

**¡¡APRUEBA TU EXAMEN CON SCHAUM!!**

# Problemas resueltos de Mecánica de Fluidos



*Schaum*

José María López-Herrera • Miguel Angel Herrada  
Miguel Pérez-Saborid • Antonio Barrero

REDUCE TU TIEMPO DE ESTUDIO

BREVE RESUMEN TEÓRICO AL COMIENZO DE CADA CAPÍTULO

MÁS DE 50 PROBLEMAS RESUELTOS Y NUMEROSOS PROPUESTOS

Utilízalo para la siguiente asignatura:

☒ MECÁNICA DE FLUIDOS

# Mecánica de Fluidos

## Problemas resueltos



# Mecánica de Fluidos

## Problemas resueltos

JOSÉ M. LÓPEZ-HERRERA SÁNCHEZ  
Profesor de la Escuela Superior de Ingenieros  
de la Universidad de Sevilla

MIGUEL A. HERRADA GUTIÉRREZ  
Profesor Titular de la Escuela Superior de Ingenieros  
de la Universidad de Sevilla

MIGUEL PÉREZ-SABORID SÁNCHEZ-PASTOR  
Profesor Titular de la Escuela Superior de Ingenieros  
de la Universidad de Sevilla

ANTONIO BARRERO RIPOLL  
de la Real Academia de Ingeniería.  
Catedrático de la Escuela Superior de Ingenieros  
de la Universidad de Sevilla



MADRID • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO  
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO  
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS  
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

### **Mecánica de Fluidos. Problemas resueltos**

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 2005, respecto a la primera edición en español, por  
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.U.  
Edificio Valrealty, 1ª planta  
Basauri, 17  
28023 Aravaca (Madrid)

**[www.mcgraw-hill.es](http://www.mcgraw-hill.es)**  
**[profesional@mcgraw-hill.com](mailto:profesional@mcgraw-hill.com)**

ISBN: 84-481-9889-1  
Depósito legal: M. 23.512-2005

Editor: Concepción Fernández Madrid  
Diseño de cubierta: Luis Sanz  
Impreso en Closas-Orcoyen, S. L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

# Índice general

Prólogo	VI
1 Cinemática	1
2 Fluidostática	19
3 Ecuaciones de conservación en forma integral	53
4 Análisis dimensional y semejanza física	87
5 Movimientos de fluidos con viscosidad dominante	113
6 Movimiento turbulento de líquidos en conductos	173
7 Dinámica de gases	219
Ejercicios propuestos	259



## Prólogo

En el ámbito universitario los libros de problemas resueltos son en general poco apreciados por una parte amplia del profesorado aunque gozan de sobrada popularidad entre los estudiantes. Mientras éstos consideran que los libros de problemas resueltos son un buen instrumento para la preparación de exámenes, la opinión de aquéllos es que los problemas constituyen sólo un medio para comprobar el nivel de conocimientos adquiridos por los alumnos, pero no un fin del aprendizaje en sí mismos, puesto que se corre el peligro de que el alumno se especialice en resolver problemas tipo, orillando los aspectos esenciales de la materia enseñada. Este peligro se acrecienta si, como sucede en la práctica, la mayoría de los libros de problemas disponibles poseen una calidad discutible, con ejercicios y problemas excesivamente simples, o que son partes de otros más complejos cuya dificultad se evita, y de los que es difícil obtener, por tanto, un conocimiento sólido de los fundamentos y aplicaciones de la Mecánica de Fluidos.

En opinión de los autores es posible, sin embargo, conciliar la demanda por parte del alumnado de una colección de problemas resueltos de Mecánica de Fluidos que permita al alumno tanto preparar eficazmente sus exámenes, como adquirir por sí mismo una formación científico-técnica rigurosa que le capacite en su vida profesional para abordar con suficiencia los problemas prácticos que se le presenten. Con el mismo espíritu del libro de texto *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos* de A. Barrero y Pérez-Saborid (McGraw-Hill, 2005), el presente libro, complemento del anterior, afronta en su complejidad los fenómenos que se analizan sin soslayar, naturalmente, las dificultades matemáticas inherentes a la resolución de problemas fluidodinámicos reales. Se pretende además enseñar al alumno a solventar las dificultades físico matemáticas con rigor y a la vez con un punto de vista práctico, permitiéndole usar y perfeccionar sus conocimientos físicos y su destreza matemática, usualmente deficientes por la falta de práctica, al mismo tiempo que los aplica al modelado y resolución de problemas fluidodinámicos de complejidad creciente. Por otra parte, aprovechando la capacidad y conocimientos informáticos que poseen los estudiantes de hoy día, se han incluido también problemas cuyo tratamiento analítico conduce a una formulación que debe resolverse numéricamente.

Los ejercicios y problemas propuestos, más de medio centenar, son fruto de la experiencia docente de los autores, que comenzó hace más de una veintena de años en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla. Muchos de ellos, en una forma más o menos acabada surgieron como problemas en los exámenes de Mecánica de Fluidos de la Escuela y son, por tanto, diferentes a los ejercicios clásicos que aparecen en los libros de texto y en las colecciones de problemas del área.

Los autores.





## CAPÍTULO 1

# Cinemática

La consideración de los fluidos como medios continuos es de gran eficacia para la descripción de sus movimientos. Como es sabido, los resultados de este modelo se aproximan a la realidad en situaciones en las que el camino libre medio de las moléculas (en el caso de gases) o la distancia intermolecular (en el caso de líquidos) son pequeños comparados con la longitud característica del medio fluido macroscópico que se quiere describir. En esta situación, se puede suponer que en cada punto del dominio fluido y centrada en él existe una porción fluido o partícula fluida, de tamaño grande frente a la longitud microscópica (distancia intermolecular o camino libre medio) como para contener un número enorme de moléculas pero pequeño comparado con el tamaño macroscópico del medio continuo. Por tanto, en cada punto del dominio fluido y en cada instante de tiempo se pueden definir un conjunto de magnitudes medias como la masa por unidad de volumen o densidad,  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , de la partícula fluida considerada, la cantidad de movimiento por unidad de masa o velocidad de su centro de masas,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , y la energía interna por unidad de masa,  $e(\mathbf{x}, t)$ , definida como toda otra energía de la partícula fluida distinta de la energía cinética por unidad de masa de su centro de masas. Resolver un problema fluidomecánico consistirá entonces en encontrar las funciones que describen la densidad, velocidad y energía interna en cada punto del dominio fluido y en cada instante.

Supuesto conocido el campo de velocidades, el estudio y determinación de algunas de las características relevantes de los movimientos fluidos como, por ejemplo, las trayectorias, líneas de corriente, trazas, etc., es el objeto de la cinemática.

### Trayectorias

Las trayectorias de los puntos materiales se definen mediante el sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales, de primer orden

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

que, junto con las tres condiciones iniciales  $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o$ , proporcionan las trayectorias

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_T(\mathbf{x}_o, t_o, t). \quad (1.2)$$

La expresión (1.2) da la posición como función del tiempo o ley horaria de la partícula que en el instante inicial  $t_o$  ocupaba la posición  $\mathbf{x}_o$ .

Finalmente, resulta de interés expresar las ecuaciones de las trayectorias en los tres sistemas de referencia más utilizados:

en coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ :

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = v_x(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(\mathbf{x}, t);} \quad (1.3)$$

en coordenadas cilíndricas  $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ ,  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ :

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = v_r(\mathbf{x}, t), \quad r \frac{d\theta}{dt} = v_\theta(\mathbf{x}, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(\mathbf{x}, t);} \quad (1.4)$$

## 2 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

finalmente, en coordenadas esféricas  $\mathbf{x} = (r, \theta, \phi)$ ,  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$ :

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = v_r(\mathbf{x}, t) \quad r \sin \phi \frac{d\theta}{dt} = v_\theta(\mathbf{x}, t), \quad r \frac{d\phi}{dt} = v_\phi(\mathbf{x}, t).} \quad (1.5)$$

Obsérvese que la senda definida como el lugar geométrico de las posiciones ocupadas por la partícula fluida en su movimiento se obtendría fácilmente si se despejase el tiempo en una de las tres ecuaciones de (1.2) y el resultado se sustituyese en las otras dos. Se obtendría así una pareja de ecuaciones que representarían matemáticamente sendas superficies y cuya intersección definiría la senda de la partícula fluida que en el instante inicial  $t_o$  ocupaba la posición  $\mathbf{x}_o$ .

Para fijar las ideas anteriores considérese el movimiento bidimensional de un líquido cuyo campo de velocidades es

$$\begin{aligned} v_x(x, y, t) &= -\frac{A y}{2 \nu t^2} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{4 \nu t} \right], \quad \text{según el eje } x, \\ v_y(x, y, t) &= \frac{A x}{2 \nu t^2} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{4 \nu t} \right], \quad \text{según el eje } y, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $A$  es una constante con dimensiones de área. En este caso, las trayectorias de las partículas vienen determinadas por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{A y}{2 \nu t^2} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{4 \nu t} \right] \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{A x}{2 \nu t^2} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{4 \nu t} \right]; \quad (1.7)$$

si la primera de las ecuaciones de (1.7) se multiplica por  $x$ , la segunda por  $y$  y se suman, la integración de la ecuación resultante proporciona

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2, \quad (1.8)$$

donde la constante  $R^2 = x_o^2 + y_o^2$  es el cuadrado de la distancia al origen de la partícula que inicialmente ocupaba la posición  $(x_o, y_o)$ . Obsérvese que la expresión (1.8), por no contener al tiempo, es la representación matemática de las sendas, que como se ve son circunferencias con centro en el origen a lo largo de las que se mueven las partículas fluidas. El radio de las sendas viene definido por la posición inicial de la partícula fluida cuya senda se quiere describir. Finalmente, para obtener las trayectorias se elimina la coordenada  $y$  en la primera de las ecuaciones (1.7) y la integración de la ecuación resultante proporciona

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \arctan \frac{x_o}{\sqrt{R^2 - x_o^2}} = \frac{2 A}{R^2} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{4 \nu t} \right], \quad (1.9)$$

que junto a (1.8) y a  $R^2 = x_o^2 + y_o^2$  permiten calcular las componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  de las trayectorias.

Otra forma de comprobar que las sendas son circunferencias concéntricas es mediante el cálculo de las componentes radial y circunferencial de la velocidad; es fácil comprobar que la primera es idénticamente nula mientras que la última,  $v_\theta$ , es constante sobre cada circunferencia y decrece con el tiempo

$$v_\theta = \frac{A r}{2 \nu t^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{4 \nu t} \right] \quad \text{con} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.10)$$

de modo que las partículas que están sobre una circunferencia dada poseen la misma velocidad en cada instante. Del análisis del campo de velocidades (1.6) se observa que en el instante inicial la velocidad es nula en todas partes excepto en el origen donde está indefinida. Más información acerca de la naturaleza del movimiento puede obtenerse calculando el momento angular  $M$  y la energía cinética  $E_c$ , por unidad de longitud perpendicular al plano del movimiento

$$M = 2 \pi \int_o^\infty \rho v_\theta r^2 dr = 8 \pi \rho \nu A \int_o^\infty s e^{-s} ds = 8 \pi \rho \nu A \quad \text{con} \quad s = r^2/(4 \nu t), \quad (1.11)$$

$$E_c = 2 \pi \int_o^\infty \rho \frac{v_\theta^2}{2} r dr = \rho \frac{A^2}{t^2} \int_o^\infty s e^{-s/2} ds = \rho \frac{A^2}{2 t^2}. \quad (1.12)$$

A medida que el tiempo crece, la velocidad circunferencial se va difundiendo hacia el exterior por la acción de la viscosidad pero el momento angular se mantiene constante e igual al valor que poseía en el instante inicial, véase (1.11); por el contrario, la energía cinética del movimiento se disipa debido al trabajo de disipación de la viscosidad y tiende a cero cuando el tiempo aumenta como el momento angular se difunde y tiende a cero para tiempos grandes como se muestra en (1.12).

### Líneas de corriente

Contrariamente a las trayectorias, las líneas de corriente no tienen entidad física sino matemática. Se definen como aquellas líneas que en un instante dado son tangentes en cada punto al vector velocidad. Así que, estableciendo la proporcionalidad entre el vector tangente a la línea y el vector velocidad se obtiene el sistema de dos ecuaciones diferenciales, de primer orden, no lineales que satisfacen las líneas de corriente. En coordenadas cartesianas estas ecuaciones son

$$\frac{dx}{v_x(\mathbf{x}, t)} = \frac{dy}{v_y(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.13)$$

en las que el tiempo juega el papel de un parámetro. Para resolver el sistema (1.13) es necesario imponer dos condiciones iniciales; por ejemplo, si se toma  $z$  como variable independiente habría que especificar  $x(z_o) = x_o$  e  $y(z_o) = y_o$ .

Del mismo modo, las ecuaciones de las líneas de corriente en coordenadas cilíndricas y esféricas son respectivamente:

$$\boxed{\frac{dr}{v_r(\mathbf{x}, t)} = \frac{r d\theta}{v_\theta(\mathbf{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\mathbf{x}, t)}} \quad (1.14)$$

y

$$\boxed{\frac{dr}{v_r(\mathbf{x}, t)} = \frac{r \sin \phi d\theta}{v_\theta(\mathbf{x}, t)} = \frac{r d\phi}{v_\phi(\mathbf{x}, t)}}. \quad (1.15)$$

En el caso del campo de velocidades (1.6), las ecuaciones diferenciales (1.13), por tratarse de un movimiento plano,  $v_z = 0$ , se reducen a una única ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{y}{x}, \quad (1.16)$$

cuya integración proporciona

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (1.17)$$

resultado que muestra que las líneas de corriente son circunferencias concéntricas que coinciden con las sendas. El lector puede comprobar fácilmente que en el caso de movimientos estacionarios, líneas y sendas de corriente coinciden pero no lo hacen, en general, cuando el movimiento es no estacionario, aunque excepcionalmente lo hagan en el campo de velocidades, dependiente del tiempo, aquí considerado.

### Traza

Se llama así a la línea sobre la que se sitúan las partículas fluidas que en instantes anteriores al considerado pasaron por un punto determinado  $\mathbf{x}_o$ . Su utilidad radica en que si la difusión másica fuese pequeña, la traza sería la línea que formaría un colorante, de densidad sensiblemente igual a la del fluido cuyo movimiento se desea visualizar, que se inyectase lentamente desde un punto fijo del dominio fluido. Para obtener su ecuación hay que calcular la posición de los puntos materiales que pasaron por el punto de referencia  $\mathbf{x}_o$  en diferentes instantes  $t' \leq t$

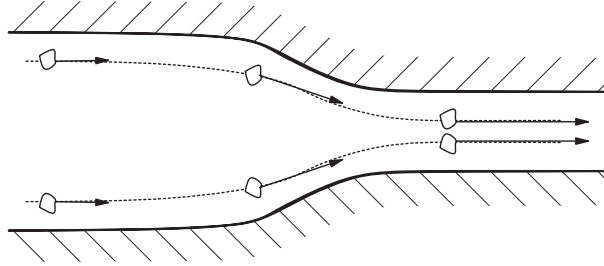
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_T(\mathbf{x}_o, t', t), \quad (1.18)$$

y eliminar  $t'$  entre las tres ecuaciones escalares (1.18). El lector puede comprobar fácilmente que en el caso del campo de velocidades (1.6), las trazas son también circunferencias concéntricas y coinciden, por tanto, con líneas de corriente y sendas.

## 4 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

### Aceleración

Al describir la cinemática de los cuerpos rígidos, la aceleración se definía como la tasa de cambio de la velocidad respecto al tiempo. Sin embargo, en la descripción euleriana de los cuerpos deformables, el concepto de aceleración debe de ser revisado cuidadosamente. Para fijar ideas considérese el movimiento estacionario de un líquido que fluye por el conducto de sección variable de la figura cuyo campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  es función exclusiva de la posición  $\mathbf{x}$ . Aunque el campo de velocidades es independiente del tiempo es bien sabido que el fluido aumenta su velocidad, esto es, se acelera a medida que fluye por secciones de menor área.



En efecto, en la descripción euleriana del movimiento fluido, cualquiera de las tres componentes del vector velocidad  $v_i$  varía tanto por variar el tiempo como la posición

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j. \quad (1.19)$$

En general,  $x$  y  $t$  son independientes pero si se sigue el movimiento de las partículas fluidas, la posición de éstas está ligada al tiempo a través de las trayectorias  $\mathbf{x}_T(t)$ . De (1.19) se tiene que la aceleración en notación vectorial se escribe

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}_T}{dt} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.20)$$

A la derivada siguiendo a la partícula se la suele denominar derivada sustancial y se suele representar simbólicamente como  $D/Dt$ ; se tiene así

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (1.21)$$

que muestra que la aceleración es suma de una aceleración local, debida a variaciones temporales del campo de velocidad, más una aceleración convectiva, debida a variaciones espaciales de la velocidad, o lo que es lo mismo la partícula fluida se acelera porque se traslada a zonas del dominio fluido donde la velocidad es menor. Naturalmente, cualquier otra propiedad física de las partículas fluidas experimenta también una variación local y una convectiva asociada al movimiento y su representación matemática es análoga a la dada en (1.21).

En coordenadas cartesianas, las componentes de la aceleración del fluido según los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  son

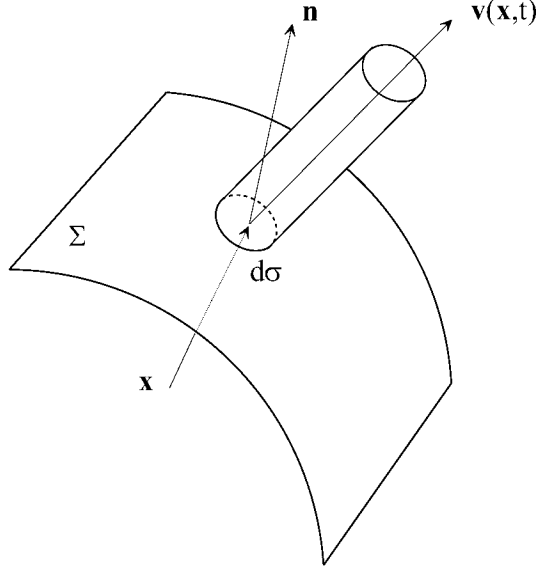
$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Para el caso del campo de velocidades bidimensional dado por (1.6) se tiene

$$\begin{aligned} a_x &= \left[ \frac{Ay}{\nu t^3} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8\nu t} \right) - \frac{A^2 x}{4\nu^2 t^4} \right] \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{2\nu t} \right] \\ a_y &= - \left[ \frac{Ax}{\nu t^3} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{8\nu t} \right) + \frac{A^2 y}{4\nu^2 t^4} \right] \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{2\nu t} \right]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

### Flujo convectivo a través de superficies

El conocimiento del campo de velocidades permite calcular los flujos convectivos de las magnitudes fluidas a través de superficies. En efecto, sea  $\phi(\mathbf{x}, t)$  una magnitud fluida extensiva por unidad de volumen. Si  $d\sigma$  es un elemento de superficie fijo en el sistema de referencia elegido, de normal unitaria  $\mathbf{n}$ , es fácil ver en la figura siguiente que el volumen de fluido que atraviesa  $d\sigma$  en la dirección  $\mathbf{n}$  y en un tiempo  $dt$  es  $d\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt$ .



Por tanto, la cantidad de magnitud  $\phi$  que atraviesa con el fluido la superficie  $\Sigma$  en la unidad de tiempo es

$$\int_{\Sigma} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma; \quad (1.24)$$

la expresión (1.24) se denomina flujo convectivo de la magnitud  $\phi$  a través de la superficie  $\Sigma$ . Si la magnitud  $\phi$  representa la densidad  $\rho$ , masa por unidad de volumen, entonces

$$\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (1.25)$$

es el flujo convectivo de masa a través de  $\Sigma$  o masa por unidad de tiempo que por convección atraviesa la superficie  $\Sigma$ . En los casos en los que la magnitud  $\phi$  represente la cantidad de movimiento por unidad de volumen  $\rho \mathbf{v}$  y la energía interna por unidad de volumen  $\rho e$ , los flujos convectivos de cantidad de movimiento y energía interna se representan mediante expresiones análogas a (1.25)

$$\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{y} \quad \int_{\Sigma} \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (1.26)$$

Para el caso del campo de velocidades dado por (1.6), el flujo másico convectivo por unidad de longitud perpendicular al plano del movimiento que circula entre dos circunferencias concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$  sería

$$\int_{R_1}^{R_2} \rho v_{\theta} dr = \rho \frac{A}{t} \left[ \exp\left(-\frac{R_1^2}{4\nu t}\right) - \exp\left(-\frac{R_2^2}{4\nu t}\right) \right]. \quad (1.27)$$

### Velocidades de deformación del fluido en el entorno de un punto

La fuerza resistente a la deformación de un fluido es proporcional a la velocidad con que éste se deforma. Por tanto, para caracterizar esta fuerza es necesario analizar el campo de velocidades en el entorno de la partícula fluida o, lo que es lo mismo, estudiar el movimiento del fluido en una región de dimensiones

## 6 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

infinitesimales  $d\mathbf{x}$  relativo a un punto fijo  $\mathbf{x}$  del dominio fluido. Como puede seguirse en cualquier libro de Mecánica de Fluidos,<sup>1</sup> este campo de velocidades puede expresarse, en cada instante  $t$  como superposición de un movimiento de deformación pura  $d\mathbf{v}_d = \bar{\bar{\gamma}}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x}$ , más uno de rotación como sólido rígido con velocidad angular  $\omega/2$ ,  $d\mathbf{v}_r = [\omega(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{x}]/2$  siendo  $\bar{\bar{\gamma}} = 1/2(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$  la parte simétrica del tensor  $\nabla\mathbf{v}$  y  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  el vector vorticidad.

En coordenadas cartesianas ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) las seis componentes del tensor simétrico,  $\bar{\bar{\gamma}}$ , de velocidades de deformación vienen dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \gamma_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (1.28)$$

mientras que en coordenadas cilíndricas ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ) y esféricas ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ) son respectivamente

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \gamma_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r}, \quad \gamma_{xr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}, \quad \gamma_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad \gamma_{r\phi} = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{v_\phi}{r} \right), \\ \gamma_{\theta\phi} &= \frac{\sin \theta}{2r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{v_\phi}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Por tanto, la velocidad unitaria con que se deforma un elemento de longitud unidad y dirección  $\mathbf{n}$  es  $\bar{\bar{\gamma}} \cdot \mathbf{n}$  y  $\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\gamma}} \cdot \mathbf{n}$  es la velocidad unitaria de deformación en la propia dirección del elemento. La suma de las velocidades de dilatación lineal unitaria de tres elementos perpendiculares, por ejemplo los ejes coordenados, que coincide con la traza del tensor  $\bar{\bar{\gamma}}$ , proporciona la velocidad de dilatación cúbica unitaria o dilatación que experimenta la unidad de volumen de fluido en la unidad de tiempo. El campo de velocidades de un fluido incompresible (líquido), que no experimenta dilataciones ni compresiones, no puede ser arbitrario, sino que en cada punto del dominio fluido y en cada instante debe satisfacer la condición

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.31)$$

para garantizar la condición de incompresibilidad. Compruebe el lector que el campo de velocidades (1.6) es solenoidal (de divergencia nula) y corresponde por tanto al movimiento de un líquido.

Para el caso del campo de velocidades del ejemplo considerado, el tensor de velocidades de deformación  $\bar{\bar{\gamma}}$  en coordenadas cartesianas, ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ), viene dado por

$$\bar{\bar{\gamma}} = \frac{A}{4\nu^2 t^3} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{4\nu t} \right] \begin{pmatrix} yx & (y^2 - x^2)/2 \\ (y^2 - x^2)/2 & -yx \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

<sup>1</sup> Véase, por ejemplo, A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

### Circulación del vector velocidad

La circulación del vector velocidad a lo largo de una línea fluida cerrada  $L$  cualquiera se define en la forma

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.33)$$

Esta integral es particularmente útil porque, bajo condiciones muy generales de validez, su valor se mantiene constante a lo largo del movimiento (caso de movimiento de fluidos ideales o lo que es lo mismo el movimiento de gases y líquidos en los que el número de Reynolds es muy grande). Naturalmente, ese no es el caso del campo de velocidades definido en (1.10) que representa la difusión viscosa de un momento axial que se encuentra en el momento inicial concentrado en el origen; en efecto, la circulación de la velocidad a lo largo de una circunferencia material (formada por partículas fluidas) de radio  $R$  es en este caso

$$\Gamma(t) = \oint rv_\theta d\theta = 2\pi \frac{AR}{2\nu t^2} \exp\left[-\frac{R^2}{4\nu t}\right].$$

Obsérvese que, como indica el teorema de Stokes, si la curva  $L$  es reducible (es decir, si se puede reducir a un punto de forma continua sin abandonar el dominio fluido), la magnitud  $\Gamma$  está relacionada con el flujo del vector vorticidad  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  a través de una superficie  $\Sigma$  cualquiera que se apoye sobre  $L$

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_\Sigma \omega \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (1.34)$$



**Problema 1.1**

Se considera el movimiento plano de un líquido cuya velocidad en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$  viene dada por

$$v_r(r, t) = \frac{A}{r},$$

$$v_\theta(r, t) = \frac{B(1 + Ct)}{r},$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes con dimensiones apropiadas. Se pide:

1. Discutir el tipo de movimiento interpretando, desde el punto de vista físico, las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
2. Calcular las líneas de corriente; en particular la que pasa por el punto  $P$  de coordenadas  $(r_o, 0)$ .
3. Calcular las trayectorias y las sendas. Hacer aplicación al cálculo de la senda que recorre una partícula fluida que en el instante inicial ocupa la posición  $(r/r_o = 1, \theta = 0)$  en los casos  $(B/A = 4, Cr_o^2/A^2 = 0)$  y  $(B/A = 4, Cr_o^2/A^2 = 0,4)$ .
4. Determinar también la evolución temporal de la línea fluida cuya posición inicial viene dada en forma paramétrica por la ecuación  $(1 \leq \lambda/r_o \leq 2, \theta = 0)$ .

Resolución:

**Apartado 1.-**

Por ser el campo de velocidades solenoidal

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

éste representa efectivamente el movimiento de un líquido. Por otra parte, este movimiento se puede considerar superposición de otros dos más simples, lo que es lícito por ser lineal la ecuación que gobierna el campo de velocidades. Las velocidades radiales son producidas por un manantial situado en el origen mientras que las circunferenciales lo son por un torbellino situado también en el origen.

En efecto, si  $q$  es el caudal de líquido por unidad de longitud perpendicular al plano del movimiento que mana de un manantial bidimensional situado en el origen, la incompresibilidad del líquido exige que fluya el mismo caudal a través de cualquier circunferencia con centro en el origen;<sup>2</sup> se tiene entonces

$$q = \int_0^{2\pi} v_r r d\theta = 2\pi r v_r, \quad (2)$$

donde para obtener la última integral se ha hecho uso de la condición de independencia con  $\theta$  (simetría) del campo de velocidades del manantial. La velocidad generada por un manantial situado en el origen es entonces inversamente proporcional a la distancia al manantial y directamente proporcional al caudal que mana de él

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \quad A = \frac{q}{2\pi}; \quad (3)$$

el último resultado en (3) surge de la identificación del campo de velocidades del manantial con la componente radial del enunciado y muestra que este último se corresponde efectivamente al de un manantial.

<sup>2</sup> En problemas bidimensionales se emplean letras minúsculas para representar magnitudes por unidad de longitud

Análogamente, si  $\Gamma$  representa la circulación del vector velocidad a lo largo de una línea cerrada cualquiera (nótese que en ausencia de movimiento radial las líneas fluidas son circunferencias concéntricas) se tiene

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi r v_\theta, \quad (4)$$

donde se ha hecho uso de la simetría para calcular la última de las integrales en (4). La comparación de (4) con la velocidad circunferencial del enunciado muestra que ésta corresponde al campo de velocidades generado por un torbellino situado en el origen con circulación  $\Gamma = 2\pi B(1 + Ct)$ .

### Apartado 2.-

Teniendo en cuenta que es un movimiento plano  $v_z = 0$ , la ecuación (1.14) de las líneas de corriente se reduce a

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta}, \quad (5)$$

o

$$\frac{dr}{r} = \frac{A}{B(1 + Ct)} d\theta, \quad (6)$$

si se particulariza para el campo de velocidades del enunciado. Integrando (6) se obtienen las líneas de corriente, que tienen la forma de espirales logarítmicas,

$$r = r_o \exp \left[ \frac{A}{B(1 + Ct)} (\theta - \theta_o) \right] \quad r = r_o \exp \left[ \frac{A}{B(1 + Ct)} \theta \right]; \quad (7)$$

nótese que en la integración de (6), el tiempo juega el papel de un parámetro. El último resultado en (7) es la ecuación de las líneas de corriente que en cada instante pasan por el punto  $(r_o, 0)$ .

### Apartado 3.-

Las trayectorias de las partículas, teniendo en cuenta (1.4), vienen determinada por las ecuaciones

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A}{r}, \quad (8)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{B(1 + Ct)}{r}. \quad (9)$$

Puesto que (8) y (9) están desacopladas, la integración de (8) con la condición inicial  $r(t = 0) = r_o$  proporciona

$$r^2 = r_o^2 + 2At. \quad (10)$$

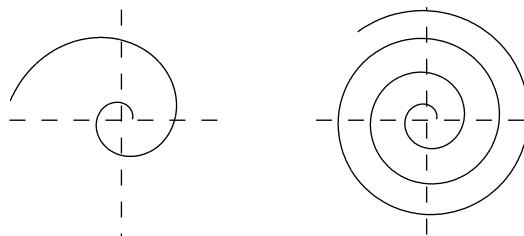
Sustituyendo (10) en (9) la integración de esta última ecuación con la condición  $\theta(t = 0) = \theta_o$  proporciona

$$\theta - \theta_o = B \left[ \frac{Ct}{2A} + \frac{2A - Cr_o^2}{4A^2} \ln \frac{r_o^2 + 2At}{r_o^2} \right]. \quad (11)$$

Por último, la ecuación de las sendas se obtiene eliminando el tiempo  $t$  en una de las dos ecuaciones (10) y (11)

$$\theta(r) = \theta_o + \left( \frac{B}{A} - \frac{BCr_o^2}{2A^2} \right) \ln \left( \frac{r}{r_o} \right) + \frac{BCr_o^2}{4A^2} \left( \frac{r^2}{r_o^2} - 1 \right). \quad (12)$$

Obsérvese que en el caso particular de movimiento estacionario ( $C=0$ ), (12) y (7) se reducen a la misma ecuación indicando que líneas de corriente y sendas coinciden en ese caso.



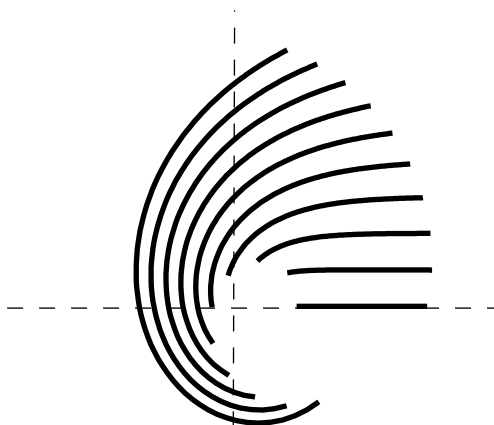
En la figura se representan las sendas seguidas por dos partículas fluidas que parten en distintos instantes de la misma posición inicial. La curva de la izquierda corresponde al caso  $Cr_o^2/A^2 = 0$  mientras que la derecha corresponde a  $Cr_o^2/A^2 = 0,4$ . Obsérvese que el caso estacionario,  $C = 0$ , corresponde a un movimiento espiral donde el paso de la espiral, definido como  $v_\theta/v_r$ , es  $B/A = 4$ . Obsérvese también que para valores positivos de  $C$ ,  $C \neq 0$ , el paso de la espiral aumenta con el tiempo como se puede observar en la figura de la derecha.

#### Apartado 4.-

En la figura siguiente se ha representado la evolución con el tiempo de una línea fluida que como es sabido es una línea formada por partículas fluidas. En este caso se han considerado las partículas fluidas que en el instante inicial están situadas sobre la línea  $\theta = 0$  y cuyas posiciones sobre la línea vienen definidas por el parámetro dimensional  $\lambda$ , tal que  $1 \leq \lambda/r_o \leq 2$ . Las trayectorias de cada una de las partículas se pueden calcular a partir de (10) y (11), eliminando entre ellas la posición inicial; se obtiene entonces la ecuación de la línea fluida considerada

$$\theta = B \left[ \frac{Ct}{2A} + \frac{2A - Cr_o^2}{4A^2} \ln \frac{r^2}{r^2 - 2At} \right], \quad (13)$$

cuya evolución para diferentes tiempos se representa en la figura. Obsérvese que las partículas fluidas (partículas materiales) que inicialmente forman una línea siguen formando parte de ella a lo largo del movimiento fluido. Debido a la continuidad, la línea fluida se deforma en su evolución temporal pero mantiene su identidad de línea durante el movimiento.



**Problema 1.2**

Un líquido, de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , contenido entre dos cilindros coaxiales, infinitamente largos, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , ( $R_1 < R_2$ ) se mueve estacionariamente debido al giro de los dos cilindros alrededor de su eje con velocidades angulares  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  constantes. El campo de velocidades del líquido es unidireccional y de valor

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{y} \quad v_r = 0,$$

donde las constantes dimensionales  $A$  y  $B$  son,

$$A = \left( \frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \quad \text{y} \quad B = \left( \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \right).$$

Se pide:

1. Direcciones principales de deformación y velocidades de dilatación lineal unitarias.
2. Velocidad de dilatación cúbica unitaria. Evolución temporal de la línea fluida que en el instante inicial ocupa la posición  $\theta_o = 0$ . Hacer aplicación al caso  $R_2 = 2R_1$ ,  $A = \Omega_1$  y  $B = 10\Omega_1 R_1^2$ .
3. En el caso de que el espesor de la capa de líquido  $R_2 - R_1$  sea pequeño frente al radio de los cilindros,  $R_2 - R_1 \ll R_1$ , simplificar la expresión del campo de velocidades. ¿Con qué movimiento unidireccional se puede identificar el campo de velocidades simplificado?

Resolución:

**Apartado 1.-**

El lector puede comprobar fácilmente que las líneas de corriente son circunferencias concéntricas. El tensor  $\bar{\bar{\gamma}}$  en coordenadas polares ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ ), véase (1.29), viene dado por

$$\bar{\bar{\gamma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

que en este caso se reduce a

$$\bar{\bar{\gamma}}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{B}{r^2} \\ -\frac{B}{r^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Las direcciones principales  $\mathbf{n}$  y las velocidades de dilatación lineal unitarias  $\lambda$  vienen dadas por

$$\bar{\bar{\gamma}} \cdot \mathbf{n} - \lambda \mathbf{n} = 0, \rightarrow \det(\bar{\bar{\gamma}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = 0, \quad (3)$$

donde  $\bar{\bar{I}}$  es el tensor unidad; teniendo en cuenta (2) y (3) se obtienen las velocidades de dilatación unitarias

$$\lambda^2 - \left( A - \frac{B}{r^2} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1(r) = -\frac{B}{r^2}, \quad \text{y} \quad \lambda_2(r) = \frac{B}{r^2}, \quad (4)$$

## 12 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

y las direcciones principales, de componentes  $\mathbf{n}_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$  y  $\mathbf{n}_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{B}{r^2} \\ -\frac{B}{r^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} = \lambda_1(r) \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{B}{r^2} \\ -\frac{B}{r^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \lambda_2(r) \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

cuyas soluciones  $\theta_1 = 45^\circ$  y  $\theta_2 = -45^\circ$  proporcionan

$$\mathbf{n}_1 = \sqrt{1/2} \mathbf{e}_r + \sqrt{1/2} \mathbf{e}_\theta \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_2 = -\sqrt{1/2} \mathbf{e}_r - \sqrt{1/2} \mathbf{e}_\theta. \quad (7)$$

### Apartado 2.-

Obsérvese, de (4), que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ; igualdad que refleja que el volumen fluido no cambia su valor a lo largo del movimiento, lo que indica que el fluido es incompresible. Obsérvese que la traza de  $\gamma$  es la divergencia del vector velocidad, que para este movimiento es idénticamente nula en cualquier punto del dominio fluido puesto que el fluido es incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (8)$$

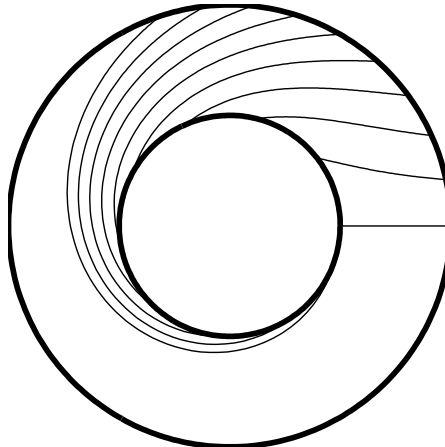
La ecuación de la línea fluida que en el instante inicial están situadas sobre la línea  $\theta = 0$  y cuyas posiciones sobre la línea vienen definidas por el parámetro dimensional  $\lambda$ , tal que  $1 \leq \lambda/R_1 \leq 2$  se determina a partir de las trayectorias

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d\theta}{dt} &= v_\theta \\ \frac{dr}{dt} &= v_r = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \theta - \theta_o = (A + B/r_o^2) t \quad \text{y} \quad r = r_o, \quad (9)$$

por tanto, la ecuación de evolución de la línea fluida es

$$\theta(t, \lambda) = \left[ A + B \frac{1}{r^2(\lambda)} \right] t, \quad \text{y} \quad r(\lambda) = \lambda \quad (10)$$

cuya evolución para diferentes tiempos se representa en la figura para el caso  $R_2 = 2R_1$ ,  $A = \Omega_1$  y  $B = 10\Omega_1 R_1^2$ ; las distancias se han adimensionalizado utilizando el radio del cilindro interior  $R_1$ .



**Apartado 3.-**

En el caso en que  $R_2 - R_1 \ll R_1$  es conveniente substituir como variable espacial  $r$  por  $r = R_1 + y$  siendo  $y \sim h = R_2 - R_1 \ll R_1 \sim R_2$ . En efecto, el campo de velocidades en la nueva variable  $y$  es

$$v_\theta(y) = A(R_1 + y) + \frac{B}{R_1 + y} = AR_1 + \frac{R_1}{B} + \left(A - \frac{B}{R_1^2}\right)y + \dots \quad (11)$$

en la cual se ha aproximado  $1/r$  por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_1 + y} = \frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{y}{R_1} + \dots\right). \quad (12)$$

Si se tiene en cuenta que

$$AR_1 + \frac{R_1}{B} = v_\theta|_{r=R_1} = \Omega_1 R_1 \quad (13)$$

y que

$$A - \frac{B}{R_1^2} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2 R_2^2/R_1^2}{1 - R_2^2/R_1^2} - \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{1 - R_1^2/R_2^2} = (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{1 + R_2^2/R_1^2}{1 - R_2^2/R_1^2} = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)R_1}{h} + O(1) + \dots, \quad (14)$$

donde para obtener el resultado anterior se ha realizado la aproximación

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{(R_1 + h)^2}{R_1^2} = 1 + 2\frac{h}{R_1} + \dots; \quad (15)$$

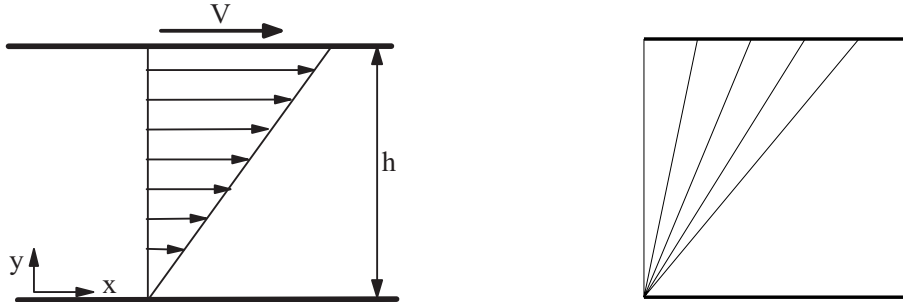
el campo de velocidades resulta finalmente

$$v_\theta(y) = \Omega_1 R_1 + (\Omega_2 - \Omega_1) R_1 \frac{y}{h}. \quad (16)$$

Obsérvese que las líneas de corriente del movimiento bidimensional son ahora rectas paralelas al eje  $x$  en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares,  $[\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\theta(R_1), \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r(R_1)]$  con origen en  $y = 0$  ( $r = R_1$ ); la razón es que el radio de curvatura de las líneas de corriente es tan grande comparado con el espesor de la película líquida  $h/R_1 \ll 1$ , que en primera aproximación (radio de curvatura infinito) las líneas de corriente circulares se convierten en rectas. Este movimiento corresponde al de un líquido entre dos placas paralelas cuyo movimiento es debido al movimiento relativo de una de las placas respecto a la otra, paralelamente a si misma. Este movimiento bidimensional es conocido como movimiento de Couette y está generado por dos placas planas paralelas, separadas una distancia  $h$ , que se mueven con velocidades  $\Omega_1 R_1$  y  $\Omega_2 R_1$ . Nótese que en ejes ligados a la placa de velocidad  $\Omega_1 R_1$ , el campo de velocidades (16) se expresa en la forma

$$v_x(y) = (\Omega_2 - \Omega_1) R_1 \frac{y}{h}, \quad (17)$$

que corresponde al movimiento estacionario del líquido inducido por el movimiento de una placa con velocidad  $(\Omega_2 - \Omega_1) R_1$  respecto a la otra que está separada una distancia  $h$ .



En la figura se ha representado la evolución temporal de una línea fluida que en el instante inicial fuese perpendicular a las placas. Compárese esta evolución con la mostrada en la figura anterior.

**Problema 1.3**

Se considera el movimiento plano de un líquido generado por la superposición de una corriente en el infinito, uniforme y de valor  $U_\infty$ , un manantial situado en el punto  $(-a, 0)$ , de intensidad  $q_1$  por unidad de longitud perpendicular al plano del movimiento, y un sumidero situado en el punto  $(a, 0)$  de intensidad  $q_2$ . El campo de velocidades resultante, en coordenadas cartesianas, es

$$v_x(x, y, t) = U_\infty + \frac{q_1}{2\pi} \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{q_2}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$v_y(x, y, t) = \frac{q_1}{2\pi} \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{q_2}{2\pi} \frac{y}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Se pide:

1. Calcular los puntos de remanso.
2. Calcular la ecuación de las líneas de corriente.
3. Dibujar las líneas de corriente divisorias en los casos siguientes:  $q_1 = q_2 = q$  y  $q_2 < q_1$ .
4. Ídem para el caso en que el sumidero esté situado delante del manantial y ambos posean la misma intensidad; dibujar las líneas de corriente en los casos:  $q < \pi U_\infty a$ ,  $q = \pi U_\infty a$  y  $q > \pi U_\infty a$ .
5. Calcular el campo de velocidades correspondiente a un manantial tridimensional del que emana un caudal  $Q$ . Flujo resultante de la superposición de una corriente uniforme y un manantial tridimensional.

Resolución:

**Apartado 1.-**

Los puntos de remanso son aquellos donde la velocidad se anula  $v_x = v_y = 0$ . La componente de la velocidad según el eje  $y$  de las partículas fluidas que están sobre el eje  $y = 0$  es nula. Si entre los puntos  $y = 0$  se buscan aquellos en los que la velocidad según el eje  $x$  es también nula se obtiene la ecuación algébrica, de segundo grado, que proporciona la posición,  $x_R$ , de los puntos de remanso

$$U_\infty + \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{x_R + a} - \frac{q_2}{2\pi} \frac{1}{x_R - a} = 0,$$

cuya solución es

$$\bar{x}_R = \frac{1}{2} [-(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \pm \sqrt{(\bar{q}_1 - \bar{q}_2)^2 + 4(1 + \bar{q}_1 + \bar{q}_2)}], \quad (1)$$

donde  $\bar{x}_R = x_R/a$ ,  $\bar{q}_1 = q_1/(2\pi U_\infty a)$  y  $\bar{q}_2 = q_2/(2\pi U_\infty a)$ .

**Apartado 2.-**

Las líneas de corriente se obtienen a partir de la ecuación (1.13) que particularizada para el campo de velocidades del enunciado resulta

$$\left[ U_\infty + \frac{q_1}{2\pi} \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{q_2}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] dy = \left[ \frac{q_1}{2\pi} \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{q_2}{2\pi} \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right] dx.$$

La ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$U_\infty dy + \frac{q_1}{2\pi} \frac{d[y/(x+a)]}{1 + [y/(x+a)]^2} - \frac{q_2}{2\pi} \frac{d[y/(x-a)]}{1 + [y/(x-a)]^2} = 0,$$

que integrada proporciona la ecuación de las líneas de corriente

$$U_{\infty}y + \frac{q_1}{2\pi} \arctan \frac{y}{x+a} - \frac{q_2}{2\pi} \arctan \frac{y}{x-a} = C; \quad (2)$$

para cada uno de los valores de la constante de integración  $C$  se obtiene una línea de corriente.

### Apartado 3.-

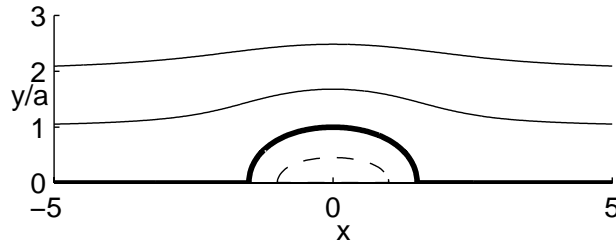
Para el caso en que los gastos del sumidero y del manantial sean iguales,  $q_1 = q_2 = q$ , los puntos de remanso están situados en, véase (1),

$$\bar{x}_R = \pm \sqrt{1 + 2\bar{q}} \quad \text{con} \quad \bar{q} = q/(2\pi U_{\infty}a),$$

y la ecuación para las líneas de corriente, véase (2), es

$$U_{\infty}y + \frac{q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x+a} - \frac{q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x-a} = C;$$

la evaluación de la ecuación anterior en  $(x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0^+)$  proporciona  $C = 0$  y la ecuación de la línea de corriente divisoria (la que pasa por los puntos de remanso) se representa junto con alguna otra línea de corriente en la figura adjunta. Obsérvese que en este caso se obtiene una línea de corriente cerrada (óvalo de Rankine) y el procedimiento aquí descrito de superposición de manantiales y sumideros con gasto total nulo, aunque un poco más elaborado, es una técnica válida para la representación de flujos de fluidos ideales alrededor de obstáculos simétricos. En la figura se representa las líneas de corriente del campo resultante de la superposición de una corriente uniforme y un manantial y un sumidero de la misma intensidad para el caso  $q = 4\pi U_{\infty}a$ ; en el dibujo se ha omitido, por ser simétrica, la parte correspondiente al semiplano ( $y < 0$ ).



Para el caso  $q_1 < q_2$  las dos líneas de corriente divisorias se obtienen para los valores de  $C$ ,  $C = (q_1 - q_2)/2$  para la que pasa por el punto de remanso delantero

$$U_{\infty}y + \frac{q_1}{2\pi} \arctan \frac{y}{x+a} - \frac{q_2}{2\pi} \arctan \frac{y}{x-a} = \frac{q_1 - q_2}{2},$$

y  $C = 0$  para la que pasa por el punto de remanso posterior

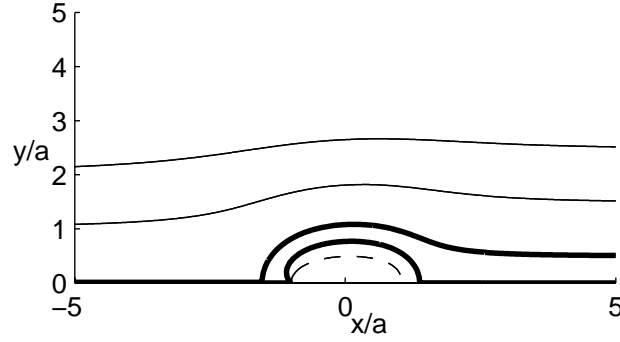
$$U_{\infty}y + \frac{q_1}{2\pi} \arctan \frac{y}{x+a} - \frac{q_2}{2\pi} \arctan \frac{y}{x-a} = 0.$$

Obsérvese que la línea de corriente que pasa por el punto de remanso delantero presenta una asíntota en  $x \rightarrow \infty$  de valor  $y_a = (q_1 - q_2)/(2U_{\infty})$ . Conviene indicar que al mismo resultado se puede llegar mediante argumentos físicos; en efecto, en virtud de la incompresibilidad de líquido, el caudal emitido por el manantial que llega al infinito con velocidad  $U_{\infty}$  es  $(q_1 - q_2) = 2y_a U_{\infty}$ .

En la figura siguiente se representan las líneas de corriente resultantes de la superposición de una corriente uniforme, un manantial  $q_1$  y un sumidero de menor intensidad  $q_2$ . Se ha representado el caso  $q_1 = 4U_{\infty}a$  y  $q_2 = 3U_{\infty}a$ .



## 16 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS



Es fácil comprobar finalmente que en ausencia de sumidero,  $q_2 = 0$ , hay un único punto de remanso situado, delante del manantial, a una distancia del origen

$$\bar{x}_R = \bar{q}_1 - 1$$

y la ecuación de la línea de corriente divisoria es

$$U_\infty y + \frac{q_1}{2\pi} \arctan \frac{y}{x+a} = \frac{q_1}{2}.$$

Obsérvese que en  $x \rightarrow +\infty$  la línea de corriente divisoria presenta una asíntota de valor  $y_a = q_1/(2U_\infty)$ ; como en el caso anterior su valor puede obtenerse también mediante la condición de conservación de la masa.

En el caso en que el sumidero estuviese situado delante del manantial la situación es distinta a la anteriormente analizada. Si, por ejemplo, los gastos de manantial y sumidero fuesen iguales  $q_1 = q_2 = q$ , la posición de los puntos de remanso se obtienen a partir de las ecuaciones

$$U_\infty + \frac{q}{2\pi} \left[ -\frac{x_R + a}{(x_R + a)^2 + y_R^2} + \frac{x_R - a}{(x_R - a)^2 + y_R^2} \right] = 0$$

y

$$-\frac{y_R}{(x_R + a)^2 + y_R^2} + \frac{y_R}{(x_R - a)^2 + y_R^2} = 0.$$

Las soluciones del sistema anterior están sobre el eje  $y = 0$  y

$$\frac{x_R}{a} = \pm \left[ 1 - \frac{q}{\pi a U_\infty} \right]^{1/2} \quad \text{si } q \leq \pi a U_\infty$$

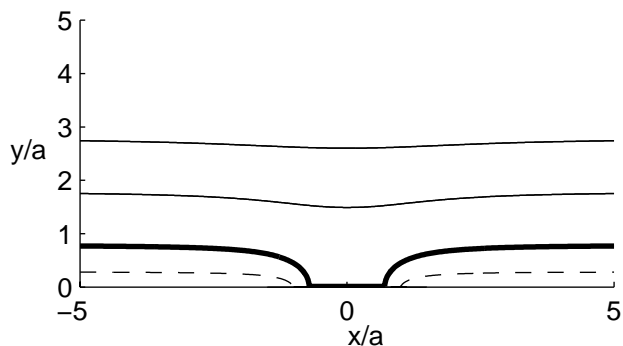
mientras que están sobre el eje  $x = 0$  con

$$\frac{y_R}{a} = \pm \left[ \frac{q}{\pi a U_\infty} - 1 \right]^{1/2} \quad \text{si } q > \pi a U_\infty.$$

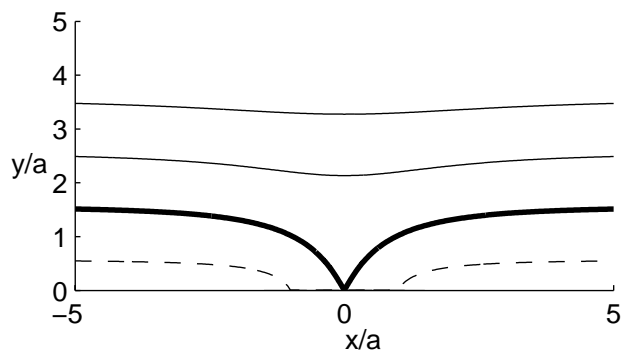
Para el primer caso,  $q < \pi a U_\infty$ , las ecuaciones para cada una de las dos líneas de corriente divisorias adoptan la misma expresión

$$U_\infty y - \frac{q}{2\pi} \left[ \arctan \frac{y}{x+a} - \arctan \frac{y}{x-a} \right] = q/2;$$

en la figura siguiente se representa las líneas de corriente divisorias para el caso  $q = \pi a U_\infty/2$ .



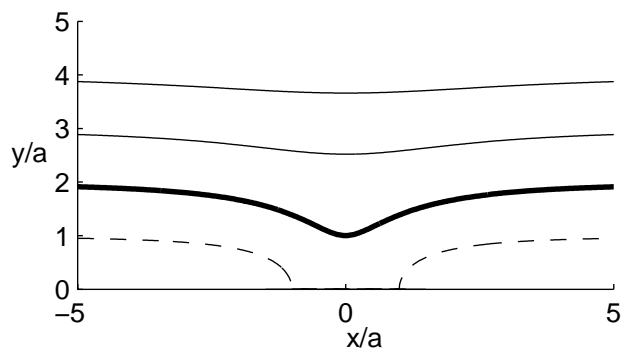
A medida que aumentan los gastos del manantial y del sumidero, los puntos de remanso se aproximan al origen, en el que se sitúan cuando  $q = \pi a U_\infty$ . En este caso un esquema del flujo se representa en la figura siguiente.



Finalmente, cuando  $q > \pi a U_\infty$ , los puntos de remanso se sitúan sobre el eje imaginario y la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto de remanso situado en la parte positiva del eje de ordenadas es

$$U_\infty y - \frac{q}{2\pi} \left[ \arctan \frac{y}{x+a} - \arctan \frac{y}{x-a} \right] = U_\infty y_R - \frac{q}{2\pi} \left[ 2 \arctan \frac{y_R}{a} - \pi \right] ;$$

la representación del flujo para el caso  $q = 4\pi a U_\infty$  se da en la figura situada debajo.



#### Apartado 4.-

El flujo de masa a través de cualquier superficie esférica con centro en el manantial es

$$\rho Q = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho v_r r \sin \theta \, d\phi \, r \, d\theta$$

## 18 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

y como  $v_r$  es uniforme sobre cualquier superficie esférica, se tiene

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad v_\theta = 0, \quad v_\phi = 0 \quad \text{con} \quad r = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2};$$

naturalmente si  $Q$  es negativo se tiene un sumidero en lugar del manantial.

Si el manantial se supone situado en el origen ( $x_o = y_o = z_o = 0$ ), el campo de velocidades resultante de la superposición del manantial y de una corriente uniforme paralela al eje  $x$  es

$$v_x = U_\infty + \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{x}{r}, \quad v_s = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{s}{r}, \quad \text{con} \quad s = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Los puntos de remanso, en este caso uno, están situados sobre el eje  $s = 0$ , a una distancia del origen

$$x_R = - \left[ \frac{Q}{4\pi U_\infty} \right]^{1/2}.$$

Estableciendo el paralelismo entre el vector velocidad y el vector tangente a la superficie de corriente se obtiene la ecuación que proporciona éstas

$$\frac{dx}{U_\infty + (Qx)/(4\pi r^3)} = \frac{ds}{(Qs)/(4\pi r^3)};$$

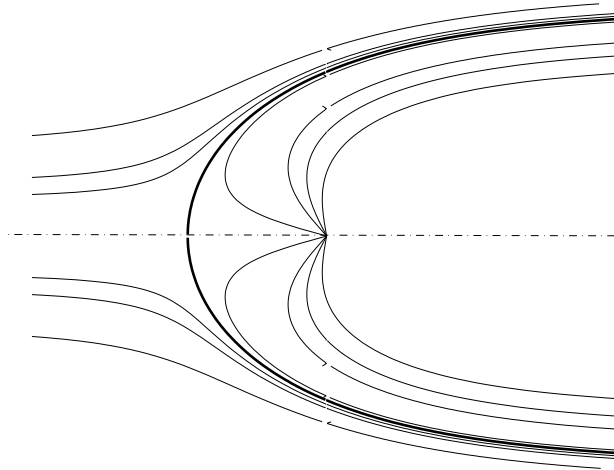
esta ecuación tras alguna manipulación algébrica se puede escribir en la forma

$$U_\infty s ds + \frac{Q}{4\pi} \frac{d(x/s)}{[1 + (x/s)^2]^{3/2}} = 0;$$

la integración de la ecuación anterior es inmediata y proporciona

$$U_\infty \frac{s^2}{2} + \frac{Q}{4\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 + s^2}} = C.$$

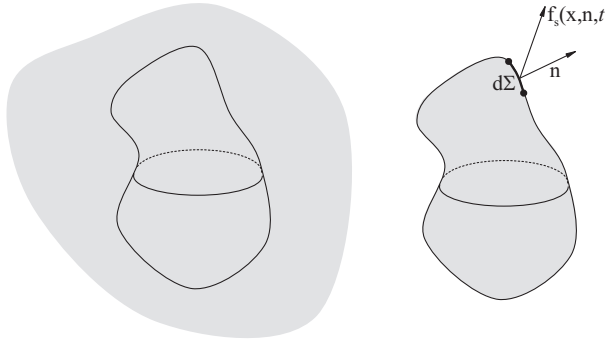
La constante  $C$  de la superficie de corriente que pasa por el punto de remanso es  $C = Q/4$  y su representación en un plano meridiano se da en la figura adjunta para el caso  $Q = 4\pi U_\infty$ .



Obsérvese que en  $x \rightarrow \infty$  la superficie de corriente presenta una asíntota de valor  $s_a = [Q/(\pi U_\infty)]^{1/2}$ . El resultado anterior se obtiene también fácilmente sin más que invocar el principio de conservación de la masa.

## CAPÍTULO 2

# Fluidostática



Las fuerzas que actúan sobre una porción macroscópica de fluido pueden clasificarse en fuerzas de volumen y fuerzas de superficie. Las fuerzas de superficie, que ocurren a través de cualquier superficie que separe dos porciones macroscópicas de fluido, tienen su origen en el movimiento de agitación molecular y en la interacción entre las moléculas situadas a ambos lados de la superficie. Sobre un elemento de superficie  $d\sigma$  de orientación  $\mathbf{n}$  centrado en el punto  $\mathbf{x}$  y en un instante  $t$  estos efectos dan lugar a una fuerza diferencial macroscópica definida por  $d\mathbf{F}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma$ , donde  $\mathbf{f}_s$  es el vector fuerza por unidad de superficie o *esfuerzo*.

Los esfuerzos vienen dado por la relación

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n} \cdot (-p\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \bar{\bar{\tau}}'); \quad (2.1)$$

donde  $\bar{\bar{\tau}}$  es el tensor de esfuerzos que consta del término  $-p(\mathbf{x}, t)\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ , donde  $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$  es el tensor unitario y  $p(\mathbf{x}, t)$  es la presión a la que se añade la contribución debida a los esfuerzos asociados a la deformación del fluido, o *esfuerzos de viscosidad*; dichos esfuerzos están caracterizados por el *tensor de esfuerzos de viscosidad*,  $\bar{\bar{\tau}}'$ .<sup>1</sup> En el caso de que el fluido esté en reposo, los esfuerzos de viscosidad son nulos  $\bar{\bar{\tau}}' = 0$ .

Las fuerzas de volumen se ejercen sobre cualquier elemento de volumen del dominio fluido, y son las debidas a un campo exterior, tal como el gravitatorio o el electromagnético, y las debidas a las fuerzas de inercia asociadas al movimiento no inercial del sistema de referencia. Estas fuerzas pueden caracterizarse por un *vector de fuerzas volumétricas*  $\mathbf{f}_v$  o, de forma equivalente, por un *vector de fuerzas másicas*  $\mathbf{f}_v = \mathbf{f}_m/\rho$ , de manera que la fuerza que actúa en el instante  $t$  sobre un elemento de volumen  $d\varpi$  que rodea al punto fijo  $\mathbf{x}$  del dominio fluido está dada por  $d\varpi \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) = d\varpi \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}_m(\mathbf{x}, t)$ .

Considerando que las fuerzas de volumen son debidas únicamente al campo gravitatorio terrestre y al movimiento no inercial del sistema de referencia, el vector de fuerzas másicas es en general

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{g} - (\mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}), \quad (2.2)$$

donde el sistema de ejes rota con una velocidad angular  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ , su origen se mueve con una aceleración  $\mathbf{a}_o(t)$  y  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  es el campo de velocidades del fluido en el sistema de referencia elegido; obsérvese que los dos últimos términos de (2.2) son las aceleraciones centrífuga y de Coriolis. En ausencia del término de Coriolis y del asociado a la aceleración angular del sistema de referencia es fácil comprobar que el vector de fuerzas másicas puede escribirse como  $\mathbf{f}_m = -\nabla U$  con el potencial de fuerzas másicas dado por

$$U = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> El tensor de esfuerzos de viscosidad es función del tensor de velocidades de deformación,  $\bar{\bar{\gamma}}$  (véase Capítulo 1). Se denominan fluidos *newtonianos* aquellos para los que la relación entre  $\bar{\bar{\tau}}'$  y  $\bar{\bar{\gamma}}$  es lineal e isótropa, dada por la *ley de Navier-Poisson*.

## 20 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Se dice que un fluido se encuentra en una situación de fluidostática cuando es posible encontrar un sistema de referencia en el que el fluido está en reposo. El campo de presiones se determina entonces por el balance, como exige la ley de Newton, de fuerzas (volumétricas y de superficie) aplicado a cualquier porción de fluido encerrado por una superficie genérica  $\Sigma$

$$\int_{\Sigma} -p \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} \mathbf{f}_m d\varpi = \int_{\Omega} (-\nabla p + \mathbf{f}_m) d\varpi = 0 \Rightarrow -\nabla p + \rho \mathbf{f}_m = 0, \quad (2.4)$$

donde la integral de superficie se ha transformado en una integral de volumen haciendo uso del teorema de Gauss.

En el caso de un fluido incompresible (líquido) la ecuación de la fluidostática (2.4) es, empleando (2.3),

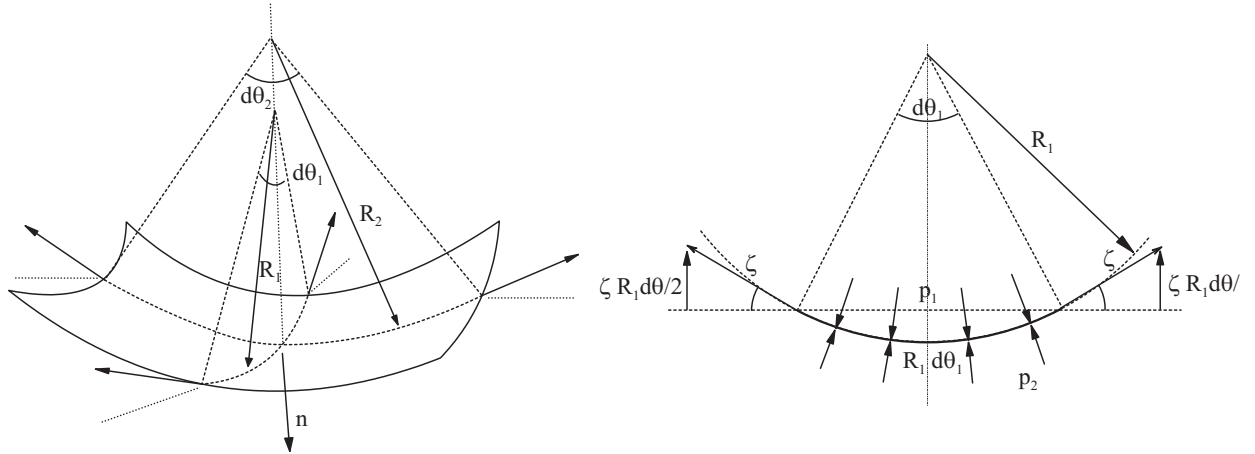
$$\nabla(p + \rho U) = 0 \Rightarrow p + \rho U = C(t)$$

es decir,  $p - \rho g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{x} + \rho \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{x} - \frac{\rho}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 = C(t), \quad (2.5)$

donde la función  $C(t)$  debe determinarse a partir de las condiciones de contorno. Obsérvese que, de acuerdo con (2.5), la superficies isobaras,  $p = cte$ , deben ser también equipotenciales  $U = cte$ . En particular si en el dominio fluido existe una superficie libre (por ejemplo, una interfase gas-líquido) donde la presión es constante, dicha superficie debe ser, en cada punto, ortogonal al vector de fuerzas másicas.

### Fuerzas de tensión superficial en interfases

Es bien conocido que cuando se pretende mezclar ciertas parejas de fluidos éstos manifiestan una tendencia a permanecer separados formando una frontera bien delimitada. Se refiere entonces a éstos como fluidos inmiscibles. La interfase de separación entre dos fluidos inmiscibles se comporta entonces como una membrana en tensión siendo la fuerza tangencial por unidad de longitud la denominada tensión superficial  $\zeta$ . La tensión superficial puede considerarse alternativamente como una energía por unidad de superficie. La tensión superficial  $\zeta$  es una propiedad de las fases puestas en contacto. Lógicamente la interfase tienden a adoptar la posición de mínima energía que corresponde a la de mínima superficie.



Como se puede observar en la proyección mostrada en la figura, las fuerzas de tensión superficial dan lugar a esfuerzos normales a la interfase, si ésta presenta curvatura, que se añaden a los esfuerzos superficiales ejercidos por los fluidos de un lado y otro de la interfase. Obligando a satisfacer el equilibrio de fuerzas en la dirección normal que actúan sobre un elemento diferencial superficial en la interfase se obtiene la ecuación de Laplace-Young que relaciona el salto de presiones a través de la interfase con su forma geométrica y la tensión superficial

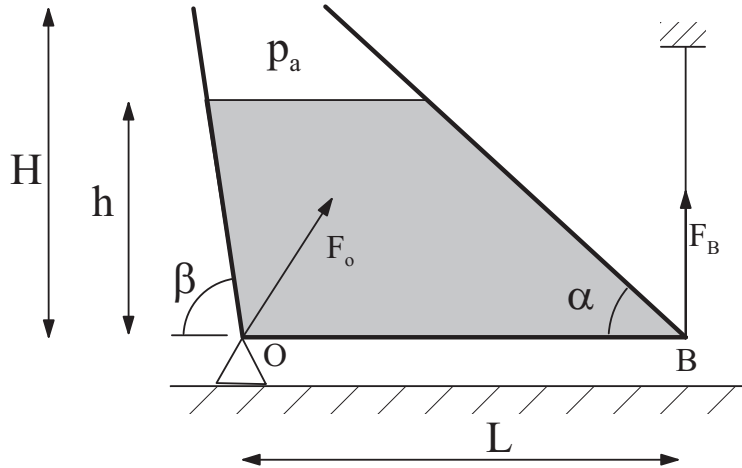
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \zeta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \zeta \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (2.6)$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura de la interfase y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie.

**Problema 2.1**

La figura muestra un recipiente bidimensional limitado lateralmente por dos superficies planas que forman respectivamente ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con la horizontal, y cuya superficie inferior, de longitud  $L$ , es horizontal estando articulada mediante una rótula en el punto  $O$  y está retenido en el punto  $B$  por un cable dispuesto como se muestra en la figura; la superficie superior del recipiente, situada a una distancia  $H$  de la base, está abierta a la atmósfera. Si el peso de las paredes del recipiente es despreciable, se pide:

1. Si el recipiente se llena hasta un nivel  $h < H$  de un líquido de densidad  $\rho$ , calcular las fuerzas que se ejercen sobre el mismo en la rótula,  $\mathbf{F}_O$ , y la tracción de la cuerda  $\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{e}_y$ , cuando el líquido y el recipiente se encuentran en reposo bajo la acción de la gravedad.
2. Calcular la relación que deben cumplir los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  para que sea posible que el recipiente vuelque (gire sobre la rótula) si el líquido en su interior alcanza un cierto nivel  $h^*$ . Calcular  $h^*$ .

**Resolución:****Apartado 1.-**

Puesto que el líquido está en reposo respecto del recipiente la distribución de presiones en el líquido está dada por

$$p(y) = p_a + \rho g(h - y). \quad (1)$$

Para determinar las fuerzas que se ejercen en la rótula  $O$  y en el apoyo  $A$ ,  $\mathbf{F}_O$  y  $\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{e}_y$  se calcularán las fuerzas debidas al líquido y a la atmósfera sobre las paredes del recipiente y se establecerá el equilibrio de dichas fuerzas y de sus momentos respecto de  $O$  con los de  $\mathbf{F}_O$  y  $\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{e}_y$ . Debido a que el problema es bidimensional se sobrentenderá en lo que sigue que todas las fuerzas y momentos son por unidad de longitud perpendicular al plano del dibujo.

La pared del recipiente que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal,  $\Sigma_\alpha$ , posee un vector unitario normal exterior  $\mathbf{n}_\alpha = \sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y$ , y el vector posición respecto de  $O$  de un punto genérico de la superficie es  $\mathbf{x} = (L - s \cos \alpha) \mathbf{e}_x + s \sin \alpha \mathbf{e}_y$ , donde  $s$  es la distancia desde  $\mathbf{x}$  al apoyo  $A$ ; obsérvese que  $\mathbf{x} \times \mathbf{n}_\alpha = (L \cos \alpha - s) \mathbf{e}_z$ , donde  $\mathbf{e}_z$  es el vector unitario perpendicular al plano del dibujo y que apunta hacia el lector.

## 22 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Por tanto, la fuerza resultante sobre  $\Sigma_\alpha$  es

$$\mathbf{F}_\alpha = \int_0^{h/\sin\alpha} (p - p_a) \mathbf{n}_\alpha ds = \int_0^{h/\sin\alpha} \rho g (h - s \sin\alpha) \mathbf{n}_\alpha ds = \frac{\rho g h^2}{2 \sin\alpha} \mathbf{n}_\alpha, \quad (2)$$

donde se ha tenido en cuenta (1) con  $y = s \sin\alpha$  sobre  $\Sigma_\alpha$ ; el momento resultante respecto de  $O$  de las fuerzas que actúan sobre  $\Sigma_\alpha$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{O\alpha} &= \int_0^{h/\sin\alpha} (p - p_a) \mathbf{x} \times \mathbf{n}_\alpha ds = \mathbf{e}_z \rho g \int_0^{h/\sin\alpha} (h - s \sin\alpha) (L \cos\alpha - s) ds \\ &= \mathbf{e}_z \rho g (h^2 L \sin 2\alpha - 2h^3/3)/(4 \sin^2\alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Asimismo, la pared del recipiente que forma un ángulo  $\beta$  con la horizontal,  $\Sigma_\beta$ , posee un vector unitario normal exterior  $\mathbf{n}_\beta = -\sin\beta \mathbf{e}_x - \cos\beta \mathbf{e}_y$ , y el vector posición respecto de  $O$  de un punto genérico de la superficie es  $\mathbf{x} = -s \cos\beta \mathbf{e}_x + s \sin\beta \mathbf{e}_y$ , donde  $s$  es la distancia desde  $\mathbf{x}$  a la rótula  $O$ ; obsérvese que  $\mathbf{x} \times \mathbf{n}_\beta = s \mathbf{e}_z$ . La fuerza resultante sobre  $\Sigma_\beta$  es

$$\mathbf{F}_\beta = \int_0^{h/\sin\beta} (p - p_a) \mathbf{n}_\beta ds = \int_0^{h/\sin\beta} \rho g (h - s \sin\alpha) \mathbf{n}_\beta ds = \frac{\rho g h^2}{2 \sin\beta} \mathbf{n}_\beta, \quad (4)$$

y el momento resultante respecto de  $O$  de las fuerzas que actúan sobre  $\Sigma_\beta$  es

$$\mathbf{M}_{O\beta} = \int_0^{h/\sin\beta} (p - p_a) \mathbf{x} \times \mathbf{n}_\beta ds = \mathbf{e}_z \rho g \int_0^{h/\sin\beta} (h - s \sin\beta) s ds = \frac{\rho g h^3}{6 \sin^2\beta} \mathbf{e}_z. \quad (5)$$

Finalmente, sobre el fondo horizontal del recipiente,  $\Sigma_f$ , se tienen  $\mathbf{n}_f = -\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{x} = x \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{x} \times \mathbf{n}_f = -x \mathbf{e}_z$ ; la fuerza resultante sobre  $\Sigma_f$  es

$$\mathbf{F}_f = \int_0^L (p - p_a) \mathbf{n}_f ds = - \int_0^L \rho g \mathbf{e}_y ds = -\rho g h L \mathbf{e}_y, \quad (6)$$

y el momento resultante respecto de  $O$  de las fuerzas sobre  $\Sigma_h$  es

$$\mathbf{M}_{Of} = \int_0^L (p - p_a) \mathbf{x} \times \mathbf{n}_f ds = -\mathbf{e}_z \rho g \int_0^L x dx = -\rho g h L^2/2 \mathbf{e}_z. \quad (7)$$

El momento de la fuerza  $\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{e}_y$  respecto de  $O$  es

$$\mathbf{M}_{OA} = F_B L \mathbf{e}_z. \quad (8)$$

Planteando el equilibrio de momento en el punto  $O$ , es decir, igualando a cero la suma de (3), (5), (7) y (8) se obtiene

$$\frac{F_B}{\rho g L^2} = \frac{h}{2L} + \frac{h^3}{6L^3} \left( \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\beta} \right) - \frac{h^2 \cos\alpha}{2L^2 \sin\alpha}. \quad (9)$$

Una vez determinada  $\mathbf{F}_B$  el equilibrio de fuerzas determina  $\mathbf{F}_O$ ; igualando a cero la suma de (2), (4), (6),  $\mathbf{F}_B$  y  $\mathbf{F}_O$  se obtiene

$$\mathbf{F}_O = -F_B \mathbf{e}_y - \frac{\rho g h^2}{2 \sin\alpha} \mathbf{n}_\alpha - \frac{\rho g h^2}{2 \sin\beta} \mathbf{n}_\beta + \rho g h L \mathbf{e}_y. \quad (10)$$

Los resultados anteriores pueden obtenerse también considerando el balance de fuerzas y de momentos entre las fuerzas  $\mathbf{F}_B$  y  $\mathbf{F}_O$  y el peso de líquido contenido en el recipiente, por unidad de longitud perpendicular al plano del dibujo,  $\mathbf{W} = -\rho g A \mathbf{e}_y$ , donde  $A$  es el área de la sección del recipiente ocupada por el líquido. En efecto, obsérvese que, puesto que sobre la superficie libre del líquido,  $\Sigma_h$ , se tiene  $p = p_a$  la suma de (2), (4) y (6) puede escribirse como

$$\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\beta + \mathbf{F}_f = \int_{\Sigma_\alpha + \Sigma_\beta + \Sigma_f + \Sigma_h} (p - p_a) \mathbf{n} ds = \int_A \nabla p d\sigma = -\rho g A \mathbf{e}_y = \mathbf{W}, \quad (11)$$

donde se ha aplicado el teorema de Gauss a la superficie cerrada  $\Sigma_\alpha + \Sigma_\beta + \Sigma_f + \Sigma_h$  y se ha tenido en cuenta que  $\nabla p = \rho \mathbf{g} = -\rho g \mathbf{e}_y$ . Análogamente, la suma de (3), (5) y (7) es equivalente al momento respecto de  $O$  del peso del líquido contenido en el recipiente; en efecto,

$$\mathbf{M}_{O\alpha} + \mathbf{M}_{O\beta} + \mathbf{M}_{Of} = \int_{\Sigma_\alpha + \Sigma_\beta + \Sigma_f + \Sigma_h} (p - p_a) \mathbf{x} \times \mathbf{n} ds = - \int_A \nabla p \times \mathbf{x} d\sigma = \mathbf{x}_{cm} \times \mathbf{W}, \quad (12)$$

donde el centro de masas del líquido en la sección  $A$  está definido por  $\mathbf{x}_{cm} = \int_A \mathbf{x} d\sigma$ . El equilibrio de momentos respecto de  $O$  exige

$$F_B L \mathbf{e}_z + \mathbf{x}_{cm} \times \mathbf{W} = 0 \rightarrow F_B = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{x}_{cm} \times \mathbf{e}_z) \quad (13)$$

y el equilibrio de fuerzas exige

$$\mathbf{F}_O = -F_B \mathbf{e}_y - \mathbf{W}. \quad (14)$$

Compruebe el lector que cuando  $A$  y  $\mathbf{x}_{cm}$  se calculan en función de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $h$  los resultados (13)-(14) coinciden con (9)-(10).

### Apartado 2.-

Si el recipiente comienza a girar alrededor de la articulación  $O$  para un cierto nivel  $h^*$  del líquido, en esta situación el cable no realiza ningún efecto con lo que  $F_B = 0$ ; nótese que, de acuerdo con la ecuación (13), esta condición es equivalente a que el centro de masas del líquido contenido en el recipiente esté situado en la vertical que pasa por  $O$ . Igualando a cero (9) se obtiene la ecuación cuadrática para  $h^*$

$$\frac{h^{*2}}{L^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) - \frac{3h^* \cos \alpha}{L \sin \alpha} + 3 = 0. \quad (15)$$

Naturalmente, el vuelco sólo será posible si la ecuación (15) posee raíces reales, lo que exige que su discriminante sea positivo,  $9(\cos^2 \alpha / \sin^2 \alpha) \geq 12(\sin^{-2} \alpha - \sin^{-2} \beta)$ , condición que puede escribirse de forma más compacta como

$$\sin \beta \leq \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}}. \quad (16)$$

En particular, obsérvese que la condición (16) siempre se cumple si  $\alpha = \beta < \pi/2$  puesto que en este caso las caras laterales del recipiente son paralelas (recipiente prismático) y siempre es posible hacer que el recipiente vuelque para un  $h^*$  suficientemente alto si, naturalmente, la altura del recipiente,  $H$  ( $h^* \leq H$ ) es suficientemente elevada; nótese también que si  $\beta = \pi/2$  (16) no se cumple para ningún valor de  $\alpha$  y, por tanto, no se produce el vuelco en este caso. Para valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que satisfagan (16) el vuelco se producirá para el valor de  $h^*$  correspondiente a la raíz menor de (15), que está dada por

$$h^* = \frac{3 \sin^2 \alpha \left[ 1 - \sqrt{1 - 4(1 - \sin^2 \alpha / \sin^2 \beta) / (3 \cos^2 \alpha)} \right]}{4(1 - \sin^2 \alpha / \sin^2 \beta)}. \quad (17)$$

Evidentemente, para que el vuelco se produzca es necesario, además, que (17) proporcione un valor  $h^* \leq H$ , lo que puede considerarse una condición adicional, junto con (16), para  $\alpha$  y  $\beta$ .



**Problema 2.2**

Una balanza marca un peso de  $W_b$  cuando un globo de goma de volumen  $\Omega$  se coloca sobre su plato. Si la goma pesa  $W_g$  (10 g) se pide:

1. Densidad y presión del aire en el interior del globo supuesto que su temperatura es la del aire del ambiente  $T_a$ .
2. Si el globo se coloca sobre una interfase aire-agua, ¿qué fracción del volumen del globo se sumerge en el agua?

**Hacer aplicación para los valores numéricos:**  $W_b = 20g$ ,  $W_g = 10g$ ,  $\Omega = 1 m^3$ ,  $R_g = 287 m^2 s^{-2} K^{-1}$ ,  $\rho_a = 1,2 kg/m^3$ ,  $T_a = 293 K$ .

Resolución:

El peso que proporciona la balanza es la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el globo, que son: el peso del aire del interior del globo,  $\mathbf{W}_i = -\rho_i g \Omega \mathbf{e}_z$ , donde  $\rho_i$  es la densidad del aire en el interior del globo, el peso de la goma,  $\mathbf{W}_g = -W_g \mathbf{e}_z$ , y el empuje de Arquímedes. Como enseña la experiencia cotidiana, el empuje de Arquímedes actúa sobre todo cuerpo sumergido en un fluido en reposo, y no es más que la resultante de las fuerzas de presión que ejerce el fluido sobre la superficie del cuerpo. Obsérvese que si la presión fuese uniforme sobre la superficie del cuerpo no se produciría ninguna fuerza resultante y, por tanto, el empuje de Arquímedes está asociado a las variaciones de presión que se producen en un fluido en reposo bajo la acción de un campo de fuerzas másicas. Para calcular el empuje de Arquímedes en el caso que nos ocupa, se tomará un sistema de ejes con origen el centro del globo y con el eje  $z$  apuntando en sentido opuesto al de la gravedad; la distribución de presiones en el aire exterior al globo es  $p(z) = p(0) - \rho_a g z$ , donde  $p(0)$  es la presión exterior a la cota correspondiente al centro del globo  $z = 0$ . Si  $\mathbf{n}$  es la normal exterior unitaria a la superficie del globo,  $\Sigma$ , la resultante de las fuerzas de presión sobre la superficie del globo es,

$$\mathbf{E} = - \int_{\Sigma} p(x) \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma} (p_a - \rho_a g z) \mathbf{n} d\sigma = -p_a \int_{\Sigma} \mathbf{n} d\sigma + \rho_a g \int_{\Sigma} z \mathbf{n} d\sigma. \quad (1)$$

Al ser  $\Sigma$  en este caso una superficie cerrada, la expresión (1) puede calcularse fácilmente mediante el teorema de Gauss, que proporciona

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla 1 d\varpi = 0, \quad (2)$$

y

$$\int_{\Sigma} z \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla z d\varpi = \Omega \mathbf{e}_z \quad (3)$$

donde la integral en (2) es nula por serlo el integrando  $\nabla 1 = 0$ .

El resultado (2) expresa que la fuerza resultante de una presión uniforme aplicada sobre cualquier superficie cerrada es nula, mientras que el resultado (3) proporciona, cuando se introduce en (1) el celebrado *principio de Arquímedes*

$$\mathbf{E} = \rho_a g \Omega \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

que expresa que todo cuerpo sumergido en un fluido en equilibrio fluidostático bajo la acción (exclusiva) de la gravedad experimenta un empuje hacia arriba de valor igual al peso del fluido que desaloja; obsérvese que los resultados (2)-(4) son válidos para cualquier superficie cerrada y, por tanto, independientes de la geometría del cuerpo considerado. La ecuación (4) puede obtenerse de una forma alternativa, que posee la ventaja de ser aplicable también para fluidos compresibles en equilibrio bajo cualquier tipo de fuerzas

másicas, mediante el artificio matemático del *volumen desalojado*, que es la región ocupada por el cuerpo cuando se imagina reemplazada por el fluido exterior permaneciendo éste en equilibrio fluidostático (tanto en el exterior como en el interior del volumen desalojado). De esta forma para el fluido en el interior del volumen desalojado se verifica también la ecuación fluidostática  $\nabla p = \rho \mathbf{f}_m$  y se tiene, por tanto,

$$\mathbf{E} = - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_m d\varpi. \quad (5)$$

El resultado (5) generaliza (4) y expresa el empuje de Arquímedes como una fuerza de igual magnitud y sentido opuesto a la resultante de las fuerzas másicas sobre el volumen desalojado; obsérvese que (4) se obtiene de (5) para el caso particular  $\rho = \rho_a$  y  $\mathbf{f}_m = -g\mathbf{e}_z$ .

### Apartado 1.-

Una vez que se ha caracterizado el empuje de Arquímedes sobre el globo, el balance de fuerzas que actúan sobre éste proporciona

$$W_b \mathbf{e}_z - W_g \mathbf{e}_z - \rho_i g \Omega \mathbf{e}_z + \rho_a g \Omega \mathbf{e}_z = 0, \quad (6)$$

lo que permite calcular la densidad del aire en el interior del globo

$$\rho_i = \rho_a + (W_b - W_g)/(g\Omega); \quad (7)$$

la presión en el interior del globo está dada por la ecuación de estado

$$p_i = R_g \rho_i T_a = p_a + R_g (W - W_g)/(g\Omega), \quad (8)$$

donde  $p_a = R_g \rho_a T_a$  es la presión del aire a la temperatura y densidad ambiente. Particularizando (7)-(8) para los valores numéricos especificados en el enunciado se obtiene  $\rho_i - \rho_a \simeq 10^{-2} \text{ kg/m}^3$  y  $p_i - p_a \simeq 10^3 \text{ N/m}^2$ . Nótese que la sobrepresión en el globo posee un valor definido (constante) en el interior del mismo puesto que las variaciones de presión debido a la gravedad son despreciables en el interior; en efecto, estas últimas son del orden de  $\Delta_g p \sim \rho_i g R \sim 10 \text{ N/m}^2 \ll 10^3 \text{ N/m}^2 \simeq p_i - p_a$ .

### Apartado 2.-

En este caso el globo está parcialmente sumergido entre el agua y el aire ambiente. Los volúmenes sumergidos en cada fase,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente, se calculan imponiendo el equilibrio entre el peso del globo y el empuje de Arquímedes resultante de las fuerzas de presión asociado a las distribuciones de presiones en el aire y en el líquido. Si  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  denotan las porciones de la superficie del globo bañadas por el agua y por el aire, la fórmula (5) puede aplicarse directamente para el caso de un cuerpo parcialmente sumergido en dos fluidos inmiscibles teniendo en cuenta que en el interior del volumen desalojado,  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ , el integrando  $\rho \mathbf{f}_m$  es continuo a trozos puesto que debe tomarse un valor de la densidad  $\rho_1 (\equiv \rho)$  en  $\Omega_1$  y otro valor  $\rho_2 (\equiv \rho_a)$  en  $\Omega_2$ . Se tiene entonces

$$\mathbf{E} = - \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} p \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Omega_1} \rho_1 \mathbf{f}_m d\varpi - \int_{\Omega_2} \rho_2 \mathbf{f}_m d\varpi. \quad (9)$$

Si se aplica (9) para  $\rho_1$  y  $\rho_2$  constantes y para  $\mathbf{f}_m = -g\mathbf{e}_z$ , la ecuación de balance entre el peso del cuerpo y el empuje de Arquímedes se obtiene fácilmente como

$$W = \rho_1 g \Omega_1 + \rho_2 g \Omega_2, \quad (10)$$

donde  $W$  es el peso total del globo. La ecuación (10) junto con la condición  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ , proporciona los volúmenes sumergidos en cada fase

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} = 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega} = \frac{W}{g\Omega(\rho_1 - \rho_2)} - \frac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (11)$$

donde el subíndice 1 denota el fluido más pesado y el subíndice 2 el más ligero.

## 26 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Como se observa en (11), el cuerpo puede estar en equilibrio entre los dos fluidos bajo la acción de su propio peso si su densidad media,  $W/(g\Omega)$ , está comprendida entre las de los fluidos  $\rho_2 \leq W/(g\Omega) \leq \rho_1$ ; en caso contrario (11) proporciona fracciones volumétricas negativas o mayores que la unidad, lo que es imposible y significa que es necesario incluir una fuerza externa adicional en (10) para mantener el equilibrio. Además, en el caso de que las densidades sean muy dispares,  $\rho_1 \gg \rho_2$ , se distinguen los casos límites dados por

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_1}{\Omega} &\simeq \frac{W}{g\Omega\rho_1} \quad \text{si } \rho_1 \gtrsim W/(\rho g) \gg \rho_2 \quad \text{y} \\ \frac{\Omega_1}{\Omega} &\simeq \frac{W/(\Omega g) - \rho_2}{\rho_1} \ll 1 \quad \text{si } \rho_1 \gg W/(\rho g) \gtrsim \rho_2. \end{aligned} \quad (12)$$

En el primer caso la densidad media del objeto es proxima (y menor) que la del fluido más pesado  $\rho_1$ . El mismo límite se recoge si se desprecia el empuje de Arquímedes debido al fluido 2 en el análisis. En el caso contrario, la densidad media del objeto es proxima (y mayor) que la del fluido más ligero  $\rho_2$  y se puede considerar que el objeto flota pues se hunde una fracción minúscula. Éste es el caso del enunciado; en efecto, si se aplica la ecuación (12) al globo del enunciado con  $\rho_1 \equiv \rho$ ,  $\rho_2 \equiv \rho_a$ ,  $W = W_g + \rho_i g\Omega$  y se particulariza para los datos del problema resulta

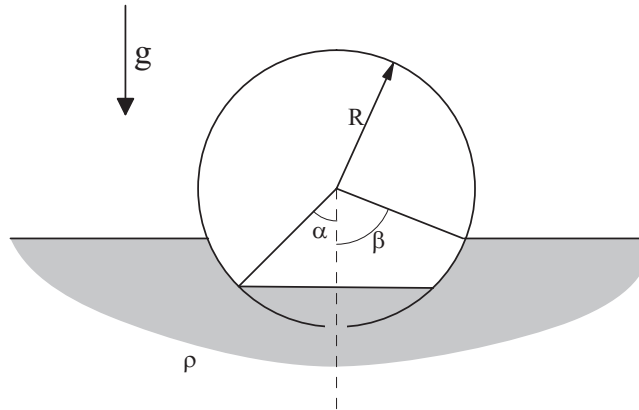
$$\frac{\Omega_1}{\Omega} \simeq \frac{W_g}{\rho\Omega g} + \frac{\rho_i - \rho_a}{\rho} \simeq 3 \cdot 10^{-5}, \quad (13)$$

que muestra sin ambigüedad que el globo considerado flota completamente sobre la superficie.

**Problema 2.3**

Una esfera de radio  $R$  y peso  $W$  contiene aire en su interior a la presión y temperatura ambiente y se comunica con el exterior por medio de un orificio. La esfera se introduce en agua con el orificio en su parte inferior como se indica en la figura. El agua penetra en el interior de la esfera comprimiendo el aire que hay en ella hasta que se alcanza el equilibrio mecánico. Debido a que el tiempo que tarda en penetrar el líquido en el interior es pequeño comparado con el tiempo necesario para que los efectos de conducción de calor en el aire sean importantes, el proceso de compresión del aire hasta que se alcanza el equilibrio mecánico puede considerarse isentrópico. Suponiendo que  $\rho_a \ll W/(g\pi R^3)$ , donde  $\rho_a$  es la densidad del aire ambiente, determinar:

1. Posición de equilibrio mecánico y presión y temperatura del aire en el interior de la esfera.
2. En la posición de equilibrio del apartado anterior la temperatura del aire es diferente de la del ambiente exterior; existe por tanto, una evolución posterior lenta hacia la posición final de equilibrio mecánico y térmico. Determinar esta nueva posición de equilibrio, así como la presión del aire en el interior de la esfera.
3. Si la esfera se depositase en la interfase aire-líquido con el orificio situado en la parte superior, de manera que no penetrase líquido en su interior ( $\alpha \equiv 0$ ), determinar el ángulo  $\beta$  que define la posición de equilibrio.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La posición de equilibrio del sistema está definida por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  de la figura; en particular el volumen del sector esférico correspondiente al ángulo  $\alpha$  determina también el volumen del gas interior y, mediante la condición isentrópica, su presión  $p_i$ . Dichos ángulos se determinarán aquí de dos formas diferentes que, naturalmente, conducen al mismo resultado: a) mediante aplicación directa del principio de Arquímedes para un cuerpo parcialmente sumergido entre dos fluidos y b) mediante la integración de la distribución de presiones sobre las superficies exterior e interior de la esfera y estableciendo entonces el balance de fuerzas sobre la misma. En ambos casos se necesitarán los volúmenes  $\Omega_\alpha$  y  $\Omega_\beta$  de los sectores esféricos determinados por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que pueden determinarse fácilmente a partir de

$$\Omega_\alpha = \int_0^{R \sin \alpha} 2\pi r dr \left( \sqrt{R^2 - r^2} - R \cos \alpha \right) = \pi R^3 \left( \frac{2}{3} + \frac{\cos^3 \alpha}{3} - \cos \alpha \right), \quad (1)$$

con una expresión análoga para  $\Omega_\beta$ .

## 28 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Como se discutió en el problema anterior, la condición  $\rho_a \ll W/(g\pi R^3)$  permite despreciar las variaciones de presión debidas a los efectos gravitatorios en el aire exterior (también en el interior) por lo que sus valores  $p_a$  y  $p_i$  pueden considerarse constantes. Si se desprecia, por tanto, el empuje de Arquímedes del aire exterior y se aplica el mismo, teniendo en cuenta que, en este caso, el peso del cuerpo soportado por el empuje de Arquímedes del líquido es el de la esfera más el del líquido contenido en su interior, se obtiene

$$W + \rho g \Omega_\alpha = \rho g \Omega_\beta, \quad (2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido. Por otra parte, la condición isentrópica es  $p_i = p_a(\rho_i/\rho_a)^\gamma$  y, puesto que la masa del gas contenida en el interior de la esfera es constante, la relación de densidades puede expresarse como la inversa de la relación de volúmenes y se tiene, por tanto,

$$p_i = p_a \left( \frac{4\pi R^3/3}{4\pi R^3/3 - \Omega_\alpha} \right)^\gamma; \quad (3)$$

la temperatura del aire interior se determina mediante la ecuación de estado de la forma

$$T_i = T_a \frac{p_i}{p_a} \frac{\rho_a}{\rho_i} = T_a \left( \frac{4\pi R^3/3}{4\pi R^3/3 - \Omega_\alpha} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}. \quad (4)$$

Finalmente, la condición que cierra el problema es que  $p_i$  es la presión en la superficie libre del líquido interior a la esfera; como la distribución de presiones en el líquido sólo depende de la coordenada vertical, debe verificarse que  $p_i = p_a + \rho g R(\cos \alpha - \cos \beta)$  donde  $p_a$  es la presión en la interfase exterior aire-líquido. Haciendo uso de este hecho y del resultado (1), las ecuaciones (2)-(3) pueden escribirse

$$W = \rho g \pi R^3 \left( \cos \alpha - \cos \beta + \frac{\cos^3 \beta - \cos^3 \alpha}{3} \right), \quad (5)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \frac{p_a}{\rho g R} \left( \frac{2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{2 + 3 \cos \alpha - \cos^3 \alpha} \right)^\gamma. \quad (6)$$

que constituyen un sistema no lineal de ecuaciones algébricas que debe resolverse numéricamente para determinar  $\alpha$  y  $\beta$ .

El resultado anterior también puede obtenerse integrando directamente las distribuciones de presiones en el gas y en el líquido sobre las superficies exterior e interior de la esfera. En efecto, si se toma un sistema de coordenadas esféricas con origen el centro de la esfera y con el ángulo polar,  $\theta$ , medido a partir del orificio, la distribución de presiones en el líquido está dada por  $p = p_a + \rho g R(\cos \theta - \cos \beta)$  por lo que la resultante de las fuerzas de presión del líquido sobre la esfera es

$$\mathbf{F}_l = - \int_\alpha^\beta 2\pi R^2 d\theta \sin \theta (-\cos \theta \mathbf{e}_z) [p_a + \rho g R(\cos \theta - \cos \beta)], \quad (7)$$

donde se ha tenido en cuenta que en el sector  $0 \leq \theta \leq \alpha$  las fuerzas de presión en la superficie exterior se cancelan con las de la interior y sólo se ha considerado la componente según  $z$  de la normal unitaria,  $n_z = -\cos \theta$ , puesto que el efecto de la componente horizontal se anula por simetría. Análogamente, la resultante de las fuerzas de presión del gas sobre la superficie exterior es

$$\mathbf{F}_a = - \int_\beta^\pi 2\pi R^2 d\theta \sin \theta (-\cos \theta \mathbf{e}_z) p_a, \quad (8)$$

y para la resultante sobre la superficie interior se obtiene, teniendo en cuenta que ahora  $\mathbf{n}$  apunta hacia el interior de la esfera ( $n_z = \cos \theta$ ),

$$\mathbf{F}_i = - \int_\alpha^\pi 2\pi R^2 d\theta \sin \theta (\cos \theta \mathbf{e}_z) p_i, \quad (9)$$

donde  $p_i = p_a + \rho g R(\cos \alpha - \cos \beta)$ . Sumando (7)-(9) y efectuando las integrales, todas ellas inmediatas, se obtiene la resultante de las fuerzas de presión sobre la esfera,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_i$ , como

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \pi \rho g R^3 (\cos \alpha - \cos \beta) (1 - \cos^2 \alpha) \mathbf{e}_z + 2\pi \rho g R^3 \mathbf{e}_z \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \cos \beta) = \\
&= \pi R^3 g \left( \cos \alpha - \cos \beta + \frac{\cos^3 \beta}{3} - \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right),
\end{aligned} \tag{10}$$

imponiendo el balance de fuerzas sobre la esfera  $\mathbf{F} - W\mathbf{e}_z = 0$  se obtiene de nuevo (5). Nótese que, en este caso, el empuje de Arquímedes está contenido en la expresión de  $\mathbf{F}$ .

### Apartado 2.-

Al final del proceso enunciado en el apartado 2, la temperatura interior,  $T_i$ , es igual a la del aire ambiente,  $T_a$ , luego la ecuación (6) debe sustituirse por la relación

$$\frac{p_i}{p_a} = \frac{\rho_i}{\rho_a} = \left( \frac{4\pi R^3/3}{4\pi R^3/3 - \Omega_\alpha} \right), \tag{11}$$

que, haciendo uso de la condición  $p_i = p_a + \rho g R (\cos \alpha - \cos \beta)$ , proporciona

$$\cos \alpha - \cos \beta = \frac{p_a}{\rho g R} \frac{2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha}{2 + 3 \cos \alpha - \cos^3 \alpha}. \tag{12}$$

Las ecuaciones (5) y (12) permiten determinar  $\alpha$  y  $\beta$  para la posición correspondiente al equilibrio mecánico y térmico.

### Apartado 3.-

Si la esfera se deposita sobre la interfase aire-líquido con el orificio situado en su parte superior, el interior de la esfera sólo contiene aire a la presión  $p_a$  y, por tanto, la resultante de las fuerzas de presión sobre el cuerpo es distinta de cero solamente en la porción de la superficie bañada por el líquido, que se denotará por  $\Sigma_\beta$ . Dicha fuerza puede calcularse como en el apartado 1, introduciendo un sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera y con el ángulo polar  $\theta$  medido desde el radio vertical inferior. En efecto, si  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria a  $\Sigma_\beta$  apuntando hacia el líquido, la fuerza del líquido sobre cada elemento de superficie es  $-p\mathbf{n}d\sigma$ , y la fuerza sobre el correspondiente elemento de superficie situado del lado del aire es  $-p_a(-\mathbf{n})d\sigma = p_a\mathbf{n}d\sigma$ ; por tanto, la resultante de las fuerzas de presión sobre la esfera es

$$\mathbf{F} = - \int_{\Sigma_\beta} (p - p_a) \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_\beta} \rho g (R \cos \beta + z) \mathbf{n} d\sigma, \tag{13}$$

donde se ha tenido en cuenta que la distribución de presiones en el líquido es  $p = p_a - \rho g (R \cos \beta + z)$ , donde el eje  $z$  apunta en sentido opuesto a la gravedad y tiene su origen en el centro de la esfera, por lo que la cota correspondiente a la interfase aire-líquido es  $-R \cos \beta$ . Puesto que sobre  $\Sigma_\beta$  se tiene  $z = -R \cos \theta$  y  $n_z = -\cos \theta$ , la segunda integral en (13) puede calcularse fácilmente como

$$\mathbf{F} = 2\pi R^3 \rho g \mathbf{e}_z \int_0^\beta \sin \theta \cos \theta (\cos \theta - \cos \beta) d\theta = \pi R^3 \rho g \mathbf{e}_z \left( \frac{2}{3} - \cos \beta + \frac{\cos^3 \beta}{3} \right). \tag{14}$$

El equilibrio de fuerzas sobre la esfera,  $\mathbf{F} - W\mathbf{e}_z = 0$ , determina entonces la ecuación algébrica para calcular  $\beta$  como función de  $W$  directamente de (14).

Obsérvese que, haciendo uso de la relación (1) con  $\beta$  en lugar de  $\alpha$ , la ecuación (14) puede escribirse también como

$$\mathbf{F} = \rho g \Omega_\beta \mathbf{e}_z, \tag{15}$$

donde  $\Omega_\beta$  es el volumen interior a la esfera sumergido en el líquido. Conviene indicar que el resultado (15) es independiente de la geometría de la superficie  $\Sigma_\beta$  (y, por tanto, de la del volumen sumergido  $\Omega_\beta$ ) y

### 30 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

puede obtenerse de una forma general aplicando el teorema de Gauss a la integral (13); obsérvese que este procedimiento resulta especialmente ventajoso cuando la geometría de  $\Sigma_\beta$  sea tan complicada que no sea posible llevar a cabo directamente la integral de superficie. En efecto, si se considera la superficie cerrada formada por  $\Sigma_\beta$  junto la sección  $\Sigma_h$  limitada por la curva que es intersectada en la superficie del cuerpo por el plano horizontal  $z = -R \cos \beta$  (plano de la interfase aire-líquido), y se tiene en cuenta que sobre  $\Sigma_h$  (de normal  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ ) el integrando de la segunda integral en (13) es nulo, (13) puede expresarse como

$$\mathbf{F} = - \int_{\Sigma_\beta + \Sigma_h} \rho g (R \cos \beta + z) \mathbf{n} d\sigma = \rho g \int_{\Omega_\beta} \nabla z d\varpi = \rho g \Omega_\beta \mathbf{e}_z. \quad (16)$$

La expresión (16) puede usarse, por ejemplo, para relacionar el empuje sobre el casco de una embarcación (independientemente de su forma) y el volumen sumergido del mismo; en equilibrio dicho empuje debe de igualar al peso de la embarcación (correspondiente al casco más la carga en su interior). Además, dicha expresión puede generalizarse para el caso en el que el peso del objeto es comparable al peso del aire (u otro fluido) contenido en el volumen sumergido. En efecto, tomando el origen del eje  $z$  en la interfase entre los dos fluidos, la distribución de presiones en el fluido inferior, cuya densidad se denotará por  $\rho_1$  está dada por  $p_1 = p(0) - \rho_1 g z$  y en el fluido superior, de densidad  $\rho_2$ , está dada por  $p_2 = p(0) - \rho_2 g z$ . Por tanto, la resultante de las fuerzas de presión sobre la superficie sumergida se obtiene directamente de (13) sustituyendo  $p$  por  $p_1$  y  $p_a$  por  $p_2$ ,

$$\mathbf{F} = - \int_{\Sigma_\beta} (p_1 - p_2) \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_\beta} (\rho_1 - \rho_2) g z \mathbf{n} d\sigma. \quad (17)$$

Introduciendo la superficie auxiliar  $\Sigma_h$  como se explicó anteriormente y aplicando el teorema de Gauss como en (16) se obtiene

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma_\beta + \Sigma_h} (\rho_1 - \rho_2) g z \mathbf{n} d\sigma = (\rho_1 - \rho_2) g \Omega_\beta \mathbf{e}_z. \quad (18)$$

Obsérvese que el efecto de las fuerzas de presión del fluido superior se reduce al peso del mismo contenido en el volumen sumergido,  $-\rho_2 g \Omega_\beta \mathbf{e}_z$ ; dicho peso es el que descansa sobre la cara interna de la superficie bañada por el líquido  $\Sigma_\beta$ . Si el peso del cuerpo es  $W$ , la condición de equilibrio general que se obtiene usando (18) es, por tanto,

$$W = (\rho_1 - \rho_2) g \Omega_\beta. \quad (19)$$

**Problema 2.4**

Considérese un recipiente parcialmente lleno con un volumen  $V$  de un líquido de densidad  $\rho$ ; el recipiente está abierto a la atmósfera por su parte superior, de forma que existe una interfase aire-líquido a presión  $p_a$ . Calcular la distribución fluidostática de presiones en el líquido en los casos siguientes:

1. Si el recipiente está en reposo en un sistema inercial en presencia de la gravedad.
2. Si al recipiente se le comunica una aceleración vertical variable con el tiempo  $a_o(t)$ .

Resolución:Apartado 1.-

Si el líquido se encuentra en reposo en un sistema inercial en presencia de la gravedad, la ecuación (2.5) indica que la superficie libre es horizontal (perpendicular a  $\mathbf{g}$ ); si  $O$  es el punto del fondo del recipiente donde la profundidad del líquido es máxima, de valor  $H_o$  conocido a partir de  $V$  y de la geometría del recipiente, y se toma un sistema de ejes cartesianos con origen  $O$  y el eje  $z$  apuntando en dirección contraria a  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = -gz$ , la distribución de presiones se obtiene de (2.5) como

$$p = p_a + \rho g(H_o - z), \quad (1)$$

donde se ha determinado la constante  $C$  imponiendo la condición  $p = p_a$  en  $z = H_o$ , lo que proporciona  $C = p_a + \rho g H_o$ .

Apartado 2.-

Si se imparte ahora al recipiente un movimiento de traslación en la dirección del eje  $z$  de aceleración conocida  $\mathbf{a}_o(t) = a_o(t)\mathbf{e}_z$ , el sistema de ejes del apartado anterior, ligado al recipiente, deja de ser inercial y la ecuación (2.5) proporciona, con  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_o(t) = z a_o(t)$ ,

$$p = p_a + \rho[g + a_o(t)](H_o - z), \quad (2)$$

donde  $C(t)$  se ha determinado imponiendo la condición de contorno  $[p(\mathbf{x}, t)]_{z=H_o} = p_a$  en (2.5), lo que proporciona ahora  $C(t) = p_a + \rho H_o[g + a_o(t)]$ . Obsérvese que en las superficies equipotenciales  $z = \text{constante}$  la presión es uniforme (superficies isobaras), pero su valor depende del tiempo si lo hace  $a_o$ ; además, la presión en dichas superficies es mayor que la correspondiente al caso puramente gravitatorio cuando el recipiente se acelera en dirección ascendente [ $a_o(t) > 0$ ], y menor cuando se decelera [ $a_o(t) < 0$ ]. La presión en el punto  $O$  es

$$p = p_a + \rho[g + a_o(t)]H_o; \quad (3)$$

si  $a_o(t) > 0$  se tiene en  $O$  la máxima presión mientras que es la presión mínima si  $a_o(t) < 0$ . En particular, si  $p_v$  es la presión de vapor del líquido a la temperatura  $T_a$  (despreciable generalmente frente a  $p_a$ ) y en algún instante la deceleración alcanza el valor

$$a_o(t) = -\frac{p_a + \rho g H_o - p_v}{\rho H_o} \simeq -\frac{p_a}{\rho H_o} - g, \quad (4)$$

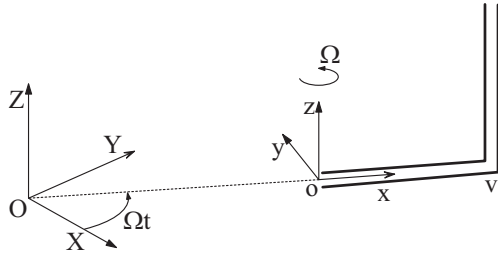
entonces el líquido se vaporiza (*cavita*) en el punto  $O$ , y aparece una burbuja de vapor que se extiende en el dominio fluido para valores mayores de la deceleración; se tiene, entonces, una región bifásica cuya distribución de presiones es distinta de la indicada en (4).



**Problema 2.5**

Un conducto de diámetro  $D$  contiene en su interior una porción de líquido de densidad  $\rho$  que ocupa un tramo del conducto de longitud  $L_s$ . El conducto tiene forma de L y tanto su tramo horizontal como el vertical tienen una longitud  $L > L_s$  ( $D \ll L$ ). Si en un instante dado, tal y como se muestra en la figura, el conducto comienza a girar con una velocidad angular  $\Omega$  alrededor de su extremo  $o$  de tal manera que su tramo horizontal permanece paralelo al eje  $z$  y la interfase del líquido más cercana a  $o$  se encuentra a una distancia  $x_f$  del mismo, calcular la aceleración respecto a un sistema de referencia inercial ( $O, X, Y, Z$ ) que debe adquirir el centro de rotación  $o$  para que el líquido permanezca en reposo respecto del conducto; considérese sólo la posibilidad de que el punto  $o$  se encuentre siempre sobre el plano  $X - Y$  ( $a_{oz} = 0$ ). En particular:

1. Calcule la aceleración del punto  $o$ ,  $a_o$  cuando  $x_f$  está en el rango  $0 \leq x_f \leq L - L_s$ , es decir, en una posición tal que todo el líquido se sitúe en el tramo horizontal.
2. Ídem para un valor de  $L - L_s < x_f < L$ , es decir, parte del líquido yace en el tramo vertical.
3. Trayectoria seguida por el conducto si inicialmente  $o$  coincide con  $O$ .

Resolución:

Para analizar el problema se considerarán dos sistemas de referencia: uno inercial ( $O, X, Y, Z$ ) respecto del cual describiremos la trayectoria del conducto, y un sistema de referencia no inercial ligado al conducto ( $o, x, y, z$ ) respecto del cual describirá el fluido. Puesto que ( $o, x, y, z$ ) gira con velocidad angular  $\Omega$  y su origen traslada con aceleración  $\mathbf{a}_o$  con respecto a ( $O, X, Y, Z$ ), el potencial de fuerzas másicas respecto al sistema no inercial resulta ser

$$U = a_{ox}x + a_{oy}y - gz - \frac{\Omega^2(x^2 + y^2)}{2} \simeq a_{ox}x - gz - \frac{\Omega^2 x^2}{2}, \quad (1)$$

donde se ha tenido en cuenta que, al ser  $D \ll L$ , se tiene  $y \ll x$  en todo el conducto. Obsérvese que el valor  $a_{oy}$  no contribuye al problema y, sin pérdida de generalidad, se tomará  $a_{oy} = 0$ . Esto implica que  $\mathbf{a}_o = a_o \mathbf{e}_x$  donde necesariamente  $a_o$  debe ser una constante puesto que el potencial  $U$  no puede depender del tiempo si se quiere mantener una situación de reposo (fluidostática). Respecto del sistema inercial  $\mathbf{a}_o$  varía con el tiempo al hacerlo  $\mathbf{e}_x$  debido a la rotación del conducto.

Dado el potencial (1), resulta de la relación fluidostática la distribución de presiones en el interior del líquido

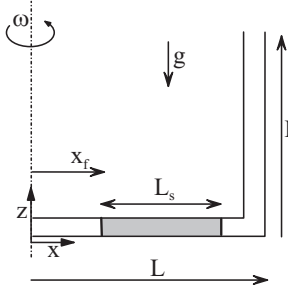
$$p + \rho gz + \rho a_o x - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x^2 + y^2) \simeq p + \rho gz + \rho a_o x - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x^2 = C. \quad (2)$$

La relación de  $a_o$  con  $\Omega$  y  $x_f$  se halla imponiendo en (2) la condición de contorno  $p = p_a$  en las dos interfases aire-líquido como se indica a continuación.

**Apartado 1.-**

En este caso todo el líquido está contenido en el tramo horizontal del conducto como se muestra en la figura, por lo que puede suponerse  $z \simeq 0$  en (2). Si dicha ecuación se particulariza en  $x = x_f$  se obtiene

$$C = p_a + \rho a_o x_f - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x_f^2. \quad (3)$$



Si (3) se sustituye en (2) y el resultado se particulariza en  $x = L_s + x_f$  se obtiene la ecuación

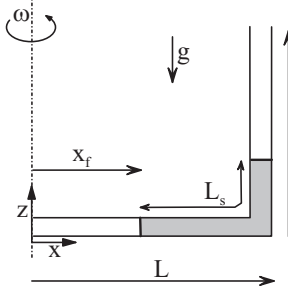
$$p_a + \rho a_o (L_s + x_f) - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (x_f + L_s)^2 = p_a + \rho a_o x_f - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x_f^2, \quad (4)$$

que permite obtener inmediatamente

$$a_o = (L_s + 2x_f) \frac{\Omega^2}{2}. \quad (5)$$

Obsérvese que en este caso, para mantener una misma posición de la interfase  $x_f$  con un aumento de la velocidad de giro se requeriría aumentar la aceleración  $a_o$  para contrarrestar apropiadamente las fuerzas centrífugas que tienden a alejar a la interfase del extremo  $o$ .

### Apartado 2.-



En este caso un tramo de líquido de longitud  $L_s - L + x_f$  se encuentra en el tramo vertical, y los efectos gravitatorios entran en juego. La condición de contorno en la interfase  $x = x_f$  es la misma que en el apartado anterior, por lo que el valor de  $C$  está dado de nuevo por (3). La ecuación (2) particularizada en la otra interfase,  $x = L$  y  $z = L_s - L + x_f$ , proporciona ahora

$$p_a + \rho g (L_s - L + x_f) + \rho a_o L - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 L^2 = p_a + \rho a_o x_f - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x_f^2, \quad (6)$$

de la que se obtiene

$$a_o = \frac{L + x_f}{2} \Omega^2 + g \left( 1 - \frac{L_s}{L - x_f} \right). \quad (7)$$

Obsérvese que dada una velocidad de giro sería posible una solución de equilibrio con  $a_o = 0$  para un cierto valor  $x_f = x_f^*$  dado por la raíz de la ecuación (7)

$$\frac{x_f^*}{L} = -\beta + \sqrt{(1 + \beta)^2 - 2\beta L_s/L} \quad (8)$$

siendo  $\beta = g/\Omega^2 L$ . Esta solución correspondería al equilibrio de las fuerzas centrífugas que aparecen en el tramo horizontal de líquido con las gravitatorias que actúan sobre el tramo vertical. Para valores de  $x_f > x_f^*$  el miembro derecho de (7) es menor que cero ( $a_o < 0$ ) indicando que las fuerzas de aceleración ayudan a las fuerzas centrífugas a equilibrar las gravitatorias; por contra, si  $a_o > 0$  son las fuerzas gravitatorias las que requieren la contribución de las fuerzas de aceleración para equilibrar las fuerzas centrífugas.

### Apartado 3.-

Una vez determinado  $a_o = a_o(\Omega, x_f)$ , la trayectoria del punto  $o$  se calcula a partir de la expresión de los vectores unitarios en el sistema  $(o, x, y, z)$  respecto a  $(O, X, Y, Z)$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \cos \Omega t \mathbf{e}_X + \sin \Omega t \mathbf{e}_Y \quad y \\ \mathbf{e}_y &= \sin \Omega t \mathbf{e}_X + \cos \Omega t \mathbf{e}_Y, \end{aligned} \quad (9)$$

se requiere pues que

$$\frac{d^2 \mathbf{X}_o}{dt^2} = \mathbf{a}_o = a_o (\cos \Omega t \mathbf{e}_X + \sin \Omega t \mathbf{e}_Y), \quad (10)$$

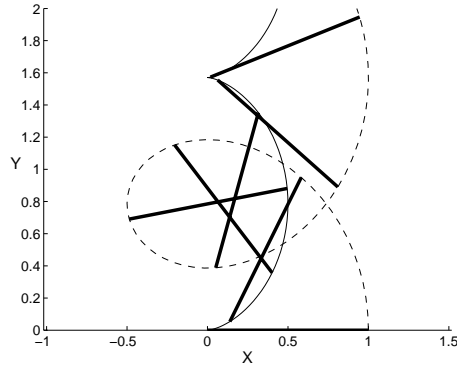
### 34 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

donde  $\mathbf{X}_o$  es la trayectoria seguida por el punto  $o$  origen del sistema de referencia. Teniendo en cuenta que en el instante inicial  $t = 0$ ,  $\mathbf{X}_o(0) = 0$  y  $\dot{\mathbf{X}}_o(0) = 0$ , la trayectoria seguida del punto  $o$  es

$$\mathbf{X}_o(t) = \frac{a_o}{\Omega^2} [(1 - \cos \Omega t) \mathbf{e}_X + (\Omega t - \sin \Omega t) \mathbf{e}_Y] , \quad (11)$$

mientras que la trayectoria seguida por el vértice  $v$  es

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_v(t) = \mathbf{X}_o(t) + L \mathbf{e}_x = \frac{a_o}{\Omega^2} [(1 - \cos \Omega t) \mathbf{e}_X + (\Omega t - \sin \Omega t) \mathbf{e}_Y] \\ + L(\cos \Omega t \mathbf{e}_X + \sin \Omega t \mathbf{e}_Y) . \end{aligned} \quad (12)$$

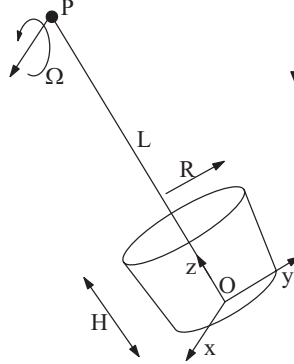


En la figura se muestra la trayectoria seguida por el punto  $o$  (línea continua) y el punto  $v$  (línea a trazos) así como la posición en diversos instantes del tramo horizontal del conducto (se han empleado los valores  $L = 1$ ,  $\Omega = 2$ ,  $a_o = 1$ ). Como se mostrará más claramente en el punto siguiente, fijar la trayectoria de equilibrio, es decir  $\Omega$  y  $a_o$ , equivale a establecer la posición de equilibrio  $x_f$  a la que se coloca la interfase en un conducto horizontal.

El problema considerado aquí es característico de los estudiados en el campo del “control”; disciplina que estudia como situaciones de equilibrio en principio inestables (una varilla dispuesta verticalmente sobre un dedo) se estabilizan mediante un movimiento del sistema, “ley de control”, adecuado (moviendo apropiadamente el dedo).

**Problema 2.6**

Un cubo cilíndrico de altura  $H$  y radio  $R$  ( $H \sim R$ ), que contiene un volumen  $V$  ( $V \sim \pi R^2 H$ ) de un líquido de densidad  $\rho$ , está provisto de un asa conectada mediante una cuerda a un punto  $P$  situado a una distancia  $L > H$  del centro de la base del cubo,  $O$ . El conjunto cuerda-asa-cubo gira como un sólido rígido alrededor de  $P$  con velocidad angular  $\Omega$  y con la recta  $OP$  contenida en un plano vertical fijo. Se desea analizar la posibilidad de que el líquido esté en equilibrio respecto al cubo. Indicar las condiciones que deben cumplir los parámetros del problema para que el régimen fluidostático pueda darse de forma aproximada. Calcular, entonces, la ecuación de la superficie libre del líquido en el interior del recipiente.

**Resolución:**

Para analizar el problema se tomará un sistema de ejes ligados al cubo con origen en  $O$  y con el eje  $z$  apuntando hacia  $P$ , el eje  $y$  se toma perpendicular al eje  $z$  y contenido, junto con éste, en el plano vertical de giro, y el eje  $x$  se toma perpendicular a dicho plano de manera que  $\Omega = \Omega \mathbf{e}_x$ . En la posición más baja del cubo en su movimiento el eje  $z$  es colineal con el vector gravedad  $\mathbf{g}$  y apunta en la dirección contraria al mismo de modo que las componentes de  $\mathbf{g}$  según los ejes  $z$  e  $y$  varían con el tiempo de la forma

$$\mathbf{g} = -g \cos \Omega t \mathbf{e}_z + g \sin \Omega t \mathbf{e}_y. \quad (1)$$

Por otra parte, la aceleración del origen del sistema de referencia es centrípeta y de valor

$$\mathbf{a}_o = -\Omega^2 L \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

y, además, se tiene

$$\Omega \times \mathbf{x} = \Omega \mathbf{e}_x \times (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) = \Omega (y \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_y), \quad (3)$$

por lo que el potencial de fuerzas másicas viene dado a partir de (2.1) como

$$U = gz \cos \Omega t - gy \sin \Omega t + \Omega^2 L z - \frac{1}{2} \Omega^2 (z^2 + y^2). \quad (4)$$

Por tanto,  $U$  depende del tiempo y también lo hacen, en este caso, las superficies equipotenciales; puesto que en fluidostática toda superficie libre isobara debe de ser también equipotencial, resulta que el líquido en el cubo no puede alcanzar una situación de reposo respecto de éste ya que, de otra forma, se llega a la contradicción de que su superficie libre debe de variar con el tiempo cuando se expresa en ejes ligados al cubo, lo que requiere necesariamente velocidades no nulas respecto del recipiente. No obstante, en la práctica se observa frecuentemente que dichas velocidades, inducidas por el desequilibrio entre las fuerzas de gravedad y las no inerciales, son tan pequeñas que el líquido permanece siempre en el interior del recipiente al no tener

### 36 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

tiempo para salir del mismo antes de que se complete una vuelta alrededor de  $P$ . En particular, esto sucede cuando los efectos gravitatorios en (4) son muy pequeños frente a los efectos centrífugos asociados al giro alrededor de  $P$ ; la condición para ello se obtiene al comparar los términos gravitatorios con el tercer término en (4), que proporciona

$$\frac{gz \cos \Omega t}{\Omega^2 L z} \sim \frac{g}{\Omega^2 L} \ll 1, \quad (5)$$

donde se ha tenido en cuenta que las longitudes características en las tres direcciones espaciales son del mismo orden de magnitud en el líquido,  $H \sim z \sim y \sim x \sim R$  [por lo que los dos términos gravitatorios en (4) son también del mismo orden] y, además, se considerará sólo el caso más realista de que  $H$  y  $R$  sean a lo sumo del orden de  $L$  [por lo que el último término de (4) es a lo sumo comparable al tercero]. Bajo la condición (5) los efectos gravitatorios pueden despreciarse en (4) y  $U$  resulta independiente del tiempo en primera aproximación. Puede alcanzarse entonces un régimen aproximadamente fluidostático con una distribución de presiones dada por

$$p + \Omega^2 L z - \frac{1}{2} \Omega^2 (z^2 + y^2) = C, \quad (6)$$

que muestra que las superficies isobaras (y equipotenciales) son cilíndricas de generatrices paralelas al eje  $x$ . Si  $z_o$  es la coordenada  $z$  del punto de la superficie libre con coordenadas  $x = 0$  e  $y = 0$ , la constante en (6) es  $C = p_a + \Omega^2 z_o(2L - z_o)/2$ , y la ecuación de la superficie libre se obtiene haciendo en (6)  $p = p_a$  y  $z = z_s(y)$ ,

$$z_s = L \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2 - z_o^2 + 2Lz_o}{L^2}} \right). \quad (7)$$

La constante  $z_o$  se determina a partir del volumen  $V$  de líquido dado como

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} z_s(r, \theta) r dr d\theta, \quad (8)$$

donde  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas polares en el plano  $z = 0$  y  $z_s(r, \theta)$  se obtiene haciendo  $y = r \sin \theta$  en (7). Resulta de interés analizar el caso particular en que el cubo esté unido al centro de rotación mediante una cuerda muy larga,  $L \gg R \sim H$ , que permite desarrollar la raíz en (7) en serie de Taylor [ $\sqrt{1 - \epsilon} \simeq 1 - \epsilon/2 + O(\epsilon^2)$  para  $\epsilon \ll 1$ ] y obtener (7)

$$z_s \simeq z_o + \frac{y^2 - z_o^2}{2L}, \quad (9)$$

donde el segundo término de (9) es pequeño frente al primero, por lo que la interfase es plana en primera aproximación,  $z_s \simeq z_o$ , con una corrección parabólica de orden  $z_o/L \sim H/L \ll 1$  comparado con  $z_o$ .<sup>2</sup> La integral (8) puede ahora llevarse a cabo analíticamente y proporciona

$$V \simeq \pi R^2 z_o [1 - z_o/(2L)] + \frac{\pi R^4}{8L}, \quad (10)$$

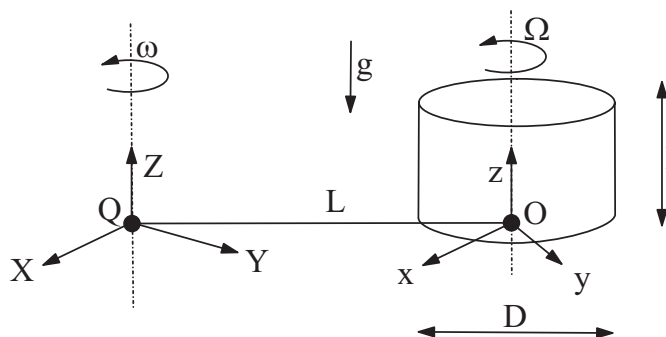
por lo que, en primera aproximación,  $z_s \simeq z_o = V/A$ . Finalmente, conviene indicar que el análisis y los resultados anteriores [excepto (10)] permanecen válidos para cualquier forma de la sección transversal del cubo distinta de la circular siendo, en este caso,  $R$  una dimensión característica de la sección y  $H$  una profundidad característica del líquido en el recipiente.

<sup>2</sup> Las correcciones retenidas en (9)-(10) sólo tienen sentido si se supone que los errores cometidos al despreciar los términos gravitatorios son todavía mucho menores que  $H/L$ , esto es, si  $g/(L\Omega^2) \ll H/L \ll 1$ . En caso contrario, (9) y (10) sólo proporcionan correctamente la primera aproximación:  $z_s \simeq z_o \simeq V/A$  para  $H \ll L$ , siendo  $A$  la sección del cubo; el cálculo de una aproximación de mayor orden es complicado y no puede calcularse por fluidostática, sino que es necesario tener en cuenta las (pequeñas) velocidades inducidas por el desequilibrio entre las fuerzas gravitatorias y las no inerciales.

**Problema 2.7**

Un recipiente cilíndrico vertical de altura  $H$  y diámetro  $D$  contiene un volumen  $V$  de un líquido de densidad  $\rho$  y tiene su sección superior abierta a la atmósfera, a presión  $p_a$ , mientras que su base se apoya en un plano horizontal sobre el que puede deslizarse libremente. El recipiente gira en torno a su eje con velocidad angular  $\Omega$  y el centro de su base describe en el plano horizontal un movimiento circular de radio  $L$  con velocidad angular uniforme  $\omega$ . Suponiendo en lo que sigue que  $H$  es lo suficientemente grande como para que el líquido no rebose, se pide:

1. Valor de  $\omega$  para que el líquido pueda alcanzar un estado de reposo respecto del recipiente (régimen fluidostático). Dicho valor es el que se tomará para los apartados que siguen.
2. Ecuación de la superficie libre del líquido en régimen fluidostático. Indique el mínimo valor de  $\Omega$ ,  $\Omega^*$ , para que la superficie libre toque el fondo del recipiente.
3. Para cualquier valor dado  $\Omega > \Omega^*$  existe una configuración fluidostática en la que la superficie libre se repliega sobre las paredes dejando descubierta una cierta región de la base del recipiente: calcúlese la ecuación que define el contorno de dicha zona.

**Resolución:**

Se tomarán unos ejes  $(O, x, y, z)$  ligados al recipiente con origen  $O$  en el centro de la base y tales que el eje  $z$  coincide con el eje del recipiente y apunta en dirección contraria a la de la gravedad, y los ejes  $x$  e  $y$  están situados sobre la base y se mueven solidariamente con ella. Asimismo es útil considerar un sistema de ejes fijos  $(Q, X, Y, Z)$  ligados al plano horizontal cuyo origen  $Q$  es el centro de la circunferencia descrita por  $O$ , el eje  $Z$  es paralelo a  $z$ , y los ejes  $X$  e  $Y$  tales que coinciden con  $x$  e  $y$  en un cierto instante inicial  $t = 0$ . Se demostrará que, excepto para un valor de  $\omega$ , la dirección del vector fuerzas másicas varía con el tiempo en el sistema  $(O, x, y, z)$  y, por tanto, no puede haber fluidostática. De otra forma, al ser la superficie libre del líquido isobara, también debe ser equipotencial o, lo que es lo mismo, perpendicular en cada punto al vector de fuerzas másicas, de lo que se deduce que si el vector fuerzas másicas varía con el tiempo en  $(O, x, y, z)$ , la ecuación de la superficie libre debe depender también del tiempo en dicho sistema de referencia,  $f(x, y, z, t) = 0$ , y no puede estar en reposo puesto que debe verificar la ecuación de una superficie fluida,  $f_t + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0$ , lo que implica  $\mathbf{v} \neq 0$  si  $f_t \neq 0$ .

**Apartado 1.-**

Puesto que los ejes  $x$  e  $y$  giran con velocidad angular  $\Omega$  respecto a los ejes  $X$  e  $Y$  manteniéndose en el plano de éstos, la relación entre sus versores está dada por

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_X \cos \Omega t + \mathbf{e}_Y \sin \Omega t, \quad \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_X \sin \Omega t + \mathbf{e}_Y \cos \Omega t. \quad (1)$$

### 38 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

La aceleración del punto  $O$ ,  $\mathbf{a}_o$ , es la centrípeta correspondiente al movimiento circular alrededor de  $Q$  y está dada por

$$\mathbf{a}_o = -\omega^2 L \mathbf{e}_X \cos \omega t - \omega^2 L \mathbf{e}_Y \sin \omega t, \quad (2)$$

que, haciendo uso de (1), puede expresarse también en términos de los versores  $\mathbf{e}_x$  y  $\mathbf{e}_y$  como

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y = -\omega^2 L [\mathbf{e}_x \cos(\Omega - \omega)t + \mathbf{e}_y \sin(\Omega - \omega)t]. \quad (3)$$

Además, si  $(r, \theta)$  son las coordenadas polares en el plano  $(x, y)$  y  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta$  es el vector unitario radial en dicho plano, las fuerzas centrífugas están dadas por  $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) = -\Omega^2 r \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r) = \Omega^2 r \mathbf{e}_r$ . El vector de fuerzas másicas en términos de los versores del sistema  $(O, x, y, z)$  es, por tanto,

$$\mathbf{f}_m = -g \mathbf{e}_z + \omega^2 L [\mathbf{e}_x \cos(\Omega - \omega)t + \mathbf{e}_y \sin(\Omega - \omega)t] + \Omega^2 r \mathbf{e}_r, \quad (4)$$

y el potencial de fuerzas másicas correspondiente es

$$U = gz - \omega^2 L [x \cos(\Omega - \omega)t + y \sin(\Omega - \omega)t] - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2. \quad (5)$$

Obsérvese que en el sistema de referencia ligado al recipiente las fuerzas másicas variarán con el tiempo salvo para el caso

$$\omega = \Omega, \quad (6)$$

que es el valor pedido. Sólo para dicho valor puede darse una situación fluidostática en el recipiente puesto que, en este caso, la velocidad angular del punto  $O$  es la misma que la del recipiente y la dirección de la aceleración centrípeta coincide siempre con la de  $-\mathbf{e}_x$  como se deduce de (3), lo que proporciona  $\mathbf{a}_o = -\omega^2 L \mathbf{e}_x$ .

