un dado instante t , la fuerza de superficie ejercida sobre dicha porción por el fluido ubicado debajo de A es

$$d\mathbf{F}_A = -\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_A, t) dS \quad (1.5)$$

La fuerza ejercida sobre esa misma porción por el fluido ubicado encima de B es

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_B &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_B, t) dS \\ &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_A + dr_n \mathbf{n}, t) dS \\ &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_A, t) dS + dr_n dS [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r}_A} \\ &= -d\mathbf{F}_A + dr_n dS [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r}_A} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Luego la resultante es

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_A = dr_n dS [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)]_{\mathbf{r}_A} \quad (1.7)$$

Por lo tanto vemos que $d\mathbf{F} = O(dr_n)$.

En resumen, los esfuerzos ejercidos por el fluido externo sobre el fluido de la parcela que estamos considerando a través de las caras planas y paralelas son iguales y opuestos a menos de términos del orden de dr_n . Esto es una consecuencia del principio de acción y reacción y de la continuidad que hemos supuesto para $\boldsymbol{\Sigma}$, y no tiene nada que ver con la naturaleza física de las fuerzas de superficie.

De resultas de esto, la fuerza resultante sobre la parcela resulta proporcional a la derivada espacial de $\boldsymbol{\Sigma}$ a lo largo de la dirección normal a las caras y es del orden de la distancia entre las caras. Nótese que la masa de la parcela es

$$dm = \rho dr_n dS \quad (1.8)$$

Comparando (1.7) y (1.8) vemos que la aceleración es independiente tanto de dS como de dr_n , como era de esperar si vale la Hipótesis del Continuo.

El tensor de los esfuerzos

El ejemplo precedente muestra que la Hipótesis del Continuo implica que las componentes de los esfuerzos están sometidas a ciertas restricciones. Para investigar en qué consisten esas restricciones, consideremos un elemento de volumen δV centrado alrededor de un punto cualquiera P cuya posición es \mathbf{r} . Supongamos, por simplicidad, que δV está limitado por superficies planas, pero por lo demás, que su forma y su tamaño son arbitrarios.

Claramente, la razón entre la resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre δV y la masa contenida en δV debe ser la misma, en módulo y dirección, *cualquiera sea la forma y el tamaño* de δV : de lo contrario, la hipótesis del Continuo no valdría para la aceleración⁹. Este hecho no implica únicamente relaciones entre los esfuerzos asociados con dos caras paralelas cer-

⁹ Cabe suponer, asimismo, que otras restricciones pueden surgir de considerar otras magnitudes.

canas (como las que ya vimos), sino también relaciones entre los esfuerzos asociados con elementos de superficie apoyados sobre el mismo punto P, pero con *diferentes orientaciones*.

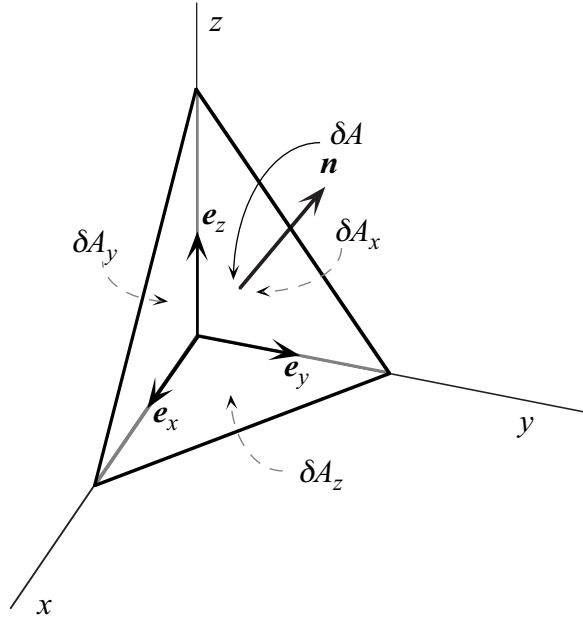


Fig. 1.5. Elemento de fluido en forma de tetraedro. La consideración de la relación entre los esfuerzos sobre las diferentes caras del tetraedro, en el límite en que el tetraedro es infinitesimal, lleva a la definición del tensor de los esfuerzos.

En efecto, mostraremos ahora que el esfuerzo $\Sigma(\mathbf{n})$ asociado con un elemento de superficie cuya normal \mathbf{n} es arbitraria, se puede expresar en términos de los esfuerzos $\Sigma(\mathbf{e}_x)$, $\Sigma(\mathbf{e}_y)$, $\Sigma(\mathbf{e}_z)$ asociados con elementos de superficie mutuamente ortogonales, caracterizados por las normales \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z . Para ver esto, consideremos las fuerzas de superficie que actúan (en un instante t dado) sobre el fluido contenido en un elemento de volumen en forma de tetraedro, con tres caras ortogonales entre sí, de áreas δA_x , δA_y , δA_z y cuyas normales hacia afuera son, respectivamente, $-\mathbf{e}_x$, $-\mathbf{e}_y$, $-\mathbf{e}_z$, y cuya cuarta cara tiene un área δA y normal exterior \mathbf{n} (ver Fig. 1.5).

Tenemos, por geometría, que

$$\delta A_x = \delta A \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \delta A_y = \delta A \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \delta A_z = \delta A \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \quad (1.9)$$

Por otra parte, la resultante de las fuerzas de superficie es

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R} &= \Sigma(\mathbf{n}) \delta A + \Sigma(-\mathbf{e}_x) \delta A_x + \Sigma(-\mathbf{e}_y) \delta A_y + \Sigma(-\mathbf{e}_z) \delta A_z \\ &= \delta A \left[\Sigma(\mathbf{n}) - \Sigma(\mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} - \Sigma(\mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} - \Sigma(\mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde hemos usado (1.4) y (1.9). Finalmente, la masa del elemento de volumen considerado es

$$\delta M = \rho \delta V = \frac{1}{3} \delta A \delta h \quad (1.11)$$

siendo δh la distancia desde la cara de área δA y el vértice opuesto.

Ahora bien, la aceleración del elemento de fluido, dada por

$$\mathbf{a} = \frac{\delta R}{M} = \frac{3}{\delta h} \left[\Sigma(\mathbf{n}) - \Sigma(\mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} - \Sigma(\mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} - \Sigma(\mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \right] \quad (1.12)$$

debe ser independiente del tamaño del elemento de volumen, esto es, debe ser independiente de δh . Por lo tanto, la cantidad entre corchetes en (1.12) debe tender a cero como δh cuando $\delta h \rightarrow 0$. En ese límite, las cuatro caras del tetraedro están apoyadas en P, y todos los esfuerzos están calculados en ese punto, esto es, en \mathbf{r} . Tenemos entonces que para todo punto del fluido vale la relación

$$\Sigma(\mathbf{n}) = \Sigma(\mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} + \Sigma(\mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} + \Sigma(\mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \quad (1.13)$$

En términos de componentes cartesianas, la (1.13) se expresa como

$$\begin{aligned} \Sigma_x(\mathbf{n}) &= \Sigma_x(\mathbf{e}_x) n_x + \Sigma_x(\mathbf{e}_y) n_y + \Sigma_x(\mathbf{e}_z) n_z \\ \Sigma_y(\mathbf{n}) &= \Sigma_y(\mathbf{e}_x) n_x + \Sigma_y(\mathbf{e}_y) n_y + \Sigma_y(\mathbf{e}_z) n_z \\ \Sigma_z(\mathbf{n}) &= \Sigma_z(\mathbf{e}_x) n_x + \Sigma_z(\mathbf{e}_y) n_y + \Sigma_z(\mathbf{e}_z) n_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si llamamos

$$\sigma_{ij} = \Sigma_i(\mathbf{e}_j) \quad , \quad i, j = x, y, z \quad (1.15)$$

las (1.14) se pueden escribir como

$$\Sigma_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad (1.16)$$

Ahora bien, puesto que Σ y \mathbf{n} son vectores físicos (es decir, entes intrínsecos, que no dependen del sistema de coordenadas elegido para representarlos mediante componentes), las nuevas cantidades σ_{ij} deben representar en conjunto a otro ente intrínseco, que es un *tensor* de rango 2, que denominaremos *tensor de los esfuerzos*.

De acuerdo con la (1.15), la componente σ_{ij} del tensor de los esfuerzos es igual a la componente i de la fuerza por unidad de superficie ejercida a través de una superficie plana perpendicular al eje j , por el fluido situado hacia el lado *positivo* del eje sobre el fluido situado hacia el lado *negativo* del mismo.

Observemos que, en notación vectorial, el *flujo* por unidad de superficie de un vector \mathbf{a} a través de un elemento de superficie plana caracterizado por una normal \mathbf{n} se define como

$$\phi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \quad (1.17)$$

Naturalmente, en este caso ϕ es un escalar. Entonces, generalizando este concepto, de acuerdo con la (1.16) la magnitud Σ se puede considerar como el *flujo* por unidad de superficie del tensor de los esfuerzos a través de un elemento de superficie plano de normal \mathbf{n} , sólo que ahora este flujo no es un escalar, sino un vector, justamente el vector $\Sigma(\mathbf{n})$. Esto se expresa en notación tensorial compacta como

$$\Sigma = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.18)$$

donde σ es el tensor de los esfuerzos. Además de ser sumamente compacta, la (1.18) tiene la ventaja de ser una expresión que no depende de ningún sistema de coordenadas.

Resultante de las fuerzas de superficie sobre un elemento de volumen

Consideremos ahora un elemento de volumen limitado por tres pares de caras perpendiculares entre sí, orientadas según los ejes de un sistema de referencia ortogonal (ver Fig. 1.6).

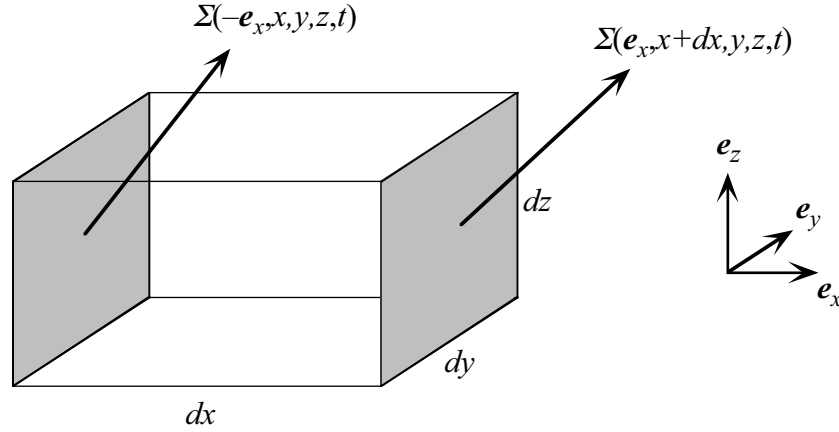


Fig. 1.6. La resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre un elemento de fluido depende de la variación espacial del tensor de los esfuerzos.

A partir del resultado ya obtenido para el caso del elemento limitado por caras paralelas, se obtiene fácilmente

$$d\mathbf{F} = dx dy dz \left(\frac{\partial}{\partial x} \Sigma(\mathbf{e}_x) + \frac{\partial}{\partial y} \Sigma(\mathbf{e}_y) + \frac{\partial}{\partial z} \Sigma(\mathbf{e}_z) \right) \quad (1.19)$$

que usando la (1.15) se puede escribir en la forma

$$dF_i = dV \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.20)$$

La resultante es entonces proporcional al volumen, cualquiera sea la forma del paralelepípedo. Es tedioso, pero no difícil en principio, mostrar que el resultado (1.20) vale también para un elemento de volumen de forma general, y que también vale si efectuamos rotaciones arbitrarias del sistema de coordenadas.

Es instructivo volver a la analogía del párrafo precedente. Habíamos mostrado que la fuerza sobre un elemento plano de superficie es igual al flujo del tensor de los esfuerzos a través de ese elemento. Consistentemente con esto, la fuerza total ejercida sobre un cierto volumen es la integral del flujo extendida sobre la superficie que limita dicho volumen. Extendiendo ahora la analogía, el vector cuyas componentes son $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ se puede considerar como la *divergencia* del tensor σ , sólo que la divergencia de un tensor de rango 2 es un vector, y no un escalar (como es la divergencia de un vector, o tensor de rango 1). De acuerdo con esto, podemos escribir la (1.20) en la forma compacta

$$d\mathbf{F} = dV \nabla \cdot \sigma \quad (1.21)$$

Para un volumen finito V , tendremos

$$\mathbf{F} = \int_V d\mathbf{F} = \int_V dV \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.22)$$

Por otra parte, de la (1.18) obtenemos que

$$\mathbf{F} = \int_S dS \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.23)$$

donde S es la superficie que limita a V .

El resultado (1.22) se podría haber obtenido a partir del teorema de la divergencia para tensores de rango 2: la integral del flujo de un tensor de rango 2 sobre una superficie cerrada es igual a la divergencia del tensor integrada sobre el volumen limitado por dicha superficie. Sólo que ahora tanto el flujo como la divergencia de $\boldsymbol{\sigma}$ son vectores (tensores de rango 1), y no escalares, como en el caso del teorema de la divergencia para vectores.

Vemos así cómo el tema cierra: la necesidad que las magnitudes mecánicas macroscópicas cumplan con la Hipótesis del Continuo conduce a que la resultante de las fuerzas de superficie sobre un elemento de volumen, debe ser proporcional al volumen encerrado, y no al área de la superficie que lo limita. Esta exigencia, sumada al carácter intrínseco de la relación que debe existir entre la fuerza ejercida a través de un elemento plano de superficie y la normal a ésta, implica que la entidad matemática adecuada para representar las fuerzas de superficie es el flujo de un tensor de rango 2: el tensor de los esfuerzos, algunas de cuyas propiedades pasaremos a investigar ahora.

Simetría del tensor de los esfuerzos

Consideremos un elemento de volumen V de sección cilíndrica con eje paralelo al eje z y centrado en el punto O (ver Fig. 1.7). Calcularemos la cupla τ_z respecto del eje z de las fuerzas de superficie ejercidas por el fluido externo al elemento sobre el interno. Consideraremos positivo el sentido antihorario, y al elemento de volumen lo suficientemente pequeño como para poder considerar uniformes en él a todas las componentes del tensor de los esfuerzos.

Comencemos por calcular la fuerza ejercida por el fluido externo a través de un elemento de superficie $dl \, dz$. Será suficiente calcular las componentes x e y de dicha fuerza, puesto que la componente z no contribuye a la cupla que nos interesa. Tenemos que

$$dF_x = dz \, dl (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) \quad , \quad dF_y = dz \, dl (\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y) \quad (1.24)$$

puesto que $n_z = 0$.

Naturalmente, $d\mathbf{F}$ no tiene porqué ser paralelo a \mathbf{n} (que coincide con el versor radial \mathbf{e}_r), cuyas componentes son, respectivamente $n_x = \cos\theta$ y $n_y = \sin\theta$.

La cupla $d\tau_z$ respecto del eje z debida a $d\mathbf{F}$ es

$$d\tau_z = dr (\mathbf{e}_r \times d\mathbf{F})_z = dr (n_x dF_y - n_y dF_x) \quad (1.25)$$

Reemplazando (1.24) en (1.25) y usando $dl = dr \, d\theta$ obtenemos

$$\begin{aligned}
d\tau_z &= dr^2 dz d\theta [n_x(\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y) - n_y(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y)] \\
&= dr^2 dz d\theta [\sigma_{yx} \cos^2 \theta + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta - \sigma_{xy} \sin^2 \theta]
\end{aligned} \tag{1.26}$$

expresión que debe ser integrada respecto de θ entre 0 y 2π para obtener la cupla τ_z . Al integrar de esta forma, el término con el producto $\sin \theta \cos \theta$ es claramente nulo, y queda, entonces

$$\tau_z = \pi dr^2 dz (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) = dV (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \tag{1.27}$$

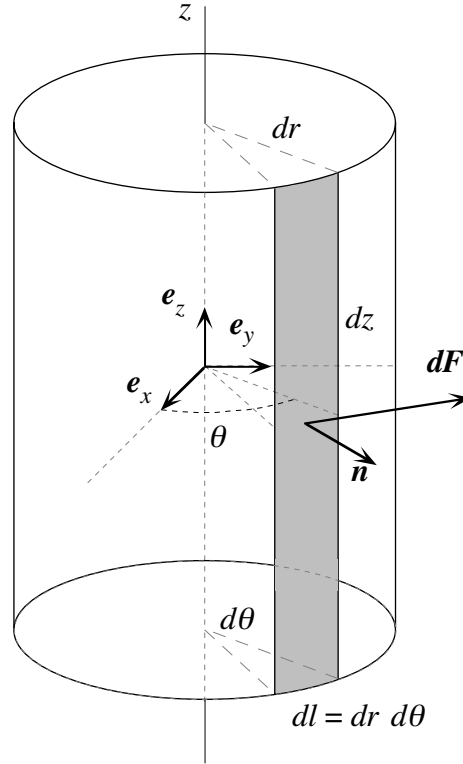


Fig. 1.7. Las fuerzas de superficie producen una cupla que tiende a producir una rotación de un elemento cilíndrico alrededor de su eje. Pero la aceleración angular que resulta depende del radio del cilindro, lo cual contradice la Hipótesis del Continuo. Por lo tanto, en el límite en que el radio tiende a cero, la cupla debe ser nula. Esto lleva a concluir que el tensor de los esfuerzos es simétrico.

Por otra parte, el momento de inercia I del mismo elemento, supuesta uniforme su densidad ρ , y por lo tanto su masa dada por $dM = \rho dV$, es

$$I = \frac{1}{2} dM dr^2 = \frac{1}{2} \rho dV dr^2 \tag{1.28}$$

De (1.27) y (1.28) resulta que la aceleración angular ($d\omega/dt = \tau_z/I$) escala como $1/dr^2$. Por lo tanto depende de dr , en contradicción con la Hipótesis del Continuo. En consecuencia, se debe cumplir

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} \tag{1.29}$$

Del mismo modo, considerando cilindros cuyos ejes son paralelos a los ejes x e y , se encuentra que $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$ y $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$. Por lo tanto, en general, las componentes del tensor de los esfuerzos deben cumplir las relaciones

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.30)$$

Un tensor de rango 2 que cumple la (1.30) se denomina *simétrico*. Lo que acabamos de demostrar es que $\boldsymbol{\sigma}$ es necesariamente simétrico, lo cual reduce el número de componentes independientes de nueve a seis (al asignar seis, las tres restantes quedan determinadas por las relaciones (1.30)).

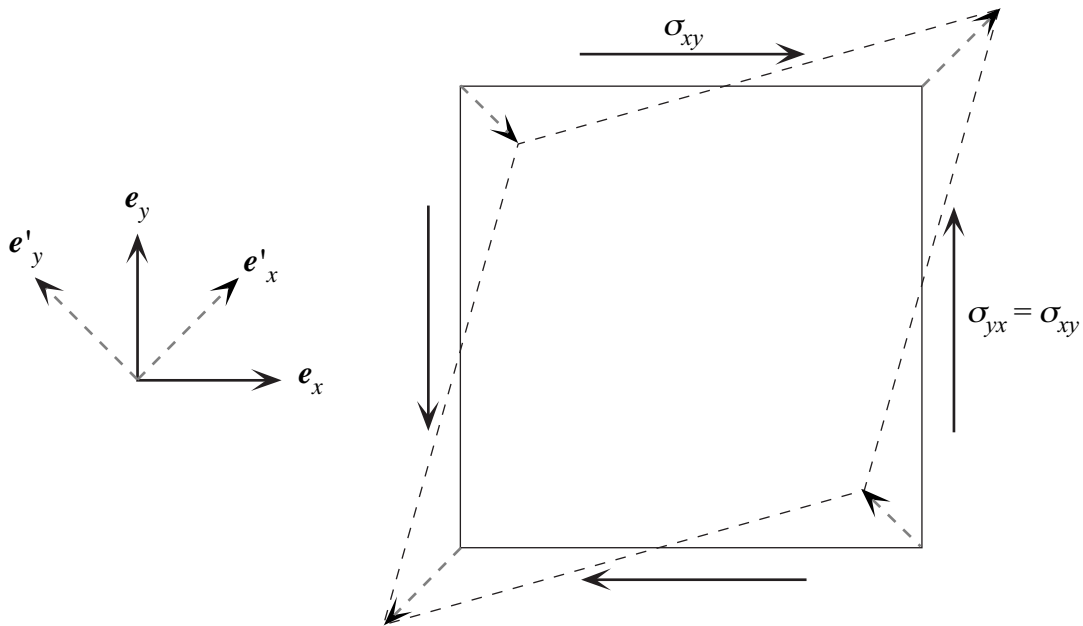


Fig. 1.8. La simetría del tensor de los esfuerzos implica que las fuerzas tangenciales sobre un elemento de sección cuadrada se balancean de modo que tienden a producir una contracción en una dirección y una extensión en la dirección perpendicular a la primera. Esto sugiere que con una adecuada elección de los ejes (*ejes principales*) debe ser posible reducir a forma diagonal la matriz formada por las componentes del tensor de los esfuerzos.

Físicamente, la condición (1.30) implica que las fuerzas tangenciales sobre un elemento de sección cuadrada se deben balancear al primer orden como se indica en esquemáticamente en la Fig. 1.8. Tal combinación de fuerzas tiende a producir la contracción del elemento en una dirección y la expansión en la dirección perpendicular. Nótese que las fuerzas que intervienen en este tipo de *deformación* son del mismo orden de las fuerzas de superficie, y no proporcionales a su variación entre dos superficies paralelas cercanas, como son las que producen el *movimiento* del elemento (resultante dada por $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$). La figura muestra intuitivamente cómo, limitándonos al plano, será siempre posible elegir un sistema de coordenadas tal que, en el punto P, la fuerza de superficie a través de una superficie perpendicular a e'_x tenga la dirección e'_x , etc.; es decir, un sistema en el que las componentes tangenciales de los esfuerzos son nulas en las superficies perpendiculares a los ejes. Esta es una propiedad general de los tensores simétricos de rango 2: tales tensores se pueden siempre reducir a forma diagonal en el entorno de un punto.

Descomposición del tensor de los esfuerzos

Debido a la simetría del tensor de los esfuerzos se puede siempre determinar, en *cada punto* de un fluido, un sistema de ejes cartesianos $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, denominados *ejes principales*, tal que en ese sistema $\boldsymbol{\sigma}$ es diagonal, es decir

$$\sigma_{ij} \neq 0 \quad \text{solo si} \quad j = i \quad (1.31)$$

Naturalmente, en general el sistema de ejes principales es diferente de punto a punto¹⁰.

En el sistema de ejes principales, las tres componentes del esfuerzo sobre un elemento de superficie de normal $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$ son $(\sigma_{xx}n_x, \sigma_{yy}n_y, \sigma_{zz}n_z)$. El esfuerzo es paralelo a \mathbf{n} solamente en el caso especial $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$, es decir cuando las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ tienen la forma

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} \quad (1.32)$$

donde δ_{ij} (delta de Kronecker) son las componentes cartesianas del tensor isótropo unitario de segundo rango \mathbf{I} .

Es importante destacar que si $\boldsymbol{\sigma}$ tiene la particular expresión (1.32) en un cierto punto P para un dado sistema de ejes cartesianos C, entonces la tendrá para cualquier otro sistema C'. Dejando de lado la demostración formal, que se puede dar empleando las fórmulas de transformación para las componentes de tensores de segundo orden, se puede comprender de inmediato que debe ser así. En efecto, si $\sigma_{ij} = A\delta_{ij}$ en C, está claro que el esfuerzo es puramente normal a través de cualquier superficie, independientemente de su orientación, lo cual ya de por sí asegura que $\boldsymbol{\sigma}$ es también diagonal en todo otro sistema C'. Pero, además, el módulo del esfuerzo debe tener el mismo valor A cualquiera sea la orientación de la superficie, ya que

$$|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})|^2 = (\sigma_{xx}n_x)^2 + (\sigma_{yy}n_y)^2 + (\sigma_{zz}n_z)^2 = A^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = A^2 \quad (1.33)$$

Por otra parte, las componentes de $\boldsymbol{\Sigma}$ en C' no son otra cosa que los módulos de los esfuerzos (necesariamente normales) a través de superficies perpendiculares a los ejes de C', y por lo tanto ellos también deben valer A. En consecuencia de lo dicho, la (1.32) implica que

$$\boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{I} \quad (1.34)$$

y por lo tanto, que el tensor de los esfuerzos es *isótropo*.

Una magnitud muy importante en la descripción del estado de un fluido es el *valor medio* del esfuerzo normal en cada punto. El promedio se entiende sobre todas las posibles orientaciones (o direcciones de la normal) de un elemento de superficie (plano) apoyado en ese punto. Es bastante fácil comprender que este promedio se puede también calcular como el promedio del módulo del esfuerzo normal sobre la superficie de una esfera de radio que tiende a cero, centrada en P. Conviene destacar desde ahora que, si bien este promedio tiene *dimensiones* de esfuerzo, es decir fuerza/superficie, *no es* una fuerza por unidad de superficie, sino evidentemente, una magnitud *escalar*, y como tal no se le puede atribuir dirección¹¹.

¹⁰ Por supuesto, a través de un elemento de superficie de orientación arbitraria seguirán existiendo esfuerzos tangenciales.

¹¹ Justamente, se la define a través de un promedio sobre todas las direcciones.

En el caso especial en que σ es isótropo, es decir tiene la forma (1.34), el valor medio en cuestión es obviamente A , puesto que éste es el valor del módulo del esfuerzo normal cualquiera sea la orientación de un elemento de superficie. Por otra parte, $A = T/3$, donde

$$T = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{Tr}(\sigma) \quad (1.35)$$

es la *traza* (escalar invariante dado por la suma de los elementos diagonales) del tensor σ .

Es posible demostrar que incluso cuando σ no es isótropo, $T/3$ representa el valor medio de la intensidad del esfuerzo normal. La demostración rigurosa es engorrosa (pues involucra una integral sobre el ángulo sólido), pero podemos dar un argumento convincente mucho más sencillo. Sea un elemento de volumen cúbico de lado infinitesimal δb , centrado alrededor del punto P, cuyas caras son perpendiculares a los ejes de un sistema arbitrario C (cuyos ejes no necesariamente coinciden con los ejes principales de σ). Como las componentes de σ se pueden considerar constantes en el volumen del cubo, los esfuerzos normales sobre las dos caras perpendiculares al eje x tienen el mismo módulo constante dado por σ_{xx} . Análogamente, los esfuerzos normales a través de las caras perpendiculares a los ejes y , z , tienen módulos constantes dados por σ_{yy} y σ_{zz} , respectivamente. Entonces el valor medio del módulo del esfuerzo normal sobre la superficie de este particular cubo es¹²:

$$\frac{2\sigma_{xx}\delta b^2 + 2\sigma_{yy}\delta b^2 + 2\sigma_{zz}\delta b^2}{6\delta b^2} = \frac{1}{3}T \quad (1.36)$$

Supongamos ahora rotar nuestro elemento, de modo que sus caras dejen de ser perpendiculares a los ejes de C; el cálculo del valor medio de la intensidad del esfuerzo normal sobre la superficie del cubo rotado aparenta ser engorroso, pues a primera vista intervienen las componentes no diagonales de σ y los ángulos entre las normales a las caras y los ejes. Sin embargo se llega de inmediato al resultado gracias al siguiente razonamiento: consideremos el sistema C' cuyos ejes son ortogonales a las caras del cubo en su nueva posición; en este sistema el valor medio del esfuerzo normal sobre la superficie es, obviamente, $T'/3 = T/3$, puesto que la traza de un tensor es un escalar y por lo tanto es invariante ante rotaciones. En consecuencia, cualquiera sea la orientación del elemento cúbico en el espacio, el valor medio del esfuerzo normal sobre su superficie total es $T/3$. Entonces, al promediar sobre todas estas orientaciones, obtenemos el valor $T/3$ que se tiene para cada una de ellas, y por la simetría del cubo, este es también el resultado que obtenemos si promediamos sobre todas las orientaciones de cada cara por separado. Estos resultados sugieren una descomposición invariante de σ , como la suma de un tensor isótropo σ_I y un tensor simétrico de traza nula σ' , es decir

$$\sigma = \sigma_I + \sigma' \quad (1.37)$$

con

$$\sigma_I = \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\mathbf{I} \quad , \quad \sigma' = \sigma - \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\mathbf{I} \quad (1.38)$$

¹² No se llega al mismo resultado si el elemento de volumen es un paralelepípedo no cúbico, pues al calcular el promedio no queda asignado el mismo peso a las tres orientaciones ortogonales que intervienen (las que corresponden a las caras más grandes pesan más en el promedio).

Para interpretar más cómodamente la (1.37) podemos escribir sus componentes en el sistema de ejes principales:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T/3 & 0 & 0 \\ 0 & T/3 & 0 \\ 0 & 0 & T/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - T/3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - T/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - T/3 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Supongamos que exista solamente la parte isótropa $\boldsymbol{\sigma}_I$. Entonces la intensidad del esfuerzo normal sobre la superficie de una esfera cuyo radio tiende a cero, es uniforme; es decir, por efecto del fluido que la rodea, nuestra esfera tiende a ser comprimida (si $T > 0$) o expandida (si $T < 0$) sin cambio de forma.

Supongamos, en cambio, que existe sólo la parte anisótropa. Puesto que la traza de $\boldsymbol{\sigma}'$ es nula, el fluido que rodea la esfera actúa sobre algunos sectores tendiendo a comprimirla y sobre otros a expandirla, de forma tal que en promedio la componente normal del esfuerzo es nula. Es decir, la esfera tiende a deformarse sin cambio de volumen (por esto $\boldsymbol{\sigma}'$ se denomina *desviador*).

En resumen:

El efecto de las fuerzas de superficie sobre un elemento del fluido es, al primer orden, el de comprimirlo (o expandirlo) y deformarlo. La intensidad del primer efecto está dada por la tercera parte de la traza de $\boldsymbol{\sigma}$, y la del segundo por la magnitud de las componentes de la parte anisótropa $\boldsymbol{\sigma}'$, resultante de restar de $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de componentes $(T/3)\delta_{ij}$. En órdenes más altos, en forma proporcional a las derivadas espaciales de las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$, las fuerzas superficiales dan lugar a una fuerza neta resultante capaz de desplazar el elemento en cuestión; esta fuerza es proporcional al volumen del elemento, y por lo tanto del mismo orden que las eventuales fuerzas de volumen que pudieran existir.

Presión en un fluido en reposo

Es un hecho experimental que un fluido confinado por un recipiente de paredes rígidas, tiende al reposo, es decir a una situación donde no hay movimiento de elementos de fluido relativo a otros elementos o a las paredes, y donde tampoco ocurren deformaciones o expansiones o compresiones de dichos elementos

Esto *no implica*, sin embargo, que $\boldsymbol{\sigma}$ es idénticamente nulo en un fluido en reposo: muchas observaciones indican lo contrario. En efecto, es una experiencia común que si evacuamos una celda situada en la atmósfera en reposo, sus paredes sufren compresiones (claramente visibles si las paredes son elásticas), que incluso pueden llegar a romperlas. Análogamente, la inmersión de un objeto hueco en el agua conduce a compresión de sus paredes y a una tendencia a flotar, que no se pueden atribuir sino al efecto de las fuerzas superficiales ejercidas sobre el objeto por el fluido que lo rodea. También, extendiendo un poco el razonamiento, resulta claro que sobre toda parcela fluida de volumen δV en el seno de un fluido en reposo, debe necesariamente actuar una resultante neta no nula de las fuerzas de superficie ($= \delta V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$) que compensa a la fuerza (de volumen) peso ($= \delta V \rho \mathbf{g}$).

Estos argumentos, y muchos otros que podríamos agregar y refinar, muestran que sobre cada elemento de volumen en el seno de un fluido en reposo actúan fuerzas de superficie originadas por el fluido que lo rodea, de modo que el valor medio de la componente normal del esfuerzo sobre un elemento de volumen esférico es diferente de cero. Además, estas fuerzas tienen segu-

ramente un carácter puramente compresivo (o expansivo¹³). Puesto que el elemento no cambia de volumen, debe existir algo que se opone a dichos esfuerzos y que está ligado a las propiedades termofísicas del medio (densidad, temperatura, estructura en el caso de los líquidos); se le da el nombre de *presión* y resulta adecuado atribuirle la magnitud¹⁴ del valor medio del esfuerzo normal ejercido por el fluido contenido en el volumen sobre el fluido que lo rodea, esto es:

$$p = -T/3 \quad (1.40)$$

donde T es la traza de $\boldsymbol{\sigma}$.

Puesto que los elementos de volumen de un fluido en reposo no se deforman, se podría pensar, por analogía, que también debe existir algo que se opone a la deformación. Sin embargo, numerosas experiencias muestran que a diferencia de los sólidos, los fluidos no poseen rigidez (sino sólo resistencia a la *rapidez* de la deformación, como ya dijimos al comienzo). Por lo tanto en los fluidos en reposo la parte anisótropa del tensor de los esfuerzos, que tiende a producir deformaciones, debe ser nula.

En conclusión, en los fluidos en reposo $\boldsymbol{\sigma}' = 0$ y el tensor de los esfuerzos se reduce a la parte isótropa

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = -p \mathbf{I} \quad (1.41)$$

cuyas componentes son:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} T \delta_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.42)$$

Las dimensiones de la presión son fuerza/superficie, pero al igual que el esfuerzo normal medio, la presión es una magnitud escalar y no se le debe atribuir dirección.

En términos de la presión, la fuerza neta sobre un elemento de volumen, dada por

$$d\mathbf{F} = dV \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.43)$$

se expresa como

$$dF_i = -dV \frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = -dV \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1.44)$$

es decir

$$d\mathbf{F} = -dV \nabla p \quad (1.45)$$

La (1.45) muestra que la fuerza surge de las *variaciones espaciales* de p , que determinan tanto su módulo como su dirección.

Del punto de vista físico, es más adecuado considerar a la presión como una magnitud propia del fluido, que caracteriza su estado en cada punto y que está ligada a su densidad, temperatura y

¹³ A diferencia de los gases, en los cuales estas fuerzas son siempre compresivas, los líquidos pueden estar sometidos a fuerzas expansivas (que corresponden a presión *negativa*).

¹⁴ Debe recordarse que nos estamos refiriendo a fluidos en reposo.

otros parámetros. Nótese que las dimensiones de p son también las de energía/volumen, es decir se la puede considerar como una *densidad de energía*. Esta manera de considerar a la presión es muy adecuada en el caso importante de los gases perfectos donde como es notorio, la teoría cinética establece una simple proporcionalidad entre p y la energía interna por unidad de volumen, dada en este caso por la energía cinética media de las moléculas¹⁵.

Hemos visto que el tensor de los esfuerzos en un fluido en reposo es isótropo. Esta es una propiedad que se puede atribuir al carácter isótropo, o *amorfo*, de los fluidos. En un medio amorfo, donde no existen estructuras estables ni ninguna otra característica que establezca direcciones privilegiadas, el tensor de los esfuerzos no puede ser sino isótropo, a diferencia de lo que ocurre en sólidos con estructura cristalina.

Cabe preguntarse de dónde proviene la parte anisótropa de σ en los fluidos. La respuesta es: del campo de velocidades. El tensor de los esfuerzos en un punto de un fluido depende no sólo del estado termofísico local, sino también del campo de velocidades en el entorno de ese punto (más precisamente, de las derivadas espaciales de este campo). Obviamente, el campo de velocidades introduce direcciones privilegiadas, y por eso la parte anisótropa de σ puede tomar valores no nulos. En los fluidos en reposo no hay campo de velocidades, luego el término anisótropo es nulo.

¹⁵ Para ser exactos la energía interna de un gas coincide con la energía cinética de traslación de las moléculas únicamente para un gas perfecto de moléculas puntiformes, esto es, que no poseen grados de libertad internos. En otros casos la relación es más compleja, pues sólo una parte del contenido de energía por unidad de volumen de un fluido se puede identificar con la presión.

2. HIDROSTÁTICA

Cuando una parcela de fluido se encuentra en equilibrio, la resultante de las fuerzas de volumen y de superficie que actúan sobre ella debe ser nula. Si expresamos esta condición por unidad de volumen, esto significa que en el equilibrio se debe cumplir

$$\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.1)$$

En un fluido en reposo el tensor de los esfuerzos tiene la forma $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, por lo tanto la condición (2.1) se escribe

$$\mathbf{f} = \nabla p \quad (2.2)$$

Si la fuerza por unidad de volumen \mathbf{f} se debe a la gravedad tendremos $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. La ec. (2.2) se denomina *ecuación fundamental de la hidrostática*.

Principio de Arquímedes

Sea un cuerpo de volumen V limitado por la superficie S , sumergido en un fluido en reposo cuya densidad es ρ . La fuerza que el fluido ejerce sobre el cuerpo, denominada *empuje*, vale

$$\mathbf{E} = -\int_S p \mathbf{n} dS \quad (2.3)$$

Aquí \mathbf{n} es la normal exterior del elemento de superficie dS del cuerpo. Por otra parte, la presión en el fluido está determinada por la condición de equilibrio

$$\nabla p - \rho\mathbf{g} = 0 \quad (2.4)$$

Si aplicamos el Teorema de Green a la expresión de \mathbf{E} y usamos la (2.4) resulta entonces

$$\mathbf{E} = -\int_V \nabla p dV = -\mathbf{g} \int_V \rho dV = -\mathbf{g} M_f \quad (2.5)$$

donde M_f es la masa del fluido desplazado por el cuerpo. Por lo tanto, el empuje es igual en módulo pero de signo opuesto al peso del fluido desplazado, resultado que constituye el bien conocido *Principio de Arquímedes*.

Equilibrio en líquidos con estratificaciones de densidad

La densidad de un líquido es función de la temperatura, la composición química y la concentración de eventuales solutos. Si alguno, o varios, de estos parámetros son función de la posición, la densidad será diferente de un punto a otro del fluido¹. La condición de equilibrio

$$\nabla p = \rho\mathbf{g} \quad (2.6)$$

vale también en este caso, pero el hecho que

¹ Esto es cierto aún si consideramos incompresible al líquido.

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z \quad (2.7)$$

implica que el gradiente de la presión debe tener en todo punto la dirección z , o sea que en el equilibrio $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$ (si así no fuera existirían componentes del gradiente de la presión que no podrían ser equilibrados por la gravedad). Por lo tanto resulta que

$$p = p(z) \quad (2.8)$$

y entonces la condición (2.6) se reduce a la forma escalar

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (2.9)$$

Claramente, esta condición se puede satisfacer sólo si la densidad es también función solamente de z :

$$\rho = \rho(z) \quad (2.10)$$

Un líquido cuya densidad depende solamente de z se dice *estratificado*. Por ejemplo, en el mar, la temperatura y la salinidad del agua dependen de z , y por lo tanto la densidad depende de z .

La condición de equilibrio (2.9) se puede cumplir cualquiera sea la estratificación de densidad (2.10). Sin embargo, no todos estos equilibrios son estables, como mostraremos ahora.

Consideremos el caso de un líquido 2 de densidad ρ_2 que descansa sobre otro líquido 1 de densidad ρ_1 . La superficie que separa ambos líquidos es horizontal y por lo tanto se satisface la condición de equilibrio. Vamos a mostrar que este equilibrio es *inestable* si $\rho_2 > \rho_1$ (como ocurre si tenemos agua sobre aceite).

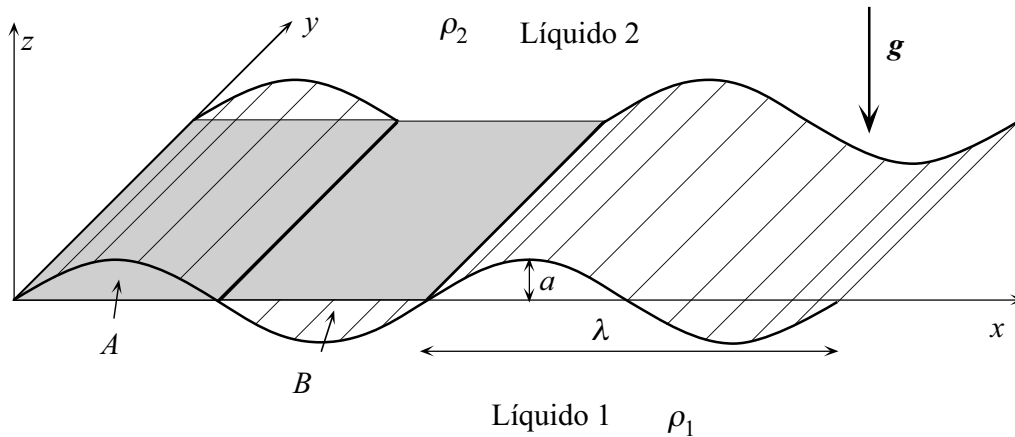


Fig. 2.1. Estabilidad del equilibrio de dos líquidos superpuestos. Por efecto de la perturbación de la interfaz, el líquido 2 que ocupaba el volumen A ha descendido, pasando a ocupar el volumen B. Recíprocamente, el líquido 1 que ocupaba el volumen B ha ascendido, pasando a ocupar el volumen A. El equilibrio es inestable si $\rho_2 > \rho_1$ pues la porción del líquido 1 que ha subido, al hallarse rodeada de un fluido más denso, experimenta una fuerza neta hacia arriba, a la vez que la porción del líquido 2 que ha bajado y está dentro de un medio menos denso está sometida a una fuerza neta hacia abajo: por lo tanto estas fuerzas tienden a acrecentar la amplitud de la perturbación.

Para ver esto, consideremos una perturbación del equilibrio, que consiste en que la superficie de separación deja de ser horizontal y toma la forma que se indica en la Fig. 2.1. Está claro que si $\rho_2 > \rho_1$, en virtud del Principio de Arquímedes, sobre la porción A del líquido 1 que se ha desplazado hacia arriba (respecto del equilibrio) actúa una fuerza neta dirigida hacia arriba. Análogamente, sobre la porción B del líquido 2, que se ha desplazado hacia abajo, actúa una fuerza neta dirigida hacia abajo.

A los fines del cálculo vamos a suponer que el desplazamiento vertical de la superficie de separación tiene la forma² ($a, \lambda = \text{cte.}$):

$$\delta z = a \sin(2\pi x / \lambda) \quad (2.11)$$

El volumen (por unidad de longitud en la dirección y) de las porciones A y B es

$$\delta V = \lambda a / \pi \quad (2.12)$$

Por lo tanto, debido a la deformación de la superficie de separación, una porción del líquido 1, que antes de la deformación ocupaba el elemento B , ha pasado a ocupar el elemento A . Viceversa, la porción del líquido 2, que antes de la deformación ocupaba el elemento A , ha pasado a ocupar el elemento B . Es decir, la perturbación consiste en el *intercambio* de los líquidos contenidos en los elementos de volumen A y B .

Como resultado de estos desplazamientos la porción del líquido 2 que ha descendido ha sufrido una disminución de su energía potencial³, dada por

$$\delta U_2 = -\frac{2}{\pi} m_2 g a = -\frac{2}{\pi} \delta V \rho_2 g a \quad (2.13)$$

mientras que la porción del líquido 1 que ha ascendido ha tenido un aumento de energía potencial igual a

$$\delta U_1 = \frac{2}{\pi} m_1 g a = \frac{2}{\pi} \delta V \rho_1 g a \quad (2.14)$$

La variación neta de energía potencial del sistema es entonces

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = -\frac{2}{\pi} \delta V g a (\rho_2 - \rho_1) \quad (2.15)$$

Claramente, se tendrá

$$\delta U < 0 \quad \text{si} \quad \rho_2 > \rho_1 \quad (2.16)$$

lo que significa que si el líquido más denso está *encima* del menos denso, el equilibrio no corresponde a un *mínimo* de energía potencial. Por lo tanto el equilibrio es *inestable* y se rompe espontáneamente: el líquido más pesado baja y el líquido más liviano sube, hasta que terminan

² Se ha supuesto esta particular forma de la perturbación al solo objeto de fijar ideas. En realidad, se puede imaginar otro tipo de perfil (triangular, rectangular, etc.) para las porciones A y B y el resultado es el mismo en lo que concierne a la estabilidad o inestabilidad del equilibrio.

³ El factor $2/\pi$ proviene del cálculo del desplazamiento del baricentro de la porción del fluido 2 que se ha desplazado.

por darse vuelta. La descripción detallada del desarrollo de la inestabilidad es muy complicada, puesto que las ecuaciones que la describen son no lineales y su evolución depende de la forma de la perturbación inicial⁴. Para una condición inicial de la forma (2.11) cuya amplitud a es infinitesimal, al comienzo de la inestabilidad la perturbación conserva la forma sinusoidal y su amplitud crece exponencialmente con el tiempo (etapa lineal). Pero cuando la magnitud de la perturbación se hace apreciable, su forma deja de ser sinusoidal y su velocidad de crecimiento alcanza un valor de saturación (etapa no lineal).

En el caso opuesto (líquido denso en el fondo y líquido menos denso arriba), tendremos

$$\delta U > 0 \quad \text{si} \quad \rho_2 < \rho_1 \quad (2.17)$$

y por lo tanto el equilibrio es *estable* pues corresponde al *mínimo* de la energía potencial. Si se perturba este estado, las fuerzas de empuje tienden a *restituir* el equilibrio. De resultados de esto hay *oscilaciones* de la superficie de separación, que se propagan en forma de ondas que se denominan *ondas internas de gravedad*.

No es difícil demostrar que la condición de estabilidad del equilibrio para un líquido con una estratificación continua de densidad es

$$\frac{d\rho}{dz} < 0 \quad (2.18)$$

Las ondas internas que se producen cuando se perturba una estratificación estable de este tipo son de gran interés en oceanografía.

Equilibrio de la atmósfera

El equilibrio de gases (y en particular, de la atmósfera) se puede estudiar también mediante la ecuación fundamental de la hidrostática (2.2) pero se debe tomar en cuenta la compresibilidad, que relaciona la densidad con la presión.

Si suponemos que el aire se comporta como un gas ideal, la ecuación de estado es

$$p = \rho RT / \mu \quad (2.19)$$

donde μ es el peso molecular y $R = 8\,3143 \dots \text{J/mol } ^\circ\text{K}$ es la constante universal de los gases. Usando la (2.19) podemos eliminar ρ de la ec. (2.6) y resulta

$$\frac{dp}{dz} = - \frac{\mu g}{R} \frac{p}{T} \quad (2.20)$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$p(z) = p(0) \exp \left(- \frac{\mu g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T(z)} \right) \quad (2.21)$$

⁴ Este tipo de inestabilidad, que hemos presentado en su forma más sencilla, es de gran importancia ya sea en la naturaleza como en el laboratorio, y se denomina *inestabilidad de Rayleigh-Taylor* o también *inestabilidad de intercambio*.

Para calcular explícitamente esta integral y así obtener $p(z)$ es necesario saber cómo varía T con la altura. Esto lo consiguen los meteorólogos enviando globos sonda con instrumentos que miden T y envían a tierra esa información. Nosotros aquí vamos a estudiar el problema postulando algunas distribuciones de temperatura simples (aunque no realísticas).

Atmósfera isoterma

Si suponemos $T = T_0 = \text{cte.}$ la (2.21) se integra de inmediato y obtenemos

$$p(z) = p(0)e^{-z/z^*} \quad \text{con} \quad z^* = \frac{RT_0}{\mu g} \quad (2.22)$$

Por lo tanto, en una atmósfera isoterma la presión (y por lo tanto la densidad) disminuye exponencialmente con la altura, y se reduce por un factor $1/e$ en la altura característica z^* . Para la atmósfera terrestre (cuya composición aproximada es 80% de N_2 y 20% O_2), si suponemos una temperatura de 300 °K, resulta $z^* \approx 8.7 \text{ km}$.

Atmósfera adiabática

El modelo de la atmósfera adiabática es útil para describir la estabilidad del equilibrio atmosférico. Corresponde a tener en cada z la temperatura, densidad y presión que adquiere una masa de aire que evoluciona adiabáticamente. Recordando la expresión de la energía interna de un gas, tenemos que para n moles de gas

$$E = \frac{f}{2} nRT = \frac{1}{\gamma - 1} nRT \quad (2.23)$$

donde f indica el número de grados de libertad de las moléculas y γ es el coeficiente adiabático

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \quad (2.24)$$

En un proceso adiabático no hay variación de entropía y por lo tanto $dE = -pdV$. Entonces si una porción de aire se eleva adiabáticamente en dz tendremos

$$\frac{dE}{dz} = \frac{1}{\gamma - 1} nR \frac{dT}{dz} = -p \frac{dV}{dz} \quad (2.25)$$

Pero en una transformación adiabática

$$pV^\gamma = \text{cte.} \quad (2.26)$$

de modo que

$$pdV = -Vdp/\gamma \quad (2.27)$$

Además, en el equilibrio

$$dp = -\rho g dz \quad (2.28)$$

luego, teniendo en cuenta que

$$V\rho = n\mu \quad (2.29)$$

resulta

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ad}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = \text{cte.} \quad (2.30)$$

Integrando la (2.30) conseguimos la variación de T con z en la forma

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT_0} z\right) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_{\text{ad}}}\right), \quad z_{\text{ad}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} z^*, \quad T_0 = T(z=0) \quad (2.31)$$

Una vez conocido $T(z)$ quedan también determinadas la presión y la densidad como

$$p(z) = p_0 (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho(z) = \rho_0 (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.32)$$

pues $p_0 = \rho_0 RT_0 / \mu$. Las fórmulas (2.31) y (2.32) muestran que una atmósfera adiabática tiene una altura finita dada por z_{ad} : a esa altura T , p y ρ se anulan.

El gradiente adiabático de temperatura se puede también escribir en términos del calor específico a presión constante, c_p . En efecto, de

$$c_p = c_v + R/\mu \quad (2.33)$$

y recordando que $c_v = du/dT$ y $u = U/\rho$, obtenemos

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ad}} = -\frac{g}{c_p} \quad (2.34)$$

Para aire seco $(dT/dz)_{\text{ad}} = -0.01 \text{ °K/m}$.

Estabilidad del equilibrio atmosférico

El gradiente adiabático representa el valor crítico de dT/dz que separa distribuciones de temperatura correspondientes a equilibrio estable, de distribuciones correspondientes a equilibrio inestable. Sea, en efecto, un perfil de temperatura tal que

$$\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ad}} \quad (2.35)$$

o sea que a una altura z determinada, el gradiente de la temperatura real es mayor que el gradiente adiabático (perfil *superadiabático*, ver la Fig. 2.2a). Esta situación es de equilibrio *estable*, pues un elemento de volumen de aire en z que se eleva adiabáticamente en dz , es más frío, y entonces más denso que el aire que lo rodea en su nueva posición. Luego recibe un empuje menor que su peso y tiende a *descender*, restituyendo así el equilibrio. Análogamente, si una perturbación lo hace descender se encuentra rodeado de aire más frío y más denso, y recibe un empuje mayor que su peso y tiende a *ascender* y volver a su posición de equilibrio.

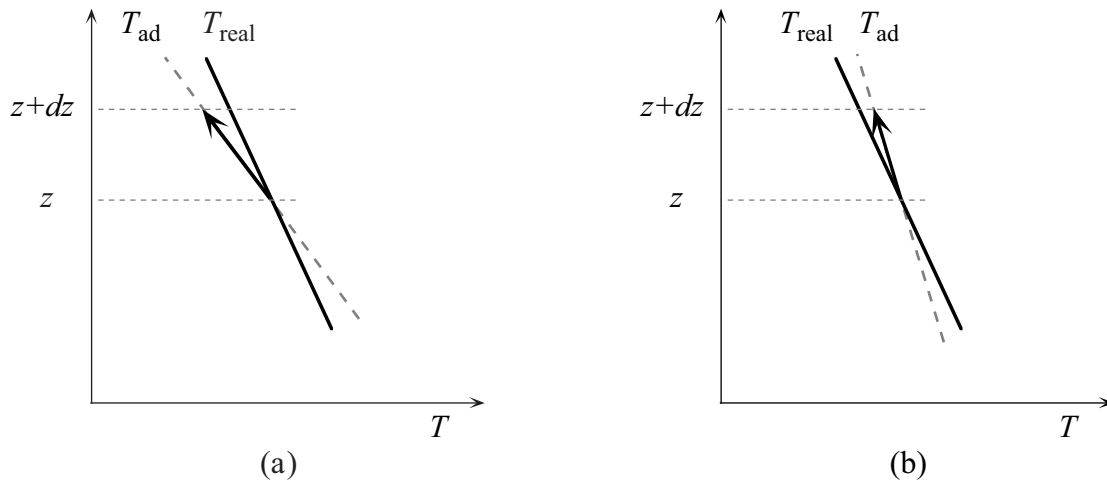


Fig. 2.2. Estabilidad del equilibrio en la atmósfera. En (a) la temperatura real disminuye con la altura más lentamente que en una atmósfera adiabática; luego una parcela de aire que se eleva adiabáticamente en dz es más fría, y entonces más densa, que el aire que la rodea; por lo tanto tiende a descender: la estratificación es estable. En (b) la temperatura real disminuye con la altura más rápidamente que en una atmósfera adiabática; por consiguiente una parcela de aire que se eleva adiabáticamente en dz es más caliente, y entonces menos densa, que el aire que la rodea; por lo tanto tiende a ascender: la estratificación es inestable.

En cambio, si la distribución de temperatura tiene un gradiente *subadiabático*, es decir si

$$\frac{dT}{dz} < \left(\frac{dT}{dz} \right)_{\text{ad}} \quad (2.36)$$

el equilibrio es inestable (Fig. 2.2b). En efecto, un elemento de volumen que por causa de alguna perturbación asciende en dz , se encuentra rodeado de aire más frío, y por ende más denso, de modo que tiende a *ascender*. Por lo tanto el equilibrio es *inestable*, y se forman *corrientes convectivas*.

La distribución de temperatura en la atmósfera varía de un lugar a otro de la Tierra, y en cada lugar determinado depende de la hora del día, de la estación, y de las condiciones meteorológicas del momento. En la Fig. 2.3a se indican (cualitativamente) perfiles medios típicos de temperatura para el verano y el invierno en latitudes intermedias. Vemos que la región (1) ($h \leq 15$ km) que constituye la *tropósfera* tiene $dT/dz < 0$. En la tropósfera se pueden dar (o no) condiciones de inestabilidad, dependiendo del valor de dT/dz . La región (2) (de 15 a 50 km de altura), que se denomina *estratósfera*, es siempre estable.

El desarrollo de inestabilidades convectivas en la tropósfera es la causa de la formación de cúmulonimbus, y el origen de las *tormentas de verano*. Esto sucede porque la intensa radiación solar en las horas más calurosas del día aumenta fuertemente la temperatura del suelo y de las capas de aire adyacentes (Fig. 2.3b). Por eso las condiciones de inestabilidad se suelen dar por la tarde, y las tormentas de verano ocurren casi siempre entonces, o en las primeras horas de la noche.

Durante el invierno, en cambio, se produce a menudo lo que se llama *inversión de temperatura*. Esto sucede en las noches despejadas, cuando debido a la radiación térmica que se pierde hacia el espacio, el suelo y las capas de aire inmediatamente por encima de él se enfrían mucho. En

esos casos, el perfil $T(z)$ tiene la forma indicada en (ii) en la Fig. 2.3b. Cuando esto ocurre, la estratificación del aire cercano al suelo es sumamente estable. Si el aire es muy húmedo se produce neblina en la madrugada, y el *smog* no se eleva y difunde, sino que permanece a baja altura y cerca del suelo.

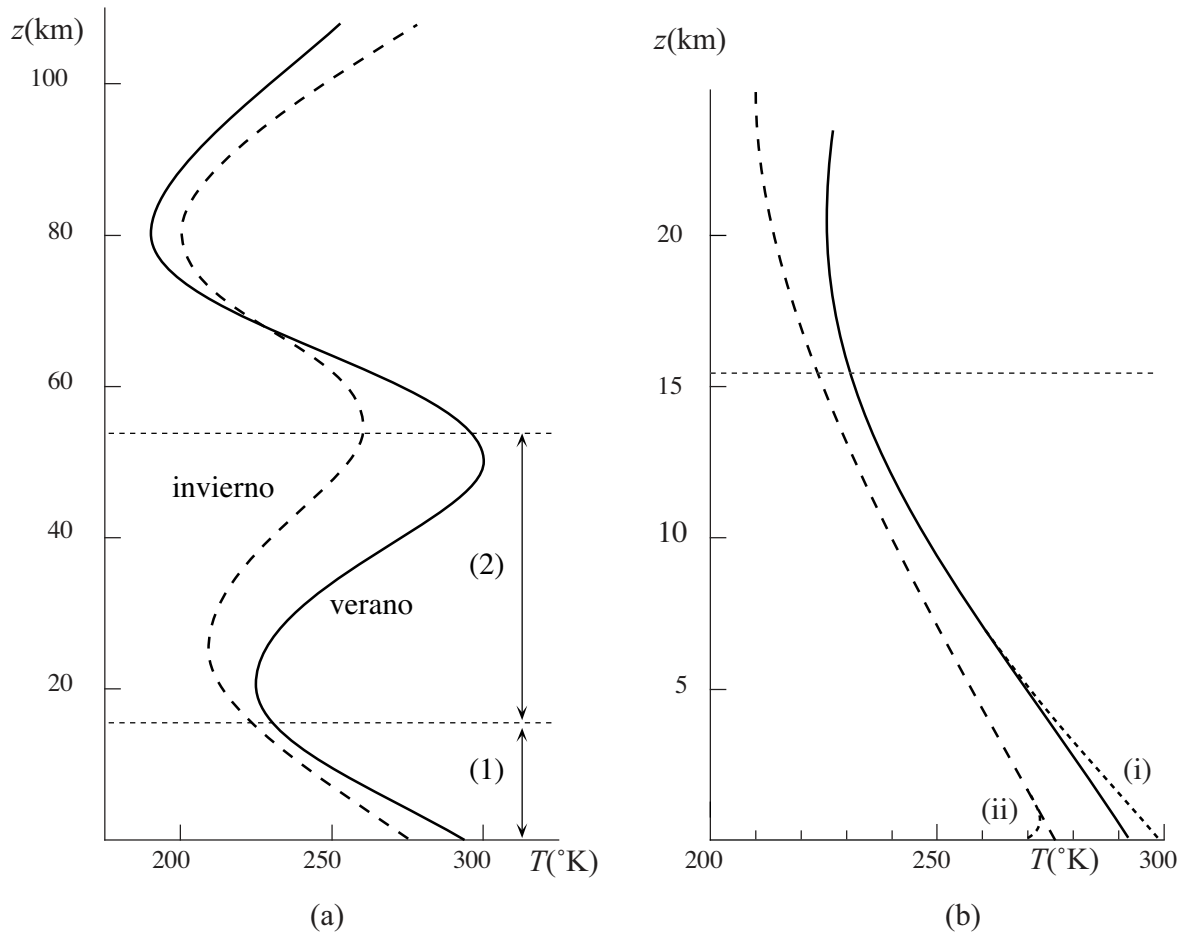


Fig. 2.3. (a) Perfiles medios típicos de temperatura para el verano y el invierno para una latitud intermedia. En la tropósfera (región (1), $h \leq 15$ km) se tiene $dT/dz < 0$ y se pueden dar (o no) condiciones de inestabilidad. En cambio la estratósfera (región (2), de 15 a 50 km de altura) es siempre estable. (b) Detalle de la tropósfera. En verano la intensa radiación solar en las horas más calurosas calienta el suelo y las capas más bajas de la atmósfera produciendo condiciones de inestabilidad (curva (i)) que dan lugar a corrientes convectivas, formación de cumulonimbus y tormentas hacia el final del día. En las noches despejadas de invierno, el fuerte enfriamiento del suelo y las capas de aire más próximas a él debido a la radiación térmica que se pierde en el espacio produce en la madrugada estratificaciones sumamente estables (curva (ii)) denominadas capas de inversión, que suelen estar asociadas con neblinas matinales.

Condiciones de contorno en interfases

Se denomina *interfase* el contorno que separa dos fases diferentes (por ej. una fase sólida de una fase líquida o gaseosa), e *interfaz* el contorno que separa dos medios de diferente constitución (por ej., dos líquidos no miscibles), en una misma fase.

Las condiciones que se plantean en la superficie que separa un fluido de otro fluido o un fluido de un sólido requieren especial consideración, ya sea porque afectan el movimiento de los fluidos, como también porque dan lugar a varios fenómenos importantes en situaciones estáticas. Nótese, en primer lugar, que si un elemento de volumen es atravesado por un tal contorno, por lo general no es cierto que la diferencia entre las magnitudes de la fuerza de superficie sobre la cara que se encuentra de un lado del contorno y la fuerza sobre la cara opuesta escala como la distancia entre las caras.

El transporte de energía y de cantidad de movimiento a través del contorno entre dos medios se realiza tanto por migración de moléculas como por efecto de las fuerzas intermoleculares, de la misma manera que a través de una superficie en el seno de un fluido homogéneo. Por consiguiente, magnitudes como la temperatura y la velocidad tienden a tomar rápidamente, o a mantener, el mismo valor de ambos lados del contorno. Pero no ocurre necesariamente lo mismo con el transporte de masa, si uno o ambos medios están constituidos por materia condensada (sólidos o líquidos). Muchas veces, las diferencias de composición química (tipo de moléculas) y de densidad entre los medios separados por el contorno se reducen con extrema lentitud. En tales casos, esas diferencias son duraderas y casi permanente. Consideremos, por ejemplo, una interfase líquido-sólido: las moléculas del sólido están ligadas a la red cristalina, y aunque algunas moléculas del líquido penetran ocasionalmente en el campo de fuerzas de las moléculas del sólido, se limitan a transferir energía (calor) y cantidad de movimiento, y regresan al líquido sin producir cambios en la composición y/o la densidad de los medios.

En base a la Hipótesis del continuo, la Mecánica de Fluidos trata estos contornos como superficies matemáticas ideales, donde las propiedades del fluido presentan discontinuidades y las caracteriza por ciertas propiedades macroscópicas. Tales propiedades se suponen conocidas, sea como datos experimentales, sea como resultados de teorías microscópicas.

Nosotros no limitaremos al más vistoso e importante de los efectos mecánicos que aparecen en la escala macroscópica de resultados de los fenómenos interfaciales: la *tensión superficial*.

Tensión superficial

Todo el mundo ha observado alguna vez gotas líquidas en un medio gaseoso y ha visto la forma curva que asume la superficie libre de un líquido en reposo cerca de las paredes del recipiente que lo contiene. Tales observaciones no se pueden explicar mediante la condición de equilibrio hidrostático (2.6), pues es evidente que según la (2.6), las superficies de igual presión y densidad (que deben ser paralelas a la interfaz en su entorno) son siempre perpendiculares a la dirección de la gravedad.

Es fácil mostrar que si la presión fuese la única fuerza de superficie presente, no sólo toda interfase debería ser plana, sino que tampoco podrían ocurrir saltos de presión a través de una interfase, contrariamente a lo que muestra el conocido fenómeno de la capilaridad.

Para ello, consideremos un elemento de volumen chato atravesado por la interfaz entre dos fluidos en reposo (Fig. 2.4). El espesor del elemento es δh y sus caras 1 y 2 tienen un área δl^2 . Supongamos que exista un salto de presión $p_2 - p_1$ a través de la interfaz. Debido a esa diferencia de presión habrá una fuerza neta debida a los esfuerzos sobre las caras 1 y 2, cuya magnitud es

$$(p_2 - p_1)\delta l^2 \quad (2.37)$$

y por lo tanto es proporcional a δl^2 y no a δh . Por otra parte, la fuerza neta sobre la superficie lateral debida a la presión debe ser proporcional a la superficie lateral, que escala como $\delta/\delta h$. Por consiguiente, prescindiendo de toda consideración acerca de la dirección de estas fuerzas, está claro que son de orden distinto y no se pueden compensar entre sí. Es evidente que tampoco ninguna fuerza de volumen (que es proporcional a $\delta V = \delta h \delta l^2$) puede compensar la fuerza dada por (2.37). Luego, si no existieran otras fuerzas de superficie que las debidas a la presión, deberíamos tener $p_2 = p_1$, de modo que la presión sería continua a través de la interfaz.

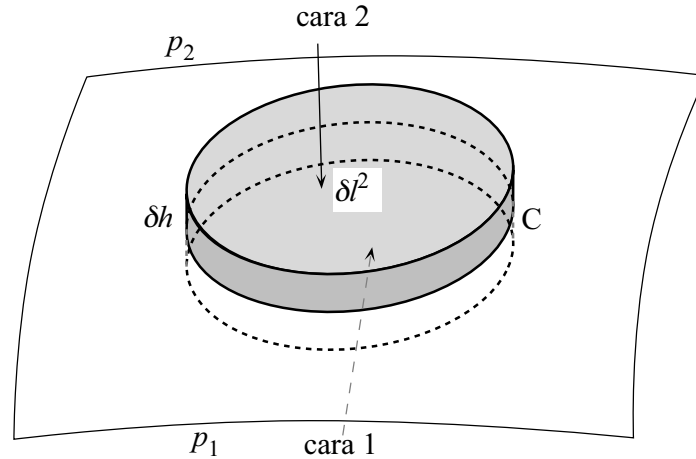


Fig. 2.4. Elemento de fluido chato atravesado por una interfaz. La fuerza neta debido a la diferencia de presión entre la cara 2 y la cara 1 escala como δl^2 y la fuerza neta sobre la cara lateral debida a la presión escala como $\delta l \delta h$. Por lo tanto no se pueden equilibrar. Se concluye que para que sea posible el equilibrio, la interfase debe ser sede de fuerzas que se ejercen sobre la curva C, que es la intersección de la interfaz con la cara lateral.

Por otra parte, en el *seno* de los dos fluidos (recordemos que están en reposo) no pueden aparecer otras fuerzas que no sean las debidas a la presión. Luego una diferencia de presión, si es que existe, tiene que ser compensada por otras fuerzas, que hasta ahora no habíamos considerado. El asiento de esas nuevas fuerzas no puede ser otro que *la interfaz misma*, o sea la abrupta transición entre dos fluidos de distintas propiedades. Por lo tanto se deben ejercer sobre la superficie lateral, que es la única atravesada por la interfaz, más precisamente sobre la curva C que resulta de la intersección de la superficie lateral con la interfaz. La fuerza que se ejerce sobre un elemento de línea dl de C debe ser *normal* a la superficie lateral, es decir debe estar en el plano tangente a la interfaz, y ser ortogonal a dl (esto último es necesario por la condición de reposo). Deben cumplir, además, las siguientes condiciones:

- (a) Su resultante sobre un elemento extremadamente chato atravesado por la interfaz debe ser proporcional al área frontal δl^2 del elemento, es decir, no debe tender a cero con δh .
- (b) Su resultante sobre el mismo elemento debe tener dirección opuesta a la resultante (2.37).

Esta segunda exigencia, junto con la condición que las fuerzas deben ser paralelas a la interfaz, implica que sólo puede darse $p_2 \neq p_1$ si hay *curvatura* de la superficie.

Todo esto equivale a suponer que la interfaz entre dos medios se comporta como una *membrana de espesor infinitesimal*, sede de fuerzas finitas, tangentes a su superficie. Por lo tanto la interfaz posee una *tensión superficial* cuya magnitud está determinada por un coeficiente γ , de modo tal que:

A través de todo elemento lineal dl apoyado sobre una interfaz, la parte situada de un lado del elemento ejerce sobre la parte que está del otro lado una fuerza dt , cuya magnitud es proporcional a dl y es independiente de la orientación del elemento. La fuerza dt es tangente a la interfaz y normal a dl , y se expresa como

$$dt = \gamma dl n \quad (2.38)$$

donde n es normal a dl y paralela a la interfaz, y su sentido va desde la porción sobre la cual es ejercida la fuerza hacia la porción que la ejerce. El factor γ que aparece en la (2.38) se denomina *coeficiente de tensión superficial*⁵, y le daremos signo positivo si la fuerza t_{dl} es atractiva. El coeficiente de tensión superficial es una propiedad de la interfase, es decir, de la naturaleza de los dos medios presentes de ambos lados de la misma, y de su estado termodinámico.

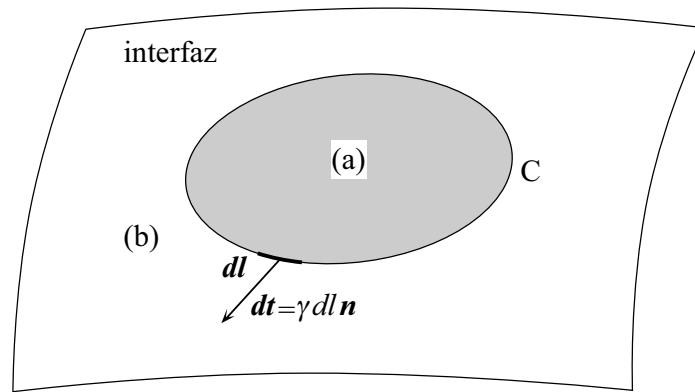


Fig. 2.5. Mostramos la misma situación que en la Fig. 2.4, pero para mayor claridad hemos dibujado solamente la intersección entre el elemento de volumen y la interfaz. A través de cada elemento dl de la curva C, la porción (b) de la interfaz ejerce sobre la porción (a) una fuerza dt que es tangente a la interfaz y normal a dl .

En la Fig. 2.5 se ha representado la fuerza dt ejercida por la porción (b) de la interfaz sobre la porción (a). En este caso, γ es positivo, puesto que dt tiene el mismo sentido que n . Debido a la tensión superficial, para aumentar en δA el área de un elemento de superficie de la interfaz es preciso realizar un trabajo

$$\delta W = \gamma \delta A \quad (2.39)$$

y por lo tanto, habrá una variación $\gamma \delta A$ de la energía del sistema (que incluye la interfaz). Para tener en cuenta esto debemos agregar un término de *energía superficial*, de la forma γA , a los términos que representan las energías de volumen de los medios (1) y (2).

Del punto de vista de la termodinámica, el trabajo realizado al deformar la interfaz se almacena en el sistema como energía libre de Helmholtz. La energía libre de Helmholtz es una función de estado termodinámica dada, por unidad de masa, por

$$f(T, v) = e - Ts \quad (2.40)$$

⁵ Las dimensiones del coeficiente de tensión superficial son las de fuerza/longitud.

donde T es la temperatura, v el volumen específico, y e , s la energía interna y la entropía por unidad de masa. La energía libre total F del sistema integrado por dos medios uniformes de densidades ρ_1 , ρ_2 , y volúmenes V_1 , V_2 , con una interfase de área A , tiene entonces la forma

$$F = \rho_1 V_1 f_1 + \rho_2 V_2 f_2 + \gamma A \quad (2.41)$$

donde f_1 , f_2 son las energías libres por unidad de masa de los dos medios. Luego, en un proceso en el cual las densidades ρ_1 , ρ_2 y la temperatura común T se mantienen constantes, el trabajo hecho sobre el sistema es

$$\delta W = \delta F = \gamma \delta A \quad (2.42)$$

Vemos entonces que γ se puede interpretar también como una energía por unidad de área.

Contorno de equilibrio entre dos fluidos en reposo

Vamos a suponer que γ es uniforme sobre la interfaz. En primer término, mostraremos que una superficie curva en estado de tensión ejerce un esfuerzo normal. Para ello consideramos el entorno de un punto O de la interfaz (ver Fig. 2.6). Elegimos O como origen de un sistema de coordenadas cuyo eje z es normal a la interfaz. Sea $z = \zeta(x, y)$ la ecuación de la interfaz; entonces $\zeta(0, 0) = 0$ y

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_O = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_O = 0 \quad (2.43)$$

puesto que la interfaz es tangente al plano $z = 0$. Supondremos que en el entorno de O , la interfaz se puede aproximar por una superficie de segundo orden; geométricamente, esto significa que en O , la superficie está caracterizada por dos radios de curvatura, R_x , R_y , correspondientes cada uno a las curvas que resultan de intersecar la superficie con dos planos ortogonales que contienen al eje z , y que podemos considerar como los planos (x, z) e (y, z) .

Es un resultado bien conocido del análisis matemático que el radio de curvatura de una curva plana $y = y(x)$, está dado por

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (2.44)$$

donde las primas indican derivación respecto de x . Como en nuestro caso las derivadas primeras son nulas, los radios de curvatura en los planos (x, z) e (y, z) son, respectivamente

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad (2.45)$$

Evaluemos ahora la resultante $d\mathbf{F}'$ de las fuerzas ejercidas por la tensión superficial sobre dos elementos de línea dy paralelos al eje y , colocados a una distancia $dx/2$ de O (ver Fig. 2.5). Las componentes x se compensan entre sí, pero quedan las componentes según z que se suman dando

$$dF'_z = 2\gamma dy \sin \theta = \gamma dx dy / R_x = \gamma dx dy (\partial^2 \zeta / \partial x^2) \quad (2.46)$$

puesto que $\sin\theta \approx \theta \approx dx/2R_x$. Análogo valor se encuentra si calculamos la resultante $d\mathbf{F}''$ de las fuerzas ejercidas por la tensión sobre dos elementos de línea dx , paralelos al eje x , y colocados a $dy/2$ de O , pero con $\partial^2\xi/\partial y^2$ en lugar de $\partial^2\xi/\partial x^2$.

Por lo tanto, la resultante de las fuerzas de tensión superficial que se ejercen sobre el elemento de superficie $dx dy$ de la interfaz, equivale a un esfuerzo normal a la interfaz (o lo que es lo mismo, a una presión) dado por:

$$p_s = \frac{dF'_z + dF''_z}{dx dy} = \gamma \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} \right) = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (2.47)$$

De la teoría de las superficies de segundo orden, se sabe que la suma entre paréntesis es independiente de la elección de los dos planos ortogonales: éstos se pueden elegir arbitrariamente, pero habitualmente se eligen de modo que R_x , R_y sean los radios de curvatura *principales*. Por supuesto, R_x , R_y se deben tomar *con sus signos* (dados por los signos de las derivadas segundas). En todos los casos, las fuerzas que contribuyen a la presión equivalente sobre la interfaz están dirigidas hacia el respectivo centro de curvatura.

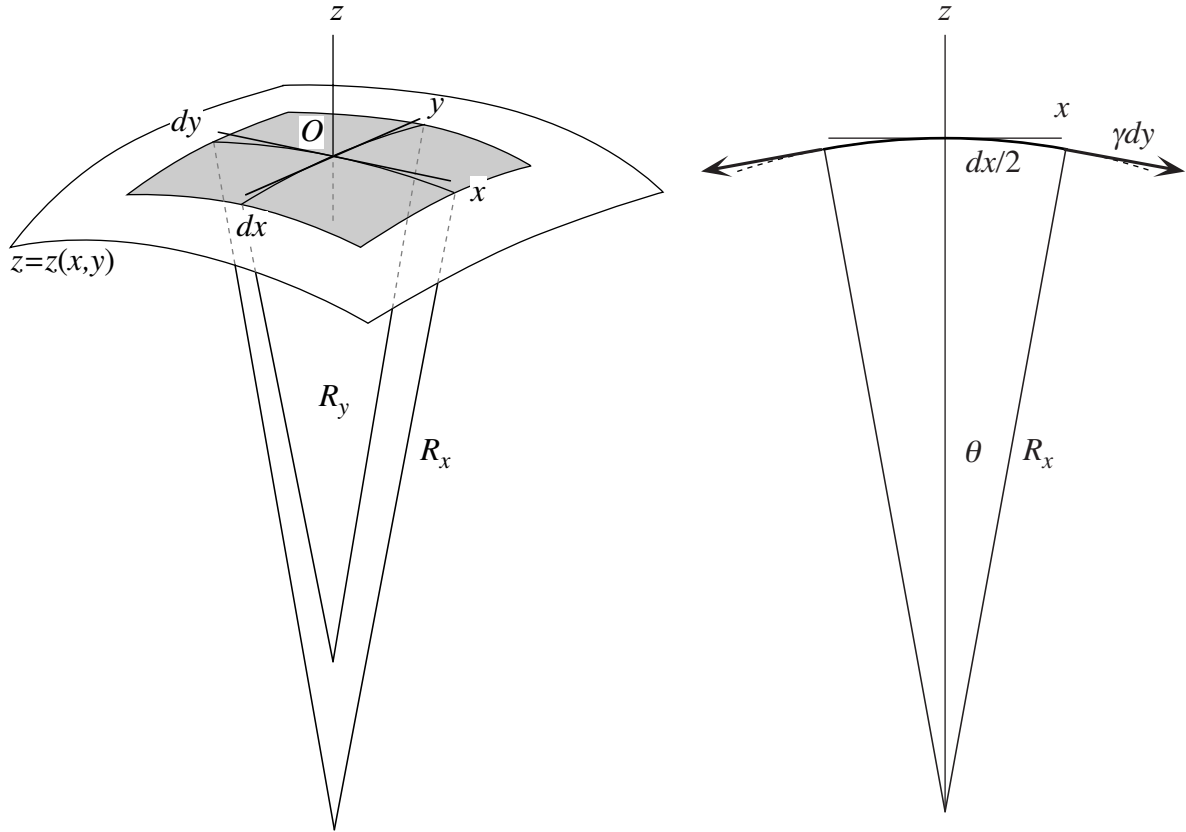


Fig. 2.6. Las fuerzas que actúan sobre el elemento de superficie $dx dy$ de la interfaz tienen como resultante una fuerza neta normal a la interfaz, que se puede interpretar como debida a una presión de superficie p_s . La magnitud y el signo de p_s dependen de la curvatura de la interfaz.

El esfuerzo normal p_s se denomina *presión de superficie*. En el equilibrio, p_s debe balancear la diferencia entre las presiones ejercidas por los fluidos a ambos lados, dada por:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_s = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (2.48)$$

de modo que la presión de superficie se suma a la presión del fluido dentro del cual se encuentra el centro de curvatura más próximo. La (2.48) se denomina *fórmula de Laplace*.

Forma de una gota líquida

Un caso interesante es el de un pequeño volumen de fluido completamente rodeado por otro (gota o burbuja). Si el volumen es muy pequeño, los efectos de la gravedad (como veremos en seguida) se pueden despreciar y tanto p_1 como p_2 son uniformes. Luego el salto de presión es el mismo sobre toda la interfaz, el radio de curvatura es constante y la única forma admisible es la esfera. A este resultado también se llega por la condición de mínima energía: dado que γ es la energía de superficie por unidad de área, la mínima energía se tiene para una gota esférica, pues tiene el área mínima para el volumen dado.

Veamos bajo que condición se puede despreciar la gravedad. La diferencia de presión debida a la gravedad entre los polos de la esfera es $2\rho gR$, donde R es el radio de la esfera. Esta diferencia debe ser despreciable frente a $2\gamma / R$ lo cual conduce ($R_x = R_y = R$) a la condición

$$R \ll \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (2.49)$$

Para una gota de agua en aire, resulta $R \ll 0.27$ cm.

Línea de contacto triple y ángulo de contacto

Por lo general, toda superficie de contacto entre dos fluidos está limitada por una línea a lo largo de la cual están en contacto *tres* medios (uno de ellos puede ser un sólido). La *línea de contacto triple* está sujeta a la tensión de tres interfases diferentes. En el equilibrio, la resultante de estas tres tensiones sobre un elemento dl de la línea de contacto debe tener componente nula en toda dirección a lo largo de la cual la línea de contacto se puede desplazar.

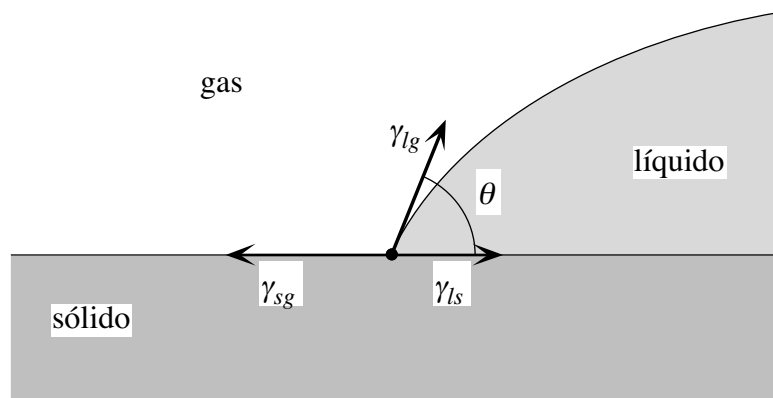


Fig. 2.7. Equilibrio de una línea de contacto triple entre un sólido (1) un gas (2) y un líquido (3). Se han indicado las fuerzas por unidad de longitud de la línea de contacto triple suponiendo que todos los coeficientes de tensión interfacial son positivos.

En la Fig. 2.7 se representa una línea de contacto triple entre un sólido, un gas y un líquido (piense, concretamente, en una gota líquida que descansa sobre una superficie sólida plana y está

rodeada de aire). Claramente, la línea de contacto está obligada a desplazarse sobre la superficie del sólido. En el equilibrio, entonces, la resultante de las tensiones sobre un elemento dl de la línea de contacto debe tener componente nula en toda dirección del plano superficial del sólido. De resultados de esta condición, el *ángulo de contacto* θ queda determinado por los valores de γ , de acuerdo con

$$\gamma_{ls} + \gamma_{lg} \cos \theta = \gamma_{sg} \quad (2.50)$$

Dado que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, la condición (2.50) se puede satisfacer sólo si

$$\gamma_{sg} + \gamma_{lg} \geq \gamma_{ls} \geq \gamma_{sg} - \gamma_{lg} \quad (2.51)$$

Si se cumple que $\gamma_{ls} \geq \gamma_{sg} + \gamma_{lg}$ (veremos que γ_{sg} y γ_{lg} son seguramente positivos) tendremos $\theta = \pi$, esto es, el líquido no moja al sólido y tiende a evitar estar en contacto con él. Esto ocurre porque es energéticamente favorable reducir el área de la interfaz líquido-sólido aún a pesar que esto implica incrementar el área de las interfases sólido-gas y líquido-gas. En este caso la gota descansa sobre la superficie sólida apoyándose solo en un punto.

En cambio si $\gamma_{ls} \leq \gamma_{sg} - \gamma_{lg}$, tendremos $\theta = 0$, esto es, el líquido moja perfectamente al sólido y tiende a extenderse sobre él para cubrirlo por completo. Sucede así porque es energéticamente favorable aumentar el área de la interfaz líquido-sólido y disminuir el área de la interfaz sólido-gas, aún a pesar que esto implica aumentar el área de la interfaz líquido-gas.

Cuanto menor es θ , mayor es el grado de “mojabilidad”; para el agua pura sobre la mayoría de los sólidos resulta $\theta < \pi/2$, a diferencia del mercurio para el cual generalmente $\theta > \pi/2$.

Características de los coeficientes de tensión superficial

La tensión superficial se origina en las fuerzas atractivas intermoleculares. Consideremos una molécula en el seno del fluido. En promedio, la resultante de las fuerzas de interacción que las moléculas vecinas ejercen sobre ella es nula. Por lo tanto, un cambio de posición de nuestra molécula no implica trabajo, y en consecuencia la energía libre del sistema no varía. Consideremos ahora una molécula que está en el entorno de la interfase (a una distancia menor o del orden del alcance de las fuerzas intermoleculares, esto es, unos 10^{-7} cm). En este caso, debido a la distinta naturaleza y concentración de las moléculas de uno y otro lado de la interfase, la resultante de las fuerzas de interacción que se ejercen sobre ella *no es nula*. Por lo tanto un cambio de posición de nuestra molécula *requiere trabajo*, y por consiguiente implica una variación de la energía libre del sistema. De resultados de esto, la energía total de cada fluido es función del número de moléculas en el entorno de la interfase, que a su vez es proporcional al área de ésta (para una dada densidad, y supuesto fijo el alcance de las fuerzas intermoleculares).

En base a estos conceptos, es fácil ver que γ es positivo cuando uno de los dos medios es líquido o sólido, y el otro un gas. En efecto, las moléculas de un líquido están sujetas a fuerzas atractivas ejercidas por las moléculas vecinas. Estas fuerzas se equilibran en promedio para las moléculas que están lejos de la interfaz, como ya dijimos. Pero a las moléculas que están cerca de la interfaz con el gas le faltan vecinos del lado del gas, y entonces experimentan una fuerza neta de cohesión, que tiende a alejarla de la interfaz. Por lo tanto las moléculas del líquido tienden a moverse hacia adentro, lo que es equivalente a decir que la interfaz entre un líquido y un gas se comporta como una membrana elástica en tensión, que tiende a contraerse. Si no hay otras fuer-

zas que se opongan a esta tendencia, el área de la interfaz toma el valor mínimo compatible con el volumen del líquido. Esta es la razón por la cual las gotas líquidas pequeñas son esféricas.

En cambio, en una interfase líquido-líquido, se puede dar también la situación opuesta, en la cual $\gamma < 0$. En este caso, la interfase tiende a extenderse. Esta situación es claramente inestable y conduce a una mezcla de los dos líquidos.

Los casos de interfases cerradas sólido-gas o sólido-líquido no tienen interés en este contexto, debido a que el contorno del sólido es indeformable. Vimos ya, en cambio, que tienen especial interés los casos en los cuales hay *líneas de contacto triples*, que involucran dos fluidos y un sólido (además, obviamente, de las que involucran tres fluidos).

Para la interfaz entre aire y agua pura a 15 °C, se tiene $\gamma = 73.5 \text{ dyn/cm}$ ($= \text{erg/cm}^2$). Para aire-metal líquido γ es mucho mayor, como es de esperar en vista de la gran densidad de los metales líquidos ($\gamma = 780 \text{ dyn/cm}$ para mercurio-aire). Para aceite-agua γ es positivo, pero menor que para agua-aire (por este motivo una gota de aceite depositada sobre la superficie del agua se extiende enormemente, formando una película extremadamente delgada).

El coeficiente de tensión superficial es función de la temperatura. Una relación empírica que describe con razonable aproximación el comportamiento de muchas superficies líquidas es la ecuación de Eötvös

$$\gamma = k \frac{T_c - T}{v_m^{2/3}} \quad (2.52)$$

donde v_m es el volumen molar del líquido, T_c la temperatura crítica ($T_c = 647 \text{ °K}$ para el agua) y k es una constante que se determina experimentalmente. El volumen molar de un líquido depende de la temperatura, pero no muy fuertemente, y depende muy débilmente de la presión a que está sometido el líquido cuya superficie estamos considerando. La ecuación de Eötvös predice que γ disminuye con la temperatura hasta que se anula a la temperatura crítica (donde un líquido y su vapor se confunden y desaparece la interfaz entre ambos).

Como ya se dijo, las fuerzas de tensión superficial dependen de lo que hay del otro lado de la superficie del líquido, pues *siempre* el espacio más allá de la superficie está ocupado por algún otro medio⁶, cuyas moléculas interactúan con las del líquido que están cerca de la interfaz. Pero cuando el medio que rodea al líquido es un gas o un vapor, su influencia es escasa, debido a la baja densidad de sus moléculas. Por lo tanto en estos casos se puede suponer con buena aproximación que el coeficiente de tensión interfacial depende solamente del líquido.

No es así, en cambio, cuando un líquido está en contacto con un sólido (por ejemplo, con las paredes del recipiente que lo contiene), o con otro líquido. En estos casos, debido a la alta densidad de estos medios, su interacción con el líquido a través de la interfaz es muy intensa. Dependiendo de la naturaleza de las sustancias en contacto, además, esta interacción puede ser atractiva, o por el contrario, repulsiva. Corresponde también puntualizar que, debido al corto alcance de las fuerzas intermoleculares, la presencia de películas delgadas (incluso monomoleculares) de contaminantes puede tener un efecto muy pronunciado. Este hecho tiene una enorme importancia práctica.

Debido a esto, podemos modificar según nos convenga los efectos de tensión interfacial, ya sea disolviendo en el líquido sustancias *tensioactivas*, como jabones y detergentes, ya sea recu-

⁶ En última instancia, por el vapor del mismo líquido.

briendo las superficies de sólidos con grasas y aceites. Los jabones y detergentes al disolverse en el agua disminuyen la tensión superficial de ésta y en consecuencia facilitan que moje y disuelva otras sustancias, y también facilitan la formación de espuma. Por el contrario, las grasas y aceites tienden a repeler el agua e impiden que los objetos se mojen.

La contaminación de las aguas con jabones y detergentes (que siempre están presentes en las aguas servidas) es nociva para muchos organismos grandes y pequeños que subsisten gracias a los efectos de la tensión interfacial. Hay insectos que caminan sobre el agua gracias a la tensión superficial, y otros que al sumergirse llevan consigo una burbuja de aire que les permite respirar. Muchas aves y mamíferos acuáticos evitan que el agua impregne su plumaje o pelambre gracias a las películas de aceite que los recubren.

Las circunstancias bajo las cuales la tensión superficial tiene efectos mecánicos significativos depende de la magnitud de las otras fuerzas presentes en el sistema, y deben ser examinadas caso por caso. En general, son importantes en los sistemas donde las áreas de las interfases son grandes para su volumen. Muchos de estos sistemas revisten gran importancia tecnológica o práctica. Las emulsiones (como la mayonesa) son un ejemplo de este tipo. Otro ejemplo lo constituyen los flujos en medios porosos (por ejemplo el flujo de hidrocarburos líquidos en yacimientos). También son importantes en sistemas en los que las otras fuerzas en juego son pequeñas, como ocurre en muchas situaciones de interés biológico.

Cohesión de líquidos

Debido a las fuerzas intermoleculares las partes de un líquido tienden a mantenerse unidas. Es así que una columna líquida resiste esfuerzos de *tracción*. Esta propiedad se denomina *cohesión*, y está relacionada con el concepto de tensión superficial. La cohesión del agua es fundamental para explicar el ascenso de la savia en árboles muy altos.

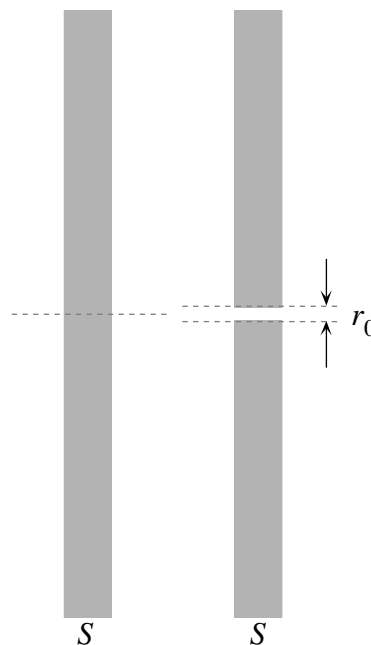


Fig. 2.8. Para romper una columna líquida es preciso separar las dos partes a una distancia mayor que el alcance de las fuerzas intermoleculares.

Sea, por ejemplo una columna⁷ de sección S , como se indica en la Fig. 2.8. Para romperla en dos partes es necesario conseguir de alguna forma (que por el momento no nos interesa) que las dos partes se separen hasta una distancia mayor que el rango de las fuerzas intermoleculares, digamos una distancia del orden de r_0 (Capítulo 1). En este proceso se crean *dos* superficies, cada una de área igual a S , es decir $2S$ en total. Esto implica un trabajo dado por

$$W = 2\gamma S \quad (2.53)$$

Este trabajo debe ser igual al trabajo de la fuerza de tracción F que es preciso ejercer para separar las dos partes de la columna, que vale (en orden de magnitud)

$$W = F r_0 \quad (2.54)$$

Por lo tanto, el esfuerzo de tracción (fuerza por unidad de área) debe valer

$$p_0 = \frac{F}{S} = \frac{2\gamma}{r_0} \quad (2.55)$$

La cantidad p_0 , que recibe el nombre de *presión intrínseca* o *presión de Laplace*, es el esfuerzo necesario para romper la columna líquida y da la medida de su cohesión. Para agua a 25 °C, con $r_0 \approx 10^{-8}$ cm, resulta $p_0 \approx 140$ atmósferas⁸.

No es fácil medir la cohesión de líquidos, ya que el efecto es influenciado por la presencia de contaminantes, tanto en el líquido como sobre la superficie del tubo que lo contiene. Los mejores resultados se han obtenido mediante tubos rotantes, en los cuales la fuerza centrífuga ejerce la tracción sobre el líquido. Con esos dispositivos, usando agua común sin ninguna precaución especial en cuanto a la limpieza, se obtienen valores entre 3 y 10 atmósferas. Con precauciones especiales de limpieza se han obtenido valores 10 veces mayores.

⁷ La columna líquida se supone contenida en un tubo delgado o un capilar.

⁸ Por lo tanto una columna de agua de unos 1500 m de altura podría sostener su propio peso sin romperse.

3 CINEMÁTICA

Campo de velocidad

En el instante t , la velocidad \mathbf{u} de cada elemento fluido centrado en (x, y, z) es una función vectorial $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, que también indicaremos en forma compacta con $\mathbf{u}(x_i, t)$ o $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$). El campo de velocidad es un *campo vectorial*, así como $\rho(x_i, t)$ es un campo escalar, $\sigma(x_i, t)$ es un campo tensorial, etc..

Ejemplos sencillos de campos de velocidad son el de un fluido en reposo: $\mathbf{u}(x_i, t) = 0$, y el de un fluido que escurre con velocidad uniforme: $\mathbf{u}(x_i, t) = \mathbf{u}_0 = \text{cte.}$ Más interesante es el campo de velocidad de un fluido que rota con velocidad angular uniforme $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje \mathbf{e}_ω (ver Fig. 3.1). Este campo está dado por

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.1)$$

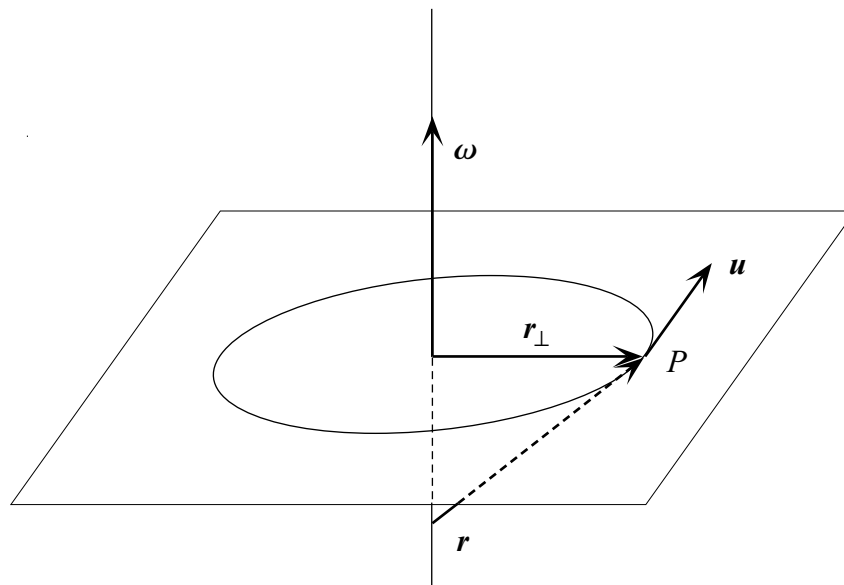


Fig. 3.1. Fluido que rota con velocidad angular uniforme alrededor de un eje fijo.

Si el eje z coincide con el eje de rotación tenemos $\boldsymbol{\omega} \equiv (0, 0, \omega)$ y las componentes del campo de velocidad se escriben

$$u_x = -\omega y \quad , \quad u_y = \omega x \quad , \quad u_z = 0 \quad (3.2)$$

de donde resulta

$$|\mathbf{u}| = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r_\perp \quad (3.3)$$

En la (3.3),

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{e}_\omega (\mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{r}) \quad (3.4)$$

es la parte de \mathbf{r} que es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 3.1). Este campo coincide con el de un cuerpo rígido en rotación y tiene la propiedad esencial que la distancia entre dos puntos cualesquiera \mathbf{r}_1 ,

\mathbf{r}_2 del fluido se mantiene constante. En efecto, las respectivas velocidades son $\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1$, $\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$, y la variación en el tiempo de la diferencia $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ está dada por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.5)$$

Pero $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es perpendicular a \mathbf{r} , luego su módulo $|\mathbf{r}|$ no varía. Esto último también puede verse calculando

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = 2\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (3.6)$$

Nótese que $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ es la velocidad del punto 2 respecto del punto 1, y de acuerdo con lo visto está dada por $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Luego todo eje \mathbf{e}'_ω paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ se puede con igual derecho elegir como eje de rotación; sin embargo, respecto del eje originario \mathbf{e}_ω , el nuevo eje está girando. Por ello, si bien ambos ejes son equivalentes del punto de vista cinemático, no lo son del punto de vista dinámico, pues las fuerzas ficticias que aparecen en uno son diferentes de las del otro.

Distinguiremos entre campos de velocidad *estacionarios* y *no estacionarios*. Un campo se dice estacionario cuando la magnitud, en nuestro caso \mathbf{u} , es sólo función de la posición, pero no del tiempo, es decir cuando $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$. Un campo de velocidad es estacionario si al medir la velocidad en un determinado punto, ésta se mantiene constante en el tiempo (quedando claro que \mathbf{u} puede ser diferente de punto a punto). El campo de rotación que acabamos de describir es estacionario si $d\boldsymbol{\omega} / dt = 0$, y es fácil imaginar otros ejemplos de campos estacionarios.

Elementos materiales

Las líneas y las superficies formadas por puntos, cada uno de los cuales se desplaza con la velocidad del fluido (exactamente como si fuese arrastrado por el fluido), se denominan *líneas* y *superficies materiales*. También se denomina *volumen material* al volumen limitado por una superficie material.

Esta denominación se aplica tanto a elementos finitos como a elementos infinitesimales (sea de línea material, como de superficie y de volumen materiales). Está claro que, cualquiera sea el campo de velocidad, un dado volumen material contiene una masa *constante* de fluido, pues al moverse todos los puntos de la superficie material que lo limita con la misma velocidad del fluido, éste no la puede atravesar. Un *punto material* se puede imaginar como un volumen material infinitamente pequeño.

