

# Métodos numéricos

**ENRIQUE RAFAEL ESPINOSA SANCHEZ**

**Red Tercer Milenio**

## MÉTODOS NUMÉRICOS

# MÉTODOS NUMÉRICOS

ENRIQUE RAFAEL ESPINOSA SANCHEZ

RED TERCER MILENIO



## AVISO LEGAL

---

**Derechos Reservados © 2012, por RED TERCER MILENIO S.C.**

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Prohibida la reproducción parcial o total por cualquier medio, sin la autorización por escrito del titular de los derechos.

Datos para catalogación bibliográfica

Enrique Rafael Espinosa Sánchez

*Métodos numéricos*

ISBN 978-607-733-081-3

**Primera edición: 2012**

## DIRECTORIO

---

**José Luis García Luna Martínez**

***Director General***

**Rafael Campos Hernández**

***Director Académico Corporativo***

**Bárbara Jean Mair Rowberry**

***Directora Corporativa de Operaciones***

**Jesús Andrés Carranza Castellanos**

***Director Corporativo de Administración***

**Héctor Raúl Gutiérrez Zamora Ferreira**

***Director Corporativo de Finanzas***

**Alejandro Pérez Ruiz**

***Director Corporativo de Expansión y Proyectos***

## ÍNDICE

<i>Introducción</i> .....	4
<i>Mapa conceptual</i> .....	6
Unidad 1 Álgebra vectorial .....	7
Mapa conceptual .....	8
Introducción .....	9
1.1 Conceptos generales.....	10
1.2 Operaciones con vectores .....	12
1.3 Representación gráfica .....	16
1.4 Vectores ortogonales y ortonormales .....	18
1.5 Vectores $r_2$ y $r_3$ .....	18
Autoevaluación .....	20
Unidad 2 Matrices.....	23
Mapa conceptual .....	24
Introducción .....	25
2.1 Conceptos generales.....	26
2.2 Operaciones con matrices .....	27
2.3 Diagonalización .....	30
2.4 Matrices triangulares y simétricas .....	32
2.5 Matrices inversas y transpuestas .....	33
2.6 Sistemas de ecuaciones lineales.....	34
2.7 Método de Gauss Jordan.....	36
2.8 Método de cramer con factores .....	39
2.9 Método de la inversa .....	41
2.10 Método de Gauss Seidel.....	42
2.11 Método de Jacobi.....	44
Autoevaluación .....	47

Unidad 3 Solución numérica de ecuaciones con una variable .....	50
Mapa conceptual .....	51
Introducción .....	52
3.1 Por intervalo .....	53
3.2 Método de bisección .....	54
3.3 Método de Newton Raphson .....	55
3.4 Método de la secante .....	57
3.5 Método de integración de punto fijo .....	58
3.6 Método de $\Delta^2$ aitken .....	59
Autoevaluación .....	60
 Unidad 4 Diferenciación e integración numérica .....	 63
Mapa conceptual .....	64
Introducción .....	65
4.1 Introducción .....	66
4.2 Uso del desarrollo de taylor .....	66
4.3 Algoritmo genérico para obtener una aproximacion por diferencias... .	67
4.4 Usos de los operadores de diferencias .....	68
4.5 Aproximación de derivadas parciales por diferencias .....	70
4.6 Regla del trapecio .....	70
4.7 Regla 1/3 de simpson .....	72
4.8 Integración numérica con límites infinitos o singularidades .....	73
Autoevaluación .....	74
 Unidad 5 Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias .....	 77
Mapa conceptual .....	78
Introducción .....	79
5.1 Método de Euler .....	80
5.2 Método de Runge Kutta .....	82
5.3 Método de predicto correcto .....	83
5.4 Método de heun sin principio .....	84

5.5 Método de pasos múltiples de orden superior.....	85
Autoevaluación .....	87
<i>Bibliografía</i> .....	89
<i>Glosario</i> .....	90

## INTRODUCCIÓN

La presente obra tiene como propósito general, servir de guía teórico-didáctica de la materia de *Métodos numéricos*, la cual pretende orientar al estudiante en las bases y conceptos generales.

Sin embargo, el estudiante deberá realizar diversas investigaciones bibliográficas, ejercicios, prácticas extra clase y programas computacionales para complementar el aprendizaje de la materia.

Los métodos numéricos son empleados para la solución de problemas de la vida cotidiana que se han modelado de forma matemática y que requieren una solución de tipo numérico próxima a la realidad.

Antes de tomar este curso, el estudiante deberá dominar las áreas del cálculo diferencial e integral, mismas que le facilitarán el desarrollo de la aplicación de los métodos numéricos en la solución de las ecuaciones.

Es necesario que el alumno tenga también el dominio de la programación, ya que algunos métodos numéricos requieren para su pronta solución de una herramienta de software que realice los cálculos numéricos de forma rápida y exacta.

Como parte de su formación académica, el alumno de ingeniería ha desarrollado en sus constructos el pensamiento lógico matemático que le permitirá dominar los métodos numéricos y, a su vez, plasmar a través de algoritmos dichos métodos en programas que él mismo desarrollará.

La programación de los métodos puede ser en cualquier lenguaje de programación, ya sea que emplee turbo c, o hasta un lenguaje orientado a objetos como java; para la finalidad del curso y por la manera de estructurar los pasos para el desarrollo de los métodos, se sugiere el empleo de matlab.

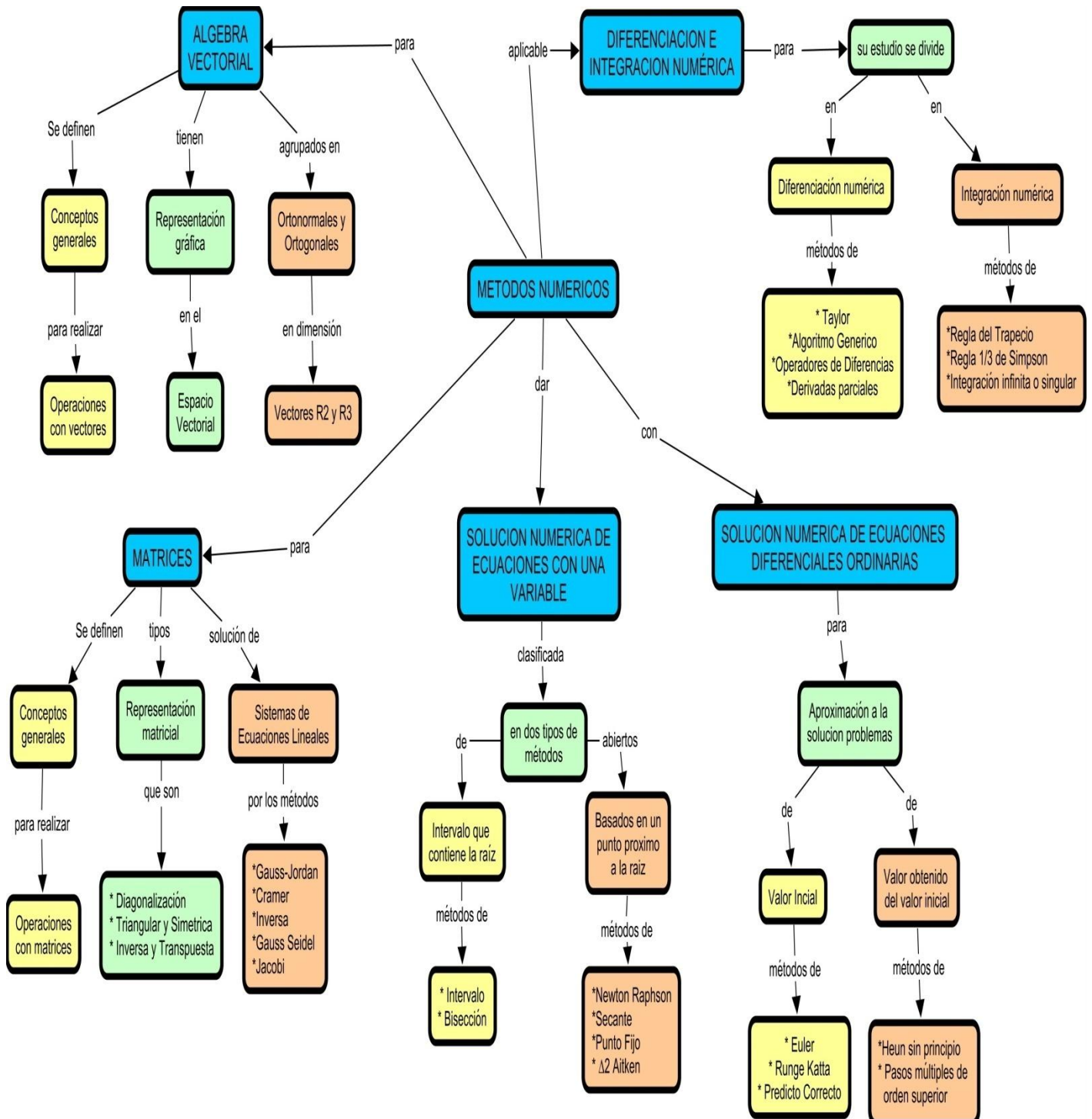
El presente libro didáctico está compuesto de cinco unidades que abarcan los conceptos necesarios para que el estudiante maneje los métodos numéricos y dar con ello un sentido conceptual aplicable a su carrera profesional.



El curso comprende desde el estudio de vectores para poder ubicar el manejo del plano en los sentidos de longitud, altura y volumen, hasta la solución de ecuaciones diferenciales, todos con la finalidad de dar una solución numérica.

Los temas curriculares de esta materia pretenden que, al finalizar el curso, el estudiante sepa aplicar los conocimientos adquiridos a la carrera profesional que estudia.

# MAPA CONCEPTUAL



## UNIDAD 1

### ÁLGEBRA VECTORIAL

#### OBJETIVO

Explicar al alumno los conceptos generales, operaciones y representación general del álgebra vectorial.

#### TEMARIO

1.1 CONCEPTOS GENERALES

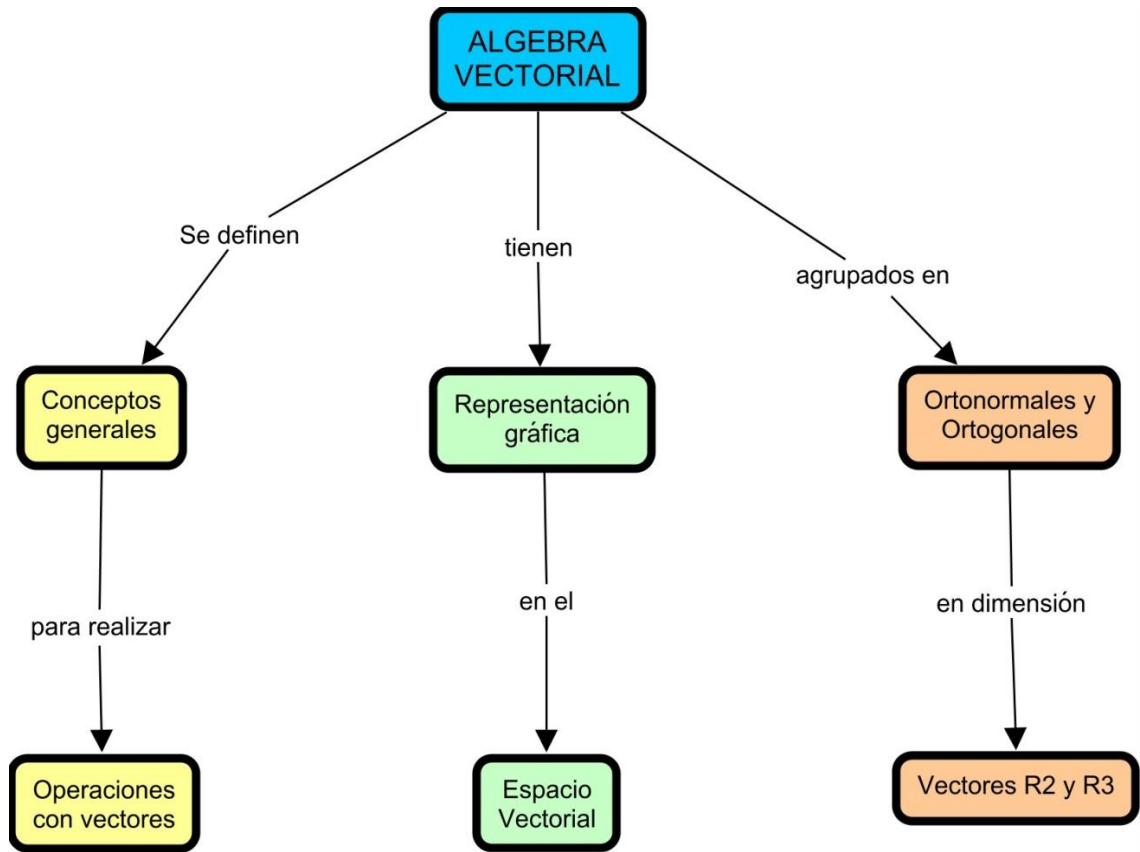
1.2 OPERACIONES CON VECTORES

1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

1.4 VECTORES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

1.5 VECTORES  $R^2$  Y  $R^3$

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

Esta unidad describe los conceptos generales del álgebra vectorial y las operaciones aritméticas fundamentales que se pueden realizar con el manejo de vectores.