#### Apartado 2.-

Para  $\omega = \Omega$  la distribución de presiones en el líquido está dada por

$$p + \rho g z - \rho \Omega^2 L r \cos \theta - \rho \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 = C, \quad (7)$$

donde se han usado coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  en el sistema de referencia ligado al recipiente. Particularizando (7) para la superficie libre  $z = z_s(r, \theta)$ , donde  $p = p_a$ , se obtiene

$$z_s = h_o + \frac{\Omega^2 L}{g} r \cos \theta + \frac{\Omega^2}{2g} r^2, \quad (8)$$

donde  $h_o$  es la altura de la superficie libre sobre el centro de la base del cilindro, y se ha expresado la constante en (7) en función del valor del primer miembro en el punto  $(r = 0, z = h_o)$ ,  $C = p_a + \rho g h_o$ . La altura  $h_o$  puede relacionarse mediante (8) con el volumen  $V$  (conocido) de líquido en el recipiente

$$V = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} z_s r dr d\theta = \pi R^2 h_o + \frac{\pi \Omega^2 R^4}{4g}; \quad (9)$$

obsérvese que  $h_o$  es independiente de la aceleración (centrípeta) del movimiento del origen de coordenadas  $O$ , cuyo efecto es variar las cotas de los puntos de la superficie de forma lineal y antisimétrica respecto del plano  $x = 0$ .

La máxima cota alcanzada por la superficie libre se obtiene en (8) para  $r = R$  y  $\theta = 0$ , que corresponde al punto de la superficie libre más alejado del eje alrededor del cual gira el centro de la base; su valor es

$$z_{smax} = \frac{V}{\pi R^2} + \frac{\Omega^2 L}{g} R + \frac{\Omega^2}{4g} R^2, \quad (10)$$

donde se ha sustituido el valor de  $h_o$  obtenido de (9); naturalmente, para que el líquido no rebose del recipiente se debe cumplir la desigualdad  $z_{smax} < H$ .

**Apartado 3.-**

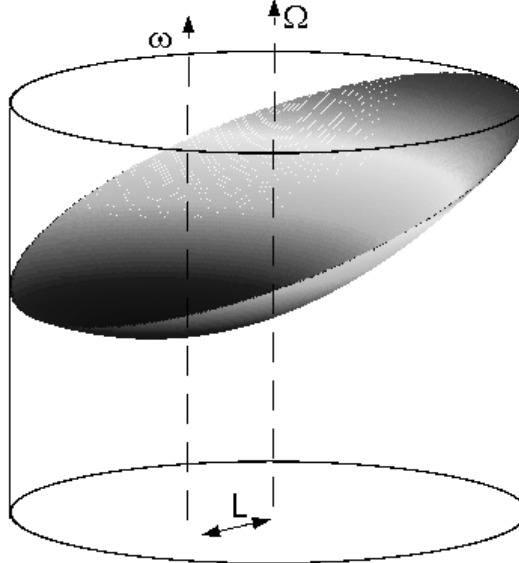
Es fácil ver que la función  $z_s(r, \theta)$  dada por la ecuación (8) tiene un mínimo absoluto para  $\theta = \pi$  y  $r = L$ . Por tanto, y siempre que  $\Omega$  se mantenga por debajo de un valor crítico,  $\Omega^*$  que se calculará posteriormente, el mínimo valor de la altura del líquido en el recipiente  $z_{smin}$  se tiene para un punto interior situado sobre el eje giratorio del plano horizontal  $\theta = \pi$  y  $r = L$  siempre que  $L < R$ . En el caso  $L > R$ , ese mínimo, que no coincide con el mínimo absoluto de la función  $z_s(r, \theta)$ , se localiza en la frontera del recipiente,  $r = R$  y  $\theta = \pi$ . Por tanto se tendrá

$$z_{smin}(L) = \begin{cases} h_o - \frac{\Omega^2}{2g} L^2 & \text{si } 0 \leq L \leq R \\ h_o - \frac{\Omega^2 L}{g} R + \frac{\Omega^2}{2g} R^2 & \text{si } L > R. \end{cases} \quad (11)$$

El valor mínimo de  $\Omega$  para que la superficie libre toque el fondo del recipiente se obtiene despejando  $h_o$  de (9) y sustituyendo su valor en (11) con  $z_{smin} = 0$ , lo que implica que la superficie libre sólo contacta con la base del recipiente en un punto. Por tanto,

$$\Omega^*(L) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4gV}{\pi R^2(R^2 + 2L^2)}} & \text{si } 0 \leq L \leq R \\ \sqrt{\frac{4gV}{\pi R^2(4LR - R^2)}} & \text{si } L > R. \end{cases} \quad (12)$$

La figura muestra la forma que adquiere la superficie libre para un caso concreto con  $L < R$  y  $\Omega < \Omega^*(L)$ .



Se puede observar que el valor mínimo de la altura del líquido en el recipiente se tiene para el punto interior situado sobre el eje del plano giratorio cuya posición viene dada por  $\theta = \pi$  y  $r = L < R$ . Para  $\Omega > \Omega^*$  la ecuación (11) proporciona  $z_{smin} < 0$ , que significa que la superficie libre intersecta el fondo del recipiente según una curva cuyo interior se encuentra vacío de líquido. La ecuación de dicha curva se obtiene haciendo  $z_s = 0$  en (8), lo que proporciona

$$r(\theta) = \left[ \sqrt{L^2 \cos^2 \theta + \frac{2h_o g}{\Omega^2}} - L \cos \theta \right]. \quad (13)$$



## 40 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

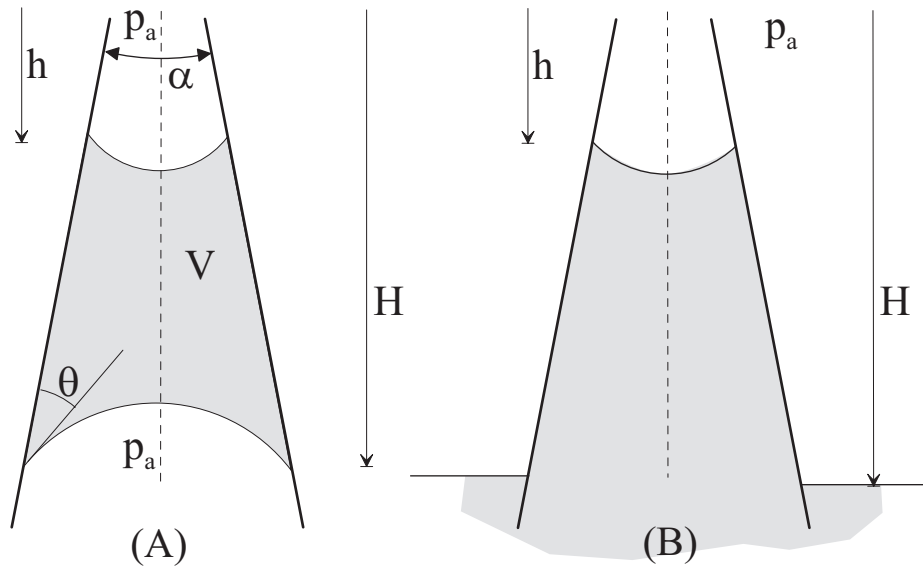
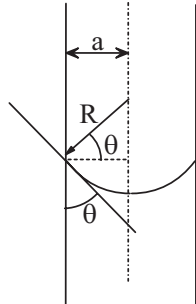
Obsérvese que en el caso de que el recipiente sólo efectúe un movimiento de rotación en torno a su eje,  $L$  desaparece de (13) al no haber aceleración del origen de coordenadas y la curva es una circunferencia de radio

$$r = \sqrt{\frac{2h_0g}{\Omega^2}}.$$

**Problema 2.8**

Un volumen  $V$  de líquido de densidad  $\rho$  se mantiene en equilibrio en un tubo cónico de sección lentamente variable  $\alpha \ll \theta$  y longitud mucho mayor que su radio, bajo la acción simultánea de las fuerzas gravitatorias y de tensión superficial [ $\zeta$  es la tensión superficial líquido-aire y  $\theta < \pi/2$  ( $\alpha \ll \theta$ ) el ángulo de contacto de la superficie libre del líquido con el sólido], véase figura adjunta. En las superficies libres del líquido se suponen dominantes las fuerzas de tensión superficial (número de Bond  $\rho g R^2 / \zeta \ll 1$ ), donde  $R$  es el radio característico del tubo. Se pide:

1. Calcular las cotas inferior y superior de la superficie libre del líquido en el tubo,  $H$  y  $h$ , como función de  $V$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ ,  $\rho$  y  $g$ .
2. Calcular la cota  $h$  a la que se sitúa un fluido si se sumerge en un embalse situando el vértice del cono a una altura  $H$  de la superficie de dicho embalse.

Resolución:

En la literatura se denomina menisco a la interfase formada por dos fluidos inmiscibles que en el caso de tensión superficial dominante es esférica. Aun siendo esférica, para determinar exactamente la forma se requiere conocer el ángulo de contacto que forma el fluido con el sólido  $\theta$ . El ángulo de contacto  $\theta$  depende de la tensión superficial líquido-aire, de la del líquido-sólido y de la del sólido-gas y su evaluación ha de ser experimental. Si  $\theta < \pi/2$  se dice que el líquido moja (caso del agua sobre vidrio) mientras que si  $\theta > \pi/2$  el líquido no moja (caso del mercurio sobre vidrio).

La simplicidad de la geometría que surge en el caso de un menisco esférico de ángulo de contacto conocido  $\theta$  permite calcular fácilmente el salto de presiones a través de la interfase inscrita en un tubo capilar de radio  $a$  como el mostrado en la figura mediante la ecuación de Laplace-Young,

$$\Delta p = p_g - p_l = \zeta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\zeta}{R} = \frac{2\zeta \cos \theta}{a}$$

## 42 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

donde  $p_g = p_a$  es la presión del ambiente,  $p_l$  es la presión del líquido justo por debajo de la interfase y  $a$  es el diámetro del capilar.

### Apartado 1.-

Considerando ahora el problema del enunciado, las dos interfases líquido-aire son de curvatura constante, o esféricas, por lo que al ser la presión del aire,  $p_a$ , uniforme, la ecuación de Laplace Young nos lleva a concluir que las presiones del líquido en ambas interfases,  $p_H$  (presión en la parte inferior) y  $p_h$  (presión en la superior), son también uniformes.

Para calcular estas presiones, se hará uso de que el cono es lentamente variable, lo que implica que pueda considerarse que cada interfase se sitúa en un capilar cilíndrico de radio  $R_H$  y  $R_h$ , respectivamente; siendo  $R_h = h \tan(\alpha/2)$  y  $R_H = H \tan(\alpha/2)$ . Por tanto se tiene

$$p_H = p_a - \frac{2\zeta \cos \theta}{R_H} \quad \text{y} \quad p_h = p_a - \frac{2\zeta \cos \theta}{R_h}. \quad (1)$$

Por otro lado, en el líquido la distribución de presiones viene dada por la fluidostática lo que proporciona la relación

$$p_H - \rho g H = p_h - \rho g h. \quad (2)$$

Eliminando todas las presiones en (1) y (2) se obtiene la siguiente relación de equilibrio entre las cotas a las que se sitúan los meniscos,

$$\rho g (H - h) = 2\zeta \frac{\cos \theta}{\tan(\alpha/2)} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{H} \right) \Rightarrow Hh = 2 \frac{\zeta}{\rho g \tan(\alpha/2)} \cos \theta. \quad (3)$$

Además se necesita otra ecuación para cerrar el problema; para ello se hará uso de la condición de conservación del volumen de líquido; éste se puede aproximar por el de una sección cónica:

$$V = \pi \left[ \frac{H^3}{3} - \frac{h^3}{3} \right] \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) proporcionan una pareja de ecuaciones para el cálculo de las cotas inferior y superior,  $h$  y  $H$ , del líquido en el tubo cónico. Ambas ecuaciones pueden combinarse para obtener una ecuación cuadrática,

$$\left. \begin{array}{l} Hh = A \\ H^3 - h^3 = B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{A^3}{h^3} - h^3 = B \Rightarrow (h^3)^2 + B(h^3) - A = 0, \quad (5)$$

cuya solución es

$$h = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left( -B + \sqrt{B^2 + 4A} \right)^{1/3}$$

siendo

$$A = \frac{2\zeta}{\rho g \tan(\alpha/2)} \cos \theta \quad \text{y} \quad B = \frac{3\pi V}{\tan^2(\alpha/2)}. \quad (6)$$

### Apartado 2.-

La presión en el líquido bajo el menisco viene dado por la ecuación (1)

$$p_h = p_a - \frac{2\zeta \cos \theta}{R_h}, \quad (7)$$

siendo  $R_h = h \tan(\alpha/2)$ . De las condiciones en el menisco ( $p = p_h$  en  $z = H - h$ ) y en la superficie del embalse ( $p = p_a$  en  $z = 0$ ) se obtiene

$$p + \rho g z = cte = p_h + \rho g (H - h) = p_a, \quad (8)$$

que combinadas resultan en la ecuación

$$H - h = \frac{2\zeta \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{h \tan(\alpha/2)}, \quad (9)$$

o en

$$h^2 - hH + \frac{2\zeta \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{\tan(\alpha/2)} = 0. \quad (10)$$

De las dos posibles soluciones matemáticas de la ecuación anterior, la única que tiene sentido físico es

$$h = \frac{H + \sqrt{H^2 - 8\zeta \cos \theta / [\rho g \tan(\alpha/2)]}}{2} \Rightarrow H - h = \frac{H}{2} - \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - \frac{2\zeta \cos \theta}{\rho g \tan(\alpha/2)}}. \quad (11)$$

Obsérvese que la ecuación (11) es válida tanto cuando el líquido asciende por el cono  $H > h$  situación que corresponde a  $\theta < \pi/2 \equiv \cos \theta < 0$  como cuando desciende por debajo del nivel del embalse  $H < h$  ( $\theta > \pi/2 \equiv \cos \theta > 0$ ). Además, para que el problema tenga una solución hidrostática real los datos del problema deben verificar

$$H^2 > \frac{8\zeta \cos \theta}{\rho g \tan(\alpha/2)}. \quad (12)$$

Esto siempre se verifica si  $\theta > \pi/2$  por lo que siempre que el líquido no moje al sólido, el menisco se hundirá por debajo del nivel de la superficie. En el caso contrario,  $\theta < \pi/2$ , hay una altura mínima  $H_{min}$  donde hay que situar el vértice del cono para que el menisco ascienda por encima del nivel del embalse; su valor es

$$H_{min} = \sqrt{\frac{8\zeta \cos \theta}{\rho g \tan(\alpha/2)}}. \quad (13)$$

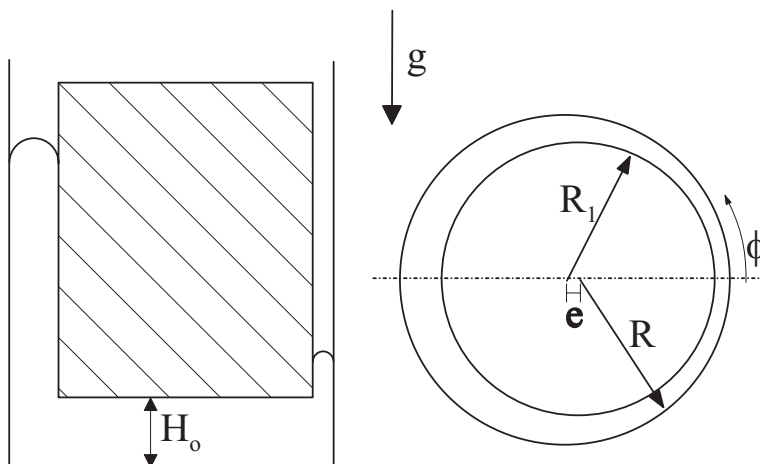
**Problema 2.9**

Un depósito cilíndrico de radio  $R$ , contiene un volumen  $V$  de líquido. En el depósito se introduce una pieza también cilíndrica de radio  $R_1$  ( $R_1 < R$ ) y peso  $W$  que desplaza parte del líquido haciendo ascender, por la ranura existente entre depósito y pieza, hasta que alcanza el equilibrio. Depósito y pieza están situados en posición excéntrica y con sus ejes paralelos; su excentricidad es  $e < (R - R_1)$ .

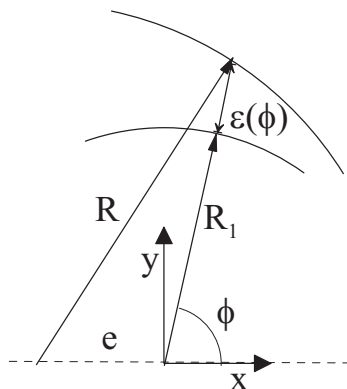
Suponiendo que  $(R - R_1)/R \sim e/R \ll 1$ , que los efectos de tensión superficial son dominantes y que el ángulo de contacto es de  $180^\circ$ , se pide:

1. Altura de la superficie libre del líquido  $h_1(\phi)$  medida desde el fondo del depósito. El ángulo se mide desde donde la separación entre las paredes laterales del depósito y pieza es mínima.
2. Momento que ha de aplicarse a la pieza para que se mantenga en posición vertical.

Supóngase en el análisis que el líquido no se desborda.



Resolución:



Para la resolución del problema es preciso hallar la expresión del juego  $\epsilon(\phi)$  entre ambos cilindros. Tal y como se observa en la figura se debe cumplir la relación

$$R^2 = [(R_1 + \epsilon(\phi)) \sin \phi]^2 + [(R_1 + \epsilon(\phi)) \cos \phi + e]^2 \quad (1)$$

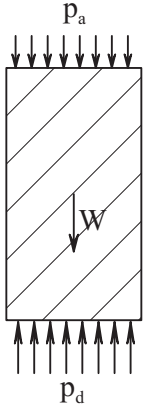
y

$$\epsilon(\phi) = -R_1 - e \cos \phi \pm \sqrt{R^2 - e^2 \cos^2 \phi} \quad (2)$$

Es posible simplificar la expresión (2) desarrollando la raíz cuadrada en serie de Taylor, haciendo uso de que  $e/R \sim (R - R_1)/R \ll 1$ . Se obtiene así

$$\epsilon(\phi, e) = \epsilon(\phi, e = 0) + \left. \frac{d\epsilon}{de} \right|_{e=0} e + \dots = (R - R_1) - e \cos \phi, \quad (3)$$

donde se ha seleccionado el signo  $+$  en la expresión (2) por ser el único que tiene sentido físico.



Estableciendo el equilibrio de fuerzas que actúan sobre la pieza cilíndrica, donde la fuerza  $p_a \pi R_1^2$  que realiza el ambiente sobre la superficie superior de la pieza a la que se añade su peso  $W$  deben ser contrarrestadas por la fuerza  $p_d \pi R_1^2$  que realiza el líquido sobre la superficie inferior de la pieza, se obtiene

$$p_d \pi R_1^2 = p_a \pi R_1^2 + W \quad (4)$$

con  $p_d$  es la presión del líquido justo debajo de la pieza.

Por otra parte, la distribución de presiones en el líquido viene dada por la ecuación de la hidrostática

$$p_e + \rho g h_1(\phi) = p_d + \rho g H_o, \quad (5)$$

donde  $p_e$ , que es la presión del líquido en la interfase, se obtiene haciendo uso de la ecuación de Laplace-Young, (2.6),

$$p_e - p_a = \frac{4\zeta}{\epsilon(\phi)}; \quad (6)$$

obsérvese que en este caso el líquido no moja (el ángulo de contacto es mayor que  $\pi/2$ ) y por tanto  $p_e > p_a$ .

Para hallar la expresión de la altura de la interfase  $h_1(\phi)$  se combinan (4), (5) y (6),

$$h_1(\phi) = H_o + \frac{W}{\rho g \pi R_1^2} - \frac{4\zeta}{\rho g \epsilon(\phi)} \quad (7)$$

donde la altura  $H_o$  no es conocida y se determina imponiendo la conservación del volumen,

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 H_o + \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_1+\epsilon(\phi)} (h_1(\phi) - H_o) r dr d\phi \\ &= \pi R^2 H_o + \int_0^{2\pi} \frac{h_1(\phi) - H_o}{2} (2R_1\epsilon(\phi) + \epsilon^2(\phi)) d\phi \\ &\simeq \pi R^2 H_o + \int_0^{2\pi} (h_1(\phi) - H_o) R_1 \epsilon(\phi) d\phi = \pi R^2 H_o - \frac{8\pi\zeta R_1}{\rho g} + \frac{2W(R - R_1)}{\rho g R_1}; \end{aligned} \quad (8)$$

en el cálculo de la integral anterior se ha hecho uso de  $\epsilon \ll R_1$ .

Para mantener el cilindro en posición vertical se debe aplicar un momento que contrarreste al momento creado por las fuerzas de presión que actúan sobre la superficie del cilindro, esto es,

$$M = \int_A (z - H_o) \mathbf{e}_z \times p(z, \phi) \mathbf{n} d\Sigma, \quad (9)$$

donde el momento se toma respecto al centro de la pieza cilíndrica en su base. Utilizando por mayor comodidad las expresiones  $h_1(\phi) = a - b/\epsilon(\phi)$  donde  $a = W/(g\rho\pi R_1^2)$  y  $b = 4\zeta/(\rho g)$  en la integral (9) se obtiene

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_{H_o}^{H_o+h_1(\phi)} [p_d + \rho g(H_o - z)] (z - H_o) \mathbf{e}_z \times (\sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \phi \mathbf{e}_x) R_1 d\phi dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( p_d \frac{h_1^2(\phi)}{2} - \rho g \frac{h_1^3(\phi)}{3} \right) (\cos \phi \mathbf{e}_y - \sin \phi \mathbf{e}_x) R_1 d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ a^2 \left( \frac{p_d}{2} - \frac{\rho g a}{3} \right) - \frac{ab}{\epsilon(\phi)} (p_d - \rho g a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b^2}{\epsilon^2(\phi)} \left( \frac{p_d}{2} - \rho g a \right) - \frac{\rho g b^3}{3\epsilon^3(\phi)} \right] (\cos \phi \mathbf{e}_y - \sin \phi \mathbf{e}_x) d\phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente, la integral anterior se puede aproximar por

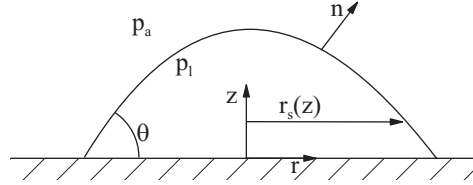
$$M = - \int_0^{2\pi} \frac{\rho g b^3}{3\epsilon^3(\phi)} \cos \phi \mathbf{e}_y d\phi = - \int_0^{2\pi} \frac{\rho g b^3 \cos \phi \mathbf{e}_y}{3(R - R_1 - e \cos \phi)^3} d\phi; \quad (11)$$

obsérvese que, en este caso, la simetría de la distribución de presiones con respecto al eje  $x$  da lugar a que el vector de momentos no tenga componente en dicha dirección.

**Problema 2.10**

Una gota axilsimétrica de volumen  $V$  de un líquido de densidad  $\rho$  descansa sobre una mesa horizontal. Si la tensión superficial aire-líquido es  $\zeta$  y el ángulo de contacto sólido-líquido es  $\theta$ , calcular la forma de la superficie de la gota en los casos siguientes:

1.  $Bo = g\rho V^{2/3}/\zeta \ll 1$ .
2.  $Bo = g\rho V^{2/3}/\zeta \gg 1$ .
3.  $Bo = g\rho V^{2/3}/\zeta \sim 1$ .

Resolución:

La forma de una interfase debe calcularse a partir de la ecuación de Laplace-Young conocida la distribución de presiones en ambos fluidos y el valor de la tensión superficial. En efecto, si se conoce la distribución fluidostática de presiones a ambos lados de los fluidos inmiscibles,  $p_1(x, z) = C_1 - \rho_1 gz$  y  $p_2(x, z) = C_2 - \rho_2 gz$ , en la interfase de separación de ambos fluidos, dada por la ecuación  $z = z_s(x)$ , se debe cumplir que

$$p_1(x, z_s) - p_2(x, z_s) = \zeta \left( \frac{1}{R_1(z_s)} + \frac{1}{R_2(z_s)} \right) = (C_1 - C_2) - (\rho_1 - \rho_2)gz_s(x)$$

es decir,

$$\zeta \left( \frac{1}{R_1(z_s)} + \frac{1}{R_2(z_s)} \right) + (\rho_1 - \rho_2)gz_s(x) = cte.$$

La anterior ecuación muestra que la forma de la interfase depende de la importancia relativa de dos tipos de fuerzas que compiten entre sí: las fuerzas gravitatorias y las fuerzas de tensión superficial. Si el término de fuerzas gravitatorias es mucho más importante que el de tensión superficial la ecuación anterior se aproxima por  $(\rho_1 - \rho_2)gz_s(x) \simeq cte \Rightarrow z_s(x) \simeq cte$  mostrando que las fuerzas gravitatorias tienden a aplanar la interfase, i.e las fuerzas de tensión superficial no son capaces de aguantar la sobrepresión creada por la gravedad cuando hay diferencias de altura entre puntos de la interfase. Por el contrario, si las fuerzas de tensión superficial son dominantes, la gravedad es irrelevante en la determinación de la interfase que adopta una forma esférica.

Se puede estimar la importancia relativa de estos efectos comparando ambos términos, supuesto que la diferencia de cotas entre puntos de la interfase  $z_s \sim L$  son del mismo orden que la curvatura en dichos puntos,  $R_1 \sim R_2 \sim L$ . De esta comparación resulta el número adimensional denominado número de Bond  $Bo$ ,

$$\left. \zeta \left( \frac{1}{R_1(z_s)} + \frac{1}{R_2(z_s)} \right) \sim \frac{\zeta}{L} \right\} \Rightarrow Bo = \frac{gL^2 \Delta \rho}{\zeta} \quad \text{si} \quad \begin{cases} Bo \ll 1 & \text{La interfase es esférica} \\ Bo \sim 1 & \text{La interfase debe determinarse numéricamente} \\ Bo \gg 1 & \text{La interfase es plana excepto es sus bordes} \end{cases}$$

Se define la longitud capilar  $L_c \sim \left( \frac{\zeta}{\rho g} \right)^{1/2}$  como la máxima para la que los efectos de la tensión superficial sean relevantes en la determinación de la forma de la interfase. En efecto, si la ecuación de la superficie se expresa de la forma  $f(r, z) \equiv r - r_s(z) = 0$ , la ecuación de Laplace-Young (2.6) debe de verificarse en cada punto  $\mathbf{x} = r_s(z)\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$  de la misma

$$p_l - p_a = \zeta \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (1)$$

donde  $p_a$  la presión del aire,  $p_l = p_l(0) - \rho g z$  es el valor en  $\mathbf{x}$  de la distribución de presiones en el líquido [ $p_l(0)$  es la presión en la base de la gota, que debe calcularse como parte del problema],  $\mathbf{n}$  la normal unitaria a la superficie en  $\mathbf{x}$  dirigida hacia el aire,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\mathbf{e}_r - r'_s \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + r'^2_s}}, \quad (2)$$

y  $r'_s \equiv (dr_s/dz)$ .

Si se toma la divergencia de (2) teniendo en cuenta que, en la interfase,  $(\nabla \cdot \mathbf{e}_r)_{r=r_s} = 1/r_s(z)$ , se obtiene<sup>3</sup>

$$\left( \frac{\zeta r'_s}{\sqrt{1 + r'^2_s}} \right)' - \frac{\zeta}{r_s \sqrt{1 + r'^2_s}} = \rho g z - [p_l(0) - p_a] \quad (4)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria, no lineal, de segundo orden que, junto con las condiciones de contorno

$$r'_s(0) = -1/\tan \theta, \quad r'_s(z_0) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad r_s(z_0) = 0; \quad (5)$$

y la condición integral

$$V = \pi \int_0^{z_0} r_s^2 dz, \quad (6)$$

permiten determinar la forma de la superficie  $r = r_s(z)$  y las constantes  $z_0$  y  $p_l(0) - p_a$  que son desconocidas *a priori*; obsérvese que  $z_0$  es la cota del punto en que la superficie intersecta al eje de la gota ( $r = 0$ ), y la segunda condición (5) expresa la simetría de revolución de la superficie respecto de dicho eje. Para el análisis y la resolución de (4)-(6), es conveniente adimensionalizar las ecuaciones introduciendo las variables adimensionales

$$\eta = \frac{z}{V^{1/3}} \quad \text{y} \quad \xi = \frac{r_s}{V^{1/3}}, \quad (7)$$

y el parámetro adimensional

$$\alpha = \frac{p_l(0) - p_a}{\rho g V^{1/3}}, \quad (8)$$

en términos de los que la ecuación diferencial (4) se escribe

$$\left( \frac{\xi'}{\sqrt{1 + \xi'^2}} \right)' - \frac{1}{\xi \sqrt{1 + \xi'^2}} = (\eta - \alpha) Bo, \quad (9)$$

donde el número de Bond  $Bo = \rho g V^{2/3}/\zeta$  aparece de forma natural cuando se usan estas variables. Finalmente, las condiciones de contorno (5) y (6) se escriben

$$\xi'(0) = -\frac{1}{\tan \theta}, \quad \xi'(\eta_0) \rightarrow \infty \quad \xi(\eta_0) = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{\eta_0} \xi^2 d\eta = \pi^{-1}. \quad (10)$$

<sup>3</sup> Puesto que el vector unitario radial es independiente de  $r$  y de  $z$ , y  $(\partial \mathbf{e}_r / \partial \varphi) = \mathbf{e}_\varphi$ , se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_s(z)} \quad (3)$$

en la interfase aire-líquido.



**Apartado 1.-****Límite  $Bo \ll 1$ :**

Como se describió, en este límite las fuerzas gravitatorias son despreciables frente a las de tensión superficial y, en primera aproximación, las primeras pueden suprimirse en (9) dando lugar a

$$\frac{\xi''}{(1 + \xi'^2)^{3/2}} - \frac{1}{\xi \sqrt{1 + \xi'^2}} = -\mathcal{C}, \quad (11)$$

donde, para abreviar notación, se ha introducido la constante  $\mathcal{C} = \alpha Bo$ . La solución de la ecuación diferencial (11) que satisface las condiciones de contorno (10) puede obtenerse fácilmente si se tiene en cuenta que, al no aparecer en (11) la variable independiente explícitamente, dicha ecuación puede integrarse una vez para obtener  $\xi'$  como función de  $\xi$ . En efecto, puesto que  $\xi'' = d\xi'/d\eta = (d\xi'/d\xi)(d\xi/d\eta) = \xi'(d\xi'/d\xi)$ , la ecuación (11) puede escribirse como

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi'^2}} \right) = \mathcal{C} \xi. \quad (12)$$

Si se integra (12) se deduce, al particularizar el resultado de la integración en  $\xi = 0$ , que el valor de la constante de integración es nulo y se obtiene

$$\xi' = \pm \frac{2\sqrt{1 - (\mathcal{C}\xi/2)^2}}{(\mathcal{C}\xi/2)}. \quad (13)$$

La ecuación (13) puede integrarse de nuevo de forma inmediata por separación de variables, pudiendo escribirse como

$$\xi^2 + (\eta - \mathcal{B})^2 = (2/\mathcal{C})^2, \quad (14)$$

donde  $\mathcal{B}$  es una constante que, al igual que  $\mathcal{C}$ , se determina a partir de las condiciones de contorno (10); obsérvese que (14) es la ecuación de una esfera de centro en el punto  $(0, \mathcal{B})$  y de radio  $2/\mathcal{C}$ , cuyo corte con el plano  $\eta = 0$  es la circunferencia de radio  $\xi(0) = \sqrt{(2/\mathcal{C})^2 - \mathcal{B}^2}$ . Si la derivada de (14) respecto de  $\eta$  se particulariza en  $\eta = 0$ , y la ecuación (14) se particulariza en  $\xi = 0$ , se obtienen fácilmente de (10) las relaciones

$$\eta_0 = 2(1 - \cos \theta)/\mathcal{C} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = -(2/\mathcal{C}) \cos \theta, \quad (15)$$

donde la constante  $\mathcal{C}$  se determina mediante la integración de (14) entre 0 y  $\eta_0$  haciendo uso de la condición integral reseñada en (10), lo que proporciona

$$\mathcal{C} = \frac{\pi^{1/3}}{2} \left( \frac{2 + \cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right)^{1/3}. \quad (16)$$

Se observa cómo para números de Bond pequeños las fuerzas de tensión superficial hacen que, en primera aproximación, la gota adopte una forma esférica como lo haría en ausencia de la gravedad.

**Apartado 2.-****Límite  $Bo \gg 1$ :**

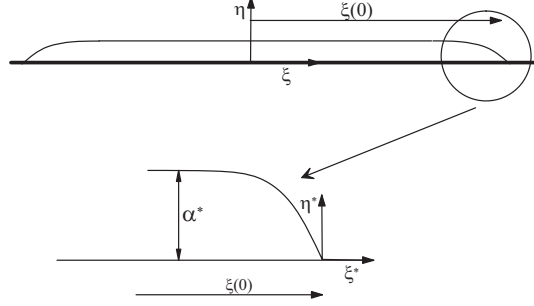
En este límite, opuesto al del apartado anterior, los efectos gravitatorios son dominantes y hacen que la interfase sea horizontal en primera aproximación, situada a una cota  $z \simeq (p_l(0) - p_a)/\rho g$  ( $\eta \simeq \eta_o \simeq \alpha$ , en variables adimensionales) que debe calcularse como parte del problema.

Naturalmente, la solución de cota constante no puede ser válida para toda la interfase, puesto que no puede verificar ni la condición de contorno en la línea de contacto con la mesa (de hecho, si la interfase estuviese toda ella situada a una cota uniforme no se produciría tal contacto) ni la condición de volumen

finito de la gota. En efecto, las fuerzas de tensión superficial son comparables a las gravitatorias sólo muy cerca del borde de la gota, en una zona pequeña (capa límite) cuyas dimensiones características son del orden de la longitud capilar, esto es,

$$\Delta r \sim \Delta z \sim L_c \sim \sqrt{\zeta/(\rho g)} = V^{1/3} Bo^{-1/2} \ll V^{1/3}, \quad (17)$$

además de ser las responsables del cumplimiento de las condiciones de contorno (5).



En efecto, para tener en cuenta dichas condiciones de contorno es necesario un análisis más detallado de la solución en la capa límite cerca del borde de la gota siendo, por tanto, conveniente introducir las variables adimensionales de capa límite

$$\eta^* = Bo^{1/2} \eta \quad y \quad \xi^* = Bo^{1/2} (\xi - \xi(0)), \quad (18)$$

donde  $\xi(0)$  es el radio de la línea de contacto, que debe determinarse como parte de la solución del problema. En términos de las variables (18) la ecuación (9) se escribe

$$\frac{d}{d\eta^*} \left[ \frac{(d\xi^*/d\eta^*)}{\sqrt{1 + (d\xi^*/d\eta^*)^2}} \right] - \frac{1}{Bo^{1/2}(\xi(0) + Bo^{1/2}\xi^*)\sqrt{1 + (d\xi^*/d\eta^*)^2}} = \eta^* - \alpha^*, \quad (19)$$

donde se ha definido el parámetro  $\alpha^* = \alpha Bo^{1/2}$ ; dicho parámetro debe ser de orden unidad para  $Bo \gg 1$ , puesto que, como se ha expuesto más arriba, en la capa límite se tiene  $Bo^{-1/2} \sim \eta \sim \alpha$ . Obsérvese que el segundo término del primer miembro de (19) es despreciable en primera aproximación si  $Bo \gg 1$ , por lo que si se prescinde del mismo y se integra la ecuación resultante se obtiene

$$\frac{(d\xi^*/d\eta^*)}{\sqrt{1 + (d\xi^*/d\eta^*)^2}} = \frac{1}{2}(\eta^* - \alpha^*)^2 - 1, \quad (20)$$

donde el valor de la constante de integración se ha tomado igual a  $-1$ , puesto que al tender  $\eta^*$  al valor límite  $\alpha^*$  fuera de la capa límite (interfase horizontal) debe ser  $(d\xi^*/d\eta^*) \rightarrow -\infty$ , tendiendo el primer miembro de (20) a  $-1$ . Obsérvese que, particularizando (20) en  $\eta^* = 0$ , la condición de contorno  $(d\xi^*/d\eta^*) = -1/\tan \theta$  determina el valor de la constante

$$\alpha^* = \sqrt{2(1 - \cos \theta)}. \quad (21)$$

Además, (20) proporciona la ecuación diferencial

$$\frac{d\xi^*}{d\eta^*} = - \frac{2 - (\alpha^* - \eta^*)^2}{(\alpha^* - \eta^*)\sqrt{4 - (\alpha^* - \eta^*)^2}}, \quad (22)$$

que puede reducirse a una integral inmediata definiendo la nueva de variable independiente

$$y = \sqrt{4 - (\alpha^* - \eta^*)^2} \quad \text{que está comprendida entre} \quad 2 \geq y \geq y_0 \equiv \sqrt{4 - \alpha^{*2}}, \quad (23)$$

si se efectúa la integración se obtiene, finalmente,

$$\xi = \xi(0) + Bo^{-1/2} \left[ y - y_0 - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(2 - y_0)(2 + y)}{(2 + y_0)(2 - y)} \right] \right] = \xi(0) + F(y), \quad (24)$$

donde la coordenada radial adimensional se ha expresado ya en términos de la variable original  $\xi$ , y las cantidades  $y$  e  $y_0$  están definidas en (23). Para determinar el valor de la constante de integración  $\xi(0)$  en (24) se hará uso de la condición integral que fija el volumen de la gota recogida en (10),

$$\int_0^{\eta_0} \xi^2 d\eta = \int_0^{\eta_0} [\xi(0) + F(y)]^2 d\eta = \{F(y) \ll \xi(0)\} \simeq \int_0^{\alpha} \xi^2(0) d\eta = \alpha \xi^2(0) = \pi^{-1}, \quad (25)$$

## 50 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

En la derivación de la ecuación anterior se ha supuesto que la corrección  $F(y)$  es mucho menor que  $\xi(0)$ , suposición que requiere una justificación. En efecto, mientras que los órdenes de magnitud de la corrección  $F(y) = \xi - \xi(0) \sim \mathcal{O}(Bo^{-1/2})$ , y de la altura alcanzada por la gota  $\eta_0 = \alpha \sim \mathcal{O}(Bo^{-1/2})$  son conocidos de (18) pues  $\eta^* \sim \xi^* \sim \mathcal{O}(1)$ , el orden de  $\xi(0)$  (que es del orden  $\xi$ ) se estima de (25)

$$\alpha \xi^2(0) \sim \mathcal{O}(1) \Rightarrow \xi(0) \sim \xi \sim \alpha^{-1/2} \sim Bo^{1/4} \quad (26)$$

y la simplificación ejercida es consistente pues

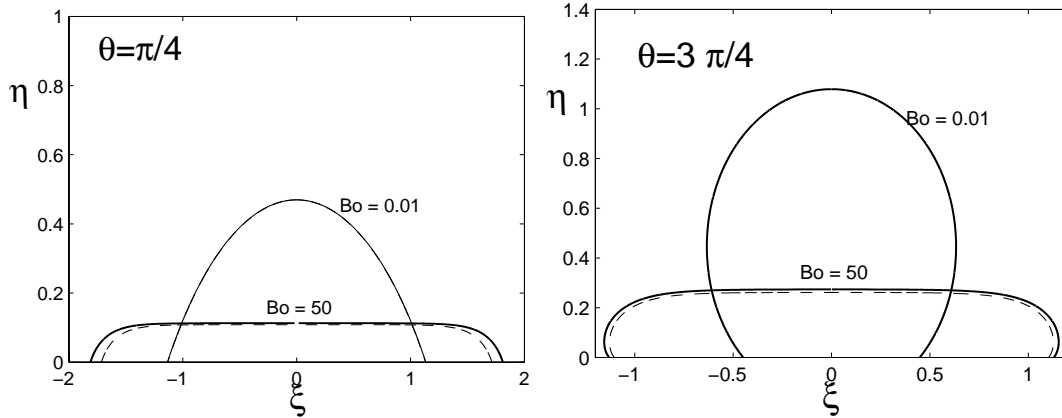
$$\int_0^{\eta_0} \xi^2 d\eta = \left\{ \begin{array}{l} F(y) \sim \alpha \\ \xi(0) \sim \mathcal{O}(Bo^{-1/2}) \\ \xi(0) \sim \mathcal{O}(Bo^{1/4}) \end{array} \right\} = \underbrace{\int_0^\alpha \xi^2(0) d\eta}_{\sim \mathcal{O}(1)} + \underbrace{\int_0^\alpha 2\xi(0)F(y) d\eta}_{\sim \mathcal{O}(Bo^{-3/4})} + \dots \quad (27)$$

Consecuentemente, teniendo en cuenta que  $\alpha = Bo^{-1/2}\alpha^*$  y que a su vez  $\alpha^*$  está dado por (21), (25) se escribe como

$$\xi(0) = \frac{Bo^{1/4}}{\pi^{1/2}[2(1 - \cos \theta)]^{1/4}}. \quad (28)$$

Obsérvese que la solución al problema está ahora cerrada y viene dada por el par de ecuaciones (24) y (28).

En las figuras se representan, para su comparación, las soluciones aproximadas (24) para  $Bo \gg 1$  y [(14)-(16)] para  $Bo \gg 1$  y las soluciones numéricas para  $Bo = 50$  y  $Bo = 0,01$ , obtenidas mediante la integración numérica que se expone en el apartado siguiente; se han considerado los casos en los que el ángulo de contacto vale  $\theta = \pi/4$  y  $\theta = 3\pi/4$ ; en el caso de número de Bond pequeño, la solución asintótica es indistinguible de la numérica



### Apartado 3.-

#### Caso $Bo \sim \mathcal{O}(1)$ :

En este caso no es posible un tratamiento analítico del problema (9)-(10) y éste debe ser resuelto numéricamente. Para ello, debe tenerse en cuenta que, aunque las coordenadas cilíndricas  $(\xi, \eta)$  son las apropiadas para representar la geometría de la interfase, su uso introduce en la (9) una singularidad en el punto  $(0, \eta_0)$ , donde la interfase intersecta al eje de simetría  $\xi = 0$ . Dicha singularidad se pone de manifiesto en el segundo término del primer miembro de (9), que se hace infinito para  $\xi = 0$ , así como en la segunda de las condiciones de contorno (10),  $(d\xi/d\eta) \rightarrow -\infty$  para  $\eta \rightarrow \eta_0$ , que exige la simetría de la interfase. Por tanto, resulta conveniente empezar la integración numérica en un valor de la variable independiente muy cercano a  $\eta_0$  (con el comportamiento correcto de  $\xi$  calculado más abajo) y, a partir de este valor, ir disminuyendo los valores de  $\eta$  hasta alcanzar  $\eta = 0$ . Para ello, es útil introducir la nueva variable independiente

$$\tau = \eta_0 - \eta, \quad (29)$$

en términos de la cual (9)-(10) se escriben, después de desarrollar la derivada del paréntesis del primer miembro (9), como

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \frac{1}{\xi} \left[ 1 + \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \right] = -Bo(\tau + \alpha - \eta_0) \left[ 1 + \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (30)$$

$$\left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)_{\tau=\eta_0} = \frac{1}{\tan \theta}, \quad \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)_{\tau \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad \xi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{\eta_0} \xi^2 d\tau = \pi^{-1}. \quad (31)$$

Para analizar la singularidad de (30) para valores pequeños de  $\tau$  se supone un comportamiento de la forma

$$\xi \simeq a \tau^n \quad \text{siendo} \quad \tau \ll 1 \quad \text{y} \quad 0 < n < 1, \quad (32)$$

para satisfacer las condiciones de contorno  $\xi(0) = 0$  y  $(d\xi/d\tau)_{\tau=0} = \infty$ . Los valores del exponente  $n$  y de la constante  $a$  se calculan introduciendo (32) en (30) e igualando las potencias negativas de  $\tau$  de mayor valor absoluto y sus coeficientes en ambos miembros; se obtiene entonces la relación

$$n(n-1)\tau^{n-2} - a n^2 \tau^{n-2} = -Bo(n - \eta_0) a^3 n^3 \tau^{3n-3} \Rightarrow \begin{cases} n = 1/2 \\ a = [Bo(\alpha - \eta_0)]^{-1/2} \end{cases}, \quad (33)$$

Puesto que las constantes  $\alpha$  y  $\eta_0$  son ambas desconocidas *a priori* y deben calcularse como parte del problema, es conveniente reescribir, usando la relación mostrada en (33), la ecuación (30) que dependería entonces de un único autovalor  $a$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi} \left[ 1 + \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \right] \left[ 1 - \xi(Bo\tau + a^{-2}) \sqrt{1 + \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2} \right]. \quad (34)$$

Se observa en (34) que, para todo valor dado  $a > 0$ , la derivada segunda de  $\xi$  permanece negativa cuando  $\tau$  y  $\xi$  aumentan, si lo es inicialmente para  $\tau \rightarrow 0$ , por lo que  $(d\xi/d\eta)$  decrece monótonamente con  $\tau$  a partir su valor inicial para  $\tau = \tau_0 \ll 1$  donde, de acuerdo con (32), se tienen los valores

$$\xi(\tau_0) = a \tau_0^{1/2} \quad \text{y} \quad \left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)_{\tau_0} = \frac{a}{2 \tau_0^{1/2}}. \quad (35)$$

Por tanto, si se lleva a cabo la integración numérica de (34) partiendo de los valores (35) se alcanzará, para un cierto valor  $\tau = \tau_f$ , el valor de la pendiente requerido por la condición de contorno (30),

$$\left. \frac{d\xi}{d\tau} \right|_{\tau_f} = \frac{1}{\tan \theta}. \quad (36)$$

Si para  $\tau_f$  se verifica la condición de contorno que resta por cumplir correspondiente a que la integral

$$I(\tau_f) = \int_0^{\tau_f} \xi^2 d\tau = \pi^{-1}, \quad (37)$$

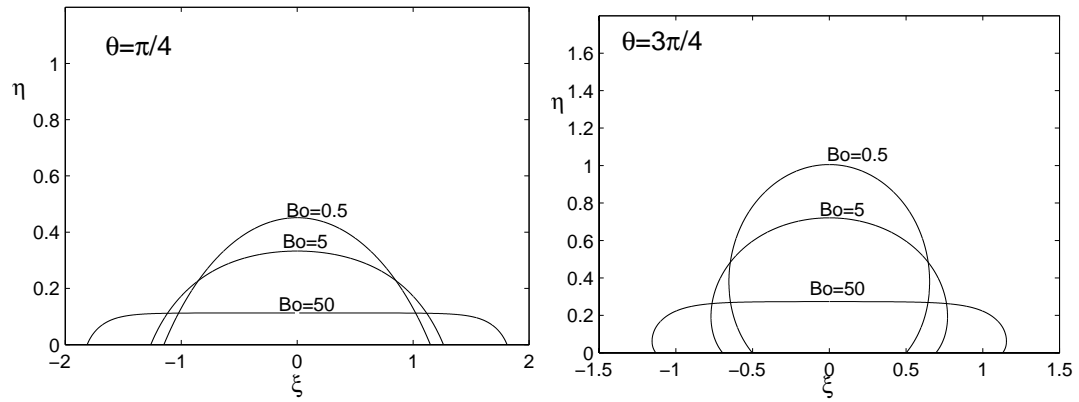
el valor de  $a$  es el correcto, obteniéndose entonces los valores

$$\eta_0 = \tau_f \quad \text{y} \quad \alpha = \eta_0 + \frac{Bo}{a^2}, \quad (38)$$

además de la forma de la gota,  $\xi = \xi(\eta)$  con  $\eta = \eta_0 - \tau$ . En caso contrario, se debe de variar el valor de  $a$  y volver a realizar la integración; obsérvese que la condición (37) puede comprobarse directamente si se integra junto a (34) la ecuación diferencial

$$\frac{dI}{d\tau} = \xi^2, \quad I(\tau_0) \simeq 0, \quad (39)$$

lo que permite calcular el valor de  $I(\tau)$  para cualquier valor de  $\tau$ .



Las figuras muestran, para los ángulos de contacto  $\theta = \pi/4$  y  $\theta = 3\pi/4$  respectivamente, las formas de las gotas obtenidas numéricamente para varios valores del número de Bond. Obsérvese como la gota se expande disminuyendo la altura a medida que aumenta el número de Bond, expansión que continúa hasta que las fuerzas gravitatorias puedan ser equilibradas por las de tensión superficial.

## CAPÍTULO 3

# Ecuaciones de conservación en forma integral

En muchas situaciones de interés práctico no es necesario poseer un conocimiento detallado del campo de velocidades, presiones y densidades del movimiento fluido, sino que basta con conocer algunas de sus características; en general, aquellas que son de interés en ingeniería tales como, por ejemplo, caudal, fuerza resultante sobre un obstáculo, potencia mecánica extraída del fluido o comunicada al mismo, etc. Sucede, además, que si se posee información suficiente sobre algunas magnitudes globales en la frontera y/o en el interior del dominio fluido, es posible calcular algunas otras magnitudes de interés mediante balances integrales de masa, cantidad de movimiento y energía. Estos balances resultan de aplicar a un volumen de control,  $\Omega_c(t)$ , los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía.

Por ejemplo, el principio de conservación de la masa en forma integral se formula en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (3.1)$$

siendo  $\mathbf{n}$  la normal exterior al volumen de control y  $\mathbf{v}_c$  la velocidad de las superficies límites de dicho volumen. Esta ecuación expresa que la variación en la unidad de tiempo de la masa contenida en el volumen de control  $\Omega_c(t)$  más el flujo convectivo neto de masa a través de su superficie  $\Sigma_c(t)$  es igual a cero. Naturalmente, si el volumen de control es fijo,  $v_c = 0$  y la derivada temporal de la integral es igual a la integral de la derivada del integrando.

Análogamente, el principio de conservación de la cantidad de movimiento extendido a un volumen de control variable con el tiempo se escribe

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho \mathbf{v} d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ = \int_{\Sigma_c(t)} (-p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}) d\sigma + \int_{\Omega_c(t)} \rho \mathbf{f}_m d\varpi, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ecuación que relaciona la variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento contenida en el volumen de control con el flujo de cantidad de movimiento que por convección abandona dicho volumen a través de su superficie y la resultante de las fuerzas de presión, viscosidad y másicas que en el instante considerado actúan sobre él.

## 54 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Finalmente, la forma general del principio de conservación de la energía para un volumen de control variable con el tiempo se expresa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho(e + v^2/2) d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho(e + v^2/2)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ = \int_{\Sigma_c(t)} -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma_c(t)} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Omega_c(t)} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} d\varpi \\ - \int_{\Sigma_c(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_c(t)} (Q_r + Q_q) d\varpi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde para modelar el flujo de calor por conducción usa la ley de Fourier,  $\mathbf{q} = -K \nabla T$ , y los calores por radiación,  $Q_r$ , y reacción química,  $Q_q$ , se han considerado por completitud, aunque no se modelarán aquí. Esta ecuación relaciona la variación de la energía total en el interior del volumen de control con el flujo de energía total que por convección lo abandona a través de su superficie, con los trabajos por unidad de tiempo de las fuerzas de superficie (presión y viscosidad), y másicas, y los calores por unidad de tiempo aportados por conducción, radiación y reacción química.

La ecuación que expresa la conservación de la energía puede escribirse en otras formas alternativas. Así, para movimiento de gases estacionario suele ser preferible emplear como variable energética la entalpía  $h = e + p/\rho$ , en vez de la energía interna  $e$ . La ecuación para la entalpía puede derivarse fácilmente de (3.3),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho(h + v^2/2) d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho(h + v^2/2)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} p d\varpi - \int_{\Sigma_c(t)} p \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c(t)} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Omega_c(t)} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} d\varpi \\ + \int_{\Sigma_c(t)} K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_c(t)} (Q_r + Q_q) d\varpi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

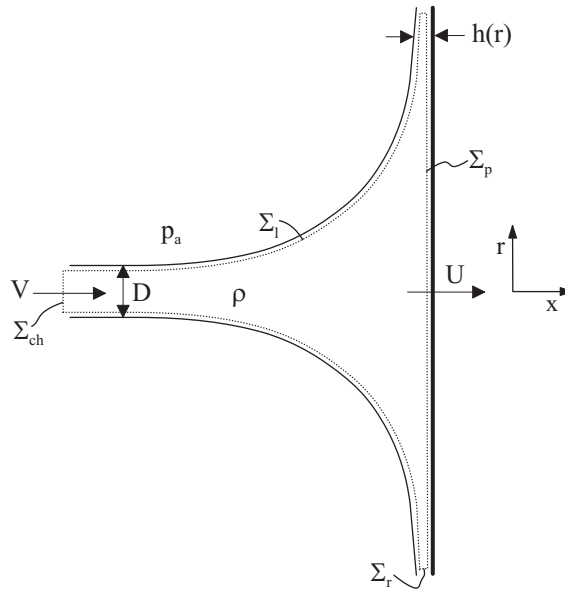
Como puede observarse en la ecuación anterior, si en un cierto movimiento estacionario de un gas no tienen influencia por ser despreciables la disipación viscosa, las fuerzas másicas y la adición de calor (ya sea por conducción, radiación o reacción química), la ecuación de la energía se reduce a estudiar los flujos convectivos de la magnitud  $h_o = h + v^2/2$  que se denomina entalpía de remanso.

**Problema 3.1**

Un chorro de un líquido de densidad  $\rho$  y diámetro  $D$  se mueve, respecto a unos ejes ligados a tierra, con velocidad  $V$ , e incide normalmente sobre una placa plana rígida, que se mueve en la misma dirección que el chorro, con una velocidad  $U$ , también respecto a tierra ( $U < V$ ). Como consecuencia de la interacción del chorro con la superficie, el líquido adquiere un movimiento, relativo a la placa, radial y divergente de la zona de impacto como se muestra en la figura.

Aplicando las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía mecánica calcular:

1. Espesor de la película de líquido  $h(r)$  y velocidad radial  $v_r$  a distancias  $r$  grandes respecto  $D$ .
2. Fuerza  $F$  ejercida por el líquido y la atmósfera sobre la placa.

Resolución:Apartado 1.-

Una de las cuestiones claves para resolver problemas fluidomecánicos aplicando las ecuaciones de conservación en forma integral es la elección apropiada del volumen de control y el sistema de coordenadas respecto al que se describe el movimiento del fluido y el del volumen de control en su caso. En efecto, considérese un sistema de referencia ligado a la placa y un volumen de control, fijo respecto a la placa, limitado por la superficie de control  $\Sigma_{control}$  que está formada por: la superficie libre del chorro,  $\Sigma_l$ , la placa,  $\Sigma_p$ , una superficie transversal al chorro localizada aguas arriba de la zona de impacto y suficientemente lejos de ella como para asegurar que el diámetro del chorro allí sea  $D$ ,  $\Sigma_{ch}$  y una superficie cilíndrica de radio  $r$  muy grande y limitada por la placa y la superficie lateral del chorro,  $\Sigma_r$ . En este sistema de referencia, ligado a la placa, el movimiento del fluido es estacionario y el volumen de control considerado es fijo,  $\mathbf{v}_c = 0$ .

La ecuación de conservación de la masa en forma integral extendida al volumen de control considerado se expresa matemáticamente como

$$\int_{\Sigma_{control}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_{ch} + \Sigma_l + \Sigma_p + \Sigma_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0; \quad (1)$$



## 56 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

obsérvese que por ser la densidad del líquido constante, la ecuación (1) se refiere a volumen de líquido por unidad de tiempo, o caudal, y expresa que el caudal neto a través del volumen considerado es nulo (caudal de salida igual al de entrada). Teniendo en cuenta que la velocidad del fluido en contacto con la placa es nula y que sobre la superficie libre, por ser ésta una superficie fluida estacionaria, se satisface la condición  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ , la integración de (1) proporciona una relación entre las incógnitas  $v_r$  y  $h(r)$

$$-(V - U)\pi D^2/4 + 2\pi v_r(r)h(r)r = 0; \quad (2)$$

para la integración a través de las superficies  $\Sigma_{ch}$  y  $\Sigma_r$  se ha tenido en cuenta la uniformidad de las velocidades  $V - U$  y  $v_r$  a lo largo de esas superficies y el signo menos del primer sumando es debido al producto escalar ya que la normal se toma hacia el exterior al volumen de control y sobre  $\Sigma_{ch}$  es de sentido opuesto a la velocidad. La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral se expresa

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = - \int_{\Sigma_{control}} (p - p_a) \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma_{control}} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (3)$$

Para tener en cuenta la presencia del gas y la fuerza en sentido  $-\mathbf{e}_x$  originada por la presión que éste ejerce sobre la placa se ha añadido a (3) el término  $\int_{\Sigma_{control}} p_a \mathbf{n} d\sigma$ , que no altera el balance de cantidad por ser idénticamente nulo cuando la superficie de integración es cerrada como en este caso; en efecto, si  $\Sigma$  es una superficie cerrada,  $\Omega$  el volumen encerrado por ella y  $p_a$  es uniforme, se tiene  $\int_{\Sigma} p_a \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla p_a d\omega = 0$ . Obsérvese que se ha despreciado la contribución de las fuerzas gravitatorias a (3); esto es, se ha supuesto que

$$\int_{\Omega_{control}} \rho g \mathbf{e}_z d\omega \ll \int_{\Sigma_{control}} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma,$$

o

$$\rho g \Omega \sim \rho g D^2 r \ll \rho (V - U)^2 D^2 \rightarrow Fr = \frac{(V - U)^2 D^2}{g \Omega},$$

donde  $Fr$  es el número de Froude que mide la importancia relativa entre las fuerzas de inercia convectivas y las gravitatorias.

Puesto que la fuerza sobre la placa es perpendicular a ella, se proyectará (3) en esa dirección,  $\mathbf{e}_x$ . Al calcular el flujo neto de cantidad de movimiento según el eje  $\mathbf{e}_x$  sólo contribuye la integral extendida a  $\Sigma_{ch}$  y vale  $-\rho(V - U)^2(\pi D^2/4)$ . No hay flujo de cantidad de movimiento a través de  $\Sigma_l$  y  $\Sigma_p$  porque no hay flujo de masa ni tampoco de energía; el fluido no atraviesa esas superficies. También es nulo el flujo cantidad de movimiento según  $\mathbf{e}_x$  a través de  $\Sigma_r$  ya que aunque hay paso de masa, ésta lleva sólo cantidad de movimiento  $v_r$  por unidad de masa en la dirección  $\mathbf{e}_r$ . La proyección de las fuerzas de presión según  $\mathbf{e}_x$  es nula en  $\Sigma_{ch}$  y  $\Sigma_l$  ya que  $p = p_a$  sobre estas superficies. Sobre la superficie  $\Sigma_r$  las fuerzas de presión sólo poseen componente radial, así que el único término no nulo es la contribución de las fuerzas de presión sobre la placa. Respecto a las fuerzas de viscosidad son muy pequeñas en todas las superficies. El efecto de frenado del aire sobre el líquido es muy pequeño porque la viscosidad del aire es mucho más pequeña que la del líquido. Formalmente los esfuerzos de viscosidad son sólo importantes sobre la placa (más precisamente en una capa límite muy delgada adyacente a la placa) pero éstos son radiales (no dan componente según  $\mathbf{e}_x$  y por simetría su resultante es además nula).

Teniendo en cuenta lo anterior, la proyección de (3) según  $\mathbf{e}_x$  proporciona

$$-\rho(V - U)^2(\pi D^2/4) = - \int_{\Sigma_p} (p - p_a) n_x d\sigma = - \int_0^r (p - p_a) 2\pi r dr, \quad (4)$$

donde  $n_x = 1$  es la componente según  $\mathbf{e}_x$  de la normal a la placa. Obsérvese que las acciones de presión del líquido sobre la placa no puede calcularse directamente ya que no se conoce la presión sobre la misma. Sin embargo, si se denomina  $F = \int_{\Sigma_p} (p - p_a) n_x d\sigma$  al módulo de la fuerza sobre la placa, entonces el segundo miembro de (4) es  $-F$  y

$$F = \rho(V - U)^2(\pi D^2/4). \quad (5)$$

Apartado 2.-

Para cerrar el problema es necesario aplicar la ecuación de la energía al volumen de control considerado

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho (e + v^2/2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_{control}} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma, \quad (6)$$

donde no se ha incluido el trabajo de las fuerzas de viscosidad por ser nulo sobre la placa fija y ser despreciables las fuerzas de viscosidad en el resto de las superficies. Obsérvese que (6) puede escribirse en forma más compacta como

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho (e + p/\rho + v^2/2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (7)$$

y su integración en las superficies  $\Sigma_{ch}$  y  $\Sigma_r$ , las únicas a través de las que hay flujo neto de energía, proporciona

$$-\rho(V - U) \left( \pi \frac{D^2}{4} \right) \left( e_a + \frac{p_a}{\rho} + \frac{(V - U)^2}{2} \right) + \rho v_r [2\pi r h(r)] \left( e_a + \frac{p_a}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} \right), \quad (8)$$

donde se ha supuesto que la temperatura del líquido es constante e igual a la ambiente y que el radio  $r$  de la superficie cilíndrica  $\Sigma_r$  es lo suficientemente grande como para que allí la velocidad sea puramente radial y la presión sea, por tanto, la atmosférica. Teniendo en cuenta (2), (8) se reduce a

$$\frac{(V - U)^2}{2} = \frac{v_r^2}{2} \rightarrow V - U = v_r, \quad (9)$$

que muestra que la energía cinética por unidad de masa del movimiento relativo se conserva. Finalmente, teniendo en cuenta (9), (2) proporciona

$$h(r) = \frac{D^2}{8r}. \quad (10)$$

Es ilustrativo comprobar que si se describe el movimiento del líquido respecto a tierra y se escoge el mismo volumen de control que en el caso anterior pero de forma que sus superficies se muevan con velocidad  $U$  respecto a tierra se puede comprobar que aunque el volumen de control varíe su posición con el tiempo, no varían con él ni su volumen ni tampoco la masa, cantidad de movimiento y energía del líquido que en cada instante está contenido en su interior, esto es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{control}} \rho d\varpi = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{control}} \rho \mathbf{v} d\varpi = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{control}} \rho (e + 1/2 v^2) d\varpi = 0. \quad (11)$$

La ecuación de conservación de la masa se escribe en los nuevos ejes

$$\int_{\Sigma_{control}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (12)$$

donde  $v_c = U \mathbf{e}_x$  es la velocidad de las superficies de control. Es fácil ver que sobre la placa fija  $v = U$  (superficie impermeable) y que la superficie libre es una superficie fluida y sobre ella  $(\mathbf{v} - U \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{n} = 0$ , así que los únicos flujos convectivos de masa no nulos tienen lugar a través de las superficies  $\Sigma_{ch}$  y  $\Sigma_r$

$$\int_{\Sigma_{ch}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_{ch}} (\mathbf{V} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -(V - U)(\pi D^2/4) \quad (13)$$

$$\int_{\Sigma_r} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_r} (\mathbf{U} + v_r \mathbf{e}_r - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2\pi r h(r) v_r(r), \quad (14)$$

que conducen nuevamente a la relación (2).

## 58 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Análogamente, los flujos convectivos no nulos de cantidad de movimiento según el eje  $\mathbf{e}_x$  son

$$\int_{\Sigma_{ch}} \rho v_x (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\rho V (V - U) (\pi D^2/4) \quad (15)$$

y

$$\int_{\Sigma_r} \rho v_x (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2\pi r h(r) v_r U. \quad (16)$$

Obsérvese que la suma de ambas integrales proporciona el mismo flujo neto de cantidad de movimiento que en el caso de emplear ejes ligados a la placa

$$\int_{\Sigma_{ch} + \Sigma_r} \rho v_x (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\rho (V - U)^2 (\pi D^2/4). \quad (17)$$

Por otra parte, y dado que la presión es independiente del sistema de referencia elegido, la fuerza sobre la placa viene dada también por la expresión (5), que es, naturalmente igual y contraria a la fuerza que la placa hace sobre el líquido y cuya magnitud es la necesaria para anular la cantidad de movimiento, según el eje  $x$ , relativa a la placa que éste trae. Finalmente, y de modo análogo a lo realizado en el balance de masa, ecuaciones (13) y (14), el lector puede demostrar fácilmente la conservación de la energía cinética por unidad de masa en el movimiento del líquido relativo a la placa.

Alternativamente, se puede considerar también un volumen de control variable con el tiempo en el que la superficie  $\Sigma_{ch}$  se alejase de la placa con velocidad  $U$  mientras que el resto de las superficies se toman fijas respecto a la placa; esto es, en ejes fijos a la placa,  $\mathbf{v}_c = 0$  en todas las superficies del volumen de control considerado excepto en la superficie  $\Sigma_{ch}$  donde  $\mathbf{v}_c = -U \mathbf{e}_x$ . Como el volumen de control varía con el tiempo, es necesario calcular las variaciones con el tiempo de la masa, cantidad de movimiento y energía, del líquido en el interior del volumen considerado. La variación de la masa en el interior del volumen viene dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{control}(t)} \rho d\varpi = \rho \frac{d\Omega_{control}(t)}{dt} = \rho U (\pi D^2/4). \quad (18)$$

Por otro lado los flujos convectivos de masa y cantidad de movimiento no nulos, que son aquellos que atraviesan las superficies  $\Sigma_{ch}$  y  $\Sigma_r$  son respectivamente

$$\int_{\Sigma_{ch}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_{ch}} \rho (\mathbf{V} - \mathbf{U} + \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\rho V (\pi D^2/4) \quad (19)$$

y

$$\int_{\Sigma_r} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 2\pi r h(r) \rho v_r; \quad (20)$$

teniendo en cuenta (18)-(20), la ecuación de conservación de la masa en forma integral (3.1) proporciona también el resultado (2).

Análogamente, la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento según el eje  $x$  del líquido contenido en el volumen es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{control}(t)} \rho \mathbf{v}_x d\varpi = \rho (V - U) \frac{d\Omega_{control}(t)}{dt} \mathbf{e}_x = \rho (V - U) U (\pi D^2/4) \mathbf{e}_x. \quad (21)$$

El único flujo convectivo de cantidad de movimiento según el eje  $x$  no nulo es el que atraviesa la superficie  $\Sigma_{ch}$

$$\int_{\Sigma_{ch}} \rho v_x (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\rho (V - U)^2 (\pi D^2/4). \quad (22)$$

Teniendo en cuenta los resultados (22) y (4) y que la presión es independiente del sistema de referencia, la conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control considerado conduce también al resultado (5) que da la fuerza sobre la placa.

El lector puede comprobar aplicando el teorema de la conservación de la energía en el volumen de control considerado que la energía cinética del líquido por unidad de masa se conserva en el movimiento relativo del líquido respecto a la placa.

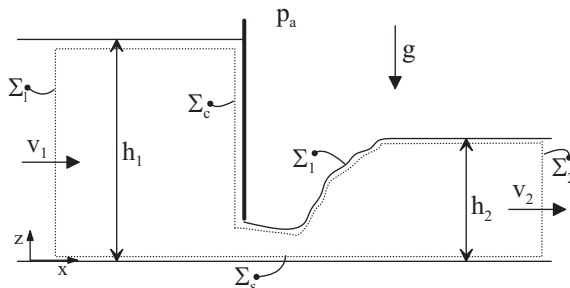
El lector puede ver fácilmente que aunque los flujos son distintos otra vez en este caso, la suma de flujos de masa y variación de masa en el volumen de control y la suma de flujos de cantidad de movimiento y variación de cantidad de movimiento en el volumen de control siguen siendo iguales a los obtenidos usando otra configuración.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{control}(t)} \rho \mathbf{v} d\varpi = \rho \frac{d\Omega_{control}(t)}{dt} (V - U) \mathbf{e}_x = \rho (V - U) U \frac{\pi D^2}{4} \mathbf{e}_x. \quad (23)$$

**Problema 3.2**

Una compuerta parcialmente abierta, situada en un canal de sección rectangular permite el paso de agua tal como se indica en la figura. En una sección transversal del canal situada aguas arriba de la compuerta, la altura de agua  $h_1$  y su velocidad,  $v_1$ , son conocidas; la velocidad  $v_1$  es horizontal y prácticamente uniforme a través de la sección y la distribución de presiones en la sección se obtiene de la fluidostática, por ser la componente vertical de la velocidad en la sección nula, o muy pequeña. Se supondrá que la anchura del canal,  $b$  es tal que satisface la condición,  $b \gg h_1$ , de modo que el movimiento del líquido en el canal es prácticamente bidimensional. Aguas abajo de la compuerta la corriente se acelera y pasa a supercrítica, lo que significa que la velocidad del fluido es mayor que la velocidad de propagación de las ondas en la superficie libre, que para aguas poco profundas es  $\sqrt{gh}$ , siendo  $h$  la altura de la superficie libre. El frenado de la corriente hasta condiciones subcríticas se realiza aguas abajo de la compuerta a través del denominado resalto hidráulico, una zona de longitud relativamente pequeña respecto a las dimensiones del canal donde el movimiento es altamente turbulento y los esfuerzos de viscosidad y la disipación turbulenta son importantes.<sup>1</sup> Aguas abajo del resalto, a distancias suficientemente grandes, la corriente es de nuevo horizontal y uniforme y de valor  $v_2$  y la altura de la superficie es  $h_2$ , que usualmente se conoce experimentalmente ya que es fácilmente medible. Suponiendo que el movimiento es estacionario, calcular, mediante las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en forma integral a un volumen de control apropiado:

1. Velocidad  $v_2$  de la corriente aguas abajo del resalto.
2. Fuerza  $F$  por unidad de longitud sobre la compuerta.
3. Energía total por unidad de masa disipada a través del resalto hidráulico.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Se elegirá un volumen de control fijo  $\Omega_{control}$  delimitado por la superficie de control  $\Sigma_{control}$  que se compone de: la solera del canal,  $\Sigma_s$ , la superficie de la compuerta hasta una altura  $h_1$ ,  $\Sigma_c$ , la superficie libre del líquido,  $\Sigma_l$  y dos secciones localizadas, aguas arriba de la compuerta,  $\Sigma_1$ , y aguas abajo del resalto,  $\Sigma_2$  donde las velocidades son horizontales y uniformes.

La ecuación de continuidad, aplicada a dicho volumen de control fijo, se escribe, puesto que el movimiento es estacionario y  $\rho$  es constante,

$$\int_{\Sigma_{control}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Existe una analogía entre el frenado de una corriente supersónica de gas a través de una onda de choque y el que tiene lugar a través del resalto en el caso de la corriente supercrítica de un líquido con superficie libre en presencia de la gravedad.

donde  $\mathbf{n}$  es la normal hacia el exterior del volumen de control. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} = 0$  en las paredes impermeables (solera y compuerta),  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  en la superficie libre del líquido, por ser esta línea de corriente, y que las velocidades del líquido son uniformes a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  y normales a ellas, la integración de la ecuación (1) proporciona

$$-v_1 h_1 + v_2 h_2 = 0, \quad (2)$$

que permite calcular  $v_2$  supuesto conocidos  $v_1$ ,  $h_1$  y  $h_2$ .

### Apartado 2.-

Dado que la fuerza sobre la compuerta tiene únicamente componente según el eje  $x$  es necesario sólo proyectar la ecuación de la cantidad de movimiento según este eje. Se tiene entonces

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Sigma_{control}} -(p - p_a) n_x d\sigma + \int_{\Sigma_{control}} (\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n})_x d\sigma, \quad (3)$$

donde el subíndice  $x$  indica componente según el eje  $x$  del vector afectado por dicho subíndice. No se han incluido en (3) las fuerzas másicas porque dan componente nula sobre el eje  $x$  y, por otra parte, se le ha sumado a la ecuación el término

$$\int_{\Sigma_{control}} p_a n_x d\sigma$$

para tener en cuenta el efecto del ambiente pues el aire ejerce una presión (y una fuerza tras su integración en la superficie) sobre la compuerta; naturalmente, el balance de cantidad de movimiento según  $x$  no queda afectado por ser dicho término idénticamente nulo. En efecto si  $\Sigma$  es una superficie cerrada y  $\Omega$  el volumen encerrado por  $\Sigma$ , el teorema de Gauss demuestra que

$$\int_{\Sigma} p_a n_x d\sigma = \int_{\Omega} \partial p_a / \partial x d\omega = 0.$$

Por las mismas razones que el flujo de masa, el flujo de cantidad de movimiento sólo es distinto de cero a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  y su integración a través de estas superficies, teniendo en cuenta la uniformidad de la velocidad en ambas secciones, proporciona

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = -\rho v_1^2 h_1 + \rho v_2^2 h_2. \quad (4)$$

La componente de las fuerzas de presión sobre la solera no da componente según el eje  $x$  y sobre la superficie libre es cero por ser  $p = p_a$ , de modo que las integrales se reducen a la integración de las fuerzas de presión sobre las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  y sobre las dos caras de la compuerta. Por no existir aceleraciones del fluido según el eje  $z$  (velocidad horizontal), la presión en cualquier punto de  $\Sigma_1$  vendrá dada, de acuerdo con la hidrostática, por

$$p + \rho g z = \text{constante} = p_a + \rho g h_1 \quad \text{en } \Sigma_1 \quad (5)$$

y

$$p + \rho g z = \text{constante} = p_a + \rho g h_2 \quad \text{en } \Sigma_2. \quad (6)$$

Teniendo en cuenta (5) y (6) las fuerzas de presión según el eje  $x$  que el líquido situado a la izquierda de  $\Sigma_1$  y el situado a la derecha de  $\Sigma_2$  ejercen sobre el líquido del interior del volumen a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son respectivamente

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} -(p - p_a) n_x d\sigma &= \int_0^{h_1} \rho g (h_1 - z) dz = \rho g h_1^2 / 2 \\ \int_{\Sigma_2} -(p - p_a) n_x d\sigma &= - \int_0^{h_2} \rho g (h_2 - z) dz = -\rho g h_2^2 / 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Respecto a la resultante de las fuerzas de viscosidad según el eje  $x$  en las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  hay que decir que son muy pequeñas ya que por ser la velocidad uniforme a través de la sección ( $\partial v / \partial z = 0$ ) sólo hay esfuerzos normales de viscosidad ( $\mu \partial v / \partial x \sim \mu v_1 / h$  y éstos son muy pequeños frente a la presión dinámica  $\rho v_1^2$  siempre que  $Re = \rho v_1 h_1 / \mu \ll 1$ ; se ha supuesto que la velocidad varía del orden de ella misma en distancias del orden de  $h_1$ . Sobre la superficie libre aire-líquido, los esfuerzos viscosos son muy pequeños ya que el coeficiente de viscosidad del aire  $\mu_a$  es muy pequeño comparado con el del líquido  $\mu$ , y sobre la superficie libre se tiene en virtud del principio de acción y reacción,  $\mu(\partial v / \partial y) = \mu_a(\partial v_a / \partial y) \simeq 0$ , donde  $v_a$  representa aquí la velocidad del aire arrastrado por el líquido. Finalmente, la fuerza de viscosidad sobre la solera puede ser estimada a partir de la correspondiente integral en el último término de (3) como  $\tau_f L$  donde  $\tau_f = \mu \partial v / \partial z|_{z=0}$  representa el esfuerzo en la solera y  $L$  la longitud entre las secciones  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . En efecto, el esfuerzo en la pared es del orden de  $\mu v_1 / \delta$ , donde el espesor  $\delta$  de la capa límite es del orden de  $h / Re^{1/2}$  como puede comprobarse fácilmente en cualquier texto elemental de mecánica de fluidos; obsérvese que  $\mu v_1 Re^{1/2} / h$  es mucho menor que  $\rho v_1^2$  siempre que  $Re = \rho v_1 h_1 / \mu \ll 1$ . Se tiene entonces

$$\int_{\Sigma_s} (\bar{\tau}' \cdot \mathbf{n})_x d\sigma = \int_0^L \tau_f dx \sim \tau_f L \ll \rho v_1^2 h_1.$$

Por tanto, la ecuación (3) se reduce a

$$-\rho v_1^2 h_1 + \rho v_2^2 h_2 = \rho g h_1^2 / 2 - \rho g h_2^2 / 2 - \int_{\Sigma_c} (p - p_a) n_x d\sigma + \int_{\Sigma_c} (\bar{\tau}' \cdot \mathbf{n})_x d\sigma. \quad (8)$$

Obsérvese que la fuerza que el líquido y el gas ejercen sobre las dos caras de la compuerta, igual y contraria a la fuerza  $F$  que ésta ejerce sobre aquéllos, es

$$\int_{\Sigma_c} -(p - p_a) n_x d\sigma + \int_{\Sigma_c} (\bar{\tau}' \cdot \mathbf{n})_x d\sigma = -F. \quad (9)$$

Aunque el resultado (9) se puede simplificar aún más por el hecho de que las fuerzas de viscosidad son pequeñas frente a las de presión en movimientos a grandes números de Reynolds, desde el punto de vista práctico este hecho es irrelevante ya que para calcular la fuerza sobre la placa no es necesario realizar las integrales en (9). En efecto, sustituyendo (9) en (8) se tiene

$$F = \rho [h_1 (v_1^2 + g h_1 / 2) - h_2 (v_2^2 + g h_2 / 2)]. \quad (10)$$

### Apartado 3.-

La ecuación de conservación de la energía total aplicada al volumen de control considerado se escribe

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho (e + v^2 / 2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_{control}} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma_{control}} (\bar{\tau}' \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Omega_{control}} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} d\omega, \quad (11)$$

donde  $\Omega$  es el volumen encerrado por las superficies y no se ha incluido en (11) el calor añadido al volumen por conducción ni por radiación por no desempeñar papel alguno en el problema considerado.

El trabajo de las fuerzas de presión es nulo sobre la compuerta y la solera por ser éstas superficies fijas. También es nulo este trabajo en la superficie libre, por ser  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ; nótese, sin embargo que hay una zona de superficie libre, la que corresponde al resalto donde la superficie libre no es estacionaria y, por tanto, el líquido realiza (absorbe) trabajo, debido a la presión, sobre el gas, aunque en media el trabajo neto realizado es nulo. Sólo hay, por tanto, que considerar el trabajo de las fuerzas de presión que el líquido situado fuera del volumen realiza sobre el de dentro a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .

Respecto al trabajo de las fuerzas de viscosidad hay que decir que es despreciable, frente al flujo convectivo de energía total, en aquellas superficies donde se hayan despreciado las fuerzas de viscosidad para el cálculo de la fuerza sobre la compuerta; además el trabajo, debido a la viscosidad, que la compuerta y la solera hacen sobre el líquido del interior del volumen es nulo por ser éstas superficie fijas (velocidad nula). Por otra parte, el trabajo de las fuerzas másicas no puede calcularse a partir de la última de las integrales en (11)

porque no se conoce la velocidad en el interior del volumen considerado. Sin embargo, el hecho de que las fuerzas másicas  $\mathbf{f}_m$  deriven del potencial  $U = gz$ ,  $\mathbf{f}_m = -\nabla U$  y de que, por tratarse del movimiento de un líquido, el campo de velocidades sea solenoidal,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , el teorema de Gauss establece

$$\int_{\Omega_{control}} \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} \, d\omega = - \int_{\Omega_{control}} \rho g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v} \, d\omega = - \int_{\Omega_{control}} \rho \nabla(gz) \cdot \mathbf{v} \, d\omega = - \int_{\Sigma_{control}} gz \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (12)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, (11) se puede escribir en la forma

$$\int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \rho(e + v^2/2 + p/\rho + gz)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma = 0, \quad (13)$$

que muestra que el trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas de presión y másicas se puede modelar como un flujo de energía mecánica por unidad de masa adicional (de presión y gravitatoria  $p/\rho + gz$ ). Su integración a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , las únicas a través de las que el flujo convectivo de energía total (interna, cinética, de presión y gravitatoria) no es nulo, proporciona

$$-\rho v_1 h_1 (e_1 + v_1^2/2 + p_a/\rho + gh_1) + \rho v_2 h_2 (e_2 + v_2^2/2 + p_a/\rho + gh_2) = 0, \quad (14)$$

donde se ha tenido en cuenta que sobre las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , la cantidad  $p/\rho + gz$  vale respectivamente  $p_a/\rho + gh_1$  y  $p_a/\rho + gh_2$ . Haciendo uso finalmente de que el caudal es constante se tiene

$$e_1 + v_1^2/2 + gh_1 = e_2 + v_2^2/2 + gh_2, \quad (15)$$

que muestra que la energía total por unidad de masa, incluyendo la energía potencial por unidad de masa, se conserva a lo largo del movimiento pues no hay ninguna acción externa que fuerce su cambio. La disipación de energía mecánica en calor (interna) es igual a la pérdida de energía mecánica (cinética más interna) habida entre las dos secciones consideradas

$$e_2 - e_1 = c(T_2 - T_1) = (v_1^2/2 + gh_1) - (v_2^2/2 + gh_2), \quad (16)$$

y es debida al trabajo de disipación de las fuerzas de viscosidad que ocurren en el interior del dominio fluido, fundamentalmente en la zona del resalto; en general, el incremento de temperaturas experimentado por el agua entre secciones localizadas antes y después del salto es pequeño ya que su calor específico,  $c$ , es muy grande.

Para ver de un modo más explícito el papel que desempeña el trabajo de disipación de la viscosidad en incrementar la energía interna y disminuir la mecánica conviene escribir los balances de energía interna y mecánica en un volumen de control por el que fluye un líquido en movimiento estacionario. En efecto, la ecuación de la energía mecánica en forma diferencial proporciona

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}' - \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho gz), \quad (17)$$

que se convierte en

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla(v^2/2) \, d\omega = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \, d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}' \, d\omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho gz) \, d\omega, \quad (18)$$

donde  $\Omega$  representa aquí cualquier volumen cerrado finito que esté limitado por la superficie  $\Sigma$ . Haciendo uso del teorema de Gauss y de que  $\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}' = \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{v}) - \bar{\bar{\tau}}' : \nabla \mathbf{v}$ , (18) se puede escribir en la forma

$$\int_{\Sigma} \rho(v^2/2 + p/\rho + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{v} \, d\sigma - \int_{\Omega} \bar{\bar{\tau}}' : \nabla \mathbf{v} \, d\omega. \quad (19)$$

Si se realizan las mismas operaciones que en el caso anterior, la ecuación de la energía total para el movimiento estacionario de un líquido, véase (3.3), se puede escribir como

$$\int_{\Sigma} \rho(e + v^2/2 + p/\rho + gz) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (20)$$



## 64 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

y si se le resta (19) se obtiene

$$\int_{\Sigma} \rho e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \bar{\bar{\tau}}' : \nabla \mathbf{v} \, d\omega, \quad (21)$$

que muestra que, en el caso de movimiento estacionario de líquidos, el trabajo de disipación de las fuerzas de viscosidad contribuye exclusivamente al incremento de energía interna. Obsérvese que el mismo término aparece, con signo contrario en la ecuación de la energía interna y es el responsable de la disipación de energía mecánica; naturalmente la energía total se conserva.

**Problema 3.3**

Aplicando las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento en forma integral calcular la fuerza que una corriente uniforme de velocidad  $U_\infty$  y bajos números de Mach ejerce sobre un objeto ( $M_\infty = U_\infty/a_{infly} \ll 1$ , donde  $a_{infly}$  es la velocidad del sonido de la corriente sin perturbar).

Demostrar que en el caso de que el objeto sea un cuerpo bidimensional no sustentador (o tridimensional si la estela que deja es simétrica) el cálculo de la resistencia requiere conocer únicamente la distribución de velocidades en la estela cuyo déficit con respecto a la velocidad  $U_\infty$  está directamente relacionada con la resistencia que experimenta el mismo.<sup>2</sup>

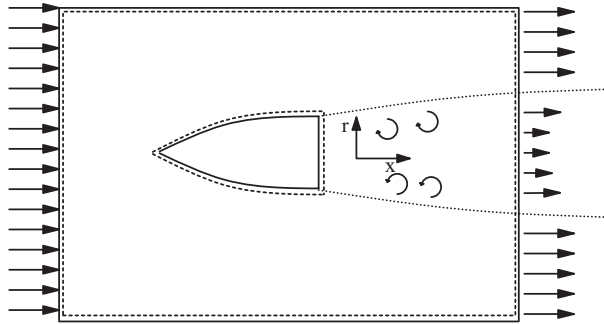
Hacer aplicación al caso de un objeto simétrico en vuelo horizontal para el que la velocidad del fluido en la estela lejana, respecto a unos ejes ligados al cuerpo, se pueda aproximar por

$$v_x = v_x(r) = \begin{cases} U_\infty - u' = U_\infty \left( 1 - \epsilon \cos \frac{\pi}{2} \frac{r}{R_o} \right) & \text{si } 0 \leq r \leq R_o \\ U_\infty & \text{si } r > R_o \end{cases} ; \quad (1)$$

supongan  $\epsilon \ll 1$  para simplificar los cálculos. Consideren también el caso de un obstáculo bidimensional y supongan entonces que la velocidad en la estela es

$$v_x = v_x(z) = \begin{cases} U_\infty - u' = U_\infty \left( 1 - \epsilon \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{R_o} \right) & \text{si } |z| \leq R_o \\ u = U_\infty & \text{si } |z| > R_o \end{cases} , \quad (2)$$

con la coordenada  $z$  perpendicular a la corriente sin perturbar.

**Resolución:**

Para describir el movimiento del fluido se usarán ejes ligados al cuerpo con el eje  $x$  con la misma dirección y sentido que la velocidad de la corriente sin perturbar,  $U_\infty$ . Es conveniente indicar que las fuerzas que la corriente ejerce sobre el objeto (de presión y viscosidad) son independiente del sistema de referencia ya que la presión es independiente del sistema de referencia elegido y también lo son las fuerzas de viscosidad, por ser éstas proporcionales a los gradientes (diferencias) de velocidad.

Como se pretende calcular las fuerzas sobre el cuerpo, una de las superficies que limitan al volumen de control deberá coincidir con la superficie del cuerpo. Por tanto, se elegirá éste como el volumen limitado por la superficie del cuerpo,  $\Sigma_c$ , la superficie lateral de un cilindro de radio  $R$  muy grande frente a las dimensiones características del obstáculo y generatriz paralela a la corriente sin perturbar,  $\Sigma_R$ , y dos superficies,  $\Sigma_1$  y

<sup>2</sup> Un método tradicional de evaluar la resistencia aerodinámica de objetos simétricos moviéndose a bajos números de Mach se basa en la determinación experimental del perfil de velocidades en la estela suficientemente aguas abajo del obstáculo.

## 66 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

$\Sigma_2$ , perpendiculares a la generatriz del cilindro y situadas, respectivamente, aguas abajo y aguas arriba del cuerpo y suficientemente lejos del mismo como para suponer que en ellas, las velocidades del fluido respecto al cuerpo son respectivamente la de la corriente sin perturbar (en  $\Sigma_1$ ) y la que éste posee en la estela lejana.

En el análisis no se tendrán en cuenta los fenómenos de compresibilidad,  $\rho \simeq \text{constante}$ , ya que por ser el movimiento a bajos números de Mach las variaciones relativas de densidad son pequeñas frente a la propia densidad,  $\Delta\rho \ll \rho$ . Ello puede deducirse del hecho de que en el movimiento estacionario de un gas a altos números de Reynolds las fuerzas de inercia convectivas están balanceadas con las de presión, relación que permite estimar las variaciones de presión del movimiento,  $\Delta p$ , que se relaciona a su vez con las variaciones de densidad  $\Delta\rho$  mediante la definición de la velocidad del sonido  $a$ ,

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \nabla p \Rightarrow \Delta p \sim \rho U_\infty^2 \Rightarrow \{a^2 = (\partial p / \partial \rho)_S \sim \Delta p / \Delta \rho\} \Rightarrow \Delta \rho / \rho \sim U_\infty^2 / a^2 = M_\infty^2, \quad (3)$$

de modo que, en lo que sigue, se considerará que la densidad del fluido  $\rho$  es constante en el movimiento del mismo.

Si  $\Sigma_{control}$  representa a la totalidad de las superficies del volumen de control considerado,  $\Sigma_{control} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_R + \Sigma_c$ , la ecuación de conservación de la masa extendida al volumen de control considerado se expresa en la forma

$$\int_{\Sigma_{control}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (4)$$

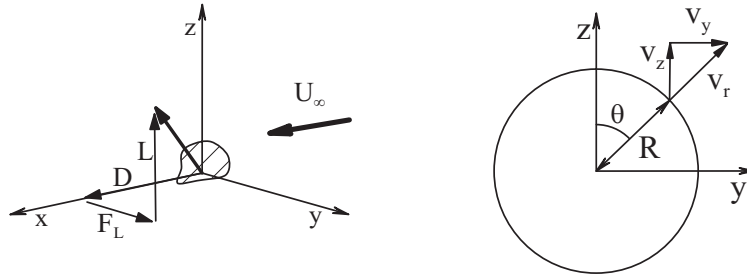
Obsérvese que el flujo convectivo de masa a través de la superficie del cuerpo es nulo ya que la superficie es impermeable, ( $\mathbf{v} = 0$ ) sobre ella. Por el contrario, sobre las superficies  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_R$  se tiene respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_1} &= U_\infty \mathbf{e}_x \cdot (-\mathbf{e}_x) = -U_\infty, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_2} &= (v_x \mathbf{e}_x + v_r \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_x = v_x \quad y \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_R} &= (v_x \mathbf{e}_x + v_r \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r = v_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Luego (4) resulta ser:

$$-U_\infty \pi R^2 + \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} v_r R d\theta + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R v_x r dr = 0, \quad (6)$$

que expresa que la diferencia de masa por unidad de tiempo que sale y entra a través de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , que resulta del defecto de velocidad en la estela, es convectada fuera del volumen a través de la superficie cilíndrica lateral  $\Sigma_R$ ;  $v_x$  y  $v_r$  son las componentes de la velocidad del fluido según los ejes  $x$  y  $r$ , respectivamente. Se sobrentiende que los límites de la integral  $-x$  y  $x$  corresponden a secciones suficientemente alejadas aguas arriba y aguas abajo del cuerpo.



Para calcular las componentes de la fuerza ejercida por el fluido sobre el objeto se aplicará el teorema de la conservación de cantidad de movimiento

$$\int_{\Sigma_{control}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = - \int_{\Sigma_{control}} p \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma_{control}} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' d\sigma, \quad (7)$$

en la que, como es usual en aerodinámica, se han despreciado las fuerzas másicas por ser pequeñas frente a las de inercia (grandes valores del número de Froude).

Es habitual descomponer la fuerza ejercida por el fluido en su componente en dirección de la corriente incidente  $x$  que se denomina resistencia  $D$ , la perpendicular a la corriente incidente  $z$  que se denomina sustentación  $L$ , y por último en la dirección  $y$  que se denomina fuerza lateral  $F_L$  que vienen definidas por

$$\begin{aligned} D &= - \int_{\Sigma_c} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_x d\sigma \\ L &= - \int_{\Sigma_c} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_z d\sigma \\ F_L &= - \int_{\Sigma_c} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_y d\sigma. \end{aligned} \quad (8)$$

Los flujos convectivos de cantidad de movimiento según el eje  $x$  a través de las diferentes superficies del volumen de control no nulos son (el flujo a través de la superficie del obstáculo es nulo por ser éste impermeable):

1. A través de la superficie situada agua arriba,  $\Sigma_1$ ,

$$\int_{\Sigma_1} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_0^R \rho U_\infty (-U_\infty) 2\pi r dr = -\rho U_\infty^2 \pi R^2; \quad (9)$$

2. A través de la superficie situada agua abajo,  $\Sigma_2$ ,

$$\int_{\Sigma_2} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_x^2 r dr; \quad (10)$$

3. A través de la superficie lateral,  $\Sigma_R$ ,

$$\int_{\Sigma_R} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \rho U_\infty \int_{\Sigma_R} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho U_\infty v_r d\theta. \quad (11)$$

Análogamente, los flujos convectivos de cantidad de movimiento según los ejes  $z$  e  $y$  son:

1. A través de la superficie situada agua arriba,  $\Sigma_1$ ,

$$\int_{\Sigma_1} \rho v_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\Sigma_1} \rho v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad (12)$$

pues  $v_z = v_y = 0$  en  $\Sigma_1$ .

2. A través de la superficie situada agua abajo,  $\Sigma_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{Según eje } z : \quad \int_{\Sigma_2} \rho v_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_z v_x r dr \\ \text{Según eje } y : \quad \int_{\Sigma_2} \rho v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_y v_x r dr \end{aligned} \quad (13)$$

donde en general  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  son función de  $\theta$  y  $r$ .

3. A través de la superficie lateral,  $\Sigma_R$ ,

$$\begin{aligned} \text{Según eje } z : \quad \int_{\Sigma_R} \rho v_z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \rho \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} v_r^2 R \cos \theta d\theta \\ \text{Según eje } y : \quad \int_{\Sigma_R} \rho v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \rho \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} v_r^2 R \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

pues sobre  $\Sigma_R$  la componente de la velocidad en las direcciones  $z$  y  $y$  son  $v_z = v_r \cos \theta$  y  $v_y = v_r \sin \theta$  respectivamente (véase la figura anterior).

Por otro lado, en movimientos altos números de Reynolds,  $Re \gg 1$ , las fuerzas viscosas sólo son importantes cerca del objeto (en una delgada capa, denominada capa límite, adyacente a la pared del cuerpo) y en la disipación turbulenta que se produce en la estela, por lo que en las superficies suficientemente alejadas del sólido,  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  y  $\Sigma_R$  las fuerzas viscosas son despreciables

$$\int_{\Sigma_1} (\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}})_x d\sigma = \int_{\Sigma_2} (\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}})_x d\sigma = \int_{\Sigma_L} (\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}})_x d\sigma = 0.$$

Además, sobre las superficies alejadas del objeto  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  la presión del fluido es uniforme e igual a la no perturbada  $p = p_\infty$ , por lo que,

$$\underbrace{- \int_{\Sigma_1} p \mathbf{n} d\sigma}_{p_\infty \pi R^2 \mathbf{e}_x} - \underbrace{\int_{\Sigma_2} p \mathbf{n} d\sigma}_{-p_\infty \pi R^2 \mathbf{e}_x} = 0$$

en cambio nada puede decirse de la distribución de presiones en la superficie lateral  $\sigma_R$  salvo que estará en general próxima al valor  $p_\infty$

$$- \int_{\Sigma_R} p \mathbf{n} d\sigma = - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} p (\cos \theta \mathbf{e}_z + \sin \theta \mathbf{e}_y) R d\theta. \quad (15)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación vectorial de cantidad de movimiento (7) es en suma:

1. En la dirección  $x$ :

$$\begin{aligned} & -\rho U_\infty^2 \pi R^2 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_x^2 r dr + \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \rho U_\infty v_r R d\theta = \int_{\Sigma_c} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_x d\sigma \\ \Rightarrow & D = \rho U_\infty^2 \pi R^2 - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_x^2 r dr - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \rho U_\infty v_r R d\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

2. En la dirección  $y$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_y v_x r dr + \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \rho v_r^2 R \sin \theta d\theta \\ & = - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta + \int_{\Sigma_c} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_y d\sigma. \\ \Rightarrow & F_L = - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_y v_x r dr - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \rho v_r^2 R \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

3. En la dirección  $z$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_z v_x r dr + \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \rho v_r^2 R \cos \theta d\theta \\ & = - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta + \int_{\Sigma_c} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_z d\sigma. \\ \Rightarrow & L = - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho v_z v_x r dr - \int_{-x}^x dx \int_0^{2\pi} \rho v_r^2 R \cos \theta d\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Puesto que  $v_r$  y  $p$  no son conocidas sobre la superficie lateral, la resistencia, la sustentación y la fuerza lateral no podrán, en general, evaluarse a partir de [(16)-(18)].

Sin embargo, si la estela es simétrica, por ser simétrico el objeto que la genera, se introducen simplificaciones que permiten soslayar el hecho de que sean desconocidas  $v_r$  y  $p$  sobre la superficie.

### Estelas simétricas

En efecto, en el caso de simetría axial los valores de la velocidad radial  $v_r$  y presión  $p$  no dependen del ángulo polar  $\theta$  de tal manera que las integrales del segundo miembro de las ecuaciones (17) y (18) se anulan por formar parte de ellas las expresiones

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0. \quad (19)$$

La resistencia en cambio no se anula de tal manera que el valor de las fuerzas son:

$$L = F_L = 0 \quad \text{y} \quad D = \rho U_\infty^2 \pi R^2 - 2\pi \int_0^R \rho v_x^2 r \, dr - \rho U_\infty 2\pi R \int_{-x}^x v_r \, dx. \quad (20)$$

Empleando la ecuación de continuidad (6) la resistencia puede calcularse una vez conocido el perfil de velocidades aguas abajo del objeto,

$$\begin{aligned} D &= \rho U_\infty^2 \pi R^2 - 2\pi \int_0^R \rho v_x^2 r \, dr - \rho U_\infty \left( U_\infty \pi R^2 - 2\pi \int_0^R v_x r \, dr \right) \\ &= 2\pi \int_0^R \rho v_x (U_\infty - v_x) r \, dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Particularizando para el perfil de velocidades del enunciado,  $v_x = (U_\infty - u')$ , el valor de la resistencia es

$$D = 2\pi \int_0^R \rho u' (U_\infty - u') r \, dr \simeq 2\pi \epsilon \rho U_\infty^2 \int_0^{R_o} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{r}{R_o} \right) r \, dr = 4R_o^2 \epsilon \rho U_\infty^2 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \quad (22)$$

donde se ha hecho uso de que la velocidad en la estela difiere poco de  $U_\infty$ ,  $U_\infty - u' \simeq U_\infty + \mathcal{O}(\epsilon)$ ,  $u'/U_\infty \sim \epsilon \ll 1$ .

### Estelas bidimensionales

En el caso bidimensional se tomará un volumen de control formado por las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  de altura  $2R$  y profundidad  $b$  mucho mayor que las dimensiones del obstáculo y situadas aguas arriba y aguas abajo, respectivamente y por último por las superficies inferiores y superiores  $\Sigma_{Rinf}$  y  $\Sigma_{Rsup}$  de longitud  $2x$  y profundidad  $b$ . En este caso, es fácil ver, a partir de (6) (sin más que tener en cuenta que la corriente es bidimensional), que la conservación de la masa se expresa como

$$-2R U_\infty + 2 \int_{-x}^x v_z \, dx + \int_{-R}^R v_x \, dz = 0, \quad (23)$$

que permite calcular el flujo de masa por unidad de tiempo a través de las superficies inferior y superior en función del flujo de masa neto a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ .

Del mismo modo, la expresión de la resistencia  $d$  (con dimensiones de fuerza por unidad de longitud) se puede obtener a partir de (16) sin más que reescribir las integrales teniendo en cuenta el hecho de que la corriente es bidimensional; para la resistencia por unidad de longitud  $d$  se tiene

$$d = 2R \rho U_\infty^2 - \int_{-R}^R \rho v_x^2 \, dz - 2 \int_{-x}^x \rho U_\infty v_x \, dx \quad (24)$$

## 70 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

donde la última integral del segundo miembro se calcula fácilmente teniendo en cuenta (23); se tiene entonces

$$d = \int_{-R}^R \rho v_x (U_\infty - v_x) dz, \quad (25)$$

que muestra que para un obstáculo bidimensional la resistencia depende únicamente del déficit de velocidad en la estela.

Para el caso del perfil de velocidades considerado en el enunciado,  $v_x = U_\infty - u'$ , se obtiene salvo infinitésimos de orden superior  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

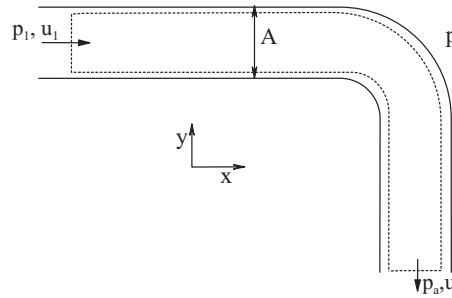
$$d = \int_{-R_o}^{R_o} \rho u' (U_\infty - u') dz \simeq \rho U_\infty^2 \epsilon \int_{-R_o}^{R_o} \cos\left(\frac{\pi z}{2 R_o}\right) dz = \frac{4\epsilon}{\pi} \rho U_\infty^2 R.$$

Obsérvese en (18) que la sustentación al contrario que la resistencia no depende sólo del déficit de velocidad en la estela lejana. Para su cálculo, empleando balances de masa y cantidad de movimiento, es necesario conocer además la componente vertical de la velocidad lejos del obstáculo.

**Problema 3.4**

Por un conducto de sección constante  $A$ , con un codo a  $90^\circ$ , circula subsónicamente y estacionariamente un gas a temperatura constante y conocida  $T$ . En una sección del conducto,  $A_1 = A$ , localizada aguas arriba del codo, se suponen conocidas la presión del gas,  $p_1$ , y su velocidad  $u_1$ ; se ha supuesto que el movimiento en el conducto es turbulento y que por tanto, debido a la eficacia en el mezclado, las condiciones del gas en cada sección pueden considerarse uniformes. Sabiendo que aguas abajo del codo, el gas descarga al ambiente donde la presión y la temperatura son  $p_a$  y  $T_a$  respectivamente, calcular, aplicando las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía a un volumen de control apropiado,

1. Densidad  $\rho_s$  y velocidad  $u_s$  del gas a la salida.
2. Fuerza en magnitud y dirección que el gas ejerce sobre el codo.
3. Calor por unidad de tiempo que el gas cede al ambiente a través de las paredes.

Resolución:Apartado 1.-

Si se considera el volumen de control limitado por las paredes del conducto, la sección  $A_1$  localizada aguas arriba del codo y la sección de salida  $A_s$ , la conservación de la masa se expresa mediante

$$\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (1)$$

donde la integral tiene que ser evaluada en las paredes del conducto y en las secciones  $A_1$  y  $A_s$ . Dado que las paredes son impermeables, la velocidad es nula sobre ellas y también lo es por tanto el flujo convectivo de masa a través de ellas. Por tanto, la ecuación (1) se reduce a

$$\int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{A_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (2)$$

y expresa que por ser el movimiento estacionario la masa que por unidad de tiempo entra en el volumen considerado es igual a la que sale del mismo. Teniendo en cuenta que las magnitudes fluidas son uniformes en una sección del conducto y que la normal se toma hacia el exterior del volumen de control considerado, la integración de (2) proporciona

$$-\rho_1 u_1 A_1 + \rho_s u_s A_s = 0, \quad (3)$$

donde el signo negativo correspondiente a la sección  $A_1$  es debido a que allí la velocidad y la normal poseen sentidos diferentes ya que sus componentes son respectivamente  $(u_1, 0)$  y  $(-1, 0)$  y, por tanto, su producto



## 72 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

escalar es negativo; obsérvese que en la sección de salida el producto escalar es positivo,  $(0, u_s)$  y  $(0, 1)$ . El gasto  $G$  es

$$G = \rho_1 u_1 A = \rho_s u_s A. \quad (4)$$

En el movimiento de líquidos, y en el movimiento subsónico de gases, a través de conductos, la presión debe de disminuir aguas abajo para vencer el efecto de la fricción de las paredes sobre el fluido. Las paredes del conducto soportan la diferencia de presiones entre el fluido que circula por el conducto y el ambiente. A la salida del conducto, sin embargo, el fluido descarga a la presión ambiente ya que, por no haber paredes, no puede haber diferencia de presiones entre el fluido que descarga el tubo y el ambiente. En su movimiento a lo largo del conducto, el fluido tiene conocimiento de la presión ambiente, de hecho el caudal depende de la diferencia de presiones entre los extremos del conducto, y va perdiendo presión a lo largo del conducto pero de forma tal que al llegar a la sección de salida su presión es la del ambiente. Esto no sucede con el resto de magnitudes fluidas cuyos valores en la sección de salida dependen de los procesos físicos a que se vea sometido el fluido que circula por el conducto y no al ambiente; piense el lector que el agua con la que se ducha no sale, en general, a la temperatura ambiente.

Si la presión del gas a la salida es la ambiente  $p_a$  y el gas circula por el conducto a temperatura  $T$  constante, la ecuación de estado proporciona la densidad del gas en las secciones  $A_1$  y  $A_s$  y (3) proporciona la velocidad del gas a la salida

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R_g T}, \quad \rho_s = \frac{p_a}{R_g T}, \quad y \quad u_s = \frac{\rho_1 u_1}{\rho_s} = \frac{p_1 u_1}{p_a}, \quad (5)$$

donde para obtener la última de las relaciones en (5) se ha hecho uso de que la sección del tubo es constante,  $A_1 = A_s = A$ .

### Apartado 2.-

La fuerza que el gas ejerce sobre el tubo acodado es consecuencia de la variación de cantidad de movimiento que las paredes del conducto ejercen sobre el gas. En efecto, el gas entra en el volumen considerado con una cantidad de movimiento en la dirección horizontal y lo abandona con una cantidad de movimiento en la dirección vertical. Para que tenga lugar esta variación de cantidad de movimiento del gas tanto en dirección como en módulo hay que realizar fuerzas sobre él que en este caso provienen de las paredes del conducto. Así, para el presente caso las paredes del conducto ejercen sobre el gas una fuerza cuya componente según el eje  $x$  es negativa, y de valor apropiado para frenar al gas eliminado la componente horizontal de la cantidad de movimiento del gas. Por otra parte, estas mismas paredes son las responsables, realizando fuerzas de valor apropiado, de comunicar al gas la cantidad de movimiento en dirección vertical que éste posee a la salida. Naturalmente, la fuerza que el conducto acodado ejerce sobre el gas es igual y contraria a la que éste ejerce sobre el conducto. La conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control se expresa por

$$\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\Sigma} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad (6)$$

que indica que el flujo neto convectivo de cantidad de movimiento en el volumen considerado es igual a la resultante de las fuerzas de presión y viscosidad que actúan sobre su superficie. Obsérvese que no se han considerado las fuerzas másicas  $-\int_{\Omega} \rho g \mathbf{e}_z A \, dz \sim \rho g A z$  por que se supondrá que éstas son mucho menores que el flujo convectivo de cantidad de movimiento (del orden de  $\rho v^2 A$ ), donde  $z$  representa aquí las variaciones de altura del movimiento; esta hipótesis se cumple normalmente en el movimiento de gases en los que el número de Froude,  $v^2/(gz)$ , que mide la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las gravitatorias, es muy grande. Finalmente, y por razones que se entenderán enseguida, es usual sumar el término  $\int_{\Sigma} p_a \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  a la ecuación (6); este término es idénticamente nulo, como se demuestra con la ayuda del teorema de Gauss,  $\int_{\Sigma} p_a \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla p_a \, d\omega = 0$ , y por tanto (6) puede escribirse en la forma

$$\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \int_{\Sigma} (p - p_a) \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\Sigma} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la impermeabilidad de las paredes del conducto y la uniformidad de las magnitudes fluidas a través de una sección del conducto, las proyecciones horizontal y vertical de la ecuación vectorial (7) se reducen a

$$-\rho_1 u_1^2 A = (p_1 - p_a)A - \int_{pared} (p - p_a) \mathbf{n}_x d\sigma + \int_{pared} [\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n}]_x d\sigma \quad (8)$$

y

$$-\rho_s u_s^2 A = (p_s - p_a)A - \int_{pared} (p - p_a) \mathbf{n}_y d\sigma + \int_{pared} [\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n}]_y d\sigma. \quad (9)$$

Obsérvese que  $p_1 A$  y  $p_s A$  representan las fuerzas de presión que el gas situado fuera del volumen de control ejerce sobre el que está dentro a través de las secciones  $A_1$  y  $A_s$ , respectivamente; nótese también que cuando se tiene en cuenta las acciones de presión del gas exterior no hay contribución del gas exterior al volumen sobre el interior puesto que  $p_s = p_a$ . Se ha supuesto también que las componentes de las fuerzas de viscosidad en las secciones de entrada y salida son muy pequeñas y, por tanto, no se han considerado; esto es consecuencia de que los esfuerzos de viscosidad sólo son significativas en una región de espesor muy delgado adyacente a la pared (lo que se conoce con el nombre de capa límite) y, por tanto, el área donde los esfuerzos viscosos son significantes es una fracción muy pequeña de la sección  $A$  del conducto y, consecuentemente, muy pequeña también comparada con el área de las paredes.

Es interesante hacer notar que los términos  $-\int_{pared} (p - p_a) \mathbf{n}_x d\sigma + \int_{pared} [\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n}]_x d\sigma$  y  $-\int_{pared} (p - p_a) \mathbf{n}_y d\sigma + \int_{pared} [\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n}]_y d\sigma$  representan las acciones de presión y viscosidad, en las direcciones horizontal y vertical, que las paredes del conducto ejercen sobre el gas interior al conducto y sobre el gas del exterior. Si  $F_x$  y  $F_y$  representan las acciones horizontal y vertical que el gas (el de dentro y el de fuera) ejercen sobre el conducto, entonces de (8) y (9) se tiene

$$F_x = [\rho_1 u_1^2 + (p_1 - p_a)]A \quad y \quad F_y = \rho_s u_s^2 A. \quad (10)$$

Como se ha visto, la fuerza que el gas ejerce sobre las paredes no puede calcularse directamente por no ser conocida la presión y los esfuerzos de viscosidad en las paredes del conducto, pero sí indirectamente a través de los flujos convectivos de cantidad de movimiento y de las fuerzas de presión que el gas del exterior hace sobre el del interior a través de las secciones  $A_1$  y  $A_s$ .

### Apartado 3.-

La conservación de la energía en el volumen considerado, que se escribe en la forma

$$\int_{\Sigma} \rho(e + v^2/2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma} K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (11)$$

expresa que el flujo neto convectivo de energía total (cinética más interna) a través de las paredes del volumen de control es igual a la potencia que las fuerzas de presión y viscosidad realizan sobre el gas a través de las paredes del volumen considerado más el calor conducido a través de las mismas.

El flujo neto convectivo de energía total a través de las secciones de entrada y salida es  $G[(e_s + u_s^2/2) - (e_1 + u_1^2/2)]$ ; naturalmente, no hay flujo convectivo de energía a través de las paredes del conducto. Las fuerzas de presión que las paredes ejercen sobre el gas no realizan trabajo por ser nula su velocidad en la pared, mientras que la potencia que el gas del exterior al volumen (debida a las fuerzas de presión) realiza sobre el del interior a través de las secciones  $A_1$  y  $A_s$  es  $(p_1 u_1 - p_s u_s)A$ . Respecto a la potencia realizada por las fuerzas de viscosidad es fácil ver que es nula en la pared del conducto por ser ésta una pared fija y también lo es en las secciones  $A_1$  y  $A_s$  porque allí se han despreciado las fuerzas de viscosidad. Finalmente, el calor por unidad de tiempo conducido a través de las secciones  $A_1$  y  $A_s$  es despreciable porque en esas secciones los gradientes de temperatura normales a la sección son nulos (el gas circula por el conducto a temperatura constante) mientras que el calor por unidad de tiempo,  $Q$ , conducido a través de las paredes no puede calcularse directamente porque no se conocen los gradientes de temperatura en la dirección normal a la pared, pero sí indirectamente a través de la conservación de la energía. En efecto, teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (11) proporciona

$$Q = G[(e_s + p_s/\rho_s + u_s^2/2) - (e_1 + p_1/\rho_1 + u_1^2/2)] =$$

## 74 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

$$G[(h_s + u_s^2/2) - (h_1 + u_1^2/2)]; \quad (12)$$

obsérvese que si el signo de  $Q$  es positivo el gas absorbe calor a través de las paredes y lo cede si es negativo. En el caso que nos ocupa  $h_s = h_1 = c_p T$  y teniendo en cuenta (5) se obtiene que el calor comunicado al gas a través de las paredes ( $p_1 > p_s = p_a$ ) es

$$Q = \left[ \left( \frac{p_1}{p_a} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{2} \rho_1 u_1^3 A. \quad (13)$$

El problema de calcular la temperatura de la pared para que ésta suministre al gas el calor por unidad de tiempo dado por (13) no se considerará aquí.

Compruebe el lector que en el caso de que por el conducto circulase un líquido de densidad  $\rho$  a temperatura constante, las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía proporcionan

$$u_s = u_1, \quad F_x = \rho u_1^2 A + (p_1 - p_a)A, \quad F_y = \rho u_1^2 A$$

y

$$Q = (p_a - p_1)u_1 A = -(p_1 - p_a)u_1 A;$$

la última ecuación muestra que, al contrario que en el caso del gas, para que el líquido circule por el conducto a temperatura constante, éste debe ceder a la pared del conducto una cantidad de calor por unidad de tiempo que es igual a la potencia que el gas del exterior al volumen (debida a las fuerzas de presión) realiza sobre el del interior a través de las secciones  $A_1$  y  $A_s$ . Obsérvese que un gas fluyendo por un conducto a temperatura constante se expande aguas abajo (la presión disminuye y la densidad también) por lo que hay que comunicarle calor a través de la pared del conducto para que su temperatura no disminuya.

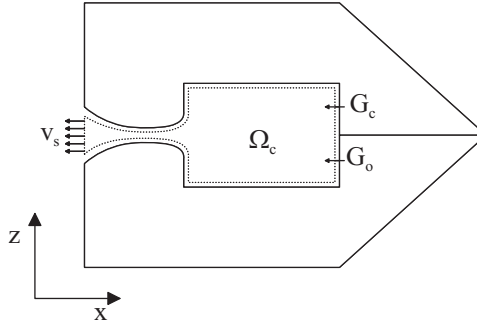
**Problema 3.5**

Un cohete de masa  $M$  variable con el tiempo, como el ilustrado en la figura, que se propulsa en el vacío, posee una cámara de combustión en la que se inyecta un gasto  $G_C$ , constante, de un combustible líquido y un gasto  $G_O$  de oxidante, también constante. Los gases resultantes de la combustión fluyen hacia el exterior a través de una tobera convergente-divergente de área de salida  $A_s$ , de modo que la corriente es supersónica en la parte divergente de la tobera y, por tanto, la presión del gas a la salida de la tobera es distinta de cero.

Aplicando las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía a un volumen de control apropiado se pide:

1. Poder calorífico del combustible para que la velocidad de los gases a la salida sea  $v_s$  y su temperatura  $T_s$  en la sección de salida es dada; densidad y presión a la salida y empuje que suministra el motor del cohete.
2. Ecuación diferencial que describe la dinámica del cohete así como la velocidad del cohete como función del tiempo.

Supongan para los cálculos que los productos resultantes de la combustión se comportan muy aproximadamente como un gas ideal cuyo calor específico a presión constante  $c_p$  y su constante del gas  $R_g$  son conocidos.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Puesto que se desea calcular primeramente las condiciones del gas a la salida y el empuje del cohete se tomará un volumen de control interior a la cámara de combustión. La superficie de control que delimita dicho volumen de control  $\Sigma_c = \Sigma_{ct} + \Sigma_s + \Sigma_C + \Sigma_O$  que descompondremos en  $\Sigma_{ct}$  correspondiente a las paredes fijas de la cámara y tobera,  $\Sigma_s$  correspondiente a la sección de salida de la tobera y dos secciones en los conductos de inyección de combustible y oxidante,  $\Sigma_C$  y  $\Sigma_O$ , justo a la entrada a la cámara de combustión. Para describir el movimiento del fluido se tomarán ejes ligados  $(x, z)$  a la cámara de combustión y tobera respecto a los cuales el movimiento es estacionario.

La conservación de la masa en forma integral extendida a este volumen se expresa

$$\int_{\Sigma_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta las entradas y salidas de masa en el volumen de control, la anterior ecuación se reduce a

$$-G_C - G_O + \rho_s A_s v_s = 0, \quad G = G_C + G_O = \rho_s A_s v_s, \quad (2)$$

donde los gastos de combustible y oxidante son

$$G_C = \int_{\Sigma_C} \rho_C \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{y} \quad G_O = \int_{\Sigma_O} \rho_O \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{n} d\sigma; \quad (3)$$

las cantidades en el integrando representan las densidades y velocidades del combustible y del oxidante en las secciones de entrada a la cámara. La ecuación (2) expresa que la masa por unidad de tiempo que sale por la tobera es igual a la masa de combustible y oxidante que, por unidad de tiempo, entran a la cámara de combustión; como siempre los signos de los diferentes términos en (2) son debidos a los signos de los productos escalares  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  en las diferentes integrales y dado que  $\mathbf{n}$  se toma hacia el exterior del volumen, éstos son negativos en las entradas de fluido en el volumen de control (las superficies  $\Sigma_C$  y  $\Sigma_O$ ) y positivo en las salidas ( $\Sigma_s$ ).

La ecuación de cantidad de movimiento en forma integral extendida al volumen de control considerado se expresa en la forma

$$\int_{\Sigma_c} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_c} p \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' d\sigma, \quad (4)$$

donde no se han tenido en cuenta las fuerzas másicas por tratarse del movimiento de un gas.

Obsérvese que sólo el flujo de cantidad de movimiento de los gases a la salida es significativo en la ecuación (4) ya que los flujos de cantidad de movimiento de oxidante y combustible son despreciables frente al primero. Esto es debido a la tremenda aceleración que experimentan los gases quemados en la tobera que hace que su velocidad a la salida  $v_s$  sea mucho mayor que las velocidades de inyección de combustible  $v_C$  y oxidante  $v_O$ , aunque, naturalmente, la masa de combustible y oxidante inyectadas por unidad de tiempo en el motor sean iguales a la masa de gases quemados que por unidad de tiempo salen por la tobera. Teniendo en cuenta además la uniformidad de las variables a través de la sección de salida de la tobera, el flujo de cantidad de movimiento, en la dirección y sentido de la velocidad de los gases quemados,  $\mathbf{e}_x$ , la única significativa, es

$$\int_{\Sigma_s} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\rho_s v_s^2 A_s \mathbf{e}_x \quad (5)$$

pues  $\mathbf{v} = -v_s \mathbf{e}_x$  y  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$  ( $n_x = -1$ ).

Por otra parte, la resultante de las fuerzas de presión y viscosidad sobre el gas en la dirección  $\mathbf{e}_x$  se escriben

$$\int_{\Sigma_s} -p n_x d\sigma + \int_{\Sigma_{ct}} [-p n_x + (\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}')_x] d\sigma = p_s A_s \mathbf{e}_x - \mathbf{E}, \quad (6)$$

donde  $\mathbf{E}$  representa las fuerzas, de presión y viscosidad, que las paredes fijas de la cámara de combustión y de la tobera ejercen sobre el gas y que, naturalmente, son iguales y de signo contrario a las que el gas ejerce sobre el cohete a través de sus paredes fijas (empuje). Combinando (5) y (6) se obtiene la expresión del empuje

$$\mathbf{E} = (\rho_s v_s^2 + p_s) A_s \mathbf{e}_x = (G v_s + p_s A_s) \mathbf{e}_x. \quad (7)$$

Finalmente, la ecuación de la energía total en forma integral se expresa

$$\int_{\Sigma_c} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_c} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Omega_c} Q_q d\varpi - \int_{\Sigma_c} q \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (8)$$

donde  $\Omega_c$  es el volumen limitado por la superficie cerrada  $\Sigma_c$ ,  $Q_q$  es el calor por unidad de volumen liberado en la reacción química y  $q$  el flujo de calor por conducción. Análogamente al caso de la cantidad de movimiento, el flujo convectivo de energía total es exclusivamente el que sale por la tobera ya que la energía total por unidad de masa de combustible y de oxidante inyectadas por unidad de tiempo son mucho menores que las de los gases quemados,  $e_C \sim e_O \ll e_s$  y  $v_C \sim v_O \ll v_s$ , debido al incremento de temperatura resultante de la combustión y a la enorme aceleración que experimentan los gases en la tobera de salida; se tiene entonces

$$\int_{\Sigma_c} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \rho_s \left( e_s + \frac{v_s^2}{2} \right) v_s A_s. \quad (9)$$

Por otra parte, no hay trabajo de las fuerzas de presión y viscosidad en las paredes fijas,  $\mathbf{v} = 0$  y los esfuerzos normales de viscosidad en la sección de salida son despreciables frente a los de presión por ser muy grande el número de Reynolds del movimiento, véase problemas anteriores. Por tanto, el único trabajo computable es el de las fuerzas de presión a la salida y su valor es

$$-\int_{\Sigma_s} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma = -p_s v_s A_s. \quad (10)$$

Como se vio en el problema anterior (problema 3.5), si el producto de los números de Reynolds y Prandtl es grande frente a la unidad, lo que ocurre en el movimiento de gases a través de una tobera, también es despreciable el flujo de calor por conducción a través de las paredes frente al calor por unidad de tiempo convectado a través de la salida. Lo que sucede es que el tiempo de residencia  $t_r \sim H/U$  de las partículas fluidas en la cámara de tamaño característico  $H$  es muy pequeño comparado con el tiempo de conducción  $H^2/\alpha \sim (\rho c_p H^2/K)$ . Finalmente, si el calor por unidad de tiempo liberado en la combustión es  $\dot{Q} = G_C L$ , siendo  $L$  el poder calorífico del combustible, la ecuación de conservación de la energía, teniendo en cuenta (9) y (10) resulta

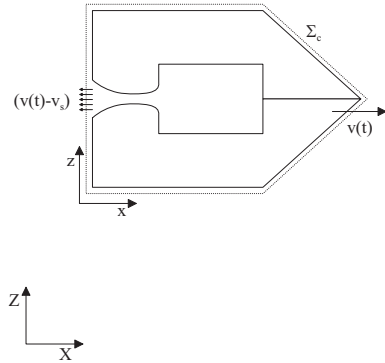
$$\rho_s \left( e_s + \frac{v_s^2}{2} \right) v_s A_s = -p_s A_s + \dot{Q} \quad (11)$$

o en términos de la entalpía, o de la temperatura de los gases a la salida, se tiene

$$\rho_s \left( h_s + \frac{v_s^2}{2} \right) v_s A_s = \rho_s \left( c_p T_s + \frac{v_s^2}{2} \right) v_s A_s = \dot{Q} = G_C L. \quad (12)$$

Las ecuaciones (12), (2) y (7), junto a la ecuación de estado de los gases perfectos determinan el poder calorífico del combustible  $L$ , la densidad y presión del fluido a la salida de la tobera  $p_s$  y  $\rho_s$  y el empuje del cohete  $\mathbf{E}$ , si son conocidos la velocidad  $v_s$  y la temperatura  $T_s$  de los gases a la salida. Conviene indicar que en la práctica lo que se conoce es el poder calorífico del combustible y el gasto del mismo y, por tanto, es necesaria una ecuación adicional para determinar las condiciones del gas a la salida. Dicha ecuación resulta del estudio del movimiento del gas a través de la tobera, cuyo estudio se lleva a cabo en el capítulo 7.

## Apartado 2.-



Para estudiar la dinámica de un sistema de masa variable como el motor cohete es conveniente tomar un volumen de control, como el que se muestra en la figura, que incluye al cohete y al área de salida de la tobera. Para describir tanto el movimiento del gas como el del volumen de control elegido se utilizará un sistema de referencia fijo  $(X, Y, Z)$ . Si la velocidad del cohete respecto a este sistema fijo es  $U(t) \mathbf{e}_X$ , la velocidad de las superficies del volumen de control, que se mueven con el cohete, será también  $\mathbf{v}_c = U \mathbf{e}_X$  mientras que la velocidad del fluido respecto al sistema fijo será suma de la velocidad relativa de los gases respecto al cohete  $-v_s \mathbf{e}_x = -v_s \mathbf{e}_X$  más la velocidad del sistema de referencia móvil con respecto al fijo o velocidad de arrastre  $U(t) \mathbf{e}_X$ ; esto es  $(U - v_s) \mathbf{e}_X$ ; la dirección y el sentido de  $\mathbf{e}_X$  se ha tomado coincidente con el de la velocidad del cohete.

Aplicando la condición de conservación de la masa en dicho volumen de control se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 = \frac{dM}{dt} + \rho_s v_s A_s, \quad (13)$$

donde  $M(t)$  es la masa del cohete. La integración de (13), suponiendo que la masa inicial del mismo es  $M_o$  y que las condiciones a la salida no varían con el tiempo, proporciona la masa del cohete como función del tiempo

$$M(t) = M_o - \rho_s v_s A_s t. \quad (14)$$

## 78 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

La conservación de la cantidad de movimiento en el volumen de control elegido, teniendo en cuenta que los esfuerzos de viscosidad a la salida son despreciables frente a  $\rho_s v_s^2$ , se escribe

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{v} d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_c} p \mathbf{n} d\sigma; \quad (15)$$

obsérvese que no se han tenido en cuenta la acción de las fuerzas másicas, que dependen de la misión que esté realizando el cohete (vuelo orbital, interplanetario, etc.). La proyección de la ecuación anterior según  $\mathbf{e}_X$  (la única dirección en la que hay fuerzas), da lugar a

$$\frac{d}{dt} [M(t)U(t)] \mathbf{e}_X + \rho_s (U(t) - v_s) v_s A_s \mathbf{e}_X = p_s A_s \mathbf{e}_X, \quad (16)$$

o después de simplificar y utilizar la expresión del empuje, véase (7), se obtiene

$$M(t) \frac{dU}{dt} = \rho_s v_s^2 A_s + p_s A_s = E. \quad (17)$$

Dado que el empuje  $E$  no varía con respecto al tiempo, la última ecuación teniendo en cuenta (14) es fácilmente integrable y se obtiene

$$\int_{U_o}^U dU = E \int_0^t \frac{dt}{M_o - \rho_s v_s A_s t}; \quad U = U_o + \frac{E}{\rho_s v_s A_s} \ln \left( \frac{M_o}{M_o - \rho_s v_s A_s t} \right). \quad (18)$$

**Problema 3.6**

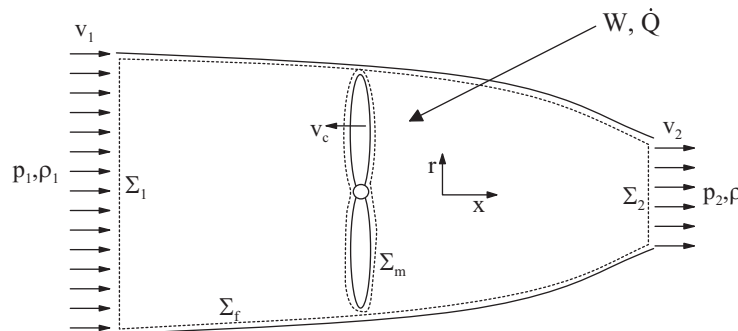
Considérese una máquina térmica como la mostrada en la figura en la que entra un gasto  $G$  de aire cuyas condiciones a la entrada son uniformes y se suponen conocidas. El aire que circula por el interior de la máquina ejerce una fuerza  $F$  sobre la máquina que se puede medir en un banco experimental. Se añade combustible al motor, que reacciona químicamente con el aire circulante liberando un calor por unidad de tiempo  $\dot{Q}$  conocido; se supondrá despreciable la masa de combustible quemada por unidad de tiempo frente al gasto de aire como ocurre en el caso de mezcla estequiométrica. La máquina dispone de unos alabes móviles que extraen un trabajo por unidad de tiempo  $W$  del gas quemado. Detrás de los alabes, el gas se expande a través de una tobera de modo que a la salida de ésta las condiciones del gas son uniformes. Naturalmente dependiendo de las características de diseño de la máquina, ésta puede representar una turbina de gas en la que la misión principal de la máquina es extraer energía mecánica a partir de la térmica (liberada en la combustión) o, también, un propulsor (turbo reactor) donde el objetivo principal es transformar la energía térmica en energía cinética acelerando el gas hasta la salida de modo que resulte en un empuje sobre el motor.

Aplicando las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral a un volumen de control apropiado calcular:

1. Las condiciones del gas a la salida como función de sus condiciones a la entrada de la máquina, de la fuerza ejercida sobre la máquina, del calor por unidad de tiempo liberado en la reacción química añadido y de la potencia mecánica extraída.

En el caso en que el calor añadido a la máquina fuese cero,  $\dot{Q} = 0$ , calcular:

2. La potencia, requerida (compresor) o extraída (turbina) como función de las condiciones del gas en entrada y salida. Calcular la potencia para conseguir una presión  $p_2$  a la salida desde unas condiciones a la entrada  $p_1, \rho_1, v_1$  dadas en el supuesto de que la evolución del gas a través de la máquina fuera isentrópica; consideren los casos de compresor y turbina. Definan el rendimiento de la máquina a partir de la relación entre potencia real e ideal.

Resolución:Apartado 1.-

En lo que sigue se considerará un volumen de control  $\Omega_c$  variable con el tiempo, como el indicado en la figura, interior a la superficie cerrada  $\Sigma_c$  formada por las superficies de entrada  $\Sigma_1$  y salida  $\Sigma_2$ , las paredes fijas mojadas de la máquina  $\Sigma_f$  y las paredes móviles  $\Sigma_m$ . El movimiento del gas se describirá respecto a ejes ligados a las paredes fijas de la máquina.

Conviene observar en primer lugar que, aunque el movimiento del gas en el interior de la máquina no sea estacionario debido fundamentalmente a la existencia de alabes móviles, las condiciones a la entrada



## 80 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

y a la salida son estacionarias y algunas otras cantidades globales como la masa de gas contenida en el interior del volumen de control, o su cantidad de movimiento y su energía total son estacionarias en media, con fluctuaciones en el tiempo pequeñas respecto a su valor medio; esto es, el movimiento del gas puede considerarse globalmente estacionario

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho d\varpi \approx 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \mathbf{v} d\varpi \approx 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho(e + v^2/2) d\varpi \approx 0. \quad (1)$$

Teniendo en cuenta (1), la ecuación de continuidad aplicada al volumen de control considerado se escribe en la forma

$$\int_{\Sigma_c} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{v}_c$  representa la velocidad de las superficies del volumen de control y  $\mathbf{n}$  es la normal a las superficies, dirigida hacia el exterior del volumen de control. Es fácil ver que las integrales de (2) extendidas a las superficies correspondientes a las paredes fijas y móviles son nulas por ser estas superficies impermeables y, por tanto, también lo es el flujo convectivo de masa a través de ellas; matemáticamente, este resultado se obtiene de que la velocidad del fluido es nula,  $\mathbf{v} = 0$ , sobre las paredes fijas,  $\mathbf{v}_c = 0$ , y  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c \neq 0$  sobre las paredes móviles. Por otra parte y teniendo en cuenta la uniformidad de las variables en las superficies de entrada y salida, las integrales extendidas a estas superficies proporcionan que la cantidad de masa por unidad de tiempo o gasto  $G$  que entra en la máquina es igual a la que sale pues no cambia la cantidad de masa contenida en su interior

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_c} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 = 0 \\ \Rightarrow G &= \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son las áreas de las superficies de entrada a la máquina y de salida, respectivamente. Obsérvese que no se ha incluido la masa de combustible en (3) ya que por ser la mezcla estequiométrica (relación 16 a 1) en general, el gasto de combustible es del orden del 6 % del gasto de aire; en cualquier caso, si  $\dot{m}$  representa el gasto de combustible, su cómputo en la conservación de la masa requeriría sustraer  $\dot{m}$  al primer miembro de (3) por ser una entrada de fluido en el volumen de control (a semejanza del flujo de fluido a través de la superficie  $\Sigma_1$ ).

