

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/322989139>

# Mecánica de los Fluidos. Teoría y Compendio de Problemas

Book · February 2018

CITATIONS

0

READS

71,373

2 authors:



[Reinier Jiménez Borges](#)

Universidad de Cienfuegos

144 PUBLICATIONS 138 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



[José P. Monteagudo Yanes](#)

University of Cienfuegos

70 PUBLICATIONS 216 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

**Mecánica de los Fluidos.**  
**Teoría y Compendio de Problemas**

**Reinier Jiménez Borges**  
**José Pedro Monteagudo Yanes**

## ÍNDICE

<b>Capítulo I. Propiedades de los fluidos .....</b>	<b>4</b>
1.1 Propiedades de los fluidos .....	4
1.2 Problemas resueltos .....	7
1.3. Problemas propuestos .....	12
<b>Capítulo II. Estática de los Fluidos .....</b>	<b>15</b>
2.1. Estática de los fluidos .....	15
2.2 Problemas resueltos .....	18
2.3. Problemas propuestos .....	25
<b>Capítulo III. Hidrodinámica y aplicación de la Ecuación de Bernoulli .....</b>	<b>29</b>
3.1. Ley de Conservación de la energía .....	29
3.2. Problemas resueltos .....	32
3.3. Problemas propuestos .....	37
<b>Capítulo IV. Teoría de Semejanzas .....</b>	<b>39</b>
4.1. Números adimensionales.....	39
4.2. Problemas resueltos .....	39
4.3. Problemas propuestos .....	41
<b>Capítulo V. Teoría de la capa límite .....</b>	<b>43</b>
5.1. Casos Prácticos. ....	43
5.2. Problemas resueltos .....	44
5.3. Problemas propuestos .....	45
<b>Capítulo VI. Flujo de Fluidos en tubos .....</b>	<b>46</b>
6.1. Problema resuelto integrador .....	46
6.2. Problemas propuestos .....	51
<b>Capítulo VII: Flujo de fluidos compresibles. Sustentación .....</b>	<b>53</b>
VII.1 Fuerza de empuje ascensional .....	53
VII.2 Circulación .....	53
VII.3 Empuje ascensional de un cilindro circular .....	58
VII.4 Empuje ascensional de un perfil de ala de avión .....	63
VII.4.1 Resistencia inducida y sustentación en un perfil de ala de longitud finita .....	63

VII.5 Flujo de fluido compresible. Consideraciones Termodinámicas .....	66
VII.6 Problemas Resueltos .....	76
VII.7 Problemas Propuestos .....	83
<b>Capítulo VIII: Equipos de bombeo. Teoría de funcionamiento .....</b>	<b>87</b>
VIII.1 Equipos de Bombeo. Clasificación .....	87
VIII.2 Parámetros de trabajo de los Equipos de Bombeo .....	87
VIII.3 Bombas volumétricas. Ecuaciones fundamentales .....	90
VIII.4 Máquinas Rotodinámicas .....	98
VIII.4.1 Teoría General De Las Máquinas Centrífugas .....	98
VIII.5 Teoría de Semejanza .....	107
VIII.6 Problemas Resueltos. ....	115
VIII.7 Problemas propuestos.....	126
<b>Apéndices.....</b>	<b>133</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>136</b>

## Capítulo I. Propiedades de los fluidos

### 1.1 Propiedades de los fluidos

En el desarrollo de los principios de la Mecánica de los Fluidos algunas de las propiedades de los fluidos juegan un papel importante, mientras que otras o influyen muy poco o nada. En la estática de los fluidos, el peso específico es la propiedad importante, mientras que, en el flujo de fluidos, la densidad y la viscosidad son las que predominan, también cuando tiene lugar una compresibilidad apreciable es necesario considerar los principios de la termodinámica.

*Densidad:* se define como la masa (m) comprendida en la unidad de volumen (V). O sea:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

m: Masa del líquido

V: Volumen

Por ejemplo, para el agua a 40°C se tiene:

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,001 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 9,81 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

*Volumen específico (v).* Es el volumen ocupado por la unidad de masa, por tanto:

$$v = \frac{V}{m} \quad (1.2)$$

El peso específico es peso/volumen. El peso depende del campo gravitacional. En el campo de la tierra, es la fuerza de la gravedad actuando sobre una masa dada, en una localidad determinada. Consecuentemente, el peso específico, en contraste con la densidad, depende del campo gravitacional.

*Peso específico ( $\gamma$ ):* es el peso de la sustancia (G) contenido en la unidad de volumen (V) o sea:

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad (1.3)$$

La densidad y el peso específico están relacionados por la siguiente expresión.

$$\gamma = \rho * g \quad (1.4)$$

*Densidad relativa, Peso específico relativo o gravedad específica ( $\delta$ ):* es la relación entre la densidad de una sustancia y la densidad del agua a 40 °C. Como la densidad y el peso específico están relacionados por la ecuación anterior también la densidad relativa se conoce como peso específico relativo. De lo anterior se deduce que:

$$\delta = \frac{\rho_{\text{liq}}}{\rho_{\text{agua 40 } 0_C}} = \frac{\gamma_{\text{liq}}}{\gamma_{\text{agua 40 } 0_C}} \quad (1.5)$$

Donde:

$\rho_{liq}$ ,  $\gamma_{liq}$ . – Densidad y peso específico a la temperatura dada respectivamente.

$\rho_{agua\ 40^{\circ}C}$ ,  $\gamma_{agua\ 40^{\circ}C}$  – Densidad y peso específico del agua a 40°C respectivamente.

### **Compresibilidad**

Propiedad del líquido de cambiar su volumen bajo la acción de la presión. La compresibilidad también se caracteriza por el coeficiente de compresión volumétrica  $\beta_p$ , que no es más que el inverso del módulo de elasticidad volumétrico, o sea:

$$\beta = -\frac{1}{V} * \frac{\Delta_v}{\Delta_p} \quad (1.6)$$

La magnitud inversa del módulo de compresión volumétrica  $\beta$  es el módulo volumétrico de elasticidad K

El signo menos en la fórmula significa que al incremento positivo de la presión p le corresponde el negativo es decir la reducción del volumen (V). Al despejar el volumen final de la ecuación 1.6 se tiene:

$$V = V_o(1 - \beta_p \Delta P) \quad (1.7)$$

### **Dilatación Térmica**

Se caracteriza por el coeficiente de expansión volumétrica  $\beta_t$  que representa el cambio relativo del volumen al variar la temperatura T

$$\beta_t = \frac{1}{V_o} * \frac{\Delta_v}{\Delta_t} \quad (1.8)$$

### **Viscosidad**

La *viscosidad* ( $\mu$ ) de un fluido es una medida de su resistencia a la deformación cortante o angular.

Las fuerzas de fricción en un fluido en movimiento son el resultado de la cohesión y del intercambio de la cantidad de movimiento entre moléculas. *La viscosidad de los fluidos varía con la temperatura.*

Al aumentar la temperatura la viscosidad de todo líquido disminuye, mientras que la viscosidad de todos los gases aumenta. Esto se debe a que la fuerza de cohesión entre moléculas disminuye al aumentar la temperatura. Esta fuerza es predominante en los líquidos por lo cual la viscosidad de estos disminuye. Mientras que en los gases es predominante el intercambio molecular entre capas adyacentes de fluidos a diferentes velocidades. El incremento de los choques moleculares provoca un aumento de la viscosidad.

Examinése el caso clásico de dos placas paralelas (Figura I. 1) suficientemente grande para que las condiciones de contorno sean despreciables. Ellas están separadas una distancia  $Y$ , estando el espacio entre ellas lleno de fluido. Se supone que la superficie inferior es estacionaria, mientras que la superficie superior se mueve en dirección paralela, a una velocidad  $U$  provocada por la aplicación de la fuerza  $F$  que se corresponde con el área de la placa móvil.

En los contornos las partículas de fluido se adhieren a las paredes, por lo que su velocidad es cero con respecto a la pared. Esta condición, llamada condición de no deslizamiento, ocurre en todo fluido viscoso. Como resultado en la figura I. 1 la velocidad del fluido en contacto con la placa inferior tiene que ser cero mientras que la velocidad del fluido en contacto con la superficie superior tiene que ser  $U$ . La forma de la variación de la velocidad con la distancia entre las dos superficies se denomina perfil de velocidades. Si la separación entre las placas  $Y$  la velocidad relativa entre ellas  $U$  no son demasiados grandes, y si el flujo neto de fluido a través del espacio entre las placas es nulo, se produce un perfil de velocidades lineal.

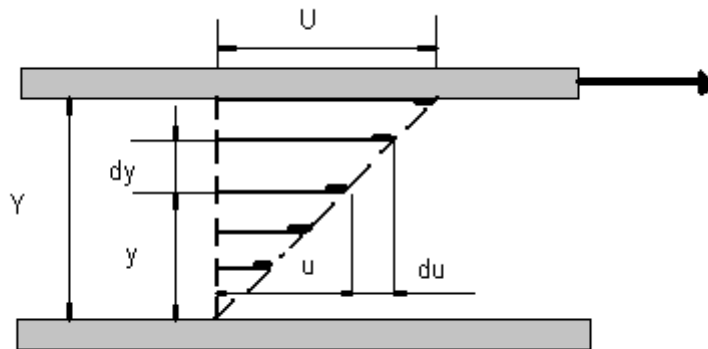


Figura I.1. Perfil de velocidades del fluido al ser arrastrado por la placa plana superior.

Se ha demostrado en experimentos que una gran cantidad de fluidos en las condiciones anteriores cumplen la siguiente relación.

$$F \propto \frac{AU}{Y} \quad (I.9)$$

Por semejanza de triángulos en la figura I.1  $U/Y$  se puede reemplazar por el gradiente de velocidades  $du/dy$ . Introduciendo una constante de proporcionalidad ( $\mu$ ), el esfuerzo cortante ( $\tau$ ) entre dos capas finas de fluido cualesquiera se puede expresar como:

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{Y} = \mu \frac{du}{dy} \quad (I.10)$$

La ecuación 5 se denomina *Ecuación de Viscosidad de Newton*.

El coeficiente de proporcionalidad ( $\mu$ ) se denomina *Coeficiente de Viscosidad, viscosidad absoluta, viscosidad dinámica* o simplemente *viscosidad* del fluido.

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} \quad (I.11)$$

Las dimensiones de la viscosidad absoluta son:

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{\frac{L}{t}}{L}} = \frac{F}{L^2} * t \quad (I.12)$$

En el Sistema Internacional las unidades son: N\*s/m<sup>2</sup> (Pa/s) y lb\*s/pies<sup>2</sup> en el Sistema Inglés.

En muchos problemas relacionados con la viscosidad, esta aparece dividida por la densidad. Esta relación se conoce como *viscosidad cinemática* ( $\nu$ ) así denominada porque la fuerza no está involucrada en las dimensiones, quedando únicamente la longitud y el tiempo. De esta forma

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (I.13)$$

Generalmente se expresa en m<sup>2</sup>/s (SI) o pies<sup>2</sup>/s en el Sistema Inglés. Otra unidad muy usada en el Sistema Métrico es el cm<sup>2</sup>/s, también denominada Stoke (St).

## 1.2 Problemas resueltos

### Problema 1

Un barril de aceite pesa 1,5 kN, calcule el peso específico ( $\gamma$ ), la densidad ( $\rho$ ) y la densidad relativa ( $\rho_r$ ) de este aceite. La capacidad del barril es de 159 litros o 0,159 m<sup>3</sup>. El peso propio del barril es de 110 N.

#### Datos

Peso del barril (W) = 1,5 kN

Volumen (V) = 159 l o 0,159 m<sup>3</sup>

Peso propio del barril (W) = 110 N

#### Calcule

$\gamma, \rho, \rho_r$



### Solución.

Primero se determina el peso neto del aceite

$$\text{Peso neto del aceite} = \text{Peso}_{\text{total}} - \text{Peso}_{\text{Propio del Barril}}$$

$$\text{Peso neto del aceite} = 1,5 \times 10^3 - 110$$

$$\text{Peso neto del aceite} = 1390 \text{ N}$$

Haciendo uso de la definición de peso específico se obtiene:

$$\gamma_{\text{aceite}} = \frac{\text{Peso neto del aceite}}{V} = \frac{1390}{0,159}$$

$$\gamma_{\text{aceite}} = 8742,1 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

La densidad del aceite queda determinada por:

$$\rho_{\text{aceite}} = \frac{\text{Masa (m)}}{V}$$

$$\rho_{\text{aceite}} = \frac{\frac{\text{Peso neto}}{g}}{V} = \frac{\frac{1390}{9,81}}{0,159}$$

$$\rho_{\text{aceite}} = 891,14 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

La densidad relativa se obtiene

$$\rho_r = \frac{\rho_{\text{aceite}}}{\rho_{\text{agua } 4C}} = \frac{891}{1000}$$

$$\rho_r = 0,891$$

### **Problema 2**

En un recipiente de 30 litros de capacidad se encuentra aire bajo una presión de 150 at y a +50 °C.

Determinar el peso del aire en la botella teniendo en cuenta que el peso específico del aire a la

temperatura de +15 °C y a la presión atmosférica es  $\gamma = 1,225 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$

### Datos

$$V = 30 \text{ l}$$

$$P = 150 \text{ at}$$

$$T = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\gamma_{15 \text{ } ^\circ\text{C}} = 1,225 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

$$T_0 = 15 \text{ } ^\circ\text{C}$$

### Solución

Considerando la Constante Universal de los Gases Ideales constante:

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} = R$$

$$\frac{P_0}{\gamma_0 T_0} = \frac{P_1}{\gamma_1 T_1}$$

El peso específico despejando la relación anterior queda:

$$\gamma_1 = \gamma_0 \frac{P_1 T_0}{P_0 T_1}$$

$$\gamma_1 = 1,225 \frac{150}{1} * \frac{15 + 273}{50 + 273}$$

$$\gamma_1 = 163,8 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

El peso del aire en la botella

$$W = \gamma_1 * V_1 = 163,8 * 0,03$$

$$W = 4,91 \text{ kgf}$$

### **Problema 3**

Determinar cómo cambiarán las tensiones tangenciales en el líquido bombeado por una tubería, si el keroseno se sustituye por la gasolina. El peso específico del keroseno es  $\gamma_{\text{keroseno}} = 800 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$  y el de la gasolina es  $\gamma_{\text{gasolina}} = 700 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$ . El coeficiente cinemático de viscosidad del keroseno se acepta igual a  $\nu_{\text{keroseno}} = 2,2 \text{ Cst}$ ; y el de la gasolina  $\nu_{\text{gasolina}} = 0,84 \text{ Cst}$

### Datos

$$\gamma_k = 800 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_g = 700 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

$$\nu_k = 2,2 \text{ Cst}$$

$$\nu_g = 0,84 \text{ Cst}$$

$$1 \text{ Cst} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

### Solución

A partir de las viscosidades cinemáticas y las densidades tanto para el keroseno como para la gasolina se puede determinar entonces las viscosidades dinámicas a partir de la relación.

$$v = \mu \rho$$

$$\mu_k = \rho_k * v_k = 800 * 2,2 \times 10^{-6}$$

$$\mu_k = 0,00176 \text{ Pa} * \text{s}$$

$$\mu_g = \rho_g * v_g = 700 * 0,84 \times 10^{-6}$$

$$\mu_k = 0,00058 \text{ Pa} * \text{s}$$

La tensión tangencial por su parte queda expresada como:

$$\tau_k = \mu_k \left( \frac{dv}{dy} \right)_k$$

La relación entre los valores de viscosidades dinámicas del keroseno y de la gasolina nos dará la disminución de las tensiones tangenciales.

$$\frac{\mu_k}{\mu_g} = \frac{0,00176}{0,00058} = 3,03$$

Las tensiones tangenciales disminuirán 3 veces.

#### Problema 4

En un sistema hidráulico fue echado 250 l de líquido; 25 l quedaron en un depósito abierto. Determinar los volúmenes mínimos y máximo del líquido en el depósito, si la temperatura puede variar en los límites de +60 °C a -60 °C, y se rellenó a +20 °C. El coeficiente de expansión volumétrica del líquido es  $\beta = 0,00072 \frac{1}{\text{grad}}$

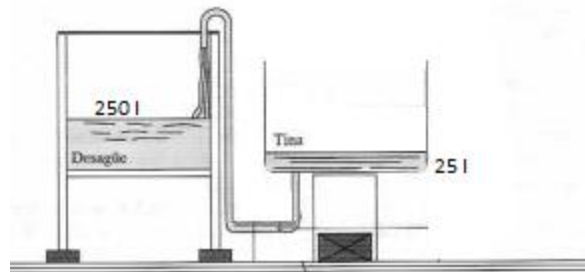


Figura I.2. Esquema de cálculo.

Datos

$$\beta_t = 0,00072 \frac{1}{\text{grad}}$$

$$\Delta_t = +60^\circ\text{C a } -60^\circ\text{C}$$

$$V_o = 250 \text{ l}$$

### Solución

Partiendo de conocer el coeficiente de expansión volumétrica  $\beta_t$  (ecuación 1.8), se puede obtener entonces la variación de volumen

$$\beta_t = \frac{1}{V_o} * \frac{\Delta_v}{\Delta_t}$$

$$\Delta_v = \beta_t * V_o * \Delta_t$$

La primera de las variaciones de volumen se determina para un  $\Delta_t = 40^\circ\text{C}$

$$\Delta_v = 0,00072 \frac{1}{\text{grad}} * 250 \text{ l} * 40^\circ\text{C} = 7,20 \text{ l}$$

$$\Delta_v = \beta_t * V_o * \Delta_t$$

para un  $\Delta_t = 80^\circ\text{C}$

$$\Delta_v = 0,00072 \frac{1}{\text{grad}} * 250 \text{ l} * 80^\circ\text{C} = 14,40 \text{ l}$$

$$V_{\text{max}} = 25 \text{ l} + 7,20 = 32,2 \text{ l}$$

$$V_{\text{min}} = 25 \text{ l} - 14,40 = 10,6 \text{ l}$$

### Problema 5

Un recipiente de 10 l (Litros) de cabida está lleno de líquido. Calcular la cantidad de líquido que escurrirá del recipiente si bajamos la presión de este desde 200 at hasta la atmosférica. El coeficiente de compresión volumétrica es  $\beta_p = 0,77 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kgf}$

### Datos

$$V_o = 10 \text{ L}$$

P=200 at hasta la presión atmosférica

$$\beta_p = 0,77 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kgf}$$

### Solución

A partir de la ecuación 6, el coeficiente de compresión volumétrica queda expresado como:

$$\beta_p = \frac{\Delta V}{V_o \Delta P}$$

Despejando la variación de volumen para determinar cuánto de este fue escurrido se tiene:

$$\Delta V = \beta_p V_o \Delta P$$

$$= 10 \text{ L} * 0,77 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kgf} * 200 \text{ kgf}/\text{cm}^2$$

$$= 0,154 \text{ L} = 154 \text{ cm}^3$$

### Problema 6

En el ensayo hidráulico una tubería de diámetro  $d=500 \text{ mm}$  y longitud  $L=2 \text{ km}$  se llenó de agua bajo la presión de 75 at. Al final del ensayo la presión bajó hasta 70 at. Despreciando la deformación de la tubería, determinar el volumen de agua derramada durante el ensayo a través de las uniones estancadas de los tubos.

Datos

Diámetro de la Tubería  $d=500 \text{ mm}$

Longitud (L)  $L=2 \text{ km}$

$P_1= 75 \text{ at.}$

$P_2= 70 \text{ at.}$

$K = \frac{1}{\beta_p} = \text{Módulo volumétrico de elasticidad}$

$$K_{\text{agua}} = 20\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Partiendo del inverso del módulo de compresión volumétrica tenemos:

$$\frac{1}{\frac{\Delta V}{V_0 \Delta P}} = K$$

Determinación del volumen de la tubería

$$V = \frac{\pi * d^2}{4} * L = \frac{3,14 * (50 \text{ cm})^2}{4} * 200\,000 \text{ cm} = 3,925 \times 10^8$$

$$20\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{\frac{\Delta V}{3,925 \times 10^8 \text{ cm}^3 * 5 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}}}$$

$$20\,000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{\frac{\Delta V}{1,962 \times 10^9}}$$

$$\Delta V = 98125 \text{ cm}^3 = 0,098 \text{ m}^3$$

### 1.3. Problemas propuestos

1. Calcular la cantidad máxima de líquido que puede ser echado en un recipiente de 50 l de capacidad a la temperatura de  $+15 \text{ }^\circ\text{C}$  para que a  $+200 \text{ }^\circ\text{C}$  la presión excesiva no sea más de 50 at. Tener en cuenta que durante el llenado el aire y el líquido que quedan en el recipiente se hallan bajo una presión excesiva de 3 at.

Solución

$$V_0 = 44 \text{ l}$$

2. El coeficiente cinemático de viscosidad del aire a presión y temperatura normales es igual a  $\nu_{\text{aire}} = 1,45 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ , y del agua  $\nu_{\text{agua}} = 11,45 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ . Determinar en cuál de estos medios serán mayores los esfuerzos tangenciales y en cuántas veces (siendo iguales las demás condiciones).

### Solución

Las tensiones tangenciales en el agua serán mayores 64,5 veces.

3. En la figura I.3 está representado el esquema del aparato para la calibración de los manómetros. La presión del aceite en la cámara que se transmite a ambos manómetros se crea atornillando el émbolo buzo de diámetro  $d=1 \text{ cm}$ . Determinar cuántas revoluciones habrá que tener el émbolo buzo para formar una presión de 250 at, si el paso del tornillo es  $t = 2 \text{ mm}$  y el volumen de la cámara que puede ser considerado invariable al cambiar la presión es igual a  $300 \text{ cm}^3$ . El coeficiente de compresión volumétrica del aceite es  $\beta_p = 0,47 \times 10^{-4} \frac{\text{cm}^2}{\text{kgf}}$

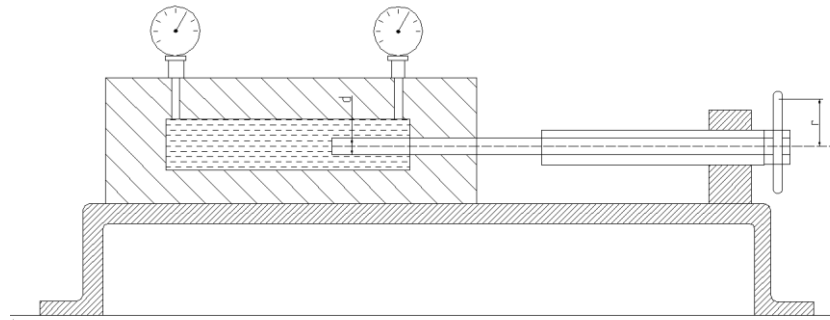


Figura I.3. Calibrador de manómetros.

### Solución

El émbolo debe hacer 21,8 revoluciones.

4. En un recipiente cilíndrico con líquido viscoso gira un vástago de diámetro  $d$  y longitud  $l$  coaxial con el recipiente. Para la rotación a la velocidad angular  $w$  se consume una potencia  $N$ .

Suponiendo que en el espacio libre de magnitud  $\delta$  entre el vástago y la pared del recipiente la velocidad va distribuida según la ley lineal y despreciando el rozamiento en el extremo del vástago, determinar el coeficiente de viscosidad del líquido.

### Solución

La potencia está ligada con la tensión tangencial  $\tau$  en la superficie del vástago por la fórmula  $N = \tau L \pi d w$ , de donde  $\mu = \frac{2 \delta N}{\pi L w^2 d^2}$

5. En una tubería llena de agua, por medio del émbolo se produjo un cambio de presión  $dp = 1000 \text{ kgf/m}^2$ . Calcular el cambio de densidad provocado por dicho efecto.

Solución

La oscilación de la densidad del agua es  $5,01 \text{ kgf*s}^2/\text{m}^4$ , y la del aire, a  $0,0086 \text{ kgf*s}^2/\text{m}^4$

6. La presión del aceite en los espacios libres entre las partes móviles y fijas de la máquina hidráulica aumentó desde 10 at hasta 700 at, mientras que la temperatura del mismo y la velocidad de la corriente quedaron invariables. ¿En cuántas veces cambiarán las tensiones tangenciales?

Solución

Caso 1: 0,1785; para el caso 2: 1,455

## Capítulo II. Estática de los Fluidos

### 2.1. Estática de los fluidos

La estática de los fluidos consiste en el estudio de los problemas en los cuales no existe movimiento relativo entre los elementos de estos fluidos. Al no existir este, entre los elementos individuales, no puede existir esfuerzo de corte, sea cual sea la viscosidad, por lo que no tiene efecto sobre los problemas de estática.

La presión en un punto es la relación entre la fuerza normal y el área, por lo que cumple con una serie de supuestos o propiedades como:

1. La Presión en un punto en el seno de un fluido en reposo es igual en todas las direcciones.
2. La Presión en todos los puntos situados en un mismo plano horizontal en el seno de un fluido en reposo tiene el mismo valor.
3. Las leyes de la estática de los fluidos reales, no se diferencia de las leyes de la estática obtenida para los fluidos ideales.
4. La Fuerza de presión en un fluido en reposo se dirige siempre hacia el interior del fluido.
5. La superficie libre de un líquido en reposo es siempre horizontal.

La presión tiene unidades de fuerza por unidad de área, las cuales pueden ser newton por metro cuadrado, llamadas pascales (Pa), libras por pie cuadrado (psf) o libras por pulgada cuadrada (psi)

$$P = \frac{F}{A} \quad (\text{II.1})$$

En el SI

$$P = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \text{Pa}$$

La presión puede expresarse con respecto a cualquier nivel de referencia arbitraria, los más usuales son el *cero absoluto* y la *presión atmosférica local*. Cuando la presión se expresa como una diferencia entre su valor y un vacío completo, se conoce como presión absoluta, Cuando se expresa entonces como la diferencia entre su valor y la presión atmosférica local, se conoce como *presión manométrica*.



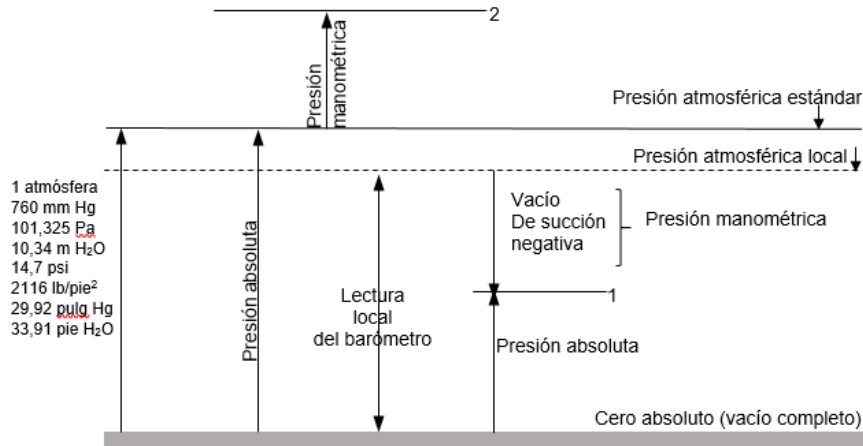


Figura II.1. Unidades y escalas para la medida de la presión.

Según Vennard & Street (1992), la ecuación de la hidrostática queda:

$$P_2 + \rho g Z_2 = (P_0 + \rho g Z_0 = C \quad (II.2)$$

### Fuerza de presión del líquido sobre una pared plana

La fuerza total de presión del líquido sobre una pared plana es igual al producto de la superficie de la pared por el valor de la presión hidrostática en el centro de gravedad de esta superficie.

### Fuerza sobre superficies planas sumergidas

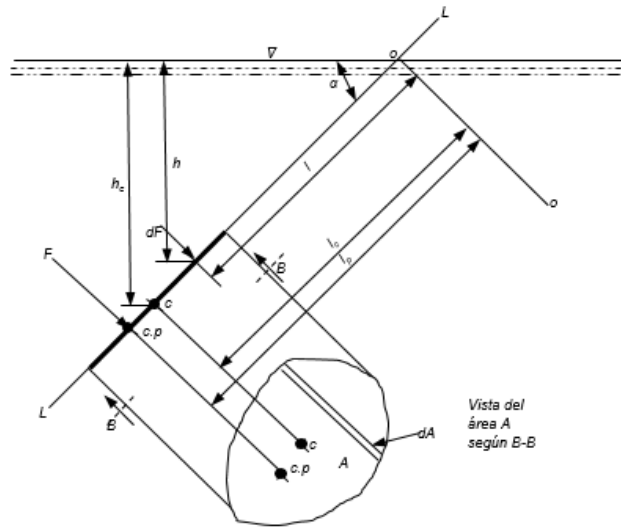


Figura II.2. Fuerza sobre superficies planas sumergidas.

Un área A, como la de la figura II. 2, localizada en cualquier plano inclinado L-L. Supóngase que el centroide de esta área está localizado, como se muestra, a una profundidad  $h_c$  y a una distancia  $l_c$  a partir de la línea de intersección O-O, del plano L-L con la superficie del líquido. La fuerza  $dF$ , sobre el área  $dA$  se da por  $p dA = \gamma h dA$  como  $h = l \text{ sen } \alpha$ ,  $df$  se puede expresar como

$$dF = \gamma l dA \text{ sen } \alpha$$

Y la fuerza total sobre el área A se encuentra por la integración de esta expresión sobre el área, lo que queda

$$F = \gamma \text{ sen } \alpha \int^A dA \quad (II.3)$$

Aquí  $\int^A dA$  es el momento del área A, con respecto a la línea O-O, el que también se da por el producto del área A y la distancia perpendicular  $l_c$ , desde O-O hasta el centroide (C) del área. Así

$$\int^A l dA = l_c A$$

Sustituyendo entonces en la ecuación anterior

$$F = \gamma A l_c \text{ sen } \alpha$$

Sin embargo

$$h_c = l_c \text{ sen } \alpha$$

Lo que se reduce la ecuación anterior a

$$F = \gamma h_c A \quad (2.4)$$

Indica que la magnitud de la fuerza resultante sobre (a un lado de) cualquier área plana sumergida, se puede calcular multiplicando el área, A, por la presión en su centroide,  $\gamma h_c$ .

### Fuerza sobre superficies curvas sumergidas

Las fuerzas sobre superficies curvas sumergidas se pueden determinar con facilidad por medio del cálculo de sus componentes horizontales y verticales. En figura II. 3 se puede determinar la magnitud de la fuerza resultante F con componentes  $F_H$  y  $F_V$ , según se muestra.

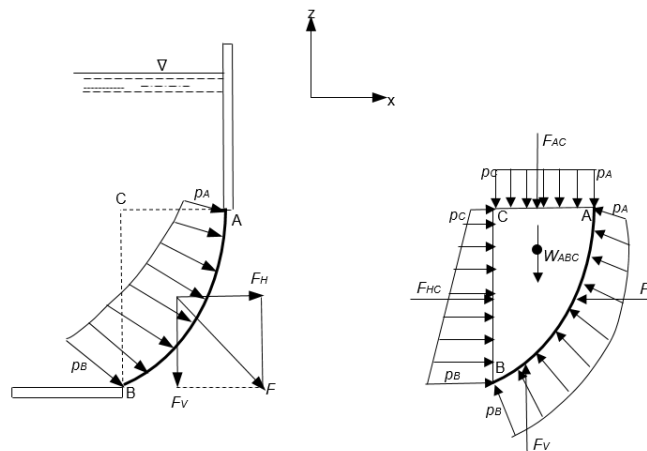


Figura II.3. Fuerza sobre superficies curvas sumergidas.

El análisis de cuerpo libre de fluido ABC, permite el cálculo de  $F_H'$  y  $F_V'$ , las componentes de la fuerza resultante ejercida por la superficie AB sobre el fluido, y de las respectivamente iguales y opuestas  $F_H$  y  $F_V$ .

Del equilibrio estático del cuerpo libre.

$$\sum F_x = F_{HC} - F_H' = 0$$

$$\sum F_z = F_V' - W_{ABC} - F_{AC} = 0$$

$$F_H' = F_{BC}$$

$$F_V' = W_{ABC} + F_{AC}$$

## 2.2 Problemas resueltos

### Problema 1

Determinar la presión excesiva (Figura II. 4) del aire en un depósito de carga según la lectura del manómetro de mercurio compuesto de dos tubos en U. Las marcas de los niveles se dan en metros a partir del suelo.

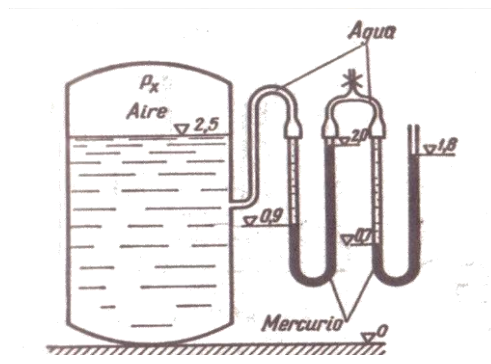


Figura II. 4. Esquema de análisis.

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$$

$$P_x + \rho_a g (2,5 - 0,9) - \rho_m g (2,0 - 0,9) + \rho_a g (2,0 - 0,7) - \rho_m g (1,8 - 0,7) = P_{\text{atm}}$$

Manómetro doble en U con un extremo a la atmósfera

$$P_{\text{atm}} = 0$$

$$P_x = -\rho_a g * (1,6 - 1,3) + \rho_m g (1,1 - 1,1)$$

$$P_x = -1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 0,3 \text{ m} = 2943 \text{ Pa} = 28870 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$$

## Problema 2

Calcular la altura  $h$  (Figura II. 5) de la elevación del mercurio en un tubo de cristal, si la presión absoluta del aire en el depósito es  $P_1=0,15$  at. La presión atmosférica es igual a 775 mm c.m. La altura  $H=1,0$  m.