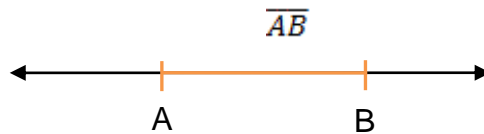
El álgebra vectorial tiene una gran relación con nuestra vida cotidiana, pues todo lo que vemos en nuestro medio puede ser representado en el plano de forma vectorizada.

El alumno aprenderá que el álgebra vectorial tiene gran importancia en la rama de la ingeniería aplicable al mundo real.

## 1.1 CONCEPTOS GENERALES

La parte esencial del álgebra lineal es el estudio de los vectores y matrices. *William Rowan Hamilton*<sup>1</sup>, matemático de origen irlandés que vivió en el siglo XIX (1805-1865), es el pionero en estudiar los vectores, y su empeño en tratar de hacer representaciones en el plano y en el espacio, lo condujo al descubrimiento de lo que llamó cuaterniones, que más tarde se llamaron vectores.

El *segmento de la recta*, se define geométricamente por dos puntos que interceptan dicha *recta*; estos puntos pueden ser representados por el punto *A* y por el punto *B*, que dan origen a la *semirecta* representada por el *segmento de recta*  $\overline{AB}$ , y que de manera grafica se esquematiza de la siguiente forma:



Esta representación grafica realizada sobre la recta no representa un valor positivo o negativo de los números reales como suele representarse en la recta numérica; se concreta en esquematizar la *semirecta* que se forma por la intersección de los puntos ya mencionados.

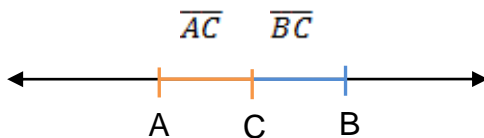
Para los alumnos de ingeniería este concepto es esencial en matemáticas, y aunque se trata de una representación geométrica, del concepto de *segmento de recta* se desprenden los términos de intervalo (catalogado en tres tipos que son intervalo abierto, intervalo cerrado e intervalo semiabierto por un extremo) y el concepto de límite; dichos términos se emplean en cálculo, álgebra y programación, y de ahí su importancia.

A los puntos *A* y *B* se les denomina extremos del segmento de recta y dentro de estos extremos puede estar contenido algún otro punto sobre dicho segmento. Suponga un tercer punto en el segmento de recta  $\overline{AB}$  señalado por

---

<sup>1</sup> <http://www.hamilton.tcd.ie/>

el punto  $C$ , aquí se da lugar a la ley de tricotomía, debido a que dentro del segmento inicial  $\overline{AB}$  se han formado dos nuevos segmentos de recta que son el segmento  $\overline{AC}$  y el segmento  $\overline{BC}$ :

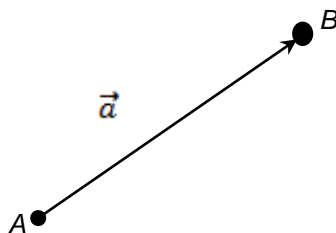


Dicho segmento  $\overline{BC}$  expresa tres casos: el primero, que ambos nuevos segmentos son iguales, el segundo caso expresa que el primer segmento es mayor al segundo y el tercer caso es que el primer segmento de recta es menor que el segundo; al cumplirse uno de estos tres casos, los dos restantes no tienen lugar a que se cumplan.

Hasta este momento se ha definido el concepto de segmento de recta, un nuevo concepto es el de segmento dirigido que consiste en un par de puntos  $A$  y  $B$ , donde al punto  $A$  se le llama origen del segmento dirigido  $\overrightarrow{AB}$  y el punto  $B$  se llama fin del segmento dirigido  $\overrightarrow{AB}$ .

En el plano se denomina vector al conjunto de todos los segmentos dirigidos, iguales entre sí, cuyos orígenes y fines pertenecen al espacio, es decir, que se encuentran dentro del plano. De manera general, los vectores se designan con las letras minúsculas  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

Si los puntos  $A$  y  $B$  y el vector  $\vec{a}$  son tales que  $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ , el vector  $\vec{a}$  se encuentra escrito de igual forma que el segmento dirigido  $\overrightarrow{AB}$ , con lo que tenemos que es lo mismo escribir que el segmento dirigido  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , o también que el segmento dirigido  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , dónde se dice que el segmento dirigido  $\overrightarrow{AB}$  representa al vector  $\vec{a}$ . Esto se representa gráficamente a continuación:



De acuerdo con la anterior figura, el punto de origen del vector  $\vec{a}$  es  $A$  y el fin es el punto  $B$ , obteniendo el segmento de recta  $\overrightarrow{AB}$ , el vector contrario de dicho segmento es  $\overrightarrow{-AB}$ , también representado como  $\overrightarrow{BA}$  por el sentido común de ir en contra de la dirección del segmento inicial.

El vector nulo  $\vec{0}$  es aquel donde los puntos  $A = B$ , es decir, ambos se encuentran en el mismo punto de la recta, y con ello se concluye que el vector nulo es aquel que carece de longitud.

En la vida cotidiana un vector es aquel que representa magnitud y dirección. Por magnitud se entiende la representación de las medidas físicas tales como la fuerza, velocidad, aceleración, la gravedad, el peso y demás; en cambio la dirección representa el sentido de dichas medidas, ya sea en incremento o decremento.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

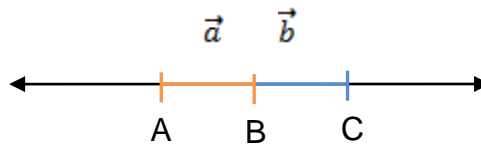
Investiga sobre álgebra vectorial y elabora un mapa conceptual.

### 1.2 OPERACIONES CON VECTORES

Con los vectores, al igual que con cualquier número real, se pueden hacer ciertas operaciones aritméticas.

La suma de vectores es aquella que gráficamente consiste en la sucesión de un vector a continuación de otro vector, dando paso a uno denominado vector suma, que va desde el origen o extremo del primer vector al extremo del último. Por ejemplo, sobre la siguiente recta se han representado los siguientes vectores:





donde el vector  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  está representado por el segmento dirigido  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$  es un vector representado por el segmento dirigido  $\overrightarrow{BC}$ , entonces la suma de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , denotado  $\vec{a} + \vec{b}$  se deduce que está representada por los segmentos dirigidos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$ .

En la suma de vectores hay cuatro leyes que se aplican de acuerdo con el caso en que se presenta la adición de los vectores.

La primera ley está representada por:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

que es la *ley conmutativa de la suma*, donde el orden de los factores no altera el producto resultante.

La segunda ley o *ley asociativa de la adición*, indica que:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

agrupar algunos elementos que intervienen en la operación, no afecta el producto resultante.

La tercera ley, trata de la adición del vector nulo que:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

todo vector sumado por el vector nulo dará como resultado el mismo vector.

La cuarta ley, trata de la adición del vector contrario que:

$$\vec{a} + \overrightarrow{-a} = \vec{0}$$

todo vector sumado a su vector contrario dará como resultado el vector nulo.

La resta de vectores, es la operación inversa de la adicción, por ejemplo sea el vector  $\vec{a}$  y  $\overrightarrow{-b}$ , denotado como  $\vec{a} - \vec{b}$ . Por ejemplo, la siguiente suma de vectores:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

al despejar un miembro de la igualdad obtenemos:

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$$

que es el caso donde se puede apreciar la aplicación de la sustracción de vectores. En la resta de vectores también se aplican las cuatro leyes previamente señaladas en la suma de vectores.

En la multiplicación de vectores tenemos tres casos de multiplicación por un número real, multiplicación por un escalar y multiplicación vectorial.

La multiplicación por un número real  $k$  ocurre cuando hay vectores libres, dónde  $k$  hace referencia a cualquier número de veces que aumenta el valor del vector.

$$k * \vec{a} = k\vec{a}$$

siempre y cuando:

$$k \neq 0$$

La multiplicación, al igual que la adicción y la sustracción, se norma por leyes de la multiplicación:

$$1 * \vec{a} = \vec{a}$$

Todo vector multiplicado por la unidad da como producto el mismo vector.

$$1 * \vec{a} = \vec{a}$$

Todo vector multiplicado por cero da como producto el vector nulo.

$$0 * \vec{a} = \vec{0}$$

Vector nulo multiplicado por un número  $k$ , da como producto el vector nulo.

$$k * \vec{0} = \vec{0}$$

Vector nulo multiplicado por la unidad negativa da como producto el vector opuesto.

La multiplicación escalar de un vector es el resultado del producto de vectores; dicha multiplicación tiene propiedades.

Propiedad conmutativa para vectores se denota como:

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$$

es decir, el orden los vectores no afecta el producto.

Propiedad distributiva respecto a la suma para vectores se denota como:

$$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$$

es decir, el orden con que se realizan las operaciones aritméticas, no afecta el producto.

La multiplicación vectorial está definida como el producto de dos vectores y el seno que forman.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga diez ejemplos de operaciones con vectores y entrégalos en hojas blancas.

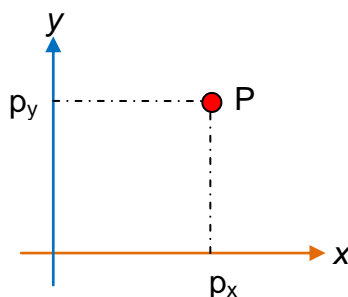
### 1.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En los apartados anteriores el alumno sólo ha manejado el concepto de vector lineal de forma geométrica, es decir, sobre una dimensión, utilizando un eje que para su caso ha sido la recta.

En este apartado se tratará a profundidad la interacción de los ejes de longitud, altura y volumen, o bien eje  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , que tienen mucha implicación en áreas de ingeniería, ya sea desde un simple programa de pilas y colas, hasta un programa de arreglos unidimensionales, bidimensionales o multidimensionales; en el campo de la multimedia dio paso al desarrollo de los juegos en 3D (tercera dimensión).

Fue René Descartes quien introdujo los ejes de las coordenadas, tomando dos rectas perpendiculares. A la recta se le llama *eje de las yes*, representada por una  $y$ ; a la horizontal se le llama *eje de las equis*, denotado por una  $x$ .

Dado un punto  $p$  ubicado en el plano, se traza una perpendicular al eje  $x$  y una al eje  $y$ , con lo que se obtiene el punto  $p_x$  en el  $x$  y el  $p_y$  en el  $y$ ; el origen del plano es 0 que representa a los números reales  $\mathbb{R}$

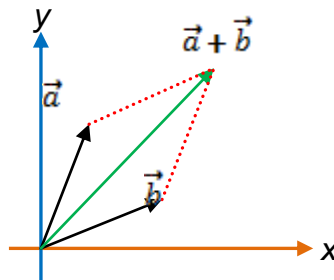


Hasta ahora el estudiante de álgebra lineal ha llegado al concepto de vector dirigido representado por una literal y compuesto por dos extremos de un segmento de recta; esto había sido de forma geométrica, pero si el vector

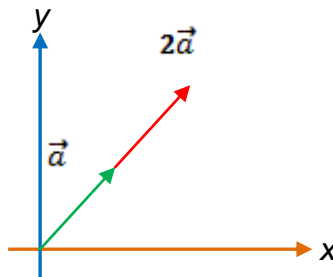
dirigido estuviera ubicado sobre una recta numérica, el vector dirigido estaría conformado por los números reales contenidos en dicho vector.

Por ejemplo, si el vector dirigido  $\vec{a} = \overline{4,9}$  inicialmente se encuentra sobre el eje de las x, se le considera un vector fila y contiene los elementos que están entre los extremos [4,9]; en caso contrario, si el vector dirigido estuviera sobre el eje de las y, el vector se conoce como un vector columna y contiene el mismo intervalo de números que se ubican dentro de sus extremos.

En estos dos casos sólo se ha manejado una dimensión o eje, pero como se representa cuando intervienen dos dimensiones, por ejemplo, sean los vectores  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  y  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  y la suma de estos se representa como  $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$  que se considera como diagonal del paralelogramo que forma el producto de estos vectores



Si el vector  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  y  $\theta$  un escalar, el producto queda como  $\theta \vec{a} = (\theta a_x, \theta a_y)$ , que geométricamente representa aumentar o disminuir al vector  $\vec{a}$



El plano cartesiano es el primer ejemplo de espacio vectorial con el que el alumno puede interactuar.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga sobre la representación gráfica de un vector y elabora un ensayo.

### 1.4 VECTORES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

La ortogonalidad es la equivalencia geométrica de la generalización de la perpendicularidad, que suele darse entre rectas, planos donde sus ángulos son iguales a  $90^\circ$ .

Dos vectores son ortogonales o perpendiculares si su producto escalar es cero, es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0$$

Dos vectores son ortonormales si su producto escalar es uno o si los dos vectores son unitarios:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 = 1$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga los conceptos de ortogonalidad u ortonormalidad para que presentes cinco ejemplos de cada uno.

### 1.5 VECTORES R2 Y R3

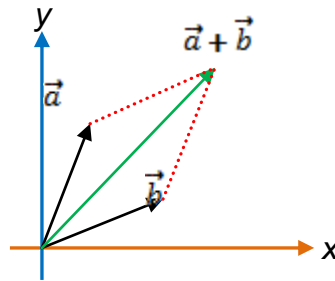
Hasta el momento consideramos como un vector a aquel que posee dirección y magnitud.