La ecuación de cantidad de movimiento proyectada en la dirección axial del motor (eje  $x$ ) resulta

$$\int_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_f + \Sigma_m} \rho v_x (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_f + \Sigma_m} [-(p - p_a)n_x + (\bar{\tau}' \cdot \mathbf{n})_x] d\sigma, \quad (4)$$

donde se ha incluido la presión atmosférica para tener en cuenta el efecto del gas exterior (véanse los problemas anteriores de este capítulo). Obsérvese que por tratarse del movimiento de un gas en los que el número de Froude,  $Fr = V^2/gH$ , es en general muy grande, no se ha incluido en (4) el efecto de las fuerzas másicas;  $V$  y  $H$  representan aquí una velocidad característica del movimiento y la altura típica de la máquina. Es fácil comprobar que si el número de Froude es grande las fuerzas másicas  $-\int_{\Omega} \rho g \mathbf{e}_z d\omega \sim \rho g A H$  son mucho menores que el flujo convectivo de cantidad de movimiento  $\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \sim \rho V^2 A$ .

El flujo convectivo de cantidad de movimiento según el eje  $x$  a través de las paredes fijas y móviles de la máquina es nulo por las mismas razones que lo era también el flujo de masa; por otra parte, los flujos de cantidad de movimiento según  $x$  a través de la entrada y salida son respectivamente

$$\int_{\Sigma_1} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = -\rho_1 v_1^2 A_1 \quad \text{y} \quad \int_{\Sigma_2} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \rho_2 v_2^2 A_2. \quad (5)$$

La resultante de las fuerzas de presión según el eje  $x$  en las superficies de entrada y salida a la máquina, que representan las fuerzas que el gas situado en el exterior al volumen ejerce a través de estas dos superficies sobre el del interior, son respectivamente

$$\int_{\Sigma_1} -p n_x d\sigma = p_1 A_1 \quad \text{y} \quad \int_{\Sigma_2} -p n_x d\sigma = -p_2 A_2, \quad (6)$$

donde para la integración se ha tenido en cuenta la uniformidad de la presión en las superficies de entrada y salida. Por el contrario, los esfuerzos normales de viscosidad, en las superficies de entrada y salida, los únicos que dan componente en la dirección axial, son muy pequeños frente a la presión en movimientos de fluidos a altos números de Reynolds y pueden, por tanto, despreciarse. En efecto, el término

$$\int_{\Sigma_1} (\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n})_x d\sigma \sim \mu \frac{\partial v}{\partial x} A_1 \sim \mu \frac{v_1 - v_2}{L} A_1 \sim \mu \frac{v_1}{L} A_1,$$

donde en la estimación de órdenes de magnitud se ha tomado la diferencia de velocidades que ocurren en una distancia  $L$  del mismo orden que la velocidad; por otra parte, el flujo de cantidad de movimiento convectivo a través de la entrada es  $\rho_1 v_1^2 A_1$  y el cociente entre ambos muestra que este último es  $Re$  veces mayor que el primero, con  $Re = \rho_1 v_1 L / \mu \gg 1$ .

Teniendo en cuenta los resultados anteriores la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección axial se reduce a

$$-\rho_1 v_1^2 A_1 + \rho_2 v_2^2 A_2 = (p_1 - p_a) A_1 - (p_2 - p_a) A_2 + \int_{\Sigma_f + \Sigma_m} [(-p - p_a) n_x + (\bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n})_x] d\sigma. \quad (7)$$

Por otra parte, si se denomina con el símbolo  $F$  a la fuerza que el gas ejerce sobre las paredes (fijas y móviles) internas de la máquina, teniendo en cuenta el efecto de la presión atmosférica donde se realiza el ensayo, la última de las integrales en (7), que representa las acciones de presión y viscosidad de las paredes fijas y móviles sobre el fluido interior y exterior, valdrá  $-F$  en virtud del principio de acción y reacción. Este resultado, junto con (7), conduce a

$$\begin{aligned} F &= [(p_1 - p_a) + \rho_1 v_1^2] A_1 - [(p_2 - p_a) + \rho_2 v_2^2] A_2 \\ &= G(v_1 - v_2) + (p_1 - p_a) A_1 - (p_2 - p_a) A_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Conviene destacar que si el flujo descarga a la atmósfera subsónicamente, la presión  $p_2$  a la salida es igual a la atmosférica. Sin embargo, si el flujo es sónico o supersónico a la salida el valor de  $p_2$  será en general distinto de  $p_a$ .

La ecuación de la energía total en forma integral (3.4) para el caso de movimientos estacionarios en los que la radiación sea poco significativa se reduce a

$$\int_{\Sigma_c} \rho (e + v^2/2) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_c} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \mathbf{v} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c} K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega_c} q_c d\omega, \quad (9)$$

donde  $K \nabla T$  es el flujo de calor por conducción,  $q_c$  es el calor por unidad de volumen y tiempo liberado en la combustión y  $\Omega$  el volumen encerrado por las superficies de control consideradas.

Como en el caso de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, es fácil ver que el flujo convectivo de energía a través de las paredes fijas y móviles es cero mientras que su valor neto a través de las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  es

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_c} \rho (e + v^2/2) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \rho (e + v^2/2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= -\rho_1 (e_1 + v_1^2/2) v_1 A_1 + \rho_2 (e_2 + v_2^2/2) v_2 A_2. \end{aligned} \quad (10)$$

El trabajo por unidad de tiempo, debido a la presión, que el gas del exterior realiza sobre el del interior a través de las superficies de entrada y salida es, teniendo en cuenta la uniformidad de la velocidad y de la presión a través de estas superficies,

$$- \int_{\Sigma_1} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma = p_1 v_1 A_1 \quad \text{y} \quad - \int_{\Sigma_2} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma = -p_2 v_2 A_2. \quad (11)$$

Obsérvese que el trabajo por unidad de tiempo, debido a la presión, que el gas exterior realiza sobre el del interior a través de la superficie de salida es negativo porque la fuerza de presión que aquél ejerce sobre éste se opone al movimiento ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ ); lo contrario sucede en la superficie de entrada.

El trabajo por unidad de tiempo, debido a las fuerzas de viscosidad, que el gas del exterior hace sobre el del interior a través de la entrada y la salida es despreciable por serlo las fuerzas de viscosidad frente a las de presión en estas secciones. También es nulo el trabajo de las fuerzas de viscosidad a través de las paredes fijas; éstas hacen fuerza sobre el gas pero no realizan trabajo sobre él al ser la velocidad del fluido nula,  $\mathbf{v} = 0$ .

La estimación del calor por unidad de tiempo conducido a través de la sección de entrada (o salida) muestra que éste es muy pequeño frente al calor convectado a través de la misma superficie. En efecto, es fácil comprobar que el calor conducido por unidad de tiempo es muy pequeño frente al calor convectado por unidad de tiempo siempre que el producto de los números de Reynolds y de Prandtl sea muy grande frente a la unidad como sucede en este tipo de movimientos fluidos,

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Sigma_1} K \nabla T \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &\sim K \nabla T A_1 \sim \frac{K \Delta T A_1}{L} \\ \int_{\Sigma_1} \rho (e + v^2/2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &\sim \rho_1 e_1 v_1 A_1 \sim \rho_1 c_v T_1 v_1 A_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\int K \nabla T \cdot \mathbf{n} \, d\sigma}{\int \rho (e + v^2/2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma} \quad (12)$$

$$\sim Re^{-1} \frac{K}{\mu c_v} \frac{\Delta T}{T_1} \sim (Re Pr)^{-1} \ll 1,$$

puesto que las variaciones de temperatura son del orden de la propia temperatura. Es fácil también demostrar, mediante estimaciones de órdenes de magnitud, que el calor por unidad de tiempo conducido a través de las paredes fijas (o móviles) es pequeño frente al calor convectado. En efecto, en este caso la conducción de calor es importante sólo en una capa muy delgada (de espesor  $\delta_T \ll L$ ) adyacente a la pared, denominada capa límite térmica. El espesor de la capa límite térmica se obtiene sin más que imponer que a distancias de la pared fija del orden de  $\delta_T$ , la convección de calor y la conducción de calor son del mismo orden,

$$\left. \begin{aligned} \text{convección} &= \rho c_v \mathbf{v} \cdot \nabla T \sim \frac{\rho c_v V \Delta T}{L} \\ \text{conducción} &= K \nabla^2 T \sim K \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \end{aligned} \right\} \frac{\text{convección}}{\text{conducción}} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_T \sim \frac{L}{\sqrt{Re Pr}}, \quad (13)$$

$\delta_T$  será muy pequeña frente a  $L$  siempre que  $Re Pr \gg 1$ .

Una vez estimado el orden de magnitud del espesor de la capa límite se puede estimar el flujo de calor conducido a través de las paredes  $K \frac{\Delta T}{\delta_T} S$  que es pequeño frente al convectado  $G c_v (T_2 - T_1)$ ; el cociente relativo es  $(S/A)/(Re Pr)^{1/2} \ll 1$  siempre que  $Re Pr \gg 1$  y que el cociente entre el área de la pared y el área transversal de la máquina  $S/A$  no sea excesivamente grande; obsérvese que dicho número es muy grande frente a la unidad excepto si la longitud de la máquina térmica fuese extraordinariamente grande  $L \sim \sqrt{Re Pr A_1}$ . Lo anterior puede explicarse también siempre que el gas atravesase la máquina en un tiempo mucho más corto que el tiempo necesario para que las partículas fluidas conduzcan una cantidad apreciable de calor.

Finalmente, el calor por unidad de tiempo generado en la combustión  $\dot{Q}$  puede calcularse fácilmente conociendo el caudal  $\dot{m}$  de combustible quemado y el poder calorífico del combustible  $L$  o energía liberada por unidad de masa de combustible quemado, donde  $L$  es típicamente  $40.000 \text{ kJ/kg}$  para los combustibles fósiles. Se tiene entonces  $\int_{\Omega} q_c \, d\omega = \dot{Q} = \dot{m} L$  y  $\dot{m}$  es aproximadamente un dieciseisavo del gasto de aire.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la ecuación de la energía se reduce a

$$\begin{aligned} -\rho_1 (e_1 + v_1^2/2) v_1 A_1 + \rho_2 (e_2 + v_2^2/2) v_2 A_2 = \\ p_1 v_1 A_1 - p_2 v_2 A_2 + \int_{\Sigma_m} [-p \mathbf{n} + \bar{\tau}' \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} \, d\sigma + \dot{Q}. \end{aligned} \quad (14)$$

La integral extendida a las paredes móviles en la ecuación (14) no puede calcularse ya que no se conocen allí ni la presión ni los esfuerzos de viscosidad; no obstante este término representa el trabajo, debido a la presión y a la viscosidad, que los alabes móviles realizan sobre el gas. Si se denomina  $W$  a este trabajo, el que realiza el gas sobre los ejes móviles será igual a  $-W$ ; obsérvese que sólo mediante máquinas que dispongan

de paredes sólidas móviles se puede extraer (comunicar) trabajo mecánico del (al) fluido que circula a través de ellas. Utilizando la entalpía  $h = e + p/\rho$ , la ecuación de la energía resulta finalmente

$$G[(h_2 + v_2^2/2) - (h_1 + v_1^2/2)] = \dot{Q} - W, \quad (15)$$

que muestra que el calor y el trabajo por unidad de masa  $(\dot{Q} - W)/G$  aportado (extraído) a un fluido es igual a la diferencia de entalpías de remanso que posee el fluido en las secciones de salida y de entrada de la máquina.

Un caso especial de estas máquinas lo constituyen aquellas en las que no se añade calor neto al fluido  $\dot{Q} = 0$ , así que la máquina y el fluido intercambian sólo energía mecánica. Es éste el caso de los compresores y las turbinas de gas en los que se comunica trabajo mecánico al gas (compresores) o se extrae de éste (turbinas), o el de las denominadas bombas y turbinas hidráulicas para el caso en el que el fluido de trabajo sea un líquido.

Para el caso de un compresor (15) puede escribirse

$$W_c = G \left[ h_2 + \frac{v_2^2}{2} - \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \right] > 0, \quad (16)$$

y para una turbina

$$W_t = G \left[ h_1 + \frac{v_1^2}{2} - \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] > 0. \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17) expresan que la potencia es igual a la diferencia entre los flujos de entalpía de remanso que salen y entran del volumen considerado. Por otra parte, para un sistema globalmente estacionario al que no se le aporta calor, por radiación, combustión y/o conducción a través de las paredes se cumple que la entropía de las partículas fluidas aumenta a su paso por el sistema debido a posibles efectos de la fricción y conducción de calor en capas límites y estelas; esto es

$$S_2 - S_1 \geq 0, \quad (18)$$

que como se verá en lo que sigue esta desigualdad está estrechamente relacionada con el rendimiento de la turbina o compresor.

En efecto, si fijadas unas condiciones a la entrada  $p_1, \rho_1, v_1$  y una presión  $p_2$  especificada a la salida de la máquina, la potencia que habría que comunicar al gas si su evolución en el compresor fuese isentrópica sería

$$W_{cs} = G \left[ \left( h_{2s} + \frac{v_{2s}^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) \right] \quad (19)$$

donde  $\rho_{2s} = \rho_1(p_2/p_1)^{1/\gamma}$  y  $v_{2s} = G/(\rho_{2s}A_2)$  son la densidad del gas y la velocidad del gas a la salida de la máquina. Análogamente, la potencia extraída por una turbina en la que el gas evoluciona isentrópicamente desde las condiciones  $p_1, \rho_1, v_1$  hasta una presión de salida  $p_2$  sería

$$W_{ts} = G \left[ \left( h_{1s} + \frac{v_{1s}^2}{2} \right) - \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right]. \quad (20)$$

La diferencia de la potencia de compresores y turbinas genéricas [(16) y (17)] con aquéllas de evolución isentrópica [(19) y (20)] se puede escribir de la forma

$$W_c - W_{cs} = G \left( h_2 - h_{2s} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_{2s}^2}{2} \right) = G(e_2 - e_{2s}) + p_2 A_2 (v_2 - v_{2s}) + G \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_{2s}^2}{2} \right) \quad (21)$$

y

$$W_{ts} - W_t = G \left( h_2 - h_{2s} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_{2s}^2}{2} \right) = G(e_2 - e_{2s}) + p_2 A_2 (v_2 - v_{2s}) + G \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_{2s}^2}{2} \right) \quad (22)$$

y puede interpretarse como las pérdidas existentes en un proceso real originadas por los excesos, respecto a la evolución isentrópica, de energía interna, potencia de las fuerzas de presión a la salida y de energía cinética.

## 84 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Es fácil demostrar que cada uno de los tres términos es positivo y, por tanto,  $W_c > W_{cs}$  y  $W_{ts} > W_t$ ; esto es  $W_{ts}$  y  $W_{cs}$  son, respectivamente, la potencia máxima que puede extraerse de la turbina y la potencia mínima que es necesaria comunicar al compresor para obtener la presión especificada a la salida partiendo de unas condiciones a la entrada. En efecto, de la condición  $S_2 > S_1 = S_{2s}$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} > \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_{2s}^\gamma} &\rightarrow \rho_{2s} > \rho_2 \quad \frac{p_2}{R_g T_{2s}} > \frac{p_2}{R_g T_2} \\ \rightarrow T_2 = \frac{e_2}{c_v} > T_{2s} = \frac{e_{2s}}{c_v} \quad \text{y} \quad v_{2s} = \frac{G}{\rho_{2s} A_2} < v_2 = \frac{G}{\rho_2 A_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Se acostumbra a relacionar la potencia de la máquina con el salto de presiones entre la entrada y la salida. Para ello es necesario conocer una relación adicional entre las magnitudes fluidas. Si no se aplica la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral (que introduciría la fuerza resultante sobre la máquina como incógnita adicional), es necesario describir la evolución que experimentan las partículas fluidas entre la entrada y la salida o, en su lugar, especificar el rendimiento de la máquina. En el caso de gases, se supone que la forma de la relación isentrópica entre la presión y la densidad se conserva y sólo cambia el exponente, en el que se sustituye el cociente de calores específicos  $\gamma$  por un coeficiente experimental, denominado índice politrópico que, en general, depende de las condiciones de funcionamiento de la máquina (determinadas por el gasto y el salto de presiones). Se tiene entonces la relación

$$\frac{p_2}{\rho_2^n} = \frac{p_1}{\rho_1^n}. \quad (24)$$

Obsérvese que, de acuerdo con (23),

$$\rho_2 = \rho_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \rho_{2s} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_1; \quad (25)$$

puesto que en un compresor  $p_2/p_1 > 1$ , se tiene  $n \geq \gamma$ , mientras que para una turbina ( $p_2/p_1 < 1$ ), (25) conduce a que  $n \leq \gamma$ .

En función del salto de presiones, la potencia requerida por el compresor es

$$\begin{aligned} W_c &= G \left[ h_1 \left( \frac{h_2}{h_1} - 1 \right) + \frac{v_1^2}{2} \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) \right] \\ &= G \left\{ h_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right] + \frac{v_1^2}{2} \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{2/n} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

y

$$\begin{aligned} W_t &= G \left[ h_1 \left( \frac{1-h_2}{h_1} \right) + \frac{v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \right] \\ &= G \left\{ h_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(n-1)/n} \right] + v_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{2/n} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Si la energía cinética fuese también despreciable frente a la térmica,<sup>3</sup> las ecuaciones (26)-(27) se simplifican para dar

$$W_c = G h_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right] \quad \text{y} \quad W_t = G h_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(n-1)/n} \right]. \quad (28)$$

<sup>3</sup> Lo que ocurre cuando el número de Mach  $M = v/a$  es mucho menor que la unidad ( $v$  y  $a$  son respectivamente la velocidad del fluido y la del sonido)

$$\frac{v^2}{h} = \frac{(\gamma-1)\rho v^2}{\gamma p} = (\gamma-1) \frac{v^2}{a^2} = (\gamma-1) M^2.$$

Finalmente, el rendimiento de un compresor se define como

$$\eta_c = \frac{W_{cs}}{W_c} \quad \text{y} \quad \eta_t = \frac{W_t}{W_{ts}}, \quad (29)$$

los cuales, si la energía cinética es despreciable, se expresan como

$$\eta_c = \frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(n-1)/n} - 1} \quad \text{y} \quad \eta_t = \frac{1 - (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}}{1 - (p_2/p_1)^{(n-1)/n}}. \quad (30)$$

Compruebe el lector que las expresiones anteriores son también aplicables al caso de un líquido que circula por una bomba o una turbina hidráulica sin más que añadir el trabajo de las fuerzas másicas a través de su potencial  $U$  que se ha despreciado para el caso de gases. En efecto, las potencias, requerida por una bomba y la suministrada por una turbina, son respectivamente

$$W_b = Q [p_{o2} - p_{o1} + \rho (U_2 - U_1) + \rho c (T_2 - T_1)] \quad (31)$$

y

$$W_t = Q [p_{o1} - p_{o2} + \rho (U_1 - U_2) + \rho c (T_1 - T_2)], \quad (32)$$

donde  $p_{o1} = p_1 + (1/2)\rho v_1^2$  y  $p_{o2} = p_2 + (1/2)\rho v_2^2$  son las presiones de remanso del líquido a la entrada y salida de la máquina y  $Q$  es el caudal de líquido vehiculado. Para una evolución isentrópica se tiene  $T_1 = T_2$ , mientras que para una evolución real  $W_b$  y  $W_t$  pueden expresarse en términos de la diferencia de presiones  $p_2 - p_1$  y del caudal si se conocen los rendimientos  $\eta_b$  y  $\eta_t$ . Se tiene en este caso

$$W_b = \frac{1}{\eta_b} W_{bs} = \frac{1}{\eta_b} Q [p_{o2} - p_{o1} + \rho (U_2 - U_1)] \quad (33)$$

y

$$W_t = \eta_t W_{ts} = \eta_t Q [p_{o1} - p_{o2} + \rho (U_1 - U_2)]. \quad (34)$$

Obsérvese que dados la potencia real y el rendimiento, las ecuaciones (31)-(32) y (33)-(34) permiten calcular el incremento de temperaturas  $(T_2 - T_1)$  que experimenta el fluido a su paso por la máquina en función de la diferencia de presiones y del caudal.



## CAPÍTULO 4

# Análisis dimensional y semejanza física

### Introducción

El análisis dimensional se basa en el principio de que las relaciones funcionales entre las variables que intervienen en un fenómeno físico dado son independientes del sistema de unidades elegido. Como se verá posteriormente, dicho principio permite expresar toda la información contenida en las relaciones funcionales en variables físicas en términos de un número menor de variables o parámetros adimensionales obtenidos a partir de los originales. En problemas complejos dicha reducción representa enormes ventajas, no sólo desde el punto de vista analítico, sino también desde el experimental, ya que reduce drásticamente el número de medidas a realizar y, por tanto, el coste de los experimentos.

Por otra parte, sucede a menudo que muchos fenómenos físicos no pueden ser investigados directamente ante la dificultad de reproducir a escala natural en el laboratorio el proceso real que se desea investigar. La teoría de la *semejanza física* asegura que si la geometría involucrada en dos problemas a distinta escala espacial es semejante y los valores de los parámetros adimensionales que gobiernan ambos problemas son los mismos, los problemas se dicen *físicamente semejantes*, en el sentido de que en puntos e instantes homólogos (adimensionalmente iguales) las variables adimensionales a determinar son también las mismas, de forma que se puede trasladar automáticamente la solución de un problema a otro.

### Teorema II

Considérese una relación funcional entre las cantidades físicas  $a_o, a_1, \dots, a_n$ ,

$$a_o = f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n). \quad (4.1)$$

Si  $k$  es el número de dimensiones físicas independientes del problema ( $k = 2$  para un problema cinemático,  $k = 3$  para uno mecánico y  $k = 4$  para uno termomecánico), se supondrá que entre las  $(n+1)$  magnitudes  $a_i$  existen  $k < (n+1)$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , dimensionalmente independientes. Por tanto, existen exponentes  $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,k}$  ( $i = 0, k+1, \dots, n$ ) tales que

$$[a_i] = [a_1]^{\alpha_{i,1}} [a_2]^{\alpha_{i,2}} \dots [a_k]^{\alpha_{i,k}}, \quad (4.2)$$

de forma que las cantidades

$$\pi_i = \frac{a_i}{a_1^{\alpha_{i,1}} a_2^{\alpha_{i,2}} \dots a_k^{\alpha_{i,k}}} \quad i = 0, k+1, \dots, n, \quad (4.3)$$

son adimensionales. Despejando  $a_o, a_{k+1}, \dots, a_n$  de (4.3) y sustituyendo en (4.1) se obtiene una relación de la forma

$$\pi_o = g(a_1, a_2, \dots, a_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n). \quad (4.4)$$

Ahora bien, puesto que (4.4) es independiente del sistemas de unidades se concluye que

$$\pi_o = g(\pi_{k+1}, \dots, \pi_n). \quad (4.5)$$

Obsérvese que aparece un conjunto de variables o parámetros adimensionales en un número menor,  $n+1-k$ , que el de variables físicas originales. Esta conclusión general de la teoría dimensional se conoce con el nombre de teorema II o de Vaschy-Buckingham.



A efectos prácticos conviene indicar que, aunque el método del análisis adimensional enseña la forma de reducir un número de variables dimensionales a un número menor y determinado de parámetros adimensionales, dicho método no especifica, naturalmente, qué conjunto de variables dimensionalmente independientes conviene usar en un problema concreto, ni qué parámetros adimensionales deben elegirse.

### Parámetros adimensionales usuales de la Mecánica de Fluidos

Como es sabido, los problemas de la Mecánica de Fluidos están gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes sujetas a las condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Al adimensionalizar los funcionales para las variables que aparecen en dichos problemas surgen ciertos parámetros y variables adimensionales de uso común en el análisis de los problemas fluidomecánicos. Algunos de ellos son:

1. *Número de Strouhal*. Se define como

$$St = \frac{L}{tV}, \quad (4.6)$$

donde  $L$ ,  $t$  y  $V$  representan respectivamente una longitud, tiempo y velocidad característicos del problema. Puede interpretarse como el cociente entre un tiempo de residencia  $L/V$  de las partículas en el dominio fluido y un tiempo característico  $t$  asociado a la no estacionariedad (por ejemplo, de variación de las condiciones de contorno). Si  $St \ll 1$  el movimiento puede considerarse casi estacionario.

2. *Número de Mach*. Se define como

$$M = \frac{V}{a}, \quad (4.7)$$

donde  $V$  es una velocidad característica del fluido y  $a$  es la velocidad del sonido; para un gas ideal  $a = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ , donde  $p$  y  $\rho$  son una presión y densidad característica del fluido. Generalmente, movimientos a bajos números de Mach pueden considerarse casi incompresibles.

3. *Número de Froude*. Se define como

$$Fr = \frac{V^2}{Lg}, \quad (4.8)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Mide la importancia de las fuerzas de inercia convectivas frente a las gravitatorias. También puede interpretarse como la relación entre una energía cinética específica característica de las partículas fluidas,  $V^2$ , y una variación de energía potencial específica,  $gL$ , asociada a variación de cota del orden de la longitud característica del dominio fluido. En movimientos en los que  $Fr \gg 1$  las fuerzas gravitatorias son despreciables.

4. *Número de Reynolds*. Se define como

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}, \quad (4.9)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad del fluido. Mide la importancia relativa entre las fuerzas de inercia convectiva, caracterizadas por el término  $\rho|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}| \sim \rho V^2/L$ , y las fuerzas de viscosidad, caracterizadas por el término  $\mu|\nabla^2 \mathbf{v}| \sim \mu V/L^2$ . En el movimiento en conductos aparece el número  $ReD/L = \rho V D^2/L$  donde  $D$  es un diámetro característico del conducto y  $L$  su longitud.

5. *Número de Prandtl*. Se define como

$$Pr = \frac{\mu c_p}{K}, \quad (4.10)$$

donde  $c_p$  es el calor específico a volumen constante y  $K$  es el coeficiente de conductividad térmica del fluido. El número de Prandtl es una propiedad del fluido, y compara la capacidad de un fluido para transferir, por difusión, cantidad de movimiento y calor.

6. *Número de Peclet*. Se define como

$$Pe = RePr = \frac{\rho c_p V L}{K}. \quad (4.11)$$

Mide la importancia relativa de la convección de calor, caracterizada por el término  $\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T \sim \rho c_p V \Delta T / L$ , frente al calor recibido por conducción, caracterizado por el término  $K \nabla^2 T \sim K \Delta T / L^2$ ;  $\Delta T$  denota una diferencia de temperaturas típica en el fluido.

7. *Número de Eckert*. Se define como

$$Ec = \frac{V^2}{c_p \Delta T}. \quad (4.12)$$

Mide la importancia relativa de la convección de energía cinética, caracterizado por el término  $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla v^2/2 \sim \rho V^3/L$ , frente al efecto de convección de entalpía (convección de calor), caracterizado por el término  $\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T \sim \rho c_p V \Delta T/L$ .

Otros parámetros adimensionales que aparecen en el movimiento de los fluidos se introducirán en el transcurso de los problemas.

**Problema 4.1**

Un recipiente cilíndrico de diámetro  $D$  está lleno hasta una altura  $L$  de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . A partir de un cierto instante se pone en movimiento el cilindro con una velocidad angular constante  $\Omega$ , con lo que el líquido adquiere un movimiento dependiente de las fuerzas gravitatorias y de las asociadas a la rotación. Despreciando las fuerzas de tensión superficial así como la viscosidad del aire frente a la del líquido, se pide:

1. Utilizando el Análisis Dimensional escribir la forma más simplificada de la evolución con el tiempo de la altura  $h$  del líquido en el eje y de la presión en el fondo, supuestos despreciables los efectos de la tensión superficial.
2. Límite de las expresiones del apartado 1 para tiempos grandes.
3. Calcular los valores de  $L_A$ ,  $D_A$  y  $\Omega_A$  que han de utilizarse cuando se pretende determinar los apartados 1 y 2 haciendo un experimento con agua (densidad  $\rho_A$  y viscosidad  $\mu_A$ ).

Resolución:Apartado 1.-

El problema aquí tratado se conoce con el nombre de *spin-up* en la literatura especializada. En ejes ligados al recipiente las ecuaciones generales que gobiernan el movimiento del líquido son,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \rho \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \rho g \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$  es la velocidad angular del recipiente; debido a la axilsimetría del problema los campos de velocidades y de presiones son independientes de la coordenada acimutal,  $\theta$ , y sólo dependen de las coordenadas radial,  $r$ , y la vertical,  $z$ ,  $\mathbf{v} = v_r(r, z, t) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, z, t) \mathbf{e}_\theta + v_z(r, z, t) \mathbf{e}_z$  y  $p = p(r, z, t)$ . Las ecuaciones (1)-(2) deben suplementarse con la ecuación de la superficie fluida para la interfase aire-líquido, desconocida *a priori*, y definida por la ecuación  $f(z, r, t) \equiv z - z_s(r, t) = 0$ ,

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} - v_z(r, z_s, t) + v_r(r, z_s, t) \frac{\partial z_s}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

El sistema (1)-(3) debe resolverse sujeto a las condiciones iniciales y de contorno

$$t = 0 : \quad \mathbf{v}(0, r, z) = 0, z_s(0, r) = L, \quad (4)$$

$$r = D : \quad \mathbf{v}(D, z, t) = 0, \quad (5)$$

y la continuidad de esfuerzos normales y tangenciales en la interfase, que implica

$$z = z_s(r, t) : p - \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{n} = p_a, \quad \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' - \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}' \cdot \mathbf{nn} = 0, \quad (6)$$

donde  $\bar{\bar{\tau}}' = \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$  es el tensor de esfuerzos de viscosidad del líquido. De las ecuaciones (1)-(6) se deducen los funcionales para  $\mathbf{v}$ ,  $p$  y  $z_s$ ,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, r, z, \rho, \mu, \Omega, D, L), \quad (7)$$

$$p - p_a = p(t, r, z, \rho, \mu, g, \Omega, D, L), \quad (8)$$

$$z_s = z_s(t, r, \rho, \mu, g, \Omega, D, L); \quad (9)$$

en particular, para la altura del líquido en el eje,  $h \equiv z_s(0, t)$ , y la distribución de presiones en el fondo,  $p_o \equiv p(t, r, 0)$ , se tienen

$$h = h(t, \rho, \mu, g, \Omega, D, L), \quad (10)$$

$$p_o - p_a = p(t, r, \rho, \mu, g, \Omega, D, L). \quad (11)$$

Los funcionales (10)-(11) pueden adimensionalizarse usando las magnitudes dimensionalmente independientes  $\rho$ ,  $\Omega$  y  $D$ , obteniéndose

$$\frac{h}{D} = \eta[\Omega t, Re, g/(D\Omega^2), L/D], \quad (12)$$

$$\frac{p_o - p_a}{\rho\Omega^2 D^2} = \xi[\Omega t, Re, g/(D\Omega^2), r/D, L/D]. \quad (13)$$

### Apartado 2.-

Inicialmente, el movimiento del recipiente sólo afecta a estrechas capas límites adyacentes a las paredes del recipiente. La velocidad acimutal en la capa límite sobre el fondo del recipiente, denominada *capa de Ekman*, origina fuerzas centrífugas que impulsan al fluido hacia las paredes laterales y éste asciende por ellas hasta la superficie libre elevándose, por tanto, el nivel de la misma cerca de los bordes del recipiente; se crea así un gradiente de presiones que impulsa al fluido hacia el eje, donde desciende de vuelta hacia el fondo. Las corrientes meridionales así creadas transportan cantidad de movimiento desde las paredes hasta las regiones centrales del recipiente. El tiempo característico del proceso puede estimarse igualando los órdenes de magnitud del término de aceleración local con el de las fuerzas centrífugas y con el de Coriolis. Teniendo en cuenta que  $|\mathbf{v}| \sim \Omega D$  se tiene,

$$\rho|\partial\mathbf{v}/\partial t| \sim \rho\Omega D/t_o \sim \rho|\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})| \sim \rho\Omega^2 D \sim \rho|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}| \rightarrow t_o \sim \Omega^{-1}. \quad (14)$$

Para tiempos grandes,  $\Omega t \rightarrow \infty$ , las fuerzas de viscosidad amortiguan el movimiento del fluido relativo al cilindro y se obtiene una rotación como sólido rígido. En este régimen las variables fluidas son, por tanto, independientes del tiempo y de la viscosidad. (12) y (13) proporcionan entonces

$$\frac{h}{D} = \eta[g/(D\Omega^2), L/D], \quad (15)$$

$$\frac{p_o - p_a}{\rho\Omega^2 D^2} = \xi[g/(D\Omega^2), r/D, L/D]. \quad (16)$$

Las funciones  $\eta$  y  $\xi$  pueden hallarse de la solución fluidostática,

$$z_s(r) = L - \Omega^2 D^2/(16g) + \Omega^2 r^2/(2g), \quad (17)$$

$$p(r, z) - p_a = \rho g(L - z) + \rho\Omega^2 r^2/2 - \rho\Omega^2 D^2/16; \quad (18)$$

escribiendo (17) y (18) en forma adimensional se obtienen

$$\frac{z_s(r)}{D} = \frac{L}{D} - \frac{\Omega^2 D}{16g} \left(1 - \frac{r^2}{D^2}\right), \quad (19)$$

$$\frac{p(r, z) - p_a}{\rho\Omega^2 D^2} = \frac{g}{D\Omega^2} \frac{L - z}{D} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{1}{16}. \quad (20)$$

Particularizando (19)-(20) en  $r = 0$  y  $z = 0$  respectivamente resulta

$$\frac{h}{D} = \frac{L}{D} - \frac{\Omega^2 D}{16g}, \quad (21)$$

$$\frac{p_o - p_a}{\rho\Omega^2 D^2} = \frac{g}{D\Omega^2} \frac{L}{D} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{1}{16}, \quad (22)$$

## 92 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

que determinan los funcionales  $\eta$  y  $\xi$  en (15) y (16).

### Apartado 3.-

Para que el experimento con agua sea físicamente semejante deben ser iguales los parámetros adimensionales de los dos problemas,

$$Re = \frac{\rho \Omega D}{\mu} = \frac{\rho_A \Omega_A D_A}{\mu_A} = Re_A, \quad \frac{g}{D \Omega^2} = \frac{g}{D_A \Omega_A^2}, \quad \frac{L}{D} = \frac{L_A}{D_A}, \quad (23)$$

de donde se obtienen

$$D_A = D(\nu/\nu_A)^{-2}, \quad \Omega_A = \Omega(\nu/\nu_A), \quad L_A = L(\nu/\nu_A)^{-2}. \quad (24)$$

Una vez determinados  $D_A$ ,  $\Omega_A$  y  $L_A$ , los valores experimentales obtenidos con agua pueden ser extrapolados al otro líquido teniendo en cuenta que los valores adimensionales de las variables deben ser iguales en puntos e instantes homólogos

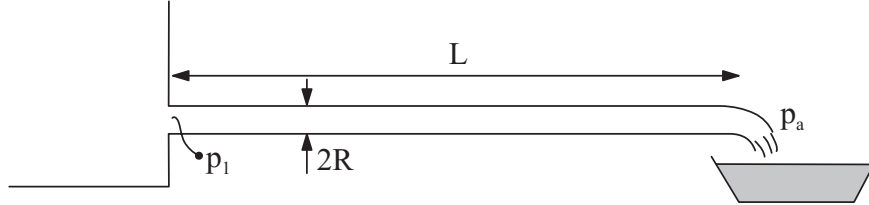
$$r = r_A D / D_A, \quad z = z_A D / D_A, \quad t = t_A \Omega_A / \Omega, \quad (25)$$

donde  $(r_A, z_A)$  y  $t_A$  representan un punto e instante genéricos en el experimento con agua. En particular, se tiene

$$h(t) = D h_A(t_A) / D_A \quad \text{y} \quad p_o(r, t) - p_a = \rho \Omega^2 D^2 [p_o(r_A, t_A) - p_a] / (\rho_A \Omega_A^2 D_A^2). \quad (26)$$

**Problema 4.2**

Considérese la descarga de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  a través de un conducto horizontal, de longitud  $L$  y sección circular de radio  $R$ , como el esquematizado en la figura. Haciendo uso del análisis dimensional encontrar la relación más simplificada posible del tiempo  $\tau$  requerido para que descargue un volumen de líquido dado cuando entre los extremos del tubo se impone una caída de presión  $\Delta p = p_1 - p_a$  conocida, donde  $p_a$  es la presión del ambiente al que descarga el líquido.

Resolución:

Las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el movimiento estacionario, con simetría axial, del líquido en el conducto son

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{y} \quad \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1)$$

El sistema es de segundo orden en las derivadas espaciales de la velocidad y de primer orden en la presión; por tanto, como condiciones de contorno se impondrá que la velocidad del fluido en la pared del conducto sea nula y que la velocidad del líquido sea regular en el eje

$$u(x, R) = 0 \quad \text{y} \quad u(x, 0) \neq \infty. \quad (2)$$

A la entrada del conducto se supondrá que la velocidad es uniforme a través de la sección, lo que ocurre con gran aproximación en la mayoría de los casos prácticos y la presión allí es también uniforme a través de la sección y conocida

$$u(0, r) = u_o = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \text{y} \quad p(0, r) = p_1. \quad (3)$$

Puesto que el caudal es desconocido hay que imponer una condición adicional en la presión; se impondrá que la presión del líquido en la sección de salida es la del ambiente

$$p(L, r) = p_a. \quad (4)$$

La resolución, en general numérica o experimental, del problema (1)-(4) permite determinar las distribuciones de presión y velocidad a lo largo del conducto y a partir de ahí cualquier parámetro de interés como por ejemplo, el caudal que circula por el conducto

$$Q = \int_0^R v_x 2\pi r dr, \quad (5)$$

donde  $v_x$  es la componente de la velocidad según el eje  $x$ , y el tiempo  $\tau = V/Q$  requerido para descargar un volumen dado  $V$  de líquido.

La dependencia funcional del tiempo  $\tau$  será de la forma

$$\tau = F(\rho, \mu, \Delta p, V, L, D); \quad (6)$$

que como se ve depende de las propiedades (viscosidad y densidad) del líquido, de la diferencia de presiones aplicada y de los parámetros que definen la geometría del conducto. Debe indicarse, no obstante, que las

## 94 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

ecuaciones (1) son válidas sólo para el régimen estacionario denominado laminar. Es bien sabido que para números de Reynolds por encima de un cierto valor, el movimiento del líquido adquiere un comportamiento no estacionario, fluctuante y caótico, denominado turbulento, aunque las condiciones de contorno en la entrada y salida del conducto se mantengan estacionarias. Es también sabido, que si estas condiciones se mantienen estacionarias, las magnitudes medias del movimiento del líquido son estacionarias aunque su cálculo debe hacerse con las ecuaciones para el movimiento medio denominadas de Reynolds. Cuando el movimiento es turbulento es necesario añadir un parámetro más a (6) para caracterizar la rugosidad de la superficie; éste suele ser una distancia que caracteriza la rugosidad media  $e$  (tamaño medio de grano) de la pared.

El teorema II enseña a reducir el número de las variables involucradas en (6) cuando la relación funcional se establece entre magnitudes adimensionales. En efecto, si como magnitudes independientes se usan  $\tau$ ,  $V$  y  $\mu$ , las dimensiones de las restantes se pueden definir a partir de las de éstas

$$[\rho] = [ML^{-3}] = [\tau]^\alpha [V]^\beta [\mu]^\gamma = [T]^\alpha [L^3]^\beta [ML^{-1}T^{-1}]^\gamma \Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = -2/3 \quad \text{y} \quad \gamma = 1, \quad (7)$$

de modo que la cantidad  $\rho V^{2/3}/(\tau\mu)$  es adimensional. Análogamente,

$$[\Delta p] = [ML^{-1}T^{-2}] = [\tau]^{\alpha'} [V]^{\beta'} [\mu]^{\gamma'} = [T]^{\alpha'} [L^3]^{\beta'} [ML^{-1}T^{-1}]^{\gamma'} \Rightarrow \alpha' = -1, \quad \beta' = 0 \quad \text{y} \quad \gamma' = 1, \quad (8)$$

por tanto, la cantidad  $\Delta p\tau/\mu$  es adimensional como lo son también  $L/V^{1/3}$ ,  $D/V^{1/3}$  y  $e/V^{1/3}$ . En las variables adimensionales, la dependencia funcional (6) resulta

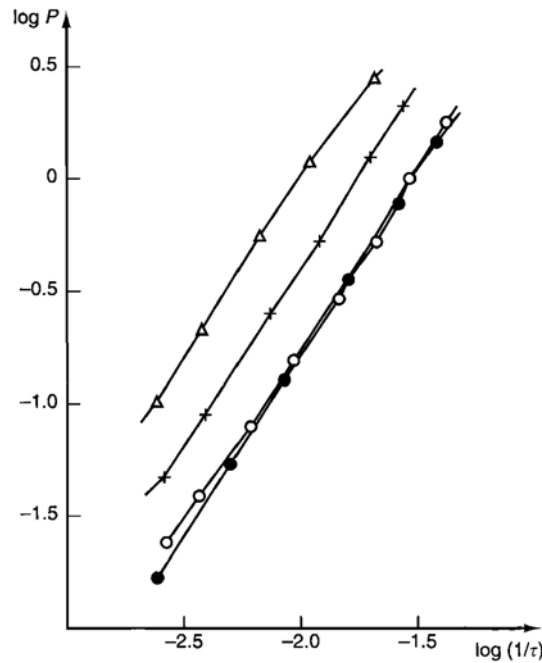
$$1 = F_0 \left( \frac{\rho V^{2/3}}{\tau\mu}, \frac{\Delta p\tau}{\mu}, \frac{L}{V^{1/3}}, \frac{D}{V^{1/3}}, \frac{e}{V^{1/3}} \right) \quad \text{o} \quad \frac{\Delta p\tau}{\mu} = F_1 \left( \frac{\rho V^{2/3}}{\tau\mu}, \frac{L}{V^{1/3}}, \frac{D}{V^{1/3}}, \frac{e}{V^{1/3}} \right). \quad (9)$$

Obsérvese además que si el conducto es dado, los parámetros geométricos son constantes (no varían al variar los líquidos empleados o el gradiente de presiones aplicado) y dado que el volumen de líquido vertido es constante, la relación adimensional (9) se simplifica notablemente para dar

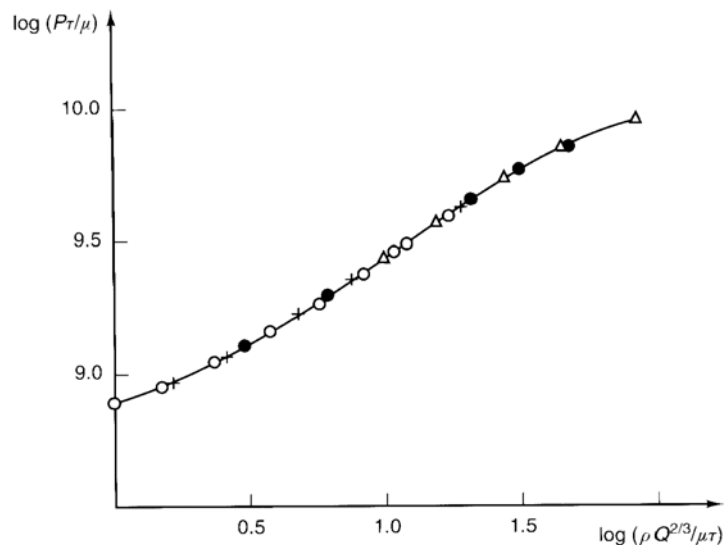
$$\frac{\Delta p\tau}{\mu} = F_1 \left( \frac{\rho V^{2/3}}{\tau\mu} \right). \quad (10)$$

Obsérvese que el argumento de la función  $F_1$  se puede interpretar como un número de Reynolds multiplicado por un cociente de longitudes, que como es sabido mide la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las de viscosidad; en efecto,  $\rho V^{2/3}/(\tau\mu) \sim \rho Q/(\mu V^{1/3}) \sim \rho U D^2/(\mu V^{1/3}) \sim Re D/V^{1/3}$ , donde  $Q$  es el caudal y  $U \sim Q/D^2$  es la velocidad media del líquido en el conducto.

Para demostrar la potencia del análisis adimensional se utilizarán los datos de los estudios experimentales obtenidos por los físico-químicos E. Bose, D. Rauert y M. Bose quienes a principios del pasado siglo midieron el tiempo requerido  $\tau$  para descargar un volumen dado  $V$  de líquido y la caída de presión entre los extremos del conducto utilizando una instalación experimental como la mostrada en el enunciado. Varios fueron los líquidos utilizados en el estudio experimental (agua, cloroformo, bromoformo, mercurio, etil-alcohol, etc.) y en todos los experimentos realizados el movimiento del líquido era turbulento. Los resultados obtenidos se dieron en gráficas como la de la figura donde representaron la caída de presión como función del tiempo  $\tau$ . Cada curva corresponde a un líquido diferente (○, agua; ●, cloroformo; +, bromoformo; △, mercurio) y las  $\Delta p$  y  $\tau$  están medidas respectivamente en  $kg\ cm^{-2}$  y en segundos.



Los resultados experimentales de la figura atrajeron la atención de von Kármán, por entonces un joven investigador y una de las personalidades más notables de la Mecánica de Fluidos del siglo XX. Utilizando el análisis dimensional, von Kármán redujo los datos experimentales representados en la figura a una dependencia de la forma dada en (10). Como se ve en la figura siguiente y se predice en (10), todos los puntos experimentales colapsan en una simple curva en las coordenadas  $\Delta p \tau / \mu$ ,  $\rho V^{2/3} / (\mu \tau)$ . Es claro que si E. Bose, Rauert y M. Bose hubieran usado el análisis dimensional para guiar sus experimentos la cantidad de trabajo experimental que hubieran necesitado hacer se habría reducido en un factor considerable.



Cuando el líquido se mueve a través del conducto en régimen laminar, lo que requiere que el número de Reynolds basado en la velocidad media y en el diámetro del conducto sea menor que 2300, los resultados de (9) siguen siendo válidos, pero a diferencia de lo que sucede en (10) hay que retener ahora los parámetros geométricos que involucran al diámetro y a la longitud del conducto porque la caída de presión a través de



él depende de lo que se denomina longitud de entrada,  $L_e \sim ReD$ , o longitud del conducto requerida para que la corriente alcance el régimen de Poiseuille.<sup>1</sup> Supuesto que la longitud  $L$  del conducto es mayor que  $L_e$  pero ambas del mismo orden, la caída de presión a lo largo del conducto es suma de la que hay a lo largo de la longitud de entrada debida a una corriente laminar que no es de Poiseuille más la debida a un movimiento de Poiseuille a lo largo de la longitud  $L - L_e$ . La situación anterior se simplifica notablemente en situaciones en las que la longitud de entrada que es del orden de  $ReD$  es mucho menor que la longitud  $L$  del conducto ya que en ese caso la caída de presión a lo largo del conducto es prácticamente la que habría suponiendo que el movimiento en todo el conducto es el de Poiseuille. Si sucede entonces que  $(\rho V^{2/3}/\mu\tau) \ll L/V^{1/3}$  se tiene también que  $ReD/L \ll 1$  y el régimen del conducto es el de Poiseuille. En esa situación, la expresión (9) se reduce a

$$\frac{\Delta p \tau}{\mu} = F_1 \left( \frac{L}{V^{1/3}}, \frac{D}{V^{1/3}} \right) \quad (11)$$

y dado que los valores del argumento son constantes se obtiene

$$\frac{\Delta p \tau}{\mu} = \text{const.} \quad (12)$$

La expresión anterior puede determinarse teóricamente suponiendo régimen de Poiseuille en todo el conducto. En efecto, el tiempo  $\tau$  requerido para descargar un volumen dado de líquido  $V$  es

$$\tau = \frac{V}{Q} \quad \text{con} \quad Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{R^4 \Delta p}{\mu L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta p \tau}{\mu} = \frac{VL}{R^4}; \quad (13)$$

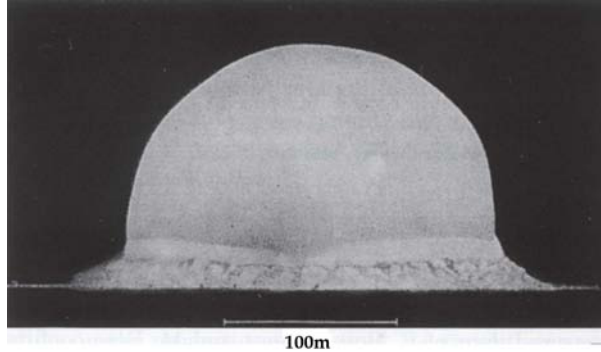
esto es, dada la geometría del conducto, se obtiene el resultado dado en (12).

---

<sup>1</sup> La rugosidad relativa  $e$  no desempeña papel alguno porque es muy pequeña frente a la distancia de penetración viscosa  $\mu/(\rho U)$ ,  $\rho U e/\mu \ll 1$ .

**Problema 4.3**

Una explosión química, o nuclear, es un suceso en el que una cantidad significativa de energía se libera muy rápidamente (casi instantáneamente) en una región pequeña del espacio (casi un punto). Como consecuencia, en el punto de explosión se desarrolla una onda de choque de intensidad muy fuerte que se propaga supersónicamente respecto al gas en reposo a presión  $p_a$  y densidad  $\rho_a$ . En la fotografía puede contemplarse la bola de fuego de una explosión nuclear sobre el suelo en un experimento nuclear en los EE.UU, 15 milisegundos después de ocurrida la detonación; obsérvese la simetría esférica del fenómeno y el nítido frente que separa la región perturbada por la explosión y el gas en reposo.<sup>2</sup>



1. Sabiendo que  $E$  es la energía liberada en la explosión, escribir las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el movimiento del gas detrás de la onda de choque. Indicar explícitamente la dependencia funcional de las variables dependientes respecto de las independientes y demás parámetros que gobiernan el problema.
2. Utilizando el análisis dimensional simplificar lo más posible las relaciones funcionales del apartado anterior.
3. Simplificar aún más la relación anterior en el caso de que la velocidad de propagación de la onda de choque sea muy grande comparada con la velocidad del sonido del gas en reposo.
4. Utilizar los resultados del análisis dimensional para demostrar que el problema de contorno admite solución de semejanza y puede formularse en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

---

Resolución:

**Apartado 1.-**

Dada la simetría esférica del movimiento las ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \rho v)}{\partial r} &= 0, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\
 \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial t} + v \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial r} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

---

<sup>2</sup> La fotografía fue tomada por J. Mack y G. I. Taylor procesó los datos a partir de una serie de fotografías, G. I. Taylor *Proc. Royal Soc. A*, vol. 201, pags. 159-186, 1950.

donde  $\gamma$  es la relación de calores específicos. Se ha supuesto movimiento isentrópico porque las velocidades del gas son grandes y el número de Reynolds es muy grande. Es claro que los fenómenos no isentrópicos de radiación de calor y conducción cuentan en los primeros instantes pero en tiempos muy cortos la convección de calor se hace dominante y el movimiento unidireccional no estacionario del gas es, en primera aproximación, isentrópico.

El problema es de primer orden tanto en las derivadas espaciales de las magnitudes fluidas como en las temporales y se necesitan, por tanto, tres condiciones de contorno y tres iniciales. Como condiciones iniciales se impondrán

$$\rho(r, 0) = \rho_a, \quad p(r, 0) = p_a \quad \text{y} \quad v(r, 0) = 0 \quad \text{para} \quad r > 0. \quad (2)$$

Como condiciones de contorno se impondrán las condiciones del gas detrás de la onda de choque que son funciones de la velocidad de propagación de la onda [cuya posición se define por la función desconocida  $r_f(t)$ ] y de las condiciones del gas sin perturbar. En ejes ligados a la onda, el número de Mach del gas incidente relativo a la onda es

$$M_1 = \frac{\dot{r}_f(t)}{\sqrt{\gamma R_g T_a}}, \quad (3)$$

y las condiciones del gas detrás de la onda se obtienen de (7.6)

$$\frac{\rho[r_f(t), t]}{\rho_a} = \frac{\dot{r}_f(t)}{\dot{r}_f(t) - v[r_f(t), t]} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \quad \text{y} \quad \frac{p[r_f(t), t]}{p_a} = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}, \quad (4)$$

donde  $\dot{r}_f(t) = dr_f/dt$  es la velocidad de propagación del frente. Obsérvese que puesto que  $r_f(t)$  es desconocida se necesita una condición de contorno adicional que se obtiene de establecer que la energía total del gas es la energía  $E$  liberada en la explosión

$$2\pi \int_0^{r_f(t)} \rho(e + v^2/2)r^2 dr = E. \quad (5)$$

El análisis de las ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno (1)-(5) muestra que las condiciones del gas y su velocidad dependen de la posición  $r$ , del tiempo  $t$  y del resto de los parámetros que definen el problema

$$v = f_1(r, t, E, p_a, \rho_a), \quad p = f_2(r, t, E, p_a, \rho_a), \quad \rho = f_3(r, t, E, p_a, \rho_a) \quad (6)$$

donde las funciones  $f_1$ - $f_3$  deben ser calculadas resolviendo el problema de contorno (1)-(5); del mismo modo la dependencia funcional de la posición del frente de la onda es de la forma

$$r_f = f_4(t, E, p_a, \rho_a). \quad (7)$$

## Apartado 2.-

Si como magnitudes independientes se escogen  $t$ ,  $E$  y  $\rho_a$ , las dimensiones de  $v$  se pueden expresar en la forma

$$[v] = [LT^{-1}] = [E]^\alpha [t]^\beta [\rho_a]^\gamma = [MLT^{-2}]^\alpha [T]^\beta [ML^{-3}]^\gamma, \quad (8)$$

donde  $M$ ,  $L$  y  $T$  representan las dimensiones de masa, longitud y tiempo; se tiene entonces

$$\alpha = 1/5, \quad \beta = -3/5 \quad \text{y} \quad \gamma = -1/5. \quad (9)$$

Procediendo análogamente para la distancia  $r$  y para la presión  $p$  se tiene

$$[r] = [E]^{1/5} [t]^{2/5} [\rho_a]^{-1/5} \quad \text{y} \quad [p] = [E]^{2/5} [t]^{-6/5} [\rho_a]^{3/5}. \quad (10)$$

Escribiendo las relaciones (6) en forma adimensional se tiene

$$\frac{\rho_a^{1/5} t^{3/5} v}{E^{1/5}} = F_1 \left( \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}}, \frac{p_a t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} \right), \quad \frac{p t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} = F_2 \left( \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}}, \frac{p_a t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} \right)$$

$$\frac{\rho}{\rho_a} = F_3 \left( \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}}, \frac{p_a t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} \right) \quad \frac{\rho_a^{1/5} r_f}{E^{1/5} t^{2/5}} = F_4 \left( \frac{p_a t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} \right) \quad (11)$$

que es la dependencia funcional más simplificada del problema planteado.

### Apartado 3.-

Obsérvese que en el caso en que la velocidad de la onda  $dr_f/dt$  se mueva a velocidades hipersónicas comparadas con la velocidad del sonido  $\gamma p_a/\rho_a$ , lo que corresponde a  $M_1 \gg 1$ , la presión  $p$  detrás de la onda resultante de la explosión es gigantescamente grande comparada con  $p_a$  y las expresiones anteriores se simplifican notablemente. En efecto, si  $p_a t^{6/5}/(\rho_a^{3/5} E^{2/5}) \ll 1$ , lo que sucede para valores extraordinariamente grandes de  $E$  y relativamente pequeños del tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\rho_a^{1/5} t^{3/5} v}{E^{1/5}} &= F_1 \left( \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}} \right), \quad \frac{p t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} = F_2 \left( \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}} \right) \\ \frac{\rho}{\rho_a} &= F_3 \left( \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\rho_a^{1/5} r_f}{E^{1/5} t^{2/5}} = F_4(0). \end{aligned} \quad (12)$$

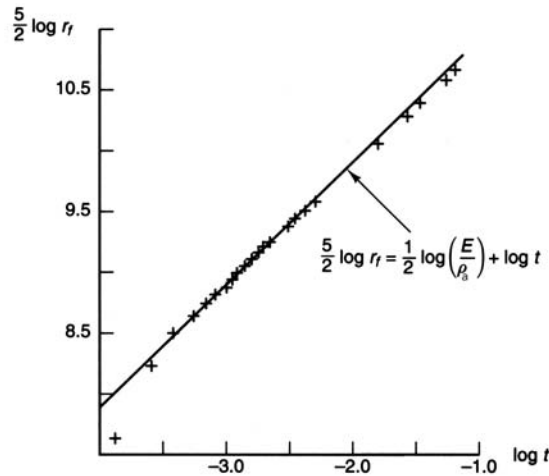
Obsérvese que en este caso el argumento de la función  $F_4$  es nulo así que el radio de la onda de choque puede determinarse como

$$r_f = C \frac{E^{1/5}}{\rho_a^{1/5}} t^{2/5}, \quad (13)$$

donde  $C$  es una constante desconocida que puede ser calculada analíticamente (resolviendo el problema de contorno planteado) o experimentalmente a partir de datos obtenidos de ensayos nucleares. La ecuación (13) muestra que si se conociera la posición de la onda de choque en varios instantes, los puntos experimentales deberían estar sobre una línea recta de pendiente unidad si se representasen en un diagrama de coordenadas logarítmicas  $(5/2) \ln r_f$  y  $\ln t$ :

$$\frac{5}{2} \ln r_f = \frac{5}{2} \ln C + \frac{1}{2} \ln \frac{E}{\rho_a} + \ln t. \quad (14)$$

Los argumentos anteriores son debidos a G. I. Taylor quien procesó los datos obtenidos a partir de estas mismas filmaciones de un experimento nuclear tomadas por J. Mack y calculó el valor de la constante que resultó ser muy próxima a la unidad. Taylor determinó también que el valor de la energía liberada en dicha explosión nuclear era aproximadamente  $10^{14}$  julios.<sup>3</sup>



<sup>3</sup> La publicación de los cálculos de Taylor en 1950 causó un profundo embarazo en el gobierno americano y en diversos círculos de los Departamentos de Defensa, Energía y Exteriores. Taylor pudo acceder a los datos porque aunque éstos fueron considerados *top secret* la película de Mack sin embargo no fue clasificada. El gobierno americano comprobó en carne propia el peligro potencial de un científico *armado* con el análisis dimensional.

Apartado 4.-

Como se ha visto en el apartado anterior, para explosiones muy intensas y tiempos no demasiado grandes, las funciones que representan el estado fluidodinámico del gas detrás de la onda de choque depende de una única variable. Como puede verse las variables fluidas dependen de  $r$  y de  $t$  pero no por separado sino a través de la combinación

$$\xi = \frac{\rho_a^{1/5} r}{E^{1/5} t^{2/5}}. \quad (15)$$

En efecto, definiendo las nuevas variables adimensionales

$$V(\xi) = \frac{\rho_a^{1/5} t^{3/5} v}{E^{1/5}}, \quad P(\xi) = \frac{p t^{6/5}}{\rho_a^{3/5} E^{2/5}} \quad y \quad R(\xi) = \frac{\rho}{\rho_a} \quad (16)$$

y sustituyendo en las ecuaciones (1) se obtiene

$$2RV + \xi \left( V - \frac{2}{5}\xi \right) \dot{R} + \xi R \dot{V} = 0, \quad \frac{3}{5}V - \left( V - \frac{2}{5}\xi \right) \dot{V} = \frac{\dot{P}}{R}, \quad \frac{6}{5} \frac{P}{R^\gamma} - \left( V - \frac{2}{5}\xi \right) \frac{d}{d\xi} \frac{P}{R^\gamma} = 0. \quad (17)$$

Las condiciones de contorno vienen dadas por (4) para el caso en que  $M_1^2 \gg 1$  (onda de choque muy intensa); se tiene entonces

$$\frac{\rho_f}{\rho_a} = R(\xi_f) = \frac{\dot{r}_f}{\dot{r}_f - v_f} = \frac{2\xi_f/5}{2\xi_f/5 - V(\xi_f)} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad y \quad P(\xi_f) = \frac{8}{25(\gamma + 1)} \xi_f^2, \quad (18)$$

donde la última de las condiciones de salto se sigue de

$$\frac{p_f}{p_a} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\rho_a \dot{r}_f^2}{p_a}. \quad (19)$$

Del mismo modo, la condición (5) de que la energía total del fluido es igual a la energía liberada en la explosión se escribe en variables de semejanza

$$2\pi \int_0^{\xi_f} \left( \frac{P}{\gamma + 1} + RV^2 \right) \xi^2 d\xi = 1. \quad (20)$$

La integración del sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, de primer orden, (17) con las condiciones de contorno (18) y (20) permiten determinar las variables de semejanza  $V$ ,  $P$  y  $R$  y la posición  $\xi_f$  de la onda de choque.

Es interesante, finalmente, comprobar que la existencia de solución de semejanza puede también ser predicha buscando la invariancia de las variables del problema frente a un grupo de transformaciones. En efecto las ecuaciones (1) son invariantes frente a cambios en las magnitudes fluidas siempre que tales cambios dejen invariantes las relaciones

$$v \sim \frac{r}{t}, \quad p \sim \rho v^2. \quad (21)$$

Por otra parte, la invariancia de la condición (5) exige que el grupo

$$\frac{E}{\rho_a v^2 r^3} \sim \frac{E t^2}{\rho_a r^5} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{E^{1/5}}{\rho_a^{1/5}} \frac{r}{t^{2/5}} \quad (22)$$

sea invariante. Es fácil de aquí obtener el comportamiento autosemejante de la velocidad  $v \sim r/t$  y de la presión y densidad dados en (16).

**Problema 4.4**

Un cuerpo sólido romo de longitud característica  $L$  (la misma en la tres direcciones del espacio  $L_x \sim L_y \sim L_z \sim L$ ) se mueve con una velocidad variable con el tiempo dada,  $V(t)$ , en el seno de aire en calma. La temperatura sobre la superficie del cuerpo es constante y conocida de valor  $T_p$ , y la temperatura y densidad del aire lejos del cuerpo son  $\rho_\infty = 1,22 \text{ Kg/m}^3$  y  $T_\infty = 298 \text{ K}$ . Suponiendo las propiedades físicas del aire  $\gamma = 1,4$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ ,  $\mu_v$  y  $K$  son constantes y conocidas, se pide:

1. Aplicar el Análisis Dimensional para obtener las expresiones más simplificadas posibles para los campos de velocidades, temperaturas y presiones en el movimiento del aire, así como para la fuerza que éste ejerce sobre el objeto y para el calor transferido entre al aire y el objeto. Exprésense los resultados en términos de números adimensionales comúnmente usados en la Mecánica de Fluidos.
2. Simplificar los resultados anteriores cuando el movimiento del cuerpo es a bajos números de Mach y, además, las variaciones relativas de temperatura son pequeñas,  $(T_p - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ .
3. Aplicar los resultados del apartado 2 al caso de un vehículo de longitud característica  $L = 3 \text{ m}$  que se mueve una velocidad  $V(t)$  partiendo del reposo y acelerándose hasta alcanzar una velocidad estacionaria  $V_o = 30 \text{ m/s}$  en un tiempo característico  $t_o \sim 10 \text{ s}$ ; para simplificar el análisis supóngase que la diferencia de temperaturas entre la superficie del coche y el aire lejos del mismo es constante e igual  $T_p - T_\infty = 15 \text{ K}$ ; considérense las simplificaciones adicionales respecto a las expresiones del apartado 2 que resultan de los valores característicos de los datos del problema.
4. Para medir la fuerza aerodinámica sobre el coche del apartado 3 cuando éste se mueve con velocidad constante se realizan ensayos en un túnel aerodinámico sobre una maqueta del coche de área frontal  $0,75 \text{ m}^2$  midiéndose una fuerza de  $75 \text{ N}$  para una velocidad del aire de  $20 \text{ m/s}$ . ¿Para qué velocidad del coche se puede usar el resultado obtenido en la maqueta, si éste tiene un área frontal de  $3 \text{ m}^2$ ? ¿Cuánto valdría entonces la fuerza aerodinámica sobre el coche? En el supuesto de que la fuerza sobre el coche no dependiese de la viscosidad, calcular la fuerza aerodinámica cuando el coche se mueve a  $30 \text{ m/s}$ .
5. Si el coche del apartado anterior debe recorrer un trayecto de longitud  $L_T$  a una velocidad constante, determinar la velocidad correspondiente a un mínimo consumo de combustible sabiendo que el consumo de combustible por unidad de tiempo sigue una ley de la forma  $\dot{m}_f = \dot{m}_{fo} + bW$  donde  $\dot{m}_{fo}$  es el consumo a ralentí,  $W$  es la potencia consumida para vencer la resistencia aerodinámica y  $b$  es una constante con dimensiones apropiadas.
6. Si el coche se desplaza con una velocidad  $V_o$  y en un cierto instante se deja en punto muerto, calcular la evolución posterior de su velocidad,  $V(t)$ , en el proceso de parada. Suponga que la masa del coche es  $M$  y despréciase la resistencia de rodadura. Discútase el resultado obtenido.
7. Comprobar que las ecuaciones del apartado 2 pueden aplicarse para analizar el descenso en el aire de una partícula de ceniza de longitud característica  $L = 10 \mu\text{m}$  y densidad media  $\rho_p = 10 \text{ Kg/m}^3$ ; supóngase además  $T_p = T_\infty$ . Demuéstrese que el movimiento del aire alrededor de la partícula es a bajos números de Reynolds, y simplifíquense las ecuaciones apropiadamente. Calcular la velocidad de descenso de la partícula como función del tiempo,  $V(t)$ , partiendo del reposo.

Resolución:Apartado 1.-

Para describir el movimiento se tomará un sistema de ejes ligados al objeto, con el plano  $x - z$  coincidente con el formado por el vector gravedad  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$  y el vector velocidad del objeto,  $\mathbf{V}(t)$ , que forma un ángulo de incidencia  $\alpha(t)$  con el eje  $x$ ; se supondrá que el plano de los vectores  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{g}$  (plano  $x - z$ ) no varía con el tiempo. En dichos ejes, las ecuaciones generales que gobiernan el movimiento del aire alrededor del cuerpo son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}' - \rho \dot{\mathbf{V}}(t) + \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \bar{\bar{\tau}}' : \nabla \mathbf{v} + K \nabla^2 T, \quad (3)$$

en las que, para cerrar el problema, debe hacerse uso de la ecuación de estado y de la ley de Navier-Poisson,

$$p = (\gamma - 1)c_p \rho T / \gamma, \quad \bar{\bar{\tau}}' = \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \left( \mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \bar{\bar{\mathbf{I}}}, \quad (4)$$

donde  $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$  es el tensor unidad. Las ecuaciones (1)-(4) deben resolverse junto con las condiciones iniciales y de contorno

$$t = 0 : \quad \rho(0, \mathbf{x}) = \rho_\infty, \quad T(0, \mathbf{x}) = T_\infty, \quad \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

$$f(\mathbf{x}, L, l_1, \dots, l_n) = 0 : \quad T = T_p, \quad \mathbf{v} = 0; \quad (6)$$

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty : p \simeq p_\infty - \rho_\infty \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{x} - \rho_\infty g z, \quad T = T_\infty, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{V}(t), \quad (7)$$

donde se ha tomado  $p_\infty = (\gamma - 1)c_p \rho_\infty T_\infty / \gamma$  como la presión de referencia lejos del cuerpo, y  $f(\mathbf{x}, L, l_1, \dots, l_n) = 0$  es la ecuación de la superficie del objeto, que contiene  $L$  y un conjunto de longitudes adicionales  $l_1, \dots, l_n$ .<sup>4</sup> Está claro que una vez resuelto el problema (1)-(7) de forma numérica o experimental los campos de velocidades, presiones y temperaturas serán funcionales de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_1[t, \mathbf{x}, V(t), \rho_\infty, \mu, g, T_\infty, T_p - T_\infty, \mu_v, c_p, \gamma, K, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)], \quad (8)$$

$$p - p_\infty = f_2[t, \mathbf{x}, V(t), \rho_\infty, \mu, g, T_\infty, T_p - T_\infty, \mu_v, c_p, \gamma, K, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)], \quad (9)$$

$$T - T_p = f_3[t, \mathbf{x}, V(t), \rho_\infty, T_\infty, T_p - T_\infty, \mu, \mu_v, c_p, \gamma, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)], \quad (10)$$

donde se ha puesto  $V(t) = |\mathbf{V}(t)|$ ,  $g = |\mathbf{g}|$ . Obsérvese que, por conveniencia, en los funcionales  $\mathbf{f}_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  la dependencia de  $T_\infty$  y  $T_p$  se ha expresado a través de  $T_\infty$  y  $T_p - T_\infty$  y, además, se ha hecho explícita la dependencia temporal debida a las condiciones de contorno  $V(t)$  [nótese que esto es siempre permisible puesto, a partir de la identidad  $t \equiv V(t)[t/V(t)]$ , cualquier funcional del tiempo  $F(t, \dots)$  puede definirse otro funcional  $G(t, V(t), \dots) \equiv F(V(t)[t/V(t)], \dots)$  en el que aparecen  $t$  y  $V(t)$  explícitamente]. A partir de (8)-(10) se obtienen las expresiones generales para la fuerza del fluido sobre el objeto,  $\mathbf{F}$ , y para el calor intercambiado por unidad de tiempo a través de la superficie de éste,  $Q$ ,

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma} (-p \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}') d\sigma = \mathbf{f}_4[t, V(t), \rho_\infty, \mu, g, T_\infty, T_p - T_\infty, \mu_v, c_p, \gamma, K, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)], \quad (11)$$

$$Q = \int_{\Sigma} -K \nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma = f_5[t, V(t), \rho_\infty, \mu, g, T_\infty, T_p - T_\infty, \mu_v, c_p, \gamma, K, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)]. \quad (12)$$

<sup>4</sup> Se supone que la longitud característica de interés del dominio fluido,  $L$ , es lo suficientemente pequeña para que las variaciones de densidad y temperatura respecto de  $\rho_\infty$  y  $T_\infty$  sean muy pequeñas como para afectar a la distribuciones de presiones fluidostática que aparece en (7) (desviaciones apreciables de dicha distribución requerirían longitudes verticales del orden de kilómetros, como las que son características en la denominada *atmósfera estándar*).

Puesto que (8)-(10) corresponden a un problema termomecánico, para expresar dichas relaciones en forma adimensional se necesitan cuatro magnitudes dimensionalmente independientes; si se escogen  $L$ ,  $V(t)$ ,  $\rho_\infty$  y  $T_p - T_\infty$ , y se efectúa la adimensionalización de las restantes magnitudes en (8)-(10) se obtienen las cantidades adimensionales

$$t \rightarrow \frac{tV(t)}{L} = St^{-1}(t), \quad \mathbf{x} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad l_i \rightarrow \frac{l_i}{L} = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13)$$

$$c_p \rightarrow \frac{c_p(T_p - T_\infty)}{V^2(t)} = Ec^{-1}(t), \quad T_\infty \rightarrow \frac{T_\infty}{T_p - T_\infty} \equiv \frac{c_p T_\infty}{V^2(t)} \frac{V^2(t)}{c_p(T_p - T_\infty)} = \frac{Ec(t)}{(\gamma - 1)M^2(t)}, \quad (14)$$

$$\mu \rightarrow \frac{\mu}{\rho_\infty V(t)L} = Re^{-1}(t), \quad \mu_v \rightarrow \frac{\mu_v}{\rho_\infty V(t)L} = Re_v^{-1}(t), \quad (15)$$

$$g \rightarrow \frac{gL}{V^2(t)} = Fr^{-1}(t), \quad K \rightarrow \frac{K(T_p - T_\infty)}{\rho_\infty V^3(t)L} = \frac{1}{Pr Re(t) Ec(t)}, \quad (16)$$

donde se han expresado los resultados en término de los valores instantáneos de los números adimensionales habitualmente usados en la Mecánica de Fluidos: *Strouhal*, *Reynolds*, *Froude*, *Prandtl*, *Mach* y *Eckert*, definidos en la introducción teórica de este capítulo. Por tanto, (8)-(10) se expresan en forma adimensional como

$$\frac{\mathbf{v}}{V(t)} = \mathbf{g}_1 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, St(t), Re(t), Fr(t), M(t), Re_v(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t) \right], \quad (17)$$

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V^2(t)} = g_2 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, St(t), Re(t), Fr(t), M(t), Re_v(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t) \right], \quad (18)$$

$$\frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_p}{T_p - T_\infty} = g_3 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, St(t), Re(t), Fr(t), M(t), Re_v(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t) \right], \quad (19)$$

$$\frac{\mathbf{F}}{\rho_\infty V^2(t)L^2} = \mathbf{g}_4 [St(t), Re(t), Fr(t), M(t), Re_v(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t)]. \quad (20)$$

El parámetro adimensional a que da lugar el calor intercambiado, por unidad de tiempo, entre el fluido y el objeto,

$$Q \rightarrow \frac{Q}{\rho_\infty V(t)^3 L^2}, \quad (21)$$

puede expresarse en función de los parámetros anteriores y del denominado *número de Nusselt*, definido como  $Nu \equiv Q/[K(T_p - T_\infty)L]$ , que representa el cociente entre  $Q$  y el valor característico del calor que se intercambiaría en ausencia de movimiento relativo entre el objeto y el fluido, es decir, en ausencia de transporte de calor por convección, teniendo lugar sólo un proceso de conducción de calor en el seno del fluido; en efecto, en este caso las variaciones apreciables de temperatura en el fluido se producirían en distancias comparables a la del objeto por lo que, si se tiene en cuenta que el área de transferencia de calor entre fluido y objeto es del orden de  $L^2$ , se obtendría una potencia calorífica intercambiada del orden de  $L^2 K |\nabla T| \sim L^2 K (T_p - T_\infty)/L = K(T_p - T_\infty)L$ . Expresando (21) en términos del número de Nusselt se obtiene

$$\frac{Q}{\rho_\infty V(t)^3 L^2} \equiv \frac{Q}{K(T_p - T_\infty)L} \frac{K(T_p - T_\infty)}{\rho_\infty V(t)^3 L} \equiv Nu(t) [Pr Re(t) Ec(t)]^{-1}, \quad (22)$$

expresión que sustituida en la resultante de adimensionalizar (12) proporciona una relación de la forma

$$Nu(t) = g_5 [St(t), Re(t), Fr(t), M(t), Re_v(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t)]. \quad (23)$$

## Apartado 2.-

Si el valor característico del número de Mach es  $M(t) \sim M_o \ll 1$  y, además,  $(T_p - T_\infty)/T_p \ll 1$  se demostrará a continuación que en un movimiento que no esté dominado por los efectos no estacionarios o de la fricción, el fluido puede considerarse incompresible en primera aproximación,  $\rho(\mathbf{x}, t) \simeq \rho_\infty$ .<sup>5</sup> En efecto, si las fuerzas de

<sup>5</sup> Si el movimiento está dominado por efectos no estacionarios, como ocurre en la propagación del sonido, o por efectos de la fricción, como ocurre a veces en el movimiento turbulento de gases en conductos, bajos números de Mach no implican, en general, incompresibilidad.



## 104 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

inercia convectivas de las partículas fluidas son importantes en el movimiento, se obtiene mediante estimación de órdenes de magnitud en la ecuación de cantidad de movimiento

$$|\nabla p| \sim \rho |\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}| \rightarrow \Delta_L p \sim \rho_o V_o^2, \quad (24)$$

donde  $V_o$  es el valor característico de  $V(t)$  en el proceso. La relación anterior proporciona unas variaciones relativas de presión del orden

$$\frac{\Delta_L p}{p_o} \sim \frac{V_o^2}{a_o^2} = M_o^2 \ll 1, \quad (25)$$

donde  $a_o$  es el valor característico de la velocidad del sonido. Por tanto, si, además, las variaciones relativas de temperatura son pequeñas,  $\Delta_L T/T_o \sim (T_p - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ , la ecuación de estado proporciona unas variaciones relativas de densidad del orden

$$\frac{\Delta_L \rho}{\rho_o} \sim \frac{\Delta_L p}{p_o} - \frac{\Delta_L T}{T_o} \ll 1. \quad (26)$$

Usando la estimación (26) en la ecuación de continuidad (1) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \sim \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \sim \frac{V_o}{L} \frac{\Delta_L \rho}{\rho_o} \ll \frac{V_o}{L}. \quad (27)$$

Puesto que, por hipótesis,  $L \sim L_x \sim L_y \sim L_z$ , se tiene  $V_o \sim v_x \sim v_y \sim v_z$  y  $\partial v_x/\partial x \sim \partial v_y/\partial y \sim \partial v_z/\partial z \sim V_o/L$ , y (27) indica entonces que el movimiento tiene lugar con una cancelación prácticamente total de los tres sumandos en  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , que es lo que ocurre en el caso del movimiento de un líquido. Por tanto, si se tienen en cuenta las condiciones (26) y (27), las ecuaciones (1)-(7) se simplifican a las de un fluido incompresible con densidad  $\rho \simeq \rho_\infty$ . En este caso es útil separar primero en la distribución de presiones las contribuciones debidas al movimiento alrededor del objeto, que se denotarán por  $p_m$ , de las debidas a las fuerzas másicas,

$$p = p_m(\mathbf{x}, t) + p_\infty - \rho \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{x} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}; \quad (28)$$

las ecuaciones (1)-(7) simplificadas para el caso incompresible se escriben entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (29)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p_m + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}', \quad (30)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \bar{\bar{\tau}}' : \nabla \mathbf{v} + K \nabla^2 T, \quad (31)$$

donde  $\bar{\bar{\tau}}'$  se determina mediante la ley de Navier-Poisson incompresible

$$\bar{\bar{\tau}}' = \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]. \quad (32)$$

Las condiciones iniciales para (29)-(32) son

$$t = 0 : \quad T(0, \mathbf{x}) = T_\infty, \quad \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = 0, \quad (33)$$

y las condiciones de contorno son

$$f(\mathbf{x}, L, l_1, \dots, l_n) = 0 : \quad T = T_p, \quad \mathbf{v} = 0; \quad (34)$$

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty : \quad p_m = 0, \quad T = T_\infty, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{V}(t). \quad (35)$$

Obsérvese en (29)-(35) que el problema mecánico se puede resolver independientemente del problema térmico. De las ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno que gobiernan el problema mecánico se deducen los funcionales

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_1[t, \mathbf{x}, V(t), \rho, \mu, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)], \quad (36)$$

$$p_m = f_2[t, \mathbf{x}, V(t), \rho, \mu, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)]. \quad (37)$$

Comparando (36)-(37) con (8)-(9) se observa cómo al desacoplarse el problema mecánico del térmico la dependencia de  $\mathbf{v}$  y  $p_m$  respecto de los parámetros del problema simplifica enormemente; en particular, desaparecen de dicha dependencia los parámetros  $c_p$ ,  $T_\infty$ ,  $T_p - T_\infty$  y  $K$ , así como el parámetro  $\gamma$  (al no usarse ahora la ecuación de estado de los gases perfectos) y el parámetro  $\mu_v$  (debido a la aproximación  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Nótese también que la condición de incompresibilidad es tan exigente que el campo de velocidades en un fluido incompresible no depende de las fuerzas másicas, sino que está determinado únicamente por las condiciones de contorno (e iniciales) impuestas al movimiento; la distribución de presiones  $p_m$  debe ser la apropiada para que se cumpla la ecuación de continuidad  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . No ocurre así con la fuerza que el fluido ejerce sobre el objeto, que se debe tanto a las fuerzas másicas (el empuje de Arquímedes y el asociado a la aceleración del origen del sistema de referencia) como a la originada por el movimiento del fluido alrededor del cuerpo (fuerza aerodinámica). En efecto, dicha fuerza está dada por (11) como

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma} [-(p_h + p_m)\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}'] d\sigma = \rho(\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{g})\Omega + \mathbf{F}_m[t, V(t), \rho, \mu, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)], \quad (38)$$

donde la contribución debida a las fuerzas másicas se ha calculado a partir de la expresión de  $p_h$  teniendo en cuenta  $\int_{\Sigma} p_{\infty} \mathbf{n} d\sigma = 0$  y haciendo uso del teorema de Gauss para calcular la integral  $\int_{\Sigma} \mathbf{n} \mathbf{x} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{x} d\varpi = \Omega \mathbf{I}$ .

Por otra parte, la ecuación de la entalpía (31) junto con las condiciones iniciales y de contorno para la temperatura y las relaciones (36)-(37) implican el funcional

$$T - T_p = f_3[t, \mathbf{x}, V(t), \rho, T_p - T_\infty, \mu, c_p, g, K, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)]; \quad (39)$$

obsérvese que, puesto que tanto (39) como las condiciones de contorno son lineales en la temperatura, la cantidad  $T - T_p$  sólo puede depender de  $T_\infty$  a través de la diferencia  $T_p - T_\infty$ ; nótese también que, puesto que es la distribución completa de presiones,  $p = p_h + p_m$ , la que aparece en la ecuación de la entalpía (31) el funcional de la temperatura puede depender de las fuerzas gravitatorias. El funcional para el calor transferido en la unidad de tiempo se obtiene de (12) y (39) como

$$Q = Q[t, V(t), \rho, \mu, T_p - T_\infty, c_p, g, K, L, l_1, \dots, l_n, \alpha(t)]. \quad (40)$$

Si se adimensionalizan las expresiones correspondientes al problema mecánico (36)-(38) usando las magnitudes dimensionalmente independientes  $\rho$ ,  $V(t)$  y  $L$  se obtiene,

$$\frac{\mathbf{v}}{V(t)} = \mathbf{g}_1 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, St(t), Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t) \right], \quad (41)$$

$$\frac{p_m}{\rho V^2(t)} = g_2 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, St(t), Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t) \right], \quad (42)$$

y

$$\frac{\mathbf{F}}{\rho_\infty V^2(t) L^2} = \frac{\Omega}{L^3} \left[ \frac{L \dot{\mathbf{V}}}{V^2(t)} + Fr^{-1}(t) \mathbf{e}_z \right] + \frac{\mathbf{F}_m}{\rho V^2(t) L^2} [St(t), Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t)], \quad (43)$$

donde se han usado los parámetros adimensionales  $St$ ,  $Re$ ,  $Fr$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , definidos en el apartado anterior. Obsérvese que el número adimensional  $L \dot{\mathbf{V}} / V^2(t)$  en el segundo miembro de (43) puede interpretarse como un número de Froude asociado a la aceleración del origen del sistema de referencia. Nótese también que la fuerza debida al movimiento del fluido alrededor del cuerpo sólo depende, cuando se expresa en forma adimensional, del número de Strouhal (si el movimiento no es estacionario ni casi estacionario), del número de Reynolds y de la geometría. La componente de dicha fuerza en la dirección de la corriente incidente,  $\mathbf{V}(t)$ , se denomina *resistencia aerodinámica*,  $D$ , y en forma adimensional se caracteriza mediante el *coeficiente de resistencia* definido convencionalmente como

$$C_D \equiv \frac{D}{[\rho V^2(t) A_f]/2} = C_D [St(t), Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t)], \quad (44)$$

donde  $A_f = A_f(L, l_1, \dots, l_n)$  es el área frontal del objeto, o área proyectada en la dirección perpendicular a la de la corriente incidente; obsérvese que el análisis dimensional aplicado a la expresión de  $A_f$  proporciona  $A_f/L^2 = g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Finalmente, si se adimensionalizan (39) y (40) usando  $\rho$ ,  $V(t)$ ,  $L$  y  $T_p - T_\infty$  se obtienen

$$\frac{T - T_p}{T_p - T_\infty} = g_3 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, St(t), Re(t), Fr(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t) \right], \quad (45)$$

$$Nu(t) = g_5 [St(t), Re(t), Fr(t), Pr, Ec(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha(t)], \quad (46)$$

donde los números de Prandtl y de Eckert,  $Pr$  y  $Ec$ , han sido definidos en el apartado anterior.

### Apartado 3.-

En primer lugar, y de acuerdo con el apartado anterior, el movimiento del aire alrededor del vehículo puede considerarse incompresible. En efecto, el orden de magnitud del número de Mach y de las variaciones relativas de temperaturas típicos del movimiento son

$$M(t) = \frac{V(t)}{a_\infty} \sim \frac{30}{340} \ll 1, \quad \frac{T_p - T_\infty}{T_\infty} \sim \frac{15}{273} \ll 1. \quad (47)$$

Asimismo el número de Strouhal es muy pequeño,

$$St(t) = \frac{L}{tV(t)} \sim \frac{L}{t_o V_o} \sim \frac{3}{10 \times 30} \ll 1, \quad (48)$$

por lo que el movimiento puede considerarse casi estacionario, y el número de Froude gravitatorio y el asociado a la aceleración del sistema de referencia son grandes frente a la unidad,

$$Fr(t) = \frac{V^2(t)}{gL} \sim \frac{V_o^2}{gL} \sim \frac{900}{9,8 \times 3} \gg 1, \quad \frac{V^2(t)}{\dot{V}(t)L} \sim \frac{V_o^2}{L(V_o/t_o)} \sim \frac{900}{3 \times (30/10)} \gg 1, \quad (49)$$

por lo que las fuerzas másicas son despreciables en el movimiento. Por tanto, haciendo uso de (48)-(49) las ecuaciones del problema mecánico (29)-(30) se simplifican a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (50)$$

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (51)$$

que deben resolverse junto con las condiciones de contorno

$$f(\mathbf{x}, L, l_1, \dots, l_n) = 0 : \quad \mathbf{v} = 0; \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty : p = 0, \quad \mathbf{v} = V(t)\mathbf{e}_x. \quad (52)$$

En (51) se ha puesto  $p - p_\infty \simeq p_m$  por ser las fuerzas másicas despreciables, y se han suprimido las derivadas temporales al ser el movimiento casi estacionario, por lo que no se han impuesto condiciones iniciales para la velocidad; de esta forma el tiempo desempeña el papel de un parámetro, y entra en el problema sólo a través de la condición de contorno en el infinito (52) [nótese, además, que en el caso considerado la corriente incidente siempre está dirigida según el eje  $x$ , por lo que el ángulo de incidencia es siempre nulo,  $\alpha(t) \equiv 0$ , y desaparece del problema]. De (50)-(52) se deducen los funcionales

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_1[\mathbf{x}, V(t), \rho, \mu, L, l_1, \dots, l_n], \quad (53)$$

$$p - p_\infty = f_2[\mathbf{x}, V(t), \rho, \mu, L, l_1, \dots, l_n], \quad (54)$$

y de (38) se obtiene

$$\mathbf{F} \simeq \mathbf{F}_m[V(t), \rho, \mu, L, l_1, \dots, l_n]. \quad (55)$$

Adimensionalizando (7)-(55) con  $\rho$ ,  $V(t)$  y  $L$  se obtienen los campos adimensionales de velocidades y de presiones

$$\frac{\mathbf{v}}{V(t)} = \mathbf{g}_1 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n \right], \quad (56)$$

$$\frac{p - p_\infty}{\rho V^2(t)} = g_2 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n \right], \quad (57)$$

y el coeficiente de resistencia se obtiene de (55) como

$$C_D \equiv \frac{D}{[\rho V^2(t) A_f]/2} = C_D [Re(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n]; \quad (58)$$

obsérvese que (56)-(58) se diferencian de las relaciones (41)-(44) del apartado anterior en que ha desaparecido el número de Strouhal al ser el movimiento casi estacionario ( $St \ll 1$ ).

En cuanto al problema térmico, nótese que éste puede simplificarse, además, teniendo en cuenta que los términos de disipación viscosa son pequeños frente a los de convección de calor al ser pequeño el número de Eckert,  $Ec(t) \sim V_o^2/[c_p(T_p - T_\infty)]$ . En efecto, puesto que el número de Reynolds del movimiento del aire alrededor del coche es muy grande,

$$Re(t) = \frac{V(t)L}{\nu} \sim \frac{V_o L}{\nu} \sim \frac{30 \times 3}{1,5 \times 10^{-5}} \gg 1, \quad (59)$$

los efectos de viscosidad están confinados a una capa límite muy estrecha adyacente a la superficie del coche; el espesor característico,  $\delta$ , de la capa límite se obtiene imponiendo que en ella las fuerzas de viscosidad son del mismo orden que las de inercia convectivas,

$$\frac{|\mu \nabla^2 \mathbf{v}|}{|\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|} \sim \frac{\mu(V_o/\delta^2)}{\rho(V_o^2/L)} \sim O(1) \rightarrow \frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{Re^{1/2}}. \quad (60)$$

Haciendo uso de (60) los términos de disipación viscosa frente a los de convección de calor resultan del orden de magnitud

$$\frac{\bar{\tau}' : \nabla \mathbf{v}}{\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T} \sim \frac{\mu(V_o^2/\delta^2)}{\rho c_p V_o[(T_p - T_\infty)/L]} \sim \frac{V_o^2}{c_p(T_p - T_\infty)} \sim \frac{900}{1013 \times 15} \ll 1. \quad (61)$$

Asimismo, la pequeñez del número de Eckert permite despreciar el efecto del trabajo mecánico de las fuerzas de presión,  $\mathbf{v} \cdot \nabla p$ , frente al de convección de entalpía; en efecto, puesto que el gradiente de presiones es siempre del orden de las fuerzas de inercia convectivas se tiene

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla p}{\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T} \sim \frac{\rho(V_o^3/L)}{\rho c_p V_o[(T_p - T_\infty)/L]} = \frac{V_o^2}{c_p(T_p - T_\infty)} \ll 1. \quad (62)$$

Por tanto, la ecuación de la entalpía (31) se reduce, en primera aproximación,

$$\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T = K \nabla^2 T, \quad (63)$$

junto con las condiciones de contorno

$$f(\mathbf{x}, L, l_1, \dots, l_n) = 0 : \quad T = T_p; \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty : T = T_\infty. \quad (64)$$

Las relaciones (63)-(64) y (7) proporcionan el funcional para el campo de temperaturas

$$T - T_p = f_3[\mathbf{x}, V(t), \rho, T_p - T_\infty, \mu, c_p, K, L, l_1, \dots, l_n], \quad (65)$$

y para el calor transferido por unidad de tiempo

$$Q = Q[V(t), \rho, T_p - T_\infty, \mu, c_p, K, L, l_1, \dots, l_n]. \quad (66)$$

Obsérvese que, debido a que la ecuación (63) es lineal y homogénea para la temperatura, las condiciones de contorno (64) implican que la combinación  $(T - T_p)/(T_p - T_\infty)$  no puede depender de  $T_p$  ni de  $T_\infty$ ; por tanto, adimensionalizando (65)-(66) con  $\rho$ ,  $V(t)$ ,  $L$  y  $T_p - T_\infty$  se obtienen las expresiones

$$\frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = g_3 \left[ \frac{\mathbf{x}}{L}, Re(t), Pr, \alpha_1, \dots, \alpha_n \right], \quad (67)$$

$$Nu(t) = g_5 [Re(t), Pr, \alpha_1, \dots, \alpha_n]. \quad (68)$$

Las relaciones (67)-(68) se diferencian de las correspondientes (45)-(46) en que ha desaparecido la dependencia de los números de Strouhal, Froude y Eckert al ser el movimiento casi estacionario ( $St \ll 1$ ), con fuerzas másicas despreciables ( $Fr \gg 1$ ) y con efecto de la disipación viscosa también despreciable ( $Ec \ll 1$ ); obsérvese también que el número de Reynolds es el único parámetro asociado al flujo que aparece tanto en el coeficiente de resistencia (58) como en el número de Nusselt (68).

#### Apartado 4.-

Puesto que la maqueta y el prototipo (coche real) son geoméricamente semejantes (mismo conjunto de parámetros geométricos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ), de acuerdo con (58) existirá también entre ellos semejanza dinámica cuando el número de Reynolds sea el mismo en ambos, es decir,

$$Re_m = \frac{L_m V_m}{\nu} = \frac{L V_o}{\nu} = Re_p, \quad (69)$$

que proporciona

$$V_o = V_m (L_m/L) = V_m (A_{fm}/A_f)^{1/2} = 10m/s, \quad (70)$$

donde se ha tenido en cuenta que, debido a la semejanza geométrica, se tiene  $(A_{fm}/A_f) = (L_m/L)^2$ . Para dicha velocidad el coeficiente de resistencia de la maqueta es igual al del prototipo y su valor es

$$C_D = \frac{D}{(\rho V_o^2 A_f/2)} = \frac{D_m}{(\rho V_m^2 A_{fm}/2)} = \frac{8 \times 75}{1,22 \times 400 \times 3} \simeq 0,35, \quad (71)$$

con lo que la resistencia aerodinámica sobre el coche es, por tanto,

$$D = C_D \rho V_o^2 A_f/2 = 0,35 \times 1,22 \times 100 \times 3/2 = 75N; \quad (72)$$

obsérvese que la fuerza sobre el prototipo es la misma que sobre la maqueta debido a que la semejanza dinámica exige, de acuerdo con (70), que  $V_o^2 A_f = V_m^2 A_{fm}$ .

Para altos números de Reynolds el coeficiente de resistencia varía lentamente con el  $Re$  excepto muy cerca del punto correspondiente a la denominada *crisis de la resistencia*, en que la capa límite sobre el objeto se hace turbulenta; más allá de este punto el  $C_D$  varía de nuevo de forma suave con  $Re$ .<sup>6</sup> Esto sugiere que a altos  $Re$  pueda realizarse un cálculo aproximado basados en un valor medio de  $C_D$  que es independiente del número de Reynolds (o, lo que es lo mismo, de la viscosidad) y que depende únicamente de la geometría del objeto,  $C_D = C_D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . En este caso la resistencia aerodinámica sobre el coche puede calcularse para cualquier velocidad como

$$D = C_D \rho V^2 A_f/2, \quad (73)$$

con  $C_D$  independiente de  $V$ . En particular, para el  $C_D$  dado por (71) y  $V = V_o = 30m/s$  (73) proporciona

$$D = 0,35 \times 1,22 \times 900 \times 3/2 = 675N. \quad (74)$$

<sup>6</sup> Véase el capítulo 14 de *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos* de A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

**Apartado 5.-**

La potencia consumida para vencer la resistencia aerodinámica cuando el coche se mueve a una velocidad  $V$  es, de acuerdo con (73),

$$W = DV = C_D \rho V^3 A_f / 2. \quad (75)$$

Por tanto, el consumo total de combustible en un trayecto de longitud  $L_T$  realizado a velocidad  $V$  constante es

$$M_f(V) = \dot{m}_f L_T / V = \dot{m}_{fo} L_T / V + L_T b C_D \rho V^2 A_f / 2. \quad (76)$$

Obsérvese  $M_f(V \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  debido a que el coche, que tiene un consumo no nulo incluso a ralentí, emplea mucho tiempo en hacer el trayecto; también se tiene  $M_f(V \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$  ya que en este caso el coche, aunque invertiría muy poco tiempo, consumiría una potencia excesiva en vencer la gran resistencia aerodinámica que se produce a altas velocidades. Por tanto, (76) debe poseer un mínimo para una velocidad dada por

$$\frac{dM_f}{dV} = 0 = -\dot{m}_{fo} L_T / V^2 + L_T b C_D \rho V A_f \rightarrow V^* = [\dot{m}_{fo} / (b \rho C_D A_f)]^{1/3}. \quad (77)$$

**Apartado 6.-**

La evolución temporal de la velocidad en el frenado del coche se obtiene al integrar la ley de Newton usando (73) con la velocidad instantánea  $V(t)$ , lo que está justificado siempre que la velocidad del vehículo sea lo suficientemente alta como para que sean válidas las hipótesis de movimiento casi estacionario y de resistencia aerodinámica aproximadamente independiente de la viscosidad. En este caso se tiene

$$M \frac{dV}{dt} = -C_D \rho V(t)^2 A_f / 2, \quad (78)$$

cuya integración con la condición inicial  $V(0) = V_o$  proporciona de forma inmediata

$$V = \frac{V_o}{1 + C_D \rho A_f V_o t / (2M)}. \quad (79)$$

Como se indicó anteriormente, la ley (79) deja de ser válida para tiempos tales que  $V(t)$  sea tan baja que  $St \sim O(1)$  (movimiento del aire alrededor del vehículo no pueda considerarse casi estacionario) y que el coeficiente de resistencia dependa del número de Reynolds; además, a bajas velocidades la resistencia de rodadura se hace comparable a la aerodinámica y debe incluirse en (78).

**Apartado 7.-**

En primer lugar se demostrará que el movimiento del aire alrededor de la partícula es a bajos números de Reynolds. En efecto, la velocidad característica del movimiento de la partícula puede estimarse igualando los órdenes de magnitud del peso de la misma y de la resistencia aerodinámica. Si el movimiento no fuera a  $Re$  bajo se tendría  $\rho_p g L^3 \sim \rho V^2 L^2$  o  $V \sim (\rho_p g L / \rho)^{1/2} \sim (10 \times 9,8 \times 10^{-5} / 1,22)^{1/2} \sim 10^{-2} m/s$ , donde se ha supuesto que el volumen de la partícula es del orden de  $L^3$  (cuerpo romo); pero entonces se llegaría a la contradicción de que  $Re = VL/\nu \sim 10^{-2} \times 10^{-5} / (1,5 \times 10^{-5}) \ll 1$ . Por tanto, el movimiento es necesariamente con  $Re \ll 1$  y las fuerzas de viscosidad son dominantes frente a las de inercia convectiva. En este caso, los gradientes de presiones asociados al movimiento del aire alrededor de la partícula son tales que  $\nabla p_m \sim \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ , lo que proporciona

$$\Delta_L p_m \sim \mu V / L. \quad (80)$$

Asimismo, los esfuerzos de viscosidad sobre la superficie de la partícula son también del orden  $|\bar{\tau}' \cdot \mathbf{n}| \sim \mu V / L$ . Por tanto, la fuerza resultante (de presión y de viscosidad) sobre la partícula debida al movimiento del aire es del orden

$$D_m \sim (\mu V / L) L^2 = \mu V L. \quad (81)$$

## 110 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Igualando los órdenes de magnitud del peso de la partícula y de la resistencia aerodinámica resulta una velocidad característica del orden

$$V \sim (\rho_p g L^2) / \mu \sim 10 \times 9,8 \times 10^{-10} / (1,22 \times 1,5 \times 10^{-5}) \sim 0,5 \times 10^{-3} m/s, \quad (82)$$

que es consistente con la suposición de un número de Reynolds pequeño, cuyo orden de magnitud es

$$Re = VL/\nu \sim 0,5 \times 10^{-3} \times 10^{-5} / (1,5 \times 10^{-5}) \sim 10^{-3} \ll 1. \quad (83)$$

Obsérvese que para la velocidad y los números de Reynolds estimados en (82)-(83) los efectos de compresibilidad en el movimiento del aire son pequeños; en efecto, puesto que las variaciones de temperaturas entre al aire y la partícula son pequeñas (se supone que  $T_p = T_\infty$ ), las variaciones relativas de densidad están determinadas por las de presión,

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} \sim \frac{\Delta p}{p_\infty} \sim \frac{\mu V}{L p_\infty} = \frac{\nu}{VL} \frac{V^2}{p_\infty / \rho_\infty} \sim \frac{10^3 \times 10^{-6}}{340^2} \ll 1. \quad (84)$$

Asimismo pueden suponerse despreciables los efectos no estacionarios asociados a la aceleración de la partícula hasta que ésta alcanza su velocidad terminal. En efecto, en dicho proceso el término de inercia de la partícula en la ley de Newton es del orden del peso y de la resistencia aerodinámica; por tanto, el tiempo característico de las condiciones de contorno  $V(t)$  puede estimarse de la relación

$$\frac{dV}{dt} \sim \frac{V}{t_o} \sim g \rightarrow t_o \sim \frac{V}{g} \sim 10^{-3} / 9,8 \simeq 10^{-4} s. \quad (85)$$

Comparando los términos de inercia local frente a los viscosos en la ecuación de cantidad de movimiento para el aire se obtiene

$$\frac{\rho |\partial \mathbf{v} / \partial t|}{\mu |\nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{V/t_o}{\nu V/L^2} \sim \frac{gL^2}{\nu V} \sim \frac{9,8 \times 10^{-10}}{1,5 \times 10^{-5} \times 10^{-3}} \sim 10^{-1} \ll 1. \quad (86)$$

De acuerdo con las estimaciones anteriores las ecuaciones que gobiernan el movimiento del aire durante el descenso de la partícula, con velocidad  $\mathbf{V} = -V(t)\mathbf{e}_z$  [ $\alpha(t) = \pi/2$ ], son

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (87)$$

$$-\nabla p_m + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0, \quad (88)$$

$$f(\mathbf{x}, L, l_1, \dots, l_n) = 0 : \quad \mathbf{v} = 0; \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty : p_m = 0, \quad \mathbf{v} = V(t)\mathbf{e}_z, \quad (89)$$

donde, como en el apartado 2 se ha hecho

$$p = p_m(\mathbf{x}, t) + p_\infty - \rho \dot{V}z - \rho g z. \quad (90)$$

Las ecuaciones (87)-(89) proporcionan los funcionales

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}_1[\mathbf{x}, V(t), \mu, L, l_1, \dots, l_n], \quad (91)$$

$$p_m = f_2[\mathbf{x}, V(t), \mu, L, l_1, \dots, l_n], \quad (92)$$

que indican que la densidad del fluido no afecta al movimiento de éste alrededor de la partícula. La componente  $z$  de la fuerza que el fluido ejerce sobre el cuerpo se obtiene directamente de (38) y (91)-(92) como

$$D = \rho[\dot{V}(t) + g]\Omega + D_m[V(t), \mu, L, l_1, \dots, l_n]. \quad (93)$$

La adimensionalización de (91)-(93) se lleva a cabo usando las tres magnitudes dimensionalmente independientes  $V(t)$ ,  $L$  y  $\mu$ ; en particular, nótese cómo la adimensionalización de  $D_m$  proporciona el resultado

$$D_m = \mu V(t) L f(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (94)$$

donde la función  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  depende únicamente de la geometría del objeto (para el caso de una esfera  $f = 3\pi$  si  $L$  es el diámetro). Obsérvese también que (94) proporciona un coeficiente de resistencia

$$C_D = \frac{D_m}{(\rho V^2 A_f/2)} = \frac{LVf}{(\rho V^2 A_f/2)} = \frac{2fL^2/A_f}{Re} = \frac{1}{Re} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (95)$$

donde, de nuevo, la función  $F$  depende sólo de la geometría del cuerpo; el comportamiento  $C_D \sim Re^{-1}$  para  $Re \rightarrow 0$  es característico de movimientos viscosos. Finalmente, la expresión (93) y la ley de Newton para la partícula proporcionan

$$(\rho_p - \rho)\Omega \dot{V} = (\rho_p - \rho)g\Omega - f\mu V(t)L, \quad (96)$$

cuya integración con la condición inicial  $V(0) = 0$  es inmediata obteniéndose proporciona

$$V = \frac{(\rho_p - \rho)g\Omega}{f\mu L} \left[ 1 - e^{-f\mu Lt/[(\rho_p - \rho)\Omega]} \right]. \quad (97)$$





## CAPÍTULO 5

# Movimientos de fluidos con viscosidad dominante

Cuando el fluido es guiado por paredes sólidas, la descripción de su movimiento se simplifica notablemente por el hecho de que la dirección de su velocidad es impuesta por aquéllas. Éste es el caso del movimiento de líquidos y gases en conductos o el del movimiento de películas fluidas (líquidas o gaseosas) delgadas como, por ejemplo, el movimiento de un lubricante en el interior de un cojinete.

Una parte de estos movimientos, de interés en muchas ramas de la ingeniería, están caracterizados por el hecho de que en ellos las fuerzas de viscosidad son dominantes frente a las de inercia. Esto es,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \sim \rho \frac{V_o}{t_o} \ll \mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu \frac{V_o}{D_o^2} \quad (5.1)$$

y

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \rho \frac{V_o^2}{L} \ll \mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu \frac{V_o}{D_o^2}, \quad (5.2)$$

lo que conduce a las desigualdades

$$\frac{\rho V_o D_o^2}{\mu L} = Re \frac{D_o}{L} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\rho D_o^2}{\mu t_o} \ll 1, \quad (5.3)$$

donde  $\mu$  y  $\rho$  son respectivamente la viscosidad y densidad del fluido,  $V_o$  es una velocidad característica del movimiento,  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas y  $L$  y  $D_o$  son longitudes características en las direcciones longitudinal y transversal del movimiento. En el supuesto de que las dos relaciones en (5.3) se satisfagan, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican notablemente dando lugar a ecuaciones lineales que establecen el equilibrio entre las fuerzas de presión, las de viscosidad y las másicas. El análisis de estas ecuaciones aplicadas a geometrías lentamente variables como las que nos ocupan (conductos y películas delgadas) proporcionan los resultados siguientes:

1. La presión es constante, en primera aproximación a través de secciones transversales al movimiento del fluido.
2. La componente de la velocidad en la dirección del movimiento da lugar a un perfil de velocidades que varía parabólicamente (con las coordenadas de la sección). En el caso de que el fluido sea forzado por el movimiento relativo entre superficies sólidas (como en un cojinete) al anterior efecto hay que sumarle un perfil de velocidades que, a través de la sección, varía linealmente entre los valores de las velocidades de las superficies sólidas.
3. El caudal es directamente proporcional al gradiente de presiones y, en su caso, lo es también a la velocidad relativa entre las superficies sólidas.

### Caso de conductos

Para el caso de un conducto de sección circular de diámetro  $D(x)$  y longitud  $L$  (diámetro característico del conducto  $D_o$  mucho menor que  $L$ ), por el que fluye un líquido de forma tal que se satisfacen las condiciones

## 114 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

dadas en (5.3), la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x$  de la línea media del conducto se reduce al balance entre las componentes de las fuerzas de presión, másicas y viscosas en la dirección del movimiento

$$0 = p_l + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (5.4)$$

donde  $p_l = -\partial(p + \rho U)/\partial x$  representa la componente del gradiente de presión reducida en la dirección de la línea media del conducto  $x$ ,  $v(x, r)$  es la componente de la velocidad del líquido en la dirección  $x$  y  $U$  es el potencial de las fuerzas másicas. Es importante indicar que en (5.4) se han despreciado los esfuerzos viscosos normales frente a los tangenciales (cortadura) puesto que las variaciones de velocidad ocurren transversalmente en distancias del orden de  $D$  mientras que longitudinalmente estas variaciones ocurren en distancias del orden de  $L$ ; esto es,

$$\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\sim V_o/L^2} \ll \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)}_{\sim V_o/D^2}. \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta que, de acuerdo con 1,  $p_l(x, t)$  es independiente de la coordenada  $r$ , la integración de (5.4), con las condiciones de velocidad nula en la pared del conducto y de regularidad en el eje del mismo, proporciona la ley parabólica de velocidades, denominada también de Hagen-Poiseuille,

$$v(r, x) = \frac{p_l(x, t) D^2(x)}{16\mu} \left[ 1 - \frac{4r^2}{D^2(x)} \right]. \quad (5.6)$$

El caudal que circula por el conducto es entonces

$$Q = \int_0^{D/2} v(r, x) 2\pi r \, dr = \frac{\pi D^4(x)}{128\mu} p_l(x) = -\frac{\pi D^4(x)}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}, \quad (5.7)$$

y establece la proporcionalidad entre el caudal que circula por el conducto  $Q$  y el gradiente de presión reducida que es característica de los movimientos con viscosidad dominante.<sup>1</sup> Esta relación es el punto de partida para el análisis del movimiento de líquidos en conductos y permite calcular el caudal si el gradiente de presiones es conocido o la diferencia de presiones entre dos secciones de un conducto para que circule por él un caudal  $Q$  especificado; en efecto, la integración de (5.7) proporciona

$$(p + \rho U)_{x_1} - (p + \rho U)_{x_2} = \frac{128\mu Q}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{D^4(x)}. \quad (5.8)$$

Para el caso de un conducto de sección constante, la integración de (5.8) proporciona

$$(p + \rho U)_{x_1} - (p + \rho U)_{x_2} = \frac{128\mu Q}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{D^4}, \quad (5.9)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son puntos genéricos de la línea media del conducto. Habitualmente, el fluido que circula por el conducto se toma de un depósito a una cierta presión  $p_d$  descargando en otro o al ambiente a presión  $p_a$ . Naturalmente, las conexiones entre los depósitos y el conducto son regiones donde el movimiento fluido no es unidireccional y su análisis requeriría, en principio, el empleo de las ecuaciones completas de Navier-Stokes. Afortunadamente, para el caso de fuerzas de viscosidad dominantes,  $ReD/L \ll 1$ , las longitudes características de estas regiones son pequeñas frente a la longitud del conducto y las caídas de presión a través de ellas son muy pequeñas frente a la que tiene lugar a través del conducto y pueden despreciarse; se tiene entonces

$$p(x = 0) = p_d \quad y \quad p(x = L) = p_a \quad (5.10)$$

<sup>1</sup> En el caso en que la sección del conducto no sea circular, la expresión (5.7) continúa siendo válida si se multiplica el segundo miembro por un coeficiente  $\Gamma$ , denominado factor de forma, que tiene en cuenta la forma de la sección del conducto [ $D(x)$  representa una longitud característica de la sección]. Valores de  $\Gamma$  para diferentes secciones pueden encontrarse en cualquier manual de hidráulica; véase, por ejemplo, *Handbook of Hydraulic resistance*, I. E. Idelchik, CRC Press.

En efecto, en estas regiones, de longitud característica  $L_e$ , la inercia del fluido es importante puesto la velocidad del mismo experimenta modificaciones apreciables (entrada a un conducto, por ejemplo) y, por tanto,

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \rho V_o^2 / L_e \sim \mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu V_o / D_o^2, \quad L_e \sim Re D_o; \quad (5.11)$$

si se satisface la primera de las condiciones en (5.3) se tiene que la longitud de estas regiones es pequeña frente a la del conducto y no se requiere un análisis detallado del movimiento en ellas.

### Caso de películas líquidas

En el movimiento de películas líquidas delgadas de espesor  $h(x)$  con  $h_o/L \ll 1$ , siendo  $h_o$  el espesor característico de la película y  $L$  su longitud característica, la importancia relativa entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad se mide mediante los parámetros

$$\frac{|\rho d\mathbf{v}/dt|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{\rho V_o/t_o}{\mu V_o/h_o^2} \sim \frac{h_o^2}{\nu t_o} \quad (5.12)$$

y

$$\frac{|\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{\rho V_o^2/L}{\mu V_o/h_o^2} \sim \frac{\rho V_o h_o}{\mu} \frac{h_o}{L} \sim Re \frac{h_o}{L}, \quad (5.13)$$

donde  $h_o$  es un valor característico del espesor de la película. Por tanto, el movimiento de la película líquida será con fuerzas de viscosidad dominante si

$$\frac{h_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad y \quad Re \frac{h_o}{L} \ll 1. \quad (5.14)$$

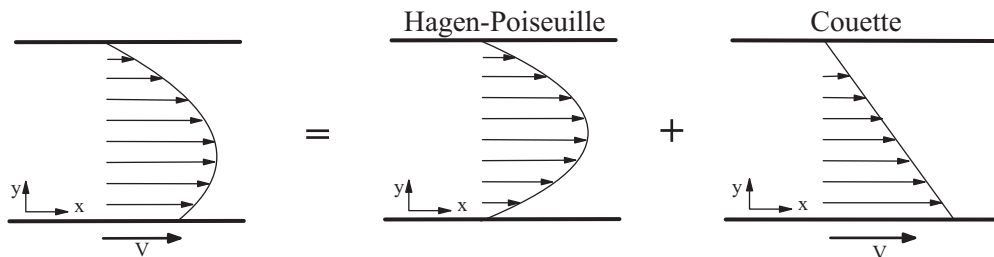
Si para el caso de una película líquida bidimensional se satisfacen las condiciones (5.14), la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección longitudinal de la película se reduce a

$$p_l + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.15)$$

y su integración para el caso del movimiento de un líquido entre dos superficies sólidas proporciona el perfil de velocidades en la película líquida

$$v = V \left[ 1 - \frac{y}{h(x)} \right] + \frac{p_l}{2\mu} y [h(x) - y]; \quad (5.16)$$

donde una de las superficies, la situada en  $y = 0$ , se mueve paralelamente a sí misma con velocidad  $V$  relativa a la otra y  $p_l$  es el gradiente de presión reducida según el eje  $x$  (paralelo a una de las placas). Obsérvese que el perfil de velocidades dado en (5.16), que satisface las condiciones de contorno sobre las placas se ha obtenido, debido a la linealidad de la ecuación (5.15), como superposición de dos efectos: el debido al movimiento relativo entre placas (corriente de Couette) al que corresponde el término lineal y la parte parabólica debido al gradiente de presiones (corriente de Hagen-Poiseuille).



El caudal por unidad de longitud a través de las superficies es

$$q = \int_0^h v(y) dy = \int_0^h \left[ V \left( 1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{p_l}{2\mu} y(h-y) \right] dy \quad (5.17)$$

$$= \frac{Vh(x)}{2} + \frac{h^3(x)}{12\mu} p_l = \frac{Vh(x)}{2} - \frac{h^3(x)}{12\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x};$$

expresión que muestra que el caudal total es suma del denominado caudal de Couette, asociado como ya se ha dicho al movimiento relativo entre superficies sólidas y el de Poiseuille debido al gradiente de presiones.

Para el caso de películas líquidas con una interfase (líquido-gas) libre situada en  $y = h(x)$ , se impondrá sobre ésta la condición de esfuerzo nulo y la integración de (5.15) con esta condición de contorno proporciona el perfil de velocidades

$$v = V + \frac{p_l}{\mu} y \left[ h(x) - \frac{y}{2} \right]; \quad (5.18)$$

esta condición es debida a que la viscosidad del gas es mucho menor que la del líquido y, por tanto, el esfuerzo que éste ejerce sobre aquél es muy pequeño y justifica que, en primera aproximación, se imponga en la interfase la condición de esfuerzo viscoso nulo. Finalmente el caudal total por unidad de longitud, suma de los de Couette y Poiseuille, es

$$q = \int_0^h v(y) dy = \int_0^h \left[ V + \frac{p_l}{\mu} y \left( h(x) - \frac{y}{2} \right) \right] dy \quad (5.19)$$

$$= Vh + \frac{h^3(x)}{3\mu} p_l = Vh - \frac{h^3(x)}{3\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x},$$

Los resultados del movimiento de películas líquidas bidimensionales se pueden extender fácilmente al caso tridimensional; de aplicación frecuente en el diseño y análisis de los dispositivos anti-fricción. Para atender a la variada geometría de estos dispositivos es de interés utilizar un sistema generalizado de coordenadas curvilíneas como el mostrado en la figura. En este sistema, y suponiendo que el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes [ $h^2/(\nu t_o) \ll 1$ ,  $(V_\alpha h/\nu)(h/L_\alpha) \ll 1$  y  $(V_\beta h/\nu)(h/L_\beta) \ll 1$ ] las velocidades y los caudales por unidad de longitud son

**Superficies sólidas**

$$v_\alpha = V_\alpha [1 - y/h] + \frac{1}{2\mu} P_\alpha y(h-y)$$

$$v_\beta = V_\beta [1 - y/h] + \frac{1}{2\mu} P_\beta y(h-y)$$

$$q_\alpha = \frac{V_\alpha h}{2} + \frac{h^3}{12\mu} P_\alpha$$

$$q_\beta = \frac{h V_\beta}{2} + \frac{h^3}{12\mu} P_\beta$$

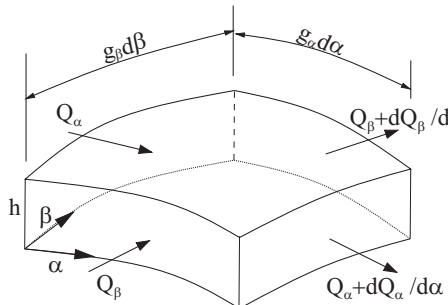
**Superficie sólida e interfase libre**

$$v_\alpha = V_\alpha + \frac{1}{\mu} P_\alpha y(h-y/2)$$

$$v_\beta = V_\beta + \frac{1}{\mu} P_\beta y(h-y/2)$$

$$q_\alpha = V_\alpha h + \frac{h^3}{3\mu} P_\alpha$$

$$q_\beta = V_\beta h + \frac{h^3}{3\mu} P_\beta$$



donde  $V_\alpha$  y  $V_\beta$  son las componentes en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  de la velocidad de una de las superficies sólidas (la situada en  $y = 0$ ) relativa a la otra,  $g_\alpha d\alpha$  y  $g_\beta d\beta$  son las longitudes elementales en cada una de las direcciones curvilíneas  $\alpha$  y  $\beta$  y  $P_\alpha$  y  $P_\beta$  son respectivamente los gradientes de presión reducida en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$

$$P_\alpha = -\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial \alpha}, \quad P_\beta = -\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial \beta}. \quad (5.20)$$

Obsérvese que los perfiles de velocidad se han obtenido de modo que se satisfaga la condición de conservación de la cantidad

de movimiento pero no se ha utilizado la ecuación de continuidad así que la distribución de presiones es desconocida. Para cerrar el problema es necesario exigir que los flujos calculados satisfagan la ecuación de conservación de masa en el volumen elemental de película líquida  $h(\alpha, \beta, t)g_\alpha d\alpha g_\beta d\beta$  representado en la figura; se obtiene entonces la ecuación, denominada de Reynolds, que proporciona la distribución de presiones en la película líquida y es punto de partida en cualquier análisis de lubricación fluidodinámica

$$\frac{\partial(hg_\alpha d\alpha g_\beta d\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(q_\alpha g_\beta d\beta)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial(q_\beta g_\alpha d\alpha)}{\partial \beta} d\beta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial(hg_\alpha g_\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(q_\alpha g_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(q_\beta g_\alpha)}{\partial \beta} = 0.} \quad (5.21)$$

La ecuación de Reynolds (5.21) es una ecuación en derivadas parciales, de segundo orden, lineal y de tipo elíptico, y como condiciones de contorno se puede imponer el valor de la presión en el contorno (condiciones de tipo Dirichlet) o el valor del caudal (condiciones de tipo Neumann).

### Movimiento de fluidos en medios porosos

El movimiento de un fluido a través de un medio poroso es un caso particular de movimiento con fuerzas de viscosidad dominante. La descripción macroscópica del movimiento se hace promediando las magnitudes fluidas en volúmenes  $\delta\Omega$  que son grandes frente al volumen  $a^3$  característico de los poros pero pequeños frente al volumen característico  $L^3$  del medio poroso ( $a^3 \ll \delta\Omega \ll L^3$ ).<sup>2</sup> Del empleo de variables promediadas surge la magnitud porosidad  $\phi(\mathbf{x}, t)$  que mide la fracción del volumen ocupado por los poros. Si  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad del fluido, la densidad aparente del fluido por unidad de volumen del medio poroso es  $\rho(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t)$ . Del mismo modo, la velocidad aparente  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  del fluido en el medio poroso mide el flujo de masa  $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  por unidad de área del medio poroso. Análogamente se definen la presión y la temperatura medias.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la ecuación de continuidad se expresa matemáticamente en la forma

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5.22)$$

donde se ha supuesto que la porosidad del medio es independiente del tiempo. Por otra parte y dado que una formulación exacta de la conservación de la cantidad de movimiento no es factible puesto que se desconocen las interacciones medias entre el fluido y las paredes sólidas del medio poroso, se postula una relación semi-empírica entre la velocidad aparente y el gradiente de presiones, denominada ley de Darcy,

$$\mathbf{v} = -\frac{\Pi}{\mu} (\nabla p + \rho \nabla U);$$

la constante  $\Pi$  con dimensiones de área se denomina permeabilidad del medio y debe determinarse empíricamente.

### Caso de movimiento de líquidos

En el caso de líquidos la ecuación de conservación de la masa en el interior del dominio fluido se reduce a  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  que combinada con la ley de Darcy permite obtener la ecuación diferencial para la distribución de presiones en el medio poroso

$$\boxed{\nabla^2(p + \rho U) = 0.} \quad (5.23)$$

<sup>2</sup> El lector interesado en una descripción más detallada del movimiento en medios poroso puede acudir por ejemplo a *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos* de A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

**Caso de movimiento isoterma de gases**

Bajo esta condición, si se combina la ecuación de continuidad (5.22) con la ley de Darcy teniendo en cuenta que en el movimiento de un gas normalmente son despreciables las fuerzas másicas se obtiene

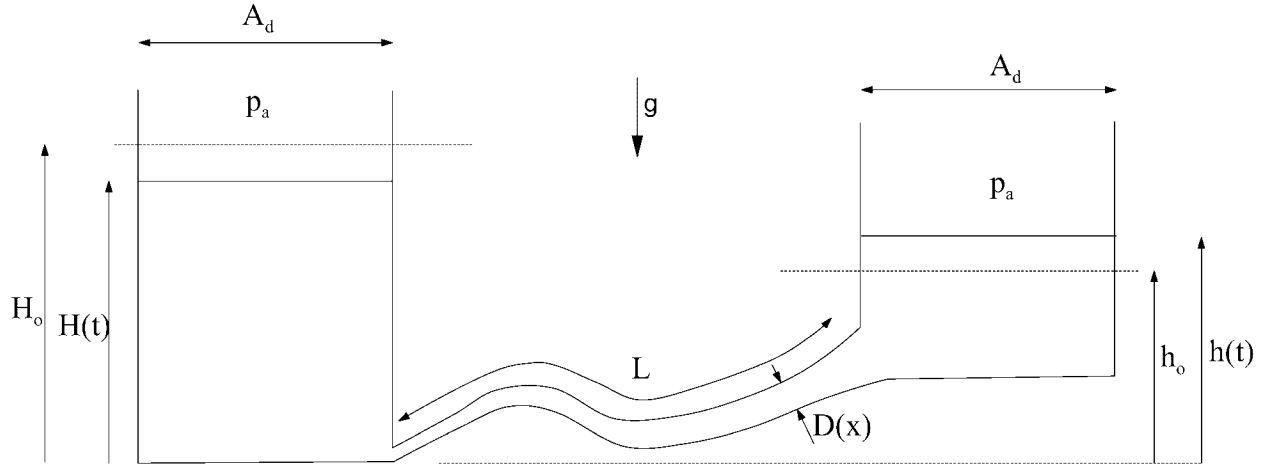
$$\frac{\phi}{R_g T_s} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{p}{R_g T_s} \frac{\Pi}{\mu} \nabla p \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\Pi}{2\mu} \nabla^2 p^2 = 0} \quad (5.24)$$

donde se ha supuesto que la permeabilidad del medio poroso es uniforme y se ha supuesto que la viscosidad del gas es constante por serlo la temperatura de éste; se supone que la matriz porosa está a temperatura constante  $T = T_s$ , y que por ser tan lento el movimiento del gas a través del medio poroso, éste adquiere la temperatura de la matriz porosa de modo que su densidad viene dada por  $\rho = p/R_g T_s$ . A las ecuaciones anteriores, en derivadas parciales de segundo orden y lineales, de tipo elíptico hay que imponerles condiciones de contorno apropiadas; del tipo Dirichlet (se impone la presión), del tipo Neumann (se impone el caudal) o mixtas.

**Problema 5.1**

Dos depósitos de área  $A_d$ , abiertos a la atmósfera, como los indicados en la figura, contienen un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . Ambos depósitos están unidos por un conducto de longitud  $L$  y sección circular cuyo diámetro varía lentamente en la forma  $D(x) = D_o(1 + \alpha x/L)$  a lo largo de la línea media del conducto  $x$ ,  $\alpha > -1$  y  $\alpha D_o/L \ll 1$ . Inicialmente la diferencia de alturas entre las superficies libres del líquido en ambos depósitos es  $H_o - h_o$  y el movimiento del líquido está inhibido por la presencia de un diafragma situado en una sección del conducto. Si a partir de un cierto instante se rompe el diafragma, el líquido descarga a través del conducto bajo la acción de la gravedad, calcular:

1. Criterios que deben satisfacerse para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el movimiento del líquido en el conducto.
2. Bajo los criterios anteriores, estudiar el movimiento y calcular el tiempo requerido para que se igualen las alturas de ambos depósitos.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Como se vio en la introducción del tema la relación entre la fuerza de inercia temporal y la de viscosidad es

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia temporal}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V/t_o}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{D_o^2}{\nu t_o} \quad (1)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática y  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas. Este tiempo, que es del orden del tiempo de vaciado de un depósito a otro, se puede estimar a partir de la ecuación de continuidad en cualquiera de los dos depósitos

$$A_d \frac{dh}{dt} = Q \quad \rightarrow \quad t_o \sim A_d (H_o - h_o)/Q;$$

por otra parte, el caudal puede estimarse a partir de la fórmula de Hagen-Poiseuille

$$Q \sim \frac{D_o^4}{\mu} \frac{\rho g (H_o - h_o)}{L}.$$



Sustituyendo los valores estimados de  $t_o$  y  $Q$  en (1) se obtiene que las fuerzas de inercia temporales son despreciables frente a las viscosas si

$$\frac{D_o^2}{\nu t_o} \sim \frac{gD^6}{\nu^2 A_d L} \ll 1. \quad (2)$$

Obsérvese que si la viscosidad del líquido, la gravedad y los parámetros geométricos del problema son tales que se satisface la desigualdad (2), el movimiento del fluido en el conducto es casi estacionario y el tiempo desempeña el papel de un parámetro. Análogamente la relación entre las fuerzas de inercia convectivas y las de viscosidad es

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia convectivas}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V^2/L}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{\rho V D_o^2}{\mu L} \sim Re \frac{D}{L} \ll 1 \quad (3)$$

y si se sustituye el valor  $VD_o^2$  por el valor del caudal estimado anteriormente se obtiene que las fuerzas de inercia convectiva son despreciables frente a las de viscosidad si se satisface la desigualdad

$$\frac{g(H_o - h_o)D^4}{\nu^2 L^2} \ll 1. \quad (4)$$

### Apartado 2.-

Si se satisfacen las desigualdades (3) y (4), el movimiento del líquido en el conducto es con fuerzas de viscosidad dominantes y la relación entre el caudal y el gradiente de presiones viene dado por la ecuación de Hagen-Poiseuille

$$Q = -\frac{\pi D^4(x)}{128\mu} \frac{d(p + \rho gz)}{dx}. \quad (5)$$

Las regiones de entrada y salida donde el flujo no es casi unidireccional, y por tanto (5) no es válida, poseen longitudes que son del orden de  $ReD_o$ , que son muy pequeñas frente a la longitud  $L$  del conducto si  $ReD_o/L \ll 1$ . Por esta razón se desprecia la caída de presión en estas zonas y como condiciones de contorno en los extremos del conducto se impondrá que la presión reducida es la de los correspondientes depósitos. De la fluidostática se tiene a la entrada del conducto  $p(0) + \rho gz(0) = p_a + \rho gH(t)$  mientras que a la salida  $p(L) + \rho gz(L) = p_a + \rho gh(t)$ . Integrando (5) entre la entrada y la salida del conducto se tiene

$$-\int_{p_a + \rho gH}^{p_a + \rho gh} d(p + \rho gz) = \frac{128\mu Q}{\pi} \int_0^L \frac{dx}{D^4(x)} =$$

$$[p_a + \rho gh(t)] - [p_a + \rho gH(t)] = \rho g[H(t) - h(t)] = \frac{128\mu QL}{3\alpha\pi D_o^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^3} \right]; \quad (6)$$

obsérvese que para el caso de un conducto de sección circular constante se obtiene

$$\rho g(H - h) = \frac{128\mu QL}{\pi D_o^4}. \quad (7)$$

Sustituyendo en (6) las ecuaciones de conservación de la masa en uno de los depósitos  $Q = -A_d dH/dt$  y la conservación de la masa en ambos depósitos  $H(t) + h(t) = H_o + h_o$  se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la altura de líquido en el depósito,

$$-\rho g[2H - (H_o + h_o)] = \frac{128\mu A_d L}{3\alpha\pi D_o^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^3} \right] \frac{dH}{dt}, \quad (8)$$

con la condición inicial  $H(0) = H_o$ .

Si se define  $\tau$ , que tiene dimensiones de tiempo, en la forma

$$\tau = \frac{128\mu A_d L}{3\rho g\alpha\pi D_o^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^3} \right]$$

y la altura  $\hat{H} = (H_o + h_o)/2$ , la anterior ecuación se reduce a

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{H - \hat{H}}{\tau},$$

cuya integración proporciona la altura de la superficie libre en el depósito de la izquierda  $H - \hat{H} = (H_o - \hat{H}) e^{-t/\tau}$ . La altura del otro depósito y el caudal se obtienen fácilmente a partir de la última expresión. Obsérvese que aunque el tiempo que tarda en alcanzarse la altura de equilibrio  $\hat{H}$  es formalmente infinito, en la práctica esta altura se alcanza una vez transcurrido un tiempo del orden de 2 o 3 veces el tiempo  $\tau$ . Como curiosidad, es interesante ver la variación del tiempo característico  $\tau$  con el ángulo del conducto; en particular si se desarrolla la expresión de  $\tau$  en serie de Taylor para ángulos  $\alpha$  pequeños se obtiene

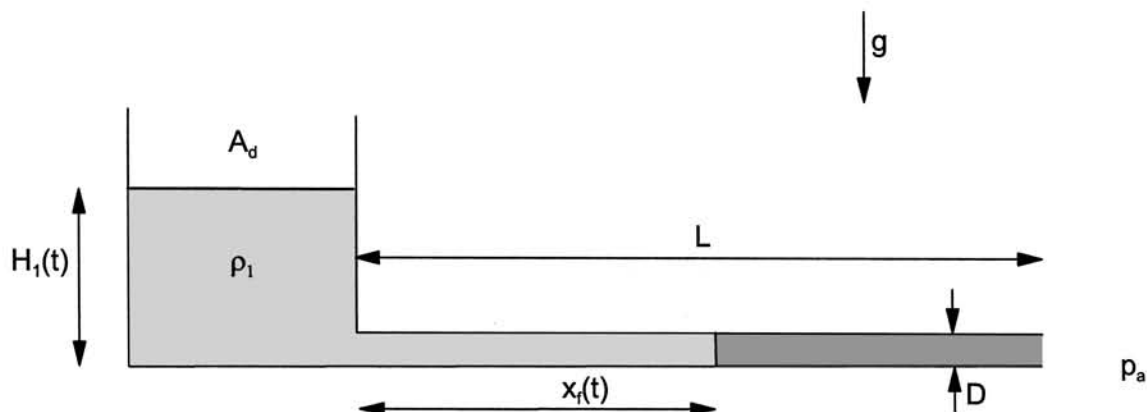
$$\tau_{\alpha \ll 1} \sim \frac{128\mu A_d L}{\rho g \pi D_o^4} (1 - 4\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)), \quad (9)$$

se observa que el tiempo de vaciado es mayor para valores negativos de  $\alpha$  (conducto convergente) que para valores positivos (conducto divergente). Esto es, para el mismo gradiente de presiones, el caudal que fluye por el conducto es mayor para un conducto convergente.