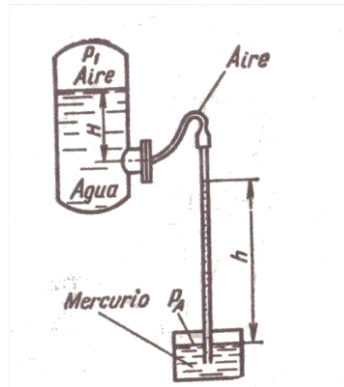


Figura II. 5. Esquema de análisis.

$$P_1 + \rho_a g H + \rho_m g h = P_A$$

$$15195 \text{ Pa} + \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 1,0 \text{ m}\right) + \left(13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * h = 133307,5 \text{ Pa}\right.$$

$$15195 \text{ Pa} + 9810 \text{ Pa} + 133416 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} h = 133307,5 \text{ Pa}$$

$$h = 0,8118 \text{ m}$$

## Problema 3

Determinar la diferencia de presiones (Figura II. 6) del hidrógeno y del aire en el punto superior del aerostato. La altura  $H=20$  m, el diámetro de la válvula es  $d=300$  mm,  $\gamma_{\text{aire}} = 1,29 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$  y  $\gamma_{\text{hid}} = 0,1 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$

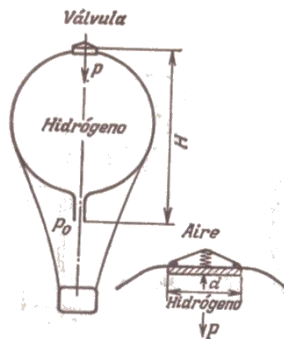


Figura II.6. Esquema de análisis.

Datos

$$T = 2 \text{ Kg}$$

$$H = 20 \text{ m}$$

$$D = 300 \text{ mm}$$

$$\gamma_{\text{aire}} = 1,29 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_{\text{hid}} = 0,1 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$$

$$P + \gamma_{\text{aire}}(H) - \gamma_{\text{hidrogeno}}(H) = P_0$$

$$P - P_0 = \gamma_{\text{aire}}(H) - \gamma_{\text{hidrogeno}}(H) = 1,29 \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^3} * 20 \text{ m} - 0,1 \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^3} * 20 \text{ m}$$

$$P - P_0 = 25,8 \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^2} - 2 \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^2} = 23,8 \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^2}$$

#### Problema 4

En la figura Il. 7 se puede encontrar la presión en A, en Pascales ¿Cuál es la presión del aire en el tubo?

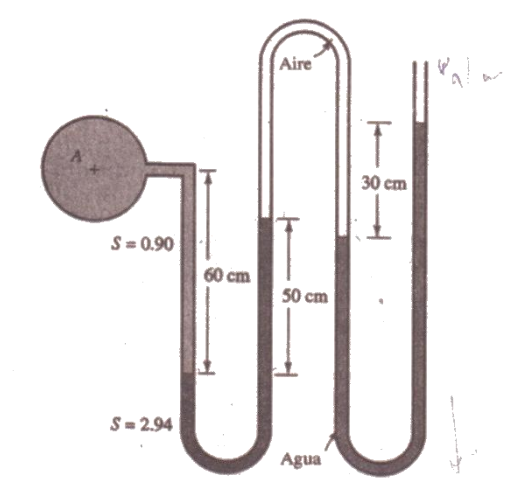


Figura 2.7 Esquema de análisis.

Datos

$$s_1 = \rho_{\text{rel}} = 0,90$$

$$s_2 = \rho_{\text{rel}2} = 2,94$$

Determinación de las densidades de ambos líquidos.

$$\rho_{rel1} = \frac{\rho_{liq1}}{\rho_{agua\ 40\ C}}$$

$$\rho_{liq1} = \rho_{rel} * \rho_{agua\ 40\ C} \text{ de donde}$$

$$\rho_{liq1} = 0,90 * 1000 \frac{Kg}{m^3} = 900 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\rho_{rel2} = \frac{\rho_{liq2}}{\rho_{agua\ 40\ C}}$$

$$\rho_{liq2} = \rho_{rel} * \rho_{agua\ 40\ C} \text{ de donde}$$

$$\rho_{liq2} = 2,94 * 1000 \frac{Kg}{m^3} = 2940 \frac{Kg}{m^3}$$

$$P_A + \rho_{liq1}gh1 - \rho_{liq2}gh2 - \rho_{liq3}gh3 = P_{atm}$$

Considerando  $P_{atm} = 0$  entonces

$$P_A = -\rho_{liq1}gh1 + \rho_{liq2}gh2 + \rho_{liq3}gh3$$

$$P_A = (-900 \frac{Kg}{m^3} * 9,81 \frac{m}{s^2} * 0,6\ m) + (2940 \frac{Kg}{m^3} * 9,81 \frac{m}{s^2} * 0,5\ m) + (1000 \frac{Kg}{m^3} * 9,81 \frac{m}{s^2} * 0,3\ m)$$

$$P_A = 12066,3\ Pa$$

Determinación de la presión de aire dentro del tubo.

$$P_A + \rho_{liq1}gh1 - \rho_{liq2}gh2 = P_{aire}$$

$$P_{aire} = P_A + \rho_{liq1}gh1 - \rho_{liq2}gh2$$

$$P_{aire} = 12066,3\ Pa + 5297,4\ Pa - 14420,7\ Pa$$

$$P_{aire} = 2943\ Pa$$

### Problema 5

Hallar la fuerza que soporta la presa (Figura 2. 8), si la profundidad del agua delante de la presa es  $H=4m$ , el ángulo de inclinación del borde de presión de la presa es  $\alpha=60^\circ$ . Llevar a cabo el cálculo para un metro lineal de longitud ¿Cómo depende la fuerza incógnita del ángulo  $\varphi$ ?

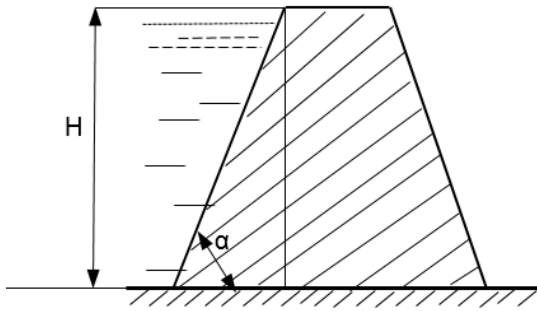


Figura 2.8. Esquema de análisis.

Datos

Profundidad  $H=4\text{m}$

Ángulo de inclinación:  $\varphi=60^\circ$

De la expresión para el cálculo de la fuerza sobre superficies planas tenemos:

$$F_p = (\rho g h_c) A$$

Determinación del área para un metro lineal de longitud.

$$A = \frac{1 * H}{2}$$

$$A = \frac{1 * 4\text{m}}{2} = 2\text{m}$$

$$F_p = \left( 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 4\text{m} \right) * 2\text{m}$$

$$F_p = 78480 \text{ N} = 8000 \text{ kgf}$$

### Problema 6

La figura 2.9 representa un aliviadero automático de presa AOB. El ángulo AOB es rígido;  $OA=150 \text{ cm}$ ;  $OB= 180 \text{ cm}$ . La hoja OA tiene una masa de  $3000 \text{ kg}$  y la hoja OB tiene una masa de  $3600 \text{ kg}$ . La dimensión normal al dibujo es  $4 \text{ m}$ . Desprecie el rozamiento en O y B. W es un contrapeso cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia de  $165 \text{ cm}$  de O. El aliviadero está en equilibrio cuando el nivel de agua se encuentra como en la figura.

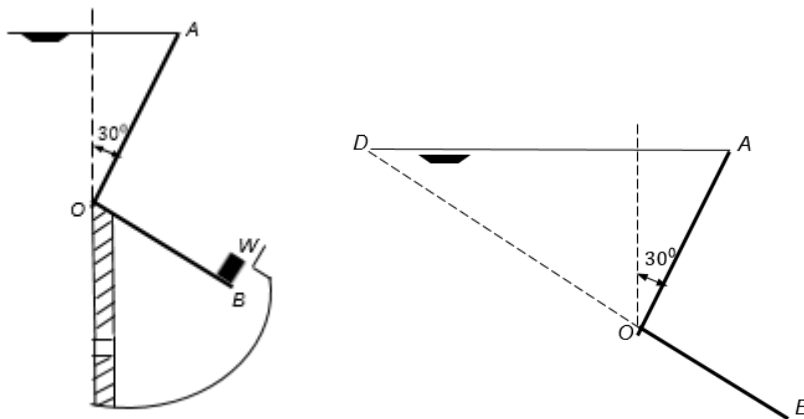


Figura 2.9. Esquema de análisis.

Determinar:

- Fuerza debido a la presión de agua sobre OA y OB
- Centro de presión sobre OA
- Valor del contrapeso W

Según el enunciado del problema se tiene

$$m_{OA} = 3000 \text{ kg}$$

$$m_{OB} = 3600 \text{ kg}$$

$$OA = 1,50 \text{ m}$$

$$OB = 1,80 \text{ m}$$

$$b = 4,0 \text{ m}$$

$$OG_W = 1,65 \text{ m}$$

- Fuerza sobre el elemento OA

$$F_{pOA} = \rho g h_p A = \rho g \frac{OA}{2} \cos 30^\circ * A_{OA}$$

$$F_{pOA} = 1000 * 9,81 * 0,75 * 0,866 * 6$$

$$F_{pOA} = 38\,230 \text{ N}$$

Fuerza sobre el elemento OB

$$F_{pOB} = \rho g h_p A = \rho g \left( \frac{OB}{2} * \cos 60^\circ + OA * \cos 30^\circ \right) * 7,2$$

$$F_{pOB} = 1000 * 9,81 * (0,9 * 0,5 + 1,5 * 0,866) * 7,2$$

$$F_{pOB} = 123\,535 \text{ N}$$



b) Llamando  $AC_{OA}$  a la distancia del centro de presiones sobre OA, medida a partir de A, se tendrá que:

$$AC_{OA} = \frac{\int y^2 dA}{\int y dA} = \frac{b OA^3/3}{b OA^2/2} = \frac{2}{3} OA = \frac{2}{3} 1,5$$

$$AC_{OA} = 1 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia  $OC_{OA}$  pedida será:

$$OC_{OA} = OA - AC_{OA} = 1,5 - 1$$

$$OC_{OA} = 0,5 \text{ m}$$

Como en la pregunta b, llamando  $DC_{OB}$  la distancia del centro de presiones medida a partir de D:

$$DC_{OB} = \frac{\int y^2 dA}{\int y dA}$$

Aplicando el teorema de Steiner para el cálculo de estas integrales se tiene:

$$\int y^2 dA = \frac{4}{3} (4,398^3 - 2,598^3)$$

$$\int y dA = \frac{4}{3} (4,398^2 - 2,598^2)$$

$$DC_{OB} = \frac{2(4,398^3 - 2,598^3)}{3(4,398^2 - 2,598^2)} = 3,575 \text{ m}$$

$$OC_{OB} = DC_{OB} - OD = 3,575 - 2,598$$

$$OC_{OB} = 0,977 \text{ m}$$

c) Cálculo del valor del contrapeso W

El equilibrio de la compuerta exige que la suma de los momentos de todas las fuerzas que sobre ella actúan con relación al punto O sea igual a 0, es decir, tomando como positivos los momentos en el sentido de las agujas del reloj.

$$m_{OA} * 0,5 OA * \cos 60^0 + F_{POA} * OC_{OA} + W_{OA} * 0,5 * OB * \cos 30^0 - F_{POB} * OC_{OB} + W * 1,65 * \cos 30^0 = 0$$

W

$$= \frac{123\,535 * 0,977 - 3000 * 9,81 * 0,5 * 1,5 * 0,5 - 38\,230 * 0,5 - 3600 * 9,81 * 0,5 * 1,80 * 0,866}{1,65 * 0,866}$$

$$W = 44\,101,8 \text{ N}$$

**Problema 7**

El tanque de fuel horizontal de la figura 2. 10, de sección transversal circular,  $d=2,6$  m y longitud  $l=9,6$  m, se halla totalmente lleno de fuel de densidad  $\rho = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . La presión en el exterior del tanque es la atmosférica. Calcular la fuerza total (módulo y dirección) que ejerce el fluido en la mitad ABC del tanque.

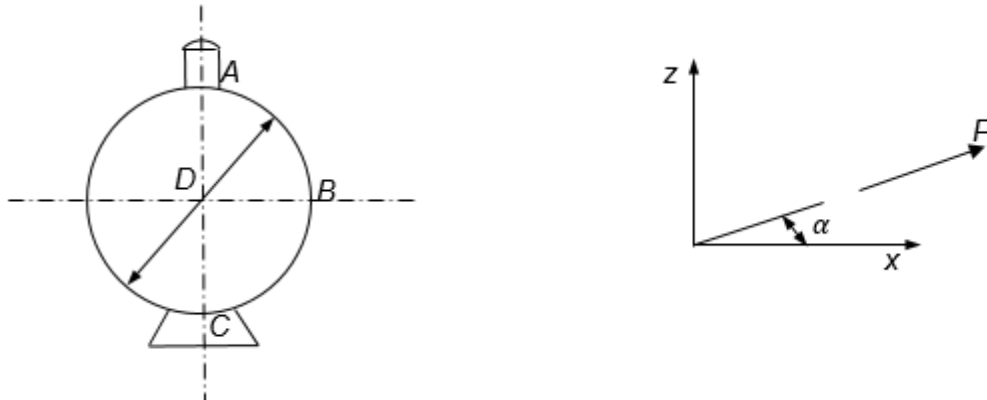


Figura 2.10. Esquema de análisis.

$$F_{px} = \rho g h_p A = \rho g \frac{d}{2} l = 900 * 9,81 * \frac{2,6^2}{2} * 9,6 = 286\,483 \text{ N}$$

$$F_{pz} = \rho g W = \rho g l \frac{\pi d^2}{8} = 900 * 9,81 * 9,6 \frac{\pi 2,6^2}{8} = 225\,004 \text{ N}$$

$$F_P = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{pz}}{F_{px}} = 38,15^\circ$$

### 2.3. Problemas propuestos

1. Calcular la presión  $P_x$  en la figura 2. 11 si  $l = 760$  mm,  $h = 500$  mm, el líquido 1 es agua ( $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) y el líquido 2 es mercurio ( $\rho_2 = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ ).

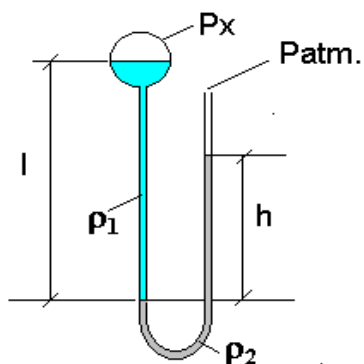


Figura 2.11. Esquema de análisis.

Solución

$$P_x = 59\,252,4 \text{ Pa}$$

2. Si el barómetro de la figura 2. 12 está lleno de aceite de silicio de densidad relativa  $\rho_r=0,86$ , calcular la altura h si la presión barométrica absoluta es de 101,3 kPa.

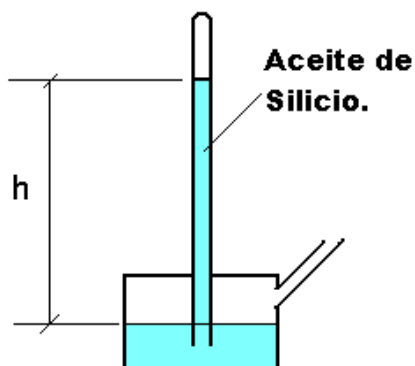


Figura 2.12. Barómetro.

Solución

$$h=12 \text{ m}$$

3. Determinar la presión  $p_2$  en el cilindro superior del multiplicador hidráulico (Figura 2.13), si la lectura del manómetro de resorte acoplado al cilindro inferior es igual a 4,6 at. El peso de los émbolos es  $G=400 \text{ kg}$ . La altura es  $h=2 \text{ m}$ , la relación de los diámetros es  $D/d=4$ ,  $D=0,4 \text{ m}$ . El peso volumétrico del aceite es  $\gamma_{ac} = 900 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$

Solución:

$$p_2=71,4 \text{ at.}$$

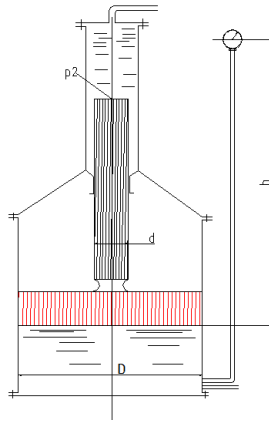


Figura 2.13. Multiplicador hidráulico.

4. Un recipiente de gas (Figura 2.14), fabricado con chapa de acero ( $\delta = 7,85$ ), de 9 mm de espesor, tiene la forma de un cilindro invertido de 15 m de diámetro y 9 m de alto. Los refuerzos o roblones, añaden un 2% al peso del recipiente  $h=75$  mm. La densidad del gas  $0,58 \text{ kg/m}^3$ , y del aire, que se supondrá constante,  $1,28 \text{ kg/m}^3$ . En la conducción del gas a  $h=120$  m se instala un manómetro con agua que marca  $\Delta h$ .

Calcular:

- $\Delta h$
- El contrapeso C que mantiene en equilibrio el sistema.

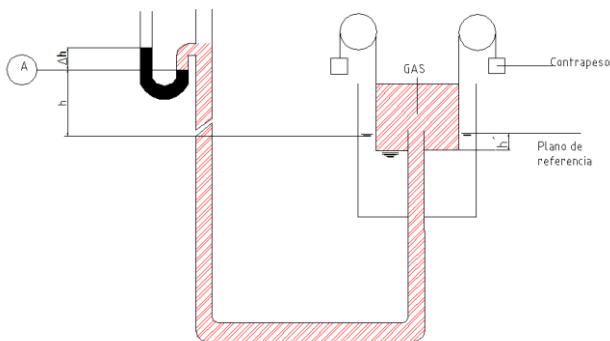


Figura 2.14. Recipiente de gas.

### Solución

$$\Delta h = 0,159 \text{ m} \quad C = 294,7 \text{ N}$$

5. Un depósito para combustible líquido (Figura 2. 15) tiene forma de un cilindro elíptico. Está lleno de líquido de peso volumétrico  $\gamma$ . Calcular la fuerza de presión del líquido sobre las paredes planas frontales del depósito y la fuerza que ensancha la pared lateral por las líneas AB, CD.

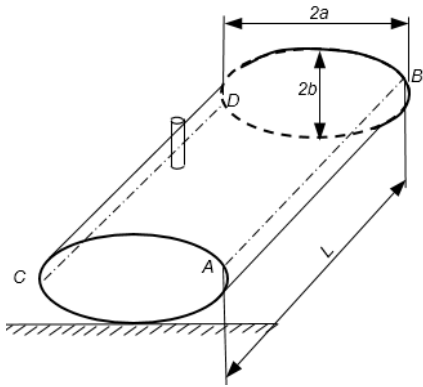


Figura 2. 15. Depósito para combustible líquido.

Solución:

La fuerza de presión del líquido sobre las paredes frontales es igual a  $\pi \gamma a b^2$ , la fuerza de presión que dilata la pared lateral es igual a  $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \gamma a b l$

## Capítulo III. Hidrodinámica y aplicación de la Ecuación de Bernoulli

### 3.1. Ley de Conservación de la energía

La primera ley de la Termodinámica plantea:

“La energía ni se crea ni se destruye solo se transforma”; por lo que “todas las formas de energía son equivalentes” y pueden ser transformadas unas en otras. (Howell & Buckius, 1990)

Energía térmica → Energía Mecánica → Energía Eléctrica.

Un ejemplo de esta transformación lo constituye el ciclo de las centrales termoeléctricas o los ciclos de potencia en general, que tienen como fin obtener potencia eléctrica a partir del calor.

Para realizar un adecuado control del uso de la energía es necesario conocer en los procesos industriales y en el sector de los servicios como evaluar las transformaciones energéticas que tiene lugar en el movimiento de fluidos.

Formas de energía presentes en el flujo de fluidos.

- Energía cinética ( $E_c$ ).
- Energía potencial ( $E_p$ ).
- Energía interna ( $E_i$ ).

Energía cinética. ( $E_c$ )

La Energía Cinética de un cuerpo rígido de masa ( $m$ ) que se mueve a una velocidad ( $v$ ) queda definida según la ecuación 3.1.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

Para un fluido con todas las partículas moviéndose a la misma velocidad, su energía cinética será también:

$$E_c = \frac{1}{2}m^0v^2 \quad (3.2)$$

Donde:

$m^0 = \sum m$ .- Sumatoria de las masas del conjunto de partículas en movimiento.

Expresada esta Energía Cinética de forma específica (Energía / Unidad de peso) se tiene:

$$\frac{E_c}{\text{Peso}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\gamma V} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{g}\right)Vv^2}{\gamma V} = \frac{v^2}{2g} \quad (3.3)$$

Dimensionalmente se expresa como:

$$\frac{E_c}{\text{Peso}} = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\frac{L}{t}\right)^2}{\frac{L}{t^2}} = L$$

En el SI la unidad de la Energía Cinética es el metro.

Como en la generalidad de los casos la velocidad en los conductos de las distintas partículas fluidas no es la misma, se hace necesario integrar para obtener el verdadero valor de ésta energía. No obstante resulta muy conveniente expresar el verdadero valor de la Energía Cinética en función de la velocidad media del fluido y afectarla por un “factor de corrección de la Energía Cinética” ( $\alpha$ ).

$$\frac{E_{c\text{real}}}{\text{Peso}} = \alpha \frac{v^2}{2g} \quad (3.4)$$

Donde:

$\alpha = 1$  .- Para una distribución uniforme de velocidades

$\alpha = 1,02 - 1,15$  .- Para flujo turbulento

$\alpha = 2$  .- Para Flujo laminar

Es insignificante el error cuando consideramos  $\alpha = 1$  en la mayoría de los cálculos de ingeniería para flujo turbulento.

### Energía Potencial

La energía potencial de una partícula de fluido depende de su altura ( $z$ ) por encima de un plano arbitrario de referencia.

$$E_p = W * \Delta Z \quad (3.5)$$

Donde:

$W$  .- Peso de la partícula de fluido

$\Delta Z$  .- Distancia por encima del plano de referencia

La energía potencial por unidad de peso es:

$$\frac{E_p}{\text{Peso}} = \frac{W * \Delta Z}{W} = \Delta Z \quad (3.6)$$

Dimensionalmente

$$\frac{E_p}{\text{Peso}} = \frac{F * l}{F} = l$$

En el Sistema Internacional la unidad es el metro (m).

### Energía Interna

La energía interna es energía almacenada y está asociada con el estado molecular o interno de la sustancia.

Se puede almacenar en muchas formas:

- Térmica.
- Nuclear.
- Química.
- Electrostática.

En el curso solo se estudiará la térmica, ésta depende de:

- El movimiento molecular.
- Las fuerzas de atracción intermolecular.

*“La Energía Interna (Ei) es una función de la temperatura”.*

Para un proceso a volumen constante la variación de la energía interna por unidad de masa es:

$$\Delta E_i = C_v * \Delta T \quad (3.7)$$

Donde:

Cv.- Calor específico de la sustancia a volumen constante. Sus unidades en el Sistema Internacional

son:  $\frac{N * m}{Kg * K}$

Las unidades de la Energía Interna en el Sistema Internacional son:

$$\Delta E_i = \frac{N*m}{kg*K} * K = \frac{N*m}{kg} \quad (3.8)$$

La ecuación 3.8 expresa la Energía Interna por unidad de masa, dividiendo esta expresión entre la aceleración gravitatoria se obtiene la Energía Interna por unidad de peso.

$$\Delta E_i = \frac{N*m}{kg*g} = \frac{N*m}{N} = m \quad (3.9)$$

La Ecuación general de la energía para el flujo estacionario de cualquier fluido (3.10) y la Ecuación de Continuidad son ecuaciones claves en la solución de Problemas de Flujo de Fluido.

Para el flujo compresible es necesario utilizar una tercera ecuación que es la Ecuación de Estado de los Gases (Ideales o reales).

La Ecuación General de la Energía para Flujo Estacionarios Incompresibles puede simplificarse en determinadas condiciones y se puede plantear:

$$\frac{p_1}{\gamma} + Z_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + hm + Q_c = \frac{p_2}{\gamma} + Z_2 + \alpha \frac{v_2^2}{2g} + (EI_2 - EI_1) \quad (3.10)$$

Donde:

- En un sistema donde el flujo es incompresible  $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$
- Para flujos turbulentos  $\alpha>1$ , pero muy cercano a 1 y se puede considerar  $\alpha=1$



- Si no hay transferencia de calor  $Q_c=0$

La ecuación 3.10 queda entonces expresada como:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + hm = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + (EI_2 - EI_1) \quad (3.11)$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 + hm = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + hp \quad (3.11a)$$

El término  $EI_2 - EI_1 = hp$  representa las pérdidas friccionales en el sistema.

En caso de no existir máquina en el sistema y considerar las pérdidas despreciables, la ecuación 3.11 a se transforma en la ecuación 3.12

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 = Cte \quad (3.12)$$

La ecuación 3.12 es la *Ecuación de Bernoulli* en honor a Daniel Bernoulli (1700 – 1782). El teorema data de 1738 y es una forma de manifestar la *Ecuación de Conservación de la Energía*.

### 3.2. Problemas resueltos

#### Problema 1

Para medir el gasto de gasolina que fluye por un tubo de Diámetro  $d=14$  mm se halla instalada una tobera (Figura 3.1) de diámetro  $d=9$  mm y van acoplados los piezómetros (ver figura).

Determinar el gasto de gasolina  $Q$  en L/s, si la diferencia de niveles de gasolina en los piezómetros es  $h=1,5$  m. ¿Cómo cambiara la diferencia de alturas  $H$ , si la gasolina se sustituye por agua con el mismo gasto  $Q$ ?

Nota: La densidad para la gasolina es  $\rho = 680 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$

Datos

Diámetro del tubo:  $D= 14$  mm

Tobera  $d= 9$  mm

$h= 1,5$  m

Aplicando la Ecuación de Bernoulli 3.12

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Debido a que ambos niveles del líquido son iguales dentro del tubo  $Z_1=Z_2=0$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

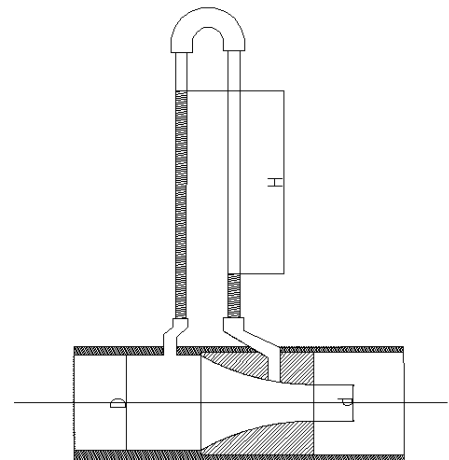


Figura 3.1 Tobera.

De la ecuación de continuidad  $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} V_1$$

$$V_2 = \frac{\frac{3,14 * 0,014 \text{ m}^2}{4}}{\frac{3,14 * 0,009 \text{ m}^2}{4}} V_1$$

$$V_2 = 2,42 V_1$$

Entonces

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{(2,42 V_1)^2 - V_1^2}{2g}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{4,856 V_1^2}{2g}$$

$$\text{Determinación de } P_1 - P_2 = \rho g h = 680 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 1,5 \text{ m} = 10006,2 \text{ Pa}$$

$$4,856 V_1^2 = \frac{2 * 10006,2 \text{ Pa}}{680 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

$$V_1 = 2,46 \text{ m/s}$$

Determinación del gasto Q en L/s

$$Q = A_1 V_1 = \frac{3,14 * 0,014 \text{ m}^2}{4} * 2,46 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,786 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,378 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

## Problema 2

Al medidor de Venturi cuyas dimensiones son:  $D=50 \text{ mm}$  y  $d=30 \text{ mm}$ , está acoplado un manómetro diferencial en U de mercurio (Figura 3.2). Determinar el gasto de agua Q, si la indicación del manómetro es  $h= 300 \text{ mm}$ .

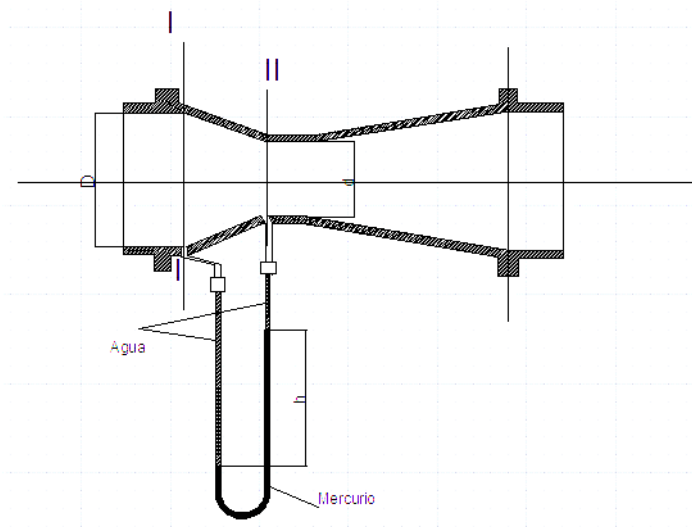


Figura 3.2. Medidor de Venturi.

Datos

$$D=50 \text{ mm}$$

$$d=30 \text{ mm}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Debido a que ambos niveles del líquido son iguales dentro del tubo  $Z_1=Z_2=0$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

De la ecuación de continuidad  $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} V_1$$

$$V_2 = \frac{\frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4}}{\frac{3,14 \cdot 0,03^2}{4}} V_1$$

$$V_2 = 2,78 V_1$$

Entonces

$$P_1 - P_2 = \rho_{hg} g h = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 0,3 \text{ m} = 40024,8 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{(2,78 V_1)^2 - V_1^2}{2g}$$

$$\frac{40024,8}{1000 * 9,81} = \frac{7,73V_1^2}{2 * 9,81}$$

Despejando  $V_1$  tenemos:

$$V_1 = 3,449 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determinación del gasto Q

$$Q = A_1 V_1 = \frac{3,14 * 0,05\text{m}^2}{4} * 3,45 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,77 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 6,77 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

### Problema 3

El ventilador centrífugo (Figura 3.3) aspira aire de la atmósfera a través de una tobera (ver figura). A la parte cilíndrica de la tobera cuyo diámetro es  $D= 200 \text{ mm}$  va acoplado un tubo de cristal cuyo extremo inferior está sumergido en un recipiente con agua. El agua en el tubo se elevó hasta la altura  $h=250 \text{ mm}$ . Determinar la cantidad de aire que se aspira por segundo  $\gamma = 1,29 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$

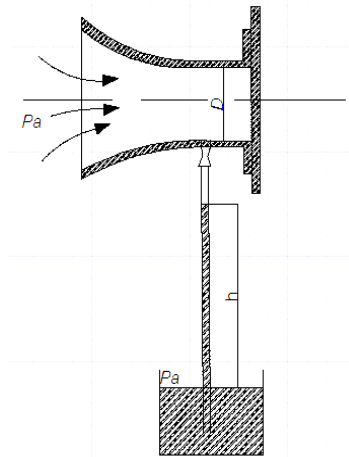


Figura 3.3. Ventilador centrífugo.

Datos

Diámetro  $D=200 \text{ mm}$

Longitud de elevación del agua  $L=250 \text{ mm}$

En el caso de la presión inferior a un metro de la columna de agua o su equivalente que es el caso general de casi todos los ventiladores, se desprecia el fenómeno de la compresibilidad, por lo tanto, se considera a lo largo de todo su movimiento que el gas se comporta ideal a lo largo de todo el conducto.

Aplicando la Ecuación de Bernoulli

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_{\text{agua}}}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Debido a que ambos niveles del líquido son iguales dentro del tubo  $Z_1=Z_2=0$

A su vez debido al aire en calma a la entrada del tubo  $V_1 = 0$

$$P_{\text{agua}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 0,25 \text{ m} = 2452,5 \text{ Pa}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{-2452,5 \text{ Pa}}{1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$V_2 = 61,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determinación de la cantidad de aire que se aspira.

$$Q = A_2 V_2 = \frac{\pi D^2}{4} * V_2 = \frac{\pi * 0,2^2}{4} * 61,7 = 1,94 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

#### Problema 4

Hallar la velocidad de la corriente de agua en el tubo si la lectura del manómetro de mercurio unido al tubo de Pitot y a los orificios de presión estática es  $h = 600 \text{ mm}$  (Figura 3.4)

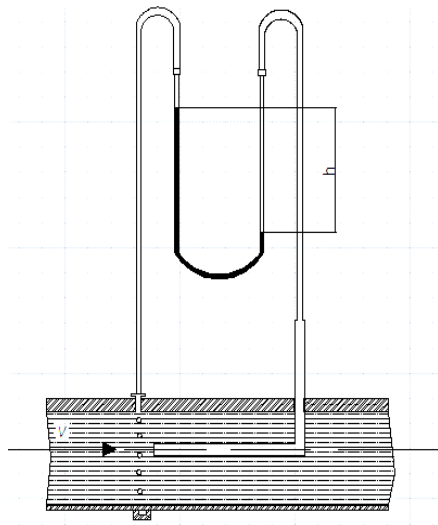


Figura 3.4. Esquema de análisis.

Aplicando la Ecuación de Bernoulli

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Debido a que los niveles de altura  $Z_1=Z_2=0$  y que la corriente en 2, es decir a la entrada del tubo de pitot es cero  $V_2=0$  tenemos:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

De aquí que:

$$P_1 - P_2 = \rho h g = 13\,600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6 \text{ m} = 80\,049,6 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\frac{80049,6 \text{ Pa}}{1000 \cdot 9,81} = \frac{V_1^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$V_1 = 12,65 \text{ m/s}$$

### 3.3. Problemas propuestos

1. En la figura 3.5 se muestra un sifón que se utiliza para sacar agua de una piscina. El conducto que conforma el sifón tiene un diámetro interior de 40 mm y termina con una boquilla de 25 mm de diámetro interior. Suponiendo que no hay pérdidas de energía en el sistema, calcule el flujo a través de sifón y la presión en los puntos B, C, D y E.