Líneas de corriente y trayectorias

Dado un campo de velocidad $\mathbf{u}(x_i, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, se denominan *líneas de corriente* (o *líneas de campo*) a las líneas que en todos sus puntos tienen por tangente a \mathbf{u} , en un instante determinado t . Si el campo no es estacionario, la configuración de líneas de corriente varía de instante a instante, pero si el campo es estacionario dicha configuración se mantiene constante en el tiempo.

Se denominan *trayectorias* a las curvas $\mathbf{r}(t)$ formadas por las distintas posiciones que toma un *punto material* (o volumen material infinitesimal) con el transcurrir del tiempo. Por lo tanto, cada trayectoria está asociada a un determinado punto material. Evidentemente, la trayectoria asociada con un cierto punto material P tiene por tangente en cada uno de sus puntos \mathbf{r} la veloci-

dad $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_P(\mathbf{r}))$ que dicho punto material tiene en el instante¹ $t_P(\mathbf{r})$ cuando pasa por \mathbf{r} . En general, una trayectoria *no coincide* con una línea de corriente, pero sí coincide en el caso de campos estacionarios, pues en este caso $\mathbf{u}(x_i, t_P(x_i)) = \mathbf{u}(x_i)$.

Descripción Euleriana y Lagrangiana

La forma natural de describir el flujo de un fluido consiste en asignar las magnitudes que lo caracterizan en función de la posición \mathbf{r} y del tiempo t , por ejemplo, $\rho = \rho(x_i, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_i, t)$, etc. Esta descripción, que se denomina *Euleriana*, consiste pues en asociar cada magnitud a *puntos fijos del espacio*. Sin embargo, en la Mecánica elemental estamos acostumbrados a describir el movimiento de *objetos físicos* como masas puntuales, cuerpos, etc., cuyos equivalentes en un fluido son la masa contenida en un elemento de volumen material, o bien en un volumen material finito. En consecuencia, resulta muchas veces útil, porque es más susceptible de interpretaciones intuitivas, complementar la descripción Euleriana con una segunda forma de descripción, que se denomina *Lagrangiana*, consistente en asociar cada magnitud con *puntos materiales*.

Para ilustrar la utilidad de esta descripción, consideremos la velocidad \mathbf{u} . Su variación con el tiempo en el entorno de un *punto fijo* del espacio, esto es $\partial \mathbf{u} / \partial t$, no tiene una interpretación física simple y directa². En cambio, la variación con el tiempo de la velocidad de un dado *punto material* representa la aceleración del fluido (contenido en un volumen material infinitesimal en el entorno de ese punto); para indicar esta variación se utiliza la forma $d\mathbf{u} / dt$. Es evidente que la aceleración $d\mathbf{u} / dt$, que está vinculada dinámicamente con la resultante de las fuerzas que actúan sobre el elemento material, es una magnitud cuya interpretación física es más directa que la de $\partial \mathbf{u} / \partial t$.

Como contrapartida, las magnitudes $\partial \mathbf{u} / \partial x$, $\partial \mathbf{u} / \partial y$, $\partial \mathbf{u} / \partial z$ son las componentes del gradiente de la velocidad, que es un tensor que (como veremos) tiene una clara interpretación física y determina en parte el tensor de los esfuerzos. En contraste, la diferencia de velocidad entre dos puntos materiales cercanos no se puede asociar con un gradiente, pues la distancia entre dos puntos materiales varía con el tiempo.

Por estas razones, es conveniente disponer de fórmulas que permitan pasar con flexibilidad de un tipo de descripción a la otra. Mostraremos cómo hacerlo si se conoce el campo de velocidad en el entorno de un punto $P(x_i, t)$.

En resumen, podemos decir que: (a) en la descripción Euleriana cada magnitud está asociada a puntos fijo del espacio, y (b) en la descripción Lagrangiana cada magnitud está asociada con puntos materiales del fluido.

Consideremos ahora una magnitud escalar q . Su derivada temporal en sentido Lagrangiano, o *derivada total* dq / dt se puede relacionar con la derivada temporal en sentido Euleriano, o *derivada local* $\partial q / \partial t$. En efecto, del punto de vista Lagrangiano, q es una función de t y de las coordenadas x_P , y_P , z_P del punto material P con el cual está asociada q . Pero x_P , y_P , z_P son funciones del tiempo, de modo que

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_P} \frac{dx_P}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y_P} \frac{dy_P}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z_P} \frac{dz_P}{dt} \quad (3.7)$$

¹ El valor de t_P se obtiene invirtiendo la ecuación de la trayectoria.

² Si bien esta cantidad tiene las dimensiones de aceleración, no es una aceleración, pues mide la diferencia (por unidad de tiempo) de las velocidades de puntos materiales distintos.

que también se puede escribir como:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q = \frac{\partial q}{\partial t} + u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} \quad (3.8)$$

En la (3.8), \mathbf{u} es la velocidad de P en el instante t , o sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_i, t)$, pues P tiene coordenadas x_i en t , y ∇q es el gradiente del escalar q calculado en (x_i, t) . El último término de la (3.8) se llama *derivada convectiva*; nótese que en el caso de un campo estacionario, con $\partial q / \partial t = 0$, la derivada total coincide con la derivada convectiva.

Se puede llevar a cabo el mismo cálculo para cada una de las tres componentes de un vector \mathbf{a} . El resultado es:

$$\frac{da_x}{dt} = \frac{\partial a_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla a_x, \quad \frac{da_y}{dt} = \frac{\partial a_y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla a_y, \quad \frac{da_z}{dt} = \frac{\partial a_z}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla a_z \quad (3.9)$$

Pasando a la notación por subíndices que ya hemos usado, estas tres relaciones se sintetizan en la ecuación

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

que podemos escribir en forma vectorial como

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} \quad (3.11)$$

Del mismo modo se puede obtener la relación entre la derivada local y la derivada total respecto del tiempo de una magnitud tensorial.

Conservación de la masa

Un volumen material queda definido por el hecho que la superficie que lo limita es una superficie material. Por lo tanto, cada punto de esta superficie se mueve con velocidad \mathbf{u} . Luego,

$$\frac{dV}{dt} = \oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \quad (3.12)$$

siendo \mathbf{n} la normal saliente. Por lo general $\nabla \cdot \mathbf{u}$ varía de punto a punto dentro del volumen, pero para un volumen δV suficientemente pequeño en el entorno de un punto P, $\nabla \cdot \mathbf{u} \rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{u})_P$, y queda la relación

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.13)$$

Ahora, si δM es la masa contenida en δV , se tiene $\delta M = \rho \delta V$ donde ρ es la densidad en el entorno de P. Por otra parte $\delta M = \text{cte.}$, luego $d\delta M = d\rho \delta V + \rho d\delta V = 0$, de modo que

$$\frac{d\delta V}{\delta V} = - \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.14)$$

Usando esta última relación, la (3.13) queda en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.15)$$

Esta ecuación establece la relación entre la variación de la densidad en el entorno de un punto material y el campo de velocidad \mathbf{u} . La ecuación (3.15) es de carácter cinemático: el campo de velocidad (por medio de la (3.13)) determina la variación del volumen de los elementos materiales, siendo su tasa de variación relativa igual a $\nabla \cdot \mathbf{u}$; de allí resulta la variación de ρ debido a la conservación de la masa. Otra forma diferencial de esta ecuación es,

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right) = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.16)$$

que se obtiene de la (3.15) usando la relación (3.8) entre la derivada total y la derivada local de ρ . La (3.16) se puede también escribir en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.17)$$

Las ecs. (3.15)-(3.17) son diferentes formas de la *ecuación de conservación de la masa* (así llamada porque proviene de la constancia de δM), que también se denomina *ecuación de continuidad*.

Integrando la (3.17) sobre un volumen fijo obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{u} dS \quad (3.18)$$

Esta ecuación expresa que la variación de la masa contenida en un volumen fijo está dada por el flujo neto de materia a través de la superficie que lo rodea. La ec. (3.18) se podría también haber tomado como punto de partida para discutir la conservación de la masa.

Derivada total de integrales materiales

Consideremos ahora la derivada temporal de la integral de una magnitud escalar cualquiera q sobre un volumen *material* finito V , es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_V q dV \quad (3.19)$$

Imaginemos el volumen V subdividido en n elementos δV , y que en cada uno de ellos q toma el valor q_n ; supondremos, además, que $\delta V \rightarrow 0$ (y por consiguiente $n \rightarrow \infty$), de modo que

$$\frac{d}{dt} \int_V q dV = \frac{d}{dt} \left(\lim_{\delta V \rightarrow 0} \sum_n q_n \delta V \right) \quad (3.20)$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} \int_V q dV = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \sum_n \frac{d}{dt} (q_n \delta V) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \sum_n \left(\frac{dq_n}{dt} \delta V + q_n \frac{d\delta V}{dt} \right) \quad (3.21)$$

y obtenemos finalmente

$$\frac{d}{dt} \int_V q dV = \int_V \left(\frac{dq}{dt} + q \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (3.22)$$

El mismo argumento se puede aplicar a una magnitud vectorial cualquiera \mathbf{h} , y resulta

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{h} dV = \int_V \left(\frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (3.23)$$

Nótese que tanto en esta ecuación como en la ecuación escalar para q , el primer término se puede identificar con la integral sobre un volumen fijo V , y el segundo término es entonces el efecto sobre todo el volumen del término convectivo.

Aplicando la fórmula (3.22) a la densidad ρ volvemos a obtener la ecuación de conservación de la masa a partir de la expresión integral

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0 \quad (3.24)$$

Puesto que el primer miembro es nulo (ya que la masa contenida en un volumen material es constante) y V es arbitrario, se obtiene la (3.15).

Movimiento relativo en el entorno de un punto

Veremos más adelante que la fuerza que una porción de fluido ejerce sobre otra porción adyacente depende de la manera en que el fluido está siendo deformado por el movimiento. Por lo tanto es importante analizar el carácter del movimiento en el entorno de un punto material.

Sea $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ la velocidad en el instante t del fluido en el punto P y $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ la velocidad en ese mismo instante en un punto P' situado en $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ (con δx_i indicamos las componentes de $\delta\mathbf{r}$, ver Fig. 3.2). Podemos entonces escribir

$$\delta\mathbf{u} = (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (3.25)$$

que en un sistema de coordenadas Cartesianas se expresa como

$$\delta u_i = u_i(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{r}, t) = \delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.26)$$

Las expresiones (3.25) y (3.26) son correctas al primer orden en la pequeña distancia δr entre los dos puntos.

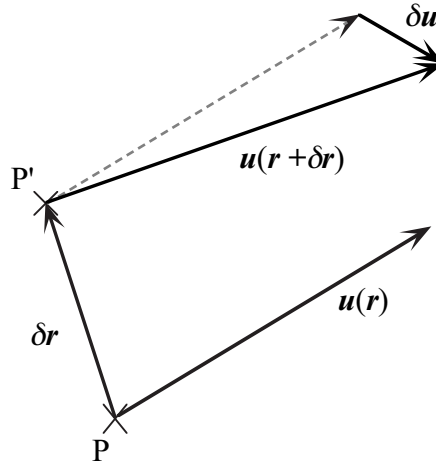


Fig. 3.2. Movimiento relativo de un fluido en el entorno de un punto P.

Los coeficientes $\partial u_i / \partial x_j$ son las componentes del tensor de segundo rango $\nabla \mathbf{u}$, que no recibe una denominación especial. Aquí, lo llamaremos simplemente el *gradiente de la velocidad*. Notemos, por otro lado, que $\delta \mathbf{u}$ representa la tasa de variación de $\delta \mathbf{r}$, es decir $\delta u_i = d\delta x_i / dt$. En efecto

$$\frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{u} \quad (3.27)$$

Para analizar las propiedades físicas del tensor gradiente de la velocidad conviene separarlo en sus partes simétrica $\boldsymbol{\varepsilon}$ y antisimétrica $\boldsymbol{\xi}$, en la forma

$$\nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi} \quad (3.28)$$

que escrita en términos de las componentes cartesianas es

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \xi_{ij} \quad (3.29)$$

donde

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.30)$$

Estudiaremos ambas partes por separado.

Parte Antisimétrica

La contribución de ξ_{ij} a δu_i , que llamaremos $\delta u_i^{(a)}$, es

$$\delta u_i^{(a)} = \delta x_j \xi_{ij} \quad (3.31)$$

Es fácil mostrar (desarrollando la suma en j para cada i) que el segundo miembro se puede escribir en forma vectorial como

$$\delta \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.32)$$

La cantidad $\boldsymbol{\omega}$ se denomina *vorticidad*, o *vorticidad*, del campo de velocidades. Se ve, entonces, que la contribución de $\boldsymbol{\xi}$ a $\delta \mathbf{u}$ deja invariante el módulo de $\delta \mathbf{r}$ y cambia sólo su dirección. En efecto, como $\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}$ es perpendicular a $\delta \mathbf{r}$, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \delta r^2 = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = 2 \delta \mathbf{r} \cdot \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} = \delta \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}) = 0 \quad (3.33)$$

Por lo tanto, la variación de $\delta \mathbf{r}$ debida a $\boldsymbol{\xi}$ es una *rotación rígida* alrededor de P (como la que vimos al principio del capítulo) con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/2$.

Es interesante verificar que $\nabla \times \mathbf{u}$ representa efectivamente un vector que corresponde al doble de la velocidad angular local de rotación. De acuerdo con el teorema de Stokes se tiene que

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.34)$$

donde S es una superficie (abierta) que se apoya sobre la curva C que sirve de borde. Si consideramos un círculo de radio δr alrededor de P, normal a $\boldsymbol{\omega}$, la (3.34) nos da

$$\pi \delta r^2 \langle |\nabla \times \mathbf{u}| \rangle = 2\pi \delta r \langle \delta u \rangle \quad (3.35)$$

donde $\langle \rangle$ indica el valor medio sobre el área del círculo o sobre su perímetro, según corresponda. Por otra parte, el módulo de la velocidad angular de rotación se define como $\Omega = \langle \delta u \rangle / \delta r$, de modo que

$$\langle |\nabla \times \mathbf{u}| \rangle = 2\Omega \quad (3.36)$$

y en el límite $\delta r \rightarrow 0$ obtenemos

$$\omega = |\nabla \times \mathbf{u}| = 2\Omega \quad (3.37)$$

Parte simétrica

Indicaremos con $\delta \mathbf{u}^{(s)}$ la contribución de $\boldsymbol{\epsilon}$ a $\delta \mathbf{u}$, de forma tal que

$$\delta u_i^{(s)} = \delta x_j \epsilon_{ij} \quad (3.38)$$

Puesto que $\boldsymbol{\epsilon}$ es un tensor simétrico, en todo punto P se puede siempre elegir un sistema *local* de coordenadas (x, y, z) , en el cual la matriz de sus componentes ϵ_{ij} es diagonal. En este sistema de coordenadas (ejes principales de $\boldsymbol{\epsilon}$) tenemos

$$\delta u_x^{(s)} = \delta x \epsilon_{xx} \quad , \quad \delta u_y^{(s)} = \delta y \epsilon_{yy} \quad , \quad \delta u_z^{(s)} = \delta z \epsilon_{zz} \quad (3.39)$$

Para averiguar el significado físico de estas relaciones consideremos la primera de las ecs. (3.39). De acuerdo con la misma resulta

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta u_x^{(s)}}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} \quad (3.40)$$

Expresiones análogas se obtienen para ε_{yy} y ε_{zz} . Luego, ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{zz} representan las tasas (o velocidades) de estiramiento o acortamiento relativas en las direcciones de los ejes principales del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$.

El segmento material PP' se puede imaginar descompuesto en tres segmentos según los ejes principales. Cada una de esas tres componentes sufre un estiramiento (o contracción) relativa dado por el respectivo término ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{zz} . Si estos tres términos son iguales entre sí, el segmento PP' mantiene su orientación respecto de los ejes principales (y por lo tanto respecto de cualquier sistema de ejes); de no ser así, además del estiramiento (o contracción) sufrirá también un cambio de dirección. Pero si tomamos tres segmentos de longitud $\delta x = PP'_x$, $\delta y = PP'_y$ y $\delta z = PP'_z$, cada uno paralelo a un eje principal, estos tres segmentos sufren sólo estiramientos o contracciones y se mantienen paralelos al sus respectivos ejes, *cualesquiera sean* los valores de ε_{xx} , ε_{yy} y ε_{zz} .

Veamos ahora cómo varía el volumen $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ de un elemento de fluido que inicialmente es un paralelepípedo cuyas tres aristas, de longitudes δx , δy , δz , están orientadas según los ejes principales. La variación relativa del volumen es:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta x} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{1}{\delta z} \frac{d\delta z}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (3.41)$$

de modo que

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.42)$$

La cantidad $\nabla \cdot \mathbf{u}$ no es otra cosa que la traza del tensor simétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$; luego es invariante ante rotaciones de coordenadas. Por lo tanto $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ significa que un volumen δV se mantiene constante, independientemente de su forma y orientación.

En el caso particular en que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$, los tres elementos de línea δx , δy , δz se estiran (o contraen) en la misma proporción. Luego, un elemento de fluido no cambia de forma (si es esférico, seguirá siendo esférico), pero sí cambia de volumen, puesto que $\nabla \cdot \mathbf{u}$ puede no ser nula en este caso. En Mecánica de Fluidos, este tipo de deformaciones se llaman *expansiones o compresiones puras*.

Lo anteriormente expuesto indica que el tensor simétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede expresar de forma *invariante* como la suma de un tensor de traza nula $\boldsymbol{\varepsilon}'$, más un tensor isótropo $[\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})/3]\mathbf{I}$, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' + [\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})/3]\mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}' + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (3.43)$$

es decir

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + (T/3)\delta_{ij} \quad (3.44)$$

donde

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - (T/3)\delta_{ij} \quad , \quad T = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.45)$$

El tensor $\boldsymbol{\varepsilon}'$ tiene traza nula y por lo tanto describe *deformaciones puras* (con cambio de forma pero sin cambio de volumen). Por ejemplo, una esfera se puede transformar en un elipsoide, pero conservando el volumen encerrado. Por este motivo $\boldsymbol{\varepsilon}'$ recibe el nombre de tensor de *velocidad* (o *tasa*) de *deformación*, en sentido estricto. En cambio, el segundo término de la (3.43) describe la variación de volumen sin cambio de forma, es decir la velocidad (o tasa) de compresión o de expansión isotrópica.

Resumiendo todo lo expuesto, podemos enunciar lo siguiente:

El movimiento de un fluido en el entorno de un punto P se puede considerar como la superposición de:

- (a) una *rotación pura* con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} / 2$ alrededor de un eje que pasa por P.
- (b) una *deformación*, que a su vez consiste en la superposición de una *expansión* o *compresión isotrópica*, cuya magnitud es $\delta V^{-1} d\delta V / dt = \nabla \cdot \mathbf{u}$, más una *deformación pura* (sin cambio de volumen), dada por el tensor de velocidad de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}'$.

Este resultado se suele llamar *Teorema de Helmholtz*.

4. ECUACIONES BÁSICAS DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de movimiento de un fluido expresa la Segunda Ley de Newton, esto es, que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una dada porción de fluido es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta porción. Existen diferentes formas, todas equivalentes, de escribir esta Ley.

Forma integral Lagrangiana (volumen material)

Sea V un volumen material rodeado por una superficie (obviamente también material) S . La cantidad de movimiento contenida en V es

$$\int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (4.1)$$

Su derivada total respecto del tiempo (derivada material) es

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_V \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV \quad (4.2)$$

donde usamos la ecuación de conservación de la masa para simplificar la expresión. Entonces, la derivada de la cantidad de movimiento contenida en el volumen V , es simplemente la suma de los productos de las masas (ρdV) por las aceleraciones ($d\mathbf{u}/dt$) de los elementos infinitesimales que integran el volumen material finito V .

En general, sobre una porción dada de fluido actúan fuerzas de volumen y de superficie, cuya resultante debe ser igual a la derivada temporal de la cantidad de movimiento. Si indicamos con \mathbf{g} la resultante de las fuerzas de volumen (por unidad de masa), tenemos,

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3)$$

Si transformamos el último término en otra integral de volumen (por el Teorema de Green),

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.4)$$

el balance de cantidad de movimiento se expresa como

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_V (\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (4.5)$$

La (4.5) es la forma integral Lagrangiana de la ecuación de movimiento.

Forma diferencial Lagrangiana

La relación integral (4.5) vale para una elección arbitraria del volumen material sobre el cual se integra. Por lo tanto en todos los puntos del fluido se debe cumplir

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g + \nabla \cdot \sigma \quad (4.6)$$

Esta ecuación diferencial expresa la aceleración del fluido en términos de la fuerza de volumen y la divergencia del tensor de los esfuerzos, y se conoce como *ecuación de movimiento*.

Las fuerzas de superficie contribuyen a la aceleración del fluido sólo si el tensor de los esfuerzos varía con la posición, más precisamente, sólo si la divergencia de σ no es nula. Cuando $\nabla \cdot \sigma = 0$, el efecto de las fuerzas de superficie sobre un elemento material es el de deformarlo, pero sin cambiar su cantidad de movimiento.

Forma integral Euleriana (volumen fijo)

La mayoría de los problemas de la Mecánica de Fluidos requiere el uso de la ecuación de movimiento en la forma diferencial (4.6), pero hay algunos casos importantes en los cuales es útil disponer de una relación integral que exprese el balance de la cantidad de movimiento para un volumen fijo del espacio.

Consideremos entonces un volumen V *fijo* (no material) cerrado por una superficie S (obviamente, también fija). La derivada temporal local de la cantidad de movimiento contenida en V , debe ser igual a las fuerzas que actúan sobre el fluido en V (ya sea de volumen, ya sea ejercidas a través de la superficie S) *menos* el flujo neto de la cantidad de movimiento que sale a través de S . Esto se expresa como sigue:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dV = \int_V \rho g dV + \oint_S \sigma \cdot n dS - \oint_S \rho u (u \cdot n) dS \quad (4.7)$$

o, en notación indicial,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) dV = \int_V \rho g_i dV + \oint_S \sigma_{ij} \cdot n_j dS - \oint_S \rho u_i (u_j \cdot n_j) dS \quad (4.8)$$

Las dos últimas integrales se pueden convertir, con toda generalidad, en integrales de volumen de la forma

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) dV = \int_V \left[\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \right] dV \quad (4.9)$$

y obtenemos así la expresión buscada.

Forma diferencial Euleriana

Como la relación anterior vale para cualquier volumen fijo V , sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \quad (4.10)$$

Desarrollando las derivadas de los productos y llevándolos al primer miembro,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.11)$$

La suma del segundo y tercer término del miembro izquierdo es nula por la ecuación de conservación de la masa, y queda

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.12)$$

o, en notación vectorial

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.13)$$

Obsérvese que la forma diferencial Euleriana (4.13), se podría también haber obtenido directamente a partir de la forma Lagrangiana (4.6), empleando la relación entre operadores

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (4.14)$$

que tiene en cuenta el movimiento del fluido a través de la superficie S por medio del término convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla$.

Para utilizar la ecuación de movimiento en cualquiera de sus formas (ecs. (4.5), (4.6), (4.9) y (4.10)) hace falta conocer \mathbf{g} y $\boldsymbol{\sigma}$ como funciones de \mathbf{r} y t , eventualmente a través de ρ , \mathbf{u} , etc.. En lo que hace a las fuerzas de volumen, por ahora nos limitaremos a la gravedad ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, donde \mathbf{e}_z es el versor en la dirección vertical). Discutiremos ahora las diferentes formas que puede tomar la ecuación del movimiento de acuerdo a la forma del tensor de los esfuerzos.

La hipótesis del equilibrio termodinámico local

Ya vimos en el Capítulo 1 que en un fluido en reposo $\boldsymbol{\sigma}$ toma la forma particular

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad (4.15)$$

donde la presión p está determinada por los parámetros termodinámicos del medio (densidad y temperatura), definidos para fluidos *en equilibrio* por medio de la ecuación de estado.

Conocemos la ecuación de estado para algunos fluidos especiales, por ejemplo para los gases perfectos se tiene (ec. (2.19)) que

$$p = \rho RT / \mu \quad (4.16)$$

Resulta útil recordar brevemente el modelo cinético que está a la base de esta ecuación, a fin de aclarar algunas cuestiones.

En los cursos elementales el modelo del gas ideal se presenta suponiendo que las partículas del gas (moléculas, iones, electrones, etc.) rebotan elásticamente contra la pared material del recipiente que contiene el gas. A primera vista, esta imagen es demasiado restringida pues parece

ser, en la práctica, tan sólo una razonable (aunque grosera) aproximación de la compleja fenomenología involucrada en la interacción de un gas con una pared sólida.¹

Pero en realidad, el aspecto esencial del modelo es que *en el equilibrio* (y por lo tanto, en un gas en reposo), los parámetros termodinámicos y mecánicos del gas tienen igual valor de ambos lados (digamos lado 1 y lado 2) de toda superficie ideal en su seno. Por lo tanto, en promedio, el efecto de la migración de moléculas (por la agitación térmica) desde el lado 1 hacia el lado 2 se compensa exactamente con el efecto de la migración de moléculas desde 2 hacia 1, de manera que el resultado neto es nulo, tanto en lo referente a la concentración, como en cuanto al transporte de la cantidad de movimiento y de la energía². Naturalmente, cuando no hay equilibrio termodinámico (y con más razón, cuando no existe reposo), el balance del transporte desde 1 hacia 2 y desde 2 hacia 1 *no es exacto*. Por lo tanto, estrictamente hablando, el modelo no se podría aplicar, y el concepto de presión perdería validez.

Sin embargo, en la práctica hay una gran variedad de casos en los cuales los efectos de los apartamientos del equilibrio termodinámico (o del reposo) son pequeños. Gracias a ello, para cada elemento infinitesimal del fluido se pueden seguir usando las variables termodinámicas de equilibrio, y también se puede definir la presión. En estos casos se dice que hay *equilibrio termodinámico local*.³ Los efectos asociados con la falta de equilibrio termodinámico sobre escalas espaciales grandes (como la difusión de partículas y la difusión térmica), y con el movimiento (la difusión de la cantidad de movimiento, es decir la fricción interna) se agregan como correcciones. Este punto de vista es, precisamente, el que se adopta en la Mecánica de Fluidos. De acuerdo con la hipótesis del equilibrio termodinámico local, podemos entonces afirmar que

En un fluido en movimiento, el tensor de los esfuerzos tiene la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}' \quad (4.17)$$

donde el tensor isótropo $-p\mathbf{I}$ se define como si el fluido se encontrara en reposo, a partir de los parámetros termodinámicos de equilibrio correspondientes a cada punto, y $\boldsymbol{\sigma}'$ es aquella parte del tensor de los esfuerzos que se debe agregar para dar cuenta de los efectos del movimiento.

Debe quedar claro que $\boldsymbol{\sigma}'$ depende del estado del movimiento en el entorno de cada punto, o movimiento relativo, expresado matemáticamente por el tensor $\nabla\mathbf{u}$, y que tiende a cero si no hay movimiento relativo. El tensor $\boldsymbol{\sigma}'$ está asociado al transporte microscópico de cantidad de

¹ Ni que hablar del caso de un plasma, el cual sin embargo se comporta como un gas perfecto cuando está completamente ionizado.

² En cuanto a los efectos estadísticos, esto equivale a suponer que las moléculas que se dirigen de 1 a 2 rebotan elásticamente en la superficie ideal, y que lo mismo ocurre con las que se dirigen de 2 a 1.

³ El hecho que pueda existir equilibrio termodinámico local en un sistema que globalmente está fuera del equilibrio se debe a dos motivos. Primero, que toda porción diminuta (en escala macroscópica) del medio contiene un número muy grande de moléculas y por lo tanto le podemos aplicar consideraciones estadísticas y definir sus variables termodinámicas. Segundo, que el tiempo necesario para que se establezca el equilibrio dentro de la parcela es sumamente breve en comparación con el tiempo necesario para que los procesos de transporte logren establecer el equilibrio de la parcela con el resto del sistema (esto es cierto siempre y cuando los gradientes de concentración, temperatura, etc. no sean demasiado grandes). Aceptaremos este hecho sin demostración, ya que la demostración requiere consideraciones de teoría cinética que escapan al nivel de esta presentación.

movimiento debido a la diferente velocidad macroscópica que poseen elementos de fluido adyacentes (y que se manifiesta macroscópicamente como una fricción interna). Puesto que estos elementos intercambian moléculas (y hay interacciones atractivas entre las moléculas cercanas a la superficie que separa ambos elementos), cabe esperar que el transporte de cantidad de movimiento tienda a *reducir* la diferencia de velocidad entre elementos cercanos. Subrayamos que este efecto *no* está relacionado con las colisiones entre las moléculas, sino con la *migración* de moléculas desde un elemento de fluido a los elementos adyacentes, y viceversa.

Es oportuno también aclarar aquí que el carácter isótropo de la parte $-p\mathbf{I}$ que se sustrae al tensor de los esfuerzos para formar $\boldsymbol{\sigma}'$ *no debe* hacernos creer que $\boldsymbol{\sigma}'$ sea un tensor de traza nula. Lo que estamos haciendo, al descomponer $\boldsymbol{\sigma}$ en una parte isótropa más un tensor $\boldsymbol{\sigma}'$, es separar la parte de $\boldsymbol{\sigma}$ que *no depende* del estado del movimiento relativo (que es isótropa) de la parte que *sí depende* de dicho estado de movimiento. Por lo tanto $\boldsymbol{\sigma}'$ no tiene porqué ser de traza nula, sino que a su vez se podrá descomponer en una parte isótropa y otra de traza nula.

La ecuación de Euler

Queda todavía el problema de calcular $\boldsymbol{\sigma}'$. Pero antes de ocuparnos de ese tema es importante observar que en muchos casos, las fuerzas debidas a $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ son muy pequeñas respecto de la fuerza debida al gradiente de la presión. Cuando eso ocurre podemos, en primera aproximación, *ignorar* el efecto de $\boldsymbol{\sigma}'$. En estos casos el tensor de los esfuerzos se reduce al que existiría en un fluido en reposo con la misma distribución de densidad y temperatura (y, eventualmente, de otros parámetros termodinámicos). Por lo tanto

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad , \quad p = p(\rho, T, \dots) \quad (4.18)$$

y la correspondiente ecuación de movimiento es

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g - \nabla p \quad (4.19)$$

que se conoce como *Ecuación de Euler*. Los flujos que cumplen la (4.19) se denominan *flujos ideales*. Más adelante estableceremos criterios prácticos para determinar cuándo y donde un flujo se puede considerar ideal y por lo tanto se puede describir mediante la (4.19).

Relaciones constitutivas para fluidos Newtonianos

Cuando el tensor $\boldsymbol{\sigma}'$ no es despreciable necesitamos *relaciones constitutivas* o *reológicas* que nos permitan calcularlo. Este es un problema sumamente complejo, pero afortunadamente en muchos casos es suficiente con la aproximación más sencilla, que se conoce como de *fluido Newtoniano*.

Dicha aproximación se funda en las tres hipótesis que enunciamos a continuación.

(a) *Una rotación pura alrededor de un punto no contribuye al tensor de los esfuerzos en ese punto*. Esto es aceptable porque tal movimiento mantiene constantes las distancias entre puntos materiales y entonces no genera fricción interna. Por lo tanto la parte antisimétrica del tensor de las derivadas de la velocidad *no interviene* en la determinación de $\boldsymbol{\sigma}'$.

(b) *Existen relaciones lineales entre las componentes de $\boldsymbol{\sigma}'$ y las componentes del tensor velocidad de deformación $\boldsymbol{\epsilon}$* . Claramente esta hipótesis es una aproximación razonable, en tanto y en

cuanto los gradientes de las componentes de \mathbf{u} se puedan considerar constantes sobre distancias del orden del alcance de las fuerzas de superficie.

(c) *La parte isótropa* $[\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})/3]\mathbf{I}$ (asociada a las compresiones o expansiones) y *la parte anisótropa* $\boldsymbol{\epsilon}'$ (asociada con las deformaciones puras) de $\boldsymbol{\epsilon}$ contribuyen con coeficientes diferentes al tensor de los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}'$. Por lo tanto escribiremos

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\eta\boldsymbol{\epsilon}' + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (4.20)$$

En resumen, agrupando los dos términos isótropos del tensor de los esfuerzos, éste se expresa como sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \zeta \nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\eta\boldsymbol{\epsilon}' \quad (4.21)$$

Se puede demostrar sin dificultad que la tendencia de las fuerzas dependientes de la velocidad a reducir la diferencia de velocidad entre capas cercanas, implica que tanto η como ζ son *positivos*. Estos parámetros se denominan *coeficientes de viscosidad* y tienen la dimensión de densidad por velocidad por distancia, por ejemplo en el sistema cgs se miden en $\text{g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Es interesante considerar los signos de los dos términos que contribuyen a la parte isótropa. Dado que la presión no depende del estado de movimiento, si consideramos un elemento de volumen esférico, el fluido en su interior empuja siempre hacia afuera⁴ por efecto de este término. No ocurre lo mismo con el término $\nabla \cdot \mathbf{u}$: si el volumen se está expandiendo ($\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$), el término es positivo y se opone a la expansión. Viceversa si el volumen se está comprimiendo ($\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$), el término es negativo y se opone a la compresión. Por lo tanto este término da lugar a fuerzas que se oponen tanto a la expansión como a la compresión, y son proporcionales a la rapidez con éstas se producen.

En general η y ζ son funciones del estado termodinámico del fluido y por lo tanto dependen de la temperatura y de la presión. El segundo coeficiente de viscosidad, ζ , es difícil de medir y su valor no se conoce para muchos fluidos para los cuales se conoce η . Los coeficientes de viscosidad de un gas aumentan con la temperatura. Para el caso de un gas de esferas rígidas, no es difícil mostrar con base en la Teoría Cinética que $\eta \propto \sqrt{T}$ y que no depende de la presión. En el caso de los líquidos es más complicado estimar η , pero se puede justificar teóricamente que debe decrecer con la temperatura, en contraste con lo que ocurre en los gases.

La Ecuación de Navier-Stokes

La expresión (4.21) del tensor de los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ se debe introducir en la ecuación general de movimiento (4.6), pero como η y ζ dependen de la temperatura y de la presión (que en general no son uniformes en el fluido) no los podemos sacar fuera del operador divergencia.

En muchos casos, sin embargo, los coeficientes de viscosidad no varían apreciablemente en el flujo y los podemos considerar constantes. Por lo tanto, la ecuación de movimiento del fluido es

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \zeta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.22)$$

⁴ Esto es verdad si la presión es positiva, cosa que ocurre siempre en los gases, pero en los líquidos pueden existir presiones negativas como ya mencionamos en el Capítulo 1.

Si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, lo cual equivale a $\rho = \text{cte.}$, se obtiene la importante *ecuación de Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.23)$$

que describe flujos viscosos incompresibles de fluidos Newtonianos.

Ecuación de la energía

Se puede adquirir una visión más amplia del efecto de las fuerzas de superficie en el movimiento del fluido, considerando el balance de energía en un elemento material de volumen δV limitado por la superficie (material) δS .

Las fuerzas de volumen y de superficie realizan trabajo sobre el fluido en δV , y al mismo tiempo puede haber transferencia de calor a través del contorno δS . Parte de la ganancia neta de energía se manifiesta como un incremento de la *energía cinética* del fluido y, el resto, de acuerdo con la Primera Ley de la Termodinámica, aparece como un aumento de la *energía interna* del fluido. Por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} = P + \frac{dQ}{dt} \quad (4.24)$$

donde E es la energía del elemento material, P es la potencia desarrollada por las fuerzas que actúan sobre él, y dQ/dt es el flujo neto de calor (por unidad de tiempo) que entra al elemento. Analizaremos este balance para deducir una ecuación diferencial válida en cada punto del fluido, que exprese el balance de energía para una dada masa de fluido.

La potencia (trabajo por unidad de tiempo) desarrollada sobre δV es la suma de la contribución debida a la resultante de las fuerzas de volumen más la contribución debida a las fuerzas de superficie que actúan sobre δS :

$$P = \int_{\delta V} \rho u_i g_i dV + \oint_{\delta S} u_i \Sigma_i dS \quad (4.25)$$

donde el último término se puede escribir como

$$\oint_{\delta S} u_i \Sigma_i dS = \oint_{\delta S} u_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) dV \quad (4.26)$$

Debe quedar en claro que esta integral no se debe confundir con el trabajo efectuado por la *resultante* de las fuerzas de superficie sobre δV .

De (4.25) y (4.26) obtenemos la potencia neta *por unidad de masa* \mathcal{P} desarrollada sobre un elemento material

$$\mathcal{P} = u_i g_i + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.27)$$

El segundo término de (4.27) (que proviene del trabajo de las fuerzas de superficie) está relacionado con la pequeña diferencia que hay entre los esfuerzos sobre las caras opuestas del elemento, y contribuye junto el primero (que proviene de las fuerzas de volumen) a la *ganancia de*

energía cinética por unidad de masa de todo el volumen. En efecto, si usamos la ecuación de movimiento general (4.6) tenemos que los primeros dos términos del miembro derecho de la (4.27) se combinan para dar

$$u_i \frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \quad (4.28)$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = u_i g_i + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.29)$$

El tercer término de la (4.27), esto es

$$\frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.30)$$

está relacionado con la pequeña diferencia de velocidades que hay entre las caras opuestas del elemento, y proviene del trabajo realizado para *deformar* el elemento, sin cambiar su velocidad. Este *trabajo de deformación* se manifiesta completamente como un aumento de la *energía interna* del fluido.

Por otro lado, la energía interna del fluido también se ve afectada por la cantidad de calor neta que ingresa al elemento de volumen. Supondremos que el calor se transfiere por conducción molecular. Entonces, la tasa de ganancia de calor por conducción a través de δS es

$$\oint_{\delta S} k \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS = \int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV \quad (4.31)$$

donde T es la temperatura local y k la conductividad térmica del fluido. Luego, el calor ganado por el elemento de fluido, por unidad de tiempo y de masa, es,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.32)$$

De esta manera, la tasa de variación de la energía interna por unidad de masa, e , viene dada por

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.33)$$

La expresión del primer término se puede simplificar si se descompone el tensor $\partial u_i / \partial x_j$ en una parte simétrica y otra antisimétrica, pues el producto saturado de σ_{ij} con la parte antisimétrica es idénticamente nulo. Así obtenemos

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.34)$$

donde ε_{ij} es la parte simétrica de $\partial u_i / \partial x_j$.

Si ahora introducimos la expresión general (4.21) de σ_{ij} , que obtuvimos en la sección anterior para fluidos Newtonianos en la ec. (4.34) para la tasa de variación de la energía interna, y suponemos que el segundo coeficiente de viscosidad ζ es nulo, encontramos

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{2\eta}{\rho} \left[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.35)$$

Para interpretar el primer término del miembro derecho de la (4.35) podemos observar que en virtud de la ecuación de continuidad tenemos que $\nabla \cdot \mathbf{u} = \delta V^{-1} d\delta V / dt$, de modo que

$$-\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{p}{\delta M} \frac{d\delta V}{dt} \quad (4.36)$$

pues $\rho \delta V = \delta M$ es la masa del elemento material. Por lo tanto este término representa la potencia por unidad de masa desarrollada por la presión (isótropa) en la expansión o compresión del elemento de volumen; es negativo (e disminuye) si hay expansión y positivo (e aumenta) si hay compresión.

En cuanto al segundo término, conviene escribirlo en la forma

$$\frac{2\eta}{\rho} \left[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] = \frac{2\eta}{\rho} (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij})^2 \quad (4.37)$$

que es una identidad pues $\delta_{ii} = 3$ y $\varepsilon_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$. De esta manera vemos que este término es definido positivo, mostrando que cualquier deformación del fluido está inevitablemente acompañada por una transformación de la energía mecánica asociada con el movimiento en energía interna del fluido. En consecuencia podemos definir la *tasa de disipación de energía mecánica por unidad de masa*, debida a la viscosidad como

$$\phi = \frac{2\eta}{\rho} (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij})^2 \quad (4.38)$$

Nótese que la disipación de energía mecánica debida a la viscosidad es equivalente en sus efectos a una transferencia irreversible de calor.

En resumen, el primer término de la expresión de la tasa de variación de la energía interna por unidad de masa de/dt representa los cambios *reversibles* asociados con las deformaciones isótropas, y el segundo término representa los cambios *irreversibles* asociados con las deformaciones puras.

Si tomamos en cuenta el término $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$ del el tensor de los esfuerzos, podemos ver fácilmente que también las compresiones y expansiones puras dan lugar a una disipación irreversible. En efecto, en este caso aparece un término adicional en de/dt que es proporcional a $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$ y por lo tanto es siempre positivo de modo que lleva a una aumento de e . Este efecto está ligado con el cambio de signo del término $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})$ cuando se considera un volumen en expansión o en compresión, de resultas de lo cual en ambos casos el trabajo tiene el mismo signo (positivo).

Resumiendo nuestros resultados, tenemos que la tasa de variación de la energía por unidad de masa está dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \frac{de}{dt} \quad (4.39)$$

donde la tasa de variación de la energía cinética por unidad de masa está dada por la ec. (4.29) y la tasa de variación de la energía interna por unidad de masa está dada por la ec. (4.34).

Propiedades termomecánicas de fluidos reales

Antes de concluir este Capítulo conviene hacer algunos breves comentarios acerca de las limitaciones de algunas de las hipótesis que hemos hecho en lo referente al comportamiento de los fluidos.

Ecuación de estado

La ecuación de estado de los gases ideales es una razonable aproximación al comportamiento de un gas real, siempre y cuando se encuentre a una temperatura elevada (en relación con la temperatura crítica) y su densidad sea muy baja. En estas condiciones se pueden despreciar las interacciones entre las moléculas y éstas se pueden suponer puntiformes. Con estas hipótesis la Teoría Cinética permite deducir la ecuación de estado del gas ideal

$$pV = nRT \quad (4.40)$$

Sin embargo, hay muchos flujos de interés práctico de gases o vapores a baja temperatura y alta densidad (por ejemplo flujos bifásicos en los que participan un líquido junto con su vapor, como ocurren en condensadores y otros dispositivos industriales). En estos casos puede ser necesario utilizar una mejor aproximación de la ecuación de estado real, que tome en cuenta aproximadamente los efectos que hemos despreciado. Una fórmula muy usada es la *ecuación de estado de van der Waals*

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (4.41)$$

En la (4.41) a y b son constantes características del gas, cuyo significado físico se desprende de lo siguiente:

- el término an^2/V^2 proviene de que la presión que ejerce un gas real es menor que la de un gas ideal debido a las fuerzas de atracción entre las moléculas; este efecto es proporcional a la probabilidad de que dos moléculas interaccionen, que a su vez es proporcional al cuadrado de la densidad (proporcional a n/V).
- el término nb proviene de que las moléculas tienen un volumen finito y por lo tanto el volumen del gas no se puede reducir a valores arbitrariamente pequeños.

La ecuación de (4.41) es puramente empírica y si bien da cuenta cualitativamente del comportamiento de los gases reales, no es muy exacta del punto de vista cualitativo. Otra ecuación que se suele emplear es la *ecuación de estado virial*, que se funda en un tratamiento estadístico de las interacciones intermoleculares. Para los líquidos, no se conocen ecuaciones de estado exactas y sencillas basadas en teorías fundamentales, de modo que en la práctica se emplean coeficientes fenomenológicos determinados experimentalmente.

De la ecuación de estado se derivan ciertas propiedades de los fluidos que son de interés para nosotros, y que vamos a discutir brevemente a continuación.

Compresibilidad

Cuando se debe tomar en cuenta la compresibilidad del gas, hay que tener presente que la ecuación de estado depende fuertemente de la temperatura y por lo tanto la respuesta a los esfuerzos de compresión depende de qué pasa con la temperatura durante el proceso. Podemos considerar dos casos límite, según si la compresión ocurre muy lentamente o bien muy rápidamente.

Si la compresión de una parcela del gas es muy lenta, intercambiará calor con el gas que la rodea y/o con las paredes del recipiente que lo contiene. Por lo tanto se mantendrá a temperatura constante durante el proceso. La respuesta del gas a un esfuerzo de compresión está entonces determinada por el *módulo de compresión isotérmica* k_T , definido como

$$k_T \equiv -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \quad (4.42)$$

Para un gas ideal, resulta de la (4.40) que

$$k_T = p \quad (4.43)$$

Si en cambio la compresión es muy rápida, no habrá intercambio de calor entre la parcela y el gas que la rodea y/o con las paredes del recipiente que lo contiene. Por lo tanto el proceso será adiabático, y la entropía del gas se mantendrá constante. La respuesta del gas está entonces determinada por el *módulo de compresión adiabático* k_S , definido como

$$k_S \equiv -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S \quad (4.44)$$

Para un gas ideal, resulta de la (4.40) que

$$k_S = \gamma p \quad (4.45)$$

donde γ es el coeficiente adiabático, que ya introdujimos en el Capítulo 2 al tratar el equilibrio de la atmósfera.

En situaciones intermedias, en que hay cierto intercambio de calor, pero no lo suficiente para que el proceso sea isotérmico, se pueden definir módulos de compresión politrópicos, con valores intermedios entre k_T y k_S .

En cuanto a los líquidos, la hipótesis de incompresibilidad se cumple razonablemente bien en la mayoría de los casos, dado que la materia condensada es poco compresible porque los átomos y moléculas están dispuestos en arreglos compactos. Sin embargo hay situaciones en las cuales se debe tomar en cuenta la compresibilidad (por ejemplo al estudiar la propagación del sonido, como haremos más adelante). Bien por debajo de la temperatura crítica, la energía cinética de las moléculas de un líquido es pequeña frente a la energía potencial de las fuerzas intermoleculares, por lo tanto el trabajo de compresión incrementa fundamentalmente a esta última. En consecuencia no hay diferencia apreciable entre los módulos de compresión isotérmico y adiabático y

se suele hablar de *módulo de compresión* k , a secas. Valores de k para algunos líquidos son⁵: para el agua 20 kb, para el benceno 97 kb, para el mercurio 3.8 kb.

Expansión térmica

Cuando la temperatura de un fluido no es uniforme es preciso tomar en cuenta las variaciones de densidad que ocurren debido a la expansión térmica. El parámetro que mide este efecto es el *coeficiente de expansión térmica* a presión constante⁶, α_p , que mide la variación de volumen de un elemento del fluido por efecto de una variación de temperatura:

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (4.46)$$

Para un gas ideal, la ecuación de estado (4.40) nos da simplemente

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \quad (4.47)$$

Para los líquidos, el coeficiente de expansión térmica es mucho menor que el de un gas, y se puede considerar constante en un amplio rango de temperaturas. Su orden de magnitud varía entre 10^{-5} y $10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$.

Fluidos no Newtonianos

El modelo de fluido Newtoniano es de gran utilidad y se aplica a muchas situaciones, pero también se dan muchos casos de gran interés en que el comportamiento de los fluidos no se describe adecuadamente mediante relaciones constitutivas lineales e independientes del tiempo como la (4.20). La rama de la Mecánica que estudia las relaciones constitutivas apropiadas a tales casos es la Reología. Nosotros no vamos a desarrollar en detalle este tema, y remitimos al lector a la bibliografía especializada. Aquí nos limitaremos a una breve discusión con el propósito que el estudiante se forme una idea general acerca de los fluidos no Newtonianos.

El problema fundamental de la Reología consiste en determinar, en cada punto del medio, la relación entre el tensor de los esfuerzos σ y el estado de deformación (que para un fluido está determinado por el tensor velocidad de deformación ϵ). Para fijar ideas, consideremos un experimento ideal para estudiar la viscosidad, en el cual el fluido ocupa el espacio entre dos placas planas paralelas⁷ separadas por una distancia pequeña d , una de las cuales está inmóvil mientras que la otra se desplaza paralelamente a sí misma con la velocidad constante U (Fig. 4.1). Se

⁵ La unidad de presión en el sistema MKS es el Pascal (Pa), equivalente a 1 Newton/m². Sin embargo se usan frecuentemente otras unidades, por ejemplo en meteorología se suele dar la presión atmosférica en hectopascales (= 10² Pa). En geofísica se suele usar el bar (1 b = 10⁶ Pa) y sus múltiplos. Un kilobar (kb) equivale a 10⁹ Pa. La presión atmosférica standard al nivel del mar es de 1013.25 hectopascales, de modo que 1 kb equivale aproximadamente a 1000 atmósferas de presión.

⁶ Hablamos de coeficiente de expansión a *presión constante* para distinguirlo del coeficiente de expansión a *volumen constante*, que mide la variación de presión que resulta de una variación de temperatura, cuando el *volumen* del elemento se mantiene constante.

⁷ En la práctica estos experimentos se realizan colocando el fluido en el espacio entre dos cilindros coaxiales, uno de los cuales es fijo mientras que el otro gira con velocidad angular constante.

mide el esfuerzo σ necesario para mantener constante la velocidad de la placa móvil, como función de u , o más precisamente, de la velocidad de deformación $\varepsilon \equiv U/d$ (suponemos que d es muy pequeño).

Si se representan los resultados de este tipo de experimentos en un diagrama (ε, σ) , se pueden obtener diversas clases de resultados, como se indica en la Fig. 4.1.

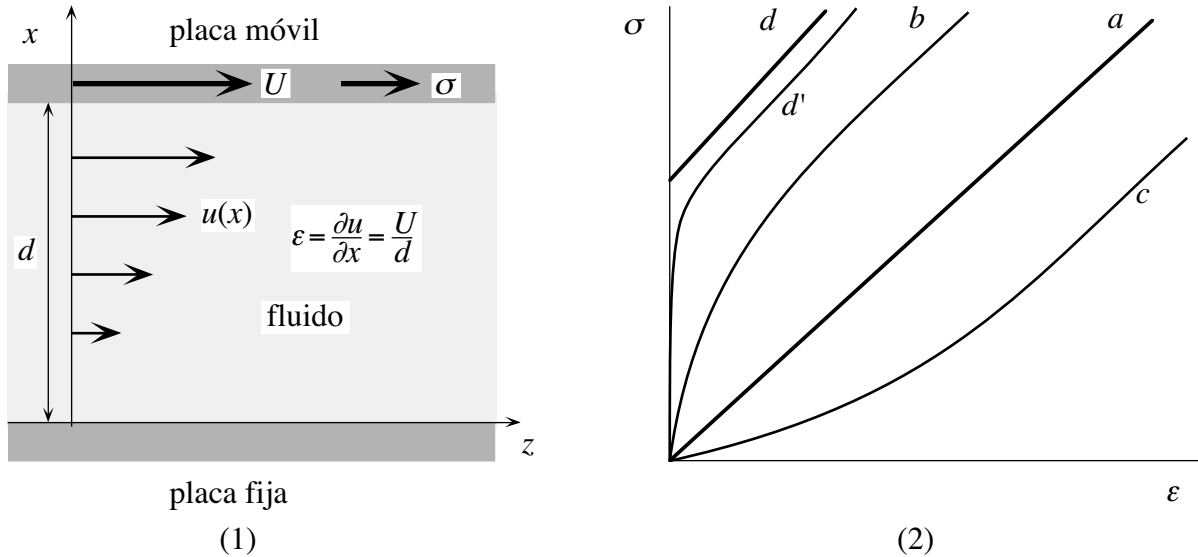


Fig. 4.1. (1) Experimento ideal para determinar la relación entre el esfuerzos de corte σ y la velocidad de deformación ε . (2) Resultados del experimento para: (a) un fluido Newtoniano, (b) un líquido pseudoplástico, (c) un líquido dilatante, (d) un fluido de Bingham, (d') fluido pseudoplástico cuyo comportamiento es prácticamente indistinguible del de un fluido de Bingham.

El resultado para un fluido Newtoniano es, por supuesto, que existe una relación lineal entre σ y ε , como lo indica el caso (a) de la figura. Este tipo de resultado es el que se obtiene para todos los gases, todos los líquidos puros (agua, alcohol, benceno, etc.) y la mayoría de las soluciones de moléculas simples (por ejemplo agua salada), cuyo comportamiento es Newtoniano con muy buena aproximación.

Sin embargo, otros fluidos que comprenden en general mezclas complejas como barros y pastas, los geles, las soluciones de polímeros, los fluidos orgánicos como la sangre y las mucosidades del aparato respiratorio, las grasas y aceites lubricantes muy viscosos, etc., exhiben comportamientos diferentes, como se indica en los casos (b), (c) y (d) de la Fig. 4.1. Estos fluidos se dicen *no Newtonianos*. Está claro que los flujos de líquidos no Newtonianos no se pueden describir mediante la ecuación de Navier-Stokes (4.23), sino que habrá que usar una ecuación del tipo

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g - \nabla p + 2\nabla \cdot (\eta \varepsilon') \quad (4.48)$$

donde la dependencia de η en ε será la que se ha determinado empíricamente, o la que surge de algún modelo aproximado adecuado.

Los fluidos no Newtonianos presentan comportamientos curiosos, en el sentido que resultan poco familiares porque difieren de los del agua que es el líquido más común. Sin embargo estas características son de gran importancia práctica. Por lo tanto es conveniente tener una idea

acerca de las mismas con miras a las aplicaciones de la Mecánica de los Fluidos, tanto tecnológicas como para otras disciplinas científicas (ciencias biomédicas, ciencias del medio ambiente, etc.). Con este fin describiremos ahora las típicas clases de fluidos no Newtonianos.

Fluidos seudoplásticos. Su comportamiento corresponde a la curva (b) de la Fig. 4.1. En estos medios η *decrece* con ϵ , y por lo tanto hay menor resistencia al flujo para esfuerzos mayores. Es decir, el fluido escurre más fácilmente cuanto mayor es el esfuerzo. La mayoría de las suspensiones, los barro⁸, muchas soluciones de polímeros y la sangre⁹ se comportan de esta manera.

Fluidos dilatantes. Su comportamiento responde a la curva (c) de la Fig. 4.1. En un medio dilatante η *crece* con ϵ , y por lo tanto hay mayor resistencia al flujo para esfuerzos mayores. Los fluidos dilatantes no son tan abundantes como los seudoplásticos. Como ejemplos podemos citar la solución de almidón en agua, y la arena impregnada de agua (como las arenas movedizas, y la que se encuentra en las playas en la zona barrida por la rompiente).

Fluidos de Bingham. Su comportamiento está representado por la curva (d) de la Fig. 4.1. Se trata de líquidos que poseen una pequeña *rigidez*, que les permite resistir esfuerzos de corte siempre que éstos no superen un umbral σ_0 , pero escurren fácilmente cuando están sometidos a un esfuerzo grande. Ejemplos de este tipo de medios son la masa de pan, la pasta de dientes, la manteca, la gelatina y algunos barro y suspensiones. En la práctica puede ser muy difícil distinguir entre un fluido de Bingham y un fluido seudoplástico cuyo comportamiento es como d' en la Fig. 4.1.

Reología dependiente del tiempo

Hasta aquí hemos supuesto (implícitamente) que a una dada velocidad de deformación ϵ le corresponde un esfuerzo σ , cuyo valor no cambia mientras ϵ se mantenga constante. Es decir, que la relación entre σ y ϵ no depende del tiempo (ver Fig. 4.2a). Esto ocurre para muchos líquidos, pero no siempre es así. El esfuerzo, y por lo tanto la viscosidad, puede tanto *crecer* como *decrecer* con el tiempo a medida que el fluido está siendo sometido a una tasa constante de deformación, y tales cambios pueden ser reversibles o irreversibles.

Tenemos básicamente tres clases de comportamiento.

Fluidos independientes del tiempo. Este es el caso de la mayoría de los líquidos simples.

Fluidos thixotrópicos. Son aquellos cuya viscosidad *disminuye* con el tiempo (Fig. 4.2b). Comprende soluciones de polímeros, pinturas, suspensiones, arcillas, la miel, etc. La thixotropía ocurre, invariablemente, en fluidos seudoplásticos, es decir, todos los fluidos thixotrópicos son también seudoplásticos, aunque la inversa no es cierta pues existen fluidos seudoplásticos cuya viscosidad es independiente del tiempo.

Fluidos reopépticos (o antithixotrópicos, o con thixotropía negativa). Son aquellos cuya viscosidad *aumenta* con el tiempo (Fig. 4.2c). Todos los fluidos reopépticos son también dilatantes.

El comportamiento dependiente del tiempo está relacionado con la estructura microscópica del fluido. En estos fluidos hay moléculas de gran tamaño, de formas planas (como en las arcillas) o filiformes (como ocurre en los polímeros de alto peso molecular), que en el reposo suelen estar orientadas al azar, o bien los filamentos están enrollados sobre sí mismos o enredados los unos con los otros. Esto determina la viscosidad al comienzo del escurrimiento. Pero a medida que el

⁸ Por este motivo es que las ruedas de un automóvil patinan en el barro más fácilmente si giran rápido, y es sabido que para conseguir tracción cuando se han empantanado conviene hacerlas girar muy lentamente.

⁹ Esta característica es esencial (y vital) para la circulación sanguínea.

fluido se mueve, si esas partículas se orientan, o si los filamentos se desenrollan o desenredan, el fluido escurre más fácilmente, lo que se traduce en una disminución de la viscosidad con el transcurrir del tiempo. Esto es lo que origina la thixotropía. Pero también se puede dar, en otros casos, el efecto contrario, cuando el movimiento del fluido produce reordenamientos o cambios en la conformación de las partículas que tienden a dificultar el escurrimiento. Cuando el movimiento termina y el fluido queda nuevamente en reposo, puede ocurrir que al cabo de cierto tiempo el fluido recupere sus propiedades iniciales, en cuyo caso los cambios producidos por el movimiento son reversibles. La presencia de la thixotropía (o de la antithixotropía) implica que para hacer predicciones acerca del comportamiento de un flujo es preciso conocer su historia previa. Por ejemplo, las propiedades del flujo de un líquido thixotrópico en una larga tubería son diferentes en distintos puntos del conducto.

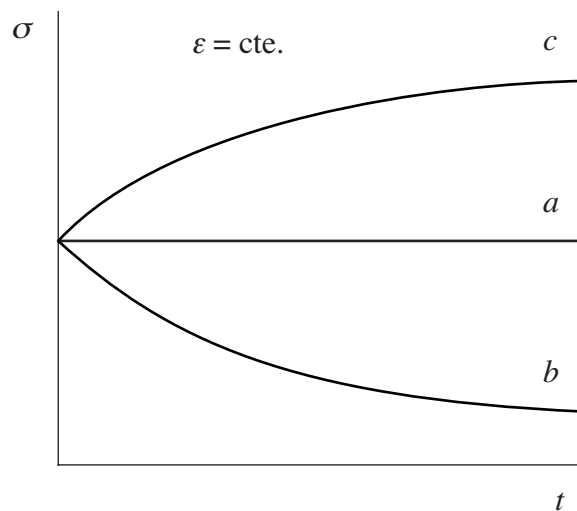


Fig. 4.2. Comportamiento dependiente del tiempo a $\varepsilon = \text{cte.}$: (a) fluido con viscosidad independiente del tiempo, (b) fluido thixotrópico, (c) fluido reopéctico.

Viscoelasticidad

Para completar esta sintética reseña de los comportamientos no Newtonianos corresponde mencionar la *viscoelasticidad*. Consiste en la propiedad que tienen algunos fluidos como masas, soluciones gomosas y otros más, de poseer cierto grado de *elasticidad*, que les permite recuperar su forma cuando desaparecen los esfuerzos de corte que los han deformado. La manifestación de esta elasticidad depende de la escala de tiempo del fenómeno. Vamos a dar un ejemplo. Consideremos la masilla siliconada conocida vulgarmente como masilla mágica, o masilla saltarina. Se trata de un líquido muy viscoso, que normalmente fluye con extrema lentitud. Si se toma una porción de esta masilla y se le da forma de pelota, se la puede hacer rebotar en el piso igual que una pelota de goma, es decir, se comporta en este caso como un sólido elástico. Sin embargo, si se deja la pelota sobre una mesa, al cabo de algunos minutos se aplanan y lentamente se derraman sobre la mesa. Si se le da a la masilla la forma de un cilindro, y se estira ese cilindro, lo que ocurra depende de cuán rápidamente la estiramos. Si le damos un tirón brusco, el cilindro se rompe produciendo una *fractura frágil*, como ocurre con un sólido rígido. Pero si la estiramos lentamente fluye hasta que se produce un filamento muy delgado, que finalmente se rompe por *fractura dúctil*. La masa que se prepara para hacer tallarines tiene propiedades semejantes, si ha

sido trabajada adecuadamente. También las rocas de la corteza terrestre tienen este comportamiento, pues si bien estamos acostumbrados a considerarlas sólidas, sobre las escalas de tiempo geológicas fluyen como un líquido viscoso.

Estos ejemplos muestran que el mismo material se puede comportar sea como un líquido, sea como un sólido, dependiendo de la escala de tiempo del proceso de deformación.

El lector comprenderá fácilmente que la teoría de los flujos de líquidos no Newtonianos es sumamente compleja, aunque de gran importancia práctica para muchas aplicaciones.

5. FLUJOS IDEALES

Ecuaciones generales de los flujos ideales

Cuando se pueden despreciar los efectos de las viscosidades, la *ecuación de movimiento* toma la forma conocida como ecuación de Euler:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (5.1)$$

No es sencillo establecer, en un dado flujo, cuándo y dónde se pueden ignorar los términos viscosos; se trata de una cuestión que aclarará en los Capítulos siguientes. Por ahora, supondremos *a priori* que la (5.1) determina el flujo en una importante cantidad de casos, especialmente cuando los fluidos involucrados son gases.

Para completar la descripción del flujo tenemos que agregar la *ecuación de conservación de la masa* (ec. (3.15) ó (3.17))

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (5.2)$$

y la *ecuación de la energía* (4.34), en la cual consistentemente con la (5.1) vamos también a despreciar los efectos de las viscosidades. Si además podemos ignorar la conducción del calor, la ecuación de la energía se reduce a la forma sencilla¹

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.3)$$

donde e indica la energía interna por unidad de masa.

Antes de comenzar el análisis del sistema de ecuaciones (5.1)-(5.3), es importante examinar el problema de cómo complementarlas para determinar enteramente el flujo. Se trata de un sistema de cinco ecuaciones (una ecuación vectorial más dos ecuaciones escalares) en el que figuran seis funciones incógnitas del flujo: las tres componentes del vector \mathbf{u} y los tres escalares p , ρ y e .

Para cerrar el sistema necesitamos pues otra relación independiente más entre p , ρ y e . Esta relación es la *ecuación de estado*

$$p = p(\rho, e) \quad (5.4)$$

que es una propiedad del medio. Ya conocemos una forma particular de la (5.4): la ecuación de estado de los gases perfectos, que escribiremos en la forma $p = (\gamma - 1)\rho e$.

No se debe confundir la ecuación de la energía (5.3) con la ecuación de estado. Si bien ambas involucran a las mismas variables, la (5.3) establece cómo varía la energía, y por lo tanto *depende del tipo de transformaciones* que se están considerando; por ejemplo, la forma (5.3) dice que la energía interna puede variar solamente por el trabajo de la presión. En cambio, la ecuación de estado establece una relación entre p , ρ y e que vale *siempre*, independientemente de las transformaciones admitidas.

¹ En consecuencia, estamos considerando transformaciones adiabáticas.

Casos particulares de flujos ideales

Para determinar el flujo de un fluido ideal se tienen, entonces, seis ecuaciones y seis incógnitas (\mathbf{u} , p , ρ y e). Esta situación, que es la más general, muchas veces se simplifica considerablemente. Son de particular interés los casos siguientes:

Flujo incompresible: cuando el flujo se puede considerar incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, o sea $\rho = \text{cte.}$) e es constante (pues no hay trabajo de la presión sobre los elementos del fluido); en estas condiciones, la ecuación de movimiento mantiene la misma forma, pero ahora ρ no es una variable sino un parámetro; quedan las cuatro variables (\mathbf{u} , p) y la ecuación de Euler más la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (que es la forma particular que toma la ecuación de conservación de la masa), alcanzan para determinarlas.

Flujo irrotacional: otra simplificación común es suponer que el flujo es *irrotacional*, es decir que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Veremos más adelante que esto reduce el sistema a dos ecuaciones.

Flujo incompresible e irrotacional: finalmente, el uso combinado de las condiciones $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ reduce el sistema a una única ecuación escalar.

Formas de la Ecuación de Euler para flujos barotrópicos

Una característica destacable de la ec. (5.1) es que bajo una gran variedad de condiciones el segundo miembro se puede escribir como un gradiente². Cuando la fuerza de volumen es la gravedad y también en otros casos de interés práctico, el término \mathbf{g} tiene la forma

$$\mathbf{g} = -\nabla\varphi \quad (5.5)$$

En cuanto al término $\nabla p / \rho$, para que se lo pueda escribir como el gradiente de un potencial, se tiene que cumplir la condición

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Para ver qué implica la (5.6), usamos la identidad vectorial

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{A}) = \alpha \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla \alpha) \times \mathbf{A} \quad (5.7)$$

y obtenemos

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho) \times (\nabla p) = -\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho) \times (\nabla p) \quad (5.8)$$

Por lo tanto, para que $\nabla p / \rho$ se pueda escribir como el gradiente es preciso que los gradientes de p y de ρ sean *paralelos* en todo punto del fluido, esto es, que las superficies sobre las cuales $p = \text{cte.}$ (llamadas *isobaras*) coincidan con las superficies sobre las que $\rho = \text{cte.}$ (denominadas *isoesteras*). En ese caso se tiene que $\rho = f(p)$. Un flujo en el cual esto se cumple se denomina *barotrópico*. Discutiremos a continuación varios casos de este tipo.

² Hay importantes excepciones; por ejemplo, en sistemas rotantes (no inerciales) \mathbf{g} no se puede escribir como $\nabla\varphi$. Estos casos incluyen las corrientes en los océanos y en la atmósfera terrestre y se deben tratar aparte.

Flujo incompresible con densidad uniforme

Este es un caso trivial de flujo barotrópico en el cual el gradiente de la densidad es idénticamente nulo. Entonces la ecuación de Euler se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla\left(\varphi + \frac{p}{\rho}\right) \quad (5.9)$$

Si se toma el rotor de ambos miembros se encuentra que $\nabla \times (d\mathbf{u}/dt) = 0$. Esto no se traduce en consecuencias inmediatas sobre el campo \mathbf{u} , pero implica que derivada total de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ es nula pues $\nabla \times (d\mathbf{u}/dt) = d(\nabla \times \mathbf{u})/dt = d\boldsymbol{\omega}/dt = 0$.

Usando una conocida relación vectorial, podemos escribir la derivada convectiva $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ como

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla(u^2/2) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \quad (5.10)$$

y por lo tanto la (5.9) tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (5.11)$$

Esta es una expresión muy interesante de la ecuación de movimiento, que da lugar a tres formas simplificadas muy usadas que consideraremos a continuación.

Flujo incompresible estacionario ($\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$).

Tomando el producto escalar de la (5.11) por \mathbf{u} , obtenemos

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (5.12)$$

lo que muestra que a lo largo de una línea de corriente se cumple que

$$\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = \text{cte.} \quad (5.13)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Bernoulli* y expresa una integral primera³ de la ecuación del movimiento para flujos invíscidos, incompresibles y estacionarios.

Flujo incompresible irrotacional ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$)

En este caso el campo de velocidad se puede derivar de un potencial ϕ , esto es

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (5.14)$$

y entonces la ec. (5.11) se puede escribir en la forma

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (5.15)$$

³ Esta integral primera equivale a la integral primera de la energía mecánica que se tiene en la dinámica de un punto material cuando se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa.

de donde obtenemos la integral primera

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (5.16)$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo. La existencia de esta integral es importante pues simplifica el problema de encontrar soluciones no estacionarias de la ecuación de Euler.

Flujo incompresible irrotacional y estacionario ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$ y $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$)

En este caso la (5.15) se reduce a

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (5.17)$$

de donde se desprende que

$$\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = \text{cte.} \quad (5.18)$$

en todo punto del flujo. La (5.18) es una forma muy importante de la ecuación de Bernoulli que vamos a usar frecuentemente en los Capítulos siguientes.

Flujo compresible barotrópico

Cuando el flujo es compresible, pero no hay conducción de calor y además el flujo es *homoentrópico* (es decir la entropía tiene el mismo valor en todo punto) o bien es *estacionario*, el término $\nabla p / \rho$ se puede escribir en la forma ∇h donde

$$h = e + p / \rho \quad (5.19)$$

es la *entalpía* por unidad de masa.

Naturalmente, en un flujo gobernado por la ecuación de Euler, la derivada total de la entropía es nula si no hay conducción de calor. En efecto, en este caso se tiene $de = -p dv$ (pues la variación de la energía interna por unidad de masa se debe exclusivamente al trabajo reversible de la presión) y por lo tanto

$$TdS = de + p dv = 0 \quad (5.20)$$

En consecuencia, si el flujo es homoentrópico en un cierto instante, mantendrá siempre esta condición.

Volvamos ahora a la entalpía y calculemos su derivada total para un flujo sin conducción de calor gobernado por la ecuación de Euler. La unidad de masa ocupa el volumen $v = 1 / \rho$, luego $h = e + pv$ y entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} + v \frac{dp}{dt} = v \frac{dp}{dt} \quad (5.21)$$

Expresando las derivadas totales en la forma $d / dt = \partial / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, queda:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) \quad (5.22)$$

o sea

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla h \right) \quad (5.23)$$

El primer miembro de esta ecuación es (recordemos que $h = e + p/\rho = e + pv$):

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.24)$$

y claramente es nulo si el flujo es *estacionario*, o bien si es *homoentrópico*, pues en tal caso $de = -p dv$ tanto si se trata de variaciones convectivas o locales.

Por lo tanto, cuando se cumple una u otra de estas condiciones, la (5.23) nos dice que

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h \quad (5.25)$$

y por consiguiente, la integral del movimiento (5.13) o (5.16) hallada para flujos incompresibles con densidad uniforme existe también para flujos compresibles, pero con la función entalpía $h = e + p/\rho$, en lugar del cociente p/ρ que aparecía para el caso de flujos incompresibles.

Nótese que tanto p/ρ para fluidos incompresibles como h para fluidos compresibles (bajo las condiciones señaladas), cumplen el rol de un potencial por unidad de masa, del mismo modo que φ . Naturalmente, φ está asociado con las fuerzas de volumen, pues $-\nabla\varphi$ es la aceleración que producen dichas fuerzas. En cambio p/ρ (para fluidos incompresibles) y h (para fluidos compresibles, pero sólo cuando el flujo es estacionario o bien homoentrópico) están asociadas con las fuerzas de superficie, y representan un potencial por unidad de masa cuyo gradiente (en ambos casos) produce una aceleración igual a $-(\nabla p)/\rho$.

Ecuaciones de evolución de la vorticidad

Examinaremos primero el caso de flujos ideales barotrópicos, con fuerzas de volumen conservativas. La ecuación de movimiento (ecuación de Euler) se puede escribir entonces en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \varphi + h \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (5.26)$$

Tomando el rotor de esta ecuación, tenemos,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (5.27)$$

que es la forma Euleriana de la ecuación de evolución de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ en los flujos ideales barotrópicos con fuerzas de volumen conservativas.

Para obtener la forma Lagrangiana, observemos que el segundo término de esta expresión se puede simplificar usando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (5.28)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos vectores cualesquiera. De esta manera la (5.27) se escribe

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5.29)$$

Pero $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} d\rho/dt$, y $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$, por lo tanto nos queda

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.30)$$

que es la ecuación de la vorticidad en forma Lagrangiana.

Debe quedar claro que esta ecuación, ya sea en forma Euleriana (5.27) o Lagrangiana (5.30), *no es* equivalente a la ecuación de Euler. En efecto, *no determina* el campo de velocidad sino solo su rotor⁴. Sin embargo, la ec. (5.30) es muy útil para determinar cómo varía $\boldsymbol{\omega}$ en un fluido ideal. La simple inspección de las formas Euleriana (5.27) y Lagrangiana (5.30) de la ecuación de evolución de $\boldsymbol{\omega}$ nos da una información importante sobre lo que ocurre con $\boldsymbol{\omega}$. En efecto, la ec. (5.27) nos dice que si en todo punto se cumple que $\boldsymbol{\omega} = 0$ (o, más en general, si en todo punto se cumple que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0$) en un cierto instante, entonces tendremos que en ese instante $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = 0$ en todo punto, y por lo tanto seguiremos teniendo $\boldsymbol{\omega} = 0$ en todo punto y en cualquier otro instante. Esto significa que:

Si en un fluido ideal⁵ la vorticidad es nula en un momento dado, como quiera que éste se mueva, seguirá siendo nula en todo otro momento.

En cambio, de la forma Lagrangiana se desprende que:

Si en un cierto volumen material se cumple que $\boldsymbol{\omega} = 0$ en un determinado instante, la vorticidad de ese mismo volumen material seguirá siendo siempre nula.

La ecuación de Helmholtz

Para conocer más acerca de la vorticidad conviene escribir la (5.30) de una forma diferente, que puede obtener con una transformación sencilla. Dividiendo la (5.30) por ρ , y reagrupando términos obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (5.31)$$

que se denomina *ecuación de Helmholtz*. La ecuación (5.31) tiene una notable interpretación (ver Fig. 5.1): la variación del vector $\boldsymbol{\omega}/\rho$ asociado a un elemento de fluido es proporcional a la de un elemento material de longitud infinitesimal $\boldsymbol{\lambda}$, *paralelo* a $\boldsymbol{\omega}/\rho$.

En efecto, la variación de un elemento material de longitud λ está dada por

⁴ Si sumamos a \mathbf{u} el gradiente de una función escalar cualquiera, la vorticidad sigue siendo la misma. Por lo tanto la vorticidad determina \mathbf{u} sólo a menos de funciones no constantes.

⁵ Siempre y cuando se cumplan las condiciones que permiten expresar la ecuación de movimiento en la forma (5.26)

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (5.32)$$

que es idéntica a la ecuación de Helmholtz con $\boldsymbol{\lambda}$ en lugar de $\boldsymbol{\omega}/\rho$.

La ecuación de Helmholtz tiene también una interpretación en términos del *momento angular*. En efecto, consideremos un elemento material homogéneo cilíndrico de longitud λ cuyo eje es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$. Ya hemos visto en el Capítulo 3 (ec. (3.37)) que dicho elemento rota como un cuerpo rígido, con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (5.33)$$

Luego el módulo del momento angular del elemento es

$$L = C \delta m \delta r^2 \omega \quad , \quad \delta m = \pi \delta r^2 \lambda \rho \quad (5.34)$$

donde C es un factor numérico constante⁶. Supongamos ahora que el elemento se ha estirado, adquiriendo una longitud λ' , y al mismo tiempo han variado su radio y su densidad, que valen ahora $\delta r'$ y ρ' , y su velocidad angular, que ahora es ω' . Su momento angular es entonces

$$L' = C \delta m \delta r'^2 \omega' \quad (5.35)$$

puesto que su masa se mantiene constante porque es un elemento material.

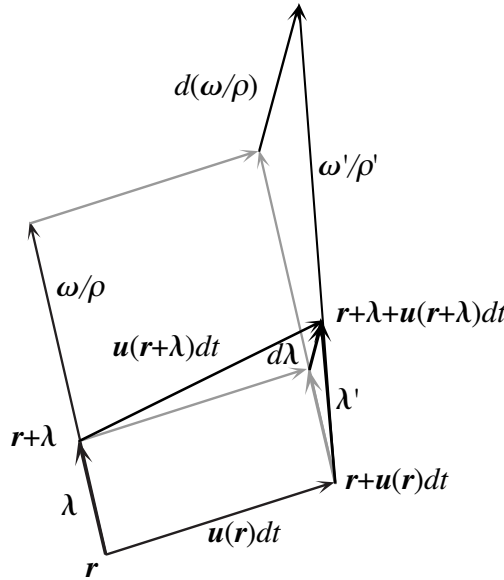


Fig. 5.1. Interpretación de la ecuación de Helmholtz.

A partir de la constancia de la masa ($\delta m = \pi \delta r'^2 \lambda' \rho' = \pi \delta r^2 \lambda \rho$) obtenemos

$$\delta r'^2 = \delta r^2 \frac{\lambda \rho}{\lambda' \rho'} \quad (5.36)$$

⁶ El factor C es un número que se puede obtener calculando el momento de inercia de un cilindro homogéneo que rota alrededor de su eje. Pero su valor exacto es irrelevante en el presente contexto.

Pero hemos visto que las variaciones de λ y ω/ρ son proporcionales; entonces

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega'/\rho'}{\omega/\rho} \quad (5.37)$$

de donde obtenemos

$$\frac{\lambda\rho}{\lambda'\rho'} = \frac{\omega}{\omega'} \quad (5.38)$$

Sustituyendo (5.38) en (5.36) resulta

$$\delta r'^2 \omega' = \delta r^2 \omega \quad (5.39)$$

y por lo tanto

$$L' = L \quad (5.40)$$

es decir, la ecuación de Helmholtz es también un enunciado de la conservación del momento angular de un elemento de fluido.

En resumen, hemos visto que en un flujo gobernado por la ecuación de Euler, la variación de ω está sujeta a fuertes restricciones:

Si en un determinado momento la vorticidad es nula en el interior de un cierto volumen material, seguirá siendo nula siempre en ese volumen. Esto quiere decir que la vorticidad no se transfiere de una región material a otra del fluido, sino que es arrastrada por el movimiento del fluido. En este traslado, el valor de ω varía de acuerdo con las deformaciones del elemento de fluido según lo establece la ecuación de Helmholtz, pero nunca aparece vorticidad en un elemento de fluido donde era nula, ni se anula en un elemento donde tenía un valor finito.

En particular, si después de un movimiento como se quiera complicado, un elemento material de fluido vuelve a tener en $t = t_1$ la misma forma y tamaño que tenía en $t = t_0$, tendremos que $|\omega(t_1)| = |\omega(t_0)|$ para ese elemento.

Teorema de Kelvin

Vamos a demostrar que en los flujos ideales barotrópicos (cuando $\nabla p/\rho$ se puede poner bajo la forma de un gradiente) con fuerzas de volumen conservativas, la circulación de la velocidad a lo largo de un línea material cerrada se mantiene constante. Este enunciado se conoce con el nombre de *Teorema de Kelvin*, y se puede considerar como la forma integral de la ecuación de Helmholtz.

La circulación de \mathbf{u} alrededor de una curva material cerrada C (ver Fig. 5.2) se define como

$$\Gamma_C(t) = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.41)$$

En general, recordando lo visto para la derivada total de integrales materiales (Capítulo 3), se tiene que

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \quad (5.42)$$

Pero todos los elementos $d\mathbf{l}$ son elementos materiales, puesto que conforman una línea material cerrada; luego, se puede escribir

$$\frac{d(d\mathbf{l})}{dt} = (d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (5.43)$$

Reemplazando esta expresión y empleando la ecuación de Euler en la forma $d\mathbf{u}/dt = -\nabla(\varphi + h)$, queda

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = -\oint_C \nabla(\varphi + h) \cdot d\mathbf{l} + \oint_C d\mathbf{l} \cdot \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right) \quad (5.44)$$

donde hemos expresado $\mathbf{u} \cdot (d\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ en forma conveniente. De esta forma vemos que ambas integrales son nulas, puesto que sus integrandos son diferenciales totales, lo que demuestra el enunciado del Teorema de Kelvin.

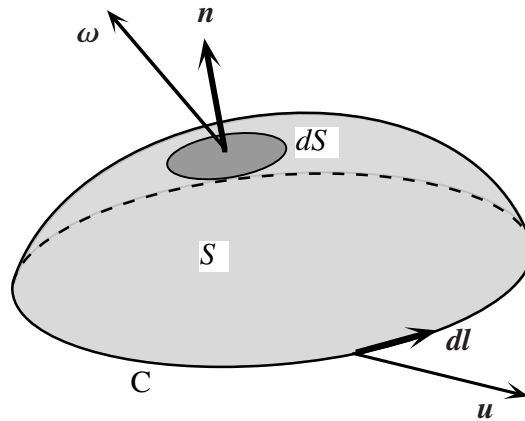


Fig. 5.2. Circulación de \mathbf{u} alrededor de una curva material cerrada C y flujo de la vorticidad concatenado por la misma.

Dado que Γ_C es una constante, si aplicamos el teorema de Stokes a la (5.41) obtenemos

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{cte.} \quad (5.45)$$

donde S es una superficie material abierta cualquiera dentro del fluido, que se apoya sobre la curva C (Fig. 5.2). La superficie S es arbitraria, puesto que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (5.46)$$

La (5.45) muestra entonces que el flujo de $\boldsymbol{\omega}$ concatenado por toda curva material C es invariante.

Movimientos vorticosos

Del mismo modo que se definen las líneas de corriente como las líneas que en un instante dado t son tangentes al campo de velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, se definen las *líneas de vórtice* como las líneas que en un instante dado t son tangentes al *campo de vorticidad* $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$. El haz constituido por las líneas de vórtice concatenadas por la curva C se denomina *tubo de vórtice*. Las líneas de vórtice que pasan por la curva C forman la *superficie* o *pared* del tubo de vórtice. La fuerza de un tubo de vórtice se define como el flujo de $\boldsymbol{\omega}$ concatenado por toda curva material C que rodea el tubo. Usando esta terminología, la (5.45) expresa que *la fuerza de todo tubo de vórtice es invariante*.

Los tubos de vórtices son en algún sentido permanentes, y la superficie material que coincide en un dado instante con la superficie de un tubo de vórtice, continúa siendo la superficie de ese tubo de vórtice. En otras palabras, en un fluido no viscoso, los tubos de vórtice se mueven con el fluido y su fuerza permanece constante. Este enunciado resume las leyes más importantes de la dinámica de vórtices.

Si la sección transversal de un tubo de vórtice tiende a cero, en el límite se obtiene un línea de vórtice. El resultado anterior muestra que una línea material que coincide inicialmente con una línea de vórtice sigue siendo una línea de vórtice. El hecho que la fuerza de un tubo de vórtice de pequeña sección transversal permanece constante mientras se mueve con el fluido, tiene implicaciones para una línea de vórtice. En efecto, si un elemento de longitud Δl de una línea material que coincide con una línea de vórtice aumenta su longitud, entonces la pequeña sección transversal ΔS del tubo de vórtice debe disminuir de acuerdo con la conservación de la masa, y la magnitud de la vorticidad debe aumentar. Dado que $\omega \Delta S = \text{cte.}$ y $\Delta S \Delta l \rho = \text{cte.}$, tanto ω como Δl varían como $1/\Delta S$, en otras palabras, $\omega \propto \rho \Delta l$, como ya habíamos demostrado antes.

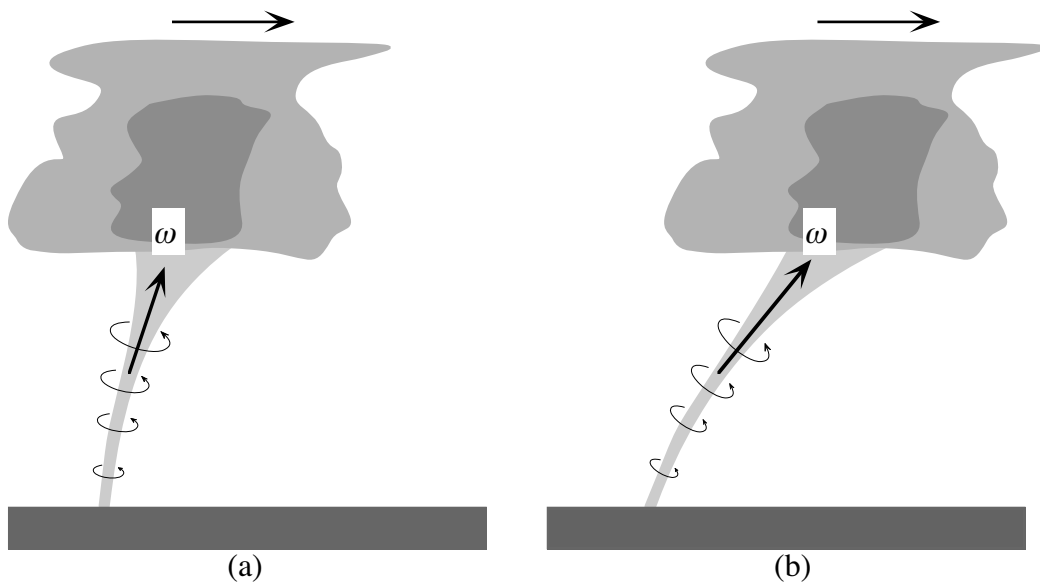


Fig. 5.3. Intensificación de un tornado por estiramiento de los tubos vorticosos.

De resultados de esto, el estiramiento de los tubos vorticosos debido al movimiento del fluido intensifica la vorticidad local. Esto es lo que ocurre en los tornados, donde las fuertes corrientes térmicas ascendentes que producen los cumulonimbus producen un fuerte estiramiento de los tubos vorticosos lo cual a su vez origina los intensos y devastadores movimientos rotatorios que se observan. La característica proyección en forma de embudo de los tornados (y no el aire en su

interior) señala, en realidad, el tubo vorticoso pues marca regiones de muy baja presión (donde el aire se expande rápidamente y la humedad se condensa), y éstas a su vez están ubicadas en el núcleo del vórtice, donde se concentra toda la vorticidad. De esta forma, cuando las nubes de tormenta se desplazan (Fig. 5.3) la vorticidad se intensifica: un ejemplo práctico de las consecuencias de la ecuación de Helmholtz.

En contraste con lo anterior, el frenamiento gradual (“spin-down”) del líquido en una taza de té que ocurre después de haberlo revuelto para disolver el azúcar, es el resultado del acortamiento de los tubos vorticosos (Fig. 5.4). El grueso del flujo es esencialmente no viscoso y en rápida rotación, y la fuerza centrífuga se equilibra (casi) con el gradiente de presión en sentido radial y dirigido hacia el eje. Este gradiente de presión también actúa sobre la delgada capa de líquido en contacto con el fondo de la taza, donde el flujo es viscoso, pero en esta zona prevalece sobre la fuerza centrífuga pues el líquido gira mucho más lentamente. Por lo tanto, el fluido de la capa viscosa se mueve en espiral hacia el centro (esto se manifiesta en que las hojas de té se acumulan en el centro del fondo de la taza) y luego asciende, saliendo de la capa vorticiosa (Fig. 5.4b). De resultados de esto los tubos vorticosos del grueso del fluido se acortan y su sección aumenta, de modo que la vorticidad decrece con el tiempo. Es debido a esta sutil combinación de dinámica viscosa y no viscosa que ocurre el inocuo y familiar fenómeno del aquietamiento del té que ha sido revuelto.

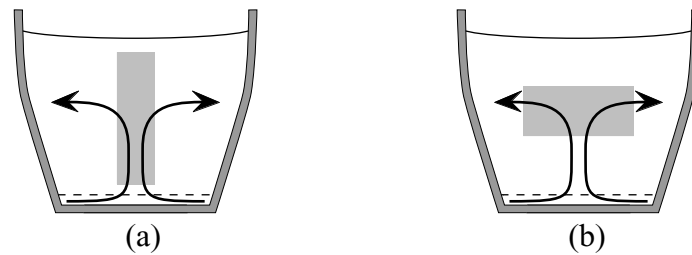


Fig. 5.4. Cuando se ha revuelto el té de una taza, la rotación del líquido se frena debido al acortamiento de los tubos vorticosos.

La ecuación de Helmholtz (5.31) toma una forma particularmente sencilla en el caso de flujos planos o con simetría axial, en los cuales una de las tres coordenadas es ignorable. Para flujos planos ($\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, 0)$, $\partial / \partial z = 0$), la única componente no nula de $\boldsymbol{\omega}$ es ω_z . Entonces, la (5.31) se reduce a

$$\omega = k\rho \quad , \quad k = \text{cte.} \quad (5.47)$$

que nos dice simplemente que la vorticidad de un elemento material varía en proporción con su densidad. Si además de plano, el flujo es incompresible, la (5.47) nos dice que la vorticidad de un elemento material se conserva: en otras palabras, la vorticidad está congelada en el fluido y es arrastrada por éste en su movimiento.

Para flujos con simetría axial, en un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) con eje z coincidente con el eje de simetría,

$$\mathbf{u} = u_r(r, z)\mathbf{e}_r + u_z(r, z)\mathbf{e}_z \quad (5.48)$$

Las líneas de corriente están todas en planos $\theta = \text{cte.}$ y la única componente no nula de $\boldsymbol{\omega}$ es la componente θ :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_\theta = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (5.49)$$

Al usar estas expresiones en la ec. de Helmholtz (5.31) hay que tener presente que la componente θ del operador gradiente es $\nabla_\theta = r^{-1} \partial / \partial \theta$, y que $\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta = \mathbf{e}_\theta$, pues el versor \mathbf{e}_r depende de θ . Resulta entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\rho r} \right) = 0 \quad (5.50)$$

de donde resulta

$$\omega = k \rho r \quad , \quad k = \text{cte.} \quad (5.51)$$

Si además de tener simetría axial, el flujo es incompresible, la (5.51) nos dice que la vorticosidad de un elemento material varía en proporción a r . A este mismo resultado se podría haber llegado directamente observando que en este caso las líneas de vórtice son circunferencias de radio r . Los anillos de humo son ejemplos de flujos vorticosos con simetría axial.

Flujos viscosos, no barotrópicos y con fuerzas de volumen no conservativas

Cuando se cumple una o más de las tres condiciones mencionadas en el encabezamiento, la circulación de la velocidad alrededor de una línea material cerrada C no es más constante. Para analizar de donde provienen las variaciones de Γ_C retomamos la demostración del teorema de la circulación (teorema de Kelvin) a partir de la ec. (5.42):

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \quad (5.52)$$

El segundo término del miembro derecho es nulo como antes. Para evaluar el primero, en lugar de la ecuación de Euler (como hicimos antes), usaremos la ecuación de Navier-Stokes (ec. (4.22)) escrita en la forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.53)$$

donde con \mathbf{f} indicamos la aceleración debida a las fuerzas de volumen (ahora no necesariamente conservativas) y $\nu = \eta / \rho$ es el coeficiente de *viscosidad cinemática*. Sustituyendo la (5.53) en (5.52) obtenemos

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} \quad (5.54)$$

Examinemos ahora el significado físico de los tres términos **I**, **II**, **III**.

Fuerzas de volumen no conservativas

Corresponden al término **I**. Las fuerzas que no derivan de un potencial, y que por lo tanto tienen una circulación no nula alrededor de un circuito cerrado, *crean circulación* en el fluido. En hidrodinámica se presentan dos casos importantes.

Las fuerzas de Coriolis

Estas fuerzas aparecen cuando se estudia el movimiento de un fluido en un referencial que rota con una velocidad angular Ω , bajo la forma de un término $-2\Omega \times \mathbf{u}$. Por ejemplo, los flujos en la atmósfera y en los océanos tienen lugar en un referencial que gira con la velocidad angular local debida a la rotación terrestre, cuya magnitud para un lugar cuya latitud es θ tiene el valor

$$\Omega = \Omega_0 \cos \theta \quad , \quad \Omega_0 = 2\pi / (24 \text{ horas}) = 7.2 \times 10^{-5} \text{ radianes/s} \quad (5.55)$$

Debido a la fuerza de Coriolis se generan movimientos de circulación ciclónica en la atmósfera terrestre, cuyo sentido depende del hemisferio considerado. El término de Coriolis domina cuando es superior a los efectos de la aceleración convectiva $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. La razón de las amplitudes de ambos efectos es del orden de

$$\frac{\text{efectos convectivos}}{\text{efectos de Coriolis}} \approx \frac{U^2 / L}{\Omega U} \approx \frac{U}{\Omega L} \equiv \text{Ro} \quad (5.56)$$

El número puro Ro se denomina número de Rossby. El efecto de las fuerzas de Coriolis prevalece cuando Ro es pequeño, lo que se cumple al nivel de los movimientos atmosféricos de gran escala ($L \approx 10^6 \text{ m}$, $U \approx 1 - 10 \text{ m/s}$).

Las fuerzas magnetohidrodinámicas

También se crea vorticosidad por efecto de las fuerzas producidas por campos magnéticos sobre las corrientes eléctricas que circulan en fluidos conductores. En efecto, estas fuerzas son de la forma $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ (\mathbf{j} es la densidad de corriente y \mathbf{B} el campo magnético) y comunican al fluido una componente de rotación. Ejemplos de fluidos conductores son los metales líquidos (como el mercurio, el sodio líquido que se usa como refrigerante en los reactores nucleares autofertilizantes, y el núcleo terrestre) y los plasmas. En el caso del núcleo terrestre, la circulación inducida por los movimientos convectivos radiales dan origen al magnetismo terrestre, pues existe un acoplamiento entre el campo magnético creado por el movimiento del fluido conductor y el movimiento mismo del fluido (efecto dínamo).

Flujos no barotrópicos

Corresponden al término **II** de la (5.54), que existe cuando ∇p y $\nabla \rho$ no son paralelos. Consideremos un elemento del fluido (ver Fig. 5.5): tendremos en este caso que el baricentro del elemento (determinado por la estratificación de densidad) no coincide con el centro de aplicación del empuje de Arquímedes (relacionado con el gradiente de la presión del fluido que rodea al elemento). Por lo tanto aparece una cupla que tiende a producir la rotación del elemento y por lo tanto genera circulación de la velocidad. Un ejemplo de flujo no barotrópico es el que ocurre en un fluido comprendido entre dos placas verticales que están a diferentes temperaturas. En este caso las variaciones de densidad que ocurren por efecto de la expansión térmica inducen un flujo de convección en el cual el fluido del lado de la placa caliente asciende mientras que el que está del lado de la placa fría desciende.

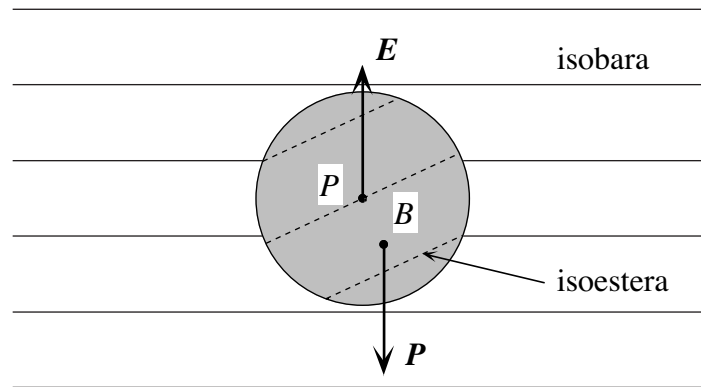


Fig. 5.5. Fuerzas de empuje y peso en un flujo no barotrópico. Cuando el gradiente de la presión y de la densidad no son paralelos, el punto de aplicación del empuje E (determinado por las isobaras del fluido exterior) y el baricentro de un elemento del fluido (determinado por las isoesteras) no se encuentran sobre una línea vertical. Aparece entonces una cupla que produce la rotación local del líquido e induce una circulación de la velocidad.

Efectos de la viscosidad

Están dados por el término **III** de la (5.54). La viscosidad ocasiona gradientes de la velocidad en las inmediaciones de las paredes y por lo tanto genera vorticidad. Un ejemplo es un fluido contenido dentro de un cilindro, que inicialmente está en reposo y en un momento dado comienza a girar alrededor de su eje con una velocidad angular uniforme. El fluido en contacto con las paredes comienza a girar, y el movimiento de rotación se transmite paulatinamente al resto del fluido hasta que finalmente se alcanza un estado estacionario en el cual todo el fluido rota en bloque con la misma velocidad angular que el cilindro. Es el transporte de la vorticidad debido a la viscosidad lo que origina este proceso. Volveremos sobre este tema más adelante, cuando estudiemos la difusión de la vorticidad.

Clasificación de las diferentes clases de flujos

Hacemos ahora un breve digresión para poner orden en los flujos que hemos mencionando hasta aquí. A este punto, efectivamente, quien se acerca por la primera vez a la Mecánica de Fluidos se puede sentir apabullado por la terminología que designa la gran variedad de flujos que hemos presentado, las diferentes ecuaciones que los rigen, las maneras de describirlos, y sus principales características. Puede ser útil como ayuda memoria presentar un cuadro de situación, o esquema conceptual, que permita visualizar la información toda esta información. Nuestro esquema se basa en clasificar al flujo de acuerdo con los cinco criterios siguientes:

- (a) si es o no viscoso,
- (b) si es incompresible (y entonces $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), o compresible,
- (c) si tiene o no alguna simetría (por ejemplo plana o axial),
- (d) si es barotrópico (y entonces el término $\rho^{-1}\nabla p$ se puede poner bajo la forma de un gradiente), o no lo es,
- (e) si es irrotacional (y entonces $\nabla \times \mathbf{u} = 0$) o no.

De acuerdo con estos criterios hay 18 variedades de flujos (los criterios no son independientes, por ejemplo un flujo irrotacional es necesariamente invíscido y barotrópico). En la Fig. 5.6

representamos nuestro esquema como un mapamundis de los flujos. El lector debe pensar que los bordes superior e inferior del mapa están unidos, de modo se forma un cilindro, y que también los bordes izquierdo y derecho se unen, de modo que el cilindro se cierra sobre sí mismo formando un toroide, o rosquilla. Tuvimos que cortar el toroide en un plano poloidal y uno toroidal para desplegarlo y producir una figura plana.

