

2012

Capítulo 03. Convolución discreta



MI. Mario Alfredo Ibarra Carrillo
Facultad de Ingeniería; Telecomunicaciones
14/02/2012
Ver_11_01_06

Índice

- 3.1 Convolución en tiempo discreto
 - 3.1.1 Convolución en tiempo continuo
 - 3.1.2 Estimador discreto de la convolución para señales energía
 - 3.1.3 Convolución para señales energía de tiempo discreto
 - 3.1.4 Convolución discreta para secuencias finitas
 - 3.1.5 Ejemplo
 - 3.1.6 Convolución de secuencias de duración finita por el método de la cinta deslizante
 - 3.1.7 Ejemplo
 - 3.1.8 Convolución de secuencias de duración finita por el método matricial
 - 3.1.9 Ejemplo
 - 3.1.10 Convolución de secuencias de duración finita por el método de malla
 - 3.1.11 Ejemplo
 - Convolución de secuencias de duración finita por el método del producto
 - Ejemplo
- 3.2 Convolución discreta por software
- 3.3 Convolución circular
 - 3.3.1 Secuencia periodica
 - 3.3.2 Sobre el origen de la secuencia periódica
 - 3.3.3 Desplazamiento hacia adelante de la secuencia periódica
 - 3.3.4 Desplazamiento hacia atrás de la secuencia periódica
 - 3.3.5 Definición de convolución circular
 - 3.3.5 Propiedad de longitud de la convolución circular
 - 3.3.6 Ejemplo
 - 3.3.6 Método de los círculos concéntricos
 - 3.3.7 Ejemplo
 - 3.3.8 Convolución circular, método matricial
 - 3.3.9 Ejemplo
 - 3.3.10 Teorema de aproximación de la convolución lineal con la convolución circular
 - 3.3.11 Ejemplo

- 3.4 Convolución lineal 2D en tiempo discreto
 - 3.4.1 Convolución 2D para matrices infinitas
 - 3.4.2 Convolución 2D para matrices finitas
 - 3.4.3 Las dimensiones de la matriz de convolución
 - 3.3.4 Reflexión de una matriz
 - 3.3.5 Algoritmo visual para la convolución lineal 2D de secuencias finitas
 - 3.3.6 Ejemplo

- 3.5 Convolución circular 2D en tiempo discreto

- 3.6 Aplicaciones de la convolución lineal: filtrado lineal
 - Filtros suavizantes
 - Filtro 1D suavizante de bloque
 - Ejemplo de filtro 1D suavizante de bloque
 - Filtro 1D suavizante binomial

3.1 Convolución en tiempo discreto para señales energía

En los segmentos siguientes se describirá la suma de convolución como una versión muestreada de la integral de convolución. Posteriormente, debido a que las señales discretas no están definidas entre muestras, la suma de convolución pierde el término denominado periodo de muestreo.

3.1.1. Convolución de tiempo continuo

Definición 3.1 Convolución para señales energía valuada en $t=\tau$. Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos señales energía, su convolución evaluada para $t=\tau$ se plantea como:

- $f(t)$ se mantiene fija
 $f(t)$
- $g(t)$ se refleja y se retrasa en τ , es decir, t cambia por $-(t-\tau)$ y la función cambia como
 $g(t) \Rightarrow g(-(t-\tau))$
- Las funciones se multiplican (punto a punto como en todo producto de funciones).
 $f(t)g(-(t-\tau))$
- Se calcula el área del producto

$$f * g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(t)g(-(t-\tau))dt [v^2s] \quad (3.1)$$

Siguiendo la definición 3.1, si se desea conocer la convolución para todo instante de tiempo se tendría que crear un registro para τ tomando valores de un extremo a otro del infinito, es decir $\tau \in (-\infty, \infty)$. Una forma de generalizar y simplificar este proceso es mediante un cambio de variable tal como se define a continuación.