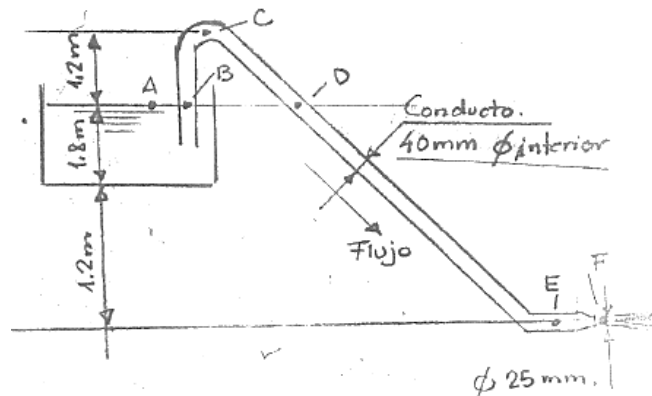


Figura 3.5. Sifón.

#### Solución

$$Q = 3,76 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad , \quad P_B = P_D = -4\,500 \text{ Pa} \quad , \quad P_C = -16\,272 \text{ Pa} \quad ,$$

$$P_E = 24\,930 \text{ Pa}$$

2. En una tubería de diámetro  $D=50 \text{ mm}$  se ha colocado delante de la válvula un manómetro (Figura 3.6). Estando cerrada la válvula, el manómetro indica una presión igual a 6 at. Cuando la válvula está abierta la lectura disminuye hasta 2 at. Determinar el gasto de agua en la tubería.

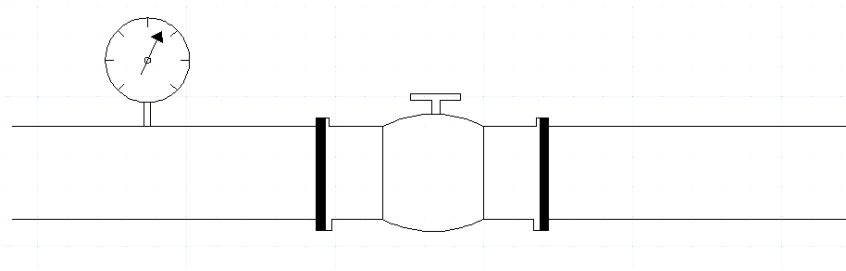


Figura 3.6. Esquema de análisis.

### Solución

Escribiendo la ecuación de Bernoulli para la superficie libre en el depósito donde la presión es constante y para la sección en que está puesto el manómetro, obtenemos que  $Q=55 \text{ l/s}$ .

- Determinar la rarificación de aire (en mm c.m) en la sección estrecha de la boquilla adicional de aire del carburador del motor del avión (Figura 3.7), si el aire se aspira directamente de la atmósfera a la altura cero ( $Q=0,15 \text{ m}^3/\text{s}$ ). El diámetro de la sección estrecha de la boquilla adicional de aire es  $D= 40 \text{ mm}$ , el diámetro del pulverizador de gasolina es  $d = 10 \text{ mm}$  y  $\gamma = 1,29 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$

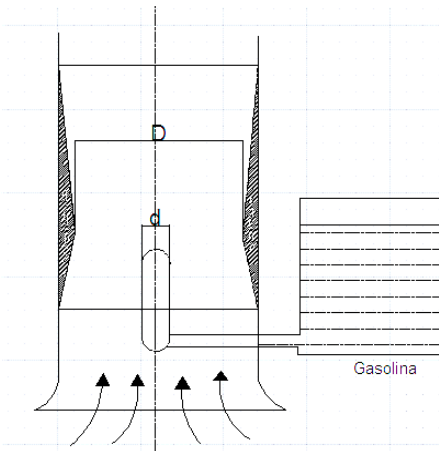


Figura 3.7. Carburador del motor de avión.

### Solución

La magnitud de la rarificación (vacío) es igual a 78,5 mm c.m.

- Determinar la velocidad de afluencia de agua en la boquilla de la manga contra incendio y trazar la línea piezométrica a lo largo de la tubería sin considerar las pérdidas. Altura de carga  $H=5 \text{ m}$ , diámetros  $d_1=20 \text{ mm}$ ,  $d_2=15 \text{ mm}$ ,  $d_3= 10 \text{ mm}$ .

### Solución

$$v_3 = 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## Capítulo IV. Teoría de Semejanzas

### 4.1. Números adimensionales

El uso de los modelos y la confianza en los estudios sobre los mismos, han aumentado constantemente a través de la era de la ingeniería moderna; el ingeniero aeronáutico obtiene información a partir de pruebas de modelos en el túnel de viento; el ingeniero mecánico prueba modelos de turbinas y bombas. El uso de modelos tiene una justificación económica, un modelo cuesta poco, por ser pequeño en comparación con el prototipo para el cual se construye, y sus resultados pueden reflejarse en ahorros en muchas ocasiones.

**El número de Reynolds:** el número de Reynolds  $VD\rho/\mu$  es la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Un número de Reynolds crítico distingue entre los diferentes regímenes de flujo, tales como laminar o turbulento en tuberías, en la capa límite, o alrededor de objetos sumergidos. El valor particular depende de la situación. En flujo compresible, el número de Mach generalmente es más importante que el número de Reynolds.

**El número de Froude:** el número de Froude  $VL\sqrt{g/l}$ , cuando se eleva al cuadrado y se multiplica y se divide por  $\rho A$ , es una relación de las fuerzas dinámicas (o inerciales) con respecto a las fuerzas gravitacionales. Con un flujo a superficie líquida libre (donde  $l$  se reemplaza por  $y$ , la profundidad) la naturaleza del flujo depende de si el número de Froude es mayor o menor que la unidad. Este número es útil en cálculos de resalto hidráulico, en el diseño de estructuras hidráulicas y de barcos.

**El número de Weber:** el número de Weber  $V^2\rho/\sigma$  es la relación de las fuerzas inerciales con respecto a las fuerzas de tensión superficial. Este es importante en interfaces gas-líquido o líquido-líquido y también donde estas interfaces se encuentran en contacto con una frontera.

**El número de Mach:** la velocidad del sonido en un líquido se escribe como  $\sqrt{K/\rho}$  si  $K$  es el módulo de elasticidad volumétrica o  $c = \sqrt{kRT}$  donde  $k$  es la relación de calor específico y  $T$  la temperatura absoluta para un gas perfecto.  $V/c$  o  $VL\sqrt{K/\rho}$  es el número de Mach. Es una medida de la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas elásticas.

### 4.2. Problemas resueltos

#### Problema 1

Un modelo de submarino a escala de 1:15 va a ser ensayado en un canal hidrodinámico de agua salada. Si el submarino se mueve a una velocidad de 12 mph. ¿A qué velocidad deberá ser arrastrado el modelo para que exista semejanza dinámica?



### Datos

Escala: 1:15

Agua salada

$v_p$ : 12 mph

Igualando los números adimensionales y despejando la velocidad del modelo tenemos:

$$Re_p = Re_m$$

$$\left(\frac{F_i}{F_v}\right)_p = \left(\frac{F_i}{F_v}\right)_m$$

$$\left(\frac{v * l}{\nu}\right)_p = \left(\frac{v * l}{\nu}\right)_m$$

$$v * l = \nu * l_m$$

$$120 \text{ mph } l = \nu_m * \frac{l_m}{15}$$

$$\nu_m = 180 \text{ mph}$$

Si las viscosidades fueran diferentes

$$\left(\frac{v * l}{\nu_{\text{agua}}}\right)_p = \left(\frac{v * l}{15 \nu_{\text{agua}}}\right)_m$$

$$\nu_m l \nu_{\text{agua}} = 15 \nu l \nu_{\text{agua } m}$$

$$\nu_m = \frac{15 \nu_{\text{agua}} \nu l}{l \nu_{\text{agua } p}} = \frac{15 \nu \nu_{\text{agua } m}}{\nu_{\text{agua } p}}$$

### **Problema 2**

A través de una tubería de 60 cm de diámetro está circulando aire a 20 °C a una velocidad media de 2,0 m/s. ¿Cuál debe ser el diámetro de la tubería que a transportar agua a 15 °C y a una velocidad de 1,22 m/s de lugar a un flujo dinámicamente semejante?

### Datos

$\varnothing_t$ : 60 cm

Aire 20 °C  $\nu = 1,448 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$v_{\text{aire}} = 2,0 \text{ m/s}$

Agua 15 °C  $\nu = 1,142 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$v_{\text{agua}} = 1,22 \text{ m/s}$

$$Re_p = Re_m$$

$$\left(\frac{v * d}{\nu}\right)_p = \left(\frac{v * d}{\nu}\right)_m$$

$$\left(\frac{2 \frac{m}{s} * 0,6m}{1,488 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}\right)_p = \left(\frac{1,22 \frac{m}{s} * d}{1,142 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}}\right)_m$$

$$d = 0,075 \text{ m} = 7,5 \text{ cm}$$

### Problema 3

Un barco cuyo casco tiene una longitud de 140 m ha de moverse a 7,50 m/s.

- Calcular el número de Froude.
- Para la semejanza dinámica ¿A qué velocidad debe remolcarse en agua un modelo construido a una escala 1:30?

Cálculo del número de Froude

$$F = \frac{v}{\sqrt{l * g}} = \frac{7,5 \text{ m/s}}{\sqrt{140 \text{ m} * 9,81 \frac{m}{s^2}}} = 0,2$$

$$\left(\frac{v}{\sqrt{l * g}}\right)_p = \left(\frac{v}{\sqrt{l * g}}\right)_m$$

$$\left(\frac{7,5}{\sqrt{140 * 9,81}}\right)_p = \left(\frac{v}{\sqrt{\frac{140}{30} * 9,81}}\right)_m$$

$$v = 1,37 \text{ m/s}$$

### 4.3. Problemas propuestos

- Un aceite de viscosidad cinemática  $4,70 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  va a utilizarse en un prototipo en el que son fuerzas predominantes las debidas a la viscosidad y a la gravedad. También se desea experimentar sobre un modelo a escala 1:5. ¿Qué valor debe tener la viscosidad del líquido del modelo para que tanto el número de Froude como el de Reynolds sean iguales en modelo y prototipo?
- El modelo de un recipiente se vacía en 4 minutos al abrir una compuerta de tajadera. El modelo está construido a una escala 1:225. ¿Cuánto tiempo tardara en vaciarse el prototipo?

3. La resistencia medida en agua dulce, presentada a un modelo de barco de 2,50 m, moviéndose a una velocidad de 2,0 m/s, fue de 4,40 kg.
- ¿Cuál será la velocidad del prototipo de 40 m?
  - ¿Cuál será la fuerza necesaria para mover a esta velocidad el barco en agua salada?

## Capítulo V. Teoría de la capa límite

### 5.1. Casos Prácticos.

La teoría de la capa límite fue introducida por Prandtl. Esta teoría establece que, para un fluido en movimiento, toda la pérdida por fricción tiene lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (llamada capa límite), y que el flujo exterior a dicha capa puede considerarse como carente de viscosidad. La distribución de velocidades en la zona próxima al contorno es influida por la tensión cortante en el contorno. En general, la capa límite es muy delgada en la parte de aguas arriba del contorno y va aumentando su espesor hacia aguas abajo por la acción continuada de las tensiones cortantes.

Para números de Reynolds bajos, toda la capa límite es gobernada por la acción de las fuerzas viscosas y en su interior el flujo es laminar. Para valores intermedios, la capa límite es laminar cerca de la superficie del contorno y turbulenta en las zonas algo más alejadas, y para valores muy elevados, la capa límite es totalmente turbulenta.

**Placas Planas:** En el caso de una placa plana de L m de longitud, mantenida paralelamente al movimiento relativo del fluido, se aplican las siguientes ecuaciones.

#### 1. **Capa límite laminar** (hasta números de Reynolds alrededor de 500.000)

Coefficiente de resistencia medio

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} = \frac{1,328}{\sqrt{VL/\nu}} \quad (V.1)$$

El espesor de la capa límite  $\delta$  a una distancia genérica x viene dada por

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,20}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5,20}{\sqrt{Vx/\nu}} \quad (V.2)$$

Tensión cortante  $\tau_o$  ; se calcula por

$$\tau_o = 0,33\rho V^{3/2}\sqrt{\nu/x} = 0,33\left(\frac{\mu V}{x}\right)\sqrt{Re_x} = \frac{0,33\rho V^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (V.3)$$

Donde

V= velocidad de aproximación del fluido al contorno (velocidad no perturbada).

x= distancia al borde de ataque.

L= longitud total de la placa.

$Re_x$  = número de Reynolds local para la distancia x.

Como ponen de manifiesto las fórmulas dadas, el espesor de la capa límite es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud  $x$  y la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática  $\nu$  e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad. Análogamente, la tensión cortante en la superficie del contorno  $\tau_o$  es directamente proporcional a la raíz cuadrada del producto de  $\rho$  y  $\mu$  a la potencia de tres medios de  $V$  e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de  $x$ .

## 2. Capa límite turbulenta (contorno liso)

- a. Coeficiente de resistencia medio

$$C_D = \frac{1,328}{Re^{0,20}} \quad \text{para } 2 \cdot 10^5 < Re < 10^7 \quad (V.4)$$

- b. El espesor  $\delta$  de la capa límite se calcula mediante

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5,20}{\sqrt{Re_x^{0,20}}} \quad \text{para } 5 \cdot 10^4 < Re < 10^6 \quad (V.5)$$

- c. La tensión cortante en la pared se estima por

$$\tau_o = \frac{0,023 \rho V^2}{(\delta V / \nu)^{1/4}} = 0,0587 \frac{V^2}{2} \rho \left( \frac{\nu}{x V} \right)^{1/5} \quad (V.6)$$

## 3. Capa límite en la transición: De laminar a turbulenta sobre la placa (Re de 500.000 a 20 000.000 aproximadamente)

- a. Coeficiente de resistencia medio

$$C_D = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} - \frac{1.700}{Re} \quad (V.7)$$

## 5.2. Problemas resueltos

### Problema 1

Una placa regular lisa de 1,2 m x 24,4 m se mueve a través de una masa de agua a 20 °C en la dirección de su longitud. La resistencia sobre la placa a ambos lados es de 8,0 kN. Determinar:

- La velocidad de la placa.
- El espesor de la capa límite en el borde de salida.
- La longitud  $X_c$  de la capa límite si en el borde de ataque reinan las condiciones laminares.

Para la longitud de la placa y el fluido agua puede considerarse como buena la hipótesis de flujo turbulento del diagrama G (Giles, Evett & Liu, 1994).) tenemos:

$$C_d = 0,002$$

$$F_R = 2 C_D \rho A \frac{V^2}{2}$$

$$8 \text{ kN} = 2 * 0,002 * 1 * (1,2 \times 24,4) V^2$$

$$V^2 = \frac{0,273}{C_D} = 11,7 \text{ m/s}$$

Determinación del N° de Reynolds

$$Re = \frac{V * l}{\nu} = \frac{11,7 * 24,4}{9,48 \cdot 10^{-7}} = 2,8 \cdot 10^8$$

Se determina nuevamente el valor de Cd

$$C_d = \frac{0,445}{[\log(2,8 \cdot 10^8)^{2,58}]} = 0,00184$$

Por tanto

$$V = 12,2 \text{ m/s}$$

b) Cálculo del espesor de la capa límite

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,22}{Re^{0,167}}$$

$$\delta = \frac{0,22 * 24,4}{(3,03 \cdot 10^8)^{0,167}} = 0,206 \text{ m}$$

c) Suponiendo que el N° de Reynolds crítico es igual a 500 en el límite de la zona de transición

$$Re_c = \frac{V x_c}{\nu}$$

$$500 = \frac{12,2 x_c}{9,84 \cdot 10^{-7}}$$

$$x_c = 0,04 \text{ m}$$

### 5.3. Problemas propuestos

1. Una placa lisa de 3,05 m por 1,22 m se mueve a través del aire (15,6°C) con una velocidad relativa de 1,22 m/s, manteniéndose el movimiento paralelo a su superficie y a su longitud. Para condiciones laminares, calcular el espesor de la capa límite en el centro de la placa y en el borde de salida.

Solución

$$\delta_1 = 22,3 \text{ mm (centro de la placa)}, \delta_2 = 31,5 \text{ mm (borde de salida)}.$$

## Capítulo VI. Flujo de Fluidos en tubos

### 6.1. Problema resuelto integrador

La siguiente instalación Figura 6.1 se emplea para elevar agua a 30 °C y un caudal Q de 100 m<sup>3</sup>/h a un depósito, donde se almacena para su posterior utilización en procesos industriales. Se desea construir la curva característica del sistema de tuberías.

#### Datos

Longitud de impulsión  $L_i=215$  m

Longitud de aspiración  $L_a=7$  m

Diámetro tubería impulsión  $D_i=125$  mm

Diámetro tubería aspiración  $D_a=150$  mm

Caudal  $Q= 100$  m<sup>3</sup>/h

#### Accesorios de aspiración

1. Cono difusor excéntrico
2. Codo 90°
3. Válvula de pie.

#### Accesorios de impulsión

1. Cono difusor concéntrico
2. Válvula de retención
3. Válvula de compuerta
4. Codo de 45°

Ambas tuberías son de acero comercial

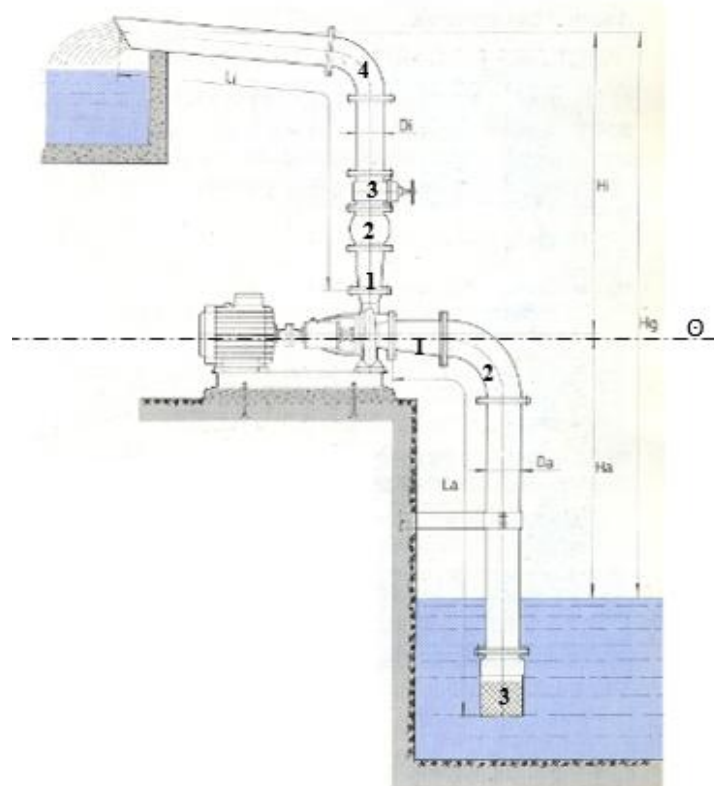


Figura 6.1 Esquema de análisis.

Aplicando la ecuación de Bernoulli para el sistema de referencia indicado

$$\frac{P_1}{\rho g} - Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_b = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_f$$

Como  $P_1=P_2=0$  por ser presiones atmosféricas

$$\frac{V_1^2}{2g} = 0 \text{ Tanque de grandes dimensiones}$$

$$H_b = Z_2 + Z_1 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_f \quad (\text{Ec. 1})$$

Donde

$$\sum h_f = \sum_1^2 h_{fT.asp} + \sum_1^2 h_{fT.desc}$$

#### **Determinación de las pérdidas del tramo de aspiración**

$$\sum_1^2 h_{fT.asp} = \sum_1^2 h_{ftramo\_recto} + \sum_1^2 h_{faccesorios}$$

$$\sum_1^2 h_{ftramo\_recto} = \lambda \frac{L}{d} * \frac{V^2}{2g}$$

Para la determinación del coeficiente de fricción

Cálculo del número de Reynolds

$$R_e = \frac{\rho v d}{\mu}$$

De las tablas de propiedades del líquido tenemos:

$$T=30\text{ }^{\circ}\text{C} \quad \mu = 0,8 \text{ cP} \quad \rho = 995,7 \text{ kg/m}^3$$

De la ecuación de continuidad

$$Q = A * V$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0,0277 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi * 0,15^2}{4}} = 1,56 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{995,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 1,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 0,15 \text{ m}}{0,8 * 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}}$$

$R_e = 291\,242,3$  Estamos en presencia de régimen turbulento.

Según el material de la tubería la rugosidad superficial es de  $\varepsilon=0,2 \text{ mm}$

Determinación de la rugosidad relativa

$$\xi = \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,2 \text{ mm}}{150 \text{ mm}} = 0,00133$$

Por tanto entrando al Diagrama de Moody con  $R_e = 291\,242,3$  y  $\xi = 0,00133$  para un régimen turbulento



$$\lambda = 0,021$$

Dejando la expresión de la pérdida en función del caudal tenemos:

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{tramo\_recto\_asp}}} = 0,021 \frac{7 \text{ m}}{0,15 \text{ m}} * \frac{Q^2}{\frac{2*9,81*\pi^2*0,15^4}{16}}$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{tramo\_recto\_asp}}} = 163,3 Q^2$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_asp}}} = \xi * \frac{V^2}{2g}$$

Pérdidas en los accesorios de aspiración.

1. Cono difusor excéntrico  $\xi = 0,09$
2. Codo  $90^\circ \xi = 0,6$
3. Válvula de pie.  $\xi = 2$

$$\sum \xi_{\text{accesorios}} = 2,69$$

Procediendo de manera análoga tenemos:

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_asp}}} = 163,3 Q^2 \sum \xi_{\text{accesorios}}$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_asp}}} = 439 Q^2$$

**Determinación de las pérdidas del tramo de impulsión**

$$\sum_1^2 h_{f_{T.\text{imp}}} = \sum_1^2 h_{f_{\text{tramo\_recto}}} + \sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios}}}$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{tramo\_recto}}} = \lambda \frac{L}{d} * \frac{V^2}{2g}$$

Para la determinación del coeficiente de fricción

Cálculo del número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

De las tablas de propiedades del líquido tenemos:

$$T=30^\circ\text{C} \quad \mu = 0,8 \text{ cP} \quad \rho = 995,7 \text{ kg/m}^3$$

De la ecuación de continuidad

$$Q = A * V$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0,0277 \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi * 0,125^2}{4}} = 2,25 \text{ m/s}$$

$$R_e = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{995,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 2,25 \frac{\text{m}}{\text{s}} * 0,125 \text{ m}}{0,8 * 10^{-3} \text{ Pa.s}}$$

$R_e = 350\,050,8$  Estamos en presencia de régimen turbulento

Según el material de la tubería la rugosidad superficial es de  $\varepsilon=0,2 \text{ mm}$

Determinación de la rugosidad relativa

$$\xi = \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0,2 \text{ mm}}{125 \text{ mm}} = 0,0016$$

Por tanto entrando al diagrama de Moody con  $R_e = 350\,050,8$  y  $\xi = 0,0016$  para un régimen turbulento

$$\lambda = 0,023$$

Dejando la expresión de la pérdida en función del caudal tenemos:

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{tramo\_recto\_imp}}} = 0,023 \frac{215 \text{ m}}{0,125 \text{ m}} * \frac{16 Q^2}{2 * 9,81 * \pi^2 * 0,125^4}$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{tramo\_recto\_imp}}} = 13\,388,6 Q^2$$

Pérdidas en los accesorios de impulsión

1. Cono difusor concéntrico.  $\xi = 0,152$
2. Válvula de retención.  $\xi = 2$
3. Válvula de compuerta.  $\xi = 0,9$
4. Codo de  $45^\circ$   $\xi = 0,35$

$$\sum \xi_{\text{accesorios}} = 3,4$$

Procediendo de manera análoga tenemos:

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_imp}}} = \frac{Q^2}{2 g A^2} \sum \xi$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_imp}}} = \frac{16Q^2}{2 * 9,81 * \pi^2 * d^4} = \frac{16Q^2}{2 * 9,81 * \pi^2 * 0,125^4}$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_imp}}} = 338Q^2 \sum \xi$$

$$\sum_1^2 h_{f_{\text{accesorios\_imp}}} = 1150,6 Q^2$$

Entonces de la Ec.1

$$H_b = Z_2 + Z_1 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_f \quad (\text{Ec. 1})$$

$$H_b = 32 \text{ m} + 5 \text{ m} + 338 Q^2 + 13\,388,6 Q^2 + 1150,6 Q^2 + 163,3 Q^2 + 439 Q^2$$

$$H_b = 37 + 15\,472,2 Q^2$$

Construyendo la característica del sistema con ayuda del Excel dado los valores en la Tabla 1.

Tabla 1. Valores para la construcción de la curva característica del sistema de tuberías.

Caudal (m³/h)	Carga H(m)
20	37,478
40	38,910
60	41,298
80	44,641
100	48,938
120	54,191

La figura 6.2 muestra la representación de la carga estática y dinámica del sistema de tuberías del problema anterior.

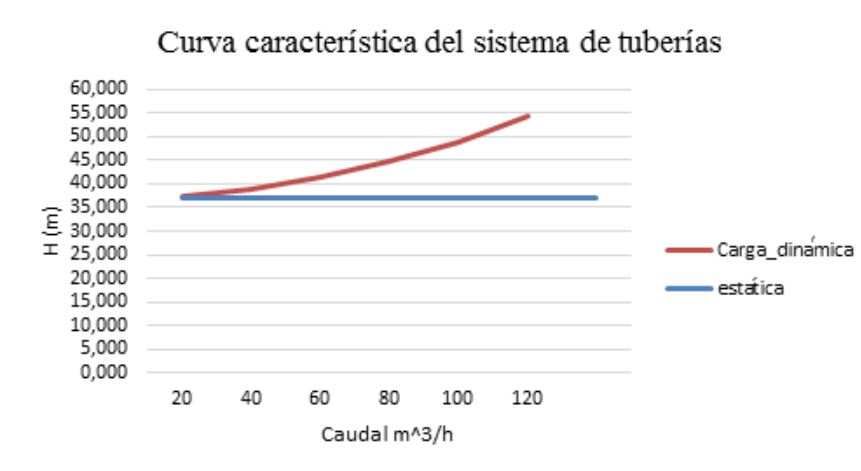


Figura 6.2. Curva característica del sistema de tuberías.

Fuente: Elaboración propia.

## 6.2. Problemas propuestos

1. En la Figura 6.3 muestra un esquema de un sector de aspiración del conducto de aceite en un avión. Determinar la presión absoluta del aceite a la entrada de la bomba, siendo: la altura de vuelo  $H=8$  km (presión atmosférica: 266,8 mm c.m), el gasto del aceite  $Q=1,25$  l/s, el diámetro del tubo  $d=40$  mm, la longitud  $l=1,5$  m, la temperatura del aceite  $60^\circ\text{C}$ , el coeficiente de resistencia de la llave  $\xi=2,0$  y  $\gamma_{ac} = 860 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}$  y la altura  $h=1,0$  m. La presión del aire en el depósito es igual a la atmosférica.

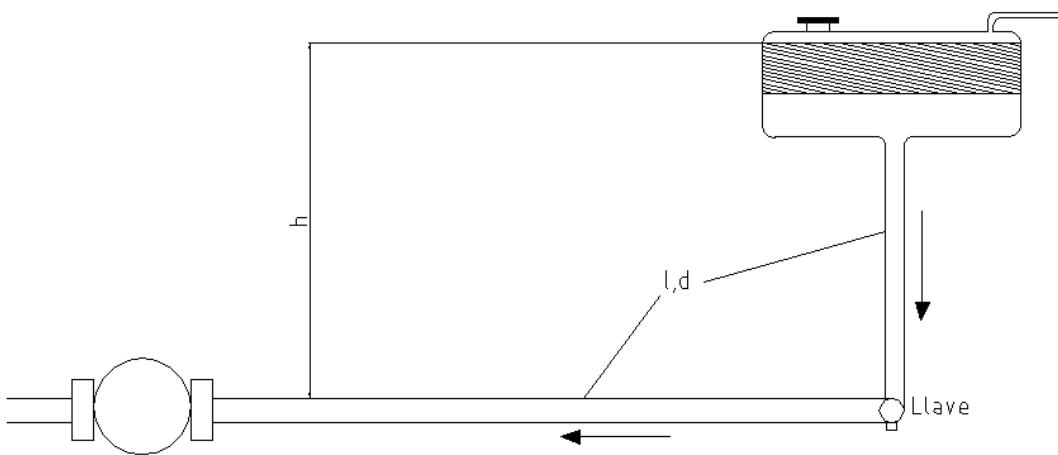


Figura 6.3. Esquema de un sector de aspiración del conducto de aceite en un avión.

### Solución

Aplicando Bernoulli para el movimiento del aceite desde el depósito hasta la bomba y tomando en consideración las pérdidas de altura de carga y el coeficiente de coriolis  $p = 4050 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$

2. La bomba aspira el agua del depósito A por un tubo de diámetro  $d=20$  mm en una cantidad  $Q=1$  l/s. La longitud total del tubo de aspiración es  $l=10$  m. La temperatura del agua es  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  lo que corresponde a la presión de formación del vapor  $p_t=0,2$  at. Despreciando las resistencias locales y aceptando el coeficiente  $\lambda=0,02$  determinar la altura máxima admisible de aspiración  $H_{asp}$  a condición de que la presión absoluta del agua a la entrada en la bomba supere en 1 m c.a a la presión de formación de vapor.

Solución

$$H_{asp} = 1 \text{ m}$$

## Capítulo VII: Flujo de fluidos compresibles. Sustentación

### VII.1 Fuerza de empuje ascensional

La fuerza de empuje ascensional o de sustentación es una fuerza que actúa sobre un cuerpo sumergido en dirección perpendicular al movimiento relativo entre el fluido y el cuerpo. (Smith, 1980) (Mataix, 1982)(Munson, 1999)(Potter, 2002)

El ejemplo más común de la acción de la fuerza de sustentación es el observado en el ala de un avión que es sostenido en el aire por esta fuerza. La explicación más elemental para tal fuerza de sustentación es que la velocidad del aire sobre la parte superior del ala es mayor que la velocidad media, mientras que la velocidad en la parte inferior de ala es menor que la velocidad media. La figura VII.1 b) presenta los perfiles de presión positivo y negativo sobre ambas superficies del ala.

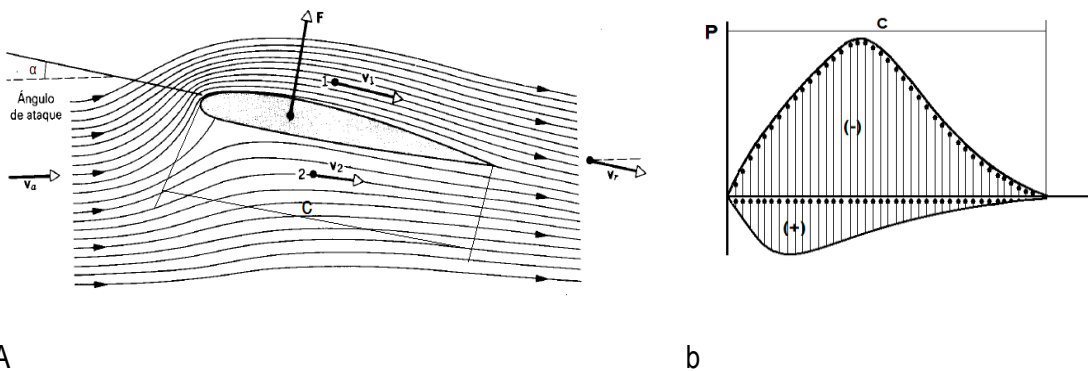


Figura VII.1. Perfiles de velocidad (a) y presión (b) en un ala moviéndose en un fluido en reposo.

Aplicando el teorema de Bernoulli a las líneas de corriente resulta que hay una presión menor en la parte superior del ala y una presión mayor en la parte inferior Figura I.1 b) lo que da lugar a una sustentación neta hacia arriba. (Elaboración propia)

La mayor velocidad en la parte superior del ala Figura VII.1 y la menor velocidad en la parte inferior se pueden explicar, sin dejar de tener en cuenta que se induce una circulación  $\Gamma$  (Gamma)

### VII.2 Circulación

Para poder explicar el concepto de Circulación es necesario conocer la ecuación que rige en el campo fluido de un torbellino o vórtice libre.

En el vórtice libre no hay consumo de energía procedente de una fuente exterior. El fluido gira gracias a una rotación previamente dada al mismo o debido a alguna acción interna (Fay, 1996) (Shames, 1967). Ejemplo de ello son: El torbellino en un río, el flujo giratorio que se produce en

recipientes de poca profundidad cuando el líquido se desaloja a través de un agujero en el fondo (lavamanos, bañaderas etc.) y el flujo en la carcasa de una bomba centrífuga fuera del rodete o impelente (en la voluta).

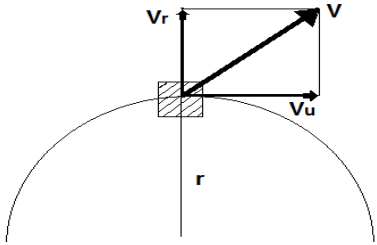


Figura VII.2. Partícula de fluido moviéndose en un vórtice libre. (Elaboración propia)

La segunda Ley de Newton se expresa a partir de la Ec. VII.1:

$$\sum F = \frac{d(m \cdot V)_s}{dt} \quad \text{Ec. VII. 1}$$

La sumatoria de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema fluido es igual a la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento (  $(m \cdot V)_s$  )

La ecuación VII.1 también puede expresarse como:

$$\sum F \cdot dt = d(m \cdot V)_s \quad \text{Ec. VII. 2}$$

Impulso de la fuerza=cambio en la cantidad de movimiento del sistema.