En la definición de vector se ha dicho que es la representación de un número real  $\mathbf{R}$ , pero puede ser cualquier representación de un real elevado a la  $n$  potencia, es decir,  $\mathbf{R}^n$ , en donde  $\mathbf{R}^1$  es la representación de un punto en el plano o también se puede definir como un espacio unidimensional en la línea recta;  $\mathbf{R}^2$  es el espacio bidimensional que ocupan dos pares ordenados de puntos en el plano, que pueden ser  $x_1$  y  $x_2$ , y  $\mathbf{R}^3$  es la representación tridimensional de una terna ordenada de puntos representados en el espacio  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

La suma de vectores en  $\mathbf{R}^2$  se representa como:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$$

la representación geométrica de la suma de vectores en  $\mathbf{R}^2$  queda como:



La regla general para sumar cualquier vector, sea  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{R}^3$  o  $\mathbf{R}^n$  está dada por asociar los puntos del vector que estén sobre el mismo eje:

$$\vec{a} + \vec{b} + \dots + \vec{n} = (a_x + b_x + \dots + b_{nx}, a_y + b_y + \dots + b_{ny})$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga sobre los vectores  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$  y elabora un análisis.

## AUTOEVALUACIÓN

Subraya la respuesta correcta

1. La parte esencial del álgebra lineal es el estudio de:
  - a) Vectores y matrices
  - b) Soluciones para vectores y matrices
  - c) Representación de vectores en el plano
  - d) Representación de matrices en el plano
  
2. El *segmento de la recta*, geométricamente se define como:
  - a) La intercepción de dos rectas marcadas por puntos
  - b) Dos puntos que interceptan la recta formando una semirecta
  - c) Como una semirecta que se forma al ocurrir una intercepción de recta
  - d) Una subdivisión de recta dividida en segmentos
  
3. La tricotomía que se presenta al comparar dos segmentos de recta consiste en:
  - a) Ambos segmentos son idénticos, el primer segmento es mayor que el segundo.
  - b) Ambos segmentos son de igual proporción, el primer segmento es menor que el segundo; el segundo segmento es mayor que el primer segmento.
  - c) Ambos segmentos son iguales, el primer segmento es mayor que el segundo; el primer segmento es menor que el segundo.
  
4. Los vectores se designan con las letras:
  - a)  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$
  - b)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$
  - c)  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$



*Operaciones con vectores*

5. Sean los vectores  $a$  y  $b$  denotados como:

$$\vec{a} = (-2, 5)$$

$$\vec{b} = (3, -1)$$

Calcula la suma

Calcula la resta

## RESPUESTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. a) Vectores y matrices

2. Dos puntos que interceptan la recta formando una semirecta

3. Ambos segmentos son iguales, el primer segmento es mayor que el segundo; el primer segmento es menor que el segundo.

4. Los vectores se designan con las letras

b)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

*Operaciones con vectores*

5. Sean los vectores  $a$  y  $b$  denotados como

$$\vec{a} = (-2, 5)$$

$$\vec{b} = (3, -1)$$

La suma calculada es:

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 3, 5 + (-1))$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 4)$$

La resta calculada es:

$$\vec{a} - \vec{b} = (-2 - 3, 5 - (-1))$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-5, 6)$$

## UNIDAD 2

### MATRICES

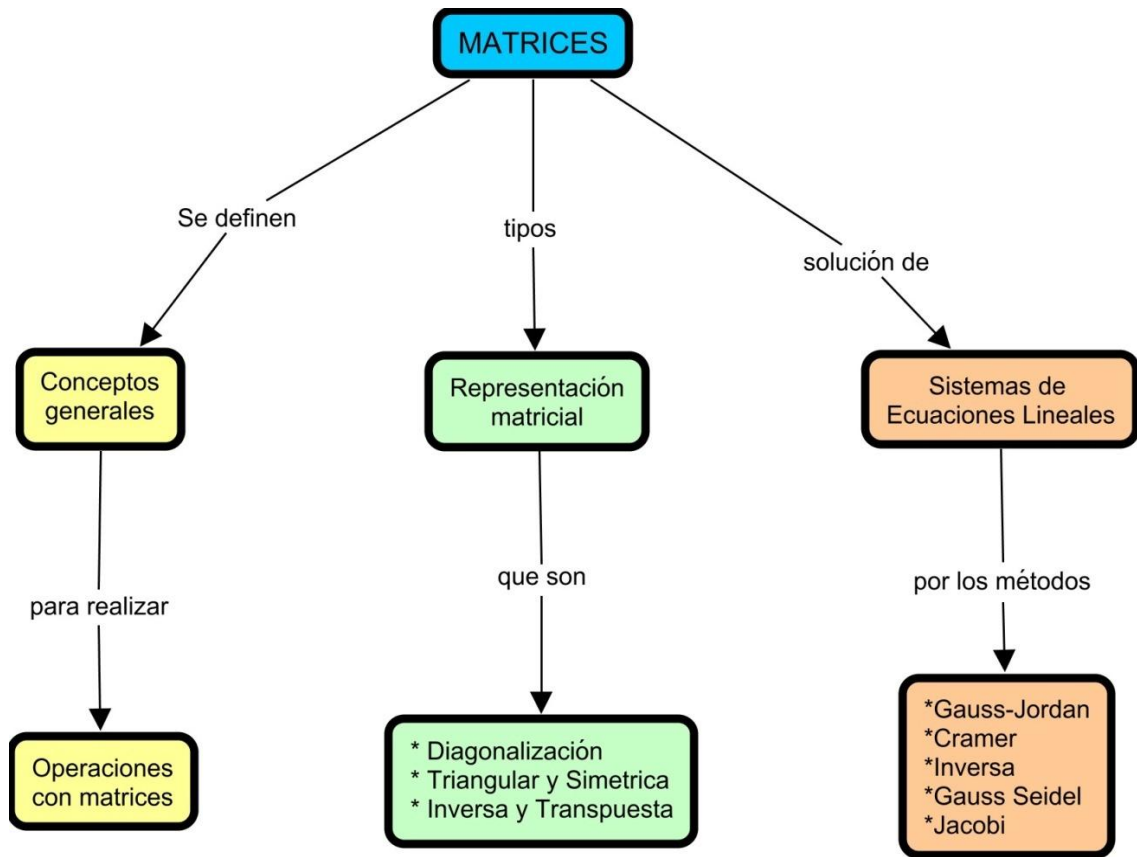
#### OBJETIVO

Analizar los conceptos generales de matrices y soluciones por diversos métodos.

#### TEMARIO

- 2.1 CONCEPTOS GENERALES
- 2.2 OPERACIONES CON MATRICES
- 2.3 DIAGONALIZACIÓN
- 2.4 MATRICES TRIANGULARES Y SIMÉTRICAS
- 2.5 MATRICES INVERSAS Y TRANSPUESTA
- 2.6 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
- 2.7 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN
- 2.8 MÉTODO DE CRAMER CON FACTORES
- 2.9 MÉTODO DE LA INVERSA
- 2.10 MÉTODO DE GAUSS SEIDEL
- 2.11 MÉTODO DE JACOBI

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

En esta unidad se describen los conceptos generales de matrices, y las operaciones aritméticas fundamentales que se pueden realizar con ellas.

Las matrices y el álgebra vectorial se relacionan, ya que ahora las primeras pasan a ser la representación algebraica de la representación geométrica que hacen los vectores, al igual que éstos tienen relación con la vida cotidiana.

El alumno aprenderá los distintos métodos de solución que tienen las matrices, de acuerdo con el caso práctico en que se presentan.

## 2.1 CONCEPTOS GENERALES

El desarrollo inicial de la teoría de matriz se debe a Hamilton; más tarde Arturo Cayley define la notación matricial como una forma de escribir un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas.

Actualmente las matrices se utilizan en informática, ingeniería, economía, estadística, industria y demás, con la finalidad de resolver los sistemas de ecuaciones que se presentan en estas áreas.

Una matriz es un arreglo rectangular de números, y debido a la estructura gráfica de una matriz, ésta cuenta con filas denotadas por  $m$  y por columnas denotadas por  $n$ ; la denotación de las matrices es por letras mayúsculas.

A los números se les llama en el arreglo elementos de la matriz, y pueden ser reales o complejos, según la definición de los elementos dentro de la matriz, éstos cuentan con un doble subíndice que indica el espacio donde se encuentra ubicado. Ejemplo:

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m,1} & d_{m,2} & d_{m,n} \end{bmatrix}$$

Así, entonces, el elemento  $d_{i,j}$  será localizado en la fila  $i$  y en la columna  $j$ .

Los vectores son una forma particular de las matrices. Si  $m > 1$ , pero  $n = 1$ , la matriz está representada como:

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} \\ d_{2,1} \\ \vdots \\ d_{m,1} \end{bmatrix}$$

y se denomina vector columna.

Cuando la matriz es de  $m = 1$  y  $n > 1$  se convierte en vector fila, representado gráficamente de la siguiente forma:

$$D = [d_{1,1} \quad d_{1,n} \quad d_{1,n}]$$

denominada como vector fila.

En el caso de los vectores fila y columna ya no es indispensable manejar los dos subíndices, con uno es suficiente.

Otros casos particulares de las matrices que se pueden enunciar son la matriz escalar, que ocurre cuando  $m=n=1$ , es decir, sólo contiene un elemento.

La matriz cuadrada es una matriz donde  $m=n$ , y se denomina matriz de  $n*n$  elementos.

La matriz nula es aquella en la cual todos sus elementos son cero.

La matriz identidad consiste en una matriz cuadrada donde todos los elementos de la diagonal principal equivalen a 1, mientras que todos los demás elementos son 0.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

investiga sobre las matrices y elabora un resumen.

### 2.2 OPERACIONES CON MATRICES

La aritmética, como ya se vio, es aplicable para vectores y las matrices no son la excepción. Para aplicar la suma con dos matrices es necesario que ambas sean iguales, es decir, que contengan el mismo número de  $m*n$  filas y columnas.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

La adición de la matriz  $A+B$  tiene lugar debido a que contienen el mismo número de filas y de columnas, pero la adición de  $A+C$  o  $B+C$  es imposible porque no contienen el mismo número de elementos en la matriz.

El producto resultante de la matriz  $A+B$  queda desarrollado de la siguiente forma:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + 2 & 4 + 5 & 7 + (-6) \\ 0 + (-3) & -2 + 1 & 3 + 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Como A y B eran matrices de 2 x 3, se realiza la suma; note que es una simple operación que únicamente implica sumar el elemento de la matriz A con su correspondiente de la matriz B.

La operación inversa de la suma es la resta, y tomando como referencia las matrices A y B previamente escritas, tenemos la siguiente operación:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 - 2 & 4 - 5 & 7 - (-6) \\ 0 - (-3) & -2 - 1 & 3 - 8 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 13 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$



Una matriz también se puede multiplicar por un escalar. Los escalares son representados por letras minúsculas a diferencia de las matrices; por ejemplo, el escalar  $r$  que multiplica a la matriz  $B$ , donde el producto se denota como  $rB$ ; por ejemplo:

$$rB$$

donde

$$r = 2$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

el producto de ambos queda como

$$2B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -12 \\ -6 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matriz por matriz no es igual que la de matriz por escalar. Suponga que se desea calcular el producto de las matrices  $A$  y  $B$ : la regla establecida para obtener el producto de la matriz  $AB$  indica que es necesario multiplicar los renglones de la primera matriz  $A$  por las columnas de la segunda matriz  $B$ , más para llevarla a cabo es necesario que el número de renglones de la matriz  $A$  sea igual al número de las columnas de la matriz  $B$ , y en caso de no ser iguales, el producto de la matriz  $AB$  no existe. Un ejemplo, son las matrices  $A$  y  $B$  denotadas de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

de acuerdo con la regla, la primera fila de la matriz producto de  $AB$  es el primer renglón de la matriz  $A$  por cada una de las columnas de la matriz  $B$ , y el segundo renglón de la matriz producto  $AB$  es el segundo renglón de la matriz  $A$  por cada una de las columnas de la matriz  $B$ .

$$AB = \begin{bmatrix} [1 & 3] \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & [1 & 3] \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} & [1 & 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \\ [2 & 0] \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} & [2 & 0] \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} & [2 & 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1 \times 5) + (3 \times 3) & (1 \times 0) + (3 \times (-2)) & (1 \times 1) + (3 \times 6) \\ (2 \times 5) + (0 \times 3) & (2 \times 0) + (0 \times (-2)) & (2 \times 1) + (0 \times 6) \end{bmatrix}$$

Resultado de la matriz producto  $AB$ :

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & -6 & 19 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga 10 ejemplos de operaciones con matrices y entrégalo en hojas blancas.

### 2.3 DIAGONALIZACIÓN

Una matriz cuadrada  $A$  de  $n \times n$  es una *matriz diagonalizable* si existe una matriz  $P$  de  $n \times n$  invertible que cumple la sentencia

$$A = PDP^{-1}$$

donde  $D$  es una matriz diagonal.

Si la matriz  $A$  es idéntica ortogonalmente a una matriz diagonal, se dice que la matriz  $A$  es *diagonalizable* ortogonalmente.