**Problema 5.2**

Un depósito de área  $A_d$  abierto a la atmósfera por su parte superior está u sección circular constante, de longitud  $L$  y diámetro  $D$  ( $D \ll L$ ,  $D^2 \ll A_d$ ), que se abre también a la atmósfera por el otro extremo. Inicialmente el depósito  $\rho_1$  y viscosidad  $\mu_1$  que lo llena hasta una altura  $H_o$  mientras que el conducto, que está cerrado a la salida diafragma, está lleno de otro líquido de densidad  $\rho_2$  y viscosidad  $\mu_2$ , inmisible con el primero. Suponer que  $A_d H_o > \pi D^2 L / 4$ . Se supondrá también que la tensión superficial  $\zeta$  entre ambos líquidos es tal que el número de Bond es grande frente a la unidad,  $\rho g D^2 / \zeta \gg 1$ , y, por tanto, las fuerzas de tensión superficial son despreciables frente a las gravitatorias e En un instante dado se rompe el diafragma y los líquidos de viscosidad dominantes.

1. Criterios requeridos para que el movimiento sea c
2. Calcular la posición de la interfase  $x_f(t)$  y la altura de la superficie libre en el depósito como funciones del tiempo.
3. Tiempo que tarda la interfase en abandonar el co
4. Evolución posterior de la altura de la superficie lil



Resolución:

**Apartado 1.-**

Al ser el movimiento con fuerzas de viscosidad dominante

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia temporal}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V / t_o}{\mu_2 V / D^2} \sim \frac{\rho_2 D^2}{\mu_2 t_o} \ll 1, \quad (1)$$

donde  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes

varían porque varía la posición de la interfase y su tiempo

por otra parte,  $Q$  puede ser estimado a partir de la ecuación de Hagen-Poi:

y si se sustituyen los valores característicos de  $t_o$  y  $Q$  en (1) se obtiene

$$t_o \sim L/V \sim D^2 L/Q;$$

$$Q \sim (D^4/\mu_2)(\rho_1 g H_o/L),$$

$$\frac{\rho_1 \rho_2 D^4 g H_o}{\mu_2^2 L^2} \ll 1. \quad (2)$$

Por otra parte, las fuerzas de inercia convectivas son despreciables frente a las de viscosidad si

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia convectiva}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V^2/L}{\mu_2 V/D^2} \sim ReD/L \ll 1; \quad (3)$$

es fácil ver que (3) conduce también a la desigualdad (2).

### Apartado 2.-

Suponiendo que las propiedades de ambos líquidos y que los parámetros geométricos del problema son tales que se satisface la desigualdad (2) el movimiento es con viscosidad dominante y la relación entre el caudal y el gradiente de presiones viene dado por la ecuación de Hagen-Poiseuille. Si se integra esta ecuación para la región ocupada por el líquido 1, esto es, entre la entrada y la interfase se tiene

$$\int_0^{x_f} \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q \, dx = - \int_{p_a + \rho_1 g H}^{p^*} dp \Rightarrow \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q x_f = p_a + \rho_1 g H - p^*, \quad (4)$$

donde  $x_f(t)$  es la posición de la interfase medida desde la entrada y  $p^*$  es la presión en la interfase que es desconocida. Integrando la ecuación de Hagen-Poiseuille para la columna de líquido 2, entre la interfase y la salida se tiene

$$\int_{x_f}^L \frac{128\mu_2}{\pi D^4} Q \, dx = - \int_{p^*}^{p_a} dp \Rightarrow \frac{128\mu_2}{\pi D^4} Q (L - x_f) = p^* - p_a, \quad (5)$$

y la presión  $p^*$  se elimina sin más que sumar miembro a miembro las últimas ecuaciones en (4) y (5)

$$\frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q x_f + \frac{128\mu_2}{\pi D^4} Q (L - x_f) = \rho_1 g H. \quad (6)$$

La ecuación de continuidad en el depósito y en el conducto muestra que

$$Q = -A_d \frac{dH}{dt} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dx_f}{dt}, \quad (7)$$

cuya integración con la condición inicial  $t = 0$   $H = H_o$  y  $x_f = 0$  proporciona

$$A_d(H_o - H) = \frac{\pi D^2}{4} x_f. \quad (8)$$

La ecuación que rige la posición de la interfase  $x_f$  en función del tiempo se obtiene de la combinación de (6) con (7) y (8),

$$32D^2 \frac{dx_f}{dt} [\mu_2 L + (\mu_1 - \mu_2)x_f] = \rho g \left( H_o - \frac{\pi D^2}{4A_d} x_f \right). \quad (9)$$

Su solución, dada la condición inicial  $x_f(0) = 0$ , es

$$-x_f(t) - \left( \frac{\mu_2 L}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{4H_o A_d}{\pi D^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{\pi D^2 x_f(t)}{4H_o A_d} \right) = \frac{\pi \rho g}{128A_d(\mu_1 - \mu_2)} t, \quad (10)$$

que a su vez, usando (8), permite calcular la evolución temporal de la superficie libre  $H(t)$

$$H(t) - H_o - \left( \frac{\mu_2 L}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\pi D^2}{4A_d} - H_o \right) \ln \left( \frac{H(t)}{H_o} \right) = \frac{\pi^2 \rho g D^2}{512A_d^2(\mu_1 - \mu_2)} t. \quad (11)$$

### Apartado 3.-

El tiempo que tarda en alcanzar la interfase la salida  $t_L$  se calcula simplemente de (10) particularizándola en  $x_f = L$

$$t_L = \frac{128A_d(\mu_1 - \mu_2)}{\pi \rho g} \left[ -L - \left( \frac{\mu_2 L}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{4H_o A_d}{\pi D^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{\pi D^2 L}{4H_o A_d} \right) \right]. \quad (12)$$

**Apartado 4.-**

Una vez que la interfase abandona el conducto por éste circula un único fluido por lo que ahora se debe cambiar en (4) los límites superiores de las integrales en el primer y segundo miembro por  $L$  y  $p_a$ , respectivamente,

$$\int_0^L \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q \, dx = - \int_{p_a + \rho_1 g H}^{p_a} dp \quad \Rightarrow \quad \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q L = \rho_1 g H, \quad (13)$$

La ecuación diferencial se halla del resultado anterior, volviendo a tener en cuenta que  $Q = -A_d dH/dt$ ,

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} = - \frac{\pi g D^4}{128 A_d \nu_1}, \quad (14)$$

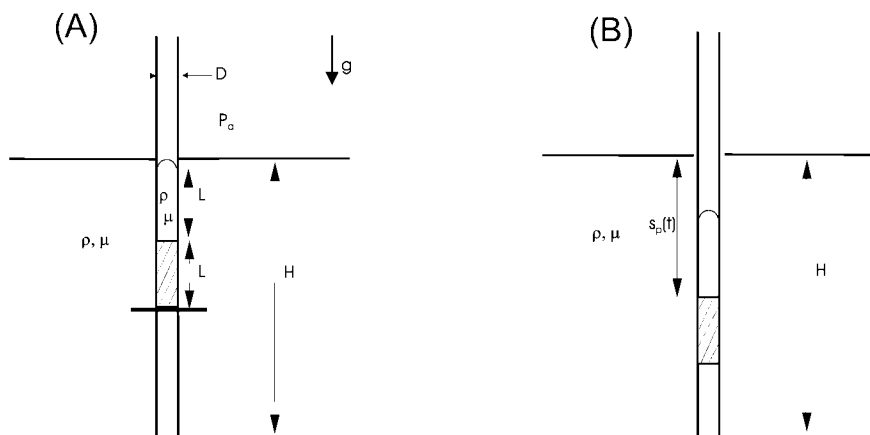
de cuya integración, con la condición inicial  $H_L = H(t_L)$  calculada mediante (11), se obtiene

$$H(t) = H_L \exp \left( - \frac{\pi g D^4 (t - t_L)}{128 A_d \nu_1} \right). \quad (15)$$

**Problema 5.3**

La figura A muestra un tubo vertical de diámetro  $D$  abierto por sus dos extremos, con el inferior sumergido a una profundidad  $H$  en un recipiente de grandes dimensiones que contiene un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . El tubo contiene una pieza sólida de altura  $L \gg D$  y masa despreciable que puede deslizarse sin rozamiento por el interior del tubo, siendo el juego pieza-tubo tal que no puede circular líquido a través de él. Sobre la pieza descansa una columna de líquido, el mismo que el del recipiente, también de altura  $L$ , cuya parte superior está en contacto con la atmósfera. Se supondrá que  $\zeta$  es la tensión superficial aire-líquido y que el ángulo de contacto tubo-líquido es  $\theta = 180^\circ$ . Inicialmente el sistema está en reposo con la pieza apoyada sobre un diafragma, que la separa del líquido del recipiente (ver figura A), situado a una profundidad  $2L$  medida desde la superficie libre del recipiente. En un instante dado, se rompe el diafragma y se origina un movimiento en el interior del conducto que se desea analizar. Suponer que el movimiento del líquido en el conducto es con fuerzas de viscosidad dominantes, y que la longitud del tubo es tal que la pieza sólida está siempre dentro del tubo.

1. Si las fuerzas gravitatorias son despreciables frente a las de tensión superficial  $\rho g D^2 / \sigma \ll 1$ , se desea conocer:
  - a) Condición que deben cumplir los datos del problema para que se produzca un movimiento descendente de la pieza (ver figura B).
  - b) Evolución temporal de la distancia  $s_p(t)$  entre la cara superior de la pieza y la superficie libre del recipiente, indicando su valor de equilibrio.
2. Si  $\rho g D^2 / \sigma \gg 1$  y el sistema parte de la situación inicial de la figura A, calcular la evolución temporal de la distancia  $s_p(t)$  entre la cara superior de la pieza y la superficie libre del recipiente, indicando su valor de equilibrio.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La pieza se sumergirá si en el instante en el que se retira el diafragma las fuerzas que actúan sobre la pieza no están equilibradas y la resultante no nula está dirigida según la gravedad. Si  $p_1$  es la presión del líquido debajo de la interfase,  $p_1 = p_a + 4\zeta/D$ ,  $p_2 = p_1 + \rho g L$  es la presión del líquido justo encima de la pieza sólida y  $p_3 = p_a + 2\rho g L$  es la presión del líquido debajo de la misma, se tiene que, por ser su masa despreciable, la pieza se moverá hacia abajo si

$$p_2 = p_a + 4\frac{\zeta}{D} + \rho gL > p_3 = p_a + 2\rho gL, \quad \text{o bien si,} \quad 4\frac{\zeta}{D} > \rho gL. \quad (1)$$

La posición de equilibrio  $s_{pe}$  de la pieza se obtiene sin más que igualar las presiones  $p_2$  y  $p_3$  encima y debajo de la pieza supuesta ésta en equilibrio

$$p_a + \frac{4\zeta}{D} + \rho gL = p_a + \rho g(L + s_{pe}); \quad (2)$$

por tanto,

$$s_{pe} = \frac{4\zeta}{\rho gD}. \quad (3)$$

Si el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes deben cumplirse los criterios dados en los problemas 1 y 2 de este capítulo

$$\frac{\rho D^2}{\mu t_o} \sim \frac{\rho V D^2}{\mu L} \sim \frac{\rho Q}{\mu L} \ll 1 \quad \text{con} \quad Q \sim \frac{D^4}{\mu(H-L)} \left( \frac{4\zeta}{D} - \rho gL \right), \quad (4)$$

donde el caudal se ha estimado a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille. Para calcular la ecuación que gobierna la evolución de la interfase, se calcularán las presiones  $p_2$  y  $p_3$  en función del caudal que circula por el conducto mediante la relación de Hagen-Poiseuille aplicado a los dos tramos de líquido en el conducto (por encima y por debajo de la pieza). Así, para la columna líquida superior

$$\frac{128\mu}{\pi D^4} \int_{s_p-L}^{s_p} dx = - \int_{p_a+4\zeta/D+\rho g[H-(s_p-L)]}^{p_2+\rho g(H-s_p)} d(p + \rho gz), \quad (5)$$

donde el origen de  $z$  se ha tomado en el extremo inferior del conducto y  $x$  es la coordenada cuya dirección es la del movimiento del líquido y su origen la superficie libre exterior al conducto. De (5) se obtiene

$$p_2 = p_a + \frac{4\zeta}{D} + \rho gL - \frac{128\mu}{\pi D^4} QL. \quad (6)$$

Análogamente,

$$\frac{128\mu}{\pi D^4} \int_{s_p+L}^H dx = - \int_{p_3+\rho g[H-(s_p+L)]}^{p_a+\rho gH} d(p + \rho gz), \quad (7)$$

y

$$p_3 = p_a + \rho g(s_p + L) + \frac{128\mu}{\pi D^4} Q(H - s_p - L). \quad (8)$$

Al ser la masa de la pieza sólida despreciable  $p_2 = p_3$  obteniéndose la ecuación que da la posición de la pieza como función del tiempo simplemente por la resta de las ecuaciones (6) y (8); teniendo en cuenta que  $Q = (\pi D^2/4)(ds_p/dt)$  se obtiene finalmente

$$(H - s_p) \frac{ds_p}{dt} = \frac{D^2}{32\mu} \left( \frac{4\zeta}{D} - \rho g s_p \right), \quad (9)$$

cuya solución, teniendo en cuenta la condición inicial  $s_p(0) = L$ , es

$$(s_p - L) - \left( H - \frac{4\zeta}{\rho gD} \right) \ln \frac{4\zeta - \rho gD s_p}{4\zeta - \rho gDL} = \frac{\rho gD^2}{32\mu} t. \quad (10)$$

**Apartado 2.-**

Si  $\rho g D^2 / \sigma \gg 1$ , las fuerzas de tensión superficial son despreciables y el líquido ascenderá por el tubo. La posición de equilibrio final de la pieza  $s_{pe}$  se obtiene de la igualdad de las presiones sobre la pieza calculadas éstas mediante fluidostática

$$p_2 = p_a + \rho g L = p_a + \rho g (L + s_{pe}) = p_3, \quad (11)$$

y

$$s_{pe} = 0. \quad (12)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en el caso anterior es fácil obtener la ecuación que gobierna el movimiento de la pieza

$$(H - s_p) \frac{ds_p}{dt} = \frac{D^2 \rho g s_p}{32\mu}, \quad (13)$$

cuya integración con la condición inicial  $s_p(0) = L$  proporciona

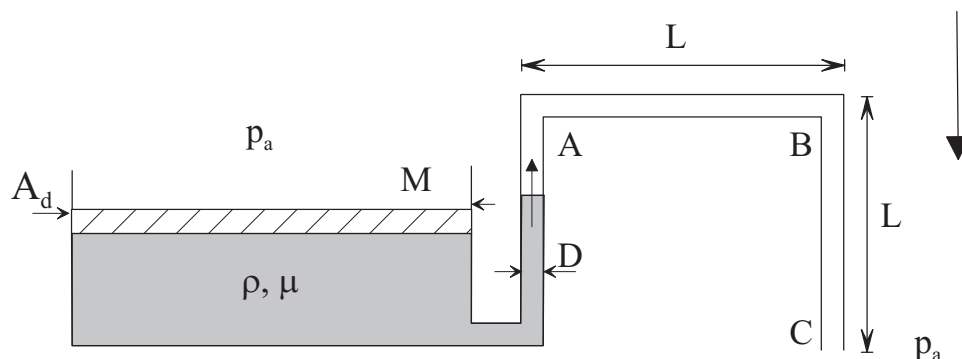
$$H \ln \left( \frac{L}{s_p} \right) - (L - s_p) = \frac{\rho g D^2}{32\mu} t. \quad (14)$$



**Problema 5.4**

El dispositivo de la figura consta de un depósito de sección  $A_d$ , de cuya base parte un conducto en forma de U invertida con tres tramos iguales de longitud  $L$  y diámetro  $D$  ( $D \ll L$ ); el tramo de conexión entre depósito y conducto en U posee una longitud mucho menor que  $L$ . Un émbolo de masa  $M$  y área  $A_d$  está en contacto con un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  que llena el depósito. El émbolo puede deslizarse sin rozamiento sobre las paredes del depósito bajo la acción de la gravedad. Inicialmente, el émbolo está situado a una altura  $H_o < L$  por encima del fondo del depósito y un diafragma cierra la salida del depósito, de modo que el líquido y el émbolo están en reposo. En un cierto instante, se rompe el diafragma y el líquido fluye a través del conducto en un régimen en el que las fuerzas de viscosidad son dominantes. Supongan en sus cálculos que las fugas a través del juego émbolo-depósito son despreciables; supongan también que la geometría del sistema es tal que se satisface la desigualdad  $A_d H_o \gg L D^2$ . Se desea calcular:

1. Criterios que se deben satisfacer para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominantes.
2. Masa mínima  $M_{min}$  del émbolo para que el líquido alcance el extremo superior A del primer tramo.
3. Suponiendo  $M > M_{min}$ , calcular el tiempo necesario para que la interfase aire-líquido alcance el extremo A.
4. Calcular los tiempos necesarios para que la interfase alcance los puntos B y C del conducto.
5. Analizar la descarga posterior del depósito.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La ecuación que determina el movimiento del émbolo es

$$-M \frac{d^2 H}{dt^2} = Mg - (p_d - p_a) A_d, \quad (1)$$

donde  $p_d$  es la presión que el líquido ejerce sobre la cara inferior del émbolo. Naturalmente, la resolución del problema mecánico (1) requiere resolver el problema del movimiento del líquido a través del conducto.

Los criterios que deben cumplirse para que el movimiento del líquido en el conducto sea con fuerzas de viscosidad dominantes son

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia temporal}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V/t_o}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{D_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad (2)$$

y

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia convectivas}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V^2/L}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{V D_o}{\nu} \frac{D_o}{L} \sim Re \frac{D_o}{L} \ll 1 \quad (3)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática,  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas y  $Re$  es el número de Reynolds del movimiento.

En la estimación de  $t_o$  debe tenerse en cuenta que las magnitudes fluidas varían debido a que la presión a la entrada del conducto varía porque varía la altura de líquido y también porque la interfase de separación líquido-gas varía su posición en el conducto invirtiéndose la fuerza en acelerar la columna de fluido cuya longitud es cada vez mayor. El tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas asociadas a la variación de la altura  $H(t)$  puede determinarse a partir de la ecuación de continuidad en el depósito

$$A_d \frac{dH}{dt} = -Q = -V \frac{\pi D^2}{4} \quad y \quad t_o \sim \frac{A_d H_o}{VL}, \quad (4)$$

donde  $V$  es la velocidad media característica del líquido en el conducto. Por otra parte, el orden de magnitud del otro tiempo característico de cambio de las magnitudes fluidas es el tiempo de residencia  $t_r$  que es del orden de  $L/V$ . El cociente entre ambos tiempos  $t_r/t_o$  es el denominado número de Strouhal y vale en este caso

$$\frac{t_r}{t_o} \sim \frac{L}{V t_o} \sim \frac{LD^2}{A_d H_o}, \quad (5)$$

que, de acuerdo con el enunciado es mucho menor que la unidad ya que se ha supuesto que el volumen del conducto, de orden de  $LD_o^2$ , es pequeño frente al volumen del depósito,  $A_d H_o$ . Esto significa que durante el llenado del conducto el tiempo característico de cambio de las magnitudes fluidas es  $t_r \sim L/V$  y cuando la interfase llega a la salida del conducto, la altura de la superficie en el depósito apenas ha variado; durante este proceso es lícito suponer que la altura del líquido en el depósito es constante y de valor  $H_o$ . Por el contrario, el proceso de vaciado del depósito ocurrirá en tiempos del orden de  $t_o$  y se puede considerar que el conducto está siempre lleno pues el tiempo que se ha empleado en su llenado es despreciable frente al tiempo de vaciado  $t_r \ll t_o$ . Obsérvese que cada escala de tiempo desempeña un papel distinto dependiendo del análisis que se desee efectuar.

Finalmente, para determinar si el líquido se mueve con viscosidad dominante durante el llenado del conducto es necesario estimar la velocidad media del líquido en el conducto o el caudal; esto puede hacerse a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille por suponer que el movimiento es con viscosidad dominante

$$Q \sim V D^2 \sim \frac{D^4}{\mu} \frac{\Delta(p + \rho g z)}{L} \sim \frac{D^4}{\mu} \frac{p_d + \rho g H_o - p_a}{L}. \quad (6)$$

Como  $t_o \gg t_r$ , durante el proceso de llenado del conducto, la posición del émbolo no varía con el tiempo y de la ecuación (1) se obtiene  $(p_d - p_a) = (Mg)/A_d$  y

$$V \sim \frac{D^2}{\mu} \frac{Mg + \rho g H_o A_d}{A_d L}, \quad (7)$$

que muestra que la velocidad es directamente proporcional a la suma de los pesos del émbolo y del líquido en el depósito. Introduciendo el valor estimado en (2) y teniendo en cuenta que, como se ha visto anteriormente, durante el proceso de llenado del conducto el tiempo característico de cambio  $t_o$  es del orden de  $t_r \sim L/V$  se obtiene

$$\frac{D^2}{\nu t_o} \sim D^2 V \nu L \sim \frac{D^4 (Mg + \rho g H_o A_d)}{\rho \nu^2 L^2 A_d} \ll 1, \quad (8)$$

que es la condición requerida para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes. Es fácil ver que si se introduce en (3) el valor estimado de la velocidad media se obtiene el mismo criterio que el dado en (8).

**Apartado 2.-**

Para analizar el movimiento de la columna líquida se parte, pues, de la ecuación de Hagen-Poiseuille

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{d(p + \rho g z)}{ds}, \quad (9)$$

cuya integración proporciona

$$\frac{128\mu Q}{\pi D^4} s = -(p + \rho g z) + C, \quad (10)$$

donde  $C$  es una constante de integración,  $s$  es la coordenada a lo largo del conducto y la altura  $z$  se mide a partir del fondo del depósito. Obsérvese que aunque (9) es una ecuación diferencial de primer orden se necesitan dos condiciones de contorno para determinar  $Q$  y la constante de integración  $C$ . Como siempre las condiciones de contorno se imponen a la entrada del conducto donde la presión y la altura son respectivamente  $p_d + \rho g H_o = p_a + \rho g H_o + Mg/A_d$  y  $z = 0$  y en la interfase líquido-aire situada en  $s = x(t)$  donde la presión es  $p = p_a$  y la altura es  $z[x(t)]$ . Obsérvese que la altura a la que se sitúa la interfase  $z[x(t)]$  depende del tramo donde en ese instante se sitúa la interfase. Así, para instantes en los cuales la interfase se localiza en el primer tramo,  $x < L$ , el valor de la altura a la que se sitúa la interfase es  $z = x$ . En efecto, particularizando (10) en la entrada al conducto y en la interfase y restando miembro a miembro las dos ecuaciones resultantes, para eliminar  $C$ , se obtiene

$$\frac{128\mu Q}{\pi D^4} x = \frac{Mg}{A_d} + \rho g(H_o - x), \quad (11)$$

que proporciona una de las relaciones entre el caudal  $Q$  y la posición de la interfase  $x$ . La otra relación la proporciona la ecuación de conservación de la masa en el conducto

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dx}{dt}. \quad (12)$$

Eliminando  $Q$  entre ambas se obtiene

$$\frac{32\mu}{D^2} x \frac{dx}{dt} = \frac{Mg}{A_d} + \rho g(H_o - x), \quad (13)$$

que es la ecuación que determina la posición de la interfase con el tiempo mientras ésta se localiza en el primer tramo. Obsérvese que si el segundo miembro de (13) se anula para  $x = L$  se obtiene la masa mínima que debe poseer el émbolo para que la interfase alcance la altura  $L$ ; se tiene entonces

$$M_{min} = (L - H_o)\rho A_d. \quad (14)$$

**Apartado 3.-**

La integración de (13) con la condición inicial  $x(0) = 0$  proporciona la posición de la interfase como función del tiempo

$$\frac{\rho g D^2}{32\mu} t = \int_0^x \frac{x \, dx}{A - x} = -x + A \ln \frac{A}{A - x}, \quad (15)$$

donde por comodidad se ha definido  $A = H_o + Mg/(\rho A_d)$ . En el supuesto que la masa  $M$  del émbolo sea mayor que  $M_{min}$ , el tiempo  $t_A$  necesario para que la interfase alcance la posición  $x = L$  es

$$\frac{D^2 \rho g}{32\mu} t_A = \int_0^L \frac{x \, dx}{A - x} = -L + A \ln \frac{A}{A - L}. \quad (16)$$

**Apartado 4.-**

Cuando la interfase se localiza en el segundo tramo,  $L < x < 2L$ , la altura a la que se sitúa ésta es constante y dada por  $z(x) = L$ . Es fácil ver que el movimiento de la interfase se obtiene sin más que retener que sustituir en el segundo miembro de (13) la altura  $x$  de la interfase por la nueva altura  $L$

$$\frac{32\mu}{D^2} x \frac{dx}{dt} = \rho g(A - L); \quad (17)$$

su integración entre  $x = L$  y  $x = 2L$  proporciona el tiempo  $t_B$  requerido para que la interfase alcance la última de las posiciones

$$\frac{D^2 \rho g}{32\mu} (t_B - t_A) = \int_L^{2L} \frac{x dx}{A - L} = \frac{3L^2}{2(A - L)}. \quad (18)$$

Por último, cuando la interfase se sitúa en el tercer tramo,  $2L \leq x \leq 3L$ , la expresión de la altura de ésta satisface la relación,  $x + z(x) = 3L$ , por lo que la ecuación diferencial que rige el movimiento de la interfase en dicho tramo es

$$\frac{32\mu}{D^2} x \frac{dx}{dt} = \rho g(A - 3L + x), \quad (19)$$

y su integración proporciona el tiempo necesario para que la interfase abandone el conducto

$$\frac{D^2 \rho g}{32\mu} (t_C - t_B) = \int_{2L}^{3L} \frac{x dx}{A - 3L + x} = L + (A - 3L) \ln \frac{A - L}{A}. \quad (20)$$

**Apartado 5.-**

Para el análisis de la descarga del depósito, la integración de la ecuación de Hagen-Poiseuille entre la entrada y salida del conducto, donde las condiciones de contorno son respectivamente  $p(0) + \rho g z(0) = p_d + \rho g H$  y  $p(3L) + \rho g z(3L) = p_a$ , proporciona

$$\frac{128\mu Q}{\pi D^4} 3L = p_d + \rho g H - p_a = \frac{M}{A_d} \left( g + \frac{d^2 H}{dt^2} \right) + \rho g H, \quad (21)$$

para determinar  $H$  y  $Q$  como funciones del tiempo. El problema se cierra haciendo uso de la ecuación de conservación de la masa en el depósito

$$A_d dH/dt = -Q. \quad (22)$$

Si se sustituye (22) en (21) se obtiene una ecuación lineal de segundo orden para determinar la altura del émbolo como función del tiempo

$$B \frac{d^2 H^*}{d\tau^2} + \frac{dH^*}{d\tau} + H^* = 0, \quad (23)$$

donde para simplificar la ecuación se han introducido las variables y parámetros adimensionales siguientes

$$H^* = \frac{H + m}{H_o}, \quad \tau = \frac{t}{t_c} \quad t_c = \frac{384\mu A_d L}{\pi \rho g D^4}, \quad m = \frac{M}{\rho A_d}, \quad \text{y} \quad B = \frac{\pi^2 M \rho g D^8}{(384\mu L)^2 A_d^3}.$$

Obsérvese que cuanto menor sea el parámetro adimensional  $B$  mayor importancia tendrá las fuerzas viscosas que se establecen en el conducto frente a la inercia del émbolo.

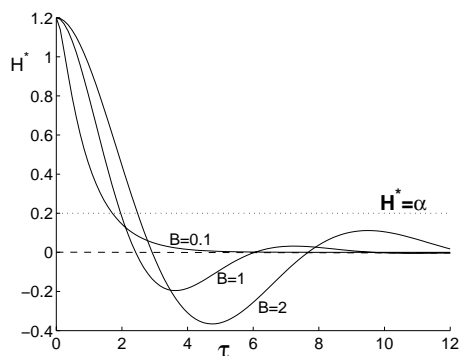
La integración de (23) con las condiciones de contorno  $H^*(0) = \frac{H_o + m}{H_o} = 1 + \alpha$  y  $dH^*/d\tau|_{\tau=0} = 0$  proporciona

$$H^* = \frac{1 + \alpha}{r_2 - r_1} (r_2 e^{r_1 \tau} - r_1 e^{r_2 \tau}), \quad (24)$$

donde

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4B}}{2B} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4B}}{2B}$$

son las raíces de la ecuación característica de la ecuación (23).



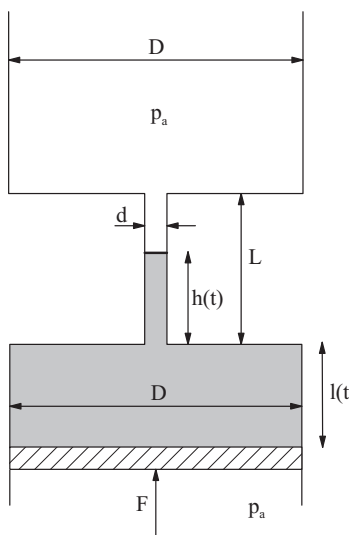
En la figura adyacente se muestra la influencia de la inercia del émbolo,  $B$ , en su movimiento para el caso particular de  $\alpha = m/H_o = 0,2$ . Obsérvese que el depósito se vacía y el émbolo llega a su tope para  $H^* = \alpha$ , así que valores de  $H^*$  inferiores a  $\alpha$  no se corresponden con situaciones físicas reales. No obstante se han dibujado para ver la diferencia entre movimientos amortiguados,  $B \leq 1/4$ , que corresponde a valores reales de  $r_1$  y  $r_2$  y otros oscilatorio-amortiguados,  $B > 1/4$ , que corresponde a números imaginarios para  $r_1$  y  $r_2$ . En la figura se observa que cuanto mayor es  $B$  mayor es el tiempo requerido para vaciar el depósito. Físicamente corresponde a que el émbolo posee tanta inercia que tarda un tiempo grande en alcanzar velocidad. Así, el émbolo actúa de freno del movimiento pues requiere que parte del trabajo

de su peso y de la energía potencial del líquido se invierta en aumentar su energía cinética. Obsérvese que cualquiera que sea el valor de  $B$ , la velocidad del émbolo es no nula cuando el émbolo alcanza el fondo del depósito.

**Problema 5.5**

Un conducto vertical de longitud  $L$  y diámetro  $d$ ,  $d \ll L$ , conecta dos depósitos de diámetro  $D$ ,  $D \gg d$ . El depósito superior está abierto a la atmósfera, mientras que el inferior, que contiene un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  está limitado en su parte inferior por un émbolo de masa  $M$  que desliza sin rozamiento. Inicialmente, el líquido, cuyo volumen es  $\Omega$ , llena completamente el depósito inferior mientras que tanto el depósito superior como el conducto están vacíos. Si en un cierto instante se acciona el émbolo hacia arriba con una fuerza constante  $F$  el líquido comienza a ascender por el conducto con un movimiento con fuerzas de viscosidad dominantes, se pide:

1. Criterios para que el movimiento del líquido en el conducto sea con fuerzas de viscosidad dominantes.
2. Ecuación diferencial y condiciones iniciales que determinan la evolución temporal de la interfase  $h(t)$  como función del tiempo y de las propiedades del líquido y de los datos geométricos del dispositivo. Suponiendo despreciable la masa del émbolo, calcular  $h(t)$  y el tiempo que tarda ésta en alcanzar el depósito superior.
3. Calcular  $H(t)$  de líquido en el depósito superior a partir del instante definido en 2. Calcular el instante que el émbolo termina su carrera.
4. Si en un instante  $t_r$ , comprendido entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , el proceso de subida del émbolo se detiene. Calcular la altura alcanzada  $H(t_r)$  y la fuerza necesaria para mantener la superficie libre a dicha cota  $F_r$ . Si en esta posición de reposo la fuerza que soporta el émbolo oscila entorno a la fuerza de equilibrio  $F = F_r + A \sin \omega t$  calcule la oscilación de la superficie libre.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Debido a la fuerza  $F$ , el líquido adquiere un movimiento en el conducto que será con fuerzas de viscosidad dominantes si se satisface que

$$\frac{d^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad y \quad Re \frac{d}{L} = \frac{V d}{\nu} \frac{d}{L} \ll 1, \quad (1)$$

## 134 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

donde  $V$  es el valor característico de la velocidad media del líquido. Dado que las magnitudes fluidas cambian por el cambio de la interfase, el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas es  $t_o = L/V$ . Es fácil comprobar que si se sustituye este valor en (1) ambos criterios se reducen al mismo. El orden de magnitud de la velocidad  $V$  puede estimarse a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille teniendo en cuenta que la presión motriz es la fuerza por unidad de área aplicada al émbolo descontando, naturalmente, los pesos por unidad de área de émbolo y líquido que se oponen al movimiento

$$V d^2 \sim \frac{d^4}{\mu} \frac{F - g(M + \rho\Omega)}{D^2 L}; \quad (2)$$

sustituyendo el valor de  $V$  en (1) se obtiene finalmente

$$\frac{[F - g(M + \rho\Omega)]d^4}{\rho\nu^2 L^2 D^2} \ll 1. \quad (3)$$

### Apartado 2.-

Si se satisface el criterio dado en (3) el movimiento del líquido en el conducto es con fuerzas de viscosidad dominantes y la relación entre el caudal y el gradiente de presiones obedece la ecuación de Hagen-Poiseuille que, integrada entre la entrada del conducto  $s = 0$ , donde  $p + \rho gz = p_1$ , y la interfase  $s = h$ , donde  $p + \rho gz = p_a + \rho gh$ , proporciona

$$Q = -\frac{\pi d^4}{128\mu} \frac{d(p + \rho gz)}{ds} \Rightarrow \frac{32\mu h \dot{h}}{d^2} = p_1 - (p_a + \rho gh); \quad (4)$$

para obtener (4) se ha hecho uso de la condición de conservación de la masa  $Q = (\pi d^2/4)dh/dt = (\pi d^2/4)\dot{h}$ . La presión del líquido justo por encima del émbolo  $p_2$  se relaciona con la presión en el extremo inferior del conducto  $p_1$  por fluidostática ya que por ser tan dispares las áreas de depósito y conducto las velocidades en aquél son nulas en primera aproximación,

$$p_1 = p_2 - \rho gl(t) \quad (5)$$

donde  $l(t)$  es la diferencia de alturas entre el extremo inferior del conducto y el émbolo. La conservación del volumen de líquido proporciona la relación entre  $l(t)$  y  $h(t)$

$$\frac{\pi D^2}{4} l(t) + \frac{\pi d^2}{4} h(t) = \Omega, \quad \dot{l} = -\frac{d^2}{D^2} \dot{h}, \quad \ddot{l} = -\frac{d^2}{D^2} \ddot{h}. \quad (6)$$

Finalmente, el problema se cierra a través de la ecuación del movimiento del émbolo

$$F - Mg + (p_a - p_2) \frac{\pi D^2}{4} = -M\ddot{l}. \quad (7)$$

Eliminando  $p_2$ ,  $p_1$  y  $l$  entre las tres ecuaciones (4)-(7) se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la interfase,

$$\frac{4Md^2}{\pi D^4} \ddot{h} + \frac{32\mu}{d^2} \dot{h} + \rho h \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) = \frac{4}{\pi D^2} (F - \Omega \rho g - Mg) \quad (8)$$

con condiciones iniciales  $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ .

Para un análisis más fácil de la ecuación diferencial anterior conviene adimensionalizarla definiendo las variables y parámetros

$$\eta = \frac{h}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad t_c = \frac{32\mu L}{\rho g d^2}, \quad A = \frac{M \rho g d^6}{256\pi \mu^2 L^2 D^4} \quad \text{y} \quad P = \frac{4(F - \rho g \Omega - Mg)}{\pi \rho g D^2 L}; \quad (9)$$

despreciando infinitésimos de orden  $(d/D)^2$  se obtiene la ecuación diferencial no lineal de segundo orden que gobierna la posición adimensional de la interfase en el conducto

$$A \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \eta \frac{d\eta}{d\tau} = P - \eta, \quad (10)$$

que hay que integrar sujeta a las condiciones iniciales  $\eta(0) = 0$  y  $\dot{\eta}(0) = 0$ .

La resolución de la ecuación (10) se puede hacer numéricamente una vez que se especifican los valores de  $A$  y  $P$ . No obstante es instructivo realizar su integración para valores pequeños de la inercia del émbolo ( $A \ll 1$ ). En ese caso (10) se reduce en primera aproximación a

$$\eta \frac{d\eta}{d\tau} = P - \eta, \quad (11)$$

cuya integración con la condición inicial  $\eta(0) = 0$  proporciona

$$\int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{P - \eta} = \int_0^\tau d\tau \Rightarrow \tau = -\eta - P \ln \frac{P - \eta}{P}. \quad (12)$$

Obsérvese que la solución (12) proporciona velocidad infinita en el instante inicial ( $d\eta/d\tau|_{\tau=0} = \infty$ ) y, por tanto, no satisface la segunda condición inicial que requiere velocidad inicial nula. Lo anterior puede verse también desarrollando en serie la solución (12) para tiempos pequeños; se obtiene así  $\eta = \sqrt{2P\tau} + O(\tau)^{3/2}$ . Esto quiere decir que, independientemente de cuan pequeño sea el valor del parámetro  $A$ , la inercia del émbolo es importante para tiempos suficientemente próximos al instante inicial.

El intervalo de tiempo  $\tau_I$  durante el que la inercia es importante y el orden de magnitud del desplazamiento del émbolo  $\eta_I$  durante ese intervalo se obtienen sin más que hacer del mismo orden en la ecuación (10) el término responsable del movimiento (que se supone de orden unidad), la amortiguación y la inercia; esto es

$$A \frac{\eta_I}{\tau_I^2} \sim \frac{\eta_I^2}{\tau_I} \sim 1 \Rightarrow \eta_I \sim A^{1/3} \text{ y } \tau_I \sim A^{2/3}. \quad (13)$$

En efecto, definiendo  $\hat{\eta} = \eta/(PA)^{1/3}$  y  $\hat{\tau} = P^{1/3}\tau/A^{2/3}$ , (10) se reduce, salvo términos de orden  $A^{1/3}$ , a

$$\frac{d^2\hat{\eta}}{d\hat{\tau}^2} + \hat{\eta} \frac{d\hat{\eta}}{d\hat{\tau}} - 1 = 0, \quad (14)$$

que es una ecuación universal en el sentido de que no contiene ningún parámetro. Su integración una vez, sujeta a condiciones iniciales de posición y velocidad nulas, proporciona

$$\frac{d\hat{\eta}}{d\hat{\tau}} + \frac{\hat{\eta}^2}{2} - \hat{\tau} = 0; \quad (15)$$

una segunda integración numérica,<sup>3</sup> que se representa en la figura, describe los primeros instantes del movimiento.

Despreciando el corto intervalo temporal  $\tau_I$ , el tiempo adimensional  $\tau_1$  que tarda la interfase en salir del conducto

puede calcularse de (12)

$$\tau_1 = \tau(\eta = 1) = -1 - P \ln \left( \frac{P-1}{P} \right) \text{ o dimensionalmente, } t_1 = \frac{32\mu L}{\rho g d^2} \left[ -1 - P \ln \left( \frac{P-1}{P} \right) \right]. \quad (16)$$

### Apartado 3.-

Para tiempos mayores que  $t_1$  el conducto está completamente lleno y el líquido alcanza una altura  $H$  en el depósito superior. El gasto que circula por el conducto se obtiene fácilmente integrando la ecuación de Hagen-Poiseuille entre la entrada del conducto  $s = 0$ , donde  $p + \rho g z = p_1 = p_2 - \rho g l$ , y la salida  $x = L$ , donde  $p + \rho g z = p_a + \rho g(H + L)$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dH}{dt} = -\frac{\pi d^4}{128\mu} \frac{d(p + \rho g z)}{ds} \Rightarrow \frac{32\mu L D^2 \dot{H}}{d^4} = p_2 - [p_a + \rho g(H + L + l)]. \quad (17)$$

<sup>3</sup> Puede hallarse una expresión analítica cerrada en términos de las poco habituales funciones de Airy. El lector interesado puede hallarla empleando software de lenguaje simbólico como, por ejemplo, *Mathematica*.



La conservación del volumen de líquido proporciona la relación entre  $H(t)$  y  $l(t)$

$$\frac{\pi D^2}{4}(l(t) + H(t)) + \frac{\pi d^2}{4}L = \Omega, \quad \dot{l} = -\dot{H}, \quad \ddot{l} = -\ddot{H}, \quad (18)$$

que combinada apropiadamente con (7) y (17) da lugar a la ecuación diferencial para  $H(t)$ ,

$$\frac{4M}{\pi D^2} \frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{32\mu D^2 L}{d^4} \frac{dH}{dt} = \frac{4F}{\pi D^2} - \frac{4Mg}{\pi D^2} - \rho g \left[ \frac{4\Omega}{\pi D^2} + \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)L \right], \quad (19)$$

que hay que integrar sujeta a las condiciones de contorno  $H(t_1) = 0$  y  $dH/dt|_{t=t_1} = (d^2/D^2)dh/dt|_{t=t_1}$ .

En la ecuación diferencial anterior, a diferencia de la ecuación (8), no existe dependencia de la posición de la interfase  $H$ ; ello es debido a que cuando la interfase alcanza el depósito superior la distancia entre la interfase libre y el émbolo permanece constante a lo largo del proceso como se desprende de (18).

Podemos proceder como el apartado anterior y adimensionalizar la ecuación diferencial. Introduciendo las variables y parámetros siguientes

$$\eta_H = \frac{H}{L}, \quad \tau_H = \frac{t}{t_{Hc}}, \quad t_{Hc} = \frac{32\mu D^2 L}{\rho g d^4} = \frac{D^2}{d^2} t_c \quad \text{y} \quad A_H = \frac{M \rho g d^6}{256 \mu^2 L^2 D^4} \frac{d^2}{D^2} = A \frac{d^2}{D^2}; \quad (20)$$

en las nuevas variables, la ecuación diferencial se escribe, salvo infinitésimo de orden  $(d^2/D^2)$ , como

$$A_H \frac{d^2 \eta_H}{d\tau_H^2} + \frac{d\eta_H}{d\tau_H} = P - 1 \quad (21)$$

y las condiciones iniciales como  $\eta_H(\tau_{H1}) = 0$  y  $d\eta_H/d\tau_H = P - 1$  donde  $\tau_{H1} = \tau_1 d^2/D^2$ .

Obsérvese que si la inercia es depreciable en el proceso de llenado del conducto ( $A \ll 1$ ) con mayor razón lo será en el proceso de llenado del depósito ( $A_H \ll A \ll 1$ ). Aún más, como se desprende de la comparación de los tiempos característicos ( $t_c/t_{Hc} \sim d^2/D^2 \ll 1$ ), el proceso de llenado del conducto tiene una duración despreciable frente al llenado del depósito pudiéndose suponer  $\tau_{H1} \simeq 0$ .

Una discusión semejante a la que se estableció en el apartado anterior referente a la posibilidad de satisfacer las condiciones iniciales si se desprecia un término de la ecuación diferencial puede realizarse en el presente apartado. Atendiendo a la física del proceso, existirá un periodo extremadamente corto en el cual la inercia del émbolo no puede ser despreciada. Una vez superado este transitorio inicial, el émbolo (y el fluido), alcanza la velocidad terminal constante correspondiente al equilibrio entre la fuerza aplicada (convenientemente minorada por el peso de émbolo y fluido) y las fuerzas viscosas que surgen en las paredes del conducto. De modo que, si la inercia es despreciable, la altura varía linealmente con el tiempo

$$\eta_H = (P - 1)\tau_H \quad \Rightarrow \quad H(t) = \frac{\rho g d^4}{32\mu D^2} (P - 1)t. \quad (22)$$

El instante  $t_2$  en el que el émbolo termina su carrera corresponde al momento en que  $H(t_2) = H_{final}$  que puede calcularse de (18) haciendo  $l(t_2) = 0$ :

$$t_2 = \frac{32\mu D^2}{\rho g d^4} \frac{1}{P - 1} \left( \frac{4\Omega}{\pi D^2} - \frac{Ld^2}{D^2} \right). \quad (23)$$

#### Apartado 4.-

Para un instante anterior al fin de carrera  $t_1 < t_r < t_2$  la fuerza necesaria para mantener el émbolo en reposo  $F_r$  viene dada, haciendo  $\dot{H} = \ddot{H} = 0$  en (19), por

$$F_r = Mg + \rho g \left( \Omega + \frac{L\pi D^2}{4} \right) \quad (24)$$

habiendo alcanzado una altura la interfase dada por  $H_r = H(t_r)$  dada por la ecuación (22).

Si a la fuerza  $F_r$  se le añade un término oscilatorio de la forma

$$F = F_r + A \operatorname{sen} \omega t. \quad (25)$$

La ecuación que rige la oscilación de la interfase  $H^*$  entorno a la posición de equilibrio  $H_r$  se obtiene de (19) haciendo  $H(t) = H_r + H^*(t)$  y  $F = F_r + A \operatorname{sen}(\omega t)$ ,

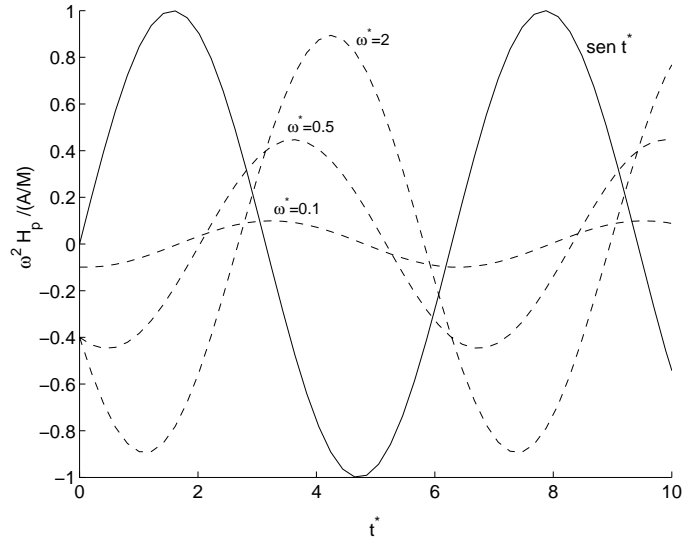
$$\ddot{H}^* + \underbrace{\frac{8\pi\mu D^4}{MLd^4}}_{=\alpha} \dot{H}^* = \frac{A}{M} \operatorname{sen} \omega t. \quad (26)$$

La búsqueda de soluciones oscilatorias pasa por ensayar en la ecuación diferencial (26) soluciones de la forma  $H_p^* = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$  siendo  $A$  y  $B$  constantes,

$$H_p^*(t) = -\frac{A/M}{\omega(\omega^2 + \alpha^2)} [\alpha \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t], \quad (27)$$

que se representa en la figura adjunta en términos de las variables adimensionales,  $t^* = \omega t$ ,  $\omega^* = \omega/\alpha$

$$\frac{\omega^2 H_p^*(t)}{A/M} = -\frac{\omega^*}{1 + \omega^{*2}} (\cos t^* + \omega^* \operatorname{sen} t^*) \quad (28)$$

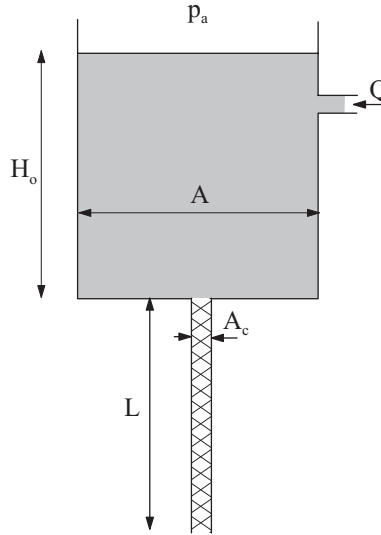


Como se aprecia en la gráfica, existe un desfase entre la fuerza impuesta (curva sólida) y el movimiento de la interfase (línea a trazos) siendo tanto mayor éste cuanto menor es la amortiguación ( $\omega^*$  crecientes), el máximo desfase,  $\pi/2$ , se alcanza en ausencia de amortiguación. Además, la amortiguación produce disipación por lo que la amplitud de la oscilación de la interfase libre tiende a disminuir a medida que ésta aumenta, de tal manera que, en ausencia de amortiguación ( $\omega^* \rightarrow \infty$ ) la amplitud es máxima.

**Problema 5.6**

Para determinar la permeabilidad  $\Pi$  de un medio poroso homogéneo, de porosidad  $\phi$  conocida, se diseña la instalación experimental esquematizada en la figura. Consta de un depósito de sección  $A$  inicialmente lleno, hasta una altura  $H_o$ , de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . En  $t = 0$  el depósito comienza a descargarse a través de un conducto vertical de longitud  $L$  y sección  $A_c$  que está relleno de un material poroso homogéneo cuya permeabilidad  $\Pi$  se desea determinar (considere el caso  $A_c \ll A$ ,  $A_c^{1/2} \ll L$  y  $AH_o > LA_c$ ). Al depósito se le puede suministrar también un caudal  $Q$  como se indica en la figura. Se pide:

1. Suponiendo que no se aporta caudal al depósito, determinar la posición de la interfase de líquido en el medio poroso.
2. Tiempo que tarda el líquido en llegar al extremo del conducto y altura de la superficie libre en el depósito en ese instante.
3. A partir de ese instante se suministra al depósito un caudal conocido de forma que la altura de líquido en el conducto permanezca constante. Determinar entonces la permeabilidad del medio poroso como función del gasto.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Inicialmente, el líquido comienza a fluir a través del medio poroso y forma una columna líquida cuya interfase se sitúa a una distancia  $x_f(t)$  de la entrada del conducto. La velocidad aparente del líquido en el medio poroso  $\mathbf{v}_p$  viene dada por la ley de Darcy

$$\mathbf{v}_p = -\frac{\Pi}{\mu} \nabla(p + \rho g z), \quad (1)$$

donde la distribución de presiones en el caso del movimiento de un líquido en el seno de un medio poroso obedece a la ecuación de Laplace, que para el caso de un medio axilsimétrico como el que nos ocupa se escribe

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (2)$$

donde  $x$  es la coordenada a lo largo del eje del conducto, medida desde la entrada del mismo y  $r$  es la coordenada radial.

Debido a la condición de contorno en la pared, que exige que la velocidad radial sobre ella sea nula, el líquido en el medio poroso adquiere una velocidad aparente que sólo tiene componente en la dirección del eje  $x$  y, por tanto, la presión es independiente de  $r$ ; integrando (2) se tiene  $p(x, t) = a + bx$ , donde las constantes  $a$  y  $b$  se determinan a partir de las condiciones de contorno:  $p[x_f(t)] = p_a$  y  $p(0, t) = p_a + \rho g H(t)$ . Consecuentemente, la distribución de presiones del líquido en el medio poroso viene dada por

$$p(x, t) = p_a + \rho g H(t) \left[ 1 - \frac{x}{x_f(t)} \right] \quad (3)$$

y la de presiones reducidas por

$$p(x, t) + \rho g z(x) = p_a + \rho g H(t) \left[ 1 - \frac{x}{x_f(t)} \right] - \rho g x. \quad (4)$$

La ecuación diferencial que modela el descenso del líquido viene dada por la ecuación de continuidad. En efecto, igualando el caudal descendido en el depósito con el caudal que discurre por el conducto relleno del medio poroso se obtiene

$$-A \frac{dH}{dt} = A_c v_p = A_c \frac{\Pi}{\mu} \rho g \left[ 1 + \frac{H(t)}{x_f(t)} \right]. \quad (5)$$

La ecuación anterior debe ser completada, para su resolución, con una relación entre la altura  $H(t)$  con la posición de la interfase  $x_f(t)$  que se obtiene de la conservación del volumen total de líquido

$$A[H_o - H(t)] = A_c x_f(t) \phi, \quad (6)$$

donde la porosidad  $\phi$  surge para tener en cuenta que el líquido se aloja únicamente en los poros del material poroso.<sup>4</sup> Combinando las ecuaciones (5) y (6) se llega a

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{A_c}{A} \frac{\Pi g}{\nu} \left( 1 + \frac{\phi A_c}{A} \frac{H}{H_o - H} \right) \quad \text{con la condición inicial} \quad H(t=0) = H_o, \quad (7)$$

que puede ser integrada fácilmente para obtener:

$$H - H_o - \frac{H_o}{1 - A/A_c \phi} \ln \left[ \left( 1 - \frac{A}{\phi A_c} \right) \frac{H}{H_o} + \frac{A}{\phi A_c} \right] = \left( \frac{\phi A_c}{A} - 1 \right) \frac{A_c}{A} \frac{\Pi g}{\nu} t. \quad (8)$$

Combinando la ecuación anterior con (6) se deriva la ecuación de la interfase  $x_f(t)$

$$-\frac{A_c \phi x_f}{A} - \frac{H_o}{1 - A/A_c \phi} \ln \left[ \left( 1 - \frac{A}{\phi A_c} \right) \left( 1 - \frac{A_c \phi x_f}{A H_o} \right) + \frac{A}{\phi A_c} \right] = \left( \frac{\phi A_c}{A} - 1 \right) \frac{A_c}{A} \frac{\Pi g}{\nu} t. \quad (9)$$

## Apartado 2.-

El tiempo que tarda en llegar la interfase al final del conducto se obtiene particularizando la anterior ecuación para  $x_f = L$  siendo la altura de líquido en el depósito en dicho instante  $H(t_L) = H_o - \phi A_c L/A$ .

<sup>4</sup> Obsérvese que la ecuación (6) podría haberse obtenido a partir del hecho de que la interfase es una superficie fluida. En efecto, si  $F(x, t) \equiv x - x_f(t) = 0$  es una superficie fluida, entonces  $\partial F/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0$ ; por tanto  $-dx_f/dt + v/\phi = -dx_f/dt + (AdH/dt)/(\phi A_c) = 0$ . Se ha tenido en cuenta que la velocidad real del líquido en los poros es  $(1/\phi)$  veces la velocidad aparente del líquido en el medio poroso.

**Apartado 3.-**

Cuando el fluido ocupa completamente el conducto la distribución de presiones reducida del líquido en el conducto viene dada por

$$p(x, t) + \rho g z(x) = p_a + \rho g H(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \rho g x \quad (10)$$

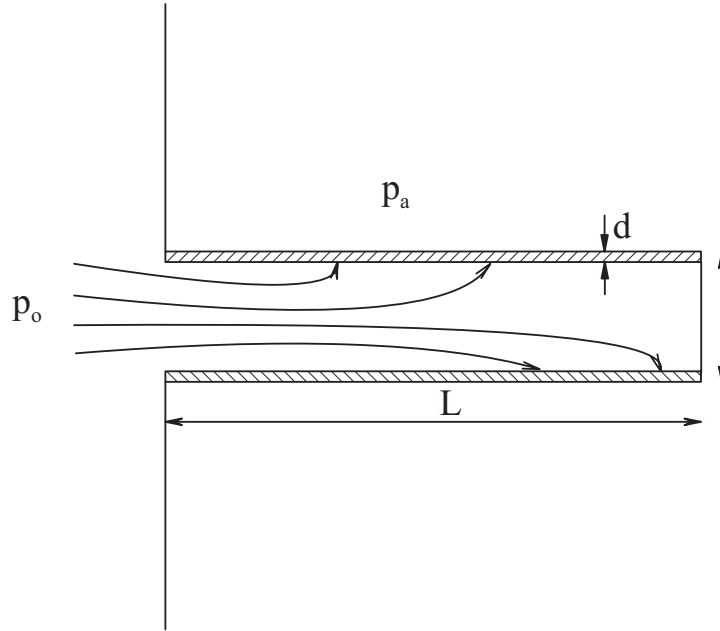
y el caudal es  $Q(t_L) = (\Pi/\mu)\rho g(H(t_L)/L + 1)$ .

Si a partir del instante  $t = t_L$  se aporta al depósito un caudal  $Q = Q(t_L)$  la permeabilidad del medio vendría dada por

$$\Pi = \frac{\mu L Q(t_L)}{\rho g [H(t_L) + L] A_c}. \quad (11)$$

**Problema 5.7**

Para filtrar un fluido, de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , se le hace circular a través de un tubo cilíndrico de diámetro  $D$  y longitud  $L$  que consta de una pared porosa de espesor  $d \ll D$  y permeabilidad  $\Pi$  como se muestra en la figura. El fluido, contenido a presión  $p_o$  ( $p_o > p_a$ ) en un depósito, alimenta el tubo por el extremo que está unido al depósito. El tubo tiene su otro extremo cerrado de modo que el fluido es forzado a través de las paredes porosas. Se desea calcular la distribución de presiones y caudales en el conducto en el supuesto de que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el movimiento fluido. Consideren primero el caso de que el fluido sea un líquido y después el caso en que se trate del movimiento de un gas a temperatura constante.

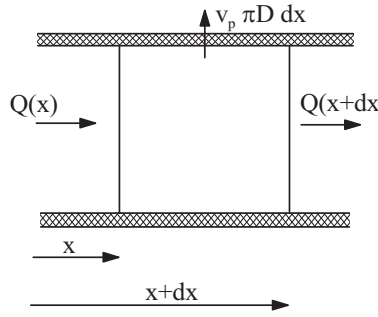
**Resolución:**

El movimiento del líquido en el conducto será con fuerzas de viscosidad dominante siempre que  $ReD/L \ll 1$  y  $D^2/\nu t_o \ll 1$ . En este caso se analizará la situación estacionaria que corresponde a  $t_o \simeq \infty$  con lo que el único requisito que debe de cumplir el movimiento fluido es  $ReD/L \sim VD^2/(\nu L) \ll 1$ . Si  $V$  y  $V_p$  responden a la velocidad media en el conducto y medio poroso respectivamente, ambas deben ser tales que el caudal se conserve  $Q \sim VD^2 \sim V_p LD$ ; teniendo en cuenta la ley de Darcy entonces

$$V \sim V_p \frac{L}{D} \sim \frac{\Pi p_o - p_a}{\mu} \frac{L}{d} \frac{L}{D} \quad \text{y} \quad Re \frac{D}{L} \sim \frac{\rho D \Pi p_o - p_a}{\mu^2} \frac{L}{d} \ll 1. \quad (1)$$

Naturalmente al ser el movimiento a lo largo del conducto con fuerzas de viscosidad dominantes los perfiles de velocidad serán de Hagen-Poiseuille.<sup>5</sup> A diferencia de lo que sucede si la pared es impermeable, el caudal no será constante entre secciones, sino que variará de una sección a otra a causa del que se escapa a través del medio poroso.

<sup>5</sup> Recuerde el lector que asumir perfiles parabólicos equivale implícitamente a asumir que la presión es homogénea en una sección; es decir, a despreciar sus variaciones en la sección debidas a las fuerzas másicas frente a las inductoras del movimiento  $\rho g D \ll p_o - p_a$ . Esta presunción es equivalente a asumir que el movimiento, y el filtrado, presenta simetría axial.



En efecto, si, como se muestra en la figura, se consideran dos secciones del conducto situadas a distancias  $x$  y  $x + dx$  de la entrada la conservación de la masa requiere que

$$\begin{aligned} -Q(x) + Q(x + dx) + v_p \pi D dx &= 0 \\ \Rightarrow \left\{ Q(x + dx) = Q(x) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \mathcal{O}(dx^2) \right\} \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} + \pi D v_p &= 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{D^3}{128 \mu} \frac{dp}{dx} + v_p = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $v_p = v_p(x, D/2)$  es la velocidad aparente de fluido a través del medio poroso.

Para determinar  $v_p$  y, por tanto, la distribución de presiones  $p(x)$  en el conducto, hay que utilizar la ley de Darcy lo que precisa conocer la distribución de presiones  $p(x, r)$  en el medio poroso que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad (3)$$

con las condiciones de contorno  $p(x, D/2) = p(x)$  y  $p(x, D/2 + d) = p_a$ .

Es fácil comprobar que las variaciones axiales de presión son despreciables frente a las radiales ( $\partial/\partial x \ll \partial/\partial r$ ). En efecto, si se definen como nuevas variables radiales y axiales,  $\eta = (r - D/2)/d$  y  $\chi = x/L$ , la ecuación de Laplace se escribe

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \chi^2} + \frac{1}{D/2 + d\eta} \frac{1}{d^2} \frac{d}{d\eta} \left[ (D/2 + d\eta) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = 0 \simeq \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \quad (4)$$

que muestra que la presión, salvo errores de orden  $d^2/L^2$ , en el medio poroso varía linealmente con la distancia  $\eta$ ,  $p = a\eta + b$ . Imponiendo las condiciones de contorno para la presión  $p(\eta = 0) = p(x)$  y  $p(\eta = 1) = p_a$  se obtiene la distribución de presiones en el medio poroso

$$p(x, r) = p(x) - \frac{p(x) - p_a}{d} (r - D/2) \quad (5)$$

y mediante la ley de Darcy

$$v_p(x) = \frac{\Pi}{\mu} \frac{p(x) - p_a}{d}. \quad (6)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores con (2) hallaremos la ecuación diferencial que gobierna la distribución de presiones en el conducto  $p(x)$ ,

$$\frac{128 \Pi}{D^3 d} \frac{d^2 p}{dx^2} - p + p_a = 0. \quad (7)$$

Las condiciones de contorno que se deben de imponer a la ecuación diferencial anterior son

$$p(x = 0) = p_o \quad \text{y} \quad Q(x = L) = 0 \quad (8)$$

o lo que es lo mismo,

$$p(x = 0) = p_o \quad \text{y} \quad \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (9)$$

Integrando (7) sujeta a las condiciones (9), se halla la distribución de presiones  $p(x)$

$$p(x) = p_a - (p_a - p_o) \cosh \left( (L - x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1} \quad (10)$$

y la distribución de caudales  $Q(x)$

$$Q(x) = (p_o - p_a) \frac{\pi D^4}{128\mu} \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \sinh \left( (L-x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (11)$$

En el caso de movimiento de gases se procede como en el caso anterior con la salvedad de que al imponer la condición de conservación de la masa hay que emplear el gasto  $G = \rho Q$  en lugar del caudal  $Q$ . En efecto, si el movimiento en el conducto es con viscosidad dominante [para ello se requiere que se satisfaga la condición (1)] el perfil de velocidades del gas en el conducto será uno parabólico de Hagen-Poiseuille y el caudal circulante  $Q$  en dicha sección vendrá dado por la expresión (5.7) y el gasto  $G(x)$  por

$$G(x) = \rho(x)Q(x) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \rho(x) \frac{\partial p}{\partial x} = \{p = R_g \rho T\} = \frac{\pi D^4}{128\mu R_g T} \frac{\partial p^2/2}{\partial x}. \quad (12)$$

Obsérvese que si el movimiento del gas en el conducto es isoterma  $T = T_o$ , el gasto circulante varía linealmente con el gradiente del cuadrado de la presión a lo largo del conducto.

Como anteriormente, la variación del gasto en dos secciones de conducto separados una distancia  $dx$  es debida a la masa que se filtra a través del medio poroso

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \rho v_p \pi D = 0 \quad (13)$$

donde para determinar la velocidad aparente  $v_p$  hay que resolver primero la ecuación de Laplace para el cuadrado de la presión en el medio poroso dada por  $\nabla^2 p^2 = 0$ , con las condiciones de contorno  $p(x, D/2) = p(x)$  y  $p(x, D/2+d) = p_a$ . Análogamente al caso del líquido y empleando las mismas variables adimensionales  $\chi$  y  $\eta$ , la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{\partial p^2}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2(x, r) = p^2(x) - \frac{p^2(x) - p_a^2}{d} (r - D/2) \quad (14)$$

y

$$v_p = \frac{\Pi}{2\mu R_g T_o} \frac{1}{\rho} \frac{p^2(x) - p_a^2}{d}, \quad (15)$$

donde se ha supuesto que el proceso es isoterma y sucede a la temperatura del depósito  $T_o$ .

Si se supone que el movimiento del gas en el conducto es también isoterma y a temperatura  $T_o$ , entonces la ecuación diferencial para la presión en el conducto, obtenida de la sustitución de (12) y (15) en (13) y particularizando  $T = T_o$ , es

$$\frac{D^3 d}{128\Pi} \frac{d^2 p^2}{dx^2} - p^2(x) + p_a^2 = 0; \quad (16)$$

la integración de la ecuación anterior sujeta a las condiciones de contorno (9), proporciona

$$p^2(x) = p_a^2 - (p_a^2 - p_o^2) \cosh \left[ (L-x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right] \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (17)$$

El gasto circulante se calcula de (12),

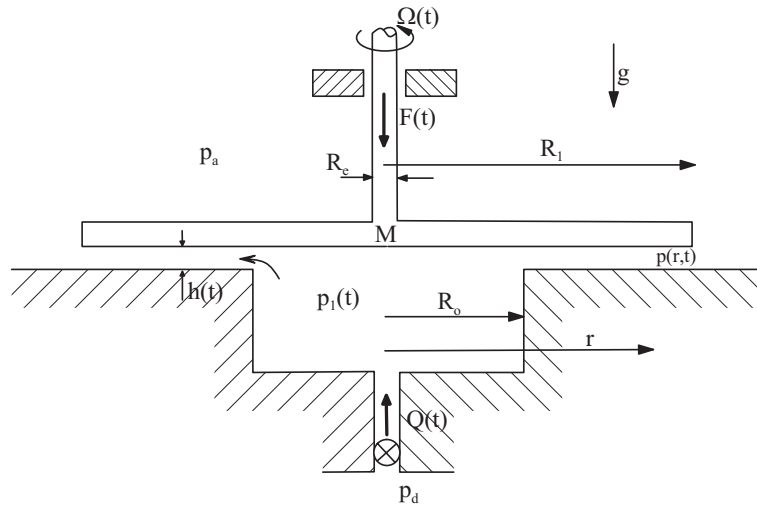
$$G(x) = (p_o^2 - p_a^2) \frac{\pi D^4}{254\mu R_g T_a} \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \sinh \left[ (L-x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right] \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (18)$$



**Problema 5.8**

Un dispositivo como el que se muestra la figura, consiste en una pieza de masa  $M$  formada por un eje cilíndrico y un disco circular de radio  $R_1$ . Sobre el eje cilíndrico que gira con velocidad angular  $\Omega(t)$  actúa una fuerza vertical  $F(t)$ ; sendos cojinetes como los indicados en la figura inhiben cualquier otro movimiento del eje distinto del de rotación y traslación paralelamente a sí mismo. El dispositivo se apoya sobre una capa de lubricante que fluye entre el dispositivo y una pieza cilíndrica cuya superficie es paralela al disco. La pieza cilíndrica contiene en su parte central un depósito, también cilíndrico, al que se bombea un caudal  $Q(t)$  de un lubricante de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$ . Desde el depósito, el lubricante es forzado radialmente a través de ambas piezas hasta descargar finalmente a la atmósfera. Suponiendo que el espesor de la ranura  $h(t)$  es pequeño frente a su longitud  $h(t) \ll R_1 - R_o$  y que  $R_1 - R_o \sim R_o$ , se pide:

1. Distribución de presiones en la película líquida,  $p(r, t)$  y en el depósito  $p_1(t)$  como función de  $h(t)$  y de  $Q(t)$ .
2. Ecuación diferencial que proporcionan  $h(t)$  como función de los datos del problema y de las propiedades del lubricante. Describir la evolución del espesor para los siguientes casos particulares: a) Fuerza sobre el eje y caudal constantes,  $F(t) = F_o$  y  $Q(t) = Q_o$ ; b) Pequeñas perturbaciones respecto a la posición de equilibrio cuando la fuerza sobre el eje varía periódicamente en la forma  $F(t) = F_o + \epsilon A \cos(\omega t)$  con  $\epsilon \ll 1$ .
3. Par resistente  $C$  que hay que vencer cuando la pieza gira con velocidad angular constante.

Resolución:Apartado 1.-

Si  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas en las direcciones radial y acimutal, los elementos de longitud en esas direcciones son  $g_r = g_\alpha = 1$  y  $g_\theta = g_\beta = r$ , la ecuación de Reynolds se escribe

$$r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} + \frac{\partial(q_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

donde el caudal en la dirección radial  $q_r$  por unidad de longitud según  $\theta$  (caudal de Poiseuille) y el caudal según la dirección acimutal  $q_\theta$  por unidad de longitud  $r$  (caudal de Couette) son respectivamente

$$q_r = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{y} \quad q_\theta = \frac{\Omega r h}{2}. \quad (2)$$

Sustituyendo los valores de los caudales en la ecuación de Reynolds se obtiene

$$r \frac{dh}{dt} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (3)$$

que es una ecuación lineal de segundo orden para el cálculo de la presión y cuya integración proporciona

$$p(r, t) = 3\mu r^2 \frac{\dot{h}}{h^2} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4)$$

donde  $\dot{h} = \partial h / \partial t$  y  $C_1$  y  $C_2$  son constantes a determinar con las condiciones de contorno. En efecto, si se impone que en  $r = R_o$ ,  $p(R_o, t) = p_1(t)$  y que en  $r = R_1$   $p(R_1, t) = p_a$  se obtiene

$$p(r, t) = p_a + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (r^2 - R_1^2) + C_1 \ln \frac{r}{R_1}, \quad (5)$$

siendo

$$C_1 = \frac{1}{\ln(R_o/R_1)} \left( p_1 - p_a - \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (R_o^2 - R_1^2) \right). \quad (6)$$

Dado que el caudal que entra en la película líquida  $Q(t)$  es

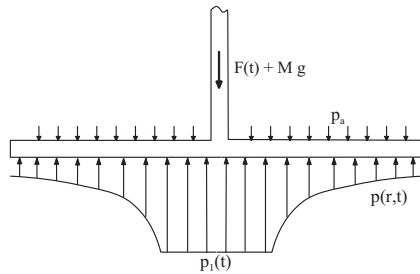
$$\frac{Q}{2\pi R_o} = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_o} \Rightarrow Q = -\pi R_o^2 \dot{h} - \frac{\pi h^3}{6\mu} C_1, \quad (7)$$

la presión en el depósito  $p_1(t)$  y la presión en la ranura  $p(r, t)$  en función del caudal  $Q$  y del espesor de la película  $h(t)$  vendrá dadas por

$$p_1(t) = p_a + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (R_o^2 - R_1^2) + \frac{6\mu}{\pi h^3} \left( Q + \pi R_o^2 \dot{h} \right) \ln \left( \frac{R_1}{R_o} \right) \quad (8)$$

y

$$p(r, t) = p_a + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (r^2 - R_1^2) + \frac{6\mu}{\pi h^3} \left( Q + \pi R_o^2 \dot{h} \right) \ln \left( \frac{R_1}{r} \right), \quad (9)$$



### Apartado 2.-

El equilibrio de fuerzas sobre la pieza en la dirección vertical, véase figura, proporciona

$$M\ddot{h}(t) = \int_{R_o}^{R_1} [p(r, t) - p_a] 2\pi r dr + [p_1(t) - p_a] \pi R_o^2 - Mg - F(t), \quad (10)$$

y sustituyendo las expresiones (8) y (9) en (10) se obtiene

$$M\ddot{h}(t) = \frac{3\mu(R_1^2 - R_o^2)}{h^3} \left[ Q + \pi R_o^2 \dot{h} - \frac{\pi \dot{h}}{2} (R_1^2 - R_o^2) \right] - Mg - F(t), \quad (11)$$

que es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden para determinar  $h(t)$  una vez que  $Q(t)$ ,  $F(t)$  y las condiciones iniciales se hayan especificado. En el caso particular en que tanto la fuerza sobre el eje como

el caudal sean constantes,  $F(t) = F_o$ ,  $Q(t) = Q_o$ , la ecuación diferencial (11) proporciona para tiempos suficientemente grandes ( $\dot{h} = \ddot{h} = 0$ )

$$h_o = \left[ \frac{3\mu Q_o (R_1^2 - R_o^2)}{(F_o + Mg)} \right]^{1/3}; \quad (12)$$

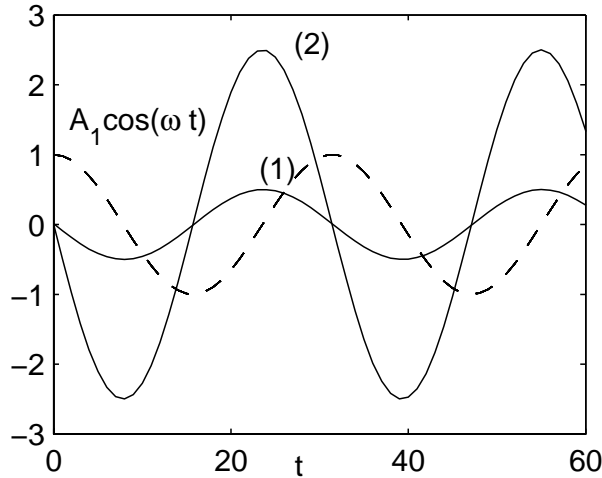
como se ve el valor estacionario del espesor de la película crece con el caudal y decrece al aumentar la fuerza sobre el eje y el peso del mismo.

Considérese ahora el caso de las pequeñas perturbaciones del espesor de la película de lubricante en torno al valor estacionario del apartado anterior  $h(t) \sim h_o + \epsilon h_1(t)$  originadas por una fuerza de la forma  $F(t) = F_o + \epsilon A \cos(\omega t)$  ( $\epsilon \ll 1$ ) y manteniendo fijo el caudal  $Q_o$ , con  $h_o$  dado por la ecuación (12). Si se introducen estos valores en la ecuación (11) se obtiene después de linealizar

$$\ddot{h}_1 + \gamma \dot{h}_1 + \omega_o^2 h_1 = -A_1 \cos \omega t, \quad (13)$$

donde  $h^{-3}$  se ha sustituido por los primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor  $h_o^{-3}[1 - 3\epsilon h_1/h_o + O(\epsilon^2)]$  y se han definido los valores siguientes

$$\gamma = \frac{3\pi\mu(R_1^2 - R_o^2)(R_1^2 - 3R_o^2)}{h_o^3 M}, \quad \omega_o^2 = \frac{9\mu Q_o(R_1^2 - R_o^2)}{h_o^4 M} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{A}{M}.$$



La ecuación (13) es la ecuación de un oscilador forzado amortiguado y, por tanto, admite soluciones del tipo

$$h_1(t) = \Re(Be^{i\omega t}), \quad (14)$$

donde la constante  $B$  se determina sin más que sustituir (14) en (13); se obtiene entonces

$$B = -\frac{A_1}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (15)$$

La figura muestra las oscilaciones en la fuerza,  $A_1 \cos \omega t$ , y en el espesor  $h_1(t)$ , para valores de  $\omega = 0,5$ ,  $A_1 = 1$ ,  $\omega_o = \omega$  y dos valores diferentes de  $\gamma$ : (1)  $\gamma = 2,5$  y (2)  $\gamma = 0,5$ . Obsérvese el desfase entre la causa forzadora y la respuesta del sistema. Obsérvese también que en el caso no amortiguado  $\gamma = 0$  se tiene que la amplitud de la oscilación tiende a infinito cuando la frecuencia forzadora tiende a la frecuencia natural del sistema  $\omega_o \rightarrow \omega$ .

### Apartado 3.-

El par resistente viene dado por

$$C = \int_0^{2\pi} \int_{R_o}^{R_1} \vec{\tau} r^2 dr d\theta, \quad (16)$$

siendo  $\vec{\tau}$  el esfuerzo viscoso que el líquido ejerce sobre el disco en la dirección acimutal que en este caso vale

$$\vec{\tau} = -\mu \frac{\Omega r}{h_o} \mathbf{e}_\theta. \quad (17)$$

Sustituyendo (17) en (16) se obtiene la expresión del par

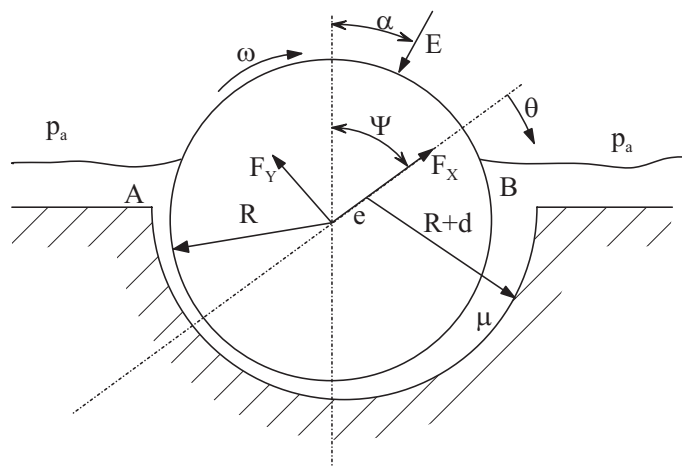
$$C = \frac{\pi}{2} \mu \frac{\Omega}{h_o} (R_1^4 - R_o^4). \quad (18)$$

**Problema 5.9**

Un eje de radio  $R$  gira con velocidad angular  $\omega$  en un dispositivo anti-fricción como el mostrado en la figura. El dispositivo consiste en una cavidad cilíndrica, de radio  $R+d$  ( $d \ll R$ ), que alberga un lubricante de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . El lubricante es forzado por el giro del eje, a fluir entre ambas superficies formando una película líquida cuyo movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes. Sabiendo que el eje está sometido a unas solicitaciones por unidad de longitud de magnitud  $E$  y orientadas un ángulo  $\alpha$  respecto a la vertical. La resultante de las fuerzas de superficie sobre el eje y las solicitaciones sobre él determinan la posición excéntrica que adopta éste respecto a la cavidad, de modo que sus centros están desplazados una distancia  $e < d$  y la línea de centros forma un ángulo  $\Psi$  con respecto a la vertical. Consideren primero el caso en que la sección  $A$  y  $B$  estén abiertas a la atmósfera. Calcular entonces:

1. Distribuciones de velocidad y presión en la película líquida.
2. Componentes de las fuerzas, en la dirección de la línea de centros  $F_X$  y perpendicular a ella  $F_Y$ , que el lubricante ejerce sobre el eje.
3. Relación entre las solicitaciones actuantes con la actitud del cojinete  $\Psi$  y excentricidad del eje  $e$ .

Repítase el análisis en el caso de que la sección  $A$  esté provista de un retén que impida el paso de lubricante a través de dicha sección.



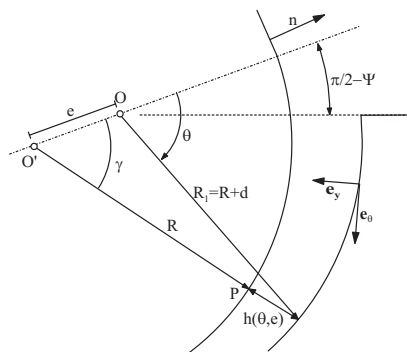
Resolución:

**Apartado 1.-**

Sean  $y, \theta$  las coordenadas de un punto genérico de la película fluida. Si  $d$  y  $e$  son el juego y la excentricidad, el espesor de dicha película líquida  $h(\theta)$  se obtiene a partir de la relación entre los tres lados del triángulo indicado en la figura

$$(R+h)^2 = (R+d)^2 - 2(R+d)e \cos \theta + e^2. \quad (1)$$

La expresión anterior puede simplificarse para el caso usual de la lubricación de piezas pues en éstos la excentricidad  $e$  y el juego entre piezas



$d$  son pequeños comparados con el tamaño característico de las piezas lubricadas,  $h \sim d \sim e \ll R \simeq R + d$ ; se tiene entonces

$$\underbrace{(R+h)^2}_{\simeq R^2+2R h+\mathcal{O}(\epsilon^2)} = \underbrace{(R+d)^2}_{\simeq R^2+2R d+\mathcal{O}(\epsilon^2)} - \underbrace{2(R+d)e \cos \theta}_{\simeq -2R e \cos \theta+\mathcal{O}(\epsilon^2)} + \underbrace{e^2}_{\simeq \mathcal{O}(\epsilon^2)} \Rightarrow h(\theta) = d + e \cos \theta + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2)$$

Si las fuerzas de viscosidad son dominantes, las ecuaciones que gobiernan los campos de velocidades y presiones son en coordenadas cilíndricas

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = 0 \quad (3)$$

que se simplifica notablemente si se tiene en cuenta que  $r$  está comprendido entre  $R$  y  $R+h \sim R$ . En efecto, si se emplea un sistema de coordenadas ligado a superficie fija, esto es  $r = R + h - y$ , entonces la ecuación diferencial anterior da lugar a

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Obsérvese que para un observador dispuesto en este sistema de referencia  $(y, \theta)$  no se aprecia la curvatura del sistema eje-alojamiento ( $y \sim h \ll R$ ) pues en primera aproximación el radio de curvatura es infinito comparado con el juego entre piezas.<sup>6</sup> Por otra parte, la película líquida está definida y, por tanto, las ecuaciones anteriores son válidas, en  $\pi/2 - \Psi \leq \theta \leq 3\pi/2 + \Psi$ . Obsérvese que por ser película delgada el orden de magnitud de las velocidades de la película en la dirección  $\theta$  son mucho mayores que en la dirección  $y$ ,  $v_\theta \sim \omega R \sim v_y R/d \gg v_y$ ; nótese que el movimiento está impedido por la presencia de las paredes sólidas. Del equilibrio entre fuerzas de presión y viscosas se obtienen los órdenes de magnitud de las variaciones de presión en las direcciones  $y$  y  $\theta$ ,  $\Delta_y p \sim \mu v_y/d \sim \mu \omega$  y  $\Delta_\theta p \sim (\mu v_\theta/d) R/d \sim \mu \omega R^2/d^2 \gg \mu \omega$ ; esto es, las variaciones transversales de presión son en primera aproximación nulas y por tanto  $p$  no es función de la variable  $y$ .

Como condiciones de contorno para la velocidad se impondrá

$$v_\theta(0) = 0; \quad \text{y} \quad v_\theta(h) = \omega R, \quad (5)$$

donde se ha tenido en cuenta que en cada punto de la superficie  $P$  del eje [ $y = h(\theta)$ ] los radios  $O'P$  y  $OP$  son en primera aproximación paralelos, al ser  $e \ll R$ , por lo que la velocidad en  $P$  puede considerarse prácticamente en dirección  $\theta$  y de valor  $\omega R$ . Integrando (4) dos veces respecto a  $y$  e imponiendo las condiciones de contorno se obtiene

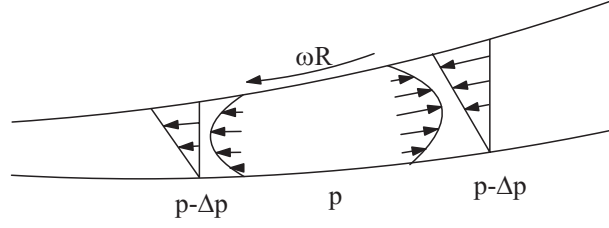
$$v_\theta(y, \theta) = -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} y(h(\theta) - y) + \omega R \frac{y}{h(\theta)}. \quad (6)$$

El campo de velocidades definido por (6) es la resultante de un movimiento de Hagen-Poiseuille debido al gradiente de presiones que se genera sobre la película líquida más uno de Couette debido al movimiento relativo entre las superficies. El caudal según  $\theta$ , por unidad de longitud perpendicular al plano del papel es

$$q_\theta = \int_0^{h(\theta)} v_\theta dy = -\frac{h^3(\theta)}{12\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R h(\theta)}{2}. \quad (7)$$

Conviene hacer notar que en el momento que exista excentricidad, la presión en la película líquida no puede ser uniforme, sino que debido a que el caudal a través de cada sección tiene que ser constante se desarrolla un gradiente de presiones que da origen a un caudal de Poiseuille, véase figura, que se suma al de Couette en las zonas donde el juego es menor (menor caudal de Couette) y se resta en aquellas donde el juego es mayor (mayor caudal de Couette).

<sup>6</sup> Observe el lector que algo semejante ocurre cuando se observa la superficie de la tierra desde una altura baja comparada con el radio de ésta. A una cota de observación baja su superficie resulta plana a todos los efectos pues no se puede apreciar su curvatura.



El perfil de velocidades dado en (6) satisface la ecuación de cantidad de movimiento pero no la de continuidad. Si se obliga a que el caudal que circula por cada sección sea constante (independiente de  $\theta$ ) se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la distribución de presiones en la película líquida

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{h^3(\theta)}{12\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R h(\theta)}{2} = cte = q, \quad (8)$$

que proporciona una ecuación lineal de primer orden y coeficientes variables para el cálculo de la presión en la película líquida. Obsérvese que aunque la ecuación diferencial sea de primer orden es necesario imponer dos condiciones de contorno puesto que el caudal total  $q$  es desconocido. En efecto, si los extremos de la ranura están abiertos a la atmósfera en dichos puntos la presión debe coincidir con la ambiental

$$p(\pi/2 - \Psi) = p(3\pi/2 - \Psi) = p_a. \quad (9)$$

En el caso de que se coloque un retén en la sección A se impide el paso de flujo en dicha sección y, por lo tanto, la condición de contorno es  $q_\theta(3\pi/2 - \Psi) = 0$ . Como se observa en (8), imponer el caudal  $q$  equivale a imponer condiciones en derivadas de la presión en un cierto punto. Naturalmente, la continuidad exige que  $q_\theta = cte = q = 0$  siendo, por tanto, las condiciones de contorno a aplicar en el caso del retén

$$p(\pi/2 - \Psi) = p_a \quad \text{y} \quad q = 0. \quad (10)$$

Si se integra la ecuación diferencial (8) imponiendo una de las condiciones de contorno ( $p(\pi/2 - \Psi) = p_a$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} p(\theta) - p_a &= \frac{12\mu R q}{d^3} \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + e/d \cos \theta')^3} - \frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + e/d \cos \theta')^2} \\ &= \frac{12\mu R q}{d^3} I_3(\theta, \Psi, e/d) - \frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} I_2(\theta, \Psi, e/d), \end{aligned} \quad (11)$$

donde aún resta por conocer el valor del caudal por unidad de longitud  $q$ . Éste se obtendrá imponiendo la condición de contorno restante [ $p(3\pi/2 - \Psi) = p_a$ ],

$$q = \frac{R\omega d}{2} \frac{I_2(3\pi/2 - \Psi, \Psi, e/d)}{I_3(3\pi/2 - \Psi, \Psi, e/d)}. \quad (12)$$

Para evitar el uso de las expresiones tediosas como las de las funciones  $I_3(\theta, \Psi, e/d)$  e  $I_2(\theta, \Psi, e/d)$ ,<sup>7</sup> se considerará el caso en que  $e/d \ll 1$ . En este caso, la distribución de presiones se obtiene, sin más que linealizar los integrandos en (11); esto es

$$\begin{aligned} I_3(\theta, \Psi, e/d) &\simeq \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} (1 - 3\frac{e}{d} \cos \theta') d\theta' = \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 3(e/d)(\cos \Psi - \sin \theta) \\ I_2(\theta, \Psi, e/d) &\simeq \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} (1 - 2\frac{e}{d} \cos \theta') d\theta' = \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 2(e/d)(\cos \Psi - \sin \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>7</sup> Las funciones  $I_3(\theta, \Psi, e/d)$  e  $I_2(\theta, \Psi, e/d)$  puede obtenerse analíticamente mediante el cambio de variable, propuesto por Sommerfeld,  $(1 + e/d \cos \theta) = (1 - (e/d)^2)/(1 - (e/d) \cos x)$  o recurriendo al uso de programas de lenguaje simbólico del tipo *Mathematica* o *Maple*.

siendo entonces

$$q = \frac{R\omega d}{2} \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \quad (14)$$

y la distribución de presiones

$$p(\theta) - p_a \simeq \frac{6\mu\omega R^2}{d^2} \left\{ \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \left[ \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 3\frac{e}{d}(\cos \Psi - \sin \theta) \right] - \left[ \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 2\frac{e}{d}(\cos \Psi - \sin \theta) \right] \right\}. \quad (15)$$

Por otra parte, de (6), (8) y (12) se obtiene el esfuerzo viscoso en el eje

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= -\mu \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right|_{y=h} \mathbf{e}_\theta = \left( \frac{6\mu q}{h^2(\theta)} - \frac{4\mu\omega R}{h(\theta)} \right) \mathbf{e}_\theta = \{e/d \ll 1\} \\ &\simeq \frac{4\mu\omega R}{d} \left[ \frac{3}{4} \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} (1 - 2(e/d) \cos \theta) - (1 - (e/d) \cos \theta) \right] \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Obsérvese que el orden de magnitud del esfuerzo viscoso es  $R/d$  más pequeño que el de la presión

$$\frac{|\vec{\tau}|}{|p - p_a|} \sim \frac{\mu\omega R}{d} \frac{d^2}{\mu\omega R^2} \sim \frac{d}{R} \ll 1 \quad (17)$$

y, por tanto, aquéllos no contribuyen significativamente, en primera aproximación, a la fuerza resultante sobre el eje.

### Apartado 2.-

La expresión matemática de la fuerza sobre el eje, teniendo en cuenta el ambiente, es entonces

$$\mathbf{F} = F_X \mathbf{e}_X + F_Y \mathbf{e}_Y = - \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} [p(\theta) - p_a] \mathbf{n}(\theta) R d\theta, \quad (18)$$

siendo  $\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{e}_X - \sin \theta \mathbf{e}_Y$  las componentes de la normal respecto a los ejes ( $X$  e  $Y$ ) de la figura. Las componentes de la fuerza en estos ejes  $F_X$  y  $F_Y$  son, para excentricidad pequeña  $e \ll d$ ,

$$\begin{aligned} F_X &= -\frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \frac{2(e/d) \sin(2\Psi)}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \\ F_Y &= \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \frac{(e/d)[4 - \pi^2 \cos(2\Psi)]}{2(\pi + 6(e/d) \cos \Psi)}. \end{aligned} \quad (19)$$

### Apartado 3.-

Obsérvese que las fuerzas de presión (19) deben equilibrarse con las sollicitaciones ejercidas sobre el eje de tal manera que

$$\begin{aligned} E \cos \alpha &= F_X \cos \Psi + F_Y \sin \Psi \\ E \sin \alpha &= F_X \sin \Psi - F_Y \cos \Psi \end{aligned} \quad (20)$$

o lo que es lo mismo

$$E = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \frac{(e/d)}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} [(4 - \pi^2 \cos(2\Psi))^2 + 4 \sin^2(2\Psi)]^{1/2} \quad (21)$$

y

$$\tan \alpha = \frac{F_X \sin \Psi - F_Y \cos \Psi}{F_X \cos \Psi + F_Y \sin \Psi} = \frac{1}{\tan \Psi} \frac{-6 + (2 + \pi^2) \cos(2\Psi)}{2 - (2 + \pi^2) \cos(2\Psi)}. \quad (22)$$

Estas ecuaciones permiten conocer las incógnitas  $\Psi$  y  $e/d$ , es decir, la posición de equilibrio del eje en su alojamiento en función del parámetro adimensional  $\frac{6\mu\omega R^3}{Ed^2}$  y del ángulo de la sollicitación  $\alpha$ .

El momento respecto al centro  $O'$  del eje es únicamente debido a las fuerzas de viscosidad (cuyo brazo respecto a  $O'$  es  $R - d \simeq R$ ), ya que las fuerzas de presión son normales a la superficie del eje, y su valor (por unidad de longitud  $z'$ ) viene dado por

$$\begin{aligned} C_{O'} &= \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} R^2 |\vec{\tau}_{F-E}| d\theta = \frac{4\mu\omega R^3}{d} \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} \left[ \frac{3}{4} \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} (1 - 2(e/d) \cos \theta) - (1 - (e/d) \cos \theta) \right] d\theta \\ &= \frac{\mu\pi\omega R^3}{d} \frac{\pi + 8(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \end{aligned} \quad (23)$$

que, naturalmente, se opone al giro del eje.

En el caso de que en el extremo A se coloque un retén las condiciones de contorno (10) dan lugar a que la distribución de presiones sea

$$p(\theta) - p_a = -\frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} I_2(\theta, \Psi, e/d) = \{e/d \ll 1\} = -\frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} \left[ \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 2(e/d)(\cos \Psi - \sin \theta) \right] \quad (24)$$

siendo, por tanto, la resultante de fuerzas sobre el eje

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \{-(\pi \cos \Psi + 2 \sin \Psi) + 2(e/d)[1 + \cos(2\Psi)]\} \quad y \\ F_Y &= \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \{2 \cos \Psi - \pi \sin \Psi + (e/d)[\pi + 2 \sin(2\Psi)]\} \end{aligned} \quad (25)$$

y las ecuaciones del equilibrio

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} [\pi^2 + 4 + (e/d)^2(8 + \pi^2) \\ &\quad + 2(e/d)(-2\pi \cos \Psi + 4(e/d) \cos(2\Psi) + \pi(-\pi + 4(e/d) \cos \Psi) \sin \Psi)]^{1/2} \end{aligned} \quad (26)$$

y

$$\tan \alpha = \frac{F_X \sin \Psi - F_Y \cos \Psi}{F_X \cos \Psi + F_Y \sin \Psi} = \frac{2 + (e/d)\pi \cos \Psi}{\pi - (e/d)(4 \cos \Psi - \pi \sin \Psi)}. \quad (27)$$

Sabiendo que el esfuerzo viscoso en el eje es

$$\vec{\tau}_{F-E} = -\mu \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right|_{y=h} \mathbf{e}_\theta = -\frac{4\mu\omega R}{h(\theta)} \mathbf{e}_\theta \quad (28)$$

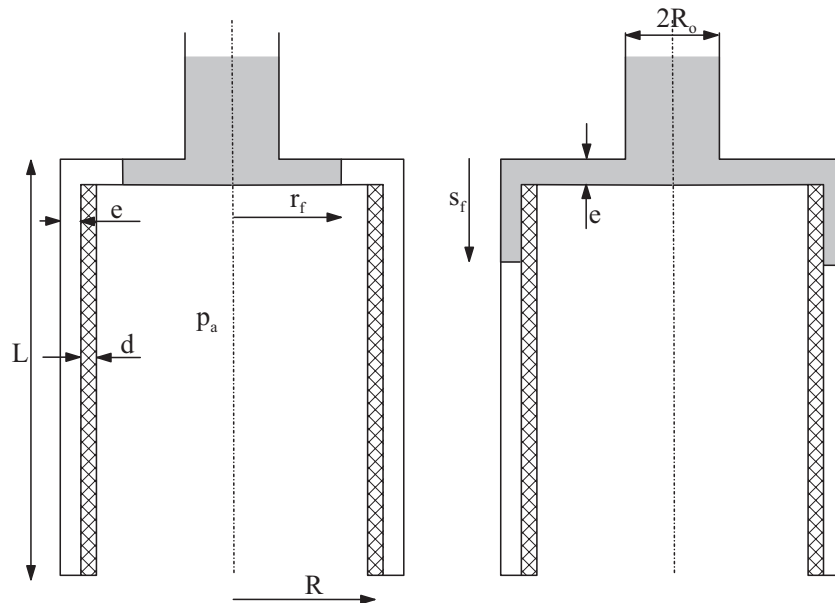
entonces el momento requerido para mantener el giro del eje es

$$C_{O'} = \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} R^2 |\vec{\tau}_{F-E}| d\theta = \frac{4\mu\omega R^3}{d} (\pi + 2(e/d) \cos \Psi). \quad (29)$$



**Problema 5.10**

En la figura se esquematiza un dispositivo para filtrar un caudal  $Q$  de un líquido de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$ . Básicamente el filtro consiste en un cuerpo cilíndrico hueco de longitud  $L$  y radio exterior  $R$ , cuyas paredes laterales, de espesor  $d$ , están constituidas por un medio poroso de permeabilidad  $\Pi$  conocida, ( $d \ll R \sim L$ ). El cuerpo cilíndrico, cuya tapa superior es impermeable, está alojado en el interior de una carcasa metálica, también cilíndrica, de forma que ambos cuerpos están concéntricamente dispuestos y dejan una ranura cuyo juego  $e$  ( $e \gg d$ ), tanto entre las tapas como entre las generatrices de los cilindros, es constante. En su parte final la ranura está cerrada. La carcasa posee una abertura en su parte central, de radio  $R_o \gg e$ , por la que se alimenta el dispositivo filtrador. El líquido es obligado a fluir a través de la ranura, primero radialmente, a través del juego entre las tapas de los cilindros, y luego longitudinalmente, a través de la ranura lateral desde donde fluye, a través del filtro, hacia el hueco central donde la presión es la atmosférica. Finalmente el líquido es recogido por la acción de la gravedad en un depósito.



Suponiendo que el movimiento del líquido en el espacio entre cilindros es con fuerzas de viscosidad dominantes, se desea determinar:

1. Criterios para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominante.
2. Suponiendo que el movimiento es estacionario, calcular:
  - a) Distribución de presiones en la película líquida.
  - b) Presión a la entrada de la ranura.
  - c) Si el líquido bombeado está a presión atmosférica indicar la potencia que debe librar la bomba para inyectar en la ranura un caudal  $Q$  de líquido.
3. Describir también el proceso inicial de llenado de la ranura.

En los cálculos puede suponerse que las sobrepresiones necesarias para hacer fluir el líquido son grandes comparadas con las debida a variaciones de altura.

Resolución:Apartado 1.-

Si el movimiento en la ranura es estacionario, también será con viscosidad dominante si

$$\frac{\rho V e}{\mu} \frac{e}{L} \sim \frac{Q e}{\nu R^2} \ll 1.$$

En el caso no estacionario debe cumplirse además el requisito de que las fuerzas de inercia temporales sean pequeñas frente a las de viscosidad

$$\frac{e^2}{\nu t_o} \ll 1;$$

obsérvese que en este caso ambos parámetros se reducen al mismo ya que el tiempo de cambio de las magnitudes fluidas  $t_o$  es debido al cambio en las condiciones de contorno por el hecho de que la interfase líquido-gas se mueve con velocidad  $v \sim Q/(eR)$  y, por tanto,  $t_o \sim R/v \sim R^2 e/Q$ .

Apartado 2.-

En el tramo radial de la ranura,  $R_o \leq r \leq R$ , el caudal que fluye en la dirección radial  $q_r$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es el de Poiseuille

$$q_r = -\frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{y} \quad Q = -2\pi r \frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1)$$

que integrada una vez proporciona la distribución de presiones en la película líquida como función del radio  $r$ , del tiempo  $t$  y de la presión  $p_1$  a la entrada de la película, que es desconocida

$$p - p_1 = -\frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{r}{R_o}. \quad (2)$$

El caudal en la dirección de la generatriz  $q_s$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es

$$q_s = -\frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{y} \quad Q_s = -\pi R \frac{e^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (3)$$

donde  $s$  es la coordenada a lo largo de la ranura lateral. La condición de conservación de la masa proporciona una condición para determinar el gradiente de presiones en este tramo de la ranura

$$\frac{dQ_s}{ds} + 2\pi R v_{mp}(s) = 0, \quad (4)$$

donde  $v_{mp} = -(\Pi/\mu)\nabla p$  es la velocidad del fluido en el medio poroso.

La distribución de presiones en el líquido en el medio poroso viene dada por la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad (5)$$

ecuación que se simplifica notablemente debido a que la longitud del medio poroso ( $\sim L$ ) y su radio medio ( $\sim R$ ) son mucho mayores que su espesor ( $\Delta r \sim d$ ); en efecto si se definen las variables  $p^* = (p - p_a)/p_a$ ,  $s = Lx$  y  $r = R - yd$ , la ecuación (5) se reduce a

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

cuya integración, sujeta a las condiciones de contorno  $p^*(0) = [p(s) - p_a]/p_a$  y  $p^*(1) = 0$ , proporciona

$$p^* = \frac{p(s) - p_a}{p_a} (1 - y). \quad (7)$$

## 154 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Obsérvese que el radio de curvatura del medio poroso es tan grande comparado con su espesor que las partículas fluidas lo *ven* plano, en primera aproximación, al atravesarlo.

La velocidad en el medio poroso es entonces

$$v_{mp} = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\Pi}{\mu} \frac{p(s) - p_a}{d}, \quad (8)$$

así que (4) conduce a la ecuación diferencial lineal, de segundo orden que determina la distribución de presiones

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - a^2 p^* = 0, \quad a^2 = \frac{12\Pi L^2}{e^3 d}, \quad (9)$$

donde  $a$  es una constante adimensional (la permeabilidad  $\Pi$  tiene dimensiones de longitud al cuadrado y su valor es del orden del cuadrado del tamaño de los poros). La solución general de (4) es

$$p^* = Ae^{ax} + Be^{-ax}, \quad (10)$$

y las condiciones de contorno que se imponen para determinar la solución son

$$\begin{aligned} p^*(0) &= \frac{p(R) - p_a}{p_a}, \quad -\frac{\pi e^3 p_a R}{6\mu L} \frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q, \\ -\frac{\pi e^3 p_a R}{6\mu L} \frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

esto es, igualdad de presiones y caudales en el punto ( $r = R$  o  $s = 0 \Rightarrow x = 0$ ) común a las dos películas líquidas y caudal nulo en  $s = L \Rightarrow x = 1$ ; obsérvese que se han impuesto tres condiciones puesto que  $p^*(0)$  es desconocida. Imponiendo a la solución las condiciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (\coth a - 1), \quad B = \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (1 + \coth a), \\ \frac{p(R) - p_a}{p_a} &= \frac{6\mu QL}{\pi e^3 R p_a} \frac{\coth a}{a} \quad \text{y} \quad p_1 = p(R) + \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{R}{R_o}. \end{aligned} \quad (12)$$

Es fácil comprobar que el caudal filtrado es  $Q$ ; en efecto

$$2\pi R \int_0^L v_{mp} ds = 2\pi R \frac{\Pi p_a L}{\mu d} \int_0^1 p^* dx = 2\pi R \frac{\Pi p_a L}{\mu d} \frac{B - A}{a} = Q.$$

Compruébese también que la potencia de la bomba necesaria para impulsar un caudal  $Q$  a través del filtro es  $W = (p_1 - p_a)Q$ .

### Apartado 3.-

Para la descripción de los primeros instantes en los que el líquido entra en el dispositivo, considérese que  $r_f(t)$  representa la posición radial de la interfase líquido-gas como función del tiempo; la velocidad de la interfase es tal que satisface la conservación del volumen de líquido

$$2\pi e r_f \frac{dr_f}{dt} = Q, \quad (13)$$

y su integración, con la condición de que en el instante inicial la interfase está en  $R_o$ , proporciona

$$r_f = \sqrt{R_o^2 + \frac{Qt}{\pi e}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi(R^2 - R_o^2)h}{Q}, \quad (14)$$

donde  $t_1$  es el tiempo que tarda la interfase en alcanzar la posición  $r = R$  y comenzar a partir de aquí a fluir por el tramo longitudinal de la ranura.

El caudal que fluye en la dirección radial  $q_r$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es el de Poiseuille

$$q_r = -\frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{y} \quad Q = -\pi r \frac{e^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (15)$$

si se integra la última de las ecuaciones con la condición de contorno  $p[r_f(t)] = p_a$  proporciona la distribución de presiones en la película líquida como función del radio  $r$  y del tiempo  $t$

$$p - p_a = \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{r_f(t)}{r} = \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{\sqrt{R_o^2 + \frac{Qt}{\pi e}}}{r}. \quad (16)$$

Finalmente, si se particulariza (16) en  $r = R_o$  se obtiene la presión de inyección  $p_1(t)$

$$p_1(t) - p_a = \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{\sqrt{R_o^2 + \frac{Qt}{\pi e}}}{R_o}. \quad (17)$$

Para tiempos  $t$  tales que  $t_1 < t < t_2$ , donde  $t_2$  es el tiempo que la interfase tarda en alcanzar el final de la ranura, la interfase se encuentra en el tramo longitudinal de la ranura y la distribución de presiones en el tramo radial de la ranura es

$$p = p_1(t) - \frac{6\mu Q}{\pi e^3} \ln \frac{r}{R_o} \quad \text{y} \quad p(R, t) = p_1(t) - \frac{6\mu Q}{\pi e^3} \ln \frac{R}{R_o}. \quad (18)$$

En el tramo longitudinal, y debido a que el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes, las ecuaciones (4), (8) y (9) continúan siendo válidas y la solución general de esta última es, como ya se indicó en el caso estacionario,

$$p^* = Ae^{ax} + Be^{-ax}, \quad (19)$$

donde las constantes de integración  $A$  y  $B$ , que dependen del tiempo a través de  $p(R, t)$  y de la posición de la interfase  $s_f = Lx_f$ , así como las propias funciones  $p(R, t)$  y  $x_f$  se obtienen de imponer las tres condiciones de contorno y la condición de conservación de la masa siguientes

$$p^*(0) = \frac{p(R, t) - p_a}{p_a}, \quad \left. \frac{dp^*}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{6\mu QL}{\pi e^3 R p_a}, \quad p^*(x_f) = 0 \quad (20)$$

$$Q = Q_{mp} + 2\pi R ds_f/dt \quad \text{o} \quad 2\pi ReL \frac{ds_f}{dt} = Q - 2\pi R \int_0^{s_f} v_{pm} ds; \quad (21)$$

esto es, tanto la presión como el caudal deben de ser iguales en la confluencia de ambas capas ( $r = R \equiv s = 0(x = 0)$ ) y la presión en la interfase líquido-gas debe de ser la atmosférica. Se obtienen así las relaciones

$$A = \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (\tanh ax_f - 1), \quad B = \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (1 + \tanh ax_f)$$

$$\frac{p(R, t) - p_a}{p_a} = \frac{6\mu QL}{\pi e^3 R p_a} \frac{\tanh ax_f(t)}{a} \quad \text{y} \quad p_1 = p(R, t) + \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{R}{R_o}, \quad (22)$$

junto con la ecuación para  $x_f$

$$\frac{dx_f}{d\tau} = 1 - \tanh ax_f, \quad \tau = \frac{Qt}{2\pi RLe}. \quad (23)$$

Integrando la última de las ecuaciones con la condición inicial  $x_f(\tau_1 = t/t_1) = 0$  se obtiene la posición de la interfase como función del tiempo

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh ax_f}{1 - \tanh ax_f} + \frac{\tanh ax_f}{1 - \tanh ax_f} = 2a(\tau - \tau_1). \quad (24)$$

Finalmente, el tiempo  $t_2 = (Q/2\pi RLe)\tau_2$  necesario para que la interfase alcance el final de la ranura  $x_f = 1$  es entonces

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} + \frac{\tanh a}{1 - \tanh a} = 2a(\tau_2 - \tau_1). \quad (25)$$

A partir de este instante el movimiento del líquido a través de ranura y filtro se hace estacionario y son válidos los resultados primeramente obtenidos.

**Problema 5.11**

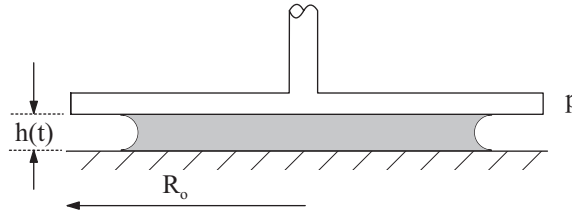
Dos discos circulares están separados una distancia variable  $h(t)$  quedando entre ellos un volumen  $V_o$  de líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . La distancia  $h(t)$  es

$$h(t) = h_o(2 + \cos \omega t)$$

donde  $h_o$  y  $\omega$  son constantes conocida y  $h_o^3 \ll V_o$  de modo que la capa de líquido entre los dos discos tiene un radio aparente mucho mayor que su espesor. La forma geométrica del borde de la capa límite se supone determinada por los efectos de la tensión superficial  $\zeta$  y el líquido moja a los discos con ángulo de contacto nulo.

Sabiendo que el movimiento del líquido generado por el desplazamiento relativo de los discos son dominantes los efectos viscosos, se pide:

1. Valor mínimo del radio  $R_o$  de los discos para que el líquido se mantenga siempre entre ambos.
2. Orden de magnitud de las velocidades en la capa líquida y condición o condiciones que han de satisfacerse para que los efectos viscosos sean dominantes en el movimiento del líquido.
3. Distribución de presiones sobre los discos.
4. Fuerza que el líquido ejerce sobre el disco superior como función del tiempo.
5. Trabajo empleado en completar un ciclo de oscilación.

Resolución:Apartado 1.-

Para que no se produzca el vertido de líquido fuera de los discos debe suceder que el radio máximo que alcanza el volumen de líquido, que corresponde a la mínima separación entre discos [ $h(t) = h_o$ ], sea menor que el radio de los discos; esto es

$$R_{max} = \left( \frac{V_o}{\pi h_o} \right)^{1/2} \leq R_o; \quad (1)$$

obsérvese que como  $h_o^3 \ll V_o$  se tiene siempre una película de líquido delgada  $h(t) \ll R(t)$ . La relación entre la extensión alcanzada por la capa de fluido  $R(t)$  en función de la distancia entre discos  $h(t)$  resulta de la ecuación de conservación del volumen

$$\pi R^2 h = V_o \quad (2)$$

donde se ha supuesto que el líquido adopta la forma de un disco despreciando el volumen ocupado por el menisco capilar; esto es,  $h^2(t)R_o(t) \ll h(t)R^2(t) \Rightarrow h(t) \ll R(t)$ , donde  $R(t)$  es el radio hasta donde se extiende la capa líquida.

**Apartado 2.-**

Si  $v_r$  y  $v_z$  representan las componentes de la velocidad del líquido en la capa según los ejes  $r$  y  $z$ , la ecuación de continuidad se escribe

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

y la estimación de órdenes de magnitud proporciona

$$\frac{V_r}{R} \sim \frac{V_z}{h} \Rightarrow V_r \sim \frac{R}{h} V_z \sim \frac{R}{h} \frac{dh}{dt} \sim \omega R \gg \frac{dh}{dt} \sim \omega h_o, \quad (4)$$

donde  $V_r$  y  $V_z$  representan los órdenes de magnitud de las velocidades del líquido en las direcciones radial y perpendicular a los discos. Las condiciones necesarias para el movimiento de la película líquida sea con fuerzas de viscosidad dominantes frente a las fuerzas de inercia (convectivas y temporales), que se colapsan en este caso en una única condición

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\rho V_r h_o^2}{\mu R_o} \ll 1 \\ \frac{h_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega h_o^2}{\nu} \ll 1, \quad (5)$$

donde  $t_o = 1/\omega$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas.

**Apartado 3.-**

Para calcular la distribución de presiones en el fluido se parte de la ecuación de Reynolds donde, para su formulación, debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con la geometría del problema, sólo hay caudal de líquido en la dirección  $r$ ; este caudal, de Poiseuille, es debido a las sobrepresiones o depresiones que aparecen en la película líquida como consecuencia del movimiento de una de las placas, normalmente a sí misma, relativo a la otra

$$q_r = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6)$$

La condición de conservación del volumen de líquido en un volumen elemental como el de la figura conduce a

$$\frac{\partial (hr)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rh^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{12\mu \dot{h}}{h^3} \quad (7)$$

que debe ser integrada sujeta a las condiciones de contorno

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{y} \quad p_a - p(R, t) = \frac{2\zeta}{h}, \quad (8)$$

donde la primera de las condiciones corresponde a la exigencia de simetría de la distribución de presiones respecto al eje de la película (el máximo o el mínimo de la presión se encuentra siempre en el eje de la película); en la segunda de las condiciones se ha tenido en cuenta que el radio de curvatura de la interfase es la mitad de la separación entre discos y que el líquido moja a las placas con un ángulo de contacto nulo.

Integrando la ecuación (7) e imponiendo las condiciones de contorno (8) se obtiene la distribución de presiones

$$p(r, t) = p_a - \frac{2\zeta}{h} + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (r^2 - R^2) = p_a - \frac{2\zeta}{h} + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} \left( r^2 - \frac{V_o}{\pi h} \right). \quad (9)$$

Es fácil comprobar en (9) que si  $\dot{h}$  es positiva ( $h$  aumenta cuando  $t$  aumenta) entonces  $p(0, t)$  es mínima (depresión) en el eje y la fuerza sobre los discos tendería a disminuir la distancia entre ellos mientras que si

$\dot{h}$  es negativa ( $h$  disminuye cuando  $t$  aumenta) hay sobrepresión en el eje de la película y la fuerza que el líquido ejerce sobre los discos tendería a alejarlos.

#### Apartado 4.-

La fuerza que el líquido (y ambiente) ejerce sobre los discos es  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{e}_z \int_0^R (p(r, t) - p_a) 2\pi r \, dr = - \left( \frac{2\pi R^2 \zeta}{h} + \frac{3\pi R^4 \mu \dot{h}}{2h^3} \right) \mathbf{e}_z = \\ - \left( \frac{2V_o \zeta}{h^2} + \frac{3\mu V_o^2}{2\pi} \frac{\dot{h}}{h^5} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (10)$$

y la fuerza  $F_D$  que hay que ejercer sobre el disco superior para mantener el movimiento es

$$\mathbf{F}_D = -\mathbf{F} + M \left( \frac{d^2 h}{dt^2} + g \right) \mathbf{e}_z = \left( \frac{2V_o \zeta}{h^2} + \frac{3\mu V_o^2}{2\pi} \frac{\dot{h}}{h^5} \right) \mathbf{e}_z + M(g - \omega^2 h_o \cos \omega t) \mathbf{e}_z, \quad (11)$$

donde  $M$  es la masa del disco superior. Obsérvese que para disminuir la altura entre discos ( $\dot{h} < 0$ ) se requiere empujar uno contra el otro ( $\mathbf{F}_D$  en la dirección  $-\mathbf{e}_z$ ) y viceversa; para ampliar el juego entre los discos se requiere tirar del disco hacia arriba ( $\mathbf{F}_D$  tiene dirección  $\mathbf{e}_z$ ).

#### Apartado 5.-

El trabajo realizado por el disco superior en un ciclo es

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} F_D \dot{h} \, dt = 2V_o \zeta \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\dot{h}}{h^2} \, dt}_{=0} + \frac{3\mu V_o^2}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\dot{h}^2}{h^5} \, dt}_{=17\pi\omega/108\sqrt{3}} + \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} M(\ddot{h} + g)\dot{h} \, dt}_{=0} = \frac{17\omega\mu V_o^2}{64\sqrt{3}h_o^3}. \quad (12)$$

Del resultado obtenido se desprende que tanto las fuerzas de tensión superficial como la inercia del disco y su peso no realizan trabajo en un ciclo neto; por ejemplo, el trabajo realizado durante el ascenso por las fuerzas de tensión superficial se invierte en aumentar la superficie de la interfase mientras que es devuelta la misma cantidad durante el periodo de descenso en el que el área de la interfase disminuye y se devuelve energía al sistema. Lo mismo sucede para el peso y la inercia del disco. El trabajo realizado es únicamente el trabajo de disipación de las fuerzas de viscosidad que es siempre positivo; se debe por tanto comunicar al disco superior un trabajo igual al disipado en forma de calor para que el movimiento se mantenga. Obsérvese que el trabajo que hay que realizar es tanto mayor cuanto mayor sea la viscosidad del fluido.

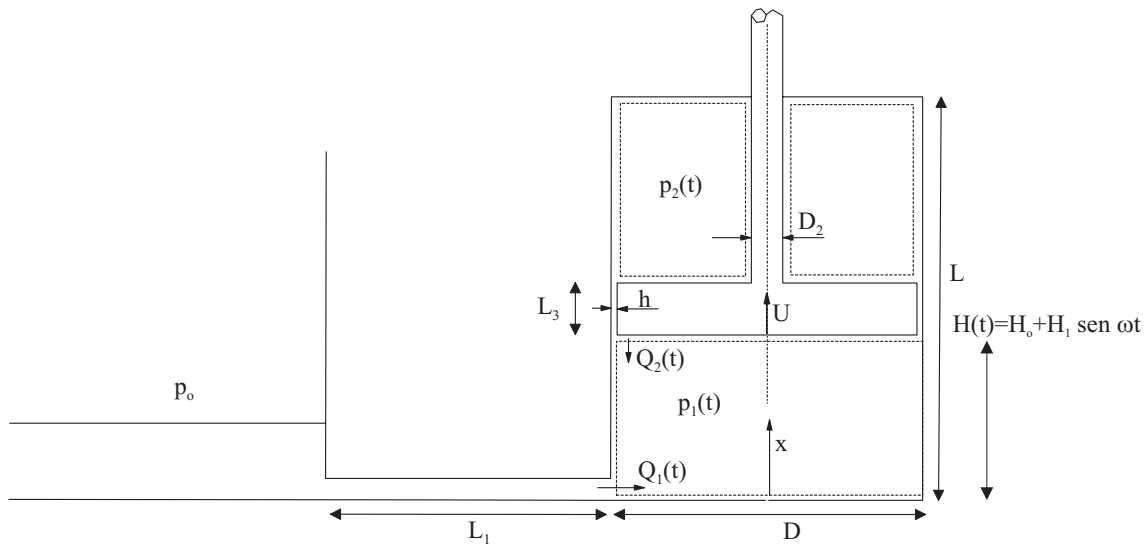
**Problema 5.12**

Considérese el dispositivo de la figura donde un émbolo de altura  $L_3$  se mueve con una ley armónica  $H(t) = H_o + H_1 \sin \omega t$  ( $0 \leq H_o + L_3 + H_1 \leq L$ ) en un cilindro de diámetro  $D$  y altura  $L$  donde existe un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . El émbolo posee en su parte superior un vástago concéntrico de diámetro  $D_2$  y el juego entre émbolo y cilindro es  $h$  ( $h \ll L_3$ ). Un conducto de diámetro  $D_1$  y longitud  $L_1$  conecta el cilindro con un depósito lo suficientemente grande como para que no haya variaciones apreciables de altura, debido a carga o descarga del depósito, y la presión permanezca constante e igual a  $p_o$ .

Suponiendo que las fuerzas de viscosidad son dominantes tanto en el movimiento del líquido en el conducto como en el que tiene lugar a través del juego entre pistón y cilindro, calcular:

1. Criterios para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes.
2. Valor mínimo de la presión  $p_o$  para que el líquido no cavite.
3. Fuerza necesaria para mover el pistón con la ley dada.

Supóngase que las fuerzas gravitatorias son despreciables.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La variación de volumen que provoca el movimiento del émbolo en el interior de cilindro da lugar a sendos flujos de líquido a través del conducto y de la ranura. Cuando, por ejemplo, asciende el émbolo se genera una depresión en la parte inferior del cilindro que da lugar a unos caudales de líquido que tienden a llenar el incremento de volumen habido en el ascenso. Lo contrario ocurre cuando el émbolo baja. Estos caudales pueden determinarse a partir de la conservación del volumen. En efecto, la conservación del volumen de líquido en la parte inferior del volumen

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} d\Omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi D^2 H(t)}{4} \right) = \frac{\pi D^2}{4} \omega H_1 \cos \omega t = Q_1(t) + Q_2(t). \quad (1)$$



De la misma forma la disminución del volumen superior está relacionada con el caudal que de él escapa

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} d\Omega + \int_{\Sigma_c} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} \frac{dH}{dt} + Q_2(t) = 0 \Rightarrow Q_2(t) = \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} \omega H_1 \cos \omega t, \quad (2)$$

y de ambas se obtienen los caudales  $Q_1(t)$  y  $Q_2(t)$

$$Q_1(t) = \frac{\pi D_2^2}{4} H_1 \omega \cos \omega t$$

$$Q_2(t) = \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} H_1 \omega \cos \omega t. \quad (3)$$

Las velocidades características del líquido en el conducto y en la ranura son entonces

$$v_c \sim \frac{D_2^2}{D_1^2} \omega H_1, \quad v_{ran} \sim \frac{D^2 - D_2^2}{hD} \omega H_1, \quad (4)$$

y la relación entre las fuerzas de inercia convectivas y de viscosidad en ambos flujos serán pequeñas siempre que

$$\frac{\rho v_c D_1^2}{\mu L_1} \sim \frac{\omega H_1 D_2^2}{\nu L_1} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\rho v_{ran} h^2}{\mu L_3} \sim \frac{(D^2 - D_2^2) \omega H_1}{\nu D} \frac{h}{L_3} \ll 1, \quad (5)$$

donde se ha usado la viscosidad cinemática  $\nu = \mu/\rho$ . Como el movimiento es no estacionario las fuerzas de inercia temporales deben de ser pequeñas frente a las de viscosidad, lo que requiere

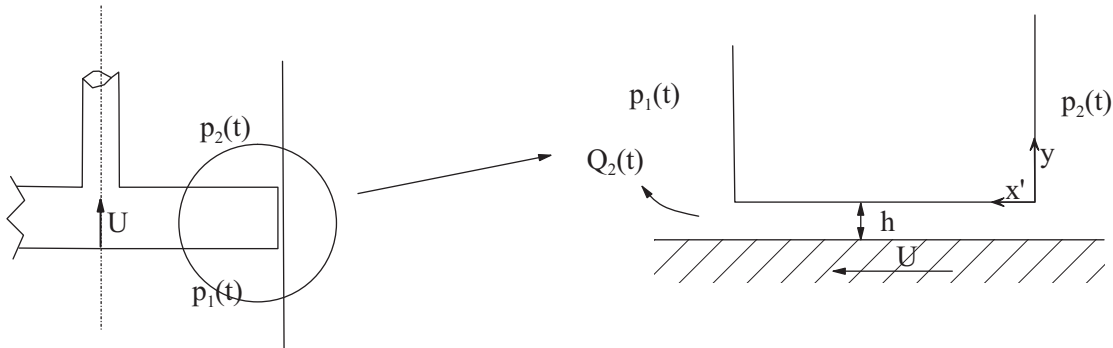
$$\frac{\rho D_1^2}{\mu t_o} \sim \frac{D_1^2}{\nu t_o} \sim \frac{\omega D_1^2}{\nu} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\omega h^2}{\nu} \ll 1. \quad (6)$$

### Apartado 2.-

Conocidos los caudales circulantes es fácil determinar, los gradientes de presión que los producen; en efecto, en el supuesto de que las fuerzas de viscosidad sean dominantes, el perfil de velocidades del líquido en el conducto es el de Hagen-Poiseuille y la relación entre el caudal y la caída de presión es

$$Q_1(t) = -\frac{\pi D_1^4}{128\mu} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\pi D_1^4}{128\mu} \frac{p_o - p_1(t)}{L_1} \Rightarrow p_1(t) = p_o - 32\mu L_1 \frac{D_2^2}{D_1^4} H_1 \omega \cos \omega t \quad (7)$$

donde  $p_1(t)$  es la presión en la parte inferior del cilindro; obsérvese que se ha supuesto que las variaciones de presión debidas a las variaciones de altura son despreciables frente a  $p_o - p_1(t)$ .



El movimiento del líquido en la ranura con fuerzas de viscosidad dominante es el resultado de la superposición de dos flujos: el de Couette, debido al movimiento relativo entre placas, y el de Hagen-Poiseuille debido a la diferencia de presiones que el movimiento del émbolo genera entre las dos regiones separadas por el émbolo

$$Q_2(t) = \pi D \left[ \frac{\omega H_1 h \cos \omega t}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} \right] \simeq -\pi D \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'}. \quad (8)$$

Obsérvese que en la ecuación (8) se ha mantenido únicamente el caudal de Hagen-Poiseuille pues el caudal de Couette es despreciable

$$\frac{DhH_1\omega}{Q_2} \sim \frac{DhH_1\omega}{D^2H_1\omega} \sim \frac{h}{D} \ll 1. \quad (9)$$

La integración de (8) con las condiciones de presión en ambos extremos de la ranura proporciona

$$\int_{p_2(t)}^{p_1(t)} dp = -\frac{12\mu Q_2(t)}{\pi Dh^3} \int_0^{L_3} dx' \Rightarrow p_2(t) = p_1(t) + \frac{12\mu Q_2(t)L_3}{\pi Dh^3}, \quad (10)$$

donde  $p_2(t)$  es la presión en la parte superior del depósito. Sustituyendo en la anterior ecuación las expresiones de (3) y (7) se obtiene

$$p_2(t) = p_o + \left[ \frac{3\mu UL_3}{h^2} \frac{D^2 - D_2^2}{2Dh} - 32\mu L_1 \frac{D_2^2}{D_1^4} \right] H_1\omega \cos \omega t, \quad (11)$$

donde  $U$  es la velocidad a la que se mueve el émbolo  $U = H_1\omega \cos \omega t$ .

El líquido puede cavitarse en la zona de menor presión, la zona del depósito donde la presión es  $p_2(t)$  cuando el émbolo baja; esta situación se alcanza cuando la presión  $p_2 \simeq 0$  para la que el líquido comienza a vaporizarse<sup>8</sup>

$$p_o = \left[ -\frac{3\mu UL_3}{h^2} \frac{D^2 - D_2^2}{2Dh} + 32\mu L_1 \frac{D_2^2}{D_1^4} \right] A\omega \quad (12)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $D \gg h$ .

### Apartado 3.-

Las fuerzas del fluido sobre el émbolo se deben tanto a la diferencia de presiones que se establece entre la cara superior e inferior del émbolo como a los esfuerzos viscosos sobre la pared lateral del émbolo. Para calcular la fuerza de fricción sobre el émbolo se requiere conocer el perfil de velocidades en la ranura,

$$v_{x'}(y) = -\frac{Uy}{h} + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{L_3} \frac{1}{2\mu} y(y+h) \quad 0 \geq y \geq -h \quad (13)$$

el esfuerzo viscoso que el fluido realiza sobre el pistón viene dado por

$$\vec{\tau}_{\text{fluido-émbolo}} = \mu \left. \frac{\partial v_{x'}}{\partial y} \right|_{y=0} \mathbf{e}_{x'} = \left( -\frac{U\mu}{h} + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{L_3} \frac{h}{2} \right) \mathbf{e}_{x'} \quad (14)$$

y la fuerza de fricción sobre el émbolo es

$$\mathbf{F}_{\text{fricción}} = \pi DL_3 \vec{\tau}_{\text{fluido-émbolo}} = \pi DL_3 \left( -\frac{U\mu}{h} + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{L_3} \frac{h}{2} \right) \mathbf{e}_{x'}. \quad (15)$$

La fuerza de presión que el líquido ejerce sobre el émbolo es,

$$\mathbf{F}_{\text{presión}} = \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} p_2(t) \mathbf{e}_{x'} - \frac{\pi D^2}{4} p_1(t) \mathbf{e}_{x'}; \quad (16)$$

obsérvese que esta última es grande comparada con la fuerza de fricción

$$\frac{|\mathbf{F}_{\text{fricción}}|}{|\mathbf{F}_{\text{presión}}|} \sim \frac{Dh\Delta p}{D^2\Delta p} \sim \frac{h}{D} \ll 1. \quad (17)$$

---

<sup>8</sup> En realidad, el líquido cavita cuando el valor de la presión  $p_2$  alcanza la presión de vapor; como es sabido la presión de vapor depende de la temperatura y a temperatura ambiente su valor es del orden del 5% de la presión atmosférica por lo que en muchas situaciones prácticas se toma para ella, en primera aproximación, un valor nulo.

## 162 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

A este último resultado se podría haber llegado más rápidamente mediante estimaciones de la fuerza de fricción; en efecto,

$$\mathbf{F}_{\text{fricción}} \sim \mu \frac{v_{\text{ran}}}{h} D L_3 \sim (p_2 - p_1) h D \ll (p_1 - p_2) D^2, \quad (18)$$

donde la velocidad en la ranura se ha estimado a partir de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección longitudinal de la ranura,  $v_{\text{ran}} \sim (h^2/\mu)(p_1 - p_2)/L_3$ .

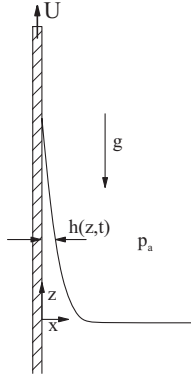
La fuerza  $\mathbf{F}$  necesaria para mover a la pieza con la frecuencia apropiada se obtiene a partir de la ecuación del movimiento del émbolo

$$\frac{\pi}{4} D^2 L_3 \rho_e \frac{d^2 H}{dt^2} = \mathbf{F} - \frac{\pi}{4} D^2 L_3 (\rho_e - \rho) - \mathbf{F}_{\text{presión}}. \quad (19)$$

**Problema 5.13**

Una placa bidimensional parcialmente sumergida en un depósito que contiene un líquido de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$  asciende paralelamente a sí misma con velocidad  $U(t)$ . El arrastre de líquido forzado por el movimiento de la placa, en competencia con la gravedad, hace ascender a éste formando sendas películas sobre las caras de la placa, una de las cuales se esquematiza en la figura. Si se supone en el análisis que el movimiento del líquido es con fuerzas de viscosidad dominantes, calcular

1. Distribución de presiones y velocidades en la película.
2. Ecuación diferencial que gobierna el espesor  $h(z, t)$  de la película.
3. Considerar el caso en el que la velocidad de la placa varía potencialmente con el tiempo,  $U(t) = U_o t^\alpha$  donde  $U_o$  es una constante con dimensiones apropiadas para el que el problema planteado en el apartado anterior admita una solución de semejanza válida a distancias suficientemente grandes respecto a la superficie libre del depósito. Escribir, entonces, la dependencia funcional de las variables y la ecuación diferencial ordinaria y condiciones de contorno que determinan el problema.



Resolución:

**Apartado 1.-**

El líquido se mueve con velocidades que son del mismo orden de magnitud que la velocidad de ascensión de la placa  $U(t)$  y el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas  $t_o$  es del orden de  $L/U$ , donde  $L = \int_o^t U(\tau) d\tau$ ; se tiene, por tanto, que las fuerzas de inercia (temporales y convectivas) son despreciables frente a las de viscosidad si

$$\frac{U(t)e^2}{\nu L} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{e^2}{\nu t_o} \ll 1, \quad (1)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática. Finalmente, el orden de magnitud del espesor  $e$  de la película líquida puede estimarse a partir de las propiedades del líquido y de la fuerza  $F$  por unidad de longitud que hay que aplicar sobre la placa bidimensional para que ésta se mueva con velocidad  $U(t)$ . Esta fuerza es proporcional al esfuerzo viscoso y a la longitud de la película líquida  $F \sim [\mu U(t)/e]L$ , de modo que el espesor crece con la viscosidad del líquido y es tanto menor cuanto mayor es la fuerza aplicada. Sustituyendo este espesor en cualquiera de las relaciones de (1) se obtiene finalmente el criterio para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominantes

$$\frac{\rho \mu U^3 L}{F^2} \ll 1. \quad (2)$$

## 164 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Si el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominante la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del eje  $z$  se reduce a

$$-\frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

donde  $u$  es la componente de la velocidad según el eje  $z$  y la última de las ecuaciones en (3) (fluidostática) se justifica por el hecho de que en primera aproximación no hay movimiento en la dirección  $x$  perpendicular a la placa ( $v \ll u$ , donde  $v$  es la componente de la velocidad perpendicular a la placa). La integración de esta última ecuación, con la condición de contorno de que en el borde de la película  $x = h(z, t)$  la presión es  $p_a$ , proporciona

$$p + \rho gz = p_a + \rho gh(z, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial z} = \rho g \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (4)$$

mientras que la integración de la primera de las ecuaciones de (3) teniendo en cuenta (4) proporciona

$$u(x, z, t) = \rho g \frac{\partial h}{\partial z} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \quad (5)$$

donde las constantes de integración se calculan a partir de las condiciones de contorno  $u(0, z, t) = U(t)$  y  $\partial u / \partial x|_{x=h(z, t)} = 0$ ; la última de las condiciones está asociada al hecho de que el aire, por ser su viscosidad muy pequeña, opone poca resistencia al movimiento ascendiente del líquido. Se tiene entonces

$$u(x, z, t) = U + \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial h}{\partial z} x \left( h - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

y el caudal en la dirección  $z$  por unidad de longitud perpendicular al plano del dibujo es

$$q_z = \int_0^{h(z, t)} u \, dx = U h + \frac{\rho g h^3}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (7)$$

Conviene indicar que el perfil de velocidades es el resultante de uno uniforme, de Couette, que arrastra el fluido hacia arriba y otro parabólico, de Poiseuille, debido a la acción de la gravedad, que tiende a devolver el líquido al depósito.