Con la ayuda de la Fig. 5.6, el lector puede ubicar los diferentes tipos de flujo que hemos mencionado y los que trataremos en los siguientes Capítulos, que aparecen como regiones del mapa, y recordar las condiciones que satisfacen y cuáles ecuaciones los rigen.

		viscoso		no viscoso (ideal)			
compresible		18	17	9	10	no barotrópico	
		16	15	ϕ 6	7	8	barotrópico
incompresible		14	13	3 ϕ, ψ	4	5	
		12	11 ψ	1	2		no barotrópico
		3-D	2-D	3-D			
				irrotacional			

Fig. 5.6. Diferentes variedades de flujos. De acuerdo con los 5 criterios de clasificación existen diversas clases de flujos, que se representan por medio de las regiones numeradas de 1 a 18 en que hemos dividido el rectángulo, de acuerdo con los criterios que se expresan alrededor de su perímetro (el orden de numeración es arbitrario). Las áreas gris medianas más la región 3 representan los flujos bidimensionales incompresibles para los cuales se puede definir la función corriente ψ (ver Capítulo 6). Las áreas gris claro junto con la 3 corresponden a los flujos invíscidos, barotrópicos e irrotacionales para los cuales se puede definir el potencial de velocidad ϕ . La región 3 (gris oscuro) comprende los flujos potenciales incompresibles y planos o axialmente simétricos para los cuales se pueden definir tanto ϕ como ψ , y en consecuencia el potencial complejo $w = \phi + i\psi$ (ver Capítulo 6).

Esta clasificación no exhaustiva, pues dentro de cada provincia hay subdivisiones o distritos, según si el flujo es estacionario o depende del tiempo, dentro de los flujos incompresibles si la densidad es uniforme o si hay estratificaciones, etc.. No se han dibujado en la Fig. 5.6 para no complicarla demasiado, pero si fuese necesario se podrían trazar mapas parciales para mostrar esos detalles.

6. FLUJOS IDEALES INCOMPRESIBLES E IRROTACIONALES

El potencial de velocidad

El movimiento de los fluidos perfectos (no viscosos) se describe mediante la ecuación de Euler

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (6.1)$$

que ya tratamos en los Capítulos 4 y 5. Este tipo de flujos es muy importante pues en muchas situaciones de interés práctico, los efectos de la viscosidad de los fluidos reales quedan limitados a las regiones del espacio (muchas veces pequeñas) donde tienen lugar fuertes gradientes de la velocidad (*capas límite*, ver el Capítulo 7, o regiones donde el flujo es turbulento), mientras que en el grueso del flujo los efectos de la viscosidad son despreciables y el fluido se puede suponer ideal. De acuerdo con los resultados del Capítulo 5, en las regiones materiales de flujo ideal no se crea ni se destruye vorticosidad, de manera que si en un dado instante ésta es nula, sigue siendo nula en todo otro momento.

Una de las propiedades fundamentales de los fluidos invíscidos es que puede haber flujos que son permanentemente irrotacionales, es decir que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ en todos los puntos del fluido. Si además el flujo es incompresible, el campo de velocidad satisface las condiciones

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (6.2)$$

La irrotacionalidad del campo de velocidad implica que \mathbf{u} deriva de un *potencial de velocidad* ϕ , esto es

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (6.3)$$

y la incompresibilidad implica entonces

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.4)$$

Por lo tanto ϕ satisface la ecuación de Laplace, que junto con la (6.3) determina $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Viceversa, la existencia de una función escalar ϕ que satisface la ecuación (6.4) implica la existencia de una función vectorial $\mathbf{u} = \nabla \phi$ que cumple las condiciones (6.2), como se puede verificar fácilmente. Los flujos para los cuales se cumple la (6.3) se denominan *flujos potenciales*. Claramente, la (6.3) implica que las líneas de corriente de un flujo potencial son ortogonales a las superficies equipotenciales, definidas por $\phi = \text{cte.}$.

En los flujos potenciales, la ecuación de movimiento (5.8) adopta la forma (5.13)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (6.5)$$

donde φ indica el potencial de las fuerzas de volumen, como ya vimos en el capítulo anterior. En esta aproximación ϕ , y entonces \mathbf{u} , quedan determinados por una ecuación lineal (la ecuación de Laplace). Sin embargo, de acuerdo con la (6.5) p depende de u en forma no lineal.

La solución de un problema de flujo potencial consiste pues en la determinación de dos magnitudes, ϕ y p , para lo cual disponemos de las dos ecuaciones escalares (6.4) y (6.5). Aún así, el problema es sencillo sólo para flujos estacionarios. Nótese, sin embargo, que si las condiciones de contorno no involucran la presión, la ecuación de Laplace para ϕ se puede resolver sin necesidad de conocer p ; en tal caso, la (6.5) sólo sirve para calcular p una vez determinado ϕ .

Debido a que la ecuación de Laplace es lineal, las combinaciones lineales de soluciones son también soluciones de la misma. Se puede entonces construir el campo de velocidad de un problema de flujo potencial superponiendo soluciones simples ya conocidas, de forma tal de satisfacer las condiciones de contorno correspondientes a la solución buscada. Por otra parte, del mismo modo que en la Electroestática cuando se calcula el potencial eléctrico de una distribución de cargas, podremos escribir el potencial de velocidad de un flujo potencial en forma de un *desarrollo multipolar*. Tal desarrollo corresponde a la suma de los potenciales elementales asociados a distribuciones de fuentes de fluido de complejidad creciente (fuente única, dipolo, cuadrupolo, ... etc.). De esta forma veremos que el campo de velocidad de flujos simples, como el flujo alrededor de un obstáculo esférico o cilíndrico, se puede escribir como una combinación lineal del potencial de velocidad correspondiente a un flujo uniforme y el potencial de velocidad de un dipolo.

Otra técnica para resolver la ecuación de Laplace consiste en buscar soluciones en variables separadas, para lo cual es necesario utilizar coordenadas que respeten las simetrías del problema. Los problemas con simetría cilíndrica llevan a soluciones cuyas partes radiales son funciones de Bessel; en aquellos que tienen simetría esférica intervienen las funciones de Legendre, etc..

Condiciones de contorno para flujos potenciales

La teoría de la ecuación de Laplace establece que la solución está determinada si se conoce ϕ sobre toda una superficie cerrada. Sin embargo, es preferible en el presente contexto imponer condiciones sobre la velocidad. Esto plantea el problema de averiguar qué condición sobre la velocidad es equivalente a asignar ϕ . Evidentemente, por lo general no se podrá asignar \mathbf{u} (es decir, todas sus componentes), pues serían tres condiciones, y no una sola como es asignar ϕ .

Se puede demostrar que el campo \mathbf{u} queda unívocamente determinado si se asigna sólo la *componente normal* de \mathbf{u} sobre el contorno cerrado, es decir, una condición escalar.

En efecto, nótese que

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (6.6)$$

pues $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Entonces, si V es el volumen ocupado por el fluido,

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) dV \quad (6.7)$$

Cuando $\phi \mathbf{u}$ es una función univaluada de la posición, se puede utilizar el teorema de la divergencia para transformar la integral de volumen. En general, el volumen V se encuentra rodeado por fuera por la superficie S_2 , y por dentro por la superficie S_1 , de modo que las normales $-\mathbf{n}_1$ y \mathbf{n}_2 son salientes del volumen (ver Fig. 6.1). Tenemos entonces

$$I = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = - \int_{S_1} \phi_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \phi_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (6.8)$$

De aquí podemos deducir lo siguiente:

- (a) si la componente normal de \mathbf{u} es nula en todas las superficies del contorno, entonces $I = 0$, lo cual puede suceder sólo si $\mathbf{u} = 0$ en todo el volumen,
- (b) si la componente normal de \mathbf{u} no es nula en todo el contorno, es fácil mostrar que su conocimiento es suficiente para determinar \mathbf{u} en todo el volumen. En efecto, supongamos que existan dos soluciones diferentes, $\mathbf{u} = \nabla\phi$ y $\mathbf{u}' = \nabla\phi'$, con la misma componente normal en el contorno. La diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ tiene entonces componente normal nula en el contorno y entonces, por (a), tenemos que $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = 0$ en todo el volumen, con lo que queda demostrado que la solución es única.

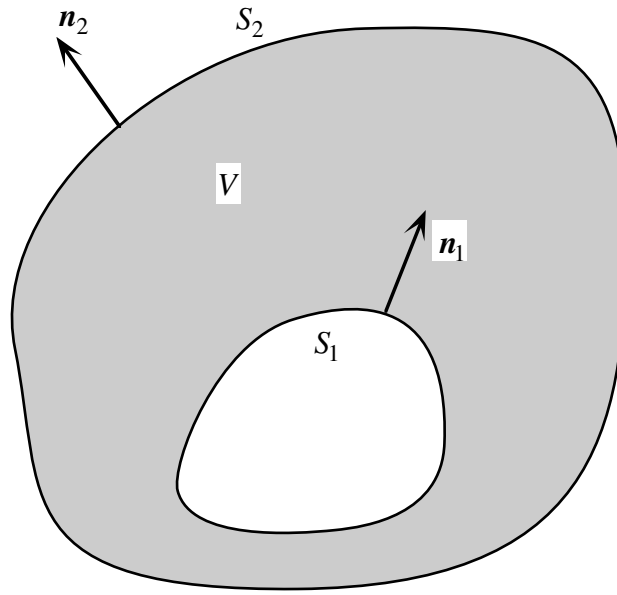


Fig. 6.1. Las superficies S_1 y S_2 limitan el flujo potencial que se desarrolla en el volumen V .

Si se asignaran, además de la componente normal, las dos componentes restantes, el problema quedaría sobredeterminado, y no tendría solución. En otras palabras, si se asigna $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sobre el contorno S , las dos componentes tangenciales sobre S *no son libres*, sino que quedan unívocamente determinadas al resolver la ecuación de Laplace. Esto, naturalmente, quiere decir que si parte del contorno (como suele ocurrir frecuentemente) es una pared sólida, sobre ésta se tiene $u_n = 0$ en el referencial de la pared. Pero las componentes *tangenciales* de \mathbf{u} sobre la pared, quedan determinadas por las condiciones sobre la totalidad del contorno, de forma que por lo general *no* son nulas.

Es oportuno aquí un breve comentario acerca del hecho que la condición de contorno sobre una pared sólida, esto es

$$u_n = 0 \quad (6.9)$$

en el referencial de la pared, no determina las componentes tangenciales de la velocidad. Del punto de vista matemático esto no trae inconsistencias, pues si los términos viscosos de la ecuación del movimiento son estrictamente nulos, no hay esfuerzos tangenciales. Pero del punto de

vista físico es cuestionable, pues por pequeño que sea el coeficiente de viscosidad, *no es aceptable* una discontinuidad tangencial en la velocidad. Luego son inaceptables condiciones de contorno que dejen libre la componente tangencial de \mathbf{u} tan cerca como se quiera de una pared sólida. Volveremos sobre este punto cuando estudiemos los flujos viscosos.

Flujos incompresibles bidimensionales y la función corriente

Muchos flujos de interés son esencialmente bidimensionales, es decir, una de las tres coordenadas espaciales es ignorable y la correspondiente componente de la velocidad es nula (o una constante). Los *flujos planos* y los flujos con *simetría axial* son ejemplos de esta clase de flujos. Consideremos los flujos planos. Es habitual elegir z como la coordenada ignorable, de modo que se puede suponer que $u_z = 0$ y que el flujo se desarrolla en el plano (x, y) . En estos casos es útil introducir el concepto de la *función corriente*.

Volvamos por un momento al caso general de un flujo incompresible en tres dimensiones. En virtud de la incompresibilidad, podemos siempre introducir una función vectorial \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.10)$$

El potencial vectorial de velocidad \mathbf{A} , asociado con la condición de incompresibilidad, es análogo al potencial vectorial que se introduce en el Electromagnetismo para describir el campo magnético en virtud de que éste cumple con la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Sin embargo, en general el interés práctico de \mathbf{A} es escaso, dado que estamos sustituyendo el campo de velocidad a determinar por otro campo vectorial, con lo cual no se hace un progreso significativo. Pero en el caso de los flujos planos, sí existe una ventaja, pues el campo de velocidad tiene sólo las componentes u_x y u_y , que además no dependen de z . Por este motivo, la única componente no nula de \mathbf{A} es $A_z \equiv \psi$, y de acuerdo a la (6.10) se cumple que

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.11)$$

En coordenadas polares (r, θ) tendremos

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.12)$$

La función ψ se denomina *función corriente* y representa, como hemos visto, la componente perpendicular al plano del flujo del potencial vectorial \mathbf{A} . Cabe observar que es posible introducir la función corriente para todos los flujos *bidimensionales incompresibles* (sean o no viscosos y sean o no irrotacionales), pues basta que el flujo cumpla la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por el contrario, el potencial de velocidad sólo se puede introducir para *flujos irrotacionales* (que por lo tanto son necesariamente invíscidos, barotrópicos y gobernados por fuerzas de volumen conservativas), pero no está limitado a los flujos bidimensionales.

Se puede observar asimismo que si el flujo bidimensional incompresible es también irrotacional, es decir, si cumple las condiciones (6.2), la función corriente satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.13)$$

al igual que el potencial de velocidad ϕ . Para ver esto basta usar las expresiones (6.11) de las componentes de \mathbf{u} en la condición $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. El hecho que para estos flujos tanto ϕ como ψ satisfacen la ecuación de Laplace permite (como veremos más adelante) definir un único potencial complejo $w = \phi + i\psi$ y aprovechar las poderosas técnicas matemáticas basadas en las propiedades de las funciones analíticas de variable compleja para encontrar las soluciones de esos problemas.

El significado de la función corriente se desprende de dos propiedades que vamos a analizar ahora. En primer lugar, las líneas $\psi = \text{cte.}$ coinciden con las líneas de corriente. Esto se puede ver tomando el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \nabla \psi$ y usando las (6.11):

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = u_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (6.14)$$

Este resultado implica que las líneas de corriente son ortogonales en todo punto a $\nabla \psi$. Pero por otra parte $\nabla \psi$ es ortogonal en todo punto a las líneas $\psi = \text{cte.}$, con lo cual queda demostrada la propiedad. Cuando, además, el flujo es también potencial, las líneas $\psi = \text{cte.}$ son ortogonales a las líneas equipotenciales $\phi = \text{cte.}$

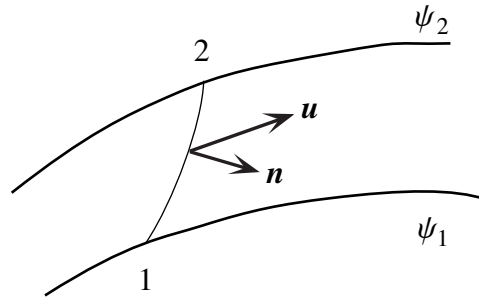


Fig. 6.2. La variación de la función corriente es igual al caudal volumétrico que pasa por el tubo de corriente definido por las líneas de corriente $\psi = \psi_1$ y $\psi = \psi_2$ y de espesor unidad en la dirección z .

En segundo lugar, la cantidad $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ representa el caudal volumétrico que pasa por el tubo de corriente de sección rectangular, comprendido entre las líneas de corriente $\psi = \psi_1$ y $\psi = \psi_2$ y de espesor unidad en la dirección z (ver Fig. 6.2). Para demostrar esta propiedad, calculemos dicho caudal. Resulta

$$Q = \int_1^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_1^2 [u_x dy + u_y (-dx)] = \int_1^2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (-dx) \right] = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (6.15)$$

donde hemos usado las (6.11) y el hecho que si $d\mathbf{l} \equiv (dx, dy, 0)$ entonces $\mathbf{n} \equiv (+dy, -dx, 0)$. Se verifica así también que en un flujo incompresible, el caudal volumétrico de un tubo de corriente es constante a lo largo del tubo.

Unicidad del potencial de velocidad y de la función corriente

Consideraremos ahora flujos potenciales incompresibles, estacionarios y planos (o más en general, bidimensionales). Si la región donde se desarrolla el flujo es *simplemente conexa*, hay (como

ya vimos) un *único* campo de velocidad que satisface las condiciones de contorno asignadas (es decir, la componente normal de la velocidad relativa sobre las superficies sólidas que limitan el flujo, y/o el valor de la velocidad al infinito cuando la región en que ocurre el flujo es ilimitada). Se puede demostrar que ese campo de velocidad es aquél que minimiza la energía cinética total, entre aquellos que cumplen la condición de incompresibilidad y las condiciones de contorno del problema. En estos casos el potencial de velocidad se puede definir sin ambigüedades. En efecto, tomemos a un punto O cualquiera en la región R_p del flujo plano irrotacional como referencia. Entonces, el potencial de velocidad en otro punto cualquiera P de R_p se define como

$$\phi(r_P) = \phi(r_O) + \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.16)$$

donde la integral se puede calcular sobre cualquier camino que vaya de O hasta P . En efecto, consideremos dos diferentes caminos 1 y 2 que van de O a P , y calculemos la circulación de la velocidad a lo largo de la curva cerrada C que parte de O y va hasta P por el camino 2 y regresa a O por el camino 1 (recorrido en sentido inverso, ver Fig. 6.3a). Tendremos

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_P^O \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_2 - \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) dS = 0 \quad (6.17)$$

donde hemos aplicado el Teorema de Stokes para transformar la integral sobre la curva cerrada C en una integral sobre una superficie S que se apoya sobre C y está íntegramente contenida en R_p , donde $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. De la (6.17) resulta que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_2 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (6.18)$$

y por consiguiente la definición (6.16) del potencial de velocidad está exenta de ambigüedades.

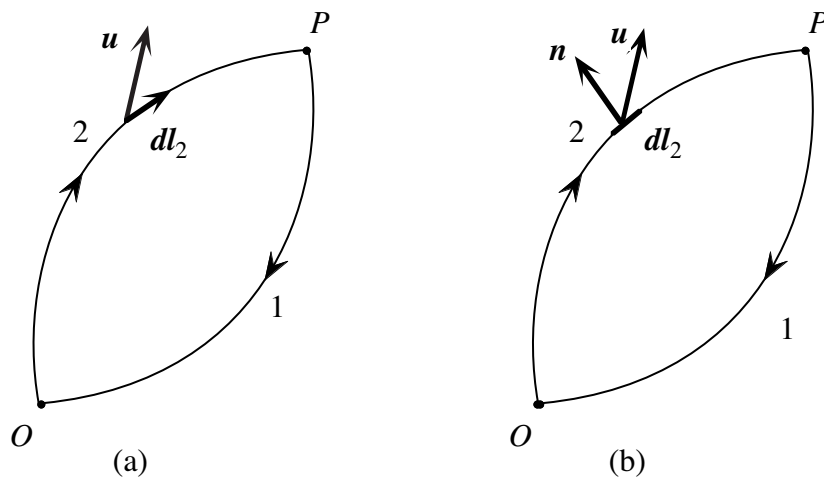


Fig. 6.3. (a) Definición del potencial de velocidad ϕ , (b) definición de la función corriente ψ cuando la región donde se desarrolla el flujo es simplemente conexa.

De modo análogo, cuando la región R_i donde se desarrolla el flujo plano incompresible es simplemente conexa, se puede definir la función corriente ψ sin ambigüedades. En efecto, tomemos

un punto O cualquiera en R_i como referencia. Entonces, la función corriente en otro punto cualquiera P de R_i se define como

$$\psi(\mathbf{r}_P) = \psi(\mathbf{r}_O) + \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (6.19)$$

donde $\mathbf{n} = (+dy, -dx, 0)$ es la normal a $d\mathbf{l} = (dx, dy, 0)$, y la integral del flujo (caudal) se puede calcular a través de cualquier curva que vaya de O hasta P . En efecto, consideremos dos diferentes curvas 1 y 2 que van de O a P , y calculemos el caudal que atraviesa la curva cerrada C que parte de O y va hasta P por el camino 2 y regresa a O por el camino 1 (recorrido en sentido inverso, ver Fig. 6.3b). Tendremos

$$Q_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_2 + \int_P^O \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_1 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_2 - \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_1 = \int_S (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dS = 0 \quad (6.20)$$

donde hemos aplicado el Teorema de la divergencia para transformar la integral sobre el contorno C en una integral sobre la superficie S rodeada por C , que está íntegramente contenida en R_i , donde $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. De la (6.20) resulta que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_2 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_1 \quad (6.21)$$

y por consiguiente la definición (6.19) de la función corriente no presenta ambigüedades.

Distinto es el caso en que la región en que se desarrolla el flujo es *múltiplemente conexa*. Esto ocurre cuando hay paredes sólidas una de cuyas dimensiones es infinita (por ejemplo un cilindro de longitud infinita) o cuando las paredes tienen geometría toroidal, o en otros casos más complicados. Para fijar ideas, supongamos tener un cilindro sólido infinito en un flujo plano, cuyo eje es perpendicular al plano del flujo. En este caso, la circulación de la velocidad alrededor de una curva C que rodea al cilindro no tiene porqué ser nula. En efecto, *no podemos* aplicar como antes el Teorema de Stokes

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \, dS \quad (6.22)$$

y concluir que Γ_C es nula a partir de que el flujo es irrotacional en R_p , puesto que ahora *no existe* ninguna superficie S que se apoye sobre C y esté *íntegramente contenida* en R_p . Por lo tanto Γ_C puede tener un valor finito cualquiera, y en consecuencia no podemos definir de manera no ambigua el potencial de velocidad ϕ . De modo semejante, no podremos aplicar el teorema de la divergencia como hicimos para deducir la (6.21), pues ahora el caudal Q_C puede tener cualquier valor y por lo tanto no se puede definir la función corriente de manera exenta de ambigüedades.

En general, pueden existir regiones limitadas R_e en las cuales $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ y/o $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$. Dichas regiones están afuera, naturalmente, de la región (o regiones) donde el flujo es potencial e incompresible. Está claro que si $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ en R_e , la circulación de \mathbf{u} a lo largo de una línea cerrada que rodea R_e no es nula, aún cuando fuera de R_e se cumpla $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Por lo tanto en este caso la integral de línea (6.16) entre O y P no depende sólo de la posición de O y de P , y entonces ϕ no

es univaluada. Del mismo modo si $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ en una región limitada, la función corriente ψ no es univaluada.

Para facilitar la discusión de regiones de flujo múltiplemente conexas conviene introducir cierta terminología. Una región plana simplemente conexa R_1 se caracteriza porque toda pareja de puntos O, P de la misma se puede unir mediante curvas *enteramente* contenidas en R_1 y tales que dos cualesquiera de esas curvas forman una curva cerrada *reducible*¹; cuando un par de curvas cumple esta condición, se dice que son *conciliables*.

En una región R_n múltiplemente conexa es todavía posible unir toda pareja de puntos mediante curvas contenidas en la región, pero existen pares de curvas cerradas no reducibles. Por lo tanto dos puntos se pueden unir mediante curvas no conciliables.

El *grado de conectividad* de una región R está determinado por el número máximo ν de *barreras* apoyadas sobre los bordes de R , que se pueden introducir sin dividir R en partes no conexas. Más precisamente, el grado de conectividad n se define como $n = \nu + 1$. En una región simplemente conexa no se puede introducir ninguna barrera sin dividirla en dos partes no conexas, de modo que $\nu = 0$ y entonces $n = 1$. La Fig. 6.4 muestra ejemplos de regiones de varios grados de conectividad. Se ve que cada barrera reduce en una unidad el grado de conectividad.

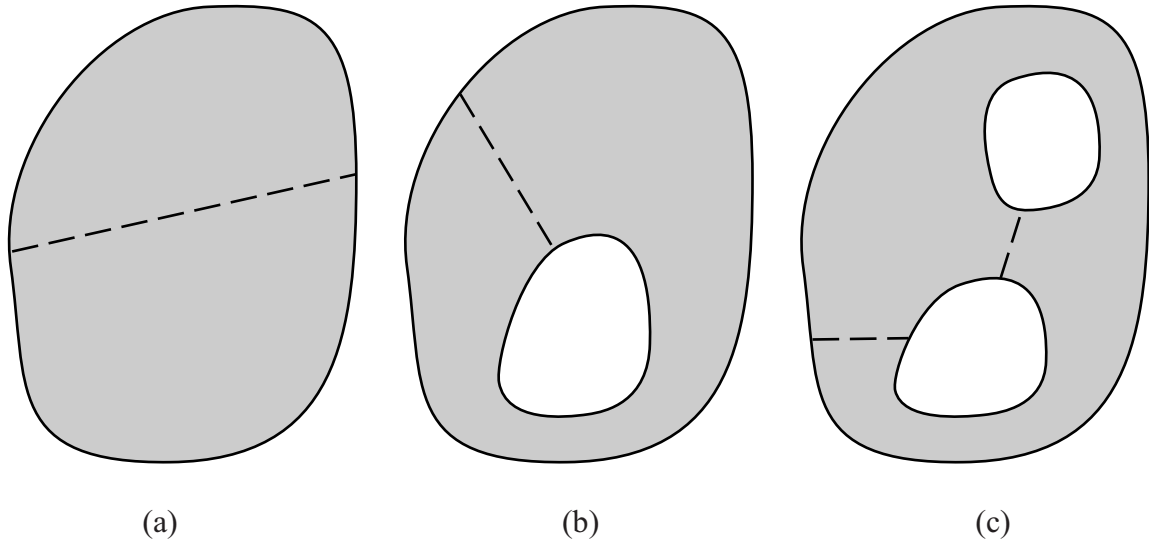


Fig. 6.4. Regiones de diferentes grados de conectividad: (a) en una región simplemente conexa no se puede introducir ninguna barrera sin dividirla en dos partes no conexas, (b) en una región doblemente conexa es posible introducir una barrera, (c) en una región triplemente conexa se pueden introducir dos barreras (hay otras dos maneras de hacerlo, además de la que se indica en la figura).

De ahora en más nos limitaremos al caso de regiones doblemente conexas, que aparecen frecuentemente en fluidodinámica. Sea entonces una región doblemente conexa R_2 donde tenemos un flujo irrotacional e incompresible, y consideremos la curva C que une los puntos O y P de R_2 . Sea ahora una curva C' (ver Fig. 6.5a) que se puede hacer coincidir con C mediante un desplazamiento continuo de sus puntos (o sea, que es conciliable con C). Es evidente que la super-

¹ Una curva cerrada se dice reducible cuando se la puede reducir a un punto mediante una deformación continua en el curso de la cual se mantiene siempre íntegramente dentro de la región.

ficie barrida por C' durante la deformación que la lleva a coincidir con C está íntegramente contenida en R_2 : de lo contrario, C' no sería conciliable con C . Luego

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C'} \quad \text{y} \quad \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_C = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_{C'} \quad (6.23)$$

Consideremos ahora la curva C'' , que no es conciliable con C ; en general se tendrá que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C \neq \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C''} \quad \text{y/o} \quad \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_C \neq \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_{C''} \quad (6.24)$$

Existe sin embargo una familia de curvas conciliables con C'' . Una de ellas es la curva C''' (ver la Fig. 6.5a). Resulta claro que si elegimos cualquier par de curvas de esta familia, la integrales de línea a lo largo de ellas tienen igual valor, aunque dicho valor difiere del de las integrales a lo largo de C y C' .

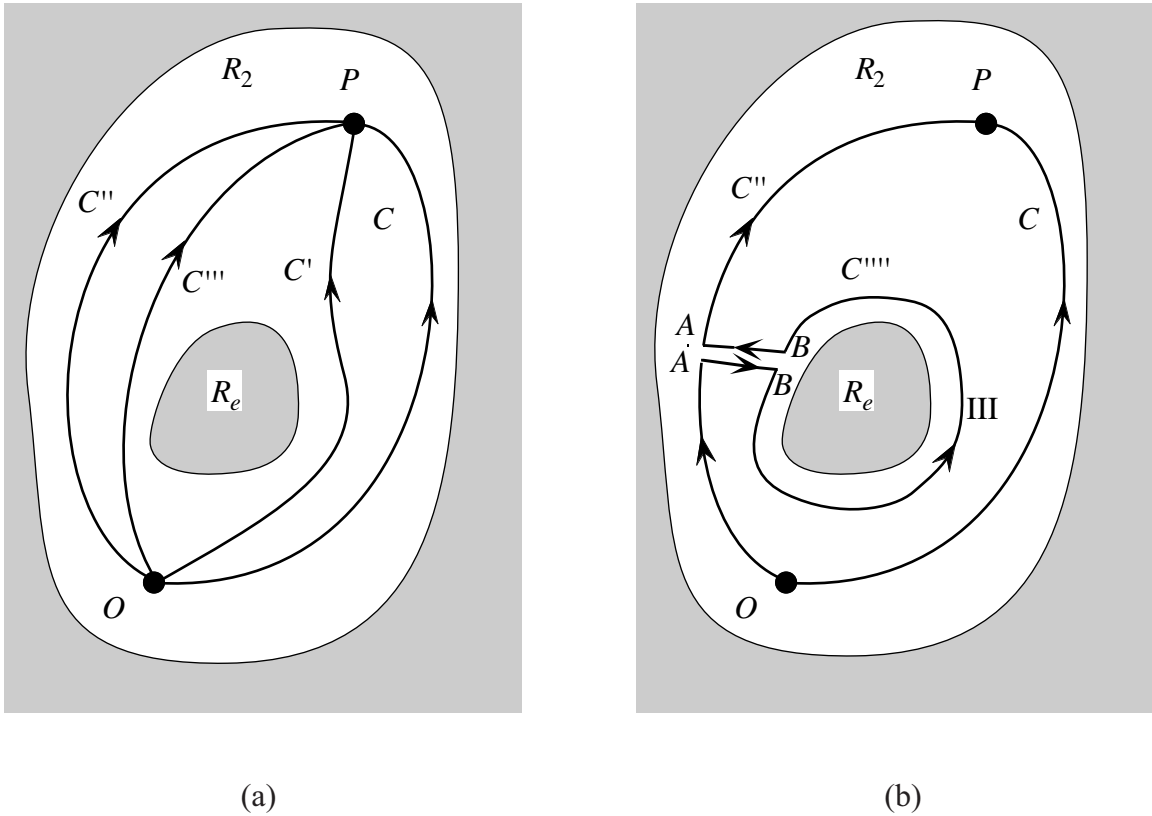


Fig. 6.5. Curvas que unen los puntos O y P en una región doblemente conexa. (a) Las curvas C y C' son conciliables, también son conciliables C'' y C''' , pero ninguna de ellas es conciliable con C (o con C'). (b) La curva C'''' es conciliable con C , y permite calcular la diferencia entre las integrales de línea para las curvas de la familia conciliable con C y para las curvas de la familia conciliable con C'' .

La diferencia entre las integrales de línea para las curvas de la familia conciliable con C y para las curvas de la familia conciliable con C'' se puede calcular considerando la curva C'''' (ver Fig. 6.5b) constituida por el tramo OA de C'' (tramo I), el tramo AB (tramo II), el tramo BB que

rodea la región excluida R_e (tramo III), el tramo BA (tramo II recorrido en sentido inverso) y finalmente, el tramo AP (tramo V). Claramente, C'''' es conciliable con C'' y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C''} &= \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C''''} = \int_O^A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + \int_A^B \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{II} + \oint_{III} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{III} + \int_B^A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{II} + \int_A^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C \\
 &= \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + \oint_{III} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{III} \\
 &= \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + \Gamma_e
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

donde

$$\Gamma_e = \oint_{III} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{III} \tag{6.26}$$

es la circulación de \mathbf{u} alrededor de una curva cerrada cualquiera que rodea la región excluida R_e (una sola vez).

En general, entonces, dados los puntos O y P , existen infinitas familias de curvas $C^{(n)}$ concilia-
bles entre sí, que difieren de C por la cantidad n de vueltas alrededor de R_e . Las correspondientes integrales de línea valen

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C^{(n)}} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + n\Gamma_e \tag{6.27}$$

donde n se considera positivo si las vueltas se dan en sentido antihorario (como en la Fig. 6.5b) y negativo si el sentido es horario.

El mismo razonamiento que hicimos para la circulación de \mathbf{u} , se puede repetir para el flujo de \mathbf{u} a través de las curvas C y C'' , y se encuentra que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_{C''} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_C + Q_e \tag{6.28}$$

donde

$$Q_e = \oint_{III} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_{III} \tag{6.29}$$

es el flujo de \mathbf{u} a través de una curva cerrada cualquiera que rodea (una sola vez) la región excluida R_e . En general se tendrá

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_{C^{(n)}} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{l}_C + nQ_e \tag{6.30}$$

donde n es positivo si las vueltas se dan en sentido antihorario (como en la Fig. 6.5b) y negativo si el sentido es horario.

Si de acuerdo con la (6.16) definimos al potencial de velocidad como

$$\phi(\mathbf{r}_P) = \phi(\mathbf{r}_O) + \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.31)$$

y movemos el punto P a lo largo de un camino cerrado, cuando P vuelve a coincidir con O , la diferencia $\phi(\mathbf{r}_P) - \phi(\mathbf{r}_O)$ puede tomar tanto el valor nulo como cualquier múltiplo entero de Γ_e (que se denomina *constante cíclica* del potencial de velocidad). Esto significa que con una región doblemente conexa ϕ no es univaluado, sino que está definido a menos de múltiplos enteros de Γ_e . Notar que $\nabla\phi$ es siempre univaluado, y entonces no hay problemas para el campo de velocidad.

Mediante el artificio de introducir una barrera ideal (Fig. 6.6), de modo tal que al calcular la integral (6.31) lo hagamos siempre por un camino que no cruce la barrera, podemos conseguir que ϕ sea univaluado (pues la introducción de la barrera convierte la región R_2 en simplemente conexa). Pero entonces ϕ es discontinuo a través de la barrera, y sus valores de uno y otro lado de la misma difieren en la constante cíclica Γ_e .

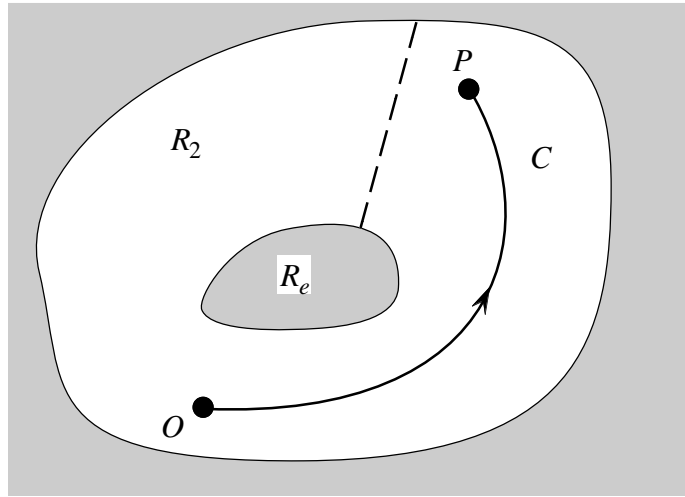


Fig. 6.6. Mediante el artificio de introducir una barrera ideal en una región doblemente conexa podemos conseguir que ϕ sea univaluado. Pero entonces ϕ es discontinuo a través de la barrera, y sus valores de uno y otro lado de la misma difieren en la constante cíclica Γ_e .

Todo lo que se ha dicho para ϕ se puede decir también para ψ , con la diferencia que la constante cíclica correspondiente es el caudal volumétrico Q_e erogado por la región excluida.

En conclusión, para determinar ϕ y ψ en el caso de una región doblemente conexa es preciso asignar las constantes cíclicas Γ_e y Q_e , además de fijar u_n sobre todo el contorno.

Flujos potenciales incompresibles elementales

Describiremos a continuación algunos flujos potenciales incompresibles (provincia 3 de la Fig. 5.6) de particular interés para describir flujos más complejos.

Flujo uniforme

Consideremos un flujo plano uniforme con $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \text{cte.}$, cuya dirección forma un ángulo α con el eje x . Es inmediato ver que el potencial de velocidad es

$$\phi = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r} = x u_0 \cos \alpha + y u_0 \sin \alpha \quad (6.32)$$

y la función corriente viene dada por

$$\psi = \mathbf{u}_0 \times \mathbf{r} = y u_0 \cos \alpha - x u_0 \sin \alpha \quad (6.33)$$

Las equipotenciales y las líneas de corriente son familias de rectas paralelas, perpendiculares entre sí.

Fuente o sumidero puntiforme

Se describe por un campo de velocidad del tipo

$$\mathbf{u} = k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{r'^3}, \quad r' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \quad (6.34)$$

donde \mathbf{r}_0 es el punto donde se encuentra la fuente (o sumidero), o del cual salen (o entran) las líneas del campo de velocidad². Mediante una traslación de coordenadas que ubique el origen en \mathbf{r}_0 , y la elección de coordenadas esféricas (r, θ, φ) centradas en el nuevo origen, el campo en cuestión tiene como única componente no nula la componente radial, cuyo valor es

$$u_r = \frac{k}{r^2} \quad (6.35)$$

que satisface las condiciones (6.1) excepto en $r = 0$.

El flujo de masa que atraviesa una esfera centrada en el origen es

$$4\pi r^2 \rho u_r = 4\pi k \rho \equiv Q \rho \quad (6.36)$$

La cantidad Q es el flujo *volumétrico* o *caudal* erogado por la fuente (o evacuado por el sumidero) y se denomina también *fuerza* de la fuente (o sumidero). En términos de Q , la (6.35) se escribe como

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (6.37)$$

El potencial de velocidad de la fuente (o sumidero) se expresa como

$$\phi = -\frac{k}{r} = -\frac{Q}{4\pi r} \quad (6.38)$$

Fuente o sumidero lineal

En este caso la fuente (o sumidero) está distribuida a lo largo de una recta. Emplearemos un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) cuyo eje es dicha recta. El flujo es plano y la única componente no nula del campo de velocidad es la componente radial, que vale

$$u_r = \frac{k}{r} \quad (6.39)$$

² El punto \mathbf{r}_0 , naturalmente, está excluido de la región de flujo potencial.

y que cumple con las condiciones (6.1) excepto en $r = 0$ (región excluida). La fuerza de la fuente se define ahora por unidad de longitud y es igual al caudal volumétrico a través de un tronco de cilindro de altura unitaria (y radio arbitrario), de modo que $Q = 2\pi k$. El potencial de velocidad es (recordemos que $u_r = \partial\phi / \partial r$ y $u_\theta = r^{-1} \partial\phi / \partial\theta$)

$$\phi = k \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (6.40)$$

donde r_0 es una constante arbitraria³. La función corriente es

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (6.41)$$

Por lo tanto las líneas de corriente son rectas radiales y las curvas equipotenciales son circunferencias con centro en el origen (ver Fig. 6.7a).

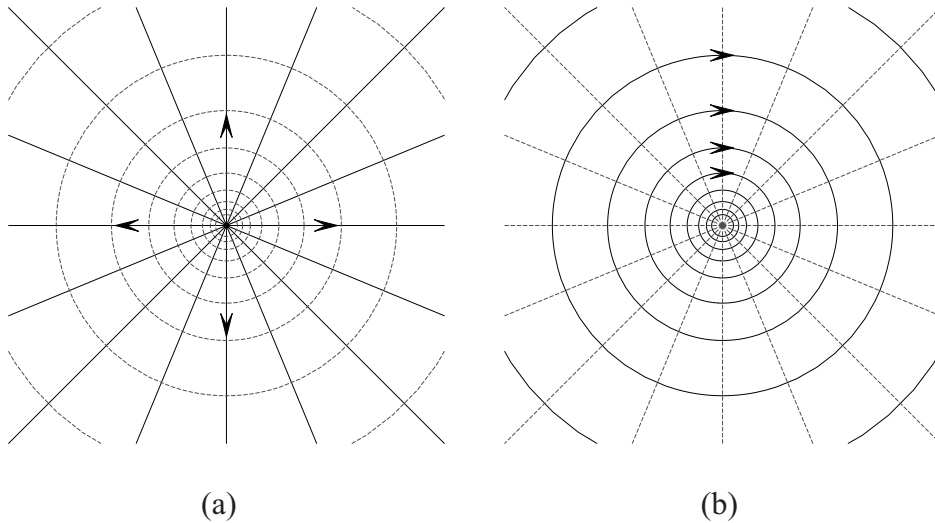


Fig. 6.7. Campos de velocidad de: (a) una fuente lineal, (b) un vórtice lineal. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos. Las diferencias $\Delta\phi$ y $\Delta\psi$ entre equipotenciales y líneas de corriente consecutivas es la misma.

Vórtice lineal

Consideremos un flujo plano cuyo campo de velocidad está dado en un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por

$$u_r = 0 \quad , \quad u_\theta = \frac{\kappa}{r} \quad , \quad u_z = 0 \quad (6.42)$$

Este campo se suele denominar *campo de circulación*, puesto que sus líneas de corriente son circunferencias con centro en el eje. Se puede demostrar fácilmente (recurriendo a las expresiones de la divergencia y del gradiente en coordenadas cilíndricas) que cumple con las condiciones (6.1) excepto sobre el eje $r = 0$. Sin embargo, para demostrar que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ es quizás más intuitivo aplicar el teorema de Stokes a un circuito cerrado formado por dos arcos de circunferen-

³ El potencial de velocidad está definido a menos de una constante arbitraria.

cia que abarcan un ángulo $\Delta\theta$, de radios son r_1 y r_2 , y dos segmentos radiales que unen ambos arcos. La circulación es entonces

$$\Gamma = \Delta\theta[r_2 u_\theta(r_2) - r_1 u_\theta(r_1)] = 0 \quad (6.43)$$

pues los tramos radiales no contribuyen por ser perpendiculares a la velocidad. Resulta claro que toda curva cerrada *que no rodea al eje*, se puede aproximar mediante tramos radiales y arcos de círculo, por lo cual es fácil mostrar que para todas esas curvas se tiene $\Gamma = 0$, lo cual en virtud del Teorema de Stokes implica que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ en todo el espacio, salvo en el eje mismo. Por otra parte, es sencillo demostrar que la circulación alrededor de toda línea cerrada que rodea (una sola vez) al eje vale

$$\Gamma = 2\pi\kappa \quad (6.44)$$

La cantidad Γ se conoce con el nombre de *fuerza* del vórtice. El potencial de velocidad es

$$\phi = \kappa\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad (6.45)$$

La función corriente es

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (6.46)$$

En este caso las líneas de corriente son circunferencias con centro en el origen y las equipotenciales son rectas radiales (Fig. 6.7b). Notar la correspondencia entre este flujo y el de la fuente (o sumidero) lineal: al pasar de uno a otro las funciones ϕ y ψ intercambian sus roles conservando su forma. Las líneas de corriente radiales de la fuente lineal son idénticas a las equipotenciales del vórtice lineal. Las líneas de corriente circulares del vórtice correspondan a las equipotenciales de la fuente lineal.

Dipolo

Consideremos un sumidero S_1 en \mathbf{r}_1 y una fuente S_2 en $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$, cuyos caudales volumétricos tienen el mismo valor absoluto Q (ver Fig. 6.8). Si tomamos el límite $|\mathbf{d}| \rightarrow 0$, manteniendo constante el vector

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (6.47)$$

obtenemos lo que se denomina *flujo dipolar* de *momento dipolar* \mathbf{p} .

Calculemos ahora el campo de velocidad del flujo dipolar en el caso plano (dipolo lineal). Para simplificar tomemos origen de coordenadas en S_1 . Entonces, los potenciales de velocidad inducidos por la fuente y el sumidero en un punto P de coordenadas \mathbf{r} son, respectivamente

$$\phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}{r_0}, \quad \phi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \quad (6.48)$$

El potencial del flujo resultante es

$$\phi = \phi_2 + \phi_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|r-d|}{r_0} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|r|}{r_0} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|r-d|}{|r|} \quad (6.49)$$

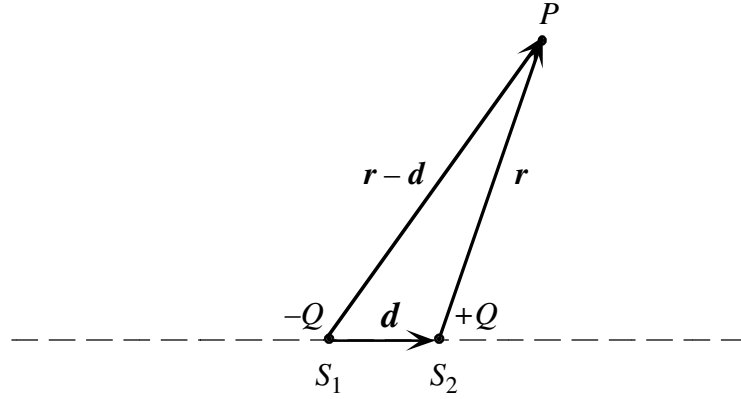


Fig. 6.8. Un sumidero S_1 en r_1 y una fuente S_2 en $r_2 = r_1 + d$, cuyos caudales volumétricos tienen el mismo valor absoluto Q . Si tomamos el límite $|d| \rightarrow 0$, manteniendo constante el valor de $p = Qd$, se obtiene un dipolo.

Como d es muy pequeño podemos escribir

$$\frac{|r-d|}{|r|} = \frac{(r^2 - 2r \cdot d + d^2)^{1/2}}{r} = 1 - \frac{r \cdot d}{r^2} + \dots \quad (6.50)$$

donde con ... indicamos términos de orden superior. Por lo tanto

$$\ln \frac{|r-d|}{|r|} = \ln \left(1 - \frac{r \cdot d}{r^2} \right) + \dots = -\frac{r \cdot d}{r^2} + \dots \quad (6.51)$$

y en el límite $|d| \rightarrow 0$ resulta

$$\phi = -\frac{r \cdot p}{2\pi r^2} \quad , \quad p = \lim_{d \rightarrow 0} Qd \quad (6.52)$$

Usando coordenadas polares en el plano del flujo y tomando p como origen de θ , resulta

$$\phi = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r} \quad (6.53)$$

A partir de ϕ podemos calcular las componentes de la velocidad:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \quad , \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (6.54)$$

A partir de las componentes de la velocidad, usando las relaciones (6.12) o la (6.19) podemos obtener la función corriente:

$$\psi = -\frac{r \times p}{2\pi r^2} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (6.55)$$

Es fácil verificar que las líneas de corriente (Fig. 6.9) son una familia de circunferencias tangentes a \mathbf{p} y que pasan por el origen, y que las equipotenciales son una familia de circunferencias ortogonales a las primeras, que pasan por el origen y son tangentes a la recta $\theta = \pm\pi/2$.

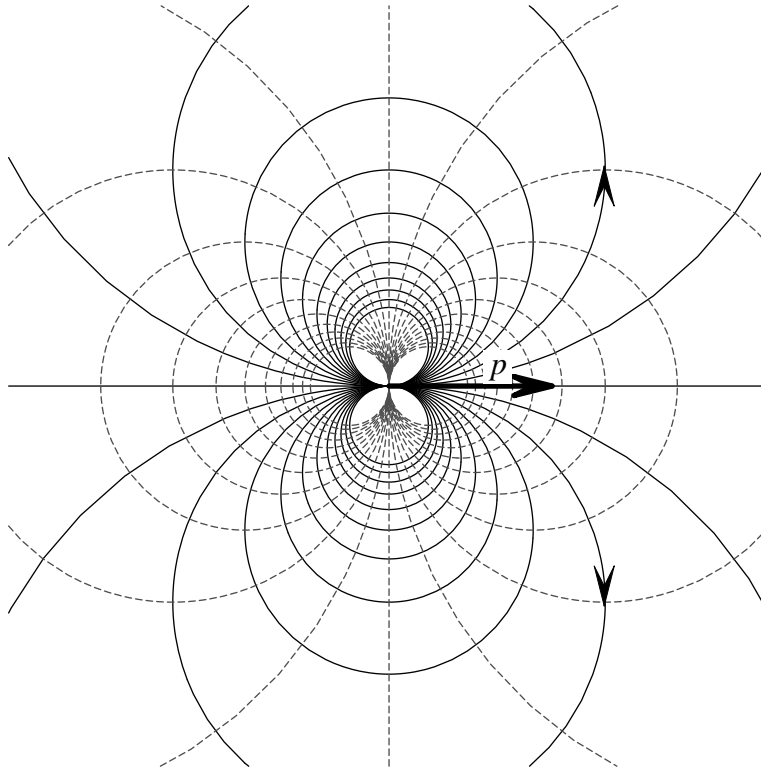


Fig. 6.9. Campo de velocidad de un dipolo lineal. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos.

En el caso tridimensional se puede llevar adelante el cálculo de manera análoga. En coordenadas esféricas (r, θ, φ) con origen en el dipolo y eje polar en la dirección de \mathbf{p} , resulta

$$\phi = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi r^3} = -\frac{p \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (6.56)$$

Las componentes de la velocidad son

$$u_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^3}, \quad u_\theta = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^3}, \quad u_\varphi = 0 \quad (6.57)$$

Puesto que el flujo dipolar en tres dimensiones tiene simetría axial alrededor del eje del dipolo, se trata en realidad de un flujo bidimensional pues la coordenada φ es ignorable. Por lo tanto el problema se puede tratar en un plano $\varphi = \text{cte.}$. Introduciendo un potencial vectorial de velocidad \mathbf{A} por medio de la (6.10) y usando las expresiones del rotor en coordenadas esféricas, es fácil ver que la única componente no nula de \mathbf{A} es A_φ . Por lo tanto, es posible también en este caso introducir una función corriente $\psi(r, \theta)$, definida por

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.58)$$

Usando las expresiones (6.58) de las componentes de la velocidad se obtiene

$$\psi = \frac{p \sin^2 \theta}{4\pi r} \quad (6.59)$$

La líneas de corriente y las curvas equipotenciales para el flujo dipolar se pueden apreciar en la Fig. 6.10.

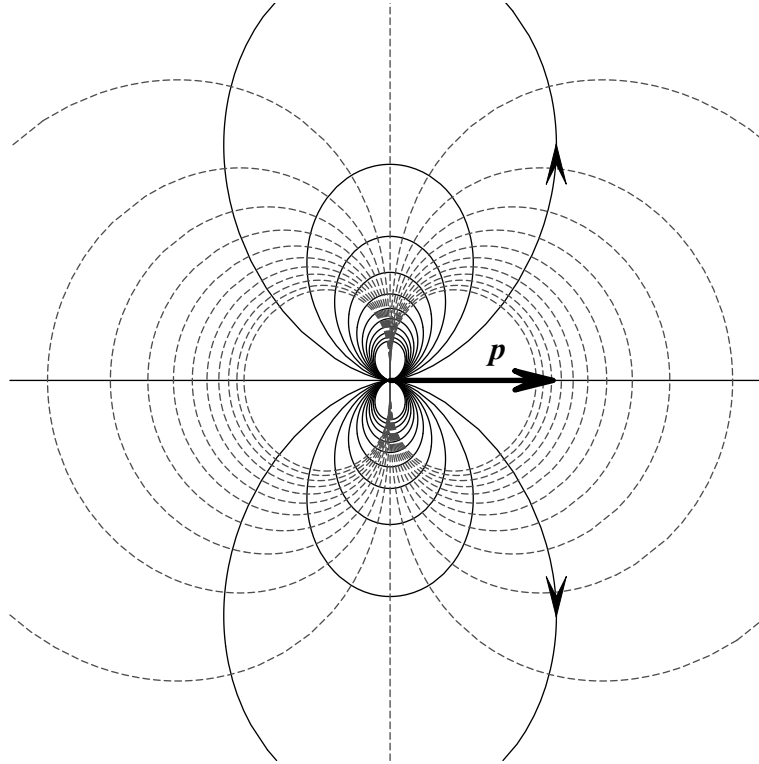


Fig. 6.10. Campo de velocidad de un dipolo. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos.

Flujo potencial en la proximidad del vértice de un diedro

Este tipo de flujo es importante en muchos casos de interés práctico. El problema es el siguiente: se tienen dos superficies sólidas planas que limitan el flujo y forman un ángulo α ; nos interesa conocer el flujo en el entorno del vértice del diedro. Describiremos el flujo en un plano perpendicular a la arista del diedro. La coordenada z , a lo largo de la arista, es ignorable. En el plano del flujo usamos coordenadas polares con origen en el vértice del diedro; el ángulo θ se mide a partir de uno de los planos que conforman el diedro.

La condición de contorno requiere que sobre la superficie del sólido, la componente normal de la velocidad debe ser nula. Esto implica que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (6.60)$$

Es fácil verificar que la solución de la ecuación de Laplace que satisface estas condiciones es

$$\phi = Ar^\lambda \cos \lambda \theta \quad , \quad \lambda = \pi / \alpha \quad , \quad A = \text{cte.} \quad (6.61)$$

de modo que

$$u_r = \lambda A r^{\lambda-1} \cos \lambda \theta \quad , \quad u_\theta = -\lambda A r^{\lambda-1} \sin \lambda \theta \quad (6.62)$$

Si el diedro es menor que plano ($\alpha < \pi$) el flujo es convergente y se tiene $\lambda > 1$. Luego el exponente de r en las (6.62) es *positivo* y la velocidad tiende a cero para $r \rightarrow 0$. El origen es un punto de estancamiento, donde la presión es máxima, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli.

Por el contrario, si el diedro es mayor que plano ($\alpha > \pi$) el flujo es divergente y $\lambda < 1$. Luego el exponente de r en las (6.62) es *negativo* y en consecuencia la velocidad diverge para $r \rightarrow 0$. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, la presión se vuelve negativa cerca del origen. Veremos más adelante que estos resultados se deben reconsiderar cuando se toma en cuenta la viscosidad del fluido. Si se toma en cuenta la viscosidad, resulta que la componente tangencial de la velocidad debe tender a cero cuando nos aproximamos a una pared sólida en reposo. Por consiguiente, las soluciones que hemos obtenido aquí valen hasta una distancia suficientemente grande de los planos. Cerca de la pared hay una región de transición donde el flujo no es potencial, denominada *capa límite*, que permite empalmar estas soluciones con la condición de velocidad nula sobre la pared.

Flujo alrededor de un cilindro circular

Como aplicación del principio de superposición para los flujos potenciales, estudiaremos un flujo uniforme con velocidad U , perturbado por la presencia de un cilindro circular de radio R , cuyo eje es perpendicular a la velocidad. Claramente, la coordenada paralela al eje del cilindro es ignorable, de modo que tenemos un problema plano. Analizaremos primero el caso en que no hay circulación de la velocidad alrededor del cilindro y luego estudiaremos el efecto de la presencia de una circulación, lo que nos permitirá poner en evidencia el efecto de *sustentación*.

Cilindro circular sin circulación de la velocidad

Usaremos coordenadas polares (r, θ) en el plano perpendicular al eje del cilindro, con origen en el centro del mismo. El ángulo θ se mide a partir de la dirección de U . Consideremos el potencial de velocidad ϕ que resulta de la superposición del potencial del flujo uniforme

$$\phi_U = U r \cos \theta \quad (6.63)$$

más el potencial de un dipolo de momento p orientado en la dirección de U :

$$\phi_D = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r} \quad (6.64)$$

de modo que

$$\phi = \phi_U + \phi_D = U r \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = U r \cos \theta \left(1 - \frac{p}{2\pi U r^2} \right) \quad (6.65)$$

Esta expresión es razonable como intento para resolver el problema pues al no haber supuesto que dentro del cilindro haya una fuente o sumidero, el dipolo es el primer término no nulo de un desarrollo multipolar de ϕ . Dado que hemos supuesto nula la circulación alrededor del cilindro, la solución es única, y si conseguimos que la ϕ dada por la (6.65) satisfaga las condiciones de

contorno del problema, será entonces la solución buscada. Si así no fuese, habría que recurrir a los términos de orden más elevado del desarrollo multipolar (cuadrupolo, octupolo, ... etc.).

De la (6.65) deducimos la expresión de las componentes de la velocidad:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad , \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \quad (6.66)$$

Ahora vamos a intentar elegir p de modo de satisfacer las condiciones de contorno, a saber:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U} \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty \\ u_r &= 0 \quad \text{en} \quad r = R \end{aligned} \quad (6.67)$$

La primera de estas condiciones se cumple pues el campo de velocidad del dipolo decrece con la distancia como r^{-2} . En cuanto a la segunda condición, se requiere que el momento dipolar tenga el valor

$$p = -2\pi UR^2 \quad (6.68)$$

Sustituyendo (6.68) en (6.65) obtenemos el potencial de velocidad como

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (6.69)$$

Esta es la solución del problema. Las componentes de la velocidad son

$$u_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad , \quad u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (6.70)$$

Para encontrar la función corriente podemos proceder del mismo modo, superponiendo la función corriente del flujo uniforme (ec. (6.33)) y la del dipolo (ec. (6.59)), o bien, directamente, a partir de las (6.12). En cualquier caso resulta

$$\psi = Ur \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (6.71)$$

En la Fig. (6.11) se muestran las líneas de corriente y las curvas equipotenciales del flujo. Notar la línea de corriente correspondiente a $\psi = 0$, que consiste de dos semirrectas que parten de los puntos de estancamiento E_1 y E_2 , situados en $r = R$, $\theta = \pi, 0$, respectivamente, más la circunferencia del cilindro.

En términos de la velocidad podemos calcular la presión en cada punto del flujo, por medio de la ecuación de Bernoulli (5.18), que en este caso toma la forma

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{U^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \text{cte.} \quad (6.72)$$

donde p_∞ es el valor de la presión del flujo uniforme y ρ la densidad del fluido. De la (6.69) obtenemos

$$p = p_{\infty} + \Delta p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \quad (6.73)$$

Por lo tanto la variación de presión debida a la presencia del cilindro es

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \quad (6.74)$$

La (6.72) y la (6.74) nos dicen que la presión es mayor donde la velocidad es más baja, esto es, donde el espaciado entre las líneas de corriente es mayor. Esta, por supuesto, es una consecuencia general de la ecuación de Bernoulli y vale siempre, no solamente en el caso particular que estamos considerando ahora.

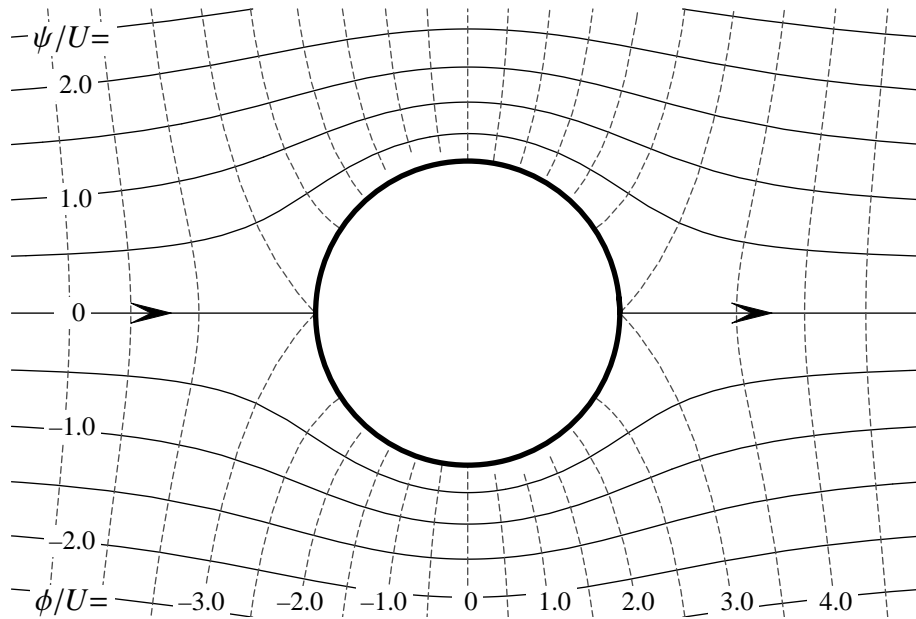


Fig. 6.11. Campo de velocidad para un obstáculo cilíndrico en un flujo uniforme. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos.

Si sustituimos en la (6.74) las expresiones (6.70) de las componentes de la velocidad resulta

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{2(r/R)^2 \cos 2\theta - 1}{(r/R)^4} \quad (6.75)$$

El valor máximo de Δp se tiene en los puntos de estancamiento ($\theta = 0, \pi$), donde $\Delta p = \rho U^2 / 2$, y el valor mínimo se tiene en $r = R$, $\theta = \pm \pi / 2$, donde $\Delta p = -3\rho U^2 / 2$. En la Fig. 6.12 se muestran las *isobaras* (curvas de igual presión) de este flujo. Es interesante observar que la distribución de presiones es simétrica respecto de reflexiones en los planos $x = 0$ ($\theta = \pm \pi / 2$) e $y = 0$ ($\theta = \pi, 0$). En particular, la distribución de presión sobre el cilindro tiene esa simetría, lo que nos permite concluir que *la fuerza neta que el fluido ejerce sobre el cilindro es nula*. Este resultado es un ejemplo de una propiedad general de los flujos ideales, que recibe el nombre de *paradoja de D'Alembert*, sobre la cual volveremos más adelante.

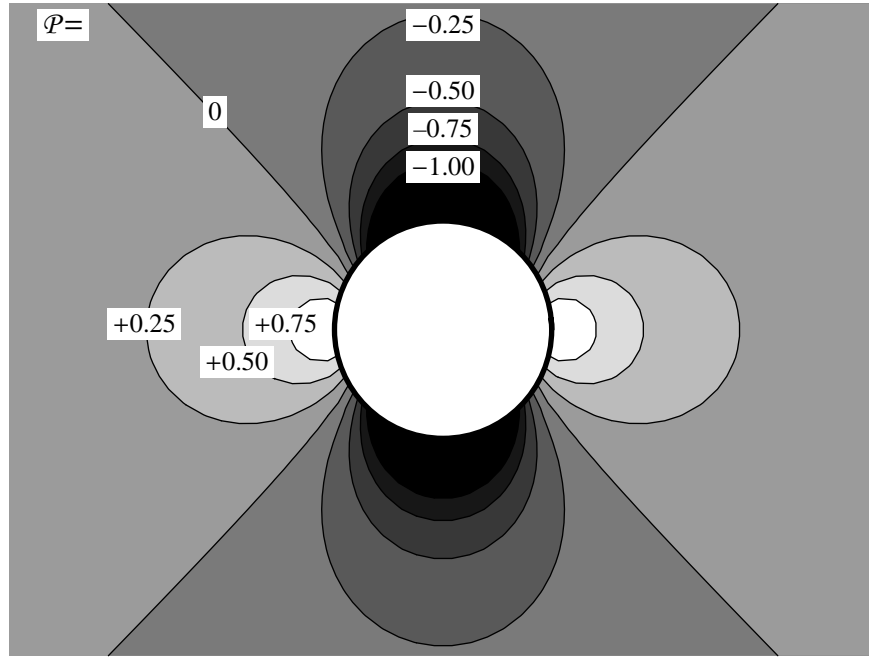


Fig. 6.12. Curvas isobaras para el flujo de la Fig. 6.11. Se han representado las curvas de igual $\mathcal{P} = \Delta p / (\rho U^2 / 2)$. Los grises más oscuros indican menor presión. Se han omitido las isobaras correspondientes a $\mathcal{P} < -1$ pues se amontonan mucho.

Cilindro circular con circulación de la velocidad

En este caso el potencial de velocidad se obtiene simplemente sumando al potencial del caso anterior (ec. (6.69)), el potencial de un vórtice lineal en el origen (ec. (6.45)). En efecto, el campo de velocidad del vórtice es puramente azimutal, y se anula al infinito; por lo tanto cumple las condiciones de contorno (6.67). Puesto que el flujo potencial correspondiente a un dado valor de la circulación alrededor de la región excluida es único, nuestra suma de potenciales de velocidad es entonces la solución del problema:

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (6.76)$$

Las componentes de la velocidad también se pueden obtener por superposición de las soluciones correspondientes al cilindro sin circulación (ec. (6.70)) y al vórtice, de modo que

$$u_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad , \quad u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (6.77)$$

Lo mismo vale para la función corriente

$$\psi = Ur \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \quad (6.78)$$

Veamos si puede haber puntos de estancamiento sobre la superficie del cilindro. De existir, se debe cumplir que

$$u_\theta(R, \theta_e) = -2U \sin \theta_e + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \quad (6.79)$$

donde con θ_e indicamos el azimut del punto de estancamiento. De la (6.79) resulta

$$\sin \theta_e = \frac{\Gamma}{4\pi R U} \quad (6.80)$$

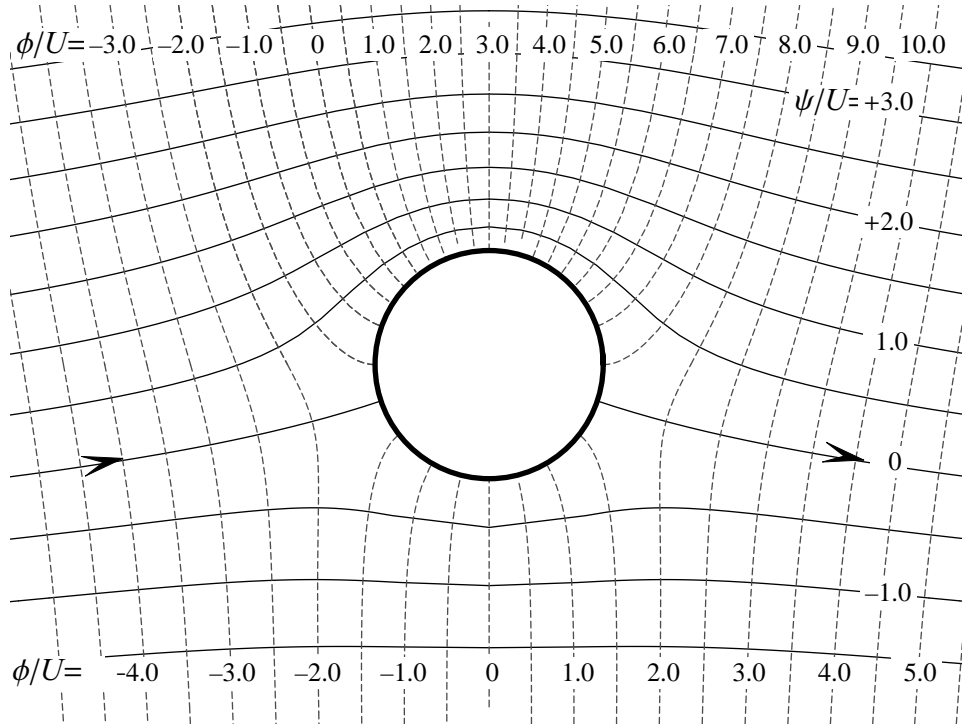


Fig. 6.13. Líneas de corriente y equipotenciales para un cilindro en un flujo uniforme, con circulación no nula. El dibujo corresponde a una circulación con $\Gamma/UR = -6$. El potencial de velocidad no es univaluado, y para asignar un valor a ϕ se supuso una barrera ideal que coincide con la línea de corriente a la derecha del cilindro que corresponde a $\psi = 0$.

Si $0 \leq |\Gamma| \leq 4\pi R|U|$ hay dos puntos (más precisamente, líneas) de estancamiento, E_1 y E_2 , ubicados simétricamente de ambos lados del plano $x = 0$ ($\theta = \pm\pi/2$), cuya posición está definida por los ángulos que satisfacen la (6.80). Cuando $\Gamma = 0$, como en el caso del cilindro sin circulación, E_1 y E_2 ocupan posiciones diametralmente opuestas (Fig. 6.11). A medida que Γ aumenta, E_1 y E_2 se desplazan acercándose entre sí hasta que coinciden cuando $|\Gamma| = 4\pi R|U|$ en el punto $(R, \pi/2)$ o $(R, -\pi/2)$ según si Γ y U tienen igual o diferente signo.

Si $|\Gamma| > 4\pi R|U|$ no hay puntos de estancamiento sobre el cilindro, pero en cambio hay un (único) punto de estancamiento en el seno del flujo, situado sobre la semirrecta $\theta = +\pi/2$ o la semirrecta $\theta = -\pi/2$ según si Γ y U tienen igual o diferente signo, en el punto

$$r = r_e = R \left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} + \sqrt{\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} \right)^2 - 1} \right) \quad (6.81)$$

En estos casos hay líneas de corriente cerradas que rodean al cilindro, y líneas de corriente abiertas a mayor distancia.

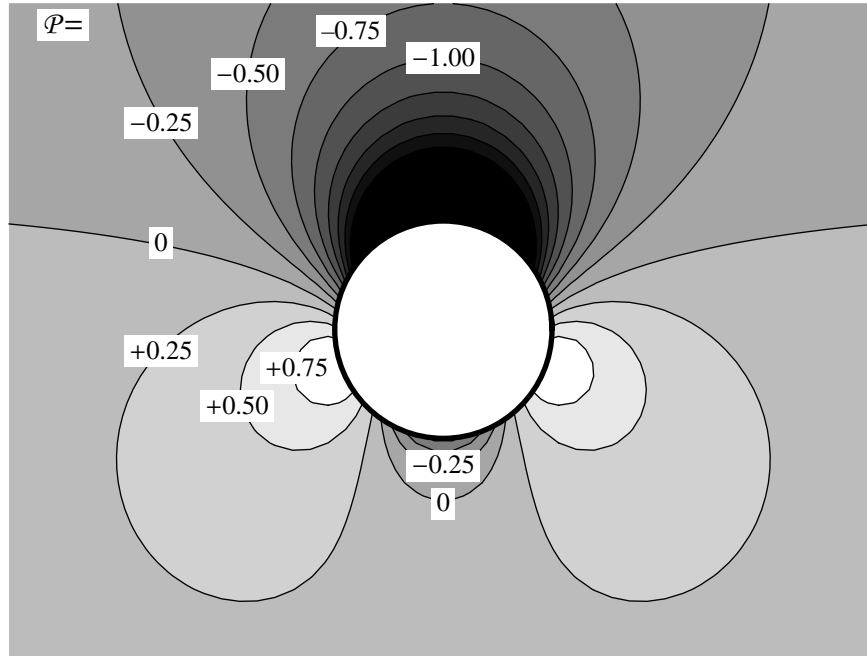


Fig. 6.14. Isobaras correspondientes al flujo de la Fig. 6.12. Se han representado las curvas de igual $\mathcal{P} = \Delta p / (\rho U^2 / 2)$. Los grises más oscuros indican menor presión. Se han omitido las isobaras correspondientes a $\mathcal{P} < -1$ pues se amontonan mucho.

En las Figs. 6.13 y 6.14 se muestran las líneas de corriente, las equipotenciales y las isobaras para un flujo de este tipo (con $\Gamma / UR = -6$) con dos puntos de estancamiento. Se puede ver que la distribución de presiones sigue siendo simétrica respecto del plano $x = 0$ ($\theta = \pm\pi/2$), pero (a diferencia del caso sin circulación) no es simétrica respecto del plano $y = 0$ ($\theta = \pi, 0$). Por lo tanto la componente en la dirección de \mathbf{U} de la fuerza neta que el fluido ejerce sobre el cilindro (denominada *arrastre*) es nula. Pero no es nula la componente ortogonal a \mathbf{U} . Dicha fuerza, denominada *sustentación*, está dirigida hacia arriba en el caso de la figura, pues Δp es (prevalentemente) positiva sobre la parte inferior del cilindro y negativa en la parte superior. Usando la ecuación de Bernoulli (6.74) y las expresiones (6.77) de las componentes de la velocidad, podemos calcular la presión sobre la superficie del cilindro. Resulta:

$$\begin{aligned} p(R, \theta) &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho [U^2 - u_\theta(R, \theta)^2] \\ &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi RU} - 2 \sin \theta \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.82)$$

La resultante de los esfuerzos debidos a la presión sobre la superficie del cilindro está dada (por unidad de longitud en la dirección z) por

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} p \mathbf{n} R d\theta = - \mathbf{e}_x \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta - \mathbf{e}_y \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta \quad (6.83)$$

Usando la (6.82) es fácil verificar que $F_x = 0$, como habíamos inferido por la simetría de la distribución de presión. En cuanto a la *sustentación*, es decir la componente F_y , resulta que

$$F_y = -\rho U \Gamma \quad (6.84)$$

La fuerza (6.84) se denomina *fuerza de Magnus*⁴, y nuestro resultado es un caso particular de un resultado general que demostraremos más adelante.

Fuerzas sobre un obstáculo en un flujo potencial

Trataremos ahora el problema de calcular la fuerza que se ejerce sobre un obstáculo de forma arbitraria en un flujo potencial. Supondremos que a distancias grandes del obstáculo el flujo es uniforme con una velocidad \mathbf{U} . La solución se basa en el desarrollo multipolar del potencial de velocidad, tomando en cuenta las condiciones de contorno sobre el obstáculo (nulidad de la componente normal de la velocidad, es decir $u_n = 0$ en el referencial en que el obstáculo está en reposo). A distancias grandes del obstáculo bastará con tomar en cuenta la contribución del primer término no nulo del desarrollo multipolar, pues es el que tiene la potencia más baja de $1/r$. Conviene tratar por separado los casos bidimensional y tridimensional.

Caso bidimensional

El cilindro circular y el perfil de un ala de avión de longitud infinita son ejemplos clásicos de este problema. Supondremos que el objeto está en reposo, como sería el caso de estudiar el flujo en un túnel de viento en el cual se impone la velocidad \mathbf{U} , uniforme a gran distancia del obstáculo, y perpendicular a la coordenada ignorable z . Vamos a suponer *a priori* que hay una circulación no nula Γ alrededor del obstáculo, sin preocuparnos por ahora de su origen. Eso se verá más adelante cuando estudiemos los efectos de la viscosidad y la capa límite.

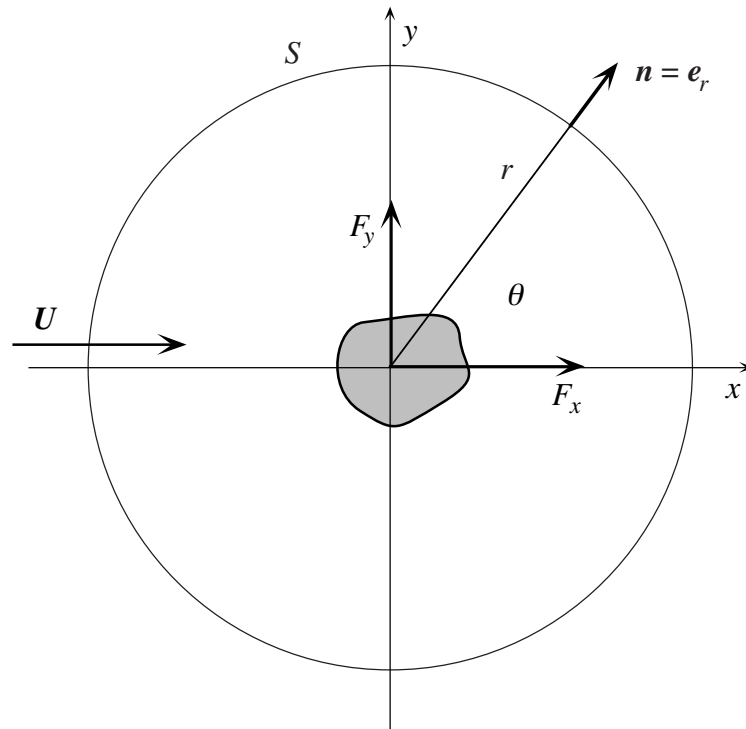


Fig. 6.15. Obstáculo cilíndrico cuya sección tiene forma arbitraria, que está inmerso en un flujo potencial uniforme y que tiene una circulación atrapada.

⁴ Esta fuerza está dirigida hacia arriba en el caso de las figuras 6.12 y 6.13 pues fueron calculadas con Γ negativo.

Tomaremos un sistema de coordenadas cuyo origen está centrado en el obstáculo (Fig. 6.15). Claramente, el potencial de velocidad tiene la forma

$$\phi = \phi_U + \phi_\Gamma + \phi_M \quad (6.85)$$

donde ϕ_U es el potencial del flujo uniforme, ϕ_Γ es el potencial del vórtice que da cuenta de la circulación alrededor del obstáculo, y ϕ_M es un desarrollo multipolar centrado en el obstáculo, cuyos términos están determinados por la condición de contorno $u_n = 0$ sobre la superficie del sólido. En general, no habrá ni fuentes ni sumideros en el sólido, de modo que

$$\phi_M = \phi_A + \dots = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \dots \quad (6.86)$$

El primer término del miembro derecho de (6.86) es el potencial de un dipolo de momento $2\pi\mathbf{A}$ (ver la ec. (6.52)) y los puntos suspensivos representan multipolos de orden superior que dan contribuciones a ϕ_M del orden de r^{-2} , r^{-3} , etc.. El vector \mathbf{A} es constante y su valor depende de la forma del objeto y de su orientación con respecto de \mathbf{U} . En el caso del cilindro circular los términos de orden superior son nulos, pues el término dipolar alcanza para obtener la solución exacta. Para un obstáculo de una forma cualquiera, sin embargo, no serán nulos y es necesario calcularlos si se desea conocer con exactitud el campo de velocidad. Veremos, sin embargo, que para calcular la fuerza sobre el obstáculo es suficiente emplear la aproximación dipolar de ϕ_M , es decir ϕ_A . De esta forma tenemos:

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \quad (6.87)$$

donde hemos tomado el eje polar en la dirección de \mathbf{U} . La velocidad es entonces

$$\mathbf{u} = \nabla \phi = \left(U \cos \theta - \frac{A_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \left(-U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} + \frac{A_\theta}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (6.88)$$

Vamos a plantear ahora el balance de la cantidad de movimiento del fluido dentro de un volumen cilíndrico⁵ de radio r y altura unidad, con r grande respecto de la dimensión lineal L del obstáculo ($r \gg L$). Usando la ec. (4.7) tendremos que la resultante \mathbf{R} de las fuerzas que actúan sobre el fluido contenido en el cilindro (volumen fijo en el espacio) está dada por

$$\mathbf{R} = \oint_S [\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dS \quad (6.89)$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie lateral S del cilindro (no hay flujo a través de las caras inferior y superior), hemos ignorado los efectos de la viscosidad, y hemos supuesto que el flujo es estacionario y que no hay fuerzas externas de volumen. La (6.89) es la fuerza que el obstáculo ejerce sobre el fluido. Por lo tanto, la fuerza que el fluido ejerce sobre el obstáculo⁶ es

⁵ De esta forma evitamos el problema de integrar el campo de presión sobre la superficie del obstáculo.

⁶ Para que el obstáculo permanezca inmóvil debemos pensar que mediante algún agente externo (por ejemplo, un soporte) ejercemos sobre el objeto una fuerza que equilibra a \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} = -\mathbf{R} = -\oint_S [\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dS = -\int_0^{2\pi} (\rho \mathbf{u} u_r + p \mathbf{e}_r) r d\theta \quad (6.90)$$

La presión está dada por la ecuación de Bernoulli

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - u^2) \quad (6.91)$$

Usando la expresión de la velocidad (6.88) en (6.91) resulta

$$p = p_\infty + \frac{\rho U \Gamma}{2\pi r} \sin \theta + \dots \quad (6.92)$$

donde los puntos suspensivos indican términos del orden de r^{-2} o superior, que no contribuyen a \mathbf{F} en el límite $r \rightarrow \infty$. En cuanto al término $\rho \mathbf{u} u_r$ de la integral (6.90), tenemos que

$$\rho \mathbf{u} u_r = \rho U^2 \cos^2 \theta \mathbf{e}_r + \rho \left(-U^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{U \Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta + \dots \quad (6.93)$$

donde los puntos suspensivos indican términos del orden de r^{-2} o superior, que no contribuyen a \mathbf{F} en el límite $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto, usando la (6.92) donde omitimos el término $p_\infty \mathbf{e}_r$ (dado que su contribución a \mathbf{F} es nula), y la (6.93), el integrando de la (6.90) queda como

$$\begin{aligned} r(\rho \mathbf{u} u_r + p \mathbf{e}_r) &= \rho r \left(U^2 \cos^2 \theta + \frac{U \Gamma}{2\pi r} \sin \theta \right) \mathbf{e}_r + \rho r \left(-U^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{U \Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &= \rho U^2 r \cos \theta \mathbf{e}_x + \frac{\rho U \Gamma}{2\pi} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (6.94)$$

a menos de términos del orden de $1/r$. La integral se puede calcular de inmediato y resulta

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = -\rho U \Gamma \quad (6.95)$$

Por lo tanto, *el arrastre es nulo*, un resultado que refleja la ausencia de disipación de energía en los flujos potenciales estacionarios. En cuanto a la sustentación (F_y), depende únicamente de la presencia de una circulación de la velocidad alrededor del obstáculo. La sustentación, también llamada *fuerza de Magnus*, se puede expresar en forma vectorial utilizando un vector circulación $\mathbf{\Gamma}$ paralelo a la dirección z , de modo que

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \times \mathbf{\Gamma} \quad (6.96)$$

Para aplicar correctamente la fórmula (6.96) hay que respetar la convención de calcular Γ recorriendo una curva cerrada alrededor del obstáculo en sentido *antihorario* (θ creciente, por lo tanto Γ es negativo en el caso de la Fig. 6.13).

La fuerza de Magnus es responsable de la sustentación del ala de un avión, y la geometría del perfil alar es lo que origina la aparición de la circulación necesaria. Esa fuerza también es la base de los mecanismos de propulsión de embarcaciones y aviones y de la sustentación de los helicópteros mediante hélices. También se la invoca para explicar la trayectoria de una pelota de tenis o de ping-pong cuando se le ha impartido “efecto”, e igualmente en el caso de la pelota de

fútbol cuando se la pateo con “chanfle”. Esto es cierto, pero cabe observar que no puede haber circulación atrapada en el flujo potencial alrededor de un obstáculo *todas* cuyas dimensiones son finitas. En efecto, sea cual fuere el circuito C de integración que se elija, es siempre posible encontrar una superficie S que se apoye sobre C y que esté íntegramente contenida en la región del flujo potencial. Pero la circulación de \mathbf{u} alrededor de C es igual al flujo de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ a través de S , y en un flujo potencial, $\boldsymbol{\omega} = 0$. Por consiguiente la circulación de \mathbf{u} alrededor de C resulta idénticamente nula. Lo que produce la circulación en los casos mencionados (pelotas de tenis, ping-pong, fútbol, etc.) es el arrastre del fluido cercano a la superficie del objeto que está en rotación, debido a la viscosidad del fluido⁷. En esos casos se puede también aplicar la ecuación de Bernoulli, suponiendo la continuidad de la presión a través de la capa límite próxima a la superficie del cuerpo, donde el flujo no es potencial. De esta forma se encuentra que la fuerza sobre el cuerpo es perpendicular a \mathbf{U} , al igual que para la geometría cilíndrica.

Obstáculo tridimensional

Consideremos un cuerpo sólido de extensión finita y de forma arbitraria que se desplaza con la velocidad \mathbf{U} en un fluido que se encuentra en reposo lejos del cuerpo (ver Fig. 6.16). Sean V_c el volumen del cuerpo, S_c la superficie que lo limita y L_c la mayor de sus dimensiones lineales. Tomaremos el origen de coordenadas en algún punto dentro del cuerpo.

El potencial de velocidad y el campo de velocidad lejos del cuerpo

Al igual que en el caso bidimensional que acabamos de tratar, podemos plantear un desarrollo multipolar (o sea, en potencias de $1/r$) del potencial de velocidad que determina la velocidad en un punto P del fluido. Claramente, si no hay fuentes o sumideros en nuestro objeto, el primer término no nulo del desarrollo es el término dipolar; éste es también el término dominante para $r \gg L_c$. Recordando la expresión del potencial de velocidad de un dipolo (ec. (6.56)) tendremos entonces

$$\phi = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi r^3} + \dots \quad (6.97)$$

donde ... indica términos del orden de $1/r^3$. En la expresión anterior, \mathbf{p} es el momento dipolar y su valor depende de la forma del cuerpo y de su velocidad⁸.

Ahora bien, las dimensiones del momento dipolar son

$$[p] = [u][l^3] \quad (6.98)$$

como surge de la (6.97). Por otra parte, por las relaciones (6.57), \mathbf{p} debe depender linealmente de \mathbf{U} . Por consiguiente, debemos tener

$$p_i = \alpha_{ij} U_j \quad (6.99)$$

donde las α_{ij} son las componentes de un tensor simétrico de rango 2, cuyo valor depende de la geometría del cuerpo y cuyo orden de magnitud está dado por el cubo de la dimensión lineal ca-

⁷ Por este motivo es esencial la rotación de la pelota para producir el “efecto”.

⁸ Debe quedar claro que así debe ser pues, por caso, si la velocidad del cuerpo es nula, \mathbf{p} debe ser nulo.

racterística del cuerpo o, lo que es lo mismo, por el volumen V_c . Por ejemplo, en el caso particular de un objeto esférico de radio R se encuentra fácilmente⁹ que

$$\mathbf{p} = 2\pi R^3 \mathbf{U} \quad \text{o sea} \quad \alpha_{ij} = 2\pi R^3 \delta_{ij} \quad (6.100)$$

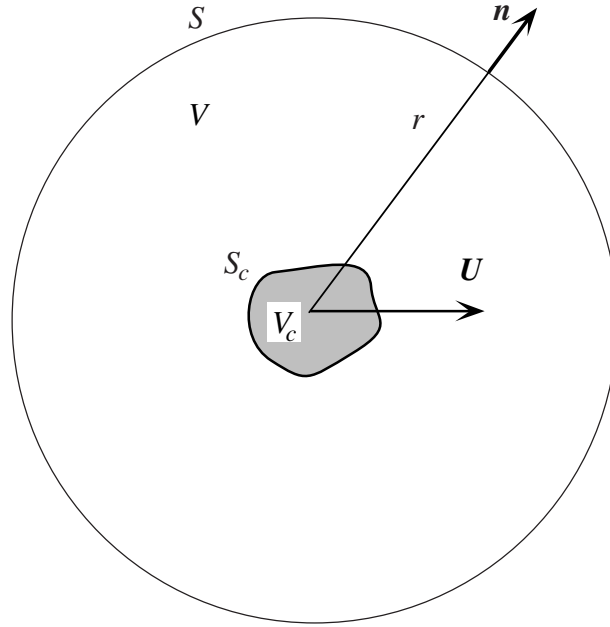


Fig. 6.16. Objeto de extensión finita y de forma arbitraria que se desplaza en un fluido en reposo.

A partir de la (6.97) obtenemos el campo de velocidad¹⁰ como

$$\mathbf{u} = \nabla \phi = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi r^3} + 3\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^5} \mathbf{r} + \dots \quad (6.101)$$

donde ... indica términos del orden de r^{-4} .

La energía cinética del fluido

Una característica esencial del problema que estamos considerando es que cuando el objeto en movimiento sufre una aceleración, también se induce una aceleración del fluido incompresible que es desplazado por el cuerpo. Este efecto no se debe a la fricción interna (de origen viscoso) entre parcelas del fluido, sino que es un efecto puramente inercial, de resultados del cual un objeto material que se mueve en el seno de un fluido bajo la acción de una fuerza, se comporta como si tuviera una masa efectiva diferente de su masa real. Nos proponemos aquí investigar este efecto. Vamos a calcular la energía cinética T del fluido contenida en un volumen esférico V muy grande que rodea al objeto. Sea R su radio y S la superficie que lo limita. Usaremos un truco para librarnos de las integrales incómodas sobre la superficie del objeto. Para eso escribimos la identidad

⁹ Se deja como ejercicio para el lector deducir la (6.100).

¹⁰ Con un poco de trabajo, que se deja como ejercicio para el lector.

$$\frac{T}{\rho/2} = \int_{V_{\text{fluido}}} u^2 dV = \int_{V_{\text{fluido}}} U^2 dV + \int_{V_{\text{fluido}}} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{U}) dV = I_1 + I_2 \quad (6.102)$$

Claramente

$$I_1 = U^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - V_c \right) \quad (6.103)$$

Para calcular I_2 usaremos la identidad vectorial

$$\nabla \cdot [f(\mathbf{u} - \mathbf{U})] = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \nabla f + f \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{U}) = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \nabla f \quad (6.104)$$

pues $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (porque el flujo es incompresible) y \mathbf{U} es un vector constante. Eligiendo $f = \phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}$ resulta

$$\nabla \cdot [(\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U})] = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \nabla (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{U}) \quad (6.105)$$

Sustituyendo la (6.105) en la expresión de I_2 y usando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{V_{\text{fluido}}} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{U}) dV = \int_{V_{\text{fluido}}} \nabla \cdot [(\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U})] dV \\ &= \int_{S_c} (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_c dS_c + \int_S (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (6.106)$$

El primer término es idénticamente nulo pues sobre la superficie del cuerpo se cumple la condición de contorno $(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_c = 0$. Queda entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_S (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S [\phi \mathbf{u} - \phi \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S [-\phi \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (6.107)$$

pues $\phi \mathbf{u}$ es del orden de r^{-5} y por lo tanto su integral de superficie tiende a cero como R^{-3} cuando $R \rightarrow \infty$.

El paso siguiente es introducir las expresiones (6.97) y (6.101) de ϕ y \mathbf{u} en la (6.107). La integral se debe evaluar sobre la superficie de la esfera, de modo que pondremos $\mathbf{r} = R\mathbf{n}$ en el integrando y $dS = R^2 d\Omega$, donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido. Luego de algunas simplificaciones, queda

$$I_2 = \int_S [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - 4\pi R^3 (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^2] \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (6.108)$$

Para evaluar las integrales que han quedado podemos utilizar la siguiente relación vectorial general, que vale para dos vectores constantes \mathbf{A} y \mathbf{B} cualesquiera

$$\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = A_i B_j \int_S n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} A_i B_j \delta_{ij} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (6.109)$$

Resulta entonces

$$I_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - \frac{4}{3} \pi R^3 U^2 \quad (6.110)$$

Por último, introduciendo la (6.103) y la (6.110) en la (6.102) obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} \rho (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \rho (\mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - V_c U^2) \quad (6.111)$$

Sustituyendo ahora la expresión (6.99) del momento dipolar resulta finalmente

$$T = \frac{1}{2} \rho (\alpha_{ij} U_i U_j - V_c U^2) \quad (6.112)$$

Por lo tanto, la energía cinética del fluido es una expresión cuadrática de las componentes de la velocidad del cuerpo.

La cantidad de movimiento del fluido

Nos interesa ahora calcular la cantidad de movimiento \mathbf{P} asociada al flujo provocado por el desplazamiento del cuerpo en el seno del fluido. Para este fin, observamos que si la velocidad del cuerpo varía en $\delta \mathbf{U}$, la variación de la energía cinética del fluido es

$$\delta T = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{U} \quad (6.113)$$

Usando en (6.113) la expresión (6.112) de la energía cinética obtenemos

$$\delta T = \rho (\alpha_{ij} U_j - V_c U_i) \delta U_i = P_i \delta U_i \quad (6.114)$$

de donde resulta

$$P_i = \rho (\alpha_{ij} U_j - V_c U_i) \quad \text{esto es} \quad \mathbf{P} = \rho \mathbf{p} - \rho V_c \mathbf{U} \quad (6.115)$$

Para interpretar los dos términos de \mathbf{P} podemos pensar que hemos reemplazado al cuerpo por el dipolo \mathbf{p} . El campo de velocidad sobre la superficie lejana S es el mismo en ambos casos. El término $\rho \mathbf{p}$ representa entonces la cantidad de movimiento asociada con el dipolo mismo, y $\rho V_c \mathbf{U}$ es la variación de cantidad de movimiento debida a la presencia del cuerpo.

La fuerza sobre el cuerpo y la masa inducida

A partir de la expresión de la cantidad de movimiento podemos calcular la fuerza que el fluido ejerce sobre el cuerpo:

$$f_i = -\frac{dP_i}{dt} = -\rho \left(\alpha_{ij} \frac{dU_j}{dt} - V_c \frac{dU_i}{dt} \right) \quad (6.116)$$

Esta fuerza es nula si el cuerpo se desplaza con velocidad constante. Este resultado recibe el nombre de *paradoja de D'Alembert* (al igual que los casos bidimensionales ya vistos). Esta denominación obedece a razones históricas y no debe producir confusión. En efecto, no hay nada paradójico en la (6.116). De momento que hemos supuesto que el flujo es potencial en todas partes, es lógico que el arrastre sea nulo y que también la sustentación sea nula, a diferencia del caso con geometría plana que consideramos previamente. Esto último se debe a que en el flujo

potencial alrededor de un objeto cuyas tres dimensiones son finitas no puede haber circulación, como ya comentamos antes.

Si ahora el cuerpo sufre una aceleración $\dot{\mathbf{U}}$ por la acción de una fuerza \mathbf{F} de origen externo¹¹, la ecuación de movimiento se escribirá en la forma

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = M\dot{\mathbf{U}}_i \quad (6.117)$$

donde M es la masa del cuerpo. Usando la expresión (6.116) podemos escribir la (6.117) en la forma

$$F_i = [(M - \rho V_c)\delta_{ij} + \rho \alpha_{ij}]\dot{U}_j = (M\delta_{ij} + \mathcal{M}_{ij})\dot{U}_j \quad (6.118)$$

En consecuencia, el cuerpo es acelerado como si en lugar de tener la masa M , tuviera una *masa aparente*, que se obtiene de sumar a M el tensor

$$\mathcal{M} = \rho \boldsymbol{\alpha} - \rho V_c \mathbf{I} \quad (6.119)$$

que representa la fuerza de reacción que el fluido acelerado ejerce sobre el cuerpo. El tensor \mathcal{M} se suele llamar tensor de *masa inducida*.

Por ejemplo, en el caso de un cuerpo de forma esférica, usando la (6.100) resulta que \mathcal{M} es isótropo y vale

$$\mathcal{M} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \quad (6.120)$$

La masa inducida es, en este caso, igual a la mitad de la masa del fluido desplazado por la esfera. Una manifestación del efecto de la masa aparente, que todos hemos observado alguna vez, es el movimiento de las burbujas en un vaso que contiene una gaseosa o un vino espumante. Las burbujas son aceleradas hacia arriba por el empuje de Arquímedes, dado por $\rho_{\text{agua}} Vg$ (V es el volumen de la burbuja). El peso $\rho_{\text{gas}} Vg$ de la burbuja es despreciable frente al empuje, puesto que $\rho_{\text{gas}} / \rho_{\text{agua}} \approx 10^{-3}$. Por lo tanto, si no fuera por la masa inducida, la burbuja sufriría una aceleración del orden de $10^3 g$, cosa que evidentemente no ocurre. Usando la (6.120) resulta en cambio una aceleración de unos $2g$, de acuerdo con la observación.

Algunos comentarios

Nuestro principal resultado es que en un flujo *potencial* alrededor de un cuerpo de extensión *finita* que se mueve con velocidad constante no hay arrastre ni sustentación (paradoja de D'Alembert). Su origen se puede ver con mayor claridad considerando el arrastre. La presencia de arrastre no nulo en el movimiento uniforme de un cuerpo implicaría que, para mantener el movimiento, debería existir una fuerza externa que realice trabajo. Este trabajo, o bien se debería disipar en el fluido, o bien se debería convertir en energía cinética del fluido, la cual a su vez debería fluir al infinito. Pero por definición, no hay disipación de energía en un flujo ideal. Además el campo de velocidad inducido en el fluido por el movimiento del cuerpo disminuye muy rápidamente con la distancia, y entonces no puede haber flujo de energía al infinito.

Es importante tener presente que estos argumentos, y entonces los resultados obtenidos en esta Sección, *dependen crucialmente de que el flujo tenga una extensión infinita*. Si, por ejemplo, el

¹¹ Por ejemplo, una esfera metálica que cae en el seno del fluido por efecto de la gravedad.

fluido tiene una superficie libre, un cuerpo que se mueve con velocidad uniforme paralelamente a la superficie experimenta un *arraastre no nulo*. La aparición de esta fuerza (llamada *arraastre por emisión de ondas*) se debe a que el movimiento del cuerpo produce un sistema de ondas que se propagan sobre la superficie libre, y transportan continuamente energía al infinito (ver el Capítulo 9 donde se comenta este tema).

Asimismo las fórmulas que obtuvimos para la masa inducida dependen de que el flujo tenga extensión infinita, pues para deducirlas evaluamos el campo de velocidad a grandes distancias. Si el fluido ocupa una extensión finita, el valor de la masa inducida es distinto del que hemos calculado, y depende de la geometría de las paredes que limitan el flujo y de la posición del cuerpo respecto de las mismas.

Potencial complejo

En un flujo plano potencial, las componentes de la velocidad están dadas por la (6.3) en términos del potencial de velocidad ϕ , y por la (6.11) en términos de la función corriente ψ , esto es

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.121)$$

Las segundas ecuaciones de este par son las bien conocidas *condiciones de Cauchy-Riemann* de la teoría de funciones de variable compleja. Por lo tanto, siempre y cuando las derivadas parciales en la (6.121) sean derivables, se puede afirmar que la función

$$w = \phi + i\psi \quad (6.122)$$

es una *función analítica* de la variable compleja¹²

$$z = x + iy \quad (6.123)$$

La función $w(z)$ se denomina *potencial complejo*. Una consecuencia inmediata de las condiciones de Cauchy-Riemann es que tanto ϕ como ψ satisfacen la ecuación de Laplace, como ya habíamos visto antes.

Las componentes de la velocidad u_x y u_y están relacionadas con dw/dz y se calculan convenientemente mediante la fórmula

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - iu_y = u^* \quad (6.124)$$

siendo u la velocidad compleja, y u^* su conjugada. El módulo de la velocidad en todo punto es por lo tanto

$$|u| = \sqrt{uu^*} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = |w'| \quad (6.125)$$

¹² Esto significa que w depende de x e y sólo a través de la combinación (6.123). No confundir la variable compleja z con la coordenada z (que es ignorable en un flujo plano).

Notar que la componente normal de la velocidad debe ser nula sobre un contorno sólido, por lo tanto tal contorno debe coincidir con una línea de corriente, es decir que $\psi = \text{cte.}$ sobre el contorno. Luego sobre ese contorno dw debe ser real.

Representación compleja de algunos flujos planos

Es sencillo encontrar la representación compleja de los flujos planos que ya estudiamos en este Capítulo. A continuación las daremos, dejando por cuenta del lector verificar las fórmulas.