Prácticamente la diagonalización de una matriz se utiliza cuando a ésta la afecta una potencia, es decir,  $A^k$ , donde el número de interacciones para llegar a la solución de dicha matriz puede ser muy grande, por ejemplo, la matriz diagonalizable  $D$  denotada como:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces  $D^2$  es igual a:

$$D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

y si se requiriera que  $D^3$ , se tendría:

$$D^3 = DD^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$D^3 = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

es decir, que para toda

$$D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$$

siempre que

$$k \geq 1$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga sobre la diagonalización y elabora un resumen.

### 2.4 MATRICES TRIANGULARES Y SIMÉTRICAS

Una matriz triangular o simétrica es una matriz cuadrada donde los elementos que contiene, y que se encuentran ubicados por arriba y por debajo de la diagonal principal que se traza dentro de la matriz, son equivalentes a cero; por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

donde la diagonal D está compuesta por los elementos 1,5,4, que cumplen la condición de la matriz diagonal donde se nos dice que todas las entradas de la matriz son 0, a excepción de las que se encuentran sobre la diagonal.

La matriz triangular presenta también un caso denominado matriz triangular de orden superior, que ocurre cuando los elementos que están por debajo de la diagonal son equivalentes a 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 20 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz triangular orden inferior se presenta cuando los elementos que están por encima de la diagonal son equivalentes a 0.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga sobre las matrices triangulares y simétricas y elabora un análisis.

## 2.5 MATRICES INVERSAS Y TRANSPUESTAS

Considera la matriz A: la inversa de dicha matriz está representada por la matriz:

$$A^{-1}$$

es decir:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A$$

donde el producto da como resultado:

$$A * A^{-1} = I$$

la matriz  $I$  que representa el producto de la matriz inicial por su inversa. Por lo tanto la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^T$$

donde solamente las matrices cuadradas cuyo determinante es distinto de cero, tendrán inversa.

La matriz transpuesta es aquella que se obtiene al cambiar las filas por las columnas. La transpuesta de la matriz A se representa por  $A^T$ , ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

es igual a la matriz transpuesta:

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Analiza las matrices inversas y transpuestas.

### 2.6 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan a diario en las ramas de la ingeniería, en aplicaciones matemáticas de economía, administración y hasta en las ciencias sociales.

Una ecuación lineal es aquella que puede escribirse de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde el coeficiente  $a_i$  y  $b$ , son números reales o complejos, que son conocidos.

Considere la ecuación:

$$x + 3y = 9$$

denominada ecuación lineal, que en el plano  $xy$ , representa una línea. Sobre el mismo plano considere la siguiente ecuación lineal:

$$-2x + y = -4$$

se requiere una solución para estas dos ecuaciones, al escribirlas de la forma:

$$x + 3y = 9$$

$$-2x + y = -4$$

tenemos lo que se denomina sistema de ecuaciones. Para determinar la solución del sistema de ecuaciones, es importante considerar que tiene tres posibilidades, ya sea que haya una solución, que no haya ninguna o que exista un número indeterminado de soluciones.

Una solución de un sistema de ecuaciones es aquella que al sustituir los valores en la ecuación lineal, da afirmación de que es verdadera, por ejemplo, al anterior sistema de ecuaciones una solución es que  $x=3$  y  $y=2$ . Al sustituir los valores en cada ecuación, se tiene que:

$$3 + 3(2) = 9$$

$$9 = 9$$

$$-2(3) + 2 = -4$$

$$-4 = -4$$

donde se afirma que  $x=3$  y  $y=2$ , son la solución del sistema de ecuaciones.

La relación que tienen los sistemas de ecuaciones con las matrices es que se pueden representar en notación matricial, retomando el ejemplo de nuestro sistema de ecuaciones que se denota como:

$$x + 3y = 9$$

$$-2x + y = -4$$

Al Tomar los coeficientes de cada variable y alinearlos en columnas, la matriz resultante se denomina matriz coeficiente y se escribe de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

note que se obtuvo una matriz de tipo cuadrada de  $n \times n$ .

Hay que considerar también los números constantes, que son el resultado de cada ecuación del sistema de ecuaciones y dan paso a la matriz aumentada, quedando denotada como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

donde la matriz ha pasado de ser una matriz de  $n \times n$  a una matriz de  $m \times n$ ; en los sistemas de ecuaciones no se establece de forma arbitraria el número de filas y columnas que obtiene al expresarlo en notación matricial, debido a que en número de ecuaciones que intervienen en un sistema depende del fenómeno de estudio.

La finalidad de la notación matricial es simplificar el cálculo de los sistemas de ecuaciones.

## 2.7 MÉTODO DE GAUSS JORDAN

En ocasiones, los sistemas de ecuaciones lineales no son de  $n$  ecuaciones con  $n$  variables que tengan una solución única. El método de Gauss–Jordan consiste en encontrar matrices e inversas obteniendo soluciones mediante la reducción de otro sistema equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior, y da como resultado la matriz escalonada.

El método de Gauss-Jordan tiene un algoritmo de solución:

- a) Escribir la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
- b) A partir de la matriz aumentada y usando operaciones elementales en los renglones obtener la forma escalonada reducida. Esto se lleva a cabo creando, columna por columna, empezando con la primera columna, los unos principales y después los cero sobre y debajo de cada uno principal.
- c) Escribir el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida. Este sistema da la solución.<sup>2</sup>

Tomando como ejemplo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

---

<sup>2</sup> Williams, Gareth. *Algebra lineal con aplicaciones*, 2005.



aplicaremos la solución utilizando el método de Gauss-Jordan. En este caso el elemento inicial denominado pivote está ocupado por un cero; es necesario intercambiar los renglones para tener un número distinto que servirá como pivote, así que el sistema de ecuaciones queda denotado como:

$$\begin{matrix} \approx \\ R1 \leftrightarrow R2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Observación para el estudiante: la simbología

$$\begin{matrix} \approx \\ R1 \leftrightarrow R2 \end{matrix}$$

representa el cambio posición del renglón uno  $R1$  por el renglón dos  $R2$  del sistema de ecuaciones y el símbolo  $\approx$  significa casi igual, y esto es porque se modifica el sistema de ecuaciones inicial que se nos había dado.

Ahora que el elemento de la posición 1,1 (renglón columna) es el número 3 y se llama pivote, este es nuestro primer paso de la solución y es necesario que ese 3 pase a ser 1, que sería el segundo paso. Para conseguir dicho propósito es necesario multiplicar el renglón uno por:

$$\frac{1}{\text{pivote}}$$

que en nuestro caso sería:

$$\frac{1}{3}$$

obteniendo la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} \approx \\ \left(\frac{1}{3}\right)R1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

es necesario crear ceros en todas las demás posiciones de la columna pivote, sumando múltiplos adecuados del renglón pivote a todos los demás renglones de la matriz, como cuarto paso, para que la matriz tome la siguiente forma:

$$R3 + (-4)R1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

El cuarto paso consiste en cubrir el renglón pivote y todos los renglones arriba de él, es necesario volver a interactuar con los pasos 1 y 2 con la parte restante de la matriz para poder alcanzar la parte escalonada de ésta, así que de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

sería la primera columna distinta de cero de la submatriz, y cuando tomamos como pivote el elemento 2 de la segunda fila, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)R2 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ahora, sumando:

$$\begin{matrix} R1 + R2 \\ R3 + (-2)R2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

con los nuevos elementos formados en la submatriz, tomamos la siguiente columna que es distinta de cero y el elemento 1 para volver a interactuar, es decir, de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

para obtener:

$$\begin{array}{l} \approx \\ R1 + (-2)R3 \\ R2 + R3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

La matriz resultante es de la forma escalonada reducida por la matriz dada.

## 2.8 MÉTODO DE CRAMER CON FACTORES

Para calcular un sistema de ecuaciones de acuerdo con el método de Cramer se requiere:

- Obtener la matriz inicial de la forma ampliada, es decir, que contenga los coeficientes independientes de las ecuaciones lineales.
- Calcular el determinante de la matriz.
- Aplicar la regla de Cramer que consiste en ir sustituyendo la primera columna del determinante de la matriz por los términos independientes, dividir el resultado de este determinante entre el determinante inicial para hallar el valor de la primera incógnita.
- Seguir sustituyendo los términos independientes en las distintas columnas para hallar el resto de las incógnitas.

Tomando como referencia el siguiente sistema de ecuaciones lineales aplicaremos el método de Cramer, sea el sistema de ecuaciones:

$$3x - 2y = 1$$

$$x + 5y = 3$$

Se requiere encontrar el valor de las variables  $x$  y  $y$ , y de acuerdo con lo antes expuesto, el primer paso consiste en encontrar la matriz ampliada denotando como:

$$A|b = \begin{array}{ccc} x & y & b \\ \hline 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}$$

Note que a la matriz ampliada, en la parte superior se le han hecho las anotaciones sobre la columna correspondiente de cada variable; es necesario ahora calcular el valor absoluto de la matriz, para obtener el determinante  $\det(A)$ , que se denota como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 15 + 2$$

$$\det(A) = 17$$

Una vez obtenido el determinante hay que calcular las incógnitas. Calculemos  $x$  que estará denotada por:

$$x = \frac{\begin{array}{cc} b & y \\ \hline 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{array}}{17}$$

$$x = \frac{5 + 6}{17}$$

$$x = \frac{11}{17}$$

Ahora calculamos  $y$  y tenemos:

$$y = \frac{\begin{matrix} x & b \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{matrix}}{17}$$

$$y = \frac{9 - 1}{17}$$

$$y = \frac{8}{17}$$

que es la solución que se puede comprobar en el sistema de ecuaciones lineales.

## 2.9 MÉTODO DE LA INVERSA

Una matriz  $A$  de  $n$  columnas por  $n$  filas, es decir,  $n \times n$ , si se multiplica por una matriz  $B$  de  $n$  columnas por  $m$  filas, el producto de la matriz  $A$  por la matriz  $B$  se denota como  $AB=BA=I_n$ , donde el orden de los factores no altera el producto; siempre y cuando el número de columnas y filas en la matriz  $A$  sean de una matriz cuadrada y que la matriz  $B$  no sea cuadrada. Entonces se dice que la matriz  $A$  es *invertible*, y que  $B$  es la inversa de  $A$ . Caso contrario si no existe  $B$ , entonces  $A$  no tiene matriz inversa.

Como ejemplo demostraremos que la matriz  $A$  denotada como:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

tiene como inversa la matriz  $B$  que está denotada por:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Al desarrollar el producto de la matriz  $A$  por  $B$ , se tiene:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

donde

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Por lo tanto  $AB=BA=I_n$ , con lo que se demuestra que  $A$  tiene como inversa la matriz  $B$ .

Es sabido que para todo número real puede haber como máximo un número inverso, con ésta demostración se comprueba que para las matrices también se aplica esta regla.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga sobre el método de la inversa y elabora un resumen.

### 2.10 MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

El método de Gauss-Seidel es más pulido que el método de Jacobi, que con frecuencia ofrece una convergencia más rápida hacia el resultado, ya que el último valor encontrado de cada variable es el que se sustituye en cada paso del proceso iterativo. Al igual que el método de Jacobi, éste sólo es aplicable en las matrices cuyos elementos que están implicados en la diagonal, dominan a los demás elementos.

En el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$6x + 2y - z = 4$$

$$x + 5y + z = 3$$

$$2x + y + 4z = 27$$

al despejar una variable por cada ecuación se tiene:

$$x = \frac{4 - 2y + z}{6}$$

$$y = \frac{3 - x - z}{5}$$

$$z = \frac{27 - 2x - y}{4}$$

Se toman como valores iniciales:

$$x^{(0)} = 1, y^{(0)} = 1, z^{(0)} = 1$$

Al sustituir los últimos valores en el sistema de ecuaciones lineales que ya cuenta con sus variables respectivas despejadas, se denota como:

$$x^{(1)} = \frac{4 - 2y^{(0)} + z^{(0)}}{6} = 0.5$$

$$y^{(1)} = \frac{3 - x^{(1)} - z^{(0)}}{5} = 0.3$$

$$z^{(1)} = \frac{27 - 2x^{(1)} - y^{(1)}}{4} = 6.4250$$

Observe que en  $x^1$  se utilizan los valores de  $y^0$  y  $z^0$ , en la ecuación  $y^1$  se utilizan los valores de  $x^1$  y  $z^0$ , para la ecuación  $z^1$  se aplican los valores obtenidos en  $x^1$  y  $y^1$ , al volver a interactuar el sistema de ecuaciones se denota como:

$$x^{(2)} = \frac{4 - 2y^{(1)} + z^{(1)}}{6} = 1.6375$$

$$y^{(2)} = \frac{3 - x^{(2)} - z^{(1)}}{5} = -1.0125$$

$$z^{(2)} = \frac{27 - 2x^{(2)} - y^{(2)}}{4} = 6.1844$$

Aplicando este método iterativo cuatro veces más, los valores tienden a aproximarse a:

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 6$$

que es la solución del sistema de ecuaciones.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga sobre el método de GaussSeidel y elabora un resumen.