### Apartado 2.-

La ecuación diferencial que gobierna el espesor  $h(z, t)$  de la película se obtiene de la ecuación de Reynolds

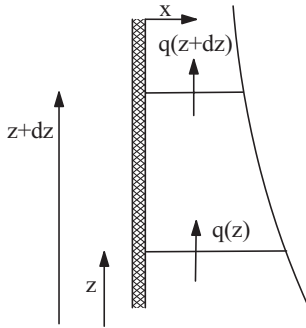
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho g h^3}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0. \quad (8)$$

Obsérvese que la ecuación (8) puede obtenerse también sin más que aplicar la condición de conservación de la masa al elemento diferencial de la figura

$$\frac{d}{dt} \int_z^{z+dz} h(z, t) \, dz + q(z + dz, t) - q(z, t) = 0, \quad (9)$$

que conduce a (8) tras desarrollar  $q(z + dz, t)$  en serie de Taylor.

La ecuación en derivadas parciales no lineal (8) para el cálculo de  $h(z, t)$  es de primer orden en la variable temporal y de segundo orden en la derivada espacial por lo que es necesario imponer una condición inicial y dos condiciones de contorno. Como condición inicial se impondrá  $h(z, 0) = 0$ ,  $z > 0$ ; se impondrá también que el espesor de la película es nulo,  $h(z_o, t) = 0$ , para valores de  $z$  mayores que el punto  $z_o$  definido en la forma  $z_o = \int_0^t U(\tau) \, d\tau$ . Por el contrario, no se pueden imponer condiciones de contorno en el depósito,  $z = 0$ , ya que existe una región entre el depósito y la película donde el movimiento del líquido no es unidireccional como en esta última y, por tanto, (7) no es válida allí. En esta región debería considerarse además el efecto de las fuerzas de tensión superficial.



**Apartado 3.-**

Para explorar la existencia de soluciones de semejanza<sup>9</sup> se debe considerar la dependencia funcional de cada uno de los tres términos de la ecuación (8)

$$\left. \begin{array}{l} \text{term. 1} \sim \frac{h}{t} \\ \text{term. 2} \sim \frac{U h}{z} \sim \frac{t^\alpha h}{z} \\ \text{term. 3} \sim \frac{h^4}{z^2} \end{array} \right\} \text{de tal manera que} \quad \frac{\text{term. 1}}{\text{term. 2}} \sim \frac{z}{t^{\alpha+1}} \sim \frac{\text{term. 3}}{\text{term. 2}} \sim \frac{h^3}{(z t^\alpha)}$$

Obsérvese que si  $t$ ,  $z$  y  $h$  cambiasen de forma tal que los cocientes permaneciesen invariantes,  $z/t^{\alpha+1} = h^3/(z t^\alpha) = \text{cte}$ , entonces, la ecuación diferencial es también invariante ante ese grupo de transformaciones; en efecto si se define

$$h = \left( \frac{3\mu U_o^2}{\rho g} \right)^{1/3} t^{(2\alpha+1)/3} f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = \frac{z}{U_o t^{\alpha+1}}, \quad (10)$$

se obtiene la ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden que proporciona el espesor adimensional  $f(\eta)$  de la película líquida

$$\frac{2\alpha+1}{3} f + [1 - (1+\alpha)\eta] \frac{df}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( f^3 \frac{df}{d\eta} \right) = 0, \quad (11)$$

siendo las correspondientes condiciones de contorno,

$$f(\eta_o) = 0 \quad \text{siendo} \quad \eta_o = \frac{z_o}{U_o t^{\alpha+1}} = \frac{1}{U_o t^{\alpha+1}} \int_0^t U_o \tau^\alpha d\tau = \frac{1}{\alpha+1} \quad (12)$$

y la surgida de la condición inicial,

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0. \quad (13)$$

Al faltar una condición de contorno, la integración numérica de (11) no es posible. En su lugar, es interesante estudiar el comportamiento de la solución en el entorno del punto  $\eta = \eta_o$ . En efecto, en las proximidades de  $\eta_o$  es conveniente escribir la ecuación (11) en la forma

$$\frac{2\alpha+1}{3} f + [1 - (1+\alpha)(\eta - \eta_o + \eta_o)] \frac{df}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( f^3 \frac{df}{d\eta} \right) = \frac{2\alpha+1}{3} f - (1+\alpha)(\eta - \eta_o) \frac{df}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( f^3 \frac{df}{d\eta} \right) = 0, \quad (14)$$

donde se ha hecho uso de (12) pues

$$[1 - (1+\alpha)\eta_o] \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (15)$$

Como la altura de la película se anula en ese punto se ensayarán posibles soluciones de la forma

$$f = C(\eta_o - \eta)^a \quad \text{con} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_o \quad \text{y} \quad a > 0,$$

que introducidas en (14) proporciona, después de dividir toda la ecuación por el término  $C(\eta_o - \eta)^a$ ,

$$\frac{2\alpha+1}{3} - (1+\alpha)a + a(4a-1)C^3(\eta_o - \eta)^{3a-2} = 0. \quad (16)$$

Obsérvese que comportamientos en torno a  $\eta_o$  con  $a < 2/3$  no son posibles pues; para impedir que el tercer sumando de (16) se haga singular se requiere que  $a = 1/4$  pero este valor no satisface que los dos primeros términos se anulen pues

$$\frac{2\alpha+1}{3} - (1+\alpha)a \neq 0 \quad \text{para} \quad a = 1/4. \quad (17)$$

<sup>9</sup> Véase, por ejemplo, *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, 2005.

Luego en principio las posibles soluciones de (11) que satisfagan la condición (12) requieren un comportamiento en torno a  $\eta_o$  con  $3a - 2 \geq 0$ . En el caso  $a > 2/3$ , el tercer sumando del primer miembro es despreciable frente a los otros dos lo que conduce a una desigualdad de imposible cumplimiento pues

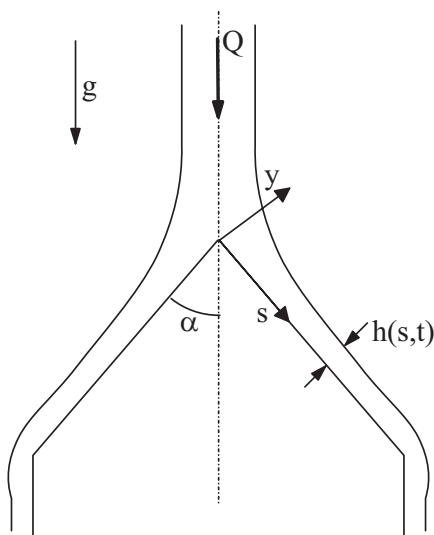
$$\frac{2\alpha + 1}{3} - (1 + \alpha)a \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\alpha + 1}{3(1 + \alpha)} > \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + 1 \not\geq 2(1 + \alpha). \quad (18)$$

La única posibilidad, por tanto, es la que corresponde al caso  $a = 2/3$ , para el que (16) proporciona  $C = (3/10)^{1/3}$ . Si se arranca numéricamente la integración de (11) desde  $\eta_o$  con la solución  $f = (3/10)^{1/3}(\eta_o - \eta)^{2/3}$  se obtiene el espesor de la película como función de  $\eta$ . Naturalmente, la solución obtenida no es válida cerca del origen  $\eta \simeq 0$  donde tampoco es válida la ecuación (11), que describe la película líquida, por las razones anteriormente expuestas.

**Problema 5.14**

Un caudal  $Q$  de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  en la forma de un chorro incide sobre el vértice de un cono de ángulo  $\alpha$  como se indica en la figura. A distancias del vértice del orden del diámetro del chorro, el líquido adquiere un movimiento casi unidireccional y forma una película delgada cuyo movimiento se desea describir en el supuesto de que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el flujo del líquido. Supuesto que el movimiento es estacionario, se desea calcular:

1. Ecuaciones y condiciones de contorno que determinan el campo de velocidades y presiones en la película líquida.
2. Criterios para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominantes.
3. Distribución de velocidades y presiones en la película líquida.
4. Espesor de la película.
5. Para tiempos suficientemente pequeños para los que la película líquida no ha alcanzado la situación estacionaria, determinar:
  - a) Criterios para que el movimiento del líquido sea con fuerzas de viscosidad dominante.
  - b) Ecuación diferencial que gobierna el espesor  $h(s, t)$  de la película líquida.
  - c) En el caso de que la ecuación anterior admita una solución de semejanza, escribir la ecuación diferencial ordinaria que gobierna el espesor de la película líquida.
  - d) Obtener la solución límite para tiempos grandes.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Si  $\mathbf{e}_s$  y  $\mathbf{e}_y$  representan los versores unitarios en la dirección a la generatriz y normal a ella respectivamente, la aceleración de la gravedad se expresa matemáticamente como

$$\mathbf{g} = g \cos \alpha \mathbf{e}_s - g \sin \alpha \mathbf{e}_y, \quad (1)$$



donde el origen del eje  $s$  es el vértice del cono y el del eje  $y$  la generatriz del mismo. Las ecuaciones de cantidad de movimiento que gobiernan la capa líquida delgada en el supuesto de fuerzas de viscosidad sean dominantes son

$$-\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cos \alpha + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

donde  $u_s$  y  $u_y$  son las componentes de la velocidad del líquido en la capa delgada según los ejes  $\mathbf{e}_s$  y  $\mathbf{e}_y$  y se ha hecho la aproximación de capa delgada  $u_y \sim u_s h/L \ll u_s$  y  $\Delta_y(p + \rho g z) \ll \Delta_s(p + \rho g z)$  que expresa que las variaciones de presión en la dirección transversal a la película son muy pequeñas frente a las que hay en sentido longitudinal y, por tanto, en primera aproximación aquéllas se pueden suponer nulas, lo que conduce a la última de las ecuaciones en (2). La integración de esta última ecuación con la condición de que en la superficie de la película  $y = h(s, t)$  la presión es la atmosférica proporciona

$$p + \rho g y = p_a + \rho g h \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g \sin \alpha \frac{dh}{ds}. \quad (3)$$

Sustituyendo la última expresión en (2) se obtiene la ecuación que proporciona el perfil de velocidades en la película líquida

$$-\rho g \sin \alpha \frac{dh}{ds} + \rho g \cos \alpha + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Obsérvese que al movimiento del líquido contribuyen dos términos:  $\rho g \cos \alpha$  representa la componente de la gravedad en la dirección de la generatriz del cono, el otro sumando representa el gradiente de presión hidrostática asociada a que la altura de la película varía y, por tanto, el peso por unidad de área de la columna líquida en un punto es tanto mayor cuanto mayor sea la altura de la película en ese punto; naturalmente, el peso de la capa es debida a la componente de la placa en la dirección normal de la película.

### Apartado 2.-

Antes de proceder a la integración de (4) se puede estimar los criterios para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes. En efecto, el orden de magnitud de las velocidades en la película líquida se pueden estimar a partir de (4) y depende fundamentalmente de cual de los dos efectos asociados a la gravedad sea dominante. En situaciones en las que  $\alpha$  sea pequeño o bien que  $\sin \alpha \sim \cos \alpha$ , el primer sumando en (4) es despreciable frente al segundo ya que la película líquida es delgada y su espesor  $h$  es pequeño frente a su longitud característica  $L$  en la dirección de la generatriz. En ese caso, la velocidad característica del líquido y la altura característica de la película son

$$u_s \sim \frac{h^2}{\mu} \rho g \quad \text{y} \quad h \sim \frac{Q}{L u_s}, \quad (5)$$

donde la altura característica de la película se ha obtenido de la condición de conservación de la masa. Se obtiene entonces

$$v_s \sim \left( \frac{\rho g Q^2}{\mu L} \right)^{1/3} \quad \text{y} \quad h \sim \left( \frac{Q \mu}{\rho g L^3} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

y la condición para que las fuerzas de viscosidad dominen se expresa

$$\frac{\rho u_s h}{\mu} \frac{h}{L} \sim \left( \frac{\rho^2 Q^4}{g \mu^2 L^7} \right)^{1/3} \ll 1, \quad (7)$$

que es la condición que deben satisfacer los parámetros del problema para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes.

En situaciones en las que el ángulo del cono es  $\pi/2$ , que corresponde a la incidencia del chorro sobre un plano horizontal, o ángulos  $\alpha$  próximos a  $\pi/2$  y tales que  $\tan \alpha \gg L/h$ , el primer sumando de (4) es dominante frente al segundo y se tiene

$$u_s \sim \left( \frac{\rho g Q^3}{\mu L^4} \right)^{1/4} \quad \text{y} \quad h \sim \left( \frac{\mu Q}{\rho g} \right)^{1/4}, \quad (8)$$

de modo que las fuerzas de viscosidad serán dominantes siempre que

$$\frac{\rho u_s h}{\mu} \frac{h}{L} \sim \left( \frac{\rho^3 Q^5}{\mu^3 g L^8} \right)^{1/4} \ll 1. \quad (9)$$

### **Apartado 3.-**

La integración de (4) con las condiciones de contorno  $u_s(0) = 0$  y  $du_s/dy|_{y=h(s)} = 0$  (esfuerzo nulo en la interfase) proporciona

$$u_s = \frac{\rho g}{\mu} \left( \cos \alpha - \frac{dh}{ds} \sin \alpha \right) y \left( h - \frac{y}{2} \right) \quad (10)$$

y el caudal  $q_s$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es

$$q_s = \frac{\rho g}{\mu} \left( \cos \alpha - \frac{\partial h}{\partial s} \sin \alpha \right) \int_0^h y(h - y/2) dy = \frac{\rho g h^3}{3\mu} \left( \cos \alpha - \frac{dh}{ds} \sin \alpha \right). \quad (11)$$

### **Apartado 4.-**

Obsérvese que el perfil de velocidades dado en (10) satisface las ecuaciones de cantidad de movimiento pero no la de continuidad (el espesor de la película depende naturalmente del caudal). Si se impone la conservación de la masa (o volumen del líquido) se tiene

$$Q = 2\pi s \sin \alpha q_s = \frac{2\pi \rho g}{3\mu} s \sin \alpha h^3 \left( \cos \alpha - \frac{\partial h}{\partial s} \sin \alpha \right). \quad (12)$$

En el caso en que el ángulo  $\alpha$  sea tal que  $\tan \alpha \ll L/h$ , el perfil de la película viene dado por

$$h = \left( \frac{3\mu Q}{2\pi \rho g \sin \alpha \cos \alpha s} \right)^{1/3}, \quad (13)$$

mientras que en el caso  $\tan \alpha \gg L/h$  ( $\alpha \simeq \pi/2$ ), se tiene la ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$\frac{dh^4}{d \ln s} = -\frac{6\mu Q}{\pi \rho g} \Rightarrow h = \left( h^4(s_o) - \frac{6\mu Q}{\pi \rho g} \ln \frac{s}{s_o} \right)^{1/4}, \quad (14)$$

donde la constante de integración  $h(s_o)$  representa el espesor en algún punto de la película  $s_o$  donde éste sea conocido. Obsérvese que las expresiones (13) y (14) para los espesores de película no son válidos en las proximidades del vértice del cono  $s = 0$ , ya que allí no es válida la aproximación de capa delgada [ecuaciones (2)] y debe resolverse el problema axisimétrico completo de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} &= 0, \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right], \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $u_r$  y  $u_z$  son las componentes de la velocidad según los ejes  $r$  y  $z$ ; la resolución numérica del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, lineal y de segundo orden no se abordará aquí por su dificultad. Naturalmente, las condiciones de contorno de este problema son las de acoplamiento con el chorro y con la solución de capa delgada anteriormente encontrada.

**Apartado 5.-**

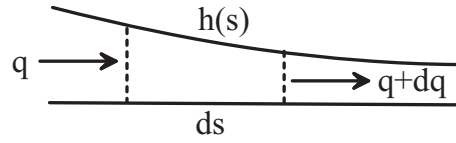
Por ser el movimiento no estacionario, no sólo las fuerzas de inercia convectivas tienen que ser pequeñas frente a las de viscosidad y, por tanto, los criterios (7) y (9) deben ser satisfechos, sino que también las fuerzas de inercia temporales han de ser pequeñas frente a las de viscosidad para lo que el tiempo característico de cambio  $t_o$  de las magnitudes fluidas debe satisfacer la condición

$$\frac{h^2}{\nu t_o} \sim \frac{u_s h^2}{\nu L} \ll 1, \quad (16)$$

donde se ha hecho uso de que  $t_o \sim L/u_s$  está asociado al cambio de posición del frente de la película; obsérvese que el criterio anterior se reduce a los criterios (7) y (9) para los casos considerados allí.

Por ser dominantes las fuerzas de viscosidad, las distribuciones de velocidades y presiones vienen dadas por las ecuaciones (2) y por tanto son las calculadas para el caso estacionario.

Para determinar la ecuación diferencial que gobierna el espesor de la película basta con aplicar la ecuación de Reynolds o lo que es lo mismo aplicar la condición de conservación de la masa a un volumen de control elemental como el mostrado en la figura



$$s \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\rho g h^3}{3\mu} s \left( \cos \alpha - \frac{\partial h}{\partial s} \sin \alpha \right) \right] = 0. \quad (17)$$

Esta ecuación, en derivadas parciales, no lineal, de primer orden en el tiempo y de segundo orden en la coordenada espacial, proporciona el espesor de la película líquida sobre la generatriz del cono cuando se imponen condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Condiciones de contorno que no son sencillas de obtener puesto que existe una zona de transición entre el chorro y la capa líquida cuya descripción implica la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (15). En cualquier caso la posición del frente de la película líquida se obtiene de la condición de conservación del volumen

$$\int_0^t Q dt = Q t = \int_0^{s_f(t)} 2\pi \sin \alpha s h(s, t) ds, \quad (18)$$

que expresa que el volumen de la película líquida en el tiempo  $t$  es igual al aportado por el chorro hasta ese instante.

En el caso en que  $\tan \alpha \sim \mathcal{O}(1)$ , la ecuación (17) se reduce a

$$s \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho g h^3}{3\mu} s \cos \alpha \right) = 0; \quad (19)$$

es fácil observar de (19) y (18) que si las variables  $h$ ,  $s$  y  $t$  experimentan cambios asociados a un grupo de transformaciones pero tales que los cocientes  $h^2 t/s$  y  $s^2 h/t$  permanezcan invariantes, entonces la función  $h t^{1/5}$  depende de una única variable que es combinación de  $s$  y de  $t$  y la ecuación (19) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria no lineal. En efecto, si se define

$$h = \left( \frac{Q}{2\pi \sin \alpha} \right)^{1/5} \left( \frac{3\mu}{\rho g \cos \alpha} \right)^{2/5} t^{-1/5} f(\eta), \quad \eta = \left( \frac{3\mu}{\rho g \cos \alpha} \right)^{1/5} \left( \frac{2\pi \sin \alpha}{Q} \right)^{2/5} \frac{s}{t^{3/5}}, \quad (20)$$

la ecuación (19) se reduce a

$$-\frac{\eta}{5} (f + 3\eta f') + \frac{d}{d\eta} (\eta f^3) = 0 \quad (21)$$

y la condición (18) se expresa

$$\int_0^{\eta_f} f(\eta) \eta d\eta = 1, \quad (22)$$

donde

$$\eta_f = \left( \frac{3\mu}{\rho g \cos \alpha} \right)^{1/5} \left( \frac{2\pi \sin \alpha}{Q} \right)^{2/5} \frac{s_f}{t^{3/5}} \quad (23)$$

indica la posición del frente de la película líquida.

Aunque no se intentará aquí la integración numérica de (21) por las dificultades ya mencionadas de la condición de contorno en el origen, es interesante comprobar que esta ecuación contiene también a la solución estacionaria. En efecto, para tiempos suficientemente grandes, que corresponden a valores pequeños de  $\eta$ , el primer término de (21) es despreciable y se tiene

$$\eta f^3 = C, \quad \frac{\pi \rho g \sin 2\alpha}{3\mu Q} sh^3 = C, \quad (24)$$

que coincide con el resultado obtenido en (12).

Para ángulos próximos a  $\pi/2$  y tales que  $\tan \alpha \gg L/h$ , la ecuación (17) se reduce a

$$s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\rho g}{3\mu} \frac{\partial}{\partial s} \left( sh^3 \frac{\partial h}{\partial s} \right) = 0. \quad (25)$$

Como en el caso anterior, es fácil observar que (25) admite solución de semejanza si las variables cambian pero en forma tal que  $h^3 t/s^2$  y  $hs^2/t$  permanezcan invariantes frente a un grupo de transformaciones. Esto sugiere definir las variables

$$h = \left( \frac{3\mu Q}{2\pi \rho g} \right)^{1/4} f(\eta), \quad \eta = \left( \frac{24\pi^3 \mu}{\rho g Q^3} \right)^{1/8} \frac{s}{\sqrt{t}} \quad (26)$$

con lo que (25) resulta en las nuevas variables

$$\frac{1}{2} \eta^2 \dot{f} + \frac{d}{d\eta} (\eta f^3 \dot{f}) = 0; \quad (27)$$

la condición (18) se expresa

$$\int_0^{\eta_f} f(\eta) \eta d\eta = 1. \quad (28)$$

Obsérvese que la solución de (25) para tiempos grandes ( $\eta$  pequeño) conduce después de dos integraciones a una expresión como la mostrada en (14).



## CAPÍTULO 5

# Movimientos de fluidos con viscosidad dominante

Cuando el fluido es guiado por paredes sólidas, la descripción de su movimiento se simplifica notablemente por el hecho de que la dirección de su velocidad es impuesta por aquéllas. Éste es el caso del movimiento de líquidos y gases en conductos o el del movimiento de películas fluidas (líquidas o gaseosas) delgadas como, por ejemplo, el movimiento de un lubricante en el interior de un cojinete.

Una parte de estos movimientos, de interés en muchas ramas de la ingeniería, están caracterizados por el hecho de que en ellos las fuerzas de viscosidad son dominantes frente a las de inercia. Esto es,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \sim \rho \frac{V_o}{t_o} \ll \mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu \frac{V_o}{D_o^2} \quad (5.1)$$

y

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \rho \frac{V_o^2}{L} \ll \mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu \frac{V_o}{D_o^2}, \quad (5.2)$$

lo que conduce a las desigualdades

$$\frac{\rho V_o D_o^2}{\mu L} = Re \frac{D_o}{L} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\rho D_o^2}{\mu t_o} \ll 1, \quad (5.3)$$

donde  $\mu$  y  $\rho$  son respectivamente la viscosidad y densidad del fluido,  $V_o$  es una velocidad característica del movimiento,  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas y  $L$  y  $D_o$  son longitudes características en las direcciones longitudinal y transversal del movimiento. En el supuesto de que las dos relaciones en (5.3) se satisfagan, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican notablemente dando lugar a ecuaciones lineales que establecen el equilibrio entre las fuerzas de presión, las de viscosidad y las másicas. El análisis de estas ecuaciones aplicadas a geometrías lentamente variables como las que nos ocupan (conductos y películas delgadas) proporcionan los resultados siguientes:

1. La presión es constante, en primera aproximación a través de secciones transversales al movimiento del fluido.
2. La componente de la velocidad en la dirección del movimiento da lugar a un perfil de velocidades que varía parabólicamente (con las coordenadas de la sección). En el caso de que el fluido sea forzado por el movimiento relativo entre superficies sólidas (como en un cojinete) al anterior efecto hay que sumarle un perfil de velocidades que, a través de la sección, varía linealmente entre los valores de las velocidades de las superficies sólidas.
3. El caudal es directamente proporcional al gradiente de presiones y, en su caso, lo es también a la velocidad relativa entre las superficies sólidas.

### Caso de conductos

Para el caso de un conducto de sección circular de diámetro  $D(x)$  y longitud  $L$  (diámetro característico del conducto  $D_o$  mucho menor que  $L$ ), por el que fluye un líquido de forma tal que se satisfacen las condiciones

## 114 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

dadas en (5.3), la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x$  de la línea media del conducto se reduce al balance entre las componentes de las fuerzas de presión, másicas y viscosas en la dirección del movimiento

$$0 = p_l + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (5.4)$$

donde  $p_l = -\partial(p + \rho U)/\partial x$  representa la componente del gradiente de presión reducida en la dirección de la línea media del conducto  $x$ ,  $v(x, r)$  es la componente de la velocidad del líquido en la dirección  $x$  y  $U$  es el potencial de las fuerzas másicas. Es importante indicar que en (5.4) se han despreciado los esfuerzos viscosos normales frente a los tangenciales (cortadura) puesto que las variaciones de velocidad ocurren transversalmente en distancias del orden de  $D$  mientras que longitudinalmente estas variaciones ocurren en distancias del orden de  $L$ ; esto es,

$$\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{\sim V_o/L^2} \ll \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)}_{\sim V_o/D^2}. \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta que, de acuerdo con 1,  $p_l(x, t)$  es independiente de la coordenada  $r$ , la integración de (5.4), con las condiciones de velocidad nula en la pared del conducto y de regularidad en el eje del mismo, proporciona la ley parabólica de velocidades, denominada también de Hagen-Poiseuille,

$$v(r, x) = \frac{p_l(x, t) D^2(x)}{16\mu} \left[ 1 - \frac{4r^2}{D^2(x)} \right]. \quad (5.6)$$

El caudal que circula por el conducto es entonces

$$Q = \int_0^{D/2} v(r, x) 2\pi r \, dr = \frac{\pi D^4(x)}{128\mu} p_l(x) = -\frac{\pi D^4(x)}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}, \quad (5.7)$$

y establece la proporcionalidad entre el caudal que circula por el conducto  $Q$  y el gradiente de presión reducida que es característica de los movimientos con viscosidad dominante.<sup>1</sup> Esta relación es el punto de partida para el análisis del movimiento de líquidos en conductos y permite calcular el caudal si el gradiente de presiones es conocido o la diferencia de presiones entre dos secciones de un conducto para que circule por él un caudal  $Q$  especificado; en efecto, la integración de (5.7) proporciona

$$(p + \rho U)_{x_1} - (p + \rho U)_{x_2} = \frac{128\mu Q}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{D^4(x)}. \quad (5.8)$$

Para el caso de un conducto de sección constante, la integración de (5.8) proporciona

$$(p + \rho U)_{x_1} - (p + \rho U)_{x_2} = \frac{128\mu Q}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{D^4}, \quad (5.9)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son puntos genéricos de la línea media del conducto. Habitualmente, el fluido que circula por el conducto se toma de un depósito a una cierta presión  $p_d$  descargando en otro o al ambiente a presión  $p_a$ . Naturalmente, las conexiones entre los depósitos y el conducto son regiones donde el movimiento fluido no es unidireccional y su análisis requeriría, en principio, el empleo de las ecuaciones completas de Navier-Stokes. Afortunadamente, para el caso de fuerzas de viscosidad dominantes,  $ReD/L \ll 1$ , las longitudes características de estas regiones son pequeñas frente a la longitud del conducto y las caídas de presión a través de ellas son muy pequeñas frente a la que tiene lugar a través del conducto y pueden despreciarse; se tiene entonces

$$p(x = 0) = p_d \quad y \quad p(x = L) = p_a \quad (5.10)$$

<sup>1</sup> En el caso en que la sección del conducto no sea circular, la expresión (5.7) continúa siendo válida si se multiplica el segundo miembro por un coeficiente  $\Gamma$ , denominado factor de forma, que tiene en cuenta la forma de la sección del conducto [ $D(x)$  representa una longitud característica de la sección]. Valores de  $\Gamma$  para diferentes secciones pueden encontrarse en cualquier manual de hidráulica; véase, por ejemplo, *Handbook of Hydraulic resistance*, I. E. Idelchik, CRC Press.

En efecto, en estas regiones, de longitud característica  $L_e$ , la inercia del fluido es importante puesto la velocidad del mismo experimenta modificaciones apreciables (entrada a un conducto, por ejemplo) y, por tanto,

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \rho V_o^2 / L_e \sim \mu \nabla^2 \mathbf{v} \sim \mu V_o / D_o^2, \quad L_e \sim Re D_o; \quad (5.11)$$

si se satisface la primera de las condiciones en (5.3) se tiene que la longitud de estas regiones es pequeña frente a la del conducto y no se requiere un análisis detallado del movimiento en ellas.

### Caso de películas líquidas

En el movimiento de películas líquidas delgadas de espesor  $h(x)$  con  $h_o/L \ll 1$ , siendo  $h_o$  el espesor característico de la película y  $L$  su longitud característica, la importancia relativa entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad se mide mediante los parámetros

$$\frac{|\rho d\mathbf{v}/dt|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{\rho V_o / t_o}{\mu V_o / h_o^2} \sim \frac{h_o^2}{\nu t_o} \quad (5.12)$$

y

$$\frac{|\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{\rho V_o^2 / L}{\mu V_o / h_o^2} \sim \frac{\rho V_o h_o}{\mu} \frac{h_o}{L} \sim Re \frac{h_o}{L}, \quad (5.13)$$

donde  $h_o$  es un valor característico del espesor de la película. Por tanto, el movimiento de la película líquida será con fuerzas de viscosidad dominante si

$$\frac{h_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad y \quad Re \frac{h_o}{L} \ll 1. \quad (5.14)$$

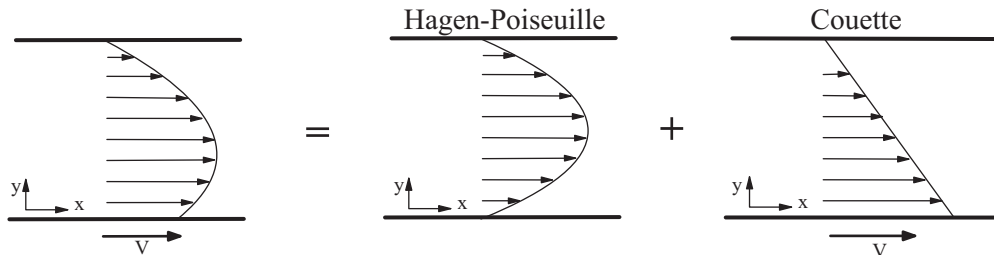
Si para el caso de una película líquida bidimensional se satisfacen las condiciones (5.14), la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección longitudinal de la película se reduce a

$$p_l + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.15)$$

y su integración para el caso del movimiento de un líquido entre dos superficies sólidas proporciona el perfil de velocidades en la película líquida

$$v = V \left[ 1 - \frac{y}{h(x)} \right] + \frac{p_l}{2\mu} y [h(x) - y]; \quad (5.16)$$

donde una de las superficies, la situada en  $y = 0$ , se mueve paralelamente a sí misma con velocidad  $V$  relativa a la otra y  $p_l$  es el gradiente de presión reducida según el eje  $x$  (paralelo a una de las placas). Obsérvese que el perfil de velocidades dado en (5.16), que satisface las condiciones de contorno sobre las placas se ha obtenido, debido a la linealidad de la ecuación (5.15), como superposición de dos efectos: el debido al movimiento relativo entre placas (corriente de Couette) al que corresponde el término lineal y la parte parabólica debido al gradiente de presiones (corriente de Hagen-Poiseuille).





El caudal por unidad de longitud a través de las superficies es

$$q = \int_0^h v(y) dy = \int_0^h \left[ V \left( 1 - \frac{y}{h} \right) + \frac{p_l}{2\mu} y(h-y) \right] dy \quad (5.17)$$

$$= \frac{Vh(x)}{2} + \frac{h^3(x)}{12\mu} p_l = \frac{Vh(x)}{2} - \frac{h^3(x)}{12\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x};$$

expresión que muestra que el caudal total es suma del denominado caudal de Couette, asociado como ya se ha dicho al movimiento relativo entre superficies sólidas y el de Poiseuille debido al gradiente de presiones.

Para el caso de películas líquidas con una interfase (líquido-gas) libre situada en  $y = h(x)$ , se impondrá sobre ésta la condición de esfuerzo nulo y la integración de (5.15) con esta condición de contorno proporciona el perfil de velocidades

$$v = V + \frac{p_l}{\mu} y \left[ h(x) - \frac{y}{2} \right]; \quad (5.18)$$

esta condición es debida a que la viscosidad del gas es mucho menor que la del líquido y, por tanto, el esfuerzo que éste ejerce sobre aquél es muy pequeño y justifica que, en primera aproximación, se imponga en la interfase la condición de esfuerzo viscoso nulo. Finalmente el caudal total por unidad de longitud, suma de los de Couette y Poiseuille, es

$$q = \int_0^h v(y) dy = \int_0^h \left[ V + \frac{p_l}{\mu} y \left( h(x) - \frac{y}{2} \right) \right] dy \quad (5.19)$$

$$= Vh + \frac{h^3(x)}{3\mu} p_l = Vh - \frac{h^3(x)}{3\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x},$$

Los resultados del movimiento de películas líquidas bidimensionales se pueden extender fácilmente al caso tridimensional; de aplicación frecuente en el diseño y análisis de los dispositivos anti-fricción. Para atender a la variada geometría de estos dispositivos es de interés utilizar un sistema generalizado de coordenadas curvilíneas como el mostrado en la figura. En este sistema, y suponiendo que el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes [ $h^2/(\nu t_o) \ll 1$ ,  $(V_\alpha h/\nu)(h/L_\alpha) \ll 1$  y  $(V_\beta h/\nu)(h/L_\beta) \ll 1$ ] las velocidades y los caudales por unidad de longitud son

**Superficies sólidas**

$$v_\alpha = V_\alpha [1 - y/h] + \frac{1}{2\mu} P_\alpha y(h-y)$$

$$v_\beta = V_\beta [1 - y/h] + \frac{1}{2\mu} P_\beta y(h-y)$$

$$q_\alpha = \frac{V_\alpha h}{2} + \frac{h^3}{12\mu} P_\alpha$$

$$q_\beta = \frac{h V_\beta}{2} + \frac{h^3}{12\mu} P_\beta$$

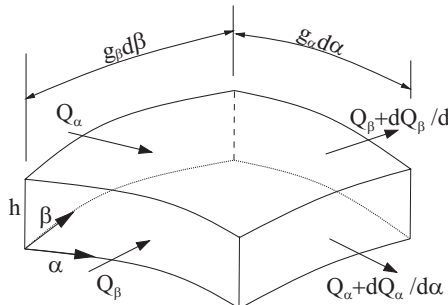
**Superficie sólida e interfase libre**

$$v_\alpha = V_\alpha + \frac{1}{\mu} P_\alpha y(h-y/2)$$

$$v_\beta = V_\beta + \frac{1}{\mu} P_\beta y(h-y/2)$$

$$q_\alpha = V_\alpha h + \frac{h^3}{3\mu} P_\alpha$$

$$q_\beta = V_\beta h + \frac{h^3}{3\mu} P_\beta$$



donde  $V_\alpha$  y  $V_\beta$  son las componentes en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  de la velocidad de una de las superficies sólidas (la situada en  $y = 0$ ) relativa a la otra,  $g_\alpha d\alpha$  y  $g_\beta d\beta$  son las longitudes elementales en cada una de las direcciones curvilíneas  $\alpha$  y  $\beta$  y  $P_\alpha$  y  $P_\beta$  son respectivamente los gradientes de presión reducida en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$

$$P_\alpha = -\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial \alpha}, \quad P_\beta = -\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial \beta}. \quad (5.20)$$

Obsérvese que los perfiles de velocidad se han obtenido de modo que se satisfaga la condición de conservación de la cantidad

de movimiento pero no se ha utilizado la ecuación de continuidad así que la distribución de presiones es desconocida. Para cerrar el problema es necesario exigir que los flujos calculados satisfagan la ecuación de conservación de masa en el volumen elemental de película líquida  $h(\alpha, \beta, t)g_\alpha d\alpha g_\beta d\beta$  representado en la figura; se obtiene entonces la ecuación, denominada de Reynolds, que proporciona la distribución de presiones en la película líquida y es punto de partida en cualquier análisis de lubricación fluidodinámica

$$\frac{\partial(hg_\alpha d\alpha g_\beta d\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(q_\alpha g_\beta d\beta)}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial(q_\beta g_\alpha d\alpha)}{\partial \beta} d\beta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial(hg_\alpha g_\beta)}{\partial t} + \frac{\partial(q_\alpha g_\beta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(q_\beta g_\alpha)}{\partial \beta} = 0.} \quad (5.21)$$

La ecuación de Reynolds (5.21) es una ecuación en derivadas parciales, de segundo orden, lineal y de tipo elíptico, y como condiciones de contorno se puede imponer el valor de la presión en el contorno (condiciones de tipo Dirichlet) o el valor del caudal (condiciones de tipo Neumann).

### Movimiento de fluidos en medios porosos

El movimiento de un fluido a través de un medio poroso es un caso particular de movimiento con fuerzas de viscosidad dominante. La descripción macroscópica del movimiento se hace promediando las magnitudes fluidas en volúmenes  $\delta\Omega$  que son grandes frente al volumen  $a^3$  característico de los poros pero pequeños frente al volumen característico  $L^3$  del medio poroso ( $a^3 \ll \delta\Omega \ll L^3$ ).<sup>2</sup> Del empleo de variables promediadas surge la magnitud porosidad  $\phi(\mathbf{x}, t)$  que mide la fracción del volumen ocupado por los poros. Si  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad del fluido, la densidad aparente del fluido por unidad de volumen del medio poroso es  $\rho(\mathbf{x}, t)\phi(\mathbf{x}, t)$ . Del mismo modo, la velocidad aparente  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  del fluido en el medio poroso mide el flujo de masa  $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  por unidad de área del medio poroso. Análogamente se definen la presión y la temperatura medias.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, la ecuación de continuidad se expresa matemáticamente en la forma

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5.22)$$

donde se ha supuesto que la porosidad del medio es independiente del tiempo. Por otra parte y dado que una formulación exacta de la conservación de la cantidad de movimiento no es factible puesto que se desconocen las interacciones medias entre el fluido y las paredes sólidas del medio poroso, se postula una relación semi-empírica entre la velocidad aparente y el gradiente de presiones, denominada ley de Darcy,

$$\mathbf{v} = -\frac{\Pi}{\mu} (\nabla p + \rho \nabla U);$$

la constante  $\Pi$  con dimensiones de área se denomina permeabilidad del medio y debe determinarse empíricamente.

### Caso de movimiento de líquidos

En el caso de líquidos la ecuación de conservación de la masa en el interior del dominio fluido se reduce a  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  que combinada con la ley de Darcy permite obtener la ecuación diferencial para la distribución de presiones en el medio poroso

$$\boxed{\nabla^2(p + \rho U) = 0.} \quad (5.23)$$

<sup>2</sup> El lector interesado en una descripción más detallada del movimiento en medios poroso puede acudir por ejemplo a *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos* de A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

**Caso de movimiento isoterma de gases**

Bajo esta condición, si se combina la ecuación de continuidad (5.22) con la ley de Darcy teniendo en cuenta que en el movimiento de un gas normalmente son despreciables las fuerzas másicas se obtiene

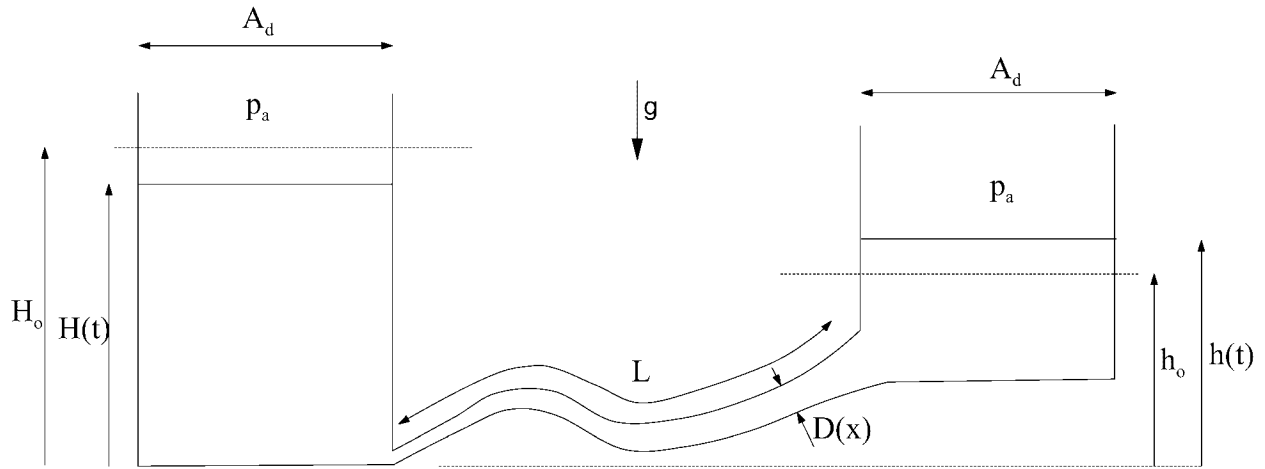
$$\frac{\phi}{R_g T_s} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{p}{R_g T_s} \frac{\Pi}{\mu} \nabla p \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\Pi}{2\mu} \nabla^2 p^2 = 0} \quad (5.24)$$

donde se ha supuesto que la permeabilidad del medio poroso es uniforme y se ha supuesto que la viscosidad del gas es constante por serlo la temperatura de éste; se supone que la matriz porosa está a temperatura constante  $T = T_s$ , y que por ser tan lento el movimiento del gas a través del medio poroso, éste adquiere la temperatura de la matriz porosa de modo que su densidad viene dada por  $\rho = p/R_g T_s$ . A las ecuaciones anteriores, en derivadas parciales de segundo orden y lineales, de tipo elíptico hay que imponerles condiciones de contorno apropiadas; del tipo Dirichlet (se impone la presión), del tipo Neumann (se impone el caudal) o mixtas.

**Problema 5.1**

Dos depósitos de área  $A_d$ , abiertos a la atmósfera, como los indicados en la figura, contienen un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . Ambos depósitos están unidos por un conducto de longitud  $L$  y sección circular cuyo diámetro varía lentamente en la forma  $D(x) = D_o(1 + \alpha x/L)$  a lo largo de la línea media del conducto  $x$ ,  $\alpha > -1$  y  $\alpha D_o/L \ll 1$ . Inicialmente la diferencia de alturas entre las superficies libres del líquido en ambos depósitos es  $H_o - h_o$  y el movimiento del líquido está inhibido por la presencia de un diafragma situado en una sección del conducto. Si a partir de un cierto instante se rompe el diafragma, el líquido descarga a través del conducto bajo la acción de la gravedad, calcular:

1. Criterios que deben satisfacerse para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el movimiento del líquido en el conducto.
2. Bajo los criterios anteriores, estudiar el movimiento y calcular el tiempo requerido para que se igualen las alturas de ambos depósitos.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Como se vio en la introducción del tema la relación entre la fuerza de inercia temporal y la de viscosidad es

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia temporal}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V/t_o}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{D_o^2}{\nu t_o} \quad (1)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática y  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas. Este tiempo, que es del orden del tiempo de vaciado de un depósito a otro, se puede estimar a partir de la ecuación de continuidad en cualquiera de los dos depósitos

$$A_d \frac{dh}{dt} = Q \quad \rightarrow \quad t_o \sim A_d (H_o - h_o)/Q;$$

por otra parte, el caudal puede estimarse a partir de la fórmula de Hagen-Poiseuille

$$Q \sim \frac{D_o^4}{\mu} \frac{\rho g (H_o - h_o)}{L}.$$

Sustituyendo los valores estimados de  $t_o$  y  $Q$  en (1) se obtiene que las fuerzas de inercia temporales son despreciables frente a las viscosas si

$$\frac{D_o^2}{\nu t_o} \sim \frac{gD^6}{\nu^2 A_d L} \ll 1. \quad (2)$$

Obsérvese que si la viscosidad del líquido, la gravedad y los parámetros geométricos del problema son tales que se satisface la desigualdad (2), el movimiento del fluido en el conducto es casi estacionario y el tiempo desempeña el papel de un parámetro. Análogamente la relación entre las fuerzas de inercia convectivas y las de viscosidad es

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia convectivas}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V^2/L}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{\rho V D_o^2}{\mu L} \sim Re \frac{D}{L} \ll 1 \quad (3)$$

y si se sustituye el valor  $VD_o^2$  por el valor del caudal estimado anteriormente se obtiene que las fuerzas de inercia convectiva son despreciables frente a las de viscosidad si se satisface la desigualdad

$$\frac{g(H_o - h_o)D^4}{\nu^2 L^2} \ll 1. \quad (4)$$

### Apartado 2.-

Si se satisfacen las desigualdades (3) y (4), el movimiento del líquido en el conducto es con fuerzas de viscosidad dominantes y la relación entre el caudal y el gradiente de presiones viene dado por la ecuación de Hagen-Poiseuille

$$Q = -\frac{\pi D^4(x)}{128\mu} \frac{d(p + \rho gz)}{dx}. \quad (5)$$

Las regiones de entrada y salida donde el flujo no es casi unidireccional, y por tanto (5) no es válida, poseen longitudes que son del orden de  $ReD_o$ , que son muy pequeñas frente a la longitud  $L$  del conducto si  $ReD_o/L \ll 1$ . Por esta razón se desprecia la caída de presión en estas zonas y como condiciones de contorno en los extremos del conducto se impondrá que la presión reducida es la de los correspondientes depósitos. De la fluidostática se tiene a la entrada del conducto  $p(0) + \rho gz(0) = p_a + \rho gH(t)$  mientras que a la salida  $p(L) + \rho gz(L) = p_a + \rho gh(t)$ . Integrando (5) entre la entrada y la salida del conducto se tiene

$$-\int_{p_a + \rho gH}^{p_a + \rho gh} d(p + \rho gz) = \frac{128\mu Q}{\pi} \int_0^L \frac{dx}{D^4(x)} =$$

$$[p_a + \rho gh(t)] - [p_a + \rho gH(t)] = \rho g[H(t) - h(t)] = \frac{128\mu QL}{3\alpha\pi D_o^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^3} \right]; \quad (6)$$

obsérvese que para el caso de un conducto de sección circular constante se obtiene

$$\rho g(H - h) = \frac{128\mu QL}{\pi D_o^4}. \quad (7)$$

Sustituyendo en (6) las ecuaciones de conservación de la masa en uno de los depósitos  $Q = -A_d dH/dt$  y la conservación de la masa en ambos depósitos  $H(t) + h(t) = H_o + h_o$  se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la altura de líquido en el depósito,

$$-\rho g[2H - (H_o + h_o)] = \frac{128\mu A_d L}{3\alpha\pi D_o^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^3} \right] \frac{dH}{dt}, \quad (8)$$

con la condición inicial  $H(0) = H_o$ .

Si se define  $\tau$ , que tiene dimensiones de tiempo, en la forma

$$\tau = \frac{128\mu A_d L}{3\rho g\alpha\pi D_o^4} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^3} \right]$$

y la altura  $\hat{H} = (H_o + h_o)/2$ , la anterior ecuación se reduce a

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{H - \hat{H}}{\tau},$$

cuya integración proporciona la altura de la superficie libre en el depósito de la izquierda  $H - \hat{H} = (H_o - \hat{H}) e^{-t/\tau}$ . La altura del otro depósito y el caudal se obtienen fácilmente a partir de la última expresión. Obsérvese que aunque el tiempo que tarda en alcanzarse la altura de equilibrio  $\hat{H}$  es formalmente infinito, en la práctica esta altura se alcanza una vez transcurrido un tiempo del orden de 2 o 3 veces el tiempo  $\tau$ . Como curiosidad, es interesante ver la variación del tiempo característico  $\tau$  con el ángulo del conducto; en particular si se desarrolla la expresión de  $\tau$  en serie de Taylor para ángulos  $\alpha$  pequeños se obtiene

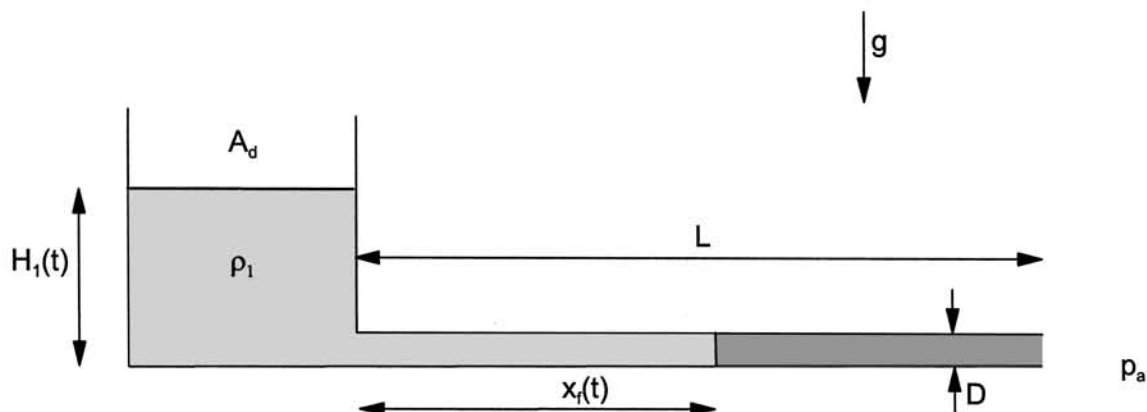
$$\tau_{\alpha \ll 1} \sim \frac{128\mu A_d L}{\rho g \pi D_o^4} (1 - 4\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)), \quad (9)$$

se observa que el tiempo de vaciado es mayor para valores negativos de  $\alpha$  (conducto convergente) que para valores positivos (conducto divergente). Esto es, para el mismo gradiente de presiones, el caudal que fluye por el conducto es mayor para un conducto convergente.

**Problema 5.2**

Un depósito de área  $A_d$  abierto a la atmósfera por su parte superior está u sección circular constante, de longitud  $L$  y diámetro  $D$  ( $D \ll L$ ,  $D^2 \ll A_d$ ), que se abre también a la atmósfera por el otro extremo. Inicialmente el depósito  $\rho_1$  y viscosidad  $\mu_1$  que lo llena hasta una altura  $H_o$  mientras que el conducto, que está cerrado a la salida diafragma, está lleno de otro líquido de densidad  $\rho_2$  y viscosidad  $\mu_2$ , inmisible con el primero. Suponer que  $A_d H_o > \pi D^2 L / 4$ . Se supondrá también que la tensión superficial  $\zeta$  entre ambos líquidos es tal que el número de Bond es grande frente a la unidad,  $\rho g D^2 / \zeta \gg 1$ , y, por tanto, las fuerzas de tensión superficial son despreciables frente a las gravitatorias e En un instante dado se rompe el diafragma y los líquidos de viscosidad dominantes.

1. Criterios requeridos para que el movimiento sea c
2. Calcular la posición de la interfase  $x_f(t)$  y la altura de la superficie libre en el depósito como funciones del tiempo.
3. Tiempo que tarda la interfase en abandonar el co
4. Evolución posterior de la altura de la superficie lil



Resolución:

**Apartado 1.-**

Al ser el movimiento con fuerzas de viscosidad dominante

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia temporal}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V / t_o}{\mu_2 V / D^2} \sim \frac{\rho_2 D^2}{\mu_2 t_o} \ll 1, \quad (1)$$

donde  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes

varían porque varía la posición de la interfase y su tiempo

por otra parte,  $Q$  puede ser estimado a partir de la ecuación de Hagen-Poi:

y si se sustituyen los valores característicos de  $t_o$  y  $Q$  en (1) se obtiene

$$t_o \sim L / V \sim D^2 L / Q;$$

$$Q \sim (D^4 / \mu_2) (\rho_1 g H_o / L),$$

$$\frac{\rho_1 \rho_2 D^4 g H_o}{\mu_2^2 L^2} \ll 1. \quad (2)$$

Por otra parte, las fuerzas de inercia convectivas son despreciables frente a las de viscosidad si

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia convectiva}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V^2/L}{\mu_2 V/D^2} \sim ReD/L \ll 1; \quad (3)$$

es fácil ver que (3) conduce también a la desigualdad (2).

### Apartado 2.-

Suponiendo que las propiedades de ambos líquidos y que los parámetros geométricos del problema son tales que se satisface la desigualdad (2) el movimiento es con viscosidad dominante y la relación entre el caudal y el gradiente de presiones viene dado por la ecuación de Hagen-Poiseuille. Si se integra esta ecuación para la región ocupada por el líquido 1, esto es, entre la entrada y la interfase se tiene

$$\int_0^{x_f} \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q \, dx = - \int_{p_a + \rho_1 g H}^{p^*} dp \Rightarrow \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q x_f = p_a + \rho_1 g H - p^*, \quad (4)$$

donde  $x_f(t)$  es la posición de la interfase medida desde la entrada y  $p^*$  es la presión en la interfase que es desconocida. Integrando la ecuación de Hagen-Poiseuille para la columna de líquido 2, entre la interfase y la salida se tiene

$$\int_{x_f}^L \frac{128\mu_2}{\pi D^4} Q \, dx = - \int_{p^*}^{p_a} dp \Rightarrow \frac{128\mu_2}{\pi D^4} Q (L - x_f) = p^* - p_a, \quad (5)$$

y la presión  $p^*$  se elimina sin más que sumar miembro a miembro las últimas ecuaciones en (4) y (5)

$$\frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q x_f + \frac{128\mu_2}{\pi D^4} Q (L - x_f) = \rho_1 g H. \quad (6)$$

La ecuación de continuidad en el depósito y en el conducto muestra que

$$Q = -A_d \frac{dH}{dt} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dx_f}{dt}, \quad (7)$$

cuya integración con la condición inicial  $t = 0$   $H = H_o$  y  $x_f = 0$  proporciona

$$A_d(H_o - H) = \frac{\pi D^2}{4} x_f. \quad (8)$$

La ecuación que rige la posición de la interfase  $x_f$  en función del tiempo se obtiene de la combinación de (6) con (7) y (8),

$$32D^2 \frac{dx_f}{dt} [\mu_2 L + (\mu_1 - \mu_2)x_f] = \rho g \left( H_o - \frac{\pi D^2}{4A_d} x_f \right). \quad (9)$$

Su solución, dada la condición inicial  $x_f(0) = 0$ , es

$$-x_f(t) - \left( \frac{\mu_2 L}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{4H_o A_d}{\pi D^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{\pi D^2 x_f(t)}{4H_o A_d} \right) = \frac{\pi \rho g}{128A_d(\mu_1 - \mu_2)} t, \quad (10)$$

que a su vez, usando (8), permite calcular la evolución temporal de la superficie libre  $H(t)$

$$H(t) - H_o - \left( \frac{\mu_2 L}{\mu_1 - \mu_2} \frac{\pi D^2}{4A_d} - H_o \right) \ln \left( \frac{H(t)}{H_o} \right) = \frac{\pi^2 \rho g D^2}{512A_d^2(\mu_1 - \mu_2)} t. \quad (11)$$

### Apartado 3.-

El tiempo que tarda en alcanzar la interfase la salida  $t_L$  se calcula simplemente de (10) particularizándola en  $x_f = L$

$$t_L = \frac{128A_d(\mu_1 - \mu_2)}{\pi \rho g} \left[ -L - \left( \frac{\mu_2 L}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{4H_o A_d}{\pi D^2} \right) \ln \left( 1 - \frac{\pi D^2 L}{4H_o A_d} \right) \right]. \quad (12)$$



**Apartado 4.-**

Una vez que la interfase abandona el conducto por éste circula un único fluido por lo que ahora se debe cambiar en (4) los límites superiores de las integrales en el primer y segundo miembro por  $L$  y  $p_a$ , respectivamente,

$$\int_0^L \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q \, dx = - \int_{p_a + \rho_1 g H}^{p_a} dp \quad \Rightarrow \quad \frac{128\mu_1}{\pi D^4} Q L = \rho_1 g H, \quad (13)$$

La ecuación diferencial se halla del resultado anterior, volviendo a tener en cuenta que  $Q = -A_d dH/dt$ ,

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} = - \frac{\pi g D^4}{128 A_d \nu_1}, \quad (14)$$

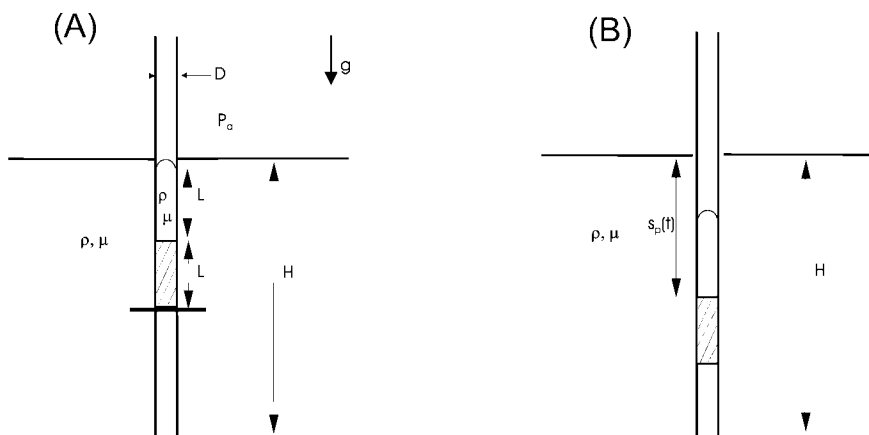
de cuya integración, con la condición inicial  $H_L = H(t_L)$  calculada mediante (11), se obtiene

$$H(t) = H_L \exp \left( - \frac{\pi g D^4 (t - t_L)}{128 A_d \nu_1} \right). \quad (15)$$

**Problema 5.3**

La figura A muestra un tubo vertical de diámetro  $D$  abierto por sus dos extremos, con el inferior sumergido a una profundidad  $H$  en un recipiente de grandes dimensiones que contiene un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . El tubo contiene una pieza sólida de altura  $L \gg D$  y masa despreciable que puede deslizarse sin rozamiento por el interior del tubo, siendo el juego pieza-tubo tal que no puede circular líquido a través de él. Sobre la pieza descansa una columna de líquido, el mismo que el del recipiente, también de altura  $L$ , cuya parte superior está en contacto con la atmósfera. Se supondrá que  $\zeta$  es la tensión superficial aire-líquido y que el ángulo de contacto tubo-líquido es  $\theta = 180^\circ$ . Inicialmente el sistema está en reposo con la pieza apoyada sobre un diafragma, que la separa del líquido del recipiente (ver figura A), situado a una profundidad  $2L$  medida desde la superficie libre del recipiente. En un instante dado, se rompe el diafragma y se origina un movimiento en el interior del conducto que se desea analizar. Suponer que el movimiento del líquido en el conducto es con fuerzas de viscosidad dominantes, y que la longitud del tubo es tal que la pieza sólida está siempre dentro del tubo.

1. Si las fuerzas gravitatorias son despreciables frente a las de tensión superficial  $\rho g D^2 / \sigma \ll 1$ , se desea conocer:
  - a) Condición que deben cumplir los datos del problema para que se produzca un movimiento descendente de la pieza (ver figura B).
  - b) Evolución temporal de la distancia  $s_p(t)$  entre la cara superior de la pieza y la superficie libre del recipiente, indicando su valor de equilibrio.
2. Si  $\rho g D^2 / \sigma \gg 1$  y el sistema parte de la situación inicial de la figura A, calcular la evolución temporal de la distancia  $s_p(t)$  entre la cara superior de la pieza y la superficie libre del recipiente, indicando su valor de equilibrio.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La pieza se sumergirá si en el instante en el que se retira el diafragma las fuerzas que actúan sobre la pieza no están equilibradas y la resultante no nula está dirigida según la gravedad. Si  $p_1$  es la presión del líquido debajo de la interfase,  $p_1 = p_a + 4\zeta/D$ ,  $p_2 = p_1 + \rho g L$  es la presión del líquido justo encima de la pieza sólida y  $p_3 = p_a + 2\rho g L$  es la presión del líquido debajo de la misma, se tiene que, por ser su masa despreciable, la pieza se moverá hacia abajo si

$$p_2 = p_a + 4\frac{\zeta}{D} + \rho gL > p_3 = p_a + 2\rho gL, \quad \text{o bien si,} \quad 4\frac{\zeta}{D} > \rho gL. \quad (1)$$

La posición de equilibrio  $s_{pe}$  de la pieza se obtiene sin más que igualar las presiones  $p_2$  y  $p_3$  encima y debajo de la pieza supuesta ésta en equilibrio

$$p_a + \frac{4\zeta}{D} + \rho gL = p_a + \rho g(L + s_{pe}); \quad (2)$$

por tanto,

$$s_{pe} = \frac{4\zeta}{\rho gD}. \quad (3)$$

Si el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes deben cumplirse los criterios dados en los problemas 1 y 2 de este capítulo

$$\frac{\rho D^2}{\mu t_o} \sim \frac{\rho V D^2}{\mu L} \sim \frac{\rho Q}{\mu L} \ll 1 \quad \text{con} \quad Q \sim \frac{D^4}{\mu(H-L)} \left( \frac{4\zeta}{D} - \rho gL \right), \quad (4)$$

donde el caudal se ha estimado a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille. Para calcular la ecuación que gobierna la evolución de la interfase, se calcularán las presiones  $p_2$  y  $p_3$  en función del caudal que circula por el conducto mediante la relación de Hagen-Poiseuille aplicado a los dos tramos de líquido en el conducto (por encima y por debajo de la pieza). Así, para la columna líquida superior

$$\frac{128\mu}{\pi D^4} \int_{s_p-L}^{s_p} dx = - \int_{p_a+4\zeta/D+\rho g[H-(s_p-L)]}^{p_2+\rho g(H-s_p)} d(p + \rho gz), \quad (5)$$

donde el origen de  $z$  se ha tomado en el extremo inferior del conducto y  $x$  es la coordenada cuya dirección es la del movimiento del líquido y su origen la superficie libre exterior al conducto. De (5) se obtiene

$$p_2 = p_a + \frac{4\zeta}{D} + \rho gL - \frac{128\mu}{\pi D^4} QL. \quad (6)$$

Análogamente,

$$\frac{128\mu}{\pi D^4} \int_{s_p+L}^H dx = - \int_{p_3+\rho g[H-(s_p+L)]}^{p_a+\rho gH} d(p + \rho gz), \quad (7)$$

y

$$p_3 = p_a + \rho g(s_p + L) + \frac{128\mu}{\pi D^4} Q(H - s_p - L). \quad (8)$$

Al ser la masa de la pieza sólida despreciable  $p_2 = p_3$  obteniéndose la ecuación que da la posición de la pieza como función del tiempo simplemente por la resta de las ecuaciones (6) y (8); teniendo en cuenta que  $Q = (\pi D^2/4)(ds_p/dt)$  se obtiene finalmente

$$(H - s_p) \frac{ds_p}{dt} = \frac{D^2}{32\mu} \left( \frac{4\zeta}{D} - \rho g s_p \right), \quad (9)$$

cuya solución, teniendo en cuenta la condición inicial  $s_p(0) = L$ , es

$$(s_p - L) - \left( H - \frac{4\zeta}{\rho gD} \right) \ln \frac{4\zeta - \rho gD s_p}{4\zeta - \rho gDL} = \frac{\rho gD^2}{32\mu} t. \quad (10)$$

**Apartado 2.-**

Si  $\rho g D^2 / \sigma \gg 1$ , las fuerzas de tensión superficial son despreciables y el líquido ascenderá por el tubo. La posición de equilibrio final de la pieza  $s_{pe}$  se obtiene de la igualdad de las presiones sobre la pieza calculadas éstas mediante fluidostática

$$p_2 = p_a + \rho g L = p_a + \rho g (L + s_{pe}) = p_3, \quad (11)$$

y

$$s_{pe} = 0. \quad (12)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en el caso anterior es fácil obtener la ecuación que gobierna el movimiento de la pieza

$$(H - s_p) \frac{ds_p}{dt} = \frac{D^2 \rho g s_p}{32\mu}, \quad (13)$$

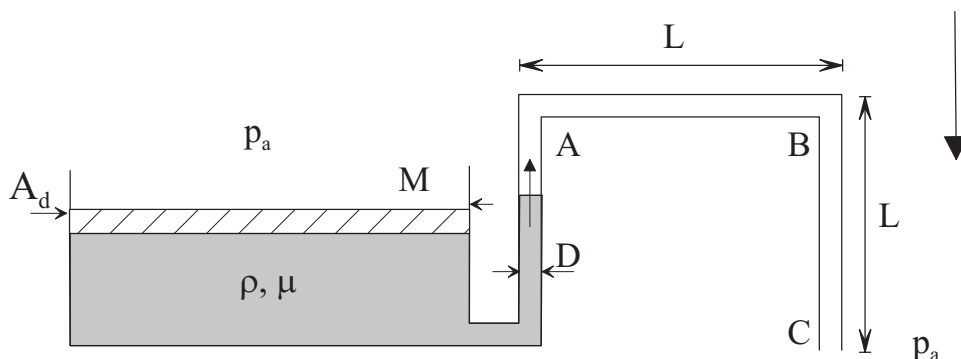
cuya integración con la condición inicial  $s_p(0) = L$  proporciona

$$H \ln \left( \frac{L}{s_p} \right) - (L - s_p) = \frac{\rho g D^2}{32\mu} t. \quad (14)$$

**Problema 5.4**

El dispositivo de la figura consta de un depósito de sección  $A_d$ , de cuya base parte un conducto en forma de U invertida con tres tramos iguales de longitud  $L$  y diámetro  $D$  ( $D \ll L$ ); el tramo de conexión entre depósito y conducto en U posee una longitud mucho menor que  $L$ . Un émbolo de masa  $M$  y área  $A_d$  está en contacto con un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  que llena el depósito. El émbolo puede deslizarse sin rozamiento sobre las paredes del depósito bajo la acción de la gravedad. Inicialmente, el émbolo está situado a una altura  $H_o < L$  por encima del fondo del depósito y un diafragma cierra la salida del depósito, de modo que el líquido y el émbolo están en reposo. En un cierto instante, se rompe el diafragma y el líquido fluye a través del conducto en un régimen en el que las fuerzas de viscosidad son dominantes. Supongan en sus cálculos que las fugas a través del juego émbolo-depósito son despreciables; supongan también que la geometría del sistema es tal que se satisface la desigualdad  $A_d H_o \gg L D^2$ . Se desea calcular:

1. Criterios que se deben satisfacer para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominantes.
2. Masa mínima  $M_{min}$  del émbolo para que el líquido alcance el extremo superior  $A$  del primer tramo.
3. Suponiendo  $M > M_{min}$ , calcular el tiempo necesario para que la interfase aire-líquido alcance el extremo  $A$ .
4. Calcular los tiempos necesarios para que la interfase alcance los puntos  $B$  y  $C$  del conducto.
5. Analizar la descarga posterior del depósito.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La ecuación que determina el movimiento del émbolo es

$$-M \frac{d^2 H}{dt^2} = Mg - (p_d - p_a) A_d, \quad (1)$$

donde  $p_d$  es la presión que el líquido ejerce sobre la cara inferior del émbolo. Naturalmente, la resolución del problema mecánico (1) requiere resolver el problema del movimiento del líquido a través del conducto.

Los criterios que deben cumplirse para que el movimiento del líquido en el conducto sea con fuerzas de viscosidad dominantes son

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia temporal}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V/t_o}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{D_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad (2)$$

y

$$\frac{\text{Fuerzas de inercia convectivas}}{\text{Fuerzas de viscosidad}} \sim \frac{\rho V^2/L}{\mu V/D_o^2} \sim \frac{V D_o}{\nu} \frac{D_o}{L} \sim Re \frac{D_o}{L} \ll 1 \quad (3)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática,  $t_o$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas y  $Re$  es el número de Reynolds del movimiento.

En la estimación de  $t_o$  debe tenerse en cuenta que las magnitudes fluidas varían debido a que la presión a la entrada del conducto varía porque varía la altura de líquido y también porque la interfase de separación líquido-gas varía su posición en el conducto invirtiéndose la fuerza en acelerar la columna de fluido cuya longitud es cada vez mayor. El tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas asociadas a la variación de la altura  $H(t)$  puede determinarse a partir de la ecuación de continuidad en el depósito

$$A_d \frac{dH}{dt} = -Q = -V \frac{\pi D^2}{4} \quad y \quad t_o \sim \frac{A_d H_o}{VL}, \quad (4)$$

donde  $V$  es la velocidad media característica del líquido en el conducto. Por otra parte, el orden de magnitud del otro tiempo característico de cambio de las magnitudes fluidas es el tiempo de residencia  $t_r$  que es del orden de  $L/V$ . El cociente entre ambos tiempos  $t_r/t_o$  es el denominado número de Strouhal y vale en este caso

$$\frac{t_r}{t_o} \sim \frac{L}{V t_o} \sim \frac{LD^2}{A_d H_o}, \quad (5)$$

que, de acuerdo con el enunciado es mucho menor que la unidad ya que se ha supuesto que el volumen del conducto, de orden de  $LD_o^2$ , es pequeño frente al volumen del depósito,  $A_d H_o$ . Esto significa que durante el llenado del conducto el tiempo característico de cambio de las magnitudes fluidas es  $t_r \sim L/V$  y cuando la interfase llega a la salida del conducto, la altura de la superficie en el depósito apenas ha variado; durante este proceso es lícito suponer que la altura del líquido en el depósito es constante y de valor  $H_o$ . Por el contrario, el proceso de vaciado del depósito ocurrirá en tiempos del orden de  $t_o$  y se puede considerar que el conducto está siempre lleno pues el tiempo que se ha empleado en su llenado es despreciable frente al tiempo de vaciado  $t_r \ll t_o$ . Obsérvese que cada escala de tiempo desempeña un papel distinto dependiendo del análisis que se desee efectuar.

Finalmente, para determinar si el líquido se mueve con viscosidad dominante durante el llenado del conducto es necesario estimar la velocidad media del líquido en el conducto o el caudal; esto puede hacerse a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille por suponer que el movimiento es con viscosidad dominante

$$Q \sim V D^2 \sim \frac{D^4}{\mu} \frac{\Delta(p + \rho g z)}{L} \sim \frac{D^4}{\mu} \frac{p_d + \rho g H_o - p_a}{L}. \quad (6)$$

Como  $t_o \gg t_r$ , durante el proceso de llenado del conducto, la posición del émbolo no varía con el tiempo y de la ecuación (1) se obtiene  $(p_d - p_a) = (Mg)/A_d$  y

$$V \sim \frac{D^2}{\mu} \frac{Mg + \rho g H_o A_d}{A_d L}, \quad (7)$$

que muestra que la velocidad es directamente proporcional a la suma de los pesos del émbolo y del líquido en el depósito. Introduciendo el valor estimado en (2) y teniendo en cuenta que, como se ha visto anteriormente, durante el proceso de llenado del conducto el tiempo característico de cambio  $t_o$  es del orden de  $t_r \sim L/V$  se obtiene

$$\frac{D^2}{\nu t_o} \sim D^2 V \nu L \sim \frac{D^4 (Mg + \rho g H_o A_d)}{\rho \nu^2 L^2 A_d} \ll 1, \quad (8)$$

que es la condición requerida para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes. Es fácil ver que si se introduce en (3) el valor estimado de la velocidad media se obtiene el mismo criterio que el dado en (8).

**Apartado 2.-**

Para analizar el movimiento de la columna líquida se parte, pues, de la ecuación de Hagen-Poiseuille

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{d(p + \rho g z)}{ds}, \quad (9)$$

cuya integración proporciona

$$\frac{128\mu Q}{\pi D^4} s = -(p + \rho g z) + C, \quad (10)$$

donde  $C$  es una constante de integración,  $s$  es la coordenada a lo largo del conducto y la altura  $z$  se mide a partir del fondo del depósito. Obsérvese que aunque (9) es una ecuación diferencial de primer orden se necesitan dos condiciones de contorno para determinar  $Q$  y la constante de integración  $C$ . Como siempre las condiciones de contorno se imponen a la entrada del conducto donde la presión y la altura son respectivamente  $p_d + \rho g H_o = p_a + \rho g H_o + Mg/A_d$  y  $z = 0$  y en la interfase líquido-aire situada en  $s = x(t)$  donde la presión es  $p = p_a$  y la altura es  $z[x(t)]$ . Obsérvese que la altura a la que se sitúa la interfase  $z[x(t)]$  depende del tramo donde en ese instante se sitúa la interfase. Así, para instantes en los cuales la interfase se localiza en el primer tramo,  $x < L$ , el valor de la altura a la que se sitúa la interfase es  $z = x$ . En efecto, particularizando (10) en la entrada al conducto y en la interfase y restando miembro a miembro las dos ecuaciones resultantes, para eliminar  $C$ , se obtiene

$$\frac{128\mu Q}{\pi D^4} x = \frac{Mg}{A_d} + \rho g(H_o - x), \quad (11)$$

que proporciona una de las relaciones entre el caudal  $Q$  y la posición de la interfase  $x$ . La otra relación la proporciona la ecuación de conservación de la masa en el conducto

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dx}{dt}. \quad (12)$$

Eliminando  $Q$  entre ambas se obtiene

$$\frac{32\mu}{D^2} x \frac{dx}{dt} = \frac{Mg}{A_d} + \rho g(H_o - x), \quad (13)$$

que es la ecuación que determina la posición de la interfase con el tiempo mientras ésta se localiza en el primer tramo. Obsérvese que si el segundo miembro de (13) se anula para  $x = L$  se obtiene la masa mínima que debe poseer el émbolo para que la interfase alcance la altura  $L$ ; se tiene entonces

$$M_{min} = (L - H_o)\rho A_d. \quad (14)$$

**Apartado 3.-**

La integración de (13) con la condición inicial  $x(0) = 0$  proporciona la posición de la interfase como función del tiempo

$$\frac{\rho g D^2}{32\mu} t = \int_0^x \frac{x \, dx}{A - x} = -x + A \ln \frac{A}{A - x}, \quad (15)$$

donde por comodidad se ha definido  $A = H_o + Mg/(\rho A_d)$ . En el supuesto que la masa  $M$  del émbolo sea mayor que  $M_{min}$ , el tiempo  $t_A$  necesario para que la interfase alcance la posición  $x = L$  es

$$\frac{D^2 \rho g}{32\mu} t_A = \int_0^L \frac{x \, dx}{A - x} = -L + A \ln \frac{A}{A - L}. \quad (16)$$

**Apartado 4.-**

Cuando la interfase se localiza en el segundo tramo,  $L < x < 2L$ , la altura a la que se sitúa ésta es constante y dada por  $z(x) = L$ . Es fácil ver que el movimiento de la interfase se obtiene sin más que retener que sustituir en el segundo miembro de (13) la altura  $x$  de la interfase por la nueva altura  $L$

$$\frac{32\mu}{D^2} x \frac{dx}{dt} = \rho g(A - L); \quad (17)$$

su integración entre  $x = L$  y  $x = 2L$  proporciona el tiempo  $t_B$  requerido para que la interfase alcance la última de las posiciones

$$\frac{D^2 \rho g}{32\mu} (t_B - t_A) = \int_L^{2L} \frac{x dx}{A - L} = \frac{3L^2}{2(A - L)}. \quad (18)$$

Por último, cuando la interfase se sitúa en el tercer tramo,  $2L \leq x \leq 3L$ , la expresión de la altura de ésta satisface la relación,  $x + z(x) = 3L$ , por lo que la ecuación diferencial que rige el movimiento de la interfase en dicho tramo es

$$\frac{32\mu}{D^2} x \frac{dx}{dt} = \rho g(A - 3L + x), \quad (19)$$

y su integración proporciona el tiempo necesario para que la interfase abandone el conducto

$$\frac{D^2 \rho g}{32\mu} (t_C - t_B) = \int_{2L}^{3L} \frac{x dx}{A - 3L + x} = L + (A - 3L) \ln \frac{A - L}{A}. \quad (20)$$

**Apartado 5.-**

Para el análisis de la descarga del depósito, la integración de la ecuación de Hagen-Poiseuille entre la entrada y salida del conducto, donde las condiciones de contorno son respectivamente  $p(0) + \rho g z(0) = p_d + \rho g H$  y  $p(3L) + \rho g z(3L) = p_a$ , proporciona

$$\frac{128\mu Q}{\pi D^4} 3L = p_d + \rho g H - p_a = \frac{M}{A_d} \left( g + \frac{d^2 H}{dt^2} \right) + \rho g H, \quad (21)$$

para determinar  $H$  y  $Q$  como funciones del tiempo. El problema se cierra haciendo uso de la ecuación de conservación de la masa en el depósito

$$A_d dH/dt = -Q. \quad (22)$$

Si se sustituye (22) en (21) se obtiene una ecuación lineal de segundo orden para determinar la altura del émbolo como función del tiempo

$$B \frac{d^2 H^*}{d\tau^2} + \frac{dH^*}{d\tau} + H^* = 0, \quad (23)$$

donde para simplificar la ecuación se han introducido las variables y parámetros adimensionales siguientes

$$H^* = \frac{H + m}{H_o}, \quad \tau = \frac{t}{t_c} \quad t_c = \frac{384\mu A_d L}{\pi \rho g D^4}, \quad m = \frac{M}{\rho A_d}, \quad \text{y} \quad B = \frac{\pi^2 M \rho g D^8}{(384\mu L)^2 A_d^3}.$$

Obsérvese que cuanto menor sea el parámetro adimensional  $B$  mayor importancia tendrá las fuerzas viscosas que se establecen en el conducto frente a la inercia del émbolo.

La integración de (23) con las condiciones de contorno  $H^*(0) = \frac{H_o + m}{H_o} = 1 + \alpha$  y  $dH^*/d\tau|_{\tau=0} = 0$  proporciona

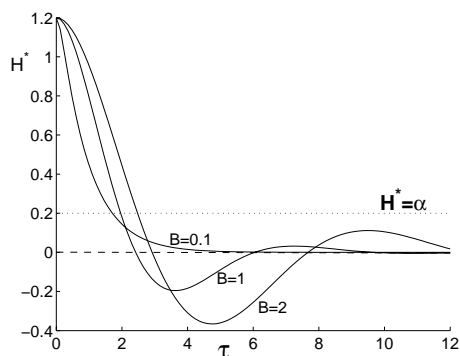
$$H^* = \frac{1 + \alpha}{r_2 - r_1} (r_2 e^{r_1 \tau} - r_1 e^{r_2 \tau}), \quad (24)$$

donde

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4B}}{2B} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4B}}{2B}$$

son las raíces de la ecuación característica de la ecuación (23).





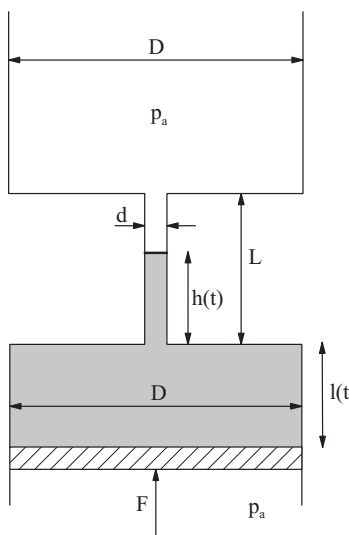
En la figura adyacente se muestra la influencia de la inercia del émbolo,  $B$ , en su movimiento para el caso particular de  $\alpha = m/H_o = 0,2$ . Obsérvese que el depósito se vacía y el émbolo llega a su tope para  $H^* = \alpha$ , así que valores de  $H^*$  inferiores a  $\alpha$  no se corresponden con situaciones físicas reales. No obstante se han dibujado para ver la diferencia entre movimientos amortiguados,  $B \leq 1/4$ , que corresponde a valores reales de  $r_1$  y  $r_2$  y otros oscilatorio-amortiguados,  $B > 1/4$ , que corresponde a números imaginarios para  $r_1$  y  $r_2$ . En la figura se observa que cuanto mayor es  $B$  mayor es el tiempo requerido para vaciar el depósito. Físicamente corresponde a que el émbolo posee tanta inercia que tarda un tiempo grande en alcanzar velocidad. Así, el émbolo actúa de freno del movimiento pues requiere que parte del trabajo

de su peso y de la energía potencial del líquido se invierta en aumentar su energía cinética. Obsérvese que cualquiera que sea el valor de  $B$ , la velocidad del émbolo es no nula cuando el émbolo alcanza el fondo del depósito.

**Problema 5.5**

Un conducto vertical de longitud  $L$  y diámetro  $d$ ,  $d \ll L$ , conecta dos depósitos de diámetro  $D$ ,  $D \gg d$ . El depósito superior está abierto a la atmósfera, mientras que el inferior, que contiene un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  está limitado en su parte inferior por un émbolo de masa  $M$  que desliza sin rozamiento. Inicialmente, el líquido, cuyo volumen es  $\Omega$ , llena completamente el depósito inferior mientras que tanto el depósito superior como el conducto están vacíos. Si en un cierto instante se acciona el émbolo hacia arriba con una fuerza constante  $F$  el líquido comienza a ascender por el conducto con un movimiento con fuerzas de viscosidad dominantes, se pide:

1. Criterios para que el movimiento del líquido en el conducto sea con fuerzas de viscosidad dominantes.
2. Ecuación diferencial y condiciones iniciales que determinan la evolución temporal de la interfase  $h(t)$  como función del tiempo y de las propiedades del líquido y de los datos geométricos del dispositivo. Suponiendo despreciable la masa del émbolo, calcular  $h(t)$  y el tiempo que tarda ésta en alcanzar el depósito superior.
3. Calcular  $H(t)$  de líquido en el depósito superior a partir del instante definido en 2. Calcular el instante que el émbolo termina su carrera.
4. Si en un instante  $t_r$ , comprendido entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , el proceso de subida del émbolo se detiene. Calcular la altura alcanzada  $H(t_r)$  y la fuerza necesaria para mantener la superficie libre a dicha cota  $F_r$ . Si en esta posición de reposo la fuerza que soporta el émbolo oscila entorno a la fuerza de equilibrio  $F = F_r + A \sin \omega t$  calcule la oscilación de la superficie libre.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Debido a la fuerza  $F$ , el líquido adquiere un movimiento en el conducto que será con fuerzas de viscosidad dominantes si se satisface que

$$\frac{d^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad y \quad Re \frac{d}{L} = \frac{V d}{\nu} \frac{d}{L} \ll 1, \quad (1)$$

## 134 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

donde  $V$  es el valor característico de la velocidad media del líquido. Dado que las magnitudes fluidas cambian por el cambio de la interfase, el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas es  $t_o = L/V$ . Es fácil comprobar que si se sustituye este valor en (1) ambos criterios se reducen al mismo. El orden de magnitud de la velocidad  $V$  puede estimarse a partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille teniendo en cuenta que la presión motriz es la fuerza por unidad de área aplicada al émbolo descontando, naturalmente, los pesos por unidad de área de émbolo y líquido que se oponen al movimiento

$$V d^2 \sim \frac{d^4}{\mu} \frac{F - g(M + \rho\Omega)}{D^2 L}; \quad (2)$$

sustituyendo el valor de  $V$  en (1) se obtiene finalmente

$$\frac{[F - g(M + \rho\Omega)]d^4}{\rho\nu^2 L^2 D^2} \ll 1. \quad (3)$$

### Apartado 2.-

Si se satisface el criterio dado en (3) el movimiento del líquido en el conducto es con fuerzas de viscosidad dominantes y la relación entre el caudal y el gradiente de presiones obedece la ecuación de Hagen-Poiseuille que, integrada entre la entrada del conducto  $s = 0$ , donde  $p + \rho gz = p_1$ , y la interfase  $s = h$ , donde  $p + \rho gz = p_a + \rho gh$ , proporciona

$$Q = -\frac{\pi d^4}{128\mu} \frac{d(p + \rho gz)}{ds} \Rightarrow \frac{32\mu h \dot{h}}{d^2} = p_1 - (p_a + \rho gh); \quad (4)$$

para obtener (4) se ha hecho uso de la condición de conservación de la masa  $Q = (\pi d^2/4)dh/dt = (\pi d^2/4)\dot{h}$ . La presión del líquido justo por encima del émbolo  $p_2$  se relaciona con la presión en el extremo inferior del conducto  $p_1$  por fluidostática ya que por ser tan dispares las áreas de depósito y conducto las velocidades en aquél son nulas en primera aproximación,

$$p_1 = p_2 - \rho gl(t) \quad (5)$$

donde  $l(t)$  es la diferencia de alturas entre el extremo inferior del conducto y el émbolo. La conservación del volumen de líquido proporciona la relación entre  $l(t)$  y  $h(t)$

$$\frac{\pi D^2}{4} l(t) + \frac{\pi d^2}{4} h(t) = \Omega, \quad \dot{l} = -\frac{d^2}{D^2} \dot{h}, \quad \ddot{l} = -\frac{d^2}{D^2} \ddot{h}. \quad (6)$$

Finalmente, el problema se cierra a través de la ecuación del movimiento del émbolo

$$F - Mg + (p_a - p_2) \frac{\pi D^2}{4} = -M\ddot{l}. \quad (7)$$

Eliminando  $p_2$ ,  $p_1$  y  $l$  entre las tres ecuaciones (4)-(7) se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la evolución de la interfase,

$$\frac{4Md^2}{\pi D^4} \ddot{h} + \frac{32\mu}{d^2} \dot{h} + \rho h \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) = \frac{4}{\pi D^2} (F - \Omega \rho g - Mg) \quad (8)$$

con condiciones iniciales  $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ .

Para un análisis más fácil de la ecuación diferencial anterior conviene adimensionalizarla definiendo las variables y parámetros

$$\eta = \frac{h}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad t_c = \frac{32\mu L}{\rho g d^2}, \quad A = \frac{M \rho g d^6}{256\pi \mu^2 L^2 D^4} \quad \text{y} \quad P = \frac{4(F - \rho g \Omega - Mg)}{\pi \rho g D^2 L}; \quad (9)$$

despreciando infinitésimos de orden  $(d/D)^2$  se obtiene la ecuación diferencial no lineal de segundo orden que gobierna la posición adimensional de la interfase en el conducto

$$A \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \eta \frac{d\eta}{d\tau} = P - \eta, \quad (10)$$

que hay que integrar sujeta a las condiciones iniciales  $\eta(0) = 0$  y  $\dot{\eta}(0) = 0$ .

La resolución de la ecuación (10) se puede hacer numéricamente una vez que se especifican los valores de  $A$  y  $P$ . No obstante es instructivo realizar su integración para valores pequeños de la inercia del émbolo ( $A \ll 1$ ). En ese caso (10) se reduce en primera aproximación a

$$\eta \frac{d\eta}{d\tau} = P - \eta, \quad (11)$$

cuya integración con la condición inicial  $\eta(0) = 0$  proporciona

$$\int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{P - \eta} = \int_0^\tau d\tau \Rightarrow \tau = -\eta - P \ln \frac{P - \eta}{P}. \quad (12)$$

Obsérvese que la solución (12) proporciona velocidad infinita en el instante inicial ( $d\eta/d\tau|_{\tau=0} = \infty$ ) y, por tanto, no satisface la segunda condición inicial que requiere velocidad inicial nula. Lo anterior puede verse también desarrollando en serie la solución (12) para tiempos pequeños; se obtiene así  $\eta = \sqrt{2P\tau} + O(\tau)^{3/2}$ . Esto quiere decir que, independientemente de cuan pequeño sea el valor del parámetro  $A$ , la inercia del émbolo es importante para tiempos suficientemente próximos al instante inicial.

El intervalo de tiempo  $\tau_I$  durante el que la inercia es importante y el orden de magnitud del desplazamiento del émbolo  $\eta_I$  durante ese intervalo se obtienen sin más que hacer del mismo orden en la ecuación (10) el término responsable del movimiento (que se supone de orden unidad), la amortiguación y la inercia; esto es

$$A \frac{\eta_I}{\tau_I^2} \sim \frac{\eta_I^2}{\tau_I} \sim 1 \Rightarrow \eta_I \sim A^{1/3} \quad y \quad \tau_I \sim A^{2/3}. \quad (13)$$

En efecto, definiendo  $\hat{\eta} = \eta/(PA)^{1/3}$  y  $\hat{\tau} = P^{1/3}\tau/A^{2/3}$ , (10) se reduce, salvo términos de orden  $A^{1/3}$ , a

$$\frac{d^2\hat{\eta}}{d\hat{\tau}^2} + \hat{\eta} \frac{d\hat{\eta}}{d\hat{\tau}} - 1 = 0, \quad (14)$$

que es una ecuación universal en el sentido de que no contiene ningún parámetro. Su integración una vez, sujeta a condiciones iniciales de posición y velocidad nulas, proporciona

$$\frac{d\hat{\eta}}{d\hat{\tau}} + \frac{\hat{\eta}^2}{2} - \hat{\tau} = 0; \quad (15)$$

una segunda integración numérica,<sup>3</sup> que se representa en la figura, describe los primeros instantes del movimiento.

Despreciando el corto intervalo temporal  $\tau_I$ , el tiempo adimensional  $\tau_1$  que tarda la interfase en salir del conducto

puede calcularse de (12)

$$\tau_1 = \tau(\eta = 1) = -1 - P \ln \left( \frac{P-1}{P} \right) \quad \text{o dimensionalmente,} \quad t_1 = \frac{32\mu L}{\rho g d^2} \left[ -1 - P \ln \left( \frac{P-1}{P} \right) \right]. \quad (16)$$

### Apartado 3.-

Para tiempos mayores que  $t_1$  el conducto está completamente lleno y el líquido alcanza una altura  $H$  en el depósito superior. El gasto que circula por el conducto se obtiene fácilmente integrando la ecuación de Hagen-Poiseuille entre la entrada del conducto  $s = 0$ , donde  $p + \rho g z = p_1 = p_2 - \rho g l$ , y la salida  $x = L$ , donde  $p + \rho g z = p_a + \rho g(H + L)$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dH}{dt} = -\frac{\pi d^4}{128\mu} \frac{d(p + \rho g z)}{ds} \Rightarrow \frac{32\mu L D^2 \dot{H}}{d^4} = p_2 - [p_a + \rho g(H + L + l)]. \quad (17)$$

<sup>3</sup> Puede hallarse una expresión analítica cerrada en términos de las poco habituales funciones de Airy. El lector interesado puede hallarla empleando software de lenguaje simbólico como, por ejemplo, *Mathematica*.

La conservación del volumen de líquido proporciona la relación entre  $H(t)$  y  $l(t)$

$$\frac{\pi D^2}{4}(l(t) + H(t)) + \frac{\pi d^2}{4}L = \Omega, \quad \dot{l} = -\dot{H}, \quad \ddot{l} = -\ddot{H}, \quad (18)$$

que combinada apropiadamente con (7) y (17) da lugar a la ecuación diferencial para  $H(t)$ ,

$$\frac{4M}{\pi D^2} \frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{32\mu D^2 L}{d^4} \frac{dH}{dt} = \frac{4F}{\pi D^2} - \frac{4Mg}{\pi D^2} - \rho g \left[ \frac{4\Omega}{\pi D^2} + \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)L \right], \quad (19)$$

que hay que integrar sujeta a las condiciones de contorno  $H(t_1) = 0$  y  $dH/dt|_{t=t_1} = (d^2/D^2)dh/dt|_{t=t_1}$ .

En la ecuación diferencial anterior, a diferencia de la ecuación (8), no existe dependencia de la posición de la interfase  $H$ ; ello es debido a que cuando la interfase alcanza el depósito superior la distancia entre la interfase libre y el émbolo permanece constante a lo largo del proceso como se desprende de (18).

Podemos proceder como el apartado anterior y adimensionalizar la ecuación diferencial. Introduciendo las variables y parámetros siguientes

$$\eta_H = \frac{H}{L}, \quad \tau_H = \frac{t}{t_{Hc}}, \quad t_{Hc} = \frac{32\mu D^2 L}{\rho g d^4} = \frac{D^2}{d^2} t_c \quad \text{y} \quad A_H = \frac{M \rho g d^6}{256 \mu^2 L^2 D^4} \frac{d^2}{D^2} = A \frac{d^2}{D^2}; \quad (20)$$

en las nuevas variables, la ecuación diferencial se escribe, salvo infinitésimo de orden  $(d^2/D^2)$ , como

$$A_H \frac{d^2 \eta_H}{d\tau_H^2} + \frac{d\eta_H}{d\tau_H} = P - 1 \quad (21)$$

y las condiciones iniciales como  $\eta_H(\tau_{H1}) = 0$  y  $d\eta_H/d\tau_H = P - 1$  donde  $\tau_{H1} = \tau_1 d^2/D^2$ .

Obsérvese que si la inercia es depreciable en el proceso de llenado del conducto ( $A \ll 1$ ) con mayor razón lo será en el proceso de llenado del depósito ( $A_H \ll A \ll 1$ ). Aún más, como se desprende de la comparación de los tiempos característicos ( $t_c/t_{Hc} \sim d^2/D^2 \ll 1$ ), el proceso de llenado del conducto tiene una duración despreciable frente al llenado del depósito pudiéndose suponer  $\tau_{H1} \simeq 0$ .

Una discusión semejante a la que se estableció en el apartado anterior referente a la posibilidad de satisfacer las condiciones iniciales si se desprecia un término de la ecuación diferencial puede realizarse en el presente apartado. Atendiendo a la física del proceso, existirá un periodo extremadamente corto en el cual la inercia del émbolo no puede ser despreciada. Una vez superado este transitorio inicial, el émbolo (y el fluido), alcanza la velocidad terminal constante correspondiente al equilibrio entre la fuerza aplicada (convenientemente minorada por el peso de émbolo y fluido) y las fuerzas viscosas que surgen en las paredes del conducto. De modo que, si la inercia es despreciable, la altura varía linealmente con el tiempo

$$\eta_H = (P - 1)\tau_H \quad \Rightarrow \quad H(t) = \frac{\rho g d^4}{32\mu D^2} (P - 1)t. \quad (22)$$

El instante  $t_2$  en el que el émbolo termina su carrera corresponde al momento en que  $H(t_2) = H_{final}$  que puede calcularse de (18) haciendo  $l(t_2) = 0$ :

$$t_2 = \frac{32\mu D^2}{\rho g d^4} \frac{1}{P - 1} \left( \frac{4\Omega}{\pi D^2} - \frac{Ld^2}{D^2} \right). \quad (23)$$

#### Apartado 4.-

Para un instante anterior al fin de carrera  $t_1 < t_r < t_2$  la fuerza necesaria para mantener el émbolo en reposo  $F_r$  viene dada, haciendo  $\dot{H} = \ddot{H} = 0$  en (19), por

$$F_r = Mg + \rho g \left( \Omega + \frac{L\pi D^2}{4} \right) \quad (24)$$

habiendo alcanzado una altura la interfase dada por  $H_r = H(t_r)$  dada por la ecuación (22).

Si a la fuerza  $F_r$  se le añade un término oscilatorio de la forma

$$F = F_r + A \operatorname{sen} \omega t. \quad (25)$$

La ecuación que rige la oscilación de la interfase  $H^*$  entorno a la posición de equilibrio  $H_r$  se obtiene de (19) haciendo  $H(t) = H_r + H^*(t)$  y  $F = F_r + A \operatorname{sen}(\omega t)$ ,

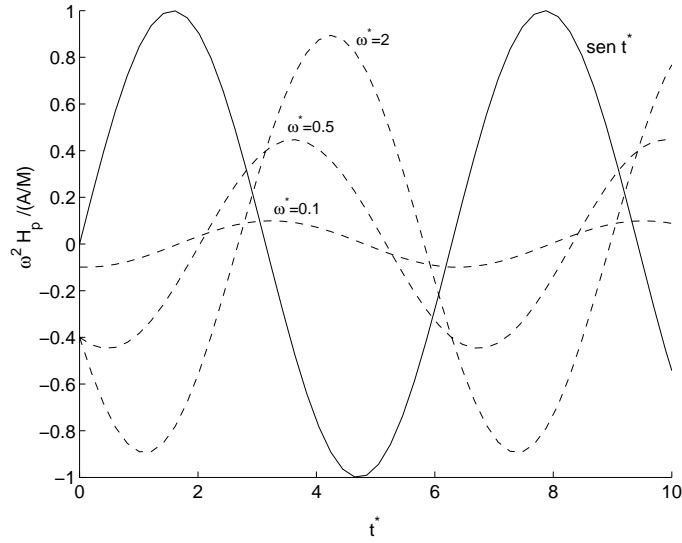
$$\ddot{H}^* + \underbrace{\frac{8\pi\mu D^4}{MLd^4}}_{=\alpha} \dot{H}^* = \frac{A}{M} \operatorname{sen} \omega t. \quad (26)$$

La búsqueda de soluciones oscilatorias pasa por ensayar en la ecuación diferencial (26) soluciones de la forma  $H_p^* = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$  siendo  $A$  y  $B$  constantes,

$$H_p^*(t) = -\frac{A/M}{\omega(\omega^2 + \alpha^2)} [\alpha \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t], \quad (27)$$

que se representa en la figura adjunta en términos de las variables adimensionales,  $t^* = \omega t$ ,  $\omega^* = \omega/\alpha$

$$\frac{\omega^2 H_p^*(t)}{A/M} = -\frac{\omega^*}{1 + \omega^{*2}} (\cos t^* + \omega^* \operatorname{sen} t^*) \quad (28)$$

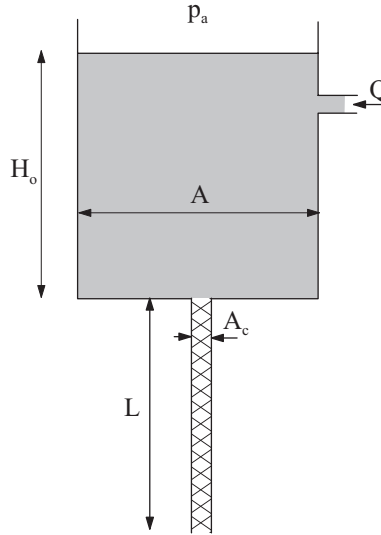


Como se aprecia en la gráfica, existe un desfase entre la fuerza impuesta (curva sólida) y el movimiento de la interfase (línea a trazos) siendo tanto mayor éste cuanto menor es la amortiguación ( $\omega^*$  crecientes), el máximo desfase,  $\pi/2$ , se alcanza en ausencia de amortiguación. Además, la amortiguación produce disipación por lo que la amplitud de la oscilación de la interfase libre tiende a disminuir a medida que ésta aumenta, de tal manera que, en ausencia de amortiguación ( $\omega^* \rightarrow \infty$ ) la amplitud es máxima.

**Problema 5.6**

Para determinar la permeabilidad  $\Pi$  de un medio poroso homogéneo, de porosidad  $\phi$  conocida, se diseña la instalación experimental esquematizada en la figura. Consta de un depósito de sección  $A$  inicialmente lleno, hasta una altura  $H_o$ , de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . En  $t = 0$  el depósito comienza a descargarse a través de un conducto vertical de longitud  $L$  y sección  $A_c$  que está relleno de un material poroso homogéneo cuya permeabilidad  $\Pi$  se desea determinar (considere el caso  $A_c \ll A$ ,  $A_c^{1/2} \ll L$  y  $AH_o > LA_c$ ). Al depósito se le puede suministrar también un caudal  $Q$  como se indica en la figura. Se pide:

1. Suponiendo que no se aporta caudal al depósito, determinar la posición de la interfase de líquido en el medio poroso.
2. Tiempo que tarda el líquido en llegar al extremo del conducto y altura de la superficie libre en el depósito en ese instante.
3. A partir de ese instante se suministra al depósito un caudal conocido de forma que la altura de líquido en el conducto permanezca constante. Determinar entonces la permeabilidad del medio poroso como función del gasto.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Inicialmente, el líquido comienza a fluir a través del medio poroso y forma una columna líquida cuya interfase se sitúa a una distancia  $x_f(t)$  de la entrada del conducto. La velocidad aparente del líquido en el medio poroso  $\mathbf{v}_p$  viene dada por la ley de Darcy

$$\mathbf{v}_p = -\frac{\Pi}{\mu} \nabla(p + \rho g z), \quad (1)$$

donde la distribución de presiones en el caso del movimiento de un líquido en el seno de un medio poroso obedece a la ecuación de Laplace, que para el caso de un medio axilsimétrico como el que nos ocupa se escribe

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (2)$$

donde  $x$  es la coordenada a lo largo del eje del conducto, medida desde la entrada del mismo y  $r$  es la coordenada radial.

Debido a la condición de contorno en la pared, que exige que la velocidad radial sobre ella sea nula, el líquido en el medio poroso adquiere una velocidad aparente que sólo tiene componente en la dirección del eje  $x$  y, por tanto, la presión es independiente de  $r$ ; integrando (2) se tiene  $p(x, t) = a + bx$ , donde las constantes  $a$  y  $b$  se determinan a partir de las condiciones de contorno:  $p[x_f(t)] = p_a$  y  $p(0, t) = p_a + \rho g H(t)$ . Consecuentemente, la distribución de presiones del líquido en el medio poroso viene dada por

$$p(x, t) = p_a + \rho g H(t) \left[ 1 - \frac{x}{x_f(t)} \right] \quad (3)$$

y la de presiones reducidas por

$$p(x, t) + \rho g z(x) = p_a + \rho g H(t) \left[ 1 - \frac{x}{x_f(t)} \right] - \rho g x. \quad (4)$$

La ecuación diferencial que modela el descenso del líquido viene dada por la ecuación de continuidad. En efecto, igualando el caudal descendido en el depósito con el caudal que discurre por el conducto relleno del medio poroso se obtiene

$$-A \frac{dH}{dt} = A_c v_p = A_c \frac{\Pi}{\mu} \rho g \left[ 1 + \frac{H(t)}{x_f(t)} \right]. \quad (5)$$

La ecuación anterior debe ser completada, para su resolución, con una relación entre la altura  $H(t)$  con la posición de la interfase  $x_f(t)$  que se obtiene de la conservación del volumen total de líquido

$$A[H_o - H(t)] = A_c x_f(t) \phi, \quad (6)$$

donde la porosidad  $\phi$  surge para tener en cuenta que el líquido se aloja únicamente en los poros del material poroso.<sup>4</sup> Combinando las ecuaciones (5) y (6) se llega a

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{A_c \Pi g}{A \nu} \left( 1 + \frac{\phi A_c}{A} \frac{H}{H_o - H} \right) \quad \text{con la condición inicial} \quad H(t=0) = H_o, \quad (7)$$

que puede ser integrada fácilmente para obtener:

$$H - H_o - \frac{H_o}{1 - A/A_c \phi} \ln \left[ \left( 1 - \frac{A}{\phi A_c} \right) \frac{H}{H_o} + \frac{A}{\phi A_c} \right] = \left( \frac{\phi A_c}{A} - 1 \right) \frac{A_c \Pi g}{A \nu} t. \quad (8)$$

Combinando la ecuación anterior con (6) se deriva la ecuación de la interfase  $x_f(t)$

$$-\frac{A_c \phi x_f}{A} - \frac{H_o}{1 - A/A_c \phi} \ln \left[ \left( 1 - \frac{A}{\phi A_c} \right) \left( 1 - \frac{A_c \phi x_f}{A H_o} \right) + \frac{A}{\phi A_c} \right] = \left( \frac{\phi A_c}{A} - 1 \right) \frac{A_c \Pi g}{A \nu} t. \quad (9)$$

## Apartado 2.-

El tiempo que tarda en llegar la interfase al final del conducto se obtiene particularizando la anterior ecuación para  $x_f = L$  siendo la altura de líquido en el depósito en dicho instante  $H(t_L) = H_o - \phi A_c L/A$ .

<sup>4</sup> Obsérvese que la ecuación (6) podría haberse obtenido a partir del hecho de que la interfase es una superficie fluida. En efecto, si  $F(x, t) \equiv x - x_f(t) = 0$  es una superficie fluida, entonces  $\partial F/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0$ ; por tanto  $-dx_f/dt + v/\phi = -dx_f/dt + (AdH/dt)/(\phi A_c) = 0$ . Se ha tenido en cuenta que la velocidad real del líquido en los poros es  $(1/\phi)$  veces la velocidad aparente del líquido en el medio poroso.



**Apartado 3.-**

Cuando el fluido ocupa completamente el conducto la distribución de presiones reducida del líquido en el conducto viene dada por

$$p(x, t) + \rho g z(x) = p_a + \rho g H(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \rho g x \quad (10)$$

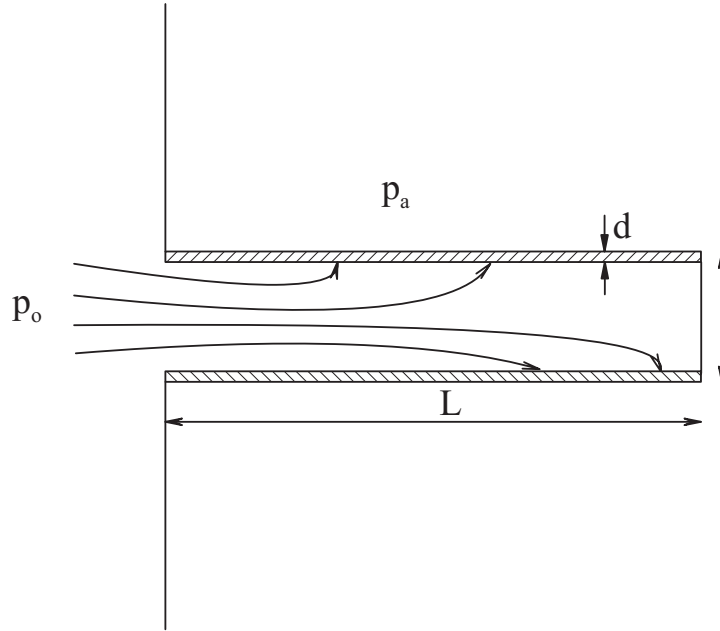
y el caudal es  $Q(t_L) = (\Pi/\mu)\rho g(H(t_L)/L + 1)$ .

Si a partir del instante  $t = t_L$  se aporta al depósito un caudal  $Q = Q(t_L)$  la permeabilidad del medio vendría dada por

$$\Pi = \frac{\mu L Q(t_L)}{\rho g [H(t_L) + L] A_c}. \quad (11)$$

**Problema 5.7**

Para filtrar un fluido, de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , se le hace circular a través de un tubo cilíndrico de diámetro  $D$  y longitud  $L$  que consta de una pared porosa de espesor  $d \ll D$  y permeabilidad  $\Pi$  como se muestra en la figura. El fluido, contenido a presión  $p_o$  ( $p_o > p_a$ ) en un depósito, alimenta el tubo por el extremo que está unido al depósito. El tubo tiene su otro extremo cerrado de modo que el fluido es forzado a través de las paredes porosas. Se desea calcular la distribución de presiones y caudales en el conducto en el supuesto de que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el movimiento fluido. Consideren primero el caso de que el fluido sea un líquido y después el caso en que se trate del movimiento de un gas a temperatura constante.

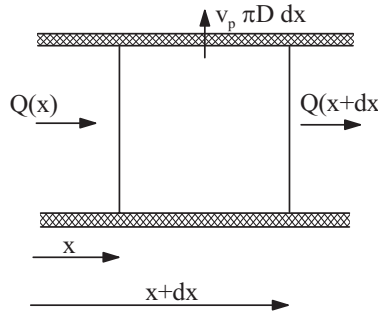
**Resolución:**

El movimiento del líquido en el conducto será con fuerzas de viscosidad dominante siempre que  $ReD/L \ll 1$  y  $D^2/\nu t_o \ll 1$ . En este caso se analizará la situación estacionaria que corresponde a  $t_o \simeq \infty$  con lo que el único requisito que debe de cumplir el movimiento fluido es  $ReD/L \sim VD^2/(\nu L) \ll 1$ . Si  $V$  y  $V_p$  responden a la velocidad media en el conducto y medio poroso respectivamente, ambas deben ser tales que el caudal se conserve  $Q \sim VD^2 \sim V_p LD$ ; teniendo en cuenta la ley de Darcy entonces

$$V \sim V_p \frac{L}{D} \sim \frac{\Pi p_o - p_a}{\mu} \frac{L}{d} \frac{L}{D} \quad \text{y} \quad Re \frac{D}{L} \sim \frac{\rho D \Pi p_o - p_a}{\mu^2} \frac{L}{d} \ll 1. \quad (1)$$

Naturalmente al ser el movimiento a lo largo del conducto con fuerzas de viscosidad dominantes los perfiles de velocidad serán de Hagen-Poiseuille.<sup>5</sup> A diferencia de lo que sucede si la pared es impermeable, el caudal no será constante entre secciones, sino que variará de una sección a otra a causa del que se escapa a través del medio poroso.

<sup>5</sup> Recuerde el lector que asumir perfiles parabólicos equivale implícitamente a asumir que la presión es homogénea en una sección; es decir, a despreciar sus variaciones en la sección debidas a las fuerzas másicas frente a las inductoras del movimiento  $\rho g D \ll p_o - p_a$ . Esta presunción es equivalente a asumir que el movimiento, y el filtrado, presenta simetría axial.



En efecto, si, como se muestra en la figura, se consideran dos secciones del conducto situadas a distancias  $x$  y  $x + dx$  de la entrada la conservación de la masa requiere que

$$\begin{aligned} -Q(x) + Q(x + dx) + v_p \pi D dx &= 0 \\ \Rightarrow \left\{ Q(x + dx) = Q(x) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \mathcal{O}(dx^2) \right\} \\ \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} + \pi D v_p &= 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{D^3}{128 \mu} \frac{dp}{dx} + v_p = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $v_p = v_p(x, D/2)$  es la velocidad aparente de fluido a través del medio poroso.

Para determinar  $v_p$  y, por tanto, la distribución de presiones  $p(x)$  en el conducto, hay que utilizar la ley de Darcy lo que precisa conocer la distribución de presiones  $p(x, r)$  en el medio poroso que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad (3)$$

con las condiciones de contorno  $p(x, D/2) = p(x)$  y  $p(x, D/2 + d) = p_a$ .

Es fácil comprobar que las variaciones axiales de presión son despreciables frente a las radiales ( $\partial/\partial x \ll \partial/\partial r$ ). En efecto, si se definen como nuevas variables radiales y axiales,  $\eta = (r - D/2)/d$  y  $\chi = x/L$ , la ecuación de Laplace se escribe

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \chi^2} + \frac{1}{D/2 + d\eta} \frac{1}{d^2} \frac{d}{d\eta} \left[ (D/2 + d\eta) \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = 0 \simeq \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \quad (4)$$

que muestra que la presión, salvo errores de orden  $d^2/L^2$ , en el medio poroso varía linealmente con la distancia  $\eta$ ,  $p = a\eta + b$ . Imponiendo las condiciones de contorno para la presión  $p(\eta = 0) = p(x)$  y  $p(\eta = 1) = p_a$  se obtiene la distribución de presiones en el medio poroso

$$p(x, r) = p(x) - \frac{p(x) - p_a}{d} (r - D/2) \quad (5)$$

y mediante la ley de Darcy

$$v_p(x) = \frac{\Pi}{\mu} \frac{p(x) - p_a}{d}. \quad (6)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores con (2) hallaremos la ecuación diferencial que gobierna la distribución de presiones en el conducto  $p(x)$ ,

$$\frac{128 \Pi}{D^3 d} \frac{d^2 p}{dx^2} - p + p_a = 0. \quad (7)$$

Las condiciones de contorno que se deben de imponer a la ecuación diferencial anterior son

$$p(x = 0) = p_o \quad \text{y} \quad Q(x = L) = 0 \quad (8)$$

o lo que es lo mismo,

$$p(x = 0) = p_o \quad \text{y} \quad \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (9)$$

Integrando (7) sujeta a las condiciones (9), se halla la distribución de presiones  $p(x)$

$$p(x) = p_a - (p_a - p_o) \cosh \left( (L - x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1} \quad (10)$$

y la distribución de caudales  $Q(x)$

$$Q(x) = (p_o - p_a) \frac{\pi D^4}{128\mu} \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \sinh \left( (L-x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (11)$$

En el caso de movimiento de gases se procede como en el caso anterior con la salvedad de que al imponer la condición de conservación de la masa hay que emplear el gasto  $G = \rho Q$  en lugar del caudal  $Q$ . En efecto, si el movimiento en el conducto es con viscosidad dominante [para ello se requiere que se satisfaga la condición (1)] el perfil de velocidades del gas en el conducto será uno parabólico de Hagen-Poiseuille y el caudal circulante  $Q$  en dicha sección vendrá dado por la expresión (5.7) y el gasto  $G(x)$  por

$$G(x) = \rho(x)Q(x) = \frac{\pi D^4}{128\mu} \rho(x) \frac{\partial p}{\partial x} = \{p = R_g \rho T\} = \frac{\pi D^4}{128\mu R_g T} \frac{\partial p^2/2}{\partial x}. \quad (12)$$

Obsérvese que si el movimiento del gas en el conducto es isoterma  $T = T_o$ , el gasto circulante varía linealmente con el gradiente del cuadrado de la presión a lo largo del conducto.

Como anteriormente, la variación del gasto en dos secciones de conducto separados una distancia  $dx$  es debida a la masa que se filtra a través del medio poroso

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \rho v_p \pi D = 0 \quad (13)$$

donde para determinar la velocidad aparente  $v_p$  hay que resolver primero la ecuación de Laplace para el cuadrado de la presión en el medio poroso dada por  $\nabla^2 p^2 = 0$ , con las condiciones de contorno  $p(x, D/2) = p(x)$  y  $p(x, D/2+d) = p_a$ . Análogamente al caso del líquido y empleando las mismas variables adimensionales  $\chi$  y  $\eta$ , la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{\partial p^2}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2(x, r) = p^2(x) - \frac{p^2(x) - p_a^2}{d} (r - D/2) \quad (14)$$

y

$$v_p = \frac{\Pi}{2\mu R_g T_o} \frac{1}{\rho} \frac{p^2(x) - p_a^2}{d}, \quad (15)$$

donde se ha supuesto que el proceso es isoterma y sucede a la temperatura del depósito  $T_o$ .

Si se supone que el movimiento del gas en el conducto es también isoterma y a temperatura  $T_o$ , entonces la ecuación diferencial para la presión en el conducto, obtenida de la sustitución de (12) y (15) en (13) y particularizando  $T = T_o$ , es

$$\frac{D^3 d}{128\Pi} \frac{d^2 p^2}{dx^2} - p^2(x) + p_a^2 = 0; \quad (16)$$

la integración de la ecuación anterior sujeta a las condiciones de contorno (9), proporciona

$$p^2(x) = p_a^2 - (p_a^2 - p_o^2) \cosh \left[ (L-x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right] \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (17)$$

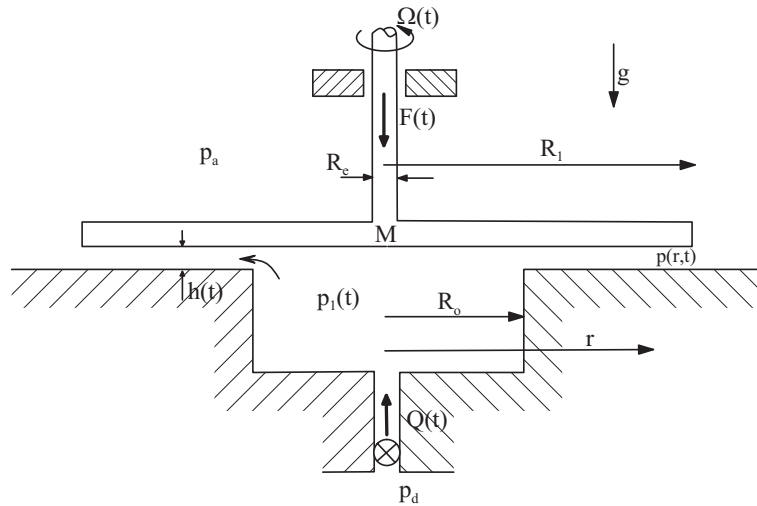
El gasto circulante se calcula de (12),

$$G(x) = (p_o^2 - p_a^2) \frac{\pi D^4}{254\mu R_g T_a} \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \sinh \left[ (L-x) \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right] \left[ \cosh \left( L \sqrt{\frac{dD^3}{128\Pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (18)$$

**Problema 5.8**

Un dispositivo como el que se muestra la figura, consiste en una pieza de masa  $M$  formada por un eje cilíndrico y un disco circular de radio  $R_1$ . Sobre el eje cilíndrico que gira con velocidad angular  $\Omega(t)$  actúa una fuerza vertical  $F(t)$ ; sendos cojinetes como los indicados en la figura inhiben cualquier otro movimiento del eje distinto del de rotación y traslación paralelamente a sí mismo. El dispositivo se apoya sobre una capa de lubricante que fluye entre el dispositivo y una pieza cilíndrica cuya superficie es paralela al disco. La pieza cilíndrica contiene en su parte central un depósito, también cilíndrico, al que se bombea un caudal  $Q(t)$  de un lubricante de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$ . Desde el depósito, el lubricante es forzado radialmente a través de ambas piezas hasta descargar finalmente a la atmósfera. Suponiendo que el espesor de la ranura  $h(t)$  es pequeño frente a su longitud  $h(t) \ll R_1 - R_o$  y que  $R_1 - R_o \sim R_o$ , se pide:

1. Distribución de presiones en la película líquida,  $p(r, t)$  y en el depósito  $p_1(t)$  como función de  $h(t)$  y de  $Q(t)$ .
2. Ecuación diferencial que proporcionan  $h(t)$  como función de los datos del problema y de las propiedades del lubricante. Describir la evolución del espesor para los siguientes casos particulares: a) Fuerza sobre el eje y caudal constantes,  $F(t) = F_o$  y  $Q(t) = Q_o$ ; b) Pequeñas perturbaciones respecto a la posición de equilibrio cuando la fuerza sobre el eje varía periódicamente en la forma  $F(t) = F_o + \epsilon A \cos(\omega t)$  con  $\epsilon \ll 1$ .
3. Par resistente  $C$  que hay que vencer cuando la pieza gira con velocidad angular constante.

Resolución:Apartado 1.-

Si  $r$  y  $\theta$  son las coordenadas en las direcciones radial y acimutal, los elementos de longitud en esas direcciones son  $g_r = g_\alpha = 1$  y  $g_\theta = g_\beta = r$ , la ecuación de Reynolds se escribe

$$r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} + \frac{\partial(q_\theta)}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

donde el caudal en la dirección radial  $q_r$  por unidad de longitud según  $\theta$  (caudal de Poiseuille) y el caudal según la dirección acimutal  $q_\theta$  por unidad de longitud  $r$  (caudal de Couette) son respectivamente

$$q_r = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{y} \quad q_\theta = \frac{\Omega r h}{2}. \quad (2)$$

Sustituyendo los valores de los caudales en la ecuación de Reynolds se obtiene

$$r \frac{dh}{dt} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (3)$$

que es una ecuación lineal de segundo orden para el cálculo de la presión y cuya integración proporciona

$$p(r, t) = 3\mu r^2 \frac{\dot{h}}{h^2} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4)$$

donde  $\dot{h} = \partial h / \partial t$  y  $C_1$  y  $C_2$  son constantes a determinar con las condiciones de contorno. En efecto, si se impone que en  $r = R_o$ ,  $p(R_o, t) = p_1(t)$  y que en  $r = R_1$   $p(R_1, t) = p_a$  se obtiene

$$p(r, t) = p_a + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (r^2 - R_1^2) + C_1 \ln \frac{r}{R_1}, \quad (5)$$

siendo

$$C_1 = \frac{1}{\ln(R_o/R_1)} \left( p_1 - p_a - \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (R_o^2 - R_1^2) \right). \quad (6)$$

Dado que el caudal que entra en la película líquida  $Q(t)$  es

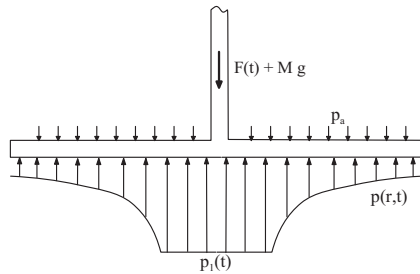
$$\frac{Q}{2\pi R_o} = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R_o} \Rightarrow Q = -\pi R_o^2 \dot{h} - \frac{\pi h^3}{6\mu} C_1, \quad (7)$$

la presión en el depósito  $p_1(t)$  y la presión en la ranura  $p(r, t)$  en función del caudal  $Q$  y del espesor de la película  $h(t)$  vendrá dadas por

$$p_1(t) = p_a + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (R_o^2 - R_1^2) + \frac{6\mu}{\pi h^3} \left( Q + \pi R_o^2 \dot{h} \right) \ln \left( \frac{R_1}{R_o} \right) \quad (8)$$

y

$$p(r, t) = p_a + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (r^2 - R_1^2) + \frac{6\mu}{\pi h^3} \left( Q + \pi R_o^2 \dot{h} \right) \ln \left( \frac{R_1}{r} \right), \quad (9)$$



### Apartado 2.-

El equilibrio de fuerzas sobre la pieza en la dirección vertical, véase figura, proporciona

$$M\ddot{h}(t) = \int_{R_o}^{R_1} [p(r, t) - p_a] 2\pi r dr + [p_1(t) - p_a] \pi R_o^2 - Mg - F(t), \quad (10)$$

y sustituyendo las expresiones (8) y (9) en (10) se obtiene

$$M\ddot{h}(t) = \frac{3\mu(R_1^2 - R_o^2)}{h^3} \left[ Q + \pi R_o^2 \dot{h} - \frac{\pi \dot{h}}{2} (R_1^2 - R_o^2) \right] - Mg - F(t), \quad (11)$$

que es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden para determinar  $h(t)$  una vez que  $Q(t)$ ,  $F(t)$  y las condiciones iniciales se hayan especificado. En el caso particular en que tanto la fuerza sobre el eje como

el caudal sean constantes,  $F(t) = F_o$ ,  $Q(t) = Q_o$ , la ecuación diferencial (11) proporciona para tiempos suficientemente grandes ( $\dot{h} = \ddot{h} = 0$ )

$$h_o = \left[ \frac{3\mu Q_o (R_1^2 - R_o^2)}{(F_o + Mg)} \right]^{1/3}; \quad (12)$$

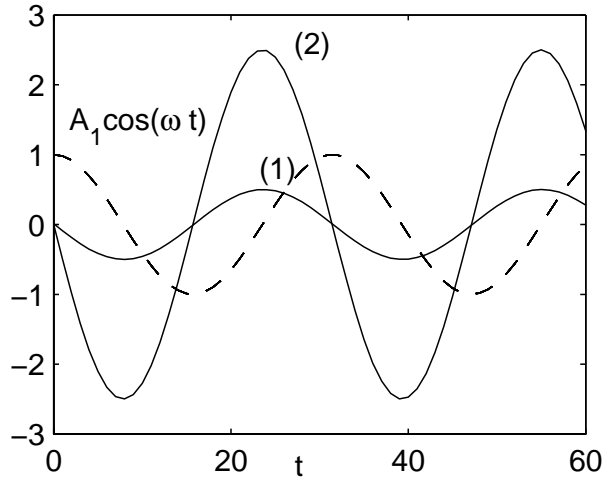
como se ve el valor estacionario del espesor de la película crece con el caudal y decrece al aumentar la fuerza sobre el eje y el peso del mismo.

Considérese ahora el caso de las pequeñas perturbaciones del espesor de la película de lubricante en torno al valor estacionario del apartado anterior  $h(t) \sim h_o + \epsilon h_1(t)$  originadas por una fuerza de la forma  $F(t) = F_o + \epsilon A \cos(\omega t)$  ( $\epsilon \ll 1$ ) y manteniendo fijo el caudal  $Q_o$ , con  $h_o$  dado por la ecuación (12). Si se introducen estos valores en la ecuación (11) se obtiene después de linealizar

$$\ddot{h}_1 + \gamma \dot{h}_1 + \omega_o^2 h_1 = -A_1 \cos \omega t, \quad (13)$$

donde  $h^{-3}$  se ha sustituido por los primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor  $h_o^{-3}[1 - 3\epsilon h_1/h_o + O(\epsilon^2)]$  y se han definido los valores siguientes

$$\gamma = \frac{3\pi\mu(R_1^2 - R_o^2)(R_1^2 - 3R_o^2)}{h_o^3 M}, \quad \omega_o^2 = \frac{9\mu Q_o(R_1^2 - R_o^2)}{h_o^4 M} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{A}{M}.$$



La ecuación (13) es la ecuación de un oscilador forzado amortiguado y, por tanto, admite soluciones del tipo

$$h_1(t) = \Re(Be^{i\omega t}), \quad (14)$$

donde la constante  $B$  se determina sin más que sustituir (14) en (13); se obtiene entonces

$$B = -\frac{A_1}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (15)$$

La figura muestra las oscilaciones en la fuerza,  $A_1 \cos \omega t$ , y en el espesor  $h_1(t)$ , para valores de  $\omega = 0,5$ ,  $A_1 = 1$ ,  $\omega_o = \omega$  y dos valores diferentes de  $\gamma$ : (1)  $\gamma = 2,5$  y (2)  $\gamma = 0,5$ . Obsérvese el desfase entre la causa forzadora y la respuesta del sistema. Obsérvese también que en el caso no amortiguado  $\gamma = 0$  se tiene que la amplitud de la oscilación tiende a infinito

cuando la frecuencia forzadora tiende a la frecuencia natural del sistema  $\omega_o \rightarrow \omega$ .

### Apartado 3.-

El par resistente viene dado por

$$C = \int_0^{2\pi} \int_{R_o}^{R_1} \vec{\tau} r^2 dr d\theta, \quad (16)$$

siendo  $\vec{\tau}$  el esfuerzo viscoso que el líquido ejerce sobre el disco en la dirección acimutal que en este caso vale

$$\vec{\tau} = -\mu \frac{\Omega r}{h_o} \mathbf{e}_\theta. \quad (17)$$

Sustituyendo (17) en (16) se obtiene la expresión del par

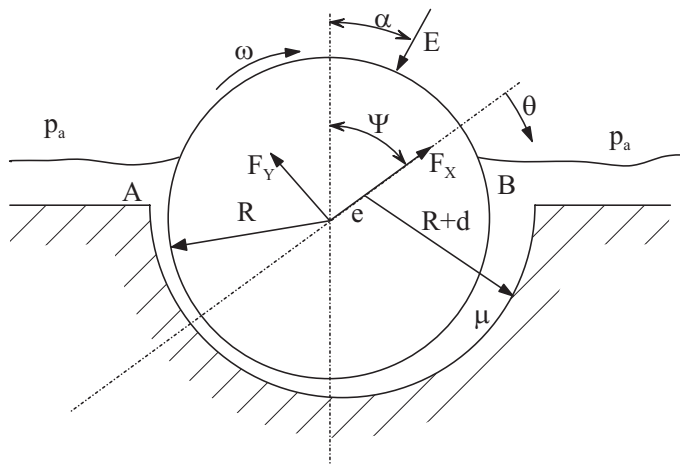
$$C = \frac{\pi}{2} \mu \frac{\Omega}{h_o} (R_1^4 - R_o^4). \quad (18)$$

**Problema 5.9**

Un eje de radio  $R$  gira con velocidad angular  $\omega$  en un dispositivo anti-fricción como el mostrado en la figura. El dispositivo consiste en una cavidad cilíndrica, de radio  $R+d$  ( $d \ll R$ ), que alberga un lubricante de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . El lubricante es forzado por el giro del eje, a fluir entre ambas superficies formando una película líquida cuyo movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes. Sabiendo que el eje está sometido a unas solicitaciones por unidad de longitud de magnitud  $E$  y orientadas un ángulo  $\alpha$  respecto a la vertical. La resultante de las fuerzas de superficie sobre el eje y las solicitaciones sobre él determinan la posición excéntrica que adopta éste respecto a la cavidad, de modo que sus centros están desplazados una distancia  $e < d$  y la línea de centros forma un ángulo  $\Psi$  con respecto a la vertical. Consideren primero el caso en que la sección  $A$  y  $B$  estén abiertas a la atmósfera. Calcular entonces:

1. Distribuciones de velocidad y presión en la película líquida.
2. Componentes de las fuerzas, en la dirección de la línea de centros  $F_X$  y perpendicular a ella  $F_Y$ , que el lubricante ejerce sobre el eje.
3. Relación entre las solicitaciones actuantes con la actitud del cojinete  $\Psi$  y excentricidad del eje  $e$ .

Repítase el análisis en el caso de que la sección  $A$  esté provista de un retén que impida el paso de lubricante a través de dicha sección.



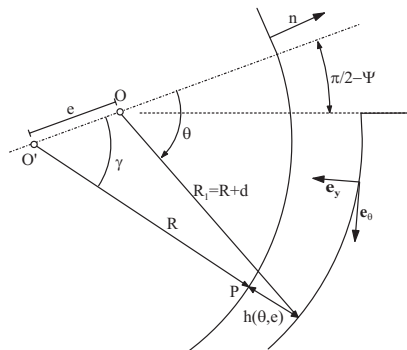
Resolución:

**Apartado 1.-**

Sean  $y, \theta$  las coordenadas de un punto genérico de la película fluida. Si  $d$  y  $e$  son el juego y la excentricidad, el espesor de dicha película líquida  $h(\theta)$  se obtiene a partir de la relación entre los tres lados del triángulo indicado en la figura

$$(R+h)^2 = (R+d)^2 - 2(R+d)e \cos \theta + e^2. \quad (1)$$

La expresión anterior puede simplificarse para el caso usual de la lubricación de piezas pues en éstos la excentricidad  $e$  y el juego entre piezas





$d$  son pequeños comparados con el tamaño característico de las piezas lubricadas,  $h \sim d \sim e \ll R \simeq R + d$ ; se tiene entonces

$$\underbrace{(R+h)^2}_{\simeq R^2+2Rh+\mathcal{O}(\epsilon^2)} = \underbrace{(R+d)^2}_{\simeq R^2+2Rd+\mathcal{O}(\epsilon^2)} - \underbrace{2(R+d)e\cos\theta}_{\simeq -2Re\cos\theta+\mathcal{O}(\epsilon^2)} + \underbrace{e^2}_{\simeq \mathcal{O}(\epsilon^2)} \Rightarrow h(\theta) = d + e\cos\theta + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2)$$

Si las fuerzas de viscosidad son dominantes, las ecuaciones que gobiernan los campos de velocidades y presiones son en coordenadas cilíndricas

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{1}{r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = 0 \quad (3)$$

que se simplifica notablemente si se tiene en cuenta que  $r$  está comprendido entre  $R$  y  $R+h \sim R$ . En efecto, si se emplea un sistema de coordenadas ligado a superficie fija, esto es  $r = R + h - y$ , entonces la ecuación diferencial anterior da lugar a

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Obsérvese que para un observador dispuesto en este sistema de referencia  $(y, \theta)$  no se aprecia la curvatura del sistema eje-alojamiento ( $y \sim h \ll R$ ) pues en primera aproximación el radio de curvatura es infinito comparado con el juego entre piezas.<sup>6</sup> Por otra parte, la película líquida está definida y, por tanto, las ecuaciones anteriores son válidas, en  $\pi/2 - \Psi \leq \theta \leq 3\pi/2 + \Psi$ . Obsérvese que por ser película delgada el orden de magnitud de las velocidades de la película en la dirección  $\theta$  son mucho mayores que en la dirección  $y$ ,  $v_\theta \sim \omega R \sim v_y R/d \gg v_y$ ; nótese que el movimiento está impedido por la presencia de las paredes sólidas. Del equilibrio entre fuerzas de presión y viscosas se obtienen los órdenes de magnitud de las variaciones de presión en las direcciones  $y$  y  $\theta$ ,  $\Delta_y p \sim \mu v_y/d \sim \mu \omega$  y  $\Delta_\theta p \sim (\mu v_\theta/d) R/d \sim \mu \omega R^2/d^2 \gg \mu \omega$ ; esto es, las variaciones transversales de presión son en primera aproximación nulas y por tanto  $p$  no es función de la variable  $y$ .