Flujo uniforme

El potencial complejo de un flujo plano uniforme con una velocidad U que forma un ángulo α con el eje x es, en notación polar,

$$w = Ue^{-i\alpha}z \quad (6.126)$$

Fuente o sumidero lineal y vórtice lineal

Su potencial complejo es

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z) \quad (6.127)$$

Un vórtice lineal tiene un potencial complejo dado por

$$w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad (6.128)$$

Dipolo lineal

El potencial complejo de un dipolo lineal cuyo momento dipolar p forma un ángulo α con el eje x es

$$w = \frac{pe^{i\alpha}}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (6.129)$$

De manera semejante se puede encontrar la representación compleja de los demás flujos que hemos estudiado previamente.

Inversamente, toda función analítica w de la variable compleja z está asociada con un posible flujo potencial plano, en el sentido que su parte real se puede interpretar como el potencial de velocidad ϕ de ese flujo, y su parte imaginaria como la función corriente ψ del mismo flujo.

El Teorema de Blasius

Como ejemplo de la aplicación del formalismo del potencial complejo vamos a calcular nuevamente la fuerza que el fluido ejerce sobre un obstáculo sólido sumergido en un flujo uniforme.

Para este fin conviene definir una *fuerza compleja* como

$$F = F_x + iF_y \quad (6.130)$$

La componente dF_x sobre un elemento del contorno $ndl = -e_x dy + e_y dx$ (Fig. 6.17) es, evidentemente,

$$dF_x = -p dy \quad (6.131)$$

el signo $-$ se debe a que si el contorno es recorrido en sentido positivo (antihorario), la fuerza sobre un elemento dy positivo (hacia arriba) es negativa (dirigida hacia la izquierda). Análogamente, $dF_y = p dx$, y luego

$$F = -\oint_C p dy + i \oint_C p dx = i \oint_C p(dx + i dy) = i \oint_C p dz \quad (6.132)$$

Por otra parte, la ecuación de Bernoulli establece que

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varphi = K = \text{cte.} \quad (6.133)$$

donde φ es el potencial de la fuerza de volumen. Se puede mostrar fácilmente que si la fuerza de volumen es la gravedad, el efecto de tomar en cuenta φ es simplemente el de agregar a F el empuje de Arquímedes. Por lo tanto omitiremos el término $\rho \varphi$ en la ecuación de Bernoulli, lo que equivale a considerar en el cálculo de la fuerza sólo aquellas variaciones de presión asociadas con variaciones en el campo de velocidad, y no aquellas asociadas con las variaciones de la presión hidrostática. Luego, omitiendo φ , reemplazamos la expresión de p que se obtiene de la (6.133) en la 6.132), y queda,

$$F = -i \frac{\rho}{2} \oint_C u^2 dz \quad \text{o sea} \quad F^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C u^2 dz^* \quad (6.134)$$

pues el término constante K da lugar a una integral nula. Esta expresión se puede escribir como

$$F^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C u^2 dz^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C u u^* dz^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C w' w'^* dz^* \quad (6.135)$$

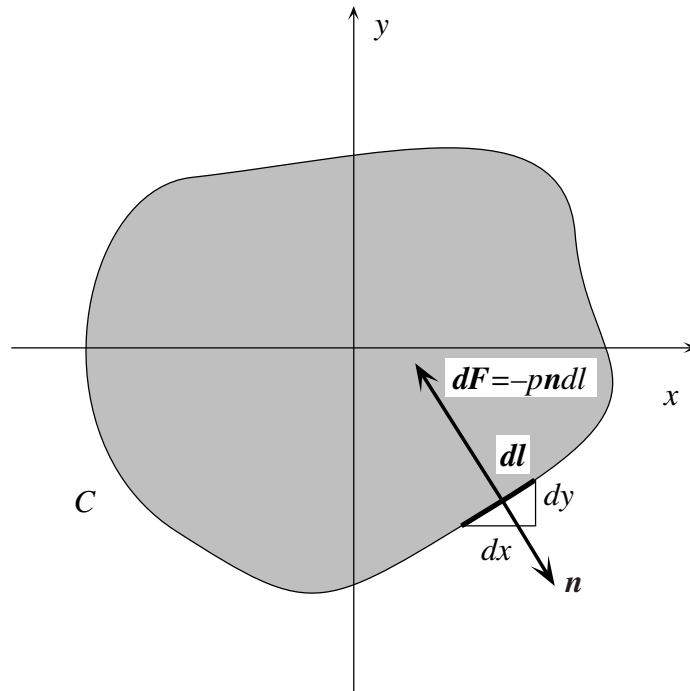


Fig. 6.17. Fuerza sobre un sólido en un flujo plano uniforme.

Además, como C es el contorno del sólido, debe coincidir con una línea de corriente. Luego, sobre el contorno, $dw = dw^*$ y entonces

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^* dz^* = \left(\frac{dw}{dz}\right) dz \quad (6.136)$$

con lo cual obtenemos

$$F^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C w'^2 dz \quad (6.137)$$

El interés de esta fórmula radica en que w' es una función analítica, y en consecuencia se puede recurrir al método de los residuos para el cálculo de la integral, en la forma,

$$\oint_C w'^2 dz = 2\pi i \sum_k R_k \quad (6.138)$$

donde R_k es el residuo del polo k -ésimo de w'^2 encerrado por el contorno C . Recordemos que para una función analítica genérica $g(z)$, cada residuo se calcula mediante la fórmula

$$R_k = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m g(z) \right] \quad (6.139)$$

siendo m la multiplicidad del polo ubicado en $z = z_0$.

Se debe señalar que la función w' se debe definir en la región interior a C como la prolongación analítica de la función w' , que está definida en la región exterior a C . En realidad, la expresión de la suma de los residuos se debe interpretar como una expresión matemática conveniente para el cálculo de la integral, pues w tiene significado de potencial complejo sólo fuera de C , dado que dentro de C no hay flujo.

Introduciendo la (6.138) en la (6.137) obtenemos

$$F^* = -\rho\pi \sum_k R_k \quad (6.140)$$

Los resultados expresados en las fórmulas (6.137) y (6.140) se conocen como *Teorema de Blasius*.

El teorema del círculo y la fuerza sobre un cilindro en un flujo asintóticamente uniforme

Este problema ya ha sido estudiado, pero lo vamos a volver a analizar por medio del presente formalismo, utilizando una técnica denominada *método de las imágenes*.

Para poder aplicar la fórmula de Blasius hace falta conocer el potencial complejo adecuado para el caso. Para eso recurriremos a un interesante teorema, denominado *Teorema del Círculo*, o de *Milne-Thomson*. Este teorema establece que si $f(z)$ es el potencial complejo de un flujo con contornos al infinito, cuyos puntos singulares están fuera del círculo $|z| < R$, entonces el potencial complejo $w(z)$ de un flujo con el mismo comportamiento asintótico y los mismos puntos singulares, pero que tiene en su seno un cilindro sólido de radio R centrado en el origen es:

$$w(z) = f(z) + f^*(R^2/z) \quad (6.141)$$

donde $f^*(R^2/z)$ se obtiene calculando primero f^* , y luego reemplazando z^* por R^2/z .

Para demostrar el teorema basta verificar que: (1) $w(z)$ tiene las mismas singularidades que $f(z)$ para $|z| > R$; y (2) que el contorno del cilindro es una línea de corriente, o sea que $dw = dw^*$ para $|z| = R$.

(1) Cuando $|z| > R$, se tiene que $|R^2/z| < R$; entonces, el módulo del argumento de $f^*(R^2/z)$ es menor que R , y corresponde a puntos interiores al círculo. Como f no tiene singularidades allí, tampoco las tiene f^* . Luego el término $f^*(R^2/z)$ no incorpora nuevas singularidades, y $w(z)$ tiene las mismas singularidades que $f(z)$ para $|z| > R$.

(2) En el contorno del círculo $|z| = R$ tenemos $z = Re^{i\theta}$ y entonces

$$w(z = Re^{i\theta}) = f(Re^{i\theta}) + f^*(Re^{-i\theta}) = f(z) + f^*(z^*) = f(z) + [f(z)]^* \quad (6.142)$$

Por lo tanto, $w(z)$ es real, de modo que $\psi = 0 = \text{cte.}$ sobre el contorno del cilindro lo cual muestra que dicho contorno es efectivamente una línea de corriente.

Aplicaremos ahora el teorema del círculo al caso de un cilindro inmerso en un flujo uniforme con el cuya velocidad asintótica U es paralela al eje x . Entonces $f(z) = Uz$ y $[f(z)]^* = Uz^*$; por lo tanto obtenemos

$$w(z) = Uz + UR^2/z \quad (6.143)$$

Nótese que este flujo es equivalente al que se obtiene superponiendo al flujo uniforme el flujo de un dipolo centrado en el origen, cuyo momento tiene módulo $p = 2\pi RU$ y que está orientado en un ángulo igual a $-\pi$. Se dice que el dipolo es la *imagen* del flujo uniforme respecto del cilindro¹³.

Para aplicar el Teorema de Blasius, debemos hallar los polos de w'^2 . De la (6.143) obtenemos

$$w'^2 = U^2(1 - R^2/z^2)^2 \quad (6.144)$$

que es una función con un único polo de multiplicidad $m = 4$ situado dentro del círculo en $z = 0$. Utilizando la (6.139) es fácil verificar que el correspondiente residuo es *nulo*. Por lo tanto el fluido no ejerce ninguna fuerza sobre el cilindro, como ya habíamos encontrado antes

Si hay circulación atrapada alrededor del cilindro, hay que superponer al potencial complejo (6.143) el término que corresponde a una circulación alrededor del origen, de modo que se tiene

$$w(z) = Uz + U\frac{R^2}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z/R) \quad (6.145)$$

y entonces

$$w'^2 = \left(U - U\frac{R^2}{z^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi z} \right)^2 \quad (6.146)$$

Nuevamente, w'^2 tiene un único polo de multiplicidad $m = 4$ en $z = 0$. Utilizando la (6.139) se encuentra ahora un residuo no nulo, dado por

¹³ Es fácil verificar que tomando la parte real e imaginaria de w se obtienen las expresiones (6.69) y (6.71).

$$R = -i \frac{U\Gamma}{\pi} \quad (6.147)$$

Por lo tanto el Teorema de Blasius nos permite obtener

$$F^* = F_x - iF_y = i\rho UT \quad (6.148)$$

lo que coincide con nuestro resultado anterior.

Transformaciones conformes

De la teoría de las funciones analíticas se sabe cómo se transforma una función en otra al modificarse, de acuerdo con ciertas normas, el contorno sobre el cual se asigna la condición que determina la función. Estas transformaciones se denominan *conformes*, y permiten, una vez determinado el potencial complejo w para un contorno sencillo (p. ej. formado por tramos rectos o circulares), obtener el potencial complejo para otras configuraciones cuyos contornos se obtienen transformando el contorno simple original.

En estas notas nos limitaremos a presentar las ideas básicas, pero por brevedad no vamos a desarrollar los detalles, que se pueden encontrar en muchos textos. Cuando sea necesario mencionaremos los resultados sin demostración.

Vamos a explicar ahora la idea fundamental. Sea $w(z) = \phi + i\psi$ el potencial complejo de un flujo potencial bidimensional en el plano z . Supongamos ahora que elegimos una cierta función analítica de z ,

$$Z = f(z) \quad (6.149)$$

cuya inversa

$$z = F(Z) \quad (6.150)$$

es una función analítica de Z . Entonces,

$$W(Z) = w(F(Z)) \quad (6.151)$$

es también una función analítica de Z . Pongamos ahora

$$Z = X + iY \quad (6.152)$$

y separemos las partes real e imaginaria de W :

$$W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y) \quad (6.153)$$

Puesto que W es una función analítica de Z , Φ y Ψ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, y en consecuencia las dos funciones

$$U_X = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad U_Y = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (6.154)$$

representan las componentes de la velocidad de un flujo potencial en el plano Z .

Además, puesto que por la (6.151) $W(Z)$ y $w(z)$ tienen el mismo valor en puntos correspondientes de los dos planos (esto es, puntos relacionados por las ecs. (6.149) y (6.150), ver Fig. 6.17), resulta que Ψ y ψ son iguales en puntos correspondientes. Por lo tanto, las líneas de corriente del flujo en el plano z se transforman en las líneas de corriente del flujo en el plano Z . En particular, el contorno de un sólido en el plano z , que necesariamente debe coincidir con una línea de corriente, queda transformado en una línea de corriente en el plano Z , que se puede considerar como el contorno de un sólido para el flujo en el plano Z . Esta es la primera idea básica.

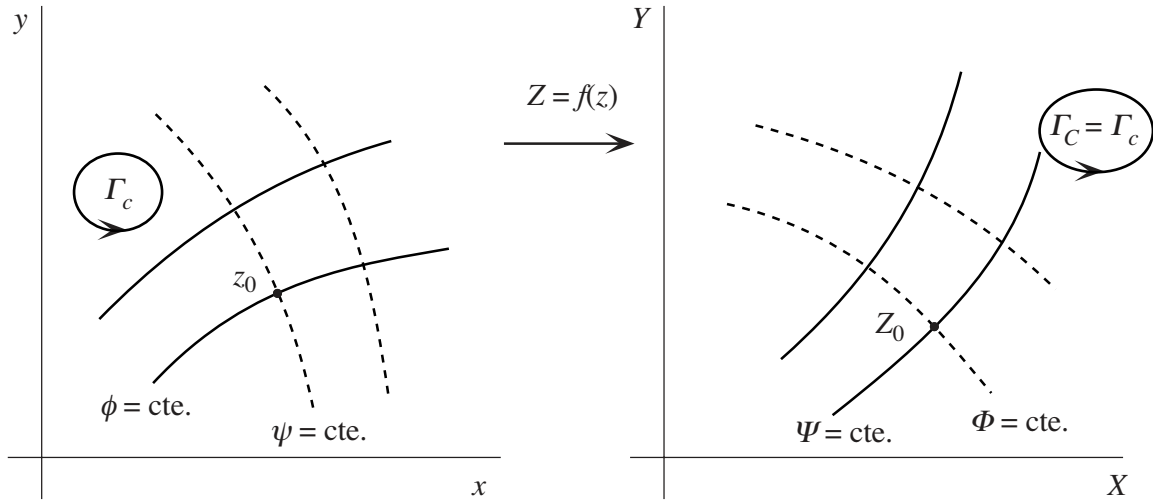


Fig. 6.18. Transformación conforme.

La segunda cuestión se relaciona con la circulación alrededor de un circuito cerrado. Evidentemente, Φ y ϕ son iguales en puntos correspondientes de los dos planos. Por lo tanto si recorremos un circuito cerrado c en el plano z , y obtenemos un cambio de ϕ , está claro que si en el plano Z recorremos el circuito cerrado C , transformado de c , el cambio de Φ será igual al cambio de ϕ . Luego las circulaciones de \mathbf{u} alrededor de c , y de \mathbf{U} alrededor de C son iguales.

Un tercer asunto al que debemos prestar atención es lo que sucede con el flujo al infinito. Claramente, de la (6.151) resulta

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{1}{f'(z)} \quad (6.155)$$

de modo que

$$U_X - iU_Y = \frac{u_x - iu_y}{f'(z)} \quad (6.156)$$

Por lo tanto si queremos transformar un flujo asintóticamente uniforme alrededor de un objeto en un flujo asintóticamente uniforme alrededor de otro objeto, tenemos que elegir $f(z)$ tal que

$$f'(z) \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad |z| \rightarrow \infty \quad (6.157)$$

Por último, corresponde mencionar una propiedad local de la transformación (6.149), que es la razón por la cual se la denomina *conforme*. Sean z_0 y Z_0 dos puntos correspondientes de los planos z y Z , y sea $f^{(n)}(z_0)$ la primera derivada no nula de $f(z)$ en z_0 . Normalmente tendremos

$n = 1$, pero habrá casos de interés en los que $f'(z_0) = 0$ pero $f''(z_0) \neq 0$, en cuyo caso $n = 2$, etc.. Sea ahora δz un pequeño segmento en el plano z , apoyado en z_0 , y sea δZ el correspondiente segmento del plano Z , apoyado en Z_0 . Desarrollando $f(z)$ en serie de Taylor resulta

$$\delta Z = \frac{\delta z^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + O(\delta z^{n+1}) \quad (6.158)$$

Por lo tanto, hasta el orden más significativo, tendremos

$$\arg(\delta Z) = n \arg(\delta z) + \arg[f^{(n)}(z_0)] \quad (6.159)$$

Entonces, si δz_1 y δz_2 son dos segmentos del plano z que se originan en z_0 , y δZ_1 , δZ_2 son los correspondientes segmentos del plano Z , resulta que

$$\arg(\delta Z_2) - \arg(\delta Z_1) = n[\arg(\delta z_2) - \arg(\delta z_1)] \quad (6.160)$$

Por lo tanto cuando dos pequeños segmentos que salen de un punto del plano z se transforman en sus correspondientes del plano Z , el ángulo entre ellos se multiplica por el factor n . Generalmente $n = 1$, y la transformación preserva los ángulos. Luego la forma de una pequeña figura del plano z se conserva de resultas de la transformación (6.149), que por eso se denomina *conforme*.

La teoría clásica de los perfiles alares

De lo dicho anteriormente se desprende que gracias a las transformaciones conformes podemos obtener, a partir de un flujo potencial conocido, las características de otro flujo potencial de interés, que se obtiene del primero aplicando una transformación elegida convenientemente. De esa forma se puede encontrar, a partir del problema del cilindro con circulación, que ya hemos resuelto, la solución del problema del flujo potencial alrededor de un perfil alar. En la Fig. 6.19 el lector puede encontrar la aclaración de la terminología empleada en esta sección.

A continuación daremos un esbozo de los aspectos más importantes de la teoría.

En este contexto es importante la *transformación de Joukowski*

$$Z = z + \frac{c^2}{z}, \quad c = \text{cte.} \quad (6.161)$$

que permite transformar el círculo $z = a \exp(i\theta)$ en una elipse cuyos semiejes valen

$$a + \frac{c^2}{a}, \quad a - \frac{c^2}{a} \quad (6.162)$$

En el caso particular $c = a$, la (6.161) transforma el círculo en una placa plana de ancho $4a$. Si aplicamos la transformación (6.161) a un círculo del plano z que pasa por $z = a$ pero que encierra a $z = -a$, por ejemplo, el círculo

$$z = (a + \lambda)e^{i\gamma} - \lambda \quad \text{con} \quad |\lambda| < a \quad (6.163)$$

obtenemos un perfil alar con un borde de ataque redondeado y un borde de fuga filoso. El perfil es simétrico si el parámetro λ es real, y tiene comba si $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ (Fig. 6.20).

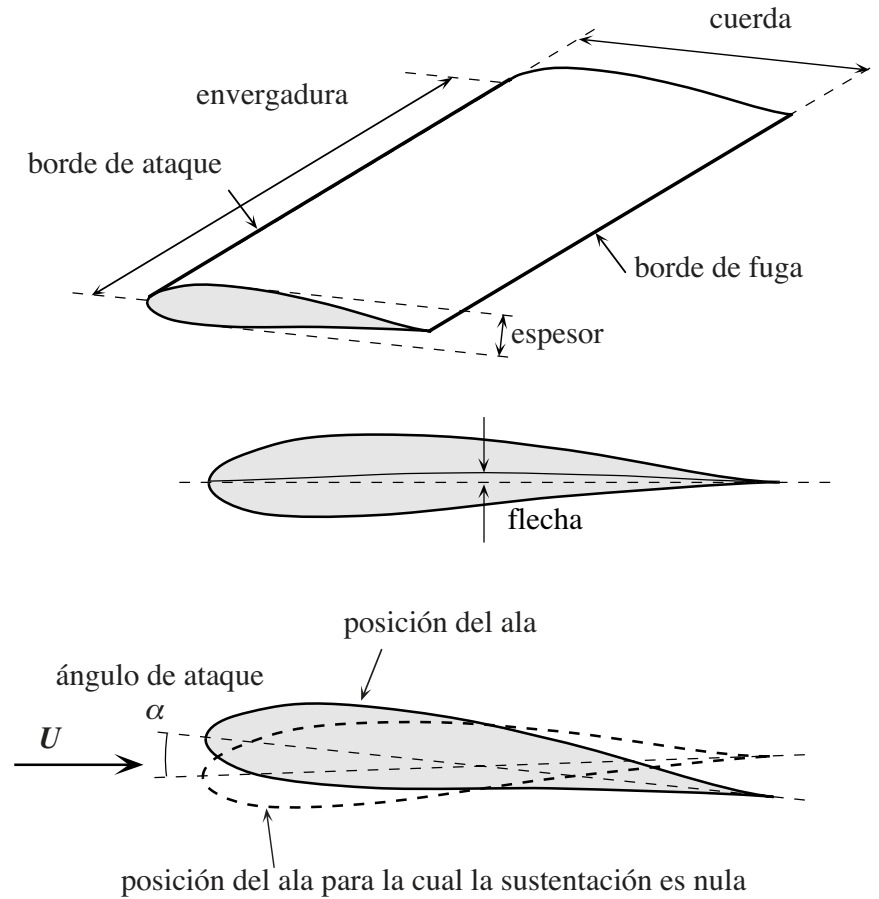


Fig. 6.19. Terminología aeronáutica.

En general, el flujo potencial alrededor de perfiles de este tipo tiene una singularidad en el borde de fuga, pues vimos que el flujo en un diedro divergente es singular, y la velocidad tiende al infinito hacia el vértice del diedro (ec. (6.61)). Sin embargo, *la singularidad se puede eliminar si se elige adecuadamente el valor de la circulación alrededor del perfil*. Para cada valor del ángulo de ataque¹⁴ α existe un único valor Γ_K para el cual la velocidad permanece finita en el borde de fuga, que se puede encontrar precisamente imponiendo esa condición.

Es natural esperar que el particular flujo potencial determinado por Γ_K sea el que ocurra en la práctica, y en esto consiste la *hipótesis de Kutta-Joukowski*. Se trata, claramente, de una hipótesis *ad hoc*, basada únicamente en la situación poco satisfactoria que de otra forma se daría a causa del borde de fuga filoso¹⁵. Sin embargo, es uno de los pasos cruciales para el desarrollo de la aerodinámica, y da resultados que están en excelente acuerdo con la experiencia¹⁶.

¹⁴ α es el ángulo que da la orientación del perfil alar, y por definición se mide a partir de la posición del ala para la cual la sustentación es nula, ver Fig. 6.19.

¹⁵ No queda claro, por ejemplo, en base a qué criterio podríamos elegir el correcto flujo potencial si el borde de fuga no fuese estrictamente filoso.

¹⁶ La hipótesis de Kutta-Joukowski se puede justificar en base a una teoría más rigurosa que tiene en cuenta la estabilidad de la estela que existe detrás del borde de fuga como consecuencia de fenómenos que no son tenidos en cuenta por la teoría simple que hemos desarrollado en este Capítulo.

Aplicando la hipótesis de Kutta-Joukowski se puede determinar Γ_K y por lo tanto se puede calcular la sustentación del perfil por medio de la ec. (6.84) como

$$F_y = -\rho U \Gamma_K \quad (6.164)$$

Este resultado se conoce como el *Teorema de la sustentación de Kutta-Joukowski*.

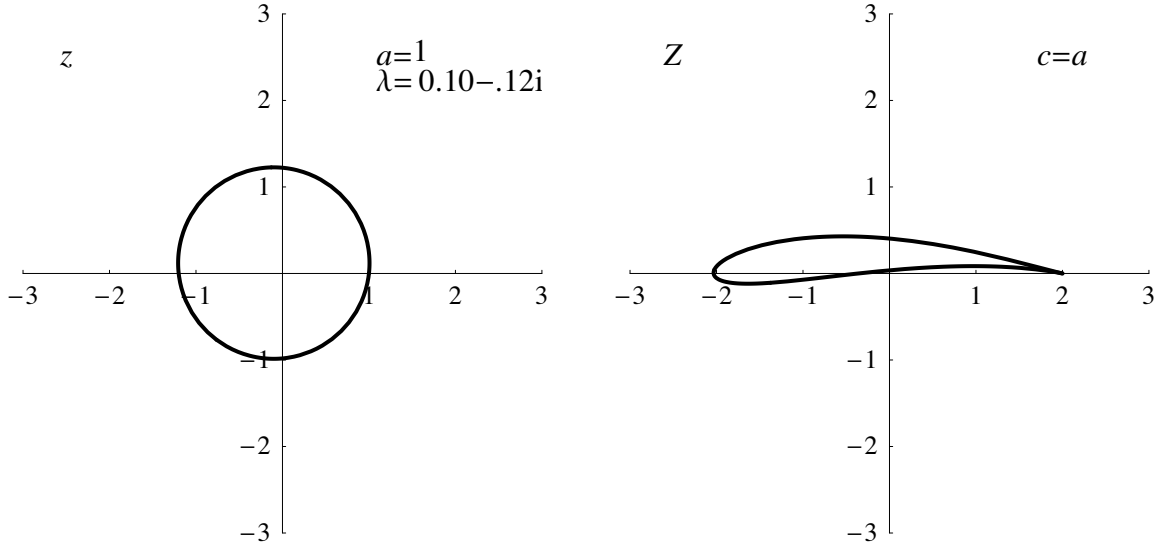


Fig. 6.20. Perfil alar obtenido a partir del círculo (6.163) mediante la transformación de Joukowski (6.161).

Para un ala delgada y simétrica cuyo perfil está dado por (6.161) y (6.163) resulta

$$\Gamma_K = -4\pi U(a + \lambda) \sin \alpha \approx -\pi U \ell \sin \alpha \quad (6.165)$$

donde ℓ ($\approx 4(a + \lambda)$) es la *cuerda* (o ancho) del ala. Resulta entonces, aplicando la (6.84), que la sustentación es

$$F_y = -\rho U \Gamma_K \approx \pi \rho U^2 \ell \sin \alpha \quad (6.166)$$

La (6.166) es la expresión de la fuerza de sustentación *por unidad de longitud* del ala. Para un ala muy larga, de envergadura L , la fuerza de sustentación sobre toda el ala es

$$F_y \approx \pi \rho U^2 \ell L \sin \alpha \quad (6.167)$$

Notar que $\ell L \sin \alpha$ es la proyección del área del ala sobre el plano perpendicular a la dirección para la cual la sustentación es nula (que coincide aproximadamente con la dirección de avance del ala).

Es usual definir el *coeficiente de sustentación* y el *coeficiente de arrastre* como

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 \ell L} \quad , \quad C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 \ell L} \quad (6.168)$$

Tenemos por lo tanto que de acuerdo con la (6.167), el coeficiente de sustentación para un ala muy larga, simétrica y delgada, el coeficiente de sustentación vale

$$C_y \approx 2\pi \sin \alpha \quad (6.169)$$

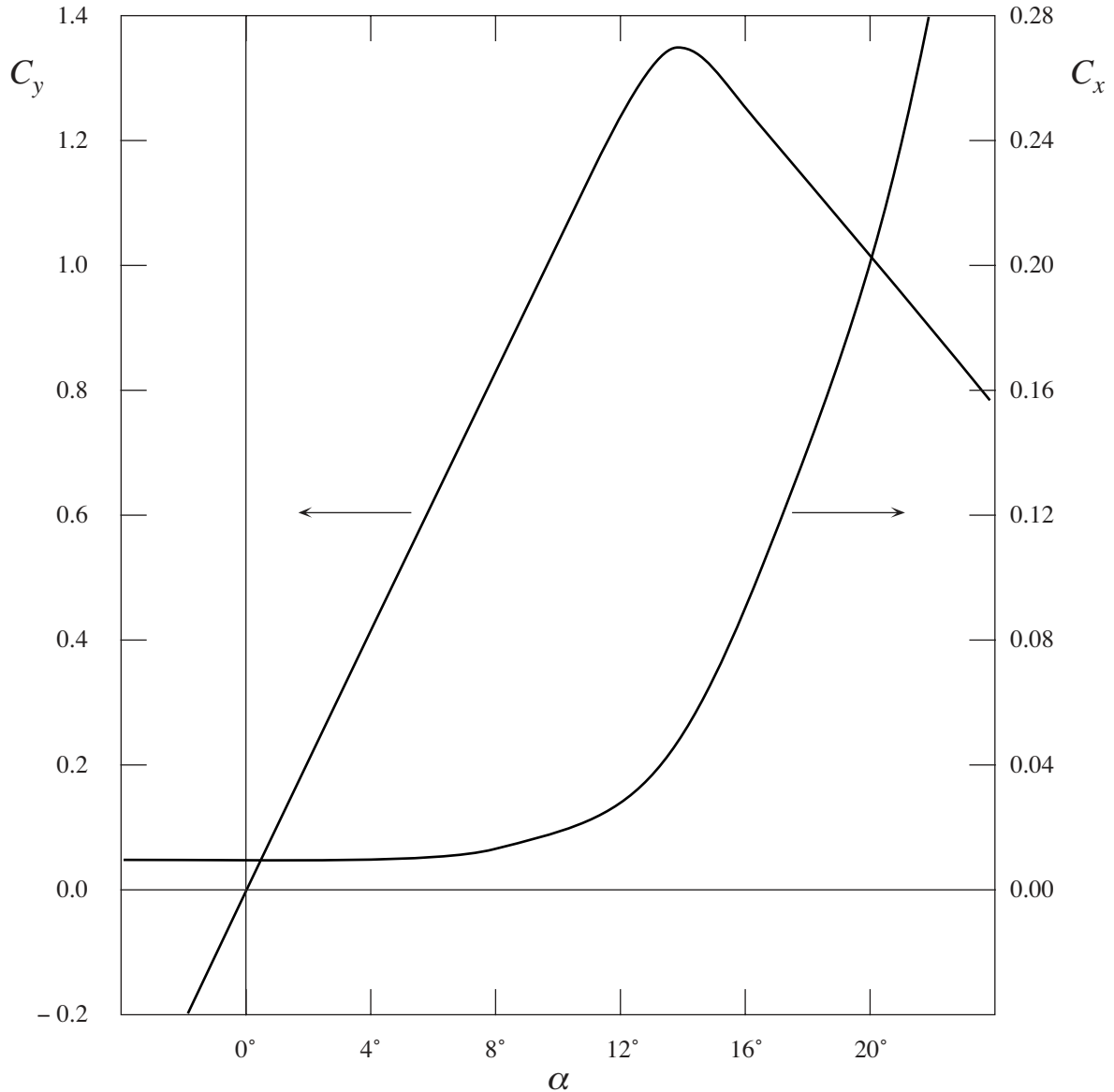


Fig. 6.21. Variación de los coeficientes de sustentación y de arrastre de un ala de avión en función del ángulo de ataque. Notar las diferentes escalas de C_y y C_x .

El acuerdo entre la teoría y los resultados experimentales es excelente, siempre y cuando α sea pequeño (Fig. 6.21). Para ángulos mayores, la sustentación medida cae fuertemente por debajo del valor teórico, por causas que discutiremos más adelante. El ángulo α a partir del cual comienza a fallar la teoría está típicamente comprendido entre 6° y 12° , según sea la forma del perfil del ala. No obstante esto, el hecho de predecir correctamente los aspectos esenciales del flujo alrededor del ala para pequeños ángulos de ataque es uno de los grandes éxitos de la teoría de flujos ideales, y un resultado de enorme importancia práctica.

Comentarios sobre los flujos potenciales

Antes de concluir este Capítulo es oportuno comentar algunas cuestiones que seguramente intrigan al lector. Parte de ellas se estudiarán en Capítulos posteriores, pero no está demás una discusión preliminar. Claramente la teoría ideal que presentamos aquí, si bien predice correctamente la sustentación de un ala, no está de acuerdo con la experiencia en ciertos aspectos y no aclara satisfactoriamente otros. Por ejemplo predice que el arrastre sobre un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido es nulo, lo cual está en violenta contradicción con la experiencia cotidiana. ¿Como conciliar este fracaso con la correcta predicción de la sustentación? Además, ¿como se origina la circulación que produce la sustentación del ala? De acuerdo con los teoremas de la circulación, si el ala parte del reposo y el aire está inmóvil, y entonces claramente la circulación de la velocidad alrededor del perfil es nula y no hay sustentación, parecería a primera vista que tendría que seguir siendo nula cuando el ala se pone en movimiento.

La pista que permite aclarar estas cuestiones parte de considerar los efectos de la viscosidad, que hasta aquí hemos ignorado. Pero la forma como interviene la viscosidad en muchos flujos es muy sutil y para nada obvia como se verá en seguida.

Flujos viscosos

Para comenzar a entender el rol de la viscosidad conviene regresar por un momento a la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6.170)$$

Esta ecuación difiere de la ecuación de Euler, sobre la cual se basa la teoría de los fluidos ideales, por la presencia del término viscoso $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ (aquí $\nu = \eta / \rho$ es la viscosidad cinemática).

Por de pronto, la observación de los flujos reales (o sea, viscosos) muestra que sobre un contorno rígido, no sólo la componente normal, sino también la componente *tangencial* de \mathbf{u} deben ser iguales a la velocidad del contorno¹⁷. Si el contorno está en reposo, debemos entonces tener

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre el contorno} \quad (6.171)$$

Esta condición sobre la componente tangencial de la velocidad se suele llamar *condición de no deslizamiento*, y vale para todo fluido con $\nu \neq 0$, por pequeña que sea la viscosidad.

En este contexto, podemos observar que usando la identidad vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (6.172)$$

y recordando que $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ y que en un flujo incompresible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, tenemos que

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (6.173)$$

Por lo tanto $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$ en un flujo cuya vorticosidad es nula (en realidad basta que $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0$) y la ecuación de Navier-Stokes coincide con la ecuación de Euler, pese a la existencia de esfuerzos

¹⁷ El hecho que las parcelas del fluido que están en contacto con la superficie de un sólido se tienden a adherir a él se puede entender cualitativamente en términos de las interacciones intermoleculares.

tangenciales. Este hecho, sobre el cual volveremos más adelante, explica porqué en un fluido real es posible tener un flujo potencial en la mayor parte del volumen, salvo en determinadas regiones donde por algún motivo hay vorticidad. Claramente, cerca de superficies sólidas, cuando la teoría ideal predice una componente tangencial no nula de la velocidad relativa, los efectos de la viscosidad son seguramente importantes, pues es precisamente debido a la viscosidad que se consigue que dicha componente se anule. En tales regiones hay vorticidad y por lo tanto el flujo no es potencial y tampoco, obviamente, se puede aplicar la ecuación de Euler.

El número de Reynolds

Consideremos un fluido viscoso en movimiento, y sea U el valor típico de la velocidad. Además, sea L la escala espacial característica del flujo¹⁸. Una vez elegidos L y U , podemos formar la cantidad

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (6.174)$$

que es un número puro que se conoce como *número de Reynolds*.

El motivo de la importancia del número de Reynolds se puede apreciar si se observa que las derivadas de las componentes de \mathbf{u} son típicamente del orden de magnitud de U/L (suponiendo, se entiende, que las componentes de \mathbf{u} tengan variaciones del orden de U sobre distancias del orden de L). Típicamente, las derivadas de las componentes de \mathbf{u} tendrán ellas mismas variaciones del orden de U/L sobre distancias del orden de L , luego derivadas segundas como $\partial^2 u_i / \partial x^2, \dots$, etc., serán del orden de magnitud de U/L^2 . De esta forma podemos estimar el orden de magnitud de los términos de inercia y viscoso de la ecuación de Navier-Stokes como

$$\begin{aligned} \text{término de inercia : } & |(u \cdot \nabla)u| = O(U^2/L) \\ \text{término viscoso : } & |\nu \nabla^2 u| = O(\nu U/L^2) \end{aligned} \quad (6.175)$$

Siempre y cuando estas estimaciones sean correctas, se deduce que

$$\frac{|\text{término de inercia}|}{|\text{término viscoso}|} = O\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = O(\text{Re}) \quad (6.176)$$

Por consiguiente, el número de Reynolds es importante porque permite estimar groseramente la importancia relativa de dos términos importantes de la ecuación de Navier-Stokes. No debe sorprender, entonces, que flujos caracterizados por un número de Reynolds grande y flujos caracterizados por un número de Reynolds pequeño tengan características muy diferentes.

Flujos de alto número de Reynolds

El caso $\text{Re} \gg 1$ corresponde a lo que podríamos llamar flujos de baja viscosidad. El resultado (6.176) sugiere que cuando $\text{Re} \gg 1$ los efectos de la viscosidad deberían ser, en general, despreciables. El flujo alrededor de un perfil alar delgado, cuando el ángulo de ataque es pequeño, es un caso de esta clase. Aún así, sin embargo, los efectos de la viscosidad se vuelven importantes

¹⁸ Un ejemplo puede permitir aclarar esto. En el caso del aquietamiento de la taza de té del Cap. 5, un valor razonable para L sería 4 cm, y para U , 5 cm/s.

en capas límite delgadas, donde existen gradientes de velocidad muy grandes. Debido a ello, *en esas capas delgadas, el término viscoso resulta mucho mayor de lo que indica la estimación (6.176), que se basa sobre las escalas características del grueso del flujo*. Veremos más adelante que el espesor típico δ de tales capas límite está dado por

$$\delta / L = O(1/\sqrt{\text{Re}}) \quad (6.177)$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea el número de Reynolds del grueso del flujo, tanto más delgada resulta la capa límite.

Está claro que para poder aplicar al grueso del flujo la teoría de flujos ideales que desarrollamos en este Capítulo, es necesario que el número de Reynolds sea grande (de lo contrario la capa límite abarcaría el grueso del flujo). Sin embargo esta condición *no es suficiente*. Veremos, en efecto, que el fenómeno de la *separación de la capa límite*, que consiste en que la capa límite se “desprende” de la superficie del sólido, lleva a un estado de cosas muy diferente del que predice la teoría ideal. Existe, además, otra complicación en los flujos de alto número de Reynolds. Ocurre muchas veces, en efecto, que las soluciones *estacionarias* de la ecuación de Euler son *inestables* frente a pequeñas perturbaciones, y de resultados de eso el flujo deja de ser estacionario y se vuelve *turbulento*. En realidad, fue precisamente en este contexto que Reynolds introdujo el parámetro adimensional que hoy lleva su nombre.

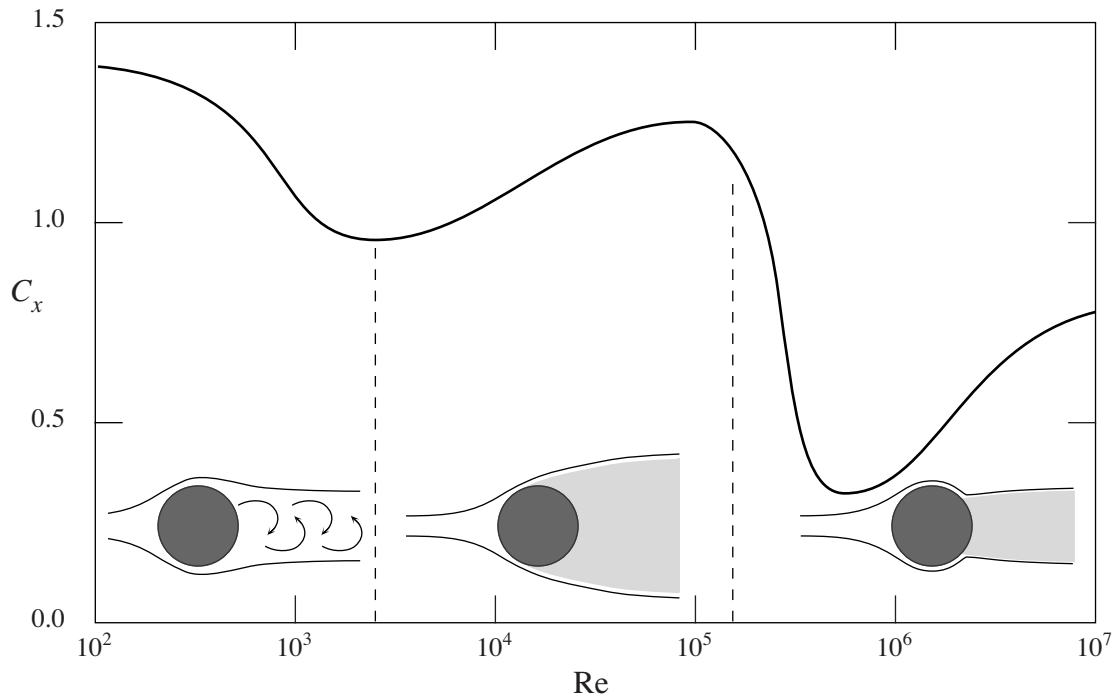


Fig. 6.22. Arrastre sobre un cilindro circular en un flujo uniforme.

La Fig. 6.22 muestra el coeficiente de arrastre sobre un cilindro circular, en función del número de Reynolds. Se puede observar que el arrastre sigue siendo importante en todo el intervalo entre $\text{Re} = 10^2$ y 10^7 , que equivale a disminuir la viscosidad por un factor 10^5 . Además, como lo indican los esquemas, el patrón general del flujo no muestra signos de tender a la forma de la Fig. 6.11 para $\nu \rightarrow 0$ (o sea $\text{Re} \rightarrow \infty$). Esto se debe a que para lograr esa forma, cerca de la superficie del cilindro la velocidad del flujo principal debería disminuir muy rápidamente del lado de atrás del mismo, y por lo tanto habría un fuerte gradiente de presión en sentido contrario al flujo

(lo que se llama un gradiente *adverso*), como se puede apreciar en la Fig. 6.12. Pero ocurre que la capa límite adherida a la superficie del cilindro no puede soportar ese gradiente adverso. El motivo es que debido al gradiente adverso, muy cerca de la superficie se produce una *inversión* del flujo, que hace que la capa límite (en la cual el flujo es rotacional) se separe de la superficie del cilindro provocando una importante *estela* detrás del mismo, en la cual el flujo es vorticoso. Si bien el carácter de la estela cambia al aumentar el número de Reynolds, ésta nunca desaparece. La presencia de la estela es responsable del arrastre que se observa en los experimentos.

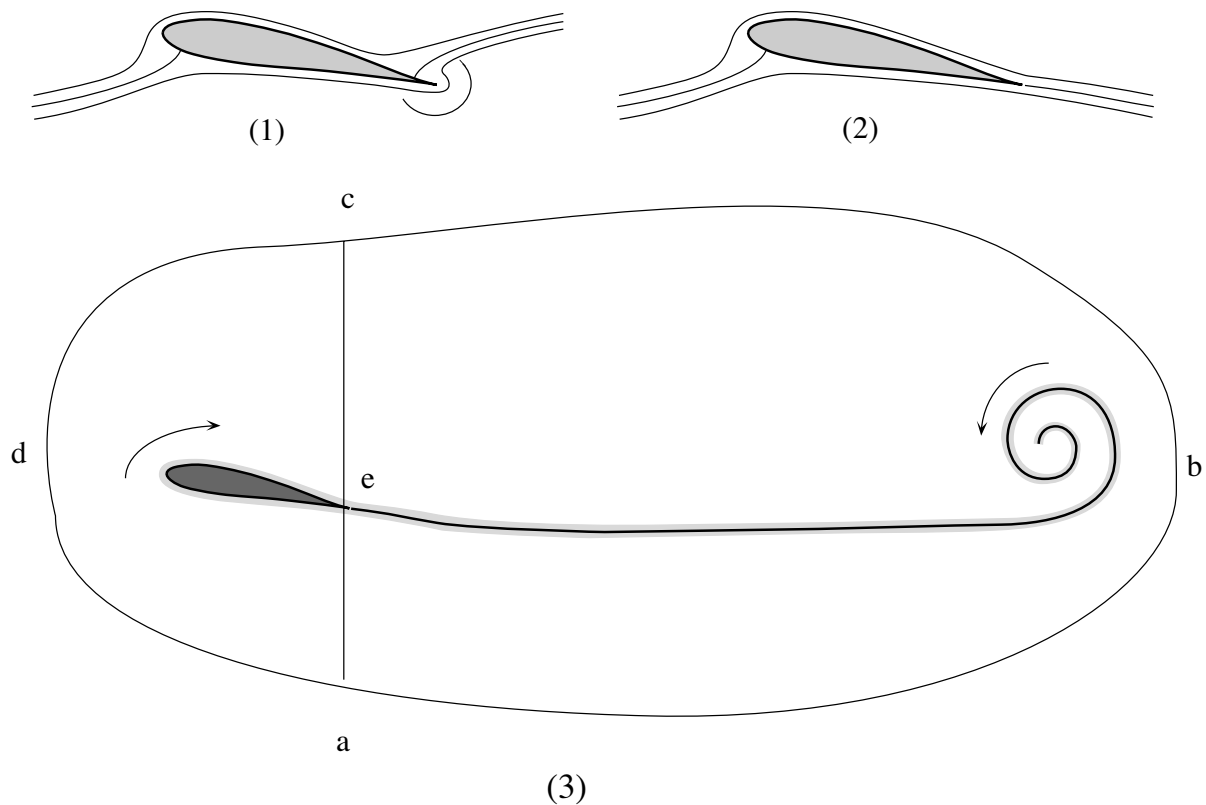


Fig. 6.23. Generación de la sustentación de un ala. El patrón (1) del flujo en el instante que el ala se pone en movimiento a partir del reposo no tiene circulación. Para un perfil alar diseñado para tener sustentación, cuando el ala se comienza a mover el flujo tiene un punto de estancamiento sobre la superficie superior, antes del borde de fuga, y la velocidad es singular en el filo del borde de fuga. Tal situación se mantendría siempre si no fuera por los efectos de la viscosidad, que hacen que la capa límite de la parte de abajo del ala se separe justo en el borde de fuga. El vórtice que así se produce interactúa con la región no viscosa del flujo haciendo que el punto de estancamiento superior se desplace hacia el punto de separación. El nuevo flujo (2) no viscoso (fuera de la capa límite) tiene ahora una circulación, cuya magnitud está determinada por la geometría del perfil alar, junto con la condición que el punto de estancamiento posterior coincida con el borde de fuga. El proceso por el cual se genera la sustentación tiene lugar gracias a que se descarga vorticidad en el fluido (3). De acuerdo con el Teorema de Helmholtz, la circulación alrededor del circuito ($a e c d a$) que rodea el ala está compensada exactamente por la circulación alrededor del circuito ($a b c e a$) que rodea la estela y el vórtice pero no el ala.

A diferencia del cilindro, un perfil alar está especialmente *diseñado para evitar la separación* de la capa límite. La característica esencial que permite lograr esto es el perfil alargado y afilado de la parte posterior, que sirve para reducir el gradiente adverso de presión, haciendo que la presión aumente en forma muy gradual en la parte del ala donde el espesor disminuye. Por este motivo, la capa límite no se separa sino muy cerca del borde de fuga, y entonces se produce una estela sumamente delgada. En este caso, sí es posible obtener valores muy pequeños del arrastre como se puede apreciar de la Fig. 6.21: para cuerpos bien perfilados (“aerodinámicos”) el coeficiente de arrastre es típicamente del orden de $Re^{-1/2}$ para $Re \rightarrow \infty$. Este estado de cosas se mantiene siempre y cuando el ángulo de ataque sea pequeño. Si el ángulo de ataque supera cierto límite, el aumento de presión sobre la parte superior del ala deja de ser suficientemente gradual, y se produce la separación de la capa límite muy adelante del borde de fuga. Cuando eso ocurre se dice que el ala está en *pérdida* (de sustentación), en efecto, la sustentación cae bruscamente a la par que aumenta fuertemente el arrastre (ver Fig. 6.21).

Las propiedades de la capa límite también permiten entender el *origen* de la circulación necesaria para la sustentación del ala. Cuando el ala y el aire que la rodea están en reposo, la velocidad y la vorticosidad son nulas en todas partes. Los experimentos muestran que al ponerse en movimiento el ala, se genera vorticosidad en la capa límite (Fig. 6.23); esta vorticosidad queda confinada en esa capa y en una delgada estela que queda atrás del ala, y que termina en un vórtice que se suele llamar *vórtice de arranque*. Consideremos ahora un circuito material ($a b c d a$) suficientemente grande como para estar íntegramente afuera de esas regiones desde el inicio del movimiento. Puesto que el estado inicial es de reposo, la circulación alrededor de ese circuito es nula inicialmente y por el Teorema de Kelvin sigue siendo nula en todo tiempo posterior. Si ahora dividimos el circuito en dos partes, una de los cuales ($a b c e a$) rodea el ala pero no la estela y el vórtice de arranque, y la otra ($a e c d a$) rodea la estela y el vórtice pero no el ala, claramente la circulación alrededor de estos dos circuitos debe ser de igual valor absoluto y signo opuesto. Ahora bien, el diseño del perfil alar está concebido de modo que la vorticosidad que se desprende del ala es *positiva*, para que quede alrededor del ala una circulación *negativa*, que proporcione la sustentación. El desprendimiento de vorticosidad continúa hasta que la circulación alrededor del perfil alar alcanza el valor necesario para que el flujo principal (irrotacional) no presente singularidad en el borde de fuga. Este valor es precisamente el Γ_K de Kutta-Joukowski. A partir de ese momento no hay más variación neta de la vorticosidad de las capas límite de las superficie superior e inferior del ala, y se mantiene el valor final Γ_K de la circulación.

De todo lo dicho se desprende el rol fundamental de la viscosidad y de la capa límite, cuyo estudio será materia de los próximos Capítulos.

7. FLUJOS VISCOSOS

Ecuación de Navier Stokes

Trataremos ahora flujos en los cuales los efectos de la viscosidad son importantes, pero limitándonos al caso incompresible y con densidad uniforme. Por lo tanto vamos a suponer que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\rho = \text{cte.}$. La ecuación de movimiento es entonces la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.1)$$

donde $\nu \equiv \eta / \rho$ indica la viscosidad cinemática. Vamos a suponer que la fuerza de volumen es conservativa, de modo que $\mathbf{F} = -\nabla \varphi$ siendo φ el potencial correspondiente.

La (7.1) muestra que las fuerzas de inercia y viscosas equilibran la suma de la fuerza debida al gradiente de la presión más la fuerza de volumen $\rho \mathbf{F}$. Sin ulterior pérdida de generalidad podemos definir una *presión modificada* como

$$P = p + \rho \varphi \quad (7.2)$$

y entonces la ecuación de Navier-Stokes (7.1) queda de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.3)$$

como si no existieran fuerzas de volumen. Esto equivale a agregar a la presión una presión ficticia $\rho \varphi$. Dado que hemos supuesto que ρ es constante, esta presión ficticia es un dato del problema, por lo tanto es suficiente resolver la ecuación (7.3) (lo que formalmente es equivalente a suponer que $\mathbf{F} = 0$), con tal de interpretar P de acuerdo con la (7.2).

Ecuación de la vorticidad

Del mismo modo que procedimos para obtener la ecuación de la vorticidad a partir de la ecuación de Euler (Cap. 5), tomamos el rotor de la ecuación de Navier-Stokes. Usando la ec. (5.10) y tomando en cuenta que el operador rotor conmuta con el operador Laplaciano, resulta

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (7.4)$$

Si ahora usamos la identidad vectorial (5.28) y la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ podemos escribir la (7.4) como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (7.5)$$

El primer término del miembro derecho de la (7.5) expresa, como ya sabemos, el congelamiento de la vorticidad, y el segundo término (que no aparece para flujos ideales) nos dice que la vorticidad *difunde* a través del fluido debido a la viscosidad. Además de esta diferencia, podemos también observar que la (7.5) difiere de la (5.29) porque ahora se ha supuesto que la densidad es constante.

Difusión de la velocidad y la vorticidad

Para apreciar el efecto del término $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$, consideremos el siguiente problema: se tiene un fluido que ocupa el semiespacio $y > 0$, limitado por una pared rígida en el plano $y = 0$. Para $t < 0$, el fluido y la pared se encuentran en reposo. En el instante $t = 0$ la pared se pone en movimiento en la dirección x , con una velocidad

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_x = \text{cte} \quad , \quad t \geq 0 \quad (7.6)$$

Claramente la coordenada z es ignorable, y la única componente no nula de la velocidad del fluido es la componente x , que depende sólo de y y de t :

$$\mathbf{u} = u(y, t) \mathbf{e}_x \quad (7.7)$$

Por lo tanto, la única componente no nula de la vorticidad es la componente z :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(y, t) \mathbf{e}_z = -(\partial u / \partial y) \mathbf{e}_z \quad (7.8)$$

De la (7.3) vemos también que debemos tener $\nabla P = 0$, es decir $P = \text{cte}$. dado que hemos supuesto que el fluido está en reposo para $t < 0$. Por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que la presión modificada P es nula (si bien podemos tener $p \neq 0$, la fuerza debida a la presión debe estar equilibrada por la gravedad).

Por lo que se acaba de ver, los operadores $\mathbf{u} \cdot \nabla$ y $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla$ en la ecuación de Navier-Stokes (7.3) y en la ecuación de la vorticidad (7.5) son nulos, y esas ecuaciones se reducen a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (7.9)$$

o sea, son ecuaciones idénticas. Ecuaciones del tipo (7.9) conocen como *ecuaciones de difusión*¹. Veremos ahora como se construye la solución de nuestro problema, comenzando por la ecuación de la velocidad.

Puesto que u_0 es la velocidad característica del problema, la solución debe ser de la forma

$$u = u_0 f(y, t, \nu) \quad (7.10)$$

donde f es una función sin dimensiones de las demás variables y parámetros del problema. Por lo tanto, los argumentos de f deben ser también adimensionales. Pero como no existen en nuestro problema ni distancias ni tiempos característicos, las variables y , t no pueden aparecer separadas, sino formando *una única combinación adimensional* que podemos elegir, sin pérdida de generalidad, de la forma

$$\xi = \nu^\alpha t^\beta y \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \text{ constantes} \quad (7.11)$$

Puesto que las dimensiones de ν son $[\nu] = L^2 T^{-1}$, se debe cumplir que

¹ Más precisamente, ecuaciones *lineales* de difusión, pues hemos supuesto que ν es constante. Para un fluido no Newtoniano, en el cual la viscosidad depende de la velocidad de deformación, este mismo problema conduce también a una ecuación de difusión, pero que no es lineal.

$$(L^2 T^{-1})^\alpha T^\beta L = 1 \quad (7.12)$$

Por lo tanto los exponentes α y β deben satisfacer las ecuaciones

$$2\alpha + 1 = 0 \quad , \quad \beta - \alpha = 0 \quad (7.13)$$

cuya única solución es

$$\alpha = -1/2 \quad , \quad \beta = -1/2 \quad (7.14)$$

En consecuencia, la solución debe ser necesariamente de la forma

$$u = u_0 f(\xi) \quad , \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad (7.15)$$

donde hemos introducido por conveniencia el factor 4 en el radicando. Este resultado es de por sí interesante, pues fija las posibles dependencias del campo de velocidades con la coordenada y el tiempo. Además, reemplazando la expresión (7.15) de u en la ecuación de difusión, obtenemos una ecuación no ya en las derivadas parciales de las dos variables independientes y , t , sino una ecuación diferencial *ordinaria* en la única variable independiente ξ , de la forma

$$f'' + 2\xi f' = 0 \quad (7.16)$$

donde las primas indican derivadas respecto de ξ . Una primera integral de esta ecuación es

$$f' = A e^{-\xi^2} \quad , \quad A = \text{cte.} \quad (7.17)$$

Para averiguar el valor de A , retornemos a las variables físicas u , y , t , de modo que la (7.17) se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{A u_0}{\sqrt{4\nu t}} e^{-y^2/4\nu t} \quad (7.18)$$

e integremos a t fijo desde 0 hasta y . Resulta:

$$u(y, t) - u(0, t) = u(y, t) - u_0 = \frac{A u_0}{\sqrt{4\nu t}} \int_0^y e^{-y'^2/4\nu t} dy' = A u_0 \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-s^2} ds \quad (7.19)$$

pues la condición de contorno de no deslizamiento sobre la pared requiere que

$$u(0, t) = u_0 \quad (7.20)$$

Por otra parte, cuando $y \rightarrow \infty$ tenemos que

$$u(\infty, t) = 0 \quad (7.21)$$

Además

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (7.22)$$

y por lo tanto resulta que

$$A = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (7.23)$$

Puesto que la (7.19) vale para cualquier t , podemos escribir la solución del problema como

$$u(y, t) = u_0[1 - \operatorname{erf}(y/\sqrt{4\nu t})] \quad (7.24)$$

donde la *función error* $\operatorname{erf}(s)$ está definida por

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-s'^2} ds' \quad (7.25)$$

con el factor de normalización $2/\sqrt{\pi}$, para que se cumpla $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Habiendo obtenido $u(y, t)$ podemos calcular la vorticidad por medio de la (7.8). Resulta:

$$\omega(y, t) = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi\nu t}} e^{-y^2/4\nu t} \quad (7.26)$$

con lo cual queda resuelto el problema. Las soluciones (7.24) y (7.26) se muestran en la Fig. 7.1. Soluciones del tipo (7.24) y (7.26) se dicen *autosemejantes*, es decir semejantes a sí mismas. La razón de esta denominación es que si representamos $u(y, t)$ y $\omega(y, t)$ como funciones de y para un cierto valor fijo de t (o como funciones de t para y fijo), los mismos gráficos también representan a $u(y', t')$ y $\omega(y', t')$ como funciones de y' para otro t' fijo (o como funciones de y' para t' fijo), siempre y cuando las escalas de los ejes se cambien por factores adecuados (que surgen de inspeccionar la (7.24) y (7.26)). La única variable independiente ξ definida por la (7.15) se denomina *variable de autosemejanza*. En los gráficos de la Fig. 7.1 se ha elegido ξ como variable independiente (en el eje de las ordenadas, para que el lector pueda imaginar que el eje y es vertical y la pared es horizontal) y a u/u_0 y $\omega\sqrt{\pi\nu t}/u_0$ como variables dependientes. De esta forma, las curvas dibujadas en la figura son *universales*, y presentan la solución para todo y , t , y para cualquier valor de ν y u_0 .

La existencia de *autosemejanza* es de gran importancia puesto que simplifica considerablemente la solución del problema. En efecto, gracias a ello las ecuaciones diferenciales *parciales* (7.29) en las dos variables y, t se reducen a ecuaciones diferenciales *ordinarias* en la única variable ξ , mucho más fáciles de resolver. La noción de autosemejanza y el método que hemos utilizado son muy generales, y más adelante encontraremos otros ejemplos.

Examinemos el comportamiento de la solución cerca de la pared, donde $y \ll \sqrt{4\nu t}$ ($\xi \ll 1$). De la (7.24) y la (7.26) obtenemos

$$u \cong u_0[1 - y/\sqrt{4\nu t}] \quad , \quad \omega \cong u_0/\sqrt{4\nu t} \quad , \quad (y \ll \sqrt{4\nu t}) \quad (7.27)$$

lo cual muestra que la velocidad disminuye linealmente con y , con una pendiente que decrece con el tiempo y se mantiene uniforme en el espacio. Dentro de la misma región la vorticidad es uniforme en el espacio y disminuye a medida que transcurre el tiempo.

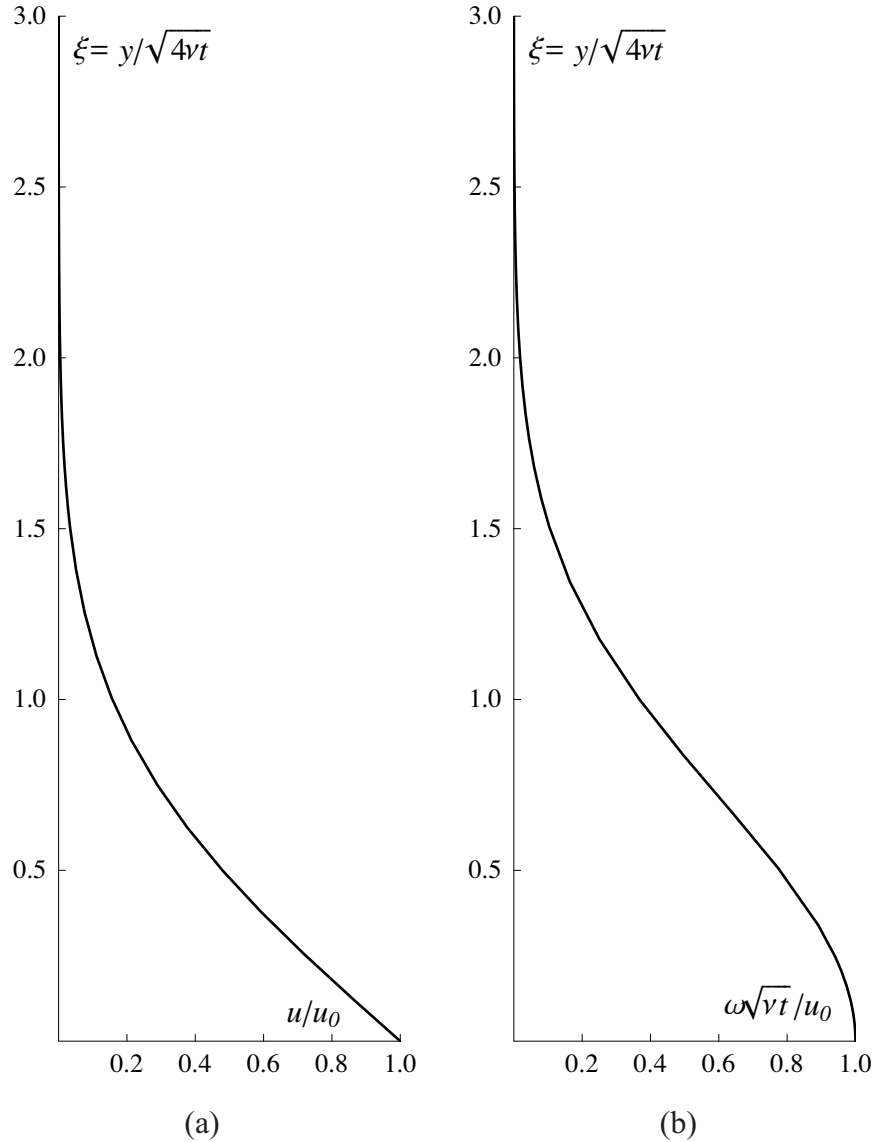


Fig. 7.1. Difusión de la velocidad (a) y de la vorticidad (b) originada por una pared que se ha puesto en movimiento paralelamente a sí misma.

En primera aproximación podemos decir que el movimiento afecta una capa próxima a la pared, de espesor

$$\Delta \cong \sqrt{4\nu t} \quad (7.28)$$

dentro de la cual la velocidad decrece en forma aproximadamente lineal a partir de u_0 en $y = 0$. En la misma capa, la vorticidad disminuye con el pasar del tiempo a medida que la capa aumenta de espesor. En realidad, puesto que

$$\int_0^{\infty} \omega(y, t) dy = u_0 \quad (7.29)$$

se mantiene constante para $t > 0$, con pleno derecho se puede decir que toda la vorticidad se origina en $t = 0$ sobre la pared misma, al variar de 0 a u_0 la velocidad de la pared. De allí en más, no se genera más vorticidad; ésta, simplemente, difunde en el resto del fluido.

También es interesante calcular la fuerza sobre la pared debida a la viscosidad. Tenemos que

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\eta u_0}{\sqrt{4\pi\nu t}} \quad (7.30)$$

de donde se ve que la fuerza disminuye como $t^{-1/2}$.

Flujos con vorticidad inicial nula y el origen de la capa límite

El término $\nabla^2 \mathbf{u}$ de la ecuación de Navier-Stokes se puede desarrollar usando la identidad vectorial (6.172) en la forma

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (7.31)$$

pues sólo consideramos fluidos incompresibles. Por lo tanto, si la vorticidad es nula (o constante) se tiene que $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$, y la ecuación de Navier-Stokes coincide con la ecuación de Euler, a pesar de la presencia de esfuerzos tangenciales.

Para comprender las consecuencias de este hecho, supongamos que hemos obtenido un campo de velocidad irrotacional para un fluido no viscoso ($\nu = 0$), que por lo tanto satisface la ecuación de Euler. Imaginemos ahora que, mediante un artificio ideal, en un cierto instante (digamos en $t = 0$) la viscosidad del fluido pasa a tener un valor finito $\nu \neq 0$. De acuerdo con lo que acabamos de ver el campo de velocidad que existía para $t < 0$ satisface también la ecuación de Navier-Stokes, que debemos emplear a partir de $t = 0$. Luego, incluso si $\nu \neq 0$, no hay ningún motivo para que aparezca de repente vorticidad en un fluido donde $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Sin embargo, esto es cierto *sólo si se prescinde de las condiciones de contorno*, pues para $t > 0$ la velocidad tangencial en toda superficie de contacto entre el fluido y un sólido debe ser *nula* en el sistema de referencia del sólido, en vez de autodeterminarse como ocurría cuando se tenía $\nu = 0$.

Para fijar ideas mediante un ejemplo, consideremos el flujo cerca de una pared sólida inmóvil, plana e infinita². Supongamos que para $t < 0$ (mientras la viscosidad es nula), el flujo es irrotacional. En general, la velocidad del fluido en el entorno de una porción de la pared tendrá un valor finito (el que resulte de calcular el campo de velocidad mediante la ecuación de Euler) que denominaremos $-\mathbf{u}_0$. Pero a partir de $t = 0$, la velocidad se debe anular en ese entorno. Si nos ubicamos en el sistema de referencia del fluido, todo ocurre como si el fluido hubiese sido siempre viscoso, y que la pared, que (en ese referencial) estaba inmóvil hasta $t = 0$, en ese instante se puso en movimiento paralelamente a sí misma con la velocidad \mathbf{u}_0 .

Podemos entonces usar el resultado del problema anterior para concluir que, por efecto de la viscosidad, se produce una capa cerca de la superficie, a través de la cual la velocidad pasa del va-

² Está claro que, salvo en el entorno de vértices o aristas, este caso es representativo de lo que ocurre cerca de una porción limitada de superficie, incluso cuando la superficie sólida no es plana.

lor nulo sobre la superficie inmóvil, al valor $-u_0$ correspondiente al campo de velocidad determinado por la ecuación de Euler. En esta *capa límite* la vorticidad no es nula, aunque sigue siendo aproximadamente nula fuera de ella. Con todo derecho, podemos decir entonces que la vorticidad se genera en el contorno fluido-pared. Además, por la (7.28), sabemos también que el espesor Δ de la capa vorticiosa aumenta con el tiempo de acuerdo a la ley

$$\Delta \cong \sqrt{4\nu t} \quad (7.32)$$

de modo que eventualmente se va a extender al resto del fluido.

Existe, sin embargo, una clase importante de problemas en los cuales el valor de t que aparece en la expresión (7.32) está acotado, y por lo tanto también Δ está *acotado*. Esto ocurre cuando la extensión de la pared sobre la cual escurre el fluido es *finita* en la dirección del escurrimiento. Sea L el orden de magnitud de dicha extensión; entonces, cada parcela del fluido interactúa con la pared durante un intervalo de tiempo $T \cong L/u$ (podemos interpretar que $t = 0$ es el instante en que la parcela entró en contacto con la pared, de modo que la artificiosidad de introducir la viscosidad en un cierto instante desaparece). Transcurrido T , la parcela deja de estar en contacto con la pared, y por lo tanto no se genera en ella más vorticidad: de ahí en más la vorticidad es transportada convectivamente, difunde y se atenúa. Entonces, en este tipo de problemas existe una cota para Δ , dada por

$$\Delta \cong \sqrt{4\nu T} = \sqrt{4 \frac{\nu L}{u}} = 2L \text{Re}^{-1/2} \quad (7.33)$$

donde $\text{Re} = uL/\nu$ es el *número de Reynolds*, que introdujimos en el Capítulo anterior. Vemos entonces que:

El número de Reynolds determina la relación entre el espesor que adquiere la capa donde se sienten los efectos de la viscosidad y la extensión de la pared en la dirección del escurrimiento.

Cuando $\text{Re} \gg 1$, el espesor de la capa límite es muy pequeño respecto de la extensión de los obstáculos a lo largo de los cuales escurre el fluido³, lo cual permite que el grueso del campo de velocidad se pueda calcular con buena aproximación recurriendo a la ecuación de Euler (aún cuando los efectos viscosos se deben tener en cuenta para calcular el arrastre). Sin embargo, no siempre se puede dar por cierto que la condición $\text{Re} \gg 1$ por sí sola permite ignorar los efectos viscosos en la determinación del campo de velocidad; en efecto, si estudiamos el flujo en un conducto largo y angosto, la condición para que u esté determinado por la ecuación de Euler es que $\Delta \ll d$ (d : ancho del conducto), o sea $L \text{Re}^{-1/2} \ll d$ de donde resulta la condición

$$\text{Re} \gg (L/d)^2 \gg 1 \quad (7.34)$$

pues $L \gg d$ si el conducto es largo. Algunos valores de la viscosidad se dan en la Tabla 7.1.

Se ha visto que la condición $\text{Re} \gg 1$ implica que en un flujo alrededor de un cuerpo sólido la capa vorticiosa que se forma a partir de la superficie del cuerpo se mantiene en el entorno de esta

³ Por ejemplo, consideremos el ala de un avión que vuela a 360 km/h. Supongamos que la cuerda del ala mide $\ell = 1.5$ m. En este caso usando $\nu = 0.15$ c.g.s. (Tabla 7.1) obtenemos $\text{Re} = 10^7$ y entonces resulta $\Delta = 1$ mm.

superficie, en el sentido que su espesor Δ es mucho menor que la dimensión típica L del cuerpo. Veamos qué significa esto, por ejemplo, para cuerpos que se mueven en el aire: para tener $Re \approx 1$, un cuerpo de 1 cm de radio debería moverse con una velocidad muy baja, alrededor de 0.15 cm/seg. En realidad, casi todos los movimientos de interés práctico de sólidos macroscópicos en aire ocurren en situaciones en que $Re \gg 1$. Por ejemplo una gota de lluvia de 1 mm de radio que cae con una velocidad entre 10^2 y 10^3 cm/seg tiene Re entre 100 y 1000. Sólo para el caso de partículas microscópicas es posible tener $Re \approx 1$.

Tabla 7.1: valores de la viscosidad para algunos fluidos ($T = 20^\circ\text{C}$, unidades c.g.s.)

Fluido	ν	$\eta (= \rho\nu)$
Aire	0.15	1.8×10^{-4}
Agua	0.011	0.011
Aceite de oliva	1.08	0.96
Glicerina	18.5	23.3

En resumen, podemos concluir que mientras Δ sea mucho menor que las distancias sobre las cuales se desarrolla el flujo, o sea para flujos con alto número de Reynolds, se puede ignorar la presencia de la capa límite y usar la ecuación de Euler para calcular el grueso del campo de velocidad, pero con ciertas salvedades y limitaciones. La primera es que el arrastre sobre el sólido *no es nulo* como predice la teoría ideal (paradoja de D'Alembert), y para calcular su valor es esencial conocer las propiedades de la capa límite. La segunda es que la vorticosidad que se genera en la capa límite por la interacción de las parcelas del fluido con la superficie sólida es arrastrada por el movimiento del fluido y forma una *estela* detrás del sólido; debido a esto el campo de velocidad *detrás* del sólido es muy *diferente* del que predice la ecuación de Euler. La tercera es que en ciertos casos la capa límite (y por lo tanto la estela) se puede tornar *turbulenta*; cuando eso ocurre, sus propiedades son diferentes de las que resultan de nuestras precedentes discusiones, que se refieren a lo que se denomina capa límite *laminar*. La cuarta es que, bajo ciertas condiciones, la capa límite (laminar o turbulenta) se puede *separar* (o desprender) de la superficie del sólido y establecerse en el seno del fluido, lo cual tiene importantes consecuencias tanto en lo referente al arrastre como a la sustentación (como ya vimos en el Capítulo 6).

Significado del número de Reynolds

Ya vimos en el Capítulo anterior que el número de Reynolds proporciona una estimación de la importancia relativa del término de inercia $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ y el término viscoso $\nabla^2\mathbf{u}$ de la ecuación de Navier-Stokes. Volvamos por un momento sobre esta cuestión, y consideremos un flujo incompresible *estacionario* alrededor de un cuerpo sólido. Claramente, de acuerdo con la ecuación de Navier-Stokes, el gradiente de la presión asociado con el campo de velocidad está determinado por dos clases de fuerzas: las fuerzas de carácter inercial, es decir las dadas por el teorema de Bernoulli, y las fuerzas de origen viscoso. De la (7.3) tenemos, en efecto, que

$$\nabla P = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \eta \nabla^2\mathbf{u} \quad (7.35)$$

Por lo visto en el Capítulo 6, el orden de magnitud de la razón entre el primer y segundo término del miembro derecho de la (7.35) está dado, en el grueso del fluido (es decir excluyendo las regiones muy cerca de la superficie del cuerpo), precisamente por el número de Reynolds:

$$\frac{|\text{término de inercia}|}{|\text{término viscoso}|} = O\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = O(\text{Re}) \quad (7.36)$$

donde L es la escala típica sobre la cual varía el grueso del campo de velocidad³. Debe quedar en claro que, para que esta comparación tenga significado, se debe hacer sobre *el grueso* del campo de velocidades, pues acabamos de ver que cerca de la superficie del cuerpo u varía en forma importante sobre distancias del orden del espesor Δ de la capa límite, una escala que en general es muy diferente de L .

En suma, podemos afirmar lo siguiente:

Si $\text{Re} \gg 1$, las fuerzas viscosas son despreciables frente a las fuerzas inerciales en el grueso del campo de velocidades. Por consiguiente no contribuyen a la presión, que en la práctica queda determinada por el teorema de Bernoulli. No se pueden ignorar, por supuesto, dentro de la capa límite, donde de acuerdo con la (7.33) se tiene que

$$\frac{|\text{término de inercia}|}{|\text{término viscoso}|} = O\left(\frac{U^2/\Delta}{\nu U/\Delta^2}\right) = O\left(\frac{\Delta}{L}\text{Re}\right) = O(\text{Re}^{1/2}) \quad (7.37)$$

Si en cambio $\text{Re} \leq 1$, las fuerzas viscosas son importantes en todo el campo y todo ocurre como si la capa límite abarcara la totalidad del flujo.

Número de Reynolds y Semejanza Dinámica

Volvamos a la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles con viscosidad constante

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7.38)$$

Supongamos ahora que tenemos dos flujos, que designaremos flujo a y flujo b , determinados por condiciones de contorno e iniciales *semejantes*, en el sentido que se puedan transformar las unas en las otras simplemente multiplicando las dimensiones, las velocidades y las presiones por respectivos factores constantes (por ejemplo, cuerpos esféricos sumergidos en flujos uniformes). En otras palabras, que las distancias, velocidades y presiones que especifican las condiciones de contorno de estos flujos, una vez divididas por las distancias, velocidades y presiones características de cada uno de ellos, que llamaremos L_a , U_a , P_a , y L_b , U_b , P_b , dan lugar a conjuntos de números puros *idénticos*.

Ahora bien, el hecho que la ecuación (7.38) no contiene ni distancias, ni velocidades, ni presiones, ni tiempos característicos hace pensar que bajo ciertas condiciones los flujos a y b se pueden describir por medio de funciones *idénticas*, con tal de elegir las variables adecuadas.

En efecto, expresemos las distancias, velocidades y presiones del flujo a como

$$x_i = x'_i L_a, \quad u_i = u'_i U_a, \quad P = P' P_a \quad (7.39)$$

y a las análogas magnitudes del flujo b como

$$x_i = x''_i L_b, \quad u_i = u''_i U_b, \quad P = P'' P_b \quad (7.40)$$

³ Típicamente, L es del orden del tamaño del cuerpo.

Además, para describir estos flujos vamos a emplear las variables temporales t' y t'' definidas, respectivamente, por

$$t = t' T_a \quad \text{con} \quad T_a \equiv L_a / U_a, \quad t = t'' T_b \quad \text{con} \quad T_b \equiv L_b / U_b \quad (7.41)$$

Sustituyendo las (7.39) y la primera de las (7.41) en la ecuación (7.38) y dividiendo por $\rho_a U_a^2 / L_a$ obtenemos para el flujo a :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = - \frac{P_a}{\rho_a U_a^2} \frac{\partial P'}{\partial x'_i} + \frac{1}{\text{Re}_a} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'_j \partial x'_j} \quad (7.42)$$

donde $\text{Re}_a = L_a U_a / \nu_a$ es el número de Reynolds del flujo a .

Del mismo modo, sustituyendo las (7.40) y la segunda de las (7.41) en la (7.38) obtenemos para el flujo b :

$$\frac{\partial u''_i}{\partial t''} + u''_j \frac{\partial u''_i}{\partial x''_j} = - \frac{P_b}{\rho_b U_b^2} \frac{\partial P''}{\partial x''_i} + \frac{1}{\text{Re}_b} \frac{\partial^2 u''_i}{\partial x''_j \partial x''_j} \quad (7.43)$$

Por la hipótesis de partida, las ecuaciones (7.42) y (7.43) se deben resolver con *idénticas* condiciones iniciales y de contorno, representadas por el conjunto de números puros antes mencionado. Los primeros miembros son idénticos; los términos del segundo miembro serán idénticos si se cumple que

$$\text{Re}_b = \text{Re}_a \quad \text{y} \quad \frac{P_b}{\rho_b U_b^2} = \frac{P_a}{\rho_a U_a^2} \quad (7.44)$$

La segunda condición cuenta únicamente en los casos en que se asigna como condición de contorno la presión (modificada), lo que es infrecuente en los flujos incompresibles. Lo más común es que no sea así, y entonces al no existir una presión característica, la escala de la presión queda determinada para cada problema por ρU^2 , del mismo modo como quedó determinada la escala de tiempo L/U .

En conclusión podemos afirmar que:

<p>Dos flujos a y b, descritos por las nuevas variables \mathbf{u}', \mathbf{x}', t', $P' = P / \rho_a U_a^2$ y \mathbf{u}'', \mathbf{x}'', t'', $P'' = P / \rho_b U_b^2$ definidas por las (7.39-7.41), son idénticos bajo la condición</p> $\text{Re}_b = \text{Re}_a \quad (7.45)$

Por lo tanto dos flujos (se entiende, con las limitaciones planteadas por las hipótesis de partida) caracterizados por condiciones de contorno e iniciales semejantes (en el sentido aclarado) se describen, a igualdad de números de Reynolds, por funciones idénticas si se eligen las variables adimensionales adecuadas. Naturalmente, esto *no significa* que los flujos son idénticos *en términos de las variables físicas ordinarias* (distancias, tiempos, velocidades, presiones, etc.), sino que son *semejantes* (o *similares*), pues se pueden transformar el uno en el otro mediante oportunos cambios de las escalas de distancias, tiempos, velocidades y presiones (estas dos últimas magnitudes se pueden considerar variables derivadas). Por este motivo el principio que acabamos de enunciar se denomina *Principio de Semejanza* (o de *Similitud*) *Dinámica*.

Aplicación del Principio de Semejanza al arrastre de cuerpos esféricos

El Principio de Semejanza es de gran importancia práctica, pues permite obtener información sobre un flujo desconocido a partir de experimentos a escala, llevados a cabo bajo condiciones físicas más convenientes que las del flujo desconocido que se quiere investigar. Vamos a ver ahora un ejemplo que ilustra las ideas principales.

Supongamos que nos interesa determinar la fuerza de arrastre sobre una pequeña partícula esférica que se mueve en agua, que es muy difícil de medir si las dimensiones de la partícula son muy pequeñas. Según el Principio de Semejanza, una vez que se expresa en términos de la velocidad U y el diámetro L de la partícula, el flujo alrededor de la partícula pequeña tiene la misma forma que el flujo alrededor de una esfera mucho más grande que se mueve en otro fluido, siempre y cuando el número de Reynolds de ambos flujos tenga el mismo valor. Puesto que el valor de ν de un aceite lubricante puede ser 400 veces mayor que el del agua y el de la glicerina es casi 1700 veces mayor, usando estos fluidos podemos tener el mismo número de Reynolds empleando esferas de gran tamaño y que se mueven con mayor velocidad, de modo que las mediciones resulten mucho más sencillas.

Si indicamos con \mathbf{m} el versor en la dirección del movimiento, el arrastre se expresa como

$$\mathbf{F}_m = - \int_S m_i \sigma_{ij} n_j dS \quad (7.46)$$

donde \mathbf{n} es el versor normal (saliente) a la superficie de la esfera y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de los esfuerzos

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.47)$$

Introducimos ahora las variables \mathbf{u}' , \mathbf{x}' , t' definidas por

$$x_i = x'_i L, \quad u_i = u'_i U, \quad t = t' L / U \quad (7.48)$$

y

$$p = p' \rho U^2 \quad (7.49)$$

donde U es la velocidad de la partícula respecto del fluido lejos de ella y L su diámetro, y obtenemos

$$\sigma_{ij} = \rho U^2 \left[-p' \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right] \quad (7.50)$$

Asimismo

$$dS = dS' L^2 \quad (7.51)$$

Introduciendo las expresiones (7.50) y (7.51) en la (7.46) resulta

$$\frac{F_m}{\rho U^2 L^2} = - \int_S m_i \left[-p' \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right] n_j dS' \quad (7.52)$$

Por lo tanto

$$F_m = \rho U^2 L^2 f_m \quad , \quad f_m = f_m(\text{Re}) = - \int_S m_i \left[-p' \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right] n_j dS' \quad (7.53)$$

donde $f_m(\text{Re})$ es una función del número de Reynolds, y por lo tanto vale lo mismo para todos los flujos caracterizados por el mismo valor de Re . Nótese que en este problema, la presión (modificada) resulta como una consecuencia de la determinación del campo de velocidades, pues no está asignada como condición de contorno o inicial y por lo tanto debe escalar como ρU^2 .

A este resultado se podría haber llegado directamente aplicando el Principio de Semejanza. En efecto, la escala de fuerzas se puede *elegir* como $\rho U^2 L^2$, y dos flujos cualesquiera alrededor de la esfera son semejantes si tienen el mismo número de Reynolds; es fácil ver entonces que la expresión (7.53) del arrastre es la única posible.

El lector debe notar que si bien hemos hablado de cuerpos esféricos, nuestros argumentos desde la ec (7.46) hasta llegar a la (7.53) son completamente generales, y valen para cuerpos de forma cualquiera. En general, L representa la dimensión característica del cuerpo, y la función adimensional f_m no sólo depende del número de Reynolds, sino también de los parámetros geométricos que definen la *forma* del cuerpo, y de su *orientación* respecto de U .

También debe notar el lector que con los parámetros del problema se puede formar *otra* combinación independiente que también tiene dimensiones de fuerza (la combinación ηUL). Está claro por lo tanto que el emplear $\rho U^2 L^2$ como escala de fuerzas es una elección *arbitraria* y que además *no implica* que el arrastre sea proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo. Sobre esto último volveremos más adelante.

Veamos cómo se puede proceder en el laboratorio para construir la función $f_m(\text{Re})$ para cuerpos esféricos. Supongamos que dejamos caer en el mismo fluido de densidad ρ una serie de esferas (distinguidas por el subíndice i) que tienen todas el mismo diámetro L pero masas diferentes (porque son parcialmente huecas o tienen distinta densidad). El arrastre se determina a partir de la velocidad terminal (crítica o límite) de caída U_i . En efecto, cuando se alcanza la velocidad límite se tiene que (en módulo),

$$F(U_i) = M_i g \quad (7.54)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y hemos indicado con M_i la diferencia entre la masa de la esfera i y la masa de fluido desplazada por la misma a fin de tomar en cuenta el empuje de Arquímedes. Luego para cada esfera se puede escribir (omitimos el subscripto m pues tratándose de una esfera el arrastre no depende de la dirección de U) que

$$M_i g = \rho U_i^2 L^2 f(\text{Re}_i) \quad , \quad \text{Re}_i = \rho U_i L / \eta \quad (7.55)$$

o sea

$$f(\text{Re}_i) = f(\rho U_i L / \eta) = \frac{M_i g}{\rho U_i^2 L^2} \quad (7.56)$$

Realizando numerosos experimentos con distintos valores de M_i se pueden obtener muchos valores diferentes de U_i y por lo tanto de Re_i . Se puede así construir un gráfico de la función $f(\text{Re})$ para un amplio rango de valores de Re . Una vez determinada $f(\text{Re})$ se puede usar el gráfico para calcular el arrastre en función de las magnitudes ρ , U , L y η (por supuesto, siempre y cuando Re esté dentro del intervalo de valores para el cual se ha determinado $f(\text{Re})$).

En general, para cuerpos de forma cualquiera la función $f_m(\text{Re})$ es sumamente complicada y sólo se puede determinar empíricamente. Sin embargo, la expresión de f_m se simplifica en los casos límite $\text{Re} \ll 1$ y $\text{Re} \gg 1$, como veremos en seguida.

Nótese que la expresión

$$F = \rho U^2 L^2 f \quad (7.57)$$

no significa que la fuerza de arrastre para una dada esfera es proporcional a $U^2 L^2$. En efecto, si se fijan los valores de ρ , η y se varían U y L , cambia el valor de Re ; por lo tanto la dependencia de F en U y L no es cuadrática (salvo cuando $f(\text{Re}) = \text{cte.}$).

Arrastre para número de Reynolds muy pequeño: la Ley de Stokes

En el límite $\text{Re} \rightarrow 0$ el efecto de la inercia es despreciable y dominan las fuerzas viscosas. Por lo tanto *en ese límite* el arrastre no puede depender de la densidad del fluido (que da la medida de su inercia). Esto implica que se debe cumplir

$$f_m(\text{Re}) = \frac{\alpha}{\text{Re}}, \quad \alpha = \text{cte.}, \quad (\text{Re} \rightarrow 0) \quad (7.58)$$

y por lo tanto, para $\text{Re} \ll 1$ vale la fórmula aproximada

$$F = \alpha \eta U L \quad (7.59)$$

donde la constante α depende de la forma del cuerpo y de su orientación respecto de la dirección del movimiento. Para el caso de la esfera α se puede calcular teóricamente⁵ porque la geometría esférica es relativamente sencilla. Resulta $\alpha = 3\pi$ y en consecuencia

$$F = 3\pi \eta U L \quad (\text{esfera}) \quad (7.60)$$

La (7.60) se conoce como *Ley de Stokes*.

El significado físico de la Ley de Stokes se puede comprender fácilmente. Si $\text{Re} \ll 1$, la escala típica de las variaciones espaciales de la velocidad es el mismo L ; luego $\partial u / \partial r \approx U / L$ y el esfuerzo tangencial viscoso es del orden de $\eta U / L$. Puesto que el área sobre la cual actúa este esfuerzo es del orden de L^2 , resulta⁶ que $F \approx \eta U L$.

⁵ También existen resultados exactos para otras formas sencillas como elipsoides y cilindros de longitud infinita.

⁶ Naturalmente estos argumentos que permiten comprender el origen de las dependencias de F no son suficientemente precisos como para proporcionar el valor correcto del coeficiente α .

La Ley de Stokes no se puede usar para objetos macroscópicos en caída o lanzados en el aire. En efecto, usando el valor de ν de la Tabla 7.1 resulta $Re = 6.67UL(\text{c.g.s.})$. De modo que si $L = 1\text{ cm}$, ya para $U = 0.15\text{ cm/s}$ resulta $Re = 1$ y la (7.60) no da una buena aproximación para el arrastre.

Arrastre para número de Reynolds muy grande

Cuando $Re \geq 1$ aparecen desviaciones importantes desde la Ley de Stokes: la dependencia de $f_m(Re)$ con la inversa de Re se hace más débil y $f_m(Re)$ tiende a un valor constante para $Re \approx 10^3 - 10^4$. En general, para $Re > 1$ el arrastre es mucho mayor que el que se obtendría extrapolando la Ley de Stokes. Esto se debe a que la mayor variación de la velocidad ocurre sobre distancias mucho menores que L .

En el límite $Re \rightarrow \infty$ el efecto de la inercia domina y las fuerzas viscosas son despreciables. Por lo tanto en ese límite el arrastre debe ser independiente de la viscosidad del fluido. Esto implica que se debe cumplir que

$$f_m(Re) = \beta \quad , \quad \beta = \text{cte.} \quad , \quad (Re \rightarrow \infty) \quad (7.61)$$

y por lo tanto, para $Re \gg 1$ tenemos que

$$F \approx \beta \rho U^2 L^2 \quad (7.62)$$

donde la constante β depende de la forma del cuerpo y de su orientación respecto de la dirección del movimiento.

8. FLUJOS VISCOSOS UNIDIRECCIONALES Y CAPA LIMITE

Flujos unidireccionales

La característica básica de la ecuación de Navier-Stokes que causa las mayores dificultades analíticas es el término convectivo no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, proveniente de la aceleración de un elemento de fluido en coordenadas Eulerianas. Las dificultades matemáticas que presenta la ecuación completa son tan severas que la mayoría de las soluciones analíticas conocidas se obtienen sólo cuando, por alguna razón, la ecuación se vuelve aproximadamente o exactamente lineal. Entre los casos más simples en que el término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ se anula exactamente, está aquél en el cual el campo de velocidad tiene la misma dirección en todas partes y no depende de la coordenada en la dirección del movimiento. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el flujo se desarrolla en largos conductos rectilíneos y de sección uniforme (o bien con curvaturas y variaciones de sección muy pequeñas sobre distancias del orden del ancho del conducto).

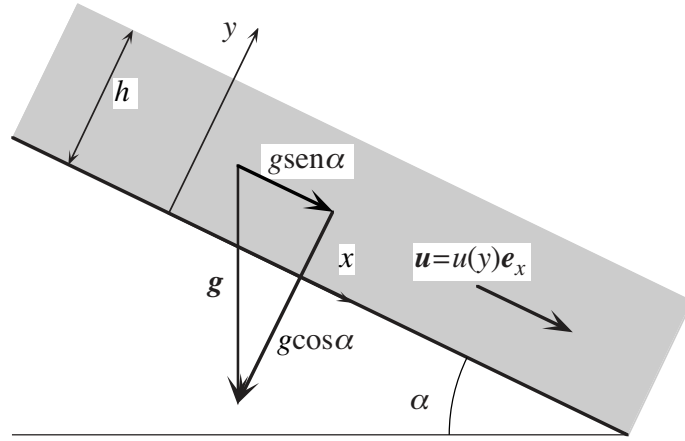


Fig. 8.1 Flujo unidireccional en un conducto inclinado respecto de la horizontal.

Tomaremos el eje x en la dirección del movimiento, de modo que

$$u_x = u \quad , \quad u_y = u_z = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (8.1)$$

y entonces la ecuación de Navier-Stokes adopta la forma

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (8.2)$$

Luego $P = P(x)$, y por lo tanto el gradiente de la *presión modificada* es paralelo a las líneas de corriente. Recordemos que $P = p + \rho\varphi$, donde φ es el potencial de la fuerza de volumen, que hemos supuesto conservativa. Cuando esa fuerza se debe a la gravedad tendremos

$$\varphi = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = g(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \quad (8.3)$$

donde α indica el ángulo que forma el eje x con la horizontal (Fig. 8.1), de modo que las (8.2) se escriben

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos \alpha = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (8.4)$$

En el caso estacionario las (8.2) se reducen a

$$\frac{dP}{dx} = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (8.5)$$

Si hay simetría de revolución respecto del eje del conducto (coincidente con el eje x), tenemos

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \quad (8.6)$$

Observemos, antes que nada, que el primer miembro de las (8.5) y (8.6) depende solamente de x . Por otra parte, los segundos miembros dependen sólo de y, z (o bien de r). Por lo tanto ambos miembros de las ecuaciones anteriores deben ser, por separado, iguales a una constante común G , cuyo valor queda determinada por las condiciones de contorno. Por ejemplo, si se asigna la diferencia de presión ΔP entre los extremos de un conducto de longitud L , se tiene que

$$G = \Delta P / L \quad (8.7)$$

Si en cambio se asignan datos referentes a la velocidad, la constante G quedará determinada por la ecuación de la velocidad, por ejemplo por medio de

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = G \quad (8.8)$$

Nótese que el perfil de velocidad depende de la viscosidad μ y del gradiente de presión sólo a través de la combinación constante G/η . Por consiguiente la viscosidad no determina el perfil de la velocidad a través de la sección del conducto: su único rol consiste en establecer qué variación de presión por unidad de longitud del conducto es compatible con el campo de velocidades. Esto se debe al carácter asintótico del flujo estacionario que estamos estudiando: la viscosidad determina cuándo y donde se alcanza el régimen estacionario a partir de un campo de velocidades inicial arbitrario, pero no la forma del campo. Esto se comprenderá mejor más adelante, cuando estudiemos el *efecto de embocadura*.

Flujo entre dos placas planas y paralelas

Consideremos el flujo entre dos placas planas ubicadas en $y = 0$ y en $y = h$. Por simetría, la coordenada z es ignorable y entonces $u = u(y)$ y $P = P(x)$. Por lo que acabamos de ver tenemos

$$\frac{dP}{dx} = -G, \quad \eta \frac{d^2 u}{dy^2} = -G; \quad G = \text{cte.} \quad (8.9)$$

de donde obtenemos por integración

$$P = P_0 - Gx, \quad u = -\frac{G}{2\eta} y^2 + by + c \quad (8.10)$$

donde P_0 , b y c son constantes de integración. Las condiciones de contorno son

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(h) = 0 \quad (8.11)$$

y por lo tanto $c = 0$ y $b = -Gh/2\eta$ de modo que resulta

$$u = \frac{G}{2\eta} y(h - y) \quad (8.12)$$

De esta manera, la presión cae linealmente con x , y el perfil de velocidad adopta una forma parabólica en cada sección transversal (Fig. 8.2).

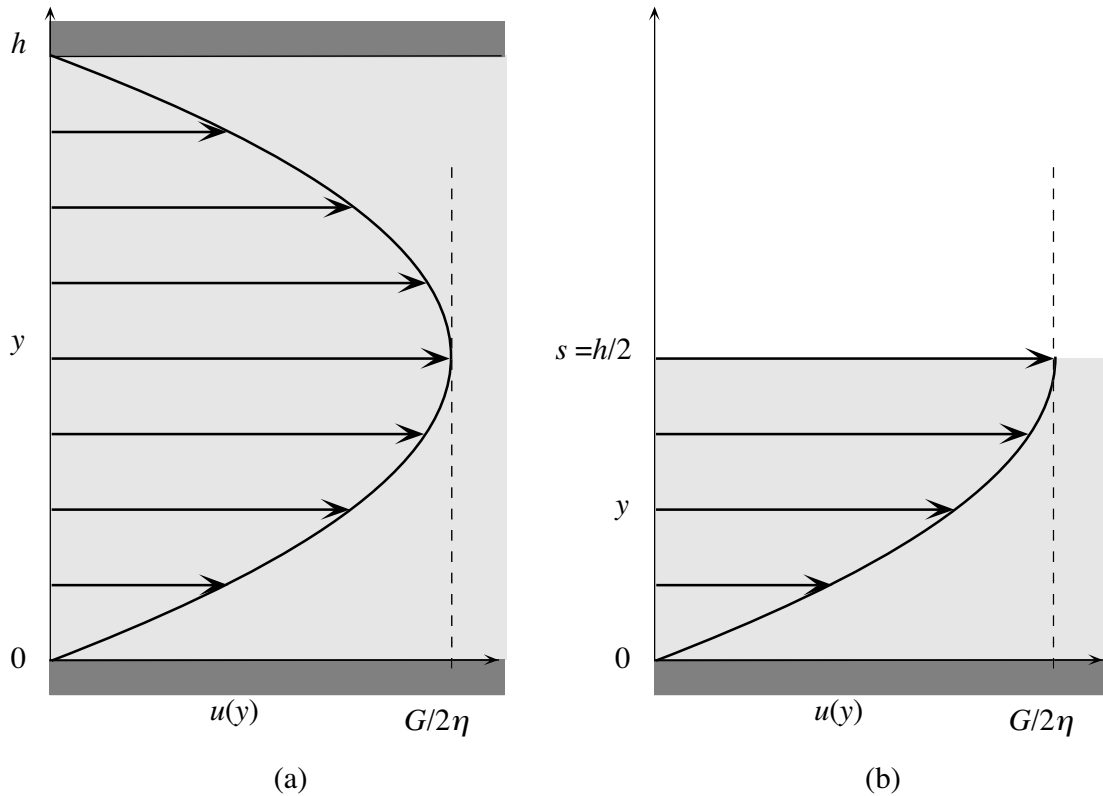


Fig. 8.2. Perfil parabólico de velocidad: (a) del flujo entre dos placas planas y paralelas, (b) del flujo sobre un plano.

La fuerza de arrastre por unidad de área sobre cada una de las placas es

$$\eta \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0,h} = \frac{Gh}{2} \quad (8.13)$$

y la fuerza total sobre un área $\Delta_x \Delta_z$ del conducto es igual a $Gh\Delta_x \Delta_z$. La fuerza total ejercida por la presión es

$$\Delta p h \Delta_z = Gh \Delta_x \Delta_z \quad (8.14)$$

y por lo tanto es igual al arrastre.

Por supuesto, no es difícil resolver problemas análogos en los que una de las placas (por ejemplo la que está ubicada en $y = h$) se mueve con una velocidad arbitraria.