### 2.11 MÉTODO DE JACOBI

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$6x + 2y - z = 4$$

$$x + 5y + z = 3$$

$$2x + y + 4z = 27$$

Y despejando la variable x de la primera ecuación, y de la segunda ecuación y z de la tercera ecuación del sistema de ecuaciones lineales inicial, tenemos:

$$x = \frac{4 - 2y + z}{6}$$

$$y = \frac{3 - x - z}{5}$$



$$z = \frac{27 - 2x - y}{4}$$

Por tratarse de métodos iterativos, para llegar a la solución es necesario dar un primer resultado sólo por estimación, por ejemplo  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=1$ ; aquí la precisión afecta sólo a la rapidez con que se llega a un buen acercamiento de la solución. Los valores iniciales de este proceso se denotan por:

$$x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 1, \quad z^{(0)} = 1$$

Y al sustituir estos valores en los despejes que se realizaron en el sistema de ecuaciones; se obtienen estos valores:

$$x^{(1)} = 0.5, \quad y^{(1)} = 0.2, \quad z^{(1)} = 6$$

Estos nuevos valores los volvemos a sustituir en los despejes que se realizaron en el sistema de ecuaciones y se obtienen estos otros:

$$x^{(2)} = 1.6, \quad y^{(2)} = -0.7, \quad z^{(2)} = 6.45$$

y así se continúan un par más de interacciones para llegar a la solución de que:

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 6$$

De lo que se puede concluir, entonces, que en un sistema  $n$  ecuaciones con  $n$  variables cuya matriz de coeficientes  $A$  es una matriz cuadrada, que el valor absoluto del elemento diagonal de cada renglón es mayor que la suma de los valores absolutos de los demás elementos del renglón, por lo que el sistema tiene una solución única. El método de Jacobi convergerá hacia la solución, sin importar cuales sean los valores iniciales.

Retomando el ejemplo anterior, la matriz de coeficientes era igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

por inspección se comprueba la conclusión dada, ya que para la primera fila el elemento de la diagonal tiene un valor absoluto de 6 y la suma de los demás elementos de la fila es 3, por lo que en el primer renglón se cumple; en el caso del segundo renglón, el valor absoluto del elemento dentro de la diagonal es 5, y el de la suma de los demás elementos de la segunda fila es 2; en el tercer renglón, 4 es el valor de la diagonal y el valor absoluto de la suma de los demás elementos del renglón es 3, por lo que se también cumple.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investiga todo lo relacionado con el método de Jacobi y elabora un análisis.

## AUTOEVALUACIÓN

Subraye la respuesta que a su criterio considere correcta:

1. Una matriz es un arreglo rectangular de números, debido a:
  - a) que en su estructura cuenta con números en filas y columnas.
  - b) la estructura gráfica por contar con filas y por columnas.
  - c) dichos números se consideran como elementos de la matriz.
  
2. Los elementos contenidos dentro de la matriz cuentan con un doble índice que prácticamente sirve para:
  - a) identificar el elemento y que no se duplique.
  - b) indicar el espacio de ubicación de dicho elemento.
  - c) señalar a qué columna pertenece.
  
3. Por definición, una matriz se considera de  $m \times n$ . De acuerdo con esta definición, cuando se da el caso de que  $m > 1$  y  $n = 1$ , qué nombre recibe:
  - a) matriz  $n \times n$ .
  - b) vector columna.
  - c) vector fila.
  
4. Por definición, una matriz se considera de  $m \times n$ . De acuerdo con esta definición, cuando se da el caso de que  $m = 1$  y  $n > 1$ , qué nombre recibe:
  - a) matriz  $n \times n$ .
  - b) vector columna.
  - c) vector fila.
  
5. Sean las matrices  $A = [1, 4, 7; 0, -2, 3]$  y  $B = [2, 5, -6; -3, 1, 8]$  el producto de la suma es igual a:
  - a)  $A+B = [3, 9, 1; 3, 1, 11]$
  - b)  $A+B = [3, 9, 1; -3, -1, 11]$
  - c)  $A+B = [3, 9, -1; 3, -1, 11]$

6. Sean las matrices  $C=[1,4,7; 0,-2,3]$  y  $D=[2, 5 -6; -3, 1, 8]$  el producto de la resta es igual a:

a)  $A-B=[1, -5, 10; 3, -1, 11]$

b)  $A-B=[1, -5, 15; 3, -3, 11]$

c)  $A-B=[1, -5, 13; 3, -3, -5]$

## RESPUESTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. b) la estructura gráfica por contar con filas y por columnas.
2. b) indicar el espacio de ubicación de dicho elemento.
3. b) vector columna.
4. c) vector fila.
5. b)  $A+B=[3,9,1; -3, -1, 11]$
6. c)  $A-B=[1, -5, 13; 3, -3, -5]$

## UNIDAD 3

### SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES CON UNA VARIABLE

#### OBJETIVO

Aplicar diversos métodos numéricos para obtener soluciones numéricas en ecuaciones con una variable.

#### TEMARIO

3.1 POR INTERVALO

3.2 MÉTODO DE BISECCIÓN

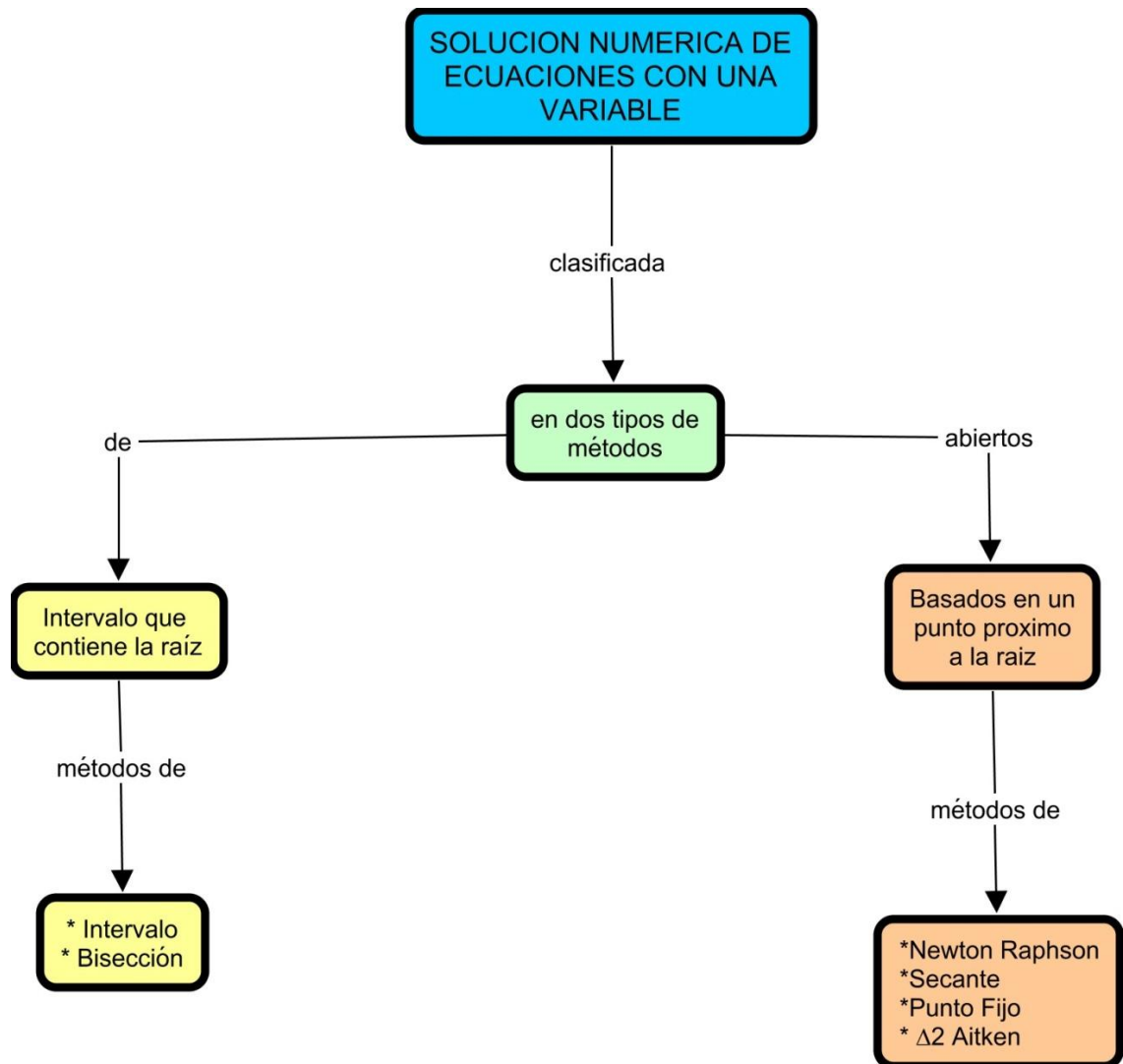
3.3 MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

3.4 MÉTODO DE LA SECANTE

3.5 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PUNTO FIJO

3.6 MÉTODO DE  $\Delta^2$  AITKEN

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

En esta unidad el alumno aprenderá diversos métodos numéricos para la solución de ecuaciones que dependen de una sola variable.

Los métodos que en este apartado se analizan, se clasifican en dos variantes: los métodos cerrados, que son aquellos que están limitados por un rango, y los métodos abiertos que se basan en un punto definido.

La iteración de las matemáticas con la elaboración de programas que ayuden a resolver estos diversos métodos, tienen la finalidad de que el alumno adquiera capacidad analítica para resolver problemas complejos.

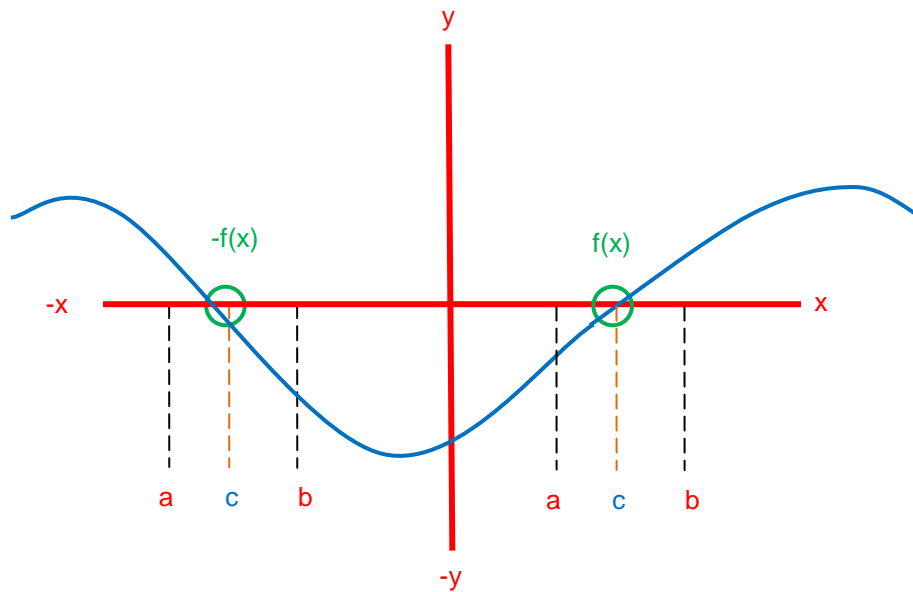


### 3.1 POR INTERVALO

En las soluciones de ecuaciones no lineales se utilizan métodos iterativos que dan como resultado una sucesión de valores que son iguales a valores de raíz; los métodos de intervalo son utilizados para alcanzar un resultado deseado donde se satisface una función.

Los métodos por intervalo aplican la propiedad del teorema de Bolzano, el cual afirma que si una función es continua en un intervalo cerrado, en cada uno de sus extremos dicha función tomará valores con signos opuestos, lo cual da como conclusión que, por lo menos, existe una raíz dentro del intervalo de la función.

Retomando el concepto de segmento de recta, definido por dos puntos que interceptan a la recta y que contienen puntos dentro de la amplitud intervalo que forman, se establece la condición de que existe un número que satisface cierta función.



Este gráfico representa la onda senoidal de una señal analógica que representa la oscilación de onda que forma la señal al propagarse, al ser representada sobre el plano y centrarse en el eje  $x$  e interceptada en su trayectoria por dos puntos  $[a,b]$ , existe un punto  $c$  donde se ubica la raíz que

satisface la función  $f(x)=0$ , en donde la función  $f(x)$  en determinado momento del trayecto cambia de valor negativo a positivo.

### 3.2 MÉTODO DE BISECCIÓN

El método de bisección es uno de los más sencillos de analizar para la solución numérica de ecuaciones con una variable.

Este método está basado en el teorema de valor intermedio propiedad de las funciones continuas, es decir, de aquella función que, al graficarla, la curva o línea que forme es continua, por lo tanto si una función es continua en un intervalo, toma los valores comprendidos entre los extremos.

El reflejo del intervalo es otro intervalo, es decir, una función  $f$  continua en el intervalo  $[a,b]$ , que al tomar los valores  $f(a)$  y  $f(b)$  sean de signo diferentes y existe un punto  $c$ , es decir  $a < c < b$ , tal que  $f(c)=0$ , siendo igual para los casos en que  $f(a) < f(b)$  o  $f(a) > f(b)$ .