El momento de las fuerzas de impulso con respecto al centro de giro de la partícula de masa  $m$  moviéndose en una trayectoria circular con una velocidad  $V_t$  viene dada por la segunda ley de Newton la cual queda expresada a partir de la Ec. VII.3:

$$\tau = F \cdot r = \frac{d(m \cdot V_s) \cdot r}{dt} \quad \text{Ec. VII. 3}$$

$$\tau = \frac{d(m \cdot V_s \cdot \cos \alpha) \cdot r}{dt} = \frac{d(m \cdot V_u \cdot r)}{dt}$$

$$\tau = \frac{d (m \cdot V_u \cdot r)}{dt} \text{ Ec. VII. 3. 1}$$

Para el caso del Vórtice Libre (Fluido sin fricción) no hay un Par o Torque exterior aplicado por lo que la Ecuación VII.3.1 queda:

$$\tau = \frac{d (m \cdot V_u \cdot r)}{dt} = 0$$

Por lo que el término  $m \cdot V_u \cdot r = \text{Constante}$  y por ello para el vórtice libre se cumple que:

$$m V_1 r_1 = m V_2 r_2 \text{ Ec. VII. 3. 2}$$

Por lo que el término

$$V_u \cdot r = C \text{ Ec. VII. 3. 2a)}$$

La ecuación VII.3.2 a) es la ecuación que rige en el campo fluido de un vórtice o torbellino libre.

La circulación se puede definir haciendo uso de la Figura VII.3 donde las líneas de corriente representan un campo de flujo bidimensional y  $L$  representa cualquier trayectoria cerrada dentro del campo.

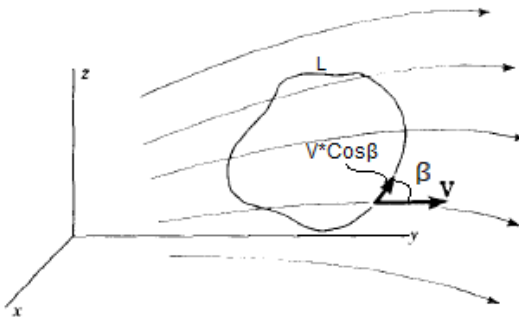


Figura VII.3. Circulación alrededor de una trayectoria cerrada en un campo bidimensional. (Elaboración propia)

**La circulación ( $\Gamma$ )** se define matemáticamente como una integral de línea de la velocidad a lo largo de una trayectoria cerrada, por tanto.



$$\Gamma = \int V \cdot dl = \int V \cos \beta \cdot dl$$

**Ec. VII. 4**

Aclarar que esta integral de línea es cerrada donde:

V. Velocidad en el campo fluido en el elemento dl.

dl. Elemento de la trayectoria L.

$\beta$ . Ángulo entre V y la tangente a la trayectoria (en el sentido positivo a lo largo de la misma) en dicho punto.

Retomando a la Figura I.1 la mayor velocidad en la parte superior del ala y la menor velocidad en la parte inferior se pueden explicar al tener en cuenta que se induce una circulación  $\Gamma$ . Cuando el ala se mueve con relación al campo de flujo Figura VII.4

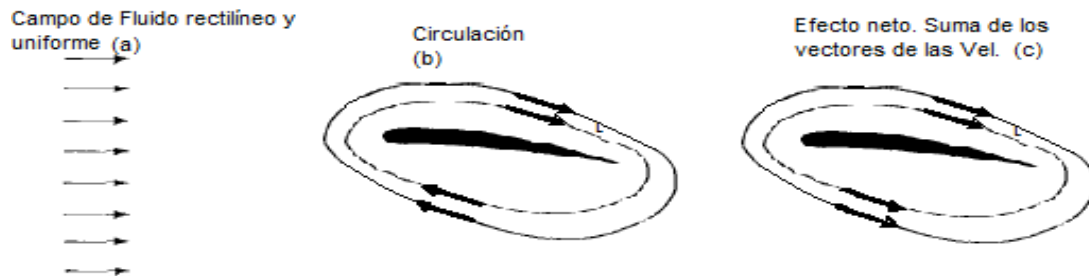


Figura VII.4. Superposición esquemática de la circulación en un campo fluido rectilíneo y uniforme. (Elaboración propia)

Existe una estrecha relación entre la sustentación y la circulación, la cual será estudiada en el empuje ascensional de un cilindro donde se superpone la circulación alrededor del cilindro al campo de flujo. Se puede calcular fácilmente la circulación si se elige como trayectoria cerrada la línea de corriente circular  $L_1$  concéntrica en el centro del torbellino libre.

La circulación  $\Gamma$  es entonces:

$\Gamma = \int V \cos \beta \cdot dl$  **Ec. VII. 4** como  $V$  es tangente a  $L$  el ángulo es  $0^\circ$  y por tanto  $\cos \beta = 1$  por lo que:

$$\Gamma = \int V \cdot dl \quad \text{Ec. VII. 4}$$

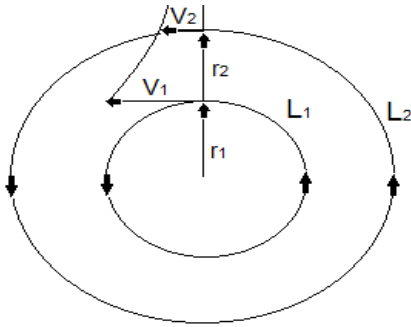


Figura VII.5. Líneas cerradas de corriente circular. (Elaboración propia)

Dado que  $V = \text{Constante}$ , queda la integral cerrada de la trayectoria circular, que es la longitud de la circunferencia quedando:

$$\Gamma = V \int dl = V_1(2\pi r_1) = V_2(2\pi r_2)$$

Pero como se estudió en el campo de velocidades del torbellino libre

$$V_1 r_1 = V_2 r_2 = C$$

Por lo que la circulación en este caso queda:

$$\Gamma = 2\pi C = 2\pi V r \quad \text{Ec. VII. 5}$$

Se puede demostrar con mayor rigor que la circulación alrededor de cualquier trayectoria que encierra el centro del torbellino viene dada por la ecuación VII. 5

Como se ve de la ecuación I.5 la circulación depende únicamente del término ( $C = Vr$ ) que es la Constante del Torbellino y se denomina Fuerza del Torbellino

### VII.3 Empuje ascensional de un cilindro circular

Considerando un flujo uniforme de un fluido ideal alrededor de un cilindro que tiene longitud infinita. (Figura VII.6)

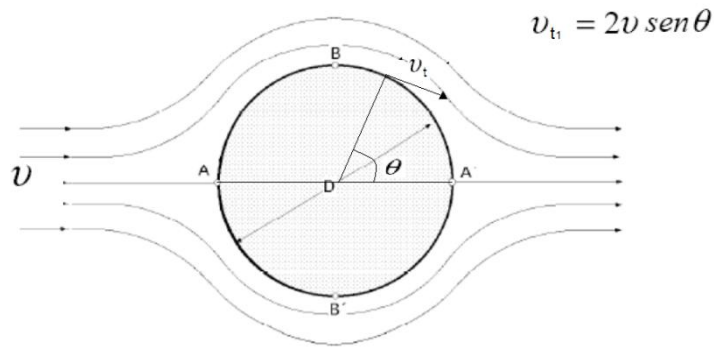


Figura VII.6. Flujo simétrico alrededor del cilindro circular. (Elaboración propia)

La hidrodinámica clásica ha demostrado que teniendo un flujo estacionario de velocidad uniforme  $U$ , la velocidad  $V$  en el sentido de las agujas del reloj en la periferia del cilindro ( $r=R$ ) viene dada por la Ec VII.6

$$V_{t1} = 2U \cdot \sin \theta$$

**Ec. VII. 6**

La distribución de presión sobre el cilindro se puede calcular aplicando el teorema de Bernoulli entre un punto en el infinito de la corriente principal y un punto en la superficie del cilindro. Dado que la distribución de presión alrededor del cilindro es completamente simétrica no se producen fuerzas de sustentación, ni resistencia para este caso ideal.

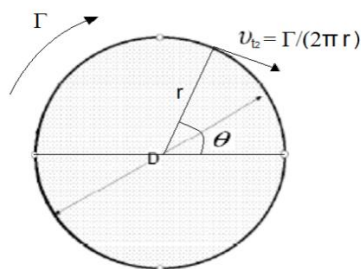


Figura VII.7. Flujo circulatorio alrededor del cilindro. (Elaboración propia)

Estudiando un flujo estacionario alrededor del cilindro (Figura VII.7) y asignando un signo positivo (+) a la circulación en el sentido de las agujas del reloj se deduce a partir de la Ecuación VII.5 que la velocidad periférica  $V_t$  (en el sentido de las agujas del reloj) sobre la superficie del cilindro debido a la circulación se puede expresar como:

$$V_{t2} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot R} \quad \text{Ec. I. 7}$$

El cilindro sólido ha reemplazado el vórtice central en la teoría de la circulación.

Suponiendo el flujo circulatorio sobre el movimiento uniforme se obtiene el flujo asimétrico en el cilindro circular, dado en la Figura VII.8:

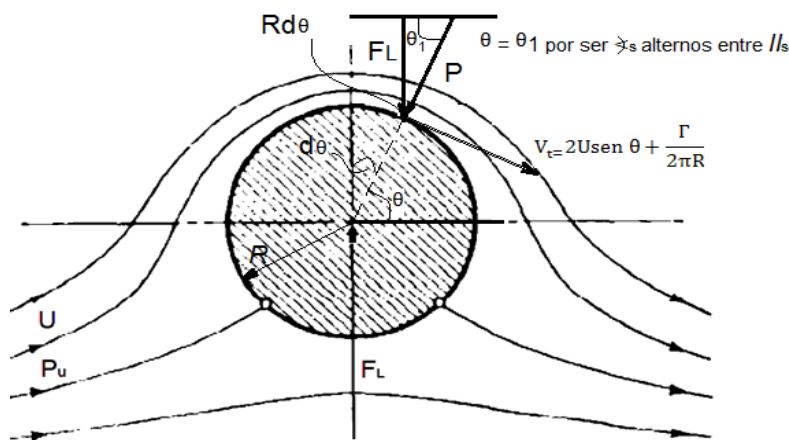


Figura VII.8. Superposición de los flujos. (Elaboración propia)

La velocidad en el sentido de las agujas del reloj en la periferia del cilindro es la suma de las dos contribuciones ya presentadas en las Figuras VII.6 y VII.7 quedando:

$$V_t = 2U \text{sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad \text{Ec. VII. 8}$$

La ecuación general para la presión ( $p$ ) en cualquier punto sobre la superficie del cilindro se obtiene a partir de la ecuación de la energía (Teorema de Bernoulli).

$$\frac{P_u}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} \quad \text{Ec. VII. 9}$$

Donde:

$P_u$  Presión en un punto alejado donde la velocidad  $U$  es uniforme.

Determinando la diferencia de presión entre un punto alejado de la corriente y la superficie del cilindro haciendo uso de la ecuación VII.9 queda:

$$\frac{P}{\gamma} - \frac{P_u}{\gamma} = \frac{U^2}{2g} - \frac{V_t^2}{2g} \quad \text{Ec. VII. 9. 1}$$

Sacando factor común los términos  $\gamma$  y  $2g$  y considerando que  $\gamma = \rho g$  la ecuación VII.9.1 se transforma en:

$$P - P_u = \frac{\gamma}{2g}(U^2 - V_t^2)$$

Donde

$$P - P_u = \frac{\rho g}{2g}(U^2 - V_t^2) = \frac{\rho}{2}(U^2 - V_t^2)$$

$$P - P_u = \frac{\rho}{2}(U^2 - V_t^2) \quad \text{Ec. VII. 9. 2}$$

Sustituyendo en la Ecuación VII.9.2 el término  $V_t$  de la Ecuación I.8 se obtiene:

$$P - P_u = \frac{\rho}{2} \left[ U^2 - (2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R})^2 \right] \quad \text{Ec. VII. 10}$$

La Ecuación VII.10 ofrece el valor de la presión que actúa sobre la superficie del cilindro respecto a la presión en un punto alejado en el campo de flujo.

Considerando la diferencia de presión dada por VII.10 y el área de la superficie del cilindro, se puede determinar la fuerza de sustentación o empuje ascensional ( $F_1$ ), referirse a la Figura VII.8. El área elemental descrita por el ángulo  $d\theta$  es

$$dA = R \cdot d\theta \cdot B \quad \text{Ec. VII. 11}$$

donde  $B$  es la longitud del cilindro.

El elemento diferencial de fuerza que actúa sobre el elemento de área  $dA$  es:

$$dF_l = P_r \cdot dA$$

Donde

$P_r$ . Presión resultante

$$P_r = P - P_u$$

$$dF_l = P - P_u \cdot B \cdot R \cdot d\theta \cdot \text{sen } \theta$$

Se considera la componente de fuerza que actúa en la dirección vertical, de ahí la necesidad de tomar la componente  $F \cdot \text{sen } \theta = F_l$

Ordenando la ecuación anterior se obtiene:

$$dF_l = B \cdot (P - P_u) R \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta \quad \text{Ec. VII. 12}$$

Integrando la Ecuación VII.12 a lo largo del perímetro exterior del cilindro queda:

$$F_l = B \int_0^{2\pi} (P - P_u) R \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta \quad \text{Ec. VII. 13}$$

Sustituyendo en la Ecuación VII.13 el término  $P - P_u$  de la Ecuación VII.10 la fuerza de sustentación es:

$$F_l = B \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \left[ U^2 - \left( 2U \text{sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] R \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta \quad \text{Ec. VII. 14}$$

La fuerza de sustentación total viene dada cuando se resuelve la integral de la Ecuación VII.14 la que se reduce a:

$$F_l = \rho \cdot B \cdot U \cdot \Gamma \quad \text{Ec. I. 15}$$

Esta fuerza transversal que actúa sobre el cilindro que gira está originada por el Efecto Magnus (Granados, 2009; Streeter, 1963) denominado así en honor de Heinrich G. Magnus (1802-1870) científico alemán que lo observó por primera vez en 1852.

La Ecuación I.15 se denomina además el Teorema de Kutta-Joukowski en honor de W.M. Kutta y N.E. Joukowski pioneros por separado en la investigación cuantitativa de la fuerza de sustentación en 1902 y 1906 respectivamente.

La ecuación VII.15 expresa que la fuerza transversal de sustentación o empuje ascensional es función directa de:

$\rho$ . Densidad del campo de flujo. ( $M/L^3$ )

B. Longitud del perfil estudiado. (L).

U. La velocidad uniforme del fluido (L/T).

$\Gamma$  Circulación (gamma) ( $L^2/T$ )

El análisis dimensional da:

$$F_l = \frac{M}{L^3} \cdot L \cdot \frac{L}{T} \cdot \frac{L^2}{T} = \frac{M \cdot L}{T^2}$$

Todo en un sistema compatible de unidades. Si se usa el Sistema Internacional la unidad es:

$$F_l = \frac{M \cdot L}{T^2} = \frac{kg \cdot m}{s^2} = \text{Newton}$$

El Teorema de Kutta -Joukowski es de gran importancia porque se puede aplicar no solo al cilindro circular, sino también a un cilindro de cualquier forma, incluyendo un perfil de ala de avión como será estudiado con posterioridad.

En la Figura VII.8 se ve claramente que los puntos de remanso se mueven hacia abajo respecto a la horizontal, pero siguen situándose de forma simétrica alrededor del eje vertical.

En el punto de remanso sobre el cilindro la velocidad  $V_t$  dada por la ecuación I.8 tendrá un valor cero. Por el punto de remanso se obtiene la siguiente expresión.

$$-2U \sin \theta = \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad \text{Ec. I. 16}$$

Si se puede medir el ángulo del punto de remanso y se conoce la velocidad de la corriente principal, se puede obtener la circulación  $\Gamma$  de la Ecuación VII.16

$$\Gamma = -4\pi RU \sin \theta_0 \text{ Ec. VII. 17}$$

Donde

$\theta_0$  es el ángulo entre el diámetro horizontal y el punto de remanso en la Figura VII.8.

#### VII.4 Empuje ascensional de un perfil de ala de avión

##### VII.4.1 Resistencia inducida y sustentación en un perfil de ala de longitud finita

Para estudiar los fenómenos que ocurren en un ala de longitud finita debe considerarse lo ocurrido en la Figura VII.9.

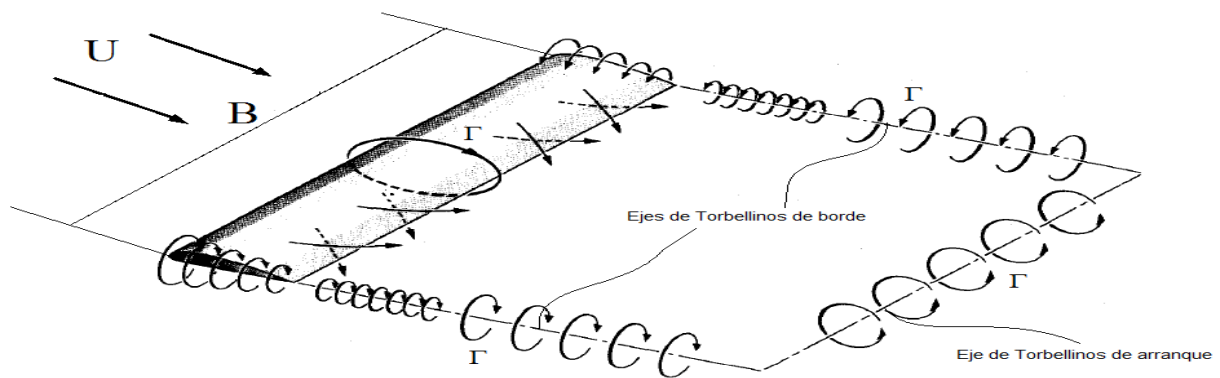


Figura VII.9. Ala de envergadura B finita. (James, 1981)

-Cuando el perfil de ala es de longitud finita, se producen condiciones que influyen tanto en la sustentación como en la resistencia.

- Como la presión sobre la superficie interior es mayor que la existente en la superficie superior, el fluido escapará alrededor de los extremos produciéndose:

- Un flujo general hacia afuera desde el centro hasta los extremos, sobre la superficie interior del ala.
- Un flujo hacia dentro desde los extremos hasta el centro sobre la superficie superior.



Estos movimientos combinados originaron pequeños torbellinos de borde marginal que se desprenderán de los puntos de las alas, que constituyen un gran anillo de torbellinos, dentro del cual se produce una velocidad hacia abajo inducida por los propios torbellinos.

La velocidad inducida cambia la dirección del flujo cerca del ala del sentido  $U$  a  $U_0$ , por lo que se reduce el ángulo de ataque efectivo de  $\alpha$  a  $\alpha_0$  tal como se muestra en la Figura VII.10

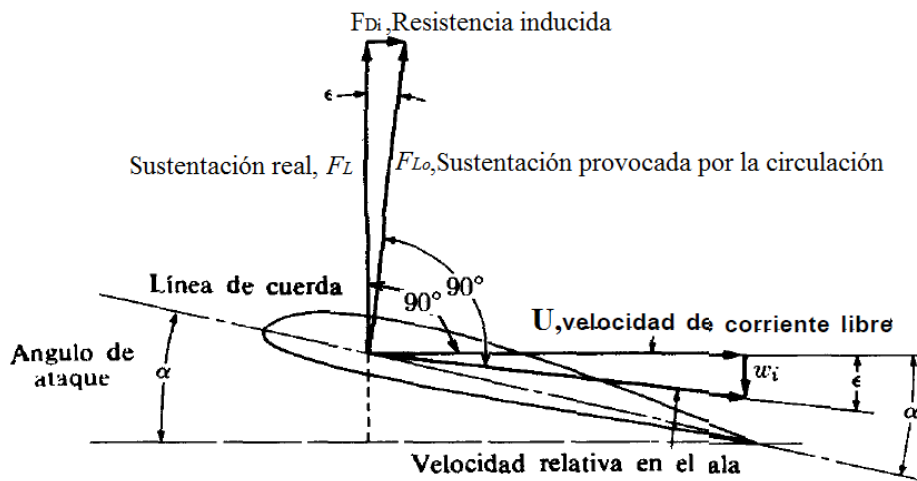


Figura VII.10. Perfil de ala de avión con las fuerzas actuantes. (James, 1981)

Donde:

$F_{L0}$  Sustentación generada por la circulación.

$F_L$  Sustentación real perpendicular a  $U$ .

$F_{Di}$  Resistencia inducida.

La resistencia inducida ( $F_{Di}$ ) se determina utilizando la expresión I.18

$$F_{Di} = C_{Di} \rho \frac{V^2}{2} A \quad \text{Ec. VII. 18}$$

Donde

$C_{Di}$  Coeficiente de resistencia inducida.

$\rho$  Densidad del fluido

V Velocidad del flujo de fluido.

A Área proyectada al vector de la fuerza inducida.

La fuerza de resistencia total  $F_D$  que actúa sobre el perfil de ala se determina según la expresión (VII.19)

$$F_D = F_{D0} + F_{Di} \text{ Ec. VII. 19}$$

Donde:

$F_{D0}$  Resistencia del perfil de ala (Incluye la resistencia de presión +la resistencia de fricción del propio perfil).

$F_{Di}$  Resistencia inducida.

La Fuerza de sustentación  $F_L$  se determina según la expresión dada por la ecuación I.15 pero resulta además conveniente expresarla como:

$$F_{Di} = C_L \rho \frac{V^2}{2} A \quad \text{Ec. VII. 20}$$

Donde:

$C_L$  Coeficiente de sustentación. Su valor depende principalmente del ángulo de ataque y de la forma del perfil de ala.

A Área proyectada al vector de sustentación.

$$A = B \cdot C$$

Donde:

B:- Envergadura del ala.

C: - Cuerda del ala

Los Coeficientes de resistencia  $C_D$ , resistencia inducida  $C_{Di}$  y de sustentación  $C_L$  son obtenidos por ensayos de los perfiles de alas en los túneles de vientos donde se realizan los ensayos a diferentes perfiles.

La relación existente entre el coeficiente de resistencia inducida y el coeficiente de sustentación y la relación de aspecto (*también denominada alargamiento*) e igual a  $\frac{B^2}{A} = \frac{B}{C}$  está dada por las siguientes expresiones:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi \frac{B^2}{A}} \text{ Ec. VII. 21}$$

Y que

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \frac{B^2}{A}} \text{ Ec. VII. 22}$$

Además, se considera que:

$$F_D = \frac{C_D}{C_L} \cdot F_L \text{ Ec. VII. 23}$$

### VII.5 Flujo de fluido compresible. Consideraciones Termodinámicas

Se entienden por fluidos compresibles a aquellos que reducen o incrementan su volumen ante el aumento o el decremento de las presiones y temperaturas que actúan sobre ellos presentando así variaciones apreciables de su densidad ( $\rho$ ) (Smith, 1980; Giles, 1999). El estudio de estos fluidos en movimiento se denomina *Dinámica de los Gases*.

Cuando un fluido compresible en movimiento no presenta cambios en la densidad superiores al 5%; o sea  $\frac{\Delta \rho}{\rho} < 0,05$  el fluido se puede considerar como incompresible y usan para cálculos el valor medio de la densidad, pero si  $\frac{\Delta \rho}{\rho} > 0,05$  hay que considerar el efecto de la compresibilidad.

#### *Ecuación de Estado de los Gases Perfectos*

Los gases perfectos se dividen de forma usual como:

- Aquellos que tienen calor específico constante.

-Cumplen la ley de los gases perfectos.

$$Pv = RT$$

**Ec. VII. 24**

Entonces si  $v = \frac{1}{\rho}$  obtenemos que:  $\frac{P}{\rho} = RT$

Donde:

P- Presión absoluta.

$\rho$  – Densidad (masa/unidad de volumen)

v –Volumen especifico (1/ $\rho$ )

R – Constante del gas, el valor depende del gas en cuestión.

T – Temperatura absoluta en grados kelvin (k) (Rankin)

\*Para el aire el valor de  $R = 287 \frac{\text{N.m}}{\text{kg.K}}$

Por lo que si  $\frac{P}{\rho} = RT$  y  $\rho = \gamma/g$  (siendo  $\gamma$  peso específico)

La ecuación VII-24 se puede escribir también como:

$$\gamma = \frac{Pg}{RT} \text{ Ec. VII. 25}$$

De lo que se deduce que se puede calcular el peso específico ( $\gamma$ ) de cada gas si se conoce R y g.

Dado que las ecuaciones VII – 24 e VII – 25 relacionan varias propiedades de los gases en un estado dado estas ecuaciones se denominan *Ecuaciones de Estado*.

Dado que la ley de Avogadro establece que “Volúmenes iguales de todos los gases perfectos a una presión y temperatura particulares, contienen el mismo número de moléculas “se deduce que el peso específico de un gas especifico es proporcional a su peso o masa molecular la cual se representa por M. De la ecuación VII – 24 se puede plantear:

$$\text{Dado que: } \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{M_2}{M_1}$$

Si sustituimos  $\gamma$  por el término de la ecuación VII – 25 obtenemos:

$$\frac{\frac{P_2}{R_2 T_2}}{\frac{P_1}{R_1 T_1}} = \frac{M_2}{M_1} \quad \text{Por tanto: } \frac{R_1}{R_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

De lo que se despeja:

$$R_1 * M_1 = R_2 * M_2 = \bar{R} \text{ Ec. VII. 26}$$

Donde  $\bar{R}$  es la Constante Universal de los Gases Perfectos.

$$\bar{R} = 8312 \frac{\text{N.m}}{\text{kg. K}}$$

Otra ecuación fundamental para los gases perfectos es la:

*Ecuación de Proceso*

$$P v^n = P_1 v_1^n = \text{cte}$$

**Ec. VII. 27**

Donde:

P- Presión absoluta

v- Volumen específico

n- Exponente politrópico (puede tomar valores entre 0 e  $\infty$ )

-Para un proceso a temperatura constante (isotérmico)  $n=1$

-Para un proceso sin transferencia de calor hacia o desde el gas se denomina adiabático ( $Q=0$ ); pero si además el proceso es reversible, se denomina Isotrópico donde  $n = k = \frac{c_p}{c_v}$  donde k es la relación entre los calores específicos a presión y a volumen constantes respectivamente.

Para casos de expansión con fricción  $n < k$

Para casos de compresión con fricción  $n > k$

Para el aire y gases diatómicos a temperaturas habituales  $k=1,4$ .

Otras relaciones útiles que surgen de las combinaciones anteriores son:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{n-1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{Ec. VII. 28}$$

Para los Gases Reales a bajas presiones y temperaturas moderadas se puede considerar que cumplen las leyes de los Gases Perfectos y son tratados como tales.

La **Primera Ley de la Termodinámica** para el flujo de fluidos se plantea como:

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + I_1\right) + W_m + Q_c = \left(\frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + I_2\right) \quad \text{Ec. VII. 29}$$

Donde los términos:

Z- Altura geodésica del fluido.

I-Energía Interna.

W<sub>m</sub>-Trabajo mecánico suministrado a la corriente.

Q<sub>c</sub> – Energía transferida por una fuente de calor (hacia o desde el fluido)

La **Segunda Ley de la Termodinámica** se refiere a la reversibilidad de los procesos. Un proceso reversible es aquel en que tanto el sistema como su entorno regresan a las condiciones iniciales sin necesidad de realizar ningún trabajo.

Los procesos en que existe fricción, transferencia de calor y mezcla de gases,

no son procesos reversibles. Todos los procesos reales son irreversibles.

Muchos procesos reales donde es baja la irreversibilidad se aproximan a los procesos reversibles, ejemplos son las Toberas convergentes –(la fricción es pequeña y resulta despreciable la transferencia de calor), así como el flujo en tuberías es un proceso irreversible debido a la fuerza de fricción.

La propiedad relacionada con la irreversibilidad es la entropía (S). Esta mide el desorden o la cantidad de energía que no puede aprovecharse para realizar un trabajo útil.

En un sistema cerrado la entropía siempre aumenta, por lo que la energía disponible disminuye.

La Entalpía (h) (Por unidad de masa de un gas) se define como:

$$h = i + pv \quad \text{o} \quad h = i + \frac{p}{\rho} \quad \text{Ec. VII. 30}$$

Donde:

*i* - Energía interna por unidad de masa. Esta es debida a la energía cinética del movimiento molecular y a las fuerzas de interacción molecular. Es una función que depende de la temperatura. Por lo tanto, la Entalpía representa la energía que posee un gas en virtud de su temperatura.

*Calor específico a presión constante. ( $C_p$ ).*

Se define como el aumento de entalpía por unidad de masa cuando la temperatura del gas aumenta un grado mientras la presión se mantiene constante.

Por tanto:  $C_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right) \text{ a } P = \text{cte}$  **Ec. VII. 31**

*Calor específico a volumen constante. ( $C_v$ )*

Se define como el aumento de la energía interna por unidad de masa cuando la temperatura del gas aumenta un grado mientras el volumen se mantiene constante.

Por tanto:  $C_v = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right) \text{ a } v = \text{cte}$  **Ec. VII. 32**

*Ecuaciones fundamentales aplicables al flujo de fluidos compresibles.*

*Ecuación de continuidad*

Para un flujo estacionario unidimensional de fluidos compresibles:

$$\dot{m} = \rho * A * V = \rho * Q = \text{Constante} \quad \text{Ec. VII. 33}$$

Donde:

$\dot{m}$ -Flujo másico

Q -Flujo volumétrico ( $Q = A * V$ )

*Ecuación de energía*

$$\left( \frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g} + I_1 \right) + W_m + Q_c = \left( \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \alpha \frac{v_2^2}{2g} + I_2 \right) \text{Ec. VII. 34}$$

Pero el término  $\left( \frac{P_1}{\gamma} + I \right) = h$  (Entalpia)

Dado que las columnas de gases  $Z_1$  y  $Z_2$  pueden despreciarse por su bajo valor se puede escribir la Ec. VII – 33 como:

$$\left( h_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g} \right) + W_m + Q_c = \left( h_2 + \alpha \frac{v_2^2}{2g} \right) \text{Ec. VII. 35}$$

El coeficiente  $\alpha$  en el término  $\alpha \frac{v_1^2}{2g}$  es el denominado Coeficiente de Coriolis o Factor de Conexión de la Energía Cinética. Para flujo turbulento  $\alpha=1,01 \div 1,15$  En la generalidad de los problemas de ingeniería  $\alpha=1$  para fluidos turbulentos. En fluidos laminares  $\alpha=2$ .

En ocasiones el termino  $h_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g} = h_0$  (Entalpia de remanso)

Efecto de la variación del área en el flujo compresible unidimensional

Para los fluidos incompresibles

$$v = f\left(\frac{1}{A}\right)$$

Se logran incrementos de la velocidad con la reducción del área de la sección transversal del conducto.

Para los fluidos compresibles no ocurre así porque:

-  $\Delta p \rightarrow \Delta v \rightarrow$  La variación de la densidad influye en la variación de  $v$

-  $v = f(M_a) \rightarrow$  La velocidad depende del número de Mach.



*Para el fluido ideal*

Ecuación de continuidad da:

$$\dot{m} = \rho * A * V = \rho * Q = \text{Constante}$$

Aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln(\rho) + \ln(A) + \ln(V) = \ln \text{cte}$$

$$\ln(\rho) + \ln(A) + \ln(V) = 0$$

Diferenciando la expresión queda:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

Considerando que:

$$-c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{velocidad sónica o acústica, velocidad de una perturbación de la presión que viaja a través de un fluido})$$

-Que la ecuación de Euler considerando Z despreciable se puede escribir

$$\frac{d\rho}{\rho} + VdV = 0$$

Multiplicando el primer término de la ecuación de Euler por  $\frac{d\rho}{d\rho}$  esta no se alterará, la misma se puede escribir como:

$$\frac{d\rho}{d\rho} * \frac{d\rho}{\rho} + VdV = 0$$

Sustituyendo el término  $\frac{d\rho}{d\rho} = c^2$  la ecuación queda:

$$c^2 * \frac{d\rho}{\rho} + VdV = 0$$

Despejando el término  $\frac{d\rho}{\rho}$  se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{VdV}{c^2}$$

Sustituyendo en esta se puede escribir como:

$$-\frac{VdV}{c^2} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

Conociendo que  $M = \frac{v}{c}$  donde M es el número de Mach

Por tanto  $c^2 = \frac{v^2}{M^2}$  y sustituyendo en la ecuación queda:

$$-\frac{vdv}{\frac{v^2}{M^2}} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0$$

Reordenando la ecuación:

$$-\frac{M^2 v dv}{v^2} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$-\frac{M^2 dv}{v} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$-\frac{M^2 dv}{v} + \frac{dv}{v} = -\frac{dA}{A}$$

$$\frac{dv}{v}(1 - M^2) = -\frac{dA}{A}$$

Despejando  $\frac{dv}{v}$

$$\frac{dv}{v} = \frac{-\frac{dA}{A}}{(1 - M^2)} = \frac{-\frac{dA}{A}}{-(M^2 - 1)} = \frac{\frac{dA}{A}}{(M^2 - 1)}$$

La cual puede escribirse como:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{Ma^2 - 1} * \frac{dA}{A} \text{ Ec. VII. 36}$$

De la que se concluye:

### **1-Para flujo subsónico ( $Ma < 1$ )**

Si  $\frac{dA}{A} < 0$ ;  $\frac{dv}{v} > 0$  (la disminución del área hace que la velocidad aumente)

Si  $\frac{dA}{A} > 0$ ;  $\frac{dv}{v} < 0$  (El aumento del área hace que la velocidad disminuya)

### **2-Para flujo supersónico ( $Ma > 1$ )**

Si  $\frac{dA}{A} < 0$ ;  $\frac{dv}{v} < 0$  (la disminución del área hace que la velocidad disminuya)

Si  $\frac{dA}{A} > 0$ ;  $\frac{dv}{v} > 0$  (El aumento del área hace que la velocidad aumente)

### **3-Para flujo sónico ( $Ma = 1$ )**

$\frac{1}{M^2 - 1} = \infty \rightarrow$  Excesivamente grande (Indeterminado)

Por tanto  $\frac{dv}{v} = 0$  y por ello  $\frac{dA}{A} = 0$

De lo anterior se concluye, además:

-Para acelerar un fluido a velocidad subsónica ( $Ma < 1$ ) se requiere un conducto convergente.  
(Tobera del tipo convergente)

-Para acelerar un fluido a velocidad supersónica ( $Ma > 1$ ) se requiere un conducto del tipo divergente (Tobera<sup>1</sup> del tipo divergente)

Lo antes planteado se define entonces dada la fig.VII.11:

---

<sup>1</sup>nozzle

Duct geometry	Subsonic $Ma < 1$	Supersonic $Ma > 1$
	$dA > 0$ $dV < 0$ $dp > 0$ Subsonic diffuser	$dV > 0$ $dp < 0$ Supersonic nozzle
	$dA < 0$ $dV > 0$ $dp < 0$ Subsonic nozzle	$dV < 0$ $dp > 0$ Supersonic diffuser

Figura VII.11.Efecto de la variación del área en el flujo compresible. (White, 2003)

La velocidad de la salida del fluido en una tobera convergente se calcula a partir de la integración de la ecuación de Euler para flujos isotrópicos de gases perfectos.