Más interesante es el caso de escurrimiento de una capa líquida de profundidad s sobre un plano fijo cuando la superficie superior es libre. En la superficie libre se debe cumplir $du/dy = 0$. Luego se obtiene el mismo perfil que en el caso anterior (ec. (8.12)), si se identifica s con $y = h/2$. Resulta por lo tanto

$$u = -\frac{1}{\eta} \frac{dP}{dx} y(2s - y) \quad (8.15)$$

Aquí dP/dx es el gradiente de la *presión modificada*, que debe ser igual al gradiente de la presión más el gradiente de la presión hidrostática debida al desnivel. Si no hay gradiente de presión hidrostática (habitualmente podemos despreciar la diferencia de presión atmosférica) tenemos

$$\frac{dP}{dx} = \rho g \sin \alpha \quad (8.16)$$

Conducto de sección circular: flujo de Poiseuille

Sea un flujo en tubo de sección circular de radio a . Las ecuaciones adecuadas son:

$$\frac{dP}{dx} = -G \quad , \quad \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -G \quad (8.17)$$

Integrando, obtenemos

$$P = P_0 - Gx \quad , \quad u = -\frac{G}{4\eta} r^2 + A \ln r + B \quad (8.18)$$

Puesto que u es finito en $r = 0$, debe ser $A = 0$; por otra parte, $u(a) = 0$ y entonces $B = (G/4\eta)a^2$. Por lo tanto resulta un perfil parabólico dado por

$$u = \frac{G}{4\eta} (a^2 - r^2) \quad (8.19)$$

Por simplicidad, supongamos que el conducto es horizontal. Entonces $G = \Delta p / L$, donde Δp es la caída de presión sobre una longitud L del conducto; luego

$$u = \frac{\Delta p}{4\eta L} (a^2 - r^2) \quad (8.20)$$

Para hallar el caudal, debemos calcular la integral del flujo sobre la sección S del conducto:

$$Q = \int_S \rho u dS = 2\pi \int_0^a \rho u r dr \quad (8.21)$$

Reemplazando la expresión (8.20) de u resulta

$$Q = \frac{\pi \rho}{8\eta} \frac{\Delta p}{L} a^4 \quad (8.22)$$

De este modo, la velocidad media $\langle u \rangle$ definida como $\langle u \rangle \equiv Q / \rho S$ con $S = \pi a^2$, queda como

$$\langle u \rangle = \frac{\Delta p}{8\pi L} a^2 \quad (8.23)$$

El esfuerzo viscoso sobre la pared del tubo es

$$\sigma_{xr} = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\Delta p}{2L} a \quad (8.24)$$

Luego la fuerza de arrastre sobre un tubo de longitud L es

$$F = 2\pi a L \sigma_{xr} = -\pi a^2 \Delta p \quad (8.25)$$

Nótese que, al igual que en el ejemplo anterior, esta fuerza compensa exactamente la fuerza ejercida por la diferencia de presiones sobre las dos secciones del conducto.

Es habitual definir un *coeficiente de arrastre* sin dimensiones C como

$$C = \frac{F / L}{\frac{1}{2} \rho U^2 a} \quad (8.26)$$

donde

$$U = \frac{\Delta p}{4\eta L} a^2 \quad (8.27)$$

es la velocidad (máxima) en el centro del tubo. Si definimos el número de Reynolds del flujo como

$$\text{Re} = \frac{\rho U a}{\eta} \quad (8.28)$$

se obtiene

$$C = \frac{8\pi}{\text{Re}} \quad (8.29)$$

Esta ley de variación del coeficiente de arrastre con Re es típica de los flujos en los cuales los efectos convectivos asociados con el término $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ son nulos (como en este caso) o despreciables frente al término viscoso $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$. En el caso límite opuesto de grandes números de Reynolds, cuando el flujo en el conducto se vuelve turbulento, se obtiene en cambio un coeficiente mayor por varios órdenes de magnitud al dado por la (8.29), y que varía lentamente con Re . Por lo tanto el coeficiente C tiene interés especialmente para las aplicaciones a flujos con número de Reynolds grande. Más adelante volveremos sobre este tema, dada la gran importancia práctica del mismo.

La capa límite laminar

La noción de capa límite laminar interviene cuando se estudian flujos estacionarios con número de Reynolds muy grande en el entorno de un cuerpo sólido. Lejos del cuerpo, y mientras el flujo

incidente no sea turbulento, los términos de fuerzas viscosas de la ecuación de Navier-Stokes son despreciables; entonces el campo de velocidades del flujo es consistente con la ecuación de Euler. El empalme entre esta solución y la condición de velocidad nula en las paredes del sólido tiene lugar en una zona denominada *capa límite*, cuyo espesor es tanto más pequeño cuanto más grande es el número de Reynolds, en la cual se deben tener en cuenta tanto los términos convectivos como los términos viscosos.

Veremos que la vorticosidad generada en las paredes es arrastrada corriente abajo dentro de una estela y que los gradientes de velocidad quedan concentrados dentro de una pequeña porción del volumen total del flujo. De esta manera, el estudio de los flujos ideales queda justificado *a posteriori*, ya que los efectos de la viscosidad sólo se manifiestan en la capa límite en la vecindad del cuerpo sólido, y en la estela que se extiende corriente abajo a partir del cuerpo.

En este capítulo nos limitaremos al estudio de capas límites laminares, dentro de las cuales el campo de velocidad varía lentamente con el tiempo. Esta noción, debida a Prandtl (1905), se debe adaptar para la mayoría de las situaciones prácticas, por ejemplo flujos turbulentos incidentes sobre un cuerpo o cuerpos sólidos con formas no aerodinámicas, en los cuales la capa límite existe sólo sobre una parte de la superficie del cuerpo, y se forma una estela turbulenta de extensión comparable a las dimensiones del cuerpo. En este caso ocurre el fenómeno de la separación de la capa límite y el flujo corriente abajo ya no tiene nada que ver con la solución no viscosa, dando lugar una fuerza de arrastre mucho mayor.

Consideremos un flujo uniforme que incide sobre una placa plana semiinfinita, paralela a la dirección de la velocidad U (ver Fig.8.3). Si U es suficientemente grande, la influencia de la placa no se hace sentir corriente arriba del borde; en efecto, la vorticosidad no alcanza a difundir corriente arriba del borde la placa pues es arrastrada corriente abajo por el flujo. En consecuencia la vorticosidad y los gradientes de velocidad están concentrados muy cerca de la placa.

Cuando estudiamos el problema de la placa que se pone en movimiento paralelamente a sí misma (Capítulo 7) vimos que los gradientes de velocidad se atenúan con el tiempo y la distribución espacial de vorticosidad difunde desde la pared hasta una distancia del orden de

$$\Delta \approx \sqrt{\nu t} \quad (8.30)$$

donde ν es la viscosidad cinemática. Sin embargo, en el presente caso el fluido es al mismo tiempo arrastrado paralelamente a la placa con una velocidad del orden de U ; luego, una parcela de fluido que ha llegado hasta una distancia x del extremo de la placa ha interactuado con la placa durante el tiempo t que demoró en recorrer esa distancia, esto es, $t \approx x/U$. Por lo tanto los gradientes de velocidad están concentrados en una zona cuyo espesor

$$\Delta(x) \approx \sqrt{\nu x / U} \quad (8.31)$$

depende de la distancia al extremo. Aquí $\Delta(x)$ representa el espesor de la capa límite dentro de la cual tiene lugar la transición entre el flujo ideal lejos de la pared y el flujo real cerca de ella. La importancia de este espesor está dada por la razón

$$\frac{\Delta(x)}{x} \approx \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(x)}} \quad , \quad \text{Re}(x) = \frac{Ux}{\nu} \quad (8.32)$$

donde $Re(x)$ es el número de Reynolds *local* obtenido con la distancia x desde el extremo de la placa. Así, cuando $Re(x) \rightarrow \infty$, el espesor máximo de la capa límite se vuelve despreciable respecto de la dimensión característica global de la placa. Este resultado explica porqué, cuando el número de Reynolds tiende a infinito, el régimen de flujo externo no turbulento de un fluido viscoso se aproxima al de un fluido perfecto. Sin embargo, esto no significa que los efectos de la capa límite son despreciables, por más delgada que sea.

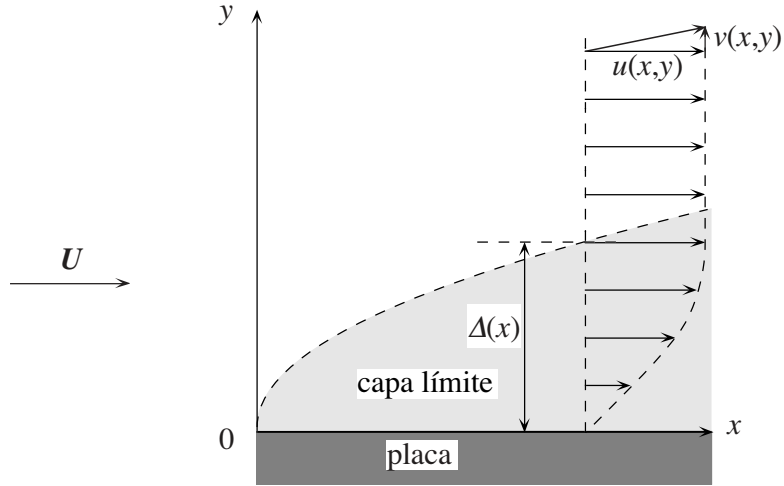


Fig. 8.3. Capa límite sobre una placa plana semiinfinita paralela a la dirección del flujo uniforme incidente.

Un estudio más detallado de la capa límite muestra que el contorno de la misma no es una línea de corriente y que el caudal en su interior aumenta como $x^{1/2}$. Además, cuando $Re(x)$ se hace muy grande la capa límite se vuelve inestable y turbulenta; cuando esto ocurre las estimaciones precedentes dejan de ser válidas, pues el transporte de cantidad de movimiento por convección turbulenta hace que Δ aumente más rápidamente que en el caso laminar.

Efecto de entrada

Un fenómeno estrechamente vinculado con el desarrollo de la capa límite es el *efecto de entrada* (o de *embocadura*), debido al cual el perfil estacionario asintótico que estudiamos precedentemente se establece recién a cierta distancia de la embocadura del conducto. La Fig. 8.4 esquematiza este proceso para el flujo entre dos caras paralelas semiinfinitas separadas por una distancia h .

A una pequeña distancia x desde la embocadura, se tiene una perfil de velocidad casi uniforme cuyo módulo es igual a U , la velocidad corriente arriba. La transición con la condición de velocidad nula en la superficie de las placas tiene lugar dentro de una capa de espesor (local) $\Delta(x)$. A medida que nos alejamos de la embocadura, el espesor de las capas límites de ambas placas crece hasta que ambas terminan por juntarse a una distancia x_e . Por lo tanto x_e es la distancia necesaria para que se establezca entre las placas el perfil de velocidad parabólico estacionario que ya conocemos. El valor de x_e se puede estimar mediante el requerimiento $\Delta(x_e) = h$. Usando la (8.27) obtenemos entonces

$$\frac{x_e}{h} \approx \frac{Uh}{\nu} = Re(h) \quad (8.33)$$

donde $Re(h)$ es el número de Reynolds construido con la velocidad U y la distancia h entre placas. La (8.33) muestra que el perfil parabólico se establece tanto más lejos de la embocadura cuanto mayor es $Re(h)$. Para un conducto cilíndrico se obtiene un comportamiento semejante.

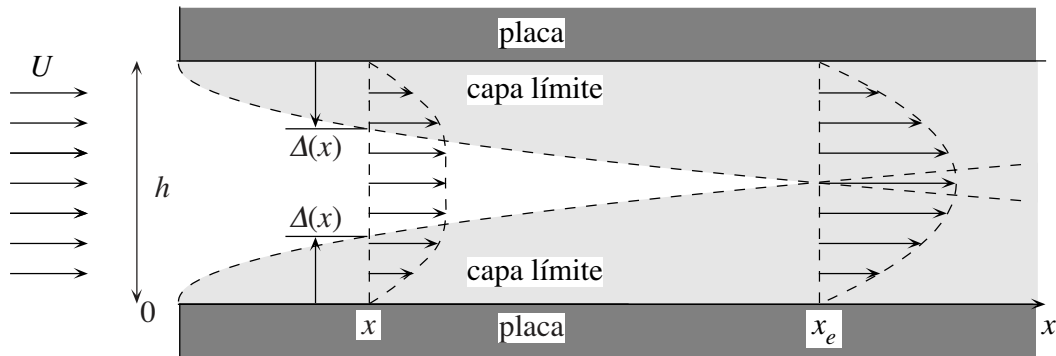


Fig. 8.4. Efecto de embocadura para el flujo entre dos placas planas semiinfinitas: evolución del perfil de velocidad con la distancia desde la entrada.

Teoría de Prandtl de la capa límite

Vamos a estudiar ahora el flujo bidimensional incompresible y estacionario en el plano (x, y) cerca de una placa plana en $y = 0$, que se extiende desde $x = 0$ hasta $x \rightarrow \infty$. Fuera de la capa límite (es decir, para $y \gg \Delta(x)$) vamos a suponer que tenemos un flujo potencial, solución de la ecuación de Euler, con una velocidad

$$\mathbf{u} = U(x)\mathbf{e}_x \quad (8.34)$$

El flujo dentro de la capa límite se debe empalmar de algún modo con el flujo principal (8.34), lo cual involucra ciertas sutilezas que se verán más adelante. Los resultados que obtendremos serán válidos también para placas curvas, siempre y cuando su radio de curvatura sea mucho mayor que el espesor de la capa límite; en este caso x será la distancia desde el borde medida a lo largo de la placa e y será la distancia a la placa medida perpendicularmente a la misma.

Dentro de la capa límite el flujo está regido por la ecuación de Navier-Stokes, que no podemos resolver en forma exacta pues es muy complicada. Afortunadamente, el hecho que cuando $Re(x)$ es muy grande la capa límite es sumamente delgada permite hacer algunas aproximaciones gracias a las cuales se puede obtener la solución buscada. Para deducir las ecuaciones aproximadas que rigen el flujo en la capa límite conviene estudiar el orden de magnitud de los distintos términos que figuran en las ecuaciones. Esto es lo que vamos a hacer primero.

Dentro de la capa límite la dimensión característica (local) en la dirección paralela al flujo es del orden de x , la distancia desde el borde de la placa. En cambio la dimensión característica en la dirección perpendicular al flujo es $\Delta(x)$, que escala como \sqrt{x} . Todo el razonamiento que sigue se basa en la existencia de estas dos escalas de longitud muy diferentes en una y otra dirección.

Nos interesa estudiar el flujo no demasiado cerca del extremo de la placa¹, de modo tal que se tenga que $Re(x) \gg 1$. En este caso tendremos que

¹ Por ejemplo, para aire con una velocidad de 10 m/s, o agua que se mueve a razón de 1 m/s, a la distancia de 1 cm del extremo de la placa el número de Reynolds es del orden de 10^4 .

$$\frac{\Delta(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(x)}} \equiv \varepsilon \ll 1 \quad (8.35)$$

Vamos ahora a estimar el orden de magnitud de los diferentes términos que intervienen en las ecuaciones que gobiernan el flujo.

Puesto que el flujo es incompresible la ecuación de conservación de la masa se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.36)$$

donde u y v son las componentes x e y de la velocidad, respectivamente. Esta ecuación muestra que

$$\frac{v}{u} \approx \frac{\Delta(x)}{x} = \varepsilon \quad (8.37)$$

Análogamente, tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u}{\Delta(x)^2} = \frac{u}{\varepsilon^2 x^2} \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.38)$$

lo que permite despreciar $\partial^2 u / \partial x^2$ frente a $\partial^2 u / \partial y^2$. Por el contrario, el término $v(\partial u / \partial y)$ es del mismo orden de magnitud que $u(\partial u / \partial x)$. En efecto

$$v \frac{\partial u}{\partial y} \approx v \frac{u}{\Delta(x)} = \frac{v}{\varepsilon} \frac{u}{x} \approx u \frac{u}{x} \approx u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8.39)$$

pues el pequeño valor de v está compensado por el valor grande de $\partial u / \partial y$ debido a que la escala de longitud $\Delta(x)$ es pequeña.

Por consiguiente, la componente x de la ecuación de Navier-Stokes se escribe como

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.40)$$

y la componente y como

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (8.41)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $v/u = O(\varepsilon)$, la (8.41) nos dice que $\partial P / \partial y = O(\varepsilon)$. Podemos entonces ignorar la dependencia en y de la presión² y escribir con buena aproximación

$$P = P(x) \quad (8.42)$$

² Este resultado es análogo a la ausencia de componentes perpendiculares a las líneas de corriente del gradiente de la presión en los flujos paralelos que estudiamos al comienzo de este Capítulo, con la diferencia que en el presente caso el flujo es *casi* paralelo, y la igualdad (8.42) vale *a menos* de términos del orden de ε .

Esto significa que la presión en la capa límite es igual a la presión $P(x)$ del flujo principal. Por lo tanto se puede considerar como un dato a los fines de resolver el problema de la capa límite. Con la aproximación (8.42), la (8.40) queda entonces en la forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.43)$$

donde la derivada total dP/dx se puede expresar en términos de la velocidad $U(x)$ del flujo principal. Para esto podemos usar la ecuación de Bernoulli para un fluido perfecto en la forma

$$P + \frac{1}{2} \rho U(x)^2 = \text{cte.} \quad (8.44)$$

del cual obtenemos, tomando la derivada:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \quad (8.45)$$

Combinando esta expresión con la (8.43) resulta

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} \quad (8.46)$$

que es la ecuación que determina el campo de velocidades dentro de la capa límite, y es debida a Prandtl. La (8.46) junto con la ecuación de conservación de la masa (8.36) son la base para el estudio de la capa límite.

Se deja como ejercicio para el lector verificar que en el borde de la capa límite, es decir a la distancia $\Delta(x)$ de la pared, los términos de transporte de cantidad de movimiento por convección ($u(\partial u / \partial x)$) y por difusión viscosa ($\nu(\partial^2 u / \partial x^2)$) de la (8.46) son del mismo orden de magnitud. Por otro lado, para conocer cómo se realiza el transporte de vorticidad, debemos recurrir a la ecuación de evolución de la vorticidad (5.28), la cual se simplifica en nuestro caso pues el flujo es estacionario, la única componente no nula de la vorticidad es $\omega_z = \omega$, y el operador $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla$ es nulo, de modo que resulta

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (8.47)$$

Esta ecuación expresa el equilibrio entre los transportes de vorticidad por convección y por difusión. Las variaciones de ω asociadas con el estiramiento de tubos de vorticidad no intervienen debido al carácter bidimensional del flujo.

Queda todavía por resolver el problema de cómo empalmar el flujo dentro de la capa límite con el flujo ideal principal. Para este fin, en lo que sigue vamos a imponer la condición de contorno

$$u \rightarrow U(x) \quad \text{para} \quad y/\delta \rightarrow \infty \quad (8.48)$$

donde δ es una medida del espesor de la capa límite, proporcional a $\nu^{1/2}$. Es importante notar que se toma $y/\nu^{1/2} \rightarrow \infty$ y no $y \rightarrow \infty$. Esta distinción, que puede parecer misteriosa al lector, se aclarará en breve.

Autosemejanza de la capa límite cuando la velocidad exterior es uniforme

La solución de la ecuación de Prandtl (8.46) junto con la ecuación de continuidad (8.36) con las condiciones de contorno (8.48) y $u = 0$, $v = 0$ sobre la placa permite obtener el campo de velocidad en la capa límite, pero para eso se debe conocer el campo de velocidad exterior $U(x)$.

Antes de considerar un caso concreto, mostraremos algunas propiedades generales de la capa límite, para lo cual conviene expresar el problema en términos de magnitudes sin dimensiones. Sea entonces U_0 una velocidad característica del problema (por ejemplo la velocidad del flujo principal al infinito), e introduzcamos en lugar de las coordenadas x, y y las velocidades u, v , las variables adimensionales X, Y, U (no confundir con la velocidad exterior $U(x)$) y V , definidas por

$$x = lX, \quad y = \frac{lY}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad u = U_0 U, \quad v = \frac{U_0 V}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (8.49)$$

donde l es una longitud constante y

$$\text{Re} = U_0 l / \nu \quad (8.50)$$

es un número de Reynolds formado con la longitud l y la velocidad U_0 . Análogamente el flujo exterior se expresará como $U(x) = U_0 W(X)$ en términos de la función adimensional $W(x)$.

La ecuación de Prandtl (8.46) y la ecuación de continuidad se escriben entonces como

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = W \frac{dW}{dX}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (8.51)$$

En estas ecuaciones (y también en las condiciones de contorno) *no figura la viscosidad*. Por lo tanto la solución es *independiente* del número de Reynolds. En otras palabras, todo el efecto de la viscosidad está contenido en el cambio de variables (8.49). Encontramos así el siguiente importante resultado:

Al cambiar el número de Reynolds, el patrón de flujo de toda la capa límite sufre una simple transformación afín, en la cual las distancias y velocidades longitudinales no varían, mientras que las distancias y velocidades transversales varían en proporción a $1/\sqrt{\text{Re}}$.

En segundo lugar, podemos decir que las velocidades adimensionales U, V que resultan de resolver las (8.51) deben ser del orden de la unidad, pues no dependen de Re . Lo mismo debe ser cierto para el espesor adimensional D de la capa límite, en términos de las coordenadas X e Y . Por lo tanto, a partir del cambio de variables (8.49) podemos concluir que

$$v \sim U_0 / \sqrt{\text{Re}} \quad (8.52)$$

que nos dice que la razón entre las velocidades transversales y las velocidades longitudinales es del orden de $1/\sqrt{\text{Re}}$, y que

$$\delta \sim l / \sqrt{\text{Re}} \quad (8.53)$$

es decir, que el espesor de la capa límite es proporcional a $1/\sqrt{\text{Re}}$.

Es interesante observar que en la ec. (8.51) el término de transporte de la cantidad de movimiento debido a la viscosidad juega un rol de la misma importancia que los términos convectivos, cosa que refleja correctamente la realidad física de lo que ocurre dentro de la capa límite. No se habría obtenido el mismo resultado si se hubiese adimensionalizado la ecuación de Navier-Stokes utilizando una única escala de longitud, pues entonces en el límite $Re \rightarrow \infty$ se llega simplemente a la ecuación de Euler. La utilización de dos escalas de longitud diferentes, paralela y perpendicularmente a la placa, es esencial para tener en cuenta correctamente el rol de la viscosidad en el pequeño espesor de la capa límite.

Hasta aquí nuestro tratamiento es general, pues aún no especificamos el campo exterior de velocidad. Para avanzar más es preciso conocer $U(x)$ (o lo que es lo mismo, $W(X)$). Para concretar, consideraremos el caso $U(x) = U_0 = \text{cte.}$ que es el más sencillo. En este caso el miembro derecho de la primera de la (8.51) es nulo, y las ecuaciones a resolver son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.54)$$

sujetas a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{en} \quad y = 0, \quad \forall x > 0 \\ u = U_0 & \quad \text{en} \quad y = \infty \end{aligned} \quad (8.55)$$

Puesto que U_0 es constante, el campo exterior no introduce en el problema una longitud característica (como podría ser la distancia que caracteriza el gradiente de dicho campo), y tampoco la placa tiene una longitud característica, pues su extensión es semiinfinita. Por otro lado, como $[\nu] = [L^2 / T]$, tampoco podemos formar una distancia característica a partir de ν , pues como nuestro problema es estacionario no hay un tiempo característico. En definitiva, el problema depende de los siguientes parámetros

$$x, y, \nu, U_0 \quad (8.56)$$

y con ellos se pueden formar sólo dos combinaciones adimensionales independientes, que se pueden elegir como

$$\xi \equiv \frac{y}{x} = \frac{Y}{X\sqrt{Re}} \quad , \quad \zeta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu x / U_0}} = \frac{Y}{\sqrt{X}} \quad (8.57)$$

En vista de esto se podría pensar que la solución del problema tiene la forma

$$u = U_0 U(\xi, \zeta) \quad , \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \Phi(\xi, \zeta) \quad (8.58)$$

donde $\Phi = V / \sqrt{X}$. Sin embargo, es evidente que las variables U y V (y por lo tanto Φ) no pueden depender de ξ , pues en ξ aparece el número de Reynolds, que como ya vimos no puede figurar en dichas variables. Concluimos entonces que la solución debe ser de la forma

$$u = U_0 U(\zeta) \quad , \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \Phi(\zeta) \quad \text{con} \quad \zeta \equiv \frac{y}{\sqrt{\nu x / U_0}} \quad (8.59)$$

Por consiguiente nuestra solución es *autosemejante* en la variable ζ . Gracias a ello, las ecuaciones diferenciales *parciales* (8.36) y (8.47) en las dos variables x, y se reducen a ecuaciones diferenciales *ordinarias* en la única variable ζ , mucho más fáciles de resolver.

Para completar la solución del problema tenemos que determinar las funciones U y Φ . Para este fin conviene hacer el siguiente cambio de variable dependiente:

$$U(\zeta) = \phi'(\zeta) \quad (8.60)$$

donde la ' indica la derivada de una función respecto de su argumento. Sustituyendo entonces las (8.59) y (8.60) en la ecuación de conservación de la masa (8.38) se obtiene

$$\Phi' = \frac{1}{2} \zeta \phi'' = \frac{1}{2} (\zeta \phi' - \phi)' \quad (8.61)$$

Por lo tanto, utilizando esta relación tenemos que

$$u = U_0 \phi' \quad , \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \frac{1}{2} (\zeta \phi' - \phi) \quad (8.62)$$

Sustituyendo las (8.62) en la ecuación de Prandtl se obtiene una ecuación diferencial para ϕ :

$$2\phi''' + \phi\phi'' = 0 \quad (8.63)$$

Las condiciones de contorno (8.55) toman la forma

$$\phi'(0) = \phi(0) = 0 \quad , \quad \phi'(\infty) = 1 \quad (8.64)$$

La (8.63) es la *ecuación de Blasius*, cuya solución permite obtener el perfil de velocidad completo dentro de la capa límite. La solución exacta del problema se obtiene numéricamente. Para ese fin las condiciones de contorno (8.64) son incómodas, pues los programas de integración suelen estipular condiciones de contorno en un único punto y no en dos, como las (8.64). Para superar este inconveniente conviene aprovechar una propiedad general de la ecuación de Blasius, de acuerdo con la cual si ϕ_0 es solución de la (8.63), entonces

$$\phi(\zeta) = a\phi_0(a\zeta) \quad , \quad a = \text{cte.} \quad (8.65)$$

es también solución. Sea ahora ϕ_0 la solución de (8.63) que satisface la condiciones de contorno

$$\phi_0'(0) = \phi_0(0) = 0 \quad , \quad \phi_0''(0) = 1 \quad (8.66)$$

Esta solución se puede encontrar fácilmente por medio de las rutinas de integración de aplicaciones como Mathematica[™] o semejantes. A partir de ella se puede calcular el límite

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \phi_0'(\zeta) = k (= 2.0854...) \quad (8.67)$$

Ponemos entonces

$$\phi(\zeta) = \alpha^{1/3} \phi_0(\alpha^{1/3} \zeta) \quad (8.68)$$

que satisface las condiciones de contorno

$$\phi'(0) = \phi(0) = 0 \quad , \quad \phi''(0) = \alpha \quad , \quad \phi'(\infty) = k\alpha^{2/3} \quad (8.69)$$

Entonces, eligiendo $\alpha = k^{-3/2}$ ($= 0.332\dots$) conseguimos la solución deseada, que satisface al infinito la condición $\phi'(\infty) = 1$. La forma de la solución está representada en la Fig. 8.5.

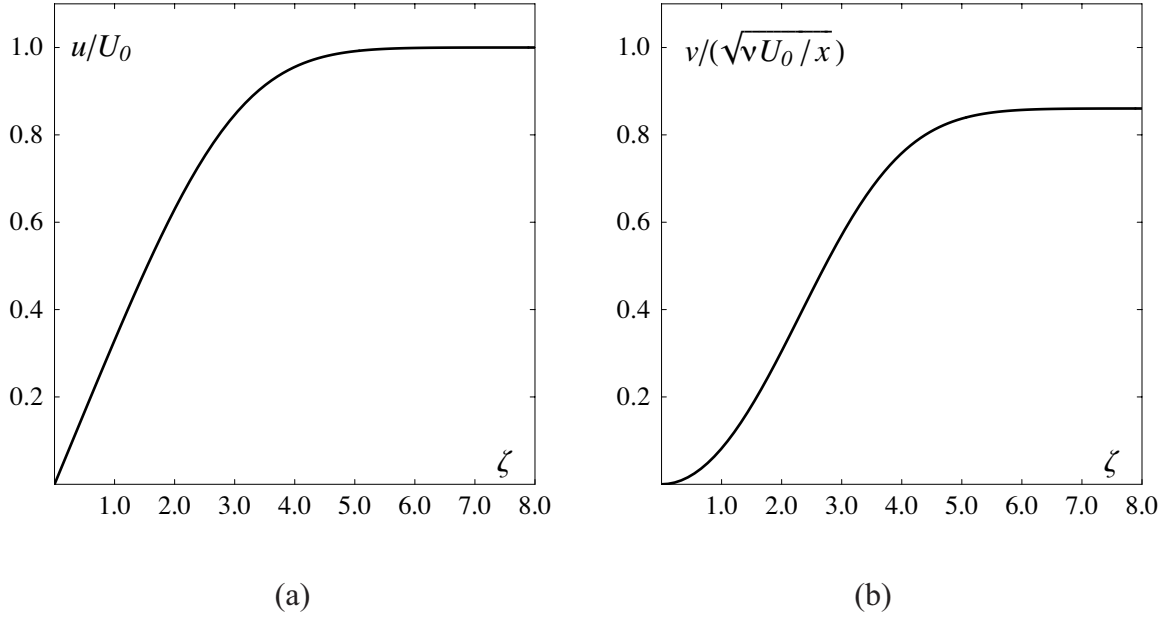


Fig. 8.5. Solución de Blasius para la capa límite laminar: (a) componente de la velocidad paralela a la placa; (b) componente perpendicular.

Usando las (8.59) y (8.62) podemos calcular el espesor δ de la capa límite. Sea ζ^* el valor de ζ para el cual u alcanza una cierta fracción de su valor límite (por ejemplo, el 99%). Tendremos entonces que

$$\delta = y(\zeta^*) = \zeta^* \sqrt{\nu x / U_0} \quad (8.70)$$

en concordancia con la (2.35).

Es interesante examinar las propiedades de la solución para ζ pequeño. De (8.63) y (8.64) es inmediato ver que $\phi'''(0) = 0$. Derivando la (8.63) resulta

$$2\phi'''' + \phi'\phi'' + \phi\phi''' = 0 \quad (8.71)$$

y se verifica del mismo modo que $\phi''''(0) = 0$. Por lo tanto, para valores no muy grandes de ζ podemos escribir

$$\phi = \frac{1}{2}\zeta^2\phi''(0) + \frac{1}{120}\zeta^5\phi^V(0) + O(\zeta^6) \quad (8.72)$$

Introduciendo esta expresión de ϕ en la (8.64) se encuentra que $\phi^V(0) = -\phi''(0)^2/2$, de modo que

$$\phi = \frac{1}{2}\zeta^2\phi''(0) - \frac{1}{240}\zeta^5\phi''(0)^2 + O(\zeta^6) \quad (8.73)$$

de donde obtenemos

$$u \equiv U_0 \left[\xi \phi''(0) - \frac{1}{48} \xi^4 \phi''(0)^2 \right], \quad v \equiv \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \left[\frac{1}{4} \xi^2 \phi''(0) - \frac{1}{120} \xi^5 \phi''(0)^2 \right] \quad (8.74)$$

de donde se ve que para ξ pequeño u crece linealmente con y , e incluso para valores relativamente elevados como $\xi = 2$ el apartamiento desde la linealidad es de apenas $\phi''(0)/6$. En cuanto a v , crece cuadráticamente con y .

En el límite opuesto, $\xi \rightarrow \infty$, tenemos que $\phi'(\xi) \rightarrow 1$ y por lo tanto $\phi \approx \xi$. Así, la ec. de Blasius adopta la forma límite

$$\phi''' \approx -\frac{1}{2} \xi \phi'' \quad (8.75)$$

Al integrar esta ecuación mucho más sencilla, se encuentra que

$$\phi'' \approx k e^{-\xi^2/4} \quad (8.76)$$

Por lo tanto ϕ' se aproxima exponencialmente a 1, y ya para $\xi = 4-5$ difiere de la unidad en unas pocas milésimas. Este resultado confirma la noción de capa límite: tan pronto como uno se aleja de la pared, se vuelve a encontrar prácticamente el flujo uniforme exterior. Al combinar los dos límites precedentes se puede predecir que ϕ' pasará abruptamente de la variación lineal a su valor asintótico.

La resolución de la ecuación de Blasius es un buen ejemplo del problema de empalme entre dos soluciones simples, válidas únicamente en dominios limitados. Este método, denominado de empalme asintótico, es muy general en la Mecánica de Fluidos.

Fuerza de arrastre viscoso

La fuerza de arrastre por unidad de superficie de la placa, σ_{xy} , vale localmente

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = \eta U_0 \phi''(0) \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} = \rho U_0^2 \phi''(0) \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} \quad (8.77)$$

donde hemos puesto en evidencia el factor ρU_0^2 que es la escala natural de presión. Para obtener la fuerza total ejercida por el fluido sobre la placa, debemos integrar σ_{xy} sobre ambas caras de la placa plana (de longitud L en la dirección del flujo y ancho unidad).

Se encuentra que

$$F_x = 2 \rho U_0^2 \phi''(0) \sqrt{\frac{\nu}{U_0}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4 \rho U_0^2 k^{-3/2} \sqrt{\frac{\nu L}{U_0}} = 4 \rho U_0^2 L k^{-3/2} \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_L}} \quad (8.78)$$

donde hemos introducido el número de Reynolds $\text{Re}_L = U_0 L / \nu$.

El coeficiente de arrastre C se obtiene como el cociente entre la fuerza de arrastre dividida por el producto de la presión dinámica ($\rho U_0^2 / 2$) por la superficie en contacto con el fluido ($2 \times L \times 1$), de donde resulta

$$C = \frac{F_x}{L\rho U_0^2} = \frac{4k^{-3/2}}{\sqrt{\text{Re}_L}} \approx \frac{1.3}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (8.79)$$

Esta dependencia de C con el número de Reynolds es más débil que la que se tiene para flujos con número de Reynolds muy pequeño (ver por ejemplo la (8.29)), en los cuales el transporte de cantidad de movimiento se debe a la difusión viscosa. Por el contrario, es más fuerte que la que se tiene en los flujos turbulentos con número de Reynolds grande: en los flujos turbulentos domina el transporte convectivo, la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad y C es (aproximadamente) constante.

9. ONDAS SUPERFICIALES DE GRAVEDAD

Ondas superficiales

Lejos de las paredes del recipiente que lo contiene, la superficie libre de un líquido en equilibrio sometido a la gravedad y a las fuerzas de tensión superficial es plana y horizontal. Si por efecto de una perturbación la superficie se aparta de esa posición en algún punto, ocurre un movimiento en el líquido tendiente a restituir el equilibrio. Este movimiento se propaga sobre la superficie en forma de ondas, llamadas ondas superficiales. Esas ondas afectan también el interior del fluido, pero con menos intensidad a mayores profundidades.

Los efectos de la tensión superficial son importantes cuando la longitud de las ondas es muy corta, pues entonces la principal fuerza de restitución es la capilaridad. Estas ondas se denominan entonces *ondas capilares*. Pero cuando las longitudes de onda son grandes, la fuerza de restitución se debe sólo a la gravedad y tenemos entonces *ondas de gravedad*.

Las ondas de superficie en el agua son sin duda el fenómeno ondulatorio más fácil de observar, y no han cesado de fascinar al observador curioso. Se trata, además de un fenómeno de enorme importancia práctica y de gran relevancia para las ciencias del ambiente terrestre. Presentan una fenomenología asombrosamente variada y han dado lugar, y siguen dando hoy, a numerosas investigaciones sea teóricas que experimentales. El lector debe tener presente que en estas notas apenas tocaremos algunos aspectos básicos pues la exploración profunda de este vasto campo requiere por sí sola un entero volumen.

Ondas superficiales de gravedad

Consideraremos ahora ondas de gravedad de pequeña amplitud, en las cuales la velocidad del fluido es tan pequeña que en la ecuación de Euler¹ se puede despreciar el término convectivo (no lineal) $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ en comparación con $\partial\mathbf{u}/\partial t$. El significado físico de esto es fácil de ver. En efecto, durante un intervalo de tiempo del orden del período T de las oscilaciones, las partículas del fluido recorren una distancia del orden de la amplitud a de la onda. La velocidad es entonces del orden de $u \approx a/T$. La escala temporal de variación de u es T y la escala espacial de su variación (en la dirección de propagación) es la longitud de onda λ . Luego, $|\partial\mathbf{u}/\partial t| \approx u/T$ y $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| \approx u^2/\lambda$ y entonces el término convectivo será despreciable frente a $\partial\mathbf{u}/\partial t$ si se cumple

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|}{|\partial\mathbf{u}/\partial t|} \approx \frac{u^2/\lambda}{u/T} = \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (9.1)$$

En otras palabras, la amplitud de las oscilaciones debe ser mucho menor que la longitud de onda.

Ecuaciones básicas

Habiendo despreciado el término convectivo, la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (9.2)$$

¹ En la mayoría de los casos de interés los efectos de la viscosidad son muy pequeños, como vamos a mostrar más adelante en este Capítulo. por lo tanto se justifica usar la ecuación de Euler.

donde φ es el potencial gravitatorio. Vamos a suponer que el flujo es incompresible y la densidad es uniforme, entonces la (9.2) se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left(\varphi + \frac{p}{\rho} \right) \quad (9.3)$$

Tomando el rotor de la (9.3) resulta $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = 0$ y por lo tanto $\boldsymbol{\omega} = \text{cte.}$ Pero en un movimiento oscilatorio el promedio temporal de la velocidad es nulo, luego $\boldsymbol{\omega} = \text{cte.}$ implica $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$. Puesto que el flujo es incompresible e irrotacional podemos poner $\mathbf{u} = \nabla \phi$ donde ϕ es el potencial de velocidad. De la (9.3) obtenemos entonces

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9.4)$$

donde pusimos $\varphi = g z$. Vamos a suponer que el eje z es vertical y hacia arriba y que la superficie libre del líquido en equilibrio es el plano $z = 0$ (Fig. 9.1).

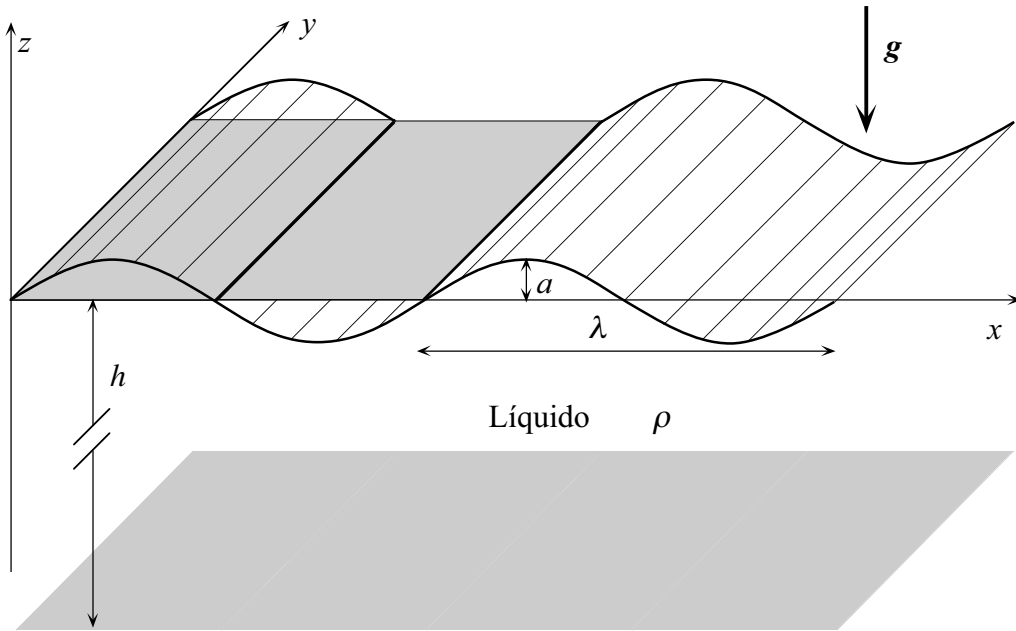


Fig. 9.1. Onda de superficie en un líquido.

Vamos a indicar con $\zeta(x, y, t)$ la coordenada z de un punto de la superficie perturbada. En el equilibrio $\zeta = 0$, de modo que ζ representa el desplazamiento vertical de la superficie debido a las oscilaciones. Supongamos que sobre la superficie libre se ejerce una presión constante p_0 (la presión atmosférica). Entonces por la (9.4) se debe cumplir la condición de contorno

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \quad (9.5)$$

En lugar de ϕ podemos emplear

$$\phi' = \phi + \frac{p_0}{\rho} t \quad (9.6)$$

puesto que, claramente, $\mathbf{u} = \nabla\phi' = \nabla\phi$. Con esto se absorbe el término p_0 de la (9.5), y podemos escribir la condición de contorno sobre la superficie (quitando la ') en la forma

$$g\zeta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} = 0 \quad (9.7)$$

Puesto que la amplitud de las oscilaciones es pequeña por la (9.1), el desplazamiento ζ también lo es. Por lo tanto con la misma aproximación podemos suponer que la componente vertical de la velocidad de los puntos de la superficie es simplemente

$$u_z(x, y, \zeta, t) = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad (9.8)$$

Pero, por otro lado

$$u_z(x, y, \zeta, t) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} \quad (9.9)$$

de modo que

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta} \quad (9.10)$$

Pero de la (9.7) tenemos que

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0 \quad (9.11)$$

y, entonces, de estas dos últimas expresiones obtenemos

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right)_{z=\zeta} = 0 \quad (9.12)$$

Ya que las oscilaciones son pequeñas, podemos evaluar la cantidad entre paréntesis en $z = 0$ en vez de $z = \zeta$, con lo que finalmente el problema se reduce a las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (9.13)$$

Ondas elementales monocromáticas

Gracias a la aproximación de suponer perturbaciones de pequeña amplitud, hemos llegado a un problema *lineal* que se expresa en las (9.13). En virtud de la linealidad, tiene sentido buscar soluciones de las (9.13) en la forma de perturbaciones sinusoidales de la superficie libre, de longitud de onda λ y período T , dado que mediante oportunas superposiciones de perturbaciones de este tipo podemos encontrar la solución de cualquier problema de condiciones iniciales. Vamos a suponer que la superficie del líquido es ilimitada y su profundidad h es muy grande, de modo

que $h \gg \lambda$, donde λ es la longitud de onda de la perturbación, cuyo período es T . Por lo tanto tendremos lo que se denomina una onda de gravedad en aguas extensas y profundas. En este problema, entonces, no hay condiciones de contorno en los bordes ni en el fondo.

Supongamos que la onda se propaga a lo largo del eje x , de modo que todas las magnitudes que la describen son independientes de y . Tendremos entonces

$$\phi = f(z)\cos(k_x x - \omega t) \quad \text{con} \quad |k_x| = k = 2\pi/\lambda \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi/T \quad (9.14)$$

Sustituyendo ϕ en la ecuación de Laplace (9.13) obtenemos la siguiente ecuación para f :

$$f'' - k^2 f = 0 \quad (9.15)$$

cuya solución general es

$$f = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad , \quad A, B = \text{cte.} \quad (9.16)$$

En el presente caso B debe ser nulo, pues ϕ debe ser finito para $z \rightarrow -\infty$ ya que hemos supuesto $h = \infty$. Luego el potencial de velocidad tiene la forma

$$\phi = Ae^{kz} \cos(k_x x - \omega t) \quad (9.17)$$

Este comportamiento exponencialmente decreciente en la dirección normal a la superficie es característico de las ondas superficiales, que se suelen también denominar *evanescentes* dado que no se propagan en esa dirección.

Por otra parte, la condición de contorno (9.13) en la superficie requiere que

$$\omega = \pm \Omega(k) \quad , \quad \Omega(k) = \sqrt{gk} \quad (9.18)$$

La expresión (9.18), que recibe el nombre de *relación de dispersión*, nos muestra que la frecuencia de oscilación de una onda depende de su longitud de onda. Se puede observar que Ω es una función *par* de k_x , y que para cada valor de k_x hay dos modos, correspondientes a tomar el signo $+$ o el $-$ en la (9.18). Para el modo $+$ la onda se propaga en el sentido x positivo si $k_x > 0$ y en el sentido x negativo si $k_x < 0$, es decir, en el sentido determinado por el signo de k_x . Para el modo $-$ la onda se propaga en el sentido *opuesto* al determinado por el signo de k_x . Por lo tanto, las ondas del modo $+$ con $k_x > 0$ y las del modo $-$ con $k_x < 0$ se propagan ambas hacia la derecha.

A partir de la relación de dispersión podemos determinar la velocidad de fase u_f de la onda elemental (9.17) como

$$u_f \equiv \frac{\omega}{k_x} = \text{Sign}(k_x) \text{Sign}(\omega) c \quad , \quad c \equiv \frac{\Omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (9.19)$$

La (9.19) nos muestra que c depende de la longitud de onda. En este caso la velocidad de fase es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda. Debido a esto, una superposición de ondas elementales de diferente longitud de onda cambia de forma mientras se propaga, y un paquete de ondas localizado se dispersa. Por este motivo, las ondas que tienen esta propiedad se dicen *dispersivas*. La otra velocidad característica de una onda es la *velocidad de grupo* u_g , que

se define en forma elemental como la velocidad con la cual se propaga un paquete de ondas casi monocromático, y está dada por

$$u_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \text{Sign}(k_x) \text{Sign}(\omega) C, \quad C \equiv \frac{\partial \Omega(k)}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2} c \quad (9.20)$$

A partir de aquí vamos a escribir todas las fórmulas para $k_x > 0$ y omitiremos el subíndice x pues no se va a producir confusión, pero el lector debe tener claro que mientras en el argumento del coseno en la (9.17) figura k_x (con su signo), en la exponencial de la (9.17) y en la relación de dispersión (9.18) figura su *módulo* k . Lo mismo será para las expresiones análogas que escribamos de ahora en más. Además, cuando se superpongan las soluciones elementales para formar trenes o paquetes de onda hay que recordar que es necesario tener en cuenta ambos modos de la relación de dispersión, y para cada uno de ellos ambos signos de k_x .

De la (9.19) y la (9.20) vemos que la velocidad de grupo *difiere* de la velocidad de fase, cosa que ocurre siempre que se tengan ondas dispersivas. En este caso la velocidad de grupo es menor (en módulo) que la velocidad de fase. Se dice entonces que hay *dispersión normal*, que se pone de manifiesto en que las crestas y valles de un grupo de ondas (que viajan con la velocidad de fase) tienden a *adelantarse* al grupo. De resultados de esto, a medida que el grupo avanza aparecen nuevas crestas y valles a la retaguardia del grupo, que se desplazan hacia su parte delantera y por último desaparecen en la vanguardia del mismo. Esto se puede observar si se arroja una piedra de regular tamaño a un estanque cuyas aguas están quietas. En ese caso se forma un tren de ondas circulares (con centro en el lugar donde cayó la piedra). El tren de ondas es una superposición de ondas elementales de diferentes longitudes de onda, las más largas con λ del orden de la dimensión lineal de la piedra y de ahí para abajo (incluyendo las ondas capilares que estudiaremos más adelante), pero las que se observan más fácilmente son las ondas largas, las cuales si el tamaño de la piedra es adecuado son ondas de gravedad.

Además del que acabamos de mencionar, la dispersión da lugar a otros efectos interesantes en la propagación de perturbaciones de la superficie de un líquido, cuyo estudio requiere refinar y generalizar las nociones elementales de velocidad de fase y velocidad de grupo. Dado que nuestras generalizaciones se aplican a todo tipo de ondas, siempre que sean de pequeña amplitud, conviene primero completar el examen de las ondas de superficie en líquidos y dejar para un poco más adelante el estudio de la dispersión.

Propiedades de las ondas de gravedad en aguas profundas

Una vez determinado el potencial ϕ podemos calcular el campo de velocidad. Resulta

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -kAe^{kz} \sin(kx - \omega t) \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = kAe^{kz} \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (9.21)$$

Las (9.21) muestran que el módulo de la velocidad vale kAe^{kz} y por lo tanto disminuye exponencialmente con la profundidad. En cualquier punto del fluido (x, z fijos) el vector velocidad rota uniformemente en el plano x, z con el período T .

Es interesante calcular las trayectorias de las partículas del fluido. Sean (X, Z) las coordenadas de un elemento del fluido cuya posición de equilibrio es (x_0, z_0) . Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(X - x_0) &= u_x(X, Z) \cong u_x(x_0, z_0) = -kAe^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) \\ \frac{d}{dt}(Z - z_0) &= u_z(X, Z) \cong u_z(x_0, z_0) = kAe^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)\end{aligned}\quad (9.22)$$

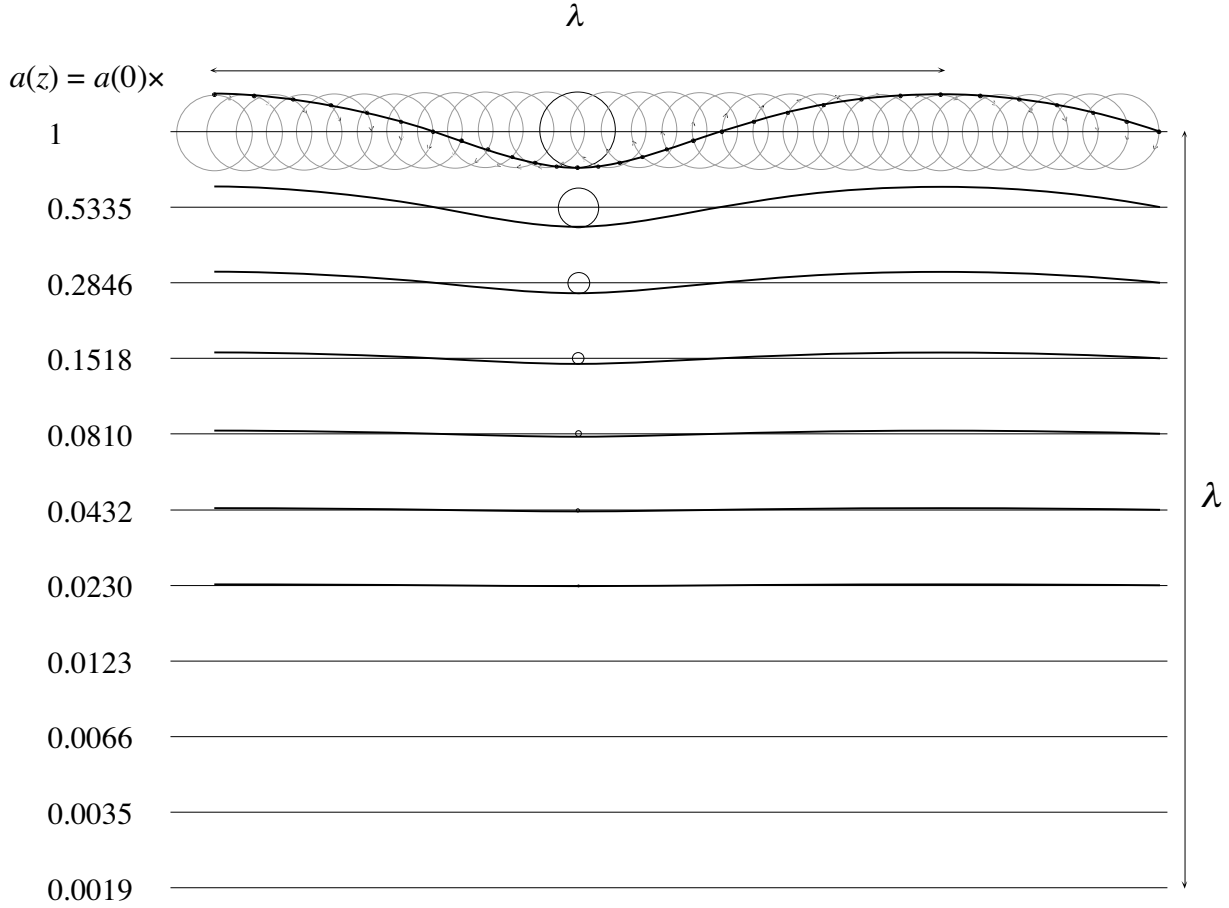


Fig. 9.2. Representación de una onda elemental de superficie. Se han dibujado las trayectorias de los puntos de la superficie para indicar como se combinan esos movimientos para dar lugar a la ondulación de la misma. Si el sentido de rotación es horario (como se indica por medio de las flechas) la onda se propaga hacia la derecha. Para que en el dibujo se puedan apreciar mejor las características del fenómeno se supuso $a = \lambda/10$ con lo cual la condición $a \ll \lambda$ no se cumple muy bien. Debido a eso la perturbación de la superficie no es exactamente sinusoidal, como se puede notar mirando cuidadosamente la figura. Se puede observar que el radio de las órbitas de las partículas del fluido disminuye muy rápidamente con la profundidad: a profundidades mayores que 0.6λ ya no se pueden dibujar las circunferencias.

En las expresiones anteriores hemos hecho las aproximaciones $kX \cong kx_0$ y $kZ \cong kz_0$ que se justifican para oscilaciones de pequeña amplitud ya que

$$k(X - x_0) \approx ka = 2\pi a / \lambda \ll 1 \quad , \quad k(Z - z_0) \approx ka = 2\pi a / \lambda \ll 1 \quad (9.23)$$

Integrando las (9.22) en el tiempo obtenemos la trayectoria buscada:

$$X - x_0 = -\frac{kA}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) \quad , \quad Z - z_0 = -\frac{kA}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) \quad (9.24)$$

Las (9.24) muestran que las partículas del fluido describen circunferencias de radio

$$a(z_0) = \frac{kA}{\omega} e^{kz_0} \quad (9.25)$$

alrededor de su posición de equilibrio (x_0, z_0) ; este radio disminuye exponencialmente al aumentar la profundidad (Fig. 9.2). Por lo tanto este movimiento oscilatorio no es ni longitudinal ni transversal. Esto se debe a que el fluido es incompresible, y entonces las parcelas no se pueden mover solamente en sentido vertical, pues cuando una parcela desciende (o asciende), otras porciones del fluido tiene que desplazarse en sentido horizontal para dejarle lugar (u ocupar el lugar que deja vacante). Finalmente podemos observar que $a = a(0) = kA / \omega$ es la amplitud de la oscilación de la superficie libre, que es la magnitud que interviene en la condición (9.1).

En particular, para $z_0 = 0$ tenemos de la (9.24) que

$$\xi(x, t) = -\frac{kA}{\omega} \sin(kx - \omega t) \quad (9.26)$$

consistentemente con la (9.10). Por lo tanto para nuestras soluciones elementales se cumple que

$$\frac{\omega}{k} e^{kz} \xi(x, t') = \phi(x, z, t) \quad , \quad t' = t - T/4 \quad (9.27)$$

y en consecuencia dado

$$\xi(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (9.28)$$

queda inmediatamente determinado ϕ . Por lo tanto es equivalente describir la onda en términos de ϕ o de ξ . En lo sucesivo vamos a usar la segunda alternativa porque es más fácil visualizar el desplazamiento de la superficie libre antes que el potencial de velocidad.

Ondas capilares

Hasta ahora, en nuestro estudio de las ondas superficiales no hemos tenido en cuenta las fuerzas de tensión superficial. Veremos que la capilaridad tiene un efecto importante sobre las ondas de gravedad de longitud de onda pequeña.

Como antes vamos a suponer que la amplitud de las oscilaciones es pequeña en comparación con la longitud de onda ($a \ll \lambda$). El planteo del problema se puede hacer del mismo modo que antes y se obtiene que el potencial de velocidad satisface como antes la ecuación de Laplace (la primera de las (9.13)). La diferencia con el caso anterior aparece en la condición de contorno sobre la superficie, pues ahora debido a la curvatura de la superficie cuando ésta es perturbada, hay una diferencia de presión entre ambos lados de la misma. Esta diferencia está dada por la fórmula de Laplace (2.48)

$$\delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (9.29)$$

donde γ es el coeficiente de tensión superficial y R_1, R_2 los radios principales de curvatura de la superficie libre. Luego la presión cerca de la superficie y en el seno del líquido es

$$p = p_0 - \gamma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (9.30)$$

donde p_0 es la presión externa. Por lo tanto la condición de contorno sobre la superficie se escribe ahora

$$\rho g \xi + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\xi} - \gamma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (9.31)$$

que difiere de la (9.7) por la presencia del último término. Como antes, derivamos esta ecuación respecto del tiempo y reemplazamos $\partial \xi / \partial t$ por $(\partial \phi / \partial z)_{z=0}$ y obtenemos la siguiente condición de contorno para el potencial de velocidad:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right]_{z=0} = 0 \quad (9.32)$$

que difiere de la segunda de las (9.13) por la presencia del tercer término.

Buscamos nuevamente soluciones en forma de ondas monocromáticas del tipo (9.14). La solución de la ecuación de Laplace sigue siendo de la forma (9.17). Sustituyendo entonces la (9.17) en la condición de contorno (9.32) obtenemos ahora la relación de dispersión

$$\omega = \pm \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (9.33)$$

El cociente entre el término de gravedad y el término de tensión superficial del radicando de la (9.33) está determinado por el número puro

$$B = \frac{\rho g}{\gamma k^2} \quad (9.34)$$

que se denomina *número de Bond* (o también *número de Eötvös*). Cuando $B \gg 1$ los efectos de la tensión superficial son despreciables y estamos en el caso de las ondas de gravedad puras que acabamos de estudiar. Si, viceversa, $B \ll 1$, la dinámica de las oscilaciones está determinada por la tensión superficial y tenemos *ondas capilares* puras. En los casos intermedios ambos efectos se deben tener en cuenta y tenemos las *ondas de gravedad capilares*.

Vemos entonces que para longitudes de onda largas, tales que $k^2 \ll k_0^2 = \rho g / \gamma$, esto es, para

$$\lambda \gg \lambda_0 = 2\pi / k_0 = 2\pi \sqrt{\gamma / \rho g} \quad (= 1.72 \text{ cm para agua a } 15^\circ \text{C}) \quad (9.35)$$

el efecto de la capilaridad es despreciable, y tenemos una *onda de gravedad pura*. La longitud λ_0 se suele denominar *distancia capilar*.

En el límite opuesto, cuando $\lambda \ll \lambda_0$, se puede despreciar el efecto de la gravedad y entonces

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (9.36)$$

Estas ondas se denominan *ondas capilares* puras (en idioma inglés “ripples”, o sea rizos). Los casos intermedios se denominan *ondas de gravedad capilares*.

Se puede observar que la velocidad de fase de las ondas capilares está dada por

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}} \quad (9.37)$$

y por lo tanto, a diferencia de las ondas de gravedad (puras) es *inversamente* proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de onda.

En cuanto a la velocidad de grupo, se obtiene

$$C = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \frac{3}{2} c \quad (9.38)$$

Por lo tanto la velocidad de grupo de las ondas capilares es *mayor* que la velocidad de fase, al revés de lo que ocurre con las ondas de gravedad (puras). En estos casos se dice que hay *dispersión anómala*², que se pone de manifiesto en que las crestas y valles de un grupo de ondas tienden a *retrasarse* respecto del grupo: a medida que el grupo avanza se observa que nuevas crestas y valles aparecen a la vanguardia del grupo, se van desplazando hacia la parte posterior, y finalmente desaparecen en la retaguardia del mismo. Este comportamiento se puede observar claramente cuando las gotas de lluvia caen sobre un estanque cuyas aguas están en calma. En este caso (a diferencia de cuando se arroja una piedra) el tren de ondas contiene solamente ondas capilares debido al pequeño tamaño de las gotas de lluvia; esto permite observarlas bien a pesar de su corta longitud de onda y reducida amplitud. Las ondas capilares también están presentes en el tren que se produce cuando se arroja una piedra, pero es muy difícil verlas debido a que las ondas de gravedad son mucho más vistosas y su amplitud es mayor.

En la Fig. 9.3 se representan la velocidad de fase y la velocidad de grupo en función de λ para las ondas de gravedad capilares así como para los casos límite de ondas de gravedad puras y ondas capilares. Se puede observar que hay una velocidad de grupo mínima C_0 , dada por

$$C_0 = \left(9\alpha \frac{\gamma g}{\rho} \right)^{1/4}, \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = 0.1547... \quad (9.39)$$

que ocurre para

$$k = k_{0g} = \left(\alpha \frac{g\rho}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (9.40)$$

Para agua a 15 °C resulta $C_0 \approx 17.8$ cm/s y $\lambda_{0g} = 2\pi / k_{0g} \approx 4.375$ cm.

También la velocidad de fase tiene un mínimo dado por

² El adjetivo “anómalo” no es ciertamente apropiado, dado que este tipo de comportamiento no tiene nada de patológico.

$$c_0 = \left(\frac{4\gamma g}{\rho} \right)^{1/4} \quad (9.41)$$

que ocurre para $\lambda = \lambda_0$ (ec. (9.35)). Para agua a 15 °C resulta $c_0 \cong 23.2$ cm/s. Este mínimo se para las dos *ramas* de la relación de dispersión: la *rama capilar* y la *rama de gravedad*. A la izquierda de este mínimo, en la rama capilar, la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de fase, mientras que a la derecha, en la rama de gravedad, es menor. Hay varios fenómenos interesantes asociados con estos hechos, que examinaremos más adelante.

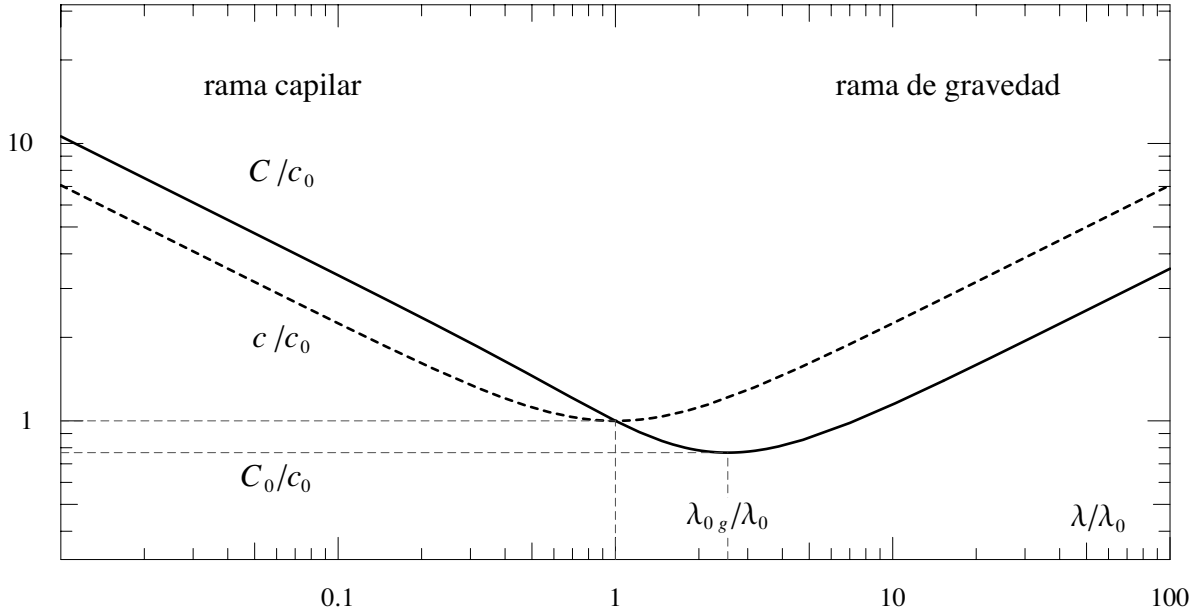


Fig. 9.3. Velocidad de fase (línea de trazos) y velocidad de grupo (línea llena) para las ondas de gravedad capilares en aguas profundas. Al usar escalas logarítmicas se aprecian mejor las regiones donde valen las fórmulas aproximadas para las ondas capilares puras (la región $\lambda/\lambda_0 < 0.3$ en la cual c y C aparecen en el gráfico como rectas paralelas con pendiente $-1/2$) y para ondas de gravedad puras (la región $\lambda/\lambda_0 > 6$ donde las líneas son rectas paralelas con pendiente $+1/2$). De acuerdo con lo que se puede apreciar en el gráfico, vale la pena aplicar las fórmulas exactas tan sólo en la zona de transición entre ambos regímenes, esto es, en el intervalo $0.3 < \lambda/\lambda_0 < 6$ (es decir, entre 0.5 y 10 cm para el agua).

Ondas superficiales en capas de profundidad finita

Veamos como se modifican los presentes resultados cuando la profundidad h de la capa líquida es finita. Lo único que cambia respecto del tratamiento anterior es que debemos agregar la condición de contorno en el fondo

$$(u_z)_{x=-h} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{x=-h} = 0 \quad (9.42)$$

Por lo tanto, al escribir la solución de la ecuación de Laplace (9.14) hay que conservar el término Be^{-kz} de la (9.16). Imponiendo entonces la condición (9.42) es fácil ver que resulta

$$\phi = A' \cosh[k(z+h)] \cos(kx - \omega t) \quad , \quad A' = 2Ae^{-kh} \quad (9.43)$$

A partir de la (9.43) es sencillo verificar que las trayectorias de las parcelas del fluido son ahora *elipses achatadas*. El achatamiento es tanto mayor cuanto menor es h/λ , y además crece con la profundidad, hasta que el semieje vertical se hace nulo en $z = -h$ (pues allí $u_z = 0$), de modo que en el fondo el movimiento del fluido es puramente horizontal.

Introduciendo la (9.43) en la condición de contorno en la superficie (9.32) resulta la siguiente relación de dispersión general:

$$\omega = \pm \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}\right) \tanh kh} \quad (9.44)$$

Examinaremos ahora diferentes casos.

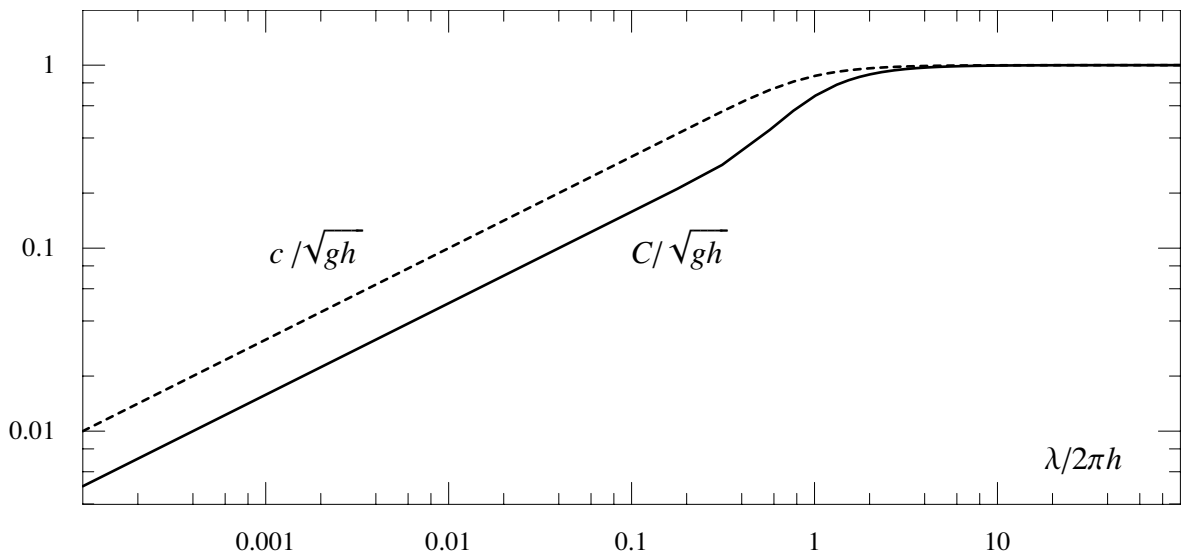


Fig. 9.4. Velocidad de fase (línea de trazos) y velocidad de grupo (línea llena) de las ondas de gravedad puras como función de la profundidad de la capa líquida. Al usar escalas logarítmicas se aprecian mejor las regiones donde valen las fórmulas aproximadas para aguas profundas (la región $\lambda/2\pi h < 0.3$ en la cual c y C aparecen en el gráfico como rectas paralelas con pendiente 1/2) y aguas poco profundas ($\lambda/2\pi h > 4$ donde las líneas son horizontales). De acuerdo con lo que se puede apreciar en el gráfico, vale la pena aplicar las fórmulas completas (9.46) tan sólo en la zona de transición ($0.2 < \lambda/2\pi h < 4$) entre ambos regímenes, que apenas abarca algo más de una década.

Ondas de gravedad puras

En el caso de ondas de gravedad puras ($k^2 \ll \rho g / \gamma$, o sea $\lambda \gg \lambda_0$) obtenemos

$$\omega = \pm \sqrt{gk \tanh kh} \quad (9.45)$$

y es fácil verificar que la velocidad de fase y la velocidad de grupo de estas ondas son, respectivamente

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad , \quad C = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (9.46)$$

El comportamiento de la velocidad de fase y la velocidad de grupo de las ondas de gravedad puras como función del cociente λ/h se puede apreciar en la Fig. 9.4. Cuando $kh \gg 1$ (o sea $\lambda \ll h$) se tiene $\tanh kh \approx 1$ y recuperamos el caso de ondas de gravedad en aguas profundas ya estudiado anteriormente.

Ondas de gravedad puras en aguas poco profundas

Más novedoso es lo que ocurre cuando $kh \ll 1$ ($\lambda \gg h$). En este caso $\tanh kh \approx kh$ de modo que

$$\omega = \pm k \sqrt{gh} \quad (9.47)$$

Por lo tanto las ondas de gravedad en aguas poco profundas *no son dispersivas*, pues

$$c = \sqrt{gh} = C \quad (9.48)$$

Debido a esto, un paquete de ondas de gravedad en aguas de poca profundidad se propaga sin cambio de forma.

Ondas capilares puras

Cuando $k^2 \gg \rho g / \gamma$ ($\lambda \ll \lambda_0$) domina el efecto de la tensión superficial, y la (9.44) se reduce a

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho} \tanh kh} \quad (9.49)$$

de modo que las velocidades de fase y de grupo de las ondas capilares resultan ser, respectivamente

$$c = \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh kh} \quad , \quad C = \frac{3}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{3 \sinh 2kh} \right) \quad (9.50)$$

Cuando $kh \gg 1$ (o sea $\lambda \ll h$) se tiene $\tanh kh \approx 1$ y recuperamos el caso ya visto de las ondas capilares en aguas profundas (ecs. (9.35-37)). En cambio, cuando $kh \ll 1$ resulta

$$\omega = \pm k^2 \sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}} \quad (9.51)$$

y entonces la velocidad de fase y la velocidad de grupo son, respectivamente:

$$c = k \sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}} \quad , \quad C = 2c \quad (9.52)$$

En consecuencia las ondas capilares presentan siempre dispersión anómala.

Efecto de la viscosidad sobre las ondas superficiales

Sobre una superficie libre no se ejercen esfuerzos tangenciales. Debido a la viscosidad esto implica que $\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x = 0$ sobre la superficie. Los flujos ideales que hemos considerado no cumplen esta condición. Por lo tanto cerca de la superficie libre hay una capa límite en la cual la vorticidad no es nula, mientras que el resto del flujo es potencial, tal como lo hemos considerado hasta ahora. Dentro de esta capa límite las derivadas de la velocidad disminuyen rápidamente, pero es importante observar que (a diferencia de lo que ocurre cerca de una superficie sólida) esto no implica que el gradiente de la velocidad sea fuerte. En la mayoría de los casos de interés el número de Reynolds del flujo de una onda de gravedad es muy grande. En efecto, $Re = u\lambda / \nu = ac / \nu$. Para el agua, con $c = \sqrt{g\lambda / 2\pi}$ y con el valor de ν de la Tabla 7.1 resulta $Re = 1135 a(\text{cm})[\lambda(\text{cm})]^{1/2}$.

El principal efecto de la viscosidad es el de producir el amortiguamiento de las ondas. Sin embargo, dado que $Re \gg 1$ para ondas de longitud de onda apreciable, este amortiguamiento es casi siempre muy pequeño. Se puede mostrar que el coeficiente de amortiguamiento, definido como $\gamma = |da/dt| / a$, donde a es la amplitud de la onda superficial vale

$$\gamma = 2\nu k^2 = 8\pi^2\nu / \lambda^2 \quad (9.53)$$

Para agua resulta $\gamma(\text{s}^{-1}) \approx 0.87 / \lambda^2(\text{cm}^2)$. Así, por ejemplo, para un tren de ondas con $\lambda = 10$ m que viaja con una velocidad de grupo de 2 m/s se obtiene $\gamma \approx 10^{-6} \text{s}^{-1}$. Es decir, el tren de ondas debe viajar durante 10^6 s (unos 11 días) durante los cuales recorre alrededor de 2000 km, antes de amortiguarse apreciablemente. Por lo tanto las olas generadas por los vientos en el océano se propagan por distancias enormes. Esto explica porqué llegan siempre olas a la costa, incluso cuando el viento está en calma: esas olas se originaron en lugares muy lejanos, y en un océano de las dimensiones del Atlántico siempre hay tormentas en alguna parte. Sin embargo el amortiguamiento viscoso es importante para las ondas capilares; en el agua, de acuerdo con la (9.53), para $\lambda = 0.4$ cm resulta $\gamma \approx 5.4 \text{s}^{-1}$, por lo tanto la onda se amortigua en tan sólo 1/5 de segundo. Por este motivo las ondas capilares de longitud de onda muy corta son muy difíciles de observar. Las ondas capilares más largas, con $\lambda \approx 1.6$ cm se amortiguan en unos 3 s.

La relación de dispersión y la dispersión de trenes de ondas

En todas las clases de ondas de superficie que hemos considerado encontramos que la frecuencia de oscilación depende de la longitud de onda. Esta es una propiedad general de los fenómenos ondulatorios, que se expresa matemáticamente por medio de la relación

$$\omega = \Omega(k) \quad (9.54)$$

donde la forma de la función Ω depende de las características del fenómeno ondulatorio de que se trate³. Una relación del tipo (9.54) se denomina *relación de dispersión*, y es de fundamental

³ La forma en que hemos escrito la (9.28) no es la más general posible ya que está limitada a propagación de ondas de pequeña amplitud y en una sola dimensión. Más en general, ω es función del vector número de onda \mathbf{k} y también de la amplitud a de la perturbación y de otras propiedades de la misma como su polarización. Hay que tener presente, también, que en la relación de dispersión intervienen los parámetros del medio en que se propaga la onda (que no figuran explícitamente en la (9.28)), que determinan la respuesta del mismo a la perturbación del equilibrio.,

del fenómeno ondulatorio de que se trate, y analizar el comportamiento de trenes de ondas. Esto es lo que vamos a hacer ahora, comenzando por refinar las nociones de velocidad de fase y velocidad de grupo.

Para entender mejor estos conceptos es esencial tener presente que las soluciones elementales del tipo (9.17) o (9.28) que hemos considerado hasta ahora en este Capítulo, *no representan* las perturbaciones reales que se observan en la naturaleza y en los experimentos⁴. Son, ni más ni menos, un *artificio matemático* cuya utilidad consiste en que permiten describir las perturbaciones reales, gracias la técnica de la integral de Fourier. Las perturbaciones reales (como las que observamos cuando arrojamus una piedra en un estanque) son siempre *trenes de ondas* de extensión espacial y temporal *finita*. Sin embargo, vamos a ver que a partir de las propiedades de propagación de las soluciones elementales, que están contenidas en la relación de dispersión, se puede describir el comportamiento de los trenes de onda.

El resultado fundamental que vamos a mostrar es el siguiente:

Después de transcurrido un intervalo de tiempo apreciable desde cuando ocurrió la perturbación que produjo un tren de ondas, y lejos del lugar donde se originó, el tren se puede describir mediante una expresión de la forma

$$\zeta(x, t) = a(x, t) \cos[k(x, t)x - \omega(x, t)t] \quad (9.55)$$

donde las funciones $k(x, t)$ y $\omega(x, t)$ están relacionadas entre sí por medio de la fórmula

$$\omega(x, t) = \Omega[k(x, t)] \quad (9.56)$$

en la cual Ω es la *misma* función que en la (9.54).

La (9.55) describe una perturbación oscilante, que consiste de una sucesión de crestas y valles, cuya amplitud está modulada por el factor $a(x, t)$, que determina la región espacial y temporal donde está localizado el tren de ondas. En esa región, la longitud de onda (entendida como la distancia entre una cresta y la siguiente, o entre un valle y el siguiente para t fijo) está dada por

$$\lambda(x, t) = 2\pi / k(x, t) \quad (9.57)$$

y es diferente, en un instante dado t , en distintas posiciones x , y también, en una posición fija x , varía con t (ver las Figs. 9.5 y 9.6). Del mismo modo el período de la oscilación (entendido como el lapso entre un máximo del desplazamiento y el siguiente, en una posición fija x) está dado por

$$T(x, t) = 2\pi / \omega(x, t) \quad (9.58)$$

y es diferente, en un instante dado t , en otras posiciones x y también, en la misma posición x , varía con t .

La expresión (9.55) es formalmente análoga a la solución elemental (9.28), pero con la diferencia fundamental que en la (9.55) a , k y ω no son constantes como en la (9.28), sino que son *funciones de la posición y del tiempo* que juegan el mismo rol que la amplitud, el número de onda y

⁴ Estas soluciones elementales poseen varias características no físicas: existen para todo t y todo x entre $-\infty$ y $+\infty$, y su energía es infinita. Es evidente por lo tanto que no representan perturbaciones reales.

la frecuencia angular de la solución elemental (9.28). Por lo tanto, la (9.55) representa un tren de ondas de *extensión finita y no uniforme*. Es también importante subrayar que (de acuerdo con la (9.56)) entre $\omega(x,t)$ y $k(x,t)$ vale la misma relación funcional (9.54) que se tiene para las soluciones elementales. Es decir, la relación de dispersión (9.54) vale *localmente* en el tren de ondas. Las (9.55) y (9.56) son los resultados fundamentales que nos interesa establecer y contienen la esencia del fenómeno de la dispersión. Aquí no vamos a entrar en detalles (que corresponden a un Curso sobre Ondas), pero vamos a presentar las ideas principales, sin mayor pretensión de rigor. Nuestro tratamiento es general (aunque limitado a propagación en una sola dimensión), de modo que los resultados se puedan aplicar no sólo a las ondas de superficie en líquidos, sino también a otras clases de ondas.

Para ello conviene utilizar notación compleja y escribir las soluciones elementales del tipo (9.28) en la forma

$$\xi(x,t) = Ae^{i\kappa_x x - i\omega t} \quad (9.59)$$

donde se sobreentiende que para obtener las magnitudes físicas se debe tomar siempre la *parte real* de la correspondiente expresión matemática. En la (9.57) A es una *amplitud compleja* cuyo módulo es la amplitud a de la onda elemental (9.28) y cuya fase $\alpha = \text{Arg}(a)$ es una constante que se suma al argumento del coseno que figura en la (9.28).

La *fase* de la onda elemental se define como $\theta = \kappa_x x - \omega t + \alpha$, y determina la posición en un ciclo desde una cresta, donde $\text{Re}(\xi)$ es máximo, hasta un valle, donde $\text{Re}(\xi)$ es mínimo, etc..

Solución del problema de valores iniciales

Si la (9.59) es una solución elemental, entonces debido a la linealidad del problema, una superposición del tipo

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_x) e^{i\kappa_x x - i\omega t} d\kappa_x \quad (9.60)$$

donde $F(\kappa_x)$ es una función arbitraria (con la limitación que la integral exista), es también una solución. La función $F(\kappa_x)$ se puede elegir de modo de satisfacer las condiciones iniciales y de contorno del problema que nos interesa, siempre y cuando los datos sean suficientemente razonables como para permitir transformadas de Fourier.

Vamos a considerar problemas en que hay dos modos de la forma $\omega = +\Omega(\kappa)$ y $\omega = -\Omega(\kappa)$ con $\kappa \equiv |\kappa_x|$ como ocurre con las relaciones de dispersión que se han visto hasta ahora. Entonces, para determinar la solución es necesario dar en $t = 0$ dos⁵ condiciones iniciales, por ejemplo

$$\xi(x,0) = \xi_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_{t=0} = \xi'_0 \quad (9.61)$$

y la solución tiene la forma

⁵ Si hubiera un solo modo, bastaría con una única condición inicial para determinar la solución. Si hubiera n modos, harían falta n condiciones.

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_+(\kappa_x) e^{i\kappa_x x - i\Omega(\kappa)t} d\kappa_x + \int_{-\infty}^{\infty} F_-(\kappa_x) e^{i\kappa_x x + i\Omega(\kappa)t} d\kappa_x \quad (9.62)$$

donde el primer término del miembro derecho representa una superposición de ondas del modo +, y el segundo término es una superposición de ondas del modo -. Para determinar las funciones F_+ , F_- aplicamos las condiciones (9.61):

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_+(\kappa_x) + F_-(\kappa_x)] e^{i\kappa_x x} d\kappa_x \\ \xi'_0 &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\kappa) [F_+(\kappa_x) - F_-(\kappa_x)] e^{i\kappa_x x} d\kappa_x \end{aligned} \quad (9.63)$$

Ahora invertimos las (9.63) para obtener

$$\begin{aligned} F_+(\kappa_x) + F_-(\kappa_x) &= \Xi_0(\kappa_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_0 e^{-i\kappa_x x} dx \\ -i\Omega(\kappa) [F_+(\kappa_x) - F_-(\kappa_x)] &= \Xi'_0(\kappa_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi'_0 e^{-i\kappa_x x} dx \end{aligned} \quad (9.64)$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones resulta

$$F_+(\kappa_x) = \frac{1}{2} \left[\Xi_0(\kappa_x) + \frac{i \Xi'_0(\kappa_x)}{\Omega(\kappa)} \right], \quad F_-(\kappa_x) = \frac{1}{2} \left[\Xi_0(\kappa_x) - \frac{i \Xi'_0(\kappa_x)}{\Omega(\kappa)} \right] \quad (9.65)$$

Puesto que ξ_0 y ξ'_0 son reales tendremos que $\Xi_0(-\kappa_x) = \Xi_0^*(\kappa_x)$ y $\Xi'_0(-\kappa_x) = \Xi'^{*}_0(\kappa_x)$ (con * indicamos el conjugado complejo). Por lo tanto si $\Omega(\kappa)$ es una función impar de κ_x resulta

$$F_+(-\kappa_x) = F_+^*(\kappa_x) \quad , \quad F_-(-\kappa_x) = F_-^*(\kappa_x) \quad (9.66)$$

y si $\Omega(\kappa)$ es una función par de κ_x tenemos

$$F_+(-\kappa_x) = F_-^*(\kappa_x) \quad , \quad F_-(-\kappa_x) = F_+^*(\kappa_x) \quad (9.67)$$

de modo que en ambos casos la solución (9.62) es real, como debe ser pues condiciones iniciales reales deben conducir a soluciones reales puesto que las ecuaciones son reales.

Comportamiento asintótico

Como acabamos de ver, las integrales de Fourier permiten obtener soluciones exactas del problema de valores iniciales (9.61), pero su significado no es fácil de interpretar. Las principales características de las ondas dispersivas se aprecian mejor si se considera el comportamiento *asintótico* de la superposición (9.62) para x, t grandes.

Consideremos primero el comportamiento asintótico de la integral típica

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_x) e^{i\kappa_x x - i\Omega(\kappa)t} d\kappa_x \quad (9.68)$$

para x y t grandes. El límite interesante es $t \rightarrow \infty$ manteniendo $x/t = v = \text{cte.}$, pues una particular elección de la constante nos permite examinar las ondas que se propagan con la velocidad v . Con este propósito escribiremos la (9.68) en la forma

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_x) e^{-i v t} d\kappa_x \quad (9.69)$$

con

$$v(\kappa_x) = \Omega(\kappa) - \kappa_x \frac{x}{t} \quad (9.70)$$

Es importante tener presente que $v = x/t$ se debe considerar un parámetro *fijo*, de modo que v depende sólo de κ_x . Podemos estudiar entonces la integral (9.69) con el método de la fase estacionaria⁶. La idea básica es que cuando t es grande, la principal contribución a la integral proviene del entorno de los puntos $\kappa_x = k$ para los cuales la fase v del integrando permanece *estacionaria* al variar κ_x . En efecto, lejos de esos puntos, las contribuciones oscilan rápidamente al variar κ_x y su contribución neta es despreciable. La condición de fase estacionaria es:

$$v'(k) = \left. \frac{dv(\kappa_x)}{d\kappa_x} \right|_{\kappa_x=k} = \Omega'(k) - \frac{x}{t} = 0 \quad (9.71)$$

y dado el valor de $v = x/t$ determina el correspondiente k .

Por consiguiente vamos a desarrollar en serie de Taylor $F(\kappa_x)$ y $v(\kappa_x)$ en el entorno del punto $\kappa_x = k$ determinado por la (9.71). La contribución dominante proviene de los primeros términos de los desarrollos, de modo que (siempre y cuando $v''(k) \neq 0$) escribiremos en forma aproximada

$$\begin{aligned} F(\kappa_x) &\cong F(k) \\ v(\kappa_x) &\cong v(k) + \frac{1}{2}(\kappa_x - k)^2 v''(k) \end{aligned} \quad (9.72)$$

y por lo tanto obtenemos

$$\xi(x, t) \cong F(k) e^{-i v(k) t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{1}{2}(\kappa_x - k)^2 v''(k) t} d\kappa_x \quad (9.73)$$

La integral que queda en la (9.73) se puede calcular girando por un ángulo de $(\pi/4)\text{Sign}[v''(k)]$ el camino de integración en el plano complejo κ_x , con lo cual se reduce a la integral real de error:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{1}{2}(\kappa_x - k)^2 v''(k) t} d\kappa_x = e^{-i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[v''(k)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2 |v''(k)| t} dz = e^{-i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[v''(k)]} \sqrt{\frac{2\pi}{|v''(k)| t}} \quad (9.74)$$

⁶ El presente es precisamente el problema que motivó a Kelvin para desarrollar ese método. También se puede emplear el método de los descensos rápidos, que tiene la ventaja que permite apreciar mejor la bondad de las aproximaciones.

Resulta entonces, introduciendo (9.74) en (9.73):

$$\xi(x, t) \equiv F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{|v''(k)|t}} e^{-i v(k)t - i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[v''(k)]} \quad (9.75)$$

Si la relación de dispersión tiene más de una rama, puede haber más de un punto estacionario⁷ $\kappa_x = k$ que satisface la (9.71). En tal caso cada uno de ellos dará lugar a una contribución del tipo (9.75) y por lo tanto tendremos que

$$\xi(x, t) \equiv \sum_n F(k_n) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k_n)|t}} e^{i k_n x - i \Omega(k_n)t - i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[\Omega''(k_n)]} \quad (9.76)$$

donde el subíndice n identifica la rama.

Cuando cada rama tiene dos modos $\omega = +\Omega(\kappa)$ y $\omega = -\Omega(\kappa)$ la solución del problema de valores iniciales tiene la forma (9.62). Consideraremos ahora el comportamiento asintótico de la (9.62) para $x > 0$. Vamos a suponer, además, que para cada rama $C = \Omega'(\kappa)$ es monótona y positiva⁸ para $\kappa_x > 0$.

Si $\Omega(\kappa)$ es una función impar de κ_x , su derivada $\Omega'(\kappa)$ es par y la condición (9.71) tiene dos raíces $\pm k_n$ para cada rama. Las dos contribuciones, que provienen de la primera de las integrales en la (9.62), se pueden combinar pues por la (9.66) se cumple $F_+(-k) = F_+^*(k)$. Resulta:

$$\xi(x, t) \equiv 2 \text{Re} \left\{ \sum_n F(k_n) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k_n)|t}} e^{i k_n x - i \Omega(k_n)t - i \frac{\pi}{4} \text{Sign}[\Omega''(k_n)]} \right\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{t} > 0 \quad (9.77)$$

donde Re indica la parte real y las $k_n(x, t)$ son la raíces positivas de la (9.71), definidas por

$$k_n(x, t) : \Omega'(k_n) = \frac{x}{t}, \quad k_n > 0, \quad \frac{x}{t} > 0 \quad (9.78)$$

Si en cambio $\Omega(\kappa)$ es una función par de κ_x , su derivada $\Omega'(\kappa)$ es impar y la condición (9.71) tiene para $x > 0$ una sola raíz k_n para cada rama, que es positiva. Por lo tanto hay una sola contribución de la primera de las integrales en la (9.62). Pero en la segunda integral de la (9.62), los puntos de fase estacionaria satisfacen

$$\Omega'(\kappa) = -\frac{x}{t} \quad (9.79)$$

y entonces $-k_n$ es solución de la (9.79) para $x > 0$. Por lo tanto, si k_n está definido por la (9.78), hay un punto estacionario $\kappa_x = k_n$ en la primera integral de la (9.62) y un punto estacionario $\kappa_x = -k_n$ en la segunda. Estas contribuciones se pueden nuevamente combinar puesto que por la (9.67) se cumple $F_-(-k) = F_+^*(k)$, y entonces también en este caso se obtiene la fórmula (9.77).

⁷ Este es el caso de las ondas capilares de gravedad, donde en general hay dos puntos estacionarios: uno correspondiente a la rama de gravedad y el otro a la rama capilar.

⁸ Este es el caso más frecuente, aunque existen casos de propagación en dos o tres dimensiones en que se presenta *dispersión negativa*, en los cuales el signo de alguna componente de la velocidad de grupo es opuesto al de la correspondiente componente de κ .

Antes de interpretar nuestros resultados conviene examinar brevemente la exactitud de la aproximación (9.77). Para estimarla es preciso calcular los términos siguientes de las series de Taylor para $F(\kappa_x)$ y $v(\kappa_x)$. Para eso hay que continuar hasta el orden 2 en $(\kappa_x - k)$ para $F(\kappa_x)$ y hasta el orden 4 para $v(\kappa_x)$, debido a que la contribución a ξ de los términos de orden impar resulta idénticamente nula. No vamos a dar los detalles del cálculo pues es un tanto engorroso, pero vamos a dar el resultado. Cuando se tienen en cuenta esas correcciones, cada sumando de la (9.77) queda multiplicado por un factor de la forma

$$1 + \frac{i}{t |\Omega''|} \left(\frac{F''}{2F} - \frac{F'}{2F} \frac{\Omega'''}{\Omega''} + \frac{5}{24} \frac{\Omega'''^2}{\Omega''^2} - \frac{1}{8} \frac{\Omega^{iv}}{\Omega''} \right) = 1 + \frac{it^*}{t} \quad (9.80)$$

calculado en el correspondiente k_n . En general, la serie continúa con sucesivas potencias inversas de t con coeficientes que son funciones de k_n .

Ahora podemos precisar el significado de “ t grande”. El factor de t^{-1} en la (9.80) es un tiempo característico t^* determinado por las escalas de tiempo que provienen de la relación de dispersión (los cocientes de las derivadas de Ω) y las escalas de tiempo que provienen de la condición inicial (los cocientes de las derivadas de F). La condición es que $t \gg t^*$, de modo que el término correctivo de la (9.80) sea pequeño respecto de la unidad. En la práctica esto implica que el tren de ondas tiene que haber recorrido una distancia grande en comparación con las longitudes de onda de las ondas que lo componen y con la extensión espacial de la perturbación inicial⁹.

La velocidad de grupo y la propagación del número de onda

Vamos ahora a interpretar el significado de la expresión asintótica (9.77)-(9.78). Para mayor claridad, consideraremos la contribución al tren de ondas de una sola rama de la relación de dispersión. Por lo tanto omitiremos la suma de la (9.77) y el subíndice n .

En cada punto (x, t) , la (9.78) determina un “número de onda” $k(x, t)$ y la relación de dispersión $\omega = \Omega(k)$ determina una “frecuencia” $\omega(x, t)$. Podemos entonces definir una “fase”

$$\theta(x, t) \equiv kx - \Omega(k)t = xk(x, t) - t\omega(x, t) \quad (9.81)$$

y escribir la (9.77) en la forma

$$\xi = \text{Re}\{A(x, t)e^{i\theta(x, t)}\} \quad (9.82)$$

donde la amplitud compleja $A(x, t)$ está dada por

$$A(x, t) = 2F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k)|}} e^{-i\frac{\pi}{4}\text{Sign}[\Omega''(k)]} \quad (9.83)$$

Como habíamos anticipado, la expresión (9.82) tiene la forma (9.55), y se asemeja a una solución elemental como la (9.28), pero A , k y ω no son constantes. Sin embargo, del mismo modo que la (9.28), la (9.82) también representa un tren de ondas oscilantes, con una fase θ que describe las variaciones entre los máximos y los mínimos locales.

⁹ En el caso del tren de ondas producido por una piedra que cae en el agua, el tren debe haber recorrido una distancia grande en comparación con la dimensión lineal de la piedra.

Resulta natural *generalizar* los conceptos de número de onda y de frecuencia para este caso no uniforme, definiéndolos como $\partial\theta/\partial x$ y $-\partial\theta/\partial t$, respectivamente¹⁰. Esto es posible porque en el presente caso, a partir de la definición (9.81) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= k + [x - \Omega'(k)t] \frac{\partial k}{\partial x} = k(x, t) \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} &= -\Omega(k) + [x - \Omega'(k)t] \frac{\partial k}{\partial t} = -\Omega(k) = \omega(x, t)\end{aligned}\tag{9.84}$$

pues la condición de fase estacionaria $x/t = \Omega'(k)$ elimina los términos con $\partial k/\partial x$ y $\partial k/\partial t$ en las (9.84). Por lo tanto la magnitud k , que introducimos como el valor particular del número de onda para el cual la fase es estacionaria en la integrales de Fourier que representan la solución, *coincide* con nuestra definición del *número de onda local* en el tren de ondas no uniforme que describe el comportamiento asintótico de la solución. Lo mismo ocurre para la correspondiente frecuencia. Además, *el número de onda local y la frecuencia local del tren de ondas no uniforme satisfacen la misma relación de dispersión que relaciona la frecuencia y el número de onda de las soluciones elementales* (9.28) o (9.59).

Debe quedar claro al lector que estas generalizaciones del número de onda y la frecuencia locales son útiles porque la no uniformidad del tren no es *demasiado* grande. Es cierto que podemos siempre seguir el procedimiento anterior e introducir una función de fase θ y definir θ_x como el número de onda (local), pero si la variación de θ_x en una única oscilación fuese muy grande se perdería nuestra interpretación intuitiva. Pero en el presente caso $k(x, t)$ es, *en efecto*, una función que varía lentamente. Esto se ve de la (9.78), pues de $\Omega'[k(x, t)] = x/t$ y derivando respecto de x obtenemos $\Omega''[k(x, t)]k_x = 1/t$, luego

$$\frac{k_x}{k} = \frac{1}{k} \frac{1}{t \Omega''} = \frac{1}{x} \frac{\Omega'}{k \Omega''}\tag{9.85}$$

Análogamente, derivando respecto del tiempo se obtiene

$$\frac{k_t}{k} = \frac{1}{t} \frac{1}{k \Omega''}\tag{9.86}$$

En consecuencia, puesto que tanto x como t son grandes, las variaciones relativas de k con la posición y el tiempo resultan pequeñas. Por lo tanto k es una función *lentamente variable* de la posición y del tiempo, y lo mismo es cierto para ω . Además, a partir de la (9.83) se puede ver que también $A(x, t)$ es una función que varía lentamente con x y t .

Volvamos ahora a la (9.78), a partir de la cual se obtienen k y ω como funciones de (x, t) , y a la (9.83) que determina A . Para interpretar el significado de la (9.78) nos podemos plantear la pregunta: ¿en qué lugar del espacio vamos a encontrar un cierto valor de k , digamos $k = k_0$? La respuesta es, claramente: en el punto determinado por la ecuación

$$x = \Omega'(k_0)t\tag{9.87}$$

¹⁰ Sería ciertamente engorroso (y no bien definido) contar el número de máximos por unidad de longitud, mientras que la derivada parcial θ_x es inmediata y corresponde a la idea intuitiva de número de onda local. Lo mismo es cierto para la frecuencia local.

Es decir, un observador que se mueve con la velocidad $\Omega'(k_0)$ ve siempre ondas con el número de onda k_0 y frecuencia $\omega_0 = \Omega(k_0)$. La velocidad

$$C(x, t) = \Omega'(k) = \frac{d\omega}{dk} \quad (9.88)$$

es la *velocidad de grupo*, que es la velocidad importante para un “grupo” de ondas con una cierta distribución del número de onda. Nuestra interpretación de la (9.78) muestra que:

Los diferentes números de onda se propagan con la velocidad de grupo. Cualquier particular número de onda k_0 se encuentra en el instante t en la posición $x = \Omega'(k_0)t$.

Por otra parte, cualquier valor particular θ_0 de la fase se propaga de acuerdo con la ecuación

$$\theta(x, t) = x k(x, t) - t \omega(x, t) = \theta_0 \quad (9.89)$$

Entonces la ecuación de movimiento de la fase es

$$\frac{dx}{dt} \theta_x + \theta_t = 0 \quad (9.90)$$

es decir

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{\omega(x, t)}{k(x, t)} = c(x, t) \quad (9.91)$$

Por lo tanto, la *velocidad de fase* sigue siendo igual al cociente ω/k igual que en el caso de las ondas elementales, aunque ahora se trata de la frecuencia y número de onda *locales*. La velocidad de fase es diferente de la velocidad de grupo. De resultas de ello un observador que se mueve siguiendo una particular cresta, se desplaza con la velocidad de fase local correspondiente a dicha cresta, por lo tanto ese observador notará que a medida que se desplaza varían el número de onda local y la frecuencia local: su cresta se irá distanciando de la que la precede (si la dispersión es *normal*), o acercando (si la dispersión es *anómala*). Por otra parte, un observador que se mueve con la velocidad de grupo (local) ve siempre el mismo número de onda local y la misma frecuencia local, pero las crestas se le irán adelantando (si la dispersión es *normal*), o se irán quedando atrás (si la dispersión es *anómala*). Veamos esto con un par de ejemplos.