Para aplicar el método de bisección, suponga que el punto intermedio de  $[a,b]$  es  $c$  y que  $a$  y  $b$ , se representen como  $a_1$  y  $b_1$ , tenemos entonces:

$$c_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}$$

siendo igual a:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Si  $f(c_1)=0$ , entonces  $c=c_1$ ; si no se cumple, entonces  $f(c_1)$  es del mismo signo que  $f(a_1)$  o de  $f(b_1)$ ; si  $f(c_1)$  y  $f(a_1)$  son de igual signo, entonces:

$$p \in (p_1, b_1)$$

y si  $a_2=p_1$ ,  $b_2=b_1$ , en el caso de que  $f(c_1)$  y  $f(b_1)$  sean de signo contrario, entonces:

$$p \in (a_1, p_1)$$

y  $a_2=a_1$ ,  $b_2=p_1$ , en cualquiera de estos casos se obtiene un nuevo intervalo denotado por  $[a_2, b_2]$ , siendo que la solución está dentro de un intervalo más pequeño que el inicial, a este nuevo intervalo es necesario aplicarle de forma iterativa el método de bisección para ir acotando la solución de la ecuación.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de Bisección.

### 3.3 MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

El método de Newton Rapshon es de tipo abierto, a diferencia del método de bisección el cual es considerado dentro de los acotados.

Este método inquiere la solución de ecuaciones de una variable en donde se buscan las raíces  $f(x)=0$  de una función real. El método de Newton Raphson converge de forma rápida hacia la solución, y en ocasiones diverge debido a que no se basa en intervalos.

El método de Newton Raphson consiste en iniciar con un valor próximo a cero, el cual suele llamarse punto inicial.

Suponga que:

$$f \in C^2[a, b]$$

sea:

$$\bar{x} \in [a, b]$$

una aproximación de  $p$  tal que:

$$f'(\bar{x}) \neq 0$$

y la diferencia de:

$$|p - \bar{x}|$$

sea mínima. Tomando de referencia el polinomio de Taylor:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x))$$

la función  $\xi(x)$  está entre  $x$  y  $\bar{x}$ . Debido a que  $f(p)=0$ , es decir  $x=p$ , se obtiene

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p))$$

es necesario derivar, pero considerando que  $|p - \bar{x}|$  es mínima la diferencia, entonces  $|p - \bar{x}|^2$  es doblemente menor, por tanto:

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x})$$

despejando la variable  $p$ , la ecuación anterior obtenida queda escrita como:

$$p \approx \bar{x} + \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Aplicando el valor inicial que se considera en el método de Newton Raphson se tiene que  $p_0$  genera la sucesión:

$$p_n = p_{n-1} + \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{para } n \geq 1$$

No hay que omitir que el método de Newton Raphson puede ser abordado de forma geométrica, derivando y por polinomios de Taylor que fue lo que se expuso en este apartado.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de integración de Newton Raphson.

### 3.4 MÉTODO DE LA SECANTE

El método de la secante es una variante del método de Newton Raphson, y a diferencia del método de bisección, éste es un método abierto.

El método de la secante, a diferencia del método de Newton Raphson, no requiere conocer la primera derivada para poder aplicar el método de solución, el método de la secante estima la tangente, lo que se conoce como la pendiente de la recta, representada por:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

al sustituir esta ecuación se sustituye en la ecuación del método de Newton Raphson:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)$$

Para evitar la derivada como en el caso del método de Newton Raphson, se considera una aproximación a la derivada de la recta que pasa por los valores de dos iteraciones sucesivas, ya que este método requiere de dos aproximaciones iniciales de la raíz para poder obtener una pendiente inicial.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de la Secante.

### 3.5 MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE PUNTO FIJO

El método de punto fijo es de tipo abierto y consiste en considerar un punto de solución de una ecuación en la que se contiene la raíz.

Suponga la ecuación dada por:

$$f(x) = 0$$

para predecir la raíz es necesario que la ecuación sea del tipo:

$$g(x) = x$$

entonces la ecuación inicial nos quedaría del tipo:

$$x = f(x)$$

para llegar a este despeje, se retoman los principios del álgebra ya sea agregando en ambos miembros de la ecuación la variable  $x$ , o despejando el término  $x$  que es de primer grado. Con esta ecuación es posible predecir un nuevo valor para  $x$  en la función, con una aproximación a la raíz por medio de un sólo punto, de ahí el nombre del método.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de integración de punto fijo.

### 3.6 MÉTODO DE $\Delta^2$ AITKEN

El método de  $\Delta^2$  Aitken, también conocido como método de convergencia cuadrática, se aplica a incrementar la convergencia de una sucesión que sea linealmente convergente.

Suponga la sucesión:

$$g = (g_n)$$

en donde  $n$  pertenece a los números reales, se calcula la sucesión de  $g$  con incremento, es decir:

$$\hat{g} = (\hat{g}_n)$$

quedando denotado en su definición como:

$$\hat{g}_{n+2} = g_{n+2} - \frac{(g_{n+2} - g_{n+1})^2}{g_{n+2} - 2g_{n+1} + g_n}$$

Al aplicar el operador de incremento la ecuación se escribe como:

$$\hat{g}_{n+2} = g_{n+2} - \frac{(\Delta g_{n+1})^2}{\Delta^2 g_n}$$

## AUTOEVALUACIÓN

Subraye la respuesta que a su criterio considere correcta:

1. El teorema de Bolzano afirma que si una función es:
  - a) continua en un intervalo cerrado, cada extremo tomará valores con signos opuestos.
  - b) continua en un intervalo cerrado, dentro de los extremos existen valores continuos.
  - c) discontinua en un intervalo, por lo menos existe una raíz.
  
2. Cuando una función es continua en un intervalo, se dice que toma:
  - a) los valores de los extremos para evaluar la función.
  - b) los valores que están entre los extremos para evaluar la función.
  - c) los valores de los extremos para evaluar la función y comprobar su continuidad.
  
3. Este método busca la solución de ecuaciones de una variable en donde se buscan las raíces  $f(x)=0$  de una función real:
  - a) método de Bisección.
  - b) método de Newton Raphson.
  - c) método de la secante.
  
4. Este método es una variante del método de Newton Raphson siendo un método de tipo abierto:
  - a) método de Bisección.
  - b) método de Newton Raphson.
  - c) método de la secante.



5. Método utilizado para a incrementar la convergencia de una sucesión que sea linealmente convergente:

- a) método de punto fijo.
- b) método de Newton Raphson.
- c) método de la Aitken.

6. Es un método de tipo abierto que consiste en considerar un punto de solución de una ecuación en la que se contiene la raíz:

- a) método de punto fijo.
- b) método de Newton Raphson.
- c) método de la Aitken.

## RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

1. a) continua en un intervalo cerrado, cada extremo tomará valores con signos opuestos.
2. b) los valores que están entre los extremos para evaluar la función.
3. b) método de Newton Raphson.
4. c) método de la secante.
5. c) método de la Aitken.
6. a). método de punto fijo.

## UNIDAD 4

### DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

#### OBJETIVO

Examinar diversos métodos que se aplican en la diferenciación e integración numérica.

#### TEMARIO

##### 4.1 INTRODUCCIÓN

##### 4.2 USO DEL DESARROLLO DE TAYLOR

##### 4.3 ALGORITMO GENÉRICO PARA OBTENER UNA APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS

##### 4.4 USOS DE LOS OPERADORES DE DIFERENCIAS

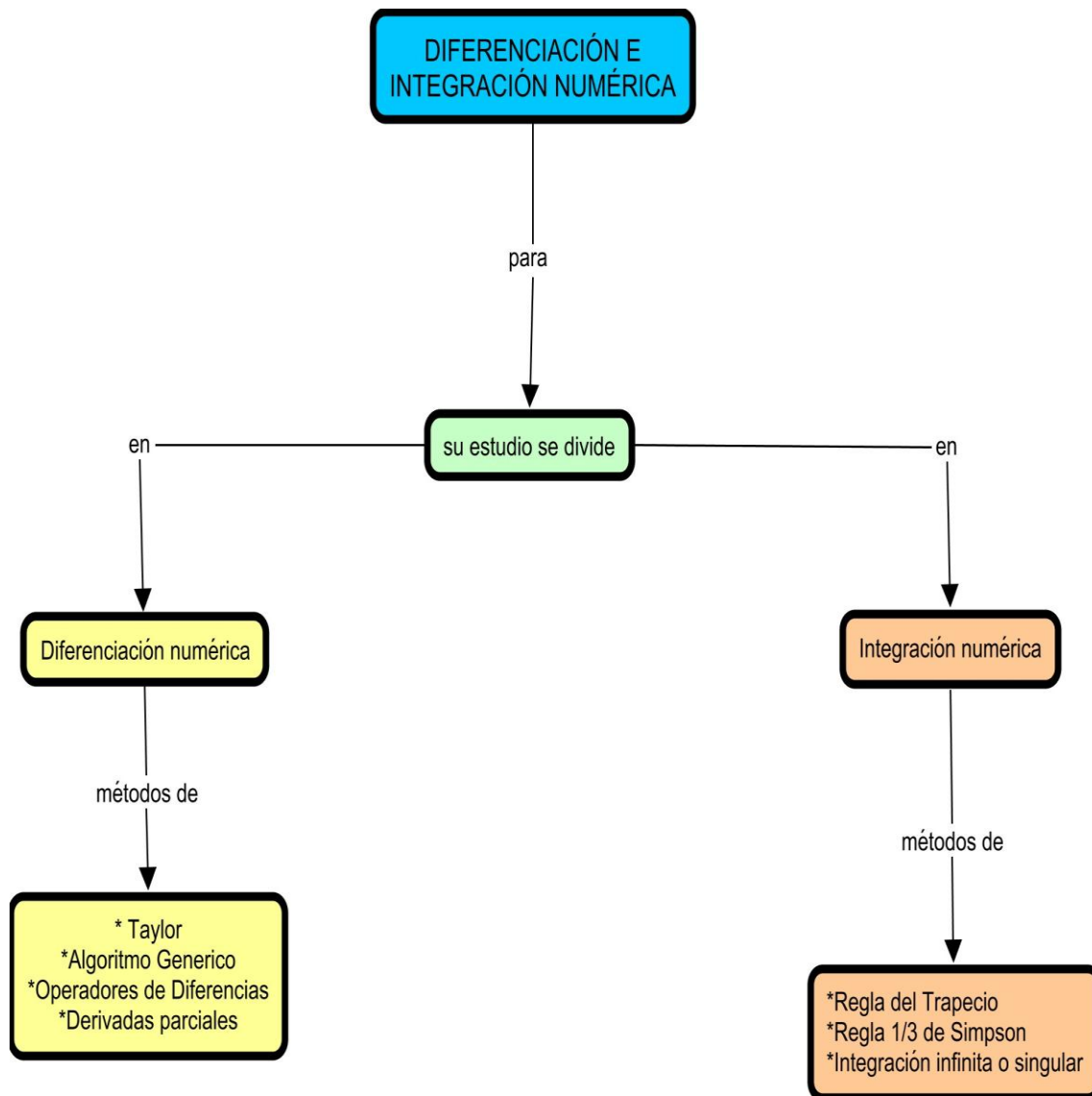
##### 4.5 APROXIMACIÓN DE DERIVADAS PARCIALES POR DIFERENCIAS

##### 4.6 REGLA DEL TRAPECIO

##### 4.7 REGLA 1/3 DE SIMPSON

##### 4.8 INTEGRACIÓN NUMÉRICA CON LIMITES INFINITOS O SINGULARIDADES

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

En esta unidad el alumno reforzará los conceptos de diferenciación e integración numérica, estudiará diversos métodos aplicables a estos dos procesos que convergen en soluciones numéricas.

Los métodos que este apartado analiza, están de acuerdo con el tipo de operación que se aplique en alguna función, ya sea derivación o integración.

La iteración de las matemáticas que ofrecen estos métodos de integración y derivación como procesos inversos uno del otro con la elaboración de programas computacionales, requieren que el alumno ponga en práctica su capacidad analítica para poder elaborar algoritmos que le ayuden a resolver dichos métodos y después trasladarlos al lenguaje de programación.

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

La diferenciación y la integración numérica son dos procesos inversos uno del otro, en aritmética, tomando como referencia que para la suma el proceso inverso es la resta, para la multiplicación es la división, y para la integración numérica es la derivación numérica o viceversa, según las circunstancias con que se presentan los problemas numéricos a resolver.

La diferenciación numérica se puede explicar de manera sencilla como aquella función donde, dado un punto  $x_n$  existe un punto próximo o cercano denominado  $x_{n+1}$  el cual tiene una diferencia pequeña de aproximación del punto inicial.

Es decir, que para un punto  $x$  existe una función  $f(x)$  que satisface una ecuación:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

donde  $h = x_{n+1}$  que equivale a la diferencia pequeña que hay entre este punto y el punto  $x$ .

La integral definida o antiderivada de una función equivale al proceso contrario de la derivación, y el método básico involucrado para aproximar cualquier función a su integral se conoce cuadratura numérica.

Los métodos de integración numérica se pueden utilizar para integrar funciones por medio de tablas o de manera analítica, la integración numérica puede obtenerse de forma rápida cuando sólo se desea conocer el valor numérico de la integral.

