

Cálculo numérico

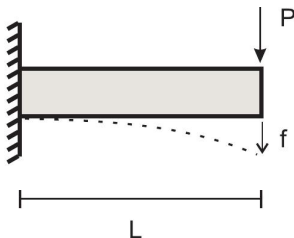
- *Cálculo numérico* (o bien *análisis numérico*) es una rama de las matemáticas aplicadas, que intenta obtener la *solución numérica* de *problemas matemáticos*.
- Estos problemas a veces involucran ecuaciones diferenciales, a veces sobre entidades vectoriales o tensoriales, en fin, con distinto grado de complejidad.
- Las herramientas matemáticas se utilizan para representar o modelar teóricamente problemas de las distintas ingenierías. Son las ecuaciones de problemas físicos (ecuaciones de la *física-matemática*). Por ejemplo:
 - Problemas de movimiento de fluidos
 - Problemas de deformaciones de materiales sólidos.
 - Problemas de propagación del calor.
 - etc.

Cálculo numérico

- Estas soluciones numéricas se obtienen a través de una cantidad de números (no funciones, ...) que representan la función buscada evaluada en puntos determinados.
- Las soluciones numéricas se obtienen mediante *técnicas numéricas* (o *métodos numéricos*) utilizando operaciones sencillas (suma, resta, multiplicación, ...) en lugar de operaciones mas complejas (diferenciación o integración).
- En algunos problemas la solución numérica puede coincidir con la solución analítica, pero en otros tipos de problemas no, y existe un *error* numérico.

¿ Por qué cálculo numérico?

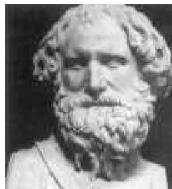
- Vamos a suponer un problema ingenieril hipotético, de tipo estructural. Bien podría haber sido un problema hidráulico, o termomecánico, o algún otro. A los efectos de esta introducción es lo mismo.
- Supóngase una tarea demandada a un ingeniero: predecir cuánto se deforma una viga



El cálculo en ingeniería

- La evaluación de magnitudes que cuantifiquen el estado mecánico de estructuras, piezas industriales, recursos naturales, tejidos orgánicos, etc. puede efectuarse por algunas de las siguientes maneras:
 - Experimental
 - Analítica (Teórica)
 - Numérica
- En ese orden ha sido posible -históricamente- contar con esas herramientas.
- Hagamos un breve repaso a esa historia.

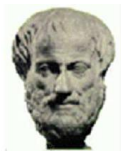
En la antigüedad



Arquimedes (287-212 a.c)

- Hubo grandes figuras de la ciencia, como el Gran Ingeniero Arquimedes de Siracusa (287-212 a.c) a quien debemos: el principio hidrostática, desarrollos de máquinas simples (palanca, tornillo), el cálculo del área de la parábola, una aproximación de π , entre otros importantes aportes.

En la antigüedad



Aristóteles (384, 322 a.c.)

- El conocimiento era empírico. Basado en la observación y estaba sistematizado en la *filosofía*.
- Los postulados de Aristóteles mantuvieron vigencia durante casi 2000 años.
- El andamiaje teórico se arma mediante la *lógica*.
- Es útil mencionar que las herramientas matemáticas se circunscribían a la *geometría*.
- No había herramientas para resolver nuestro problema.

Cálculo infinitesimal



Sir Isaac Newton
(1642-1727)

- Isaac Newton, matemático, físico y experimentador, fué tal vez el científico más importante e influyente de la historia.
- Simultaneamente con (pero separadamente de) Gottfried Leibnitz (1646-1716) creó el *cálculo infinitesimal*
- Además de importantes aportes en matemática, mecánica, óptica, ...