Dispersión de las ondas de gravedad puras en aguas profundas

Como ya sabemos, la relación de dispersión es $\Omega = (gk)^{1/2}$, luego la (9.78) nos da

$$\Omega'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{x}{t} \quad \text{o sea} \quad k = \frac{gt^2}{4x^2} \quad (9.92)$$

y entonces

$$\omega = \sqrt{gk} = \frac{gt}{2x} \quad (9.93)$$

de donde resulta

$$\theta = kx - \omega t = -\frac{gt^2}{4x} \quad (9.94)$$

Por lo tanto, la trayectoria que sigue un determinado número de onda k , que como sabemos se desplaza con la velocidad de grupo es, de acuerdo con la segunda de las (9.92):

$$x = \sqrt{\frac{g}{4k}} t \quad (9.95)$$

y la trayectoria que sigue un determinado valor θ de la fase, que se desplaza con la velocidad de fase es, de acuerdo con la (9.94):

$$x = \frac{gt^2}{4(-\theta)} \quad (9.96)$$

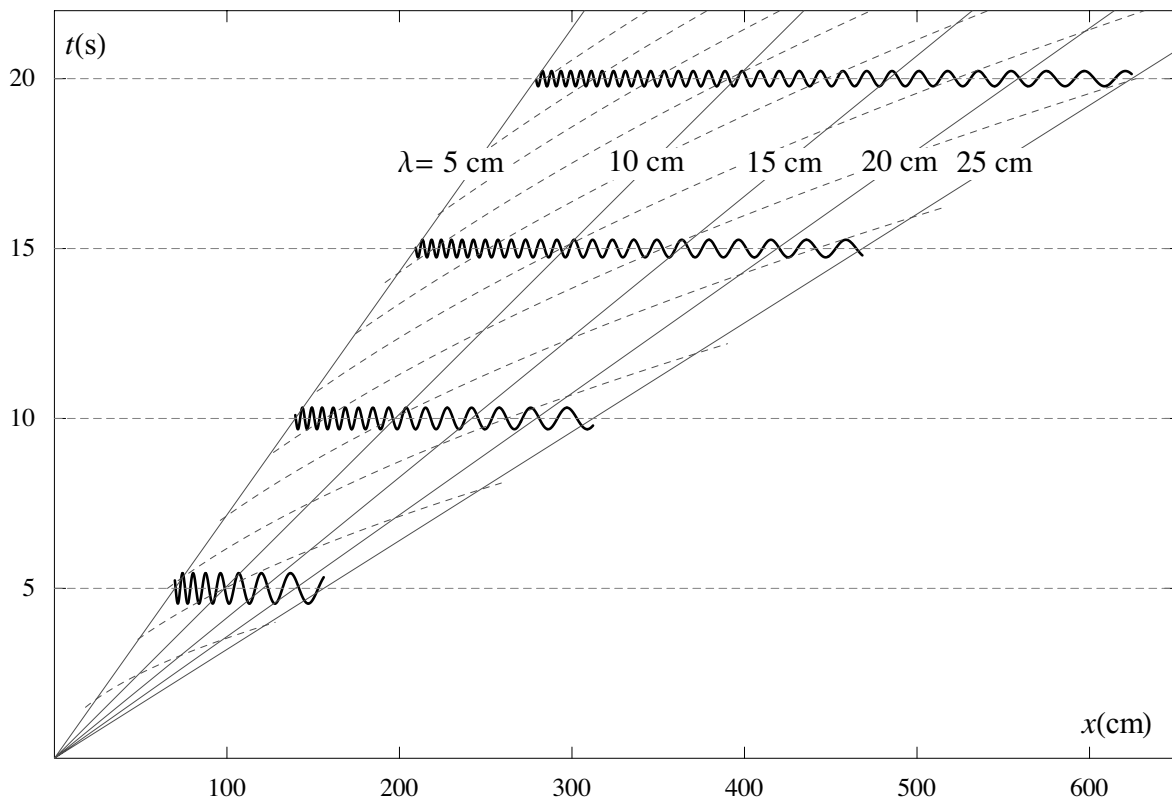


Fig. 9.5. Dispersión de un tren de ondas de gravedad puras en el agua. La perturbación se originó en $t = 0$ en una pequeña región cerca de $x = 0$. La figura representa el aspecto del tren de ondas (calculado mediante las (9.92)-(9.96)) en cuatro instantes sucesivos. El tren es una superposición de ondas elementales con longitudes de onda entre 5 y 25 cm, y hemos supuesto que todas tienen la misma amplitud. Las líneas rectas grises representan las líneas de grupo, y en cada instante indican la posición donde se encuentra una dada longitud de onda; su pendiente es la correspondiente velocidad de grupo. Las líneas de trazo representan las líneas de fase constante, y muestran las trayectorias de las crestas y los valles del tren. Hemos dibujado una línea de fase cada 5 crestas. Las crestas y valles se adelantan al grupo porque la velocidad de fase es el doble de la velocidad de grupo.

En la Fig. 9.5 hemos representado las líneas horarias dadas por la (9.95) y (9.96) para mostrar como se produce la dispersión de un grupo de ondas.

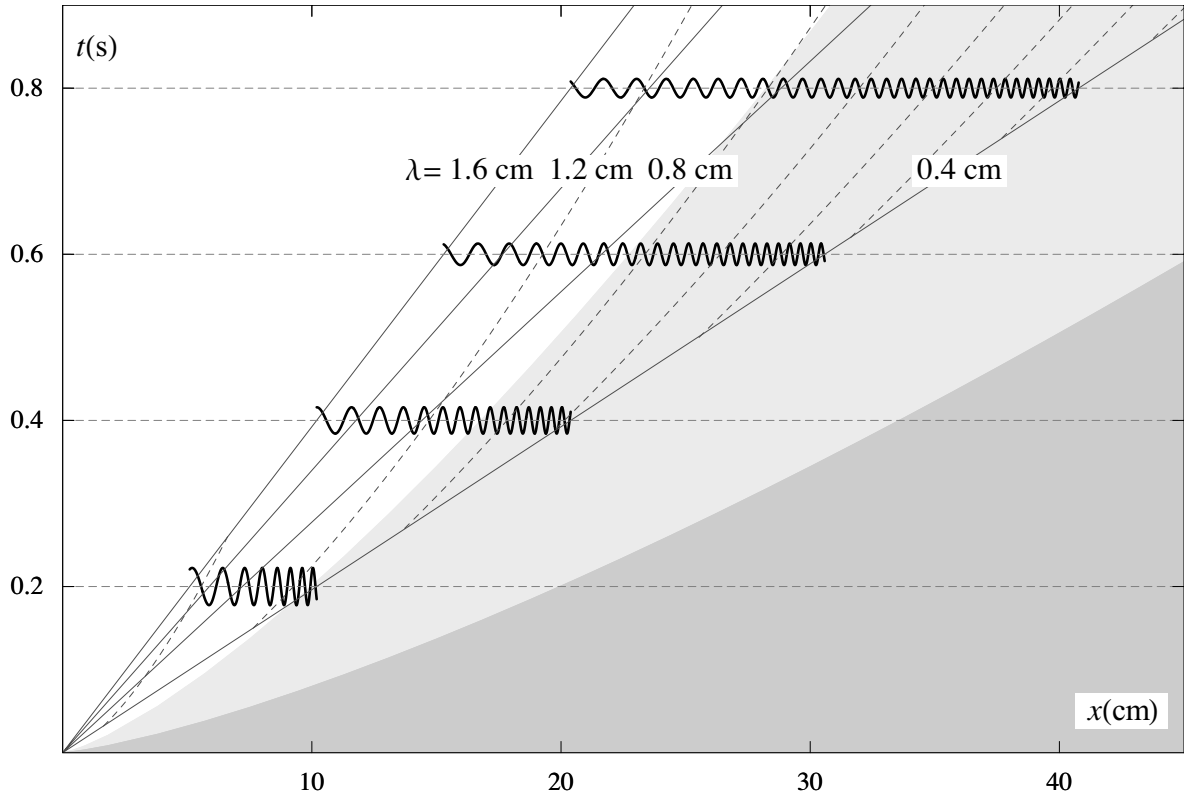


Fig. 9.6. Dispersión de un tren de ondas capilares puras en el agua. La perturbación se originó en $t = 0$ en el entorno de $x = 0$. La figura representa el aspecto del tren de ondas (calculado mediante las (9.97)-(9.101)) en cuatro instantes sucesivos. Notar que las escalas son diferentes de las de la Fig. 9.5. El tren es una superposición de todas las longitudes de onda entre 0.4 y 1.6 cm, con igual amplitud. Las rectas grises representan las líneas de grupo y las líneas de trazo representan las líneas de fase constante. Hemos dibujado una línea de fase cada 5 crestas. Se puede apreciar que las crestas y valles se retrasan respecto del grupo, porque la velocidad de fase es menor que la velocidad de grupo. En las zonas con fondo gris las ondas están amortiguadas por efecto de la viscosidad. Se observa que a partir de 0.3 s las ondas cortas, que van a la cabeza del grupo, están fuertemente amortiguadas, motivo por el cual en la práctica no se observan.

Dispersión de las ondas capilares puras en aguas profundas

Ahora la relación de dispersión es $\Omega = (\gamma k^3 / \rho)^{1/2}$, luego la (9.78) nos da

$$\Omega'(k) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \frac{x}{t} \quad \text{o sea} \quad k = \frac{4\rho x^2}{9\gamma t^2} \quad (9.97)$$

y entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho}} = \frac{8}{27} \frac{\rho x^3}{\gamma t^3} \quad (9.98)$$

de donde resulta

$$\theta = kx - \omega t = \frac{4\rho x^3}{27\gamma t^2} \quad (9.99)$$

Por lo tanto, la trayectoria que sigue un determinado número de onda k , que como sabemos se desplaza con la velocidad de grupo es, de acuerdo con la segunda de las (9.97):

$$x = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} t \quad (9.100)$$

y la trayectoria que sigue un determinado valor θ de la fase, que se desplaza con la velocidad de fase es, de acuerdo con la (9.99):

$$x = 3 \left(\frac{\gamma \theta}{4\rho} \right)^{1/3} t^{2/3} \quad (9.101)$$

En la Fig. 9.6 se han representado las líneas horarias dadas por la (9.100) y (9.101) para mostrar como se produce la dispersión de un grupo de ondas.

La velocidad de grupo y la propagación de la amplitud

Un segundo papel importante de la velocidad de grupo se pone en evidencia si estudiamos la amplitud $A(x,t)$ del tren de ondas. La forma de la (9.83) sugiere que la magnitud interesante es el cuadrado del módulo de A , que se relaciona con la energía de las ondas.

Consideremos entonces la integral de $|A|^2$ entre dos puntos $x_2 > x_1 \gg 0$. Será

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} AA^* = 8\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{F_1(k)F_1^*(k)}{|\Omega''(k)|t} dx \quad (9.102)$$

El lector debe notar que en esta integral k está dado por la (9.78) y por lo tanto es una función de x . Puesto que k , y no x , es quien aparece como argumento de las funciones del integrando, es lógico cambiar la variable de integración, poniendo

$$x = \Omega'(k)t \quad , \quad dx = \Omega''(k)t dk \quad (9.103)$$

Por lo tanto, si $\Omega''(k) > 0$ resulta¹¹

$$Q = 8\pi \int_{k_1}^{k_2} F_1(k)F_1^*(k)dk \quad (9.104)$$

donde k_1 y k_2 se obtienen invirtiendo las ecuaciones

$$x_1 = \Omega'(k_1)t \quad , \quad x_2 = \Omega'(k_2)t \quad (9.105)$$

¹¹ En el caso opuesto se obtiene el mismo resultado, pero con los límites de integración invertidos.

Ahora bien, si mantenemos k_1 y k_2 fijos y variamos t , $Q(t)$ permanece constante. De acuerdo con las (9.105) en este caso los puntos x_1 y x_2 se mueven con la velocidad de grupo describiendo lo que podemos llamar *líneas de grupo*. Por lo tanto hemos demostrado que la cantidad de $|A|^2$ contenida entre cualquier par de líneas de grupo permanece constante. En este sentido, podemos decir que $|A|^2$ *se propaga con la velocidad de grupo*. Puesto que las líneas de grupo divergen con una separación proporcional a t , es natural que $|A|$ disminuya con $t^{-1/2}$.

En el caso especial de un paquete de ondas para el cual la perturbación inicial está localizada en el espacio, y que contiene amplitud apreciable solamente para números de onda en el entorno de un cierto valor particular k^* (paquete cuasi monocromático), el tren de ondas está limitado en el espacio a la vecindad de la particular línea de grupo k^* , y el paquete se mueve como un todo con la particular velocidad de grupo $\Omega'(k^*)$. Las discusiones de la velocidad de grupo que se encuentran en los textos elementales se suelen limitar a este caso. Sin embargo, el lector notará que nuestros argumentos son más generales, y permiten tratar distribuciones espectrales generales sin limitaciones sobre el rango de números de onda, lo que permite poner en evidencia plenamente los efectos de la dispersión.

Los argumentos que hemos desarrollado en este Capítulo se pueden extender fácilmente al caso de propagación en más de una dimensión. Pero, lo que es más importante, se pueden también extender al caso de propagación en medios no uniformes (por ejemplo ondas de gravedad en aguas de profundidad variable) y no isótropos. Con oportunos replanteos, se pueden generalizar al caso de propagación no lineal de ondas, situación en la que no se puede emplear el análisis de Fourier. El lector interesado puede encontrar una excelente presentación de estos tópicos en el libro *Linear and Nonlinear Waves* de G. B. Whitham, que hemos citado en el Prólogo de estas notas.

Los resultados que hemos obtenido nos permiten interpretar los curiosos patrones de ondas que un observador perspicaz habrá seguramente notado alguna vez al contemplar la superficie de un espejo de agua, y que son consecuencia de la dispersión. Es interesante comentar algunos de ellos, cosa que haremos en las próximas Secciones.

Patrones de ondas de superficie producidos por una fuente puntiforme instantánea

Este es el caso de las ondas producidas cuando se arroja una piedra en un estanque, o cuando las gotas de lluvia caen sobre un espejo de aguas tranquilas¹². Se trata en ambos casos de problemas de propagación en una dimensión (la dimensión radial), pero a diferencia de los casos que hemos tratado hasta ahora tienen simetría axial en lugar de cartesiana.

Cerca del comienzo del fenómeno la perturbación es muy complicada, pero al cabo de cierto tiempo, cuando la perturbación se ha propagado hasta distancias grandes en comparación con el tamaño de la porción de superficie afectada inicialmente y las ondas se han dispersado significa-

¹² Estos son los ejemplos clásicos que se citan en los textos elementales cuando se introduce el concepto de onda. Sin embargo los autores se guardan muy bien de explicar a sus lectores esos fenómenos tan familiares. Como estamos viendo ahora, la explicación dista de ser sencilla y está llena de sutilezas. Por eso los mencionan, pero después se olvidan de ellos, lo cual deja en el estudiante una justificada sensación de frustración. A juicio de quien escribe estas notas, sería deseable evitar aquellos ejemplos, si es que no se tiene la intención de presentar la correspondiente explicación, ni siquiera en la forma más elemental.

tivamente, se alcanza el régimen asintótico que hemos estudiado antes y se observa un tren de ondas no uniforme. Consideraremos solo el caso de propagación en aguas profundas¹³.

Puesto que tenemos que considerar las ondas de gravedad capilares, la relación de dispersión apropiada es la (9.33):

$$\omega = \pm \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} = \pm \sqrt{gk} \sqrt{1 + (k/k_0)^2} \quad (9.106)$$

donde (ec. (9.35)) $k_0 = \sqrt{\rho g / \gamma} = 2\pi / \lambda_0 \cong 3.65 \text{ cm}^{-1}$ para agua a 15 °C.

A partir de (9.106) obtenemos las velocidades de fase y de grupo que hemos representado en la Fig. 9.3:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 + (k/k_0)^2} \quad , \quad C = \frac{1}{2} c \frac{1 + 3(k/k_0)^2}{1 + (k/k_0)^2} \quad (9.107)$$

En cualquier instante t , un particular valor de k se encuentra en una circunferencia de radio $r = C(k)t$ y con centro en el punto donde se originó la perturbación en $t = 0$. Por lo tanto $k(r, t)$ es la solución de

$$C(k) = \frac{r}{t} \quad (9.108)$$

Si observamos la Fig. 9.3 vemos que la velocidad de grupo tiene un valor mínimo C_0 que ocurre para $\lambda = \lambda_{0g} \cong 2\pi / k_{0g}$; para agua a 15 °C, $\lambda_{0g} \cong 4.375 \text{ cm}$ y $C_0 \cong 17.8 \text{ cm/s}$.

Por consiguiente, si $r/t > C_0$, hay *dos* raíces reales k_g y k_s de la (9.108), una de las cuales está sobre la rama de gravedad y la otra sobre la rama capilar. Si en cambio $r/t < C_0$ la (9.108) no tiene ninguna raíz real. Por lo tanto, dentro del círculo de radio $r = C_0 t$ la superficie del agua está *en reposo*, mientras que fuera de ese círculo hay una superposición de dos perturbaciones, cada una de las cuales es un tren de ondas de la forma (9.55) (o, lo que es lo mismo, (9.82)). La forma exacta de la fase de cada uno de esos trenes no se puede dar mediante fórmulas sencillas por las razones que vamos a comentar ahora.

En primer lugar, la condición (9.108) lleva a un polinomio de grado 4 en k , y no hay expresiones simples de las raíces k_g y k_s . Por lo tanto no podemos obtener expresiones analíticas como las que obtuvimos antes para las ondas de gravedad puras y las ondas capilares puras. Sin embargo, se pueden aplicar las fórmulas aproximadas (9.92)-(9.96) y (9.97)-(9.101) para la rama de gravedad y la rama capilar, respectivamente, siempre y cuando no estemos demasiado cerca del círculo $r = C_0 t$. Por consiguiente las Figs. 9.5 y 9.6 dan una buena idea de la ubicación de las crestas y valles de esos trenes de onda, excepto cerca de $r = C_0 t$ donde las fórmulas aproximadas no son válidas. Se debe tener presente, además, que al expandirse las ondas en círculos de radios crecientes, sufren una atenuación *geométrica* proporcional a $r^{-1/2}$ (debido a que el flujo de energía de las mismas se distribuye sobre el perímetro $2\pi r$ del frente de onda), además de la atenuación proveniente de la dispersión (que ya discutimos antes y trae el factor $t^{-1/2}$ a la amplitud en la (9.83)).

¹³ Esta aproximación es válida si el tamaño de la piedra, o de la gota de lluvia, es pequeño en comparación con la profundidad del espejo de agua.

En segundo lugar, el lector debe notar que la distribución de energía en el espectro de números de onda (esto es, la función $F_1(k)$ en la (9.83)) está determinada por la perturbación inicial. Las ondas cuya longitud de onda es del mismo orden de magnitud que las dimensiones lineales del objeto que provocó la perturbación son las que tienen la mayor amplitud, y por consiguiente son las más vistosas en el patrón de ondas. Más específicamente, si el objeto tiene una dimensión lineal l , la longitud de onda dominante es $\lambda \approx l/2$ y las circunferencias correspondientes a las crestas y valles principales están ubicadas alrededor de $r = C(\pi/l)t$. Por este motivo el patrón de ondas producido por las gotas de lluvia (cuyo tamaño es del orden del mm) está dominado por las ondas capilares, y por lo tanto tiene un comportamiento semejante al que se muestra en la Fig. 9.6, mientras que el que se obtiene por la caída de una piedra de regular tamaño está dominado por las ondas de gravedad y tiene un aspecto parecido al que se ve en la Fig. 9.5.

Por último debemos recordar que las ondas capilares de longitud de onda muy corta se atenúan muy rápidamente por efecto de la viscosidad. Por lo tanto estas ondas sólo se pueden observar en el patrón producido por la caída de un objeto muy pequeño, pues de otra forma ya habrán desaparecido para cuando se alcance el régimen asintótico.

Patrones de ondas en corrientes estacionarias

La dispersión de las ondas de superficie da lugar a complicados e interesantes patrones de ondas que todos hemos tenido ocasión de observar en ríos y arroyos cuando algún obstáculo se interpone al paso de la corriente (ramas de árboles caídos, la tanza de una línea de pescar, piedras en el fondo de un arroyo de escasa profundidad, etc.). Patrones análogos ocurren cuando un objeto se desplaza en la superficie de un espejo de agua tranquila como un lago o un estanque, y se pueden estudiar del mismo modo pues desde el referencial del objeto todo ocurre como si éste estuviera inmóvil en una corriente de agua. Particularmente vistosas son las estelas que dejan tras de sí las embarcaciones ya que, debido a que las ondas de gravedad tienen un amortiguamiento muy pequeño, se extienden a distancias muy grandes, y cuando el espejo de agua está en calma se pueden ver perfectamente aún muy lejos de la embarcación.

En todos estos casos (a diferencia del problema de la caída de una piedra o de una gota de lluvia) el obstáculo (o el objeto en movimiento) emite *continuamente* ondas de todas las longitudes de ondas. Si nos situamos *en el referencial del objeto*, a una distancia determinada del mismo el patrón de ondas que se puede observar consiste únicamente de aquellas ondas cuya fase es *independiente* del tiempo, ya que las demás ondas no cumplen la condición de fase estacionaria y por lo tanto sus contribuciones oscilan rápidamente y dan un resultado neto despreciable. Por este motivo los patrones están formados por *ondas estacionarias*, cuya frecuencia en el referencial del objeto es *nula*.

Patrones unidimensionales

Para empezar vamos a considerar el patrón de ondas producidas por un obstáculo en una corriente estacionaria con velocidad u en la dirección x . Vamos a suponer que la extensión del obstáculo es muy grande en la dirección y , transversal a la corriente. Por lo tanto el patrón es unidimensional, al menos mientras consideremos lo que pasa a distancias pequeñas en relación con la dimensión transversal del obstáculo. Desde el referencial de la corriente, estas ondas se ven como las ondas producidas por un obstáculo móvil con velocidad $-u$ en la misma dirección. Claramente, las únicas ondas que pueden ir a la misma velocidad que el obstáculo y entonces aparecer como estacionarias en el referencial del obstáculo, deben satisfacer

$$u_f(k) = -u \quad (9.109)$$

La velocidad de fase de las ondas de gravedad capilares tiene un mínimo c_0 (ec. (9.41)), luego si

$$|u| < c_0 = \left(\frac{4\gamma g}{\rho} \right)^{1/4} = 23.2 \text{ cm/s para agua a } 15^\circ \text{ C} \quad (9.110)$$

la ecuación (9.109) no tiene soluciones, y por lo tanto no hay ondas estacionarias. En este caso hay solamente perturbaciones localizadas cerca del obstáculo, que no contribuyen al patrón de onda asintótico. En cambio, si

$$|u| > c_0 \quad (9.111)$$

hay *dos* longitudes de onda (o números de onda) que satisfacen la (9.109): una de ellas, λ_g , perteneciente a la rama de gravedad ($\lambda_g > \lambda_{0g}$) y la otra, λ_c , perteneciente a la rama capilar ($\lambda_c < \lambda_{0g}$, ver la Fig. 9.3).

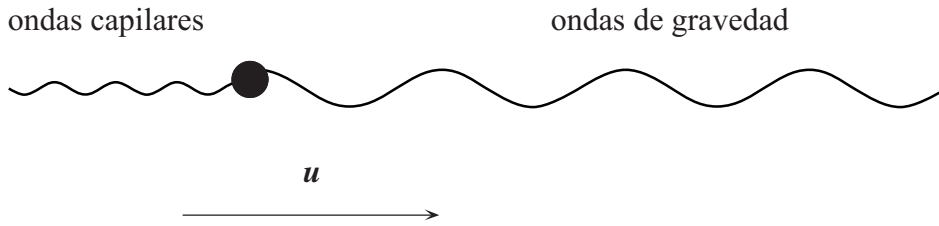


Fig. 9.7. Patrón de ondas unidimensional producido por un obstáculo cuya extensión en sentido transversal a la corriente es grande. El esquema es cualitativo y muestra que las ondas de la rama capilar se observan corriente arriba del obstáculo, mientras que las de la rama de gravedad se localizan corriente abajo.

Ahora bien,

$$C(\lambda_g) < c(\lambda_g) = |u_0| \quad \text{y} \quad C(\lambda_c) > c(\lambda_c) = |u_0| \quad (9.112)$$

y por lo tanto las ondas de gravedad de longitud λ_g , que tienen una velocidad de grupo menor que $|u_0|$ aparecen *detrás* del obstáculo, mientras que las ondas capilares λ_c , que tienen velocidad de grupo mayor que $|u_0|$ están *delante* del obstáculo (ver Fig. 9.7).

La estela de un barco

Si el obstáculo tiene una extensión finita en la dirección y , se produce un patrón de ondas *bidimensional* sobre la superficie del agua y el análisis es más complicado. Se pueden presentar varios casos de interés, pero ahora estudiaremos sólo el problema del patrón de ondas producido por un objeto que se mueve en aguas de profundidad $h \gg L$ (L es la longitud del objeto¹⁴), con

¹⁴ Un barco que navega en el Río de la Plata no cumple la última condición, debido a la escasa profundidad del estuario.

una velocidad del orden de algunos m/s como ocurre típicamente en el caso de embarcaciones. En este caso la perturbación producida por el movimiento de la embarcación está contenida dentro de una porción de la superficie que se denomina *estela*, y consiste de ondas de gravedad¹⁵ en aguas muy profundas; por lo tanto corresponde usar la relación de dispersión (9.18).

Antes de analizar el patrón de ondas dentro de la estela, vamos a deducir un resultado notable (obtenido por Lord Kelvin), de acuerdo al cual, independientemente de la velocidad del barco (siempre que sea constante) y de la forma de su casco, la estela que deja tras de sí abarca *siempre* un sector angular de abertura α dada por

$$\alpha = 2\theta \quad , \quad \theta = \arcsen(1/3) \cong 19.5 \quad (9.113)$$

Este resultado se basa sólo en el hecho que en aguas profundas se cumple que $C = c/2$.

Para demostrar la (9.113) es suficiente considerar la sencilla construcción geométrica que se representa en la Fig. 9.8.

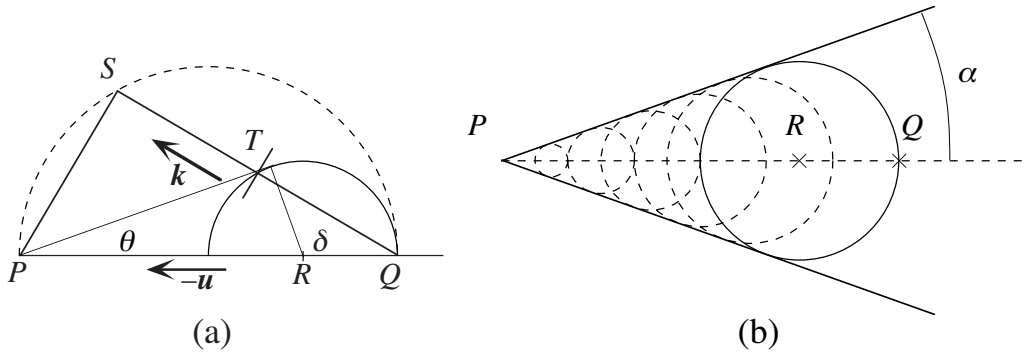


Fig. 9.8. Formación de la estela de un barco. (a) Construcción geométrica para determinar la posición de las ondas estacionarias cuyo vector de onda forma un ángulo δ con respecto de la dirección del movimiento del barco. (b) Envolvente de la perturbación producida por el barco cuando pasó por diferentes posiciones al desplazarse desde Q hasta P .

Supongamos que el barco, cuya velocidad es $-u$, se ha movido de Q a P en el intervalo de tiempo t . Dentro del patrón de ondas hay, en principio, ondas con todos los valores posibles del vector de onda k , con diferente módulo y dirección. Consideremos las ondas cuyo vector de onda forma un ángulo δ con la dirección de $-u$. Para que una determinada cresta de estas ondas (la cual, claramente, es perpendicular a k) se mantenga en una posición estacionaria relativa al barco, se debe cumplir que

$$u \cos \delta = c(k) \quad (9.114)$$

Esta condición se ve más fácilmente desde el referencial del barco, en el cual la corriente con velocidad u fluye a los costados de un barco quieto; la velocidad de la corriente tiene una componente $-u \cos \delta$ en la dirección de k , y la cresta de la onda se mueve (respecto del fluido) en la dirección de k con la velocidad de fase $c(k)$. Por lo tanto la veremos en reposo desde el referencial del barco si $c(k) - u \cos \delta = 0$. Ahora bien, para todos los puntos S de la semicircunferencia dibujada con línea de trazos en la Fig. 9.8a, se cumple que

¹⁵ Las ondas capilares que tienen velocidad de fase de ese orden de magnitud se amortiguan muy rápidamente, de modo que el patrón de ondas capilares estacionarias es de todo punto de vista insignificante.

$$PQ \cos \delta = SQ \quad \text{luego} \quad ut \cos \delta = c(k)t \quad (9.115)$$

Por lo tanto los frentes de onda paralelos a PS se verán en reposo desde el barco si tienen una velocidad de fase que cumple la condición $c(k)t = QS$. Por consiguiente, la condición (9.114) determina para cada δ el correspondiente valor k de las ondas estacionarias que ve un observador a bordo del barco.

Ahora bien, el *lugar* donde se verán esas ondas está determinado por la correspondiente velocidad grupo, que vale $C(k) = c(k)/2$. Por lo tanto el grupo de ondas que se produjeron cuando el barco pasó por Q habrá recorrido la distancia $Ct = ct/2$, de modo que cuando el barco está en P el grupo se encuentra en T , el punto medio de QS . Si consideramos ahora todas las posibles orientaciones de \mathbf{k} (es decir, si variamos δ), está claro que todas las ondas producidas en Q que pueden contribuir a un patrón estacionario se encuentran sobre una circunferencia de radio $ut/4$ con centro en el punto R , situado a una distancia $PR = (3/4)ut$ de P .

Finalmente, si consideramos las ondas producidas por el barco cuando pasó por todas las posiciones intermedias $Q', Q'', Q''' \dots$ entre Q y P , y repetimos el razonamiento anterior para cada una de ellas obtendremos como resultado el patrón de circunferencias de la Fig. 9.8b. Por la construcción de la Fig. 9.8a, cada una de esas circunferencias tiene un radio igual a un tercio de la distancia de su centro a P . Por lo tanto las circunferencias llenan un sector angular cuya abertura α está dada precisamente por la (9.113).

Se puede observar que la construcción de la Fig. 9.8b es la misma que permite determinar la abertura del cono de Mach en un flujo supersónico. De acuerdo con esta analogía, el ángulo α dado por la (9.113) corresponde a un flujo supersónico con número de Mach igual a 3.

Dentro del sector angular que hemos encontrado hay un complicado patrón de crestas y valles (estacionario si se lo mira desde el barco) que todos nosotros habremos tenido ocasión de observar alguna vez. Es interesante mostrar cómo se pueden calcular los detalles de ese patrón. Para esto (a diferencia de la deducción anterior) conviene emplear el referencial del barco, desde el cual se observa un patrón de ondas estacionario en una corriente cuya velocidad es $\mathbf{u} = -u\mathbf{e}_x$. La geometría del problema se indica en la Fig. 9.9. El patrón de ondas que ve el observador tiene la forma general

$$\xi(x, y, t) = A(x, y, t) \cos[\theta(x, y, t)] \quad (9.116)$$

donde la fase $\theta(x, y, t)$ es

$$\theta(x, y, t) = k_x x + k_y y - Wt + \theta_0 \quad (9.117)$$

En la (9.117)

$$W(k_x, k_y) = \omega(k_x, k_y) - k_x u \quad (9.118)$$

es la frecuencia que se mide desde el referencial del observador, que es diferente a la frecuencia $\omega(k_x, k_y)$ vista desde el referencial del agua debido al corrimiento Doppler (debe quedar claro que en estas fórmulas k_x y k_y , y por lo tanto ω , son funciones de x, y, t). La función $\omega(k_x, k_y)$ es, naturalmente, la relación de dispersión de las ondas de que se trate, en este caso, las ondas de gravedad en aguas profundas (ec. (9.18)).

Las componentes de la velocidad de grupo¹⁶ en el referencial del observador son

$$C_x = \frac{\partial W(k_x, k_y)}{\partial k_x} = W_{k_x}(k_x, k_y) \quad , \quad C_y = \frac{\partial W(k_x, k_y)}{\partial k_y} = W_{k_y}(k_x, k_y) \quad (9.119)$$

El lugar donde se encuentra un cierto estado de perturbación (por ejemplo, una dada cresta, o valle) está determinada por la condición

$$\theta = k_x x + k_y y - Wt + \theta_0 = \text{cte.} \quad (9.120)$$

Ahora bien, las ondas que el observador ve como *estacionarias* satisfacen la condición

$$W(k_x, k_y) = \omega(k_x, k_y) - k_x u = 0 \quad (9.121)$$

Usando esta condición podemos entonces escribir la (9.119) en la forma

$$k_x x + k_y y = \Theta \quad (9.122)$$

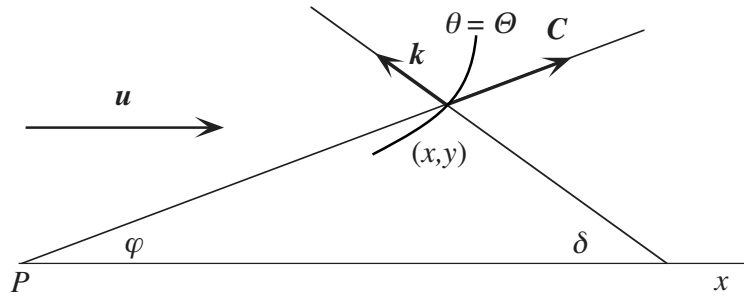


Fig. 9.9. Líneas de igual fase en un patrón de ondas estacionarias bidimensional: dada la condición de fase estacionaria, queda identificada la dirección del vector de onda (δ) que es perpendicular a la línea $\theta = \Theta$, la dirección de la velocidad de grupo (φ) determina en que dirección está la línea buscada, el valor de la fase (Θ) nos dice a que distancia de P se encuentra.

En un instante dado t , estas ondas se encuentran en la posición (x, y) . Puesto que se originaron en la posición del observador (el origen de coordenadas), y han viajado con la velocidad de grupo, se debe cumplir que

$$\frac{y}{x} = \frac{W_{k_y}(k_x, k_y)}{W_{k_x}(k_x, k_y)} \quad (9.123)$$

Entonces, si eliminamos k_x y k_y entre las tres ecuaciones (9.121)-(9.123), se llega a una relación de la forma $f(x, y, \Theta, u, \dots) = 0$ (los \dots indican los parámetros constantes que figuran en la relación de dispersión de nuestras ondas), que nos permite determinar, asignando el valor de Θ , los lugares de los puntos de igual fase (por ejemplo, las crestas y los valles) del patrón de ondas. La

¹⁶ La velocidad de la corriente introduce una anisotropía en la propagación de las ondas vistas desde el referencial del barco. De resultas de ello C no tiene la misma dirección de k .

solución del problema se basa entonces en aplicar las tres condiciones que determinan el patrón: la condición de estacionariedad (9.121), la condición de fase constante (9.122) y la condición (9.123) que expresa que la posición de las ondas está determinada por la velocidad de grupo.

El procedimiento que hemos descrito es conceptualmente claro, pero no es el más conveniente para llegar al resultado. En la práctica es mejor expresar las ecuaciones de las líneas de fase constante en forma paramétrica, en términos del ángulo δ entre el vector de onda y el eje x . No vamos a dar aquí los detalles, puesto que se pueden encontrar en el libro de Whitham ya citado.

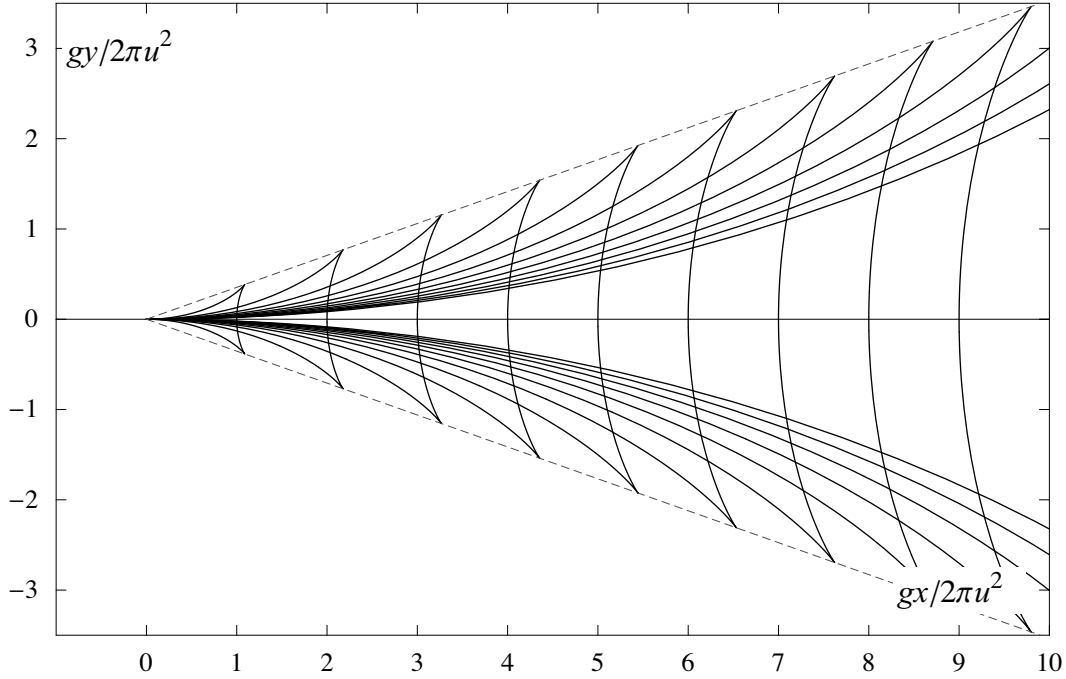


Fig. 9.10. Patrón de ondas en la estela de una embarcación. Se puede apreciar que el patrón de ondas está contenido en el sector angular indicado con la línea de puntos, que se obtuvo mediante la construcción de la Fig. 9.8.

El cálculo correspondiente al caso de las ondas de gravedad puras en aguas profundas es sencillo pero para abreviar nos limitaremos a mencionar los resultados. La ecuación de las líneas de fase constante se expresa en forma paramétrica como

$$x = \frac{u^2 \Theta}{2g} \cos \delta (3 - \cos 2\delta) \quad , \quad y = \frac{u^2 \Theta}{g} \sin \delta \cos^2 \delta \quad , \quad -\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2 \quad (9.124)$$

En la Fig. 9.10 se muestran las líneas de fase constante para $\Theta = 2n\pi$ ($n = 1, 2, \dots, 12$). Por supuesto el patrón se extiende indefinidamente, pero por razones prácticas hemos dibujado solamente las primeras 12 crestas.

La relación entre los ángulos φ y δ está dada por

$$\tan \varphi = \frac{\tan \delta}{1 + 2 \tan^2 \delta} \quad (9.125)$$

A partir de la (9.125) es fácil verificar que la envolvente del patrón de ondas es precisamente el sector angular (9.113) que determinamos antes.

La (9.124) muestra que el patrón es *autosemejante* y escala como u^2/g . Por lo tanto la Fig. 9.10 es universal y se puede usar para todo valor de la velocidad del barco, siempre y cuando se pueda suponer que las ondas son de gravedad pura (de la Fig. 9.3 se ve que esto es cierto si $u > 3c_0 \approx 50$ cm/s para el agua) y las aguas se puedan considerar profundas (lo cual requiere $h > 2\pi u^2/g$). La distancia entre sucesivas crestas (esto es, la longitud de onda local en el patrón) es proporcional a u^2/g . Sobre el eje x ($\delta = 0$) esta distancia vale $2\pi u^2/g$, lo cual no es sorprendente pues esta es precisamente la longitud de onda cuya velocidad de fase es igual a u , como vimos al discutir el caso del patrón unidimensional producido por un obstáculo de extensión grande en sentido transversal a la corriente.

Patrón de ondas capilares alrededor de una línea de pesca

Si se pesca con una caña en un arroyo cuya corriente es más rápida que el valor c_0 dado por la (9.111), alrededor del punto en que la tanza entra en el agua se puede observar (además del patrón de ondas de gravedad) un patrón estacionario de ondas capilares. Podemos calcular los detalles de este patrón aplicando los mismos conceptos que usamos para calcular el patrón de ondas en la estela de un barco, con la salvedad que en este caso la función $\omega(k_x, k_y)$ que aparece en la (9.118) es la relación de dispersión de las ondas de las ondas de gravedad capilares en aguas profundas. Para simplificar el cálculo vamos a usar primero la expresión aproximada (9.36) que vale para las ondas capilares puras, lo cual estará bien si la velocidad de la corriente no es demasiado baja (de la Fig. 9.3 se ve que esto requiere¹⁷ $u > 3c_0 \approx 50$ cm/s).

El cálculo se hace del mismo modo que antes y para abreviar daremos directamente los resultados.

La ecuación de las líneas de fase constante se expresa en forma paramétrica como

$$x = \frac{\Theta\gamma}{\rho u^2} \frac{1}{\cos \delta} \left(3 - \frac{2}{\cos^2 \delta} \right), \quad y = \frac{\Theta\gamma}{\rho u^2} \frac{3 \sin \delta}{\cos^2 \delta} \cos^2 \delta, \quad \pi/2 \leq \delta \leq 3\pi/2 \quad (9.126)$$

En la Fig. 9.11 se muestran las líneas de fase constante para $\Theta = 2n\pi$ ($n = 1, 2, \dots, 10$). En principio, el patrón se extiende indefinidamente delante del punto en que la tanza entra en el agua, pero debido al fuerte amortiguamiento de las ondas capilares se pueden observar solamente las primeras crestas.

La relación entre los ángulos φ y δ está dada por

$$\tan \varphi = \frac{3 \cos \delta \sin \delta}{2 - 3 \cos^2 \delta} \quad (9.127)$$

Se puede observar que en este caso además de ondas estacionarias corriente arriba del obstáculo, el patrón contiene ondas situadas corriente abajo y a los costados del mismo.

La (9.126) muestra que tal como en el caso del patrón de ondas de gravedad pura de la Fig. 9.10, el patrón de ondas capilares puras es *autosemejante* pero su escala $\gamma/\rho u^2$ es *inversamente* proporcional al cuadrado de la velocidad. La distancia entre sucesivas crestas (esto es, la longitud de onda local en el patrón) es proporcional a $\gamma/\rho u^2$. Sobre el eje x ($\delta = 0$) esta distancia vale $2\pi\gamma/\rho u^2$, que es la longitud de la onda capilar pura cuya velocidad de fase es igual a u , como vimos al discutir el caso del patrón unidimensional producido por un obstáculo de extensión

¹⁷ En este caso el patrón de ondas de gravedad que hay corriente abajo es del tipo que se muestra en la Fig. 9.10.

grande en sentido transversal a la corriente. Esto muestra que el patrón se puede observar solamente si u no es muy grande, ya que para velocidades grandes las ondas capilares tienen longitud de onda muy corta y son fuertemente amortiguadas (de la (9.53) se puede ver que $\gamma \sim \lambda^{-2} \sim u^4$).

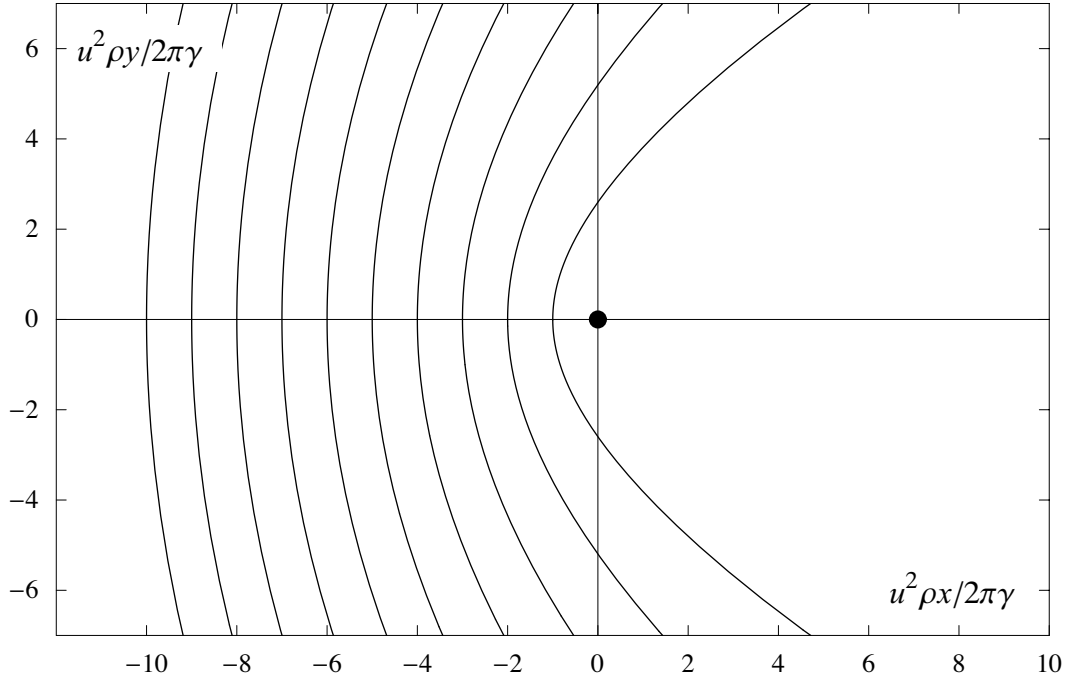


Fig. 9.11. Patrón de ondas capilares alrededor de una línea de pescar. Se puede ver que el patrón se extiende también corriente abajo a los costados del obstáculo.

Si la velocidad de la corriente es baja ($c_0 < u < 3c_0$) las aproximaciones que hicimos para calcular los patrones de las ondas capilares y de gravedad no son válidas, y es preciso usar la relación de dispersión (9.33) de las ondas de gravedad capilares. La rama de gravedad y la rama capilar se deben tratar por separado, y cada una de ellas da lugar a un patrón de ondas estacionarias. El cálculo se hace del mismo modo que en los casos anteriores y no encierra mayores dificultades, pero las fórmulas que se obtienen son sumamente complicadas y no las vamos a presentar. Además, debido a que ahora hay *dos* escalas naturales en el problema (u^2/g para la rama de gravedad y $\gamma/\rho u^2$ para la rama capilar) el patrón *no es autosemejante*. Por lo tanto se debe repetir el cálculo para cada valor de u . En la Fig. 9.12 se muestra el resultado para $u = 28$ cm/s. Es interesante comparar este patrón con los de las figuras 9.10 y 9.11 que corresponden a ondas de gravedad y capilares *puras*. Los patrones de las ondas capilares no son muy diferentes, pero los de la rama de gravedad presentan una llamativa diferencia. En efecto, las ondas de gravedad de la Fig. 9.12 no están contenidas dentro del sector angular típico de la estela de un barco, como en la Fig. 9.10. Esto se debe a que las ondas de la rama de gravedad de la Fig. 9.12 no cumplen la condición $C = c/2$, como se puede apreciar de la Fig. 9.3. Como ya dijimos antes, para que valga la aproximación de ondas de gravedad *puras*, la velocidad de la corriente debe ser de por lo menos 60 cm/s.

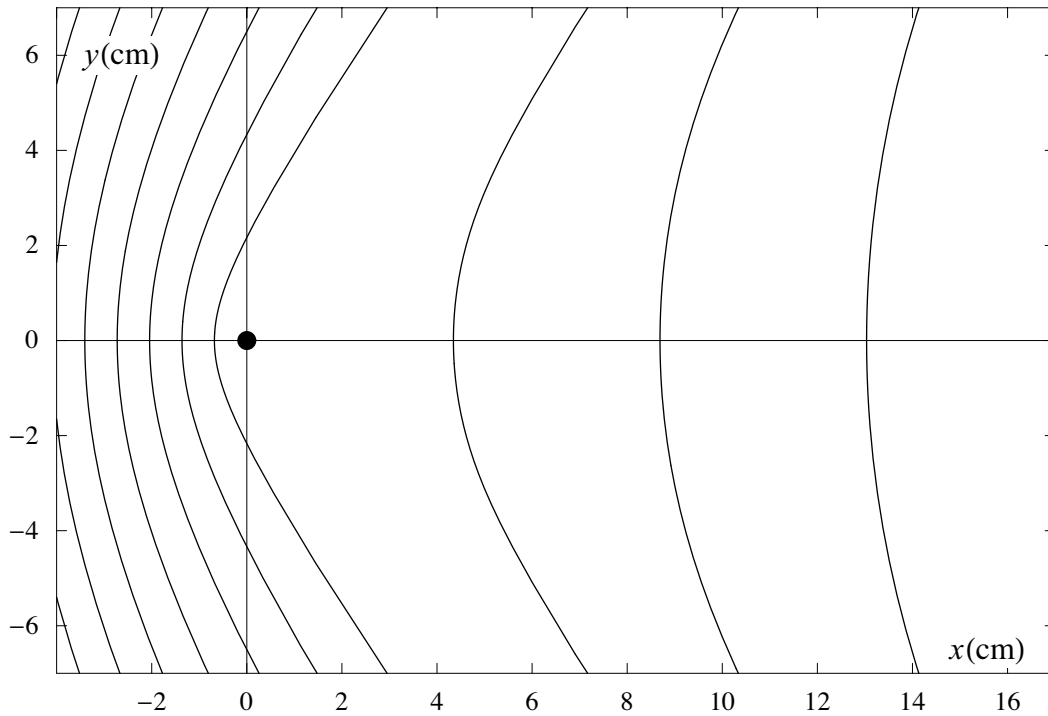


Fig. 9.12. Patrón de ondas estacionarias producido por una línea de pescar en una corriente de 28 cm/s (un 20% mayor que c_0). Las escalas son en cm. Las ondas de la rama capilar son aquellas cuyas crestas pasan a la izquierda de la línea (corriente arriba) y tienen longitud de onda más pequeña (0.68 cm sobre la línea $y = 0$). Las ondas de la rama de gravedad se encuentran a la derecha (corriente abajo) y su longitud de onda es más larga (4.33 cm sobre la línea $y = 0$). Notar la diferencia entre este patrón y el patrón de la Fig. 9.10 correspondiente a ondas de gravedad puras.

Es bastante sencillo producir este tipo de patrones en una bañera o en la pileta de la cocina perturbando la superficie del agua mediante un trozo de alambre, la punta de un cuchillo u otro objeto semejante, que hay que procurar mover en línea recta y con velocidad uniforme. De esta forma se pueden verificar cualitativamente los resultados de la teoría. Para una verificación cuantitativa es mejor usar un obstáculo fijo en una corriente adecuada, lo cual no es tan sencillo de lograr con recursos caseros y lejos de corrientes de agua naturales.

Arrastre por emisión de ondas

El patrón de ondas de superficie estacionarias que se produce debido a la presencia de un obstáculo en una corriente, o cuando un barco u otro objeto se desplaza sobre la superficie de un espejo de agua (o debajo de la superficie, pero a poca profundidad) *transporta energía* al infinito. Esto se traduce en una fuerza de *arrastre*, que el fluido ejerce sobre el objeto. Como el nombre lo indica, esta fuerza tiende a arrastrar con la corriente un obstáculo fijo y a frenar el avance de una embarcación. El cálculo teórico de esta fuerza, que se denomina *arrastre por emisión de ondas* (“wave drag” en inglés) es complicado, debido a las propiedades dispersivas de las ondas de superficie, que hacen que el patrón de ondas sea tan complejo como acabamos de ver. Por lo tanto no lo vamos a desarrollar aquí. Pero debido a la gran importancia práctica de este tema para la hidrodinámica de las embarcaciones no queremos concluir este Capítulo sin hacer por lo menos algunos comentarios.

La forma del casco de una embarcación está determinada por una serie de compromisos entre diferentes requerimientos que en parte se contraponen. La economía y simplicidad de construcción favorecen la forma de un paralelepípedo. La estabilidad transversal favorece cascos anchos. Para que el casco tenga una adecuada resistencia a la flexión en sentido longitudinal conviene que sea profundo. Todos estos factores influyen sobre la elección de la forma, pero frecuentemente el factor más importante es la interacción dinámica del casco con el agua. Las interacciones que determinan la resistencia que opone el agua al movimiento de la embarcación, y que por lo tanto determinan la potencia de los motores, suelen requerir el mayor cuidado por parte del arquitecto naval.

El arrastre total que sufre una embarcación tiene cuatro componentes: (1) la fricción entre el agua y la superficie del casco, (2) el arrastre por emisión de ondas, (3) las pérdidas de energía debido a la formación y desprendimiento de remolinos por parte del casco y sus apéndices (por ej. el timón) y (4) la resistencia que el aire ejerce sobre las partes que están por encima de la línea de flotación.

La fuerza de fricción F_a entre el agua y el casco (o sea, el arrastre propiamente dicho) está dada, como sabemos, por $F_a = C_a \rho S u^2$ donde ρ es la densidad del agua, S la superficie del casco en contacto con el agua, u la velocidad de la embarcación y C_a es el coeficiente de arrastre. Se la puede disminuir reduciendo S , pero en la práctica no es mucho lo que se puede lograr en este sentido en vista de los demás requerimientos constructivos. El coeficiente de arrastre depende del número de Reynolds del flujo, y no es un factor que el constructor pueda controlar, pues la longitud y la velocidad de la embarcación suelen estar dictados por otras consideraciones.

Las componentes (3) y (4) del arrastre total no son en general de gran importancia.

Esto deja al arrastre por emisión de ondas como un factor *muy importante* a tener en cuenta en el diseño, debido fundamentalmente a que la energía que se pierde por causa de la emisión aumenta rápidamente con la velocidad, al punto que se llega pronto a una *velocidad límite* que no se puede superar, ya que para hacerlo sería necesaria una planta motriz de tamaño y costo impracticables¹⁸.

Esto se puede entender mediante un sencillo argumento cualitativo. Recordemos que la escala del patrón de ondas de la estela es $2\pi u^2 / g$. De resultados de esto, si una embarcación cuya longitud es L se desplaza con una velocidad

$$u_L = \sqrt{gL/2\pi} \quad \text{o sea} \quad u_L (\text{m/s}) \approx 1.3\sqrt{L(\text{m})} \quad (9.128)$$

la distancia entre las crestas de las ondas que produce es igual a la longitud de la embarcación. Cuando eso ocurre, en la práctica *el barco viaja dentro del valle del sistema de ondas por él mismo creado*. Si el barco se desplazara con una velocidad mayor que u_L , la distancia entre las crestas sería *mayor* que L , lo que implica que nuestro barco estaría tratando de *ascender por la ladera del valle* hacia la primera cresta. Cuanto mayor es u , tanto más empinada resulta la cuesta

¹⁸ El movimiento de un barco también puede dar lugar a la emisión de ondas de otra clase, además de las ondas de superficie que estamos considerando. Cuando el agua presenta estratificaciones de densidad, veremos en el Capítulo 10 que se pueden propagar en su seno *ondas internas de gravedad*. La emisión de estas ondas por parte del barco produce un arrastre adicional, que en determinadas circunstancias puede ser muy importante. Esta es la causa del fenómeno que se denomina “aguas muertas”, que ocurre (por ejemplo) cuando hay una capa de agua dulce sobre el agua salada del mar.

a remontar. Por lo tanto se llega al resultado que para lograr una velocidad significativamente mayor que u_L es preciso instalar en el barco motores de enorme potencia, cosa que resulta impracticable. Por esto es que ningún barco navega a velocidades mayores de unos 40 nudos.

Las embarcaciones pequeñas pueden superar esta limitación gracias a que viajan *planeando* sobre la superficie con casi todo el casco fuera del agua (como ocurre con las lanchas de carrera), pero esto, lógicamente, es impracticable para un buque de gran tamaño.

Una característica importante del patrón de ondas producidas por una embarcación es que las ondas se producen en diferentes partes del casco. Por de pronto, siempre hay por lo menos dos sistemas de ondas: uno generado por la proa y otro por la popa. Además, toda angulosidad que hubiera a lo largo del casco también produce su propio sistema de ondas. Estos diferentes sistemas se superponen, y bajo determinadas condiciones pueden interferir destructivamente entre sí, con lo cual *disminuye* el arrastre total por emisión de ondas. Uno de los objetivos mas importantes de la hidrodinámica naval es precisamente el diseño de formas de casco que optimizan este efecto beneficioso. Un resultado valioso en esta materia es el *bulbo sumergido* que muchos barcos tienen en la proa, cuya función es precisamente la de producir un sistema de ondas que tiende a cancelar las ondas producidas por la proa.

10. ONDAS EN EL SENO DE UN FLUIDO

Las ecuaciones de la dinámica de gases

Ya vimos en el Capítulo 1 que un fluido no opone resistencia a las deformaciones sin cambio de volumen. Por lo tanto, si una perturbación produce deformaciones que no involucran ni compresión ni dilatación, las únicas fuerzas restitutivas que pueden aparecer deben ser de origen externo, o bien fuerzas que se ejercen sobre la superficie libre de un líquido pero no en su seno¹. Este es el caso de las ondas de superficie que estudiamos en el Capítulo 9, en las cuales las fuerzas de restitución se deben a la gravedad y a la tensión superficial.

La situación es distinta cuando se consideran perturbaciones que producen cambios del volumen (o de la densidad) de los elementos del fluido, pues como vimos en el Capítulo 4, en este caso aparecen fuerzas restitutivas cuya magnitud está determinada por el módulo de compresión. Sabemos que el módulo de compresión depende de la ecuación de estado del fluido y del tipo del proceso (p. ej., si se realiza en forma adiabática o de otra forma), y que el módulo de compresión de los gases (en condiciones normales) es mucho menor que el de los líquidos, debido a lo cual los gases se comprimen más fácilmente.

Por consiguiente, para ser concretos vamos a tratar el caso de un gas, aunque el lector debe tener presente que los mismos argumentos se pueden aplicar también a un líquido, con tal de emplear en las ecuaciones el correspondiente módulo de compresión.

Vamos a suponer que el gas es *perfecto*, que no hay fuerzas externas y que en el estado no perturbado la presión p , la densidad ρ , y por lo tanto la temperatura T , son *uniformes* y el gas está en reposo². Supongamos que se perturba este estado de modo tal que la presión vale

$$p' = p + \delta p \quad (10.1)$$

donde δp es una función del espacio y del tiempo, por ahora no especificada. Por efecto de la compresibilidad del medio hay entonces una variación de densidad, que ahora vale $\rho' = \rho + \delta \rho$. Asimismo, en virtud de la ecuación de estado, también cambia la temperatura, de modo que $T' = T + \delta T$. De resultas de esta perturbación el gas no está en más equilibrio, pues hay gradientes de presión que van a provocar la aceleración de las parcelas del fluido, que se pondrán en movimiento con una velocidad $\mathbf{u}' = \delta \mathbf{u}$. El problema a resolver es determinar este movimiento.

Para este fin lo primero que tenemos que hacer es relacionar las variaciones de la densidad con las variaciones de la presión, para lo cual es preciso conocer el módulo de compresión, que depende de cómo se realiza el proceso de cambio de volumen de las parcelas del gas. Dado que la conductividad térmica de los gases es baja, y que (como veremos) las variaciones en cuestión son rápidas, es razonable *ignorar la conducción del calor* y por lo tanto suponer que las perturbaciones son adiabáticas, es decir que

$$p' \rho'^{-\gamma} = p \rho^{-\gamma} = \text{cte.} \quad (10.2)$$

¹ Las fuerzas de origen viscoso no son restitutivas pues no se oponen a la deformación sino a la *velocidad* con la cual ésta tiene lugar.

² No es difícil tratar el caso en que hay fuerzas externas, como la gravedad, pero por ahora no lo vamos a considerar.

donde γ es el coeficiente adiabático del gas, que ya introdujimos en el Capítulo 2. Diferenciando esta ecuación obtenemos:

$$dp' = \frac{\gamma p'}{\rho'} d\rho' = \frac{k'_S}{\rho'} d\rho' \quad (10.3)$$

que vincula las variaciones de presión con las variaciones de densidad. Reconocemos en esta ecuación al módulo de compresión adiabático que definimos en el Capítulo 4. Si queremos tratar el caso de un líquido en vez de un gas podemos seguir usando esta ecuación, y basta reemplazar k'_S por el correspondiente módulo de compresión.

Necesitamos ahora la ecuación del movimiento, para calcular el campo de velocidad producido por la variación de presión (10.3). Por ahora *vamos a ignorar los efectos de la viscosidad*, y por lo tanto usaremos la ecuación de Euler. Puesto que no hay fuerzas externas escribiremos

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = -\frac{\nabla p'}{\rho'} \quad (10.4)$$

Para completar el conjunto de ecuaciones que gobiernan el problema falta escribir la ecuación de conservación de la masa, que determina la variación de la densidad a partir del campo de velocidad:

$$\frac{1}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}' \quad (10.5)$$

El sistema de ecuaciones (10.3)-(10.5) junto con las condiciones iniciales, que aún no hemos especificado, determina por completo el problema.

Remarcamos que hasta ahora las únicas aproximaciones que hemos hecho consisten en suponer que el proceso es adiabático, que los efectos de la viscosidad son despreciables y que no hay fuerzas externas. Sin embargo, el problema de resolver nuestras ecuaciones es en general muy *difícil*, dado que se trata de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales y no lineales.

Perturbaciones compresivas de pequeña amplitud

En el estado no perturbado el fluido está en reposo de modo que tendremos

$$p = \text{cte.}, \quad \rho = \text{cte.}, \quad \mathbf{u} = 0 \quad (10.6)$$

Trataremos ahora el caso de *pequeñas perturbaciones* de este estado. Es decir, si consideramos una porción de fluido de dimensión típica L (por ejemplo, una capa plana de espesor L , ver Fig. 10.1), la variación δL debida a la perturbación debe cumplir la condición

$$\delta L \ll L \quad (10.7)$$

Las variaciones de volumen que ocurren debido a la variación δL son también pequeñas, esto es $\delta V \ll V$ y entonces también se cumple que $\delta \rho \ll \rho$ y $\delta p \ll p$. Por lo tanto en la (10.3) podemos introducir δp y $\delta \rho$ en lugar de dp y $d\rho$.

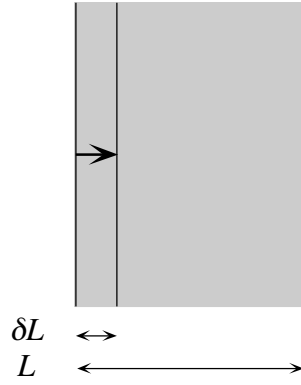


Fig. 10.1. Compresión de una capa de fluido de espesor L .

Usando entonces las (10.1) y (10.6), la (10.3) se escribe

$$\delta p = \frac{\gamma(p + \delta p)}{\rho + \delta \rho} \delta \rho = \frac{\gamma p}{\rho} \left(1 + \frac{\delta p}{p}\right) \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho}\right)^{-1} \delta \rho \quad (10.8)$$

Despreciando $\delta p/p$ y $\delta \rho/\rho$ respecto de la unidad podemos entonces escribir

$$\delta p = c^2 \delta \rho, \quad c = \sqrt{\frac{k_S}{\rho}}, \quad \text{con } k_S = \gamma p \text{ para un gas} \quad (10.9)$$

donde hemos introducido la magnitud c , que depende de la naturaleza del medio y de su estado no perturbado; c tiene dimensiones de *velocidad*, y como veremos, juega un rol fundamental en nuestro problema. Corresponde aclarar que la (10.9) vale también para un líquido, con tal de reemplazar k_S por el correspondiente módulo de compresión. Por consiguiente todos los desarrollos que hagamos de ahora en más valen también para los líquidos.

Del mismo modo, despreciando $\delta \rho/\rho$ respecto de la unidad, la ecuación de Euler se escribe

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} = - \frac{\nabla \delta p}{\rho} \quad (10.10)$$

El primer término del miembro izquierdo de esta ecuación es del orden de $\delta u/T \approx \delta u^2/\delta L$, puesto que T , el tiempo característico del fenómeno, es del orden de $T \approx \delta L/\delta u$. En cambio, el segundo término es del orden de $\delta u^2/L$, y en virtud de la (10.7) es despreciable frente al primero. Por lo tanto, la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} = - \frac{\nabla \delta p}{\rho} \quad (10.11)$$

Dado que $\delta u \approx \delta L/T$ y $\delta p \approx c^2 \delta \rho \approx \rho \delta L/L$, de la (10.11) obtenemos que $c \approx L/T$, y por lo tanto que $\delta u \ll c$. Es importante recordar estas relaciones: c es del orden del cociente entre la *extensión de la región perturbada* y T , mientras que δu es del orden del cociente entre la *amplitud del desplazamiento* debido a la perturbación y T .

Tomando el rotor de la (10.11) vemos que $\partial(\nabla \times \delta \mathbf{u}) / \partial t = 0$. Por consiguiente, si la perturbación se produjo en un fluido en reposo, tendremos que $\nabla \times \delta \mathbf{u} = 0$ y por lo tanto el campo de velocidad es potencial. Introducimos entonces el potencial de velocidad mediante

$$\delta \mathbf{u} = \nabla \phi \quad (10.12)$$

con lo cual la ecuación de Euler se escribe finalmente como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta p}{\rho} \quad (10.13)$$

Nos queda por ver como se simplifica la ecuación de continuidad (10.5). Haciendo las mismas aproximaciones que para las ecuaciones precedentes se llega a

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = -\rho \nabla^2 \phi \quad (10.14)$$

Vemos pues que gracias a la hipótesis de perturbaciones pequeñas³ nuestro sistema de ecuaciones (10.3)-(10.5) se ha reducido a las tres ecuaciones (10.9), (10.13) y (10.14) que, a diferencia de las anteriores, son *lineales*. Por ese motivo la simplificación que llevamos a cabo se llama *linearización por pequeña amplitud*. Se trata del mismo tipo de simplificación que hicimos en el Capítulo 9 al tratar las ondas de superficie en líquidos, sólo que en ese caso la no linealidad residía en la condición de contorno sobre la superficie, y no como ahora en las ecuaciones.

Debe quedar claro para el lector que las simplificaciones que se consiguen mediante la linearización tienen un alto precio, pues eliminan del problema aspectos físicos fundamentales que (como veremos más adelante) dan lugar a consecuencias importantes, que se ponen de manifiesto cuando las perturbaciones tienen una amplitud *finita*. Entre ellas se cuentan la formación de picos agudos y la ruptura de las olas del mar, la formación de ondas de choque en gases y líquidos y otros interesantes fenómenos, que se denominan *no lineales* pues tienen su origen en la no linealidad del problema.

La ecuación de las ondas

Podemos reducir nuestro sistema de ecuaciones si usamos la (10.9) para eliminar δp de la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \delta \rho \quad (10.15)$$

Si ahora derivamos respecto del tiempo la (10.15) y usamos la (10.14) para eliminar $\delta \rho$ obtenemos finalmente una única ecuación para el potencial de velocidad:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \quad (10.16)$$

Claramente, si se encuentra la solución ϕ de esta ecuación queda resuelto el problema, pues usando la (10.15) y la (10.9) podemos expresar $\delta \rho$ y δp en términos de ϕ como

³ Para ser más exacto deberíamos decir perturbaciones *infinitesimales*.

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad \delta p = -\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (10.17)$$

y el campo de velocidad se obtiene de la (10.12).

Es fácil ver, tomando el gradiente de la (10.16), que las componentes de $\delta\mathbf{u}$ también satisfacen la misma ecuación. Asimismo, vista la proporcionalidad (10.17) entre $\delta\rho$ y δp y $\partial\phi/\partial t$, es evidente que ambas variables dependientes también son soluciones de la ec. (10.16).

La ecuación que hemos obtenido (y las análogas para $\delta\rho$, δp y las componentes de $\delta\mathbf{u}$) pertenece a la familia de las *ecuaciones de onda*, y es una de las más simples puesto que es *escalar*.

La solución general de D'Alembert para pulsos sonoros planos

Consideremos la ecuación de ondas (10.16) en el caso plano, en el cual la perturbación depende solamente de la coordenada x . Podemos entonces escribir la (10.16) en la forma

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi = 0 \quad (10.18)$$

Si introducimos las nuevas variables

$$\xi_+ = x - ct, \quad \xi_- = x + ct \quad (10.19)$$

la ec. (10.18) se escribe como

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_+ \partial\xi_-} = 0 \quad (10.20)$$

Esta ecuación se puede integrar de inmediato para obtener la *solución general de D'Alembert* en la forma

$$\phi = \phi_+(\xi_+) + \phi_-(\xi_-) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct) \quad (10.21)$$

Por lo tanto, la solución general es la superposición de dos ondas, una de las cuales tiene una forma descrita por la función ϕ_+ y se propaga hacia la *derecha* sin distorsionarse con la velocidad c , y la otra tiene una forma descrita por la función ϕ_- y se propaga hacia la *izquierda* sin distorsión con la velocidad c . Por este motivo c se denomina *velocidad del sonido*. Las *ondas viajeras* ϕ_+ y ϕ_- son, respectivamente, soluciones⁴ de

⁴ La primera (o la segunda) de las (10.22) representa el problema hiperbólico más simple. Si bien los problemas clásicos de ondas llevan a ecuaciones de segundo orden como la (10.16), hay muchos otros problemas (como ondas de creciente, ondas en glaciares, ondas en el flujo de vehículos en una carretera, ciertos fenómenos ondulatorios en reacciones químicas, etc.) que llevan directamente a ecuaciones del primer orden como las (10.22), o bien a ecuaciones no lineales de la forma (10.22), pero en las cuales c no es una constante sino una función de la perturbación ϕ . En estos casos, a diferencia del caso lineal que estamos considerando aquí, las ondas se distorsionan a medida que se propagan, y eventualmente rompen, dando lugar a ondas de choque. La correspondiente teoría matemática se basa en el *método de las características* y el tratamiento especial de las ondas de choque. En el próximo capítulo estudiaremos este tipo de ecuaciones.

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial \xi_+} = \frac{\partial \phi_+}{\partial t} - c \frac{\partial \phi_+}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_-}{\partial \xi_-} = \frac{\partial \phi_-}{\partial t} + c \frac{\partial \phi_-}{\partial x} = 0 \quad (10.22)$$

Como lo expresa la (10.21) las dos ondas viajeras ϕ_+ y ϕ_- se propagan *independientemente* la una de la otra. Esto es consecuencia de que la ecuación de ondas (10.16) es lineal.

Relación entre $\delta\rho$, δp y las componentes de δu

En virtud de las (10.12) y (10.17) las demás cantidades que describen nuestra onda plana ($\delta\rho$, δp y las componentes de δu) se expresan de forma análoga a la (10.21) en términos de la superposición de dos ondas viajeras (+) y (-) que satisfacen las ecuaciones (10.22).

Consideremos la onda viajera $\phi_+(\xi_+) = \phi_+(x - ct)$, que es la solución de la primera de las (10.22):

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial t} - c \frac{\partial \phi_+}{\partial x} = 0 \quad (10.23)$$

Claramente, la única componente no nula de δu_+ es la componente x , que vale

$$\delta u_+ = \frac{\partial}{\partial x} \phi_+(\xi_+) = \frac{d\phi_+}{d\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial x} = \phi'_+ \quad (10.24)$$

Del mismo modo obtenemos

$$\delta\rho_+ = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \phi_+}{\partial t} = -\frac{\rho}{c^2} \frac{d\phi_+}{d\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial t} = \frac{\rho}{c} \phi'_+ \quad (10.25)$$

y

$$\delta p_+ = -\rho \frac{\partial \phi_+}{\partial t} = -\rho \frac{d\phi_+}{d\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial t} = \rho c \phi'_+ \quad (10.26)$$

Obtenemos así las relaciones

$$\delta u_+ = \frac{c}{\rho} \delta\rho_+ \quad , \quad \delta u_+ = \frac{1}{\rho c} \delta p_+ \quad (10.27)$$

Procediendo del mismo modo para la onda viajera $\phi_-(\xi_-) = \phi_-(x + ct)$, que es la solución de la segunda de las (10.22):

$$\frac{\partial \phi_-}{\partial t} + c \frac{\partial \phi_-}{\partial x} = 0 \quad (10.28)$$

se obtiene $\delta u_- = \phi'_-$, $\delta\rho_- = -(\rho/c)\phi'_-$ y $\delta p_- = -\rho c \phi'_-$, y por consiguiente

$$\delta u_- = -\frac{c}{\rho} \delta\rho_- \quad , \quad \delta u_- = -\frac{1}{\rho c} \delta p_- \quad (10.29)$$

En conclusión, en la onda viajera que se propaga hacia la derecha la velocidad tiene el mismo signo que la perturbación de la presión (y de la densidad), mientras que en la onda que viaja hacia la izquierda tiene signo opuesto. En ambos casos se cumple que $|\delta u_- / c| = |\delta \rho / \rho| \ll 1$.

Solución del problema de valores iniciales

Para determinar ϕ_+ y ϕ_- hay que asignar *dos* condiciones iniciales, pues la (10.18) es del segundo orden en el tiempo. Hay muchas formas equivalentes de hacerlo, pero aquí vamos a mostrar cómo se procede si se asignan en $t = 0$ las distribuciones iniciales de densidad y de velocidad

$$\delta \rho(x, 0) = \delta \rho_0(x) \quad , \quad \delta u(x, 0) = \delta u_0(x) \quad (10.30)$$

Claramente, usando las (10.26) y (10.29) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \rho(x, 0) &= \delta \rho_+(x, 0) + \delta \rho_-(x, 0) = \delta \rho_0 \\ \delta u(x, 0) &= \delta u_+(x, 0) + \delta u_-(x, 0) = (c / \rho)[\delta \rho_+(x, 0) - \delta \rho_-(x, 0)] = \delta u_0 \end{aligned} \quad (10.31)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\delta \rho_+(x, 0) = f_+(x) = \frac{1}{2} \left(\delta \rho_0 + \frac{\rho}{c} \delta u_0 \right) \quad , \quad \delta \rho_-(x, 0) = f_-(x) = \frac{1}{2} \left(\delta \rho_0 - \frac{\rho}{c} \delta u_0 \right) \quad (10.32)$$

Por lo tanto, la solución es

$$\delta \rho = f_+(x - ct) + f_-(x + ct) \quad (10.33)$$

En general la solución es una superposición de dos pulsos, uno de los cuales se propaga hacia la derecha y el otro hacia la izquierda. Por ejemplo, si la perturbación inicial de densidad es un pulso rectangular y el gas está en reposo en todas partes, entonces se propagan perturbaciones rectangulares de densidad hacia la derecha y hacia la izquierda, cada una de las cuales tiene una magnitud igual a la mitad de la perturbación original $\delta \rho_0$, como se indica en la Fig. 10.2a.

Si las perturbaciones iniciales de densidad y de velocidad consisten de pulsos rectangulares de igual extensión y cuyas magnitudes cumplen la relación $\rho \delta u_0 = c \delta \rho_0$, entonces los pulsos rectangulares se propagan solamente hacia la derecha, pues en este caso $f_- = 0$ (Fig. 10.2, b); si en cambio se cumple $\rho \delta u_0 = -c \delta \rho_0$ los pulsos se propagan solamente hacia la izquierda, pues $f_+ = 0$ (Fig. 10.2, c). Una perturbación de esta clase se puede producir por medio de un pistón que en el instante inicial se pone bruscamente en movimiento con una velocidad constante δu comprimiendo y poniendo en movimiento el gas que estaba en reposo, y que se detiene, también bruscamente, al cabo de un cierto tiempo. Si la longitud del pulso rectangular es L , el intervalo de tiempo durante el cual el pistón está en movimiento es evidentemente $\Delta t = L / c$.

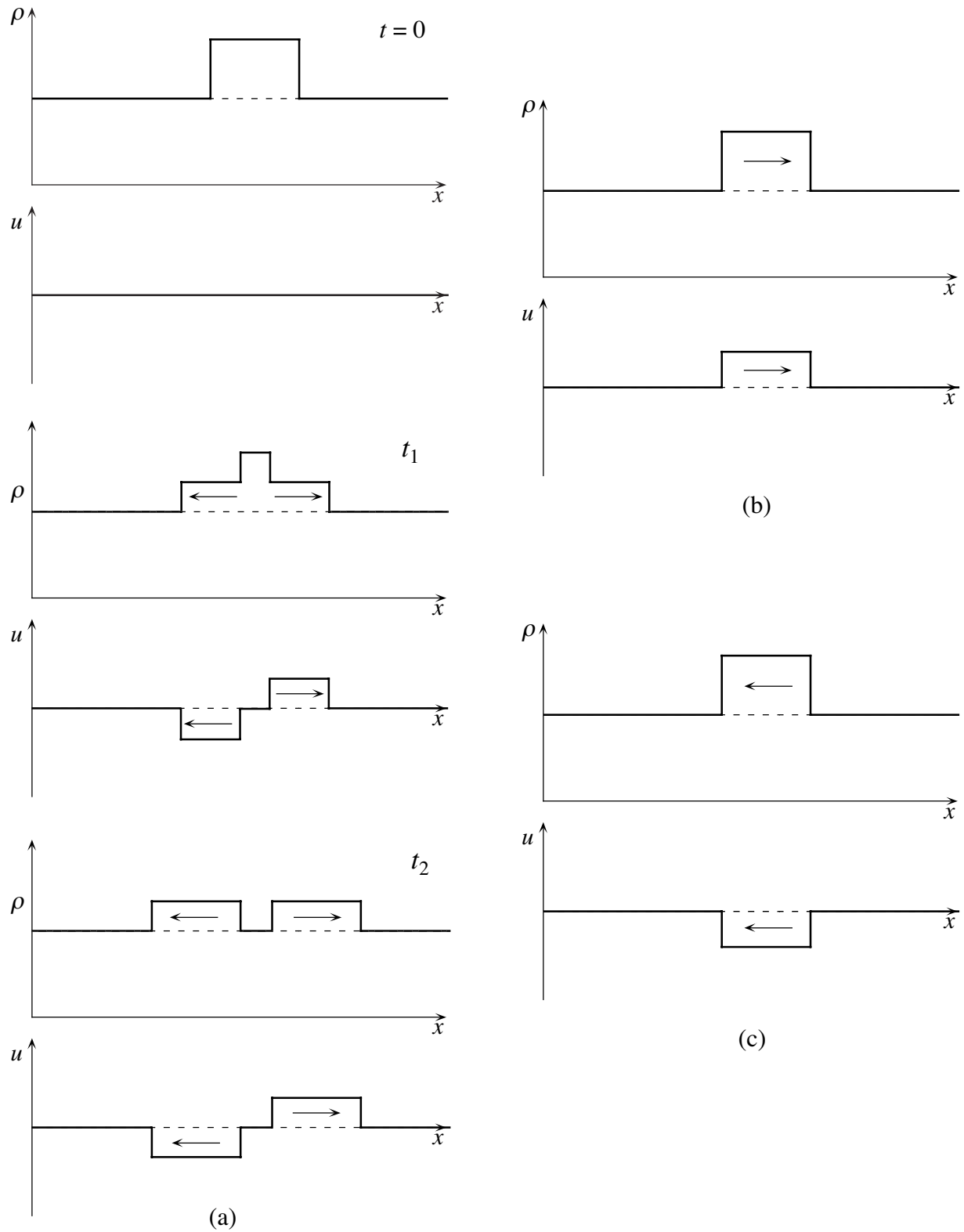


Fig. 10.2. Propagación de pulsos sonoros. (a) Cuando la perturbación inicial de densidad es un pulso rectangular y el gas está en reposo en todas partes, se propagan pulsos hacia la derecha y hacia la izquierda cuya magnitud es igual a la mitad de la perturbación original $\delta\rho_0$. (b) Cuando las perturbaciones iniciales de densidad y de velocidad cumplen la relación $\rho\delta u_0 = c\delta\rho_0$, el pulso se propaga hacia la derecha, pues $f_- = 0$. (c) Si $\rho\delta u_0 = -c\delta\rho_0$ el pulso se propaga hacia la izquierda, pues $f_+ = 0$.

Características

La expresión (10.21)

$$\phi = \phi_+(\xi_+) + \phi_-(\xi_-) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct) \quad (10.34)$$

así como las expresiones análogas para las demás magnitudes que caracterizan a la onda plana, como la (10.33) admiten una interesante interpretación. Si consideramos el valor de ϕ_+ para un dado $\xi_+ = \text{cte.}$, la (10.34) nos dice que ese valor se transporta a lo largo de la línea horaria C_+ definida por

$$x = \xi_+ + ct \quad , \quad \xi_+ = \text{cte.} \quad (10.35)$$

del mismo modo, el valor de ϕ_- para un dado $\xi_- = \text{cte.}$ se transporta a lo largo de la línea horaria C_- definida por

$$x = \xi_- + ct \quad , \quad \xi_- = \text{cte.} \quad (10.36)$$

Las líneas C_+ y C_- definidas por (10.35) y (10.36) se denominan *características* (ver Fig. 10.3). En términos de las características, podemos interpretar la (10.34) diciendo que el valor de la perturbación en el punto (x, t) está dado por la suma de los valores ϕ_+ y ϕ_- transportados por las características C_+ y C_- que se cruzan en (x, t) .

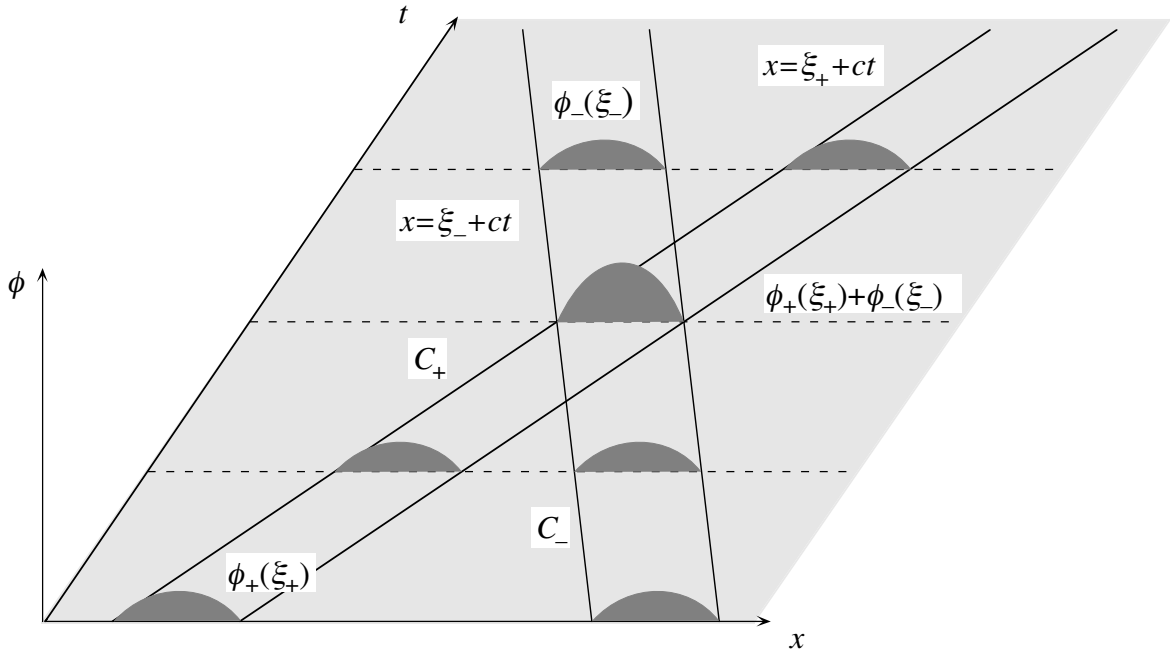


Fig. 10.3. Características: el valor de ϕ_+ para un dado $\xi_+ = \text{cte.}$ se transporta a lo largo de la línea horaria C_+ y el valor de ϕ_- para un dado $\xi_- = \text{cte.}$ se transporta a lo largo de la línea horaria C_- .

Veremos que el concepto de características y la interpretación precedente serán de gran utilidad para el estudio de la propagación de ondas de amplitud finita.

Soluciones elementales de la ecuación de ondas

La ec. (10.16) admite soluciones elementales en forma de *ondas planas monocromáticas*, en las cuales todas las cantidades de perturbación son simples funciones oscilatorias armónicas de la posición y del tiempo. Este tipo de soluciones es importante debido a que toda perturbación se puede representar como una superposición de ondas monocromáticas por medio de la integral de Fourier. Frecuentemente escribiremos esas funciones como la parte real de una cantidad compleja (así como hicimos para las ondas de superficie). Por ejemplo, podemos escribir el potencial de velocidad de una solución elemental como

$$\phi = \text{Re}[Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] \quad (10.37)$$

donde $A = ae^{i\alpha}$ es una *amplitud compleja*, de modo que la (10.37) es equivalente a escribir

$$\phi = a \cos \theta, \quad \theta(x, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha \quad (10.38)$$

La constante a es la *amplitud* de la onda y θ es la *fase*. En la onda (10.38) las superficies de fase constante están dadas por $\theta = \text{cte.}$ y es fácil ver que son planos perpendiculares al vector de onda \mathbf{k} , que se desplazan con la velocidad de fase $u_f = \omega / k$ (Fig. 10.4). En efecto, la misma fase que en el instante t se tiene en los puntos del plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \theta$ se encuentra en el instante t' en el plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t' = \theta$. Por lo tanto se cumple $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \omega(t' - t)$, de donde resulta (indicando con \mathbf{e}_k el versor en la dirección de \mathbf{k}) que $\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = (\omega / k)(t' - t)$. Esta ecuación nos dice que la distancia entre los dos planos crece con la velocidad $u_f = \omega / k$.

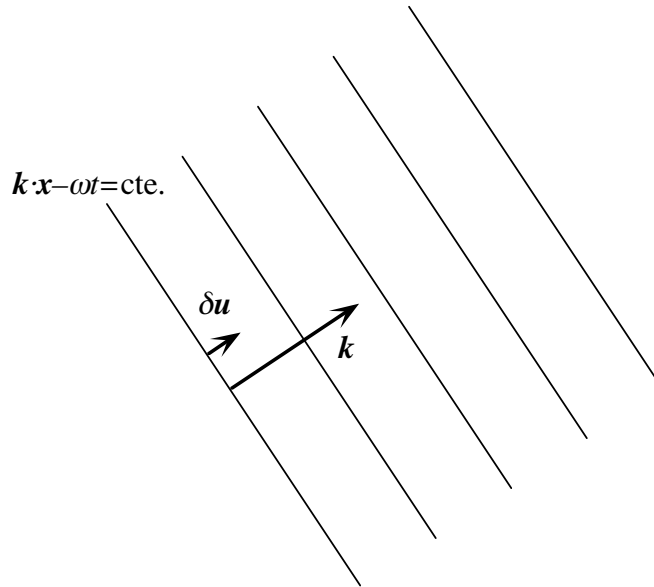


Fig. 10.4. Onda sonora plana.

Sustituyendo la (10.37) o la (10.38) en la ecuación de las ondas (10.16) obtenemos la *relación de dispersión* de las *ondas sonoras* o *acústicas*:

$$\omega = \pm ck, \quad k = |\mathbf{k}| \quad (10.39)$$

donde, como ya dijimos, c es una propiedad del fluido y de su estado no perturbado, y por lo tanto no depende de las características de la perturbación.

Es importante recordar que esto último es cierto solamente si las ondas son de pequeña amplitud. Si la amplitud de la onda es finita, *no es lícito* hacer las aproximaciones que permitieron pasar de la (10.8) a la (10.9). Podemos aún, si queremos, escribir $\delta p = c'^2 \delta \rho$, pero ahora $c' = (k'_S / \rho')^{1/2}$ *no es* más una constante sino que *depende de la perturbación* y por lo tanto la relación entre δp y $\delta \rho$ no es lineal⁵. Veremos más adelante como se procede en este caso y a que resultados se llega. Calculemos el campo de velocidad de la onda elemental (10.38):

$$\delta \mathbf{u} = \nabla \phi = \nabla [a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha)] = -a \mathbf{k} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha) \quad (10.40)$$

La (10.40) nos muestra que las ondas sonoras elementales son *longitudinales*, esto es, el desplazamiento de los elementos del fluido es *paralelo* a la dirección de propagación de la onda.

La velocidad del sonido

De la (10.40) resulta que la velocidad del sonido c , definida por la (10.9), es igual al módulo de la *velocidad de fase* de las ondas elementales, y también es igual al módulo de la *velocidad de grupo* C de dichas ondas. En efecto,

$$C_i = \pm \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \pm \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_i} = \pm c \frac{k_i}{k} \quad \text{luego} \quad |C| = c \quad (10.41)$$

Por consiguiente las ondas sonoras de amplitud infinitesimal *no son dispersivas*. Por lo tanto, un paquete de ondas formado por la superposición de ondas elementales de la forma (10.37) o (10.38) se propaga con la velocidad c *sin sufrir cambio de forma*, a diferencia de lo que ocurre con las ondas de superficie en aguas profundas.

La velocidad del sonido en un gas ideal vale

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} \quad (10.42)$$

donde μ es el peso molecular y R es la constante de los gases (ver Cap. 2). Para el aire seco tenemos

$$c(\Theta) = c_0 \sqrt{1 + \Theta / 273.16} \quad , \quad c_0 = 331.3 \text{ m/s} \quad (10.43)$$

donde $\Theta = T(^{\circ}\text{K}) - 273.16$ es la temperatura en grados centígrados.

La velocidad del sonido y otras propiedades de propagación de las ondas sonoras varían de modo significativo si el aire es húmedo y especialmente cuando está en condiciones de saturación y se produce la condensación de gotas de agua (niebla). En estos casos no se puede usar la fórmula (10.42) pues cuando en el medio coexisten dos fases, las compresiones y expansiones de la onda sonora producen cambios de fase (condensación y vaporización). Debido a eso, el mó-

⁵ En particular, es fácil verificar que tanto para los gases como para la materia condensada c' es una función creciente de la presión.

dulo de compresión adiabático no es más igual a γp , y es preciso calcular su valor correcto. El lector interesado en este tema lo puede encontrar tratado en el texto de Landau y Lifshitz.

La velocidad del sonido en los líquidos es considerablemente mayor que en los gases, debido a que su módulo de compresión es mucho mayor. Para el agua $c \approx 1400$ m/s (aproximadamente). Es importante tener presente, sin embargo, que en los espejos de agua naturales (lagos, mares, etc.) c varía apreciablemente con la profundidad y también de un lugar a otro, debido a que la densidad del agua depende de la temperatura, la salinidad y la profundidad. Estas variaciones afectan de modo importante la propagación del sonido en las aguas del mar, lo cual es de gran relevancia para la acústica submarina (sonar).

El espectro de las ondas sonoras

Las ondas sonoras se perciben como *sonido*, siempre y cuando su frecuencia esté dentro del rango de sensibilidad del oído. El oído humano percibe sonidos desde unos 20 Hz hasta 20 kHz (aproximadamente 10 *octavas*, correspondientes a longitudes de onda entre 15 m y 1.5 cm), aunque estos límites varían considerablemente de una persona a otra. Fuera de ese intervalo, el oído humano no detecta las ondas acústicas. Las perturbaciones acústicas de frecuencias inferiores a 20 Hz, inaudibles para el oído humano, se denominan *infrasonidos*, mientras que las de frecuencia mayor que 20 kHz, también inaudibles, se llaman *ultrasonidos*. Dentro del rango mencionado, nuestro oído distingue los sonidos de diferentes frecuencia como de diferente *tono*: las ondas de baja frecuencia se oyen como sonidos de tono *grave*, mientras que las de alta frecuencia como sonidos de tono *agudo*. En este contexto es interesante reflexionar que el hecho que las ondas sonoras de pequeña amplitud no sean dispersivas es afortunado, pues nos permite oír con nitidez (es decir, sin distorsión) a los sonidos. Si no fuese así, no sería posible escuchar música ni comunicarnos por medio de la voz.

La capacidad auditiva de los animales no coincide con la del hombre. Los perros, gatos y caballos perciben ultrasonidos hasta 32, 46 y 40 kHz, aunque su audición es inferior a la humana para bajas frecuencias. Entre los antropoides, el chimpancé alcanza a percibir sonidos de hasta 30 kHz. Es particularmente interesante el caso de los murciélagos, que perciben ultrasonidos de hasta 150 kHz (correspondientes a una longitud de onda de unos 2 mm); los murciélagos emiten pulsos sonoros de esas altísimas frecuencias y usan el eco devuelto por los objetos que están a su alrededor para orientarse en el vuelo, eludir obstáculos y localizar los insectos de los cuales se alimentan. También los cetáceos emiten y perciben ultrasonidos de hasta 150 kHz, que les sirven para orientarse y detectar los bancos de *krill* del cual se alimentan. Del otro lado del espectro acústico, los elefantes y los bóvidos pueden percibir infrasonidos de hasta 16 Hz.

Existen muchas e importantes aplicaciones de los ultrasonidos. Entre ellas podemos mencionar el sonar, el estudio de propiedades de materiales, la ecografía, la limpieza por ultrasonidos, etc.. Dado que la propagación de las onda ultrasónicas de altísima frecuencia depende fuertemente de la viscosidad del medio, se las puede emplear para observar estructuras de las células vivas.

Los sonidos de muy baja frecuencia son producidos en la naturaleza por sismos, saltos de agua, y volcanes, y por vientos, truenos y otros fenómenos meteorológicos. Se pueden propagar mucho más lejos que los de mayor frecuencia puesto que su amortiguamiento (debido a los efectos de la viscosidad y la conducción térmica) es mucho menor. El estudio de esas ondas con miras a mejorar los pronósticos meteorológicos es un tema de interés actual, como también lo es su aplicación para la prospección sísmica.

Propiedades de las ondas sonoras

Energía e intensidad del sonido

En ausencia de fuerzas externas conservativas, la energía por unidad de volumen del fluido es igual a la suma de la energía interna $\rho'e'$ (e' es la energía interna por unidad de masa, las primas indican las magnitudes físicas en presencia de la perturbación) más la energía cinética asociada con el movimiento del fluido, que en nuestro caso vale $\rho'u'^2/2$. Por lo tanto, reteniendo términos hasta el segundo orden en las cantidades de perturbación tenemos

$$\rho'e' + \frac{1}{2}\rho'u'^2 \cong \rho e + \delta\rho \left(\frac{\partial(\rho'e')}{\partial\rho'} \right) \bigg|_{S|_{\rho'=\rho}} + \frac{1}{2}\delta\rho^2 \left(\frac{\partial^2(\rho'e')}{\partial\rho'^2} \right) \bigg|_{S|_{\rho'=\rho}} + \frac{1}{2}\rho\delta u^2 \quad (10.44)$$

donde las derivadas se tienen que calcular a entropía constante puesto que la perturbación es adiabática. Usando la relación termodinámica

$$de = TdS - pdV = TdS + (p/\rho^2)d\rho \quad (10.45)$$

tenemos que

$$\left(\frac{\partial(\rho'e')}{\partial\rho'} \right)_S = e' + \frac{p'}{\rho'} = h' \quad (10.46)$$

donde h es la entalpía por unidad de masa. Por lo tanto la derivada segunda que aparece en la (10.44) se puede expresar como

$$\left(\frac{\partial^2(\rho'e')}{\partial\rho'^2} \right)_S = \left(\frac{\partial h'}{\partial\rho'} \right)_S = \left(\frac{\partial h'}{\partial p'} \right)_S \left(\frac{\partial p'}{\partial\rho'} \right)_S = \frac{c'^2}{\rho'} \quad (10.47)$$

Reemplazando esta expresión en la (10.44) se obtiene

$$\rho'e' + \frac{1}{2}\rho'u'^2 \cong \rho e + h\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}\delta\rho^2 + \frac{1}{2}\rho\delta u^2 \quad (10.48)$$

El primer término del miembro derecho es la energía interna por unidad de volumen del fluido en reposo, por lo tanto no tiene nada que ver con la onda sonora. El segundo término $h\delta\rho$ es la variación de energía interna debida a la variación de la masa del fluido en la unidad de volumen, que ocurre debido a la perturbación. La contribución de este término a la energía total (que se obtiene integrando la energía por unidad de volumen dada por la (10.48) sobre todo el volumen del fluido) es nula puesto que la masa total del fluido no varía por efecto de la perturbación.

Por lo tanto, la variación total de la energía del fluido debida a la presencia de la onda sonora es

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}\delta\rho^2 + \frac{1}{2}\rho\delta u^2 \right) dV \quad (10.49)$$

Podemos interpretar el integrando de la (10.49) como la *densidad de energía sonora* de la onda:

$$E = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho} \delta \rho^2 + \frac{1}{2} \rho \delta u^2 \quad (10.50)$$

Esta expresión toma una forma más sencilla para una onda viajera plana, pues en este caso, por las (10.27) y (10.29) tenemos que $|\delta \rho_{\pm}| = (\rho/c) |\delta u_{\pm}|$. Entonces los dos términos de la (10.50) son iguales y tenemos simplemente

$$E = \rho \delta u^2 \quad (10.51)$$

Aunque esta expresión no vale en general, se puede obtener una fórmula semejante para el *promedio temporal* de la energía sonora aplicando el bien conocido resultado de la Mecánica según el cual la media temporal de la energía potencial de un sistema que realiza pequeñas oscilaciones es igual a la media temporal de su energía cinética. Puesto que en nuestro caso esta última es

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \overline{\delta u^2} dV \quad (10.52)$$

resulta que

$$\int_V \bar{E} dV = \int_V \rho \overline{\delta u^2} dV \quad (10.53)$$

A partir de estos resultados vemos que la energía de una onda sonora es proporcional al cuadrado de su amplitud.