#### 4.2 USO DEL DESARROLLO DE TAYLOR

El desarrollo de Taylor consiste en considerar una función que se encuentre definida en un intervalo, mismo que contiene un punto que puede ser derivado en cualquier orden, es decir:

$$f:(a,b) \rightarrow R$$

donde existe un polinomio  $p(x)$  de grado  $n$  que tiende al límite de la función equivalente a cero:

$$\frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0$$

El polinomio de Taylor se puede expresar como:

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

la diferencia entre la función  $f(x)$  y su polinomio de Taylor hasta el orden  $n$ , basado en punto de partida  $x_0$ , se define como:

$$r_n(f, x_0)(x) = f(x) - T_n(f, x_0)(x)$$

#### 4.3 ALGORITMO GENÉRICO PARA OBTENER UNA APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS

El algoritmo genérico para obtener una aproximación por diferencias permite evaluar la derivada de cualquier orden en un punto determinado, de forma general, para obtener las fórmulas de aproximación por diferencias de cierta derivada de orden  $n$ , establecida en un número de puntos  $m$  que depende de la precisión que se busca.

Sea el punto  $m$  considerado en un intervalo equivalente a:

$$i = \alpha, \beta, \dots, \lambda$$

Donde:

$$m \geq n + 1$$

y  $n$  el orden de la derivada, considerando las abscisas de los puntos:

$$x_i = \alpha h, \beta h, \dots, \lambda h$$

con:

$$i = \alpha, \beta, \dots, \lambda$$

Se concluye que la aproximación por diferencias de la derivada de orden  $n$  con  $m$  puntos, queda expresada como:

$$f_0^n = \frac{a_1 f_\alpha + a_2 f_\beta + \dots + a_m f_\lambda}{h^n} + E$$

donde, desde la serie  $a_\alpha = a_0$  hasta  $a_\lambda = a_{m-1}$  equivalen a los coeficientes indeterminados de  $m$  y:

$$f_\alpha = f(x_\alpha), \quad f_\beta = f(x_\beta)$$

equivale a las coordenadas que se utilizan en este método y el término  $E$  equivale al máximo orden posible.

#### 4.4 USOS DE LOS OPERADORES DE DIFERENCIAS

El uso de los operadores de diferencias se utiliza cuando no se puede dar una solución numérica por el polinomio de Taylor. Este método consiste en construir nuevos puntos a partir de conocer un conjunto de puntos que se encuentran dentro del intervalo de solución, y también se conoce como método de interpolación.

Suponga que se desea encontrar un polinomio de primer grado que pasa por los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  para aproximar a una función  $f$ , para la que  $f(x_0)=y_0$  y  $f(x_1)=y_1$  por lo que obtenemos las funciones:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

y



$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

por lo tanto:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

Como:

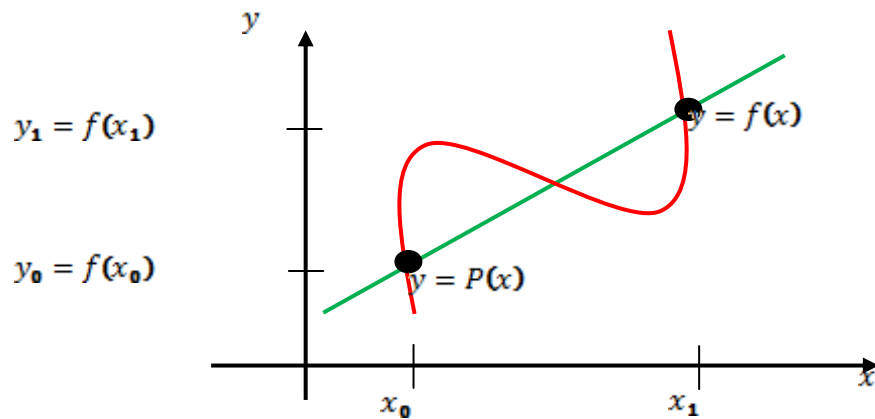
$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1$$

se tiene que:

$$P(x_0) = 1 * f(x_0) + 0 * f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 * f(x_0) + 1 * f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

de acuerdo con estos datos, se determina que  $p$  es la única función lineal que pasa  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ , como se muestra en la siguiente grafica:



## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Investigue sobre el uso de los operadores de diferencias y elabore un análisis.

#### 4.5 APROXIMACIÓN DE DERIVADAS PARCIALES POR DIFERENCIAS

El método de aproximación de derivadas parciales por diferencias consiste en que, dada una función que contiene varias variables independientes, se debe calcular la derivada parcial de cada una de esas variables.

Para el caso de la diferenciación numérica, la derivada de una función mide la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente para acercarse de manera rápida a la solución que satisfaga alguna función determinada.

Suponga una función que contiene dos variables  $x$  y  $y$ , donde se requiere medir su comportamiento cuando cambia en  $y$  y  $x$  mantiene el valor inicial, y la otra cuando cambia la variable  $x$  y  $y$  conserva el valor inicial.

Dejemos variar a la variable independiente  $x$ , y que la variable independiente  $y$  mantenga su valor inicial para poder llegar a una definición más concreta, suponga que  $y=b$ , en donde  $b$  es una constante; replanteando la función, se dice que ahora es una función de una variable, en este nuevo caso es  $x$ , tomando como referencia cognitiva que:

$$g(x) = f(x, b)$$

Si  $g$  tiene una derivada en  $a$  se denomina derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  en  $(a,b)$ . De forma similar se puede seguir este proceso para la variable  $y$ .

### ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

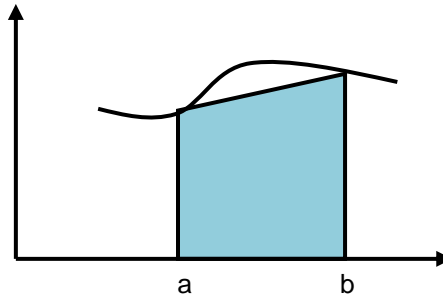
Formule un programa en Matlab que resuelva el método de aproximación de derivadas parciales por diferencias.

#### 4.6 REGLA DEL TRAPECIO

La regla del trapecio consiste en realizar una representación aproximada de una función  $f(x)$  a través de lo que se conoce como polinomio de grado uno  $f_1(x)$ , para que la integración aproximada de la función en  $x$  se determine por:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

Los puntos  $a, b$  evaluados en el polinomio  $f_1$ , geoméricamente generan un trapecio:



El área bajo la curva, es decir, el trapecio, es una aproximación de la integral  $f(x)$ , y empleando triángulos semejantes, se obtiene que:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)(x - a)}$$

Al Integrar la ecuación anterior para encontrar el área bajo la curva, se da paso a la notación matemática siguiente:

$$\int_a^b \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)(x - a)} \right] dx$$

aplicando la integral cuando  $x=a$  y  $x=b$  se tiene:

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{(b - a)(b - a)}$$

que es igual a:

$$I = [f(b) - f(a)] \frac{b + a}{2} + bf(a) - af(b)$$

reduciendo términos, se obtiene la fórmula del trapecio denotada como:

$$I = \frac{(b - a)(f(a) + f(b))}{2}$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva la regla del trapecio.

### 4.7 REGLA 1/3 DE SIMPSON

Para realizar un mejor ajuste de una  $f(x)$  como se analizó en la regla del trapecio, se recurre a una función que presente cierto grado de curvatura, por lo tanto, se requiere de un polinomio de segundo grado  $f_2(x)$  como una mejor aproximación a la función  $f(x)$ .

El cálculo numérico de la integral de la función se denota:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

para obtener la formula general de la regla 1/3 de Simpson:

$$I = \frac{(b - a)(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))}{6}$$

donde:

$$a = x_0$$

$$b = x_2$$

$$x_1 = \frac{(b + a)}{2}$$

de estos términos se da el nombre de regla 1/3 de Simpson.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva la regla 1/3 de Simpson.

### 4.8 INTEGRACIÓN NUMÉRICA CON LÍMITES INFINITOS O SINGULARIDADES

La integración numérica con límites infinitos determina que una función es integrable si en un dominio infinito diferente a cero existe una solución que satisface a dicha función.

Es necesario evaluar la función en un intervalo real, es decir:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

para sustituir los límites de integración por límites finitos:

$$I = \int_{-c}^{+c} f(x) dx$$

donde c es un valor diferente a cero y su valor fuera del intervalo  $(-c, c)$  es insignificante.

Es recomendable que este tipo de integración numérica se apoye en otros métodos de solución numérica, como la regla del trapecio o la de 1/3 de Simpson.

La integración numérica con singularidades consiste en que, dada una función  $f(x)$  que presente singularidad en  $a$  o  $b$ , la integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

se requiere realizar un cambio de dominio del intervalo finito  $[a, b]$  a un intervalo de tipo  $(-\infty, \infty)$  a través de una transformación de variables.

## AUTOEVALUACIÓN

Subraye la respuesta que a su criterio considere correcta:

1. Se conoce como cuadratura numérica:

- a) la integración.
- b) la derivación.
- c) análisis numérico.

2. Consiste en considerar una función que se encuentre definida en un intervalo, mismo que contiene un punto que puede ser derivado en cualquier orden:

- a) algoritmo genérico.
- b) desarrollo de Taylor.
- c) operadores de integración.

3. Permite evaluar la derivada de cualquier orden en un punto determinado, de forma general:

- a) algoritmo genérico.
- b) desarrollo de Taylor.
- c) operadores de integración.

4. Se utiliza cuando no se puede dar una solución numérica por el polinomio de Taylor:

- a) algoritmo genérico.
- b) desarrollo de Taylor.
- c) operadores de integración.

5. El método de aproximación por diferencias consiste en:

- a) que dada una función que contiene varias variables, tomar sólo una de ellas para hallar la solución.

- b) que dada una función que contiene varias variables independientes, se debe calcular la derivada parcial de cada una de esas variables.
- c) que dada una función que contiene varias variables independientes, evaluar las que se encuentran dentro del intervalo definido.

## RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

1. a) la integración.
2. b) desarrollo de Taylor.
3. a) algoritmo genérico.
4. c) operadores de integración.
5. b) que dada una función que contiene varias variables independientes, se debe calcular la derivada parcial de cada una de esas variables.



## UNIDAD 5

# SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### OBJETIVO

Analizar diversos métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

### TEMARIO

5.1 MÉTODO DE EULER

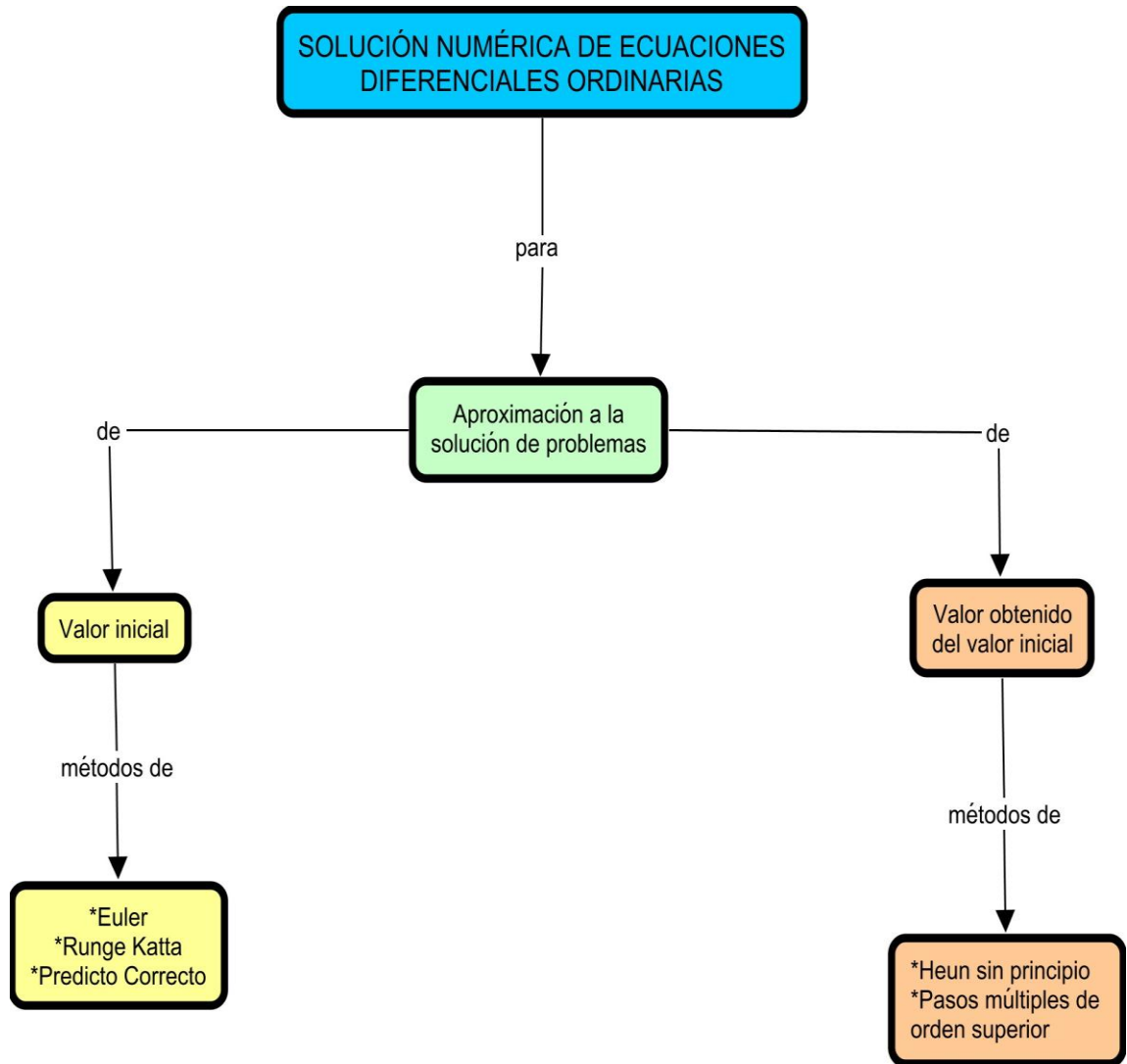
5.2 MÉTODO DE RUNGE KATTA

5.3 MÉTODO PREDICTO CORRECTO

5.4 MÉTODO DE HEUN SIN PRINCIPIO

5.5 MÉTODO DE PASOS MÚLTIPLES DE ORDEN SUPERIOR

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

La solución de ecuaciones diferenciales implica que el alumno de ingeniería cuente con los elementos esenciales del álgebra, cálculo diferencial e integral, álgebra vectorial, es decir, el dominio de las matemáticas aplicables a la ingeniería y el mundo real.