Como condiciones de contorno para la velocidad se impondrá

$$v_\theta(0) = 0; \quad \text{y} \quad v_\theta(h) = \omega R, \quad (5)$$

donde se ha tenido en cuenta que en cada punto de la superficie  $P$  del eje [ $y = h(\theta)$ ] los radios  $O'P$  y  $OP$  son en primera aproximación paralelos, al ser  $e \ll R$ , por lo que la velocidad en  $P$  puede considerarse prácticamente en dirección  $\theta$  y de valor  $\omega R$ . Integrando (4) dos veces respecto a  $y$  e imponiendo las condiciones de contorno se obtiene

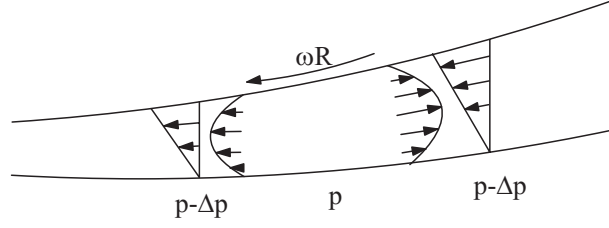
$$v_\theta(y, \theta) = -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} y(h(\theta) - y) + \omega R \frac{y}{h(\theta)}. \quad (6)$$

El campo de velocidades definido por (6) es la resultante de un movimiento de Hagen-Poiseuille debido al gradiente de presiones que se genera sobre la película líquida más uno de Couette debido al movimiento relativo entre las superficies. El caudal según  $\theta$ , por unidad de longitud perpendicular al plano del papel es

$$q_\theta = \int_0^{h(\theta)} v_\theta dy = -\frac{h^3(\theta)}{12\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R h(\theta)}{2}. \quad (7)$$

Conviene hacer notar que en el momento que exista excentricidad, la presión en la película líquida no puede ser uniforme, sino que debido a que el caudal a través de cada sección tiene que ser constante se desarrolla un gradiente de presiones que da origen a un caudal de Poiseuille, véase figura, que se suma al de Couette en las zonas donde el juego es menor (menor caudal de Couette) y se resta en aquellas donde el juego es mayor (mayor caudal de Couette).

<sup>6</sup> Observe el lector que algo semejante ocurre cuando se observa la superficie de la tierra desde una altura baja comparada con el radio de ésta. A una cota de observación baja su superficie resulta plana a todos los efectos pues no se puede apreciar su curvatura.



El perfil de velocidades dado en (6) satisface la ecuación de cantidad de movimiento pero no la de continuidad. Si se obliga a que el caudal que circula por cada sección sea constante (independiente de  $\theta$ ) se obtiene la ecuación diferencial que gobierna la distribución de presiones en la película líquida

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{h^3(\theta)}{12\mu} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R h(\theta)}{2} = cte = q, \quad (8)$$

que proporciona una ecuación lineal de primer orden y coeficientes variables para el cálculo de la presión en la película líquida. Obsérvese que aunque la ecuación diferencial sea de primer orden es necesario imponer dos condiciones de contorno puesto que el caudal total  $q$  es desconocido. En efecto, si los extremos de la ranura están abiertos a la atmósfera en dichos puntos la presión debe coincidir con la ambiental

$$p(\pi/2 - \Psi) = p(3\pi/2 - \Psi) = p_a. \quad (9)$$

En el caso de que se coloque un retén en la sección A se impide el paso de flujo en dicha sección y, por lo tanto, la condición de contorno es  $q_\theta(3\pi/2 - \Psi) = 0$ . Como se observa en (8), imponer el caudal  $q$  equivale a imponer condiciones en derivadas de la presión en un cierto punto. Naturalmente, la continuidad exige que  $q_\theta = cte = q = 0$  siendo, por tanto, las condiciones de contorno a aplicar en el caso del retén

$$p(\pi/2 - \Psi) = p_a \quad \text{y} \quad q = 0. \quad (10)$$

Si se integra la ecuación diferencial (8) imponiendo una de las condiciones de contorno ( $p(\pi/2 - \Psi) = p_a$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} p(\theta) - p_a &= \frac{12\mu R q}{d^3} \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + e/d \cos \theta')^3} - \frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + e/d \cos \theta')^2} \\ &= \frac{12\mu R q}{d^3} I_3(\theta, \Psi, e/d) - \frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} I_2(\theta, \Psi, e/d), \end{aligned} \quad (11)$$

donde aún resta por conocer el valor del caudal por unidad de longitud  $q$ . Éste se obtendrá imponiendo la condición de contorno restante [ $p(3\pi/2 - \Psi) = p_a$ ],

$$q = \frac{R\omega d}{2} \frac{I_2(3\pi/2 - \Psi, \Psi, e/d)}{I_3(3\pi/2 - \Psi, \Psi, e/d)}. \quad (12)$$

Para evitar el uso de las expresiones tediosas como las de las funciones  $I_3(\theta, \Psi, e/d)$  e  $I_2(\theta, \Psi, e/d)$ ,<sup>7</sup> se considerará el caso en que  $e/d \ll 1$ . En este caso, la distribución de presiones se obtiene, sin más que linealizar los integrandos en (11); esto es

$$\begin{aligned} I_3(\theta, \Psi, e/d) &\simeq \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} (1 - 3\frac{e}{d} \cos \theta') d\theta' = \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 3(e/d)(\cos \Psi - \sin \theta) \\ I_2(\theta, \Psi, e/d) &\simeq \int_{\pi/2-\Psi}^{\theta} (1 - 2\frac{e}{d} \cos \theta') d\theta' = \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 2(e/d)(\cos \Psi - \sin \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>7</sup> Las funciones  $I_3(\theta, \Psi, e/d)$  e  $I_2(\theta, \Psi, e/d)$  puede obtenerse analíticamente mediante el cambio de variable, propuesto por Sommerfeld,  $(1 + e/d \cos \theta) = (1 - (e/d)^2)/(1 - (e/d) \cos x)$  o recurriendo al uso de programas de lenguaje simbólico del tipo *Mathematica* o *Maple*.

siendo entonces

$$q = \frac{R\omega d}{2} \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \quad (14)$$

y la distribución de presiones

$$p(\theta) - p_a \simeq \frac{6\mu\omega R^2}{d^2} \left\{ \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \left[ \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 3\frac{e}{d}(\cos \Psi - \sin \theta) \right] - \left[ \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 2\frac{e}{d}(\cos \Psi - \sin \theta) \right] \right\}. \quad (15)$$

Por otra parte, de (6), (8) y (12) se obtiene el esfuerzo viscoso en el eje

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= -\mu \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right|_{y=h} \mathbf{e}_\theta = \left( \frac{6\mu q}{h^2(\theta)} - \frac{4\mu\omega R}{h(\theta)} \right) \mathbf{e}_\theta = \{e/d \ll 1\} \\ &\simeq \frac{4\mu\omega R}{d} \left[ \frac{3}{4} \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} (1 - 2(e/d) \cos \theta) - (1 - (e/d) \cos \theta) \right] \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Obsérvese que el orden de magnitud del esfuerzo viscoso es  $R/d$  más pequeño que el de la presión

$$\frac{|\vec{\tau}|}{|p - p_a|} \sim \frac{\mu\omega R}{d} \frac{d^2}{\mu\omega R^2} \sim \frac{d}{R} \ll 1 \quad (17)$$

y, por tanto, aquéllos no contribuyen significativamente, en primera aproximación, a la fuerza resultante sobre el eje.

### Apartado 2.-

La expresión matemática de la fuerza sobre el eje, teniendo en cuenta el ambiente, es entonces

$$\mathbf{F} = F_X \mathbf{e}_X + F_Y \mathbf{e}_Y = - \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} [p(\theta) - p_a] \mathbf{n}(\theta) R d\theta, \quad (18)$$

siendo  $\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{e}_X - \sin \theta \mathbf{e}_Y$  las componentes de la normal respecto a los ejes ( $X$  e  $Y$ ) de la figura. Las componentes de la fuerza en estos ejes  $F_X$  y  $F_Y$  son, para excentricidad pequeña  $e \ll d$ ,

$$\begin{aligned} F_X &= -\frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \frac{2(e/d) \sin(2\Psi)}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \\ F_Y &= \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \frac{(e/d)[4 - \pi^2 \cos(2\Psi)]}{2(\pi + 6(e/d) \cos \Psi)}. \end{aligned} \quad (19)$$

### Apartado 3.-

Obsérvese que las fuerzas de presión (19) deben equilibrarse con las sollicitaciones ejercidas sobre el eje de tal manera que

$$\begin{aligned} E \cos \alpha &= F_X \cos \Psi + F_Y \sin \Psi \\ E \sin \alpha &= F_X \sin \Psi - F_Y \cos \Psi \end{aligned} \quad (20)$$

o lo que es lo mismo

$$E = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \frac{(e/d)}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} [(4 - \pi^2 \cos(2\Psi))^2 + 4 \sin^2(2\Psi)]^{1/2} \quad (21)$$

y

$$\tan \alpha = \frac{F_X \sin \Psi - F_Y \cos \Psi}{F_X \cos \Psi + F_Y \sin \Psi} = \frac{1}{\tan \Psi} \frac{-6 + (2 + \pi^2) \cos(2\Psi)}{2 - (2 + \pi^2) \cos(2\Psi)}. \quad (22)$$

Estas ecuaciones permiten conocer las incógnitas  $\Psi$  y  $e/d$ , es decir, la posición de equilibrio del eje en su alojamiento en función del parámetro adimensional  $\frac{6\mu\omega R^3}{Ed^2}$  y del ángulo de la sollicitación  $\alpha$ .

El momento respecto al centro  $O'$  del eje es únicamente debido a las fuerzas de viscosidad (cuyo brazo respecto a  $O'$  es  $R - d \simeq R$ ), ya que las fuerzas de presión son normales a la superficie del eje, y su valor (por unidad de longitud  $z'$ ) viene dado por

$$\begin{aligned} C_{O'} &= \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} R^2 |\vec{\tau}_{F-E}| d\theta = \frac{4\mu\omega R^3}{d} \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} \left[ \frac{3}{4} \frac{\pi + 4(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} (1 - 2(e/d) \cos \theta) - (1 - (e/d) \cos \theta) \right] d\theta \\ &= \frac{\mu\pi\omega R^3}{d} \frac{\pi + 8(e/d) \cos \Psi}{\pi + 6(e/d) \cos \Psi} \end{aligned} \quad (23)$$

que, naturalmente, se opone al giro del eje.

En el caso de que en el extremo A se coloque un retén las condiciones de contorno (10) dan lugar a que la distribución de presiones sea

$$p(\theta) - p_a = -\frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} I_2(\theta, \Psi, e/d) = \{e/d \ll 1\} = -\frac{6\mu R^2 \omega}{d^2} \left[ \Psi + \theta - \frac{\pi}{2} - 2(e/d)(\cos \Psi - \sin \theta) \right] \quad (24)$$

siendo, por tanto, la resultante de fuerzas sobre el eje

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \{-(\pi \cos \Psi + 2 \sin \Psi) + 2(e/d)[1 + \cos(2\Psi)]\} \quad y \\ F_Y &= \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} \{2 \cos \Psi - \pi \sin \Psi + (e/d)[\pi + 2 \sin(2\Psi)]\} \end{aligned} \quad (25)$$

y las ecuaciones del equilibrio

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = \frac{6\mu\omega R^3}{d^2} [\pi^2 + 4 + (e/d)^2(8 + \pi^2) \\ &\quad + 2(e/d)(-2\pi \cos \Psi + 4(e/d) \cos(2\Psi) + \pi(-\pi + 4(e/d) \cos \Psi) \sin \Psi)]^{1/2} \end{aligned} \quad (26)$$

y

$$\tan \alpha = \frac{F_X \sin \Psi - F_Y \cos \Psi}{F_X \cos \Psi + F_Y \sin \Psi} = \frac{2 + (e/d)\pi \cos \Psi}{\pi - (e/d)(4 \cos \Psi - \pi \sin \Psi)}. \quad (27)$$

Sabiendo que el esfuerzo viscoso en el eje es

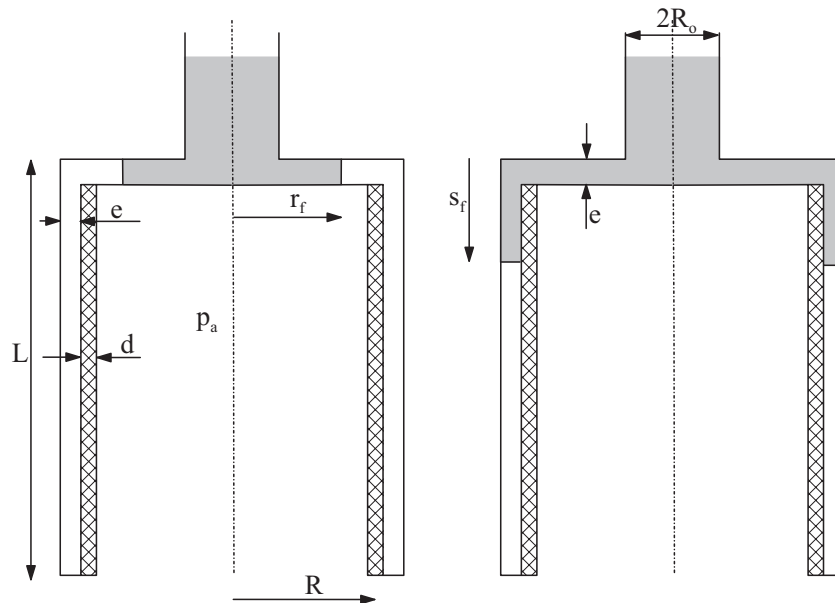
$$\vec{\tau}_{F-E} = -\mu \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial y} \right|_{y=h} \mathbf{e}_\theta = -\frac{4\mu\omega R}{h(\theta)} \mathbf{e}_\theta \quad (28)$$

entonces el momento requerido para mantener el giro del eje es

$$C_{O'} = \int_{\pi/2-\Psi}^{3\pi/2-\Psi} R^2 |\vec{\tau}_{F-E}| d\theta = \frac{4\mu\omega R^3}{d} (\pi + 2(e/d) \cos \Psi). \quad (29)$$

**Problema 5.10**

En la figura se esquematiza un dispositivo para filtrar un caudal  $Q$  de un líquido de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$ . Básicamente el filtro consiste en un cuerpo cilíndrico hueco de longitud  $L$  y radio exterior  $R$ , cuyas paredes laterales, de espesor  $d$ , están constituidas por un medio poroso de permeabilidad  $\Pi$  conocida, ( $d \ll R \sim L$ ). El cuerpo cilíndrico, cuya tapa superior es impermeable, está alojado en el interior de una carcasa metálica, también cilíndrica, de forma que ambos cuerpos están concéntricamente dispuestos y dejan una ranura cuyo juego  $e$  ( $e \gg d$ ), tanto entre las tapas como entre las generatrices de los cilindros, es constante. En su parte final la ranura está cerrada. La carcasa posee una abertura en su parte central, de radio  $R_o \gg e$ , por la que se alimenta el dispositivo filtrador. El líquido es obligado a fluir a través de la ranura, primero radialmente, a través del juego entre las tapas de los cilindros, y luego longitudinalmente, a través de la ranura lateral desde donde fluye, a través del filtro, hacia el hueco central donde la presión es la atmosférica. Finalmente el líquido es recogido por la acción de la gravedad en un depósito.



Suponiendo que el movimiento del líquido en el espacio entre cilindros es con fuerzas de viscosidad dominantes, se desea determinar:

1. Criterios para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominante.
2. Suponiendo que el movimiento es estacionario, calcular:
  - a) Distribución de presiones en la película líquida.
  - b) Presión a la entrada de la ranura.
  - c) Si el líquido bombeado está a presión atmosférica indicar la potencia que debe librar la bomba para inyectar en la ranura un caudal  $Q$  de líquido.
3. Describir también el proceso inicial de llenado de la ranura.

En los cálculos puede suponerse que las sobrepresiones necesarias para hacer fluir el líquido son grandes comparadas con las debida a variaciones de altura.

Resolución:Apartado 1.-

Si el movimiento en la ranura es estacionario, también será con viscosidad dominante si

$$\frac{\rho V e}{\mu} \frac{e}{L} \sim \frac{Q e}{\nu R^2} \ll 1.$$

En el caso no estacionario debe cumplirse además el requisito de que las fuerzas de inercia temporales sean pequeñas frente a las de viscosidad

$$\frac{e^2}{\nu t_o} \ll 1;$$

obsérvese que en este caso ambos parámetros se reducen al mismo ya que el tiempo de cambio de las magnitudes fluidas  $t_o$  es debido al cambio en las condiciones de contorno por el hecho de que la interfase líquido-gas se mueve con velocidad  $v \sim Q/(eR)$  y, por tanto,  $t_o \sim R/v \sim R^2 e/Q$ .

Apartado 2.-

En el tramo radial de la ranura,  $R_o \leq r \leq R$ , el caudal que fluye en la dirección radial  $q_r$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es el de Poiseuille

$$q_r = -\frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{y} \quad Q = -2\pi r \frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1)$$

que integrada una vez proporciona la distribución de presiones en la película líquida como función del radio  $r$ , del tiempo  $t$  y de la presión  $p_1$  a la entrada de la película, que es desconocida

$$p - p_1 = -\frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{r}{R_o}. \quad (2)$$

El caudal en la dirección de la generatriz  $q_s$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es

$$q_s = -\frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial s} \quad \text{y} \quad Q_s = -\pi R \frac{e^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (3)$$

donde  $s$  es la coordenada a lo largo de la ranura lateral. La condición de conservación de la masa proporciona una condición para determinar el gradiente de presiones en este tramo de la ranura

$$\frac{dQ_s}{ds} + 2\pi R v_{mp}(s) = 0, \quad (4)$$

donde  $v_{mp} = -(\Pi/\mu)\nabla p$  es la velocidad del fluido en el medio poroso.

La distribución de presiones en el líquido en el medio poroso viene dada por la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad (5)$$

ecuación que se simplifica notablemente debido a que la longitud del medio poroso ( $\sim L$ ) y su radio medio ( $\sim R$ ) son mucho mayores que su espesor ( $\Delta r \sim d$ ); en efecto si se definen las variables  $p^* = (p - p_a)/p_a$ ,  $s = Lx$  y  $r = R - yd$ , la ecuación (5) se reduce a

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

cuya integración, sujeta a las condiciones de contorno  $p^*(0) = [p(s) - p_a]/p_a$  y  $p^*(1) = 0$ , proporciona

$$p^* = \frac{p(s) - p_a}{p_a} (1 - y). \quad (7)$$

## 154 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Obsérvese que el radio de curvatura del medio poroso es tan grande comparado con su espesor que las partículas fluidas lo *ven* plano, en primera aproximación, al atravesarlo.

La velocidad en el medio poroso es entonces

$$v_{mp} = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\Pi}{\mu} \frac{p(s) - p_a}{d}, \quad (8)$$

así que (4) conduce a la ecuación diferencial lineal, de segundo orden que determina la distribución de presiones

$$\frac{d^2 p^*}{dx^2} - a^2 p^* = 0, \quad a^2 = \frac{12\Pi L^2}{e^3 d}, \quad (9)$$

donde  $a$  es una constante adimensional (la permeabilidad  $\Pi$  tiene dimensiones de longitud al cuadrado y su valor es del orden del cuadrado del tamaño de los poros). La solución general de (4) es

$$p^* = Ae^{ax} + Be^{-ax}, \quad (10)$$

y las condiciones de contorno que se imponen para determinar la solución son

$$\begin{aligned} p^*(0) &= \frac{p(R) - p_a}{p_a}, \quad -\frac{\pi e^3 p_a R}{6\mu L} \frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q, \\ -\frac{\pi e^3 p_a R}{6\mu L} \frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0; \end{aligned} \quad (11)$$

esto es, igualdad de presiones y caudales en el punto ( $r = R$  o  $s = 0 \Rightarrow x = 0$ ) común a las dos películas líquidas y caudal nulo en  $s = L \Rightarrow x = 1$ ; obsérvese que se han impuesto tres condiciones puesto que  $p^*(0)$  es desconocida. Imponiendo a la solución las condiciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (\coth a - 1), \quad B = \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (1 + \coth a), \\ \frac{p(R) - p_a}{p_a} &= \frac{6\mu QL}{\pi e^3 R p_a} \frac{\coth a}{a} \quad \text{y} \quad p_1 = p(R) + \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{R}{R_o}. \end{aligned} \quad (12)$$

Es fácil comprobar que el caudal filtrado es  $Q$ ; en efecto

$$2\pi R \int_0^L v_{mp} ds = 2\pi R \frac{\Pi p_a L}{\mu d} \int_0^1 p^* dx = 2\pi R \frac{\Pi p_a L}{\mu d} \frac{B - A}{a} = Q.$$

Compruébese también que la potencia de la bomba necesaria para impulsar un caudal  $Q$  a través del filtro es  $W = (p_1 - p_a)Q$ .

### Apartado 3.-

Para la descripción de los primeros instantes en los que el líquido entra en el dispositivo, considérese que  $r_f(t)$  representa la posición radial de la interfase líquido-gas como función del tiempo; la velocidad de la interfase es tal que satisface la conservación del volumen de líquido

$$2\pi e r_f \frac{dr_f}{dt} = Q, \quad (13)$$

y su integración, con la condición de que en el instante inicial la interfase está en  $R_o$ , proporciona

$$r_f = \sqrt{R_o^2 + \frac{Qt}{\pi e}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi(R^2 - R_o^2)h}{Q}, \quad (14)$$

donde  $t_1$  es el tiempo que tarda la interfase en alcanzar la posición  $r = R$  y comenzar a partir de aquí a fluir por el tramo longitudinal de la ranura.

El caudal que fluye en la dirección radial  $q_r$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es el de Poiseuille

$$q_r = -\frac{e^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{y} \quad Q = -\pi r \frac{e^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (15)$$

si se integra la última de las ecuaciones con la condición de contorno  $p[r_f(t)] = p_a$  proporciona la distribución de presiones en la película líquida como función del radio  $r$  y del tiempo  $t$

$$p - p_a = \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{r_f(t)}{r} = \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{\sqrt{R_o^2 + \frac{Qt}{\pi e}}}{r}. \quad (16)$$

Finalmente, si se particulariza (16) en  $r = R_o$  se obtiene la presión de inyección  $p_1(t)$

$$p_1(t) - p_a = \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{\sqrt{R_o^2 + \frac{Qt}{\pi e}}}{R_o}. \quad (17)$$

Para tiempos  $t$  tales que  $t_1 < t < t_2$ , donde  $t_2$  es el tiempo que la interfase tarda en alcanzar el final de la ranura, la interfase se encuentra en el tramo longitudinal de la ranura y la distribución de presiones en el tramo radial de la ranura es

$$p = p_1(t) - \frac{6\mu Q}{\pi e^3} \ln \frac{r}{R_o} \quad \text{y} \quad p(R, t) = p_1(t) - \frac{6\mu Q}{\pi e^3} \ln \frac{R}{R_o}. \quad (18)$$

En el tramo longitudinal, y debido a que el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominantes, las ecuaciones (4), (8) y (9) continúan siendo válidas y la solución general de esta última es, como ya se indicó en el caso estacionario,

$$p^* = Ae^{ax} + Be^{-ax}, \quad (19)$$

donde las constantes de integración  $A$  y  $B$ , que dependen del tiempo a través de  $p(R, t)$  y de la posición de la interfase  $s_f = Lx_f$ , así como las propias funciones  $p(R, t)$  y  $x_f$  se obtienen de imponer las tres condiciones de contorno y la condición de conservación de la masa siguientes

$$p^*(0) = \frac{p(R, t) - p_a}{p_a}, \quad \left. \frac{dp^*}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{6\mu QL}{\pi e^3 R p_a}, \quad p^*(x_f) = 0 \quad (20)$$

$$Q = Q_{mp} + 2\pi R ds_f/dt \quad \text{o} \quad 2\pi R e L \frac{ds_f}{dt} = Q - 2\pi R \int_0^{s_f} v_{pm} ds; \quad (21)$$

esto es, tanto la presión como el caudal deben de ser iguales en la confluencia de ambas capas ( $r = R \equiv s = 0(x = 0)$ ) y la presión en la interfase líquido-gas debe de ser la atmosférica. Se obtienen así las relaciones

$$A = \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (\tanh ax_f - 1), \quad B = \frac{3\mu QL}{\pi e^3 R p_a a} (1 + \tanh ax_f) \\ \frac{p(R, t) - p_a}{p_a} = \frac{6\mu QL}{\pi e^3 R p_a} \frac{\tanh ax_f(t)}{a} \quad \text{y} \quad p_1 = p(R; t) + \frac{6\mu Q}{\pi e^2} \ln \frac{R}{R_o}, \quad (22)$$

junto con la ecuación para  $x_f$

$$\frac{dx_f}{d\tau} = 1 - \tanh ax_f, \quad \tau = \frac{Qt}{2\pi R L e}. \quad (23)$$

Integrando la última de las ecuaciones con la condición inicial  $x_f(\tau_1 = t/t_1) = 0$  se obtiene la posición de la interfase como función del tiempo

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh ax_f}{1 - \tanh ax_f} + \frac{\tanh ax_f}{1 - \tanh ax_f} = 2a(\tau - \tau_1). \quad (24)$$

Finalmente, el tiempo  $t_2 = (Q/2\pi R L e)\tau_2$  necesario para que la interfase alcance el final de la ranura  $x_f = 1$  es entonces

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \tanh a}{1 - \tanh a} + \frac{\tanh a}{1 - \tanh a} = 2a(\tau_2 - \tau_1). \quad (25)$$

A partir de este instante el movimiento del líquido a través de ranura y filtro se hace estacionario y son válidos los resultados primeramente obtenidos.



**Problema 5.11**

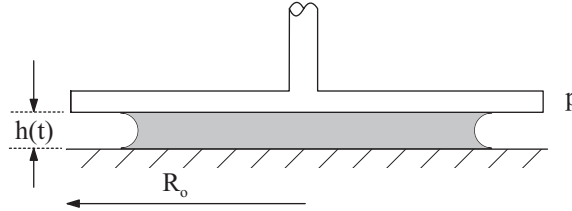
Dos discos circulares están separados una distancia variable  $h(t)$  quedando entre ellos un volumen  $V_o$  de líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . La distancia  $h(t)$  es

$$h(t) = h_o(2 + \cos \omega t)$$

donde  $h_o$  y  $\omega$  son constantes conocida y  $h_o^3 \ll V_o$  de modo que la capa de líquido entre los dos discos tiene un radio aparente mucho mayor que su espesor. La forma geométrica del borde de la capa límite se supone determinada por los efectos de la tensión superficial  $\zeta$  y el líquido moja a los discos con ángulo de contacto nulo.

Sabiendo que el movimiento del líquido generado por el desplazamiento relativo de los discos son dominantes los efectos viscosos, se pide:

1. Valor mínimo del radio  $R_o$  de los discos para que el líquido se mantenga siempre entre ambos.
2. Orden de magnitud de las velocidades en la capa líquida y condición o condiciones que han de satisfacerse para que los efectos viscosos sean dominantes en el movimiento del líquido.
3. Distribución de presiones sobre los discos.
4. Fuerza que el líquido ejerce sobre el disco superior como función del tiempo.
5. Trabajo empleado en completar un ciclo de oscilación.

Resolución:Apartado 1.-

Para que no se produzca el vertido de líquido fuera de los discos debe suceder que el radio máximo que alcanza el volumen de líquido, que corresponde a la mínima separación entre discos [ $h(t) = h_o$ ], sea menor que el radio de los discos; esto es

$$R_{max} = \left( \frac{V_o}{\pi h_o} \right)^{1/2} \leq R_o; \quad (1)$$

obsérvese que como  $h_o^3 \ll V_o$  se tiene siempre una película de líquido delgada  $h(t) \ll R(t)$ . La relación entre la extensión alcanzada por la capa de fluido  $R(t)$  en función de la distancia entre discos  $h(t)$  resulta de la ecuación de conservación del volumen

$$\pi R^2 h = V_o \quad (2)$$

donde se ha supuesto que el líquido adopta la forma de un disco despreciando el volumen ocupado por el menisco capilar; esto es,  $h^2(t)R_o(t) \ll h(t)R^2(t) \Rightarrow h(t) \ll R(t)$ , donde  $R(t)$  es el radio hasta donde se extiende la capa líquida.

**Apartado 2.-**

Si  $v_r$  y  $v_z$  representan las componentes de la velocidad del líquido en la capa según los ejes  $r$  y  $z$ , la ecuación de continuidad se escribe

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

y la estimación de órdenes de magnitud proporciona

$$\frac{V_r}{R} \sim \frac{V_z}{h} \Rightarrow V_r \sim \frac{R}{h} V_z \sim \frac{R}{h} \frac{dh}{dt} \sim \omega R \gg \frac{dh}{dt} \sim \omega h_o, \quad (4)$$

donde  $V_r$  y  $V_z$  representan los órdenes de magnitud de las velocidades del líquido en las direcciones radial y perpendicular a los discos. Las condiciones necesarias para el movimiento de la película líquida sea con fuerzas de viscosidad dominantes frente a las fuerzas de inercia (convectivas y temporales), que se colapsan en este caso en una única condición

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\rho V_r h_o^2}{\mu R_o} \ll 1 \\ \frac{h_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega h_o^2}{\nu} \ll 1, \quad (5)$$

donde  $t_o = 1/\omega$  es el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas.

**Apartado 3.-**

Para calcular la distribución de presiones en el fluido se parte de la ecuación de Reynolds donde, para su formulación, debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con la geometría del problema, sólo hay caudal de líquido en la dirección  $r$ ; este caudal, de Poiseuille, es debido a las sobrepresiones o depresiones que aparecen en la película líquida como consecuencia del movimiento de una de las placas, normalmente a sí misma, relativo a la otra

$$q_r = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6)$$

La condición de conservación del volumen de líquido en un volumen elemental como el de la figura conduce a

$$\frac{\partial(hr)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{12\mu \dot{h}}{h^3} \quad (7)$$

que debe ser integrada sujeta a las condiciones de contorno

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{y} \quad p_a - p(R, t) = \frac{2\zeta}{h}, \quad (8)$$

donde la primera de las condiciones corresponde a la exigencia de simetría de la distribución de presiones respecto al eje de la película (el máximo o el mínimo de la presión se encuentra siempre en el eje de la película); en la segunda de las condiciones se ha tenido en cuenta que el radio de curvatura de la interfase es la mitad de la separación entre discos y que el líquido moja a las placas con un ángulo de contacto nulo.

Integrando la ecuación (7) e imponiendo las condiciones de contorno (8) se obtiene la distribución de presiones

$$p(r, t) = p_a - \frac{2\zeta}{h} + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} (r^2 - R^2) = p_a - \frac{2\zeta}{h} + \frac{3\mu \dot{h}}{h^3} \left( r^2 - \frac{V_o}{\pi h} \right). \quad (9)$$

Es fácil comprobar en (9) que si  $\dot{h}$  es positiva ( $h$  aumenta cuando  $t$  aumenta) entonces  $p(0, t)$  es mínima (depresión) en el eje y la fuerza sobre los discos tendería a disminuir la distancia entre ellos mientras que si

$\dot{h}$  es negativa ( $h$  disminuye cuando  $t$  aumenta) hay sobrepresión en el eje de la película y la fuerza que el líquido ejerce sobre los discos tendería a alejarlos.

#### Apartado 4.-

La fuerza que el líquido (y ambiente) ejerce sobre los discos es  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{e}_z \int_0^R (p(r, t) - p_a) 2\pi r \, dr = - \left( \frac{2\pi R^2 \zeta}{h} + \frac{3\pi R^4 \mu \dot{h}}{2h^3} \right) \mathbf{e}_z = \\ - \left( \frac{2V_o \zeta}{h^2} + \frac{3\mu V_o^2}{2\pi} \frac{\dot{h}}{h^5} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (10)$$

y la fuerza  $F_D$  que hay que ejercer sobre el disco superior para mantener el movimiento es

$$\mathbf{F}_D = -\mathbf{F} + M \left( \frac{d^2 h}{dt^2} + g \right) \mathbf{e}_z = \left( \frac{2V_o \zeta}{h^2} + \frac{3\mu V_o^2}{2\pi} \frac{\dot{h}}{h^5} \right) \mathbf{e}_z + M(g - \omega^2 h_o \cos \omega t) \mathbf{e}_z, \quad (11)$$

donde  $M$  es la masa del disco superior. Obsérvese que para disminuir la altura entre discos ( $\dot{h} < 0$ ) se requiere empujar uno contra el otro ( $\mathbf{F}_D$  en la dirección  $-\mathbf{e}_z$ ) y viceversa; para ampliar el juego entre los discos se requiere tirar del disco hacia arriba ( $\mathbf{F}_D$  tiene dirección  $\mathbf{e}_z$ ).

#### Apartado 5.-

El trabajo realizado por el disco superior en un ciclo es

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} F_D \dot{h} \, dt = 2V_o \zeta \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\dot{h}}{h^2} \, dt}_{=0} + \frac{3\mu V_o^2}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} \frac{\dot{h}^2}{h^5} \, dt}_{=17\pi\omega/108\sqrt{3}} + \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega} M(\ddot{h} + g)\dot{h} \, dt}_{=0} = \frac{17\omega\mu V_o^2}{64\sqrt{3}h_o^3}. \quad (12)$$

Del resultado obtenido se desprende que tanto las fuerzas de tensión superficial como la inercia del disco y su peso no realizan trabajo en un ciclo neto; por ejemplo, el trabajo realizado durante el ascenso por las fuerzas de tensión superficial se invierte en aumentar la superficie de la interfase mientras que es devuelta la misma cantidad durante el periodo de descenso en el que el área de la interfase disminuye y se devuelve energía al sistema. Lo mismo sucede para el peso y la inercia del disco. El trabajo realizado es únicamente el trabajo de disipación de las fuerzas de viscosidad que es siempre positivo; se debe por tanto comunicar al disco superior un trabajo igual al disipado en forma de calor para que el movimiento se mantenga. Obsérvese que el trabajo que hay que realizar es tanto mayor cuanto mayor sea la viscosidad del fluido.

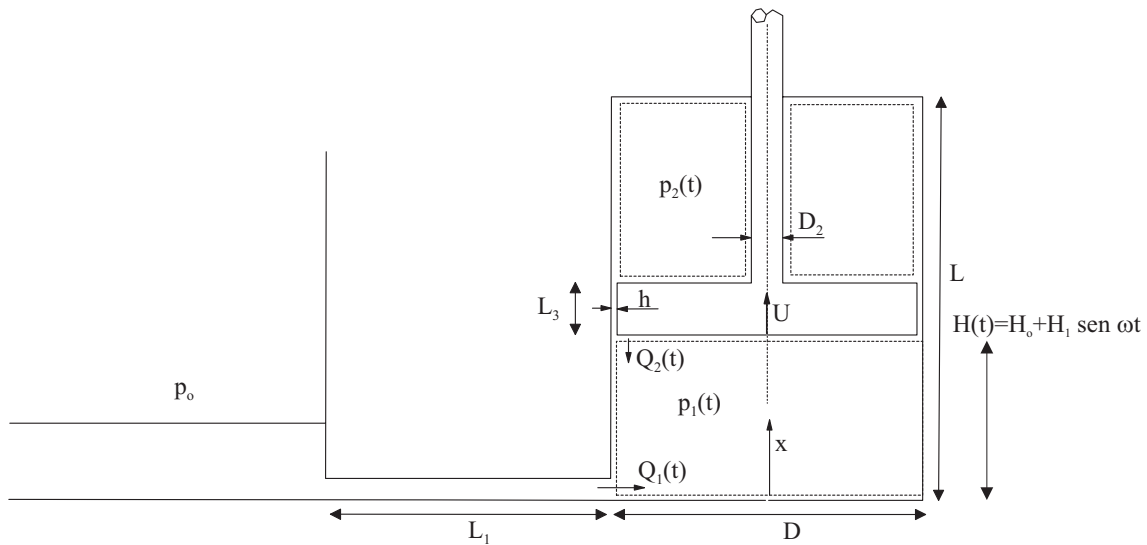
**Problema 5.12**

Considérese el dispositivo de la figura donde un émbolo de altura  $L_3$  se mueve con una ley armónica  $H(t) = H_o + H_1 \sin \omega t$  ( $0 \leq H_o + L_3 + H_1 \leq L$ ) en un cilindro de diámetro  $D$  y altura  $L$  donde existe un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ . El émbolo posee en su parte superior un vástago concéntrico de diámetro  $D_2$  y el juego entre émbolo y cilindro es  $h$  ( $h \ll L_3$ ). Un conducto de diámetro  $D_1$  y longitud  $L_1$  conecta el cilindro con un depósito lo suficientemente grande como para que no haya variaciones apreciables de altura, debido a carga o descarga del depósito, y la presión permanezca constante e igual a  $p_o$ .

Suponiendo que las fuerzas de viscosidad son dominantes tanto en el movimiento del líquido en el conducto como en el que tiene lugar a través del juego entre pistón y cilindro, calcular:

1. Criterios para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes.
2. Valor mínimo de la presión  $p_o$  para que el líquido no cavite.
3. Fuerza necesaria para mover el pistón con la ley dada.

Supóngase que las fuerzas gravitatorias son despreciables.



Resolución:

**Apartado 1.-**

La variación de volumen que provoca el movimiento del émbolo en el interior de cilindro da lugar a sendos flujos de líquido a través del conducto y de la ranura. Cuando, por ejemplo, asciende el émbolo se genera una depresión en la parte inferior del cilindro que da lugar a unos caudales de líquido que tienden a llenar el incremento de volumen habido en el ascenso. Lo contrario ocurre cuando el émbolo baja. Estos caudales pueden determinarse a partir de la conservación del volumen. En efecto, la conservación del volumen de líquido en la parte inferior del volumen

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} d\Omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi D^2 H(t)}{4} \right) = \frac{\pi D^2}{4} \omega H_1 \cos \omega t = Q_1(t) + Q_2(t). \quad (1)$$

De la misma forma la disminución del volumen superior está relacionada con el caudal que de él escapa

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} d\Omega + \int_{\Sigma_c} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\Sigma = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} \frac{dH}{dt} + Q_2(t) = 0 \Rightarrow Q_2(t) = \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} \omega H_1 \cos \omega t, \quad (2)$$

y de ambas se obtienen los caudales  $Q_1(t)$  y  $Q_2(t)$

$$Q_1(t) = \frac{\pi D_2^2}{4} H_1 \omega \cos \omega t$$

$$Q_2(t) = \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} H_1 \omega \cos \omega t. \quad (3)$$

Las velocidades características del líquido en el conducto y en la ranura son entonces

$$v_c \sim \frac{D_2^2}{D_1^2} \omega H_1, \quad v_{ran} \sim \frac{D^2 - D_2^2}{hD} \omega H_1, \quad (4)$$

y la relación entre las fuerzas de inercia convectivas y de viscosidad en ambos flujos serán pequeñas siempre que

$$\frac{\rho v_c D_1^2}{\mu L_1} \sim \frac{\omega H_1 D_2^2}{\nu L_1} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\rho v_{ran} h^2}{\mu L_3} \sim \frac{(D^2 - D_2^2) \omega H_1}{\nu D} \frac{h}{L_3} \ll 1, \quad (5)$$

donde se ha usado la viscosidad cinemática  $\nu = \mu/\rho$ . Como el movimiento es no estacionario las fuerzas de inercia temporales deben de ser pequeñas frente a las de viscosidad, lo que requiere

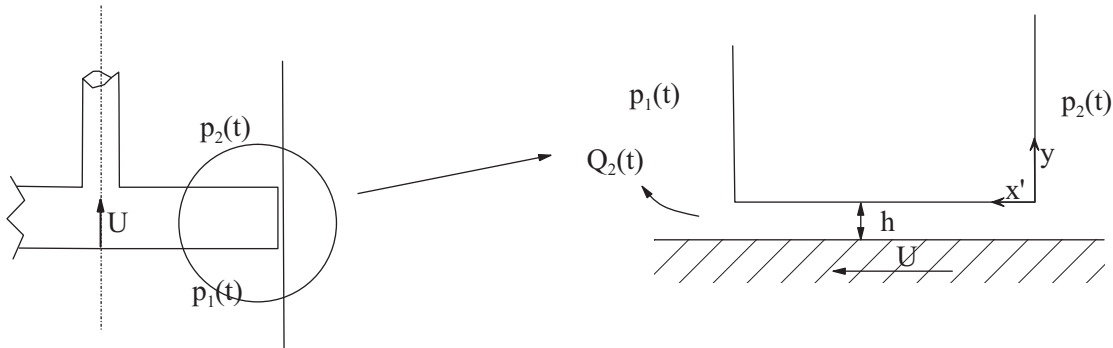
$$\frac{\rho D_1^2}{\mu t_o} \sim \frac{D_1^2}{\nu t_o} \sim \frac{\omega D_1^2}{\nu} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\omega h^2}{\nu} \ll 1. \quad (6)$$

### Apartado 2.-

Conocidos los caudales circulantes es fácil determinar, los gradientes de presión que los producen; en efecto, en el supuesto de que las fuerzas de viscosidad sean dominantes, el perfil de velocidades del líquido en el conducto es el de Hagen-Poiseuille y la relación entre el caudal y la caída de presión es

$$Q_1(t) = -\frac{\pi D_1^4}{128\mu} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\pi D_1^4}{128\mu} \frac{p_o - p_1(t)}{L_1} \Rightarrow p_1(t) = p_o - 32\mu L_1 \frac{D_2^2}{D_1^4} H_1 \omega \cos \omega t \quad (7)$$

donde  $p_1(t)$  es la presión en la parte inferior del cilindro; obsérvese que se ha supuesto que las variaciones de presión debidas a las variaciones de altura son despreciables frente a  $p_o - p_1(t)$ .



El movimiento del líquido en la ranura con fuerzas de viscosidad dominante es el resultado de la superposición de dos flujos: el de Couette, debido al movimiento relativo entre placas, y el de Hagen-Poiseuille debido a la diferencia de presiones que el movimiento del émbolo genera entre las dos regiones separadas por el émbolo

$$Q_2(t) = \pi D \left[ \frac{\omega H_1 h \cos \omega t}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} \right] \simeq -\pi D \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'}. \quad (8)$$

Obsérvese que en la ecuación (8) se ha mantenido únicamente el caudal de Hagen-Poiseuille pues el caudal de Couette es despreciable

$$\frac{DhH_1\omega}{Q_2} \sim \frac{DhH_1\omega}{D^2H_1\omega} \sim \frac{h}{D} \ll 1. \quad (9)$$

La integración de (8) con las condiciones de presión en ambos extremos de la ranura proporciona

$$\int_{p_2(t)}^{p_1(t)} dp = -\frac{12\mu Q_2(t)}{\pi Dh^3} \int_0^{L_3} dx' \Rightarrow p_2(t) = p_1(t) + \frac{12\mu Q_2(t)L_3}{\pi Dh^3}, \quad (10)$$

donde  $p_2(t)$  es la presión en la parte superior del depósito. Sustituyendo en la anterior ecuación las expresiones de (3) y (7) se obtiene

$$p_2(t) = p_o + \left[ \frac{3\mu UL_3}{h^2} \frac{D^2 - D_2^2}{2Dh} - 32\mu L_1 \frac{D_2^2}{D_1^4} \right] H_1\omega \cos \omega t, \quad (11)$$

donde  $U$  es la velocidad a la que se mueve el émbolo  $U = H_1\omega \cos \omega t$ .

El líquido puede cavitarse en la zona de menor presión, la zona del depósito donde la presión es  $p_2(t)$  cuando el émbolo baja; esta situación se alcanza cuando la presión  $p_2 \simeq 0$  para la que el líquido comienza a vaporizarse<sup>8</sup>

$$p_o = \left[ -\frac{3\mu UL_3}{h^2} \frac{D^2 - D_2^2}{2Dh} + 32\mu L_1 \frac{D_2^2}{D_1^4} \right] A\omega \quad (12)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $D \gg h$ .

### Apartado 3.-

Las fuerzas del fluido sobre el émbolo se deben tanto a la diferencia de presiones que se establece entre la cara superior e inferior del émbolo como a los esfuerzos viscosos sobre la pared lateral del émbolo. Para calcular la fuerza de fricción sobre el émbolo se requiere conocer el perfil de velocidades en la ranura,

$$v_{x'}(y) = -\frac{Uy}{h} + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{L_3} \frac{1}{2\mu} y(y+h) \quad 0 \geq y \geq -h \quad (13)$$

el esfuerzo viscoso que el fluido realiza sobre el pistón viene dado por

$$\vec{\tau}_{\text{fluido-émbolo}} = \mu \left. \frac{\partial v_{x'}}{\partial y} \right|_{y=0} \mathbf{e}_{x'} = \left( -\frac{U\mu}{h} + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{L_3} \frac{h}{2} \right) \mathbf{e}_{x'} \quad (14)$$

y la fuerza de fricción sobre el émbolo es

$$\mathbf{F}_{\text{fricción}} = \pi DL_3 \vec{\tau}_{\text{fluido-émbolo}} = \pi DL_3 \left( -\frac{U\mu}{h} + \frac{p_2(t) - p_1(t)}{L_3} \frac{h}{2} \right) \mathbf{e}_{x'}. \quad (15)$$

La fuerza de presión que el líquido ejerce sobre el émbolo es,

$$\mathbf{F}_{\text{presión}} = \frac{\pi(D^2 - D_2^2)}{4} p_2(t) \mathbf{e}_{x'} - \frac{\pi D^2}{4} p_1(t) \mathbf{e}_{x'}; \quad (16)$$

obsérvese que esta última es grande comparada con la fuerza de fricción

$$\frac{|\mathbf{F}_{\text{fricción}}|}{|\mathbf{F}_{\text{presión}}|} \sim \frac{Dh\Delta p}{D^2\Delta p} \sim \frac{h}{D} \ll 1. \quad (17)$$

---

<sup>8</sup> En realidad, el líquido cavita cuando el valor de la presión  $p_2$  alcanza la presión de vapor; como es sabido la presión de vapor depende de la temperatura y a temperatura ambiente su valor es del orden del 5% de la presión atmosférica por lo que en muchas situaciones prácticas se toma para ella, en primera aproximación, un valor nulo.

## 162 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

A este último resultado se podría haber llegado más rápidamente mediante estimaciones de la fuerza de fricción; en efecto,

$$\mathbf{F}_{\text{fricción}} \sim \mu \frac{v_{\text{ran}}}{h} D L_3 \sim (p_2 - p_1) h D \ll (p_1 - p_2) D^2, \quad (18)$$

donde la velocidad en la ranura se ha estimado a partir de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección longitudinal de la ranura,  $v_{\text{ran}} \sim (h^2/\mu)(p_1 - p_2)/L_3$ .

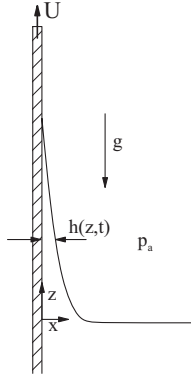
La fuerza  $\mathbf{F}$  necesaria para mover a la pieza con la frecuencia apropiada se obtiene a partir de la ecuación del movimiento del émbolo

$$\frac{\pi}{4} D^2 L_3 \rho_e \frac{d^2 H}{dt^2} = \mathbf{F} - \frac{\pi}{4} D^2 L_3 (\rho_e - \rho) - \mathbf{F}_{\text{presión}}. \quad (19)$$

**Problema 5.13**

Una placa bidimensional parcialmente sumergida en un depósito que contiene un líquido de viscosidad  $\mu$  y densidad  $\rho$  asciende paralelamente a sí misma con velocidad  $U(t)$ . El arrastre de líquido forzado por el movimiento de la placa, en competencia con la gravedad, hace ascender a éste formando sendas películas sobre las caras de la placa, una de las cuales se esquematiza en la figura. Si se supone en el análisis que el movimiento del líquido es con fuerzas de viscosidad dominantes, calcular

1. Distribución de presiones y velocidades en la película.
2. Ecuación diferencial que gobierna el espesor  $h(z, t)$  de la película.
3. Considerar el caso en el que la velocidad de la placa varía potencialmente con el tiempo,  $U(t) = U_o t^\alpha$  donde  $U_o$  es una constante con dimensiones apropiadas para el que el problema planteado en el apartado anterior admita una solución de semejanza válida a distancias suficientemente grandes respecto a la superficie libre del depósito. Escribir, entonces, la dependencia funcional de las variables y la ecuación diferencial ordinaria y condiciones de contorno que determinan el problema.



Resolución:

**Apartado 1.-**

El líquido se mueve con velocidades que son del mismo orden de magnitud que la velocidad de ascensión de la placa  $U(t)$  y el tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas  $t_o$  es del orden de  $L/U$ , donde  $L = \int_o^t U(\tau) d\tau$ ; se tiene, por tanto, que las fuerzas de inercia (temporales y convectivas) son despreciables frente a las de viscosidad si

$$\frac{U(t)e^2}{\nu L} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{e^2}{\nu t_o} \ll 1, \quad (1)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática. Finalmente, el orden de magnitud del espesor  $e$  de la película líquida puede estimarse a partir de las propiedades del líquido y de la fuerza  $F$  por unidad de longitud que hay que aplicar sobre la placa bidimensional para que ésta se mueva con velocidad  $U(t)$ . Esta fuerza es proporcional al esfuerzo viscoso y a la longitud de la película líquida  $F \sim [\mu U(t)/e]L$ , de modo que el espesor crece con la viscosidad del líquido y es tanto menor cuanto mayor es la fuerza aplicada. Sustituyendo este espesor en cualquiera de las relaciones de (1) se obtiene finalmente el criterio para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominantes

$$\frac{\rho \mu U^3 L}{F^2} \ll 1. \quad (2)$$



## 164 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Si el movimiento es con fuerzas de viscosidad dominante la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del eje  $z$  se reduce a

$$-\frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

donde  $u$  es la componente de la velocidad según el eje  $z$  y la última de las ecuaciones en (3) (fluidostática) se justifica por el hecho de que en primera aproximación no hay movimiento en la dirección  $x$  perpendicular a la placa ( $v \ll u$ , donde  $v$  es la componente de la velocidad perpendicular a la placa). La integración de esta última ecuación, con la condición de contorno de que en el borde de la película  $x = h(z, t)$  la presión es  $p_a$ , proporciona

$$p + \rho gz = p_a + \rho gh(z, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial z} = \rho g \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (4)$$

mientras que la integración de la primera de las ecuaciones de (3) teniendo en cuenta (4) proporciona

$$u(x, z, t) = \rho g \frac{\partial h}{\partial z} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \quad (5)$$

donde las constantes de integración se calculan a partir de las condiciones de contorno  $u(0, z, t) = U(t)$  y  $\partial u / \partial x|_{x=h(z, t)} = 0$ ; la última de las condiciones está asociada al hecho de que el aire, por ser su viscosidad muy pequeña, opone poca resistencia al movimiento ascendiente del líquido. Se tiene entonces

$$u(x, z, t) = U + \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial h}{\partial z} x \left( h - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

y el caudal en la dirección  $z$  por unidad de longitud perpendicular al plano del dibujo es

$$q_z = \int_0^{h(z, t)} u \, dx = U h + \frac{\rho g h^3}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (7)$$

Conviene indicar que el perfil de velocidades es el resultante de uno uniforme, de Couette, que arrastra el fluido hacia arriba y otro parabólico, de Poiseuille, debido a la acción de la gravedad, que tiende a devolver el líquido al depósito.

### Apartado 2.-

La ecuación diferencial que gobierna el espesor  $h(z, t)$  de la película se obtiene de la ecuación de Reynolds

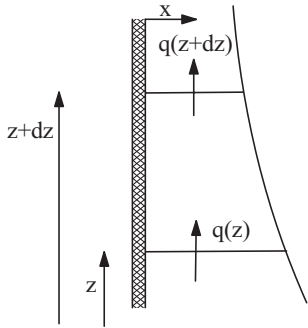
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho g h^3}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0. \quad (8)$$

Obsérvese que la ecuación (8) puede obtenerse también sin más que aplicar la condición de conservación de la masa al elemento diferencial de la figura

$$\frac{d}{dt} \int_z^{z+dz} h(z, t) \, dz + q(z + dz, t) - q(z, t) = 0, \quad (9)$$

que conduce a (8) tras desarrollar  $q(z + dz, t)$  en serie de Taylor.

La ecuación en derivadas parciales no lineal (8) para el cálculo de  $h(z, t)$  es de primer orden en la variable temporal y de segundo orden en la derivada espacial por lo que es necesario imponer una condición inicial y dos condiciones de contorno. Como condición inicial se impondrá  $h(z, 0) = 0$ ,  $z > 0$ ; se impondrá también que el espesor de la película es nulo,  $h(z_o, t) = 0$ , para valores de  $z$  mayores que el punto  $z_o$  definido en la forma  $z_o = \int_0^t U(\tau) \, d\tau$ . Por el contrario, no se pueden imponer condiciones de contorno en el depósito,  $z = 0$ , ya que existe una región entre el depósito y la película donde el movimiento del líquido no es unidireccional como en esta última y, por tanto, (7) no es válida allí. En esta región debería considerarse además el efecto de las fuerzas de tensión superficial.



**Apartado 3.-**

Para explorar la existencia de soluciones de semejanza<sup>9</sup> se debe considerar la dependencia funcional de cada uno de los tres términos de la ecuación (8)

$$\left. \begin{array}{l} \text{term. 1} \sim \frac{h}{t} \\ \text{term. 2} \sim \frac{U h}{z} \sim \frac{t^\alpha h}{z} \\ \text{term. 3} \sim \frac{h^4}{z^2} \end{array} \right\} \text{de tal manera que} \quad \frac{\text{term. 1}}{\text{term. 2}} \sim \frac{z}{t^{\alpha+1}} \sim \frac{\text{term. 3}}{\text{term. 2}} \sim \frac{h^3}{(z t^\alpha)}$$

Obsérvese que si  $t$ ,  $z$  y  $h$  cambiasen de forma tal que los cocientes permaneciesen invariantes,  $z/t^{\alpha+1} = h^3/(z t^\alpha) = \text{cte}$ , entonces, la ecuación diferencial es también invariante ante ese grupo de transformaciones; en efecto si se define

$$h = \left( \frac{3\mu U_o^2}{\rho g} \right)^{1/3} t^{(2\alpha+1)/3} f(\eta) \quad \text{con} \quad \eta = \frac{z}{U_o t^{\alpha+1}}, \quad (10)$$

se obtiene la ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden que proporciona el espesor adimensional  $f(\eta)$  de la película líquida

$$\frac{2\alpha+1}{3} f + [1 - (1+\alpha)\eta] \frac{df}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( f^3 \frac{df}{d\eta} \right) = 0, \quad (11)$$

siendo las correspondientes condiciones de contorno,

$$f(\eta_o) = 0 \quad \text{siendo} \quad \eta_o = \frac{z_o}{U_o t^{\alpha+1}} = \frac{1}{U_o t^{\alpha+1}} \int_0^t U_o \tau^\alpha d\tau = \frac{1}{\alpha+1} \quad (12)$$

y la surgida de la condición inicial,

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0. \quad (13)$$

Al faltar una condición de contorno, la integración numérica de (11) no es posible. En su lugar, es interesante estudiar el comportamiento de la solución en el entorno del punto  $\eta = \eta_o$ . En efecto, en las proximidades de  $\eta_o$  es conveniente escribir la ecuación (11) en la forma

$$\frac{2\alpha+1}{3} f + [1 - (1+\alpha)(\eta - \eta_o + \eta_o)] \frac{df}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( f^3 \frac{df}{d\eta} \right) = \frac{2\alpha+1}{3} f - (1+\alpha)(\eta - \eta_o) \frac{df}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} \left( f^3 \frac{df}{d\eta} \right) = 0, \quad (14)$$

donde se ha hecho uso de (12) pues

$$[1 - (1+\alpha)\eta_o] \frac{df}{d\eta} = 0. \quad (15)$$

Como la altura de la película se anula en ese punto se ensayarán posibles soluciones de la forma

$$f = C(\eta_o - \eta)^a \quad \text{con} \quad 0 \leq \eta \leq \eta_o \quad \text{y} \quad a > 0,$$

que introducidas en (14) proporciona, después de dividir toda la ecuación por el término  $C(\eta_o - \eta)^a$ ,

$$\frac{2\alpha+1}{3} - (1+\alpha)a + a(4a-1)C^3(\eta_o - \eta)^{3a-2} = 0. \quad (16)$$

Obsérvese que comportamientos en torno a  $\eta_o$  con  $a < 2/3$  no son posibles pues; para impedir que el tercer sumando de (16) se haga singular se requiere que  $a = 1/4$  pero este valor no satisface que los dos primeros términos se anulen pues

$$\frac{2\alpha+1}{3} - (1+\alpha)a \neq 0 \quad \text{para} \quad a = 1/4. \quad (17)$$

<sup>9</sup> Véase, por ejemplo, *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos*, A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, 2005.

Luego en principio las posibles soluciones de (11) que satisfagan la condición (12) requieren un comportamiento en torno a  $\eta_o$  con  $3a - 2 \geq 0$ . En el caso  $a > 2/3$ , el tercer sumando del primer miembro es despreciable frente a los otros dos lo que conduce a una desigualdad de imposible cumplimiento pues

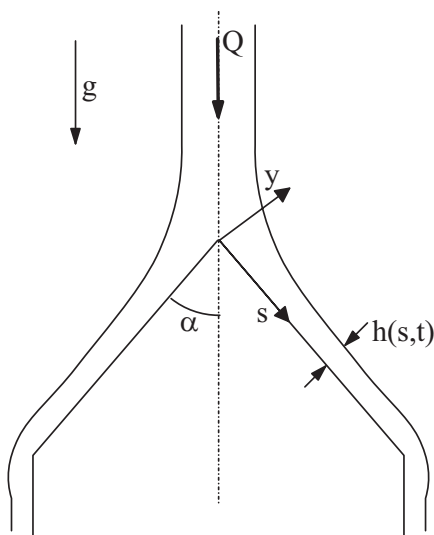
$$\frac{2\alpha + 1}{3} - (1 + \alpha)a \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\alpha + 1}{3(1 + \alpha)} > \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + 1 \not\geq 2(1 + \alpha). \quad (18)$$

La única posibilidad, por tanto, es la que corresponde al caso  $a = 2/3$ , para el que (16) proporciona  $C = (3/10)^{1/3}$ . Si se arranca numéricamente la integración de (11) desde  $\eta_o$  con la solución  $f = (3/10)^{1/3}(\eta_o - \eta)^{2/3}$  se obtiene el espesor de la película como función de  $\eta$ . Naturalmente, la solución obtenida no es válida cerca del origen  $\eta \simeq 0$  donde tampoco es válida la ecuación (11), que describe la película líquida, por las razones anteriormente expuestas.

**Problema 5.14**

Un caudal  $Q$  de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  en la forma de un chorro incide sobre el vértice de un cono de ángulo  $\alpha$  como se indica en la figura. A distancias del vértice del orden del diámetro del chorro, el líquido adquiere un movimiento casi unidireccional y forma una película delgada cuyo movimiento se desea describir en el supuesto de que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el flujo del líquido. Supuesto que el movimiento es estacionario, se desea calcular:

1. Ecuaciones y condiciones de contorno que determinan el campo de velocidades y presiones en la película líquida.
2. Criterios para que el movimiento sea con fuerzas de viscosidad dominantes.
3. Distribución de velocidades y presiones en la película líquida.
4. Espesor de la película.
5. Para tiempos suficientemente pequeños para los que la película líquida no ha alcanzado la situación estacionaria, determinar:
  - a) Criterios para que el movimiento del líquido sea con fuerzas de viscosidad dominante.
  - b) Ecuación diferencial que gobierna el espesor  $h(s, t)$  de la película líquida.
  - c) En el caso de que la ecuación anterior admita una solución de semejanza, escribir la ecuación diferencial ordinaria que gobierna el espesor de la película líquida.
  - d) Obtener la solución límite para tiempos grandes.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Si  $\mathbf{e}_s$  y  $\mathbf{e}_y$  representan los versores unitarios en la dirección a la generatriz y normal a ella respectivamente, la aceleración de la gravedad se expresa matemáticamente como

$$\mathbf{g} = g \cos \alpha \mathbf{e}_s - g \sin \alpha \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

donde el origen del eje  $s$  es el vértice del cono y el del eje  $y$  la generatriz del mismo. Las ecuaciones de cantidad de movimiento que gobiernan la capa líquida delgada en el supuesto de fuerzas de viscosidad sean dominantes son

$$-\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cos \alpha + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

donde  $u_s$  y  $u_y$  son las componentes de la velocidad del líquido en la capa delgada según los ejes  $\mathbf{e}_s$  y  $\mathbf{e}_y$  y se ha hecho la aproximación de capa delgada  $u_y \sim u_s h/L \ll u_s$  y  $\Delta_y(p + \rho g z) \ll \Delta_s(p + \rho g z)$  que expresa que las variaciones de presión en la dirección transversal a la película son muy pequeñas frente a las que hay en sentido longitudinal y, por tanto, en primera aproximación aquéllas se pueden suponer nulas, lo que conduce a la última de las ecuaciones en (2). La integración de esta última ecuación con la condición de que en la superficie de la película  $y = h(s, t)$  la presión es la atmosférica proporciona

$$p + \rho g y = p_a + \rho g h \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g \sin \alpha \frac{dh}{ds}. \quad (3)$$

Sustituyendo la última expresión en (2) se obtiene la ecuación que proporciona el perfil de velocidades en la película líquida

$$-\rho g \sin \alpha \frac{dh}{ds} + \rho g \cos \alpha + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Obsérvese que al movimiento del líquido contribuyen dos términos:  $\rho g \cos \alpha$  representa la componente de la gravedad en la dirección de la generatriz del cono, el otro sumando representa el gradiente de presión hidrostática asociada a que la altura de la película varía y, por tanto, el peso por unidad de área de la columna líquida en un punto es tanto mayor cuanto mayor sea la altura de la película en ese punto; naturalmente, el peso de la capa es debida a la componente de la placa en la dirección normal de la película.

### Apartado 2.-

Antes de proceder a la integración de (4) se puede estimar los criterios para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes. En efecto, el orden de magnitud de las velocidades en la película líquida se pueden estimar a partir de (4) y depende fundamentalmente de cual de los dos efectos asociados a la gravedad sea dominante. En situaciones en las que  $\alpha$  sea pequeño o bien que  $\sin \alpha \sim \cos \alpha$ , el primer sumando en (4) es despreciable frente al segundo ya que la película líquida es delgada y su espesor  $h$  es pequeño frente a su longitud característica  $L$  en la dirección de la generatriz. En ese caso, la velocidad característica del líquido y la altura característica de la película son

$$u_s \sim \frac{h^2}{\mu} \rho g \quad \text{y} \quad h \sim \frac{Q}{Lu_s}, \quad (5)$$

donde la altura característica de la película se ha obtenido de la condición de conservación de la masa. Se obtiene entonces

$$v_s \sim \left( \frac{\rho g Q^2}{\mu L} \right)^{1/3} \quad \text{y} \quad h \sim \left( \frac{Q \mu}{\rho g L^3} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

y la condición para que las fuerzas de viscosidad dominen se expresa

$$\frac{\rho u_s h}{\mu} \frac{h}{L} \sim \left( \frac{\rho^2 Q^4}{g \mu^2 L^7} \right)^{1/3} \ll 1, \quad (7)$$

que es la condición que deben satisfacer los parámetros del problema para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes.

En situaciones en las que el ángulo del cono es  $\pi/2$ , que corresponde a la incidencia del chorro sobre un plano horizontal, o ángulos  $\alpha$  próximos a  $\pi/2$  y tales que  $\tan \alpha \gg L/h$ , el primer sumando de (4) es dominante frente al segundo y se tiene

$$u_s \sim \left( \frac{\rho g Q^3}{\mu L^4} \right)^{1/4} \quad \text{y} \quad h \sim \left( \frac{\mu Q}{\rho g} \right)^{1/4}, \quad (8)$$

de modo que las fuerzas de viscosidad serán dominantes siempre que

$$\frac{\rho u_s h}{\mu} \frac{h}{L} \sim \left( \frac{\rho^3 Q^5}{\mu^3 g L^8} \right)^{1/4} \ll 1. \quad (9)$$

### **Apartado 3.-**

La integración de (4) con las condiciones de contorno  $u_s(0) = 0$  y  $du_s/dy|_{y=h(s)} = 0$  (esfuerzo nulo en la interfase) proporciona

$$u_s = \frac{\rho g}{\mu} \left( \cos \alpha - \frac{dh}{ds} \sin \alpha \right) y \left( h - \frac{y}{2} \right) \quad (10)$$

y el caudal  $q_s$  por unidad de longitud en la dirección acimutal es

$$q_s = \frac{\rho g}{\mu} \left( \cos \alpha - \frac{\partial h}{\partial s} \sin \alpha \right) \int_0^h y(h - y/2) dy = \frac{\rho g h^3}{3\mu} \left( \cos \alpha - \frac{dh}{ds} \sin \alpha \right). \quad (11)$$

### **Apartado 4.-**

Obsérvese que el perfil de velocidades dado en (10) satisface las ecuaciones de cantidad de movimiento pero no la de continuidad (el espesor de la película depende naturalmente del caudal). Si se impone la conservación de la masa (o volumen del líquido) se tiene

$$Q = 2\pi s \sin \alpha q_s = \frac{2\pi \rho g}{3\mu} s \sin \alpha h^3 \left( \cos \alpha - \frac{\partial h}{\partial s} \sin \alpha \right). \quad (12)$$

En el caso en que el ángulo  $\alpha$  sea tal que  $\tan \alpha \ll L/h$ , el perfil de la película viene dado por

$$h = \left( \frac{3\mu Q}{2\pi \rho g \sin \alpha \cos \alpha s} \right)^{1/3}, \quad (13)$$

mientras que en el caso  $\tan \alpha \gg L/h$  ( $\alpha \simeq \pi/2$ ), se tiene la ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$\frac{dh^4}{d \ln s} = -\frac{6\mu Q}{\pi \rho g} \Rightarrow h = \left( h^4(s_o) - \frac{6\mu Q}{\pi \rho g} \ln \frac{s}{s_o} \right)^{1/4}, \quad (14)$$

donde la constante de integración  $h(s_o)$  representa el espesor en algún punto de la película  $s_o$  donde éste sea conocido. Obsérvese que las expresiones (13) y (14) para los espesores de película no son válidos en las proximidades del vértice del cono  $s = 0$ , ya que allí no es válida la aproximación de capa delgada [ecuaciones (2)] y debe resolverse el problema axilsimétrico completo de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} &= 0, \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right], \\ 0 &= -\frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $u_r$  y  $u_z$  son las componentes de la velocidad según los ejes  $r$  y  $z$ ; la resolución numérica del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, lineal y de segundo orden no se abordará aquí por su dificultad. Naturalmente, las condiciones de contorno de este problema son las de acoplamiento con el chorro y con la solución de capa delgada anteriormente encontrada.

**Apartado 5.-**

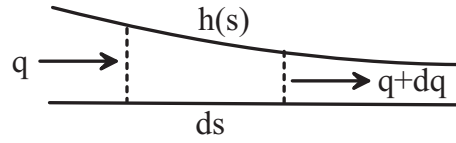
Por ser el movimiento no estacionario, no sólo las fuerzas de inercia convectivas tienen que ser pequeñas frente a las de viscosidad y, por tanto, los criterios (7) y (9) deben ser satisfechos, sino que también las fuerzas de inercia temporales han de ser pequeñas frente a las de viscosidad para lo que el tiempo característico de cambio  $t_o$  de las magnitudes fluidas debe satisfacer la condición

$$\frac{h^2}{\nu t_o} \sim \frac{u_s h^2}{\nu L} \ll 1, \quad (16)$$

donde se ha hecho uso de que  $t_o \sim L/u_s$  está asociado al cambio de posición del frente de la película; obsérvese que el criterio anterior se reduce a los criterios (7) y (9) para los casos considerados allí.

Por ser dominantes las fuerzas de viscosidad, las distribuciones de velocidades y presiones vienen dadas por las ecuaciones (2) y por tanto son las calculadas para el caso estacionario.

Para determinar la ecuación diferencial que gobierna el espesor de la película basta con aplicar la ecuación de Reynolds o lo que es lo mismo aplicar la condición de conservación de la masa a un volumen de control elemental como el mostrado en la figura



$$s \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\rho g h^3}{3\mu} s \left( \cos \alpha - \frac{\partial h}{\partial s} \sin \alpha \right) \right] = 0. \quad (17)$$

Esta ecuación, en derivadas parciales, no lineal, de primer orden en el tiempo y de segundo orden en la coordenada espacial, proporciona el espesor de la película líquida sobre la generatriz del cono cuando se imponen condiciones iniciales y de contorno apropiadas. Condiciones de contorno que no son sencillas de obtener puesto que existe una zona de transición entre el chorro y la capa líquida cuya descripción implica la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (15). En cualquier caso la posición del frente de la película líquida se obtiene de la condición de conservación del volumen

$$\int_0^t Q dt = Q t = \int_0^{s_f(t)} 2\pi \sin \alpha s h(s, t) ds, \quad (18)$$

que expresa que el volumen de la película líquida en el tiempo  $t$  es igual al aportado por el chorro hasta ese instante.

En el caso en que  $\tan \alpha \sim \mathcal{O}(1)$ , la ecuación (17) se reduce a

$$s \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho g h^3}{3\mu} s \cos \alpha \right) = 0; \quad (19)$$

es fácil observar de (19) y (18) que si las variables  $h$ ,  $s$  y  $t$  experimentan cambios asociados a un grupo de transformaciones pero tales que los cocientes  $h^2 t/s$  y  $s^2 h/t$  permanezcan invariantes, entonces la función  $h t^{1/5}$  depende de una única variable que es combinación de  $s$  y de  $t$  y la ecuación (19) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria no lineal. En efecto, si se define

$$h = \left( \frac{Q}{2\pi \sin \alpha} \right)^{1/5} \left( \frac{3\mu}{\rho g \cos \alpha} \right)^{2/5} t^{-1/5} f(\eta), \quad \eta = \left( \frac{3\mu}{\rho g \cos \alpha} \right)^{1/5} \left( \frac{2\pi \sin \alpha}{Q} \right)^{2/5} \frac{s}{t^{3/5}}, \quad (20)$$

la ecuación (19) se reduce a

$$-\frac{\eta}{5} (f + 3\eta f') + \frac{d}{d\eta} (\eta f^3) = 0 \quad (21)$$

y la condición (18) se expresa

$$\int_0^{\eta_f} f(\eta) \eta d\eta = 1, \quad (22)$$

donde

$$\eta_f = \left( \frac{3\mu}{\rho g \cos \alpha} \right)^{1/5} \left( \frac{2\pi \sin \alpha}{Q} \right)^{2/5} \frac{s_f}{t^{3/5}} \quad (23)$$

indica la posición del frente de la película líquida.

Aunque no se intentará aquí la integración numérica de (21) por las dificultades ya mencionadas de la condición de contorno en el origen, es interesante comprobar que esta ecuación contiene también a la solución estacionaria. En efecto, para tiempos suficientemente grandes, que corresponden a valores pequeños de  $\eta$ , el primer término de (21) es despreciable y se tiene

$$\eta f^3 = C, \quad \frac{\pi \rho g \sin 2\alpha}{3\mu Q} sh^3 = C, \quad (24)$$

que coincide con el resultado obtenido en (12).

Para ángulos próximos a  $\pi/2$  y tales que  $\tan \alpha \gg L/h$ , la ecuación (17) se reduce a

$$s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\rho g}{3\mu} \frac{\partial}{\partial s} \left( sh^3 \frac{\partial h}{\partial s} \right) = 0. \quad (25)$$

Como en el caso anterior, es fácil observar que (25) admite solución de semejanza si las variables cambian pero en forma tal que  $h^3 t/s^2$  y  $hs^2/t$  permanezcan invariantes frente a un grupo de transformaciones. Esto sugiere definir las variables

$$h = \left( \frac{3\mu Q}{2\pi \rho g} \right)^{1/4} f(\eta), \quad \eta = \left( \frac{24\pi^3 \mu}{\rho g Q^3} \right)^{1/8} \frac{s}{\sqrt{t}} \quad (26)$$

con lo que (25) resulta en las nuevas variables

$$\frac{1}{2} \eta^2 \dot{f} + \frac{d}{d\eta} (\eta f^3 \dot{f}) = 0; \quad (27)$$

la condición (18) se expresa

$$\int_0^{\eta_f} f(\eta) \eta d\eta = 1. \quad (28)$$

Obsérvese que la solución de (25) para tiempos grandes ( $\eta$  pequeño) conduce después de dos integraciones a una expresión como la mostrada en (14).





## CAPÍTULO 6

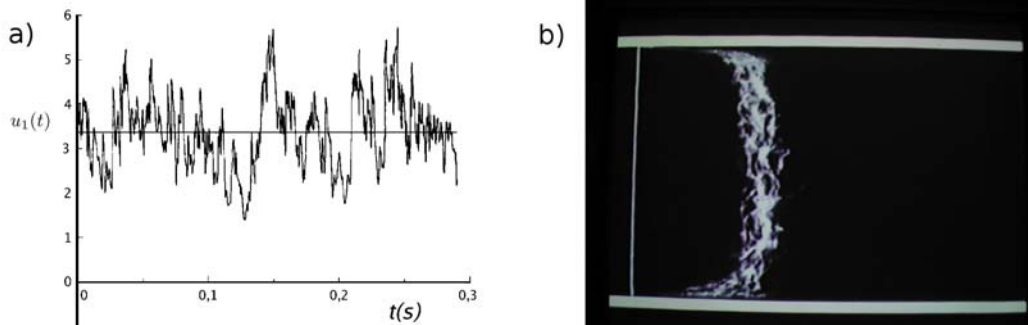
# Movimiento turbulento de líquidos en conductos

### Introducción

La estructura del movimiento de líquidos en conductos depende esencialmente del valor del número de Reynolds, definido éste como

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \quad (6.1)$$

donde  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad del fluido, respectivamente,  $D$  es el diámetro característico de la sección transversal del conducto, y  $V$  es la velocidad media característica a lo largo del conducto;  $V$  puede expresarse también en términos del caudal circulante por el conducto como  $V = Q/(\pi D^2/4)$ . En efecto, el experimento de Reynolds muestra que si el valor de  $Re$  supera un cierto valor crítico,  $Re_{cr}$ , un flujo laminar se hace inestable y experimenta un cambio radical en su estructura; el fenómeno se conoce como transición a la turbulencia. La estructura de un flujo turbulento es esencialmente tridimensional y no estacionaria, con distribuciones de valores locales de las magnitudes fluidas que varían muy rápidamente, y de manera altamente irregular (casi aleatoria, véase la figura inferior etiquetada como a), en el espacio y en el tiempo. Los flujos turbulentos son predecibles en términos estadísticos en el sentido de que si en cualquier punto fijo del dominio fluido se miden los valores instantáneos de las variables fluidas durante un intervalo de tiempo suficientemente largo y se promedian los resultados en dicho intervalo, los valores medios locales obtenidos se comportan de manera determinista y varían en el espacio y en el tiempo de forma mucho más suave que los valores instantáneos como se muestra en la foto inferior.



Afortunadamente, desde un punto de vista práctico el conocimiento de los valores medios de las magnitudes fluidas es generalmente mucho más relevante que el de los valores instantáneos, por lo que el análisis del movimiento turbulento de fluidos en conductos tiene como objetivo el cálculo de las distribuciones de dichos valores. De esta forma, es conveniente expresar los valores instantáneos en cada punto del dominio fluido de la forma

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t), p = \bar{p}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t), T = \bar{T}(\mathbf{x}, t) + T'(\mathbf{x}, t), \quad (6.2)$$

donde  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  y  $\bar{T}$  denotan valores medios locales de la velocidad, presión y temperatura en el punto  $\mathbf{x}$ , mientras que las cantidades primadas representan fluctuaciones respecto de los valores medios.

### Ecuaciones del movimiento turbulento en conductos

Se considerarán conductos de sección lentamente variable, esto es, si  $D(x) \sim D_o$  representa el diámetro del conducto ( $D_o$  es su orden de magnitud) y  $x$  la coordenada longitudinal a lo largo del conducto, se supondrá que  $|dD/dx| \sim D_o/L \ll 1$  y  $D_o \ll R_c$ , donde  $L$  y  $R_c$  son la longitud y el radio de curvatura característicos de la línea media longitudinal del conducto. Como consecuencia de la casi unidireccionalidad del movimiento impuesta por la geometría, el valor medio de la presión,  $\bar{p}$ , es en primera aproximación función exclusiva de las variables  $x$  y  $t$ . En efecto, si  $V$  y  $V_T \sim VD_o/L \ll V$  representan el orden de magnitud de las velocidades medias  $\bar{v}_x$  y  $\bar{v}_T$  en la dirección longitudinal y transversal del conducto respectivamente, se tiene  $\Delta\bar{p} \sim \rho V^2 \sim \rho V_T^2 (L/D_o)^2 \gg \Delta_T \bar{p}$ . Además, debido a la eficiencia del transporte turbulento de cantidad de movimiento y de calor asociado al movimiento fluctuante de las partículas fluidas, los perfiles de velocidades y temperaturas medias,  $\bar{v}_x$  y  $\bar{T}$  en cada sección del conducto son muy uniformes excepto, como se observa en la foto, muy cerca de la pared. Por tanto, el movimiento turbulento en el conducto puede analizarse en primera aproximación mediante un modelo unidireccional basado en cantidades medias definidas para cada sección del conducto como

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{A(x)} \int \bar{v}_x(x, y_1, y_2, t) d\sigma, \quad p(x, t) = \frac{1}{A(x)} \int \bar{p}(x, y_1, y_2, t) d\sigma, \\ T(x, t) &= \frac{1}{A(x)} \int \bar{T}(x, y_1, y_2, t) d\sigma, \end{aligned} \quad (6.3)$$

donde  $y_1$  y  $y_2$  corresponden a un par de coordenadas cartesianas en el plano de la sección  $A(x)$  y, por tanto,  $d\sigma = dy_1 dy_2$ .

El efecto de la fricción, debido al acusado gradiente de velocidades medias locales que tiene lugar muy cerca de la pared, se tiene en cuenta de forma global en el modelo introduciendo un esfuerzo de fricción medio, promediado en el perímetro mojado  $P_m(x)$  de cada sección,  $\tau_o$  definido en la forma

$$\tau_o = \frac{r_h}{A} \int_{P_m} \tau_p dl; \quad (6.4)$$

siendo  $r_h$  el radio hidráulico de la sección del conducto, definido como el cociente entre el área de la sección  $A(x)$  y el perímetro mojado  $P_m(x)$ , es decir, aquél en contacto con el fluido y donde surgirán esfuerzos de fricción.

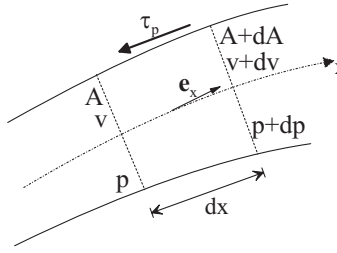
$\tau_o(x, t)$  se calculará a partir del factor de fricción experimental  $\lambda$ ,

$$\tau_o = -\lambda \rho |v| v / 8, \quad (6.5)$$

donde se ha tenido en cuenta que el signo de  $\tau_o$  es siempre opuesto al de  $v$ . Para el cálculo de  $\lambda$ , se supondrán válidos los resultados para conductos infinitamente largos de sección constante considerando, además, que la no estacionariedad del movimiento medio afecta escasamente a la forma en que  $\lambda$  depende de los parámetros del problema: el número de Reynolds y la rugosidad relativa. El coeficiente  $\lambda = \lambda(4r_h v / \nu, \epsilon)$  se representa gráficamente mediante el ábaco de Moody siendo  $4r_h$  el diámetro del conducto hidráulico equivalente y  $\epsilon = h_s / (4r_h)$  la rugosidad relativa de la pared. Asimismo, el efecto del acusado gradiente de temperatura media local que se produce muy cerca de la pared del conducto también se tiene en cuenta de forma global en el modelo introduciendo un flujo de calor por unidad de área y tiempo transferido entre la pared del conducto y el fluido, promediado en el perímetro en el que existe conducción de calor de cada sección

$$q_o = \frac{r_h^T}{A} \int_P q_p dl. \quad (6.6)$$

El calor  $q_o$  puede modelarse mediante la analogía de Reynolds o cualquier otra analogía semiempírica entre el flujo de calor y el esfuerzo de fricción en la pared que permita calcular  $q_o$  como función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. De manera análoga al radio hidráulico se define el radio térmico  $r_h^T$  como el cociente entre el área de la sección  $A(x)$  y el perímetro de la sección por el cual hay transferencia de calor por conducción.



Las ecuaciones que gobiernan las variables globales (6.3) se obtendrán aplicando los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía al volumen de control mostrado en la figura adyacente consistente en una rebanada infinitesimal del conducto comprendida entre las secciones  $A(x)$  y  $A(x+dx)$ . Para ello obsérvese que si  $\Phi$  representa una magnitud por unidad de masa la variación en la unidad de tiempo de la cantidad de dicha magnitud contenida en el volumen de control es  $dx\partial(\rho A\Phi)/\partial t$  mientras que el flujo convectivo neto que abandona dicho volumen a través de su superficie es  $(\rho v A\Phi)_{x+dx} - (\rho v A\Phi)_x = dx\partial(\rho v A\Phi)/\partial x + 0(dx^2)$ . Por tanto, si se hace  $\Phi \equiv 1$  el principio de conservación de la masa proporciona

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = 0. \quad (6.7)$$

Análogamente, si se hace  $\Phi \equiv v$  y se tienen en cuenta la resultante de las fuerzas de presión,  $-dx A \partial p / \partial x$ , de fricción,  $A \tau_o / r_h$ , y la componente  $x$  de las fuerzas másicas (supuesta derivable de un potencial),  $-dx \rho A \partial U / \partial x$ , que actúan sobre el volumen de control considerado, el balance de cantidad de movimiento proporciona la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\lambda |v| v}{8 r_h}, \quad (6.8)$$

donde se ha hecho uso de (6.5) y (6.7). Finalmente, haciendo  $\Phi = e + v^2/2$  la ecuación de balance de la energía total proporciona, haciendo uso de (6.6),

$$\rho \frac{\partial(e + v^2/2)}{\partial t} + \rho v \frac{\partial(e + v^2/2)}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial(p v A)}{\partial x} - \rho v \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{q_o}{r_h T} + \frac{q_r}{A}, \quad (6.9)$$

donde  $q_r$  representa el calor por unidad de tiempo y unidad de longitud del conducto transferido por radiación o liberado por reacción química. Es también interesante escribir la ecuación de la entropía que se obtiene restando a (6.9) la ecuación (6.8) multiplicada por  $v$  y sustituyendo en el resultado la relación  $de = T dS + (p/\rho^2) d\rho$ ,

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho T v \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\lambda \rho |v|^3}{8 r_h} + \frac{q_o}{r_h} + \frac{q_r}{A}; \quad (6.10)$$

la ecuación (6.10) expresa que la entropía aumenta como consecuencia de la fricción y de la adición de calor.

### Ecuaciones del movimiento turbulento de líquidos en conductos

En el caso de líquidos  $\rho$  es constante y las ecuaciones (6.7) y (6.8) se escriben

$$A(x)v(x,t) = Q(t), \quad (6.11)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2/2 + \rho U) = -\frac{\lambda \rho |v| v}{8 r_h}. \quad (6.12)$$

La cantidad  $p_o \equiv p + \rho v^2/2$  es la presión de remanso del líquido y de acuerdo con (6.12) se conserva a lo largo del movimiento en el caso de que éste sea: a) estacionario o casi estacionario, b) con fuerzas másicas despreciables y c) con efectos de fricción despreciables; obsérvese, además, que la presión de remanso coincide con la presión en puntos donde la velocidad del fluido es nula o despreciable,  $v \simeq 0$ . Dado el caudal en el instante inicial (si el movimiento es no estacionario),  $Q(0)$ , y las condiciones de contorno apropiadas, la integración de la ecuación (6.12), junto (6.11), permite calcular la distribución de presiones y de velocidades a lo largo del conducto. En cuanto a las condiciones de contorno, éstas se suelen especificar en términos de la presión en los extremos del conducto  $p(0,t)$  y  $p(L,t)$ . Así, por ejemplo, si el conducto toma de un ambiente (o depósito de grandes dimensiones) donde el fluido está a una presión  $p_d$  y prácticamente en reposo [ $p_{od} \simeq p_d$ ], siempre que la toma está bien diseñada (es decir, no se producen desprendimientos de capa límite que den lugar a efectos de fricción apreciables en el flujo en la toma) se conservará la presión de remanso del flujo en

la toma,  $p_d = p_o(0, t)$  puesto que, además, debido a las dimensiones reducidas de la misma, el flujo es casi estacionario y sin efectos de fuerzas másicas y se tiene, por tanto, la condición

$$p(0, t) = p_d - \rho \frac{Q(t)^2}{2A^2(0)}; \quad (6.13)$$

por otra parte, en la descarga del flujo a un ambiente a presión  $p_a$  siempre tiene lugar el desprendimiento de la capa límite originándose una discontinuidad tangencial entre el chorro descargado y el ambiente que hace que la condición de contorno a la salida del conducto sea

$$p(L, t) = p_a. \quad (6.14)$$

También debe de tenerse en cuenta que, además de conductos lentamente variables donde se produce una variación de presión de remanso asociada a la fricción de la pared, en una instalación hidráulica pueden existir componentes tales como válvulas, ensanchamientos y contracciones bruscas, difusores, etcétera. En dichos dispositivos se produce una disipación localizada de la energía mecánica o, lo que es lo mismo, una disminución brusca de presión de remanso. Estas pérdidas, denominadas *pérdidas de carga localizadas* se deben a la fricción en el dispositivo debido a desprendimientos de capa límite y se modelan como proporcionales a una fracción  $K$  de la energía cinética por unidad de volumen. Por tanto, si el subíndice 1 y 2 indican las condiciones del fluido aguas arriba y aguas abajo del fluido la pérdida de energía mecánica, o pérdida de presión de remanso, viene dada por

$$p_{o1} - p_{o2} = K \frac{\rho v^2}{2}, \quad (6.15)$$

donde  $v$  normalmente es la mayor de las velocidades  $v_1$  y  $v_2$ .  $K$ , en la mayor parte de los casos, debe calcularse experimentalmente. Por ejemplo, para una toma que no esté bien diseñada,  $K \neq 0$ , y (6.13) se modifica a

$$p(0, t) = p_d - (1 + K) \rho \frac{Q(t)^2}{2A^2(0)}. \quad (6.16)$$

Finalmente, en líquidos el problema térmico está desacoplado del problema mecánico, de forma que la distribución de temperaturas del líquido en el conducto puede obtenerse a partir de la ecuación (6.10), con  $S = cT + \text{const.}$ , una vez obtenida la distribución de velocidades  $v(x, t)$ . Para ello debe modelarse primero  $q_o$ ; si se tiene en cuenta que la turbulencia transporta de forma igualmente efectiva calor que cantidad de movimiento es plausible extrapolar al régimen turbulento la analogía de Reynolds,<sup>1</sup> lo que proporciona

$$q_o = \frac{\lambda \rho c |v|}{8} (T_p - T), \quad (6.17)$$

donde  $T_p$  es la temperatura de la pared del conducto. La ecuación (6.10) se escribe entonces

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda |v| (T_p - T)}{8r_h}, \quad (6.18)$$

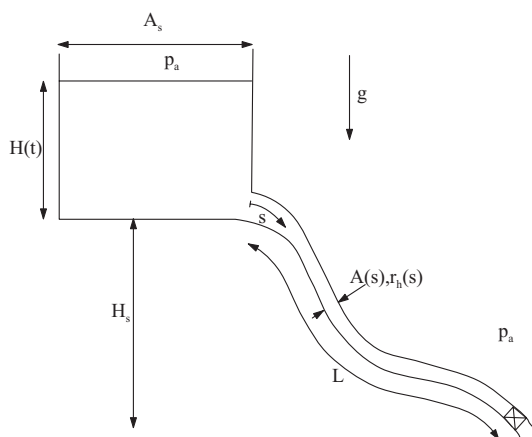
donde se han despreciado las variaciones de temperatura debidas a los efectos de la fricción puesto que el número adimensional  $V^2/(c\Delta T)$  es generalmente muy pequeño en líquidos; también se han supuesto despreciables los calores comunicados por radiación y reacción química. Dada la condición inicial  $T(x, 0)$  y una condición de contorno  $T(0, t)$  (o  $T(L, t)$ ) la integración de (6.18) permite conocer la distribución de temperaturas en el conducto,  $T(x, t)$ .

<sup>1</sup> El lector interesado encontrará una derivación y análisis riguroso de la analogía de Reynolds en el capítulo 14 del libro *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos* de A. Barrero y M. Pérez-Saborid, McGraw-Hill, Madrid, 2005.

**Problema 6.1**

La figura muestra un depósito de sección transversal  $A_d$  que contiene un líquido de densidad  $\rho$  que descarga a la atmósfera a través de un conducto de sección variable  $A(s)$ , radio hidráulico  $r_h(s)$  y longitud  $L$ , siendo  $s$  la variable espacial siguiendo al conducto y con origen en el extremo del conducto conectado al depósito. En el extremo inferior del conducto, situado a una cota  $H_s$  por debajo del fondo del depósito, se dispone de una válvula mediante la que puede controlarse el área  $A_s$  [ $A_s \leq A(L)$ ] de la sección de salida del líquido a la atmósfera; se supondrá que la pérdida de carga a la entrada del conducto es proporcional a un factor  $K$  constante, y a través de la válvula puede modelarse de la forma  $p_o(L) - p_{os} = C(1 - A_s/A(L))\rho v_s^2/2$ , donde  $p_o(L)$  es la presión de remanso del líquido a la entrada de la válvula,  $p_{os}$  y  $v_s$  son, respectivamente, la presión de remanso y la velocidad a la salida de la misma, y  $C$  es una constante adimensional conocida. Inicialmente la válvula está cerrada, el conducto lleno de líquido, y la superficie libre del líquido se encuentra a una cota  $H_o$  por encima del fondo del depósito. Si en un cierto instante comienza a abrirse la válvula con una ley  $A_s(t)$  conocida y el movimiento del líquido en el conducto es turbulento con factor de fricción  $\lambda$  constante, se pide:

1. Ecuaciones que gobiernan las evoluciones temporales del caudal de líquido a través del conducto,  $Q(t)$ , y de la altura de la superficie libre del líquido en el depósito,  $H(t)$ .
2. Si la apertura de la válvula puede considerarse instantánea resolver el problema planteado en el apartado anterior. Indicar la condición que deben de cumplir los datos del problema para que el movimiento del líquido en el conducto alcance un régimen casi estacionario, y obtener una solución analítica aproximada en este caso.
3. Resolver de forma aproximada las ecuaciones del apartado 1 para una ley de apertura de la válvula dada para la cual pueda considerarse que el conducto se encuentra en un régimen casi estacionario (tiempo característico de apertura  $t_{ap}$  mucho menor que el tiempo de residencia  $t_o$ ).

Resolución:Apartado 1.-

Para la resolución del problema se emplearán las coordenadas espaciales de la figura: la coordenada  $s$  con origen en la conexión del conducto con el depósito y dirigida en sentido del movimiento del líquido, y la coordenada vertical  $z$  con origen en el extremo inferior del conducto; naturalmente, la velocidad del líquido en la sección transversal del conducto correspondiente a un valor genérico de  $s$ ,  $v(s, t)$ , está relacionada con

el caudal a través del conducto,  $Q(t)$ , mediante la expresión  $v(s, t) = Q(t)/A(s)$ , donde  $A(s)$  es el área de la sección del conducto considerada. Por tanto, la ecuación que gobierna la distribución de presiones en el conducto en función del caudal es

$$\frac{\rho}{A(s)} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial}{\partial s} [p_o + \rho g z(s)] = -\frac{\lambda \rho Q^2}{8A^2(s)r_h(s)}, \quad (1)$$

donde  $p_o = p + \rho v^2/2$  es la presión de remanso en la sección del conducto correspondiente a un valor genérico de  $s$  y  $z(s)$  la cota de dicha sección. El caudal a través del conducto está relacionado con la variación en la unidad de tiempo de la altura de la superficie libre del líquido en el depósito mediante la ecuación de conservación de la masa

$$A_d \dot{H}(t) = -Q(t), \quad (2)$$

donde, en lo que sigue, el punteado de las magnitudes denota su diferenciación con respecto al tiempo. Si se integra (1) con respecto de  $s$  entre  $s = 0$  y  $s = L$  se obtiene

$$\rho \dot{Q} \int_0^L \frac{ds}{A(s)} + p_o(L, t) - p_o(0, t) - \rho g H_s = -\lambda \rho Q^2 \int_0^L \frac{ds}{8r_h(s)A(s)}, \quad (3)$$

donde  $p_o(L, t)$  y  $p_o(0, t)$  se determinan en función de  $Q(t)$  mediante las condiciones de contorno en la entrada y en la salida del conducto,

$$p_o(0, t) = p_a + \rho g H(t) - K \frac{\rho Q^2}{2A^2(0)} \quad (4)$$

y

$$p_o(L, t) = p_a + \frac{\rho Q^2}{2A_s^2(t)} \left\{ 1 + C \left[ 1 - \frac{A_s(t)}{A(L)} \right] \right\}. \quad (5)$$

Si se sustituyen (4) y (5) en (3) se obtiene la ecuación

$$\frac{L}{\bar{A}} \dot{Q} + \left[ \frac{\bar{A}^2}{A^2(0)} K + \frac{\bar{A}^2}{A_s^2(t)} + \frac{\lambda L}{4\bar{r}_h} + C \frac{\bar{A}^2}{A_s^2(t)} K \left[ 1 - \frac{A_s(t)}{A(L)} \right] \right] \frac{Q^2}{2\bar{A}^2} = g(H + H_s), \quad (6)$$

donde  $\bar{A}$  y  $\bar{r}_h$  denotan valores medios del área y del radio hidráulico del definidos como

$$\bar{A} = L \left[ \int_0^L \frac{ds}{A(s)} \right]^{-1}, \quad \bar{r}_h = L \left[ \int_0^L \frac{ds}{r_h(A/\bar{A})^2} \right]^{-1}. \quad (7)$$

La ecuación (6) expresa que la variación de la energía potencial por unidad de masa desde la superficie libre hasta la salida de la válvula se emplea en acelerar el fluido en el conducto, en acelerar el fluido en la sección de entrada [desde la velocidad nula en el depósito hasta la velocidad  $v(0, t)$ ], en vencer la fricción de las paredes y finalmente en acelerar el fluido a través de la válvula de salida.

Conocida la ley de apertura de la válvula  $A_s(t)$ , la ecuación diferencial ordinaria no lineal (6) permite determinar, junto con (2) y las condiciones iniciales

$$H(0) = H_o, \quad v(0) = 0, \quad (8)$$

las evoluciones temporales  $H(t)$  y  $Q(t)$ .

### **Apartado 2.-**

En este caso  $A_s(t) = A(L)$  para todo  $t > 0$  y la ecuación (6) se simplifica a

$$\frac{L}{\bar{A}} \dot{Q} + \left[ \frac{\bar{A}^2}{A^2(0)} K + \frac{\bar{A}^2}{A^2(L)} + \frac{\lambda L}{4\bar{r}_h} \right] \frac{Q^2}{2\bar{A}^2} = g(H + H_s), \quad (9)$$

cuya integración, junto con la ecuación (2), proporciona la solución del problema. Para llevar a cabo dicha integración es conveniente introducir variables adimensionales basadas en valores característicos durante el proceso de descarga del líquido: el caudal de líquido,  $Q_o$ , el tiempo característico de vaciado del depósito,  $t_o$ , y el nivel de líquido en el depósito,  $H_o$ . Con este propósito, obsérvese que igualando en (9) el orden de magnitud del segundo término del primer miembro con el del segundo miembro se obtiene la relación

$$Q \sim \bar{A} \sqrt{\frac{2gH_o}{K\bar{A}^2/A^2(0) + \bar{A}^2/A^2(L) + \lambda L/(4\bar{r}_h)}} \equiv Q_o \equiv \bar{A}v_o, \quad (10)$$

cuyo segundo miembro define, en función de los datos del problema, los valores característicos del caudal,  $Q_o$ , y de la velocidad del líquido en el conducto,  $v_o \equiv Q_o/\bar{A}$ . Por otra parte, de la ecuación de conservación de la masa (2) se deduce inmediatamente que el tiempo de vaciado del depósito es del orden de

$$\frac{A_d H_o}{Q_o} \equiv t_o, \quad (11)$$

que define el valor del tiempo característico de duración del proceso. En términos de las variables adimensionales

$$\tau = \frac{t}{t_o}, \quad \xi = \frac{Q}{Q_o} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{H}{H_o}, \quad (12)$$

con  $v_o$  y  $t_o$  dados por (10) y (11), las ecuaciones y condiciones iniciales (2), (9) y (8) se escriben

$$\dot{\eta} = -\xi, \quad \text{y} \quad \beta \dot{\xi} = \eta + \alpha - \xi^2, \quad (13)$$

$$\eta(0) = 1, \quad \xi(0) = 0, \quad (14)$$

donde se han definido los parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{H_s}{H_o} \quad \text{y} \quad \beta &= \frac{2}{K\bar{A}^2/A^2(0) + \bar{A}^2/A^2(L) + \lambda L/(4\bar{r}_h)} \frac{\bar{A}L}{v_o t_o} \\ &= \frac{2}{K\bar{A}^2/A^2(0) + \bar{A}^2/A^2(L) + \lambda L/(4\bar{r}_h)} \frac{LA_c}{A_d H_o}. \end{aligned} \quad (15)$$

Si se supone el caso típico de que  $\bar{A} \sim A(0) \sim A(L)$ , y si los efectos de fricción no son dominantes,  $K + \lambda L/(4\bar{r}_h)$  es a lo sumo  $O(1)$ ,  $\beta$  es del orden del cociente entre el tiempo característico de residencia de las partículas fluidas en el conducto y el tiempo característico de vaciado del depósito; naturalmente, y como se muestra en (15), dicho cociente puede expresarse también como el cociente entre el volumen del conducto y el del depósito. Las ecuaciones (13)-(14) pueden combinarse de forma inmediata para obtener el problema de valores iniciales no lineal de segundo orden para  $\eta$

$$\beta \ddot{\eta} - \dot{\eta}^2 + \eta + \alpha = 0, \quad \text{con} \quad \eta(0) = 1 \quad \text{y} \quad \dot{\eta}(0) = 0. \quad (16)$$

Puesto que en (16) no aparece explícitamente la variable independiente, dicho problema puede integrarse una primera vez; en efecto, si se define la nueva variable dependiente  $y = \dot{\eta}^2(\eta)$  se comprueba fácilmente que la ecuación (16) proporciona

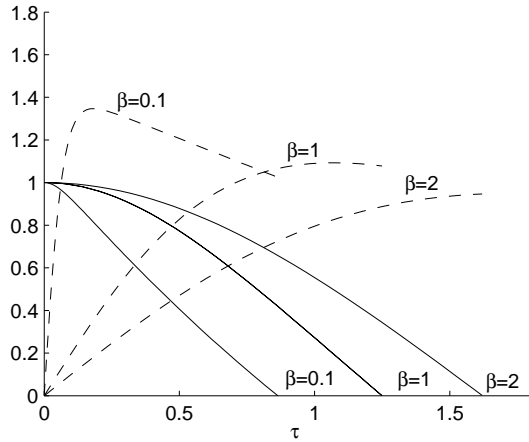
$$\frac{dy}{d\eta} - \frac{2}{\beta} y = -\frac{2}{\beta} (\eta + \alpha), \quad (17)$$

que es una ecuación lineal no homogénea de primer orden de coeficientes constantes. La solución correspondiente al caso en que la condición de contorno sea  $y(1) = 0$  puede obtenerse de forma inmediata para obtener

$$\dot{\eta} = -\sqrt{y} = -\left[\eta + \alpha + \beta/2 - e^{-2(1-\eta)/\beta}(1 + \alpha + \beta/2)\right]^{1/2}, \quad (18)$$

donde se ha seleccionado el signo negativo de la raíz pues la altura del depósito disminuye con el tiempo. Es fácil comprobar que si  $\beta < 2$  y  $\alpha$  es negativo (la sección de salida está por encima del fondo del depósito) tal que  $-1 < \alpha < -\beta/2$  el depósito no se vacía completamente en el proceso de descarga.





La relación (18) también permite conocer la evolución del caudal en el conducto como función de la altura del líquido en el depósito haciendo  $\xi(\eta) = -\dot{\eta}$ . Para calcular las evoluciones temporales  $\eta(\tau)$  y  $\xi(\tau)$  es necesario integrar (18) una vez más, lo que debe hacerse, en general, de forma numérica partiendo desde  $\eta = 1 - \epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ), debido a la singularidad que presenta (18) en  $\eta = 1$ ; en la figura adyacente se muestran las soluciones para  $\eta$  (línea continua) y  $\xi$  (línea a trazos) obtenidas numéricamente para  $\alpha = 1$  y valores de  $\beta = 0, 1, 2$ .

No obstante, en el límite  $\beta \ll 1$  puede obtenerse una solución aproximada de (13)-(14) que se analizará a continuación. Como se desprende de (15), el límite  $\beta \ll 1$  ocurre cuando el tiempo de residencia de las partículas en el conducto es mucho mayor que el tiempo característico de vaciado

(volumen del líquido en el depósito mucho mayor que el volumen del conducto), o bien, cuando las fuerzas de fricción son dominantes frente a las de inercia local, esto es, si  $[K + \lambda L / (4\bar{r}_h)] \gg 1$ .<sup>2</sup> Teniendo en cuenta que, de acuerdo con las adimensionalizaciones llevadas a cabo, las variaciones características de  $\xi$  y de  $\tau$  son de orden unidad durante el proceso de vaciado se tiene, por tanto,  $(\Delta\xi/\Delta\tau) \sim O(1)$  y  $\beta(\Delta\xi/\Delta\tau) \ll 1$  para  $\beta \ll 1$ , por lo que en este límite el término no estacionario puede despreciarse en (13) para valores de  $\tau \sim O(1)$ ; entonces, las ecuaciones (13) proporcionan, en primera aproximación,

$$\xi \simeq \sqrt{\eta + \alpha}, \quad y \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\sqrt{\eta + \alpha}. \quad (19)$$

La integración de (19) es inmediata y proporciona, con la condición inicial  $\eta(0) = 1$ ,

$$\eta = (\sqrt{1 + \alpha} - \tau/2)^2 - \alpha; \quad (20)$$

el tiempo de vaciado del depósito se deduce directamente imponiendo la condición  $\eta(\tau_{vac}) = 0$  en (20), y resulta

$$\tau_{vac} = 2(\sqrt{1 + \alpha} - \sqrt{\alpha}). \quad (21)$$

Obsérvese que la aproximación (19) para la evolución del caudal en el conducto,  $\xi(\tau)$ , no puede ser uniformemente válida en el tiempo, puesto que no cumple la condición  $\xi(0) = 0$  requerida por las condiciones del problema. Esto indica que debe de haber un régimen transitorio inicial en el que el caudal (adimensional) varía apreciablemente, desde su valor nulo en  $\tau = 0$  hasta un valor de orden unidad cuando ya puede considerarse establecido el régimen casi estacionario [como se deduce de la primera de las ecuaciones (19) cuando se hace en ella  $\eta \rightarrow 1$ ]. En dicho régimen transitorio los efectos no estacionarios deben de ser retenidos en la segunda de las ecuaciones (13), lo que implica que la duración de dicho periodo debe de ser muy corta comparada con el tiempo de vaciado del depósito; en efecto, si durante el transitorio inicial  $\Delta\xi \sim O(1)$ , el término  $\beta(d\xi/d\tau) \sim \beta(1/\Delta\tau)$  será de orden unidad sólo si  $\Delta\tau \sim \beta \ll 1 \sim \tau_{vac}$ . Este hecho permite escribir  $\eta \simeq 1$  en el análisis de (13) durante el periodo inicial y, en términos de la variable  $\tau^* = \tau/\beta$  (apropiada para describir el proceso en los instantes iniciales), dicha ecuación resulta entonces

$$\frac{d\xi}{d\tau^*} \simeq 1 + \alpha - \xi^2. \quad (22)$$

La solución de (22) que verifica la condición  $\xi(0) = 0$  se obtiene de forma inmediata como

$$\xi = \sqrt{1 + \alpha} \tanh(\tau^* \sqrt{1 + \alpha}). \quad (23)$$

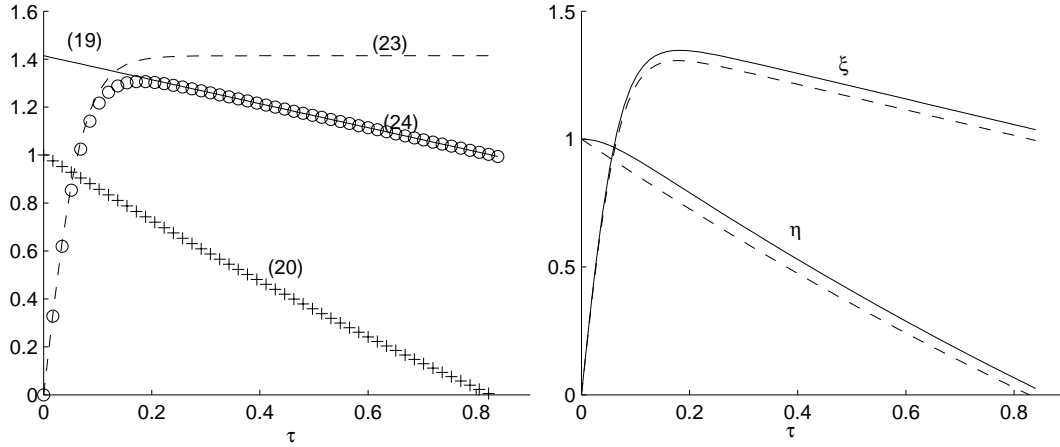
Obsérvese que para  $\tau^* \gg 1$  ( $\tau \gg \beta$ ) (23) proporciona  $\xi \rightarrow \sqrt{1 + \alpha}$ , que es el valor dado por (19) para  $\tau \ll 1$  ( $\eta \rightarrow 1$ ). De hecho, sumando la primera de las expresiones (19) y la expresión (23) y restando de dicha suma

<sup>2</sup> Usualmente  $K$  es del orden unidad o mucho menor que la unidad en el caso de entrada bien diseñada, por lo que, salvo en el caso particular de una entrada muy obturada  $K \gg 1$ , la condición de fricción dominante es equivalente a  $\lambda L / (4\bar{r}_h) \gg 1$ .

el valor común de ambas,  $\xi \simeq \sqrt{1+\alpha}$  para  $\beta \ll \tau \ll 1$ , se obtiene

$$\xi \simeq \sqrt{1+\alpha} \tanh\left(\tau \frac{\sqrt{1+\alpha}}{\beta}\right) + \sqrt{\eta+\alpha} - \sqrt{1+\alpha}, \quad (24)$$

que constituye una aproximación uniformemente válida para todo  $0 \leq \tau \leq \tau_{vac}$ . En la figura izquierda se representan las expresiones de  $\xi$  [Ecs. (19), (23) y (24)] y de  $\eta$  [Ec. (20)] para  $\beta = 0,1$ . En la figura derecha se comparan para  $\beta = 0,1$  las soluciones numéricas correspondiente a la ecuaciones (13) (líneas continuas) y las dadas por (24) (líneas discontinuas).



### Apartado 3.-

Cuando la apertura de la válvula es gradual, la ecuación (4) adimensionalizada con los parámetros y variables adimensionales del apartado anterior resulta

$$\beta \frac{d\xi}{d\tau} = \eta + \alpha - \xi^2[1 + f(\tau)], \quad (25)$$

donde se ha definido la función

$$f(\tau) = \frac{\bar{A}^2/A_s^2(t)}{K\bar{A}^2/A^2(0) + \bar{A}^2/A^2(L) + \lambda L/(4\bar{r}_h)} \left[ 1 - \frac{A_s^2}{A^2(L)} + C \left( 1 - \frac{A_s}{A(L)} \right) \right], \quad (26)$$

que recoge la influencia de la ley de apertura de la válvula en el proceso. Como se ha visto anteriormente, si  $\beta \ll 1$  el régimen es casi estacionario y (25) proporciona directamente el caudal como función de la altura del depósito y de la ley de apertura,

$$\xi = \sqrt{\frac{\eta + \alpha}{1 + f(\tau)}}. \quad (27)$$

Para obtener la ecuación para la altura de la superficie libre en el depósito debe de sustituirse  $(d\eta/d\tau) = -\xi$  en (27) e integrar para obtener

$$\eta = \left[ \sqrt{1+\alpha} - 2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{1 + f(\tau)} \right]^2 - \alpha; \quad (28)$$

en general, la integral en el segundo miembro de (28) debe de efectuarse numéricamente.

Obsérvese que si la apertura de la válvula tiene lugar en un tiempo característico  $t_{ap}$  tal que  $\tau_{ap} = (t_{ap}/t_o) \gg \beta$ , el análisis del transitorio inicial llevado a cabo en el apartado anterior es irrelevante, puesto que para  $\tau \sim O(\beta)$  se tendrá  $A_s(t) \ll \bar{A}$ , por lo que, según (26)  $f(\tau) \gg 1$  en los instantes iniciales, y (27) proporciona  $\xi \ll 1$  en dichos instantes. Sólo en el caso, de una apertura de válvula muy rápida,  $\tau_{ap} \sim \beta$ , será necesario modificar el análisis del transitorio inicial llevado a cabo en el apartado anterior considerando las variaciones de  $f(\tau)$ .

**Problema 6.2**

Un conducto de sección circular de diámetro  $D$  está formado por un tramo vertical de longitud  $L \gg D$  unido mediante un codo de longitud despreciable a otro tramo recto de longitud también  $L$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal como se muestran en las figuras 1 y 2. Inicialmente el conducto está lleno de un líquido de densidad  $\rho$  y se encuentra tapado por su extremo inferior y abierto por el superior. En un cierto instante se abre el extremo inferior y el líquido comienza a descender bajo la acción de la gravedad como se muestra en la figura 1. Sabiendo que el movimiento del líquido en el conducto es turbulento con factor de fricción  $\lambda$  constante, se pide:

1. Ecuación diferencial que gobierna la posición de la interfase  $s_f(t)$  durante el descenso de la misma.
2. A partir de la ecuación del apartado anterior obténgase la expresión que determina la velocidad de descenso de la interfase como función de su posición. Hágase aplicación para el caso  $\alpha = -\pi/2$ , correspondiente a un conducto vertical. Obténgase la solución para el caso de que  $\lambda L/D \gg 1$ .
3. En el supuesto de que  $\lambda L/D \ll 1$  y  $\alpha \geq -\pi/2$  obténgase la velocidad de dicha interfase como función de su posición  $\dot{s}_f(s_f)$ , y determínense:
  - a) Máximo valor  $\alpha_1$  que puede tener el ángulo  $\alpha$  para que la interfase, situada en el tramo vertical del conducto, alcance en su descenso el extremo inferior de dicho tramo (punto A).
  - b) En el caso que  $\alpha < \alpha_1$ , y, por tanto, la interfase sobrepasa el codo (ver figura 2), obténgase la relación entre la velocidad de la interfase y su posición respecto al punto B,  $\dot{x}_f(x_f)$ , teniendo en cuenta que, debido a las dimensiones despreciables del codo, la interfase conserva su velocidad al desplazarse desde el punto A al B. Determínese el valor numérico del valor máximo  $\alpha_2$  que puede tener  $\alpha$  si se quiere que todo el líquido abandone el conducto.

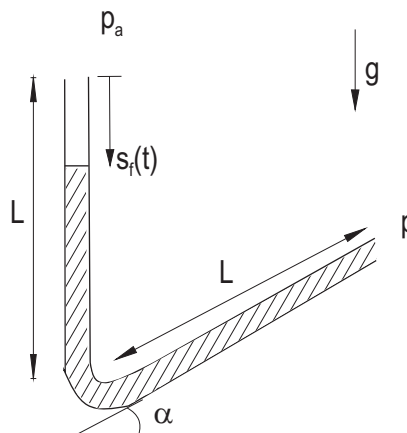


Figura 1

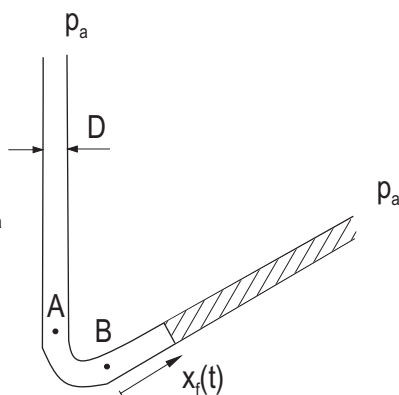


Figura 2

Resolución:Apartado 1.-

Para resolver el problema se usarán la coordenada  $s$ , según la línea media del conducto, y la coordenada vertical  $z$ ;  $s$  tiene como origen el extremo superior del conducto y su sentido es positivo en la dirección del movimiento, mientras que  $z$  tiene origen en el codo del conducto y su sentido positivo es opuesto al

del vector gravedad. Obsérvese que el movimiento del líquido en el conducto es esencialmente no estacionario debido a que la cantidad de líquido en el conducto varía con el tiempo, con el consiguiente movimiento de la interfase de separación aire-líquido. En efecto, para un punto fijo del dominio fluido está claro que el tiempo característico de variación de las variables está determinado por el tiempo característico de variación de la distancia de dicho punto a la interfase,  $t_o \sim L/V_o$ , donde  $V_o$  es la velocidad típica de la interfase durante el proceso que, por continuidad, debe ser la misma que la velocidad típica del líquido en cualquier sección del conducto; por tanto, el tiempo típico de residencia de las partículas en el conducto es también del orden  $t_r \sim L/V_o \sim t_o$ , lo que proporciona un número de Strouhal de orden unidad,  $St = t_r/t_o \sim O(1)$ , y el movimiento es, por tanto, no estacionario. Las velocidades típicas del movimiento del líquido en el conducto inducidas por las fuerzas gravitatorias pueden estimarse suponiendo comparables la aceleraciones de las partículas fluidas y la de la gravedad,

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{V_o}{(L/V_o)} \sim g, \quad (1)$$

lo que proporciona  $V_o \sim \sqrt{gL}$ . Naturalmente, para que el movimiento sea turbulento es necesario que dicha velocidad sea lo suficientemente elevada como para que el número de Reynolds basado en ella y en el diámetro del conducto supere un cierto valor crítico

$$Re = \frac{D\sqrt{gL}}{\nu} > Re_{cr}, \quad (2)$$

donde  $Re_{cr}$  depende del tipo de flujo; así, que para el flujo estacionario en un conducto de sección circular sometido a un gradiente de presiones (experimento de Reynolds)  $Re_{cr} \simeq 2300$ , y para otros tipos de flujos comunes se tienen también valores típicos de  $Re_{cr}$  del orden de  $10^3$ . Introduciendo en (2) los valores numéricos típicos  $L = 1 \text{ m}$ ,  $D = 1 \text{ cm}$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  y  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  se obtiene  $Re \sim 3 \times 10^4 \gg 10^3$ , por lo que es razonable suponer que el flujo es turbulento. Supuesto que el movimiento del líquido en el conducto es turbulento, para analizar el proceso de vaciado se empleará la ecuación (6.12), cuya aplicación, naturalmente, sólo tiene sentido dentro de la zona ocupada por el líquido en cada instante,  $s_f(t) \leq s \leq 2L$ . Obsérvese que en dicha ecuación la importancia relativa entre los efectos de fricción frente a los no estacionarios (efectos de inercia local) está medida por el parámetro  $\lambda L/D$ ; en efecto, se tiene

$$\frac{\lambda \rho v^2 / (2D)}{\rho (\partial v / \partial t)} \sim \frac{\lambda \rho V_o^2 / (2D)}{\rho V_o / (L/V_o)} \sim \frac{\lambda L}{D}. \quad (3)$$

Por tanto, si  $\lambda L/D \gg 1$  la fuerza gravitatoria se emplea casi exclusivamente en vencer la fricción turbulenta, siendo despreciable la fracción de aquélla consumida en las variaciones de cantidad de movimiento (aceleraciones) del líquido en el conducto; en este caso, la ecuación de cantidad de movimiento se reducirá, en primera aproximación, a un balance entre el término de fricción, las fuerzas de presión y las de gravedad. Por otra parte, si  $\lambda L/D \ll 1$  la fracción de la fuerza gravitatoria consumida en vencer la fricción es despreciable frente a la involucrada en las aceleraciones del líquido en el proceso, y la ecuación de cantidad de movimiento expresará el balance entre el término de aceleración local y las fuerzas de presión y de gravedad; los resultados obtenidos en este caso son aplicables también al caso del movimiento de un fluido ideal (viscosidad nula) o, de manera más general, a un movimiento tal que

$$Re = \frac{D\sqrt{gL}}{\nu} < Re_{cr}, \quad \text{y} \quad \frac{D\sqrt{gL}}{\nu} \frac{D}{L} \ll 1; \quad (4)$$

en efecto, bajo las condiciones (4) el movimiento en el conducto es laminar y, además, los efectos de viscosidad permanecen confinados a una capa límite adyacente a las paredes del conducto siendo despreciables en el movimiento del líquido.

En el caso general (cualquier valor del parámetro  $\lambda L/D$ ), el movimiento del líquido en el conducto debe de calcularse resolviendo la ecuación completa (2.5). Si, para un instante  $t$  dado, se integra dicha ecuación en la coordenada  $s$  entre los límites  $s = s_f(t)$  y  $s = 2L$ ,

$$\int_{s_f}^{2L} \rho \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_{s_f}^{2L} d \left[ \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z(s) \right] = - \int_{s_f}^{2L} \frac{\lambda \rho v^2}{2D} ds, \quad (5)$$

y se tienen en cuenta la condición de continuidad  $\dot{s}_f(t) = v(s, t) = v[s_f(t), t] = v(2L, t)$  y las condiciones de contorno  $p[s_f(t), t] = p(2L, t) = p_a$ ,

$$\left[ \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z \right]_{s_f}^{2L} = \underbrace{\left( \frac{\rho v^2(2L)}{2} - \frac{\rho v^2(s_f)}{2} \right)}_{=0} + \underbrace{[p(2L) - p(s_f)]}_{=0} + \underbrace{\rho g [z(2L) - z(s_f)]}_{\rho g (L \sin \alpha - L + s_f)} = \rho g (L \sin \alpha - L + s_f),$$

se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la interfase

$$\ddot{s}_f + \frac{\lambda \dot{s}_f^2}{2D} = g \left[ 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s_f} \right], \quad (6)$$

que debe integrarse con las condiciones iniciales  $s_f(0) = 0$  y  $\dot{s}_f(0) = 0$ .

### Apartado 2.-

Puesto que en (6) no aparece la variable independiente (el tiempo) explícitamente, dicha ecuación puede escribirse en la forma de una ecuación lineal de primer orden cuya integración determina la velocidad de la interfase como función de su posición,  $\dot{s}_f(s_f)$ . En efecto, teniendo en cuenta que  $\ddot{s}_f = \dot{s}_f(d\dot{s}_f/ds_f)$  se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{ds_f} \left( \frac{\dot{s}_f^2}{2} \right) + \frac{\lambda \dot{s}_f^2}{2D} = g \left[ 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s_f} \right]; \quad (7)$$

si se multiplica (7) por  $e^{\lambda s_f/D}$  y se integra entre 0 y  $s_f$  con la condición inicial  $\dot{s}_f(s_f = 0) = 0$  se obtiene la relación

$$\frac{\dot{s}_f^2}{2} = g e^{-\lambda s_f/D} \int_0^{s_f} e^{\lambda s'_f/D} \left[ 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s'_f} \right] ds'_f, \quad (8)$$

donde, en general, la integral del segundo miembro debe efectuarse numéricamente. Nótese también que la determinación de la posición de la interfase como función del tiempo requiere la integración de la ecuación (8) con la condición inicial que, aunque de variables separadas, debe realizarse también numéricamente en general.

En el caso particular de un conducto vertical,  $\alpha = -\pi/2$ , la integral en (8) es inmediata y proporciona

$$\frac{\dot{s}_f^2}{2} = \frac{gD}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda s_f/D} \right). \quad (9)$$

Obsérvese que la velocidad de la interfase tiende asintóticamente (exponencialmente) hacia el valor constante  $\sqrt{2gD/\lambda}$ ; las variaciones apreciables de velocidad de la interfase tienen lugar en un trayecto de longitud característica  $s_{fo} \sim D/\lambda$  medida desde su posición inicial ( $s_f = 0$ ), y para distancias mayores puede suponerse establecida ya la velocidad. Nótese también que dicha distancia puede ser muy pequeña comparada con la longitud del conducto en el límite  $\lambda L/D \gg 1$ , correspondiente a efectos de fricción dominantes frente a los de inercia.

En el caso  $\lambda L/D \gg 1$ , la ecuación (6) puede resolverse de forma aproximada para cualquier valor de  $\alpha$  para dar

$$\frac{\dot{s}_f^2}{2} = \frac{Dg}{\lambda} \left[ 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s_f} \right], \quad (\lambda L/D \gg 1) \quad (10)$$

que para  $\alpha = -\pi/2$  proporciona el resultado del apartado anterior,  $\dot{s}_f = \sqrt{2Dg/\lambda}$ . Obsérvese en (10) que en el caso de efectos de fricción dominantes frente a los de inercia el líquido nunca abandona el conducto, sino que la interfase permanece en el tramo vertical y tiende monótonamente de forma amortiguada a la posición correspondiente a una situación fluidostática,  $s_{feq} = L \sin \alpha$ , que resulta de hacer  $\dot{s}_f = 0$  en (10). Naturalmente, la solución (10) no verifica la condición inicial  $\dot{s}_f(s_f = 0) = 0$  y, por tanto, no puede ser uniformemente válida en  $s_f$ . Lo que sucede es para distancias recorridas del orden  $s_f \sim s_{fo} \sim D/\lambda \ll L$

(instantes iniciales del proceso) los exponentes en el segundo miembro de (8) no pueden despreciarse, y los términos exponenciales difieren apreciablemente de uno. No obstante, una solución aproximada válida para pequeñas distancias recorridas puede obtenerse si se tiene en cuenta que puede aproximarse  $s_f \simeq 0$  en el factor entre corchetes que multiplica a la función exponencial en el integrando de (8), con lo que la integral puede realizarse de forma inmediata; resulta entonces

$$\frac{\dot{s}_f^2}{2} = g e^{-\lambda s_f/D} \int_0^{s_f} e^{\lambda s'_f/D} \left[ 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s'_f} \right] \Big|_{s'_f=0} ds'_f = \frac{gD(1 - \sin \alpha)}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda s_f/D}). \quad (11)$$

Una solución aproximada uniformemente válida puede obtenerse sumando (10) y (11) y restando el término común  $gD(1 - \sin \alpha)/(2\lambda)$  que resulta al hacer  $(D/\lambda) \ll s_f \ll L$  en (10) y en (11); después de tomar la raíz cuadrada del resultado se obtiene finalmente

$$\dot{s}_f = \sqrt{\frac{2Dg}{\lambda} \left[ 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s_f} - \frac{1 - \sin \alpha}{2\lambda} e^{-\lambda s_f/D} \right]}. \quad (12)$$

### Apartado 3.-

Para  $\lambda L/D \ll 1$  los efectos de fricción son despreciables frente a los gravitatorios, y el líquido se acelera en el conducto bajo la acción de la gravedad. En este caso, y debido a la importancia de los efectos de inercia, el líquido no tiende monótonamente a la posición de equilibrio fluidostático, sino que, dependiendo del ángulo  $\alpha$ , la interfase puede permanecer en el tramo vertical oscilando alrededor de la posición de equilibrio, o bien puede sobrepasar el codo e incluso abandonar el conducto. En efecto, puesto que  $\lambda s_f/D \ll 1$  las funciones exponenciales en (8) son aproximadamente iguales a 1 y se obtiene la integral inmediata

$$\frac{\dot{s}_f^2}{2} = \int_0^{s_f} g \left( 1 - \frac{L(1 + \sin \alpha)}{2L - s_f} \right) ds_f = g s_f - gL(1 + \sin \alpha) \ln \left( \frac{2L}{2L - s_f} \right). \quad (13)$$

El ángulo para el que la interfase no sobrepasa el codo corresponde a

$$1 - (1 + \sin \alpha_1) \ln 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha_1 = \frac{1 - \ln 2}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 26,27^\circ. \quad (14)$$

Si  $\alpha < \alpha_1$  la interfase entra en el segundo tramo del conducto con una velocidad inicial  $v_i$  dada por (13)

$$\frac{v_i^2}{2} = gL(1 - (1 + \sin \alpha) \ln 2). \quad (15)$$

La ecuación diferencial se obtiene nuevamente integrando la ecuación (1) entre  $s = x_f$  y  $s = L$  (téngase en cuenta que  $\lambda L/D \ll 1$ ) y realizando el mismo tipo de cambio de variable que anteriormente

$$\frac{d}{dx_f} \left( \frac{\dot{x}_f^2}{2} \right) = -g \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}_f^2}{2} = \frac{v_i^2}{2} - x_f g \sin \alpha. \quad (16)$$

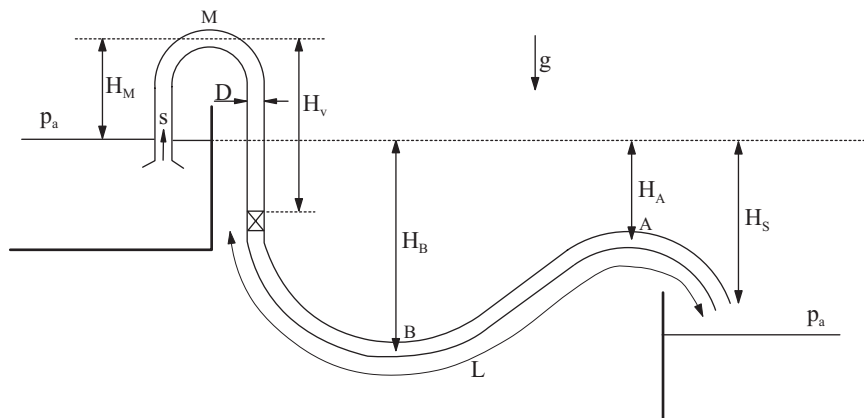
El ángulo límite  $\alpha_2$  para el cual el líquido no termina de abandonar el conducto se obtiene de la ecuación anterior sin más que anular la velocidad del fluido  $\dot{x}_f = 0$  cuando  $x_f = L$

$$1 - (1 + \sin \alpha_2) \ln 2 - \sin \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha_2 = \frac{1 - \ln 2}{1 + \ln 2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 10,44^\circ. \quad (17)$$

**Problema 6.3**

Para extraer agua de un embalse se emplea la instalación representada en la figura que consiste de un sifón con el punto de máxima cota, M, situado a una distancia  $H_M$  por encima de la superficie del embalse; el sifón está conectado a una tubería de longitud  $L \gg H_M$  a través de una válvula situada a una distancia  $H_V$  por debajo de M. Tanto el sifón como la tubería poseen secciones circulares de diámetro  $D$ , y la tubería descarga al ambiente a través de la sección de salida situada a una distancia  $H_S$  por debajo de la superficie del embalse; inicialmente el sifón está cebado de agua y la válvula está cerrada. En un cierto instante se abre la válvula y el líquido comienza a fluir por la tubería en un movimiento turbulento sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga. Supuesto que la cota de cada sección de la tubería,  $z(s)$ , es conocida como función de la posición  $s$  a lo largo de la misma y medida a partir de la toma del sifón, se pide:

1. Mínimo valor de  $H_V$  para que el sifonado sea posible.
2. Ecuación diferencial que determina la velocidad de la interfase agua-aire  $ds_f/dt$  como función de la posición  $s_f$  de la misma. Resuélvase dicha ecuación en el caso de que  $\lambda L/D \gg 1$ .
3. En régimen estacionario, y en el supuesto de que  $\lambda L/D \gg 1$ , calcúlense:
  - a) Caudal sifonado.
  - b) Presión (dando el valor numérico) en el punto M para  $H_M = 5m$  (suponga  $H_M \sim H_S$ ). Valor máximo de  $H_M$  para que el fluido no cavite.
  - c) Valores numéricos de las presiones en los puntos A y B de la figura situados a distancias  $H_A = 2m$  y  $H_B = 20m$  por debajo de la superficie del embalse y cuyas coordenadas a lo largo del conducto son  $s_A = 0,8L$  y  $s_B = 0,5L$ ; tómese  $H_S = 15m$ .

