Problemas matemáticos y solución numérica

Problema matématico

- Un problema matemático puede escribirse:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{hallar } x \text{ tal que}\\ F(x,d) \;=\; 0\end{array}} \qquad (1)$$

donde

- F : relación funcional entre x y d;
- x : incógnita (escalar, vector, funciones, etc.)
- d : datos (escalar, vector, funciones, etc.)

Problema matématico

Ejemplo:

hallar el vector $\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

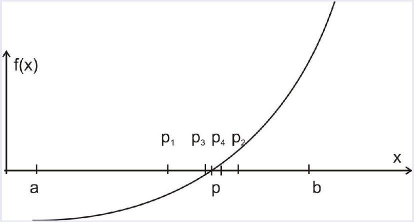
Este es un problema de resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Será tratado en otro capítulo.

Ejemplo:

hallar x tal que

$$f(x) = 0$$



Este es un problema de hallar el cero o raiz de una función.
Será tratado en otro capítulo.

Problemas bien planteados

- El problema (1) se dice **bien planteado** si
  - *tiene* una solución
  - la solución es *única*
  - la solución *depende con continuidad de los datos*.
- Si no, el problema se dice que es **mal planteado**

Problema mal planteado

Ejemplo:

- El problema de hallar la raiz de

$$p(x) \; = \; x^4 - x^2(2a-1) + a(a-1)$$

  es mal planteado.
- En efecto:
  - Si $a \geq 1$ tiene 4 raices reales
  - Si $a \in [0,1)$ tiene 2 raices reales
  - Si $a < 0$ no tiene raices reales
- La solución varía en forma discontinua con el dato a.

Condicionamiento

- Si con δd se indica una variación en los datos de entrada, y con δx la variación acorde de la solución, se puede definir un *numero de condición*:

$$\kappa = \sup_{\delta d} \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta d\|/\|d\|}$$

donde $\|.\|$ es una *norma* (medida escalar).

- Si $\kappa >> 1$ el problema está *mal condicionado*.
- Si $\kappa \sim 1$ el problema está *bien condicionado*.
- Ejemplo:

> *Para el problema de resolver un sistema de ecuaciones* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *se puede definir un número de condición para la matriz:* $\kappa = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$

Condicionamiento

Ejemplo:

- Se desea hallar un polinomio cúbico

$$y = c_1 \ x^3 + c_2 \ x^2 + c_3 \ x + c_4$$

que pase por los 4 puntos: (2,8), (3,27), (4,64). (5,125).
(evidentemente este polinomio es $y = x^3$).

- La técnica para hallarlo se vera más adelante, pero conduce a resolver el SEAL (Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales):

$$\begin{bmatrix} 20514 & 4424 & 978 & 224 \\ 4424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento

Ejemplo: (cont.)

- La solución exacta del sistema de ecuaciones es: $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$.
- Una computadora con 9 cifras da:
  $[1.000004 \quad -0.000038 \quad 0.000126 \quad -0.000131]$
  que es cercano a la solución.
- Pero si el numero a_{11} de la matriz, en lugar de ser 20514 fuese 20515, la misma computadora da: $[0.642857 \quad 3.75000 \quad -12.3928 \quad 12.7500]$
- El resultado es muy sensible a los datos, y no es confiable. Esto se dió porque el número de condición es muy alto.
- El número de condición de la matriz en este caso es $\kappa = 3.1875e+07$

Solución numérica

- Sea el problema (1) bien planteado

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{hallar } x \text{ tal que} \\ F(x,d) \; = \; 0\end{array}} \qquad (1)$$

- Hay métodos numéricos que se basan en construir una secuencia de problemas aproximados:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{hallar } x^{(k)} \text{ tal que} \\ F^{(k)}(x^{(k)},d^{(k)}) \; = \; 0 \qquad k \geq 1\end{array}} \qquad (2)$$

  con la expectativa que $x^{(k)} \to x^*$ para $k \to \infty$, donde x^* es la solución exacta de (1).
- Para que se dé esto debe ser $d^{(k)} \to d$ y $F^{(k)} \to F$ cuando $k \to \infty$.