En la materia de métodos numéricos se requiere de esas habilidades cognitivas aplicables a problemas reales, de ahí la importancia de que el alumno tenga la capacidad de plasmar un problema real en un modelo matemático, y que tenga la capacidad de programarlo para hacer más práctica la solución.

En este apartado se abordan métodos que son soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales, que resuelven problemas matemáticos a través de la iteración numérica.

## 5.1 MÉTODO DE EULER

Leonhard Paul Euler fue un matemático que realizó diversas aportaciones a esta rama, principalmente en cálculo y análisis con respecto al estudio de funciones, y en su honor este método lleva su apellido.

El método de Euler tiene la finalidad de obtener aproximaciones de solución de problemas planteados de valor inicial, y es uno de los más simples para aproximarse a la solución de una ecuación. Suponga:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

cuando:

$$a \leq t \leq b$$

y

$$y(a) = \alpha$$

A los elementos que se encuentran dentro del intervalo  $[a, b]$ , se les denomina puntos de red, que son aproximaciones de solución a la función  $y(t)$ . Determinando los puntos de red, se pueden obtener otros puntos del intervalo, ya que se supone que los puntos de red son continuos dentro de dicho intervalo, es decir:

$$t_i = a + ih$$

para cada

$$i = 0, 1, 2, \dots, N$$

El tamaño de paso es un término para describir la distancia común entre los puntos:

$$h = \frac{(b - a)}{N}$$

Para dar una solución a la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

se utiliza el método de Taylor, suponiendo que existe una solución  $y(t)$  con derivadas continuas en el intervalo  $[a, b]$  y para cada  $i=0, 1, 2, \dots, N-1$  obteniendo la siguiente notación:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

para todo número  $\xi$  contenido en  $(t_i, t_{i+1})$ , siempre y cuando  $h=t_{i+1}-t_i$  se tiene:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

debido a que  $y(t)$  es una solución de la ecuación inicial se obtiene:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

De acuerdo al método de Euler:

$$w_i \approx y(t_i)$$

para cada  $i=1, 2, \dots, N-1$  eliminando el término restante se obtiene que:

$$w_0 = \alpha$$

donde:

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

para cada  $i=1,2,\dots,N-1$ , a esta ecuación se le denomina ecuación de diferencias de Euler.

## 5.2 MÉTODO DE RUNGE KUTTA

El método de Runge Kutta deriva del método de Taylor y converge de forma más rápida en la solución que el método de Euler, ya que extiende la idea geométrica de utilizar varias derivadas para aproximarse a la solución de la función.

La formula general del método de Runge Kutta se denota:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$$

para toda  $\Delta y_n$  que cumpla:

$$\Delta y_n = \Phi(t_n, y_n)h$$

que representa la pendiente del intervalo.

De manera general se dice que:

$$\Phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

en donde  $a$  es una constante y la variable  $k$  se define como:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + p_1 h, y_n + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_n + p_2 h, y_n + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$k_n = f(t_n + p_{n-1}h, y_n + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

Aplicando el método de Taylor a  $y_{n+1}$  tomando como referencia  $y_n$  se tiene:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h + \frac{f'(t_n, y_n)}{2!}h^2$$

aplicando la regla de la cadena para derivar  $f(t_n, y_n)$  se denota que:

$$f'(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dt}{dy}$$

al sustituir en la ecuación inicial se escribe como:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h + \left( \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dt}{dy} \right) \frac{h^2}{2!}$$

que al aplicar la serie de Taylor se obtiene que la ecuación de Runge Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \left( \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right)h$$

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de Runge Kutta.

### 5.3 MÉTODO DE PREDICTO CORRECTO

El método de Predicto (predecir) Correcto (corregir) se catalogó como un método multipaso, es decir, iterativo, ya que al pasar de un valor a otro toma en cuenta el valor inicial de la integración para no perder la concordancia del resultado y la aproximación sea más exacta.

Consiste en calcular  $x_{n+1}$  cuando se conocen los valores previos:

$$x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \dots, x_n$$

es decir, empleando una predicción de  $x_{n+1}$ , para después emplear un corrector de  $x_{n+1}$ .

Aplicando el método de predicto correcto al método de Euler a través del método del Trapecio, tenemos:

$$x_{n+1} = x_{n-2} + \frac{4h_n}{3(2x'_n - x'_{n-1} + 2x'_{n-2})}$$

de donde se obtiene:

$$x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{h_n}{3(x'_{n-1} + 4x'_n + x'_{n+1})}$$

#### 5.4 MÉTODO DE HEUN SIN PRINCIPIO

El método Heun sin principio recibe este nombre porque depende de dos puntos anteriores a la variable dependiente o derivada, con lo que cuenta sólo con una condición inicial y falta otro dato para poder interactuar.

El método cuenta con dos fórmulas, que son la predictora:

$$Y_{i+1} = Y_{i-1} + f(X_i, Y_i)2h$$

y la fórmula correctora denotada por:

$$Y_{i+1,j+1} = Y_i + \frac{f(X_i, Y_i) + f(X_{i+1}, Y_{i+1,j})}{2}h$$

Estas dos fórmulas se aplican para poder alcanzar la convergencia hacia el resultado numérico buscado; se requiere aplicar la fórmula predictora para obtener el valor de  $Y_1$  que sería la primera aproximación a la solución.

Ésta primera aproximación de solución pasará como parámetro a la fórmula correctora, siempre que satisfaga la condición siguiente:



$$\left| \frac{Y_{i+1,j+1} - Y_{i+1,j}}{Y_{i+1,j+1}} \right| \leq 1 \times 10^{-4}$$

Una vez que se obtiene  $Y_{i+1,j+1}$  y comprobada con la condición anterior, se requiere repetir el método hasta que el número de interacciones converja con la solución.

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de Heun sin principio.

### 5.5 MÉTODO DE PASOS MÚLTIPLES DE ORDEN SUPERIOR

El método de pasos múltiples de orden superior se diferencia de cualquier otro por requerir más de un paso para poder convergir en la solución. Mientras que en otros métodos se generaba una sucesión en serie de posibles aproximaciones a la solución, en éste los resultados obtenidos de la iteración con la función se evalúan de forma más precisa para que la siguiente iteración converja de forma más rápida en la solución.

Considerando que los problemas que se plantean al estudiante tengan valores iniciales tales, que cumplan con la condición de que:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b]$$

y dada:

$$y(a) = y_0$$

se dice que:

$$y: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

la función tenga una solución en el intervalo y que pertenezca a los números reales.

Al integrar:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  se denota como:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

y queda escrita como:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

Debido a la última denotación hallada, no se puede calcular la integral por polinomio de interpolación, ya que no se conocen los valores exactos de los puntos  $y(x_{i-k}), \dots, y(x_i)$  para aplicarlos en la función  $f(x, y(x))$ , de aquí el nombre de método de pasos múltiples, ya que se puede calcular a través de utilizar los valores de la solución calculada en  $y_{i-k}, \dots, y_i$ .

## ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Formule un programa en Matlab que resuelva el método de pasos múltiples de orden superior.

## AUTOEVALUACIÓN

Subraye la respuesta que a su criterio considere correcta:

1. El método de Euler tiene como finalidad:

- a) obtener soluciones de funciones continuas en determinados intervalos.
- b) obtener aproximaciones de solución de problemas planteados de valor inicial.
- c) obtener soluciones a problemas de valor inicial.

2. El método de Runge Katta es un método que:

- a) deriva del método de Euler para aplicarse en la sucesión de Taylor.
- b) utiliza varias derivadas para aproximarse a la solución de una función.
- c) converge de forma más rápida a la solución que el método de Euler.

3. Método catalogado como multipaso, que toma en cuenta el valor inicial de la integración para no perder la concordancia con el resultado:

- a) método predicho correcto.
- b) método de Runge Katta.
- c) método de Heun.

4. Método que depende de dos puntos previos a la variable dependiente para poder interactuar:

- a) método predicho correcto.
- b) método de Runge Katta.
- c) método de Heun.

## RESPUESTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1. b) obtener aproximaciones de solución de problemas planteados de valor inicial.
2. c) converge de forma más rápida a la solución que el método de Euler.
3. a) método predicto correcto
4. c) método de Heun.

## BIBLIOGRAFÍA

Burden, Richard, *Análisis numérico*, Thompson, México, 2000.

Chapra, Steven, *Métodos numéricos para ingenieros*, McGraw Hill, México, 2003.

Faires, J, Douglas, Richard, *Métodos numéricos*, Thompson, México, 2004.

Grossman, Stanley, *Álgebra lineal*, McGraw Hill, México, 2000.

Mather, John, *Métodos numéricos con Matlab*, Prentice Hall, 2002.

Williams, Gareth, *Álgebra lineal*, McGraw Hill, México, 2005.

## GLOSARIO

**ÁLGEBRA:** Es una rama de las matemáticas que se dedica en sus aspectos más elementales a resolver problemas planteados en forma de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, donde los valores se representan con variables.

**ARITMÉTICA:** Es una rama de las matemáticas que se encarga del estudio básico de los números reales, de las relaciones que ocurren entre ellos y de las técnicas de realización de operaciones básicas; como la suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmos.

**BASE:** Se denomina base de una potencia a la expresión conocida como factor, que es el que repite tantas veces como lo indica el número exponente.

**COEFICIENTE:** Es el número que en las expresiones matemáticas va situado a la izquierda de la incógnita; se representa con una letra o literal. Si el coeficiente es la unidad, se omite.

**CONSTANTE:** Valor de tipo permanente

**DERIVADA:** La derivada de una función es la representación de un valor sobre la pendiente de la recta tangente que cambia su valor.

**ECUACIÓN:** Igualdad entre dos expresiones algebraicas.

**EXPONENTE:** Un exponente es un número que indica cuántas veces debe usarse la base como factor.

**FACTORIZACIÓN:** Es la transformación de una expresión algebraica a otras expresiones más simples en términos matemáticos para expresar sus factores racionales y enteros primos entre sí.

**FUNCIÓN:** Usada en matemáticas para modelar situaciones de la dependencia de una variable sobre otra.

**IGUALDAD:** Expresión matemática que se obtiene del producto de igualar dos cantidades algebraicas que tienen el mismo valor.

**INTEGRACIÓN:** Es la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

**INTERVALO:** Conjunto de números reales comprendidos entre otros dos números reales.

**LÍMITE:** Tendencia de una sucesión o función al acercarse a un valor.

**LOGARITMO:** Se llama logaritmo en base  $a$  del número  $x$  al exponente  $b$  al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

**NÚMERO DECIMAL:** Es la expresión lineal de una fracción ordinaria o decimal que se obtiene al dividir dos números colocados en las posiciones de numerador y denominador.

**NÚMERO NATURAL:** El conjunto de los naturales se denomina con la letra  $N$ , y esta formado por los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cualquier otro número es el resultado de la conujción de estos digitos.

**NÚMERO RACIONAL:** Comprende las cantidades numéricas que se pueden expresar en forma de fracción. El conjunto de los números racionales se denota por la letra  $Q$  e incluye a los números enteros y naturales, que al combinarlos dan expresiones racionales.

**NÚMEROS PRIMOS:** Son aquellos números que sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad, es decir, estos números solamente presentan dos divisores. También son llamados "números primos absolutos" (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31...).

**POTENCIA:** Representación de un producto de factores iguales entre sí.

**RELACIÓN:** Conjunto de pares ordenados.

**TRANSFORMACIONES:** Cambios de escala con el propósito de conseguir linealidad, normalidad en los datos

**VALOR ABSOLUTO:** Siendo  $x$  un número real cualquiera, se llama valor absoluto de  $x$  y se representa por  $|x|$  (se lee  $x$  barra) al número real que verifica las siguientes condiciones:  $|x|=x$ ; sí y solo sí  $x \geq 0$  ó  $x=0$ ;  $|x|=-x$ ; sí y solo sí  $x < 0$ . El valor absoluto de un número es la esencia del número, es decir, no importa si es un número positivo o negativo, al obtener el valor absoluto solo importa el valor del número.

**VARIABLE:** Objeto matemático que puede tomar diferentes valores. Generalmente asociado a propiedades o características de las unidades de la muestra. Lo contrario de variable es constante.