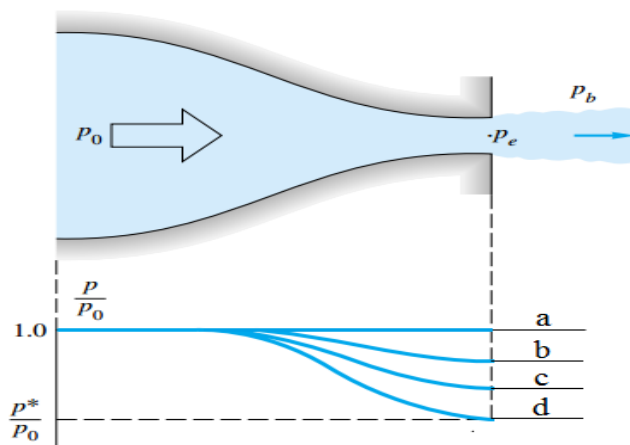


Figura VII.12.Flujo compresible a través de una tobera convergente. (White, 2003)

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{P_2}{\rho_2} * \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{P_0}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \text{ Ec. I. 37}$$

Pero  $c_2 = \sqrt{\frac{kP_2}{\rho_2}}$  donde  $c_2$  es la velocidad sónica para un gas perfecto.

$$\left( \frac{v_2}{c_2} \right)^2 = Ma_2^2 = \frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{P_0}{P_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \text{ Ec. I. 38}$$

$$\frac{P_2^*}{P_0} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{Ec. VII. 39}$$

*Flujo másico para flujo subsónico en la garganta*

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1} * P_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad \text{Ec. VII. 40}$$

Siempre que  $\frac{P_2}{P_0} > \frac{P_2^*}{P_0}$

Pero cuando  $\frac{P_2}{P_0} = \frac{P_2^*}{P_0} = \left[ \frac{2}{(k+1)} \right]^{\frac{k}{k-1}}$

El flujo en la tobera es el flujo sónico en la garganta

*Flujo másico para flujo sónico en la garganta:*

$$\dot{m}_{\max} = \frac{A_2 P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\left[ \frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{(k+1)}{(k-1)}} \right]} \quad \text{Ec. VII. 41}$$

## VII.6 Problemas Resueltos

**Problema 1)** Un hilo de cobre de gran longitud y 10 mm de diámetro está expuesto a un viento de 27.0 m/s; que incide normalmente al eje del hilo. Calcule la resistencia por metro de longitud para la presión atmosférica al nivel del mar a una temperatura de 15°C.

### Solución

#### Datos

-hilo de cobre de gran longitud.

-Diámetro: 10 mm

-velocidad del viento: 27.0 m/s

-Presión atmosférica a nivel del mar.

-Temperatura: 15°C

La fuerza de resistencia se determina según la ecuación

$$F_D = C_D * \rho * \frac{v^2}{2} * A \quad (I)$$

Para determinar el valor del coeficiente de resistencia ( $C_D$ ) es necesario conocer el  $N_{ro.}$  de Reynolds dado por la ecuación (II)

$$Re = \frac{v * d}{\nu} \quad (II)$$

La viscosidad cinemática ( $\nu$ ) se determina según la ecuación (III)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (III)$$

Donde  $\mu$  es la viscosidad absoluta, que para presión atmosférica a nivel del mar, Temperatura igual a 15°C y densidad 1.225 kg/m<sup>3</sup> es:

$\mu = 1.789 * 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  de donde:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1.789 * 10^{-5}}{1.225} \rightarrow \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2} \cdot \text{s}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = \text{m}^2/\text{s}$$

$$\nu = 1.46 * 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Cálculo del No de Reynolds

$$Re = \frac{v * d}{\nu} = \frac{27 * 0.010}{1.46 * 10^{-5}} = 18\,493.15$$

Análisis dimensional

$$Re = \frac{v * d}{\nu} = \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}} * \text{m}}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$$

### *Determinación del coeficiente de resistencia ( $C_D$ )*

Del diagrama del perfil cilíndrico se obtiene:

$$C_D = 1.2$$

### *Calculo de la fuerza de resistencia*

$$F_D = C_D * \rho * \frac{v^2}{2} * A = 1.2 * 1.225 * \frac{(27)^2}{2} * (1 * 0.01)$$

$$F_D = 5.36 \text{ N/m}$$

**Problema 2)** En el caso de un ala Y de Clark de 2 m de cuerda y 10 m de envergadura, Determine:

- a) El peso que puede sostener el ala.
- b) La potencia necesaria para moverla.

Si el ángulo de ataque es  $\alpha = 5.4^\circ$  cuando el ala se mueve a 90 m/s por la atmósfera estándar a una altitud de 2600 m.

### **Solución**

#### Datos

$$C = 2\text{m}$$

$$B = 10 \text{ m}$$

$$\alpha = 5.4^\circ$$

$$v = 90 \text{ m/s}$$

$$h_{\text{vuelo}} = 2\,600 \text{ m}$$

Del diagrama Polar para este tipo de ala (Y de Clark) con el ángulo  $\alpha$  se obtiene:

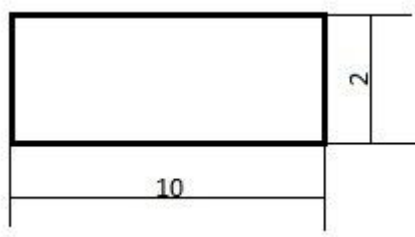
-Coeficiente de sustentación ( $C_L$ ) = 0.8

- Coeficiente de resistencia ( $C_D$ ) = 0.0477

-Para una altura de 2600 m, la densidad del aire es:

$$\rho = 0.9843 \text{ kg/m}^3$$

*Esquema de cálculo*



R a-)

El ala sostendrá un peso igual a la fuerza de sustentación.

$W = F_L$  Dado que:

$$F_L = C_L * \rho * \frac{v^2}{2} * A$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$F_L = 0.8 * 0.9843 * \frac{(90)^2}{2} * (10 * 2)$$

$$F_L = 63\,782.64 \text{ N}$$

Análisis dimensional

$$F_L = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} * \text{m}^2 = \frac{\text{kg} * \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$$

Dado que  $1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N}$

$$F_L = \frac{63782.64 \text{ N}}{9.81 \frac{\text{N}}{\text{kgf}}} = 6501.7 \text{ kgf}$$



R b-)

La potencia necesaria para mover el ala de avión trasladando el peso es:

$$\text{Potencia} = F_D * v$$

Conversión de la densidad a sistema métrico.

$$\rho = 0.001756 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3} * 32.174 \frac{\text{lb}}{\text{slug}} * \frac{(3.28)^3 * \text{pie}^3}{\text{m}^3} * \frac{\text{kg}}{2.025 \text{ lb}} = 0.984 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho = 0.9843 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$F_D = \left( \frac{C_D}{C_L} \right) * F_L \text{ por lo que:}$$

$$F_D = \left( \frac{0.047}{0.8} \right) * 63782.64$$

$$F_D = 3747.23 \text{ N}$$

La potencia es:

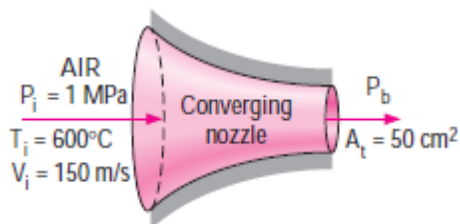
$$\text{Pot} = F_D * v$$

$$\text{Pot} = 3747.23 * 90$$

$$\text{Pot} = 337250.7 \text{ W} = 337.3 \text{ kW}$$

**Problema 3)** Un flujo de aire a 1 MPa y 600 °C entra a una tobera convergente como se muestra en la Figura I.1 con una velocidad de 150 m/s. Determine el flujo másico por la tobera, si la garganta de esta posee un área de 50 cm<sup>2</sup> cuando la presión en la salida es a) 0,7 MPa b) 0,4 MPa.

*Esquema de cálculo*



## Solución

**Suposiciones:** 1. Aire es un gas ideal con calor específico constante. 2. El flujo es estacionario, unidimensional e isoentrópico.

Propiedades.

El calor específico a presión constante  $C_p$ , así como la constante politrópica  $k$  tiene valor de  $C_p = 1,005 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ ,  $k = 1,4$ , la densidad es  $\rho = 3,093 \text{ kg/m}^3$

Para el análisis del problema los subíndices  $i$  y  $t$  representan las propiedades en la tobera a la entrada y en la garganta de esta respectivamente. La presión y temperatura de estancamiento a la entrada de la tobera puede ser determinada por:

$$T_{oi} = T_i + \frac{V_i^2}{2C_p} = 873 \text{ K} + \frac{(150 \text{ m/s}^2)^2}{2(1,005 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}})} \left( \frac{1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}{1000 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \right) = 884 \text{ K}$$

$$P_{oi} = P_i \left( \frac{T_{oi}}{T_i} \right)^{k/(k-1)} = 1 \text{ MPa} \left( \frac{884 \text{ K}}{873 \text{ K}} \right)^{1,4/(1,4-1)} = 1,045 \text{ MPa}$$

Estos valores de presión y temperatura de estancamiento permanecen constantes a lo largo de la tobera por lo que el flujo es asumido como isoentrópico, esto es

$$T_o = T_{oi} = 884 \text{ K}$$

$$P_o = P_{oi} = 1,045 \text{ MPa}$$

La relación de presiones de presiones críticas puede ser determinada por:

$$\frac{P^*}{P} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 0,5283$$

a) Presión 0,7 MPa

La relación de presiones reales

$$\frac{P_b}{P_o} = \frac{0,7 \text{ MPa}}{1,045 \text{ MPa}} = 0,670$$

Como la relación de presiones reales es mayor que la relación de presiones críticas  $\frac{P_b}{P_o} > \frac{P^*}{P}$ . La densidad mostrada en las propiedades se obtuvo de la ecuación de estado  $Pv = RT$

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1} * P_o \rho_o \left[ \left( \frac{P_2}{P_o} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{P_2}{P_o} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

$$\dot{m} = 50 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{2 * 1,4}{1,4 - 1} * 1,045 \times 10^6 \text{ Pa} \times 3,093 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left[ \left( \frac{700 \text{ kPa}}{1\,045 \text{ kPa}} \right)^{\frac{2}{1,4}} - \left( \frac{700 \text{ kPa}}{1\,045 \text{ kPa}} \right)^{\frac{1,4+1}{1,4}} \right]}$$

$$\dot{m} = 5,88 \text{ kg/s}$$

b-) Presión 0,4 MPa

La relación de presiones reales

$$\frac{P_b}{P_o} = \frac{0,4 \text{ MPa}}{1,045 \text{ MPa}} = 0,383$$

Como la relación de presiones reales es menor que la relación de presiones críticas  $\frac{P_b}{P_o} < \frac{P^*}{P}$ . existe *condición sónica* en la garganta de la tobera  $M_a=1$ , el flujo másico en este caso puede ser determinado por la ecuación:

$$\dot{m} = A_2 P_o \sqrt{\frac{k}{RT_o}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\dot{m} = 50 \times 10^{-4} \cdot 1,045 \cdot 10^6 \text{ Pa} \sqrt{\frac{1,4}{287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 884 \text{ K}}} \left( \frac{2}{1,4+1} \right)^{\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}}$$

$$\dot{m} = 7,1 \text{ kg/s}$$

## VII.7 Problemas Propuestos

**Problema 1)** Un perfil aerodinámico rectangular. Tiene 9 m de envergadura y 1.8 m de cuerda se mueve horizontalmente bajo cierto ángulo de ataque a través de aire en calma a 240 km/h .Calcule la fuerza de sustentación, la de resistencia al avance y la potencia necesaria para impulsar el perfil a esta velocidad a través de:

- a) Aire a 101.3 kPa y 15°C
- b) Aire a 79.3 kPa y – 18°C

Los coeficientes de Resistencia y Sustentación son  $C_D = 0.039$  y  $C_L = 0.46$

1.1-) Calcule la velocidad y la potencia requerida para obtener la condición (b) y la fuerza de sustentación de la condición (a).

### Soluciones

Para la condición (a):

$$F_L = 20\,286\text{ N}$$

$$F_D = 1\,543,5\text{ N}$$

$$\text{Pot} = 102,9\text{ kW}$$

Para la condición (b):

$$F_L = 17\,934,48\text{ N}$$

$$F_D = 1\,364,58\text{ N}$$

$$\text{Pot} = 90,97\text{ kW}$$

Para la condición 1.1-):

Se requiere en las condiciones (b) volar a 255,24 km/h y consumir una potencia de 96.7 kW para lograr la  $F_L$  de (a).

**Problema 2)** Un perfil aerodinámico rectangular. Tiene 12 m de envergadura y 2 m de cuerda y coeficiente de sustentación y de resistencia al avance de 0.5 y 0.04 respectivamente bajo un ángulo de ataque de  $6^\circ$ .

Calcule la fuerza de resistencia al avance y la potencia necesaria para impulsar este perfil a 80, 160, 240 km/h en dirección horizontal a través de aire en calma ( $2^\circ\text{C}$  y 79.5 kPa) ¿Qué fuerza de sustentación se obtiene a esas velocidades? Exprese sus condiciones.

### Soluciones

$$F_{L1} = 2983.10 \text{ N} \rightarrow v = 80 \text{ km/h}$$

$$F_{L2} = 11932.42 \text{ N} \rightarrow v = 160 \text{ km/h}$$

$$F_{L3} = 26847.96 \text{ N} \rightarrow v = 240 \text{ km/h}$$

$$F_{D1} = 283.65 \text{ N} \rightarrow v = 80 \text{ km/h}$$

$$F_{D2} = 954.59 \text{ N} \rightarrow v = 160 \text{ km/h}$$

$$F_{D3} = 2147.83 \text{ N} \rightarrow v = 240 \text{ km/h}$$

$$\text{Pot}_1 = 0.50418 \text{ kW} \rightarrow v = 80 \text{ km/h}$$

$$\text{Pot}_1 = 42.422 \text{ kW} \rightarrow v = 160 \text{ km/h}$$

$$\text{Pot}_1 = 143.174 \text{ kW} \rightarrow v = 240 \text{ km/h}$$

**Problema 3)** Una señalización circular tiene un diámetro de 50 cm y se somete a un viento normal de 150 km/h a  $10^\circ\text{C}$  y 100 kPa como se muestra en la Figura I.13. Determine:

- a) La fuerza de arrastre que actúa sobre la señalización.
- b) El momento de flexión en la parte inferior de su apoyo cuya altura desde el suelo hasta la parte inferior es de 1,5 m. No se tenga en consideración la resistencia del poste.

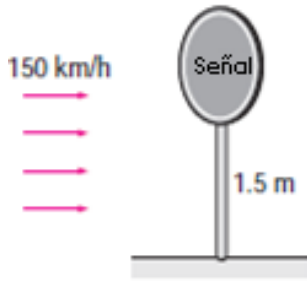


Figura VII.13 Señalización circular sometida a viento normal. (Cengel, 2006)

**Solución** a)  $F_D = 231 \text{ N}$  b)  $M = 404 \text{ N.m}$

**Problema 4)** Considere un camión de refrigeración (Figura I.14) viajando a 65 mph en un lugar donde la temperatura del aire es de 1 atm y 80 °F. El compartimento refrigerado del camión puede considerarse como una caja rectangular de 9 pies de ancho, 8 pies de alto y 20 pies de largo, suponiendo que el flujo de aire sobre toda la superficie externa sea turbulento y unido (sin separación de flujo).

a) Determine la fuerza de arrastre que actúa sobre las superficies superior y lateral y la potencia requerida para superar esta resistencia.



Figura VII.14. Camión refrigerado. (Cengel, 2006)

**Solución**  $F_D = 14,9 \text{ lbf}$

**Problema 5)** Un tronco cilíndrico de pino de 2 m de longitud y 0,2 m de diámetro con una densidad =  $513 \text{ kg / m}^3$  es suspendido por una grúa en posición horizontal. El tronco está expuesto a una corriente de aire normal con una magnitud de 40 km/h a 5 °C y 88 kPa. Sin tener en cuenta el peso del cable y su resistencia, determine:

- a) El ángulo  $\theta$  que el cable hará con la horizontal.
- b) La tensión en el cable.

**Solución** a)  $\theta = 84^\circ$  b)  $T = 318 \text{ N}$

**Problema 6)** Desde un depósito de grandes dimensiones se está descargando aire a  $28^\circ\text{C}$ , a través de una tobera con diámetro de salida de 10 mm. La descarga se efectúa a la atmósfera donde la presión es de 96,5 kPa. La presión del aire en el interior del depósito es de 40,0 kPa (manométrica). Determine:

- a) El gasto a través de la tobera.

**Solución.**  $\dot{m} = 0.227 \text{ N/s}$

**Problema 7)** El aire en una habitación a  $T_0 = 290 \text{ K}$  y  $P_0 = 95 \text{ kPa}$  es atravesado constantemente por una bomba de vacío a través de un tubo adiabático de 1 cm de diámetro y 50 cm de longitud equipado con una boquilla convergente en la entrada (Figura I.15). Se puede suponer que el flujo en la sección de la boquilla es isentrópico (Entropía constante), y el factor de fricción medio para el conducto puede considerarse como 0,018. Determine:

El caudal másico máximo de aire que se puede aspirar a través de este tubo.

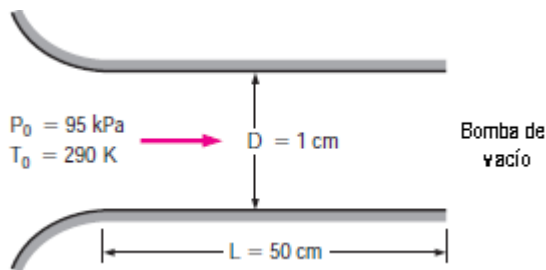


Figura VII.15 Conducto convergente. (Cengel, 2006)

**Solución**  $\dot{m} = 0.0136 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

## Capítulo VIII: Equipos de bombeo. Teoría de funcionamiento

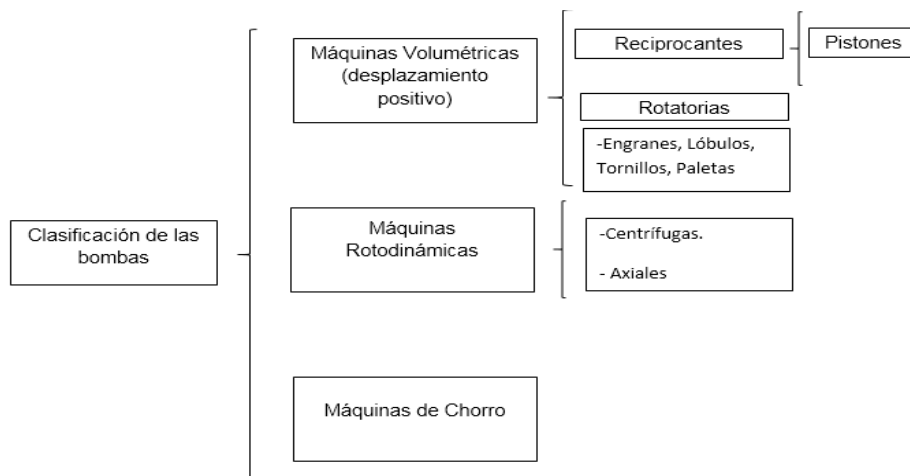
Existen dos categorías fundamentales para las turbomáquinas, *Bombas y Turbinas*, la palabra bomba es un término general para cualquier máquina de flujo que añade energía al fluido. Algunos autores llaman a los equipos de bombeo como dispositivos absorbedores de energía. El incremento de la energía del fluido se traduce en un aumento de la presión. Las turbinas por otro lado son dispositivos que producen energía, estos extraen energía del fluido y transforman la mayor parte de la energía en forma mecánica, el fluido a la salida de la turbina sufre pérdidas energéticas, típicamente en forma de presión. (Mott, 2006; Mott, 1996; Zubicaray, 2005) (Ramírez, 2012)

*El propósito de una bomba es añadir energía al fluido, resultando en un incremento en su presión, pero no necesariamente en la velocidad del fluido.*

Por tanto, las máquinas de flujo que mueven líquido son llamadas bombas, aunque existe por ejemplo otro nombre para las máquinas que manejan gases (*Ventiladores*) caracterizándose por su baja presión y grandes volúmenes de flujo manejado. (Robles, 1997) (Pérez, 2004) (García, 2003)

### VIII.1 Equipos de Bombeo. Clasificación

Son varios los criterios a usar para la clasificación (Soler, 2009). La figura II.1 representa la clasificación de las bombas atendiendo a su funcionamiento.



**Figura VIII.1.**Clasificación de las bombas. (Elaboración propia)

### VIII.2 Parámetros de trabajo de los Equipos de Bombeo

*Flujo o Caudal (Q).* Cantidad de fluido entregado en la Unidad de tiempo. ( $\text{m}^3/\text{h}$  l/s gpm), simplemente denominada capacidad:



$$V = \frac{m}{\rho} \text{ Ec. VIII. 1}$$

Donde:

m. Flujo másico (kg/s)

$\rho$ . Densidad de la sustancia ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ )

**Carga de impulsión (H).** Cantidad de energía entregada al fluido por unidad de masa (kJ/kg; m).

El rendimiento de una bomba es caracterizado también adicionalmente por la carga neta (H) definida como el cambio en la carga de Bernoulli entre la entrada y la salida de la bomba.

$$H = \left( \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{\text{salida}} - \left( \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{\text{entrada}} \text{ Ec. VIII. 2}$$

**Potencia (N o P).** Cantidad de energía por unidad de tiempo entregada al fluido o comunicada de la red ( $P_{\text{util}} ; P_{\text{interna}} P_{\text{freno}} P_{\text{elec}}$ )

**Rendimiento ( $\eta$ )** Mide la eficiencia de realización de alguna actividad de la máquina. Ejemplo rendimiento volumétrico ( $\eta_v$ ), Rendimiento interno ( $\eta_i$ ), Rendimiento hidráulico ( $\eta_h$ ) Rendimiento mecánico ( $\eta_m$ ) y otros.

Trabajo realizado por el fluido

$$W_{\text{fluido}} = \rho g V H \text{ Ec. VIII. 3}$$

Donde

$\rho$ . Densidad del fluido ( $\text{kg/m}^3$ ).

g. gravedad ( $\text{m/s}^2$ )

V. Flujo volumétrico o Caudal ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

H. Carga de impulsión

Curvas de rendimiento de las bombas y punto de operación.

A su vez la potencia al freno puede ser determinada por:

$$P_{\text{freno}} = w \cdot T$$

**Ec. VIII. 4**

Donde

w. velocidad angular del eje (rad/s).

T. Torque

La eficiencia de la bomba no es más que la razón entre la potencia consumida y la potencia disponible

$$\eta = \frac{\rho g V H}{w \cdot T} \quad \text{Ec. VIII. 5}$$

*Trabajo conjunto Máquina-Sistema de tubería<sup>2</sup>:*

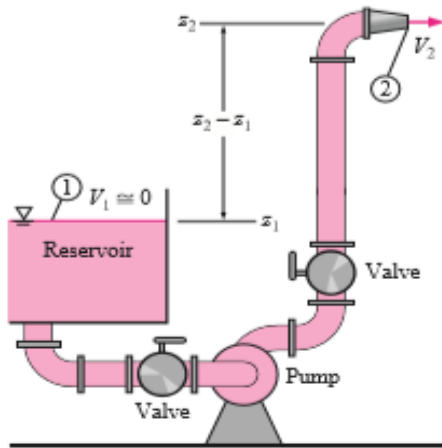


Figura. VIII.2.Trabajo conjunto Máquina-Sistema de tubería (Cengel, 2006)

$$E_1 + H_b = E_2 + \sum_1^2 hf \quad \text{Ec. II. 6}$$

<sup>2</sup>Reservoir: Depósito, Valve: Válvula, Pump: Bomba

$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_b = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 hf \quad \text{Ec. II. 7}$$

Reagrupando la Ec.VIII.7 y despejando  $H_b$

$$H_b = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + Z_2 - Z_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \sum_1^2 hf \quad \text{Ec. VIII. 8}$$

### VIII.3 Bombas volumétricas. Ecuaciones fundamentales

Las bombas de desplazamiento positivo han sido diseñadas a lo largo de los siglos, en cada diseño el volumen es expandido y comprimido dentro de la cámara. Algunos diseños son muy simples, otros por su parte son un poco más complejos empleando elementos rotatorios. Se pueden encontrar bombas de émbolos, engranes, paletas, tornillos etc (Heras, 2011). (Figura VIII.3)

*Las bombas de desplazamiento positivo son ideales para aplicaciones de alta presión, para el bombeo de líquidos viscosos, así como aplicaciones donde se precisan una cierta cantidad de flujo*

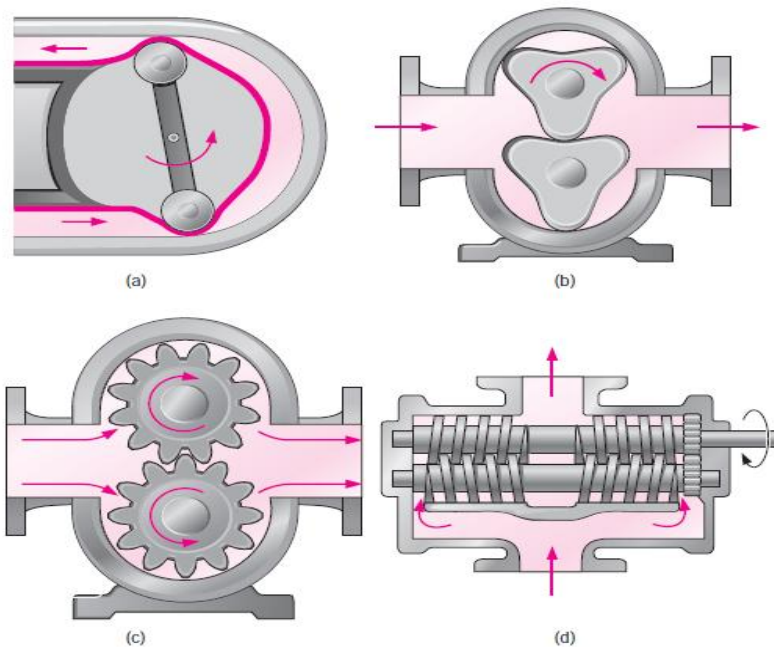


Figura. VIII.3. Ejemplos de bombas de desplazamiento positivo a) bomba peristáltica de tubo flexible b) Bomba rotatoria de tres lóbulos c) Bombas de Engranajes d) Bomba de doble tornillo. (Cengel, 2006)

A continuación, se describe por fases el funcionamiento de una bomba de desplazamiento positivo de dos lóbulos.

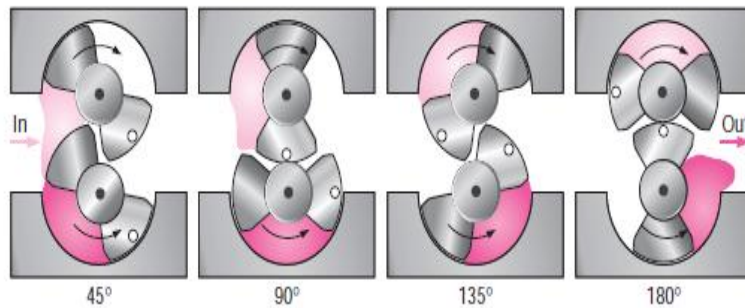


Figura. VIII.4. Cuatro fases de una bomba de desplazamiento positivo de dos lóbulos, la parte clara representa la entrada del fluido por el rotor superior, así como la parte oscura la entrada por el inferior. (Cengel, 2006)

La figura II.5 muestra el principio de funcionamiento de una bomba de émbolo.

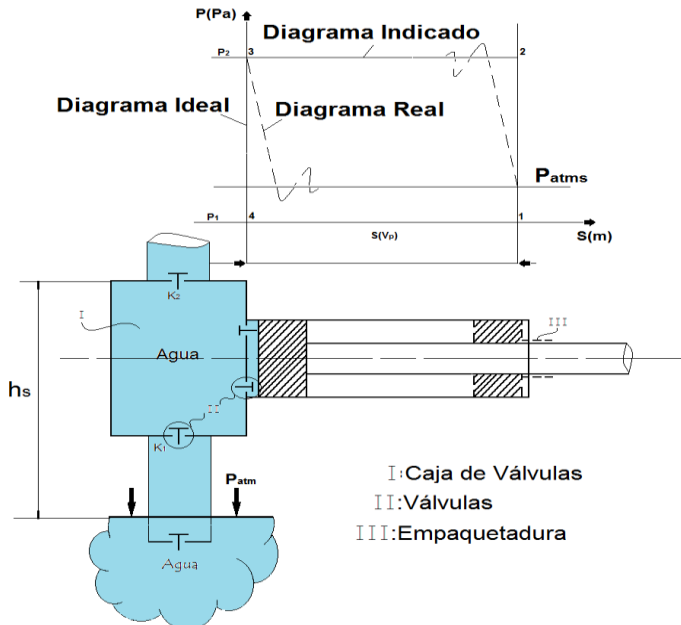


Figura. VIII.5. Principio de funcionamiento de una bomba de émbolo. (Elaboración propia)

Los procesos son:

4-1. Proceso de succión o aspiración  $P=\text{cte}$ .

1-2. Proceso de compresión o elevación de la presión. (Se incrementa la presión).

2-3. Proceso de descarga o impulsión del fluido  $P=\text{cte}$ .

3-4. Proceso de decremento de la presión de succión. (Disminuye la presión).

*Cálculo de la presión de succión.*

$$P_s = P_{\text{atm}} - \rho g h_s - \sum h_{f_{\text{succ}}}(g\rho) \text{ Ec. VIII. 9}$$

*Cálculo de la capacidad de una bomba de émbolo:*

1- Para la bomba de simple efecto.

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 * S * 60 * n * \eta_v \left( \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right) \text{ Ec. VIII. 10}$$

Donde

n. rpm de la bomba

D. Diámetro interior del cilindro.

S. Carrera del pistón.

$\eta_v$ . Coeficiente de rendimiento volumétrico.

2- Para la bomba de doble efecto.

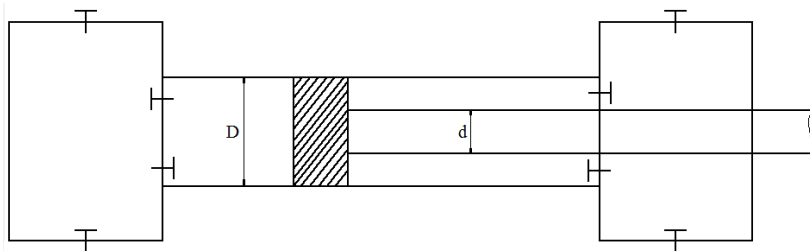


Figura. VIII.6. Bomba de émbolo de doble efecto. (Elaboración propia)

$$Q = \frac{\pi}{4} (2D^2 - d^2) * S * 60 * n * \eta_v \left( \frac{m^3}{h} \right) \text{Ec. II. 11}$$

Donde

d. Diámetro del vástago.

Las magnitudes características de las bombas de pistón son:

$$1-\frac{S}{D} \quad \text{En general } \frac{S}{D} = 0.8 - 2(\text{Relación carrera-diámetro})$$

2- Velocidad media del pistón

$$C_{mp} = \frac{2Sn}{60} = \frac{Sn}{30} C_{mp} = 0,5 - 0,9 \text{ m/s}$$

Mientras más rápida es la bomba, menor es la relación  $\frac{S}{D}$

*Potencia y rendimientos de la bomba de émbolo (pistón):*

Haciendo uso del diagrama de indicador se aprecia que existe un trabajo en la aspiración y otro en la descarga

$$W_{cas} = A_c \cdot p_1 \cdot S$$

$$W_{cd} = A_c \cdot p_2 \cdot S$$

Por lo que el  $W_{ind.total} = W_{cas} + W_{cd}$

$$W_{ind.total} = A_c \cdot p_1 \cdot S + A_c \cdot p_2 \cdot S = (p_1 + p_2) A_c S$$

Al término  $(p_1 + p_2) = p_i$  se le denomina presión indicada  $p_i$

Por lo que el Trabajo de las dos carreras es:

$$W_{ind.total} = p_i \cdot A_p S \quad \text{Ec. VIII. 12}$$

*La potencia interior o indicada de un cilindro es:*

$$N_i = \frac{P_i * A_c S * n}{60 * 1000} \text{ (kW)} \text{Ec. VIII. 13}$$

Para las bombas de doble efecto y de émbolos múltiples la potencia interior se calcula como la suma de las potencias interiores de los cilindros por separado.

La potencia real (Potencia al freno o al eje) aplicada desde el motor a la bomba es mayor que la potencia interna por lo que parte de ella se gasta en vencer el rozamiento mecánico.