Solución numérica

Ejemplo:

:

El metodo de Newton-Raphson para hallar cero de una función, resuelve una sucesión de problemas aproximados del tipo:

$$f^{(k)}(x^{(k)}) \;=\; x^{(k)} - x^{(k-1)} + \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \;=\; 0$$

Consistencia

- El problema aproximado (2) se dice **consistente** si

$$F^{(k)}(x^*, d) \to F(x^*, d)$$

para $k \to \infty$

Estabilidad

- Un método numérico se dice que es **estable**, si para cada iteración k existe una solución unica $x^{(k)}$ para los datos $d^{(k)}$; y si esa solución depende continuamente de los datos.
- Es decir que para pequeños cambios $\delta d^{(k)}$ en los datos se producen pequeños cambios en los resultados $\delta x^{(k)}$
- Este es un concepto análogo al de problema *bien planteado*
- Puede evaluarse un *número de condición* para el método numérico
- Los conceptos de *bien planteado*, *bien condicionado*, y *estable*, se usan como sinónimos.

Solución numérica

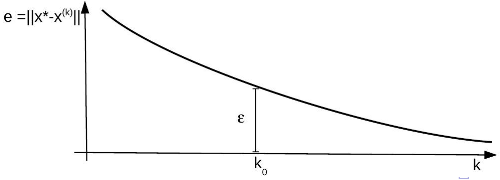
Convergencia

- El metodo numérico (2) se dice **convergente** si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; k_0(\epsilon), \;\; \exists \; \delta(k_0, \epsilon) \text{ tal que}$$

$$\forall k > k_0(\epsilon), \;\; \forall \|\delta d^{(k)}\| < \delta(k_0, \epsilon) \quad \Rightarrow \|x(d) - x^{(k)}(d + \delta d^{(k)})\| \leq \epsilon$$

- Si un método numérico es *consistente* y *estable*, entonces es *convergente*



Orden de convergencia

- En procedimientos iterativos se construye una sucesión $[x^{(k)}]$ que se espera tienda a la solución x^*.
- Para referirse a la rapidez con que $[x^{(k)}]$ tiende a x^*. se habla de *tasa*, o *razón*, o *velocidad* de convergencia.
- Se dice que la convergencia es **lineal** si:

$$\exists\ c < 1 \text{ y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ c\,|x^{(k)} - x^*| \qquad \text{para} \ \ k \geq K$$

- Se dice que la convergencia es **superlineal** si:

$$\exists\ [\epsilon_k] \to 0 \text{ y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ \epsilon^{(k)}\ |x^{(k)} - x^*| \qquad \text{para} \ \ k \geq K$$

Orden de convergencia

- Se dice que la convergencia es **cuadrática** si:

$$\exists\ C(\text{no necesariamente} < 1) \text{ y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ C \ |x^{(k)} - x^*|^2 \qquad \text{para} \ \ k \geq K$$

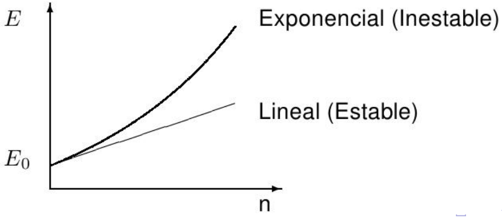
- Se dice que la convergencia es de **orden** α si:

$$\exists\ C \text{ y } \alpha \text{ constantes y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ C \ |x^{(k)} - x^*|^\alpha \qquad \text{para} \ \ k \geq K$$

Estabilidad

- Un método numérico se dice estable si pequeños cambios en los datos de entrada producen pequeños cambios en los resultados.
- En algoritmos donde se evalúa una solución en varios instantes en el tiempo (historia), hay una acumulación de errores de cada paso. Si se introduce un error o perturbación E_0 en alguna etapa del cálculo, y se designa con E_n el error luego de n pasos (iteraciones), se dice que:
  - El error crece *linealmente* si $E_n \ = \ n\ C\ E_0$
  - El error crece *exponencialmente* si $E_n \ = \ C^n\ E_0 \quad , \quad C > 1$



Algoritmos

- Los métodos numéricos se describen a través de *algoritmos*
- Un algoritmo es un procedimiento que describe una serie finita de pasos, en un orden determinado, que hay que realizar para resolver un problema dado.
- El algoritmo se puede describir con un seudocódigo. Este especifica la forma de entrada de datos; de salida de resultados; y los pasos a realizar.