No es difícil demostrar que la intensidad \mathbf{q} (densidad de flujo de energía) de una onda sonora plana que se propaga en la dirección del versor \mathbf{n} está dada por

$$\mathbf{q} = cE\mathbf{n} \quad (10.54)$$

La intensidad de la onda sonora es percibida por nuestro oído como la *fuerza* del sonido. La amplitud mínima de las variaciones de presión que el oído alcanza a detectar es de unos⁶ 10^{-5} Pa, y la amplitud de las variaciones de presión en el umbral del dolor es de unos 10 Pa. Por comparación, la presión atmosférica en condiciones standard es de alrededor de 10^5 Pa. Por lo tanto, la perturbación de la presión en una onda sonora es muy pequeña en relación con la presión no perturbada. Esto justifica nuestra hipótesis de pequeña amplitud para el estudio de las ondas sonoras. Sin embargo, si la amplitud de la onda alcanza los 100 Pa empiezan a ser importantes los efectos no lineales que hasta ahora hemos dejado de lado.

A continuación vamos a discutir el rango de validez de las otras aproximaciones que hemos hecho en nuestro tratamiento, que se basaron en despreciar ciertos términos supuestamente pequeños, y comentar brevemente los efectos de los mismos.

Efecto de la gravedad

Si el estado no perturbado es de equilibrio hidrostático, la gravedad produce dos efectos. En primer lugar, como vimos en el Capítulo 2, la presión y la densidad de equilibrio dependen de la altura. Las ecuaciones se pueden escribir del mismo modo, pero con la salvedad que ahora

⁶ 1 Pa = 1 N/m².

$p = p(z)$ y $\rho = \rho(z)$. Sin embargo la presión y la densidad del estado no perturbado intervienen en la ecuación de las ondas solamente a través de la velocidad del sonido, que con la hipótesis de gas ideal es solamente función de la temperatura. Por lo tanto c depende de la altura sólo en la medida que la temperatura varía con z . Si la temperatura varía con z tenemos un problema de propagación de ondas en un medio no homogéneo que hay que tratar con los métodos conocidos, que no vamos a discutir aquí.

En segundo lugar, en la ecuación de movimiento (10.11) aparecerá un término de la forma $g\delta\rho$. Para estimar la importancia de este término lo comparamos con el término $(\nabla\delta p)/\rho$, cuya magnitud es del orden de $|\delta p/\lambda\rho|$ (λ es la longitud de onda). Resulta

$$\frac{|g\delta\rho|}{|(\nabla\delta p)/\rho|} \approx \frac{|g\delta\rho|}{|\delta p/\lambda\rho|} = \frac{\lambda g}{c^2} \quad (10.55)$$

Ahora bien, para el caso del sonido en el aire, $c^2/g \approx 10^6$ cm, y por lo tanto para las longitudes de onda de interés en la acústica se cumple que $\lambda g/c^2 \ll 1$, de modo que el efecto del término $g\delta\rho$ es despreciable. Veremos más adelante con más detalle los efectos de la estratificación sobre las ondas acústicas.

Efectos de la viscosidad y la conducción térmica

Tratándose en este caso de perturbaciones compresivas, el término de viscosidad incluye, además de la viscosidad ordinaria η , a la segunda viscosidad ζ . Sin embargo, salvo casos muy especiales (por ejemplo una mezcla de gases donde ocurren reacciones químicas, ver Landau y Lifshitz), ζ es del mismo orden de η . El orden de magnitud del término de viscosidad para una onda sonora se puede estimar entonces como $|\nu\delta u/\lambda^2| \approx |\nu\delta p/\rho c\lambda^2|$. Por lo tanto el orden de magnitud del cociente entre el término de viscosidad y el término $(\nabla\delta p)/\rho$ está dado por

$$\frac{|\mu\delta p/\rho c\lambda^2|}{|\delta p/\lambda\rho|} = \frac{\nu}{c\lambda} = \frac{1}{\text{Re}_c} \quad (10.56)$$

donde Re_c es un número de Reynolds que se forma con la velocidad del sonido. Para el sonido en el aire $\text{Re}_c \approx 10^5 \lambda(\text{cm})$ de manera que el efecto de la viscosidad es despreciable salvo para longitudes de onda muy cortas en el rango de los ultrasonidos. Del mismo modo se puede mostrar que el efecto de la conducción térmica sólo puede ser importante para longitudes de onda muy cortas, dado que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura, que a su vez es inversamente proporcional a λ .

Debido a la viscosidad y a la conducción térmica la energía de las ondas sonoras se disipa, de modo que su intensidad disminuye progresivamente con la distancia x recorrida por la onda. El cálculo de este efecto se basa en evaluar la tasa de disipación de la energía mecánica y el lector interesado lo puede encontrar en el texto de Landau y Lifshitz. Aquí nos limitamos a citar el resultado. La intensidad disminuye según la ley $e^{-\gamma x}$, y el *coeficiente de absorción* γ vale

$$\gamma = \frac{2\pi^2}{\rho c\lambda^2} \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \quad (10.57)$$

donde ζ es el segundo coeficiente de viscosidad, κ es el coeficiente de conducción térmica y c_v , c_p son los calores específicos a volumen y presión constante, respectivamente. Para el aire se

tiene $\gamma_{\text{aire}} \approx 2.74 \times 10^{-11} f(\text{Hz})^2$ ($f = \omega / 2\pi$ es la frecuencia de la onda), lo cual muestra que la absorción del sonido es despreciable dentro del rango de frecuencias audibles, pero puede ser grande para ultrasonidos de muy alta frecuencia. La absorción del sonido en el agua es mucho menor pues $\gamma_{\text{agua}} \approx 1.14 \times 10^{-13} f(\text{Hz})^2$.

Difusión de las ondas sonoras

La presencia de partículas en suspensión en el fluido afecta la propagación de las ondas sonoras. Esto ocurre en el aire cuando hay niebla o cuando llueve o está nevando. Debido simplemente a su presencia, las partículas causan la emisión de ondas difundidas que se propagan en todas las direcciones. Además, las partículas que se ponen en movimiento por efecto de la perturbación sonora producen a su vez más ondas sonoras difundidas. La energía de estas emisiones secundarias de sonido se resta a la de la onda primaria, lo cual conduce a su atenuación. La magnitud de la atenuación depende de la *sección eficaz* de difusión, que se define como la razón entre la intensidad total difundida por una partícula y la densidad de flujo de energía incidente sobre la misma.

Si la densidad de la partícula es grande comparada con la del medio en el que se propaga el sonido, y si es poco compresible, entonces la difusión debida al movimiento de la partícula es sólo una pequeña corrección a la difusión principal, que proviene de la mera presencia de la misma. En este caso el cálculo de la sección eficaz para partículas de radio $R \ll \lambda$ da como resultado

$$\sigma = \frac{112\pi^5 R^2}{9} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 = \frac{112\pi^5 R^6 f^4}{9c^4} \quad (10.58)$$

Si hay N partículas por unidad de volumen, la disminución de intensidad de la onda al atravesar una capa fluida de espesor dx y área unidad es

$$dq = -N\sigma q \quad (10.59)$$

La (10.59) muestra que la intensidad de la onda disminuye exponencialmente con la distancia de acuerdo con la ley $e^{-\gamma_d x}$, donde el coeficiente de atenuación por difusión vale

$$\gamma_d = N\sigma \quad (10.60)$$

Puesto que la sección eficaz de difusión es proporcional a la *cuarta* potencia de la frecuencia, los sonidos agudos se atenúan mucho mas fuertemente que los graves. Por ejemplo, en una tormenta de nieve en la cual la visibilidad es de 10 m, si suponemos que la dimensión característica de los copos es de 0.5 cm tendremos aproximadamente un copo por litro, y entonces de acuerdo con la (10.60) la difusión atenúa las ondas sonoras de 10 kHz en una distancia del orden de $1/\gamma_d \approx 15$ m. En cambio, la atenuación de una onda de 1 kHz es casi insignificante.

Acústica

El estudio de la emisión de las ondas sonoras y su propagación en medios no homogéneos, reflexión y transmisión a través de interfases, interferencia, difracción, difusión (*scattering*) etc. es un campo muy vasto del cual por razones de espacio no nos podemos extender en este curso. Además, los métodos matemáticos para estudiar estos problemas son análogos a los que se usan para tratar ondas de otra naturaleza y que se suelen estudiar en los cursos sobre Ondas. Pero el lector

debe tener presente la importancia de la Acústica debido a sus numerosas aplicaciones prácticas. Sobre esos temas específicos existe una abundante literatura que comprende textos, monografías y revistas especializadas que pueden ser consultadas por el lector curioso.

Las condiciones de incompresibilidad

Hemos visto que la compresión de una región en el seno de un fluido origina perturbaciones que, en el límite de pequeña amplitud, son pulsos u ondas sonoras. Sin embargo, no hemos todavía establecido *bajo qué condiciones* el flujo puede dar lugar a variaciones de densidad, o, recíprocamente, bajo qué condiciones el flujo se puede considerar incompresible.

Comenzaremos por consideraciones cinemáticas: dado un campo de velocidades, queremos saber cuándo las variaciones de densidad son relevantes y cuándo no. Las variaciones relativas de densidad de un elemento de flujo están relacionadas, como sabemos, con el valor local de $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Más precisamente, la ecuación de continuidad establece que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (10.61)$$

Por otra parte, el campo de velocidad está caracterizado, en cada instante, por una escala típica U del módulo de la velocidad y por una escala espacial L sobre la cual varía vectorialmente la velocidad⁷. Consideremos ahora la condición

$$|\nabla \cdot \mathbf{u}| \ll U/L \quad (10.62)$$

que equivale a

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.63)$$

Su significado es que las componentes de \mathbf{u} , que varían sobre la escala L , lo hacen de forma tal que sus variaciones se compensan, dando lugar a un valor de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ muy pequeño respecto del cociente U/L , que a su vez es del orden de la mayor de las componentes de \mathbf{u} , dividida por L . La condición (10.62) es precisamente la *condición cinemática*, que determina el *aspecto* que debe presentar el campo de velocidad para que las variaciones de velocidad se deban a un flujo con densidad aproximadamente constante, esto es, que el campo de velocidad sea *solenoidal* (con buena aproximación).

Para un fluido homogéneo podemos elegir ρ y la entropía por unidad de masa s como parámetros de estado independientes. En este caso la tasa de variación de la presión de un elemento material se puede expresar como

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dt} \quad (10.64)$$

Luego la condición que \mathbf{u} sea aproximadamente solenoidal es

⁷ Damos por supuesto que estamos considerando un fluido que en promedio está en reposo, situación a la cual por otra parte se puede siempre llegar mediante un oportuno cambio de sistema de referencia.

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.65)$$

Normalmente la condición (10.65) se va a satisfacer sólo si cada uno de los dos términos del miembro izquierdo es pequeño en comparación con U/L . Vamos a considerar entonces por separado esas condiciones subsidiarias.

Primer término

Cuando se cumple la condición

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.66)$$

las variaciones de densidad de un elemento material debido a las variaciones de la presión son despreciables, por lo tanto *el fluido se comporta como si fuese incompresible*. En la práctica, este es de lejos el requerimiento más importante entre los dos que hemos planteado como necesarios para que el campo \mathbf{u} sea solenoidal. Al estimar $|dp/dt|$ no perdemos mayormente generalidad si suponemos que el flujo es isoentrópico, puesto que normalmente los efectos de la viscosidad y la conducción térmica llevan a cambios de la *distribución* de presión y no tanto en modificar la magnitud de la *variación* de la presión.

Tomando el producto escalar de \mathbf{u} por la ecuación del movimiento

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p \quad (10.67)$$

obtenemos

$$\mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - \frac{\rho}{2} \frac{du^2}{dt} \quad (10.68)$$

podemos entonces escribir la (10.66) en la forma

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p \right| = \left| -\frac{1}{2c^2} \frac{du^2}{dt} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c^2} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.69)$$

La (10.69) muestra que para que el flujo sea incompresible en general⁸ se deben satisfacer tres condiciones por separado, esto es, que cada uno de los términos del miembro izquierdo de la última de las (10.69) sea pequeño en comparación con U/L .

Término de la derivada convectiva

Consideremos el primer término de la última de las (10.69). El orden de magnitud de du^2/dt es igual a la mayor entre la magnitud de $|\partial u^2/\partial t| \approx U^2/T$ y la magnitud de $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)u^2| \approx U^3/L$. Aquí cabe observar que pueden existir casos de flujos oscilatorios en los cuales la frecuencia de oscilación en un dado punto es mayor que U/L y entonces $|\partial u^2/\partial t| > |(\mathbf{u} \cdot \nabla)u^2|$, pero no es ne-

⁸ Es decir, en ausencia de cancelación mutua de algunos de los términos del miembro izquierdo de la última de las (10.69) en todos los puntos del flujo.

cesario considerar ahora este caso por el momento. En efecto, veremos en seguida que la condición que el segundo término de la última de las (10.69) sea mucho menor que U/L es más restrictiva que la que resulta de estimar du^2/dt como $\approx U^2/T$.

Por lo tanto, la condición que resulta es

$$\left| \frac{1}{2c^2} \frac{du^2}{dt} \right| \approx \frac{1}{2c^2} \frac{U^3}{L} \ll \frac{U}{L} \quad \text{o sea} \quad \frac{U^2}{c^2} \ll 1 \quad (10.70)$$

En general, c es una función de la posición en el fluido, y si su variación es apreciable hay que elegir algún valor representativo para usarlo en la (10.70).

En un flujo estacionario, o bien un flujo que varía lentamente con el tiempo, una variación de la velocidad de un elemento del fluido desde el valor nulo hasta U requiere una variación de la presión del orden de ρU^2 (como se ve por el Teorema de Bernoulli). Entonces, si $\delta\rho$ y δp son las variaciones de densidad y de presión que sufrió el elemento material, resulta que $\delta\rho/\rho$ y $\delta p/\rho c^2$ son pequeños en comparación con la unidad cuando se cumple que $U^2/c^2 \ll 1$. Este es el argumento informal que subyace a la condición (10.70).

El cociente

$$M \equiv U/c \quad (10.71)$$

recibe el nombre de *número de Mach* del flujo y juega un rol importante en la dinámica de gases. Recordando que en condiciones normales de temperatura y de presión c vale aproximadamente 340 m/s para el aire, y 1450 m/s para el agua, cabe esperar que los flujos debidos a cuerpos que se mueven con velocidades por debajo de, digamos, 100 m/s en el aire sean prácticamente incompresibles, y que también sean incompresibles los flujos estacionarios normales en el agua.

Término de la derivada local

La magnitud del segundo término de la última de las (10.69) depende de la no estacionariedad del flujo. Supongamos que el flujo es oscilatorio (en sentido aproximado, no es preciso que sea estrictamente periódico) y que f sea el orden de magnitud de la frecuencia dominante. La magnitud de las fluctuaciones de la presión se puede estimar considerando una región del flujo en la cual la velocidad (en un dado instante) es aproximadamente uniforme. Sea L el orden de magnitud de las dimensiones lineales de esa región. Dentro de esta región, la velocidad cambia de signo en un lapso del orden de $1/f$, lo que trae aparejado una variación de la cantidad de movimiento (por unidad de área perpendicular a L) del orden de ρLU . Para producir esta variación de cantidad de movimiento, la diferencia de presión entre los contornos de la región debe ser del orden de ρLUf . Resulta entonces que $|\partial p/\partial t| \approx \rho LUf^2$, y por lo tanto la condición que el flujo sea solenoidal se escribe como

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right| \approx \frac{LUf^2}{c^2} \ll \frac{U}{L} \quad \text{o sea} \quad \frac{L^2 f^2}{c^2} \ll 1 \quad (10.72)$$

Si la frecuencia típica de las variaciones temporales es U/L , la condición (10.72) se reduce a la (10.70) previamente encontrada. Por lo tanto cuando $f \gg U/L$ la (10.72) es más restrictiva que la (10.70), como ya habíamos anticipado. Se puede observar que cuando L es igual a la longitud

de onda de una onda sonora, se tiene $L_f/c = 1$ y la condición (10.72) no se cumple, lo cual es razonable puesto que la compresibilidad no se puede despreciar al tratar las ondas sonoras.

Término de la fuerza externa

Si la fuerza externa se debe a la gravedad, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}/c^2| \approx Ug/c^2$ de modo que obtenemos la condición

$$\frac{gL}{c^2} \ll 1 \quad (10.73)$$

En el caso del aire, que es el único fluido terrestre para el cual existe la posibilidad de que esta condición no se cumpla, podemos usar la expresión (10.9) de c y escribir la (10.73) como

$$\frac{\rho g L}{\gamma p} \ll 1 \quad (10.74)$$

El numerador del primer miembro de la (10.74) es igual a la diferencia de presión hidrostática entre dos puntos separados por la distancia vertical L . La condición (10.74) nos dice entonces que el flujo es incompresible si la escala vertical L de la distribución de velocidad es pequeña en comparación con $p/\rho g$, que es la escala vertical de la atmósfera (unos 8.5 km para aire en condiciones normales, ver el Capítulo 2). Es evidente que la condición (10.74) se cumple para todos los flujos a escala de laboratorio o que afectan capas de la atmósfera de espesor menor que algunos centenares de m.

En conclusión, el flujo es incompresible cuando se cumplen las tres condiciones

$$M^2 \ll 1, \quad \frac{L^2 f^2}{c^2} \ll 1, \quad \frac{gL}{c^2} \ll 1 \quad (10.75)$$

La *Dinámica de Gases* se ocupa principalmente de estudiar situaciones en que la primera de estas condiciones no se cumple. La segunda condición no se cumple en situaciones que se estudian en *Acústica*. Finalmente, las situaciones en que no se cumple la última de las (10.75) se encuentran en el ámbito de la *Meteorología Dinámica*.

Segundo término

Volvemos ahora a la segunda condición que se deriva de la (10.65), esto es la condición

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.76)$$

que se debe cumplir para que \mathbf{u} sea solenoidal. Puesto que para un fluido homogéneo hay una única relación funcional entre p , ρ y S , podemos escribir

$$\frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p = -\frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \frac{(\partial \rho / \partial T)_p}{(\partial s / \partial T)_p} = \frac{\alpha_p T}{c_p} \quad (10.77)$$

donde α_p es el coeficiente de expansión térmica a presión constante. Por otra parte la variación de la entropía proviene del flujo de calor (ec. (4.31)) y de la tasa de disipación de la energía mecánica ϕ (ec. (4.37)):

$$T \frac{ds}{st} = \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (10.78)$$

Sustituyendo entonces (10.77) y (10.78) en (10.76) resulta

$$\left| \frac{\alpha_p}{c_p} \left[\phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.79)$$

donde

$$\phi = \frac{2\eta}{\rho} (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij})^2 \quad (10.80)$$

El significado esencial de esta condición es que las variaciones de densidad de un elemento material por el calentamiento debido a la disipación viscosa y a la conducción térmica debe ser pequeña⁹.

Nuevamente, vamos a suponer que no hay cancelación entre los dos términos del primer miembro de la (10.79), y que la escala de variación espacial de las cantidades es L . Obtenemos entonces las dos siguientes condiciones

$$\frac{\alpha_p U^2}{c_p} \frac{\eta}{\rho L U} \ll 1 \quad , \quad \alpha_p \Theta \frac{\kappa}{L U} \ll 1 \quad (10.81)$$

donde $\kappa = k / \rho c_p$ es la difusividad térmica y Θ es la escala de variación de la temperatura del fluido (hemos supuesto que α_p es positivo).

Para tener una idea de las circunstancias en las cuales se podrían violar las condiciones (10.81) podemos calcular los primeros miembros de las desigualdades (10.81) para aire y agua a 15 °C y presión atmosférica, para un caso en el cual $L = 1$ cm, $U = 10$ cm/s, $\Theta = 10$ °C. Los resultados se dan en la Tabla 10.1.

Tabla 10.1. Estimación del cumplimiento de las condiciones de incompresibilidad que derivan de los efectos de la disipación viscosa y de la conducción térmica.

	$\frac{\alpha_p U^2}{c_p} \frac{\eta}{\rho L U}$	$\alpha_p \Theta \frac{\kappa}{L U}$
aire	5×10^{-10}	7×10^{-4}
agua	4×10^{-13}	3×10^{-7}

⁹ Si consideramos un fluido no homogéneo, pueden ocurrir cambios de la densidad debido a la difusión molecular (como ocurre, por ejemplo, en el caso de agua salada cuando la concentración de la solución no es uniforme) En esas circunstancias la condición para que \mathbf{u} sea solenoidal se puede encontrar de manera semejante.

Observando los valores que figuran en la Tabla 10.1 resulta evidente que es sumamente difícil que el efecto de la disipación viscosa lleve a violar la primera de las condiciones (10.81), y solamente en condiciones harto improbables (por ejemplo, $\Theta = 100^\circ\text{C}$ y $LU \approx 0.1\text{ cm}^2/\text{s}$ en un gas) la conducción del calor en un elemento del fluido será suficientemente rápida como para violar la segunda de las (10.81).

Por lo tanto, a los fines prácticos podemos descartar el segundo término de la (10.65) y en ausencia de ulteriores aclaraciones, decir que el comportamiento de un fluido es incompresible implica que el campo de velocidad es solenoidal; las condiciones bajo las cuales un fluido se comporta como incompresible son las (10.75), y entre ellas la primera es la más importante en la práctica.

Ondas internas de gravedad en fluidos estratificados

Las ondas acústicas (longitudinales) que acabamos de estudiar no son las únicas ondas que se pueden propagar en el seno de un fluido. En efecto, en presencia de la gravedad, si en el fluido hay estratificaciones de densidad se pueden también propagar ondas *transversales*, denominadas *ondas internas de gravedad*. El origen de estas ondas se puede entender recordando nuestro análisis de la estabilidad de fluidos estratificados (Capítulo 2). Vimos entonces que si se perturba un fluido con una estratificación *estable*, haciendo que una parcela del mismo se desplace verticalmente respecto de su posición de equilibrio, la diferencia entre su peso y el empuje de Arquímedes proporciona una fuerza de restitución, de resultados de la cual la parcela efectúa oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. Estas oscilaciones se propagan en el fluido en forma de ondas que son precisamente las ondas internas de gravedad.

Las ondas internas de gravedad son de gran interés para la meteorología y la oceanografía, y además presentan interesantes características. Por ese motivo las vamos a estudiar ahora. El tratamiento que vamos a presentar a continuación es un típico ejemplo de como se plantea el estudio de las *ondas e inestabilidades lineales en fluidos no uniformes*.

La ecuación diferencial de las pequeñas oscilaciones en un medio estratificado

El primer paso en el estudio de las oscilaciones en un fluido no uniforme es deducir la ecuación diferencial que describe el fenómeno. Si tomamos el eje z en la dirección vertical, nuestro estado no perturbado está caracterizado por

$$u = 0 \quad , \quad p = p(z) \quad , \quad \rho = \rho(z) \quad \text{con} \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho(z) \quad (10.82)$$

Para simplificar el análisis, consideraremos solamente ondas de pequeña amplitud, por lo tanto vamos a suponer que en presencia de la perturbación las variables que describen el flujo son

$$u' = \delta u \quad , \quad p' = p + \delta p \quad , \quad \rho' = \rho + \delta \rho \quad (10.83)$$

donde δu , δp y $\delta \rho$ son pequeñas perturbaciones. Vamos a suponer también que las perturbaciones son adiabáticas, lo cual es razonable en vista de lo que se acaba de ver. Por lo tanto, las ecuaciones que gobiernan el flujo son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{u}') &= 0 \\
\rho' \left[\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \right] &= -\nabla p' - \rho g \mathbf{e}_z \\
\frac{\partial s'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) s' &= 0
\end{aligned} \tag{10.84}$$

donde $s'(p', \rho') = s(p, \rho) + \delta s$ es la entropía por unidad de masa. Por ahora no vamos a especificar los perfiles de presión y densidad del estado no perturbado, ni haremos hipótesis acerca de la ecuación de estado del medio, de modo que nuestros resultados valen para un fluido cualquiera. Dado que las perturbaciones son pequeñas, vamos a linearizar las (10.84) descartando términos cuadráticos en las cantidades de perturbación. El resultado es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\delta u_z \frac{d\rho}{dz} - \rho \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \\
\rho \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \\
\rho \frac{\partial \delta u_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial y} \\
\rho \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z} - g \delta \rho \\
\frac{\partial \delta s}{\partial t} &= -\delta u_z \frac{ds}{dz}
\end{aligned} \tag{10.85}$$

El procedimiento a seguir ahora consiste en eliminar sucesivamente las variables δs , $\delta \rho$, δu_x , δu_y y δp para obtener una única ecuación diferencial para δu_z . Comenzaremos por la última de las (10.85), que nos dice que la variación local de la entropía se debe simplemente al transporte convectivo (recordemos que la entropía del estado no perturbado depende de z).

Dado que la entropía $s(p, \rho)$ es una función de estado, podemos escribir

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{dp}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dz} = -g\rho \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dz} \tag{10.86}$$

Del mismo modo, puesto que $s' = s(p', \rho') = s(p, \rho) + \delta s$, resulta

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \tag{10.87}$$

Reemplazando las (10.86) y (10.87) en la última de las (10.85) obtenemos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\delta u_z \left[-g\rho \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dz} \right] \tag{10.88}$$

Reordenando los términos de la (10.88) y recordando que

$$\frac{(\partial s / \partial \rho)_p}{(\partial s / \partial p)_\rho} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -c^2 \quad (10.89)$$

podemos escribir la ecuación de la entropía en la forma

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \delta u_z g \rho + c^2 \left(\delta u_z \frac{d\rho}{dz} + \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right) \quad (10.90)$$

y usando la ecuación de conservación de la masa (la primera de las (10.85)) en la (10.90) obtenemos finalmente

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \delta u_z g \rho - \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \quad (10.91)$$

Por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones consiste en las primeras cuatro de las (10.85) más la (10.91):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\delta u_z \frac{d\rho}{dz} - \rho \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \\ \rho \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial \delta u_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z} - g \delta \rho \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} &= \delta u_z g \rho - \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (10.92)$$

Puesto que los coeficientes de este sistema son funciones solamente de z , vamos a buscar soluciones de la forma

$$\delta p = P(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad , \quad \delta \rho = R(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad , \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{U}(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (10.93)$$

Sustituyendo entonces las (10.93) en las (10.92) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega R &= \rho(k_x U_x + k_y U_y) - i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \\ \omega \rho U_x &= k_x P \\ \omega \rho U_y &= k_y P \\ \omega \rho U_z &= -i \frac{dP}{dz} - i g R \\ \omega P &= \rho c^2 (k_x U_x + k_y U_y) + i \rho \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \end{aligned} \quad (10.94)$$

Usando la segunda y la tercera de estas ecuaciones e introduciendo el vector número de onda horizontal $\mathbf{k}_h = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$, podemos escribir

$$k_x U_x + k_y U_y = k_h U_h = \frac{k_h^2}{\omega \rho} P \quad (10.95)$$

donde U_h es el módulo de la componente horizontal de \mathbf{U} .

Sustituyendo esta expresión en la última de las (10.94) obtenemos

$$P = \frac{i\omega\rho}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \quad (10.96)$$

y usando esta expresión de P y la (10.95) en la tercera de las (10.94) resulta

$$R = \frac{i}{\omega} \frac{\rho k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) - i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \quad (10.97)$$

Por lo tanto tenemos todas nuestras variables expresadas en términos de U_z y sus derivadas. Reemplazando ahora P y R de la (10.96) y (10.97) en la cuarta de las (10.94) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega \rho U_z = \frac{d}{dz} \left[\frac{\omega \rho}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \right] + \\ + g \left[\frac{1}{\omega} \frac{\rho k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) - \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \right] \end{aligned} \quad (10.98)$$

Reordenando los términos de esta ecuación resulta

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left[\frac{\rho \omega^2 c^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \frac{dU_z}{dz} \right] + U_z \left\{ \omega^2 + \omega_B^2 \frac{c^2 k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} - g \frac{d}{dz} \left(\frac{c^2 k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \right) \right\} = 0 \quad (10.99)$$

donde hemos definido la *frecuencia de Brunt-Väisälä*, también denominada *frecuencia de flotación*, como

$$\omega_B^2 = g \left(-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{c^2} \right) \quad (10.100)$$

Veremos que ω_B es una frecuencia característica del problema que juega un rol muy importante. La ecuación (10.99) es el resultado buscado, y antes de proseguir conviene hacer algunos comentarios. La principal virtud de la (10.99) es su generalidad, pues en principio permite estudiar las oscilaciones de un fluido en reposo con una estratificación arbitraria. Por de pronto el lector podrá observar que en el caso particular $g = 0$ y sin estratificación, a partir de la (10.99) se recuperan nuestros resultados anteriores para las ondas acústicas. Con $g = 0$, pero con estratificación, la (10.99) permite estudiar la propagación de ondas acústicas en un medio no uniforme. La (10.99) también sirve como punto de partida para estudiar la estabilidad de la interfase entre dos fluidos uniformes pero de propiedades diferentes, como así también la reflexión y transmisión de ondas a través de dicha interfase. No es difícil, siguiendo el mismo procedimiento, deducir una ecuación diferencial aún más general que la (10.99), que rige las oscilaciones de un fluido estratificado en el cual las capas horizontales se *mueven* en el estado no perturbado con una velocidad $\mathbf{u} = u_x(z)\mathbf{e}_x + u_y(z)\mathbf{e}_y$. La ecuación que se obtiene es

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left[\frac{\rho \bar{\omega}^2 c^2}{\bar{\omega}^2 - c^2 k_h^2} \frac{dU_z}{dz} \right] + U_z \left\{ \bar{\omega}^2 + \omega_B^2 \frac{c^2 k_h^2}{\bar{\omega}^2 - c^2 k_h^2} - g \frac{d}{dz} \left(\frac{c^2 k_h^2}{\bar{\omega}^2 - c^2 k_h^2} \right) \right\} = 0 \quad (10.101)$$

donde $\bar{\omega}(z) = \omega - \mathbf{k}_h \cdot \mathbf{u}$ es la frecuencia que ve un observador que se mueve junto con el fluido de la capa z . Mediante esta ecuación se puede investigar una gran variedad de problemas, entre los cuales se cuentan las inestabilidades de flujos paralelos.

Antes de estudiar las soluciones de la ec. (10.99) conviene estudiar tres clases de soluciones particulares del sistema (10.94) que no están incluidas entre las soluciones de la ec. (10.99): las *oscilaciones de Brunt-Väisälä*, las *ondas de Lamb* y las *ondas de superficie*. Estos modos se perdieron por el camino, por así decir, por la forma como procedimos para llegar a la (10.99).

Las oscilaciones de Brunt-Väisälä y la estabilidad de un fluido estratificado

Consideremos una perturbación que consiste de un movimiento *puramente vertical* (esto es $U_x = 0$, $U_y = 0$). El sistema (10.94) se reduce entonces a

$$\begin{aligned} \omega R &= -i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \\ 0 &= k_h P \\ \omega \rho U_z &= -i \frac{dP}{dz} - igR \\ \omega P &= i \rho \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \end{aligned} \quad (10.102)$$

Consideremos la segunda y la tercera de estas ecuaciones. Si $k_h = 0$, eliminando P y R entre las tres restantes ecuaciones se llega a una ecuación diferencial para U_z que no es otra cosa que el caso particular $k_h = 0$ de la (10.99). Por lo tanto este tipo de solución no trae novedades. Si en cambio k_h no es nulo, entonces debe ser $P = 0$ y quedan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega R &= -i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \\ \omega \rho U_z &= -igR \\ \frac{dU_z}{dz} &= \frac{g}{c^2} U_z \end{aligned} \quad (10.103)$$

Si eliminamos R entre las dos primeras ecuaciones y usamos la tercera para expresar dU_z/dz en términos de U_z resulta

$$(\omega^2 - \omega_B^2) U_z = 0 \quad (10.104)$$

Por lo tanto, tendremos una solución no trivial si

$$\omega = \pm \omega_B \quad (10.105)$$

Las soluciones consisten pues en oscilaciones verticales con la frecuencia de Brunt-Väisälä y con $k_h \neq 0$ cualquiera. La dependencia de U_z con z proviene de la estratificación (a través de $c(z)$) y se obtiene resolviendo la ecuación

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{g}{c^2} U_z \quad (10.106)$$

En términos de U_z se obtiene R como

$$R = \pm i \frac{\rho \omega_B}{g} U_z \quad (10.107)$$

Estas perturbaciones se llaman *oscilaciones de Brunt-Väisälä*, y tienen importancia porque determinan la *estabilidad* de la estratificación y producen interesantes fenómenos atmosféricos.

Estabilidad de un fluido estratificado

Recordemos la definición (10.100) de la frecuencia de Brunt-Väisälä. Si se cumple que

$$\omega_B^2 = g \left(-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{c^2} \right) < 0 \quad (10.108)$$

ω_B es imaginaria, y en ese caso hay perturbaciones que crecen exponencialmente con el tiempo¹⁰, y por lo tanto la estratificación es *inestable*. La inestabilidad se denomina *convectiva* pues da origen a corrientes convectivas ascendentes o descendentes.

Como se ve de la (10.108), el signo de ω_B^2 depende de las características de la estratificación. El significado de la condición (10.108) se entiende si observamos que $dp = -\rho g dz$ es la variación de la presión sobre un elemento del fluido debida a una variación dz de su altura desde z a $z + dz$ (Fig. 10.5). Si el elemento evoluciona adiabáticamente, esta variación de presión produce una variación de densidad $d\rho_{ad} = dp/c^2 = -(\rho g/c^2) dz$. Por otra parte la diferencia entre la densidad en $z + dz$ y en z es $d\rho = (d\rho/dz) dz$, donde $d\rho/dz$ es el gradiente de densidad propio de la estratificación. Claramente, si $d\rho_{ad} < d\rho$ la estratificación es inestable, pues la diferencia entre el empuje y el peso produce una resultante tendiente a incrementar el apartamiento del elemento desde su posición de equilibrio. Pero esta condición de inestabilidad equivale a pedir

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{c^2} < 0 \quad (10.109)$$

¹⁰ El crecimiento exponencial ocurre solamente mientras la perturbación se mantiene pequeña, de modo que valgan las aproximaciones en base a las cuales hemos desarrollado nuestra teoría. Cuando la perturbación alcanza una magnitud apreciable ya no se pueden despreciar los términos no lineales de las ecuaciones, y el cálculo de su evolución se tiene que hacer en base a las ecuaciones completas, lo cual se puede llevar a cabo sólo numéricamente y aún así es bastante difícil. El crecimiento de la inestabilidad, por supuesto, deja de ser exponencial. Pero a los fines de determinar la inestabilidad de la estratificación, nuestra teoría lineal alcanza, en el sentido que si la estratificación es inestable de acuerdo con la teoría lineal, seguramente sigue siendo inestable también de acuerdo con la teoría completa, no lineal. Lo que no es cierto es la proposición inversa: el hecho que un sistema sea estable frente a pequeñas perturbaciones *no garantiza* que sea estable frente a perturbaciones de amplitud finita.

que es precisamente la (10.108).

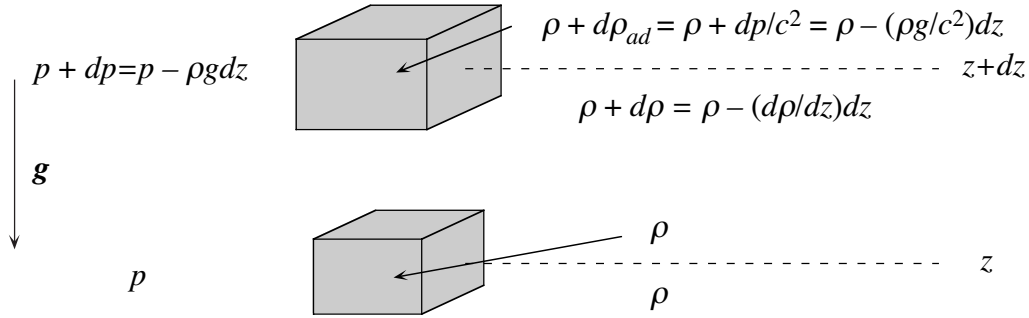


Fig. 10.5 Inestabilidad de un fluido estratificado. Si una parcela se desplaza verticalmente y evoluciona adiabáticamente, su densidad es diferente de la que tiene el fluido que la rodea en su nueva posición. Por lo tanto el peso y el empuje no se equilibran. Si $d\rho_{ad} < d\rho$, la estratificación es inestable, pues la diferencia entre el empuje y el peso produce una resultante que tiende a apartar al elemento de su posición de equilibrio.

En el caso de un fluido *estrictamente* incompresible se tiene $d\rho_{ad} = 0$, lo que equivale tomar el límite $c \rightarrow \infty$ en la expresión general

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{ad} = -\frac{\rho g}{c^2} \quad (10.110)$$

Por lo tanto en el límite incompresible la condición de inestabilidad se reduce a

$$\omega_B^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} < 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{d\rho}{dz} > 0 \quad (10.111)$$

que nos dice que la estratificación es inestable si la densidad aumenta con la altura.

En el Capítulo 2 analizamos la estabilidad de una atmósfera de gas ideal y también mencionamos la condición de estabilidad para un líquido incompresible con una estratificación de densidad. Vemos ahora que nuestro análisis nos permite encontrar el criterio general de inestabilidad para un fluido estratificado con una ecuación de estado cualquiera, que incluye como casos particulares los que discutimos en el Capítulo 2.

Las ondas de Lamb

Otras soluciones importantes del sistema (10.94) consisten de oscilaciones en las cuales el movimiento es *puramente horizontal* (esto es $U_z = 0$). En este caso las (10.94) se reducen a

$$\begin{aligned} \omega R &= \rho k_h U_h \\ \omega \rho U_h &= k_h P \\ 0 &= \frac{dP}{dz} + gR \\ \omega P &= \rho c^2 k_h U_h \end{aligned} \quad (10.112)$$

Eliminando U_h entre la segunda y la cuarta de las (10.112) se obtiene

$$(\omega^2 - c^2 k_h^2)P = 0 \quad (10.113)$$

Para que esta ecuación tenga una solución no trivial se debe cumplir la condición

$$\omega = \pm c k_h \quad (10.114)$$

que es la relación de dispersión de las ondas sonoras. Por lo tanto estas oscilaciones, que se llaman *ondas de Lamb*, son ondas sonoras que se propagan horizontalmente. Para conocer su estructura falta todavía determinar la dependencia en z de la perturbación debida a la estratificación. Resolviendo el sistema de ecuaciones (10.112) con ω dado por la (10.114) obtenemos

$$R = \frac{P}{c^2} \quad , \quad U_h = \pm \frac{P}{\rho c} \quad (10.115)$$

donde P se obtiene en función de la estratificación integrando la ecuación

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{c^2} P \quad (10.116)$$

El único efecto de la gravedad sobre estos modos es la dependencia de R , P y U con la altura.

Las ondas de superficie

Consisten de oscilaciones para las cuales el movimiento es *estrictamente incompresible* (es decir $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$). En este caso el sistema (10.94) se reduce a

$$\begin{aligned} R &= -\frac{i}{\omega} U_z \frac{d\rho}{dz} \\ U_h &= \frac{k_h}{\rho \omega} P \\ U_z &= -\frac{i}{\omega \rho} \left(gR + \frac{dP}{dz} \right) \\ P &= i \frac{g\rho}{\omega} U_z \end{aligned} \quad (10.117)$$

A estas ecuaciones tenemos que agregar la condición $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ que se escribe como

$$U_h = \frac{i}{k_h} \frac{dU_z}{dz} \quad (10.118)$$

Sustituyendo P y R en la tercera de las (10.117) resulta

$$U_z = \frac{g}{\omega^2} \frac{dU_z}{dz} \quad (10.119)$$

Por otra parte, de la segunda de las (10.117) y la (10.118) obtenemos

$$\frac{dU_z}{dz} = -i \frac{k_h^2}{\rho\omega} P \quad (10.120)$$

Sustituyendo en esta ecuación a P por medio de la última de las (10.117) resulta

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{gk_h^2}{\omega^2} U_z \quad (10.121)$$

Antes de integrar esta ecuación para obtener el perfil de U_z , usamos la (10.121) en la (10.119) para obtener la condición de compatibilidad

$$(\omega^4 - g^2 k_h^2) U_z = 0 \quad (10.122)$$

Por lo tanto tendremos una solución no trivial solo si

$$\omega^2 = gk_h \quad (10.123)$$

Usando la (10.123) en la (10.120) e integrando resulta

$$U_z = U_{0z} e^{k_h z}, \quad U_{0z} = \text{cte.} \quad (10.124)$$

Puesto que U_z diverge para $z \rightarrow \infty$ estas soluciones tienen sentido solamente si el fluido tiene una superficie libre que lo limita superiormente. Vemos entonces que estos modos no son otra cosa que la generalización para un medio estratificado de las ondas de gravedad que estudiamos en el Capítulo 9.

Ondas internas en una estratificación exponencial

Volviendo ahora a la ec. (10.99), para progresar más es preciso conocer los perfiles de densidad $\rho(z)$ y de presión $p(z)$ (o, lo que es lo mismo, $c(z)$) en el estado no perturbado. En general, debido a la forma complicada en que interviene la estratificación, sólo es posible obtener soluciones numéricas. Cuando las variaciones de la densidad y la presión con la altura son lentas, en el sentido que su escala espacial de variación, L_z , es mucho mayor que la escala λ_z sobre la cual varían las cantidades de perturbación, se puede emplear una aproximación muy útil, llamada *aproximación de la óptica geométrica*, o *aproximación WKB*¹¹. En efecto, si $\lambda_z \ll L_z$, se puede suponer que U_z es de la forma $U_z = A(z) \exp[ik_z(z)z]$ donde $A(z)$ y $k_z(z)$ (con $|k_z(z)| \approx 1/\lambda_z$) son funciones de z que varían lentamente sobre la escala L_z , mientras que la variación rápida sobre la escala λ_z está dada por la exponencial compleja (expresiones análogas valen para las demás cantidades que describen la perturbación). Con estas hipótesis es posible plantear una solución por iteraciones de la (10.99), que permite determinar las funciones incógnitas $A(z)$ y $k(z)$ como series de potencias de la cantidad pequeña λ_z / L_z . Por razones de brevedad no vamos a usar esta técnica, pero la mencionamos para conocimiento del lector, que puede encontrar exposiciones detalladas en varios textos de Óptica y de Mecánica Cuántica.

¹¹ El acrónimo corresponde a las iniciales de Wentzel, Kramers y Brillouin, que desarrollaron el método para estudiar la propagación de ondas en medios inhomogéneos. También se suele emplear el acrónimo WKBJ, para reconocer las contribuciones de Jeffreys al mismo problema.

La (10.99) tiene soluciones analíticas cuando la densidad del estado no perturbado varía en forma exponencial con la altura y la velocidad del sonido no depende de z , es decir

$$\rho = \rho_0 e^{-z/h} \quad , \quad \frac{dc}{dz} = 0 \quad , \quad \omega_B^2 = g \left(-\frac{g}{c^2} + \frac{1}{h} \right) \quad (10.125)$$

Este es el caso, por ejemplo, de una atmósfera isotérmica de un gas ideal (como ya vimos en el Capítulo 2), y se tiene entonces

$$h = \frac{c^2}{\gamma g} = \frac{RT}{Mg} \quad , \quad \omega_B^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{c^2} \quad (10.126)$$

El interés de estudiar este caso idealizado reside en que al poder expresar la solución mediante fórmulas sencillas se aprecian mejor las propiedades de las ondas en que estamos interesados. Con las hipótesis (10.126) la (10.99) se simplifica considerablemente y queda

$$\frac{d^2 U_z}{dz^2} - 2q \frac{dU_z}{dz} + U_z \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} - k_h^2 \left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \right) \right\} = 0 \quad (10.127)$$

donde $q = 1/2h$. La (10.128) es una ecuación con coeficientes constantes, cuyas soluciones son de la forma

$$U_z = A e^{(q \pm i k_z) z} \quad , \quad A = \text{cte.} \quad (10.128)$$

Sustituyendo (10.128) en (10.127) obtenemos la condición que determina el valor de k_z como

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_h^2 \left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \right) - q^2 \quad (10.129)$$

La (10.129) es la *relación de dispersión* de las *ondas internas*. Para analizarla mejor, conviene introducir la cantidad Γ , definida por la relación

$$q = \frac{g}{c^2} - \Gamma \quad (10.130)$$

En términos de Γ , tenemos que

$$\omega_B^2 = g \left(\frac{g}{c^2} - 2\Gamma \right) \quad , \quad q^2 c^2 \equiv \omega_Q^2 = \omega_B^2 + c^2 \Gamma^2 \quad (10.131)$$

y la relación de dispersión se escribe como

$$c^2 k_z^2 = (\omega^2 - \omega_Q^2) \left(1 - \frac{c^2 k_h^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_B^2}{\omega^2 - \omega_Q^2} \right) \quad (10.132)$$

Para ver bajo que condiciones la perturbación se puede propagar en la dirección vertical, tenemos que examinar el signo del miembro derecho de la (10.132). El primer factor es positivo si

$\omega^2 > \omega_Q^2$ y negativo si $\omega^2 < \omega_Q^2$. En cuanto al segundo factor, es positivo si $k_h^2 < H^2$ y negativo si $k_h^2 > H^2$, donde el valor crítico H está dado por

$$H^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega^2 - \omega_Q^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \quad (10.133)$$

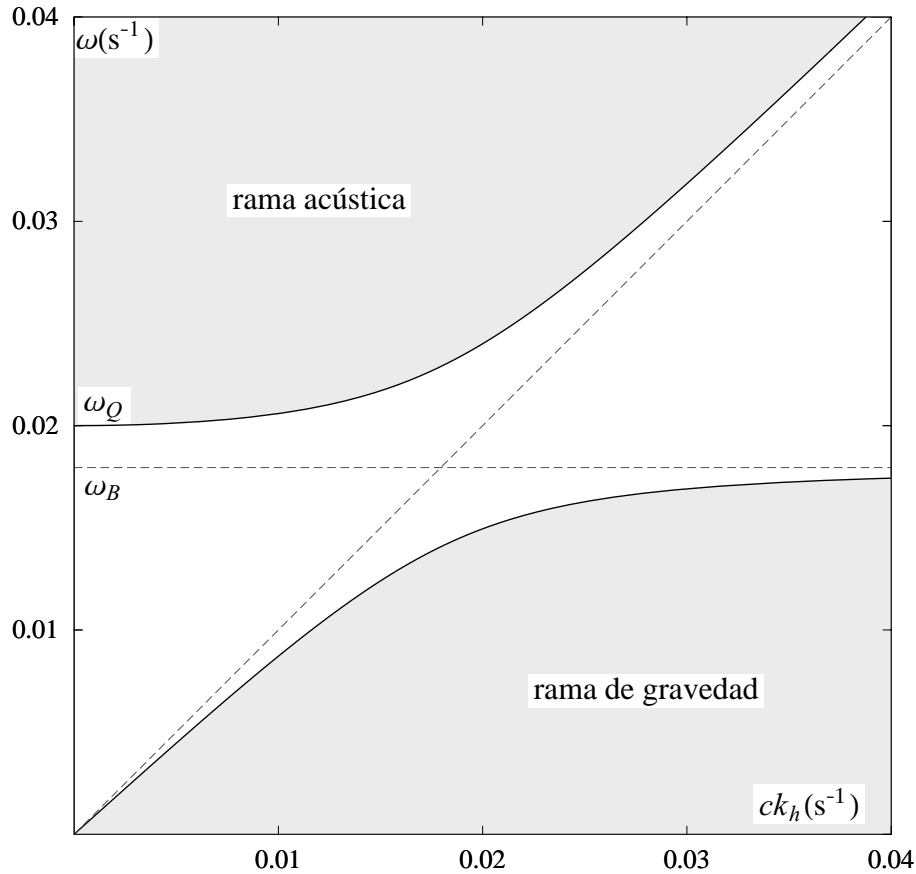


Fig. 10.6. Espectro de las ondas internas en una atmósfera isoterma (con $T \approx 15^\circ\text{C}$). Además de las ramas acústica y de gravedad (áreas grises) se han indicado con líneas de trazos las ondas de Lamb y las oscilaciones de Brunt-Väisälä.

Notar que H es real para $\omega^2 < \omega_B^2$ y $\omega^2 > \omega_Q^2$, e imaginario en el intervalo $\omega_B^2 < \omega^2 < \omega_Q^2$. Por lo tanto los modos que se pueden propagar se dividen en dos *ramas*, como se puede apreciar en el diagrama de la Fig. 10.6. Una rama corresponde a tener $\omega^2 > \omega_Q^2$ y $k_h^2 < H^2$, con lo cual ambos factores en la (10.132) son positivos; esta rama se caracteriza porque las oscilaciones tienen frecuencias *altas* y como veremos es la *rama acústica*. La otra rama corresponde a tener $\omega^2 < \omega_B^2$ y $k_h^2 > H^2$ (entonces ambos factores en la (10.132) son negativos); se caracteriza porque las oscilaciones tienen frecuencias *bajas* y constituye la *rama de gravedad*. Obsérvese que la rama de gravedad existe solamente si $g \neq 0$ y si hay estratificación. Vamos ahora a analizar las propiedades de estas ondas. Para eso escribimos la relación de dispersión (10.132) en la forma

$$\omega^4 - \omega^2 c^2 (k^2 + q^2) + c^2 k^2 \cos^2 \theta \omega_B^2 = 0 \quad (10.134)$$

donde hemos puesto $k^2 \equiv k_h^2 + k_z^2$ y $\cos \theta = k_h / k$. Resolviendo para ω^2 esta ecuación obtenemos

$$\omega_A^2 = \frac{c^2 k^2}{2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{k^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{k^2}\right)^2 - 4 \cos^2 \theta \frac{\omega_B^2}{k^2 c^2}} \right\} \quad (10.135)$$

y

$$\omega_G^2 = \frac{c^2 k^2}{2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{k^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{k^2}\right)^2 - 4 \cos^2 \theta \frac{\omega_B^2}{k^2 c^2}} \right\} \quad (10.136)$$

Es fácil verificar que la primera de estas ecuaciones es la relación de dispersión de la rama acústica mientras que la segunda es la relación de dispersión de la rama de gravedad.

En el caso de la atmósfera se encuentran los siguientes valores típicos

$$\omega_B \approx 0.018 \text{ s}^{-1} \quad , \quad q \approx 5.9 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \quad , \quad \Gamma \approx 2.543 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \quad (10.137)$$

El período de las oscilaciones de Brunt-Väisälä es entonces de unos 5-6 minutos. Por lo tanto los modos de la rama de gravedad están muy separados en frecuencia de los modos de la rama acústica, a excepción de infrasonidos de bajísima frecuencia próximos a $\omega_Q \approx 0.020 \text{ s}^{-1}$. Salvo en estos casos, es fácil verificar que el segundo término del radicando de las (10.136) es más pequeño que el primero por un factor del orden de $\omega_B^2 / k^2 c^2 \approx 2 \times 10^{-9} [k_h (\text{m}^{-1})]^{-2}$. Por lo tanto para cualquier longitud de onda razonable es mucho menor que el primero. Lo mismo ocurre para estratificaciones en el agua. Por ese motivo podemos con muy buena aproximación poner

$$\omega_A = \pm ck + \dots \quad , \quad \omega_G = \pm \omega_B \cos \theta + \dots \quad (10.138)$$

donde $\cos \theta = k_h / k$ y los ... indican cantidades más pequeñas por factores del orden de $\omega_B^2 / k^2 c^2$. Vemos así que la frecuencia de las ondas internas de gravedad es casi independiente del módulo del vector de onda k , y sólo depende del ángulo θ entre k y el plano (x, y) .

Si usamos las (10.138) junto con la expresión (10.128) de U_z (y las expresiones análogas para las demás cantidades que describen la onda) en las (10.94) es fácil verificar (dentro de la aproximación con la que se obtuvieron las (10.138)) que se cumple

$$\left(\frac{U_z}{U_h} \right)_A \approx \frac{k_z}{k_h} \quad , \quad \left(\frac{U_z}{U_h} \right)_G \approx \frac{k_h}{k_z} \quad (10.139)$$

para la rama acústica y de gravedad respectivamente. Las (10.139) muestran que los modos de la rama acústica son casi *longitudinales* (esto es, δu es paralelo al vector de onda k), mientras que las ondas internas de gravedad son casi *transversales* (δu es perpendicular a k).

Volviendo ahora a las fórmulas exactas (10.132) y (10.136) vemos que para ω y k fijos, la velocidad de fase $c_{A,G} = \omega_{A,G} / k$ de los modos de la rama acústica y de gravedad depende del ángulo θ . Para la rama acústica se cumple que

$$c_A(\theta = 0) \equiv c(1 + \Gamma^2 / 2k^2) \leq c_A(\theta) \leq c_A(\theta = \pi / 2) = c(1 + q^2 / 2k^2) \quad (10.140)$$

En vista de la (10.137), la variación de c_A con θ es insignificante.

Para la rama de gravedad tenemos

$$c_G(\theta = 0) \equiv \omega_B / k \geq c_G(\theta) \geq c_G(\theta = \pi/2) = 0 \quad (10.141)$$

Notar que $c_G / c_A \approx \omega_B / kc \approx 4 \times 10^{-4} / k_h (\text{m}^{-1})$ es siempre mucho menor que la unidad.

Las (10.136), y también las (10.140) y (10.141) muestran que los modos de ambas ramas son dispersivos, aunque los de la rama acústica sólo *muy débilmente*. Para entender mejor las propiedades dispersivas de estos modos es útil representar las *superficies de fase* en el espacio del vector número de onda \mathbf{k} , definidas por $\omega(\mathbf{k}) = \text{cte}$. (dado que existe simetría de rotación alrededor del eje k_z basta representar estas superficies como curvas en el plano (k_h, k_z)).

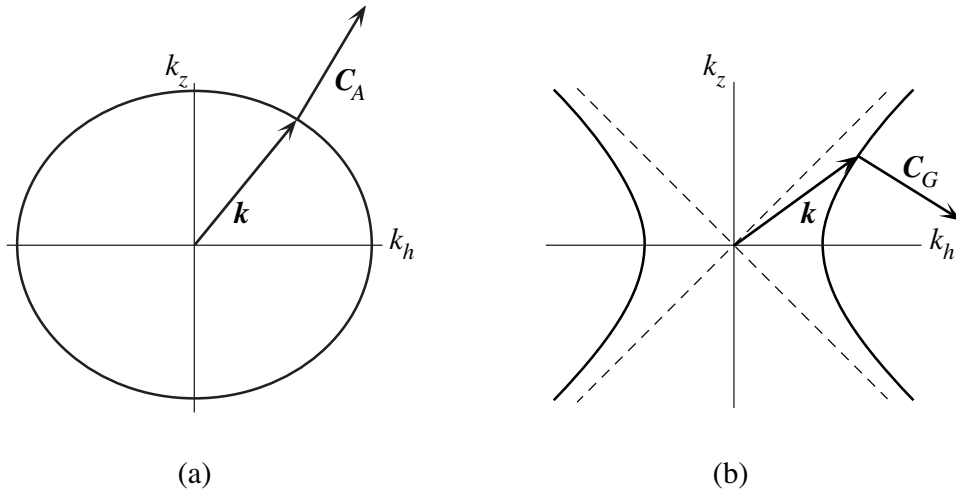


Fig. 10.7. Superficies de fase de las ondas de la rama acústica (a) y de la rama de gravedad (b). El diagrama es cualitativo. Se puede apreciar que la dirección de la velocidad de grupo de una onda de la rama acústica no coincide *exactamente* con la dirección de \mathbf{k} , debido a que la superficie de fase es un elipsoide achatado. La velocidad de grupo de una onda de la rama de gravedad, cuya superficie de fase es un hiperboloide, es aproximadamente perpendicular a \mathbf{k} .

Para la rama acústica, escribimos la (10.132) como

$$\frac{k_z^2}{Z_A^2} + \frac{k_h^2}{H_A^2} = 1 \quad \text{con} \quad Z_A^2 = \frac{\omega^2 - \omega_Q^2}{c^2} > 0, \quad H_A^2 = \frac{\omega^2 - \omega_Q^2}{c^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_B^2} > 0 \quad (10.142)$$

La (10.142) muestra que las superficies de fase constante son *elipsoides* de semiejes Z_A y H_A . Es fácil ver que $1 < H_A / Z_A \leq \Gamma / q$, por lo tanto los elipsoides son *achataados* (el achatamiento es apreciable sólo si ω está cerca del extremo inferior de la rama acústica: ya para ondas acústicas de unos pocos Hz se tiene $H_A / Z_A \approx 1$). La velocidad de grupo se obtiene tomando el gradiente de ω en el espacio del número de onda:

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \quad (10.143)$$

y por consiguiente es perpendicular a las superficies de fase. Como se puede apreciar en la Fig. 10.7a (donde elegimos ω cerca del extremo inferior de la rama acústica), la dirección de la velocidad de grupo no coincide *exactamente* con la dirección de \mathbf{k} (y por lo tanto con la dirección de la velocidad de fase), sino que está ligeramente desviada hacia la dirección vertical.

Para la rama de gravedad, escribimos la (10.132) como

$$\frac{k_z^2}{Z_G^2} = \frac{k_h^2}{H_G^2} - 1 \quad \text{con} \quad Z_G^2 = \frac{\omega_Q^2 - \omega^2}{c^2} > 0, \quad H_G^2 = \frac{\omega_Q^2 - \omega^2}{c^2} \frac{\omega^2}{\omega_B^2 - \omega^2} > 0 \quad (10.144)$$

La (10.144) muestra que las superficies de fase constante de la rama de gravedad son *hiperboloïdes* de semiejes Z_G y H_G . Obsérvese que

$$\frac{H_G^2}{Z_G^2} = \frac{\omega^2}{\omega_B^2 - \omega^2} \quad (10.145)$$

es una función creciente de ω .

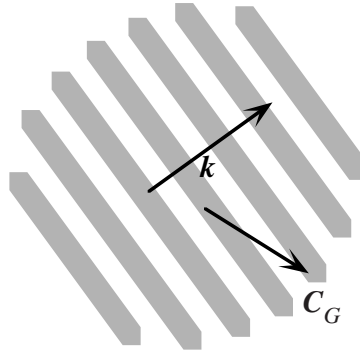


Fig. 10.8. Dispersión de un paquete de ondas internas de gravedad. El paquete se propaga en una dirección aproximadamente *paralela* a las crestas y valles, mientras que al mismo tiempo, las crestas y valles individuales se desplazan *transversalmente* a la dirección del movimiento del paquete. Los desplazamientos de los elementos del fluido debidos a la onda son aproximadamente transversales a \mathbf{k} .

Como se puede apreciar en la Fig. 10.7b, la dirección de la velocidad de grupo es aproximadamente *perpendicular* a \mathbf{k} (y por lo tanto a la dirección de la velocidad de fase). Si se usa la expresión aproximada (10.138) para calcular la velocidad de grupo (dejamos este cálculo como ejercicio para el lector), se obtiene como resultado que la velocidad de grupo es estrictamente perpendicular a \mathbf{k} , lo que es cierto sólo aproximadamente¹². De resultados de esto, un paquete de ondas que consiste de un conjunto de crestas y valles, como se muestra en la Fig. 10.8, se propaga en conjunto en una dirección muy aproximadamente *paralela* a las crestas y valles, mientras que al mismo tiempo, las crestas y valles individuales se desplazan *transversalmente* a la dirección del movimiento del paquete. Este comportamiento a primera vista sorprendente ha sido verificado experimentalmente.

¹² La aproximación (10.138) equivale a reemplazar el hiperboloïde (10.144) por su cono asintótico.

La dispersión de las ondas internas de gravedad resulta ciertamente curiosa para quien no está familiarizado con la variedad de comportamientos que se dan con diferentes clases de ondas. Sin embargo, otras clases de ondas presentan el mismo tipo de dispersión, entre ellas las ondas magnetoacústicas que ocurren en los plasmas.

Las oscilaciones de Brunt-Väisälä y las ondas internas de gravedad son la causa de algunos interesantes fenómenos atmosféricos. Entre ellos se cuentan las *ondas de sotavento* (“lee waves”), que se presentan corriente abajo de obstáculos topográficos como colinas o montañas, y también cuando una intrusión de aire frío y denso penetra por debajo de una región de aire más cálida, como sucede cuando un frente frío avanza. La presencia del obstáculo induce en la corriente de aire oscilaciones verticales con la frecuencia de Brunt-Väisälä, que son arrastradas por la corriente. Si la velocidad del viento es v , la longitud de onda de la onda de sotavento es

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega_B} \quad (10.146)$$

Para una velocidad del viento de 10 m/s resulta $\lambda \approx 3.5$ km. Las corrientes ascendentes debidas a estas oscilaciones son aprovechadas por las aves rapaces y por los cultores del vuelo con planeadores para elevarse a grandes alturas. Cuando la humedad del aire es alta se produce condensación en las crestas de las ondas de sotavento, que se manifiesta por la aparición de nubes. En condiciones adecuadas se observan entonces nubes equiespaciadas en posiciones fijas respecto de la topografía.

Las *nubes lenticulares* (que por su forma peculiar algunos observadores no informados han interpretado a veces como OVNI), los patrones de nubes lineares y equiespaciadas, y los patrones regulares de nubes conocidos vulgarmente como “cielo aborregado” que se observan frecuentemente cuando se aproxima un frente frío, también tienen su origen en esta clase de oscilaciones.

11. ONDAS DE AMPLITUD FINITA

Antes de encarar el estudio de los efectos no lineales que ocurren cuando las ondas en un fluido tienen una amplitud que no es infinitesimal, conviene presentar algunas consideraciones que ayudarán al lector a encuadrar adecuadamente el tema dentro de un panorama general y ordenar las ideas que se han introducido en los Capítulos anteriores al tratar algunos ejemplos de ondas lineales.

No existe, en realidad, una definición única del concepto de *onda*. Se pueden dar varias definiciones restrictivas, pero para abarcar todo el rango de los fenómenos ondulatorios es mejor guiarse por la noción intuitiva que una onda es cualquier *señal reconocible* que se transfiere de un lugar a otro del medio, de forma que se pueda identificar una *velocidad de propagación*. La señal puede ser cualquier característica de la perturbación, por ejemplo el máximo, o una variación abrupta de cierta magnitud, con tal que dicha característica se pueda reconocer claramente y que su posición se pueda determinar en distintos momentos. La señal se puede distorsionar y su magnitud y su velocidad de propagación pueden cambiar, siempre y cuando siga siendo reconocible. Esta noción puede parecer algo ambigua, pero es perfectamente adecuada y todo intento de ser más precisos es demasiado restrictivo, pues en diferentes clases de ondas las características más importantes son distintas.

Conviene distinguir dos clases principales de ondas. La primera se formula matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, y por ese motivo estas ondas se denominan *hiperbólicas*. La segunda clase es más difícil de caracterizar, pero puesto que en problemas lineales comprende los casos más simples de ondas dispersivas, vamos a llamar ondas *dispersivas* las que pertenecen a este conjunto.

Ondas hiperbólicas

Como prototipo de esta clase se suele citar la ecuación lineal de ondas¹, que en una dimensión se escribe en la forma

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0 \quad (11.1)$$

En realidad la ecuación de primer orden

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = 0 \quad (11.2)$$

es más sencilla todavía. Recordemos, de paso, que en el capítulo anterior vimos que la (11.1) se puede factorizar como

$$(\partial_t + c_0 \partial_x)(\partial_t - c_0 \partial_x) \varphi \equiv \partial_{\xi_+} \partial_{\xi_-} \varphi = 0 \quad (11.3)$$

con $\xi_+ = x - c_0 t$, $\xi_- = x + c_0 t$, de modo que la solución general de (11.1) es

$$\varphi = \varphi_+(\xi_+) + \varphi_-(\xi_-) = \varphi_+(x - c_0 t) + \varphi_-(x + c_0 t) \quad (11.4)$$

donde φ_+, φ_- son funciones arbitrarias, respectivamente soluciones de la (11.2) y de

¹ Con los subscriptos t y x indicamos las derivadas parciales respecto del tiempo y de la coordenada x .

$$\varphi_t - c_0 \varphi_x = 0 \quad (11.5)$$

Por lo tanto las propiedades de las soluciones de la (11.1) son equivalentes a las de las soluciones del sistema (11.2), (11.5).

Este tipo de ecuaciones aparece en Acústica, como vimos en el Capítulo anterior, y también en Elasticidad y en Electromagnetismo y sus propiedades básicas así como sus soluciones se investigaron primero en esas áreas de la Física Clásica. Pero la ec. (11.1), o la (11.2), no nos cuentan *toda* la historia del fenómeno. En efecto, como vimos en el Capítulo anterior, incluso despreciando los efectos de la viscosidad y de la conducción del calor, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido compresible son *no lineales*, y para llegar a la ecuación (11.1) tuvimos que linearizarlas, conservando sólo términos de primer orden en las perturbaciones.

Ondas hiperbólicas no lineales

Una vez resuelto el problema lineal con las adecuadas condiciones iniciales y de contorno (como hicimos en el Capítulo 10), es natural plantear algunas preguntas acerca de la relación entre esa solución y las ecuaciones no lineales originales. Por ejemplo: incluso para perturbaciones pequeñas, ¿cuán preciso es el resultado de la teoría lineal? ¿qué características cualitativas importantes se han perdido debido a la aproximación lineal?, y si las perturbaciones no son pequeñas y por lo tanto no es lícito linearizar las ecuaciones básicas, como ocurre en el caso de explosiones o de perturbaciones provocadas por aviones y misiles supersónicos, ¿qué se puede obtener directamente a partir de las ecuaciones no lineales? y en tal caso ¿cuáles son las modificaciones que provienen de la viscosidad y de la conducción térmica?

La búsqueda de respuestas a estos interrogantes en la dinámica de gases llevó a desarrollar la mayoría de las ideas fundamentales acerca de las *ondas hiperbólicas no lineales*. En este contexto, el fenómeno *nuevo* más relevante que surge de la teoría no lineal es la *onda de choque*. Una onda de choque en un gas consiste de una *variación brusca* de presión, densidad y velocidad, que tiene lugar sobre una escala de distancia que está determinada por procesos como la viscosidad, la conducción del calor y otros más, *que hemos ignorado* al escribir las ecuaciones que describen el grueso del flujo. Como ejemplos de ondas de choque en gases podemos citar la onda expansiva producida por una *explosión* y el *estampido sónico* que se escucha cuando pasa un avión supersónico.

La teoría matemática de las ecuaciones hiperbólicas no lineales que vamos a introducir aquí permite predecir estos fenómenos, pero su comprensión completa y detallada requiere analizar los efectos de la viscosidad, la conducción térmica y ciertos aspectos de la Teoría Cinética (algunos de los cuales aún hoy son materia de investigación) cuyo estudio excede el ámbito de estas notas.

Aunque las ideas básicas acerca de la propagación no lineal de ondas se desarrollaron en el contexto de la dinámica de gases, esas mismas nociones se aplican a *cualquier* sistema gobernado por ecuaciones hiperbólicas no lineales. Además, si bien el problema clásico de la dinámica de gases (en su forma linearizada) lleva a la ecuación de segundo orden (11.1), hay otros ejemplos de ondas que conducen directamente a la ecuación de *primer orden* más simple (11.2). Entre ellos se cuentan las *ondas de creciente* en ríos y canales, las *ondas en glaciares*, las *ondas en el flujo de tráfico* en una carretera y ciertos fenómenos de propagación ondulatoria en reacciones químicas. Al igual que en el problema clásico, la formulación *completa* del problema lleva en estos casos a ecuaciones *no lineales*, cuya versión más sencilla es

$$\varphi_t + c(\varphi)\varphi_x = 0 \quad (11.6)$$

en la cual la velocidad de propagación $c(\varphi)$ depende del valor local de la perturbación φ . El estudio de esta ecuación, cuyo aspecto simple esconde una gran riqueza de fenómenos, nos permitirá introducir los conceptos fundamentales de las ondas hiperbólicas no lineales. Preferimos comenzar con problemas del tipo (11.6) antes que seguir el desarrollo histórico de esos conceptos, porque son más sencillos del punto de vista matemático que la dinámica de gases y entonces las ideas fundamentales surgen con más claridad. Además estos problemas son interesantes por sí mismos y por sus aplicaciones. Como veremos, la principal característica no lineal es la *ruptura de las ondas* y la formación de *ondas de choque*. La teoría matemática se basa en el *método de las características*, y en el *tratamiento especial* que hay que dar a las ondas de choque.

Ondas dispersivas

La noción de *onda dispersiva* (como las olas sobre la superficie en el agua, o las ondas internas en fluidos estratificados) no se basa en el carácter de la ecuación, sino en la naturaleza de la *solución*. Un *sistema dispersivo lineal* es un sistema cualquiera que admite soluciones elementales de la forma

$$\varphi = a \cos(kx - \omega t) \quad (11.7)$$

donde la frecuencia

$$\omega = \Omega(k) \quad (11.8)$$

es una función real $\Omega(k)$ del número de onda k , cuya forma está determinada por las propiedades del sistema. La velocidad de fase es $u_f = \Omega(k)/k$, y se dice que las ondas son dispersivas cuando u_f no es constante sino que depende de k . Conviene cambiar ligeramente esta definición y decir que la onda (11.6) es dispersiva si $\Omega'(k)$ no es constante²: esto es, si $\Omega''(k) \neq 0$.

Se puede observar que la (11.7) es una solución de la ecuación hiperbólica (11.2) con $\omega = c_0 k$ (o de la (11.1) con $\omega = \pm c_0 k$), pero este caso se excluye de entre las ondas dispersivas pues no cumple la condición $\Omega''(k) \neq 0$. Existen, sin embargo, casos genuinos de ecuaciones hiperbólicas que tienen soluciones de la forma (11.7) con relaciones de dispersión $\omega = \Omega(k)$ no triviales, esto es, que dan lugar a ondas hiperbólicas y dispersivas al mismo tiempo. Pero ese comportamiento dual está limitado a pocos casos, y no debemos permitir que oscurezca las diferencias generales entre ambas clases de ondas. En efecto, es frecuente el mal entendido según el cual onda es sinónimo de ecuaciones hiperbólicas, y que por lo tanto la (11.7) no es más que un modo poco sofisticado de tratar la misma cosa. Más bien es cierto lo contrario, puesto que aunque la clase de las ondas hiperbólicas es rica y variada, la mayoría de los fenómenos ondulatorios pertenece a la clase dispersiva no hiperbólica. El ejemplo más familiar de ondas, el de las olas en el océano, es un caso dispersivo, gobernado por la ecuación de Laplace, con una curiosa condición de contorno en la superficie libre.

² Con primas, dobles primas, ... etc. indicamos la derivada primera, segunda, ... etc. de una función con respecto de su argumento.

Es importante tener presente que lo que caracteriza un problema de ondas dispersivas es la relación de dispersión (11.8). Cómo se origina esta relación a partir del particular sistema de ecuaciones que gobierna el problema es de importancia secundaria en el presente contexto.

En los problemas lineales del Capítulo 9 obtuvimos soluciones más generales que la (11.7) por medio de superposiciones como las integrales de Fourier. En esa oportunidad vimos que el concepto fundamental que surge de analizar el comportamiento de estos paquetes o grupos de ondas es el de la *velocidad de grupo*

$$C(k) = \frac{d\Omega}{dk} \quad (11.9)$$

Es la velocidad de grupo (y no la velocidad de fase) la que juega el rol dominante en la propagación de las ondas dispersivas.

Vista su gran importancia, y con miras al estudio de medios no uniformes y de las ondas no lineales, conviene dar una definición de la velocidad de grupo que no dependa del análisis de Fourier (que está restringido a la propagación lineal en un medio uniforme). Esto se puede hacer intuitivamente³. Supongamos, en efecto, que una onda no uniforme está descripta aproximadamente por

$$\varphi = a(x,t) \cos[\theta(x,t)] \quad (11.10)$$

En un tren de ondas uniforme se tiene

$$a = \text{cte.} \quad , \quad \theta = kx - \omega t \quad , \quad \omega = \Omega(k) \quad (11.11)$$

Por analogía, en el caso más general (11.10) definiremos un número de onda *local* $k(x,t)$ y una frecuencia *local* $\omega(x,t)$ por medio de

$$k(x,t) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \quad \omega(x,t) = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (11.12)$$

Supongamos ahora que $k(x,t)$ y $\omega(x,t)$ están relacionados por la relación de dispersión (11.8). Claramente, θ satisface entonces la ecuación

$$k \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Omega\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0 \quad (11.13)$$

cuya solución determina las propiedades cinemáticas del tren de ondas. Por lo tanto, las (11.12) junto con la relación de dispersión determinan el problema.

Conviene eliminar θ entre las (11.12), para obtener

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (11.14)$$

Usando entonces la relación de dispersión (11.8) en la (11.14) obtenemos

³ el lector puede encontrar la justificación rigurosa en el texto de Whitham.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d\Omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t} + C(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (11.15)$$

Se puede observar que la (11.15) es precisamente la más simple ecuación hiperbólica no lineal (11.6). Por lo tanto la (11.15) se puede interpretar como una ecuación de ondas para la propagación de k con la velocidad $C(k)$. De esta manera sutil los fenómenos de la propagación hiperbólica se esconden en las ondas dispersivas, hecho que se puede aprovechar para aplicar los métodos que desarrollemos para las ondas hiperbólicas a los problemas de las ondas dispersivas.

Ondas dispersivas no lineales

El concepto de velocidad de grupo es la herramienta fundamental para deducir las principales características de las ondas dispersivas lineales, como vimos en el Capítulo 9 por medio de varios ejemplos. Sin embargo, para atacar problemas no lineales es necesario un enfoque más poderoso, que consiste en el uso de principios variacionales. Los principios variacionales constituyen la herramienta correcta para atacar los problemas de ondas dispersivas, tanto lineales como no lineales. Nosotros no vamos a tratar este tema, y remitimos al lector interesado al excelente texto de Whitham. Nos limitaremos aquí a esbozar las ideas fundamentales acerca de las ondas dispersivas no lineales que se originaron en el estudio de las olas en el agua.

El primer resultado importante, obtenido por Stokes en 1847 para las ondas de gravedad en aguas profundas, se basa en escribir el desplazamiento vertical ξ de una onda de amplitud finita como una serie de potencias de la amplitud a de la forma

$$\xi = f(\theta) = a(\cos \theta + \frac{1}{2}ka \cos 2\theta + \frac{3}{8}k^2a^2 \cos 3\theta + \dots) \quad , \quad \theta = kx - \omega t \quad (11.16)$$

donde

$$\omega^2 = gk(1 + k^2a^2 + \dots) \quad (11.17)$$

El resultado que obtuvimos en el Capítulo 9 para el caso lineal no es más que el primer término de la serie (11.16), y la relación de dispersión correspondiente es nuestra antigua conocida

$$\omega^2 = gk \quad (11.18)$$

que se obtiene de la (11.17) en el límite $a \rightarrow 0$.

Las (11.16) y (11.17) ponen de manifiesto dos resultados básicos. Primero, que existen soluciones que consisten de trenes de onda *periódicos*, en las cuales las variables dependientes son funciones de una fase $\theta = kx - \omega t$, pero ahora *las ondas ya no son sinusoidales*: en efecto la (11.16) es la serie de Fourier que representa la función $f(\theta)$. Segundo, que ahora *en la relación de dispersión interviene la amplitud*. Esta es una característica cualitativa *nueva*, que muestra que los efectos no lineales no se limitan a ser pequeñas correcciones.

Tiempo después, en 1895, Korteweg y de Vries encontraron que las ondas de gran longitud de onda en aguas cuya profundidad h_0 no es muy grande se pueden describir con buena aproximación (como mostraremos más adelante) por medio de la ecuación no lineal

$$\xi_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \xi_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \xi_{xxx} = 0 \quad , \quad c_0 = \sqrt{gh_0} \quad (11.19)$$

Si la amplitud es infinitesimal podemos linearizar esta ecuación despreciando el término $(3/2)c_0\xi\xi_x$. La ecuación que resulta tiene soluciones del tipo

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) \quad \text{con} \quad \omega = c_0 k (1 - h_0^2 k^2 / 6) \quad (11.20)$$

que son simplemente las ondas de gravedad puras que estudiamos en el Capítulo 9, cuando se toma en cuenta la primera corrección por efecto de la profundidad finita.

Cuando la amplitud es *finita*, la (11.19) tiene soluciones periódicas de la forma

$$\xi = f(\theta) \quad \text{con} \quad \theta = kx - \omega t \quad (11.21)$$

que se denominan *ondas cnoidales* porque se expresan en términos de la *función elíptica Jacobiana* $\text{cn}(u)$ ($u \propto \theta$). Este resultado refuerza las conclusiones generales de Stokes ya citadas, pues demuestra explícitamente la existencia de trenes de onda periódicos; además $f(\theta)$ contiene una amplitud arbitraria a y la solución implica una relación de dispersión de la forma $\omega = \Omega(k, a)$ en la cual interviene la amplitud de la onda. De esta forma se encuentra nuevamente que el efecto no lineal más llamativo es que la relación de dispersión involucra la amplitud.

Pero hay otro resultado importante que se obtiene de la (11.18). En el límite en que la longitud de onda de la perturbación (es decir, el período espacial de f) se hace infinita, se encuentra la solución especial

$$\xi = a \text{sech}^2[(3a/4h_0^3)^{1/2}(x - ct)] \quad , \quad c = c_0(1 + a/2h_0) \quad (11.22)$$

que describe una onda que consiste de una *única cresta*, que se propaga *sin cambio de forma* con una velocidad que depende de la *amplitud*. La segunda de las (11.22), que expresa c en términos de la amplitud, es lo que queda de la relación de dispersión en el límite no periódico.

Esta solución es la *onda solitaria*, que fue descubierta casualmente por Scott Russell en 1844 mientras observaba una embarcación que se desplazaba velozmente en un estrecho canal; de repente la embarcación se detuvo y Scott Russell notó que a partir de la agitación de las aguas causada por la detención, se produjo “una gran elevación solitaria, un suave, redondeado y bien definido amontonamiento de agua que continuó su curso por el canal, aparentemente sin cambio de forma ni disminución de velocidad” por una considerable distancia⁴.

Las ondas solitarias tienen varias propiedades sorprendentes. Entre ellas se cuenta que estas ondas conservan su individualidad cuando interactúan, y eventualmente emergen de la región de interacción con su forma y velocidad original (de un modo análogo a como se muestra en la Fig. 10.3 para las ondas de amplitud infinitesimal)

La ecuación de Korteweg-de Vries es el prototipo más sencillo que combina la no linealidad con la dispersión. La onda solitaria es un fenómeno estrictamente *dispersivo y no lineal*, en el cual la tendencia de la onda a empinarse y romper debido al término no lineal de la (11.19) se compensa con el efecto de la dispersión, para producir como efecto la propagación sin cambio de forma.

Las soluciones del tipo de Stokes (11.16) y del tipo (11.21) y (11.22) son la contrapartida no lineal de las soluciones lineales elementales del tipo (11.7), pero ahora ya no se puede proceder por síntesis de Fourier como en el caso lineal. Cabe observar, sin embargo, que muchos resultados importantes de la teoría lineal para trenes de onda no uniformes del tipo (11.10) se pueden

⁴ Intrigado por el curioso fenómeno, Scott Russell montó a caballo y siguió a la onda solitaria por más de una milla.

expresar en términos de la velocidad de grupo. Puesto que esos resultados no dependen de manera esencial del análisis de Fourier, se puede desarrollar una teoría de las *velocidades de grupo no lineales*. Nosotros no entraremos en estos temas, pero cabe mencionar que el hecho que la relación de dispersión depende de la amplitud de la onda introduce ciertos fenómenos nuevos, entre los cuales se cuenta que hay *más de una* velocidad de grupo. Esto se relaciona con el hecho que un tren de onda no uniforme acaba eventualmente por *fragmentarse* al cabo de cierto tiempo, un resultado éste muy novedoso, e inesperado a partir de la teoría lineal. El lector interesado puede consultar el texto de Whitham, donde estos temas se tratan con cierto detalle.

La onda de creciente como ejemplo de onda hiperbólica no lineal

Vamos a iniciar nuestro estudio de las ondas hiperbólicas no lineales a partir de la ecuación de primer orden (11.6). Para ver como se llega a esa ecuación vamos a considerar un problema concreto: las ondas de creciente en un río o un canal.

La ecuación de conservación y las ondas cinemáticas

Sea x la coordenada a lo largo del curso de agua, orientada en el sentido de la corriente (Fig. 11.1), y sea $s(x, t)$ la sección transversal⁵ del mismo en el instante t . Si indicamos con $q(x, t)$ el caudal volumétrico que fluye a través de s , la conservación de la masa requiere que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} s(x, t) dx = q(x_2, t) - q(x_1, t) \quad (11.23)$$

que se expresa en forma diferencial como

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (11.24)$$

Ahora bien, la experiencia indica que *existe una relación* entre la sección s y el caudal q que fluye a través de ella. Mediante observaciones sistemáticas del nivel del río y la velocidad de la corriente en diferentes posiciones a lo largo de su curso es posible establecer empíricamente dicha relación, que tiene la forma

$$q = Q(s, x) \quad (11.25)$$

Si combinamos la (11.25) con la (11.24) podemos obtener una ecuación que describe en forma aproximada a flujos no estacionarios que varían lentamente. Esta ecuación es

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (11.26)$$

En general, la (11.25) es muy complicada, y por lo tanto el problema se tiene que resolver numéricamente. Sin embargo, como aquí no estamos interesados en describir con exactitud el comportamiento de un determinado curso de agua, sino en entender la física que está a la base del fenómeno, postularemos alguna fórmula sencilla para dicha relación. Claramente, los resultados

⁵ Indicamos con s el área de la sección, medida desde el lecho hasta la superficie del agua. Se entiende que el valor de s depende del tiempo, puesto que el nivel del agua varía con el tiempo.

que obtengamos de esta manera son tan sólo una aproximación muy grosera, y sólo podemos esperar obtener una descripción cualitativa y cuanto mucho estimaciones de orden de magnitud para las velocidades de propagación, los perfiles de las ondas, etc..

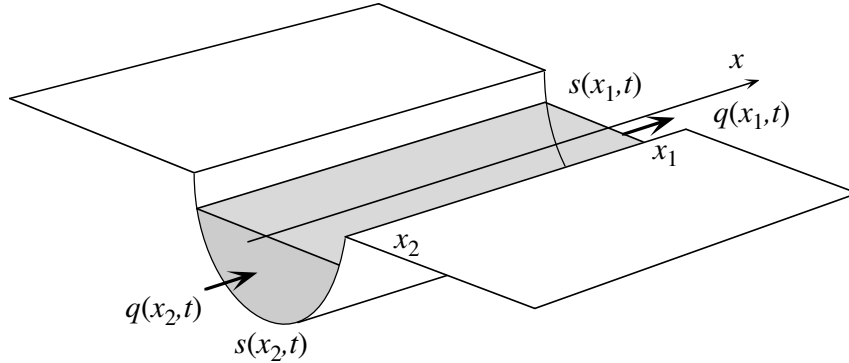


Fig. 11.1. Geometría de un curso de agua para el estudio de las ondas cinemáticas de crecienta.

Por el momento no haremos ninguna hipótesis concreta acerca de la forma de Q , salvo suponer que no depende de x :

$$q = Q(s) \quad (11.27)$$

La (11.26) se reduce entonces a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (11.28)$$

que es una ecuación de la forma (11.6) con

$$c(s) = \frac{dQ}{ds} \quad (11.29)$$

El problema descrito por la ecuación de conservación (11.24) y la relación (11.27), o en forma equivalente por la ecuación de ondas no lineal (11.28) es típico de varias situaciones que comprenden (además de la que estamos considerando) el flujo de glaciares, la evolución de la densidad del tráfico en una carretera, la propagación de ciertas reacciones químicas y también la propagación del número de onda para ondas dispersivas (ec. (11.15)). Puesto que todos estos problemas dependen básicamente de una ecuación de conservación del tipo (11.24), las ondas que resultan se denominan *ondas cinemáticas*. El motivo de esta denominación es destacar el contraste con las familiares ondas acústicas y elásticas, que dependen fundamentalmente de la *dinámica* del fenómeno.

El método de las características

La solución de la (11.28) se puede obtener con el método de las características. La idea básica parte de considerar la función $s(x, t)$ en el plano (x, t) , y observar que la expresión

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} \quad (11.30)$$

se puede interpretar como la *derivada total* de s a lo largo de la curva definida por

$$\frac{dx}{dt} = c(s) \quad (11.31)$$

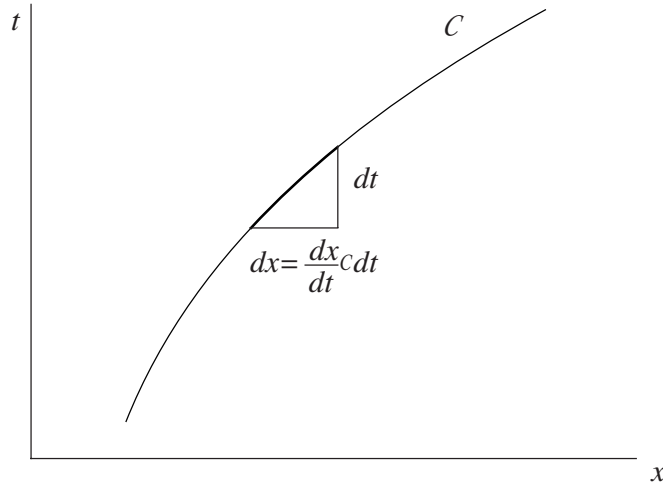


Fig. 11.2. Derivada total de una función a lo largo de una curva $x = x_C(t)$.

En efecto (ver Fig. 11.2), a lo largo de cualquier curva C del plano (x, t) dada por

$$x = x_C(t) \quad (11.32)$$

tendremos que

$$s(x, t)_C = s(x_C(t), t) \quad (11.33)$$

es una función de t , y por lo tanto

$$\left(\frac{ds(x, t)}{dt} \right)_C = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{dx_C}{dt} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (11.34)$$

Consideremos entonces la curva C definida por la (11.31) (por supuesto aún no podemos determinar explícitamente dicha curva, dado que en la (11.31) interviene el valor de s sobre C , que todavía no conocemos). En virtud de la (11.28), sobre C se cumple que

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = \left(\frac{ds}{dt} \right)_C = 0 \quad (11.35)$$

lo que implica que s , y entonces $c(s)$, se mantienen *constantes* a lo largo de C . Por lo tanto resulta que C es una *recta* de pendiente $c(s)$ en el plano (x, t) . Vemos entonces que:

La solución general de la (11.28) se obtiene construyendo en el plano (x,t) una familia de rectas, sobre cada una de las cuales s tiene un valor constante y cuya pendiente $c(s)$ está determinada por dicho valor de s .

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema de valores iniciales:

$$s = f(x) \quad , \quad t = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad (11.36)$$

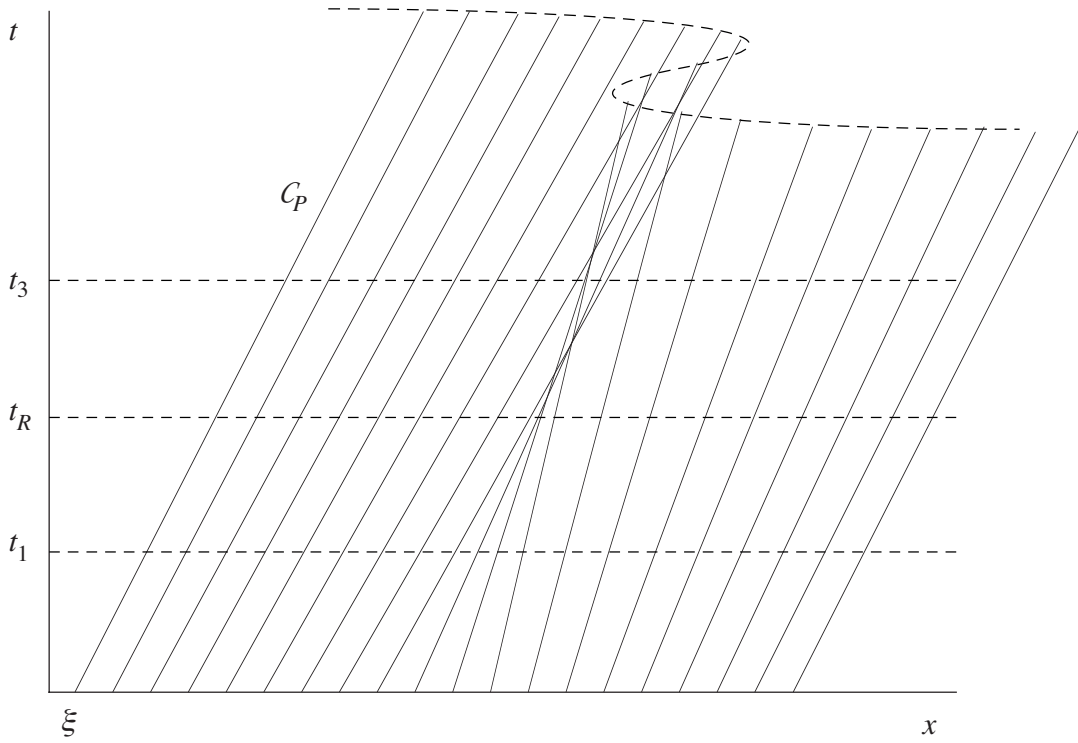


Fig. 11.3. Solución de un problema de valores iniciales con el método de las características. La característica C_P que cruza el eje x en $x = \xi$ tiene una pendiente dada por $c = c_P = c(s_P)$ y transporta el valor de $s = s_P = f(\xi)$. Variando ξ a lo largo del eje x podemos así construir el conjunto de características que determina la solución. La dependencia de c en s produce la típica *distorsión no lineal* de la onda a medida que se propaga. En toda parte *compresiva* de la onda, donde c es una función *decreciente* de x , la onda “rompe” dando lugar a una solución *trivaluada* para $s(x,t)$. La región multivaluada se puede imaginar como un *pliegue* en el plano (x,t) , formado por tres capas con diferentes valores de s en cada capa. La línea de trazos ayuda a visualizar el pliegue. Por el contrario las características divergen en las partes *expansivas* de la onda, donde $c(s)$ aumenta con ξ .

En la Fig. 11.3 hemos representado el plano (x,t) . La condición (11.36) corresponde a asignar el valor de s sobre el eje x . Consideremos un punto cualquiera P sobre el eje x , dado por $x = \xi$. Puesto que en P conocemos $s_P = f(\xi)$ y $c_P = c(s_P) = c(f(\xi)) = F(\xi)$, podemos trazar la recta C_P que pasa por ese punto, cuya ecuación es

$$x = \xi + F(\xi)t \quad (11.37)$$

Sobre C_P tendremos que

$$s(x, t) = s(\xi + F(\xi)t, t) = f(\xi) \quad (11.38)$$

De esta forma, variando ξ a lo largo del eje x podemos construir la familia completa de rectas. A este punto, podemos invertir el proceso, y considerar que la (11.37) determina implícitamente ξ en función de x y t , de modo que

$$\xi = \Xi(x, t) \quad (11.39)$$

Si ahora sustituimos ξ en la (11.38) obtenemos la solución como

$$s(x, t) = f(\Xi(x, t)) \quad (11.40)$$

Es fácil verificar que la (11.40) es efectivamente la solución que buscamos. En efecto

$$s_t = f' \Xi_t, \quad s_x = f' \Xi_x \quad (11.41)$$

y de la (11.37) obtenemos

$$0 = F + (1 + F't)\Xi_t, \quad 1 = (1 + F't)\Xi_x \quad (11.42)$$

Por lo tanto

$$s_t = -\frac{f'F}{1 + F't}, \quad s_x = \frac{f'}{1 + F't} \quad (11.43)$$

y recordando que $F(\xi) = c(s)$ vemos que se cumple la (11.28). La condición inicial se cumple puesto que $\xi = x$ cuando $t = 0$.

Las curvas que usamos para construir la solución son las *curvas características* de nuestro problema. Curvas características análogas juegan un rol fundamental en todos los problemas que dependen de ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Sin embargo, en general no es cierto que la solución se mantiene constante a lo largo de las características, y tampoco es cierto que las características sean rectas.

Recordemos que la noción básica de onda es que alguna propiedad reconocible de la perturbación se propaga con una velocidad finita. Para las ondas hiperbólicas, las características corresponden a este concepto. Cada característica en el plano (x, t) representa una porción elemental de onda que se mueve en el espacio x , y el comportamiento de la solución sobre la característica corresponde a la noción que esa porción elemental de onda transporta información. En ese sentido podemos interpretar las (11.31) y (11.35) diciendo que

Distintos valores de s se propagan con la velocidad $c(s)$.

En efecto, nuestra construcción de la solución $s(x, t)$ es equivalente a *trasladar* cada valor del perfil inicial $s(x, 0) = f(x)$ a una distancia $c(s)t$ en la dirección x positiva. Se debe observar que esta distancia es *diferente* para distintos valores de s . Esto se muestra en la Fig. 11.4, para el caso en que $c'(s) > 0$. Los correspondientes valores del tiempo se indican en la Fig. 11.3. La dependencia de c en s produce la típica *distorsión no lineal* de la onda a medida que se propaga. Cuando $c'(s) > 0$ los valores mayores de s se propagan más velozmente que los valores menores. Si $c'(s) < 0$ ocurre al revés: los valores mayores de s se propagan más lentamente que los

menores, y la distorsión tiene la tendencia contraria a la que se muestra en la Fig. 11.4. Para el caso lineal, c es constante y el perfil se traslada sin cambio de forma a la distancia ct .

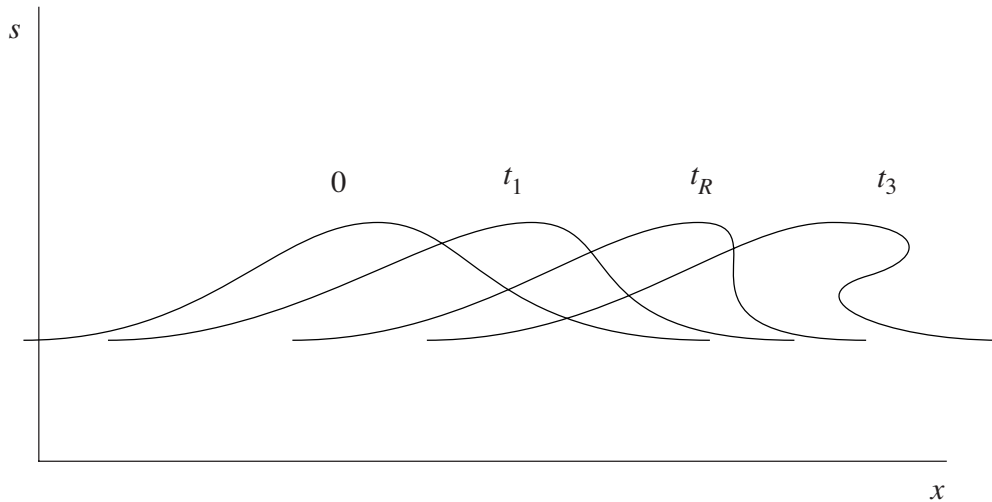


Fig. 11.4. Distorsión y ruptura de una onda hiperbólica no lineal para el caso $c'(s) > 0$. Los correspondientes valores del tiempo se indican en la Fig. 11.3. La dependencia de c en s produce la típica *distorsión no lineal* de la onda debido a que los valores mayores de s se propagan más velozmente que los valores menores. Si $c'(s) < 0$ ocurre al revés: los valores mayores de s se propagan más lentamente que los menores, y la distorsión tiene la tendencia contraria a la que se muestra en la figura. Toda parte *compresiva* de la onda (donde c es una función *decreciente* de x) tarde o temprano “rompe” dando lugar a una solución *trivaluada* para $s(x,t)$. La ruptura comienza a ocurrir en el instante $t = t_R$ indicado, cuando el perfil de s adquiere una pendiente infinita.

En nuestro problema hay una *única* familia de características. Esto se debe a que la ecuación (11.28) es del primer orden. Cuando el problema involucra una ecuación hiperbólica del segundo orden del tipo (11.1) hay *dos* familias de características, como ocurre en la dinámica de gases para flujos homentrópicos. En general, una ecuación hiperbólica de orden n tiene n familias de características, y por cada punto $P(x,t)$ pasan n características, una de cada familia. Sobre cada una de ellas se mantiene constante una particular combinación (propia de la familia) de las variables dependientes del problema, que se denomina *invariante de Riemann*. De esta forma, a partir de los invariantes asociados con las características que llegan a $P(x,t)$ se pueden calcular los valores de las variables dependientes en dicho punto. Por otra parte las pendientes de las características en $P(x,t)$ son funciones (diferentes para cada familia) de los n invariantes de Riemann que fueron transportados hasta ese punto por las características que llegan al mismo. Esto permite generalizar para las ecuaciones de orden superior el método que hemos expuesto para el caso de una ecuación hiperbólica del primer orden. Claramente, el problema se vuelve más complicado, pero en esencia equivale al que estamos considerando.