*Rendimiento mecánico  $\eta_{mec}$*

$$\eta_{mec} = \frac{N_i}{N_{eje}} N_{eje} = \frac{N_i}{\eta_{mec}}$$

*Rendimiento interno  $\eta_i$*

$$\eta_i = \frac{N_u}{N_i} N_i = \frac{N_u}{\eta_i}$$

Sustituyendo  $N_i$  en la ecuación de  $N_{eje}$

Potencia al eje ( $N_{eje}$ ) es.

$$N_{eje} = \frac{N_u}{\eta_i * \eta_{mec}} = \frac{\rho g Q H}{\eta_i * \eta_{mec}} \text{ Ec. VIII. 14}$$

Pero

$\eta_i = \eta_v * \eta_h$  Quedando la Ecuación

$$N_{eje} = \frac{\rho g Q H}{\eta_{mec} * \eta_v * \eta_h} \text{ Ec. VIII. 15}$$

$\eta_{mec} * \eta_v * \eta_h = \eta_{bomba}$  Rendimiento de la bomba

*Bombas de engranes*

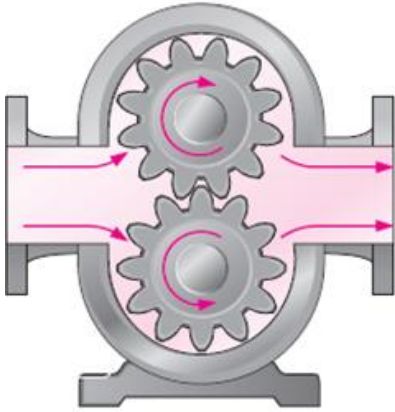


Figura. VIII.7. Bomba de engranes (Cengel, 2006)

*Cálculo de la capacidad de las bombas de engranes*

Para ruedas de diferentes dimensiones

$Q$  ( $\text{m}^3/\text{min}$ )

$$Q = (f * l * Z_1 * n_1 + f * l * Z_2 * n_2) \eta_v \quad \text{Ec. VIII. 16}$$

$f$ : Área de sección transversal de la cavidad entre dientes

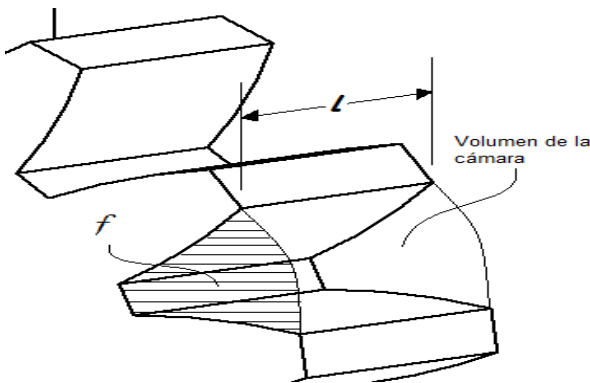


Figura. VIII.8. Representación de la cavidad entre dientes.(Elaboración propia)

Denominando  $\xi$  como la relación de transmisión

$$\xi = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Y dado que la velocidad tangencial en el punto de contacto de los engranes es la misma



$$u_1 = u_2 = u$$

$$w_1 * r_1 = w_2 * r_2$$

$$\frac{2\pi n_1 D_1}{60} \frac{1}{2} = \frac{2\pi n_2 D_2}{60} \frac{1}{2}$$

$$n_1 D_1 = n_2 D_2$$

Queda entonces:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

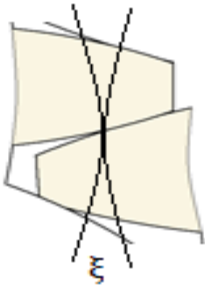


Figura. VIII.9. Contacto entre los engranes. (Elaboración propia)

Sacando factor común  $f * l * Z_1 * n_1$  de la Ec. VIII.16 se tiene

$$Q = f * l * Z_1 * n_1 \left( 1 + \frac{f * l * Z_2 * n_2}{f * l * Z_1 * n_1} \right) * \eta_v$$

$$Q = f * l * Z_1 * n_1 \left( 1 + \xi \frac{D_2}{D_1} \right) \eta_v \text{ Ec. VIII. 17}$$

Para ruedas dentadas iguales

$$\xi = 1 \frac{D_1}{D_2} = 1$$

La Ec. VIII. 17 queda entonces:

$$Q = 2 * f * l * Z_1 * n_1 * \eta_v$$

Generalmente el  $\eta_v = 0,7 - 0,9$

Otra expresión usada para este tipo de máquina es

$$Q = 0,233 l * R * h * n \left( \frac{m^3}{min} \right) \text{Ec. VIII. 18}$$

Donde:

R. Radio primitivo.

h. Altura de la cabeza del diente.

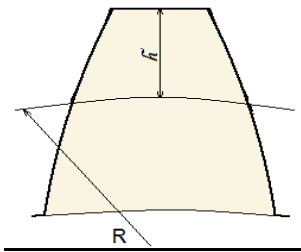


Figura. VIII.10. Representación del radio primitivo. (Elaboración propia)

### *Bombas de Paletas*

$$Q = f_A * l * Z * n * \eta_v \text{ m}^3/\text{min}$$

**Ec. II. 19**

Donde

$f_A$ . Área del espacio entre paletas

l. Longitud de las paletas.

Z. Número de cavidades entre paletas.

n. rpm

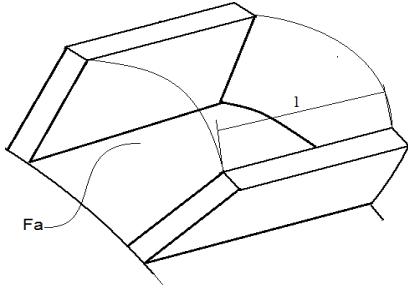


Figura. VIII.11. Bomba de paletas (Elaboración propia)

#### VIII.4 Máquinas Rotodinámicas

Las bombas centrífugas o rotodinámicas son las que han adquirido mayor relevancia por sus grandes posibilidades y vasto campo de aplicación, habiendo desplazado casi por entero a las de desplazamiento positivo. Su gran velocidad de funcionamiento, que permite su accionamiento directo por motores eléctricos, pequeño tamaño y peso, gran seguridad de marcha y servicio y mínimo número de elementos de desgaste, han sido factores decisivos que se han impuesto para conseguir su gran difusión y empleo (Royo, 1996; Encinas, 1975; de las Heras Jiménez, 2011)

La bomba centrífuga es una máquina hidráulica compuesta en esencia por un impulsor con alabes, que accionado desde el exterior transmite al líquido la energía necesaria para obtener una presión determinada (Abella, 2003) (Gómez, 1991) (Martínez, 2002) (Santos, 2014). El cuerpo de la bomba o voluta recibe el líquido salido del impulsor y por su construcción especial transforma su energía cinética en presión, dirigiéndolo al mismo tiempo hacia el exterior por un canal de descarga. Existe una gran variedad de bombas en cuanto se refiere a sus formas de construcción, de acuerdo con las aplicaciones particulares o imperativos mecánicos.

##### VIII.4.1 Teoría General De Las Máquinas Centrífugas

La teoría general de las máquinas centrífugas se basa en el concepto de impulso y cantidad de movimiento. De acuerdo a la segunda ley de newton

$$F = \frac{d(m \cdot v)}{dt}$$

-La acción de las fuerzas externas es igual a la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento. Isaac Newton<sup>3</sup> planteó exactamente ``El cambio del movimiento en el tiempo es proporcional a la fuerza matriz aplicada y se efectúa en la dirección de la línea recta en que se aplica esa fuerza``).

El término usado por Newton como ``movimiento`` hoy corresponde al término *cantidad de movimiento*.

El impulso de una fuerza = Variación de la cantidad de movimiento.

$$F dt = d(m \cdot v)$$

Para una partícula o conjunto de partículas de masa constante.

$$F dt = m dv$$

Para un intervalo de tiempo infinitesimal.

$$\int_1^2 F \cdot dt = m \int_1^2 dv = m(V_2 - V_1)$$

$$F \Delta t = m(V_2 - V_1)$$

Sus unidades son:

$$N \cdot s = Kg \cdot \frac{m}{s}$$

$$\frac{Kg \cdot m}{s^2} \cdot s = kg \cdot \frac{m}{s}$$

**El principio de impulso y cantidad de movimiento, unido a las Ecuaciones de Bernoulli y Continuidad constituye la base fundamental de Mecánica de los Fluidos y son de mucha aplicación en las Máquinas de Flujos.**

Para el estudio de las máquinas centrífugas debe hacerse las siguientes

---

<sup>3</sup> Isaac Newton (1643-1727). Físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés.

Suposiciones:

1. Consideramos un número infinito de álabes de espesor despreciable para lograr un número infinito de venas del fluido que repiten la forma geométrica del álabe.
2. Todas las venas son absolutamente iguales desde el punto de vista geométrico y cinemático.
3. El flujo es plano, es decir no existe gradiente de velocidad a lo largo del eje paralelo al eje geométrico de la máquina.

Apliquemos al impelente de la máquina centrífuga la Ecuación de los momentos de las fuerzas impulsivas externas es igual a la variación del momento de la cantidad de movimiento. (Ver figura VIII.12)

Donde:

$\omega_1$ : Velocidad angular.

$u_1$ : Velocidad tangencial del impelente.

$w_1$ : Velocidad relativa a la superficie del álabe.

$V_1 = C_1$ : Velocidad absoluta del fluido.

$V_{n1} = Cr_1$ : Componente radial de la velocidad absoluta.

$V_{t1} = C_{1u}$ : Componente tangencial de la velocidad absoluta.

$\beta_1$ : Ángulo comprendido entre  $W$  y  $u_1$ .

$\alpha_1$  Ángulo comprendido entre  $C$  y  $u_1$ .

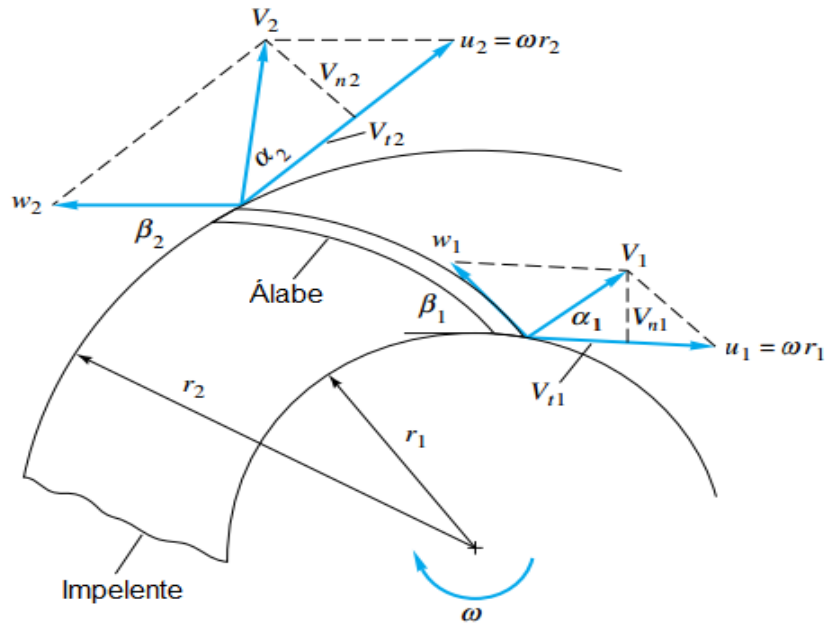


Figura VIII.12. Paralelogramos de velocidad a la entrada y la salida de los canales interálabe. (White, 2003)

El momento de las fuerzas impulsivas es igual a la variación del momento de la cantidad de movimiento.

Afectando la ecuación por un brazo:

$$F \cdot r \cdot \Delta t = m(v_2 r_2 - v_1 r_1)$$

$$M_{t_{\infty}} \cdot \Delta t = m v_2 r_2 - m v_1 r_1$$

$$M_{t_{\infty}} \cdot \Delta t = (\rho Q C_2 l_2 - \rho Q C_1 l_1)$$

Considerando un tiempo unitario:

$$M_{t_{\infty}} = \rho Q (C_2 l_2 - C_1 l_1)$$

Del triángulo de velocidad:

$$l_2 = R_2 \cos \alpha_2$$

$$l_1 = R_1 \cos \alpha_1$$

Por tanto.

$$M_{t_{\infty}} = \rho Q (C_2 R_2 \cos \alpha_2 - C_1 R_1 \cos \alpha_1)$$

Como:  $C_2 \cos \alpha_2 = C_{2u}$  y  $C_1 \cos \alpha_1 = C_{1u}$

$$M_{t_{\infty}} = \rho Q (C_{2u} R_2 - C_{1u} R_1)$$

La potencia puede ser determinada por:

$$N_{t_{\infty}} = M_{t_{\infty}} \cdot \omega$$

Por tanto.

$$N_{t_{\infty}} = \rho Q (C_{2u} R_2 - C_{1u} R_1) \cdot \omega$$

Como:  $u = \omega \cdot R$  queda entonces  $\omega = \frac{u}{R}$

$$N_{t_{\infty}} = \rho Q (u_2 C_{2u} - u_1 C_{1u})$$

-Pero también la  $N_{t_{\infty}}$  se puede expresar como:

$$N_{t_{\infty}} = \rho g Q \cdot H_{t_{\infty}}$$

Por lo que:

$$\rho g Q \cdot H_{t_{\infty}} = \rho Q (u_2 C_{2u} - u_1 C_{1u})$$

*ECUACIÓN DE EULER. CARGA TEÓRICA Y REAL*

$$H_{t_{\infty}} = \frac{u_2 C_{2u} - u_1 C_{1u}}{g}$$

**Ec. VIII. 20**

*Ecuación de Euler. (Leonard Euler 1745)*

*La carga teórica para un número finito de álabes es:*

$$H_t = \mu \cdot H_{t_{\infty}} \text{ **Ec. VIII. 21**}$$

Donde  $\mu$  : Coeficiente de corrección que tiene en cuenta el número finito de álabes.

$\mu < 1$  Generalmente  $\mu = 0,8$

La carga real la determinamos por la expresión:

$$H_r = \eta_h \cdot H_t = \eta_h \cdot \mu \cdot H_{t\infty} \text{ Ec. VIII. 22}$$

Donde:  $\eta_h$  - Rendimiento hidráulico. Para máquinas centrífugas modernas (0,80...0,96).

*INFLUENCIA DEL ÁNGULO  $\beta_2$  EN LA CARGA DE IMPULSIÓN*

$$H_{t\infty} = \frac{u_2 C_{2u} - u_1 C_{1u}}{g}$$

- Para  $\alpha_1 = 90^\circ$ .  $C_{1u} = 0$

$$H_{t\infty} = \frac{u_2 C_{2u}}{g}$$

Del triángulo de velocidades  $\cot \beta_2 = \frac{u_2 - C_{2u}}{C_{2r}}$

$$C_{2u} = u_2 - C_{2r} \cot \beta_2$$

Por tanto.

$$H_{t\infty} = \frac{u_2^2 - u_2 C_{2r} \cot \beta_2}{g}$$

Cuando  $\beta_2 < 90^\circ$  se  $H_{t\infty}$  decrece Para  $\beta_2 = 0$   $H_{t\infty} = -\infty$

Cuando  $\beta_2 = 90^\circ$   $H_{t\infty} = \frac{u_2^2}{g}$  -Para  $\beta_2 = 90^\circ$   $H_{t\infty} = \frac{u_2^2}{g}$

Cuando  $\beta_2 > 90^\circ$   $H_{t\infty}$  se incrementa -Para  $\beta_2 = 180^\circ$   $H_{t\infty} = +\infty$

La representación gráfica se representa en la Figura VIII.13 y Figura VIII.14.

**La carga dinámica viene dada por:**

$$(H_{din})_{t\infty} = \frac{(u_2 - C_{2r} \cot \beta_2)^2}{2g}$$

**Ec. VIII. 23**



La carga estática por:

$$(H_{est})_{t_{\infty}} = \frac{u_2 - (C_{2r} \cot \beta_2)^2}{2g} \quad \text{Ec. VIII. 24}$$

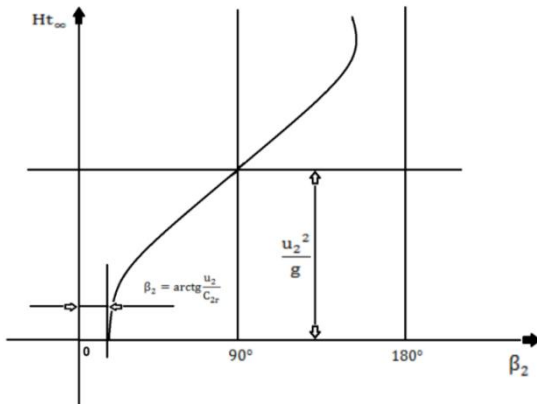


Figura VIII.13. Dependencia de  $Ht_{\infty}$  en función del ángulo  $\beta_2$ . (Elaboración propia)

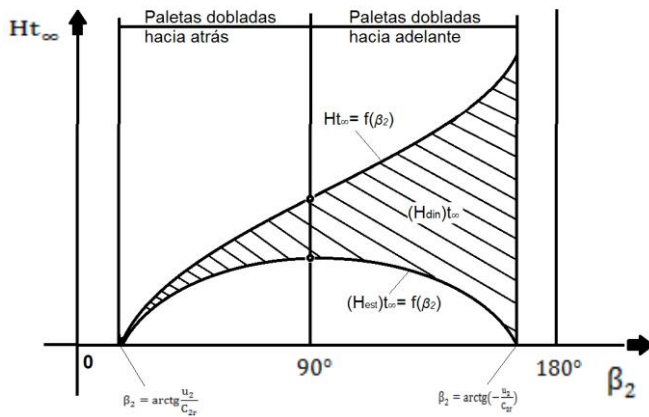


Figura VIII.14. Representación gráfica de los distintos tipos de carga en función del ángulo  $\beta_2$ . (Elaboración propia)

## CURVAS CARACTERÍSTICAS TEÓRICA Y REAL

### Curva característica de H vs Q.

$$Ht_{\infty} = \frac{u_2^2 - u_2 C_{2r} \cot \beta_2}{g}$$

Pero  $Q = C_{2r} \cdot \text{Área}$

$$Q = C_{2r} \cdot \pi \cdot D_2 \cdot b_2$$

$$H_{t\infty} = \frac{u_2^2 - u_2 \cdot \frac{Q}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2} \cdot \cot \beta_2}{g}$$

$$C_{2r} = \frac{Q}{\pi \cdot D_2 \cdot b_2}$$

$$N = \frac{\rho g Q H}{K} \text{ Ec. VIII. 25}$$

Cuando  $\beta_2 < 90^\circ$   $\cot \beta_2$  es positivo y  $H_{t\infty}$  disminuye cuando  $Q$  aumenta

Cuando  $\beta_2 = 90^\circ$   $\cot \beta_2 = 0$  y  $H_{t\infty}$  se mantiene constante cuando  $Q$  aumenta

Cuando  $\beta_2 > 90^\circ$   $\cot \beta_2$  es negativo y  $H_{t\infty}$  aumenta cuando  $Q$  aumenta

**Representación gráfica.**

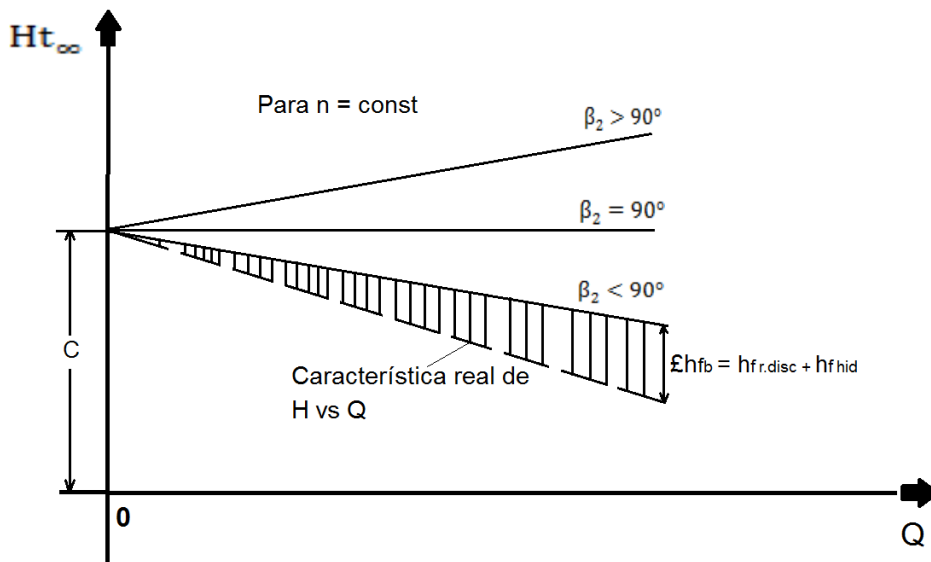


Figura VIII.15 Características teóricas de las máquinas centrífugas para distintos ángulos  $\beta_2$ . (Elaboración propia)

*Potencia y Rendimiento.*

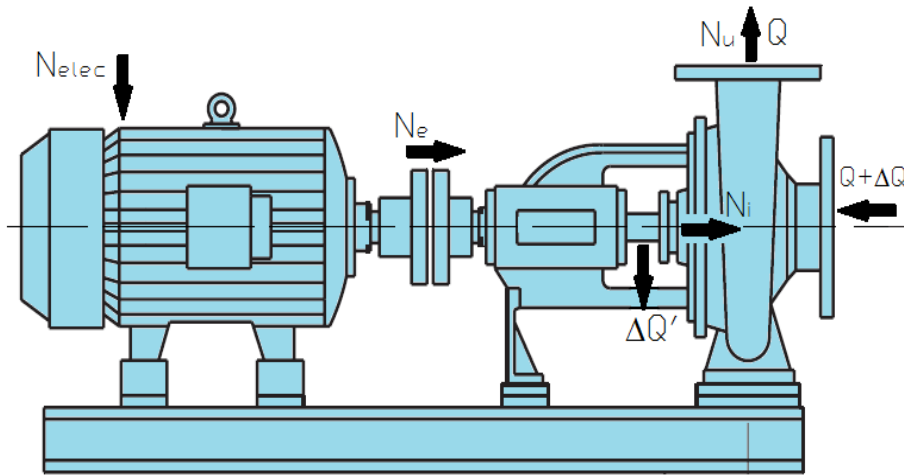


Figura VIII.16 Potencia y rendimiento útil. (Catálogo Bomba RNI-GNI)

*Potencia útil. ( $N_u$ )*

$$N_u = \frac{\rho g Q H}{1000} \text{ (kW)}$$

**Ec. VIII. 26**

Energía/Tiempo entregado al fluido que sale de la máquina.

*Potencia interna. ( $N_i$ )*

$$N_i = \frac{\rho g (Q + \Delta Q) \cdot (H + \Delta H)}{1000}$$

**Ec. VIII. 27**

Energía/Tiempo entregada a todo el fluido que circula por la máquina.

*Rendimiento interno. ( $\eta_i$ )*

$$\eta_i = \frac{N_u}{N_i} = \frac{\frac{\rho g Q H}{1000}}{\frac{\rho g (Q + \Delta Q) \cdot (H + \Delta H)}{1000}}$$

$$\eta_i = \eta_v \cdot \eta_h$$

$$\eta_m = \frac{N_i}{N_{eje}}$$

$$N_{eje} = \frac{N_i}{\eta_m}$$

$$\text{Pero } N_i = \frac{N_u}{\eta_i} = \frac{N_u}{\eta_v \cdot \eta_h}$$

$$N_e = \frac{N_u}{\eta_v \cdot \eta_h \cdot \eta_m} = \frac{N_u}{\eta_{maq}}$$

$$N_e = \frac{\rho g Q H}{1000 \cdot \eta_{maq}}$$

**Ec. VIII. 28**

### **VIII.5 Teoría de Semejanza**

El movimiento de los líquidos y los gases en los pasajes interálaves de las máquinas centrífugas es complicado. Es por esta razón que el cálculo de los elementos de trabajo de las máquinas centrífugas presentan grandes dificultades y se acude por ello a los datos experimentales obtenidos del diseño y prueba de máquinas anteriores. No obstante, la posibilidad de usar los datos experimentales está dada únicamente porque se hayan observado las *Leyes de Semejanza*.

En la computación de las máquinas de flujo se utilizan ampliamente el ensayo de modelos. Los modelos se construyen aplicando las *Leyes de Semejanza*.

Los fenómenos físicos en espacios geométricos se denominan *semejantes* si en los correspondientes puntos homólogos las magnitudes físicas similares se encuentran en *relaciones contantes*. Estas relaciones se denominan:

*Coeficiente o Escalas de Semejanza*

En las máquinas de flujo hay que observar tres tipos o formas de semejanza:

- Semejanza geométrica.
- Semejanza cinemática.
- Semejanza dinámica.

*Semejanza geométrica:*

- Igualdad de los ángulos semejantes.
- Igualdad o constancia de las relaciones entre magnitudes semejantes.

*En la semejanza geométrica:*

$$\beta_{1a} = \beta_{1b} = \beta_1$$

$$\beta_{2a} = \beta_{2b} = \beta_2$$

$$\beta_{ia} = \beta_{ib} = \beta_i$$

*Son los ángulos de las máquinas*

$$\frac{D_{2b}}{D_{2a}} = \frac{D_{1b}}{D_{1a}} = \frac{b_{1b}}{b_{1a}} \dots = \frac{l_{ib}}{l_{ia}} = \delta_1 = \text{cte}$$

De donde:

$\delta_1$  Coeficiente de Semejanza Geométrica.

*Semejanza cinemática:*

- Igualdad de los ángulos homólogos en los triángulos de velocidades.
- Se mantiene constante la relación entre las velocidades en puntos homólogos de las máquinas semejantes.

*En la semejanza cinemática:*

$$\alpha_{1a} = \alpha_{1b}$$

$$\alpha_{2a} = \alpha_{2b}$$

$$\alpha_{ia} = \alpha_{ib}$$

*Ángulos de los triángulos de velocidad*

$$\frac{U_{1b}}{U_{1a}} = \frac{W_{1b}}{W_{1a}} = \frac{C_{1b}}{C_{1a}} = \frac{U_{2b}}{U_{2a}} \dots = \frac{C_{ib}}{C_{ia}} = \delta_c = \text{cte}$$

$\delta_c$  Coeficiente de Semejanza Cinemática.

*Semejanza dinámica:*

- Se mantiene constante la relación entre las fuerzas de igual naturaleza que actúan en puntos homólogos de las máquinas geométricas y cinemáticamente semejantes.

En la semejanza dinámica

$$\frac{F_{1b}}{F_{1a}} = \frac{F_{2b}}{F_{2a}} \dots = \frac{F_{ib}}{F_{ia}} = \delta_f = \text{cte}$$

$\delta_f$  Coeficiente de Semejanza dinámica.

Los criterios generales de semejanza de los flujos estudiados en la Mecánica de los Fluidos se aplican también para los flujos en las máquinas centrífugas. Por lo cual al estudiar la semejanza de estas máquinas debe observarse la igualdad de estos criterios adimensionales.

- Número de Reynolds -----  $R_e = \frac{V \cdot l}{\nu}$
- Número de Froude -----  $F_r = \frac{V^2}{g \cdot l}$
- Número de Euler -----  $E_u = \frac{P}{\rho \cdot V^2}$
- Número de Strouhal -----  $S_h = \frac{l \cdot n}{V}$

La semejanza de las corrientes de flujo se caracteriza por la igualdad de los criterios adimensionales en puntos homólogos de las máquinas:

$$R_{ea} = R_{eb} ; E_{ua} = E_{ub} ; F_{ra} = F_{rb} ; S_{ha} = S_{hb}$$

Supóngase dos máquinas semejantes a y b funcionando en regímenes semejantes. El caudal volumétrico para ambas máquinas es:

$$Q_a = \pi \cdot D_{2a} \cdot b_{2a} \cdot C_{2ra} \cdot \eta_{va}$$

$$Q_b = \pi \cdot D_{2b} \cdot b_{2b} \cdot C_{2rb} \cdot \eta_{vb}$$

La relación entre los caudales da:

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{D_{2a}}{D_{2b}} \cdot \frac{b_{2a}}{b_{2b}} \cdot \frac{C_{2ra}}{C_{2rb}} \cdot \frac{\eta_{va}}{\eta_{vb}}$$

De la semejanza cinemática se puede escribir la relación de velocidad  $C_{2ra}/C_{2rb}$  en función de las dimensiones físicas del impelente y la velocidad de rotación.

$$\frac{C_{2ra}}{C_{2rb}} = \frac{U_{2a}}{U_{2b}} = \frac{n_a \cdot D_{2a}}{n_b \cdot D_{2b}}$$

Sustituyendo en la ecuación de los caudales:

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{D_{2a}^2}{D_{2b}^2} \cdot \frac{b_{2a}}{b_{2b}} \cdot \frac{n_a}{n_b} \cdot \frac{\eta_{va}}{\eta_{vb}} \quad \text{Ec. VIII. 29}$$

Como consecuencia de la Semejanza Geométrica:

$$\frac{b_{2a}}{b_{2b}} = \frac{D_{2a}}{D_{2b}}$$

y la expresión (VIII. 29) se puede expresar definitivamente como:

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{D_{2a}^3}{D_{2b}^3} \cdot \frac{n_a}{n_b} \cdot \frac{\eta_{va}}{\eta_{vb}} \quad \text{Ec. VIII. 30}$$

Para el análisis de una misma máquina  $D_{2a} = D_{2b}$  y a diferentes rpm la expresión (VIII. 30) queda:

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{n_a}{n_b} \cdot \frac{\eta_{va}}{\eta_{vb}} \quad \text{Ec. VIII. 30. 1}$$

La VIII. 30. 1 nos indica que para una máquina dada el caudal varía con la primera potencia de las frecuencias de rotación del árbol y los rendimientos volumétricos.

Como se sabe la ecuación de Euler la Carga de Impulsión creada por la máquina centrífuga es:

$$H = \frac{U_2 \cdot C_{2u}}{g} \cdot \eta_h \quad \text{Ec. VIII. 31}$$

Por lo que para la máquina a y b semejante trabajando en regímenes semejantes la ecuación (VIII. 31) permite expresar:

$$\frac{H_a}{H_b} = \frac{U_{2a}}{U_{2b}} \cdot \frac{C_{2ua}}{C_{2ub}} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}} \text{Ec. VIII. 31. 1}$$

Según las condiciones de *Semejanza Cinemática*:

$$\frac{U_{2a}}{U_{2b}} = \frac{C_{2ua}}{C_{2ub}} \cdot \frac{U_{2a}}{U_{2b}} = \frac{n_a \cdot D_{2a}}{n_b \cdot D_{2b}}$$

Por lo que la expresión (VIII. 31. 1) se expresa como:

$$\frac{H_a}{H_b} = \frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{D_{2a}^2}{D_{2b}^2} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}} \text{Ec. VIII. 32}$$

Para la misma máquina funcionando en diferente régimen; dado que  $D_{2a} = D_{2b}$  queda:

$$\frac{H_a}{H_b} = \frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}} \text{Ec. VIII. 33}$$

Para el caso de los ventiladores se acostumbra a expresar esta relación en función de presión y no de las cargas de impulsión. Para ello multiplíquese la ecuación VIII. 32 por los términos de  $\rho g$ .

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\rho_a \cdot g \cdot H_a}{\rho_b \cdot g \cdot H_b} = \frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{D_{2a}^2}{D_{2b}^2} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_b} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}} \text{Ec. VIII. 34}$$

Para la misma máquina, siendo diferente la frecuencia de rotación del árbol, se tiene:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_b} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}} \text{Ec. VIII. 34. 1}$$

Como ya se había estudiado la potencia de la máquina de flujo centrífuga está dada por la ecuación:

$$N = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{\eta_{maq}} \text{Ec. VIII. 35}$$

Estableciendo la relación entre los consumos de potencia de las máquinas semejantes trabajando en regímenes semejantes se llega a la ecuación:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{\rho_a \cdot Q_a \cdot H_a \cdot \eta_b}{\rho_b \cdot Q_b \cdot H_b \cdot \eta_a} \text{Ec. II. 36}$$



Como se tiene en las ecuaciones **VIII. 29** y **VIII. 32** las relaciones de Q y H en función de las dimensiones físicas y la frecuencia de rotación la ecuación **VIII. 36** se expresa por:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{\rho_a}{\rho_b} \cdot \frac{D_{2a}^5}{D_{2b}^5} \cdot \frac{n_a^3}{n_b^3} \cdot \frac{\eta_a}{\eta_b} \text{Ec. VIII. 37}$$

Ordenando la siguiente ecuación:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{\rho_a}{\rho_b} \cdot \frac{D_{2a}^5}{D_{2b}^5} \cdot \frac{N_a^3}{D_b^3} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_b} \cdot \frac{\eta_a}{\eta_b} \text{Ec. VIII. 38}$$

Para fluidos incompresibles, la misma máquina trabajando a diferentes frecuencias de rotación tiene variaciones en el consumo de potencia según la ecuación:

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{n_a^3}{n_b^3} \cdot \frac{\eta_b}{\eta_a} \text{Ec. VIII. 39}$$

Las ecuaciones **VIII. 30. 1**, **VIII. 33** y **VIII. 39** se denominan *Expresiones de Proporcionalidad* y resultan de mucha utilidad en el campo de la ingeniería.

Una magnitud muy importante, que determina la semejanza de las corrientes de flujo en las bombas centrífugas es la *Velocidad Específica*.

Considerando las ecuaciones **VIII. 40** y **VIII. 41**

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{D_{2a}^3}{D_{2b}^3} \cdot \frac{N_a}{N_b} \text{Ec. VIII. 40}$$

$$\frac{H_a}{H_b} = \frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{D_{2a}^2}{D_{2b}^2} \text{Ec. VIII. 41}$$

Obtenidas a partir de que se cumple la semejanza hidráulica entre las máquinas a y b.