Resolución:Apartado 1.-

Para que al abrir la válvula el líquido comience a fluir por la tubería hacia el depósito inferior es necesario que a válvula cerrada el líquido en contacto con la misma ejerza sobre ella una presión superior a la atmosférica; sólo así, cuando se abra la válvula y la superficie del líquido en contacto con la misma quede repentinamente a la presión atmosférica existirá una caída de presión entre dicha superficie y las capas superiores adyacentes (a mayor presión que la atmosférica) que acelere el líquido en dirección descendente, mientras que éste

ascendería en caso contrario. Puesto que a válvula cerrada el líquido en el sifón está en una situación fluidostática, para que la presión sobre la válvula supere a la atmosférica debe de cumplirse que

$$H_V \geq H_M. \quad (1)$$

### Apartado 2.-

A partir de que el líquido comienza a fluir por el conducto, la velocidad en cualquier sección del mismo debe de coincidir con la velocidad de la interfase,

$$v(s, t) = ds_f/dt, \quad (2)$$

como exige la ecuación de conservación de la masa para el movimiento de un líquido en un conducto de sección constante. Además, la velocidad en el conducto y la distribución de presiones,  $p(s, t)$ , satisfacen la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} [p + \rho g z(s)] = -\frac{\lambda \rho v^2}{2D}, \quad (3)$$

donde se ha omitido el término  $\rho \partial(v^2/2)/\partial s$  puesto que es idénticamente nulo al no depender  $v$  de  $s$  (conducto de sección constante). Integrando (3) entre  $s = 0$  y  $s = s_f(t)$  para un instante  $t$  dado se obtiene

$$\rho s_f \frac{d^2 s_f}{dt^2} + [p(s_f(t), t) + \rho g z(s_f(t))] - [p(0, t) + \rho g z(0)] = -\frac{\lambda s_f}{2D} \rho \left( \frac{ds_f}{dt} \right)^2, \quad (4)$$

donde se ha tenido en cuenta (2); la condición de contorno para la presión a la entrada del conducto puede expresarse mediante el coeficiente de pérdida de carga como

$$p_o(0, t) - p_{od} = K \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow p(0, t) = p_a - (K + 1) \frac{\rho}{2} \left( \frac{ds_f}{dt} \right)^2, \quad (5)$$

mientras que en  $s = s_f(t)$  se tiene  $p[s_f(t), t] = p_a$ . Sustituyendo dichas condiciones de contorno en (4) se obtiene entonces la ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden

$$s_f \frac{d^2 s_f}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( 1 + K + \frac{\lambda s_f}{D} \right) \left( \frac{ds_f}{dt} \right)^2 + g z[s_f(t)] = 0, \quad (6)$$

que debe de integrarse sujeta a las condiciones iniciales:  $s_f(0) = H_M + H_V$  y  $(ds_f/dt)|_{t=0} = 0$ ; obsérvese que en (6)  $z(s_f)$  es una función conocida a través de la geometría del conducto. Puesto que en (6) no aparece la variable independiente  $t$  explícitamente, dicha ecuación diferencial puede reducirse a una de primer orden cuya integración proporciona la velocidad de la interfase como función de su posición:  $\dot{s}_f(s_f)$ . En efecto, sustituyendo en (6) la relación  $\ddot{s}_f = \dot{s}_f(d\dot{s}_f/ds_f)$ , obtenida mediante la regla de la cadena, resulta

$$\dot{s}_f \frac{d\dot{s}_f}{ds_f} + \left( 1 + K + \frac{\lambda s_f}{D} \right) \frac{\dot{s}_f^2}{2} + g z(s_f) = 0, \quad (7)$$

junto con la condición inicial  $\dot{s}_f(H_M + H_V) = 0$ ; una segunda integración proporcionaría  $s_f(t)$ .

La ecuación (7) no puede resolverse analíticamente en general, sin embargo en las instalaciones de sifón sucede en la inmensa mayoría de los casos prácticos que el conducto es lo suficientemente largo como para suponer  $\lambda L/D \gg 1$ , por lo que los efectos no estacionarios son despreciables frente a los de fricción en (6)-(7). En efecto, puesto que el tiempo característico para variaciones apreciables de la velocidad en cualquier sección del conducto,  $\Delta \dot{s}_f \sim \dot{s}_{fo}$ , donde  $\dot{s}_{fo}$  es una velocidad característica de la interfase durante el proceso, coincide con el necesario para variaciones apreciables en la posición de la interfase,  $t_o \sim L/\dot{s}_{fo}$ , se tiene

$$\frac{\ddot{s}_f}{(\lambda \dot{s}_f^2/2D)} = \frac{\dot{s}_f(d\dot{s}_f/ds_f)}{(\lambda \dot{s}_f^2/2D)} \sim \frac{(\dot{s}_{fo}^2/L)}{(\lambda \dot{s}_{fo}^2/2D)} \sim \frac{1}{(\lambda L/D)} \ll 1. \quad (8)$$



Despreciando, por tanto, los términos no estacionarios frente a los de fricción y gravitatorios, (7) proporciona directamente la velocidad en el conducto como función de la posición de la interfase como

$$\dot{s}_f = \sqrt{-\frac{2Dgz(s_f)}{\lambda s_f}}. \quad (9)$$

La expresión (9) es válida siempre que  $\lambda s_f/D \gg 1$  como ocurre, en particular, cuando  $s_f \sim L$ , lo que tiene lugar durante la mayor parte del proceso de avance de la interfase. Además, obsérvese que para mantener el movimiento a lo largo del conducto en el régimen de fricción dominante considerado aquí debe verificarse que todas las secciones del conducto deben tener una cota negativa,  $z(s) < 0$  respecto a la superficie del embalse del que toma el sifón, en caso contrario el líquido se pararía inmediatamente (si se desprecia su inercia) al llegar a una sección con  $z(s) = 0$ .

### Apartado 3.-

El caudal sifonado cuando la interfase del líquido abandona el conducto y, por tanto, éste comienza a descargar al embalse inferior, se obtiene de la velocidad calculada cuando (9) se particulariza  $z(s_f) = -H_S$  y  $s_f = L + H_V + H_M \simeq L$  (teniendo en cuenta el dato  $L \gg H_M$  y suponiendo  $H_M \sim H_V$ ),

$$Q \simeq \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2DgH_S}{\lambda L}}. \quad (10)$$

Naturalmente, al haber despreciado los efectos transitorios en (9) dicho caudal coincide con el que circula por el conducto una vez establecido en él el régimen estacionario. En efecto, integrando entre  $s = 0$  y un valor genérico de  $s$  la ecuación (3) en régimen estacionario e imponiendo la condición de contorno (5) se obtiene, sin más que reemplazar en (4)  $s_f$  por  $s$  y suprimir en dicha ecuación las derivadas y dependencias temporales,

$$p(s) = p_a - \rho g z(s) - \left(1 + K + \frac{\lambda s}{D}\right) \frac{\rho v^2}{2}, \quad (11)$$

que proporciona la distribución de presiones a lo largo del conducto. Imponiendo en (11) la condición de contorno  $p = p_a$  en  $s = L + L_V \simeq L$  y teniendo en cuenta que  $\lambda L/D \gg (1 + K) \sim O(1)$ , se obtiene la expresión (10) para el caudal  $Q = \pi D^2 v/4$  a través del conducto. Si se sustituye dicha expresión en la distribución de presiones (11) se obtiene de forma explícita

$$p(s) = p_a - \rho g z(s) - \rho g H_S \left( \frac{1 + K}{(\lambda L/D)} + \frac{s}{L} \right) \simeq p_a - \rho g z(s) - \rho g H_S \frac{s}{L}. \quad (12)$$

Obsérvese que el término  $(-\rho g H_S s/L)$  representa la caída de presión debido a la fricción en el conducto respecto de la fluidostática,  $p_a - \rho g z(s)$ .

En el punto  $M$ ,  $z(s_M) = H_M$  y, puesto que  $s_M \ll L$ , (12) proporciona una distribución de presiones dada por fluidostática, en primera aproximación,

$$\frac{p_M - p_a}{\rho g} \simeq -H_M = -5m. \quad (13)$$

Para que en el punto  $M$  se produjera cavitación debería ser  $p_M \simeq 0$ , que corresponde a una altura máxima del punto  $M$  igual a  $p_a/(\rho g) \simeq 10m$ .

En los puntos  $A$  y  $B$  se tiene

$$\frac{p_A - p_a}{\rho g} \simeq H_A - H_S s_A/L = (2 - 15 \times 0,8)m = -10m \quad (14)$$

y

$$\frac{p_B - p_a}{\rho g} \simeq H_B - H_S s_B/L = (20 - 15 \times 0,5)m = 12,5m. \quad (15)$$

Por tanto, en el punto A se producirá cavitación,  $p_A \simeq 0$ , debido a la caída de presión originada por la fricción en el conducto. Lo que ocurre es que bolsas de aire proveniente del aire disuelto en el líquido tienden a formarse en los puntos del conducto donde la presión es muy baja, por lo que en dichas secciones deben de situarse dispositivos purgadores de aire que eviten que dichas bolsas obturen el paso del líquido. Este hecho hace que los sifones presenten problemas como dispositivos trasvasadores de líquido en grandes instalaciones que necesiten tuberías de longitud muy grande, con las consiguientes reducciones de presión asociadas a la fricción en los conductos.

**Problema 6.4**

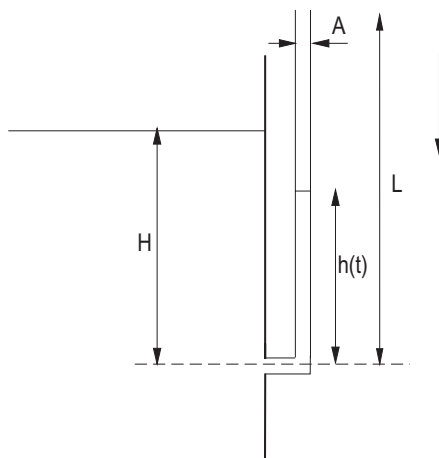
Un conducto vertical de longitud  $L$  y sección  $A$  se conecta mediante un codo de longitud despreciable al muro exterior de un embalse a una distancia  $H < L$  por debajo de la superficie del mismo como se indica en la figura. Inicialmente la entrada del conducto se encuentra tapada y en un cierto instante se abre comenzando el agua a ascender por el mismo. Suponiendo que el movimiento del líquido de densidad  $\rho$ , es turbulento y sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga, se pide:

1. Ecuación diferencial que determina la posición de la interfase  $h$  como función del tiempo.
2. En el supuesto de que el factor de fricción sea tal que  $\lambda L/A^{1/2} \ll 1$ , calcular la velocidad de ascensión de la superficie libre del líquido  $\dot{h}$  como función de la altura de la misma  $h$ . Indicar la longitud mínima,  $L_{min}$ , que debería tener  $L$  para que el líquido permanezca dentro del conducto.
3. Si  $H < L < L_{min}$ , calcular el instante en el que el líquido comienza a salir del conducto y su velocidad en dicho instante.
4. Analizar entonces el proceso de descarga del líquido a la atmósfera. En particular, determinar la ecuación diferencial y condiciones iniciales que gobiernan el caudal descargado  $Q(t)$  como función del tiempo. Se recomienda usar las variables adimensionales  $\tau$  y  $\xi$  dadas por

$$t = \tau L / \sqrt{2g(L-H)} \quad \text{y} \quad Q = \xi \sqrt{2g(L-H)} A;$$

calcular el instante en el que  $Q = 0$  y el líquido comienza a descender por el conducto.

5. En dicho descenso calcular la velocidad  $\dot{h}$  de la superficie libre como función de  $h$ . Escribir la ecuación algébrica que determina la cota  $h_{min}$  alcanzada en el descenso.

Resolución:Apartado 1.-

Para el análisis del movimiento del líquido se tomará el origen de la coordenada  $s$  a lo largo del conducto justo después del codo de entrada, que se supone de longitud muy pequeña como para que en él el movimiento del líquido sea casi estacionario y con fuerzas másicas y de fricción despreciables; por tanto, en la zona de entrada, que se supone bien diseñada, se conserva la presión de remanso

$$p_a + \rho g H = p(0, t) + \frac{1}{2} \rho v^2(0, t). \quad (1)$$

Por otra parte, la ecuación de cantidad de movimiento del líquido en el conducto es

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} [p + \rho g z(s)] = -\frac{\lambda}{8r_h} v^2, \quad (2)$$

cuya integración entre 0 y  $h(t)$ , teniendo en cuenta que  $v = dh/dt = \dot{h}$  y la condición de contorno (1), proporciona

$$\rho h \ddot{h} + \frac{\rho \dot{h}^2}{2} \left( 1 + \frac{\lambda h}{4r_h} \right) = \rho g(H - h). \quad (3)$$

Como condiciones iniciales se impondrán

$$h(0) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{h}(0) = \sqrt{2gH}; \quad (4)$$

obsérvese que el instante inicial comienza cuando el líquido ha rebasado el codo de entrada y en ese instante, de acuerdo con (1), posee la velocidad  $\sqrt{2gH}$ .

### Apartado 2.-

En el caso en que  $\lambda L/(4r_h) \ll 1$ , que corresponde al movimiento de un fluido ideal por ser la fricción nula en primera aproximación, la ecuación (3) se simplifica para dar

$$h \ddot{h} + \frac{1}{2} \dot{h}^2 = g(H - h); \quad (5)$$

utilizando  $\ddot{h} = d\dot{h}/dt = \dot{h}d\dot{h}/dh = d(\dot{h}^2/2)/dh$  la ecuación anterior se escribe en la forma

$$h \frac{d\dot{h}^2/2}{dh} + \frac{\dot{h}^2}{2} = \frac{d(h\dot{h}^2/2)}{dh} = g(H - h), \quad (6)$$

que permite relacionar la velocidad  $\dot{h}$  con la posición  $h$ . Integrando (6) se obtiene

$$\dot{h}^2 = \frac{2C}{h} + g(2H - h), \quad (7)$$

donde la constante  $C$  es nula como resultado de imponer la condición  $\dot{h}(0) = \sqrt{2gH}$ . El ascenso del líquido finaliza cuando  $\dot{h} = 0$ , condición que se alcanza cuando  $L = 2H$ , por lo que, si  $L > 2H$  el líquido no sale del conducto.

### Apartado 3.-

Integrando (7) se obtiene la dependencia temporal de la posición de la interfase

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{g(2H - h)} \quad \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{g(2H - h)}} = \sqrt{2H} - \sqrt{2H - h} = t\sqrt{\frac{g}{2}}. \quad (8)$$

El tiempo empleado en llegar a  $L$  y la velocidad a la que descarga son respectivamente

$$t_L = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{2H} - \sqrt{2H - L}) \quad \text{y} \quad v_L = \sqrt{g(2H - L)}. \quad (9)$$

### Apartado 4.-

El proceso de descarga del líquido a la atmósfera, requiere la integración de la ecuación (2), con el segundo miembro nulo, entre los límites 0 y  $L$

$$\frac{L}{A} \frac{dQ}{dt} + p_a + \frac{1}{2A^2} \rho Q^2 + \rho gL - (p_a + \rho gH) = 0, \quad \frac{L}{A} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2A^2} Q^2 = g(H - L), \quad (10)$$

que debe integrarse sujeta a la condición inicial  $Q(t_L) = A\sqrt{g(2H - L)}$ .

## 192 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Si se emplean las variables adimensionales propuestas se obtiene

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -(1 + \xi^2), \quad (11)$$

cuya integración proporciona

$$\tau = \tau_i + \arctan \xi_i - \arctan \xi, \quad (12)$$

donde

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2H - L}{L - H}} \quad \text{y} \quad \tau_i = \frac{4}{L} \sqrt{L - H} (\sqrt{2H} - \sqrt{2H - L}). \quad (13)$$

El instante en que cesa de salir líquido por el conducto se obtiene haciendo  $\xi = 0$  en (12)

$$\tau_F = \tau_i + \arctan \xi_i. \quad (14)$$

### Apartado 5.-

A partir de este instante, la interfase comienza a descender por el conducto; para el análisis del movimiento descendente del líquido es conveniente definir la coordenada  $s$  con origen en el extremo superior del conducto y dirección descendente. Integrando, entonces, la ecuación (2), con el segundo miembro nulo, entre  $s = L - h(t)$  y  $L$  con las condiciones de contorno  $p[L - h(t)] = p_a$  y  $p(L) = p_a + \rho g H$ , se obtiene

$$h\ddot{h} = g(h - H), \quad (15)$$

que integrada una vez proporciona

$$\frac{\dot{h}^2}{2} = g(h - L) - gH \ln \left( \frac{h}{L} \right). \quad (16)$$

Finalmente, la altura mínima alcanzada  $h_{min}$  corresponde a  $\dot{h} = 0$ ; esto es,

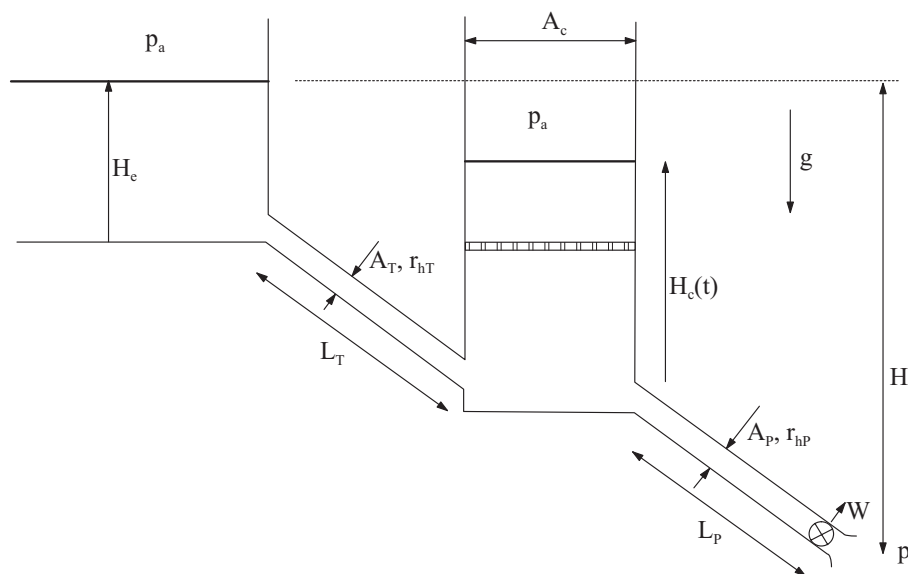
$$g(h_{min} - L) = gH \ln \left( \frac{h_{min}}{L} \right). \quad (17)$$

Obsérvese que el líquido comienza a ascender de nuevo una vez alcanzada la posición mínima continuando el proceso en forma de una oscilación (ascensos y descensos) amortiguada hasta que la interfase en el conducto alcanza la altura del embalse con velocidad nula. Es interesante observar que a pesar de que el movimiento del fluido es ideal, en cada ciclo hay una pérdida de presión de remanso durante la fase de descenso, como se pone de manifiesto en la condición de contorno  $p(L) = p_a + \rho g H$ .

**Problema 6.5**

Un embalse suministra agua a una turbina situada a una cota  $H$  por debajo de la superficie libre del mismo mediante un conducto ("túnel") de sección  $A_T$ , radio hidráulico  $r_{hT}$  y longitud  $L_T$ . Para atenuar las sobrepresiones que aparecen cuando se cambia el caudal a través de la turbina o la potencia de la misma se interpone entre el embalse y la turbina una chimenea de equilibrio de sección  $A_c$  que puede estar provista de un panel metálico lleno de orificios con el fin de introducir pérdidas de carga en el sistema. El conducto que conecta la chimenea con la turbina ("tubería de presión") tiene una sección  $A_p$ , radio hidráulico  $r_{hp}$  y longitud  $L_p$ . Suponiendo despreciables la energía cinética en la turbina así como las pérdidas de cargas en las tomas de los conductos, se pide:

1. Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales que permite, fijada una la potencia de la turbina  $W$  (o fijado un caudal  $Q_p$  que circule por la misma), calcular la evolución de la altura de la chimenea,  $H_c(t)$ , el caudal que circula por el túnel,  $Q_T(t)$ , y el caudal que circula por la turbina,  $Q_p(t)$  (o la potencia suministrada por la misma  $W(t)$  si se fija  $Q_p$ ). Para ello suponga que el movimiento en los conductos es turbulento sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga y que el factor de pérdida de carga en la chimenea debido a las rejillas del panel  $K$  es conocido.
2. Supóngase que la longitud de la tubería de presión es lo suficientemente corta para despreciar la inercia del líquido y la fricción sobre la misma. Si el sistema se encuentra funcionando en régimen estacionario siendo el caudal que circula por la turbina conocido y de valor  $Q_1$ , calcular la potencia suministrada por la turbina  $W_1$  y la altura de la chimenea  $H_1$ .
3. Si en la situación anterior se activa el regulador de la turbina de forma que se extrae de la misma un nuevo caudal  $Q_2 \neq Q_1$  que se mantiene constante y conocido y supuesto que el cambio de caudal es pequeño  $|Q_2 - Q_1| \ll Q_1$ , obtener y resolver las ecuaciones linealizadas que describen de forma aproximada el transitorio de un régimen estacionario a otro.
4. Si en la situación de equilibrio del apartado 2 se produce una perturbación del sistema y se regula la turbina de tal forma que proporciona una potencia constante  $W_1$ , estudiar la estabilidad lineal en torno del equilibrio. Comparar los resultados con los obtenidos numéricamente imponiendo una perturbación de amplitud finita.



Resolución:Apartado 1.-

Sean  $p_1$  la presión a la entrada del túnel (salida si el líquido asciende por el mismo) con el depósito a altura constante  $H_e$ ,  $p_2$  la presión a la salida (entrada) del túnel con la chimenea de equilibrio,  $p_{bc}$  la presión en el fondo de la chimenea de equilibrio,  $p_3$  la presión a la entrada de la tubería de presión con la chimenea y  $p_4$  la presión la salida de la tubería de presión con la turbina. Se tomará como referencia de cotas,  $z = 0$ , la altura a la que se sitúa la turbina.

La integración de la ecuación de cantidad de movimiento para el movimiento turbulento de líquido en el túnel es

$$\rho L_T \frac{dv_T}{dt} + p_2 - p_1 + \rho g(z_2 - z_1) = -\frac{\rho \lambda L_T}{8r_{hT}} |v_T| v_T, \quad (1)$$

siendo  $v_T$  la velocidad del líquido en el túnel,  $z_1$   $z_2$  las cotas superior e inferior del túnel. El término de fricción se ha escrito proporcional a  $v_t |v_t|$  para que se oponga siempre al movimiento (incluso si el líquido asciende por el conducto).

La integración de la ecuación en la tubería de presión proporciona

$$\rho L_p \frac{dv_p}{dt} + p_4 - p_{bc} + \rho g(z_4 - z_3) = -\frac{\rho \lambda L_p}{8r_{hp}} v_p^2, \quad (2)$$

siendo  $v_p$  la velocidad del líquido en el conducto en la dirección y  $z_3$  y  $z_4$  las cotas superior e inferior de la tubería de presión. Obsérvese que  $z_3 = z_2$ .

Las presiones en los depósitos y en los conductos están relacionados por las condiciones

$$p_1 = p_{bc} - \frac{1}{4}(1 - sg(v_T))v_T^2, \quad p_2 = p_a + \rho g H_e - \frac{1}{4}(1 + sg(v_T))v_T^2, \quad p_3 = p_{bc} - \frac{1}{2}v_p^2. \quad (3)$$

Por otro lado, la presión en la base de la chimenea está relaciona con la velocidad con que varía la altura de líquido en la chimenea  $\dot{H}_c(t)$  por la fórmula

$$p_{bc} - p_a + \rho g(z_2 - z_c(t)) = -\rho \frac{K}{2} sg[\dot{H}_c(t)] \dot{H}_c^2(t), \quad (4)$$

siendo  $z_c(t)$  la cota a la que se encuentra en cada instante de tiempo la superficie libre de la chimenea y  $\dot{H}_c = dH_c/dt$ . Para obtener esta expresión se ha despreciado la inercia y la fricción del líquido en la chimenea al ser las velocidades pequeñas (el área es muy grande) y sólo se retienen las pérdidas asociadas las rejillas.

La ecuación de continuidad en la chimenea relaciona la variación del altura en la misma con los caudales que circulan por los conductos y proporciona

$$\dot{H}_c = \frac{Q_T}{A_c} - \frac{Q_p}{A_c}. \quad (5)$$

Para cerrar el problema se tiene la ecuación de la turbina

$$W = \eta Q_p (p_4 + \frac{1}{2}v_p^2 - p_a), \quad (6)$$

donde  $\eta$  es el rendimiento de la turbina que se supone conocido. Eliminando las presiones de (1)-(6) se obtiene el sistema de 3 ecuaciones

$$L_T \dot{v}_T + g[H_c(t) - (H_e + z_1 - z_2)] = -\left(\frac{\lambda L_T}{4r_{hT}} + 1\right) \frac{|v_T| v_T}{2} + K \frac{|\dot{H}_c| \dot{H}_c}{2}, \quad (7)$$

$$L_p \dot{v}_p + \frac{A_c W}{\eta \rho v_p} - gH = g[H_c(t) - (H_e + z_1 - z_2)] - \frac{\lambda L_p}{4r_{hp}} \frac{v_p^2}{2} - K \frac{|\dot{H}_c| \dot{H}_c}{2}, \quad (8)$$

$$\dot{H}_c = \frac{A_T}{A_c} v_T - \frac{Q_p}{A_c}, \quad (9)$$

que permite fijada la potencia,  $W$  y las condiciones iniciales, obtener la evolución de las velocidades en los conductos,  $v_T(t)$  y  $v_p(t)$  así como la altura de agua en la chimenea,  $H_c(t)$ . Esta situación se conoce como régimen de regulación a potencia constante. Otra posibilidad es fijar el caudal que circula por la turbina ( $v_p$  fijo) y obtener de (6)-(9) la evolución de  $W(t)$ ,  $v_T(t)$  y  $H_c(t)$ . En este caso se dice que la regulación es caudal constante.

### Apartado 2.-

Se supondrá de aquí en adelante que el conducto inferior es lo suficientemente corto para que se puedan despreciar los términos de inercia temporal y de fricción en la ecuación (8). Introduciendo los parámetros

$$f = 1 + \frac{\lambda L_T}{4r_{hT}}, \quad \mu = \frac{f^2}{4L_T^2}, \quad \epsilon = \frac{2A_T L_T}{A_c f H} \quad (10)$$

y variables adimensionales siguientes

$$\begin{aligned} t = t_0 \tau &= \sqrt{\frac{2}{gHf}} L_T \tau, \quad \zeta = \frac{H_e + z_1 - z_2 - H_c(t)}{H}, \\ \theta &= \frac{t_o}{H A_c} Q_p, \quad \xi = \sqrt{\frac{f}{2Hg}} v_T, \quad w = \frac{\sqrt{f} W}{\eta \rho g H A_T \sqrt{2g}}, \end{aligned} \quad (11)$$

las ecuaciones (6)-(9) se reducen a

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \zeta - |\xi| \xi - \mu \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right| \frac{d\zeta}{d\tau}, \quad w = \frac{1}{\epsilon} \theta (1 - \zeta + \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right| \frac{d\zeta}{d\tau}) \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = -\epsilon \xi + \theta. \quad (12)$$

El sistema se encuentra funcionando en régimen estacionario si todas las derivadas temporales en (12) son nulas. Por tanto, conocido el caudal adimensional,  $\theta_1$ , las restantes magnitudes en el equilibrio,  $\xi_{e1}$ ,  $\omega_{e1}$  y  $\zeta_{e1}$  vienen dadas por

$$\zeta_{e1} = \xi_{e1}^2 = \frac{\theta_{e1}^2}{\epsilon^2}, \quad w_{e1} = \frac{1}{\epsilon} \theta_{e1} (1 - \zeta_{e1}). \quad (13)$$

### Apartado 3.-

Si en la situación de equilibrio anterior, introducimos una perturbación infinitesimal en el caudal que circula por la turbina  $\theta = \theta_{e2} = \theta_{e1} + \theta'$ , con  $\theta' \ll \theta_{e1}$  las restantes variables también se pondrán expresar como su valor en la nueva posición de equilibrio más una perturbación infinitesimal, es decir

$$\xi(\tau) = \xi_{e2} + \xi'(\tau), \quad \zeta(\tau) = \zeta_{e2} + \zeta'(\tau), \quad (14)$$

siendo  $\xi_{e2}$  y  $\zeta_{e2}$  los valores en el equilibrio correspondientes al nuevo caudal  $\theta = \theta_{e2}$ . Introduciendo estas expresiones en (12) y linealizando apropiadamente se obtiene

$$\frac{d^2 \zeta'}{d\tau^2} + 2\zeta_e \frac{d\zeta'}{d\tau} + \epsilon \zeta' = 0, \quad (15)$$

que habrá que resolver con las condiciones iniciales

$$\zeta'(0) = \zeta_{e2} - \zeta_{e1} = \Delta\zeta, \quad \frac{d\zeta'}{d\tau}(0) = \theta_{e2} - \theta_{e1} = \Delta\theta. \quad (16)$$



La solución de esta ecuación para  $\epsilon \geq \zeta_{e2}$  es la correspondiente a un oscilador amortiguado, de la forma

$$\xi = e^{-\zeta_{e2}\tau} \left[ (\zeta_{e2} - \zeta_{e1}) \cos \left( \sqrt{\epsilon - \zeta_{e2}^2} \tau \right) - \frac{\theta_{e2} - \theta_{e1} + \zeta_{e2}(\zeta_{e2} - \zeta_{e1})}{\sqrt{\epsilon - \zeta_{e2}^2}} \sin \left( \sqrt{\epsilon - \zeta_{e2}^2} \tau \right) \right]. \quad (17)$$

Obsérvese que en este caso hay dos frecuencias adimensionales características, una es la frecuencia de oscilación  $\omega_{osc} \sim \sqrt{\epsilon}$ , y otra la frecuencia de amortiguamiento  $\omega_{am} \sim \zeta_{e2}$ . Estas frecuencias adimensionales corresponden con las siguientes frecuencias físicas

$$\omega_{osc} = \Omega_{osc} t_o = \sqrt{\frac{A_T}{A_c} \frac{g}{L_T}} t_o, \quad y \quad \omega_{am} = \Omega_{am} t_o = \frac{Q_p^2}{A_T \sqrt{(2Hg)/f}} t_o. \quad (18)$$

Comparando ambas frecuencias

$$\frac{\Omega_{am}}{\Omega_{osc}} \sim \sqrt{f} \sqrt{\frac{A_c H}{A_T L_T}}, \quad (19)$$

se observa que el amortiguamiento es más efectivo cuanto mayor sea la fricción (mayor  $f$ ) o mayor sea la relación de volúmenes entre la chimenea y el conducto superior.

Por otro lado, en el caso de que  $\epsilon < \zeta_{e2}$ , la solución evoluciona exponencialmente a su nueva posición de equilibrio en la forma

$$\zeta'(\tau) = \frac{\Delta\theta - r_2\Delta\zeta}{r_1 - r_2} e^{r_1\tau} + \frac{r_1\Delta\zeta - \Delta\theta}{r_1 - r_2} e^{r_2\tau}, \quad (20)$$

siendo

$$r_1 = -\zeta_{e2} + \sqrt{\zeta_{e2}^2 - \epsilon}, \quad r_2 = -\zeta_{e2} - \sqrt{\zeta_{e2}^2 - \epsilon}. \quad (21)$$

#### Apartado 4.-

En el caso de que se mantenga la potencia constante,  $w(\tau) = w_{e1}$ , se analizará la introducción de una perturbación infinitesimal inicial con respecto a la situación de equilibrio, es decir se buscan soluciones de la forma

$$\xi(\tau) = \xi_{e1} + \xi'(\tau), \quad y \quad \zeta(\tau) = \zeta_{e1} + \zeta'(\tau), \quad (22)$$

donde

$$w_{e1} = \xi_{e1}(1 - \xi_{e1}^2), \quad \zeta_{e1} = \xi_{e1}^2, \quad (23)$$

y  $\xi' \ll \xi_{e1}$  y  $\zeta' \ll \zeta_{e1}$ . Lo primero que se observa de la primera ecuación en (23) es que para cada valor de la potencia  $w_{e1}$  hay dos posibles soluciones estacionarias  $\xi_{e1-}$  y  $\xi_{e1+}$  con  $\xi_{e1-} < 1/\sqrt{3}$  y  $\xi_{e2+} > 1/\sqrt{3}$  siempre que esta potencia sea menor que un cierto valor máximo  $w_{e1max} = 2/\sqrt{27}$  para el cual sólo hay una solución  $\xi_{e1m} = 1/\sqrt{3}$ . Para valores mayores de la potencia no hay solución estacionaria para el problema. Partiendo de una situación estacionaria concreta, introduciendo las expresiones (23) en las ecuaciones que gobiernan el problema y linearizando dichas ecuaciones se obtienen las ecuaciones de la evolución de las perturbaciones  $\xi'$  e  $\zeta'$  son

$$\frac{d\xi'}{d\tau} = \zeta' - 2\xi_{e1}\xi', \quad \frac{d\zeta'}{d\tau} = -\epsilon\xi' + \frac{\epsilon w_{e1}}{(1 - \xi_{e1})^2} \zeta'. \quad (24)$$

Este sistema de ecuaciones admite soluciones de la forma

$$\xi' \simeq Ae^{\lambda\tau}, \quad \zeta' \simeq Be^{\lambda\tau}, \quad (25)$$

siendo  $\lambda$  raíz de la siguiente ecuación algébrica

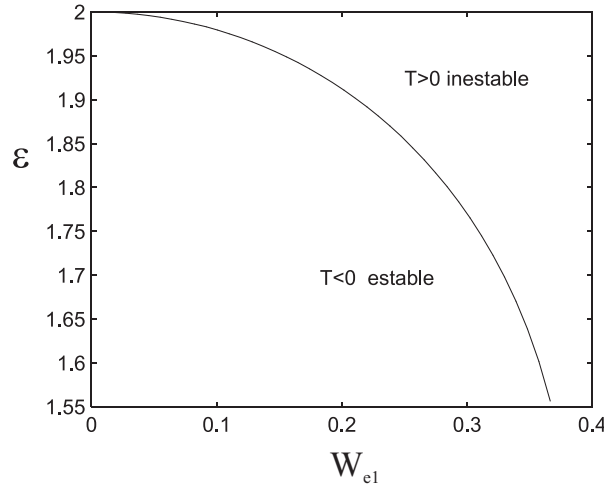
$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0, \quad \text{con} \quad T = \xi_{e1} \left( \frac{\epsilon}{1 - \xi_{e1}^2} - 2 \right) \quad y \quad \Delta = \frac{1 - 3\xi_{e1}^2}{1 - \xi_{e1}^2} \quad (26)$$

Obsérvese que si se parte de la solución con  $\xi_{e1+} > \xi_m = 1/\sqrt{3}$  se tiene que  $\Delta < 0$  y  $T^2 - 4\Delta > 0$  y, por tanto, que hay dos raíces reales una positiva  $\lambda_1 > 0$  y otra negativa  $\lambda_2 < 0$  lo que indica que el sistema es inestable y nunca se vuelve al equilibrio.

Por otro lado si se parte de la otra solución  $\xi_{e1-} < \xi_{1m} = 1/\sqrt{3}$  se tienen las siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned} a) \Delta > 0 \quad y \quad T < 0 &\Rightarrow \Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) < 0 \Rightarrow \text{equilibrio estable} \begin{cases} T^2 - 4\Delta < 0 \Rightarrow \Im(\lambda_1), \Im(\lambda_2) \neq 0 \text{ espiral} \\ T^2 - 4\Delta > 0 \Rightarrow \Im(\lambda_1), \Im(\lambda_2) = 0 \text{ foco} \end{cases} \\ b) \Delta > 0 \quad y \quad T > 0 &\Rightarrow \Re(\lambda_1), \Re(\lambda_2) > 0 \Rightarrow \text{equilibrio inestable.} \end{aligned} \quad (27)$$

Obsérvese que para valores de  $\xi = \xi_{e1-} < \xi_{e1m}$  la estabilidad lineal del sistema depende del valor de  $\epsilon$ . La figura muestra el máximo valor de  $\epsilon$  para cada potencia  $w_{e1}$  para el cual las soluciones estacionarias con  $\xi = \xi_{e1-}$  son estables. Recuérdese que valores de  $\epsilon$  grandes corresponden a valores pequeños de  $f$  (fricción pequeña) de modo que la gráfica proporciona un mapa de estabilidad.



Es útil la comparación de los resultados lineales con los no lineales calculados numéricamente. El sistema que hay que resolver es

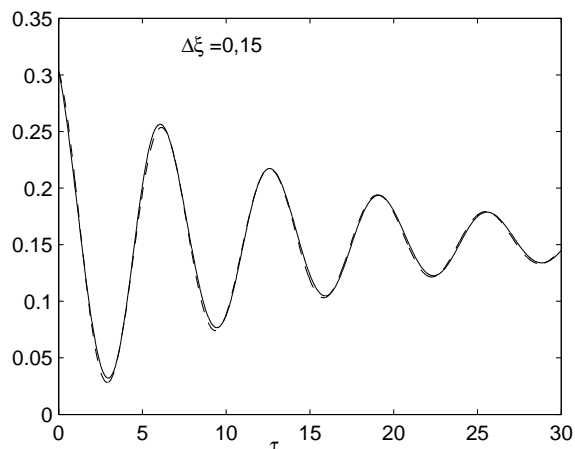
$$\frac{d\xi}{d\tau} = \zeta - |\xi|\xi - \mu \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right| \frac{d\zeta}{d\tau}, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = -\epsilon\xi + \epsilon w_{e1} \left( 1 - \zeta + \left| \frac{d\zeta}{d\tau} \right| \frac{d\zeta}{d\tau} \right)^{-1}, \quad (28)$$

con la condición inicial

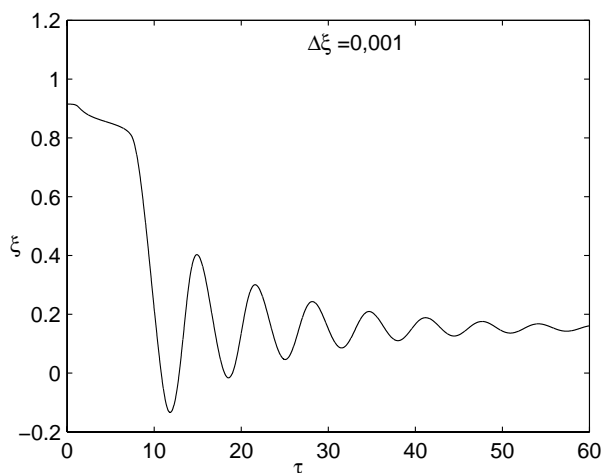
$$\xi(0) = \xi_{e1} + \Delta\xi, \quad \zeta(0) = \zeta_{e1} = \xi_{e1}^2, \quad (29)$$

donde se ha impuesto una perturbación inicial en  $\xi$  respecto a su situación de equilibrio. Considérese primero el caso en que la chimenea no está provista de las rejillas, esto es,  $\mu = 0$  y se elige el caso  $w_{e1} = 0,15$  y  $\epsilon = 1$ . Para este valor  $w_{e1} < w_{e1max}$  y de  $\epsilon$  hay dos posibles soluciones estacionarias  $\xi_{e1-} = 0,1536$  y  $\xi_{e1+} = 0,9143$ . Se tiene que para  $\xi_{e1-}$ ,  $T < 0$  y  $\Delta > 0$  por lo que la teoría lineal predice que el sistema es estable si se perturba en torno  $\xi_{e1-}$  mientras que es inestable si se perturba en torno  $\xi_{e1+}$ .

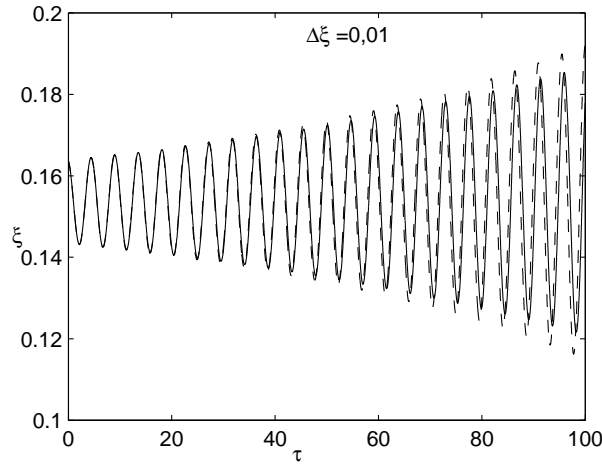
La figura muestra la comparación entre la aproximación lineal (línea discontinua) y la no lineal (línea continua) de la evolución temporal de  $\xi$  cogiendo como condición inicial  $\xi(0) = \xi_{e1-} + \Delta\xi$  siendo  $\Delta\xi = 0,15$ . Como se puede comprobar aún imponiendo una perturbación grande en la altura del embalse  $\Delta\xi$  tanto la solución no lineal como la lineal son estables y la solución evoluciona hacia su posición de equilibrio estable  $\xi_{e1-}$ .



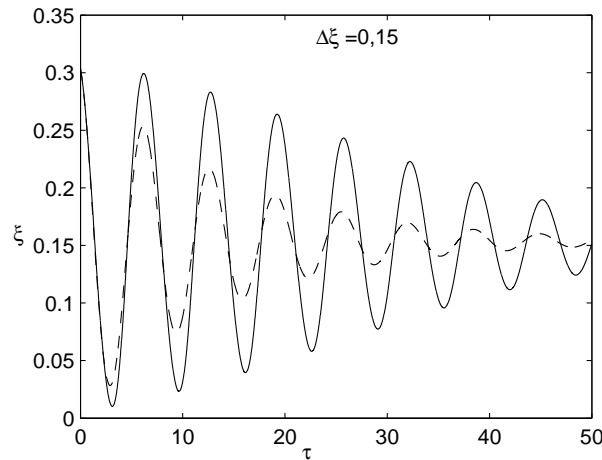
Si por el contrario se perturba en torno  $\xi_{e1+}$  la situación es diferente. En efecto, la figura siguiente muestra la evolución temporal de  $\xi$  cogiendo con condición inicial  $\xi(0) = \xi_{e1+} + \Delta\xi$  con  $\Delta\xi = 0,001$ . Como se puede comprobar y como predice la teoría lineal, la posición de equilibrio es inestable, y una pequeña perturbación en la altura de la chimenea produce que la solución evolucione hacia la otra posición de equilibrio  $\xi_{e1-}$ . Desde un punto de vista ingenieril esta situación es muy peligrosa pues un pequeño cambio puede producir una gran alteración en el sistema.



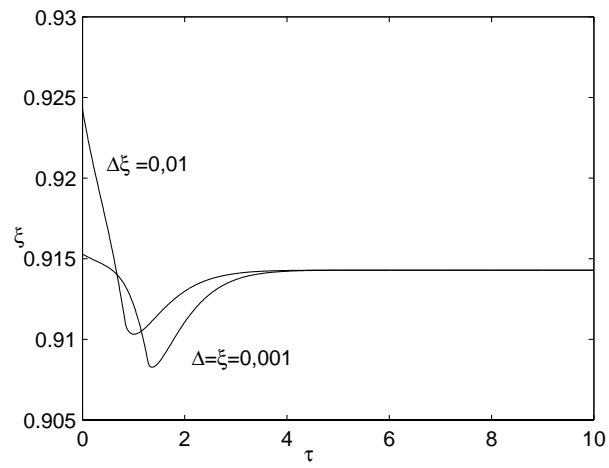
Si para la misma potencia se aumentase  $\epsilon$  (por ejemplo, escogiendo una tubería de presión más corta) se podrá tener que incluso para  $\xi = \xi_{e1-}$  el sistema fuese inestable. Esto se muestra claramente en la figura siguiente que muestra la aproximación lineal (línea discontinua) y la no lineal (línea continua) de la evolución temporal de  $\xi$  tomando la condición inicial  $\xi(0) = \xi_{e1-} + 0,01$  para  $w_{e1} = 0,15$  y  $\epsilon = 2$  ( $T > 0$ ).



El papel de las pérdidas de carga que introducen las rejillas en la chimenea de equilibrio caracterizadas por el parámetro  $\mu$  se puede analizar fácilmente. Al igual que antes se elige  $w_{e1} = 0,15$ ,  $\epsilon = 1$  pero ahora con  $\mu = 1$  para que la caída de presiones a través de las rejillas de la chimenea sea significativa. Si se perturba ahora entorno a  $\xi_{e1-1}$  como se observa en la figura el sistema es estable aunque las diferencias entre la aproximación lineal y la no lineal son mayores que para el caso  $\mu = 0$ . Esto es fácil de entender porque como se observa  $\mu$  no aparece en el sistema lineal (24).



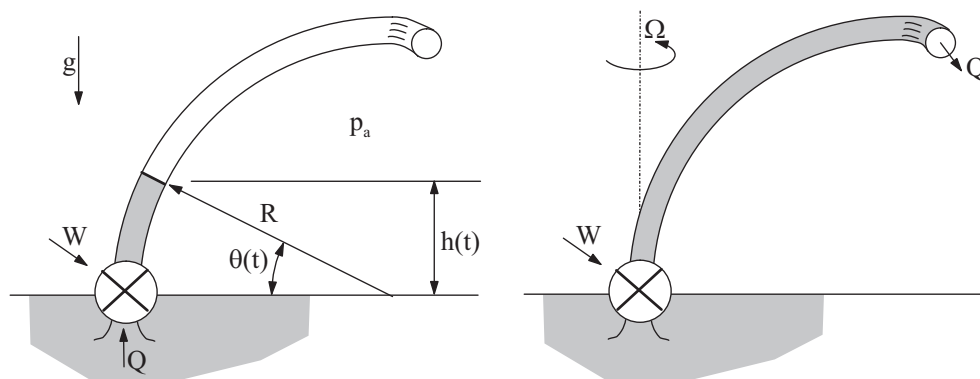
Lo más interesante es que si  $\mu$  es suficientemente grande la otra posición de equilibrio  $\xi = \xi_{e1+}$  que según la teoría lineal es siempre inestable, se hace estable. En efecto, la siguiente figura muestra como si se perturba la solución en torno a  $\xi = \xi_{e1+}$  (se han elegido dos valores de la perturbación  $\Delta\xi = 0,01$  y  $\Delta\xi = 0,001$ ) los efectos no lineales asociados con  $\mu$  estabilizan rápidamente al sistema haciendo que la solución vuelva a la situación de equilibrio inicial  $\xi = \xi_{e1+}$ . Es por esto que la introducción de mallas en las chimeneas de equilibrio de esta clases de dispositivos es una práctica habitual, pues su uso garantiza una mayor estabilidad del sistema a cambios o perturbaciones en el mismo.



**Problema 6.6**

Un aspersor en forma de un cuarto de circunferencia de radio  $R$  y de sección circular con diámetro  $D$ , está conectado a la superficie libre de un embalse mediante una bomba. Cuando se hace bombear agua a través del aspersor, éste se pone a girar sobre su eje vertical gracias a una boquilla en forma de codo conectada a la salida del mismo y que es perpendicular a su eje y a la superficie libre. Inicialmente la bomba está cebada y el aspersor vacío. Supuesto que el movimiento del líquido en el aspersor es siempre turbulento con factor de fricción  $\lambda$  constante y que no hay pérdidas de carga localizadas en la boquilla. Se pide:

1. Altura de la interfase  $h_f(t)$  del líquido en el aspersor como función del tiempo cuando se conecta la bomba y se hace circular un caudal  $Q$  constante por la misma. Tiempo,  $t_1$ , necesario para que el líquido salga por la boquilla y potencia de la bomba  $\dot{W}(t)$  para mantener el caudal  $Q$  constante.
2. A partir de ese instante, y debido al cambio de dirección del líquido en la boquilla, el aspersor empieza a girar. Supuesto constante y conocido el momento de inercia del sistema cuando el aspersor está lleno de líquido,  $I$ , y siendo el par resistente de las fuerzas aerodinámicas sobre el mismo,  $C_R \Omega^2$  donde  $C_R$  es una constante conocida con dimensiones adecuadas, calcular:
  - La velocidad angular de giro  $\Omega(t)$  como función del tiempo y el valor constante,  $\Omega_e$  que alcanza el aspersor para tiempos grandes, estimando el tiempo necesario para que se alcance dicha velocidad angular.
  - Potencia de la bomba  $\dot{W}(t)$  como función del tiempo.
3. Una vez adquirida la velocidad de giro constante, la bomba deja de funcionar actuando ahora como una pérdida de carga localizada con factor,  $K$ , conocido. Calcular:
  - Ecuaciones y condiciones de contorno que proporcionan el caudal  $Q(t)$  que circula por el aspersor y velocidad de giro del mismo  $\Omega(t)$ .
  - Tiempo necesario para que deje de salir líquido por la boquilla.
4. Si en las mismas circunstancias del apartado 1 en algún instante de tiempo la bomba dejase de funcionar y su salida se cerrara completamente, el líquido cavitara formándose una interfase vapor-líquido, con  $p_v \sim 0$ , a la salida de la bomba. Calcular el tiempo máximo,  $t_{cmax}(Q)$ , en que hay que cerrar la salida de la bomba en función del caudal  $Q$  para evitar que el líquido salga por la boquilla.



Resolución:Apartado 1.-

Puesto que el caudal es constante la posición de la interfase medida desde la salida de la bomba como función del tiempo es lineal y viene dada por:

$$s_f(t) = \frac{Q}{A}t, \quad (1)$$

siendo  $A$  el área de paso del aspersor  $A = \pi D^2/4$ . Teniendo en cuenta que el ángulo que forma dicha interfase con la horizontal es

$$R\theta_f(t) = s_f(t), \quad (2)$$

se obtiene la altura como función del tiempo

$$h_f(t) = R \operatorname{sen}(\theta_f(t)) = R \operatorname{sen}\left(\frac{s_f(t)}{R}\right) = R \operatorname{sen}\left(\frac{Q}{AR}t\right). \quad (3)$$

El tiempo,  $t_1$ , para que salga agua por la boquilla se obtiene igualando (3) a  $R$ , por tanto,

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \frac{AR}{Q}. \quad (4)$$

Para obtener la potencia se necesita conocer la caída de presiones en el aspersor que se obtiene de integrar la ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z(s) \right) = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \quad (5)$$

siendo  $s$  la coordenada a lo largo del conducto y donde la integración espacial se tiene que hacer en el intervalo  $0 \leq s \leq s_f(t)$  donde hay líquido en un instante dado de tiempo. La integración de esta ecuación proporciona la caída de presiones en aspersor

$$p_s - p_a = \rho g h_f(t) + \frac{\lambda Q^2 s_f(t)}{2DA^2}, \quad (6)$$

donde  $p_s$  es la presión a la salida de la bomba, y se impuesto hemos la condición de que la presión del líquido en la interfase es  $p_a$ .

Por otro lado, la potencia de la bomba viene dada por

$$\dot{W}(t) = Q(p_{os} - p_{oe}) = Q(p_s - p_a + 1/2\rho(Q/A)^2), \quad (7)$$

donde se ha supuesto que la entrada de la bomba conectada al embalse está bien diseñada y el fluido no pierde presión de remanso en la región de entrada. Sustituyendo finalmente (6) en (7) y teniendo en cuenta (1) y (3) se obtiene la potencia como función de los datos del problema

$$\dot{W}(t) = Q(p_{os} - p_{oe}) = Q \left[ \rho g R \operatorname{sen}\left(\frac{Q}{AR}t\right) + \frac{Q^2}{2A^2} \left(1 + \lambda \frac{Qt}{AD}\right) \right]. \quad (8)$$

Apartado 2.-

La velocidad de giro del aspersor viene dada por la ecuación de conservación del momento angular

$$I \frac{d\Omega}{dt} = ER - C_R \Omega^2, \quad (9)$$

siendo  $ER$  el momento que proporciona el empuje del líquido que sale por la boquilla y  $-C_R \Omega^2$  el momento de la resistencia aerodinámica del aire exterior. El empuje  $E$  representa la resultante de las fuerzas que el líquido

ejerce sobre el conducto (ver problemas del capítulo 3). El empuje  $E$  está orientado perpendicularmente al plano del conducto siendo su valor

$$E = \frac{\rho Q^2}{A}. \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9) se obtenemos la ecuación

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\rho Q^2}{A} R - C_R \Omega^2, \quad (11)$$

cuya integración nos proporciona la variación de  $\Omega$  con respecto al tiempo

$$\Omega(t) = \sqrt{\frac{\rho Q^2 R}{C_R A}} \tanh \left[ \frac{Q}{I} \sqrt{\frac{\rho R C_R}{A}} t \right], \quad (12)$$

donde se ha tenido en cuenta que en el instante inicial,  $t = 0$  cuando el líquido comienza a salir por la boquilla la velocidad angular es nula. Se observa directamente de (12) que para tiempos grandes,  $t \rightarrow \infty$ , el aspersor adquiere una velocidad de giro constante cuyo valor es

$$\Omega_e = \sqrt{\frac{\rho Q^2 R}{C_R A}}. \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que  $\tanh x \sim 1$  cuando  $x \sim 1$  se puede estimar de (12) el tiempo,  $t_2$ , necesario para alcanzar el valor estacionario de la velocidad angular  $\Omega_e$

$$t_2 \sim \frac{I}{Q} \sqrt{\frac{A}{\rho R C_R}}. \quad (14)$$

Obsérvese que este tiempo aumenta al hacerlo el momento de inercia del aspersor y disminuye al aumentar el caudal.

Para obtener la potencia se necesita conocer la caída de presión en el aspersor. Se tomará para ello unos ejes ligados al aspersor que se mueven, por tanto, con velocidad angular,  $\Omega(t)$ , y se considerará la ecuación de cantidad de movimiento para movimientos turbulentos estacionarios en conductos proyectada en la dirección a lo largo del conducto  $\mathbf{e}_s$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z(s) - \frac{1}{2} \rho \Omega(t)^2 r(s)^2 \right) = -\frac{\rho \lambda v^2}{2D} - \rho \left( \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{x}(s) - 2\mathbf{v} \times \Omega \right) \cdot \mathbf{e}_s, \quad (15)$$

con la coordenada  $s$  variando en el intervalo,  $0 \leq s \leq R\pi/2$ , y siendo  $z$  la coordenada vertical y  $r$  la distancia radial al eje de giro. Como se puede ver, al elegir un sistema no inercial aparecen fuerzas asociadas a las aceleraciones angular y de Coriolis. Sin embargo, cuando se integran en  $s$  se puede despreciar la integral asociada a esos términos

$$\int_0^{R\pi/2} -\rho \left( \frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{x}(s) - \mathbf{v} \times \Omega \right) \cdot \mathbf{e}_s ds \simeq 0, \quad (16)$$

puesto que los términos dentro de la integral son ceros por ser perpendiculares los vectores  $d\Omega/dt \times \mathbf{x}(s)$  y  $\mathbf{v} \times \Omega$  con el vector  $\mathbf{e}_s$  salvo en la zona de la boquilla cuya longitud despreciable frente al total y, por tanto, la caída de presiones asociada a esos términos también es pequeña. La integración de (15) proporciona la relación

$$p_s - p_a = \rho g R + \frac{\rho \lambda Q^2 R \pi / 2}{2DA^2} - \frac{1}{2} \rho \Omega(t)^2 R^2, \quad (17)$$

siendo  $p_s$  la presión a la salida de la bomba. Sustituyendo finalmente esta expresión en la ecuación de la bomba (7) se obtiene la potencia como función de los datos del problema

$$\dot{W}(t) = Q \left[ \rho g R + \frac{\rho Q^2}{2A^2} \left( 1 + \frac{\lambda R \pi}{2D} \right) - \frac{1}{2} \rho \Omega(t)^2 R^2 \right], \quad (18)$$



donde  $\Omega(t)$  es la dada por la ecuación (12). Obsérvese que a medida que el aspersor empieza a girar la potencia necesaria para mantener un caudal  $Q$  circulando disminuye debido al efecto de succión que ejercen las fuerzas centrífugas asociada al giro.

### Apartado 3.-

La ecuación para la velocidad angular es la misma que antes pero ahora el empuje varía con el tiempo; esto es

$$I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\rho Q^2(t)}{A} - C_R \Omega^2. \quad (19)$$

Para obtener la ecuación del caudal se tomará al igual que antes unos ejes ligados al aspersor que se mueven, por tanto, con velocidad angular,  $\Omega(t)$ , y se considera la ecuación de cantidad de movimiento a lo largo del conducto

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z(s) - \frac{1}{2} \rho \Omega(t)^2 r(s)^2 \right) = -\frac{\lambda \rho v^2}{2D}, \quad (20)$$

donde se han despreciado los efectos de la aceleración angular y de la fuerza de Coriolis. La integración de (20) para  $0 \leq s \leq \pi R/2$  proporciona teniendo en cuenta que  $v = Q/A$  y que la caída de presiones de remanso entre la entrada del aspersor (la salida de la bomba) y el embalse es  $K \rho Q^2/(2A^2)$ , la ecuación para el caudal

$$\frac{dQ}{dt} \frac{L}{A} = -gR - \frac{Q(t)^2}{2A^2} \left( 1 + K + \frac{\lambda L}{D} \right) + \frac{1}{2} \Omega(t)^2 R^2, \quad (21)$$

siendo  $L = \pi R/2$ .

Las ecuaciones (19) y (21) tienen que integrarse numéricamente de forma conjunta añadiendo las correspondientes condiciones iniciales

$$t = 0, \quad Q(0) = Q_e, \quad \Omega(0) = \Omega_e, \quad (22)$$

siendo  $Q_e$  y  $\Omega_e$  los mismos del apartado anterior. Introduciendo las variables adimensionales

$$X = \frac{Q}{Q_e}, \quad Y = \frac{\Omega}{\Omega_e}, \quad \tau = \frac{t C_R \Omega_e}{I}, \quad (23)$$

las ecuaciones (20) y (21) se transforman en

$$\frac{dY}{d\tau} = X^2 - Y^2, \quad (24)$$

$$\frac{dX}{d\tau} = -\alpha - \beta X^2 + \gamma Y^2, \quad (25)$$

siendo

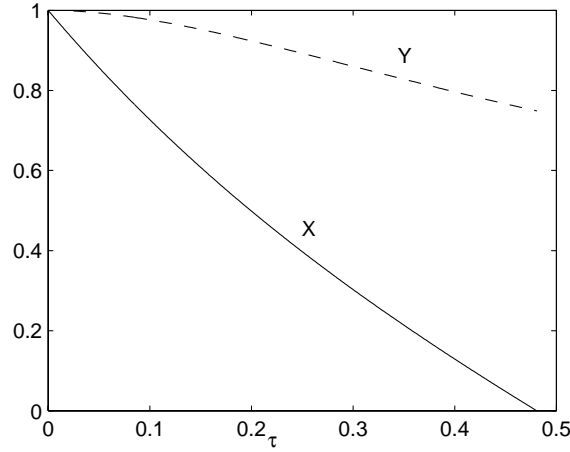
$$\alpha = \frac{2gA}{\pi Q_e} \frac{I}{C_R \Omega_e}, \quad \beta = \frac{Q_e(1 + K + \lambda L/D)}{AR^2 \pi} \frac{I}{C_R \Omega_e}, \quad \gamma = \frac{\Omega_e^2 A}{Q_e \pi} \frac{I}{C_R \Omega_e}.$$

Estas ecuaciones hay que integrarlas con condiciones iniciales  $Y(0) = X(0) = 1$ .

El tiempo para que deje de salir agua por la boquilla,  $\tau_f$ , viene determinado por que se alcance la condición

$$X(\tau_f) = 0, \quad (26)$$

durante la integración del sistema (24) y (25). La figura muestra la evolución de  $X$  e  $Y$  para el caso particular  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .



Se puede observar como para este caso particular  $\tau_f \sim 0,47$ .

#### Apartado 4.-

Si la bomba se cierra en un instante  $t_c < t_1$ , la presión a la salida de la bomba decrece y el líquido cavita formándose una interfase líquido-vapor, con presión de vapor  $p_v \sim 0$ . Como se muestra en la figura inferior, la longitud de líquido que queda dentro del aspersor  $l(t_c)$ , permanecerá constante para tiempos posteriores y valdrá

$$l(t_c) = \frac{Qt_c}{A}. \quad (27)$$

La ecuación de cantidad de movimiento para movimientos turbulentos no estacionarios en conductos proyectada en la dirección del movimiento del líquido  $\mathbf{e}_s$  es

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{d}{ds} \left[ \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z(s) \right] = -\frac{\rho \lambda v^2}{2D}. \quad (28)$$

Hay que integrar esta ecuación entre  $s = s_f(t) - l(t_c)$  y  $s = s_f(t)$  donde  $s_f(t)$  es la posición de la interfase superior en el instante  $t$ . Teniendo en cuenta que por continuidad se tiene

$$v = \frac{ds_f}{dt} \equiv \dot{s}_f(t),$$

y que en  $s = s_f(t) - l(t_c)$   $p = p_v = 0$  y en  $s = s_f(t)$   $p = p_a$  la integración de (28) proporciona la ecuación

$$\ddot{s}_f(t) = -\frac{p_a}{l(t_c)\rho} - \frac{g}{l(t_c)} \left[ R \sin \left( \frac{s_f(t)}{R} \right) - R \sin \left( \frac{s_f(t) - l(t_c)}{R} \right) \right] - \frac{\lambda \dot{s}_f^2}{2D}. \quad (29)$$

Introduciendo las variables

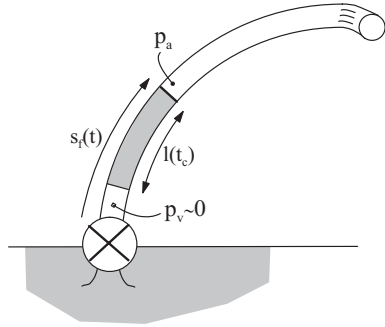
$$\theta_f = \frac{s_f}{R} \quad e \quad Y(\theta_f) = \frac{\dot{s}_f(t)^2}{2gR}, \quad (30)$$

la ecuación de segundo orden anterior se convierte en una de primer orden

$$\frac{dY}{d\theta_f} + \beta Y(\theta_f) = -\frac{\alpha}{\theta_o} - \frac{1}{\theta_o} [\sin \theta_f - \sin(\theta_f - \theta_o)], \quad (31)$$

donde

$$\alpha = \frac{p_a}{\rho g R}, \quad \beta = \frac{\lambda R}{D} \quad y \quad \theta_o = \frac{l(t_c)}{R}. \quad (32)$$



La integración de esta ecuación proporciona la mitad del cuadrado de la velocidad la interfase como función de su posición (el ángulo en el que se encuentra la misma dentro del aspersor)

$$Y(\theta_f) = K_f(\theta_o) e^{-\beta\theta_f} - \frac{\alpha}{\beta\theta_o} + \frac{1}{(1+\beta^2)\theta_o} [\cos\theta_f - \cos(\theta_f - \theta_o)] - \beta \sin\theta_f + \beta \sin(\theta_f - \theta_o), \quad (33)$$

donde la constante  $K_f$  se determina imponiendo que en  $\theta_f = \theta_o$   $Y = Y_o$  siendo  $Y_o = 1/2(Q/A)^2$ . Esto es,

$$K_f(\theta_o) = e^{\beta\theta_o} \left( Y_o + \frac{\alpha}{\beta\theta_o} + \frac{1 + \beta \sin\theta_o - \cos\theta_o}{(1 + \beta^2)\theta_o} \right). \quad (34)$$

El tiempo máximo que puede estar abierta la bomba,  $(t_c)_{max}$  o equivalentemente el ángulo máximo inicial,  $\theta_{omax}$ , que puede ocupar el líquido en el aspersor

$$\theta_{omax} = \frac{l(t_{cmax})}{R} = \frac{Qt_{cmax}}{AR},$$

para que en el proceso de subida no salga líquido por la boquilla se obtiene imponiendo en (33) que  $Y = 0$  en  $\theta_f = \pi/2$ . Por tanto, la ecuación que determina  $\theta_{omax}$  es

$$K_f(\theta_{omax})e^{-\beta\pi/2} = \frac{\alpha}{\beta\theta_{omax}} + \frac{\beta + \sin\theta_{omax} - \beta \cos\theta_{omax}}{(1 + \beta^2)\theta_{omax}} \quad (35)$$

donde  $K_f(\theta_{omax})$  se obtiene de (34).

A medida que el caudal crece ( $Y_o$  crece) el ángulo  $\theta_{omax}$  disminuye o lo que es lo mismo  $t_c$  decrece. Esto se puede ver mejor examinando un caso particular, el caso en el que la fricción sea despreciable. Obsérvese que para el caso sin fricción,  $\beta = 0$ , la solución (33) junto la condición inicial (34) se puede expresar en la forma

$$Y(\theta_f) = \alpha + Y_o + \frac{1 - \alpha\theta_f}{\theta_o} + \frac{\cos\theta_f - \cos(\theta_f - \theta_o) - \cos\theta_o}{\theta_o}. \quad (36)$$

El ángulo  $\theta_{omax}$ , en esta situación se obtiene igualando a cero (36) en  $\theta_f = \pi/2$ , es decir,

$$0 = \alpha + Y_o + \frac{1 - \pi\alpha/2}{\theta_{omax}} - \frac{\cos\theta_{omax} + \sin\theta_{omax}}{\theta_{omax}}. \quad (37)$$

Claramente al aumentar  $Y_o$  disminuye  $\theta_{omax}$ . Si se desarrolla en serie de Taylor la anterior ecuación en el entorno de  $\theta_{omax} \simeq 0$  se obtiene

$$0 \simeq -\frac{\pi\alpha}{2\theta_{omax}} + (Y_o + \alpha - 1) + \frac{\theta_{omax}}{2} + \mathcal{O}(\theta_{omax}^2) \quad (38)$$

y es fácil observar que  $\theta_{omax} \rightarrow 0$  sólo se alcanza con  $Y_o \rightarrow \infty$  salvo en el caso particular en que  $\alpha = 0$  (o equivalentemente si la presión del aire es nula,  $p_a = 0$ ) en cuyo caso se tiene que  $\theta_{omax} \rightarrow 0$  si  $Y_o \rightarrow 1$  o en variables físicas si  $v = Q/A \rightarrow \sqrt{2gR}$ .

**Problema 6.7**

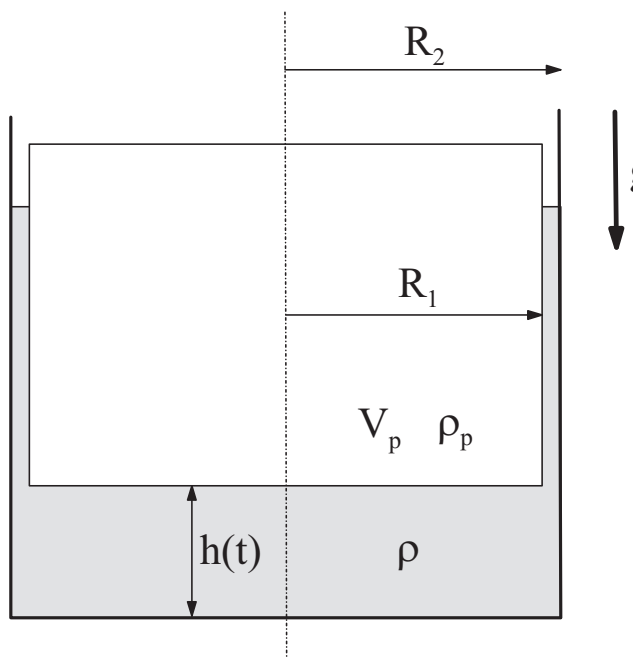
Considérese un recipiente cilíndrico de radio  $R_2$  que contiene un volumen  $V_1$  de un líquido ideal de densidad  $\rho$ . En dicho recipiente se sumerge concéntricamente con el mismo una pieza cilíndrica de volumen  $V_p$ , densidad media  $\rho_p < \rho$  y radio  $R_1$  de tal forma que el espesor de la holgura entre pieza y tubo es  $e = R_2 - R_1 \ll R_2$ . Suponiendo en lo que sigue que las características de la pieza son tales que la interfase del líquido en la ranura siempre queda situada por debajo de la base superior de la pieza y que la longitud sumergida de la pieza  $l(t)$  es siempre mucho mayor que  $e$ , se pide:

1. Distancia  $h_{eq}$  entre la base inferior de la pieza y el fondo del tubo cuando el sistema está en reposo.
2. Si mediante la aplicación de cierta fuerza exterior aplicada a la base superior de la pieza en dirección de su eje se mantiene el sistema en reposo con la base inferior de la pieza situada a una distancia  $h_o < h_{eq}$  del fondo del tubo, y en un instante inicial se retira dicha fuerza, calcular la velocidad de ascensión de la pieza como función de la distancia  $h(t)$  entre la base inferior de la pieza y el fondo del tubo. Se recomienda usar las variables adimensionales

$$\alpha = V_1/(\pi R_1^2 h_{eq}) - 1, \quad \beta = \frac{R_1}{2e}, \quad \xi = h(t)/h_{eq}, \quad \text{y} \quad \tau = t\sqrt{g/h_{eq}}$$

siendo  $h_{eq}$  la cantidad hallada en el apartado 1.

3. Ecuación algébrica que determina la altura máxima alcanzada por la pieza  $\xi_{max}$  como función de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\xi_o = h_o/h_{eq}$ , así como la ecuación que determina el valor mínimo de  $\xi_o$  como función de  $\alpha$  y  $\beta$  para que siempre exista líquido en la ranura durante el movimiento de ascensión.
4. Calcular la velocidad de descenso de la pieza como función de  $h(t)$  una vez alcanzado  $\xi_{max}$ .



Resolución:Apartado 1.-

En el equilibrio el empuje del líquido sobre la pieza cilíndrica está equilibrado con el peso del mismo,

$$M = \rho_p V_p = \rho \pi R_1^2 l_{eq}, \quad (1)$$

siendo  $M$  la masa de la pieza y  $l_{eq}$  la longitud de la misma que permanece sumergida (medida desde su base). La conservación del volumen del líquido proporciona por otro lado la relación entre la altura alcanzada por el líquido en la ranura  $l(t)$  con la profundidad a la que se hunde la pieza  $h(t)$ ,

$$V_1 = \pi R_1^2 h_{eq} + 2\pi R_1 e l_{eq}. \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se llega finalmente a

$$h_{eq} = \frac{V_1}{\pi R_1^2} - \frac{2e}{R_1} l_{eq} = \frac{V_1}{\pi R_1^2} - \frac{2eM}{\rho \pi R_1^3}. \quad (3)$$

Apartado 2.-

Si la pieza se empuja hacia abajo mediante una fuerza exterior, el volumen de líquido desalojado por ésta crece creando un empuje de Arquímedes ascendente de valor adecuado como para soportar la fuerza exterior. Una vez que se retira la fuerza exterior se crea un desequilibrio de fuerzas sobre la pieza dando lugar a un ascenso de la pieza [ $\dot{h}(t) > 0$ ] y un descenso de la altura de líquido en la ranura. Si el movimiento del líquido en la ranura puede suponerse ideal vendrá gobernado por la ecuación

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho v_z^2}{2} + p + \rho g z \right) = 0, \quad (4)$$

donde la coordenada vertical  $z$  se toma con origen en la base del recipiente. Integrando (4) en un instante dado de tiempo en la región en la que hay líquido,  $h(t) \leq z \leq h(t) + l(t)$  se obtiene

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} \int_{h(t)}^{h(t)+l(t)} dz = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} l(t) = \int_{h(t)}^{h(t)+l(t)} d(p + \rho g z) = p_i - p_a - \rho g l(t), \quad (5)$$

siendo  $l(t)$  la longitud de la pieza sumergida en el instante  $t$  y  $p_i$  la presión bajo la misma. Recuerde el lector que el ascenso de la pieza corresponde a una descarga de fluido desde la ranura y, por lo tanto, la presión del fluido a la salida de la ranura es  $p[z = h(t)] = p_i$ .

La velocidad del líquido en la ranura se puede relacionar con la variación de la altura de la pieza por conservación del volúmenes. En efecto, la variación de volumen de líquido debajo de la pieza debe ser igual al caudal de líquido que entra desde la ranura, por tanto,

$$2\pi v_z R_1 e = -\pi R_1^2 \dot{h}(t), \quad (6)$$

donde  $\dot{h} = dh/dt$ .

Por otro lado, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para la pieza proyectada en la dirección vertical proporciona

$$M\ddot{h}(t) = -Mg + (p_i - p_a)\pi R_1^2 \quad (7)$$

y sustituyendo (5) y (6) en (7) se obtiene

$$M\ddot{h}(t) = -Mg + \rho l(t) \pi R_1^2 \left( g - \frac{\ddot{h} R_1}{2e} \right). \quad (8)$$

La relación entre  $h(t)$  y  $l(t)$  viene determinada al igual que en el apartado anterior por la conservación del volumen del líquido,

$$V_1 = \pi R_1^2 h(t) + 2\pi R_1 e l(t). \quad (9)$$

Introduciendo las variables y parámetros adimensionales propuestos en la ecuación resultante teniendo en cuenta las expresiones para  $l_{eq}$  [véase (1)],  $h_{eq}$  [véase (3)], y finalmente la relación (9) se llega a la siguiente ecuación diferencial

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 + \alpha - \xi)\right) \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{(1 - \xi)}{\alpha}. \quad (10)$$

Introduciendo la variable

$$Y(\xi) = \frac{d\xi}{d\tau}, \quad (11)$$

la anterior ecuación se transforma en

$$YY' = \frac{1 - \xi}{(\alpha + \beta + \beta\alpha - \beta\xi)} \quad (12)$$

donde ' denota derivación con respecto a  $\xi$ . Integrando esta ecuación diferencial y teniendo en cuenta que en  $\xi = \xi_o$   $Y = 0$ , se llega a

$$Y(\xi) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\beta}(\xi - \xi_o) + \frac{\alpha + \alpha\beta}{\beta^2} \ln \left( \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta - \beta\xi}{\alpha + \beta + \alpha\beta - \beta\xi_o} \right)}. \quad (13)$$

### Apartado 3.-

La altura máxima,  $\xi_{max}$ , se calculará haciendo  $Y = 0$  en (13), es decir,

$$0 = \frac{1}{\beta}(\xi_{max} - \xi_o) + \frac{\alpha + \alpha\beta}{\beta^2} \ln \left( \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta - \beta\xi_{max}}{\alpha + \beta + \alpha\beta - \beta\xi_o} \right). \quad (14)$$

De (9) se observa que dejará de haber líquido en la ranura,  $l = 0$ , justo cuando alcanza la altura máxima si

$$V_1 = \pi R_1^2 h_{max}, \quad (15)$$

o en variables adimensionales si  $\xi_{max} = \alpha + 1$ . Por tanto, el valor mínimo de  $\xi_o$  viene dado de sustituir  $\xi_{max} = \alpha + 1$  en (14), es decir que

$$0 = \frac{1}{\beta}(\alpha + 1 - \xi_o) + \frac{\alpha + \alpha\beta}{\beta^2} \ln \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \alpha\beta - \beta\xi_o} \right). \quad (16)$$

### Apartado 4.-

Una vez que la pieza ha alcanzado su máxima altura,  $h_{max}$ , comienza a descender. Este proceso de bajada de la pieza corresponde a una subida de líquido por la ranura. Naturalmente el movimiento del fluido en la ranura es aún ideal por lo que se regirá por la misma ecuación diferencial que el vaciado de la ranura [Ec. (4)]. La diferencia entre el vaciado y rellenado de la ranura se establece no en la ecuación diferencial, sino en las condiciones de contorno en presión que se deben imponer. En el presente caso se está rellenando de fluido la ranura a partir del fluido bajo la pieza que está, en comparación, en reposo. Ahora, a la entrada de la ranura  $z = h(t)$  la presión del fluido es menor que la del “depósito” e igual a  $p_i - 1/2\rho v_z^2$  pues una parte de ella se emplea en acelerar el fluido desde el reposo hasta  $v_z$  velocidad del líquido en la ranura. Por tanto, la integración de (4) nos lleva ahora a

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} l(t) = +p_a - p_i + \rho g l(t) + 1/2\rho v_z^2. \quad (17)$$

Teniendo en cuenta (17) y (6) la ecuación para la pieza queda como

$$M\ddot{h}(t) = -Mg + \rho \left[ gl(t) + \frac{\dot{h}^2}{2} \left( \frac{R_1}{2e} \right)^2 - \dot{h} \frac{R_1 l(t)}{2e} \right] \pi R_1^2. \quad (18)$$

Introduciendo las variables y parámetros adimensionales del apartado 2 podemos escribir esta ecuación en la forma

$$(\alpha + \beta + \alpha\beta - \beta\xi)YY' = (1 - \xi) + \frac{\beta}{2}Y^2. \quad (19)$$

La integración de esta ecuación nos proporciona

$$Y(\xi) = -\sqrt{\frac{-2\xi + \xi^2 + 2\xi_{max} - \xi_{max}^2}{-\alpha - \beta - \alpha\beta + \beta\xi}}, \quad (20)$$

donde hemos utilizado como condición inicial que en  $\xi_{max}$  la velocidad es cero  $Y = 0$ .

Igualando a cero la ecuación anterior, se obtiene la altura mínima,  $\xi_{min}$ , alcanzada en el descenso por la pieza es

$$\xi_{min} = 2 - \xi_{max}. \quad (21)$$

Se puede comprobar que  $\xi_{min} > \xi_o$ . La pieza describe un movimiento oscilatorio amortiguado debido a que en el ascenso de la pieza se pierde presión de remanso puesto que  $p[h(t)] = p_i$ ; se disipa la energía cinética por unidad de volumen del líquido en la ranura. Por tanto, la pieza no alcanza su posición inicial, sino un valor mayor. En la siguiente subida no llega tan alto como antes y al bajar otra vez baja menos. Oscilando amortiguadamente,  $h$  tiende para tiempos grandes a alcanzar su posición de equilibrio  $h_{eq}$ .

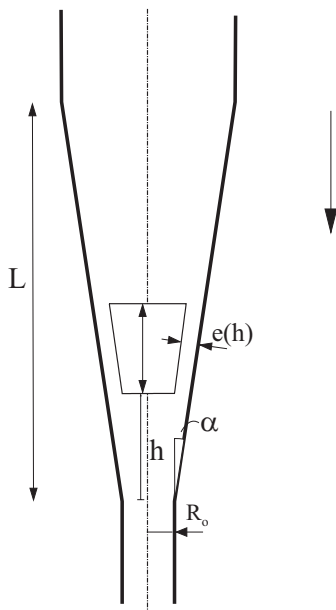
**Problema 6.8**

Para la medida de caudales se suelen utilizar caudalímetros. En esencia, un caudalímetro consiste en un conducto vertical de sección circular, en cuyo interior se encuentra una pieza, concéntrica con el conducto, y de densidad  $\rho_p$ , distinta de la densidad  $\rho$  del líquido cuyo caudal se desea medir. La pieza se desplaza a lo largo del conducto, al variar el caudal, y la altura de equilibrio que alcanza depende del caudal que fluye por el conducto.

Para fijar ideas, consideren que el conducto posee longitud  $L$  y su radio varía linealmente con  $h$ ,  $R = R_o(1 + (h/R_o) \tan \alpha) \simeq R_o(1 + \alpha h/R_o)$ , ( $\alpha \ll 1$ ), ( $\alpha L/R_o \sim 1$ ), siendo  $h$  la altura por encima de la sección de radio  $R_o$ . La pieza es de forma troncocónica, de longitud  $l$  y secciones mínima y máxima de radios  $R_1 = R_o$  y  $R_2 \simeq R_o(1 + \alpha l/R_o) \simeq R_o$ , ( $\alpha l/R_o \ll 1$ ).

Sabiendo que el líquido fluye a través del juego conducto-ranura con un movimiento turbulento, sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga, ( $\lambda$  constante y conocido), que el movimiento medio es estacionario, calcular:

1. Juego  $e(h)$  como función de la altura  $h$  en que se posiciona la pieza.
2. Velocidad media a lo largo de la ranura como función del caudal  $Q$  y de los parámetros geométricos del problema.
3. Distribución de presiones a lo largo de la ranura. Calculen la diferencia de presiones sobre las caras frontales de la pieza.
4. Ecuación algébrica que determina el caudal en función de la altura  $h$ . Demostrar que las fuerzas de fricción sobre las paredes laterales de la pieza son despreciables.



Resolución:

**Apartado 1.-**

El juego de la pieza con el conducto como función de  $h$  viene dado por la relación geométrica

$$e(h) = \alpha h. \quad (1)$$



**Apartado 2.-**

La velocidad media  $v$ , será por tanto

$$v = \frac{Q}{2\pi R_o \alpha h}. \quad (2)$$

**Apartado 3.-**

La distribución de presiones vendrá dada de integrar la ecuación de cantidad movimiento para un flujo medio turbulento estacionario en la ranura lo que proporciona

$$p(s) = p_1 - \rho g s \cos \alpha - \frac{\lambda \rho v^2}{4e(h)} s, \quad 0 \leq s \leq l / \cos \alpha, \quad (3)$$

donde  $p_1$  es la presión del líquido a la entrada de la ranura, la coordenada  $s$  se ha tomado a lo largo de la ranura y con origen en su base, y se ha hecho uso de que el radio hidráulico (relación entre el área y el perímetro mojado de la ranura) es  $r_h = e(h)/2$ . Teniendo en cuenta que  $\alpha \ll 1$ , (3) se simplifica y se obtiene

$$p(s) = p_1 - \rho g s - \frac{\lambda \rho v^2}{4e(h)} s, \quad 0 \leq s \leq l. \quad (4)$$

La diferencia de presiones entre ambas caras  $\Delta p$  vendrá dada por

$$\Delta p = p_{abajo} - p_{arriba} = p(s=0) + \frac{1}{2} \rho v^2 - p(s=l) = \rho g l + \rho v^2 \left( \frac{\lambda l}{4e(h)} + \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

donde se ha supuesto que la presión de remanso se conserva a la entrada de la ranura

$$p_{abajo} = p(s=0) + \frac{1}{2} \rho v^2.$$

**Apartado 4.-**

Haciendo uso del equilibrio de fuerzas se tiene

$$\Delta p \pi R_o^2 = g \rho_p l \pi R_o^2; \quad (6)$$

obsérvese que se ha despreciado la fricción del líquido sobre las paredes laterales de la pieza. Teniendo en cuenta las relaciones (1)-(6), la ecuación anterior conduce a

$$(\rho_p - \rho) g l - \frac{\rho Q^2}{4(\alpha h)^2 \pi^2 R_o^2} \left( \frac{\lambda l}{4\alpha h} + \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (7)$$

que proporciona el valor del desplazamiento  $h$  de la pieza como función del caudal.

Es fácil demostrar que las fuerzas de fricción pueden despreciarse en la ecuación (6). En efecto, la fuerza de fricción sobre las paredes laterales es

$$F_f = 2\pi R_o \tau_f \simeq \rho \lambda v^2 R_o l, \quad (8)$$

mientras que las de presión son

$$F_p = \pi R_o^2 \Delta p, \quad (9)$$

de modo que

$$\frac{F_p}{F_f} = \frac{[(\rho_p - \rho) g l - 1/2 \rho v^2 [1 + \lambda L / 2e(h)]] \pi R_o^2}{\rho \lambda v^2 R_o} \sim \frac{R_o}{e(h)} \gg 1, \quad (10)$$

que muestra que las fuerzas de fricción son  $e/R_o$  veces más pequeñas que las de presión.

**Problema 6.9**

Un intercambiador de calor está formado por dos tubos concéntricos de diámetros  $D_1$  y  $D_2$  ( $D_2 > D_1$ ) y longitud  $L$ , por los que circula sendos caudales  $Q_1$  y  $Q_2$  de un líquido de densidad  $\rho$ , viscosidad  $\mu$ , calor específico  $c$  y conductividad térmica  $K$ . Las temperaturas a la entrada de los conductos son  $T_{10}$  y  $T_{20}$  ( $T_{20} > T_{10}$ ). Supongan que  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c$  y  $K$  son independientes de la temperatura. Sabiendo que el tubo exterior está aislado térmicamente y que el movimiento del líquido en ambos conductos es turbulento sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga, se pide:

1. Ecuaciones que determinan la caída de presión y la distribución de temperaturas en los conductos.
2. Haciendo uso de la analogía de Reynolds, calcular el calor por unidad de área y tiempo cedido por el conducto 1 al 2.
3. Calcular la potencia necesaria para hacer circular los caudales  $Q_1$  y  $Q_2$ .
4. Sabiendo que  $Q_1$  y  $Q_2$  circulan en el mismo sentido, calcular:
  - Las distribuciones de temperatura del líquido en ambos conductos.
  - El calor total transferido por unidad de tiempo.
5. Sabiendo que  $Q_1$  y  $Q_2$  circulan en sentido contrario, calcular:
  - Las distribuciones de temperatura del líquido en ambos conductos.
  - El calor total transferido por unidad de tiempo.

Resolución:Apartado 1.-

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido en el intercambiador son las del movimiento turbulento en el conducto. En particular la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía para cada uno de los fluidos involucrados. La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento recoge en este caso que la caída de presión es debida a la fricción en su pared mientras que la ecuación de conservación de la energía refleja que el calor añadido al fluido debe dar lugar a un aumento del calor convectado por el fluido en su movimiento. Así, para el fluido interior éstas son:

$$\frac{dp_1}{ds_1} = -\frac{\lambda \rho v_1^2}{8r_{h1}}, \quad (1)$$

$$\frac{dT_1}{ds_1} = \frac{q_1}{\rho r_{h1} c v_1}, \quad (2)$$

siendo  $v_1 = Q_1/A_1$  la velocidad del líquido en el conducto,  $A_1 = \pi D_1^2/4$  y  $r_{h1} = D_1/4$  el área de paso y el radio hidráulico,  $s_1$  es la coordenada siguiendo al movimiento en el conducto,  $q_1$  es el flujo de calor añadido al fluido interior desde las paredes del conducto y  $c$  el calor específico del fluido.

Por otro lado para el conducto exterior se tiene

$$\frac{dp_2}{ds_2} = -\frac{\lambda \rho v_2^2}{8r_{h2}}, \quad (3)$$

$$\frac{dT_2}{ds_2} = \frac{q_2}{\rho r_{h2}^T c v_2}, \quad (4)$$

siendo  $v_2 = Q_2/A_2$  la velocidad del líquido en el conducto,  $A_2 = \pi(D_2^2 - D_1^2)/4$  y  $r_{h2} = (D_2 - D_1)/4$  el área de paso y el radio hidráulico respectivamente,  $s_2$  la coordenada siguiendo al movimiento en el conducto y  $q_2$  el flujo de calor añadido al fluido exterior desde las paredes; la relación entre la sección de paso del fluido y el perímetro por la cual hay transferencia de calor efectiva es el radio hidráulico térmico  $r_{h2}^T$ . Obsérvese que en el presente caso este radio hidráulico térmico no coincide con el radio hidráulico  $r_{h2}$  al estar aislado el conducto exterior siendo su valor entonces  $r_{h2}^T = A_2/(\pi D_1) = D_1((D_2/D_1)^2 - 1)/4$ .

### Apartado 2.-

La analogía de Reynolds surge de la semejanza que existe entre el flujo de calor en la pared con el esfuerzo de fricción en dicha pared. Esta analogía es particularmente cierta para capas límites laminares y estacionarias con gradientes de presión nulas y con números de Prandtl de valor unidad pues los perfiles de velocidad y de temperatura en ellas son semejantes al obedecer a la misma ecuación diferencial adimensional. Por ello, resuelto el perfil de velocidades, o en realidad, establecido el esfuerzo en la pared, puede inferirse en razón de la analogía existente, el calor transmitido a través de la misma. Así, para el conducto interior puede calcularse el calor cedido desde las paredes  $q_1$  a partir del factor de fricción  $\lambda$  como,

$$q_1 = \frac{\lambda \rho v_1 c}{8} (T_p - T_1), \quad (5)$$

siendo  $T_p$  la temperatura de la pared intermedia. Por otro lado aplicando esta analogía al conducto exterior se tiene

$$q_2 = \frac{\lambda \rho v_2 c}{8} (T_p - T_2). \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que ambos flujos de calor tienen que ser iguales y de signo contrario,  $q_1 = -q_2$ , y que la temperatura es la misma a ambos lados de la pared es la misma pues la conductividad de la pared intermedia es elevada y el espesor de ella es irrelevante se llega a que

$$T_p = \frac{v_1 T_1 + v_2 T_2}{v_2 + v_1}, \quad (7)$$

Por lo tanto, el flujo de calor cedido desde el fluido exterior al interior es

$$q_1 = \frac{\lambda \rho v_1 c}{8} \frac{v_2 (T_2 - T_1)}{v_2 + v_1}. \quad (8)$$

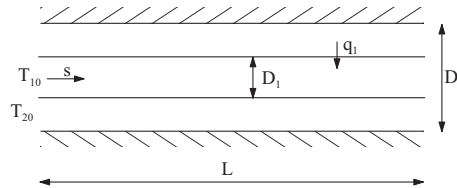
### Apartado 3.-

Integrando las ecuaciones (1) y (3) se obtiene la caída de presiones proporciona la potencia necesaria para hacer circular los caudales

$$\dot{W}_1 = Q_1 [p_1(s_1 = L) - p_1(s_1 = 0)] = Q_1 \left( \frac{\lambda L Q_1^2}{2 D_1 A_1} \right). \quad (9)$$

$$\dot{W}_2 = Q_2 [p_2(s_2 = L) - p_2(s_2 = 0)] = Q_2 \left( \frac{\lambda L Q_2^2}{2 (D_2 - D_1) A_2} \right). \quad (10)$$

### Apartado 4.-



Como se observa en la figura en el caso de que el intercambiador sea del tipo iso-corriente se tomará la misma coordenada de integración en ambos conductos,  $s = s_1 = s_2$  y se usarán las variables y parámetros adimensionales siguientes

$$\Theta_1 = \frac{T_1 - T_{20}}{T_{20} - T_{10}}, \quad \Theta_2 = \frac{T_2 - T_{20}}{T_{20} - T_{10}}, \quad \xi = \frac{\lambda s}{2 D_1}, \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{r_{h1}}{r_{h2}^T} = \frac{1}{(D_2/D_1)^2 - 1}.$$

Teniendo en cuenta la expresión (4) para el flujo de calor entre los conductos, las ecuaciones que proporcionan las distribuciones de temperaturas en ambos conductos son

$$\frac{dT_1}{ds} = \frac{\lambda}{8r_{h1}} \frac{v_2(T_2 - T_1)}{v_2 + v_1} \Rightarrow \frac{d\Theta_1}{d\xi} = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\alpha + 1}, \quad (12)$$

$$\frac{dT_2}{ds} = -\frac{\lambda}{8r_{h2}^T} \frac{v_1(T_2 - T_1)}{v_2 + v_1} \Rightarrow \frac{d\Theta_2}{d\xi} = -\frac{\alpha\beta(\Theta_2 - \Theta_1)}{1 + \alpha}, \quad (13)$$

a las que se añaden las condiciones de contorno  $\Theta_1(0) = -1$  y  $\Theta_2(0) = 0$ .

Restando a (13) (12) se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d(\Theta_2 - \Theta_1)}{d\xi} = -\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha}(\Theta_2 - \Theta_1), \quad (14)$$

cuya integración proporciona la diferencia de temperaturas entre los fluidos a lo largo del intercambiador,

$$\Theta_2(\xi) - \Theta_1(\xi) = \exp\left(-\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha}\xi\right). \quad (15)$$

Obsérvese que la diferencia de temperatura decae exponencialmente siendo prácticamente nula para longitudes del intercambiador  $L_{op}$  dadas por

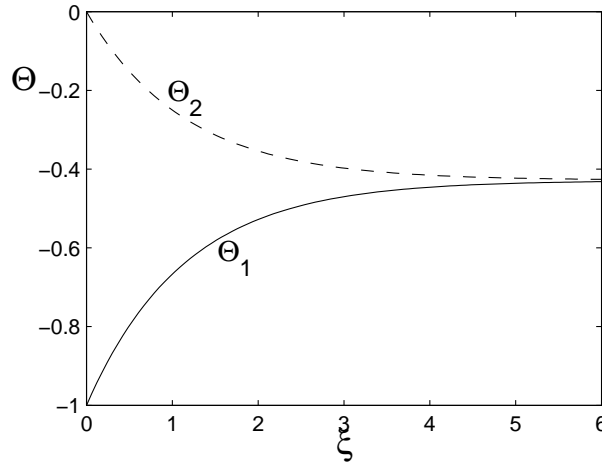
$$\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha}\xi_{op} \sim 1 \quad \equiv \quad L_{op} \sim \frac{D}{\lambda} \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha\beta}. \quad (16)$$

$L_{op}$  representa la longitud óptima de transferencia en un intercambiador a iso-corriente pues longitudes mayores no contribuyen a aumentar el calor transferido.

Finalmente sustituyendo (15) en (12) y (13) e integrando se obtiene la distribución de temperaturas en cada fluido

$$\Theta_1(\xi) = -1 + \left[1 - \exp\left(-\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha}\xi\right)\right] / (1 + \alpha\beta), \quad (17)$$

$$\Theta_2(\xi) = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \left[\exp\left(-\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha}\xi\right) - 1\right]. \quad (18)$$



Como se observa en la figura para  $\beta = 0,75$  y  $\alpha = 1,0$  la temperatura interior crece mientras que la exterior decrece hasta que finalmente si el intercambiador es suficientemente largo (con longitudes mayores que la óptima  $L_{op}$ ) los fluidos interior y exterior terminan por alcanzar la misma temperatura terminal  $\Theta_{term}$  dada por

$$\Theta_{term} = -\frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta}. \quad (19)$$

Obsérvese que el parámetro combinado  $\alpha\beta$  representa la relación de caudales circulantes,  $\alpha\beta = Q_1/Q_2$ . De tal manera que, en el caso de que  $\alpha\beta \rightarrow 0$  la temperatura terminal coincide con la de entrada del conducto exterior,  $\Theta_2 \simeq 0$ , reflejando que el calor transferido no es capaz de dar lugar a un cambio apreciable de la temperatura del fluido exterior al ser su caudal circulante muy elevado frente al interior. El mismo efecto para el flujo interior se recoge para  $\alpha\beta \rightarrow \infty$ . En efecto, en este límite el calor transferido no da lugar a variaciones apreciables de la temperatura interior a lo largo del intercambiador pero es el suficiente como para que el exterior adopte finalmente la temperatura terminal,  $\Theta_1 \simeq -1$ .

El calor total transferido,  $Q_T$ , se obtiene integrando el flujo de calor a través de la superficie de contacto, esto es

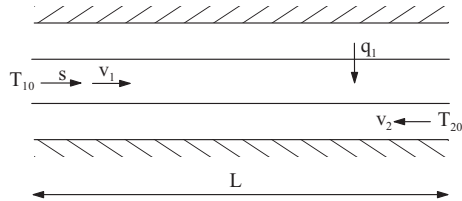
$$Q_T = \int_0^L q_1(s) \pi D_1 ds, \quad (20)$$

que teniendo en cuenta (8) y (15) es, adimensionalmente,

$$\frac{Q_T}{Q_1 \rho c (T_{20} - T_{10})} = \frac{1}{1 + \alpha} \int_0^{\xi_f} \exp\left(-\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha} \xi\right) d\xi = \frac{1}{1 + \alpha\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha} \xi_f\right)\right]. \quad (21)$$

Se desprende de la expresión anterior que el calor adimensional transmitido está limitado superiormente al valor  $1/(1 + \alpha\beta)$ . Obsérvese que el calor transferido es máximo si el caudal del exterior  $Q_2$  es mucho mayor que el interior  $Q_1 \equiv \alpha\beta \simeq 0$ . En este caso, el flujo exterior puede considerarse una fuente inagotable de calor que está siempre a temperatura  $\Theta_2$ ; el cese de transferencia de calor finaliza cuando el interior alcanza la temperatura del más caliente (el exterior). En el caso contrario, para  $Q_1 \gg Q_2$  ( $\alpha\beta \rightarrow \infty$ ), el flujo exterior que debe ejercer como fuente de calor deja de hacerlo de manera instantánea porque siendo su caudal tan bajo adquiere la temperatura  $\Theta_1$  nada más que la transferencia comienza a operar.

#### Apartado 5.-



en el caso anterior,

$$\frac{d\Theta_1}{d\xi} = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{1 + \alpha} \quad (22)$$

y

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi} = \frac{\alpha\beta(\Theta_2 - \Theta_1)}{1 + \alpha}, \quad (23)$$

estando estas sujetas a las condiciones de contorno  $\Theta_1(0) = -1$  y  $\Theta_2(\xi_f) = 0$  donde  $\xi_f$  es la longitud adimensional del intercambiador  $\xi_f = \lambda L/(2D_1)$ .

Restando (22) de (23) se obtiene la ecuación diferencial para la diferencia de temperaturas

$$\frac{d(\Theta_2 - \Theta_1)}{d\xi} = \left(\frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha}\right) (\Theta_2 - \Theta_1), \quad (24)$$

cuya integración proporciona la diferencia de temperaturas

$$\Theta_2(\xi) - \Theta_1(\xi) = [\Theta_2(0) + 1] \exp\left(\frac{\alpha\beta - 1}{\alpha + 1} \xi\right), \quad (25)$$

donde  $\Theta_2(0)$  es la temperatura a la que termina por surgir el fluido exterior tras el paso por el intercambiador y que es, *a priori*, desconocida. En el caso de que el caudal  $Q_2$  circulante por el exterior sea mayor que el

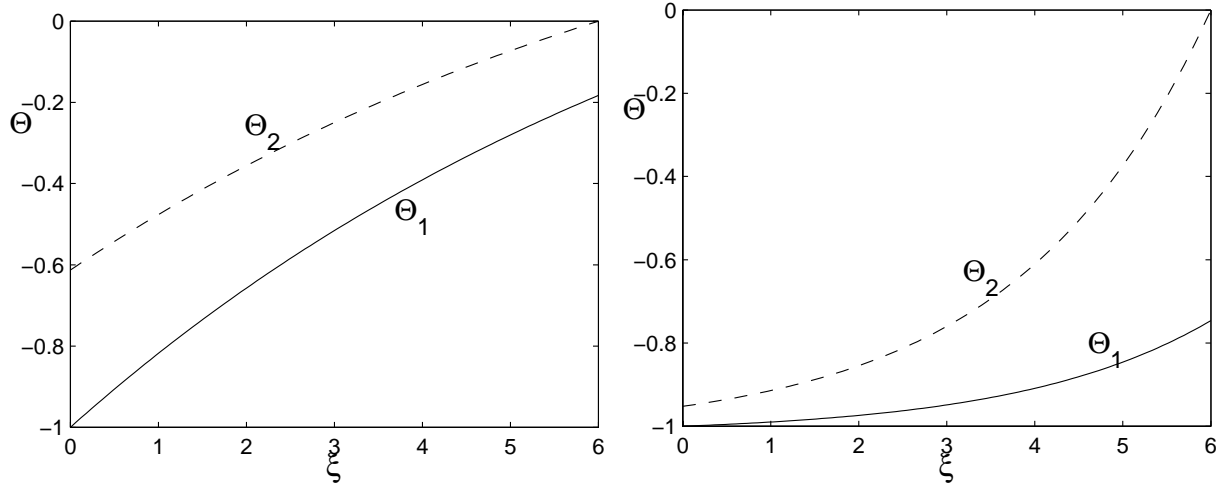
interior  $Q_1$ ,  $\alpha\beta < 1$ ; la diferencia de temperaturas entre los fluidos es mayor en el extremo  $\xi = 0$  que en el extremo  $\xi = \xi_f$ .

Combinando (25) con las expresiones (23) y (22) e integrando las ecuaciones resultantes con las condiciones de contorno correspondientes, se obtiene finalmente las expresiones para las temperaturas interior y exterior en función de los datos del problema

$$\begin{aligned}\Theta_1(\xi) &= -1 + \frac{\exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi\right) - 1}{\alpha\beta \exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi_f\right) - 1} \\ \Theta_2(\xi) &= \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta \exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi_f\right) - 1} \left[ \exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi\right) - \exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi_f\right) \right].\end{aligned}\quad (26)$$

La temperatura que termina por alcanzar el flujo interior es, siempre que el intercambiador tenga longitud suficiente,

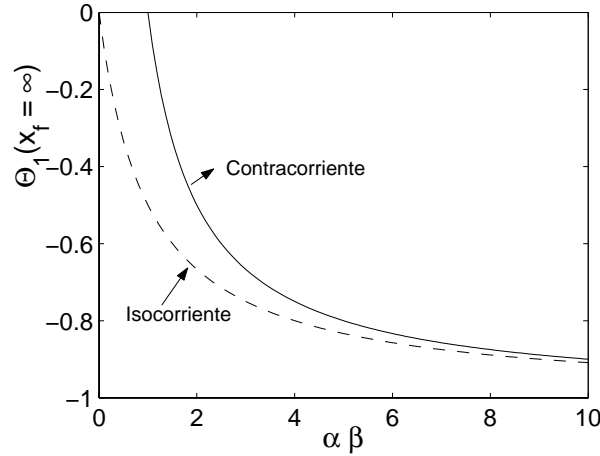
$$\Theta_1(\xi_f = \infty) = \lim_{\xi_f \rightarrow \infty} \Theta_1(\xi_f) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \alpha\beta < 1 \\ \frac{1-\alpha\beta}{\alpha\beta} & \text{Si } \alpha\beta > 1 \end{cases} \quad (27)$$



En la figura superior se muestran las distribuciones de temperaturas adimensionales en un intercambiador de longitud adimensional  $\xi_f = 6$ . En la figura de la derecha se muestran las distribuciones de temperatura para un caso en el que  $\beta\alpha > 0$ , en particular para  $\alpha = 5$  y  $\beta = 0,75$ , mientras que en la de la izquierda se considera el caso  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0,75$  ( $\alpha\beta < 1$ ).

En general, como se observa en las figuras correspondientes en las que se han mantenido las mismas condiciones de contorno, el caso de intercambiador a iso-corriente es menos eficiente que el de contra-corriente. En efecto, el calor transferido entre ambos fluidos es proporcional a la diferencia de temperatura en cada sección y ésta decae con la longitud de manera más lenta para el flujo a contra-corriente que a iso-corriente.

Otra forma alternativa de mostrar la mayor eficiencia del intercambiador a contra-corriente es representar la máxima temperatura a la que surge el fluido interior en función de la relación de caudales,  $\alpha\beta = Q_1/Q_2$ .



En la figura superior se muestra dicha temperatura en función del parámetro  $\alpha\beta$  en el caso de flujo a contra-corriente (Ec. 27: línea continua) y de flujo a iso-corriente (Ec. 19: línea a trazos). Como se observa para un valor dado de la relación de caudales la temperatura máxima es siempre para un flujo en contra-corriente siendo la diferencia tanto mayor cuanto menor sea el parámetro  $\alpha\beta$ . En otras palabras, para obtener un caudal  $Q_1$  a una cierta temperatura a partir de la transferencia de calor desde un segundo flujo con caudal  $Q_2$  a temperatura  $T_{02}$  se requiere una menor longitud de transferencia si el flujo discurre a contra-corriente que a iso-corriente.

El calor transferido es ahora

$$\frac{Q_T}{c\rho Q_1(T_{20} - T_{10})} = \frac{1}{1 + \alpha} \int_0^{\xi_f} (\Theta_2 - \Theta_1) d\xi = \frac{\exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi_f\right) - 1}{\alpha\beta \exp\left(\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha}\xi_f\right) - 1}. \quad (28)$$

Para un intercambiador a contra-corriente de longitud suficiente  $\xi_f \rightarrow \infty$  el máximo calor transferido depende, naturalmente, de la relación existente entre los caudales:

$$\begin{aligned} \text{Si } \alpha\beta > 1 (Q_2 < Q_1) \quad & \frac{Q_T}{c\rho Q_1(T_{20} - T_{10})} = \frac{1}{\alpha\beta}. \\ \text{Si } \alpha\beta < 1 (Q_2 > Q_1) \quad & \frac{Q_T}{c\rho Q_1(T_{20} - T_{10})} = 1. \end{aligned} \quad (29)$$

## CAPÍTULO 7

# Dinámica de gases

### Ecuaciones de Euler

El movimiento de gases (y líquidos) sucede en muchos casos con valores de los números de Reynolds,  $Re$  y de Peclet,  $Pe = RePr$  (o bien de  $ReD/L$  y  $PeD/L$  en el caso de conductos) lo suficientemente altos como para despreciar en primera aproximación los términos de conducción de calor y de viscosidad en las ecuaciones de Navier-Stokes. Se obtiene entonces el límite denominado *fluido ideal*, cuyo comportamiento está gobernado por las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (7.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}_m, \quad (7.2)$$

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = Q_r + Q_q, \quad (7.3)$$

donde  $Q_r$  y  $Q_q$  denotan respectivamente los calores recibidos por el fluido, por unidad de volumen y tiempo, debidos a radiación y reacción química; además deben de tenerse en cuenta las ecuaciones de estado  $\rho = \rho(p, T)$  y  $S = S(p, T)$ . La ecuación de la entropía (7.3) puede ser sustituida por cualquier otra forma alternativa de la ecuación de la energía, por ejemplo, la ecuación de la entalpía de remanso

$$\rho \frac{D(h + v^2/2)}{Dt} = \rho \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + Q_r + Q_q. \quad (7.4)$$

Las ecuaciones (7.1)-(7.3), junto con las ecuaciones de estado, forman un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para el cálculo de  $\mathbf{v}$ ,  $p$  y  $T$ , que debe integrarse con las correspondientes condiciones iniciales (si el movimiento no es estacionario o casi estacionario) y de contorno. Obsérvese que en las condiciones de contorno no se puede imponer la condición física de que la velocidad tangencial en la pared sea nula (condición de no deslizamiento) puesto que se han despreciado las derivadas de más alto orden (y en particular, los términos viscosos en las ecuaciones de Navier-Stokes).

### Magnitudes de Remanso

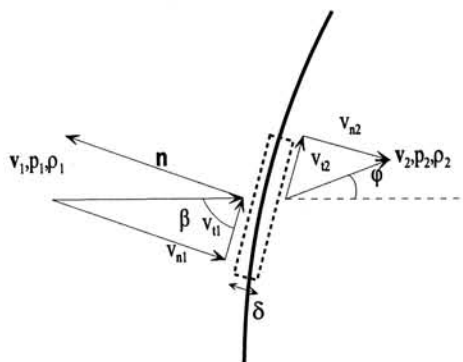
Las ecuaciones (7.3) y (7.4) muestran que la entropía y la entalpía de remanso se conservan a lo largo de cada línea de corriente en movimientos que sean: a) estacionarios o casi estacionarios ( $Str = L/(V_o t_o) \ll 1$ ), b) con efectos de fricción y de conducción de calor despreciables ( $Re \gg 1$  y  $Pe \gg 1$ , o bien  $ReD/L \gg 1$  y  $PeD/L \gg 1$ ), c) con efectos de fuerzas másicas despreciables ( $Fr = V_o^2/(gL) \gg 1$ ), y d) sin adición de calor por radiación o reacción química ( $Q_r$  y  $Q_q$  despreciables). Se definirá la entropía de remanso igual a la propia entropía,  $S_o \equiv S$ , y el resto de variables de remanso (temperatura, presión y densidad) se definirán a partir de  $h_o$  y  $S_o$  mediante las ecuaciones termodinámicas de estado; para un gas perfecto se tienen entonces las relaciones:  $c_p T_o \equiv h_o = c_p T + v^2/2$ ,  $p_o/\rho_o^\gamma = p/\rho^\gamma$  y  $p_o = R_g T_o \rho_o$ . Dichas relaciones permiten obtener fácilmente la expresión de cada magnitud de remanso en función de la correspondiente magnitud estática y del número de Mach,  $M \equiv |\mathbf{v}|/a$ , de la forma



$$\frac{\phi}{\phi_o} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\alpha} \quad \text{siendo} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi = T, \\ 1/2 & \text{si } \phi = a, \\ \gamma/(\gamma-1) & \text{si } \phi = p, \\ 1/(\gamma-1) & \text{si } \phi = \rho. \end{cases} \quad (7.5)$$

Obsérvese que la ecuación anterior que expresa las magnitudes de remanso en función de las estáticas y del número de Mach es una consecuencia solamente de la definición de las primeras, y es independiente de que se den o no las condiciones para su conservación a lo largo de las líneas de corriente; no obstante, la utilidad de las magnitudes de remanso radica en el hecho de que, cuando se dan dichas condiciones, constituyen un conjunto de integrales primeras del movimiento.

### Discontinuidades en los movimientos de fluidos ideales



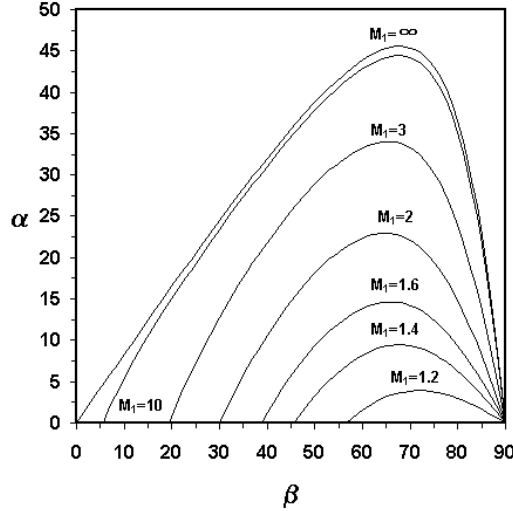
El hecho de despreciar las derivadas de más alto orden en las ecuaciones de Navier-Stokes hace que, en general, las soluciones de las ecuaciones de Euler (fluido ideal) no representen uniformemente a las de Navier-Stokes (fluido real). En efecto, este hecho implica, además de la imposibilidad de cumplir simultáneamente todas las condiciones de contorno, que las soluciones de las ecuaciones de Euler puedan presentar discontinuidades de las variables fluidas y de sus derivadas sobre algunas superficies del dominio fluido: ondas de choque y discontinuidades tangenciales. Un ejemplo concreto de discontinuidad en el seno de un flujo de un fluido ideal aparece cuando una onda de compresión de amplitud finita, originada por el movimiento de un pistón en el interior de un cilindro que contiene un gas, *rompe* en una discontinuidad de las magnitudes fluidas, u onda de choque. Otras situaciones en las que comúnmente se

presentan ondas de choque son el movimiento supersónico de gases a través de toberas convergente-divergente o en conductos de sección constante.

Por supuesto, en la realidad, las presuntas discontinuidades no son tales, sino que son regiones estrechas donde los gradientes de las magnitudes fluidas son tan acusados que la hipótesis de fluido ideal deja de ser válida. Como el espesor de estas regiones tiende formalmente a cero cuando  $Re \rightarrow \infty$ , desde el punto de vista de la teoría de los fluidos ideales se considerarán como discontinuidades sin analizar su estructura interna. Las ecuaciones que describen la variación de las magnitudes fluidas a través de la discontinuidad se obtienen a partir de aplicar las ecuaciones de conservación a un volumen de control de la figura cuyo volumen en  $\delta d\sigma$ , con  $L \gg (d\sigma)^{1/2} \gg \delta$ . Si  $\mathbf{v}$  es la velocidad del fluido relativa a la superficie de discontinuidad, las condiciones de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento (normal y tangencial) y de la energía proporcionan respectivamente las relaciones: a)  $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}$ , b)  $p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2$ , c)  $\rho_1 v_{n1} \mathbf{v}_{t1} = \rho_2 v_{n2} \mathbf{v}_{t2}$ , y d)  $\rho_1 v_{n1} (h_1 + v_1^2/2) = \rho_2 v_{n2} (h_2 + v_2^2/2)$ . El Análisis Dimensional aplicado a las relaciones anteriores demuestra que el salto de las magnitudes fluidas a través de la discontinuidad puede expresarse únicamente en función de la componente normal del número de Mach de la corriente incidente,  $M_{n1} \equiv v_{n1}/a_1$ :

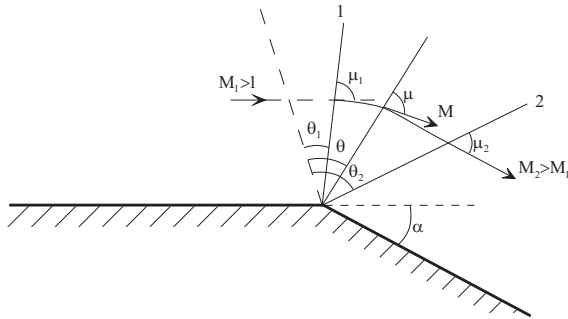
$$\begin{aligned} \frac{v_{n2}}{v_{n1}} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{n1}^2}{(\gamma + 1)M_{n1}^2}, \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma M_{n1}^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}, \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{(2\gamma M_{n1}^2 + 1 - \gamma)[2 + (\gamma - 1)M_{n1}^2]}{(\gamma + 1)^2 M_{n1}^2}, \\ \frac{v_{n2}}{v_{n1}} &= \frac{\tan(\beta - \varphi)}{\tan \beta} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{n1}^2}{(\gamma + 1)M_{n1}^2}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

siendo  $\beta$  al ángulo que forma la corriente incidente con el plano tangente a la onda, y  $\varphi$  al ángulo que forma la corriente detrás de la onda en relación a la corriente incidente; para una onda de choque normal ( $\mathbf{v}_t \equiv 0$ ) se tiene  $\beta = 0$  ( $M_{n1} = M_1$ ) y la última de las ecuaciones anteriores proporciona directamente  $\varphi = \beta = 0$ . A partir de las relaciones anteriores puede demostrarse el incremento de entropía que necesariamente debe producirse a través de una onda de choque implica  $M_{n1} > 1$ .



Además, se demuestra fácilmente que a través de una onda de choque se incrementan la presión y la densidad, disminuye la presión de remanso y se conserva la entalpía de remanso. Las tres primeras relaciones de (7.6) se encuentran tabuladas al final de la introducción teórica, mientras que la última relación, necesaria para el cálculo de ondas de choque oblicuas ( $\mathbf{v}_t \neq 0$ ), se encuentra representada en la gráfica superior.

### Expansión de Prandtl-Meyer



Este tipo de flujo se produce cuando un flujo supersónico bordea una esquina (véase la figura contigua) o, en general, se expande a un recinto a menor presión que la del flujo incidente. Dicha expansión está constituida por un *abanico*, o sucesión infinita continua de ondas de Mach, entre el flujo incidente y el flujo saliente de la expansión. Por tanto, y puesto que a través de cada onda de Mach  $dS \simeq 0$ , el flujo es isentrópico y la región de expansión está delimitada por las características 1 y 2 que forman los ángulos  $\mu_1 = \arcsen(1/M_1)$  y  $\mu_2 = \arcsen(1/M_2)$  con las direcciones respectivas de las corrientes incidente ( $M_1$ ) y saliente ( $M_2$ ), formando esta última un ángulo  $\alpha$  con la primera. El análisis del flujo

isentrópico en la expansión es sencillo teniendo en cuenta que, debido a que las condiciones aguas arriba son uniformes, las magnitudes fluidas dependen solamente del ángulo,  $\theta$ , que se ha deflectado la corriente y no de la distancia a la esquina. De esta forma se demuestra que el ángulo de la corriente en una característica genérica, de Mach  $M$ , es

$$\mu(M) = \theta(M) + \nu(M) = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \tan^{-1} \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1) \right]^{1/2} + \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (7.7)$$

y la desviación experimentada por el flujo hasta dicha característica es, por tanto,  $\nu(M) - \nu(M_1)$ ; la desviación total es  $\alpha = \nu(M_2) - \nu(M_1)$ . La función de Prandtl-Meyer,  $\nu(M)$ , está tabulada al final de la introducción

teórica, donde se incluyen también los valores del ángulo  $\mu$  de las ondas de Mach. Conocido  $M_2$ , y puesto que en la expansión se conserva las magnitudes de remanso, se tiene

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + (\gamma - 1)M_2^2}{1 + (\gamma - 1)M_1^2}, \quad \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{1 + (\gamma - 1)M_2^2}{1 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (7.8)$$

Obsérvese que para  $M_1$  dado existe un ángulo máximo de deflexión

$$\alpha_{max} = \nu(\infty) - \nu(M_1) = \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \left[ \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right)^{1/2} \right] - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \quad (7.9)$$

### Movimiento casi estacionario de gases en conductos de sección lentamente variable

Un caso de interés que aparece con frecuencia en numerosos campos de la Ingeniería (gasoductos, instalaciones neumáticas, etcétera) es el del movimiento turbulento de gases en conductos de sección lentamente variable y suficientemente largos para que el efecto de la fricción del gas con las paredes sea apreciable; se considerará también el efecto de la adición de calor a través de las paredes del conducto o por radiación y reacción química. Para simplificar el análisis se considerarán sólo los casos (de gran interés práctico) de movimientos de gases estacionarios o casi estacionarios [ $Str = L/(Vt_o) \ll 1$ ] y con fuerzas másicas despreciables [ $Fr = V^2/(gL) \gg 1$ ]. En este caso, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y entalpía de remanso (deducidas en el capítulo 6) se reducen a

$$\rho v A = G, \quad (7.10)$$

$$\frac{d(v^2/2)}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda v^2}{8r_h}, \quad (7.11)$$

$$h_o = h + \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = h_o(0) + \int_0^x \left( \frac{q_o}{r_h} + q_r + q_c \right) \frac{A}{G} dx = h_o(0) + Q(x), \quad (7.12)$$

donde  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $h$  son la velocidad, densidad presión y entalpía media en cada sección, respectivamente.  $Q(x)$  representa el calor añadido por unidad de masa de fluido desde la entrada del conducto,  $x = 0$ , hasta la sección  $x$ ,  $G$  es el gasto que fluye por el conducto (en general su valor es desconocido y debe determinarse consistentemente de la resolución del problema), y  $h_o(0)$  es la entalpía de remanso a la entrada del conducto (que puede depender del tiempo como un parámetro). Para el cálculo del flujo de calor a través de las paredes del conducto puede usarse la analogía de Reynolds cuya expresión para gases se modifica respecto a la correspondiente a líquidos debido a que los gases pueden alcanzar velocidades mucho mayores y, por tanto, la temperatura cerca de la pared puede diferir apreciablemente respecto de la media en la sección debido a los efectos de disipación viscosa y de compresibilidad; para tener en cuenta este hecho se escribe entonces

$$q_o \simeq \frac{\lambda \rho v c_p}{8} (T_p - T_o) \simeq \frac{\lambda \rho v c_p}{8} [T_p - T (1 + (\gamma - 1)M^2/2)]. \quad (7.13)$$

Es útil escribir las variables en cada sección conducto como función únicamente del número de Mach. Para ello nótese que, puesto que  $a^2 = \gamma p/\rho$  y  $M^2 = v^2/a^2$ , (7.10) proporciona  $G^2 = \rho^2 a^2 M^2 A^2$  y combinándola apropiadamente con (7.10) se obtiene

$$p^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{G}{A} \right)^2 \frac{h_o(0) + Q(x)}{M^2 [1 + (\gamma - 1)M^2/2]}, \quad T = \frac{h_o(0) + Q(x)}{M^2 [1 + (\gamma - 1)M^2/2]}, \quad (7.14)$$

y  $\rho = p/(R_g T)$ . Sustituyendo (7.14) en (7.11) se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 - M^2} \left[ -\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{\gamma \lambda M^2}{8r_h} + \frac{1 + \gamma M^2}{2} \frac{dQ/dx}{h_o(0) + Q(x)} \right]. \quad (7.15)$$

En movimiento de gases en conductos a bajos números de Mach resulta conveniente en ocasiones emplear la ecuación diferencial que gobierna la distribución de presiones a lo largo del conducto

$$p \frac{dp}{dx} = \frac{G^2 R_g T}{A^2} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{\lambda}{8r_h} \right). \quad (7.16)$$

La ecuación anterior se obtiene de (7.11) eliminando en ella la derivada de la velocidad mediante (7.10); las derivadas de la densidad que surgen en el paso anterior se eliminan mediante la derivación del logaritmo de la ecuación de estado ( $\frac{dp}{p dx} = \frac{d\rho}{\rho dx} + \frac{dT}{T dx}$ ); finalmente, imponiendo la condición  $M^2 \ll 1$  se obtiene (7.16).

### Toberas

El movimiento de gases a través de toberas corresponde al caso particular en que se desprecian en las ecuaciones los efectos de la fricción ( $\lambda L/(8r_h) \ll 1$ ) y de la adición de calor al fluido,  $\Delta_L Q/h_o(0) \ll 1$ . El movimiento en toberas se caracteriza por que la entalpía de remanso se conserva a lo largo del conducto,  $h_o(x) = h_o = cte$  [ec. (7.12)] y también lo hace la entropía  $S(x) \equiv S_o(x) = S_o = cte$ ; junto con  $h_o$  y  $S$ , todas las demás magnitudes de remanso conservan sus valores iguales a los existentes a la entrada del conducto.

En el movimiento de gases en tobera, si  $M(x)$  aumenta (disminuye) a través del conducto entonces  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$  y  $a$  disminuyen (aumentan) con  $x$  y, por tanto,  $v = [2(h_o - c_p T)]^{1/2}$  aumenta (disminuye) con  $x$ . La evolución de  $M(x)$  con  $A(x)$  se obtiene de (7.15). Se deduce que

1. Si el movimiento es subsónico ( $M < 1$ ),  $dM/dx < 0(> 0)$  si  $dA/dx > 0(< 0)$ , es decir, cuando el área aumenta aguas abajo del conducto, el gas se decelera y viceversa.
2. Si el movimiento es supersónico ( $M > 1$ ) el comportamiento anterior se invierte.
3. Cuando el número de Mach es la unidad se tiene  $dA/dx = 0$  (se descarta cualquier solución con gradientes de velocidad infinitos), es decir, la condición de flujo sónico sólo puede alcanzarse en secciones de área mínima o máxima. La combinación de esta condición con las de 1) y 2) demuestran que  $M = 1$  sólo puede alcanzarse en secciones de área mínima denominadas generalmente gargantas.

El gasto a través de la tobera puede expresarse en función de las magnitudes de remanso de la corriente y del número de Mach haciendo uso de las relaciones (7.5) y  $v = aM$ ,

$$G = \rho(x) v(x) A(x) = \rho_o a_o A(x) M(x) \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(x)^2 \right]^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (7.17)$$

La expresión anterior proporciona el número de Mach como función del área del conducto si el gasto y las condiciones de remanso de la corriente son conocidos. Es conveniente expresar (7.17) de forma universal definiendo el *área crítica*  $A^*$  como el valor área obtenida de (7.17) para  $M = 1$ ,

$$A^* = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \frac{G}{\rho_o a_o}. \quad (7.18)$$

(7.17) se escribe entonces

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}. \quad (7.19)$$

La expresión anterior posee un mínimo de  $A/A^*$ , que es la unidad para  $M = 1$ , de modo que el área mínima del conducto es siempre mayor (o igual en el caso de que se alcancen condiciones sónicas en la garganta) que el área crítica. La expresión (7.19) posee dos ramas, una correspondiente a movimiento subsónico y otra a supersónico y se encuentra tabulada al final de la presente introducción teórica. Las expresiones (7.19), (7.17) y (7.5) permiten calcular el gasto y la distribución de presiones, o cualquier otra magnitud fluida, a lo largo del conducto una vez que se especifica la distribución de áreas y las condiciones de contorno pertinentes.

## 224 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

Puesto que la condición  $M = 1$  sólo se puede alcanzar en la sección de área mínima, existe un gasto máximo que puede circular por una tobera, denominado gasto crítico,  $G^*$ , que corresponde precisamente al caso en el que el área crítica coincide con el área mínima,  $A^* = A_{min}$ , por tanto su expresión es

$$G^* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \rho_o a_o A_{min}. \quad (7.20)$$

Para el caso del aire  $\gamma = 1,4$  y  $G^* \simeq 0,578 \rho_o a_o A_{min}$ .

### Movimientos de gases en conductos de sección constante aislados térmicamente

Si el conducto es de sección constante y no se añade calor al fluido, la ecuación (7.15), cuya integración determina  $M(x)$ , muestra que si  $M < 1$  ( $M > 1$ ) el número de Mach aumenta (disminuye) con  $x$ . La ecuación (7.12) indica  $h_o$  no varía a lo largo del conducto,  $h_o(x) = h_o(0)$ , y la segunda de las ecuaciones (7.14) determina  $T(x)$  como función de  $M(x)$ . Nótese que  $T$  disminuye (aumenta) si  $M$  aumenta (disminuye) y, por tanto,  $v = [2(h_o - c_p T)]^{1/2}$  aumenta (disminuye) con  $M$ ; las relaciones  $G = \rho v A$  y  $p = R_g \rho T$  implican entonces que  $\rho$  y  $p$  se comportan de la misma forma que  $T$  (opuesta a  $v$  y  $M$ ).

La integración de (7.15) proporciona

$$\frac{1}{M(0)^2} - \frac{1}{M(x)^2} + \frac{\gamma+1}{2} \ln \frac{M(0)^2 [2 + (\gamma-1)M^2(x)]}{M(x)^2 [2 + (\gamma-1)M^2(0)]} = \frac{\gamma \lambda x}{4r_h}. \quad (7.21)$$

Además, de la primera relación (7.14), evaluada en  $x = 0$  y en un  $x$  genérico, y (7.5) evaluada en  $x = 0$  proporcionan

$$\frac{p(x)}{p_o(0)} = \frac{p(x)}{p(0)} \frac{p(0)}{p_o(0)} = \frac{M(0)}{M(x)} \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(x)^2)^{-1/2}}{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M(0)^2)^{-1/2}}. \quad (7.22)$$

La evaluación de (7.21) y (7.22) permiten en  $x = L$  imponer las condiciones de contorno apropiadas en la salida del conducto y cerrar así el problema.

En el caso de movimiento subsónico y si las condiciones de contorno lo permiten, el gas se acelerará como máximo hasta alcanzar condiciones sónicas a la salida del conducto; la condición  $M = 1$  a la salida del conducto, que sustituye como condición de contorno a la de la igualdad de las presiones del gas a la salida y el ambiente que se da en una salida subsónica, permite determinar el gasto que circula por el conducto.

Si el movimiento en el conducto es supersónico (por existir por ejemplo, una tobera convergente-divergente acoplada a la entrada del conducto y ser las condiciones de contorno apropiadas para que el movimiento se haga supersónico en la parte divergente de la tobera) existe, para cada valor de la presión de salida, un valor de la longitud del conducto, denominada longitud crítica, para la que se alcanzan condiciones sónicas a la salida del conducto. Si la longitud del conducto es menor que la crítica el movimiento es supersónico en todo el conducto y la presión del gas a la salida es mayor que la del ambiente (el gas se expansiona a la salida del conducto), mientras que si la longitud del conducto es mayor que la crítica se forma una onda de choque en el conducto a una distancia de la entrada menor siempre que la longitud crítica; el movimiento del gas detrás de la onda es subsónico y el gas evoluciona acelerándose hasta la salida donde descarga a la presión atmosférica.

### Movimientos en conductos de sección constante con adición de calor y sin fricción

Si la longitud del conducto es lo suficientemente corta ( $\lambda L/r_h \ll 1$ ) como para poder despreciar la fricción y la sección del conducto es constante la ecuación (7.15) muestra que para el caso de adición de calor,  $dQ/dx > 0$ ,  $M$  aumenta (disminuye) aguas abajo si  $M < 1$  ( $M > 1$ ). La entropía debe aumentar con  $x$  mientras que para  $M < 1$  ( $M < 1$ )  $p$  y  $\rho$  disminuyen (aumentan) aguas abajo mientras  $v$  aumenta

(disminuye); la temperatura,  $T$ , disminuye con  $x$  si  $\gamma^{-1/2} < M < 1$  mientras que aumenta si  $M < \gamma^{-1/2}$  o  $M > 1$ . La integración de (7.15) proporciona

$$\frac{[1 + \gamma M^2(0)]^2}{[1 + \gamma M^2(x)]^2} \frac{M^2(x)[1 + (\gamma - 1)M^2(x)/2]}{M^2(0)[1 + (\gamma - 1)M^2(0)/2]} = \frac{h_o(0) + Q(x)}{h_o(0)}, \quad (7.23)$$

y (7.14) y (7.5) proporcionan

$$\frac{p^2(L)}{p_o^2(0)} = \frac{M^2(0)[1 + (\gamma - 1)M^2(0)/2]^{-(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{M^2(x)[1 + (\gamma - 1)M^2(x)/2]} \frac{h_o(0) + Q(x)}{h_o(0)}. \quad (7.24)$$

La evaluación de (7.23) y (7.24) permiten en  $x = L$  imponer las condiciones de contorno apropiadas en la salida del conducto y cerrar así el problema. La discusión de dicha resolución en los casos de movimiento subsónico o supersónico es la misma que la del apartado anterior.

### Carga y descarga de depósitos

Las ecuaciones de conservación de la masa y energía en forma integral permiten describir la evolución de las magnitudes fluidomecánicas en el depósito de volumen  $V$  variable con el tiempo y aislado térmicamente. La ecuación de continuidad proporciona

$$\boxed{\frac{d(V\rho)}{dt} = \begin{cases} G, & (\text{llenado}) \\ -G, & (\text{vaciado}) \end{cases}} \quad (7.25)$$

siendo  $\rho$  la densidad media en el depósito,  $G$  el gasto que entra o sale del depósito. Suponiendo magnitudes uniformes en la sección de salida del orificio (tobera) que conecta el depósito con el exterior la salida del depósito y que la energía cinética del gas en el depósito es despreciable frente a su energía térmica [ $V^2 \ll (c_v T)$ ], con lo que las variaciones de presión en el interior son despreciables frente a la propia presión, la ecuación de la energía interna contenida en el depósito,  $pV/(\gamma - 1)$ , se escribe

$$\boxed{\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(Vp)}{dt} = \begin{cases} G \cdot h_{oe} - p \frac{dV}{dt} + Q, & (\text{llenado}) \\ -G \cdot h - p \frac{dV}{dt} + Q & (\text{vaciado}) \end{cases}} \quad (7.26)$$

siendo  $p$  la presión media del gas en el depósito,  $h_{oe}$  la entalpía de remanso que entra en el depósito en el caso de un llenado, mientras que  $h = \gamma p/[(\gamma - 1)\rho]$  la entalpía del gas en el depósito en el caso de un vaciado, y  $Q$  es el calor añadido al gas en el depósito (por conducción o radiación a través de las paredes, o por combustión). Como consecuencia importante de combinar las ecuaciones (7.25)-(7.26) se obtiene que el vaciado de depósito térmicamente aislado ( $Q = 0$ ) es isentrópico, y en cada instante se cumple

$$\boxed{\frac{p(t)}{\rho(t)^\gamma} = \frac{p(0)}{\rho(0)^\gamma}}. \quad (7.27)$$

M	$p_o/p$	$\rho_o/\rho$	$T_o/T$	$A/A^*$
1,000E-01	1,007E+00	1,005E+00	1,002E+00	5,822E+00
2,000E-01	1,028E+00	1,020E+00	1,008E+00	2,964E+00
3,000E-01	1,064E+00	1,046E+00	1,018E+00	2,035E+00
4,000E-01	1,117E+00	1,082E+00	1,032E+00	1,590E+00
5,000E-01	1,186E+00	1,130E+00	1,050E+00	1,340E+00
6,000E-01	1,276E+00	1,190E+00	1,072E+00	1,188E+00
7,000E-01	1,387E+00	1,263E+00	1,098E+00	1,094E+00
8,000E-01	1,524E+00	1,351E+00	1,128E+00	1,038E+00
9,000E-01	1,691E+00	1,456E+00	1,162E+00	1,009E+00
1,000E+00	1,893E+00	1,577E+00	1,200E+00	1,000E+00
1,500E+00	3,671E+00	2,532E+00	1,450E+00	1,176E+00
2,000E+00	7,824E+00	4,347E+00	1,800E+00	1,688E+00
2,500E+00	1,709E+01	7,594E+00	2,250E+00	2,637E+00
3,000E+00	3,673E+01	1,312E+01	2,800E+00	4,235E+00
3,500E+00	7,627E+01	2,211E+01	3,450E+00	6,790E+00
4,000E+00	1,518E+02	3,615E+01	4,200E+00	1,072E+01
4,500E+00	2,894E+02	5,731E+01	5,050E+00	1,656E+01
5,000E+00	5,291E+02	8,818E+01	6,000E+00	2,500E+01
5,500E+00	9,304E+02	1,320E+02	7,050E+00	3,687E+01
6,000E+00	1,579E+03	1,925E+02	8,200E+00	5,318E+01
6,500E+00	2,594E+03	2,745E+02	9,450E+00	7,513E+01
7,000E+00	4,140E+03	3,833E+02	1,080E+01	1,041E+02
7,500E+00	6,434E+03	5,252E+02	1,225E+01	1,418E+02
8,000E+00	9,763E+03	7,075E+02	1,380E+01	1,901E+02
8,500E+00	1,450E+04	9,383E+02	1,545E+01	2,511E+02
9,000E+00	2,110E+04	1,227E+03	1,720E+01	3,272E+02
1,000E+01	4,244E+04	2,021E+03	2,100E+01	5,359E+02
1,500E+01	6,602E+05	1,435E+04	4,600E+01	3,755E+03
2,000E+01	4,783E+06	5,905E+04	8,100E+01	1,538E+04
2,500E+01	2,245E+07	1,782E+05	1,260E+02	4,631E+04
3,000E+01	7,978E+07	4,408E+05	1,810E+02	1,144E+05
3,500E+01	2,335E+08	9,492E+05	2,460E+02	2,461E+05
4,000E+01	5,926E+08	1,846E+06	3,210E+02	4,785E+05
4,500E+01	1,348E+09	3,321E+06	4,060E+02	8,606E+05
5,000E+01	2,815E+09	5,618E+06	5,010E+02	1,455E+06

Valores de la presión, densidad, temperatura, y área crítica como función del número de Mach y de las variables de remanso en una tobera.