Ruptura de la onda y soluciones multivaluadas

Observando la Fig. 11.4, se nota que todavía falta algo en nuestra teoría. En efecto toda parte *compresiva* de la onda, es decir toda parte donde c es una función *decreciente* de x , tarde o temprano da lugar a una solución *trivaluada* para $s(x,t)$. Se dice entonces que la onda “rompe”. La

ruptura comienza a ocurrir en el instante $t = t_R$ indicado en la Fig. 11.3, cuando el perfil de s adquiere una pendiente infinita en un punto. Nuestra solución (11.43) confirma este hecho y nos permite determinar t_R . En efecto, sobre toda característica para la cual $F'(x) < 0$, s_x y s_t divergen en el instante

$$t = -\frac{1}{F'(\xi)} \quad (11.44)$$

Por lo tanto la ruptura ocurre primero sobre la característica $\xi = \xi_R$ para la cual $F'(\xi) < 0$ y $|F'(\xi)|$ es un máximo. La primera ruptura ocurre cuando

$$t = t_R \equiv -\frac{1}{F'(\xi_R)} \quad (11.45)$$

Esta evolución se puede seguir en el plano (x, t) . La parte de la onda en la cual $F'(x) < 0$ es aquella donde las características son *convergentes*. Puesto que las características son rectas, eventualmente se cruzan y se superponen dando lugar a una región donde la solución es *multi-valuada*, como se ve en la Fig. 11.3. Esta región se puede imaginar como un *pliegue* en el plano (x, t) , formado por tres capas con diferentes valores de s en cada capa. El contorno de esa región es una *envolvente* de las características. Podemos obtener la envolvente recordando que la familia de características (11.37) depende del parámetro ξ . La condición que dos características próximas correspondientes a ξ y $\xi + \delta\xi$ se crucen en el punto (x, t) es que se cumplan simultáneamente

$$x = \xi + F(\xi)t \quad y \quad x = \xi + \delta\xi + F(\xi + \delta\xi)t \quad (11.46)$$

Tomando el límite $\delta\xi \rightarrow 0$ en la (11.46) obtenemos

$$x = \xi + F(\xi)t \quad , \quad 0 = 1 + F'(\xi)t \quad (11.47)$$

que es la ecuación de la envolvente en forma implícita. La segunda de las (11.47) muestra que la envolvente se forma para $t > 0$ a partir de aquellas características para las cuales $F'(\xi) < 0$. El mínimo valor de t sobre la envolvente se tiene para aquél valor de ξ para el cual $-F'(\xi)$ es máximo. Este es precisamente el primer momento de ruptura de acuerdo con la (11.45). Si $F''(\xi)$ es continuo la envoltura tiene una cúspide en $t = t_R$, $x = x_R$ como se ve en la Fig. 11.3.

Se tiene un caso extremo de ruptura cuando la distribución inicial es discontinua, por ejemplo si

$$f(x) = \begin{cases} s_1 & , \quad x > 0 \\ s_2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad F(x) = \begin{cases} c_1 = c(s_1) & , \quad x > 0 \\ c_2 = c(s_2) & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (11.48)$$

con $c_2 > c_1$. En este caso (ver Fig. 11.5) la ruptura ocurre de inmediato. La región multivaluada comienza en el origen y está limitada por las características $x = c_1 t$ y $x = c_2 t$. El contorno de esta región no es una envolvente con una cúspide, puesto que F y sus derivadas no son continuas.

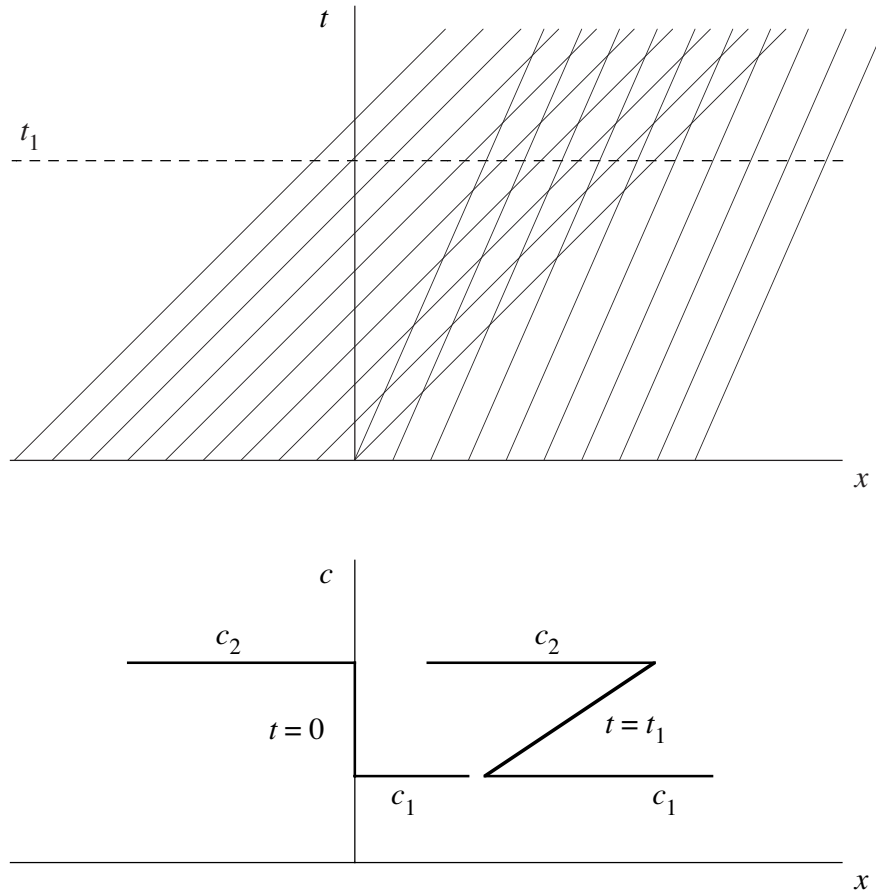


Fig. 11.5. Solución multivaluada para una distribución inicial discontinua. En la parte superior de la figura se muestran las características. En la parte inferior se muestra $c(x)$ para el instante inicial y para un tiempo posterior. Se puede apreciar que la onda rompe de inmediato.

Por otra parte si $c_2 < c_1$ la discontinuidad inicial es expansiva y la solución es continua y univaluada. La podemos obtener de las (11.37) y (11.38), a partir de un caso en que todos los valores de F entre c_1 y c_2 corresponden a características que cruzan el eje x en un pequeño intervalo $\delta\xi$ alrededor del origen, y tomando el límite $\delta\xi \rightarrow 0$. De esta forma obtenemos un abanico de características en el plano (x, t) como se ve en la Fig. 11.6. Las características del abanico tienen todas el mismo ξ pero diferente pendiente F . La función F es una función escalón, pero usamos todos los valores de F entre c_1 y c_2 (el tramo vertical del escalón) y hacemos que todos ellos correspondan a $\xi = 0$. En el abanico la solución es, entonces,

$$c = F \quad , \quad x = Ft \quad , \quad c_2 < F < c_1 \quad (11.49)$$

Eliminando F entre estas ecuaciones se obtiene una simple solución explícita para c :

$$c = \frac{x}{t} \quad , \quad c_2 < \frac{x}{t} < c_1 \quad (11.50)$$

La solución completa para c es entonces

$$c = \begin{cases} c_1 & , \quad c_1 < \frac{x}{t} \\ \frac{x}{t} & , \quad c_2 < \frac{x}{t} < c_1 \\ c_2 & , \quad \frac{x}{t} < c_2 \end{cases} \quad (11.51)$$

A partir de la (11.51) se puede entonces *invertir* la relación $c = c(s)$ para encontrar s .

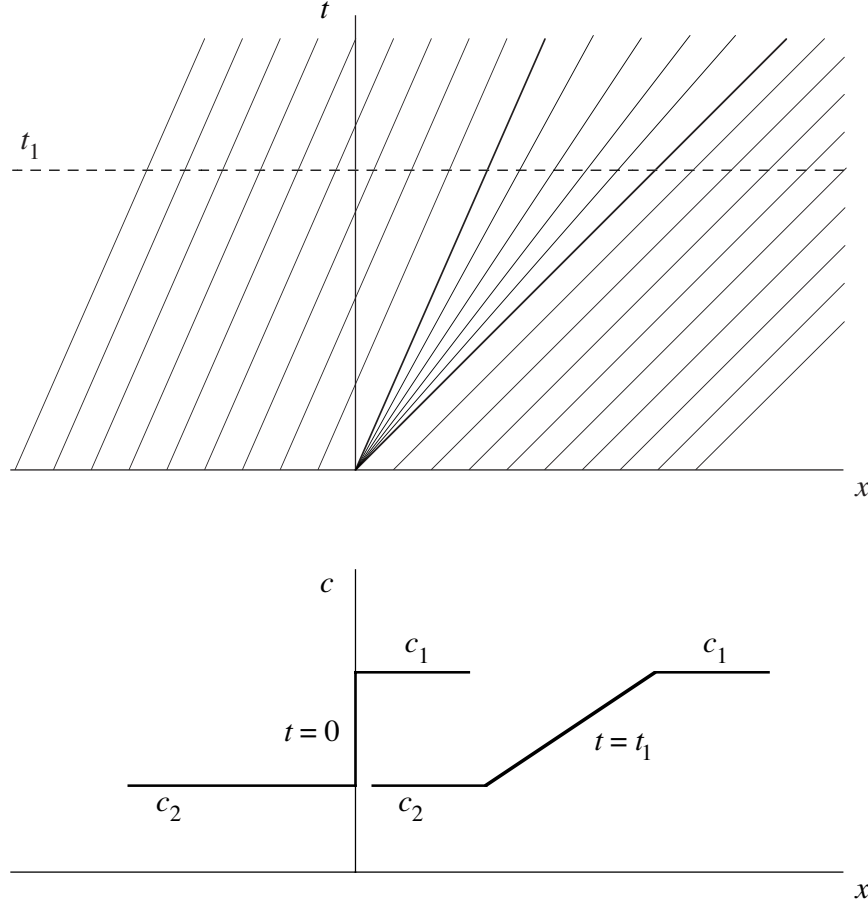


Fig. 11.6. Onda expansiva centrada: una distribución inicial discontinua pero expansiva da lugar a una solución univaluada.

Inadmisibilidad de las soluciones multivaluadas

En la mayoría de los problemas físicos en que se aplica esta teoría, s es una magnitud inherentemente univaluada⁶. Por lo tanto, cuando ocurre la ruptura de la onda no cabe otra conclusión que admitir que *la ecuación (11.28) no describe adecuadamente la física del problema*⁷. Esto sucede porque *ha dejado de valer* alguna hipótesis, o alguna aproximación que usamos en el planteo del problema para llegar a la ecuación (11.28). En principio, la forma de resolver la difi-

⁶ En el caso que estamos considerando s es la sección transversal del curso de agua y claramente no es aceptable que sea una función multivaluada de x .

⁷ Incluso en el caso de las olas en el agua, para las cuales una solución multivaluada para la altura de la superficie libre no es absurda, se encuentra que la (11.28) no es adecuada como descripción del proceso.

cultad es revisar la física del problema, para encontrar lo que no está funcionando bien y formular una teoría mejor. Este es seguramente un camino correcto, pero no es el *único* posible. Veremos en efecto que las soluciones univaluadas de la (11.28) se pueden seguir usando, si admitimos la posibilidad de tener *soluciones discontinuas*. De esta forma podemos construir una solución univaluada con una única discontinuidad, que evita el tramo multivaluado de la solución continua⁸. Pero más allá del artificio matemático gracias al cual se logra construir la solución, es importante recordar que el origen del defecto de la solución continua es una falla en la física de la ecuación (11.28). Ambos aspectos se deben tener en cuenta, pues resulta que hay varias familias de soluciones discontinuas, todas satisfactorias del punto de vista matemático, pero sólo una de ellas es físicamente aceptable. Está claro entonces que no podemos avanzar más sin considerar un problema físico concreto.

Estos problemas se estudiaron primero en la dinámica de gases. Cuando se ignoran la viscosidad y la conducción del calor, las ecuaciones no lineales de la dinámica de gases tienen soluciones que rompen, así como ocurre con las ondas cinemáticas. Pero cuando los gradientes se hacen abruptos, justo antes de la ruptura de la onda, la viscosidad y la conducción del calor ya no se pueden despreciar. Estos efectos se pueden tratar con una teoría más precisa, y de acuerdo con esta teoría mejor la onda no rompe y en cambio aparece una región delgada, llamada *frente de choque* u *onda de choque*, donde las variables que describen el flujo sufren variaciones rápidas. Dentro de la onda de choque la viscosidad y la conducción del calor tienen importancia crucial, pero fuera de ella se puede seguir ignorando esos efectos. Por lo tanto, en la teoría no viscosa “ampliada” podemos *idealizar* la región del choque (ignorando su espesor y su estructura interna) y tratarla como una *discontinuidad*. Procediendo de esta manera es suficiente, para complementar la teoría no viscosa, agregar ciertas “condiciones de choque” que establecen relaciones entre los valores de las variables del flujo de ambos lados de la “discontinuidad”. Más adelante vamos a estudiar estas cuestiones. Sin embargo la dinámica de gases no es el caso más simple y por eso preferimos desarrollar estas ideas en el contexto del problema de primer orden que estamos considerando aquí.

Condiciones de choque para las ondas cinemáticas

De acuerdo con nuestra discusión anterior, cuando ocurre la ruptura de la onda sabemos que hay una *falla* en la relación (11.25), esto es, en nuestra hipótesis

$$q = Q(s, x) \quad (11.52)$$

Una forma de salvar la dificultad consiste, como dijimos, en aceptar la posibilidad de tener soluciones discontinuas. Si adoptamos este enfoque, está claro que s y q no son diferenciables en todas partes, y por lo tanto en la discontinuidad no se puede aplicar la (11.24)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (11.53)$$

⁸ Del punto de vista matemático esto requiere ampliar el concepto de solución pues como en una discontinuidad no existen las derivadas de s , en sentido estricto no se puede hablar de “soluciones” discontinuas. Esto se puede hacer por medio del concepto de “solución débil”.

pero siempre y cuando valga la hipótesis del continuo, *sigue siendo válida* la ec. (11.23) que expresa la conservación de la masa

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} s(x,t) dx = q(x_2,t) - q(x_1,t) \quad (11.54)$$

La condición de choque

Observemos, antes que nada, que mientras las discontinuidades de s y q sean *finitas*, del punto de vista matemático no hay inconvenientes con la ec. (11.54), puesto que todas las expresiones que figuran en ella siguen teniendo sentido. Veamos entonces qué *restricciones* impone la ley de conservación (11.54) sobre una eventual discontinuidad.

Para ver esto, supongamos tener una discontinuidad en

$$x = x_d(t) \quad (11.55)$$

Elegimos entonces x_1 y x_2 tales que

$$x_2 < x_d(t) < x_1 \quad (11.56)$$

Supongamos, además, que s , q y sus derivadas primeras son acotadas y continuas en los intervalos $x_2 \leq x < x_d(t)$ y $x_d(t) < x \leq x_1$, y que tienen límites finitos s^- , q^- y s^+ , q^+ para $x \rightarrow x_d^-$ (por debajo) y $x \rightarrow x_d^+$ (por arriba), respectivamente. Con estas hipótesis la (11.54) se puede escribir como

$$\begin{aligned} q(x_2,t) - q(x_1,t) &= \frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_d(t)} s(x,t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x_d(t)}^{x_1} s(x,t) dx \\ &= s(x_d^-,t) \dot{x}_d(t) - s(x_d^+,t) \dot{x}_d(t) + \int_{x_2}^{x_d(t)} s_t(x,t) dx + \int_{x_d(t)}^{x_1} s_t(x,t) dx \end{aligned} \quad (11.57)$$

donde $\dot{x}_d \equiv dx_d/dt$. Ahora tomamos los límites $x_2 \rightarrow x_d^-$ y $x_1 \rightarrow x_d^+$ en la (11.57). Puesto que s_t es acotada en cada uno de los intervalos de integración, las integrales se anulan en el límite y queda

$$q(x_d^-,t) - q(x_d^+,t) = \{s(x_d^-,t) - s(x_d^+,t)\} \dot{x}_d(t) \quad (11.58)$$

Habitualmente los valores de las cantidades delante y detrás de la discontinuidad se suelen indicar con los subscripts 1, 2, respectivamente, y la velocidad del frente de choque se designa con $U \equiv \dot{x}_d$. Con esta notación, la (11.58) se escribe

$$q_2 - q_1 = U(s_2 - s_1) \quad (11.59)$$

Otra notación que se usa frecuentemente es indicar el salto de una cantidad A cualquiera en la discontinuidad como $[A] \equiv A_2 - A_1$. De esta forma la (11.59) se expresa como

$$-U[s] + [q] = 0 \quad (11.60)$$

Si comparamos esta expresión con la ecuación diferencial (11.53) vemos que existe la siguiente correspondencia

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -U[\] \ , \quad \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow [\] \quad (11.61)$$

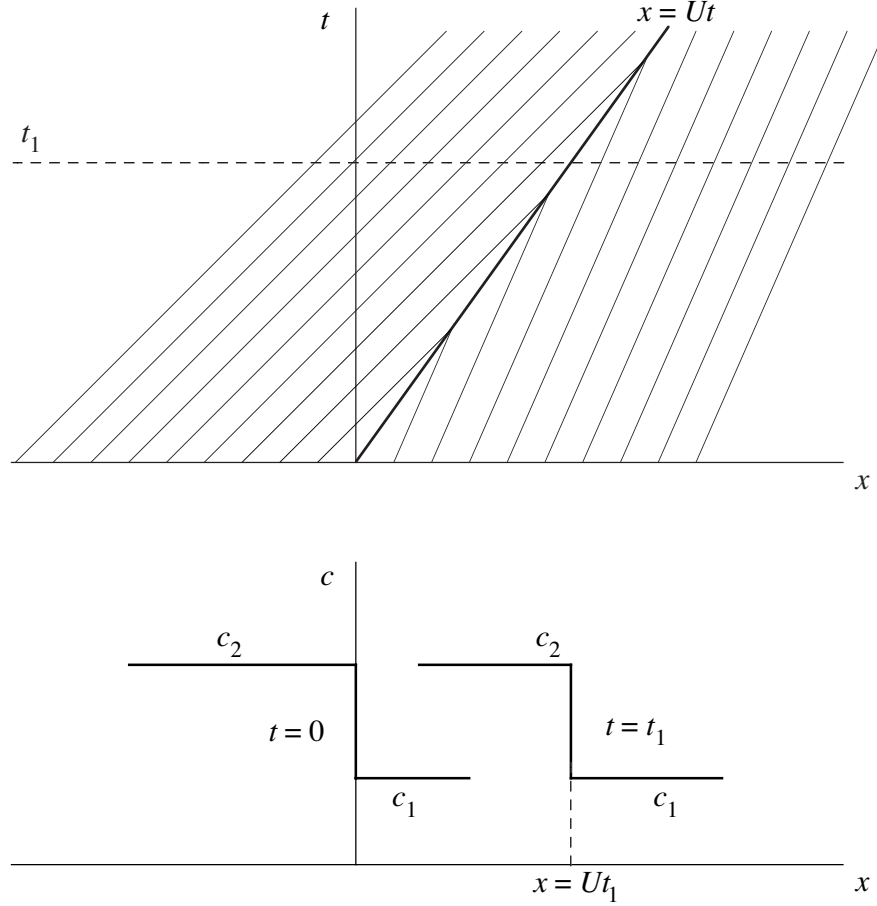


Fig. 11.7. Solución discontinua univaluada obtenida introduciendo un frente de choque en la solución multivaluada de la Fig. 11.5.

Construcción de soluciones discontinuas

En vista de estos resultados podemos extender nuestras soluciones incluyendo eventuales discontinuidades. Claramente, en toda parte continua de la solución, se satisface la (11.53) y sigue valiendo la (11.52); por lo tanto de uno y otro lado del frente de choque tendremos $q_2 = Q(s_2)$ y $q_1 = Q(s_1)$, y la condición (11.59) nos da

$$U = \frac{Q(s_2) - Q(s_1)}{s_2 - s_1} \quad (11.62)$$

Queda todavía el problema de cómo introducir discontinuidades en la solución (11.37)-(11.38) de modo tal que se cumpla la (11.62) y que se evite que la solución sea multivaluada.

Veamos como se resuelve el caso de la distribución inicial discontinua (11.48), en el cual

$$\left. \begin{aligned} s = s_1 & , \quad c = c(s_1) = c_1 & , \quad x > 0 \\ s = s_2 & , \quad c = c(s_2) = c_2 & , \quad x < 0 \end{aligned} \right\} t = 0 \quad (11.63)$$

con $c_2 > c_1$. La solución con ruptura está representada en la Fig. 11.5. Ahora podemos construir una solución univaluada para este problema, que consiste simplemente en un frente de choque que se mueve con la velocidad (11.62). Esta solución es

$$\begin{aligned} s &= s_1 & , \quad x > Ut \\ s &= s_2 & , \quad x < Ut \end{aligned} \quad (11.64)$$

y está representada en la Fig. 11.7.

En muchos textos se usa esta solución particular para deducir la condición de choque (11.59). Para esto basta considerar la solución en el referencial del frente de choque (Fig. 11.8). En ese referencial el flujo que entra a la discontinuidad es $q_2 - Us_2$ y el que sale es $q_1 - Us_1$. La ley de conservación requiere que sean iguales y por lo tanto se llega a la (11.59).

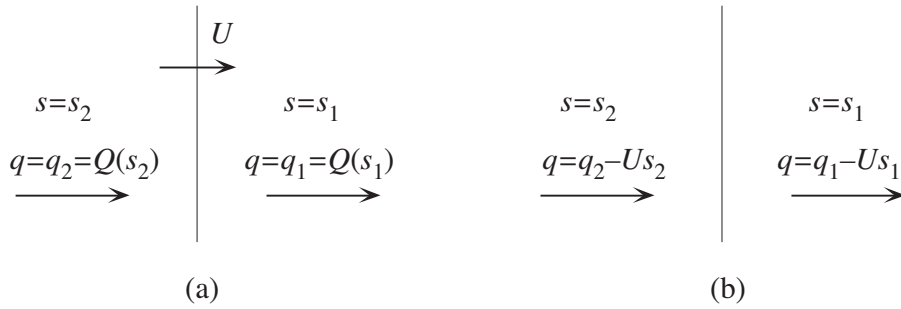


Fig. 11.8. Las magnitudes del flujo en el referencial del observador (a), y en el referencial del frente de choque (b).

Volviendo ahora al caso general, el problema analítico de introducir un frente de choque que satisfice la (11.62) en la solución continua

$$s = f(\xi) \quad , \quad x = \xi + F(\xi)t \quad (11.65)$$

se debe resolver teniendo en cuenta que tanto la solución discontinua s_d como la solución multivaluada s_m satisfacen la ley de conservación (11.54). Por consiguiente, para todo par de puntos (x_1, x_2) para los cuales ambas soluciones coinciden, se debe cumplir

$$\int_{x_2}^{x_1} s_d(x, t) dx = \int_{x_2}^{x_1} s_m(x, t) dx \quad (11.66)$$

La condición (11.66) fija la posición correcta de la discontinuidad. Como se indica en la Fig. 11.9, la discontinuidad debe cortar la solución multivaluada de modo tal que queden descartados dos lóbulos de igual área. Esta es la forma general de determinar la discontinuidad. Sin embargo, el cálculo puede resultar complicado. Nosotros no vamos a entrar en detalles, y recomendamos al lector interesado consultar la referencia ya citada (Whitham).

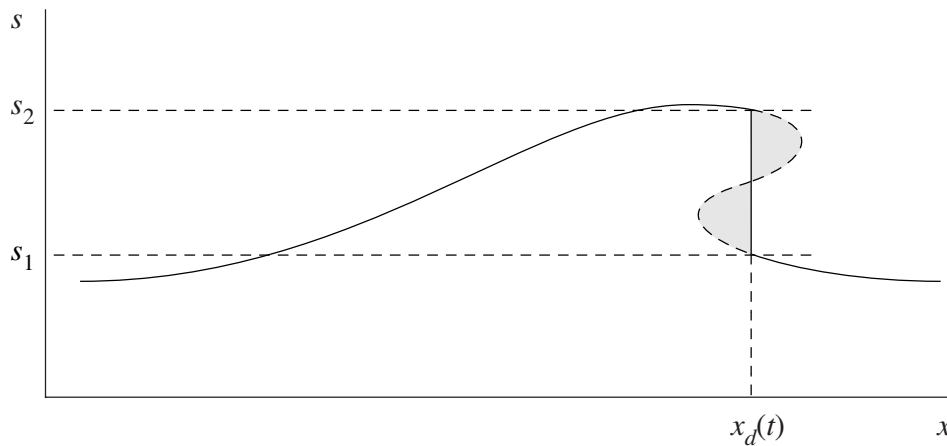


Fig. 11.9. La posición correcta del frente de choque es aquella para la cual son iguales las áreas de los dos lóbulos que quedan descartados en la solución continua multivaluada.

La condición de ruptura

Una solución continua rompe, y entonces es necesario introducir un frente de choque, *si, y solo si* la velocidad de propagación *disminuye* a medida que x crece. Por lo tanto, cuando se incluye el frente de choque, se debe cumplir que

$$c_2 > U > c_1 \quad (11.67)$$

Aquí todas las velocidades se consideran positivas cuando tienen la dirección de las x crecientes, y el subíndice 1 se refiere al valor de c justo *delante* del frente de choque (es decir, para $x > x_d$) mientras que 2 se refiere al valor de c justo *detrás* del mismo. Por lo tanto el pasaje de un frente de choque produce un *aumento* de c . Visto desde adelante el frente se mueve con una velocidad *supercrítica*, es decir *mayor* que la velocidad de la onda en esa región, y el frente de choque se lleva por delante a las características de la región $x > x_d$. Por el contrario visto desde atrás el frente se mueve con una velocidad *subcrítica*, menor que la velocidad de la onda, y entonces es alcanzado por las características de la región $x < x_d$ como se ve en la Fig. 11.7.

Cabe observar que la condición de choque (11.59) *no prohíbe* la existencia de discontinuidades con $c_2 < c_1$. Sin embargo, a partir de una solución continua no se puede *nunca* formar un frente de choque con $c_2 < c_1$ y por lo tanto ese tipo de discontinuidad no se requiere y no se considera. Otra forma de ver esta cuestión parte de preguntarse si acaso es posible, mediante algún artificio, producir una onda que tenga una discontinuidad con $c_2 < c_1$. Pero ya vimos que una condición inicial de este tipo tiene una solución continua perfectamente satisfactoria (Fig. 11.6) que consiste en un abanico de características divergentes. Esta solución muestra que una discontinuidad con $c_2 < c_1$ es *inestable*, pues *desaparece* espontáneamente de inmediato, dando lugar a una onda sin discontinuidad.

El argumento anterior sobre la imposibilidad de formación y el argumento de la inestabilidad de las discontinuidades con $c_2 < c_1$ son complementarios. Aquí no seguiremos examinando el tema de la inestabilidad puesto que el argumento sobre la imposibilidad de formación es convincente y exento de ambigüedades. Sin embargo, en ciertos casos de ecuaciones de orden superior es más difícil estudiar la formación de frentes de choque. En esos casos el análisis de la estabilidad

permite determinar más fácilmente cuándo una discontinuidad que satisface las condiciones de choque es realmente posible.

En la dinámica de gases, la desigualdad que corresponde a la (11.67) equivale a la condición que la entropía del gas *aumenta* cuando el gas atraviesa el frente de choque. Del punto de vista histórico, la condición sobre la entropía fue el primer argumento a favor de la *irreversibilidad* de las ondas de choque (esto es, que la transición producida por una onda de choque va en un sólo sentido). Sin embargo, las condiciones del tipo (11.67) son más generales.

Un punto de vista alternativo a estos criterios es requerir que una discontinuidad, para ser aceptable como frente de choque, tenga una estructura consistente cuando se la describe mediante ecuaciones más precisas. Este punto de vista es más satisfactorio, pues se basa sobre una descripción más realística del fenómeno. Sin embargo este planteo puede llevar a dificultades de cálculo prohibitivas.

Estructura del frente de choque para las ondas de creciente

Antes de proseguir con el tema de cómo introducir las discontinuidades cuando hay ruptura de ondas, conviene examinar el punto de vista complementario, esto es, que la ecuación diferencial (11.53) sigue siendo válida, pero que la relación (11.52) es incorrecta.

Hasta aquí no especificamos la relación $q = Q(s)$; por lo tanto nuestro tratamiento es general, y vale para cualquier tipo de ondas cinemáticas con tal de interpretar adecuadamente el significado de s y q . Pero ahora, inevitablemente, tenemos que entrar en los particulares de esta relación.

Teoría cinemática de las ondas de creciente: modelos simples para la relación entre la sección y el caudal

Dejando de lado las determinaciones empíricas basadas en la observación del comportamiento del curso de agua, vamos a comentar algunos modelos teóricos sencillos a partir de los cuales se puede establecer una relación entre s y q en forma cerrada.

Como primera y grosera aproximación, esta relación se suele obtener haciendo un balance entre la fuerza de *fricción* en el lecho del río o canal y la fuerza de *gravedad* que causa el escurrimiento de las aguas (Fig. 11.10). Es razonable en estos casos suponer que en cada posición x , la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado⁹ de la *velocidad media*, definida como

$$v = \frac{q}{s} \quad (11.68)$$

y que también es proporcional al *perímetro mojado* P de la sección s . Si designamos con C_f al coeficiente de fricción (o de arrastre), la fuerza de arrastre por unidad de longitud del curso de agua es entonces

$$F_f = \rho C_f P v^2 \quad (11.69)$$

donde ρ es la densidad del agua. Por otra parte, si α es la pendiente del curso de agua, la fuerza por unidad de longitud debida a la gravedad es

$$F_g = \rho g_x \quad (11.70)$$

⁹ En los casos de interés práctico, se trata de flujos con alto número de Reynolds.

donde $g_x \equiv g \sin \alpha$. Por lo tanto, el balance entre (11.69) y (11.70) permite obtener

$$v = \sqrt{\frac{s}{P} \frac{g_x}{C_f}} \quad (11.71)$$

y entonces

$$q = Q(s) = sv = \sqrt{\frac{s^3}{P} \frac{g_x}{C_f}} \quad (11.72)$$

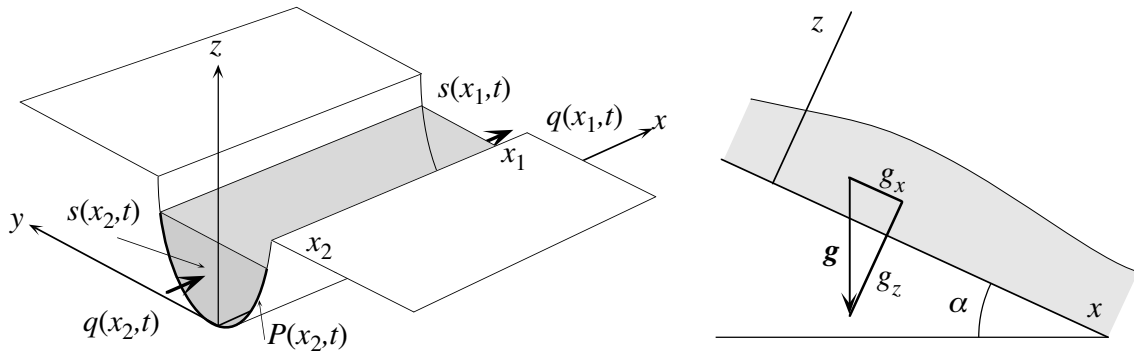


Fig. 11.10. Geometría y sistema de coordenadas empleados en la teoría de las ondas de creciente.

Ahora, el perímetro mojado P depende de s , y también C_f puede depender de s . La relación entre P y s depende de la topografía del lecho del río. Si el ancho del río es mucho mayor que la profundidad, P varía muy poco con la profundidad, y se puede considerar constante. Si también C_f y α se suponen constantes, la (11.72) da la relación

$$v \propto s^{1/2} \quad , \quad q \propto s^{3/2} \quad (11.73)$$

que se conoce como *ley de Chezy*. En este caso, la velocidad de propagación de las ondas de creciente es

$$c(s) = \frac{dQ}{ds} = \frac{d}{ds}(sv) = v + s \frac{dv}{ds} = \frac{3}{2}v \quad (11.74)$$

Más en general, P y C_f dependen de s . Si se supone que estas dependencias siguen leyes de potencias, se obtienen relaciones del tipo

$$v \propto s^n \quad , \quad q \propto s^{1+n} \quad (11.75)$$

Por ejemplo, si la sección transversal del curso de agua es triangular, resulta $P \propto s^{1/2}$, lo cual lleva a $n = 1/4$ en las (11.75). La ley de Manning (según la cual $C_f \propto s^{-1/3}$) lleva a $n = 2/3$ para un río ancho y $n = 5/12$ para un curso de agua de sección triangular. Para todas las leyes de potencias del tipo (11.75) resulta

$$c(s) = (1 + n)v \propto s^n \quad (11.76)$$

Como es de esperar, las ondas de creciente se propagan más rápido que el flujo, pero en general su velocidad de propagación no es mucho mayor que la velocidad de la corriente.

Se debe notar que en un río, Q depende de x , puesto que la geometría del cauce, la pendiente y el coeficiente de fricción cambian de un lugar a otro. Por lo tanto, si introducimos la relación entre q y s en la ecuación de conservación (11.24) se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (11.77)$$

En general el cálculo de la propagación de las ondas de creciente no se puede llevar a cabo de forma sencilla. Pero en aquellos casos¹⁰ en que Q no depende de x , la (11.77) se reduce a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (11.78)$$

y podemos calcular la solución con el método de las características como hicimos antes, introduciendo cuando sea necesario frentes de choque que satisfacen la relación (11.59):

$$U = \frac{q_2 - q_1}{s_2 - s_1} \quad (11.79)$$

Corresponde notar que para las leyes de potencias que hemos considerado (y también de acuerdo con la observación) $c(s)$ es una función *creciente* de s . Por lo tanto, las ondas asociadas con un aumento del nivel del curso de agua rompen hacia adelante, y los frentes de choque implican un aumento del nivel de las aguas, pues $s_2 > s_1$.

Efectos de orden superior: la teoría hidráulica para aguas poco profundas

La teoría cinemática que desarrollamos hasta ahora presenta un serio inconveniente, pues predice que una creciente termina fatalmente con la ruptura de la onda. Si esto fuese cierto, y se produjera una discontinuidad, significaría que toda creciente acabaría convirtiéndose en un aluvión. Afortunadamente para nosotros no ocurre tal cosa salvo en situaciones muy especiales.

Es evidente por lo tanto que la relación $q = Q(s)$ se debe reconsiderar. Lo que sucede es que en un flujo no estacionario, las fuerzas debidas a la fricción y a la gravedad no se equilibran exactamente y su diferencia conduce a la aceleración del fluido, que despreciamos en nuestro tratamiento. Además, no tomamos en cuenta la diferencia entre las pendientes de la superficie libre y del cauce del río, que produce un efecto importante cuando el frente de la onda se empina.

Para ver como se puede mejorar la teoría tomando en cuenta estos efectos y sin complicar demasiado los cálculos, nos limitaremos a una geometría sencilla. Por lo tanto consideraremos el flujo en un canal de sección rectangular cuyo ancho es b y cuya pendiente α es constante y supondremos que $C_f = \text{cte.}$. Si la profundidad de la corriente es h , y $h \ll b$, entonces el perímetro mojado está dado por $P \approx b = \text{cte.}$. Además, vamos a usar como variables la profundidad $h (= s/b)$ y la velocidad media $v = q/s (= q/hb)$, en lugar de s y q . Por último vamos a suponer que la coordenada y (transversal a la dirección de la corriente) es ignorable, y que la coordenada z es perpendicular al lecho del canal (Fig. 11.10).

¹⁰ Por ejemplo en un canal recto de perfil uniforme y pendiente constante.

Conviene expresar las ecuaciones en forma conservativa pues así será más fácil deducir las condiciones apropiadas para una discontinuidad, cuando sea necesario. La conservación de la masa por unidad de ancho del canal se expresa entonces como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} h dx + [hv]_{x_2}^{x_1} = 0 \quad (11.80)$$

En cuanto a la ecuación que expresa la conservación de la cantidad de movimiento por unidad de ancho del canal, usando la *aproximación hidráulica* (que consiste en despreciar la componente z de la velocidad, esto se aclarará más adelante) la podemos escribir como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} hv dx + [hv^2]_{x_2}^{x_1} + \left[\frac{1}{2} g_z h^2 \right]_{x_2}^{x_1} = \int_{x_2}^{x_1} g_x h dx - \int_{x_2}^{x_1} C_f v^2 dx \quad (11.81)$$

donde $g_z = g \cos \alpha$ y hemos cancelado los factores comunes ρ y b . De izquierda a derecha, los términos de la (11.81) son: (1) la tasa de variación de la cantidad de movimiento del fluido contenido en el tramo $x_2 < x < x_1$, (2) el transporte neto de cantidad de movimiento a través de las secciones x_1 y x_2 , (3) la diferencia entre la presión que se ejerce sobre las secciones x_1 y x_2 debido a la diferencia de la profundidad de la corriente, (4) la componente del peso del fluido en la dirección x , y (5) la fuerza de fricción que ejerce el lecho del canal.

Conviene hacer un breve comentario sobre la aproximación hidráulica. En la teoría hidráulica se usa como variable la *velocidad media* v , obtenida como

$$v(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u_x(x, z, t) dz \quad (11.82)$$

y se desprecia la aceleración del fluido en la dirección z . Esto último implica que la presión es puramente hidrostática, de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g_z \quad (11.83)$$

Por lo tanto, integrando la (11.83) resulta

$$p - p_0 = -(z - h) \rho g_z \quad (11.84)$$

donde p_0 es la presión atmosférica. La fuerza que se ejerce sobre una sección transversal del canal debido a la presión es entonces

$$b \int_0^h (p - p_0) dz = -b \rho g_z \int_0^h (z - h) dz = \frac{1}{2} b h^2 \rho g_z \quad (11.85)$$

de modo que finalmente obtenemos el tercer término de la (11.81).

Las ecuaciones (11.80) y (11.81) son las dos condiciones de conservación que necesitamos. Si suponemos que h y v son diferenciables, podemos tomar el límite $x_2 \rightarrow x_1 = x$ y obtener un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para h y v :

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0 \\ (hv)_t + \left(hv^2 + \frac{1}{2}g_z h^2\right)_x &= g_x h - C_f v^2 \end{aligned} \quad (11.86)$$

Podemos usar la primera de estas ecuaciones para reemplazar h_t en la segunda y simplificarla un poco; así obtenemos finalmente nuestro sistema en la forma

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0 \\ v_t + vv_x + g_z h_x &= g_x - C_f \frac{v^2}{h} \end{aligned} \quad (11.87)$$

La aproximación de ondas cinemáticas se obtiene a partir de este sistema despreciando el primer miembro de la segunda ecuación. Se obtiene así

$$h_t + (hv)_x = 0 \quad , \quad v = \sqrt{h \frac{g_x}{C_f}} \quad (11.88)$$

que equivale a nuestro anterior sistema, como el lector puede fácilmente verificar. En esta teoría cinemática, la condición de choque (11.79) se expresa como

$$U = \frac{v_2 h_2 - v_1 h_1}{h_2 - h_1} \quad (11.89)$$

Estabilidad

Vamos a considerar ahora el efecto de los términos adicionales de las (11.87). Para comenzar, consideremos primero la forma linearizada de este sistema de ecuaciones, para pequeñas perturbaciones alrededor de un estado estacionario en el cual

$$h = h_0 \quad , \quad v = v_0 \quad \text{con} \quad v_0 = \sqrt{h_0 \frac{g_x}{C_f}} \quad (11.90)$$

Si suponemos que

$$v = v_0 + V \quad , \quad h = h_0 + H \quad (11.91)$$

donde V y H son pequeñas perturbaciones, y sustituimos en las (11.87) obtenemos, linearizando:

$$\begin{aligned} H_t + H_x v_0 + h_0 V_x &= 0 \\ V_t + v_0 V_x + g_z H_x + g_x \left(2 \frac{V}{v_0} - \frac{H}{h_0}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (11.92)$$

Si eliminamos V derivando la segunda ecuación respecto de x y usando la primera, obtenemos

$$\frac{2g_x}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) H = g_z h_0 H_{xx} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 H \quad (11.93)$$

con $c_0 = 3v_0/2$ como corresponde a un canal ancho de perfil rectangular (ley de Chezy). Es fácil verificar que si h_0 es pequeño en comparación con la escala espacial L de las variaciones de H , más precisamente, si se cumplen las condiciones

$$h_0/L \ll g_x/g_z = \tan \alpha \quad \text{y} \quad h_0/L \ll C_f \quad (11.94)$$

el miembro derecho de la (11.93) se puede despreciar, y tenemos la aproximación lineal de la onda cinemática: $H = f(x - c_0 t)$.

El término proporcional a g_z del miembro derecho es un término de tipo difusivo que describe el efecto de la componente z de la gravedad, que tiende a aplanar el perfil de la onda. El efecto del segundo término es más complicado de interpretar, pero podemos obtener una primera idea si suponemos que se cumplen las (11.94) de modo que el miembro derecho de la (11.93) es una pequeña corrección. Al orden más bajo de aproximación, $H = f(x - c_0 t)$ y entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx -c_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (11.95)$$

Usando esta aproximación en el miembro derecho de la (11.93), la ecuación se reduce a

$$\frac{2g_x}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) H = \{c_{g0}^2 - (v_0 - c_0)^2\} H_{xx} \quad (11.96)$$

donde $c_{g0} = (g_y h_0)^{1/2}$ es la velocidad de propagación de las ondas de gravedad de pequeña amplitud (en aguas poco profundas, como corresponde a la aproximación hidráulica). Entonces si

$$c_{g0}^2 > (v_0 - c_0)^2 \quad (11.97)$$

el miembro derecho es *positivo* y por lo tanto hay un efecto de *difusión que tiende a impedir el empinamiento*, y por consiguiente la ruptura, de la onda. Si en cambio

$$c_{g0}^2 < (v_0 - c_0)^2 \quad (11.98)$$

el miembro derecho es negativo y la solución es inestable.

El criterio de estabilidad se puede verificar directamente de la ec. (11.93) mediante el habitual análisis de modos normales, buscando soluciones de la (11.96) de la forma

$$H \propto e^{ikx - i\omega t} \quad (11.99)$$

Sustituyendo en la (11.96) se obtiene la relación de dispersión

$$\frac{2g_x}{v_0} (\omega - c_0 k) = -ic_{g0}^2 k^2 + i(\omega - v_0 k)^2 \quad (11.100)$$

a partir de la cual se determina $\omega = \Omega(k)$. La (11.100) tiene dos raíces ω_1, ω_2 , y las soluciones elementales (11.99) son estables si la parte imaginaria de ambas raíces es negativa. Es fácil verificar, aunque algo laborioso, que la condición para que esto ocurra es precisamente la (11.97).

Esto confirma el resultado de nuestro procedimiento aproximado y lo extiende a todas las longitudes de onda.

Ondas de orden superior

Es importante observar que todo el miembro derecho de la (11.93) se puede escribir en la forma de un operador de ondas, como queda en evidencia si escribimos esa ecuación en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_- \frac{\partial}{\partial x}\right) H + \frac{2g_x}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) H = 0 \quad (11.101)$$

donde hemos introducido las cantidades:

$$c_+ = v_0 + c_{g0} \quad , \quad c_- = v_0 - c_{g0} \quad (11.102)$$

que son las velocidades de las ondas de gravedad de aguas poco profundas (de amplitud infinitesimal) que se propagan a favor y en contra de la corriente, respectivamente. Cabe esperar por lo tanto que estas ondas jueguen también algún rol en el problema. No es éste el momento para profundizar esta cuestión, pero podemos hacer una observación importante, que permite interpretar la condición de estabilidad (11.97). Se puede demostrar (ver Whitham) que las velocidades de propagación que aparecen asociadas con las derivadas de mayor orden, son *siempre* las que determinan las señales más rápidas y más lentas. Por lo tanto, en nuestro caso, la señal hidráulica más rápida viaja con la velocidad c_+ y la más lenta con la velocidad c_- . Está claro entonces que la aproximación cinemática

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) H = 0 \quad (11.103)$$

tiene sentido solamente si

$$c_- < c_0 < c_+ \quad (11.104)$$

Pero es fácil ver que esta condición es precisamente la condición de estabilidad (11.97). Por lo tanto, el flujo es estable si se cumple la (11.104) y entonces cuando se cumplen las condiciones (11.94) es razonable aproximar la (11.93) mediante la (11.103).

Usando las expresiones de c_+ , c_- y c_0 podemos escribir la condición de estabilidad en la forma

$$v_0 < 2c_{g0} \quad (11.105)$$

o bien, recordando la (11.90), e introduciendo el parámetro $\kappa = \tan \alpha / C_f$, en la forma

$$\frac{g_x}{g_z C_f} = \frac{\tan \alpha}{C_f} = \kappa < 4 \quad (11.106)$$

Para ríos y canales v_0 es generalmente mucho menor que c_{g0} , de modo que $\kappa < 4$, pero en los vertederos de diques y otros conductos artificiales los valores críticos se exceden holgadamente. El flujo que resulta en estos casos no es necesariamente caótico y carente de estructura. Bajo circunstancias favorables toma la forma de *ondas rodillo* ("roll waves"), como se muestra en la Fig.

11.11, con una estructura periódica de saltos discontinuos separados por perfiles suaves. Este fenómeno se conoce hace mucho tiempo, pero recién en 1949 Dressler mostró como se pueden construir soluciones no lineales adecuadas de las (11.87) con oportunas condiciones en las discontinuidades, que describan el patrón de las ondas rodillo.

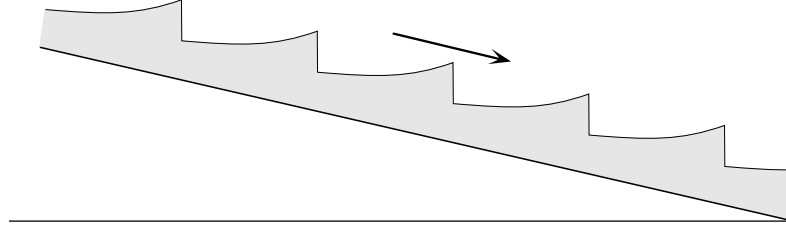


Fig. 11.11. Ondas rodillo en un canal con $\kappa > 4$.

Estructura del frente de choque cinemático: la onda monoclinal de creciente

La estructura de los frentes de choque que surgen en la teoría cinemática de las ondas de creciente (ecs. (11.88) y (11.89)) es particularmente importante, puesto que *el espesor¹¹ del frente puede llegar a ser de decenas de km*. La podemos obtener buscando soluciones del tipo onda viajera de las ecuaciones de la teoría hidráulica, esto es, soluciones cuyo perfil se propaga sin cambio de forma.

Por lo tanto, buscaremos soluciones de las (11.87) de la forma:

$$h = h(X) \quad , \quad v = v(X) \quad , \quad X = x - Ut \quad (11.107)$$

con

$$h(-\infty) = h_2 \quad , \quad v(-\infty) = v_2 \quad \text{y} \quad h(+\infty) = h_1 \quad , \quad v(+\infty) = v_1 \quad (11.108)$$

y

$$h'(-\infty) = 0 \quad , \quad v'(-\infty) = 0 \quad , \quad h'(+\infty) = 0 \quad , \quad v'(+\infty) = 0 \quad (11.109)$$

donde las “primas” indican derivadas respecto de X . Sustituyendo las (11.107) en las (11.87) se obtiene

$$\begin{aligned} (v - U)h' + hv' &= 0 \\ (v - U)v' + g_z h' &= g_x - C_f \frac{v^2}{h} \end{aligned} \quad (11.110)$$

La ecuación de continuidad se integra de inmediato. El resultado es

$$(U - v)h = B \quad , \quad B = \text{cte.} \quad (11.111)$$

y los flujos uniformes en $X = \pm\infty$ satisfacen

¹¹ En este aspecto nuestro problema difiere de lo que ocurre en los gases, en los cuales el espesor del frente de choque es siempre pequeño (del orden del camino libre medio de las moléculas).

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{g_x}{C_f} h_1 \quad , \quad v_2^2 = \frac{g_x}{C_f} h_2 \\ (U - v_1)h_1 &= B \quad , \quad (U - v_2)h_2 = B \end{aligned} \quad (11.112)$$

Conviene expresar B y U en términos de h_1 y h_2 . De las (11.112) resulta

$$B = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1} h_2 h_1 = \sqrt{\frac{g_x}{C_f}} \frac{h_2 h_1}{h_2^{1/2} + h_1^{1/2}} \quad , \quad U = \frac{v_2 h_2 - v_1 h_1}{h_2 - h_1} = \sqrt{\frac{g_x}{C_f}} \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{h_2 - h_1} \quad (11.113)$$

La última de estas ecuaciones coincide con la condición de choque (11.89) de las ondas cinemáticas. Esto es lo usual en este tipo de problemas, y esperamos que la solución de las (11.110)-(11.111) nos de la estructura del frente de choque cinemático.

Usando la (11.111) podemos eliminar v en la segunda de las (11.110) y obtener una ecuación para la sola h :

$$\frac{dh}{dX} = - \frac{C_f (B - hU)^2 - g_x h^3}{g_z h^3 - B^2} \quad (11.114)$$

No es difícil verificar que esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{dh}{dX} = - \tan \alpha \frac{(h_2 - h)(h - h_1)(h - h_0)}{h^3 - h_0 h_1 h_2 \kappa} \quad , \quad h_0 = \frac{h_1 h_2}{(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})^2} \quad (11.115)$$

Ahora bien, puesto que $h_1 < h < h_2$ y que $h_0 < h_1, h_2$, nuestra solución nunca pasa por $h = h_0$ y el *numerador* de dh/dX es siempre positivo. Por lo tanto, el comportamiento de la solución depende crucialmente del denominador $h^3 - h_0 h_1 h_2 \kappa$ y su eventual cambio de signo.

Usando la (11.111) se puede escribir el denominador de la (11.115) como

$$h^3 - h_0 h_1 h_2 \kappa = (h^2 / g_z) [g_z h - (U - v)^2] \quad (11.116)$$

Puesto que $B > 0$ por la (11.113), resulta que $U > v$, y a mayor razón $U > v - (g_z h)^{1/2}$. Por lo tanto el denominador es positivo si

$$U < v + \sqrt{g_z h} \quad (11.117)$$

y negativo en el caso contrario¹². Cuando $h_2 \rightarrow h_1$, vemos de la (11.113) que

$$U = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g_x}{C_f}} h_1^{1/2} = \frac{3}{2} v_1 \quad (11.118)$$

Por lo tanto, en el caso estable, cuando

$$\frac{3}{2} v_1 < U < v_1 + c_{g1} \quad (11.119)$$

¹² Obsérvese que la condición que el denominador sea positivo es una generalización de la condición de estabilidad (11.98) que obtuvimos a partir de la forma linearizada de las (11.87).

(donde $c_{g1} = (g_z h_1)^{1/2}$) el denominador no cambia de signo al variar h de h_1 a h_2 , y dh/dX es siempre negativo. La (11.119) muestra que el frente de choque cinemático se mueve *más rápidamente* que la onda de orden más bajo en el flujo *delante* del frente (la onda cinemática, cuya velocidad es $3v_1/2$) pero *más lentamente* que las ondas de orden superior.

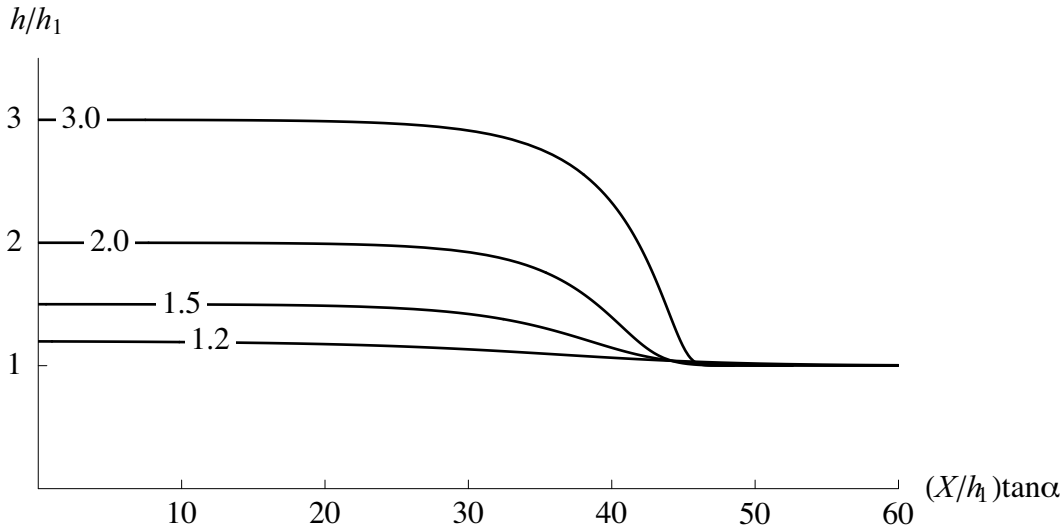


Fig. 11.12. Ondas monoclinales de creciente. Los perfiles se calcularon para $\kappa = 0.5$ y para los valores de h_2/h_1 que se indican en las respectivas curvas.

Cuando se cumple la (11.119) podemos integrar la (11.115) partiendo desde $X = -\infty$ donde $h = h_2$ hasta x , y así construir la función $h(X)$. De esta manera¹³ se obtienen perfiles suaves como se muestra en la Fig. 11.12. Estas soluciones se denominan *ondas monoclinales*. Se puede ver que si κ es pequeño (como sucede en un río de llanura debido a la escasa pendiente) y h_2/h_1 no es demasiado grande, la región de transición donde ocurre la variación de h (el “espesor” del frente de choque) puede ser de varias decenas de km. Perfiles suaves como los de la Fig. 11.12 se obtienen para todo el rango de velocidades (11.119) del frente de choque.

De las (11.112) y (11.113) es fácil ver que para el rango de velocidades (11.119) se cumple

$$1 < \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} < G(\kappa) \equiv \frac{1 + [1 + 4\kappa^{1/2}]^{1/2}}{2\kappa^{1/2}} \quad (11.120)$$

Esta fórmula permite calcular el rango de valores de κ para los cuales se puede tener una onda de creciente monoclinal. Es fácil ver que G es una función decreciente de κ , y menor que la unidad para $\kappa > 4$. Por lo tanto para un curso de agua para el cual $\kappa > 4$ no existen soluciones de este tipo. El hecho que $h_2 > h_1$ para la onda monoclinal está de acuerdo con la tendencia a la ruptura de las ondas cinemáticas, pues $c'(h) > 0$ para las ondas de creciente.

¹³ En la práctica conviene obtener $X(h)$ integrando dX/dh , que se expresa en términos de h y de las constantes del problema, y luego invertir gráficamente el resultado. Es posible dar la expresión de $X(h)$ en forma cerrada, pero la fórmula, que involucra varias funciones logarítmicas, es muy complicada y poco transparente, por eso no la reproducimos aquí.

Soluciones discontinuas en la teoría de aguas poco profundas: las condiciones de salto hidráulico

Cuando

$$v_1 + c_{g1} < U < v_2 + c_{g2} \quad (11.121)$$

se viola la condición (11.120). Esto ocurre cuando $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$. En estos casos el denominador de la (11.115) cambia de signo para algún valor de h entre h_2 y h_1 . Debido a esto la curva integral $h(X)$ vuelve sobre sí misma (Fig. 11.13) y no se puede obtener un perfil continuo univaluado.

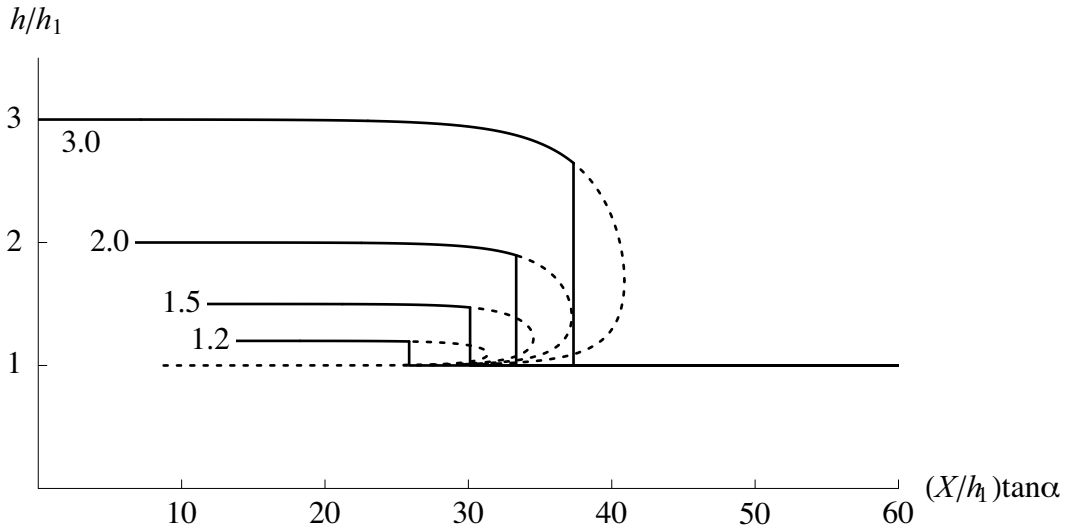


Fig. 11.13. Cuando $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$ no se pueden obtener soluciones del tipo monoclinas como las de la Fig. 11.12, pues la curva integral $h(X)$ vuelve sobre sí misma dando lugar a soluciones multivaluadas. En estos casos las soluciones son *discontinuas* (representadas por las líneas llenas) y presentan saltos hidráulicos. Los cálculos se hicieron para $\kappa = 4$ y los valores de h_2/h_1 indicados sobre las respectivas curvas.

Claramente la dificultad proviene de que la teoría hidráulica (ecs. (11.87)) es *aún insuficiente* y se deberían aportar *ulteriores mejoras* a la misma, introduciendo nuevos efectos, de orden superior a los que incluimos en las (11.87). Sin embargo cuando aparecen dificultades de esta índole, en la mayoría de los problemas de estructura de un frente de choque es usual introducir una adecuada discontinuidad, para evitar así las complicaciones que trae aparejado formular una teoría mejor. Es razonable proceder así, *siempre y cuando la discontinuidad* que se va a introducir *se obtenga a partir de una forma integrada válida de las ecuaciones básicas*. Eso es lo que ocurre en nuestro caso, y ahora se aprecia la utilidad de escribir las ecuaciones básicas en forma conservativa, pues las (11.80) y (11.81) siguen valiendo aunque la solución sea discontinua. Siguiendo el mismo procedimiento que usamos para deducir la condición de choque para las ondas cinemáticas, si la discontinuidad ocurre para $x = x_d(t)$, podemos deducir a partir de las (11.80) y (11.81) las condiciones

$$\begin{aligned} -u_d[h] + [hv] &= 0 \\ -u_d[hv] + \left[hv^2 + \frac{1}{2} g_z h^2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (11.122)$$

donde $u_d = \dot{x}_d$ es la velocidad de la discontinuidad. Se debe notar que la contribución del miembro derecho de la (11.81) se anula en el límite $x_2, x_1 \rightarrow x_d$. Las condiciones (11.122) acompañan a las ecuaciones (11.87), del mismo modo que para las ondas cinemáticas la (11.89) acompaña a las (11.88)¹⁴.

La discontinuidad descrita por las (11.122) es en realidad lo que en la teoría de olas en aguas poco profundas se denomina *salto hidráulico*. La rompiente de las olas en la playa y el resalto circular que se observa cuando el chorro del grifo cae en la bacia de fondo plano de la cocina son ejemplos de saltos hidráulicos. Conviene elaborar las condiciones (11.122) para llevarlas a una forma más cómoda para el uso. Para eso las escribimos en la forma

$$\begin{aligned} (v_+ - u_d)h_+ &= (v_- - u_d)h_- \\ (v_+ - u_d)h_+v_+ + \frac{1}{2}g_z h_+^2 &= (v_- - u_d)h_-v_- + \frac{1}{2}g_z h_-^2 \end{aligned} \quad (11.123)$$

donde los subscripts + y - indican las cantidades delante ($x = x_d^+$) y detrás ($x = x_d^-$) de la discontinuidad, respectivamente. Usando la primera de ellas para eliminar v_+ y v_- en la segunda, esta última se puede escribir como

$$\left(\frac{h_-}{h_+}\right)^3 - (1 + 2F_+^2)\left(\frac{h_-}{h_+}\right) + 2F_+^2 = 0 \quad (11.124)$$

donde introducimos el *número de Froude* del flujo *delante* de la discontinuidad (en el referencial del frente de choque), definido por

$$F_+ \equiv \frac{v_+ - u_d}{c_{g+}}, \quad c_{g+} = \sqrt{g_z h_+} \quad (11.125)$$

Resolviendo la (11.124) se obtiene

$$\frac{h_-}{h_+} = \frac{\sqrt{1 + 8F_+^2} - 1}{2} \quad (11.126)$$

y la primera condición queda

$$\frac{v_+ - u_d}{v_- - u_d} = \frac{\sqrt{1 + 8F_+^2} - 1}{2} \quad (11.127)$$

En general, el número de Froude de un flujo cuya velocidad es v se define como

$$F \equiv \frac{v}{c_g} \quad (11.128)$$

¹⁴ Es importante tener cuidado de asociar correctamente las ecuaciones y las correspondientes condiciones de choque en cada nivel de la descripción. Al cambiar el nivel de la descripción cambia el número de ecuaciones y de condiciones de choque.

donde c_g es el valor local de la velocidad de las ondas de gravedad de pequeña amplitud en la aproximación de aguas poco profundas. Cuando $F < 1$, la velocidad del flujo es menor que la velocidad de las ondas de gravedad, por lo tanto éstas pueden remontar la corriente; en este caso se dice que el flujo es *subcrítico*. Cuando $F > 1$, la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de las ondas de gravedad, por lo tanto éstas no pueden remontar la corriente, y se dice que el flujo es *supercrítico*.

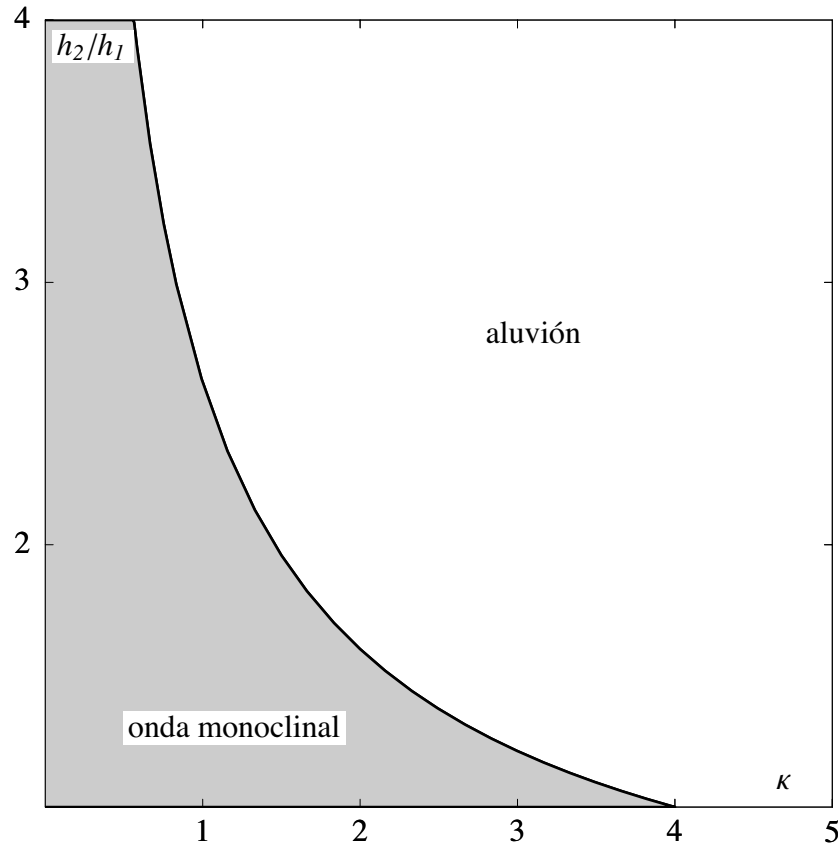


Fig. 11.14. Representación gráfica de la condición $h_2 / h_1 < G(\kappa)^2$. Cuando esta condición se cumple (zona gris del diagrama) la onda de creciente es del tipo monoclinal (como las que se muestran en la fig. 11.12). Cuando la condición no se cumple la onda de creciente es un aluvión (como los que se muestran en la Fig. 11.13), que se presenta como un salto hidráulico que llega sin ser precedido por ninguna señal hidráulica.

Soluciones discontinuas de orden superior para crecientes: aluviones

Volviendo al presente contexto, el problema es introducir una discontinuidad que satisface las (11.122) en nuestro perfil viajero, solución de las (11.110). Claramente, la velocidad de la discontinuidad debe ser también U . En vista de la (11.111), cualquier discontinuidad entre las ramas del perfil cumple automáticamente con la primera de las condiciones (11.122), *incluyendo* las líneas $h = h_1$ y $h = h_2$ (que son también soluciones de la (11.115)). La segunda condición determina la posición de la discontinuidad. Ahora bien, si nos ubicamos en el sistema de referencia de la discontinuidad, la velocidad del flujo delante de la misma es $v_+ - U$, y se tiene $F_+ > 1$, luego este flujo es supercrítico. Por lo tanto las ondas de gravedad no pueden remontar la corriente, y en consecuencia ninguna señal hidráulica que de aviso de la presencia de la discon-

tinuidad se transmite hacia adelante de la misma. Luego es razonable suponer que la solución *delante del salto hidráulico* sea simplemente

$$h = h_1 \quad , \quad x > x_d \quad (11.129)$$

Luego, la (11.126) nos dice que

$$h_- = h_1 \frac{\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1}{2} \quad , \quad F_1 \equiv \frac{v_1 - U}{c_{g1}} \quad (11.130)$$

Este valor de h_- se encuentra sobre la rama superior de la curva integral $h(X)$, antes del punto en que vuelve sobre sí misma (ver Fig. 11.13), y es fácil verificar que es menor que h_2 , siempre y cuando $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$.

Conclusiones

Podemos finalmente concluir que la discontinuidad original de la teoría cinemática (basada en las ecs. (11.88) y (11.89)) se resuelve mediante la teoría hidráulica más detallada (ecs. (11.87)) en el perfil suave de la *onda monoclinal*, siempre y cuando se cumpla la condición (11.119) (o, en forma equivalente, que $h_2/h_1 < G(\kappa)^2$ o que $F_1 < 1$). Cuando no se cumple esa condición (o sea si $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$ y entonces $F_1 > 1$) queda parte de la discontinuidad, en forma de un salto hidráulico, y la solución representa un *aluvión* (Fig. 11.14).

La ecuación de Korteweg-de Vries para las ondas dispersivas no lineales en un canal

Las principales características de las ondas dispersivas no lineales se pueden obtener estudiando las soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries (11.19), que describe aproximadamente la propagación de perturbaciones de amplitud finita, pero no muy grande, en aguas de profundidad h_0 , también no demasiado grande. Como paso previo a ese estudio vamos a deducir la ec. (11.19), para que el lector aprecie las aproximaciones de la teoría y sus límites de validez.

Consideremos un canal horizontal que contiene agua, cuya profundidad en reposo es h_0 (Fig. 11.15). Sean x y z la coordenadas a lo largo del canal y vertical, respectivamente; $z = 0$ corresponde al fondo del canal. Veamos si podemos encontrar perturbaciones de amplitud finita de la superficie que se propagan sin cambio de forma, como la onda solitaria que observó Scott Russell. Supondremos que la perturbación no depende de la coordenada transversal al canal. Por lo tanto, buscaremos soluciones de la forma

$$h(x, t) = h_0 + \xi(x, t) \quad \text{con} \quad \xi = a\varphi(x - ct) \quad , \quad a, c = \text{cte.} \quad (11.131)$$

Para fijar ideas vamos a suponer que $c > 0$, de modo que la onda se propaga hacia la derecha.

Estudiaremos el movimiento del agua desde el referencial ($x' = x - ct$, z) que se mueve con la velocidad de la onda. En ese referencial, el perfil de la onda solitaria es constante en el tiempo, y está dado por

$$h(x') \quad \text{con} \quad h(|x'| \rightarrow \infty) = h_0 \quad (11.132)$$

En el referencial móvil tenemos un flujo *estacionario*, cuya velocidad es $-ce_x$ lejos de donde está localizada la perturbación. Vamos a suponer que el flujo es incompresible y no viscoso, y que la presión sobre la superficie libre es constante. Estas hipótesis son suficientes para determinar completamente el flujo, como mostraremos ahora.

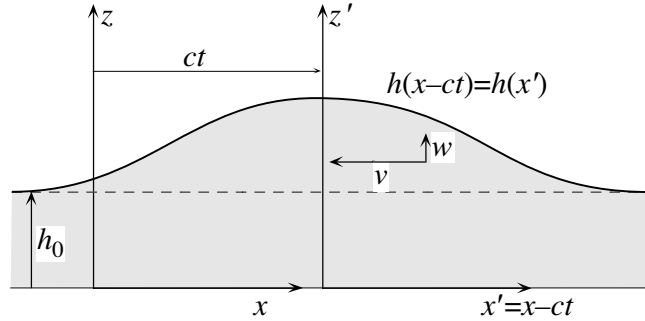


Fig. 11.15. Onda solitaria en un canal, vista desde el referencial fijo y el referencial de la onda.

Sean $v(x', z)$ y $w(x', z)$ las componentes horizontal y vertical de la velocidad, respectivamente. La condición de incompresibilidad se escribe entonces como

$$\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.133)$$

Puesto que no hay viscosidad el flujo debe ser irrotacional, por lo tanto

$$\frac{\partial w}{\partial x'} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (11.134)$$

Además, se debe cumplir que

$$v(|x'| \rightarrow \infty, z) = -c, \quad w(|x'| \rightarrow \infty, z) = 0, \quad w(x', 0) = 0 \quad (11.135)$$

Las condiciones cinemáticas (11.133)-(11.135) determinan completamente el campo de velocidad en función del perfil $h(x')$ de la perturbación. En efecto, la solución de (11.133) y (11.134) con las condiciones de contorno (11.135) se puede obtener en forma iterativa en términos de $h(x')$ y sus derivadas h', h'', \dots respecto de x' . Para hacerlo, observamos que si el agua no es muy profunda y si h no difiere demasiado de h_0 , la componente horizontal de la velocidad vale aproximadamente

$$v \approx v_0 = -\frac{ch_0}{h(x')} \quad (11.136)$$

si usamos esta aproximación en la (11.134) resulta $\partial w / \partial x' = 0$, y puesto que por la (11.135) w es nula en el infinito se deduce que en primera aproximación

$$w \approx 0 \quad (11.137)$$

Usando este resultado, obtenemos de la (11.133) que:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial x'} \approx -\frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{ch_0}{h} \right) = -\frac{ch_0 h'}{h^2} \quad (11.138)$$

por lo tanto, en segunda aproximación

$$w \approx w_1 = -\frac{ch_0 h' z}{h^2} \quad (11.139)$$

puesto que $w(x', 0) = 0$. Usando ahora la (11.139) en la (11.134) se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{ch_0 h' z}{h^2} \right) = -ch_0 z \left(\frac{h''}{h^2} - 2 \frac{h'}{h^3} \right) \quad (11.140)$$

Integrando esta expresión resulta

$$v \approx v_0 + v_1 = -\frac{ch_0}{h} - \frac{ch_0 z^2}{2} \left(\frac{h''}{h^2} - 2 \frac{h'}{h^3} \right) - ch_0 K(x') \quad (11.141)$$

La función $K(x')$ se determina requiriendo que

$$\begin{aligned} -ch_0 &= \int_0^{h(x')} v(x', z) dz = -ch_0 \int_0^{h(x')} \left(\frac{1}{h} + \frac{z^2}{2} \left(\frac{h''}{h^2} - 2 \frac{h'}{h^3} \right) + K \right) dz \\ &= -ch_0 \left[1 + \frac{h^3}{6} \left(\frac{h''}{h^2} - 2 \frac{h'}{h^3} \right) + Kh \right] \end{aligned} \quad (11.142)$$

Por lo tanto

$$K = -\frac{h^2}{6} \left(\frac{h''}{h^2} - 2 \frac{h'}{h^3} \right) \quad (11.143)$$

y se obtiene finalmente

$$v \approx v_0 + v_1 = -ch_0 \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{h''}{h^2} - 2 \frac{h'}{h^3} \right) \left(z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right] \quad (11.144)$$

Si continuáramos el proceso de iteración, obtendríamos expresiones de u y w en forma de series cuyos términos son funciones de h , h' , h'' , h''' , ..., etc.. Sin embargo, las aproximaciones (11.139) y (11.144) son suficientes para obtener la ecuación de Korteweg-de Vries.

Una vez que se ha tomado en cuenta la cinemática y se han determinado u y w , podemos introducir la dinámica y así obtener la ecuación diferencial para h . Para este fin usamos el teorema de Bernoulli, que para un flujo estacionario e irrotacional establece que

$$\Phi(x', z) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte.} \quad (11.145)$$

Puesto que la presión es constante sobre la superficie libre $z = h$, tenemos que

$$\frac{d}{dx'} \Phi[x', h(x')] = v \frac{dv}{dx'} + w \frac{dw}{dx'} + gh' = 0 \quad (11.146)$$

donde u , w y sus derivadas se deben evaluar en x' , $h(x')$.

Ahora vamos a investigar la magnitud de los diferentes términos que figuran en la (11.146). Para este propósito conviene escribir

$$h = h_0(1 + \varepsilon) \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon(x') \quad (11.147)$$

e introducir la variable adimensional ξ definida por

$$\xi' = x' / \ell \quad (11.148)$$

donde la escala ℓ es la longitud horizontal característica de la perturbación. Entonces

$$h' = h_0 \varepsilon' = \alpha \frac{d\varepsilon}{d\xi'} \quad , \quad \alpha = \frac{h_0}{\ell} \quad (11.149)$$

y para perturbaciones suficientemente suaves se tiene que

$$O(\varepsilon) = O\left(\frac{d\varepsilon}{d\xi'}\right) = O\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\xi'^2}\right) = \dots \quad (11.150)$$

Vamos a suponer que α y ε son cantidades pequeñas en comparación con la unidad. Entonces, usando las (11.147)-(11.150) podemos escribir la (11.139) y la (11.144) como

$$\begin{aligned} w &= -c\alpha \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + \dots \\ v &= -c \left[1 - \varepsilon + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{d^2\varepsilon}{d\xi'^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (11.151)$$

donde los ... indican términos de orden superior en α y ε . Diferenciando $w(x', h)$ y $u(x', h)$ dados por (11.139) y (11.144) respecto de x' , y usando las (11.147)-(11.150) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx'} &= -\frac{c}{\ell} \alpha \frac{d^2\varepsilon}{d\xi'^2} + \dots \\ \frac{dv}{dx'} &= -\frac{c}{\ell} \left[-\frac{d\varepsilon}{d\xi'} (1 - 2\varepsilon) + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{d^3\varepsilon}{d\xi'^3} \right] + \dots \end{aligned} \quad (11.152)$$

Finalmente, sustituyendo las (11.151) y (11.152) en la (11.146) y usando la (11.149) resulta

$$0 = \left(\frac{gh_0}{c^2} - 1 \right) \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + 3\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{d^3\varepsilon}{d\xi'^3} + \dots \quad (11.153)$$

Se puede observar que para deducir los términos de la (11.153) hasta el orden de $\alpha^2\varepsilon$ es suficiente conocer las aproximaciones de orden cero de v y de w y dw/dx' (estas dos últimas son nulas), pero las aproximaciones siguientes ($v_0 + v_1$ y w_1) se necesitan para calcular dv/dx' al orden $\alpha^2\varepsilon$. Se puede también verificar fácilmente que las aproximaciones involucradas en

nuestra deducción de la (11.153), o sea $w = w_1$, $v = v_0 + v_1$, satisfacen a la (11.133) hasta términos del orden de $\alpha\epsilon^2$, mientras que la (11.134) se satisface en forma exacta.

Asimismo, es oportuno señalar que si la perturbación es periódica en x' , o sea, consiste de una sucesión de crestas y valles, la deducción se puede llevar adelante del mismo modo. En este caso podemos suponer que h_0 es la altura del agua en la posición del fondo de los valles. Hay una sutileza en esto, porque las condiciones (11.133) y (11.134) determinan v a menos de una constante aditiva, pues la condición que el fluido al infinito está en reposo, que permite completar la determinación de v , no se cumple cuando la perturbación es periódica. Sin embargo, en este caso es razonable suponer que $v_0 = -ch_m/h$, donde h_m tiene un valor intermedio entre h_0 y la altura de las crestas, y por lo tanto $h_m/h_0 = 1 + \epsilon_m$ donde ϵ_m es una constante del orden de ϵ . Entonces podemos repetir el procedimiento anterior desde la (11.136) hasta la (11.153), y la única diferencia que resulta es un término adicional de la forma $(cte.) \times d\epsilon/d\xi'$, con $(cte.) = O(\epsilon_m)$. Por consiguiente podemos usar la ec. (11.153), con tal de reemplazar ϵ por $\epsilon' = \epsilon + (cte.)$. En conclusión, la ec (11.153) vale también para perturbaciones periódicas, pero en ese caso ϵ se conoce a menos de una constante aditiva. Veremos más adelante cómo se determina esa constante.

Usando la (11.150) es fácil ver que las razones entre los tres términos de la (11.153) son del orden de

$$(gh_0/c^2 - 1) : \epsilon : \alpha^2 \quad (11.154)$$

Claramente, cuando tanto ϵ como α tienden a 0, o sea cuando la amplitud de la perturbación es infinitesimal respecto de la profundidad y la profundidad es infinitesimal en comparación con ℓ , la solución no trivial de la (11.153) es

$$\epsilon(\xi') \text{ cualquiera} \quad , \quad c^2 = c_0^2 \equiv gh_0 \quad (11.155)$$

Este resultado expresa el hecho ya conocido (ver Capítulo 9) que las perturbaciones infinitesimales en aguas poco profundas se propagan sin dispersión con la velocidad c_0 .

Más en general, si ϵ y α son finitos pero ambos pequeños, la diferencia $c_0^2 - c^2$ debe ser también una cantidad pequeña, del orden de ϵ o de α^2 . Entonces podemos escribir

$$(gh_0/c^2 - 1) = (c_0^2 - c^2)/c^2 = 2(1 - c/c_0) + \dots \quad (11.156)$$

Introduciendo esta expresión en la (11.153) y despreciando términos de orden superior resulta

$$\left(1 - \frac{c}{c_0} + \frac{3}{2}\epsilon\right) \frac{d\epsilon}{d\xi'} + \frac{1}{6}\alpha^2 \frac{d^3\epsilon}{d\xi'^3} = 0 \quad (11.157)$$

Esta es la ecuación de Korteweg-de Vries, escrita en el referencial de la onda. En el referencial fijo la (11.157) toma la forma

$$\frac{c}{c_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right) \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + \frac{1}{6}\alpha^2 \frac{\partial^3 \epsilon}{\partial \xi^3} = 0 \quad (11.158)$$

con

$$\xi = x/\ell \quad , \quad \tau = ct/\ell \quad (11.159)$$

La (11.158) es la forma que aparece generalmente en la literatura. Volviendo ahora a las variables con dimensiones, la (11.158) se escribe como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad , \quad \xi = h - h_0 \quad (11.160)$$

que coincide con la ec. (11.19), ya mencionada al comienzo de este Capítulo.

Para entender el significado de los distintos términos de la (11.158) podemos observar que si ξ es infinitesimal, los términos significativos de la (11.160) dan

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad (11.161)$$

Esta ecuación admite soluciones de la forma

$$\xi = A \cos[k(x - ct)] \quad , \quad A, k = \text{cte.} \quad (11.162)$$

con

$$c = c_0 \left(1 - \frac{1}{6} k^2 h_0^2 \right) \quad (11.163)$$

La ec. (11.163) expresa la primera corrección dispersiva para ondas de amplitud infinitesimal, cuando h_0 no es despreciable frente a la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, como el lector puede verificar fácilmente a partir de la relación de dispersión (9.45). Por lo tanto, el término

$$\frac{1}{6} \alpha^2 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \xi^3} \quad (11.164)$$

de la (11.158) describe los efectos dispersivos al orden más bajo en α .

Si en cambio α es despreciable, esto es, si h_0 es despreciable frente a la escala horizontal ℓ de la perturbación, la (11.160) se reduce a

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (11.165)$$

que es una ecuación hiperbólica no lineal del tipo (11.6) en la cual la velocidad de propagación es

$$c(\xi) = c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \quad (11.166)$$

Por lo tanto el término

$$\frac{3}{2} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \quad (11.167)$$

de la (11.158) describe al orden más bajo en ε los efectos no lineales que conducen a distorsión y la ruptura de la onda. Vemos pues que la ecuación de Korteweg-de Vries describe los efectos combinados de la dispersión y la no linealidad al orden más bajo significativo. Si se deseara, se podrían obtener ecuaciones más exactas continuando el proceso de iteración para obtener mejores aproximaciones de v y w , y en consecuencia introduciendo términos de orden superior en la (11.158).

Soluciones periódicas y aperiódicas de la ecuación de Korteweg-de Vries

Vamos a partir de la ecuación de Korteweg-de Vries escrita en el referencial de la onda

$$\left(1 - \frac{c}{c_0} + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0}\right) \frac{d\xi}{dx'} + \frac{1}{6} h_0^2 \frac{d^3 \xi}{dx'^3} = 0 \quad (11.168)$$

que es la (11.157) escrita en términos de las variables con dimensiones. Podemos obtener de inmediato una primera integral de la (11.168) como

$$\frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2 \xi}{dx'^2} = A + 4 \left(\frac{c}{c_0} - 1 \right) \xi - 3 \frac{1}{h_0} \xi^2, \quad A = \text{cte.} \quad (11.169)$$

El miembro derecho de la (11.169) se puede escribir como $-dV/d\xi$ si definimos

$$V(\xi) = B - A\xi - 2 \left(\frac{c}{c_0} - 1 \right) \xi^2 + \frac{1}{h_0} \xi^3, \quad B = \text{cte.} \quad (11.170)$$

de modo que la (11.169) toma la forma

$$\frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2 \xi}{dx'^2} = - \frac{dV}{d\xi} \quad (11.171)$$

Se puede observar que esta ecuación es *formalmente equivalente* a la ecuación que describe el movimiento unidimensional de una partícula bajo la acción de una fuerza que deriva de una energía potencial V , si interpretamos ξ como la “coordenada” de la partícula, x' como el “tiempo” y $2h_0^2/3$ como la “masa” de la partícula:

$$\xi \leftrightarrow X, \quad x' \leftrightarrow T, \quad \frac{2}{3} h_0^2 \leftrightarrow M \quad (11.172)$$

de modo que se puede establecer la correspondencia

$$\frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2 \xi}{dx'^2} = - \frac{dV}{d\xi} \quad \leftrightarrow \quad M \frac{d^2 X}{dT^2} = - \frac{dV}{dX} \quad (11.173)$$

Prosiguiendo con esta analogía podemos establecer la correspondencia

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\xi}{dx'} \right)^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} M \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 = K \quad (11.174)$$

donde K es la energía cinética del movimiento equivalente.

Puesto que en el movimiento equivalente se conserva la energía mecánica $E = K + V$, es evidente que la (11.171) tiene una integral primera, que usando las correspondencias (11.172)-(11.174) podemos expresar como

$$K + V = E \Leftrightarrow \frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 + B - A\xi - 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\xi^2 + \frac{1}{h_0}\xi^3 = E, \quad E = \text{cte.} \quad (11.175)$$

Como la constante B es arbitraria, podemos poner $E = 0$ sin pérdida de generalidad, de modo que

$$\frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 + B - A\xi - 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\xi^2 + \frac{1}{h_0}\xi^3 = 0 \quad (11.176)$$

En la Fig. 11.16 hemos representado $V(\xi)$. Puesto que ξ debe ser acotado, las tres raíces ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 de $V(\xi) = 0$ deben ser reales. Es evidente también que las variaciones de ξ deben estar comprendidas entre los puntos de retorno ξ_2 y ξ_3 :

$$\xi_2 \leq \xi \leq \xi_3 \quad (11.177)$$

Es obvio que podemos siempre redefinir ξ (o, lo que es lo mismo, h_0) de modo que $\xi_2 = 0$. Esto equivale a poner $B = 0$ en la (11.176). Entonces queda

$$\frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 = \xi \left[A + 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\xi - \frac{1}{h_0}\xi^2 \right] = \frac{1}{h_0}\xi(\xi - \xi_3)(\xi_1 - \xi) \quad (11.178)$$

que podemos escribir en la forma

$$\frac{1}{3}h_0^3\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 = \xi(\xi - a)(a - b - \xi) \quad (11.179)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_3 = a &= h_0 \left[c/c_0 - 1 + \sqrt{(c/c_0 - 1)^2 + A/h_0} \right] \\ \xi_1 = a - b &= h_0 \left[c/c_0 - 1 - \sqrt{(c/c_0 - 1)^2 + A/h_0} \right] \end{aligned} \quad (11.180)$$

Remitiéndonos a la Fig. 11.16, el movimiento unidimensional equivalente es una oscilación $X(T)$ entre los puntos de retorno $X_2 = 0$ y $X_3 = \xi_3$. Esto quiere decir que a medida que x' varía, ξ oscila entre 0 y a . Luego a es el doble de la amplitud de la oscilación. La velocidad c de la perturbación se puede obtener de las (11.180) en términos de a y b :

$$c = c_0 \left(1 + \frac{2a - b}{2h_0} \right) \quad (11.181)$$

Si $a \rightarrow 0$ esta ecuación nos da $c = c_0(1 - b/2h_0)$; comparando este resultado con la relación de dispersión (11.163) de las ondas de amplitud infinitesimal, encontramos que

$$b = \frac{1}{3} k^2 h_0^2 \quad (11.182)$$

y en este caso c no depende de la amplitud de la perturbación. Por lo tanto podemos interpretar que b describe los efectos dispersivos sobre c .

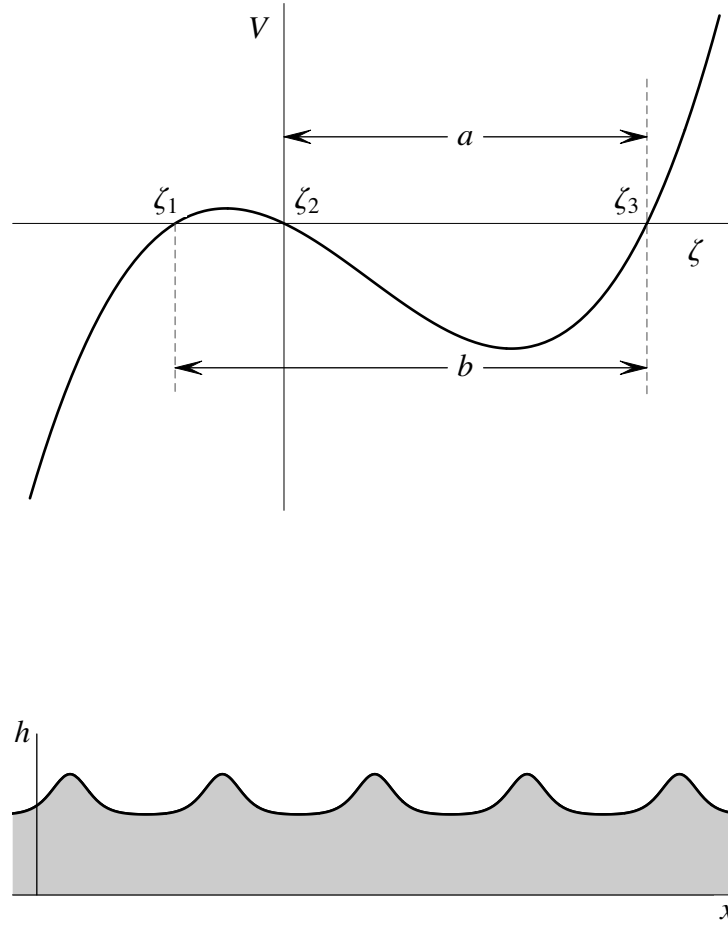


Fig. 11.16. Soluciones periódicas de la ecuación de Korteweg-de Vries: las ondas cnoidales.

En general, sin embargo, cuando la amplitud es finita, la relación de dispersión está dada por la (11.181) y la velocidad de la onda *depende de la amplitud*. Esas ondas consisten de oscilaciones periódicas de $\zeta(x)$. Su expresión explícita se obtiene integrando la (11.179) y es

$$\zeta = a \operatorname{cn}^2[(3a/4h_0^3)^{1/2}(x - ct) | a/b] \quad (11.183)$$

donde $\operatorname{cn}(u | m)$ es la *función elíptica de Jacobi* cn , de argumento u y parámetro m ($0 \leq m \leq 1$). Las ondas dadas por la (11.183) son las *ondas cnoidales*, así llamadas porque se expresan en términos de la función cn . El período espacial de las oscilaciones, o sea su longitud de onda, se obtiene de la (11.177) como

$$\lambda = \frac{2h_0^{3/2}}{\sqrt{3}} \int_0^a \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta - a)(a - b - \zeta)}} = \frac{4h_0^{3/2}}{\sqrt{3}b} K(a/b) \quad (11.184)$$

donde $K(m = a/b)$ es la *integral elíptica completa de primera especie*. Se puede ver que $K(0) = \pi/2$ y que $K(m)$ es una función creciente de m que tiende a infinito cuando $m \rightarrow 1$ (ver Fig. 11.15). En el límite $a \rightarrow 0$ las ondas cnoidales coinciden con las ondas armónicas dispersivas de amplitud infinitesimal. Para a/b pequeño, su perfil es semejante al de una onda sinusoidal, pero a medida que a crece las crestas tienden a estrecharse y los valles a ensancharse, y la longitud de onda aumenta.

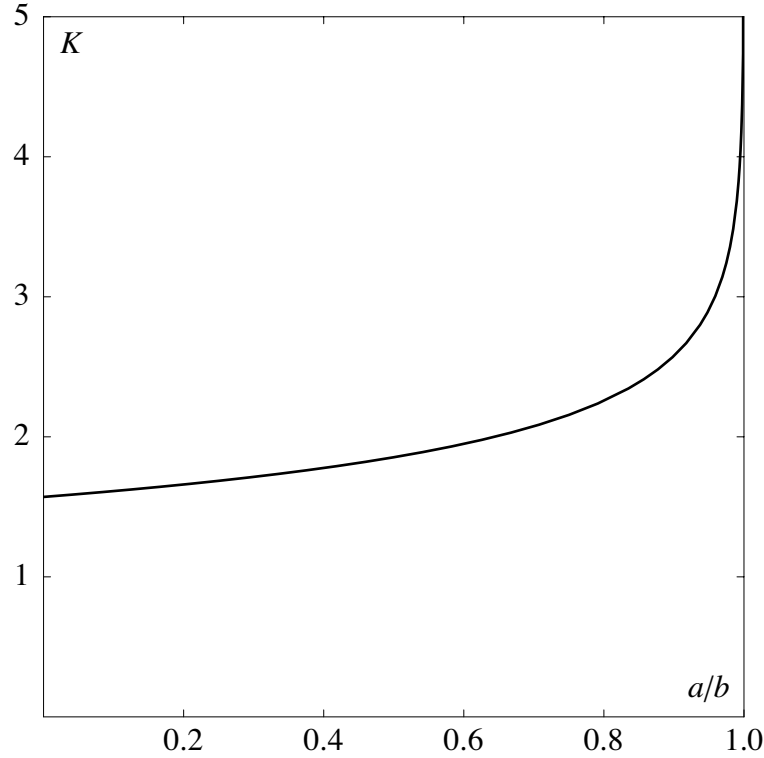


Fig. 11.17. Comportamiento de la integral elíptica completa de primera especie $K(a/b)$, que es proporcional a la longitud de onda de las ondas cnoidales. Se puede ver que en el límite $m \rightarrow 1$ se tiene una solución aperiódica (la onda solitaria).

En el límite $a = b$ (cuando $A = 0$) el movimiento unidimensional equivalente es *aperiódico* (ver la Fig. 11.18), pues $dX/dT \rightarrow 0$ cuando $X \rightarrow 0$. La ec. (11.179) se reduce entonces a

$$\frac{1}{3}h_0^3 \left(\frac{d\xi}{dx'} \right)^2 = \xi^2(a - \xi) \quad (11.185)$$

y su solución es una perturbación con una única cresta (Fig. 11.18). Está claro de la (11.185) que ξ aumenta desde 0 para $x = -\infty$ hasta el máximo $\xi = a$ y luego decrece nuevamente a 0 para $x = +\infty$. Esta solución es la *onda solitaria* de Scott Russell. Su velocidad de propagación se obtiene de la (11.181) y vale

$$c = c_s \equiv c_0 \left(1 + \frac{a}{2h_0} \right) \quad (11.186)$$

Como se puede apreciar, c depende de la amplitud.

El perfil de la onda solitaria se obtiene integrando la (11.185), o también tomando el límite $a \rightarrow b$ en la (11.183). Es fácil verificar por sustitución directa que la solución de la (11.185) es

$$h = h_0 \{1 + a \operatorname{sech}^2[(3a/4h_0^3)^{1/2}(x - ct)]\} \quad (11.187)$$

A partir de esta expresión se puede obtener el campo de velocidad (v, w) usando las (11.144) y (11.139).

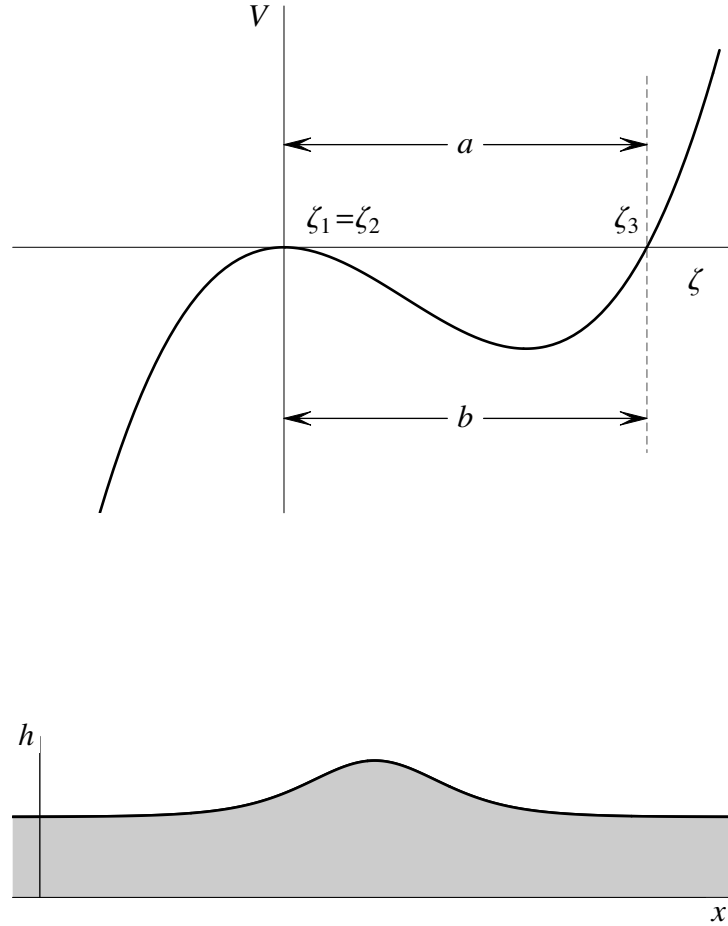


Fig. 11.18. Solución aperiódica de la ecuación de Korteweg-de Vries: la onda solitaria.

Se puede observar que las ondas cnoidales y la onda solitaria son soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries para todo valor de a y b , sólo restringidos por la condición

$$0 \leq a \leq b \quad (11.188)$$

Sin embargo, debemos recordar que la ecuación (11.160) vale solamente para a y b pequeños. En la práctica, cuando a es grande, la onda solitaria tiende a formar un pico agudo en el punto de máxima altura. Las observaciones indican que esto ocurre cuando $a \approx 0.7h_0$.

La onda solitaria es un fenómeno estrictamente no lineal en el cual se combinan los efectos de la no linealidad y de la dispersión. La tendencia no lineal al empinamiento del perfil de la onda compensa la tendencia al achatamiento debida a la dispersión, de modo tal que la forma de la onda no cambia.

Las ondas solitarias tienen varias propiedades curiosas, que no queremos dejar de comentar aunque en estas notas no podemos entrar en detalles. Ya mencionamos al comienzo de este Capítulo

una de ellas: que estas ondas conservan su individualidad cuando interactúan, y eventualmente emergen de la región de interacción conservando su forma y velocidad original. El hecho que la velocidad de propagación de la onda solitaria depende de la amplitud está relacionado con un resultado de la teoría de las *velocidades de grupo*, según el cual en un tren de ondas no lineales hay *más de una* velocidad de grupo. Esto tiene como consecuencia que una perturbación inicial arbitraria, consistente en un tren de ondas no uniforme, acaba eventualmente por *fragmentarse* al cabo de cierto tiempo, dando lugar a cierto número de *ondas solitarias*.

Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado las nociones básicas de la propagación de ondas no lineales, tomando como ejemplos concretos las ondas de creciente para las ondas hiperbólicas no lineales y las soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries (las ondas cnoidales y la onda solitaria) para las ondas dispersivas no lineales. De esta forma hemos introducido las ideas fundamentales del método de las características, la ruptura de ondas y la formación y estructura de los frentes de choque para las primeras. Para las ondas dispersivas no lineales hemos mostrado que existen perturbaciones que se propagan sin cambio de forma, debido a que los efectos dispersivos y no lineales se compensan. Vimos que los efectos de la no linealidad se traducen en que la relación de dispersión depende de la amplitud de la perturbación, y que se forman así estructuras bien definidas (las ondas solitarias) que se propagan con una velocidad que depende de su amplitud. Los casos considerados fueron elegidos por ser los más simples en sus respectivas clases, pero las características que acabamos de mencionar son muy generales, y se encuentran en todo tipo de ondas no lineales, por lo tanto su interés trasciende del contexto particular en las hemos estado discutiendo.