Si a la máquina (a) en escala reducida o modelo, se define que entrega la potencia útil (Nu) de 1CV (caballo de vapor) y desarrolla una carga de impulsión de 1m, el flujo entregado por ella es:

$$N_{ua} = \rho \cdot g \cdot Q_a \cdot H_a \text{Ec. VIII. 42}$$

Despejando el caudal  $Q_a$  se tiene:

$$Q_a = \frac{N_{ua}}{\rho \cdot g \cdot H_a} \text{Ec. VIII. 43}$$

Recordando que  $1CV = 735.6 \text{ Watt}$  y sustituyendo en la ecuación VIII.25 queda:

$$Q_a = \frac{1CV \cdot 735.5 \frac{N \cdot m}{s \cdot cv}}{10^3 \frac{Kg}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1} = \frac{m^3}{s}$$

$$Q_a = 0.07497 \approx 0.075 \text{ m}^3/s$$

Si se denomina ( $n_s$ ) “*Velocidad Específica*” a la frecuencia de rotación a que debe guiar la máquina (a) para entregar el flujo o caudal ( $Q$ ) =  $0.075 \text{ m}^3/s$ , a la carga  $H_a = 1\text{m}$ . Sustituyendo en la ecuación **VIII. 32** y despejando la relación de diámetro  $\frac{D_a}{D_b}$  se obtiene:

$$\frac{H_a}{H_b} = \frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{D_{2a}^2}{D_{2b}^2} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}}$$

$$\frac{D_{2a}^2}{D_{2b}^2} = \frac{\frac{H_a}{H_b}}{\frac{n_a^2}{n_b^2} \cdot \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}}} \quad \text{Considerando } \frac{\eta_{ha}}{\eta_{hb}} = 1. \quad \therefore \eta_{ha} \approx \eta_{hb}$$

$$\frac{D_{2a}}{D_{2b}} = \sqrt{\frac{\frac{H_a}{H_b}}{\frac{n_a^2}{n_b^2}}} = \frac{\left(\frac{H_a}{H_b}\right)^{1/2}}{\left(\frac{n_a^2}{n_b^2}\right)^{1/2}} \text{Ec. VIII. 44}$$

Considerando lo ya tratado de que  $H_a = 1\text{m}$  y  $n_a = n_s$  en la ecuación **VIII. 44** se tiene:

$$\frac{D_{2a}}{D_{2b}} = \frac{\frac{1}{H_b^{1/2}}}{\frac{n_s}{n_b}} \text{Ec. VIII. 45}$$

Sustituyendo la ecuación **VIII. 45** en la ecuación **VIII. 30** y considerando que para  $n_a = n_s$  y  $H_a = 1\text{m}$  corresponda el caudal ( $Q$ ) =  $0.075 \text{ m}^3/s$  y que  $\eta_{va} \approx \eta_{vb}$ , la ecuación **VIII. 30** queda:

$$\frac{Q_a}{Q_b} = \frac{D_{2a}^3}{D_{2b}^3} \cdot \frac{n_a}{n_b} \cdot \frac{\eta_{va}}{\eta_{vb}} \quad \text{Ec. VIII. 46}$$

Sustituyendo los términos

$$\frac{0.075}{Q_b} = \left( \frac{\frac{1}{H_b^{1/2}}}{\frac{n_s}{n_b}} \right)^3 \cdot \frac{n_s}{n_b} \quad \text{Ec. VIII. 47}$$

Desarrollando:

$$\frac{0.075}{Q_b} = \frac{\frac{1}{H_b^{3/2}}}{\frac{n_s^3}{n_b^3}} \cdot \frac{n_s}{n_b} = \frac{\frac{1}{H_b^{3/2}}}{\frac{n_s^2}{n_b^2}}$$

$$\frac{0.075}{Q_b} = \frac{n_b^2}{H_b^{3/2} \cdot n_s^2}$$

Despejando ( $n_s$ ):

$$n_s^2 = \frac{n_b^2 \cdot Q_b}{0.075 \cdot H_b^{3/2}}$$

$$N_s = \left( \frac{n_b^2 \cdot Q_b}{0.075 \cdot H_b^{3/2}} \right)^{1/2}$$

$$N_s = \frac{n_b \cdot Q_b^{1/2}}{0.075^{1/2} \cdot (H_b^{3/2})^{1/2}}$$

$$N_s = \frac{1}{0.075^{1/2}} \cdot \frac{n_b \cdot Q_b^{1/2}}{H_b^{3/4}}$$

$$N_s = 3.65 \cdot \frac{n_b \cdot \sqrt{Q_b}}{H_b^{3/4}} \quad (\text{Ecuación de la Velocidad Específica})$$

La velocidad específica caracteriza la forma constructiva de la máquina.

Para  $\uparrow Q$  y  $\downarrow H \rightarrow n_s \uparrow$  - Característico de máquina de amplio canal de flujo y bajo  $D_2/D_1$ .

Por el contrario, para  $\downarrow Q$  y  $\uparrow H \rightarrow N_s \downarrow$  – Típico en máquinas radiales con canales estrechos y alta  $D_2/D_1$ .

Los valores de  $n_s$  pueden estar en el entorno de 0 a infinito.

En la Tabla VIII.1 se ofrecen a modo de ejemplo, los intervalos de velocidades específicas para distintos tipos de bombas.

Tabla VIII.1. Intervalos de velocidades específicas para distintos tipos de bombas<sup>4</sup>. (Ramos, 1986)

Tipos de bombas	Intervalo de $n_s$
Rotatorias y de pistones	<40
De remolino	10-40
Centrifugas	40-300
Mixtas	300-600
Axiales	600-1200

Nota: Estos valores dependen de las unidades empleadas, los dados corresponden al sistema internacional:  $Q$  ( $m^3/s$ ),  $H$  (m),  $N$  (kW)

### VIII.6 Problemas Resueltos.

**Problema 1)** Una bomba de émbolo de doble efecto tiene un émbolo de 250 mm de diámetro. El diámetro del vástago del émbolo es de 50 mm y sobresale por una parte solamente. La carrera es de 375 mm y la velocidad de giro del cigüeñal es de 60 rpm. La altura de presión de aspiración es de - 4,5 m c.a y la de impulsión 18 m c.a. El fluido bombeado es agua. Calcule:

- a) La fuerza que se requiere para mover el émbolo en las carreras de ida y vuelta.

---

<sup>4</sup> Los valores dependen de las unidades empleadas, los dados corresponden al sistema internacional

- b) El caudal entregado por la bomba
- c) La potencia absorbida por la bomba.

En el problema desprecie las pérdidas y el rozamiento.

### **Solución**

#### Datos

$$D_{\text{émbolo}} = 250 \text{ mm}$$

$$d_{\text{vástago}} = 50 \text{ mm}$$

$$S = 375 \text{ mm (carrera)}$$

$$n = 60 \text{ rpm.}$$

$$\frac{P_{\text{suc}}}{\rho g} = -4,5 \text{ m c. a}$$

$$\frac{P_{\text{desc}}}{\rho g} = 18 \text{ m c. a}$$

#### Cálculo de las áreas del pistón y el vástago

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.250^2}{4} = 0,049 \text{ m}^2$$

$$A_v = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.050^2}{4} = 0,0019 \text{ m}^2$$

#### Cálculo de las presiones

Presión de aspiración (negativa) ( $P_a$ )

Si  $h_{Pa} = -4,5 \text{ m c. a}$  y  $h_{Pa} = \frac{P_a}{\rho g}$  se tiene que:

$$P_a = \rho g h_{Pa} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \cdot (-4,5) = -44\,145 \text{ Pa}$$

#### Presión de descarga ( $P_d$ )

Si  $h_{Pd} = 18 \text{ m c. a}$  y  $h_{Pd} = \frac{P_d}{\rho g}$  se tiene que:

$$P_d = \rho g h_{Pd} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \cdot 18 \text{ m c. a} = 176\,580 \text{ Pa}$$

#### Cálculo de las fuerzas

*Fuerza requerida para mover el émbolo en la carrera de ida.*

$$\text{Fuerza de aspiración } F_{1a} = P_a \cdot A_p = 44\,145 \cdot 0,049 = 2\,163 \text{ N}$$

Aunque la presión es negativa hay que hacer una fuerza para mover el pistón.

$$\text{Fuerza de impulsión } F_{1i} = P_d \cdot (A_p - A_v) = 176\,580 (0,049 - 0,0019) = 8\,317 \text{ N}$$

*La Fuerza total en el movimiento de ida es:*

$$F_t = F_{1a} + F_{1i} = 2\,163 + 8\,317 = 10\,480 \text{ N}$$

a) *Fuerza requerida para mover el émbolo en la carrera de retorno.*

$$\text{Fuerza de aspiración } F_{2a} = P_a (A_p - A_v) = 44\,145 (0,049 - 0,0019) = 2\,079,2 \text{ N}$$

$$\text{Fuerza de impulsión } F_{2i} = P_d A_p = 176\,580 (0,049) = 8\,652,4 \text{ N}$$

*La Fuerza total en el movimiento de retorno*

$$F_t = F_{2a} + F_{2i} = 2\,079,2 \text{ N} + 8\,652,4 \text{ N} = 10\,731,62 \text{ N}$$

*Cálculo del Caudal de la bomba*

- Caudal en la carrera de ida.

$$Q_i = \text{Area} \cdot S = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot S \cdot n = \frac{\pi}{4} (0,250^2 - 0,050^2) \cdot 0,375 \cdot \frac{60}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}$$

$$Q_i = 0,01767 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

- Caudal en la carrera de retorno

$$Q_d = \text{Area} \cdot S = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot S \cdot n = \frac{\pi}{4} 0,250^2 \cdot 0,375 \cdot \frac{60}{60 \frac{s}{\min}} = 0,01841 \frac{m^3}{s}$$

*Caudal total*

$$Q_t = Q_i + Q_d = 0,01767 \frac{m^3}{s} + 0,01841 \frac{m^3}{s} = 0,03608 = 36,08 \frac{l}{s}$$

Potencia absorbida por la bomba (despreciando las pérdidas  $\eta_b = 1$ )

$$N_b = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{1000}$$

*Cálculo de H (Carga)*

$$H = \frac{P_{desc} - P_{suc}}{\rho g} = 18 - (-4,5) = 22,5 \text{ m}$$

$$N_b = \frac{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,81 \times 0,03608 \frac{m^3}{s} \times 22,5 \text{ m}}{1000} = 7,96 \text{ kW}$$

**Problema 2)** Una bomba de émbolo de simple efecto tiene un diámetro de pistón de 180 mm y una carrera de 200 mm. El líquido a bombear tiene una densidad relativa ( $\rho_{rel} = 0,96$ ). La bomba toma líquido de un colector a presión atmosférica y los descarga en un recipiente a una presión de 4 at. La altura geométrica de impulsión o descarga es de 15 m. La pérdida total en la tubería de succión es de 2 m y en la descarga es de 7m.

¿A cuántas rpm debe operar la bomba y de que potencia debe instalarse el motor para suministrar un caudal de 600 l/min?

Considere el rendimiento volumétrico ( $\eta_v = 0,85$ ) y el rendimiento general de la instalación  $\eta_{ins} = 0,76$

Datos

$D_{\text{émbolo}} = 180 \text{ mm}$

S=200 mm (Carrera)

$\rho_{rel} = 0,96$

$P_d = 4 \text{ at.}$

$Z_d = 15 \text{ m.}$

$$\sum h_{f \text{ succ}} = 2 \text{ m}$$

$$\sum h_{f \text{ des}} = 7 \text{ m}$$

$Q = 600 \text{ l/min.}$

$\eta_v = 0,85$

$\eta_{ins} = 0,76$

### **Solución**

De la expresión del caudal entregado por la bomba de simple efecto

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot S \cdot n \cdot \eta_v$$

$$n = \frac{4 Q}{\pi D^2 \cdot S \cdot \eta_v} = \frac{4 \cdot 600}{1000 \cdot \pi \cdot 0,18^2 \cdot 0,2 \cdot 0,85} = 138,69 \text{ rpm} \sim 140 \text{ rpm}$$

*Cálculo de la potencia*

$$N_b = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H}{1000 \eta_{ins}}$$

*Determinación de la carga H*

$$H = \frac{\Delta P}{\rho \cdot g} + \Delta Z + \frac{\Delta V^2}{2g} + \sum_1^2 h_f$$

$$H = \frac{(4 - 0) \cdot 10^4}{960} + 15 + 2 + 7 = 65,66 \text{ m}$$



La potencia es:

$$N_b = \frac{960 \cdot 9,81 \cdot 600 \cdot 65,66}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 0,76} = 8,17 \text{ kW}$$

**Problema 3)** un rodete que gira a 1 150 rpm tiene las siguientes dimensiones:  $b_1=31,75 \text{ mm}$ ;  $b_2=19,05 \text{ mm}$ ;  $D_1=177,8 \text{ mm}$ ;  $D_2=381,0 \text{ mm}$ ;  $\beta_1=18^\circ$  ;  $\beta_2=20^\circ$  ( $b_1$  y  $b_2$  son respectivamente, la anchura de los canales de entrada y a la salida; la superficie de sección transversal es  $A = \pi D b$  si se desprecia el espesor de los álabes). Suponiendo que la corriente de entrada es radial y despreciando el espesor de los álabes, dibujar los triángulos de velocidades y calcular el caudal en litros por minutos, así como la carga teórica para  $z=\infty$ , despreciando la corriente circulatoria.

Datos

$n= 1150 \text{ rpm}$

$D_2=381 \text{ mm}$

$D_1=177,8 \text{ mm}$

$\beta_2=20^\circ$

$\beta_1=18^\circ$

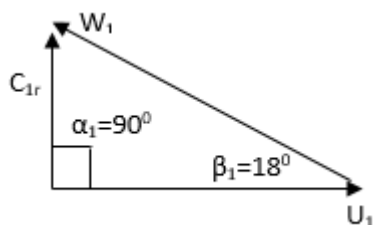
$b_1=31,75 \text{ mm}$

$b_2=19,05 \text{ mm}$

$Z=\infty$

**Solución**

*Triángulo teórico en la entrada del álabe*



### Cálculo de $U_1$

$$U_1 = w \cdot r_1 = \frac{2 \pi n D_1}{60} \frac{1}{2}$$

$$U_1 = \frac{\pi n D_1}{60} = \frac{\pi \cdot 1150 \cdot 0,1778}{60} = 10,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\tan \beta_1 = \frac{C_{r1}}{U_1} \quad C_{r1} = U_1 \cdot \tan \beta_1 = 10,70 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tan 18^\circ = 3,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

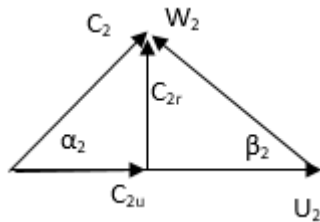
### Cálculo de $Q_1$

$$Q_1 = A_1 \cdot C_{r1} = \pi D_1 b_1 \cdot C_{r1} = \pi \cdot 0,1788 \cdot 0,03175 \times 3,47 = 0,0615 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_1 = 3690 \text{ l/min}$$

*Cálculo de la carga de impulsión teórica ( $H_{t\infty}$ )*

Triángulo de velocidad a la salida del impelente es



### Cálculo de $U_2$

$$U_2 = w \cdot r_2 = \frac{2 \pi n D_2}{60} \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{\pi n D_2}{60} = \frac{\pi \cdot 1150 \cdot 0,381}{60} = 22,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q = A_2 \cdot C_{r2} C_{r2} = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{0,0615 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot 0,381 \cdot 0,01905}$$

$$C_{r2} = 2,69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Cálculo de  $C_{2u}$

$$\cot \beta_2 = \frac{U_2 - C_{2u}}{C_{r2}}$$

$$C_{2u} = U_2 - C_{r2} \cot \beta_2$$

$$C_{2u} = 22,94 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2,69 \cot 20^\circ$$

$$C_{2u} = 15,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

*Determinación de la carga teórica infinita*

$$H_{t\infty} = \frac{U_2 \cdot C_{2u}}{g} = \frac{22,94 \times 15,6}{9,81}$$

$$H_{t\infty} = 36,57 \text{ m}$$

**Problema 4)** Se desea bombear 3 785 litros por hora de gasolina (densidad 0,85) a la temperatura de 10 °C (viscosidad= 0,8 centipoise) desde la parte inferior de un depósito al nivel del suelo a la parte superior de una columna de fraccionamiento de 27,43 m de altura. La longitud total de la tubería (tubería+longitud equivalente debida a los accesorios) es de 38,1 m. Se trata de una tubería de acero corriente de 2 pulgadas (50,8 mm) de diámetro. Calcular la potencia del motor requerido, si el rendimiento del conjunto motor-bomba se supone del 55 %. Considere iguales las presiones en el tanque y la parte superior de la torre de fraccionamiento.

Datos

$$Q = 3785 \text{ l/h } (1,051 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s})$$

Sustancia: Gasolina

$$\rho_{\text{relativa}}: 0,85 \quad \rho_{\text{gasolina}} = 850 \text{ kg/m}^3$$

$$t = 10^\circ\text{C}$$

$$\mu=0,8 \text{ cp.}$$

$$\Delta Z=27,43 \text{ m}$$

$$L_{\text{total}}=L_{\text{T.RECTA}}+L_{\text{EQ}}=38,10 \text{ m}$$

$$d=2 \text{ pulg}=50,8 \text{ mm'}$$

$$\eta_{\text{motor}}+\eta_{\text{bomba}}=55\%$$

### Solución

Aplicando la Ecuación de Bernoulli entre 1 y 2 se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + H_b = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + H_b + \sum_1^2 h_f$$

$$H_b = Z_2 - Z_1 + \sum_1^2 h_f$$

Del esquema  $\Delta Z = 27,43 \text{ m}$

*Cálculo de las pérdidas friccionales*

$$\sum_1^2 h_f = \lambda \frac{L v^2}{d 2g}$$

Hay que determinar el factor de fricción  $\lambda$  por lo que es necesario conocer el número de Reynolds

$$R_e = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$$

Cálculo de la velocidad aplicando la ecuación de continuidad

$$Q = A \cdot v$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1,051 \times 10^{-3}}{\pi \cdot 0,0508} = 0,026 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Teniendo las unidades en consideración se pasa a determinar el  $N^0$  de Reynolds

$$R_e = \frac{850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,026 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,0508 \text{ m}}{0,0008 \frac{\text{N.s}}{\text{m}^2}} = 1\,403,35$$

El coeficiente de fricción  $\lambda$  es

$$\lambda = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{1\,403,35} = 0,0456$$

Comportamiento en régimen laminar

Sustituyendo en la ecuación de las pérdidas

$$\sum_1^2 h_f = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0456 \frac{38,10}{0,0508} \frac{0,026^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$\sum_1^2 h_f = 8,11 \cdot 10^{-7}$$

Estas pérdidas son despreciables

Cálculo de la carga de impulsión

$$H_b = \Delta Z + \sum_1^2 h_f = 27,43 \text{ m}$$

Cálculo de la potencia consumida

$$N_b = \frac{\rho g Q H}{1000 \cdot 0,55} = \frac{850 \cdot 9,81 \cdot 1,05 \times 10^{-3} \cdot 27,43}{1000 \cdot 0,55} = 0,4366 \text{ kW} = 0,6 \text{ CV}$$

**Problema 5)** Se necesita una bomba para un caudal de 4 540 lpm para una carga de impulsión de 91,5 m, acoplada a un motor que gira 1150 rpm. Probablemente será más indicada una bomba de 2 rodetes, que una de rodete único. ¿Por qué? Argumente su respuesta.

Datos:

$Q = 4540 \text{ lpm}$ .

$$H = 91,5 \text{ m.}$$

$$N = 1150 \text{ rpm.}$$

**Solución:**

Para un rodete único:

$$n_s = \frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

$$n_s = \frac{1150\sqrt{4540/60}}{(91,5)^{3/4}}$$

$$n_s = 338 \text{ rpm}$$

Para este valor de velocidad específica el rendimiento estaría en el orden del 63%, extrapolando la línea de caudal en el gráfico de Worthington Pump & Machinery Corp. (Vennard, 1979)

Procediendo para una máquina de dos etapas se tiene:

$$H = \frac{H_T}{2} = \frac{91,5}{2} = 45,75 \text{ m}$$

La velocidad específica para esta máquina es:

$$n_s = \frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

$$n_s = \frac{1150\sqrt{4540/60}}{(45,75)^{3/4}}$$

$$n_s = 570 \text{ rpm}$$

Del gráfico señalado el rendimiento es:

$$\eta_b = 70\%$$

Si es más indicada una bomba de dos etapas, el impelente para un radial de menor relación  $D_2/D_1$  que resulta más eficiente y la máquina alcanza un mayor rendimiento durante la explotación.

### VIII.7 Problemas propuestos

**Problema 1)** Se expone el diseño de una bomba de engranaje (Figura VIII.17) que se emplea en los sistemas hidráulicos de desplegar y replegar el chasis del avión. Determinar el suministro de la bomba para la diferencia de presiones igual a cero y  $n = 2\,200$  rpm, si se sabe que el área máxima de sección de cada diente limitada por la circunferencia exterior del engranaje vecino es igual a  $S = 0,2 \text{ cm}^2$ . La anchura del engranaje (Longitud del diente) es  $b = 12 \text{ mm}$ .

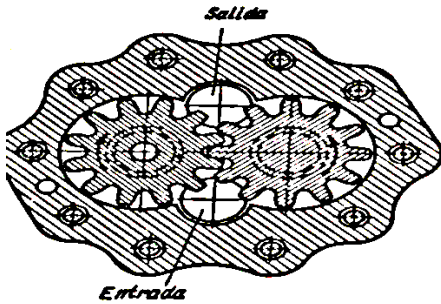


Figura VIII.17. Bomba de engranes Fuente (Nekrasov, 1968)

**Solución**  $Q = 0,211 \text{ l/s}$

**Problema 2)** Una bomba de émbolo que trabaja a 150 rpm debe impulsar agua calentada hasta  $60^\circ\text{C}$ . Los cálculos previos demostraron que el consumo de energía para crear la velocidad, para separar las pérdidas de inercia y las resistencias hidráulicas de la línea de succión constituyen en total 6,5 m de agua, la presión atmosférica media en el lugar de instalación de la bomba es de 736 mm de Hg. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se debe de instalar la bomba?

A una temperatura de  $60^\circ\text{C}$  la tensión del vapor  $T_v = 0,19919 \text{ bar}$  absolutos

La densidad del agua a  $60^\circ\text{C}$   $\rho_{\text{agua}} = 983,2 \text{ kg/m}^3$

**Solución**  $Z_g = 1,66 \text{ m}$

**Problema 3)** Una bomba centrífuga tiene un rodete de trabajo de diámetro  $D_2 = 250 \text{ mm}$  con seis álabes radiales ( $\beta_2 = 90^\circ$ ), el diámetro de la circunferencia formado por los bordes de entrada de los álabes es  $D_1 = 125 \text{ mm}$ . ¿Qué número de rpm hay que comunicar para obtener una diferencia de presiones  $\Delta P = 3 \text{ kgf/cm}^2$ ? El rendimiento hidráulico de la bomba es  $\eta_h = 0,75$ .

**Solución**  $n = 1\,862 \text{ rpm}$

**Problema 4)** Si el rodete del problema resuelto 3 trabaja en vacío ( $C_{2r}=0$ ) ¿Cuál es la carga teórica infinita? ¿Qué le ocurre al ángulo  $\alpha_2$ ? Tiene ello que ver con algunos de los rendimientos de la máquina. Explique.

**Solución**  $H_t = 53,92 \text{ m}$

**Problema 5)** Una bomba multietápica de 6 rodetes (impelentes) da un caudal de 5680 lpm y desarrolla una presión manométrica de 49,21 kgf/cm<sup>2</sup>.

- ¿Cuál es su velocidad específica si gira a 1750 rpm?
- ¿En qué rango de valor se encuentra su rendimiento?
- ¿Qué tipo de impelente posee esta máquina? De un valor aproximado de su relación  $D_1/D_2$ .

**Solución** a)  $n_s = 625 \text{ rpm}$

**Problema 6)** Se desea una bomba para un caudal de agua de 10 600 l/min y una altura de elevación 53,34 m. a) ¿Cuál sería la velocidad aproximada de funcionamiento que nos daría el mejor rendimiento? ¿Con que tipo de impelente?

**Solución** a)  $n = 2228 \text{ rpm}$

**Problema 7)** Se necesita una bomba para un caudal de 4 540 l/min para una altura manométrica de 91,5 m acoplada a un motor que gira a 1 150 rpm. Probablemente será más indicada una bomba de dos rodetes (impelentes) que una de rodete único. ¿Por qué?

**Solución** Impelente único  $\eta = 62 \%$  Dos impelentes  $\eta = 75 \%$

**Problema 8)** De la curva de ensayo de una bomba del tipo de flujo mixto de un solo rodete con aspiración unilateral funcionando a 575 rpm y calculada para dar un caudal de 378,5 litros de agua por segundo, se han obtenido los siguientes resultados.

Magnitud	1	2	3	4	5	6
Q (l/s)	0	63,1	126,2	252,3	378,5	479,4
H (m)	12,03	11,3	10,7	9,1	7,16	4,9



H (%)	0	23,0	45,0	75,5	88,0	81,0
-------	---	------	------	------	------	------

- Trace las gráficas de las características hidráulica y dibuje la curva de potencia absorbida.
- En la misma hoja dibuje las tres curvas con líneas de trazos discontinuos para el caso en que el líquido bombeado sea de características análogas a las del agua, pero de densidad relativa 0,9. Razone de manera resumida cada una de las curvas.
- Trace en la misma hoja las tres curvas de funcionamiento de la bomba trabajando a una velocidad de 500 rpm.

**Problema 9)** ¿Qué potencia requerirá una bomba para entregar un caudal de 1 200 l/min venciendo una carga de 30 metros? Cuando gira a 1750 rpm.

- ¿Qué tipo de bomba aconseja usted?
- ¿Qué rendimiento es esperado en su funcionamiento?

**Solución**  $N = 8,4 \text{ kW}$   $\eta = 70 \%$

**Problema 10)** Hay que suministrar 1 225 l/min contra una carga de 126 m a 3 600 rpm. Suponiendo un rendimiento aceptable de la bomba a valores de velocidad específica establecida por usted ¿Cuántas etapas de bombeo se necesitarán?

**Solución** 4 Etapas

**Problema 11)** Una bomba centrífuga tiene un impelente de dimensiones:  $r_1 = 75 \text{ mm}$ ;  $r_2 = 200 \text{ mm}$ ;  $b_1 = 50^\circ$ ;  $b_2 = 40^\circ$ . La anchura del rodete a la entrada es,  $b_1 = 40 \text{ mm}$  y a la salida,  $b_2 = 20 \text{ mm}$ . Se puede suponer que funciona en condiciones de rendimiento máximo ( $c_{1m} = c_1$ ). Considere el rendimiento en un 78 %. Determinar, para un caudal  $Q = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$  lo siguiente:

- Los triángulos de velocidades
- La altura total que se alcanzará a chorro libre

**Solución:** b)  $H_{\text{tmax}} = 8,62 \text{ m}$

**Problema 12)** Una bomba centrífuga tiene un punto de funcionamiento, en condiciones de rendimiento máximo, dado por un caudal de 2400 lpm y  $H_m = 60 \text{ m}$ ; las pérdidas internas de la bomba

equivalen a 5 veces la energía cinética relativa, a la salida del agua de la bomba, y las pérdidas en la tubería equivalen a  $15 q^2$ . El diámetro a la salida de la bomba es  $d_2 = 0,2 \text{ m}$ , y la sección útil de salida del rodete es  $A_2 = 0,2 d_2^2$ . El rendimiento puede ser considerado como un 75 %. Determinar:

- a) El valor del ángulo  $\beta_2$  a la salida
- c) La velocidad tangencial a la salida y el número de rpm de la bomba
- d) La potencia útil.
- e) El número específico de revoluciones

**Solución a)**  $\beta_2=34,4^\circ$  **b)**  $u_2=31,9 \text{ m/s}$ ,  $n=3\ 044 \text{ rpm}$ , **c)**  $N_u= 32 \text{ CV}$ , **d)**  $n_s=119, 07 \text{ rpm}$

**Problema 13)** Una bomba centrífuga tiene las siguientes características:  $q = 50 \text{ litros/s}$ ;  $H_m = 100 \text{ m}$ ;  $n = 1500 \text{ rpm}$ ;  $n_m = 0,67$ ;  $N = 100 \text{ CV}$ . Se quiere bajar para utilizarla en una mina en donde va a funcionar a un mayor número de revoluciones.

El coeficiente de seguridad de la bomba por el aumento de presión se supone es 2,5, y el coeficiente de seguridad del par en el eje igual a 2.

Determinar:

- a) La altura manométrica que proporcionará la bomba
- b) La potencia que consume
- c) El caudal que impulsará

**Solución** Puede auxiliarse para la solución de los criterios de semejanza **a)**  $H_{maq1}=200 \text{ mb)$   $N_1=282,8 \text{ CV}$ , **c)**  $Q_1=70,7 \text{ litros/s}$

**Problema 14)** Dado un modelo de bomba centrífuga de  $1\ 000 \text{ CV}$  y  $n = 1200 \text{ r.p.m.}$  cuya curva característica es de la forma,  $H_m = 180 - 375 q^2$ , se acopla a una tubería de impulsión que presenta una curva característica  $\Delta_e = 15 q^2$ .

Determinar:

- a) El punto de funcionamiento, para elevar agua a 120 metros de altura

b) El número de revoluciones por minuto necesarias, si las pérdidas de carga en la tubería aumentan a 8 veces la inicial.

c) La nueva curva característica a esta velocidad

d) El radio  $r_2$

e) Los triángulos de velocidades a 1 200 rpm, sabiendo que:  $\alpha_1 = 90^\circ$ ;  $\beta_2 = 40^\circ$ ;  $b_2 = 0,05 r_2$ ;  $r_1 = 0,3 r_2$

**Solución a)**  $n = 2\,187$  rpm, **d)**  $r_2 = 0,3342$  m

**Problema 15)** Una bomba centrífuga trabaja a  $n = 1500$  rpm, e impulsa agua de un pozo a un depósito por medio de una tubería, cuya curva característica viene dada por:

$H_m$ (metros)	8	9	10	11	12
Q (litros/s)	0	6	9,3	11,4	12,8

y la curva característica de la bomba, para las revoluciones de trabajo por:

$H_m$ (metros)	0	2	4	6	8	10	9,4
Q (litros/s)			12	10	7,2	2,5	0

a) Determine el número de rpm que hay que comunicar a esta bomba para aumentar el gasto, en la tubería mencionada, al doble.

**Solución a)**  $n = 2\,001$  rpm

**Problema 16)** En el ensayo de una bomba centrífuga con agua, que tiene iguales las cotas y diámetros de aspiración e impulsión, se tomaron los siguientes resultados:

Presión de impulsión,  $3,5 \text{ Kg/cm}^2$ ; Presión de aspiración, 294 mm de columna de mercurio; Caudal,  $q = 6,5 \text{ litros/seg}$ ; Torque,  $C = 4,65 \text{ m. Kg}$ ; Número de revoluciones por minuto,  $n = 800$

Determinar:

- a) La potencia efectiva en CV
- b) La potencia consumida y rendimiento de la bomba
- c) El caudal, potencia y altura manométrica que adquirirá la bomba si duplica el n° de rpm, manteniendo el mismo rendimiento.

**Solución a)**  $N = 2,7 \text{ CV}$  **b)**  $N = 5,2 \text{ CV}$ ,  $\eta = 52 \%$  **c)**  $q_1 = 13 \text{ litros/s}$ ,  $N_1 = 41,6 \text{ CV}$ ,  $H_{m1} = 124,5 \text{ m}$

**Problema 17)** Se instala una bomba centrífuga para elevar agua de manera que las bridas de aspiración e impulsión son horizontales y la de impulsión está medio metro más elevada que la de aspiración. Un vacuómetro de mercurio conectado a la aspiración marca una depresión de 300 mm mientras que el manómetro de impulsión marca 19 m. c.a. La tubería de aspiración es de 225 mm, y la de impulsión de 200 mm. El rodete o impelente tiene un diámetro exterior de 300 mm y un ancho a la salida de 25 mm;  $b_2 = 22^\circ$ ;  $n = 1.320 \text{ rpm}$ . En los cálculos se supondrán álabes afilados a la salida;  $\eta_h = 0,80$ ;  $\eta_m = 0,85$  y entrada de la corriente en los álabes sin circulación.

Calcular:

- a) La altura de Euler, o altura total
- b) La altura efectiva o real.
- c) El caudal
- d) La potencia útil
- e) La potencia de accionamiento

**Solución a)**  $H_t = 29,72 \text{ m}$  **b)**  $H_r = 23,78 \text{ m}$  **c)**  $Q = 0,064 \text{ m}^3/\text{s}$  **d)**  $N_u = 14,8 \text{ kW}$ , **e)**  $N = 21,8 \text{ kW}$

### Conclusiones.

1. La obra cuenta con ocho capítulos donde se presenta la teoría de cada uno de los temas tratados como base para la solución de los problemas resueltos y propuestos.
2. Cada uno de los problemas desarrollados parte de la metodología seguida en clases con el propósito de crear en los estudiantes la habilidad en la solución de problemas aplicados a la mecánica de los fluidos.

3. Los problemas propuestos presentados complementan el autoestudio en función de un mejor aprovechamiento por parte de los estudiantes.

## Apéndices.

### Simbología

$\Gamma$ - Circulación	gpm.- Galones/minutos
$\tau$ - Torque	lpm (l/min) .- litros/minutos
$\rho$ .- Densidad de la sustancia (kg/m <sup>3</sup> )	$T_v$ .- Tensión del vapor
$M_0$ .- Masa de la sustancia (kg)	$n_s$ .- Velocidad específica (rpm)
$V$ .- Volumen (m <sup>3</sup> )	$\eta$ .- Rendimiento
$W$ .- Peso de la sustancia (N)	$\eta_h$ .- Rendimiento hidráulico
$\gamma$ .- Peso específico (N/m <sup>3</sup> )	$\eta_m$ .- Rendimiento mecánico
Hb.- Carga de la bomba (m)	CV .- Caballos de Vapor
$u$ .- Viscosidad cinemática (m <sup>2</sup> /s)	mph.- Velocidad en Millas por hora
P.- Presión (Pa)	
F.- Fuerza (N)	
A.- Área (m <sup>2</sup> )	
Z.- Altura geométrica (m)	
Q.- Caudal (m <sup>3</sup> /s)	
a.- Aceleración (m/s <sup>2</sup> )	

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CRANE Co. (1989). *Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías*. México: Mc- Graw-Hill.
- Giles, R. V., Evett, J. B., & Liu, C. (1994). *Mecánica de los Fluidos e Hidráulica*. Madrid: Mc- Graw-Hill.
- Howell R, J. & Buckius, O. R. (1990). *Principios de termodinámica para Ingeniería*. México: Mc- Graw-Hill.
- Mataix, C. (1986). *Mecánica de los Fluidos y Máquinas Hidráulicas* (segunda). Madrid: Ediciones del Castillo.
- Mott, R. L. (2006). *Mecánica de los Fluidos* (sexta edición). México: Pearson Education.
- Streeter, V. L., Wylie, E. B., & Bedford, K.W. (2008). *Mecánica de Fluidos* (Novena Edición, Vol. 1). México: Mc- Graw-Hill.
- Vennard, J. K., & Street, R. L. (1983). *Elementos de Mecánica de Fluidos*. México: CECSA.