Solución analítica de problemas físico-mecánicos

- Las magnitudes (propiedades, estado) pueden ser medidas y representadas como *variables* dependientes de otras variables (*funciones*)

Lord Kelvin (1824-1907): cuando se puede medir aquello de que se habla, y expresarlo en números, se sabe algo de ello; pero nuestro saber es deficiente e insatisfactorio mientras no podamos expresarlo en números

- Las leyes o condiciones a cumplir son las *ecuaciones* que vinculan esas variables.
- El problema matemático que describe el comportamiento de un sistema físico:
 - ecuaciones (diferenciales)
 - condiciones de contorno

Solución analítica de problemas físico-mecánicos

- Hubo un importante desarrollo durante los siglos XVIII y XIX
Euler (1707-1783); Lagrange (1736-1813);
Navier (1785-1836); Gauss (1777-1855);
Stokes (1819-1903); Laplace (1749-1827);
Fourier (1758-1830); ...
- La solución analítica es una solución elegante.
- Pero puede obtenerse para algunos casos (sencillos)

Problemas con solución analítica

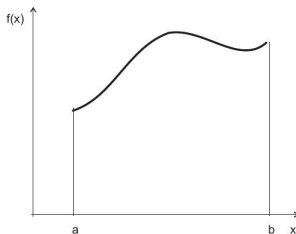
- Muchos problemas pueden resolverse analíticamente
- Pero ellos se limitan a geometrías sencillas, con condiciones de contorno sencillas, etc.
- En nuestro caso hay una solución analítica la problema de la viga
→ permite resolver nuestro problema
- ...
- *En la mayoría de los casos prácticos no tenemos solución analítica ... !*

La solución analítica será objeto de la materia *Mecánica del Continuo*

Métodos numéricos

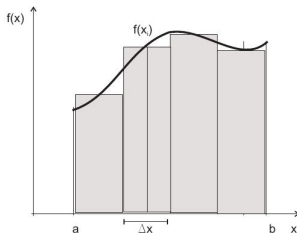
- El concepto de los métodos numéricos se introducirá con un ejemplo muy sencillo.
- Por ejemplo: hallar una integral definida
- El área bajo la curva puedo obtenerla por integración.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



Métodos numéricos

- Si no puedo integrar esa función, puedo aproximar el área computando las áreas de estos rectángulos:



$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

- No obtengo así la solución exacta A sino una solución numérica (aproximada) \hat{A} .

Métodos numéricos

- Grecia (antes de la era cristiana)
Reemplazo de una curva por una poligonal. Cálculo de π (Arquímedes).
- Newton y Cotes: integración numérica.
- Euler: solución de problemas de valor inicial.
- ...
- Lord Rayleigh (1870)
Técnicas variacionales para problemas de vibración. Reemplaza la función incógnita por una serie de funciones conocidas y coeficientes incógnitas.
- Ritz (1909)
Extendió la idea de Rayleigh a otros tipos de problemas (electrodinámica). *Método de Rayleigh-Ritz*. Precisa un funcional.

Método de Rayleigh-Ritz



Lord Rayleigh (John W. Strutt)
(1842-1919), Nobel 1904



Walter Ritz
(1878-1909)

- Se propone una aproximación $\hat{u}(x)$ al valor exacto $u(x)$

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) a_i$$

mediante funciones conocidas $\phi_i(x)$ y coeficientes incógnitas a_i

- Calcula a_i por minimización del funcional que gobierna el problema.

Métodos numéricos

- Galerkin (1915)
Minimización del error: residuos ponderados.



Boris Grigorievich Galerkin
(1871-1945)

- ... y muchos otros ...
- *En nuestro caso el Método Numérico*
→ *permite resolver nuestro problema*

Los Mét. Numéricos serán objeto de la materia *Mecánica Computacional*

El cálculo numérico

La metodología para realizar una simulación numérica implica:

- Desarrollo de un *modelo matemático* \rightarrow *problema matemático*
- *Solución numérica* del *problema matemático*
- Desarrollo de software para la *solución numérica*
- Verificación de los *métodos numéricos* con casos simples
- Validación del *modelo matemático* con resultados experimentales
- Utilización práctica para predecir comportamiento.

Aproximaciones