$M_{n1}$	$M_{n2}$	$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{2o}/p_{1o}$
1,0	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00	1,000E+00
1,1	9,118E-01	1,245E+00	1,169E+00	1,065E+00	9,989E-01
1,2	8,422E-01	1,513E+00	1,342E+00	1,128E+00	9,928E-01
1,3	7,860E-01	1,805E+00	1,516E+00	1,191E+00	9,794E-01
1,4	7,397E-01	2,120E+00	1,690E+00	1,255E+00	9,582E-01
1,5	7,011E-01	2,458E+00	1,862E+00	1,320E+00	9,298E-01
1,6	6,684E-01	2,820E+00	2,032E+00	1,388E+00	8,952E-01
1,7	6,405E-01	3,205E+00	2,198E+00	1,458E+00	8,557E-01
1,8	6,165E-01	3,613E+00	2,359E+00	1,532E+00	8,127E-01
1,9	5,956E-01	4,045E+00	2,516E+00	1,608E+00	7,674E-01
2,0	5,774E-01	4,500E+00	2,667E+00	1,688E+00	7,209E-01
2,1	5,613E-01	4,978E+00	2,812E+00	1,770E+00	6,742E-01
2,2	5,471E-01	5,480E+00	2,951E+00	1,857E+00	6,281E-01
2,3	5,344E-01	6,005E+00	3,085E+00	1,947E+00	5,833E-01
2,4	5,231E-01	6,553E+00	3,212E+00	2,040E+00	5,401E-01
2,5	5,130E-01	7,125E+00	3,333E+00	2,138E+00	4,990E-01
2,6	5,039E-01	7,720E+00	3,449E+00	2,238E+00	4,601E-01
2,7	4,956E-01	8,338E+00	3,559E+00	2,343E+00	4,236E-01
2,8	4,882E-01	8,980E+00	3,664E+00	2,451E+00	3,895E-01
2,9	4,814E-01	9,645E+00	3,763E+00	2,563E+00	3,577E-01
3,0	4,752E-01	1,033E+01	3,857E+00	2,679E+00	3,283E-01
3,5	4,512E-01	1,413E+01	4,261E+00	3,315E+00	2,129E-01
4,0	4,350E-01	1,850E+01	4,571E+00	4,047E+00	1,388E-01
4,5	4,236E-01	2,346E+01	4,812E+00	4,875E+00	9,170E-02
5,0	4,152E-01	2,900E+01	5,000E+00	5,800E+00	6,172E-02
5,5	4,090E-01	3,513E+01	5,149E+00	6,822E+00	4,236E-02
6,0	4,042E-01	4,183E+01	5,268E+00	7,941E+00	2,965E-02
6,5	4,004E-01	4,913E+01	5,365E+00	9,156E+00	2,115E-02
7,0	3,974E-01	5,700E+01	5,444E+00	1,047E+01	1,535E-02
7,5	3,949E-01	6,546E+01	5,510E+00	1,188E+01	1,133E-02
8,0	3,929E-01	7,450E+01	5,565E+00	1,339E+01	8,488E-03
8,5	3,912E-01	8,413E+01	5,612E+00	1,499E+01	6,449E-03
9,0	3,898E-01	9,433E+01	5,651E+00	1,669E+01	4,964E-03
9,5	3,886E-01	1,051E+02	5,685E+00	1,849E+01	3,866E-03
10	3,876E-01	1,165E+02	5,714E+00	2,039E+01	3,045E-03

Relación de las magnitudes fluidas a un lado y otro de la onda de choque normal en función del número de Mach incidente  $M_{n1}$ .



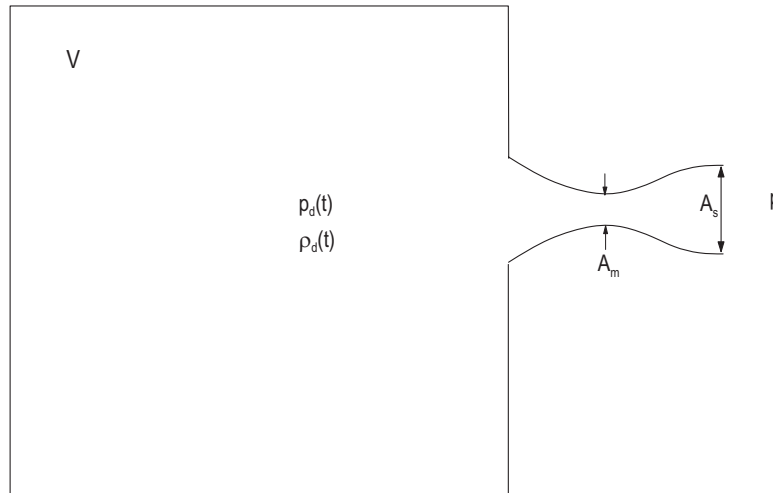
M	$\nu$	$\mu$
1,000E+00	0,000E+00	9,000E+01
1,100E+00	2,332E-02	6,538E+01
1,200E+00	6,210E-02	5,644E+01
1,300E+00	1,077E-01	5,028E+01
1,400E+00	1,569E-01	4,558E+01
1,500E+00	2,078E-01	4,181E+01
1,600E+00	2,594E-01	3,868E+01
1,700E+00	3,108E-01	3,603E+01
1,800E+00	3,617E-01	3,375E+01
1,900E+00	4,117E-01	3,176E+01
2,000E+00	4,604E-01	3,000E+01
2,200E+00	5,538E-01	2,704E+01
2,400E+00	6,413E-01	2,462E+01
2,600E+00	7,228E-01	2,262E+01
2,800E+00	7,984E-01	2,092E+01
3,000E+00	8,684E-01	1,947E+01
3,500E+00	1,022E+00	1,660E+01
4,000E+00	1,148E+00	1,448E+01
4,500E+00	1,254E+00	1,284E+01
5,000E+00	1,343E+00	1,154E+01
6,000E+00	1,483E+00	9,594E+00
7,000E+00	1,588E+00	8,213E+00
8,000E+00	1,669E+00	7,181E+00
9,000E+00	1,733E+00	6,379E+00
1,000E+01	1,786E+00	5,739E+00
2,000E+01	2,028E+00	2,866E+00
5,000E+01	2,177E+00	1,146E+00

Valores de  $\mu$  y  $\nu$  como función del número de Mach en la función de Prandtl-Meyer.

**Problema 7.1**

Un depósito rígido de volumen  $V$  aislado térmicamente descarga aire al ambiente exterior, donde la presión es  $p_a$ , a través de una tobera convergente divergente de área mínima  $A_m$  y sección de salida  $A_s/A_m = 2$ . Inicialmente la salida de la tobera está cerrada mediante un diafragma y el gas en el depósito se encuentra en unas condiciones de densidad y presión conocidas  $\rho_d(0)$  y  $p_d(0) = p_a/0,03$ . Si en un cierto instante se rompe el diafragma, se pide:

1. Calcular la evolución de la presión en el depósito  $p_d(t)$ . En particular, determinénse los instantes  $t_{ad}$ ,  $t_b$  y  $t_{desc}$  correspondientes respectivamente a tobera adaptada, desbloqueo de la tobera y fin del proceso de descarga.
2. Determinar los instantes  $t_{ns}$  y  $t_i$  en que: a) existe una onda de choque normal en la sección de salida y b) existe una onda de choque en una sección intermedia  $A_i$  tal que  $A_i/A_m = 1,5$ .
3. Calcular el instante ( $t_{ob}$ ) en que existe en la sección de salida de la tobera una onda de choque oblicua que forma un ángulo  $\beta = \pi/4$  con la dirección de la corriente incidente (saliente de la tobera).
4. Como es sabido, si el valor de  $p_a$  es menor que el correspondiente a tobera adaptada tiene lugar una expansión de Prandtl-Meyer del gas a la salida de la tobera. Para la expansión correspondiente al instante  $t_{ex}$  en que se tiene  $p_a = 0,05p_d(t_{ex})$  calcular: a) número de Mach de la corriente tras la expansión,  $M_2$ , y b) ángulo de deflexión,  $\alpha$ , experimentado por la corriente en la expansión.

**Resolución:****Apartado 1.-**

Obsérvese primero que en el instante inicial la presión ambiente,  $p_a$ , es menor que la presión  $p_{s2}$  que existe en la sección de salida cuando el movimiento es supersónico en toda la parte divergente de la tobera. En efecto, de las tablas del movimiento isentrópico se obtiene para  $A_s/A^* = A_s/A_m = 2$  en la rama supersónica la relación

$$p_{s2} = 0,0935p_o = 0,0935p_d(0) > 0,03p_d(0) = p_a, \quad (1)$$

donde se ha tenido en cuenta que, como ocurre siempre que no existan ondas de choque en el interior de la tobera, la presión de remanso del movimiento a través de la misma coincide en cada instante (movimiento

casi estacionario) con la existente en el depósito en dicho instante. Por tanto, al aumentar gradualmente la relación  $p_a/p_d(t)$  durante el proceso de vaciado la tobera se encuentra adaptada (salida supersónica a la presión ambiente) para un cierto instante  $t_{ad}$  para el que  $p_{s2}(t_{ad}) = p_a$ , esto es,  $p_a/p_d(t_{ad}) = 0,0935$ ; la tobera permanece bloqueada (condiciones sónicas en la garganta) hasta el instante  $t_b$  en que la relación  $p_a/p_d(t_b)$  alcanza el valor

$$\frac{p_{s1}}{p_0} = 0,9395, \quad (2)$$

obtenido de la tablas del movimiento isentrópico entrando en la rama subsónica con el valor  $A_s/A^* = A_s/A_m = 2$ . Para  $t_{ad} < t < t_b$  se producen ondas de choque, normales u oblicuas (estas últimas a la salida de la tobera), que se considerarán en los apartados 2 y 3, mientras que si  $t < t_{ad}$  se producen expansiones de Prandtl-Meyer consideradas en el apartado 4.

La ecuación diferencial que gobierna la evolución de la presión en el depósito es

$$V \frac{dp_d}{dt} = -G\gamma p_d/\rho_d, \quad (3)$$

donde

$$\rho_d = \rho_d(0)[p_d/p_d(0)]^{1/\gamma}, \quad (4)$$

puesto que, como es sabido, en el vaciado de un depósito aislado térmicamente se conserva la entropía específica de las partículas fluidas contenidas en el mismo; la expresión del gasto a través de la tobera,  $G$ , depende de si la tobera está o no bloqueada. En efecto, para  $t \leq t_b$  se tienen condiciones sónicas en la garganta (tobera bloqueada) y el gasto es el crítico,

$$G = G^* = 0,578\rho_d a_d A_m, \quad (5)$$

donde  $a_d = (\gamma p_d/\rho_d)^{1/2}$  es la velocidad del sonido en el depósito que, haciendo uso de (4), puede escribirse como  $a_d = a_d(0)[p_d/p_d(0)]^{(\gamma-1)/(2\gamma)}$ . Para  $t > t_b$  la tobera no está bloqueada y la expresión del gasto es

$$G = A_s \rho_d a_d M_s [1 + (\gamma - 1)M_s^2/2]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} A_s \rho_d a_d \left[ \left( \frac{p_d}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]^{1/2} \left( \frac{p_d}{p_a} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}}, \quad (6)$$

donde  $M_s$  se ha expresado en función de la relación de presiones entre el depósito y la atmósfera haciendo uso de la conservación de la presión de remanso del movimiento que tiene lugar en toda la tobera; en efecto, puesto que para  $t > t_b$  el movimiento es subsónico, no pueden producirse ondas de choque en su interior [a través de las que las magnitudes de remanso (excepto  $h_o$ ) experimentan variaciones bruscas]. Por tanto, se tiene  $p_{os} = p_d(t)$  y, además,  $p_s = p_a$  puesto que la salida subsónica, por lo que se verifica

$$\frac{p_a}{p_d} = \frac{p_s}{p_{os}} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)}. \quad (7)$$

Para  $t < t_b$ , la ecuación (3), con (5) y la relación isentrópica (4), puede integrarse analíticamente; en efecto, es fácil comprobar que en términos de las variables adimensionales

$$\xi = \frac{p_d}{p_d(0)}, \quad \tau = \frac{t a_d(0) A_m}{V}, \quad (8)$$

(3) se escribe

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -0,578\gamma\xi^{(3\gamma-1)/(2\gamma)}. \quad (9)$$

La ecuación (9) puede integrarse inmediatamente con la condición inicial  $\xi(0) = 1$  para dar

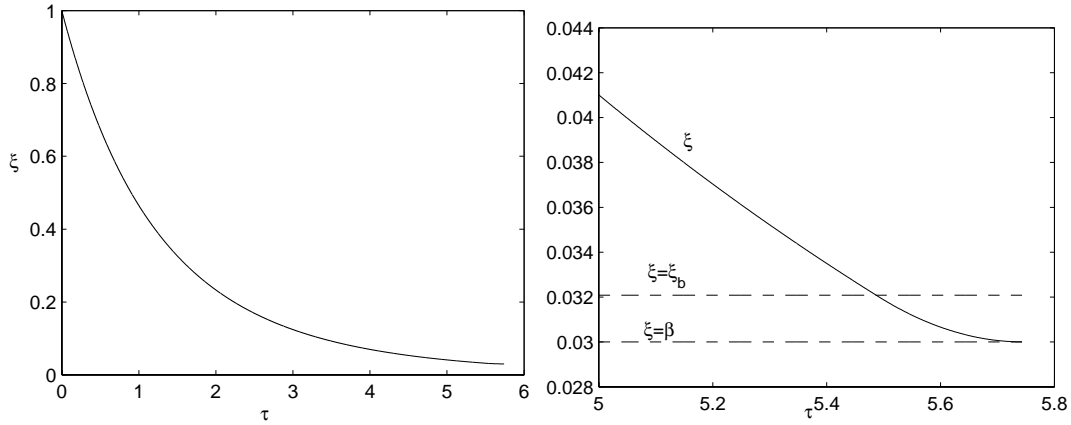
$$\xi = \frac{1}{[1 + 0,578(\gamma-1)\tau/2]^{2\gamma/(\gamma-1)}}. \quad (10)$$

Los valores de  $\tau$  correspondientes a tobera adaptada y al instante de desbloqueo,  $\tau_{ad}$  y  $\tau_b$  respectivamente, pueden despejarse de (10) para los valores  $\xi_{ad} = p_d(t_{ad})/p_d(0) = [p_d(t_{ad})/p_a][p_a/(p_d(0))] = 0,03/0,0935$  y  $\xi_b = p_d(t_b)/p_d(0) = [p_d(t_b)/p_a][p_a/(p_d(0))] = 0,03/0,9395$ .

Para  $t > t_b$  la ecuación (3), con (6) y la relación isentrópica (4), se escribe en términos de las variables (8) como

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\gamma \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \frac{A_s}{A_m} \beta^{(\gamma+1)/(2\gamma)} \xi^{(\gamma-1)/\gamma} \left[ \left( \frac{\xi}{\beta} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]^{1/2}, \quad (11)$$

donde se ha definido  $\beta \equiv p_a/p_d(0)$ . La ecuación (11) debe integrarse numéricamente con la condición inicial  $\xi(\tau_b) = \xi_b$ ; el tiempo de descarga del depósito,  $\tau_{desc}$ , se obtiene de la condición  $\xi = \beta$ . En la figura inferior se representa la solución numérica de (11) junto con la solución (10) para  $\beta = 0,03$ ,  $A_s/A_m = 2$  y  $\gamma = 1,4$ .



### Apartado 2.-

a) En el instante  $t_{ns}$  en que se forma una onda de choque normal a la salida, el movimiento es isentrópico en toda la tobera, con la parte divergente de ésta funcionando en régimen supersónico; para  $A_s/A^* = A_s/A_m = 2$  se obtiene en la rama supersónica de las tablas del movimiento isentrópico el valor del número de Mach incidente en la onda  $M_1 = 2,2$ , así como la relación entre la presión incidente y la de remanso  $(p_1/p_{o1}) = 0,0935$ , siendo  $p_{o1} = p_d(t_{ns})$ . Entrando en las tablas de ondas de choque con  $M_1 = 2$  se obtiene un salto de presiones a través de la onda  $p_2 = 5,48 p_1 = 5,48 \times 0,0935 p_{o1}$ . Puesto que tras la onda se cumple  $p_2 = p_a$ , se tiene

$$\xi_{ns} = \frac{p_d(t_{ns})}{p_d(0)} = \frac{p_a/p_d(0)}{5,48 \times 0,0935}. \quad (12)$$

Para  $[p_a/p_d(0)] = 0,03$  se obtiene  $\xi_{ns} = 0,0586$ , y de (10) se despeja  $\tau_{ns}$ .

b) En el instante  $t_i$  en que se tiene una onda de choque en la sección intermedia  $A_i/A_m = 1,5$ , el movimiento es isentrópico desde la entrada de la tobera hasta la onda de choque, siendo el área crítica del mismo con  $A_1^* = A_m$ . En la rama supersónica de las tablas del movimiento isentrópico se obtiene para  $A_i/A_1^* = 1,5$  el valor del número de Mach incidente en la onda  $M_1 = 1,9$ ; las tablas de ondas de choque proporcionan entonces el salto de áreas críticas y de presiones de remanso para los movimientos isentrópicos antes y después de la onda  $(A_2^*/A_1^*) = (p_{o1}/p_{o2}) = 1,3$ , con  $p_{o1} = p_d(t_i)$ . Entrando en la rama subsónica de las tablas del movimiento isentrópico con el valor  $(A_s/A_2^*) = (A_s/A_m)/1,3 \simeq 1,54$  se obtiene  $(p_s/p_{o2}) = 0,89$ . Como  $p_s = p_a$  (salida subsónica) y  $p_{o2} = [p_d(t_i)/1,3]$  se tiene

$$\xi_i = \frac{p_d(t_i)}{p_d(0)} = \frac{1,3}{0,89} \frac{p_a}{p_d(0)}. \quad (13)$$

Para  $[p_a/p_d(0)] = 0,03$  se obtiene  $\xi_i = 0,0438$ , y de (10) se despeja  $\tau_i$ .

**Apartado 3.-**

En el instante  $t_{ob}$  en que en la salida de la tobera existe una onda de choque oblicua formando un ángulo  $\beta = \pi/4$  con la corriente incidente, se tiene en la sección de salida el valor  $M_{s2} = 2,2$  correspondiente a la relación de presiones  $(p_{s2}/p_{o2}) = 0,0935$ , con  $p_{o2} = p_d(t_{ob})$ . La componente normal del número de Mach de la corriente incidente en la onda es, por tanto,  $M_{n1} = 2,2 \sin \beta \simeq 1,54$ , y la tablas de ondas de choque proporcionan un salto de presiones  $p_2/p_1 = 2,46$ . Como  $p_2 = p_a$  y  $p_1 = p_{s2} = 0,0935 p_d(t_{ob})$ , se tiene

$$\xi_{ob} = \frac{p_d(t_{ob})}{p_d(0)} = \frac{p_a/p_d(0)}{2,46 \times 0,0935}. \quad (14)$$

Para  $[p_a/p_d(0)] = 0,03$  se obtiene  $\xi_{ob} = 0,13$ , y de (10) se despeja  $\tau_{ob}$ . Entrando con  $\beta = \pi/4$  en la gráfica mostrada en la introducción teórica para ondas de choque oblicuas, se deduce que la corriente tras la onda forma un ángulo  $\alpha = 15^\circ$  con la dirección de la corriente incidente.

**Apartado 4.-**

a) El número de Mach tras la expansión de Prandtl-Meyer,  $M_2$ , puede determinarse de las relaciones isentrópicas. Puesto que las condiciones incidentes en la expansión son las condiciones supersónicas en la sección de salida de la tobera,  $M_1 = M_{s2} = 2,2$  y  $p_1 = p_{s2} = 0,0935 p_d(t_{ex}) = 0,0935 p_a/0,05$ , y la presión tras la expansión es  $p_2 = p_a$  ( $(p_1/p_2) = 0,0935/0,05$ ), se tiene

$$M_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[ \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma - 1)/\gamma} - 1 \right]} \simeq 2,6; \quad (15)$$

obsérvese cómo la corriente supersónica isentrópica se acelera en la expansión.

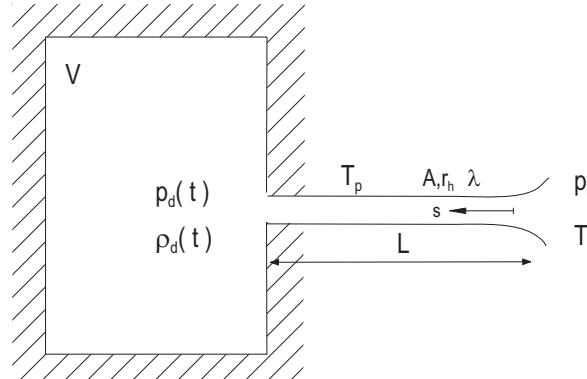
b) El ángulo de deflexión de la corriente se obtiene de la función de Prandtl-Meyer  $\nu(M)$  tabulada en la tabla de Prandtl-Meyer,

$$\alpha = \nu(M_2) - \nu(M_1) = \nu(2,6) - \nu(2,2) = 0,169 \text{ rad} \simeq 5^\circ. \quad (16)$$

**Problema 7.2**

Un depósito de volumen  $V$ , aislado térmicamente, se encuentra inicialmente a presión  $p_d(0)$  y densidad  $\rho_d(0)$  y está conectado al ambiente, a presión  $p_a$  y temperatura  $T_a$ , mediante un conducto de longitud  $L$ , sección  $A$ , radio hidráulico  $r_h$  y cuya pared se encuentra a una temperatura constante y conocida  $T_p$ . Debido a que la presión inicial del depósito es menor que la del ambiente tiene lugar un llenado del depósito que se desea analizar. Suponiendo que el movimiento casi estacionario ( $LA \ll V$ ) del aire en el conducto es turbulento con factor de fricción  $\lambda$  constante, se pide:

1. En el caso de  $\lambda L/4r_h \gg 1$  y  $(p_a - p_d(0))/p_d(0) \sim O(1)$ :
  - a) Demostrar que el movimiento del aire es a bajos números de Mach.
  - b) Distribución de temperaturas en el conducto. Dibújese esquemáticamente indicando la longitud característica de la zona donde existen variaciones apreciables.
  - c) Gasto circulante en función de la presión en el depósito  $p_d(t)$ .
  - d) Ecuaciones que gobiernan la evolución de la presión y densidad en el depósito.
  - e) Calcular el tiempo de llenado.
2. En el caso de  $\lambda L/4r_h \sim O(1)$  y  $(p_a - p_d(0))/p_d(0) \ll 1$ :
  - a) Demostrar que el movimiento del aire es a bajos números de Mach.
  - b) Distribución de temperaturas en el conducto.
  - c) Gasto circulante en función de la presión en el depósito  $p_d(t)$ .
  - d) Ecuaciones que gobiernan la evolución de la presión y densidad en el depósito.
  - e) Calcular el tiempo de llenado.

**Resolución:****Apartado 1.-**

Es fácil demostrar que el tiempo de variación de las magnitudes fluidas en el depósito  $t_o$  está relacionado con el tiempo de residencia  $t_r = L/V$  a través de la relación  $t_o \sim t_r$ .  $V/(LA) \gg t_r$  y el movimiento es, por tanto, casi estacionario.

Por otra parte, si  $\lambda L/r_h \gg 1$ , la inercia del gas en el conducto es despreciable frente a la fricción

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial s} \sim \frac{v^2/2}{L} \ll \frac{\lambda v^2}{8r_h}. \quad (1)$$

## 234 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

En ese caso, el gradiente de presiones se emplea en vencer la fricción del gas en las paredes

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\lambda \rho v^2}{8r_h} \Rightarrow \frac{\Delta p}{L} \sim \frac{\lambda \rho v^2}{8r_h} \Rightarrow \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\lambda L}{8r_h} \frac{\rho v^2}{p} \sim \frac{\lambda L}{8r_h} M^2; \quad (2)$$

dado que las variaciones de presión a lo largo del conducto son a lo sumo del orden de la propia presión, el número de Mach en el conducto es muy pequeño  $M^2 \sim 8r_h/(\lambda L) \ll 1$ .

Es importante observar, además, que si el número de Mach del gas es pequeño a lo largo del conducto las temperaturas de remanso y estática del gas coinciden en primera aproximación

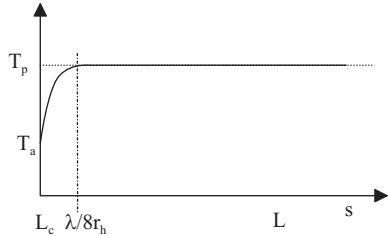
$$h_o = c_p T_o = h + \frac{v^2}{2} = c_p T \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \simeq c_p T \Rightarrow T_o \simeq T. \quad (3)$$

Haciendo uso de la analogía de Reynolds, el flujo de calor desde la pared al gas es  $(G/A)c_p(T_p - T_o) \simeq (G/A)c_p(T_p - T)$ . La distribución de temperaturas a lo largo del conducto viene dada por el balance entre el calor convectado y el conducido

$$Gc_p \frac{dT}{ds} = \frac{G}{A} c_p (T_p - T) P, \quad (4)$$

donde  $P$  es el perímetro mojado de la sección del conducto. La ecuación anterior se integra fácilmente para dar la distribución de temperaturas a lo largo del conducto,

$$T(s) = T_p - (T_p - T_a) e^{-\frac{\lambda}{8r_h} s}, \quad (5)$$



que se representa cualitativamente en la figura adjunta. Obsérvese que el gas alcanza la temperatura de la pared en distancias del orden de  $8r_h/\lambda \ll L$ ; esto es, hay intercambio de calor por conducción entre la pared y el gas sólo en una región de longitud muy pequeña adyacente a la entrada del conducto, por lo que en el análisis del movimiento del gas en el conducto se puede suponer que su temperatura es constante en todo el conducto y de valor  $T_p$ .

Como se indicó anteriormente el gradiente de presiones se emplea en vencer la fricción

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\lambda \rho v^2}{8r_h} = -\left(\frac{G}{A}\right)^2 \frac{\lambda}{8r_h \rho} = -\left(\frac{G}{A}\right)^2 \frac{\lambda R_g T_p}{8r_h p} \Rightarrow \frac{\partial p^2/2}{\partial s} = -\left(\frac{G}{A}\right)^2 \frac{\lambda R_g T_p}{8r_h}, \quad (6)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de continuidad  $G/A = \rho v$  y de la de estado. La integración de la ecuación anterior con las condiciones de contorno  $p(0) = p_a$  y  $p(L) = p_d$  proporciona

$$p_a^2 - p_d^2 = \frac{G^2 R_g T_p}{A^2} \frac{\lambda L}{4r_h} \quad \text{o} \quad G = \sqrt{\frac{4r_h}{\lambda L} \frac{A^2}{R_g T_p}} (p_a^2 - p_d^2)^{1/2}. \quad (7)$$

Obsérvese que en realidad existe una caída de presión a la entrada  $p_a - p(0) = \rho v^2(0)/2 \neq 0$  que se emplea en acelerar el fluido desde la velocidad nula hasta la velocidad  $v$  a la entrada del conducto; no obstante esta caída de presión es muy pequeña frente a la que hay a lo largo del conducto  $p(0) - p_d \sim [\lambda L/(8r_h)] \rho v^2 \gg \rho v^2$  y, por tanto, aquélla puede despreciarse frente a ésta y suponer  $p(0) = p_a$  en primera aproximación.

Las ecuaciones de evolución de las magnitudes fluidas en el depósito, supuesto aislado térmicamente, son

$$V \frac{dp_d}{dt} = G \quad \text{y} \quad \frac{V}{\gamma-1} \frac{dp_d}{dt} = Gh_{oe} = Gc_p T_p. \quad (8)$$

La integración de la última de las ecuaciones en (8), teniendo en cuenta (7), proporciona

$$\int_{p_d(0)}^{p_d} \frac{dp_d}{\sqrt{p_a^2 - p_d^2}} = -\frac{\pi}{2} + \arcsen \left[ \frac{p_d(0)}{\sqrt{p_a^2 - p_d(0)^2}} \right] = \frac{\gamma-1}{V} c_p T_p \sqrt{\frac{4r_h}{\lambda L} \frac{A^2}{R_g T_p}} t, \quad (9)$$

y el tiempo de llenado  $t_{llen}$  viene dado por

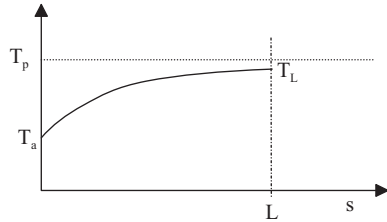
$$\frac{\gamma-1}{V} c_p T_p \sqrt{\frac{4r_h}{\lambda L} \frac{A^2}{R_g T_p}} t_{llen} = \arcsen \left[ \frac{p_d(0)}{\sqrt{p_a^2 - p_d(0)^2}} \right] - \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

### Apartado 2.-

Para el caso en que  $\lambda L/r_h \sim 1$  y  $p_a - p_d(0) \ll p_a$ , el movimiento del gas en el conducto es también a bajos números de Mach. En efecto, el gradiente de presiones en este caso está equilibrado con las fuerzas de inercia y las de presión y, por tanto,

$$\Delta p \sim \rho v^2 \quad \text{y} \quad 1 \gg \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\rho v^2}{p} \sim M^2. \quad (11)$$

La distribución de temperatura viene dada por la ecuación de la energía que es enteramente similar al caso de fricción dominante, por ser aquí también  $M^2 \ll 1$  y consecuentemente  $T_o = T$



$$T(s) = T_p - (T_p - T_a) e^{-\frac{\lambda}{8r_h} s}; \quad (12)$$

obsérvese, sin embargo, que por ser  $\lambda L/r_h \sim O(1)$  las variaciones de temperatura a lo largo del conducto son significativas [véase la figura adjunta donde se representa (12) en forma esquemática] y se añade calor al gas a través de las paredes a lo largo de todo el conducto.

La ecuación de cantidad de movimiento es en este caso

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\lambda \rho v^2}{8r_h}, \quad (13)$$

que si se usa la ecuación de continuidad  $G/A = \rho v$ , y la relación  $(1/\rho)(dp/ds) = (1/p)(dp/ds) - (1/T)(dT/ds)$ , obtenida diferenciando la ecuación de estado y la condición  $M^2 = \rho v^2/(\gamma p) \ll 1$  se obtiene

$$p \frac{dp}{ds} = \frac{G^2 R_g}{A^2} \left( -\frac{dT}{ds} - \frac{\lambda T}{8r_h} \right) = -\frac{G^2 R_g T_p}{A^2} \frac{\lambda}{8r_h}, \quad (14)$$

donde para simplificar el segundo miembro se ha hecho uso de (12).

Esta ecuación puede simplificarse aún más si se tiene en cuenta que al ser  $\Delta p = p_a - P(0) \ll p_a$  se puede linealizar,  $p dp/ds \sim p_a dp/ds$ . Si se integra entre la entrada y la salida se obtiene

$$p_a [p_d - p(0)] = -\frac{G^2 R_g T_p}{A^2} \frac{\lambda L}{8r_h}, \quad (15)$$

donde la presión a la entrada del conducto es

$$p(0) = p_a \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \simeq p_a \left[ 1 - \frac{\gamma}{2} M^2(0) \right] = p_a \left( 1 - \frac{G^2}{2\rho_a p_a A^2} \right), \quad (16)$$

donde se ha hecho uso de la condición  $M^2(0) \ll 1$  y  $M^2(0) = \rho(0)v^2(0)/[\gamma p(0)] = (G/A)^2/[\gamma p(0)\rho(0)] = (G/A)^2/[\gamma p_a \rho_a]$ . Substituyendo la expresión (16) en (15) se obtiene el gasto en función del salto de presiones a lo largo del conducto

$$G = \sqrt{\frac{2\rho_a}{A^2 \left( 1 + \frac{\lambda L}{4r_h} \frac{T_p}{T_a} \right)}} (p_a - p_d)^{1/2}. \quad (17)$$

Finalmente, si se sustituye la expresión (17) en la última de las ecuaciones (8) y se tiene en cuenta que la entalpía de remanso del gas a la entrada del depósito (aproximadamente igual a la estática) es  $h_o(L) =$



## 236 MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

$h(L) = c_p T(L) = c_p T_L$ , la integración de la última de las ecuaciones (8) proporciona el tiempo de llenado  $t_{llen}$

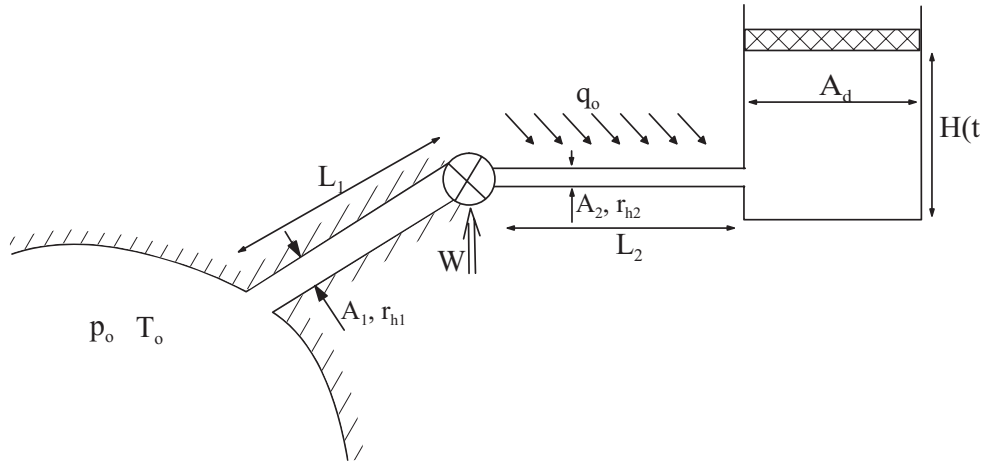
$$\int_{p_d(0)}^{p_d} \frac{dp_d}{(p_a - p_d)^{1/2}} = 2(p_a - p_d(0))^{1/2} = \frac{\gamma - 1}{V} c_p T_L \sqrt{\frac{2\rho_a}{A^2 \left(1 + \frac{\lambda L}{4r_h} \frac{T_p}{T_a}\right)}} t_{llen}, \quad (18)$$

donde  $T_L = T_p - (T_p - T_a) \exp[-\lambda L/(8r_h)]$  es la temperatura del fluido a la salida del conducto calculada a partir de la ecuación (12).

**Problema 7.3**

Una instalación neumática consta de un émbolo de masa  $M$  que puede deslizarse sin rozamiento por una cámara de sección  $A_d$ . Como se muestra en la figura, para hacer llegar el gas a la cámara se dispone de un compresor que tomando el gas de un depósito de grandes dimensiones mediante un primer conducto de longitud  $L_1$ , sección  $A_1$  y radio hidráulico  $r_{h1}$  lo impulsa hasta la cámara por un segundo conducto sección  $A_2$ , radio hidráulico  $r_{h2}$  y de longitud también  $L_2$ . Por seguridad tanto el depósito de grandes dimensiones, que aloja el gas a presión  $p_o$  y  $T_o$ , como el primer conducto están enterrados por lo que pueden suponerse aislados térmicamente. Por contra, el segundo conducto, en aras de una mayor flexibilidad de la instalación, se encuentra situado a cielo abierto recibiendo, a causa de la radiación del sol, un calor por unidad de área y tiempo constante y de valor  $q_o$ .

1. Teniendo en cuenta que la cámara se encuentra aislada térmicamente, escribir las ecuaciones diferenciales que rigen la evolución temporal de la posición del émbolo como las condiciones del gas, presión  $p_d$  y densidad  $\rho_d$ , en el interior de la cámara.
2. Suponiendo que las longitudes de los conductos son tales que  $\lambda L_1/r_{h1} \gg 1$  y  $\lambda L_2/r_{h2} \gg 1$ ; y que las variaciones de la presión en el conducto son del orden de la propia presión,  $\Delta p/p \sim 1$ , calcular las condiciones del gas a la entrada,  $p_1$ , y salida,  $p_2$ , del compresor así como la potencia consumida por el compresor supuesto ideal en función de gasto circulante  $G$  y  $p_d(t)$ .
3. El el supuesto que el émbolo ascienda con velocidad constante  $U$  desde una posición inicial  $H_i$ . Calcular el gasto necesario  $G$  y la potencia consumida  $W_c$  para establecer este régimen.

Resolución:Apartado 1.-

Las condiciones del gas en el seno de la cámara vienen determinadas a partir de los balances integrales en la cámara. Del balance de masa se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(A_d H \rho_d)}{dt} = G \quad (1)$$

siendo  $G$  el gasto de gas que entra en la cámara. Por otra parte, del balance de energía total se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho e d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho \left( h + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_c) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= - \int_{\Sigma_c(t)} p \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \Downarrow \\ \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(p_d A_d H)}{dt} &= G h_{oe} - p_d \frac{dH}{dt} A_d \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $h_{oe}$  es la entalpía de remanso del gas a la entrada de la cámara (salida del segundo conducto) y se ha despreciado la energía cinética del gas frente a la interna. La anterior ecuación se muestra como el aumento de energía interna en la cámara es consecuencia del aporte de energía debido al gas que llega al conducto menos el trabajo empleado en alzar el émbolo realizado por las fuerzas de presión.

Por otra parte, el movimiento del émbolo viene dado por,

$$M\ddot{H} = (p_d - p_a)A_d - Mg. \quad (3)$$

siendo  $\ddot{H} = d^2 H / dt^2$ .

Conocida la masa de gas que por unidad de tiempo se incorpora a la cámara  $G$  así como las condiciones en las que se incorpora, en particular su entalpía de remanso  $h_{oe}$ , el sistema de ecuaciones diferenciales (1)-(3) permiten establecer, conocidas desde luego sus condiciones iniciales, la evolución temporal de las incógnitas dadas por la altura  $H(t)$  y la presión y densidad del gas en el seno de la cámara,  $p_d(t)$  y  $\rho_d(t)$ , respectivamente.

### Apartado 2.-

En el caso de que los conductos tengan longitudes tales como para poder considerar que las fuerzas de fricción son dominantes frente a la inercia en los conductos,  $\lambda L_1 / r_{h1} \gg 1$  y  $\lambda L_2 / r_{h2} \gg 1$ , el movimiento del gas en los conductos es a bajos números de Mach,  $M^2 \ll 1$ . En efecto,

$$\frac{\Delta p}{L} \sim \frac{\lambda \rho v^2}{r_h} \quad \text{que operando resulta en;} \quad \frac{\Delta p}{\rho a^2} \sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\lambda L}{D} \frac{v^2}{a^2} \sim \frac{\lambda L}{r_h} M^2; \quad (4)$$

dado que las variaciones relativas de la presión son a lo sumo de orden unidad,  $\Delta p / p \sim 1$ , se concluye de la relación anterior que el número de Mach es efectivamente mucho menor que la unidad.

Una de las simplificaciones que surgen en el caso de movimiento caracterizados por  $M^2 \ll 1$  es que la entalpía de remanso,  $h_o = h + v^2/2$ , es en la práctica, igual a la entalpía  $h$  por ser  $h/v^2 \sim 1/M^2 \ll 1$ .

En el conducto aislado térmicamente la entalpía  $h$ , y la temperatura  $T$ , se conservan a lo largo de él y sus valores son los correspondientes a las condiciones del depósito infinito,  $T(s) = T_o$ . La distribución de presiones se obtiene de la ecuación

$$p \frac{dp}{ds} = - \frac{G^2 R_g T_o}{A_1^2} \frac{\lambda}{8 r_{1h}} \quad (5)$$

que tras integrar entre un extremo y el otro del conducto da lugar a,

$$p_1^2 = p_o^2 - \frac{G^2 R_g T_o}{A_1^2} \frac{\lambda L_1}{4 r_{h1}}, \quad (6)$$

en cuya derivación se ha igualado la presión a la entrada del conducto con la presión de remanso en el depósito,  $p(0) = p_o$  despreciando la caída de presiones en la entrada por ser ésta del orden de  $\rho v^2 \ll \lambda L_1 / r_{h1} \rho v^2$ .

En el segundo conducto el aporte de calor por unidad de tiempo y de área es constante e igual a  $q_o$ , aporte de calor que causa un aumento de la temperatura lineal con la longitud  $s$  del conducto. En efecto de la ecuación de balance de energía en la rebanada se obtiene que

$$\rho v \frac{dT}{ds} = \frac{q_o}{r_{h2}} \Rightarrow \int_{T_o}^{T(s)} dT = \frac{A_2 q_o}{G r_{h2}} \int_0^s ds \Rightarrow T(s) = T_{sc} + \frac{A_2 q_o}{G r_{h2}} s = T_o \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \frac{A_2 q_o}{G r_{h2}} s \quad (7)$$

donde la temperatura a la salida del compresor  $T_{sc}$  se calcula en función de la temperatura y presión del gas a la entrada del mismo,  $T_o$  y  $p_1$ , y de su presión a la salida,  $p_2$ , mediante la relación isentrópica. En el extremo del conducto el gas se ha situado, por tanto, a la temperatura  $T(L) = T_{sc} + A_2 q_o L_2 / (G r_{h2})$ .

La distribución de presiones en el conducto viene gobernada entonces por la ecuación diferencial

$$\frac{d(p^2/2)}{ds} = \frac{G^2 R_g}{A_2^2} \left( \frac{dT}{ds} - \frac{\lambda T}{8 r_{h2}} \right). \quad (8)$$

Substituyendo (7) en la ecuación diferencial anterior (8), integrado a lo largo de todo el conducto y teniendo en cuenta que  $\lambda L_2 / r_{h2} \gg 1$ , se halla que

$$p_2^2 = p_d^2 + \frac{\lambda L_2}{4 r_{h2}} \left( \frac{q_o L_2}{2 r_{h2}} + \frac{T_{sc} G}{A_2} \right) \frac{G R_g}{A_2} = p_d^2 + \frac{\lambda L_2}{4 r_{h2}} \left( \frac{q_o L_2}{2 r_{h2}} + T_o \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \frac{G}{A_2} \right) \frac{G R_g}{A_2}, \quad (9)$$

cuya resolución proporciona  $p_2$  en función de  $G$  y  $p_d(t)$ . Obsérvese que cuanto mayor es el calor aportado por conducción al gas se requiere de una mayor diferencia de presiones para mantener un mismo gasto  $G$ .

Por último, la potencia que consume el compresor supuesto rendimiento unidad (que corresponde a una transformación isentrópica en el seno del compresor) es

$$W_c = G c_p T_o \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]. \quad (10)$$

### Apartado 3.-

Si el émbolo asciende con velocidad constante  $U$  desde una posición inicial  $H_i$  su posición en un instante genérico es  $H(t) = H_i + U t$ .

Como se desprende de (3) un movimiento no acelerado implica que la presión en la cámara debe ser constante y de valor

$$p_d = p_a + \frac{M g}{A_d}. \quad (11)$$

La ecuación (2) combinada con (7), particularizada en  $s = L_2$ , y (11) permite calcular el gasto requerido para alzar el émbolo con velocidad constante

$$\frac{p_d A_d U}{\gamma - 1} = G c_p T(L) - p_d U A_d \Rightarrow G = \frac{1}{c_p T_o} \left[ \frac{\gamma U (p_a A_d - M g)}{\gamma - 1} - \frac{q_o A_2 L_2}{r_{h2}} \right]. \quad (12)$$

La anterior ecuación muestra que, aun sin aportar masa a la cámara  $G = 0$ , es posible aumentar la presión en el interior de la cámara y consecuentemente conseguir la subida del émbolo aportando una cantidad apropiada de calor al sistema; en particular añadiendo

$$q_o = \frac{r_{h2}}{q_o A_2 L_2} \frac{\gamma U (p_a A_d - M g)}{\gamma - 1} \quad (13)$$

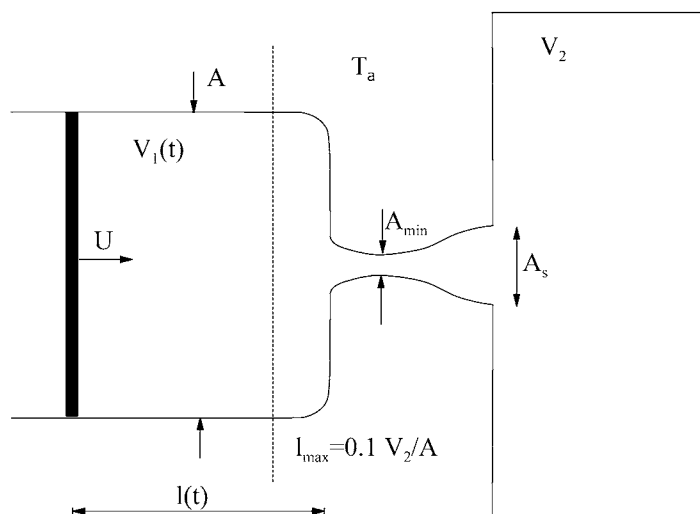
para valores mayores del calor aportado  $q_o$ , la presión en la cámara  $p_d$  será lo suficientemente alta como para subir aceleradamente el émbolo  $\ddot{H} \neq 0$ .

La potencia consumida se calcula de la combinación de las expresiones, (6), (9) y (10) donde se ha debido de sustituir el gasto  $G$  dado por la expresión (12).

**Problema 7.4**

Un depósito cilíndrico de sección  $A$  y volumen variable está conectado mediante una tobera convergente-divergente a otro depósito de volumen constante  $V_2$  como se indica en la figura. El área de salida de la tobera es  $A_s = 1,59A_{min}$ , siendo  $A_{min}$  su área mínima ( $A_s \ll A \ll V_2^{2/3}$ ). El aire contenido en el depósito 1 es forzado a través de la tobera por el movimiento, con velocidad constante, de un émbolo de masa despreciable que desliza sin rozamiento por el interior del depósito 1. Los depósitos están aislados térmicamente y la presión y densidad del aire que contienen en el instante inicial son respectivamente  $p_a$  y  $\rho_a$ . El volumen inicial del depósito 1 es  $V_1(0) = V_2$  y el proceso termina cuando el volumen  $V_1$  es la décima parte de su volumen inicial, se pide:

1. Ecuaciones que determinan la evolución temporal del gas en los depósitos desde la puesta en movimiento del émbolo. Para simplificar los cálculos, supóngase que la velocidad del pistón es pequeña comparada con la velocidad del sonido del gas  $U \ll a_a$ .
2. Integrar numéricamente el sistema de ecuaciones anteriores y determine la velocidad máxima del émbolo  $U_{max}$  para que no se alcancen condiciones sónicas en la garganta de la tobera.
3. Para valores del parámetro  $A_{min}a_a/(AU)$  suficientemente pequeños como para asegurar de que en algún instante del proceso la tobera está adaptada, calcular los instantes para los que 1) se bloquea la tobera, 2) se forma una onda de choque normal a la salida de la tobera, y 3) se tiene tobera adaptada. Calcular también el gasto de aire a través de la tobera como función del tiempo.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Si la velocidad del pistón  $U$  es pequeña frente a la velocidad del sonido del gas  $a_1$  en el depósito 1, la energía cinética por unidad de masa del gas, que es del orden de  $U^2$  es pequeña frente a la térmica  $e_1 \sim c_v T_1 \sim c_v a_1^2 / (\gamma R_g) \sim a_1^2$ . Del mismo modo, las variaciones espaciales de presión en el depósito 1, que son del orden de  $\rho_1 U^2$ , son pequeñas frente a la propia presión  $[\rho_1 U^2 / p_1 \sim U^2 / a_1^2 \ll 1]$ . En el depósito 1, por tanto, se puede despreciar el movimiento y las condiciones del gas en él se pueden determinar a partir de las de un depósito donde la masa del gas contenida en él y el volumen que ocupa varían con el tiempo según las leyes

de conservación de masa y energía

$$\frac{d(\rho_1 V_1)}{dt} = -G, \quad y \quad \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(p_1 V_1)}{dt} = -G h_1 + p_1 A U, \quad (1)$$

donde  $h_1 = \gamma p_1 / [(\gamma - 1) \rho_1]$  es la entalpía de remanso del gas en el depósito 1. Obsérvese que el vaciado del depósito es isentrópico; en efecto, si se combinan apropiadamente las ecuaciones de (1) se obtiene

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(p_1 V_1)}{dt} = -p_1 \frac{dV_1}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{d(\rho_1 V_1)}{dt} \Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}, \quad (2)$$

donde la constante de integración se ha calculado a partir de las condiciones iniciales del gas en el depósito. Como se ve, en lugar de las dos ecuaciones de (1) puede utilizarse una de ellas, por ejemplo la segunda de (1) y la condición de las isentrópicas.

Además es necesario especificar el volumen del depósito 1 como función del tiempo

$$V_1 = V_2 - U A t \quad (3)$$

y el gasto que circula por la tobera. Este gasto posee expresiones distintas dependiendo de si se alcanzan o no condiciones sónicas en la garganta de la tobera.<sup>1</sup> En el primer caso, el gasto es el crítico y viene dado por la expresión ( $\gamma = 1,4$ )

$$G(t) = 0,578 \rho_1(t) a_1(t) A_{min} = 0,578 \rho_1(t) a_a \left( \frac{p_1(t)}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} A_{min}, \quad (4)$$

mientras que el segundo, que corresponde a situaciones en las que el gas se mueve subsónicamente en la tobera, se tiene

$$G(t) = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \rho_1(t) a_a A_s \left[ \frac{p_1(t)}{p_a} \right]^{(\gamma-1)/2\gamma} \left[ \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \right]^{(\gamma+1)/2\gamma} \sqrt{\left[ \frac{p_2(t)}{p_1(t)} \right]^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}. \quad (5)$$

Obsérvese que las expresiones del gasto contienen la presión  $p_2$  como incógnita adicional y, por lo tanto, el sistema debe completarse con las ecuaciones de evolución del gas en el depósito 2. La ecuación de conservación de la masa se escribe

$$V_2 \frac{d\rho_2}{dt} = G \Rightarrow \rho_1(t) V_1(t) + \rho_2(t) V_2 = 2\rho_a V_2, \quad (6)$$

donde para obtener la última de las ecuaciones en (6) se ha hecho uso de las ecuaciones de conservación de la masa en ambos depósitos. Esta última ecuación muestra que la suma de las masas de gas en ambos depósitos no cambia con el tiempo (se ha despreciado la masa de gas contenida en la tobera). Por otra parte, la ecuación de conservación de la energía en el depósito 2 es

$$V_2 \frac{dp_2(t)}{dt} = \gamma G \frac{p_1}{\rho_1}. \quad (7)$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones formado por las dos últimas ecuaciones en (1) y (2), (3), la última de las ecuaciones en (6) y (7) junto con una u otra de las expresiones para el gasto [ecuaciones (4) o (5)]. Para simplificar las ecuaciones conviene escribirlas en variables adimensionales definidas como

$$y_1 = \frac{p_1}{p_a}, \quad y_2 = \frac{p_2}{p_a}, \quad z_1 = \frac{\rho_1}{\rho_a}, \quad z_2 = \frac{\rho_2}{\rho_a}, \quad y \quad \tau = \frac{A U t}{V_2}; \quad (8)$$

en las nuevas variables, las ecuaciones del problema se reducen a

$$y_1 = z_1^\gamma, \quad (9)$$

<sup>1</sup> El flujo en la tobera es casi estacionario ya que su volumen es muy pequeño frente al de los depósitos y el fluido no percibe cambios en las condiciones de los depósitos mientras atraviesa la tobera.

$$(1 - \tau) \frac{dy_1}{d\tau} = \gamma y_1 \left[ 1 - \alpha f_1 y_1^{(\gamma-1)/(2\gamma)} \right], \quad (10)$$

$$(1 - \tau) z_1 + z_2 = 1, \quad (11)$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \gamma \alpha f_1 y_1^{(3\gamma-1)/(2\gamma)}, \quad (12)$$

donde

$$f_1 = \begin{cases} 0,578 & \text{flujo sónico en la garganta} \\ \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{A_s}{A_{min}}} \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \sqrt{\left( \frac{y_2}{y_1} \right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1} & \text{flujo subsónico en la garganta} \end{cases} \quad (13)$$

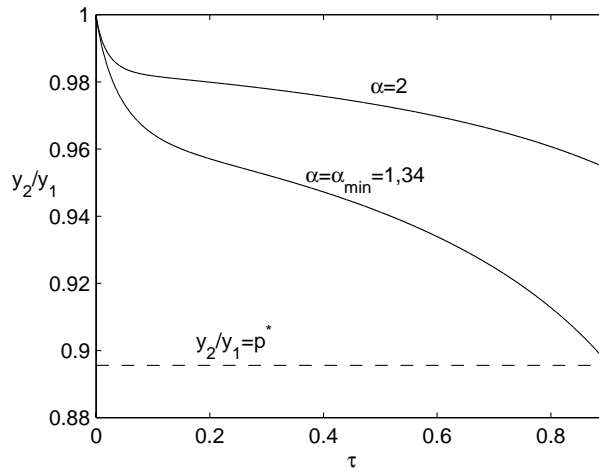
y

$$\alpha = \frac{A_{min} a_a}{AU}. \quad (14)$$

El sistema anterior de dos ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales y dos ecuaciones algébricas no posee solución analítica pero su integración numérica no presenta problemas y puede realizarse con la ayuda de cualquier programa de cálculo simbólico.

### Apartado 2.-

La relación de presiones para que la corriente en la garganta de la tobera sea sónica se determina a partir de la rama subsónica de la expresión que relaciona el número de Mach  $M$  con la relación de áreas  $A^*/A$ , donde  $A^*$  es el área crítica. Como es sabido, si  $M = 1$  en la garganta el área crítica es el área de la garganta y  $A^* = A_{min}$  y el valor  $A_s/A_{min} = 1,59$  determina el número de Mach a la salida y la relación  $p_1/p_2 = 0,895$  que deben satisfacer las presiones del gas en los depósitos para que se alcancen condiciones sónicas. Para determinar  $U_{max}$  se integraran numéricamente las ecuaciones (10) y (12) para distintos valores de  $\alpha$  ([esto es, para valores diferentes de  $(U_{max})$  hasta obtener el valor de  $\alpha = \alpha_{min}$  para el cual el cociente de presiones verifique la expresión  $y_1(\tau_f)/y_2(\tau_f) = 0,895$ . Obsérvese que el tiempo adimensional para el que termina el proceso es  $\tau_f = AU t_f / V_2 = 0,9$  ya que el instante final  $t_f = 0,9 V_2 / (AU)$  ocurre cuando el volumen del depósito 1 es la décima parte de su volumen inicial. En la figura se muestra la relación de presiones en ambos depósitos como función del tiempo adimensional para dos valores de  $\alpha$ . Como se observa en la figura la relación de presiones aumenta al disminuir  $\alpha$  y para  $\alpha = 1,34$  se obtiene, al final del proceso  $\tau_f = 0,9$ , la relación de presiones para la que la corriente alcanza condiciones sónicas en la garganta.



**Apartado 3.-**

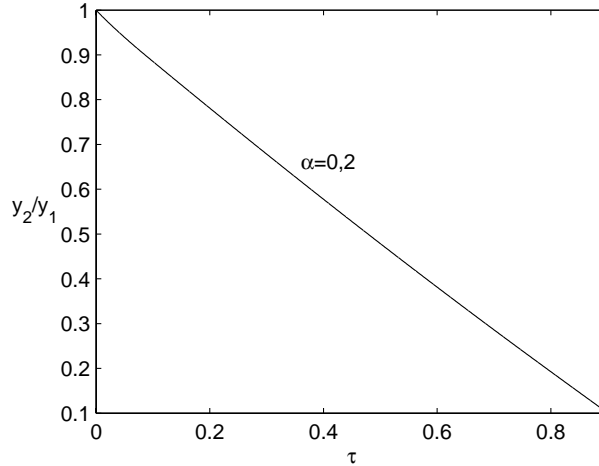
El régimen de tobera adaptada se determina a partir de la rama supersónica de la relación de áreas de la tobera como función del número de Mach (o la presión); para el caso particular de una tobera como la de este estudio en la que la relación de áreas es  $A_s/A_{min} = A_s/A^* = 1,59$ , la condición de tobera adaptada se obtiene cuando la relación entre las presiones de los dos depósitos vale

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{y_2}{y_1} = 0,227. \quad (15)$$

Si se escoge un valor de  $\alpha = 0,2$  suficientemente pequeño ( $U$  suficientemente grande) para garantizar que en algún instante del proceso se alcanza la condición

$$\frac{y_2(\tau_f)}{y_1(\tau_f)} \leq 0,227, \quad (16)$$

(tobera adaptada), la integración numérica proporciona los resultados que se muestran en la figura

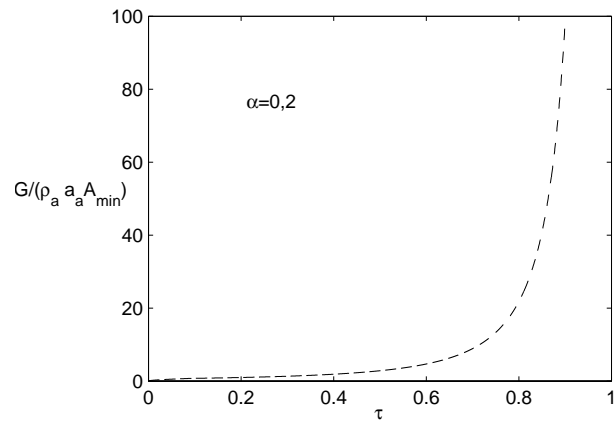


en el que el régimen de tobera adaptada se obtiene cuando  $y_2(\tau_a)/y_1(\tau_a) = 0,227$  que corresponde a  $\tau_a = 0,76$  (véase la figura).

Siguiendo el mismo procedimiento con la rama supersónica de la relación de áreas, es fácil ver que existirá una onda de choque a la salida de la tobera cuando la relación de presiones sea  $y_2(\tau_o)/y_1(\tau_o) = 0,59$ , lo que corresponde a un tiempo adimensional  $\tau_o = 0,38$ , mientras que la corriente en la garganta se hará sónica (bloqueo sónico) cuando la relación de presiones valga  $y_2(\tau_b)/y_1(\tau_b) = 0,895$ , que se alcanza cuando el tiempo adimensional es 0,09.

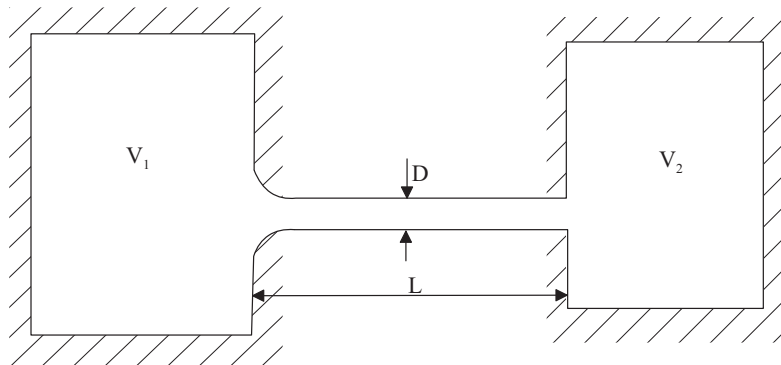
Finalmente, el gasto adimensional definido como  $G/(\rho_a a_a A_{min})$  calculado numéricamente se representa en la figura. Obsérvese que el gasto crítico varía con el tiempo porque lo hacen las condiciones de remanso en el depósito 1.





**Problema 7.5**

Dos depósitos de volúmenes iguales, aislados térmicamente, que contienen inicialmente aire a temperatura  $T_1(0)$  y  $T_2(0)$  y presión  $p_1(0)$  y  $p_2(0)$  respectivamente ( $p_2(0) < p_1(0)$ ), están unidos por un conducto de longitud  $L$  y diámetro  $D$  de modo que la entrada al conducto desde el depósito 1 es una tobera convergente de área mínima igual al área del conducto. Un diafragma, situado a la entrada del conducto, impide el paso del aire a través del mismo, hasta un cierto instante en que se rompe y a partir del que el aire comienza a fluir a través del conducto en un movimiento turbulento a números de Reynolds lo suficientemente grandes como para que la caída de presión a través del conducto sea independiente de la viscosidad (factor de fricción independiente constante e independiente del número de Reynolds).



1. Ecuaciones que describen la evolución temporal de la presión  $p_1$  y  $p_2$  y densidad  $\rho_1$  y  $\rho_2$  en ambos volúmenes.
2. Criterios para que el movimiento turbulento medio del gas en el conducto sea casi estacionario.
3. Si el tubo está también aislado térmicamente y si la relación de presiones inicial entre ambos depósitos es  $p_2(0)/p_1(0) = 0,1$ , calcular:
  - a) Ecuaciones que describen el movimiento medio del gas en el conducto.
  - b) Evolución temporal de las presiones,  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$ , y densidades,  $\rho_1(t)$  y  $\rho_2(t)$ , en los depósitos.
  - c) Hacer aplicación numérica a los casos  $\lambda L/D = 5$  y  $\lambda L/D = 100$ .
  - d) Comparar los resultados anteriores para el caso  $\lambda L/D$  con los obtenidos mediante la aproximación de fricción dominante.
4. En el caso de que la fricción en el conducto sea despreciable y exista adición de calor:
  - a) Escribir las ecuaciones que modelan el comportamiento del gas a lo largo del conducto.
  - b) Calcular la evolución del gas en los depósitos en el supuesto de que el calor recibido por la unidad de masa de gas desde la entrada del conducto hasta una sección  $x$  sea  $Q(x) = Q_o[1 - e^{-\lambda x/(2D)}]$ .
  - c) Haciendo uso de la analogía de Reynolds, calcular la temperatura de la pared para que el calor por unidad de masa sea el especificado.
  - d) Para un cierto instante representar la variación del número de Mach, de la presión y del calor añadido a lo largo del conducto.

Resolución:Apartado 1.-

Las ecuaciones que describen la evolución temporal de la presión y densidad en los depósitos se obtienen de forzar el cumplimiento de los balances de masa y energía en el volumen de control delimitado por los depósitos. Así, del balance de masa se obtiene la evolución temporal de las densidades en los depósitos

$$\frac{d(V\rho_1)}{dt} = -G_1 \quad \text{y} \quad \frac{d(V\rho_2)}{dt} = G_2 \quad (1)$$

que muestra que la densidad disminuye a lo largo del tiempo en el depósito 1 por extraer un gasto  $G_1$  y crece en el depósito 2 por el gasto  $G_2$  que se insufla. Del balance de energía se obtiene

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{d(Vp_1)}{dt} = -G_1 h_1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\gamma-1} \frac{d(Vp_2)}{dt} = G_2 h_{oe} \quad (2)$$

donde  $h_1 = \gamma/(\gamma-1) p_1/\rho_1$  es la entalpía en el interior del depósito 1 y  $h_{oe}$  es la entalpía de remanso del gas a la entrada del depósito. Las 4 ecuaciones diferenciales dadas por (1) y (2) a las que se añaden condiciones iniciales para la presión y densidad en ambos depósitos;  $p_1(0)$ ,  $\rho_1(0)$ ,  $p_2(0)$  y  $\rho_2(0)$ ; no son suficientes para resolver las 7 incógnitas presentes en las ecuaciones;  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p_2$ ,  $\rho_2$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  y  $h_{oe}$  reflejando que se requiere analizar el conducto para cerrar por completo el problema, es decir, se requiere añadir 3 ecuaciones dadas por la ecuación de continuidad (7.10), la de cantidad de movimiento (7.11) y la de energía (7.12) del gas en el conducto. En efecto, si se asume que el conducto de conexión es rígido y se considera que el movimiento del gas a través de éste es estacionario (se justifica en el siguiente punto) entonces  $G_1 = G_2 = G$  y serán 2 las ecuaciones que se deberán añadir para establecer  $G$  y  $h_{oe}$ .

Obsérvese que las dos ecuaciones de evolución del depósito 2 se pueden sustituir por otras dos que se obtienen de sumar las ecuaciones de conservación de la masa y energía de ambos depósitos y recordar que su volumen es el mismo

$$\rho_2(t) + \rho_1(t) = \rho_1(0) + \rho_2(0) \quad \text{y} \quad p_2(t) + p_1(t) = p_1(0) + p_2(0) + \int_0^t G(h_{oe} - h_1) \frac{V}{\gamma-1} dt, \quad (3)$$

que muestran que la masa y la energía interna del gas (si no se añade energía al gas en su paso por el conducto) contenido en ambos depósitos son independientes del tiempo; obsérvese que se han despreciado la masa y la energía del gas contenido en el conducto por ser el volumen de éste muy pequeño frente al volumen de los depósitos. Por otra parte, una de las dos ecuaciones de evolución del depósito 1 se puede sustituir por la ecuación de las isentrópicas, que resulta de dividir entre sí las dos ecuaciones de evolución del depósito 1

$$h_1 d\rho_1 = \frac{1}{\gamma-1} dp_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} d\rho_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{dp_1}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = cte = \frac{p_1(0)}{\rho_1^\gamma(0)}. \quad (4)$$

Adimensionalizando con las condiciones iniciales del gas en depósito 1 surgen las variables

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{p_1}{p_1(0)}, \quad z_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1(0)}, \quad y_2 = \frac{p_2}{p_1(0)}, \quad z_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1(0)}, \\ \eta_{oe} &= \frac{h_{oe}}{h_1(0)}, \quad g = \frac{G}{\rho_1(0)a_1(0)A} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{Aa_1(0)}{V_1} t \end{aligned} \quad (5)$$

en términos de las cuales las ecuaciones que describen la evolución del gas en el depósito 1 resultan ser

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\gamma g y_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{y} \quad \frac{y_1}{z_1^\gamma} = 1 \quad (6)$$

mientras que para el depósito 2 son

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \gamma g \eta_{oe} \quad \text{o bien,} \quad y_2 = y_2(0) + (1 - y_1) + \int_0^\tau \gamma g \left( \eta_{oe} - \frac{y_1}{z_1} \right) d\tau \quad \text{y} \quad z_2(t) = z_2(0) + (1 - z_1). \quad (7)$$

**Apartado 2.-**

El movimiento turbulento medio en el conducto será casi estacionario siempre que las variaciones temporales  $\partial/\partial t$  sean pequeñas frente a las convectivas  $U\partial/\partial x$ , lo que requiere que el volumen del conducto  $D^2L$  sea mucho menor que el volumen  $V$  de los depósitos; en efecto,  $1/t_o \sim D^2U/V \ll U/L$  lo que conduce a  $V/(D^2L) \gg 1$ .

**Apartado 3.-****Caso de conducto aislado térmicamente**

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento turbulento y casi estacionario de un gas en un conducto de sección constante son

$$\rho v = G(t)/A, \quad v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \quad y \quad h_o(t) = h + \frac{v^2}{2}; \quad (8)$$

donde  $A = \pi D^2/4$  es el área del conducto y tanto el gasto como la entalpía de remanso son funciones del tiempo pero no varían a lo largo del conducto. Si se introduce el número de Mach  $M = v/(\gamma p/\rho)^{1/2}$ , las ecuaciones anteriores pueden combinarse apropiadamente para obtener la ecuación que proporciona la variación del número de Mach a lo largo del conducto para el caso de sección constante y sin adición de calor a través de las paredes

$$\frac{1}{M^2} \frac{dM^2}{dx} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 - M^2} \left[ \frac{\gamma \lambda M^2}{2D} + \frac{1 + \gamma M^2}{2} \right]; \quad (9)$$

obsérvese que como el numerador de esta ecuación es siempre mayor que cero, el numerador de la misma no puede anularse si se buscan soluciones que posean relevancia desde el punto de vista de la física; esto quiere decir que si la corriente a la entrada del conducto es subsónica, como corresponde al caso en que la entrada es una tobera convergente, la corriente no puede hacerse sónica en ningún punto del conducto exceptuando quizás la salida del mismo. Obsérvese también que esta ecuación, al ser de variables separadas, puede integrarse una vez para obtener

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2(0)} \frac{M^2(0)}{M^2} \right) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{M^2(0)} - \frac{1}{M^2} \right) = \frac{\lambda x}{D}, \quad (10)$$

donde se ha impuesto como condición de contorno el número de Mach a la entrada  $M(0)$ , relacionado con el gasto que circula por el conducto, que es desconocido. Una vez que se conoce el número de Mach a lo largo del conducto, la presión como función del número de Mach se obtienen a partir de la primera y de la última ecuación de (8)

$$\frac{p(0)}{p} = \frac{\rho(0)a^2(0)}{\rho a^2} = \frac{va^2(0)}{v(0)a^2} = \frac{M}{M(0)} \sqrt{\frac{T(0)}{T(L)}} = \{h_o = cte\} = \frac{M}{M(0)} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2(0)} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

siendo  $p(0)$  la presión a la entrada del conducto. La anterior ecuación puede escribirse en función de las condiciones del gas en el depósito 1 teniendo en cuenta que el movimiento del gas por la tobera es isentrópico

$$\frac{p_1}{p(x)} = \frac{y_1}{(p(x)/p_1(0))} = \frac{M}{M(0)} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(0) \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2(0)} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

El gasto circulante por el conducto  $G$ , conocido  $M(0)$ , será entonces

$$G = \rho(0)v(0)A = \rho_1 a_1 A M(0) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(0) \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad (13)$$

que en términos de las variables adimensionales (5) se escribe como

$$g = K[M(0)] y_1^{(\gamma+1)/2\gamma}, \quad (14)$$

siendo

$$K[M(0)] = M(0) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) \right)^{(\gamma+1)/(2(1-\gamma))}, \quad (15)$$

Las ecuaciones anteriores permiten relacionar el gasto,  $g$ , con el número de Mach a la entrada,  $M(0)$ , y las condiciones de remanso del depósito 1,  $y_1$ .

La ecuación (10) particularizada a la salida proporciona una relación entre los números de Mach a la entrada y salida del conducto y el valor del parámetro de fricción  $\lambda L/D$

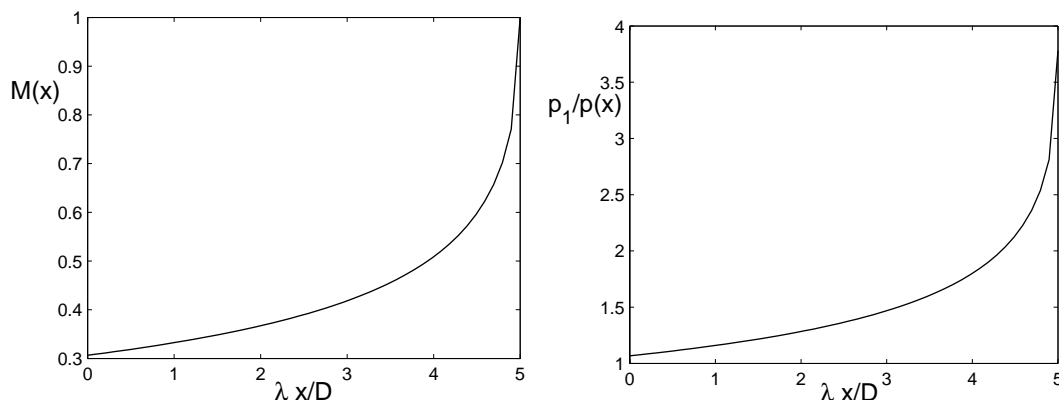
$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left( \frac{2 + (\gamma-1)M^2(L)}{2 + (\gamma-1)M^2(0)} \frac{M^2(0)}{M^2(L)} \right) + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{1}{M^2(0)} - \frac{1}{M^2(L)} \right) = \frac{\lambda L}{D}, \quad (16)$$

mientras que (12) particularizada a la salida proporciona la caída de presiones desde el depósito 1 hasta el extremo de salida del conducto

$$\frac{y_1}{[p(L)/p_1(0)]} = \frac{M(L)}{M(0)} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left[ \frac{2 + (\gamma-1)M^2(L)}{2 + (\gamma-1)M^2(0)} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Para conocer el movimiento del gas del conducto es necesario imponer condiciones de contorno a la salida. Como es sabido, dos condiciones de contorno son posibles: 1) el flujo es subsónico en todo el conducto, en cuyo caso se debe imponer que la presión del gas en la sección de salida sea igual a la presión del depósito de descarga,  $p(L)/p_1(0) = y_2$ , o bien; 2) la corriente alcanza condiciones sónicas en la sección de salida en cuyo caso se impondrá la condición  $M(L) = 1$  y el flujo en el conducto se hace independiente de la presión del depósito de descarga. Esta última situación ocurre cuando la relación de presiones entre los depósitos está por encima de un cierto valor umbral  $U$ ,  $y_1/y_2 > U$ .  $U$  depende del parámetro adimensional  $\lambda L/D$  y se calcula de la ecuación algébrica (16) haciendo  $M(L) = 1$ ; una vez hallado el valor  $M(0)$  se sustituye éste en (17) para hallar  $U$ . En efecto, para  $\lambda L/D = 5$  se obtiene  $M(0) = 0,3$  que se corresponde a  $y_1/y_2 = U = 3,78$ .

En la figura se muestran el número de Mach  $M(x)$  [ecuación (10)] y la relación de presiones  $p(x)/p_1$  [ecuación (12)] a lo largo del conducto para  $\lambda L/D = 5$  y una relación de presiones  $y_1/y_2 > U$ ; obsérvese que en este caso se alcanzan condiciones sónicas a la salida del conducto.



Obsérvese que el gasto que circula por el conducto dependerá del régimen establecido en él. Si el conducto está bloqueado (se alcanzan condiciones sónicas en  $x = L$ ) el caudal será independiente de la presión en el segundo depósito y (14) es por tanto

$$g = K_o y_1^{(\gamma+1)/2\gamma}, \quad (18)$$

siendo  $K_o = K[M(0) = 0,3] = 0,29$ . Por contra, si el flujo es subsónico el gasto, o lo que es equivalente  $M(0)$ , depende de la presión del depósito 2.

Si tenemos en cuenta que inicialmente la relación de presiones es  $y_1(0)/y_2(0) = 10 > U$  el conducto está bloqueado desde el inicio hasta un cierto instante  $\tau_1$  para el cual  $y_1(\tau_1)/y_2(\tau_1) = U = 3,78$ . A partir de dicho instante y hasta el final de proceso de trasvase, cuando  $y_1/y_2 = 1$ , (16) y (17) forman una pareja de ecuaciones algebraicas para determinar  $M(0) (\equiv G)$  y  $M(L)$  en función de  $y_1/y_2$  y  $\lambda L/D$ .

Para tiempos  $\tau < \tau_1$  la evolución de la presión en los depósitos es resoluble analíticamente. En efecto, combinando (18) con (6) se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\gamma K_o y_1^{(3\gamma-1)/2\gamma}, \quad (19)$$

que está sujeta a la condición inicial  $y_1(0) = 1$ , y cuya integración da lugar a

$$y_1 = \left(1 + K_o \frac{(\gamma-1)\tau}{2}\right)^{2\gamma/(1-\gamma)}. \quad (20)$$

Si se retiene que la presión en el depósito 2, dada por la ecuación (7), es para un conducto aislado

$$y_1(\tau) + y_2(\tau) = y_1(0) + y_2(0) = 1,1; \quad (21)$$

entonces el instante de desbloqueo  $\tau_1$  se calcula resolviendo la ecuación

$$\frac{y_1(\tau_1)}{1,1 + y_1(\tau_1)} = 3,78 \Rightarrow \tau_1 = 0,34 \quad (22)$$

donde  $y_1$  viene dada por (20).

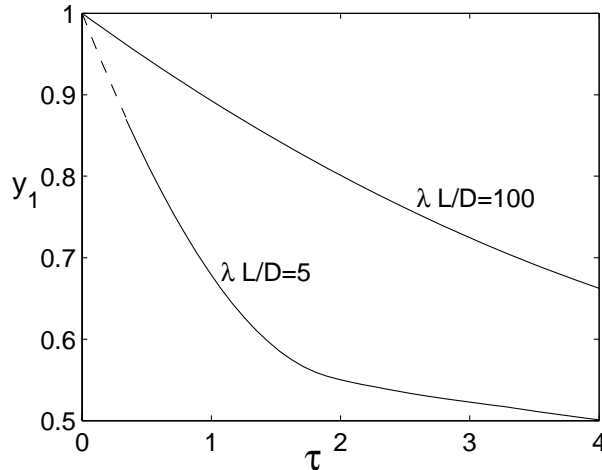
Para tiempos tales que  $\tau > \tau_1$  el flujo a la salida se hace subsónico y el caudal, que hasta entonces dependía sólo de las condiciones en el depósito 1, pasa a depender también del valor de la presión en el depósito 2. La evolución de la presión adimensional en el depósito  $y_1$  requiere entonces la resolución de un sistema de ecuaciones formado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\gamma K[M(0)] y_1^{(3\gamma-1)/(2\gamma)} \quad (23)$$

junto con la ecuación (16) y la ecuación

$$\left(\frac{y_2(0) + 1}{y_1} - 1\right) \frac{M(L)}{M(0)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2(L)}{2 + (\gamma-1)M^2(0)}\right]^{1/2} - 1 = 0, \quad (24)$$

que se obtiene a partir de las ecuaciones (21) y (17). Como condición inicial para la integración numérica se impondrá la presión en el depósito 1  $y_1(\tau_1 = 0,34) = 0,87$  en el instante a partir del que el flujo a la salida del conducto se hace subsónico. Resultados numéricos de la evolución temporal de la presión en el depósito 1 se dan en la figura adjunta.



Es fácil comprobar que si para el caso en que  $\lambda L/D = 100$  se procediese de la misma forma que en el caso anterior se obtendría que el flujo deja de ser sónico a la salida del conducto cuando la relación de presiones en los dos depósitos es superior al valor umbral  $U = 13,33$  que es mayor que la relación de presiones en el instante inicial  $y_1(0)/y_2(0) = 10$ . La fricción es, en este caso, tan grande que para la relación de presiones dada el flujo es subsónico en todo el conducto desde el instante inicial y la evolución temporal de la presión debe determinarse numéricamente como se ha descrito anteriormente. En la figura se muestra la evolución temporal de la presión  $y_1$  para  $\lambda L/D = 5$  y  $\lambda L/D = 100$ .

Si la fricción es dominante en el conducto el número de Mach es mucho menor que la unidad; en efecto, estimando órdenes de magnitud en la ecuación (9) se obtiene  $(M^2 L)^{-1} \sim \lambda/D \Rightarrow M^2 \sim D/(\lambda L)$ . La entalpía de remanso es aproximadamente igual a la entalpía estática  $h_o = h + v^2/2 = h[1 + v^2/(2h)] \simeq h$ , lo que, en el caso de un conducto aislado térmicamente, equivale a que la temperatura del gas es uniforme a lo largo del conducto e igual a la temperatura del gas en el depósito 1,  $T(x) \simeq T_1$ .

En el límite  $\lambda L/D \gg 1$ , la ecuación de la variación del número de Mach a lo largo del conducto, (16), se simplifica notablemente y su integración proporciona

$$\frac{1}{M^2(0)} - \frac{1}{M^2} = \frac{\gamma \lambda x}{D} \Rightarrow \frac{1}{M^2(0)} - \frac{1}{M^2(L)} = \frac{\gamma \lambda L}{D}. \quad (25)$$

Por otra parte, las ecuaciones (14) y (17), en el límite  $M^2 \sim D/(\lambda L) \ll 1$ , proporcionan el valor del gasto y de la presión a la salida del conducto

$$G^2 = \gamma M^2(0) p_1 \rho_1 A^2, \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{M(0)}{M(L)} \quad \text{y} \quad \frac{G}{A} = \left( \frac{p_1^2 - p_2^2}{R_g T_1 \lambda L/D} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

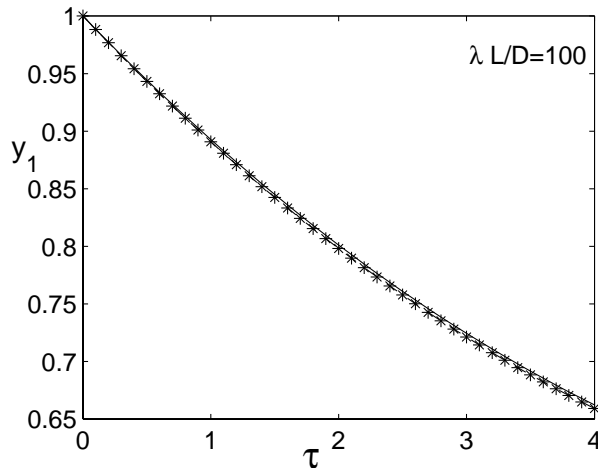
que adimensionalmente es

$$g = \frac{1}{\gamma^{1/2}} \left[ \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\lambda L/D} y_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]^{1/2}. \quad (27)$$

La ecuación anterior junto con las ecuaciones (6) y (21) permiten llegar a

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -\gamma^{1/2} \left[ \frac{1 + y_2(0)}{\lambda L/D} \right]^{1/2} [2y_1 - 1 - y_2(0)]^{1/2} y_1^{(\gamma-1)/(2\gamma)}. \quad (28)$$

La integración numérica de esta ecuación con la condición inicial  $y_1(0) = 1$  se representa en la figura adjunta; para su comparación se ha representado también la evolución de la presión en el depósito 1 calculada numéricamente para el caso  $\lambda L/D = 100$ .



Es útil indicar que para situaciones como la que nos ocupa en las que el número de Mach en el conducto es pequeño frente a la unidad es quizás más sencillo resolver el flujo a partir de la ecuación que da la distribución de presión a lo largo del conducto cuando el número de Mach es pequeño,

$$p \frac{dp}{ds} = \frac{G^2 R_g T}{A^2} \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{ds} - \frac{1}{T} \frac{dT}{ds} - \frac{\lambda}{8r_h} \right). \quad (29)$$

Si se considera el caso de conducto de sección constante y fricción dominante (que corresponde a números de Mach pequeños y, por tanto, a situaciones en las que la temperatura del gas a lo largo del depósito se mantiene constante si el conducto está aislado térmicamente), la ecuación anterior se simplifica drásticamente

$$p \frac{dp}{ds} = \frac{G^2 R_g T_1}{A^2} \left( -\frac{\lambda}{8r_h} \right) \Rightarrow G = \left( \frac{p_1^2 - p_2^2}{\lambda L/D} \frac{A^2}{R_g T_1} \right)^{1/2}; \quad (30)$$

obsérvese que se obtiene, como no podía ser de otra forma, la misma expresión que en (26).

**Apartado 3.-****Conducto sin fricción y con adición de calor**

El calor añadido en el conducto sigue una ley dada por

$$\frac{Q(x)}{h_1(0)} = \alpha[1 - e^{-\lambda x/(2D)}]. \quad (31)$$

que es independiente del tiempo y donde  $\alpha = Q_o/h_1(0)$ . Entonces, teniendo en cuenta (35) y (7), la ecuación que gobierna la presión del depósito 2 es

$$\frac{dy_2}{d\tau} = \gamma g \eta_{oe} = \gamma g [y_1^{(\gamma-1)/\gamma} + \alpha(1 - e^{-\lambda L/(2D)})], \quad (32)$$

mientras que la que gobierna el depósito 1 sigue siendo (6). Si dividimos ambas ecuaciones diferenciales (6) y (32) se obtiene

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -[1 + \alpha(1 - e^{-\lambda L/(2D)})y_1^{(1-\gamma)/\gamma}] \quad (33)$$

cuya integración da lugar a

$$y_2(\tau) - y_2(0) = 1 - y_1(\tau) + \alpha(1 - e^{-\lambda L/(2D)})\gamma(1 - y_1^{1/\gamma}). \quad (34)$$

Resta por determinar el gasto adimensional  $g$  que circula por el conducto que como se menciona en los apartados anteriores depende del movimiento del gas en el conducto.

Bajo la premisa de conducto sin fricción las ecuaciones que rigen el movimiento turbulento y estacionario del gas en el conducto se simplifican a

$$\rho v = G/A = cte, \quad \rho v^2 + p = cte, \quad y \quad h + \frac{v^2}{2} = h_1 + Q(x), \quad (35)$$

donde  $Q(x)$  es el calor por unidad de masa añadido al gas a través de las paredes desde la entrada hasta la sección  $x$ . Empleando como variable el número de Mach es posible derivar de las dos últimas ecuaciones de (35) y de las relaciones isentrópicas una pareja de ecuaciones algébricas que relacionan las condiciones a la entrada y en un punto genérico del conducto  $x$  en función del calor añadido y el número de Mach a la entrada del conducto,  $M(0)$ ,

$$\frac{p(x)}{p_1} = \frac{p(x)/p_1(0)}{y_1} = \frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2(x)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (36)$$

y

$$\frac{Q(x)}{h_1} = \frac{Q(x)/h_1(0)}{y_1^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{M^2(x)}{M^2(0)} \left(\frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2(x)}\right)^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(x)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} - 1. \quad (37)$$

Obsérvese que si se añade calor a través de las paredes el gas se acelera (el número de Mach aumenta) a lo largo del conducto. Un efecto semejante se obtiene si se aumenta la diferencia de presiones entre los extremos del conducto. Naturalmente se alcanzarán condiciones sónicas a la salida del conducto  $x = L$  si, conocido el calor total añadido  $Q(L)$ , la diferencia de presiones impuesta entre los extremos del conducto supera un cierto umbral o bien; si, dada la diferencia de presiones entre los extremos, el calor añadido sobrepasa un cierto umbral. En efecto, particularizando (36) y (37) para  $x = L$  se obtiene

$$\frac{p(L)/p_1(0)}{y_1} = \frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2(L)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (38)$$

y

$$\frac{\alpha(1 - e^{-\lambda L/(2D)})}{y_1^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{M^2(L)}{M^2(0)} \left(\frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2(L)}\right)^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} - 1. \quad (39)$$

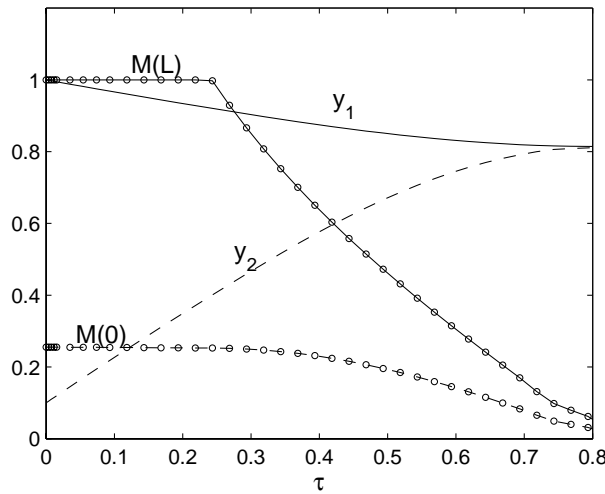


Para conocer  $M(0)$  y con ello el gasto adimensional mediante las expresiones (15) y (14) cerrando el problema se requiere imponer condiciones de contorno a la salida. Como es habitual, dos condiciones de contorno son posibles: 1) el flujo es subsónico en todo el conducto, en cuyo caso se debe imponer que la presión del gas en la sección de salida sea igual a la presión del depósito de descarga,  $p(L)/p_1(0) = y_2$ , o bien; 2) la corriente alcanza condiciones sónicas en la sección de salida en cuyo caso se impondrá la condición  $M(L) = 1$  y el flujo en el conducto se hace independiente de la presión del depósito de descarga.

Un posible esquema numérico de integración del sistema planteado sería:

1.  $y_1(\tau)$  e  $y_2(\tau)$  conocidos en el instante  $\tau$ .
2. Suponer que se alcanzan condiciones sónicas en  $x = L$ . Calcular  $M(0)$  con (39) haciendo  $M(L) = 1$ .
3. Se calcula  $p(L)/p_1(0)$  con (38).
4. Si  $p(L)/p_1(0) > y_2$  la suposición es cierta. Calcular  $K[M(0)]$  con (15) y avanzar temporalmente a  $y_1(\tau + \delta\tau)$  e  $y_2(\tau + \delta\tau)$  con (23) y (34). Volver al punto 1.
5. Si  $p(L)/p_1(0) < y_2$  la suposición es incierta y el flujo es subsónico en todo el conducto. Calcular  $M(0)$  y  $M(L)$  mediante (38) y (39) donde  $p(L)/p_1(0) = y_2$ .
6. Calcular  $K[M(0)]$  con (15) y avanzar temporalmente a  $y_1(\tau + \delta\tau)$  e  $y_2(\tau + \delta\tau)$  con (23) y (34). Volver al punto 1.

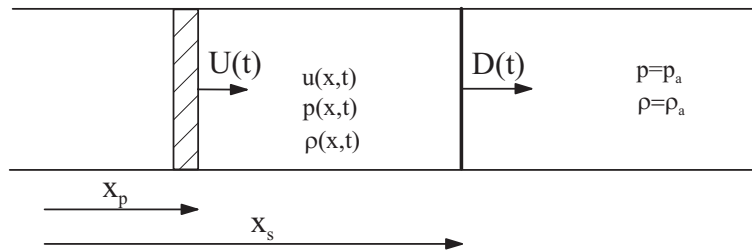
Se ha realizado la integración numérica con un valor del parámetro  $\alpha = 3$  y los resultados se representan en la figura adjunta. Obsérvese que para la relación de presiones inicial, el flujo a la salida siempre es sónico, incluso aunque el calor añadido fuese nulo y que el flujo a la salida permanece sónico hasta que  $y_2/y_1 < 0,4167$  cuyo valor se alcanza en el instante adimensional  $\tau_1 \simeq 0,29$ . Por completitud, además de la evolución temporal de las presiones en los depósitos (líneas continuas) se han representado también la variación con el tiempo de los números de Mach a la entrada y a la salida del conducto (líneas de círculos).



**Problema 7.6**

Un tubo cilíndrico semi-infinito terminado en un pistón contiene un gas perfecto en reposo a presión  $p_a$  y densidad  $\rho_a$ . En un instante determinado el pistón comienza a desplazarse, sin rozamiento con las paredes, con una velocidad  $U(t)$  conocida. Consecuentemente, el gas se pone también en movimiento y si  $U(t) \geq O(a_a)$ ;  $a_a = \sqrt{\gamma p_a / \rho_a}$  se forma, al cabo de un cierto tiempo, una onda de choque normal que se propaga supersónicamente a través del medio sin perturbar, con una velocidad  $D(t)$  que depende de  $U(t)$ . El movimiento unidireccional y no estacionario del gas detrás de la onda es a números de Reynolds muy grandes y como consecuencia éste es isentrópico.

1. Ecuaciones y condiciones de contorno que determinan el movimiento del gas entre el pistón y la onda de choque para tiempos, grandes comparados con el tiempo de formación de la onda de choque, para las que el movimiento se hace independiente de las condiciones iniciales.
2. Demostrar que el problema matemático planteado anteriormente admite solución de semejanza si la velocidad de la onda es muy grande comparada con la velocidad del sonido  $D \gg \sqrt{\gamma p_a / \rho_a}$  y si la velocidad del pistón sigue la ley temporal,  $U(t) = ct^n$ , donde  $n$  es cualquier número real y  $c$  es una constante con dimensiones apropiadas.
3. Considérese el caso en que el pistón se mueve con velocidad constante,  $n = 0$ . Calcular en este caso, las distribuciones de presión, densidad y velocidad y la velocidad de la onda como función de la del pistón.



Resolución:

**Apartado 1.-**

Las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y entropía que gobiernan el movimiento no estacionario y unidireccional del gas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = K, \end{aligned} \quad (1)$$

donde la constante  $K$  se calcula por ejemplo, detrás de la onda de choque; el sistema (1) de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales y de primer orden en las derivadas espaciales y temporales y una algébrica determina las distribuciones de velocidad y del resto de las magnitudes fluidas una vez que se imponen condiciones de contorno apropiadas. Éstas surgirán de los valores de la velocidad, presión y densidad detrás de la onda de choque.

En efecto, si  $x_s(t)$  representa la posición de la onda

$$x_s = \int_0^t D(\tau) d\tau, \quad (2)$$

las condiciones de salto a través de la onda de choque, en ejes ligados a la onda como se muestra en la figura, proporcionan

$$\begin{aligned} \frac{\rho_a}{\rho[x_s(t), t]} &= \frac{D(t) - u[x_s(t), t]}{D(t)} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \\ \frac{p[x_s(t), t]}{p_a} &= \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}, \end{aligned} \quad (3)$$

siendo

$$M_1^2 = \frac{D^2}{a_a^2} = \frac{\rho_a D^2}{\gamma p_a}. \quad (4)$$

Obsérvese que puesto que la velocidad de la onda de choque es desconocida es necesario imponer una condición de contorno adicional; se impondrá, entonces que la velocidad del gas en contacto con el pistón es igual a la velocidad de éste

$$\frac{dx_p}{dt} = U(t) = u[x_p(t), t], \quad (5)$$

donde  $x_p(t)$  representa la posición del pistón. Nótese que no se imponen condiciones iniciales porque se busca solución al problema para el caso de tiempos grandes comparados con el tiempo de formación de la onda de choque y para los que la solución se hace independiente de como fueron los detalles de los instantes iniciales.

Siempre que el número de Mach incidente es mucho mayor que la unidad, lo que corresponde a una onda de choque de gran intensidad, las condiciones de salto se reducen a

$$\rho[x_s(t), t] = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_a, \quad u[x_s(t), t] = \frac{2}{\gamma + 1} D(t), \quad p[x_s(t), t] = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_a [D(t)]^2; \quad (6)$$

esto es, la presión detrás de la onda es tan grande frente a la presión del medio sin perturbar que la solución se hace independiente de esta última.

### Apartado 2.-

Es fácil ver que si  $U(t) = ct^n$ , la velocidad de propagación admitirá la misma forma funcional  $D(t) = At^n$ , donde  $A$  es una constante desconocida con dimensiones apropiadas, y las condiciones de contorno varían con el tiempo según una ley potencial. Finalmente dado que, en este caso, las ecuaciones son invariantes frente al grupo de transformaciones  $[x/(ut), p/(\rho_a u^2)$  y  $\rho/\rho_a]$  conviene emplear las variables

$$\eta = \frac{x}{ct^{n+1}}, \quad u = ct^n V(\eta), \quad \rho = \rho_a R(\eta), \quad p = \rho_a c^2 t^{2n} \Pi(\eta). \quad (7)$$

Su empleo da lugar a las ecuaciones adimensionales dadas por

$$\begin{aligned} -[(n+1)\eta - V]\dot{R} + R\dot{V} &= 0, \\ nV - [(n+1)\eta - V]\dot{V} &= -\frac{\dot{\Pi}}{R}, \\ 2n - [(n+1)\eta - V] \left( \frac{\dot{\Pi}}{\Pi} - \gamma \frac{\dot{R}}{R} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

y, sustituyéndolas en (6), a las condiciones de contorno

$$R(\eta_s) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad V(\eta_s) = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{A}{c}, \quad \Pi(\eta_s) = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{A^2}{c^2}, \quad (9)$$

donde  $\eta_s$  representa la posición adimensional de la onda de choque dada por

$$\eta_s = \frac{x_s}{ct^{n+1}} = \frac{\int_0^t D(\tau) d\tau}{ct^{n+1}} = \frac{A}{c(n+1)}. \quad (10)$$

Finalmente, la condición adicional sobre el pistón es

$$V(\eta_f) = 1 \quad \text{en} \quad \eta_f = \frac{x_f}{ct^{n+1}} = \frac{1}{n+1}. \quad (11)$$

### Apartado 3.-

La integración de (8) es muy sencilla en el caso  $n = 0$  que corresponde a un pistón moviéndose a velocidad constante  $c$ . En ese caso si se elimina  $\Pi$  y  $\hat{R}$  del sistema de ecuaciones se obtiene

$$\dot{V}[(\eta - V)^2 - HR^{\gamma-1}] = 0 \quad \text{con} \quad H = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^\gamma \frac{A^2}{c^2}, \quad (12)$$

que presenta dos posibles soluciones

$$V = \text{const} \quad \text{o bien} \quad (\eta - V)^2 = HR^{\gamma-1}. \quad (13)$$

Obsérvese que la segunda de las soluciones en (13) no es válida en la región cercana al pistón ya que sobre éste  $\eta_f = 1$  y  $V(\eta_f) = V(1) = 1$  y esta segunda solución conllevaría a que la densidad fuese nula en dicho punto,  $R(1) = 0$ , lo que es físicamente imposible. Por otra parte, dicha solución tampoco es válida en la región cercana a la onda de choque puesto que no cumple la condición de contorno sobre ella. Por el contrario, si se explora la solución  $V = \text{const.}$ , que conlleva que  $R = \text{const.}$  y  $\Pi = \text{const.}$ , se observa que la solución es posible siempre que se escoja la relación entre la velocidad de la onda y la del pistón  $A/c$  de forma tal que la velocidad del gas detrás de la onda sea igual a la velocidad del pistón. Es decir que se tenga

$$\frac{A}{c} = \frac{\gamma+1}{2}, \quad V(\eta) = 1, \quad R(\eta) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad \text{y} \quad \Pi(\eta) = \frac{\gamma+1}{2} \quad \text{para} \quad 1 \leq \eta \leq \frac{\gamma+1}{2}. \quad (14)$$

Por tanto, la velocidad, presión y densidad del gas serán en variables físicas

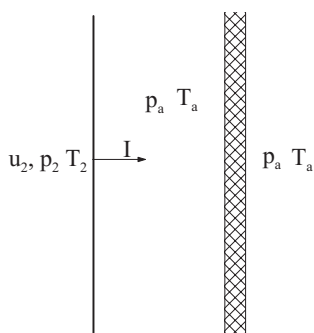
$$u = ct, \quad p = \frac{\gamma+1}{2} \rho_a c^2 t^2 \quad \text{y} \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_a \quad \text{para} \quad ct \leq x \leq \frac{\gamma+1}{2} ct. \quad (15)$$

**Problema 7.7**

Una onda de choque plana se mueve perpendicularmente a sí misma en el seno de aire en calma (presión  $p_a$  y temperatura  $T_a$ ) hacia una pared rígida, en reposo, paralela al plano de la onda. A partir del instante en que la onda de choque alcanza la pared y durante un intervalo de tiempo muy pequeño, comparado con cualquier otro tiempo mecánico, tiene lugar un proceso fluidodinámico muy complejo que da lugar a una onda de choque reflejada que se aleja de la pared (en sentido contrario al de la onda incidente) con una velocidad  $R$  que se desea determinar.

Suponiendo que la velocidad de la onda de choque incidente respecto a tierra es  $I = 2\sqrt{\gamma R_g T_a}$ , calcular

1. Determinar las condiciones del aire detrás de la onda de choque incidente.
2. Velocidad de propagación respecto a tierra  $R$  de la onda de choque reflejada y estado del gas detrás de la onda de choque reflejada.
3. ¿A qué velocidad (módulo y dirección) tendría que moverse la pared para que no hubiese onda de choque reflejada?
4. Si la pared rígida fuese porosa, de permeabilidad  $\Pi$  y espesor de pared  $e$ , calcular el gasto másico de aire a través de la pared porosa supuesto que la temperatura y presión del aire al otro lado de la pared son también  $T_a$  y  $p_a$ . Suponer, para los cálculos, que la porosidad es tal que la ley de Darcy es aplicable en el movimiento del aire a través del medio poroso y que el estado del gas detrás de la onda de choque reflejada es estacionario dando el criterio que debe satisfacerse para que esta hipótesis se verifique. Supóngase también que la matriz porosa está a la temperatura del gas que circula por sus poros.

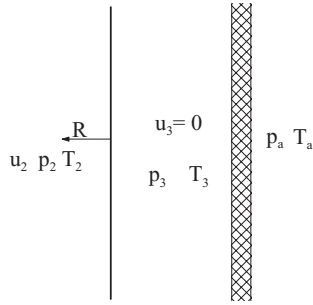
Resolución:Apartado 1.-

La onda avanza con velocidad  $I$  en el seno del aire en calma y el gas detrás de ella queda moviéndose con velocidad  $u_2$  en la misma dirección que la onda y su presión y densidad es  $p_2$  y  $T_2$ ; tanto la velocidad  $u_2$  del aire respecto a tierra como su presión y temperatura son desconocidas.

Para determinar estas magnitudes se utilizan las relaciones de salto a través de la onda que, como es sabido, son función del número de Mach incidente  $M_1$ . En ejes ligados a la onda el aire delante de la onda se mueve respecto a ella con un número de Mach  $M_1 = I/\sqrt{\gamma R_g T_a} = 2$  mientras que el número de Mach detrás de la onda es  $M_2 = (I - u_2)/\sqrt{\gamma R_g T_2}$ . Estas relaciones de salto, que se encuentran tabuladas en la introducción teórica (pág. 227), proporcionan para el caso  $M_1 = 2$  los valores  $p_2/p_a = 4,5$ , y  $M_2 = 0,58$  que junto a  $T_2/T_a \simeq 1,69$  proporcionan  $u_2 \simeq 1,33\sqrt{\gamma R_g T_a}$ .

Apartado 2.-

La onda de choque reflejada se propaga en un medio previamente perturbado por la onda de choque incidente y deja al gas en condiciones en reposo  $u_3 = 0$ , ya que debe cumplirse la condición de contorno en la pared (velocidad nula), y a presión  $p_3$  y temperatura  $T_3$ . Si la velocidad de propagación de la onda reflejada respecto



a tierra es  $R$ , los números de Mach del aire delante y detrás de la onda, en ejes ligados a la onda, son respectivamente

$$M_{1_R} = \frac{R + u_2}{\gamma R_g T_2} \quad \text{y} \quad M_{2_R} = \frac{R}{\gamma R_g T_3}. \quad (1)$$

Obsérvese que en este caso  $M_{1_R}$  es desconocido puesto que lo es la velocidad  $R$ ; de modo que para el cálculo del estado del gas detrás de la onda se supondrá un valor tentativo de esta velocidad  $R_t$ ; dicho valor determina  $M_{2_R} = R/\sqrt{\gamma R_g T_{3a}}$  detrás de la onda y  $T_{3b}/T_2$ . En general, el valor de  $T_{3a}$  calculado indirectamente a partir de la expresión del número de Mach  $M_{2_R}$  diferirá del valor de  $T_{3b}$  obtenido directamente de las relaciones de salto a través de la onda de choque. Será necesario, por tanto, proceder con un nuevo valor de la velocidad de propagación de la onda reflejada y proseguir iterativamente hasta que las temperaturas  $T_{3a}$  y  $T_{3b}$  difieran tan poco como se desee. El proceso iterativo, realizado con un manipulador simbólico cualquiera, proporciona en este caso los valores

$$R = 1,54\sqrt{\gamma R_g T_a}, \quad T_3 = 2,27T_a \quad \text{y} \quad p_3 = 11,7p_a. \quad (2)$$

Si en el instante en que la onda de choque reflejada alcanza la pared ésta se pone súbitamente en movimiento con velocidad  $u_2$  la onda de choque incidente desaparece al alcanzar la pared ya que a partir de ese instante el gas y la pared se mueven con la misma velocidad.

### Apartado 3.-

Como es sabido la distribución de presiones en el movimiento estacionario de un gas isoterma a través de un medio poroso satisface la ecuación

$$\nabla^2 p^2 = 0 \quad (3)$$

con las condiciones de contorno

$$p(0) = p_3 \quad \text{y} \quad p(e) = p_a. \quad (4)$$

Como el movimiento es esencialmente unidireccional, la distribución de presiones viene dada por

$$[p(x)]^2 = p_3^2 - [p_3^2 - p_a^2] \frac{x}{e} \quad (5)$$

y la velocidad del gas a partir de la ley de Darcy

$$v = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6)$$

El gasto por unidad de área a través del medio poroso es

$$\frac{G}{A} = \rho v = \frac{p}{R_g T} \left[ -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = -\frac{\Pi}{2\mu R_g T_3} \frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\Pi}{2\mu R_g T_3} \frac{p_3^2 - p_a^2}{e}. \quad (7)$$

Es fácil comprobar que para que el estado del gas detrás de la onda reflejada sea estacionario es necesario que  $\rho_2(u_2 + R)$  sea mucho menor que el gasto por unidad de área a través del medio poroso.



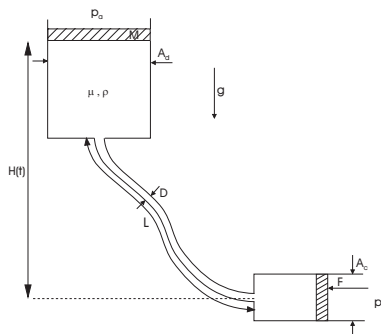
## Ejercicios propuestos



**Ejercicio 1**

La figura muestra un depósito de sección  $A_d$  provisto de un émbolo de masa  $M$  que puede deslizar sin rozamiento con las paredes del depósito. El depósito contiene un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  que es descargado a través de un conducto de longitud  $L$  y diámetro  $D$  a una cámara de sección  $A_c \gg D^2$  por la que también desliza horizontalmente sin rozamiento un émbolo de masa despreciable sobre el que se aplica una fuerza exterior  $F$  constante y conocida. Puede considerarse que el juego entre los émbolos y las paredes de los depósitos es tal que no existe fuga de líquido a través de ellos y que en todo instante el líquido llena todo el espacio comprendido entre los dos émbolos. Si inicialmente el émbolo del depósito superior se encuentra a una altura  $H_0 \gg (A_c)^{1/2}$  con respecto a la sección de entrada a la cámara, y la fuerza  $F$  es tal que dicho émbolo comienza a descender partiendo con velocidad nula, se pide:

1. Ecuación diferencial que proporciona la altura del émbolo con respecto a la entrada a la cámara,  $H(t)$ , como función del tiempo supuesto que el movimiento del líquido en el conducto es con viscosidad dominante.
2. Resolver la ecuación del apartado 1 cuando el efecto de la inercia es despreciable frente al amortiguamiento. Calcular su posición de equilibrio.
3. Calcular el trabajo  $W$  empleado en mover el émbolo inferior un intervalo finito de tiempo  $\Delta t$ .



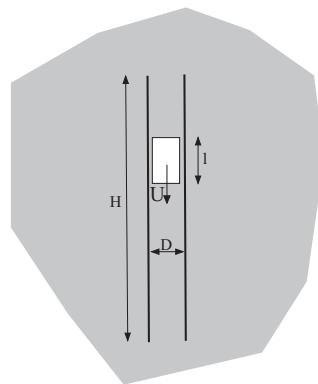
1.  $\frac{M}{A_d} \ddot{H} = -\frac{Mg}{A_d} - \rho g H + \frac{F}{A_c} - \frac{128\mu L A_d}{\pi D^4} \dot{H}$   
con  $H(t=0) = H_0$ ,  $\dot{H}(t=0) = 0$ .
2.  $H(t) = H_e + (H_0 - H_e) \exp\left(-\frac{\rho g \pi D^4}{128\mu A_d L} t\right)$  siendo  $H_e$  la posición de equilibrio  $H_e = \frac{F}{\rho g A_c} - \frac{M}{A_d}$ .
3.  $W(\Delta t) = (H_e - H_0) \frac{A_d F}{A_c} \left(1 - e^{-\frac{\rho g \pi D^4}{128\mu A_d L} \Delta t}\right)$ .

**Ejercicio 2**

Una pieza cilíndrica de densidad  $\rho_p$ , diámetro  $D$  y longitud  $l$ ,  $l \gg D$ , cae sin rozamiento, bajo la acción de la gravedad, en el interior de un conducto vertical de diámetro  $D$  y longitud  $H \gg D$ . El conducto y la pieza están inmersos en el seno de un fluido en calma de densidad  $\rho, \rho < \rho_p$ , y viscosidad  $\mu$ . Los experimentos demuestran que la pieza cae con velocidad  $U$  constante, excepto durante un tiempo de aceleración inicial que es pequeño comparado con el tiempo requerido para recorrer

la longitud  $H$  del conducto. El juego entre la pieza y conducto es lo suficientemente pequeño para que se pueda despreciar el caudal a través de él. En el instante inicial, la pieza situada en la parte superior del conducto se suelta con velocidad nula. Suponiendo que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido en el conducto, calcular:

1. Distribución de presiones a lo largo del conducto para un tiempo  $t$  comprendido en el intervalo  $0 \leq t \leq H/U$ .
2. Fuerza de resistencia que el líquido ejerce sobre el conducto.
3. Velocidad de caída  $U$ .
4. Condiciones que debe satisfacer los parámetros del problema para que las fuerzas viscosas sean dominantes.



1. Para  $0 \leq x \leq Ut - l$ :

$$p(x, t) = p_1 + \rho g x - \frac{128\mu}{\pi D^4} Q x.$$

Para  $Ut \leq x \leq H$ :

$$p_1 + \rho g(H + x - Ut) - \frac{128\mu}{\pi D^4} Q(x - Ut)$$

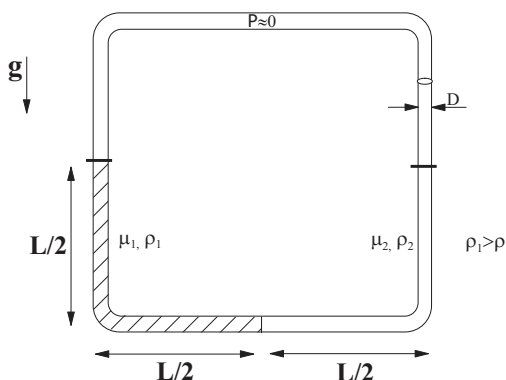
donde  $Q = \pi D^2/4U$  y  $p_1$  es la presión del líquido en la entrada del conducto.

2.  $F_R = \frac{\pi D^2}{4} \left( \rho g l + \frac{128\mu}{\pi D^4} Q(H - l) \right)$ .
3.  $U = \frac{D^2}{32\mu(H-l)} (\rho_p - \rho) g l$ .
4.  $\frac{\rho U D}{\mu} \frac{D}{H-l} \ll 1$  donde  $U$  viene dada por el punto anterior.

**Ejercicio 3**

La figura muestra un conducto de diámetro  $D$  en forma de un marco cuadrado de lado  $L \gg D$ . El conducto contiene en su interior dos líquidos de densidades  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y viscosidades  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , cada uno de los cuales ocupa un tramo de longitud  $L$  del conducto, estando el resto del conducto vacío. Inicialmente los dos líquidos ocupan la parte inferior del conducto, y están separados del vacío mediante sendos diafragmas (ver figura). Si  $\rho_1 > \rho_2$  y en un cierto instante inicial se rompen los diafragmas se produce un movimiento bajo la acción de la gravedad que se desea analizar. En particular se pide:

1. Posición de equilibrio de la interfase,  $s_{fe}$ .
2. En el supuesto de que el movimiento de los líquidos es con fuerzas de viscosidad dominantes, calcular la evolución de la posición de la interfase,  $s_f(t)$ , respecto de su situación inicial indicada en la figura.
3. Suponiendo que el movimiento de los líquidos es turbulento con factor de fricción  $\lambda$  constante, calcular la velocidad de la interfase  $\dot{s}_f$  como función de su posición hasta alcanzar el desplazamiento máximo  $s_{fmax}$  respecto de su posición inicial, indicando el valor de éste. Suponga que los datos del problema son tales que la interfase entre los dos líquidos siempre permanece en el tramo horizontal inferior durante el movimiento.
4. Suponiendo en el apartado anterior que  $\lambda L/D \ll 1$ , calcular la evolución de la posición de la interfase,  $s_f(t)$ , como función del tiempo indicando la frecuencia y amplitud del movimiento armónico resultante. Estime el orden de magnitud del tiempo para el que esta solución deja de ser válida.



Sea  $s$  la coordenada siguiendo el movimiento a lo largo del conducto y con origen en la posición inicial de la interfase, de forma que respecto a este sistema de referencia la interfase inicialmente se encuentra en  $s_f(t=0) = 0$ .

1.

$$s_{fe} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{L}{2}.$$

2.

$$s_f(t) = s_{fe} \left( 1 - e^{-\frac{g(\rho_1 + \rho_2)D^2}{32(\mu_1 + \mu_2)L}t} \right).$$

3.

$$\dot{s}_f = \sqrt{2 \left( \frac{gs_{fe}}{L} \left( 1 + \frac{D}{\lambda s_{fe}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\lambda s_f}{D}} \right) - \frac{gD}{\lambda L} s_f \right)}.$$

El desplazamiento máximo viene dado por

$$\frac{gs_{fe}}{L} \left( 1 + \frac{D}{\lambda s_{fe}} \right) \left( 1 - e^{-\lambda s_{fmax}/D} \right) - \frac{gD}{\lambda L} s_{fmax} = 0.$$

4.

$$s_f(t) = \frac{L(\rho_1 - \rho_2)}{2(\rho_1 + \rho_2)} \left[ 1 - \cos \left( t \sqrt{\frac{g}{L}} \right) \right].$$

Por tanto, la amplitud es  $A = \frac{L(\rho_1 - \rho_2)}{2(\rho_1 + \rho_2)}$  y la frecuencia  $\omega = \sqrt{g/L}$ . Esta solución dejará de ser válida en un tiempo

$$t \sim \frac{n}{\omega},$$

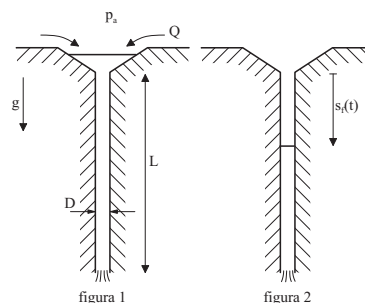
donde  $n$  es el número de oscilaciones necesaria para que la longitud recorrida por el flujo sea lo suficientemente grande para que cuenten los efectos de la fricción. Esto es,

$$\frac{\lambda n A}{D} \sim 1.$$

#### Ejercicio 4

Un canalón de diámetro  $D$  y longitud  $L$  descarga agua de lluvia desde una terraza como se muestra en la figura 1. Se desea calcular el caudal máximo que se puede desaguar a través del canalón sin inundación de la terraza. Para ello se supone que para dicho caudal el régimen es estacionario y la configuración es la de la figura 1, en la que la distancia de la superficie libre del agua a la sección de entrada del canalón es grande comparada con su diámetro, pero pequeña respecto a su longitud. Suponiendo que el movimiento del agua en el canalón es turbulento y sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga ( $\lambda$  constante), se pide:

1. Calcular el valor  $Q$  del caudal pedido en función de los datos del problema.
2. En el caso de que repentinamente cesase la lluvia (ver figura 2) calcular:
  - a) Velocidad en el conducto como función de la distancia de la interfase a la sección superior del conducto  $s_f$ . Suponga que para  $s_f = 0$  la velocidad de la interfase es la correspondiente al apartado 1.
  - b) Velocidad del líquido en el instante en que éste abandona el conducto.
  - c) Velocidad límite,  $v_{lim}$ , que alcanzaría el líquido en el caso de que  $\lambda L/D \gg 1$



1.

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{\lambda L}{D}}}.$$

2. a)

$$v(s_f) = \dot{s}_f = \sqrt{\frac{2Dg}{\lambda} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda L}{D}} \right) e^{-\frac{\lambda}{D}s_f} \right]}.$$

b)

$$v(s_f = L) = \sqrt{\frac{2Dg}{\lambda} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{D}{\lambda L}} \right) e^{-\frac{\lambda L}{D}} \right]}.$$

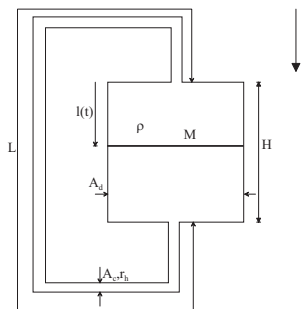
c)

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2Dg}{\lambda}}.$$

**Ejercicio 5**

El dispositivo de la figura consta de un depósito, de sección transversal  $A_d$  y altura  $H$ , cuya base inferior está conectada a la superior a través de un conducto de sección  $A_c \ll A_d$ , radio hidráulico  $r_h$ , y longitud  $L$ . Supongan que el volumen del conducto es mucho menor que el del depósito. El depósito contiene un émbolo de masa  $M$  y altura despreciable frente a la del depósito. El resto del sistema depósito-conducto está lleno de un líquido de densidad  $\rho$  menor que la del émbolo. Si en un cierto instante inicial se deja caer el émbolo partiendo con velocidad nula desde una posición tal que su base superior está situada a una distancia  $l_o$  de la base superior del depósito. Sabiendo que el movimiento en el conducto es turbulento con factor de fricción  $\lambda$  independiente de la viscosidad, se pide:

1. Ecuación diferencial y condiciones iniciales que determinan la posición del émbolo,  $l(t)$ .
2. Calcular la velocidad del émbolo como función de su posición.
3. En el caso de que la inercia del émbolo sea despreciable, calcular  $l(t)$ .



1.

$$\frac{M\ddot{l}}{A_d} + \frac{\rho A_d^2}{2 A_c^2} \left( 1 + \frac{\lambda L}{4r_h} \right) \dot{l}^2 = \frac{Mg}{A_d} - \rho g H,$$

con  $l(t=0) = l_o$  y  $\dot{l}(t=0) = 0$ .

2.

$$v_e(l) = \dot{l}(t) = \sqrt{2\beta \left( 1 - e^{-\frac{M\alpha(l_o-l)}{A_d}} \right)},$$

siendo  $\alpha = \rho A_d^2 / A_c^2 [1 + \lambda L / (4r_h)]$  y  $\beta = Mg / A_d - \rho g H$ .

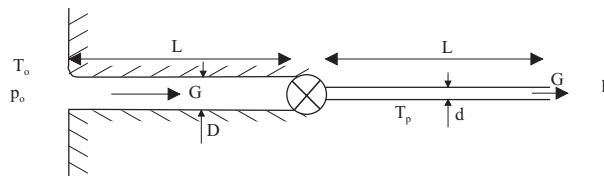
3.

$$l(t) = l_o + \left( \frac{2\beta}{\alpha} \right)^{1/2} t.$$

**Ejercicio 6**

Un compresor ideal impulsa un gasto  $G$  conocido de aire procedente de un depósito a presión  $p_o$  y temperatura  $T_o$ . El aire circula a través de dos conductos de longitud  $L$  y diámetros  $d$  y  $D$  como se muestra en la figura. El conducto situado entre el depósito y compresor está aislado térmicamente mientras que la temperatura en la pared del conducto tras el compresor se mantiene constante con valor conocido  $T_p$ . Sabiendo que el movimiento del aire es turbulento con factor de fricción  $\lambda$  constante cumpliéndose que  $\lambda L / D \gg 1$ . Se pide:

1. Presión  $p_1$  en la sección de entrada al compresor.
2. Presión  $p_2$  en la sección de salida del compresor.
3. Temperatura  $T_2$  en la sección de salida del compresor.
4. Potencia  $W$  que debe de comunicar el compresor.
5. Calor recibido por la unidad de masa en su paso desde el depósito hasta su descarga al ambiente.



1.

$$p_1 = \sqrt{p_o^2 - \frac{16G^2 R_g T_o}{\pi^2 D^4} \frac{\lambda L}{D}}.$$

2.

$$p_2 = \sqrt{p_a^2 + \frac{16G^2 R_g T_p}{\pi^2 d^4} \frac{\lambda L}{d}}.$$

3.

$$T_2 = T_o \left( \frac{p_a^2 + \frac{16G^2 R_g T_p}{\pi^2 d^4} \frac{\lambda L}{d}}{p_o^2 - \frac{16G^2 R_g T_o}{\pi^2 D^4} \frac{\lambda L}{D}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}.$$

4.

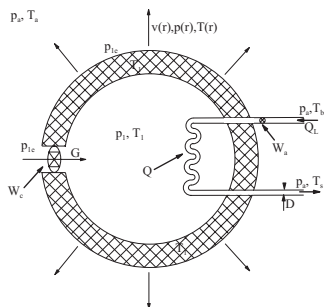
$$\dot{W} = G c_p (T_2 - T_o).$$

5.

$$Q = c_p (T_p - T_2).$$

**Ejercicio 7**

Se desea mantener el aire contenido en un recinto esférico de radio  $R_1$  a una presión y temperatura constante  $p_1$  y  $T_1$ . Debido a que la temperatura del aire exterior suficientemente lejos de la pared del recinto es  $T_a > T_1$  se produce una transferencia de calor desde el interior del mismo por lo que con objeto de mantener la temperatura  $T_1$  constante, se dispone de un serpentín de refrigeración (Longitud  $L$ , diámetro  $D$ ,  $D \ll R_1$ ) por el que circula agua (calor específico  $c$ ) impulsada por una bomba (ideal) situada a la entrada del serpentín. El agua que circula por el serpentín en régimen turbulento (factor de fricción  $\lambda$ , constante) entra en la bomba a una temperatura  $T_b < T_1$  y una presión  $p_a$ , siendo la presión a la salida del serpentín  $p_a$ .



Con objeto de reducir la potencia empleada en la refrigeración se propone una solución que consiste en diseñar la pared del recinto como un medio poroso de permeabilidad  $\chi$  y espesor  $e$  y hacer circular a través del mismo  $G$  de aire introducido mediante un compresor situado en el orificio practicado en la pared y de dimensiones despreciable frente a  $R_1$ . Como consecuencia, el aire sale al exterior (donde la presión, lejos del recinto, es  $p_1 \sim p_a < p_{1e}$ ) con un movimiento que en primera aproximación puede considerarse como radial. Suponiendo que el aire se comporta como un gas perfecto con calor específico  $c_p$ , conductividad térmica  $k$  y viscosidad  $\mu$  constante, se pide:

1. Presión en la pared del recinto  $p_{1e}$ . Simplificar su expresión en el supuesto de que  $(p_1 - p_{1e})/p_1 \ll 1$ .
2. Ecuaciones y condiciones de contorno que determinan los campos de velocidades, presiones y temperatura  $(p(r), v(r), T(r))$  en el exterior del recinto como función de la distancia  $r$  al centro de la esfera. Suponga despreciable la energía disipada por viscosidad frente los efectos de conducción y convección de calor, dando criterio para ello.
3. Distribución de temperaturas  $T(r)$  en el exterior del recinto. Calcule el calor recibido por conducción a través de la pared del mismo. Interprete físicamente su comportamiento al aumentar el parámetro  $Gc_p/(kR_1)$ .
4. Calcule la potencia  $W_c$  comunicada por el compresor (supuesto ideal) al aire circulante (desprecie la energía cinética frente a la térmica a la entrada y salida del compresor). Simplifique su expresión para  $(p_1 - p_{1e})/p_1 \ll 1$ .
5. Mediante un balance de energía aplicado en un volumen de control apropiado calcule la potencia calorífica  $\dot{Q}$  que se debe evacuar en el serpentín.
6. Temperatura  $T_s$  del agua a la salida del serpentín, caudal de agua circulante  $Q_L$  y potencia  $W_b$  que debe suministrar la bomba (desprecie para ello la longitud de los tramos que comunican el serpentín con el exterior del recinto).
7. Ecuación que determina el gasto óptimo de aire  $G^*$  que minimice el coste energético de la refrigeración del recinto.

2. Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho r^2 v)}{\partial r} &= 0 \\ \rho v \frac{v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \rho v \frac{\partial(h + v^2/2)}{\partial r} &= \rho v \frac{\partial(c_p T + v^2/2)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ p &= R_g \rho T \end{aligned}$$

con condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} p(R_1) &= p_{1e}, \quad p(\infty) = p_a, \\ T(R_1) &= T_1, \quad y \quad T(\infty) = T_a. \end{aligned}$$

Despreciar la disipación viscosa término viscoso en  $(\bar{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  requiere que sea mucho menor orden que el término de conducción,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} : \nabla \mathbf{v} &\sim \mu \frac{V^2}{R_1^2} \\ \nabla \cdot (k \nabla T) &\sim \frac{k T_1}{R_1^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\mu V^2}{k T_1} \sim \frac{c_p \mu V^2}{k a^2} \sim \frac{\mu c_p}{k} M^2 \ll 1.$$

3. La distribución de temperaturas en el exterior viene dada por

$$T(r) = \frac{T_1 - T_a e^\alpha}{1 - e^\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha(1-R_1/r)} \right) + T_1 e^{-\alpha(1-R_1/r)},$$

siendo  $\alpha = \frac{c_p G}{4\pi k R_1}$ . El calor que por unidad de tiempo entra por conducción  $Q_c$  en el recinto es

$$\dot{Q}_c = 4\pi R_1^2 k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = 4\pi R_1 k (T_a - T_1) \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

Al aumentar la convección de calor frente a la conducción, es decir al aumentar  $\alpha$ ,  $Q_c$  aumenta. En el caso de ausencia de convección  $\alpha = 0$  el calor introducido es mínimo e igual a  $Q_c = 4\pi R_1 k (T_a - T_1)$ .

- 4.

$$W_c = G c_p T_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_1 - p_{1e}}{p_{1e}}.$$

- 5.

$$\dot{Q} = \dot{Q}_c = 4\pi R_1 k (T_a - T_1) \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha - 1}.$$

- 6.

$$T_s = T_1 - (T_1 - T_b) e^{-\frac{L}{2D}}, \quad Q_L = \frac{\dot{Q}}{\rho_a c (T_s - T_b)}.$$

$$W_b = Q_L (p_s - p_a) = \frac{\lambda L}{D} \frac{8 \rho_a Q_L^3}{\pi^2 D^4}.$$

7. La ecuación para determinar el gasto óptimo de aire  $G^*$  se obtiene de minimizar la potencia total consumida, aquella consumida en el compresor  $W_c$  y la consumida en la bomba de impulsión del líquido. Dicha minimización es equivalente a hallar los ceros de una ecuación algébrica,

$$\min(W_b + W_c) \equiv \frac{d}{d\alpha} \left[ \alpha \left( \frac{A\alpha}{1 - A\alpha} \right) + B \left( \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha - 1} \right)^3 \right] = 0,$$

donde  $A$  y  $B$  son dos parámetros constantes dados por

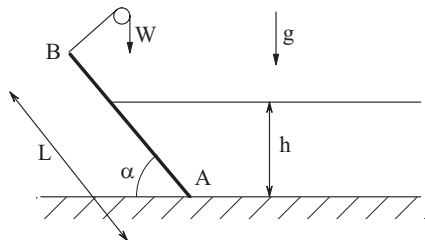
$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu R_g T_1 k e}{R_1 \chi p_1^2 c_p} \\ C &= \frac{\lambda L}{D} \frac{8}{D^4} \frac{16 R_1^2}{c^3 \rho_a^2 T_1} \frac{(T_a - T_1)^3}{T_s - T_b} \frac{\gamma}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

- 1.

$$p_{1e} = p_1 - \frac{\mu R_g T_1 G e}{4\pi R_1^2 \chi p_1}.$$

**Ejercicio 8**

La compuerta de la figura articulada en A y con un top en B, mide  $3\text{ m}$  en la dirección perpendicular al papel. Calcular, supuesto despreciable el peso de la compuerta, el nivel de agua  $h$  para la compuerta comience a abrirse ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $W = 50.000\text{ N}$ ,  $L = 6\text{ m}$ ).



1.

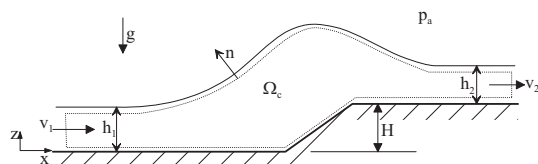
$$WL = L_T \rho g h^3 / (6 \sin^2 \alpha), \Rightarrow$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6WL \sin^2 \alpha}{\rho g L_T}} = 3,6\text{ m}.$$

**Ejercicio 9**

Una corriente bidimensional de un líquido de densidad  $\rho$  y viscosidad despreciable incide sobre un escalón de altura  $H$  que separa dos planos horizontales como se indica en la figura. Aguas arriba, suficientemente lejos del escalón, la velocidad de la corriente puede considerarse uniforme de valor  $v_1$  conocido, y la altura de la misma aguas abajo, suficientemente lejos del escalón, posee un valor  $h_2$ . Mediante la ecuación de continuidad, cantidad de movimiento y energía mecánica en forma integral, se pide:

1. Ecuaciones que proporcionan la altura  $h_1$  de la corriente incidente, su velocidad  $v_2$  (suficientemente lejos del escalón) y la fuerza horizontal  $F$  que se ejerce sobre el escalonamiento.



1.

$$v_1 h_1 = v_2 h_2.$$

$$F = p_a H + \rho [h_1 (v_1^2 + g h_1 / 2) - h_2 (v_2^2 + g h_2 / 2)].$$

$$1/2 v_1^2 + g h_1 = 1/2 v_2^2 + g (h_2 + H).$$

# ***¡Estudia a tu propio ritmo y aprueba tu examen con Schaum!***

Los Schaum son la herramienta esencial para la preparación de tus exámenes.  
Cada Schaum incluye:

- Teoría de la asignatura con definiciones, principios y teoremas claves.
- Problemas resueltos y totalmente explicados, en grado creciente de dificultad.
- Problemas propuestos con sus respuestas.

***Hay un mundo de Schaum a tu alcance...¡BUSCA TU COLOR!***