- Abella, M. A., Chenlo, F., Blanco, J., & España, A. U. L. L. T. (2003). Optimización del uso de convertidores de frecuencia con bombas centrífugas y motores trifásicos en sistemas de bombeo fotovoltaico. Madrid, España.
- Çengel, Y. A., Cimbala, J. M., & Skarina, S. F. (2006). *Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones* (Vol. 1). McGraw-Hill.
- de las Heras Jiménez, S. (2011). *Fluidos, bombas e instalaciones hidráulicas*. Universidad Politécnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politécnica.
- Encinas, M. P. (1975). *Turbomáquinas hidráulicas: principios fundamentales*. Limusa.
- Fay, J. A., & Francis, Y. (1996). *Mecánica de fluidos*. Compañía Editorial Continental.
- García, C., Robaina, A. D., & Calgaro, M. (2003). Selección de bombas para riego. INIA Serie Técnica.
- Giles, R. V., Evett, J. B., & Liu, C. (1999). *Mecánica de los fluidos e hidráulica*. McGraw Hill.
- Gómez, J. S., & Zamora, R. E. (1991). Estimación de costos de intercambiadores de calor, tanques y bombas centrífugas. Tecnología y Ciencia Ed. (IMIQ), 7(1), 10-19.
- Granados, G.A. (2009). *Empuje ascensional aplicado a un problema fundamental de ingeniería* (Disertación doctoral).
- James, D., & Donald, H. Dinámica de los Fluidos con Aplicaciones a la Ingeniería, Ed. Trillas, México, 1981
- Martínez, L, E. R., & Pérez Robalino, B. A. (2002). Mejoras al funcionamiento de bombas centrífugas cuando se combinan con conversores de frecuencia (Tesis de Grado).
- Mataix, C. M., Giles, R. V. E., Liu, J. B., Cheng, M. J (1982). *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. Oxford University Press:.
- Mott, R. L. (2006). *Mecánica de fluidos*. Pearson educación.
- Munson, B. R., Young, D. F., & Okiishi, T. H. (1999). *Fundamentos de mecánica de fluidos*. Limusa.
- Nekrasov, B. (1968). *Hidráulica* (No. TC160. N44 1968.). Mir.
- Pérez-Barreto, R. (2004). Procedimiento para evaluar y seleccionar bombas centrífugas. Minería & Geología, 20(1-2), 84-88.
- Potter, M. C., Wiggert, D. C., Hondzo, M., & Shih, T. I. (2002). *Mecánica de fluidos*. Thomson.
- Ramírez, E. A., & Mayorga, A. (2012). Estudio de bombas centrífugas y su factibilidad de aplicación en la Facultad de Ingeniería Mecánica con la finalidad de obtener parámetros técnicos con variación

de caudal (Tesis de Grado, Universidad Técnica de Ambato. Facultad de Ingeniería Civil y Mecánica. Carrera de Ingeniería Mecánica).

Robles, A. V., & Parra, B. Z. (1997). *Teoría de máquinas hidráulicas*. EDITUM.

Royo, C., HASTA, E., Royo, C. C., Hasta, C. M., & Daugherty, R. L. (1996). *Bombas centrífugas*. Organización Mundial de la Salud.

Santos, R., & Guerrero, J. A. M. (2014). Procedimiento para la elaboración de la curva de NPSHr en bombas centrífugas a partir de parámetros adimensionales. *Ciencia e Ingeniería*, 35(2), 77-84.

Shames, I. H., Moneva, J. M., & Crusells, S. P. (1967). *La mecánica de los fluidos* (Vol. 1). McGraw-Hill.

Smith, J. M., Van Ness, H. C., & Abbott, M. M. (1980). *Introducción a la termodinámica en ingeniería química* (No. 660.296 9 S724i 2003.). McGraw-Hill.

Soler, M. A. (2009). Fundamentos de clasificación de las bombas centrífugas. *Tecnología del Agua*, (310), 22-34.

Streeter, V. L., Wylie, E. B., Bedford, K. W., & Saldarriaga, J. G. (1963). *Mecánica de los fluidos*. Ediciones del Castillo.

Vennard, J. K., Fox, R. W. M., Alan, T., Brun, E. A., & A Mathieu, J. (1979). *Elementos de mecánica de fluidos: versión si*. Compañía Editorial Continental,.

White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics*.

Zubicaray, M. V. (2005). *Bombas: teoría, diseño y aplicaciones*. Editorial Limusa.



## **Anexos**

### **Simbología**

$\rho$ .- Densidad de la sustancia ( $\text{kg/m}^3$ )

$M_0$ .- Masa de la sustancia (kg)

$V$ .- Volumen ( $\text{m}^3$ )

$W$ .- Peso de la sustancia (N)

$\gamma$ .- Peso específico ( $\text{N/m}^3$ )

$\delta$ .- Densidad relativa

$\beta$ .-Coeficiente de compresión volumétrica ( $\text{m}^2/\text{N}$ )

$\Delta V$

$V_0$ .- Volumen inicial ( $\text{m}^3$ )

$\beta_t$ .- Coeficiente de expansión volumétrica (1/grad)

$K$ .- Módulo volumétrico de elasticidad ( $\text{N/m}^2$ )

$T$ .- Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )

$\Delta T$ .- Variación de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )

$\nu$ .- Viscosidad cinemática ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$d$ .- Diámetro (m)

$l$ .- Litros (l)

$L$ .- Longitud (m)

$P$ .- Presión (Pa)

$F$ .- Fuerza (N)

$A$ .- Área ( $\text{m}^2$ )

$Z$ .- Altura geométrica (m)

$Q$ .- Caudal ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$a$ .- Aceleración ( $\text{m/s}^2$ )

$\Sigma h_{1-2}$ .- Pérdida de carga (m)

$Z$ .- Altura geométrica de presión (m)

$L_1$ .- Longitud de tubería de impulsión (m)

$L_a$ .- Longitud de tubería de aspiración (m)

$H_b$ .- Carga de la bomba (m)

$\epsilon$ .- Rugosidad relativa (mm)

$\xi$ .- Coeficiente de Resistencia en los accesorios

$\lambda$ .-Coeficiente de fricción en tramo recto

$\mu$ .- Viscosidad dinámica ( $\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ )

## Sistemas de Unidades

Al iniciar el estudio de la Mecánica de los Fluidos es necesario realizar un recordatorio de los Sistemas de Unidades. En los estudios de Física y otras asignaturas básicas específicas el estudiante ha trabajado con dimensiones y unidades, pero la experiencia demuestra que, insuficiencias en su conocimiento y aplicación, lleva a errores conceptuales inaceptables en el campo de la ingeniería.

El desarrollo histórico de la ciencia en diferentes países, ha hecho que en la actualidad coexistan varios sistemas de unidades, ellos son:

- Sistema Inglés (Usado en Inglaterra, Estado Unidos y países en la esfera de influencia de la ciencia y la ingeniería).
- Sistema Giorgi<sup>5</sup> o Sistema MKS (metro, kilogramo, segundo) (Usado en Países Europeos tales como Alemania, Rusia, España, Francia, y países en la esfera de influencia de la ciencia y la ingeniería). Una variedad de este sistema usado desde la antigüedad por los físicos es el Sistema Cegesimal (centímetro, gramo, segundo), donde sus unidades son submúltiplos del sistema MKS.
- Sistema Técnico, similar al sistema MKS y usado por los mismos países, donde la diferencia fundamental está dada en que la fuerza es una unidad básica y la masa es una unidad derivada, contrario a lo que ocurre en el sistema Giorgi o MKS.
- Sistema Internacional (SI). Es una extensión y perfeccionamiento del sistema Giorgi o MKS y en la actualidad es adoptado por la mayoría de los países a nivel mundial. En Cuba es el sistema vigente según “decreto-ley 62 adoptado en 1960 y se establece con carácter obligatorio el uso del Sistema Internacional de Unidades”.

Dado que en nuestra región los sistemas más utilizados son el Sistema Técnico y el Sistema Internacional, el análisis de las unidades será referido a ambos sistemas. Todos los sistemas de unidades a los que se ha hecho referencia se basan en la segunda ley de Newton.

Realizando el análisis para el sistema técnico la fuerza del mismo queda dada por la ecuación (1.1)

$$F = m \cdot a$$

---

<sup>5</sup>Giovanni Giorgi. ☆27/11/1871 † 19/08/1950. Ingeniero electricista italiano. En 1901 propuso a la Asociación Electrotécnica Italiana el sistema de unidades que lleva su nombre. Fue adoptado en 1935 por la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC) como sistema MKSΩ (metro, kilogramo, segundo, ohmio) y es el origen del actual Sistema Internacional de Unidades. Fue profesor de Física y Matemática en la Universidad de Roma y desde 1935 profesor de Ingeniería Eléctrica.

La definición del kilogramo fuerza (kilopondio), es la fuerza ejercida sobre una masa de 1 kg masa por la gravedad estándar en la superficie terrestre. La aceleración gravitatoria se considera de  $9,80665 \text{ m/s}^2$ .

Sustituyendo valores en la ecuación (1.1)

$$1\text{kgf (kp)} = 1\text{kgmasa} * 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,80665 \frac{\text{kg masa*m}}{\text{s}^2}$$

Observe que el sistema técnico es un *sistema gravitacional*, depende de la aceleración gravitatoria ( $9,80665 \text{ m/s}^2$ ). Es además un *sistema no coherente* porque la fuerza y la masa son unitaria, pero no lo es la aceleración gravitatoria. Para lograr que sea un *sistema coherente*, es necesario definir una unidad de masa, que sin modificar la magnitud de la fuerza, pueda hacer unitaria la aceleración.

La ecuación (1.2) se transforma en la ecuación (1.3).

$$1\text{kgf (kp)} = 9,80665\text{kgmasa} * 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,80665 \frac{\text{kg masa*m}}{\text{s}^2}$$

La masa comprendida en la ecuación (1.3) de  $9,80665\text{kgmasa}$  se denomina Unidad Técnica de Masa (UTM).

En el sistema técnico, las unidades fundamentales son la fuerza (kilogramo fuerza o kilopondio); la longitud (m) y el tiempo (s). La masa es una unidad derivada (Unidad Técnica de Masa) (UTM) y sus unidades son:

$$m = \frac{F}{a}$$

$$m = \frac{\frac{\text{kgf}}{\text{m}}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{\text{kgf*s}^2}{\text{m}} = \text{UTM}$$

El Sistema Internacional al igual que el Giorgi es un sistema no gravitacional, por lo cual es un *sistema absoluto*, ya que no depende del valor de la aceleración gravitatoria y a la vez es un *sistema coherente*, dado que todas sus magnitudes básicas son unitarias.

En el Sistema Internacional (SI), las unidades fundamentales son, la masa (kilogramo); la longitud (m) y el tiempo (s). La fuerza es una unidad derivada y sus unidades son:

$$1 \text{ Unidad de Fuerza} = 1\text{kgmasa} * 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg masa*m}}{\text{s}^2}$$

En honor a Sir Isaac Newton<sup>6</sup> la unidad de fuerza en el Sistema Internacional (SI) es nombrado *Newton* y es representada por (N). Ecuación (1.7)

---

<sup>6</sup>Isaac Newton. ☆4/01/1643 ☞ 31/03/1727. Físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Autor de los *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo matemático.

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ kgmasa} * 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg masa} * \text{m}}{\text{s}^2}$$

Dado que ambos sistemas de unidades trabajan con una unidad denominada kilogramo, es necesario tener muy claro cuando dicha unidad corresponde a unidades de fuerza (Sistema Técnico) y cuando a unidades de masa (Sistema Internacional). Es frecuente cometer el error de trabajar la fuerza en kilogramos fuerza o kilopondio y considerar la masa en kilogramos, cuando realmente le corresponde como unidad de masa la Unidad Técnica de Masa (UTM), la cual es una masa 9,81 veces mayor que la del kilogramo.

Prefijos usados en el Sistema Internacional

Prefijo	Símbolo	Valor (10 <sup>n</sup> )
yotta	Y	10 <sup>24</sup>
zetta	Z	10 <sup>21</sup>
exa	E	10 <sup>18</sup>
peta	P	10 <sup>15</sup>
tera	T	10 <sup>12</sup>
giga	G	10 <sup>9</sup>
mega	M	10 <sup>6</sup>
kilo	k	10 <sup>3</sup>
hecto	h	10 <sup>2</sup>
deca	da	10 <sup>1</sup>
unidad	ninguno	1
deci	d	10 <sup>-1</sup>
centi	c	10 <sup>-2</sup>
mili	m	10 <sup>-3</sup>
micro	μ	10 <sup>-6</sup>
nano	n	10 <sup>-9</sup>
pico	p	10 <sup>-12</sup>
femto	f	10 <sup>-15</sup>
atto	a	10 <sup>-18</sup>
zepto	z	10 <sup>-21</sup>
yocto	y	10 <sup>-24</sup>

### Conversiones de unidades

La existencia de diferentes sistemas de unidades obliga a convertir de un sistema a otro. Es aconsejable para su vida estudiantil y profesional, disponer de alguno de los convertidores digitales existente en la red de la facultad de ingeniería.

Para facilitar la solución de los problemas propuestos se añaden algunas conversiones de unidades frecuentes en el campo de la mecánica de los fluidos.

$$1 \text{ kg}_{\text{fuerza}} \text{ (kilopondio kp)} = 9,80665 \text{ N}$$

$$1 \text{ UTM (unidad técnica de masa)} = 9,80665 \text{ Kg}_{\text{masa}}$$

$$1 \text{ kgm (kilográmetro)} (\text{kg}_{\text{fuerza}} * \text{metro}) = 9,80665 \text{ Joule (J)} = (\text{N} * \text{m})$$

$$1 \text{ kg}_{\text{fuerza}}/\text{m}^2 = 9,80665 \text{ Pa (Pascal} = \text{N}/\text{m}^2)$$

$$1 \text{ kg}_{\text{fuerza}}/\text{cm}^2 = 98,0665 \text{ kPa (kilo Pascal)}$$

$$1 \text{ kg}_{\text{fuerza}}/\text{cm}^2 = 14,2233 \text{ libras/pulgada cuadrada.}$$

## Anexo 1: Factores de conversión

<i>Magnitud</i>	<i>Unidad Inglesa</i>	<i>Unidad S.I.</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Unidades equivalentes</i>
<i>Longitud</i>	1 pie	= 0.3048 metros	m	—
<i>Masa</i>	1 slug	= 14.59 kilogramos	kg	—
<i>Tiempo</i>	1 segundo	= 1.0 segundo	s	—
<i>Fuerza</i>	1 libra (lb)	= 4.448 newtons	N	kg · m/s <sup>2</sup>
<i>Presión</i>	1 lb/pulg <sup>2</sup>	= 6895 pascales	Pa	N/m <sup>2</sup> ó kg/m · s <sup>2</sup>
<i>Energía</i>	1 lb-pie	= 1.356 julios	J	N · m ó kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
<i>Potencia</i>	1 lb-pie/s	= 1.356 vatios	W	J/s

<i>Longitud</i>	
1 pie = 0.3048 m	1 km = 1000 m
1 pulg = 25.4 mm	1 cm = 10 mm
1 mi = 5280 pie	1 m = 1000 mm
1 mi = 1.609 km	
<i>Área</i>	
1 pie <sup>2</sup> = 0.0929 m <sup>2</sup>	1 m <sup>2</sup> = 10.76 pies <sup>2</sup>
1 pulg <sup>2</sup> = 645.2 mm <sup>2</sup>	1 m <sup>2</sup> = 10 <sup>6</sup> mm <sup>2</sup>
<i>Volumen</i>	
1 pie <sup>3</sup> = 7.48 gal	1 gal = 0.003 79 m <sup>3</sup>
1 pie <sup>3</sup> = 1728 pulg <sup>3</sup>	1 gal = 3.785 L
1 pie <sup>3</sup> = 0.0283 m <sup>3</sup>	1 m <sup>3</sup> = 1000 L
	1 galón imperial = 1.201 gal (EUA)
<i>Velocidad de flujo de volumen</i>	
1 pie <sup>3</sup> /s = 449 gal/min	1 gal/min = 3.785 L/min
1 pie <sup>3</sup> /s = 0.0283 m <sup>3</sup> /s	1 L/min = 16.67 × 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup> /s
1 gal/min = 6.309 × 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup> /s	1 m <sup>3</sup> /s = 60 000 L/min
<i>Temperatura</i>	
$T(^{\circ}\text{C}) = [T(^{\circ}\text{F}) - 32] \frac{5}{9}$	<i>Presión</i>
$T(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} [T(^{\circ}\text{C})] + 32$	
<i>Densidad</i>	
1 slug/pie <sup>3</sup> = 515.4 kg/m <sup>3</sup>	<i>Energía</i>
	1 lb-pie = 1.356 J
	1 Btu = 1.055 kJ
	1 W-h = 3.600 kJ
<i>Peso específico</i>	
1 lb/pie <sup>3</sup> = 157.1 N/m <sup>3</sup>	
<i>Potencia</i>	
1 hp = 550 lb-pie/s	1 lb-pie/s = 1.356 W
1 hp = 745.7 W	1 Btu/h = 0.293 W

## Anexo 2: Propiedades del agua

Temperatura (°C)	Peso específico $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Viscosidad dinámica $\mu$ (Pa·s) ó (N·s/m <sup>2</sup> )	Viscosidad cinemática $\nu$ (m <sup>2</sup> /s)
0	9.81	1000	$1.75 \times 10^{-3}$	$1.75 \times 10^{-6}$
5	9.81	1000	$1.52 \times 10^{-3}$	$1.52 \times 10^{-6}$
10	9.81	1000	$1.30 \times 10^{-3}$	$1.30 \times 10^{-6}$
15	9.81	1000	$1.15 \times 10^{-3}$	$1.15 \times 10^{-6}$
20	9.79	998	$1.02 \times 10^{-3}$	$1.02 \times 10^{-6}$
25	9.78	997	$8.91 \times 10^{-4}$	$8.94 \times 10^{-7}$
30	9.77	996	$8.00 \times 10^{-4}$	$8.03 \times 10^{-7}$
35	9.75	994	$7.18 \times 10^{-4}$	$7.22 \times 10^{-7}$
40	9.73	992	$6.51 \times 10^{-4}$	$6.56 \times 10^{-7}$
45	9.71	990	$5.94 \times 10^{-4}$	$6.00 \times 10^{-7}$
50	9.69	988	$5.41 \times 10^{-4}$	$5.48 \times 10^{-7}$
55	9.67	986	$4.98 \times 10^{-4}$	$5.05 \times 10^{-7}$
60	9.65	984	$4.60 \times 10^{-4}$	$4.67 \times 10^{-7}$
65	9.62	981	$4.31 \times 10^{-4}$	$4.39 \times 10^{-7}$
70	9.59	978	$4.02 \times 10^{-4}$	$4.11 \times 10^{-7}$
75	9.56	975	$3.73 \times 10^{-4}$	$3.83 \times 10^{-7}$
80	9.53	971	$3.50 \times 10^{-4}$	$3.60 \times 10^{-7}$
85	9.50	968	$3.30 \times 10^{-4}$	$3.41 \times 10^{-7}$
90	9.47	965	$3.11 \times 10^{-4}$	$3.22 \times 10^{-7}$
95	9.44	962	$2.92 \times 10^{-4}$	$3.04 \times 10^{-7}$
100	9.40	958	$2.82 \times 10^{-4}$	$2.94 \times 10^{-7}$

## Anexo 3: Propiedades de líquidos comunes

	Gravedad específica ó Densidad relativa sg	Peso específico $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Viscosidad dinámica $\mu$ (Pa·s) ó (N·s/m <sup>2</sup> )
Acetona	0.787	7.72	787	$3.16 \times 10^{-4}$
Alcohol, etílico	0.787	7.72	787	$1.00 \times 10^{-3}$
Alcohol, metílico	0.789	7.74	789	$5.60 \times 10^{-4}$
Alcohol, propílico	0.802	7.87	802	$1.92 \times 10^{-3}$
Amoníaco	0.826	8.10	826	—
Benceno	0.876	8.59	876	$6.03 \times 10^{-4}$
Tetracloruro de carbono	1.590	15.60	1 590	$9.10 \times 10^{-4}$
Aceite de ricino	0.960	9.42	960	$6.51 \times 10^{-3}$
Etilenglicol	1.100	10.79	1 100	$1.62 \times 10^{-2}$
Gasolina	0.68	6.67	680	$2.87 \times 10^{-4}$
Glicerina	1.258	12.34	1 258	$9.60 \times 10^{-4}$
Queroseno	0.823	8.07	823	$1.64 \times 10^{-3}$
Aceite de linaza	0.930	9.12	930	$3.31 \times 10^{-2}$
Mercurio	13.54	132.8	13 540	$1.53 \times 10^{-3}$
Propano	0.495	4.86	495	$1.10 \times 10^{-4}$
Agua de mar	1.030	10.10	1 030	$1.03 \times 10^{-3}$
Trementina	0.870	8.53	870	$1.37 \times 10^{-3}$
Aceite de petróleo, medio	0.852	8.36	852	$2.99 \times 10^{-3}$
Aceite de petróleo, pesado	0.906	8.89	906	$1.07 \times 10^{-1}$

#### Anexo 4: Propiedades del aire

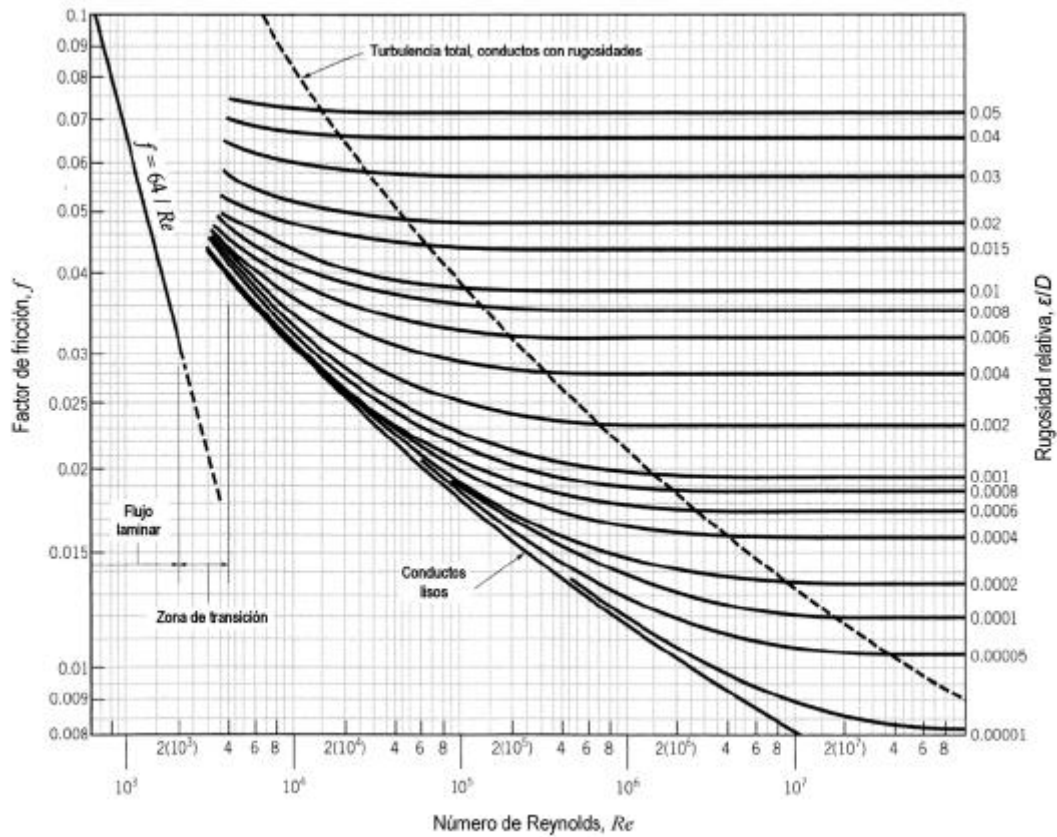
Las propiedades del aire para condiciones estándar a nivel del mar son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 T &= 15^{\circ}\text{C} \\
 P &= 101.325 \text{ kPa} \\
 \rho &= 1.225 \text{ kg/m}^3 \\
 \gamma &= 12.01 \text{ N/m}^3 \\
 \mu &= 1.789 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\
 \nu &= 1.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}
 \end{aligned}$$

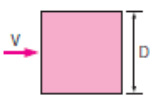
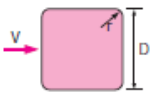
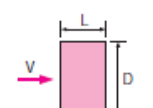
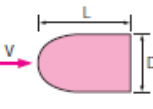
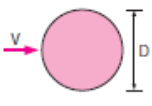
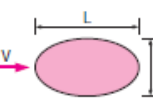
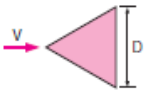
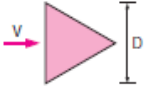


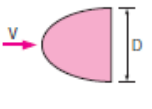
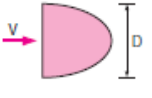
Temperatura (°C)	Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Peso específico $\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Viscosidad dinámica $\mu$ (Pa·s) ó (N·s/m <sup>2</sup> )	Viscosidad cinemática $\nu$ (m <sup>2</sup> /s)
-40	1.514	14.85	$1.51 \times 10^{-5}$	$9.98 \times 10^{-6}$
-30	1.452	14.24	$1.56 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-5}$
-20	1.394	13.67	$1.62 \times 10^{-5}$	$1.16 \times 10^{-5}$
-10	1.341	13.15	$1.67 \times 10^{-5}$	$1.24 \times 10^{-5}$
0	1.292	12.67	$1.72 \times 10^{-5}$	$1.33 \times 10^{-5}$
10	1.247	12.23	$1.77 \times 10^{-5}$	$1.42 \times 10^{-5}$
20	1.204	11.81	$1.81 \times 10^{-5}$	$1.51 \times 10^{-5}$
30	1.164	11.42	$1.86 \times 10^{-5}$	$1.60 \times 10^{-5}$
40	1.127	11.05	$1.91 \times 10^{-5}$	$1.69 \times 10^{-5}$
50	1.092	10.71	$1.95 \times 10^{-5}$	$1.79 \times 10^{-5}$
60	1.060	10.39	$1.99 \times 10^{-5}$	$1.89 \times 10^{-5}$
70	1.029	10.09	$2.04 \times 10^{-5}$	$1.99 \times 10^{-5}$
80	0.9995	9.802	$2.09 \times 10^{-5}$	$2.09 \times 10^{-5}$
90	0.9720	9.532	$2.13 \times 10^{-5}$	$2.19 \times 10^{-5}$
100	0.9459	9.277	$2.17 \times 10^{-5}$	$2.30 \times 10^{-5}$
110	0.9213	9.034	$2.22 \times 10^{-5}$	$2.40 \times 10^{-5}$
120	0.8978	8.805	$2.26 \times 10^{-5}$	$2.51 \times 10^{-5}$

#### Anexo 5: Diagrama de Moody


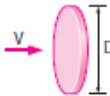


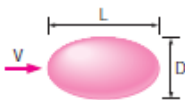
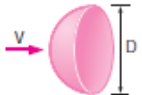
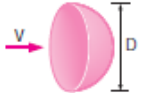
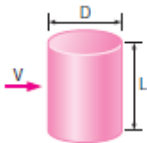
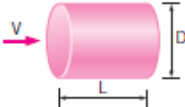




**Anexo 6:** Coeficiente de resistencia  $C_D$  de varios cuerpos en dos dimensiones para  $Re > 10^4$  basado en el área frontal  $A = b \cdot D$  donde  $b$  es la longitud en dirección normal a la hoja. (Cengel, 2006)

<p><b>Square rod</b></p>  <p>Sharp corners: <math>C_D = 2.2</math></p>  <p>Round corners (<math>r/D = 0.2</math>): <math>C_D = 1.2</math></p>	<p><b>Rectangular rod</b></p>  <p>Sharp corners:</p> <table><tr><th><math>L/D</math></th><th><math>C_D</math></th></tr><tr><td>0.0*</td><td>1.9</td></tr><tr><td>0.1</td><td>1.9</td></tr><tr><td>0.5</td><td>2.5</td></tr><tr><td>1.0</td><td>2.2</td></tr><tr><td>2.0</td><td>1.7</td></tr><tr><td>3.0</td><td>1.3</td></tr></table> <p>* Corresponds to thin plate</p>  <p>Round front edge:</p> <table><tr><th><math>L/D</math></th><th><math>C_D</math></th></tr><tr><td>0.5</td><td>1.2</td></tr><tr><td>1.0</td><td>0.9</td></tr><tr><td>2.0</td><td>0.7</td></tr><tr><td>4.0</td><td>0.7</td></tr></table>	$L/D$	$C_D$	0.0*	1.9	0.1	1.9	0.5	2.5	1.0	2.2	2.0	1.7	3.0	1.3	$L/D$	$C_D$	0.5	1.2	1.0	0.9	2.0	0.7	4.0	0.7
$L/D$	$C_D$																								
0.0*	1.9																								
0.1	1.9																								
0.5	2.5																								
1.0	2.2																								
2.0	1.7																								
3.0	1.3																								
$L/D$	$C_D$																								
0.5	1.2																								
1.0	0.9																								
2.0	0.7																								
4.0	0.7																								
<p><b>Circular rod (cylinder)</b></p>  <p>Laminar: <math>C_D = 1.2</math></p> <p>Turbulent: <math>C_D = 0.3</math></p>	<p><b>Elliptical rod</b></p>  <table><tr><th rowspan="2"><math>L/D</math></th><th colspan="2"><math>C_D</math></th></tr><tr><th>Laminar</th><th>Turbulent</th></tr><tr><td>2</td><td>0.60</td><td>0.20</td></tr><tr><td>4</td><td>0.35</td><td>0.15</td></tr><tr><td>8</td><td>0.25</td><td>0.10</td></tr></table>	$L/D$	$C_D$		Laminar	Turbulent	2	0.60	0.20	4	0.35	0.15	8	0.25	0.10										
$L/D$	$C_D$																								
	Laminar	Turbulent																							
2	0.60	0.20																							
4	0.35	0.15																							
8	0.25	0.10																							
<p><b>Equilateral triangular rod</b></p>  <p><math>C_D = 1.5</math></p>  <p><math>C_D = 2.0</math></p>	<p><b>Semicircular shell</b></p>  <p><math>C_D = 2.3</math></p>  <p><math>C_D = 1.2</math></p> <p><b>Semicircular rod</b></p>  <p><math>C_D = 1.2</math></p>  <p><math>C_D = 1.7</math></p>																								

**Anexo 7:** Coeficiente de resistencia  $C_D$  de varios cuerpos en tres dimensiones para  $Re > 10^4$  basado en el área frontal. (Cengel, 2006)

<p>Cube, <math>A = D^2</math></p>  <p><math>C_D = 1.05</math></p>	<p>Thin circular disk, <math>A = \pi D^2/4</math></p>  <p><math>C_D = 1.1</math></p>	<p>Cone (for <math>\theta = 30^\circ</math>), <math>A = \pi D^2/4</math></p>  <p><math>C_D = 0.5</math></p>																										
<p>Sphere, <math>A = \pi D^2/4</math></p>  <p>Laminar: <math>C_D = 0.5</math> Turbulent: <math>C_D = 0.2</math></p>	<p>Ellipsoid, <math>A = \pi D^2/4</math></p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>L/D</math></th> <th colspan="2"><math>C_D</math></th> </tr> <tr> <th>Laminar</th> <th>Turbulent</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.75</td><td>0.5</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.5</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.3</td><td>0.1</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.3</td><td>0.1</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.2</td><td>0.1</td></tr> </tbody> </table>	$L/D$	$C_D$		Laminar	Turbulent	0.75	0.5	0.2	1	0.5	0.2	2	0.3	0.1	4	0.3	0.1	8	0.2	0.1							
$L/D$	$C_D$																											
	Laminar	Turbulent																										
0.75	0.5	0.2																										
1	0.5	0.2																										
2	0.3	0.1																										
4	0.3	0.1																										
8	0.2	0.1																										
<p>Hemisphere, <math>A = \pi D^2/4</math></p>  <p><math>C_D = 0.4</math></p>  <p><math>C_D = 1.2</math></p>	<p>Short cylinder, vertical, <math>A = LD</math></p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>L/D</math></th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0.6</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.7</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.8</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.9</td></tr> <tr><td>40</td><td>1.0</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>1.2</td></tr> </tbody> </table> <p>Values are for laminar flow</p>	$L/D$	$C_D$	1	0.6	2	0.7	5	0.8	10	0.9	40	1.0	$\infty$	1.2	<p>Short cylinder, horizontal, <math>A = \pi D^2/4</math></p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>L/D</math></th> <th><math>C_D</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.5</td><td>1.1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.9</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.9</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.9</td></tr> <tr><td>8</td><td>1.0</td></tr> </tbody> </table>	$L/D$	$C_D$	0.5	1.1	1	0.9	2	0.9	4	0.9	8	1.0
$L/D$	$C_D$																											
1	0.6																											
2	0.7																											
5	0.8																											
10	0.9																											
40	1.0																											
$\infty$	1.2																											
$L/D$	$C_D$																											
0.5	1.1																											
1	0.9																											
2	0.9																											
4	0.9																											
8	1.0																											

# **Anexo 8:** Criterio de selección a partir de la velocidad específica $n_s$