Definición 3.2. Convolución de señales energía para toda t . Si se desea evaluar la convolución para toda t se hace un intercambio de variables $t \leftrightarrow \tau$ en la ecuación 3.21 de tal forma que resulta:

$$f * g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f(\tau)g(t-\tau)d\tau [v^2s] \quad (3.2)$$

3.1.2 Estimador discreto de la convolución para señales energía

Teorema 3.1 El estimador discreto de la convolución de tiempo continuo queda expresado en una suma de convolución dada a continuación:

$$f * g(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} f(m)g(-(m-n))\tau_s; \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

A modo de demostración, se parte de la convolución dada en ecuación (3.2) para señales energía. Se muestrea la integral considerando las equivalencias siguientes.

$$\begin{aligned} t &= n \tau_s \\ \tau &= m \tau_s \\ dt &= \tau_s \\ d\tau &= \tau_s \\ T &= (N-1)\tau_s \end{aligned} \quad (3.4)$$

En donde:

- t es la variable de tiempo continuo
- T es la ventana de tiempo en el cual se muestrea la señal
- τ_s es el periodo de muestreo y también es la diferencial de tiempo dt y $d\tau$
- n es la n -ésima muestra
- N es el número de muestras

Sustituyendo el conjunto de ecuaciones (3.3) en la ecuación (3.2) de convolución para señales energía de tiempo continuo se logra:

$$f * g(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} f(m)g(-(m-n))\tau_s; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Nótese que la ecuación resultante es igual a la ecuación (3.3).

3.1.3 Convolución para señales energía de tiempo discreto

Definición 3.3 La convolución para señales energía en tiempo discreto queda descrita por la siguiente ecuación.

$$f * g(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} f(m)g(-(m-n))[\tau_s^2]; \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

A modo de demostración considérense que las señales discretas no están definidas entre muestras, a consecuencia, el periodo de muestreo se normaliza a la unidad y por tanto la ecuación (3.3) puede reescribirse como en la forma de la ecuación (3.5)

Nótese también que la suma de convolución está definida en función de un índice de instantes y no en función de una variable temporal, no obstante, se le seguirá llamando convolución para tiempo discreto.

3.1.4 Convolución discreta para secuencias finitas

Definición 3.4 Convolución de dos secuencias f y g . Dada la secuencia de duración finita f cuyo dominio está en el intervalo $n \in [f_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}}]$ y dada la secuencia g cuyo dominio está en el intervalo $n \in [g_{\text{Indx.min}}, g_{\text{Indx.max}}]$. La convolución queda representada como $f * g(n) = f(n) * g(n)$ y matemáticamente, la convolución se define como:

$$f * g(n) = \sum_{m=f_{\text{Indx.min}}}^{f_{\text{Indx.max}}} f(m)g(-(m-n)); \quad \forall n \in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \quad (3.6)$$

Definición 3.5 El dominio de la secuencia de convolución, es decir, el intervalo de valores de n queda definido como:

$$n \in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \quad (3.7)$$

Definición 3.6 La longitud de la secuencia de convolución. Dada la secuencia f de longitud N_f a convolucionar con la secuencia g de longitud N_g , la longitud de la secuencia de convolución se representa como N_{f*g} y se calcula como:

$$N_{f*g} = N_f + N_g - 1 \quad (3.8)$$

3.1.5 Ejemplo

Para ilustrar el proceso de forma genérica considérense las dos secuencias siguientes

$$\begin{aligned} f &= [f(-1), f(0), f(1), f(2)] \\ g &= [g(-1), g(0), g(1)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

en donde:

$$\begin{aligned} f_{\text{Indx.min}} &= -1 \\ f_{\text{Indx.max}} &= 2 \\ g_{\text{Indx.min}} &= -1 \\ g_{\text{Indx.max}} &= 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora se desarrolla en la tabla 3.1 la suma de convolución para las secuencias dadas en la ecuación (3.9).

Tabla 3.1 Convolución para las secuencias $f=[f(-1), f(0), f(1), f(2)]$ y $g=[g(-1), g(0), g(1)]$

$f * g(-2)$	=	$f(-1)g(-1)$	+	$f(0)g(-2)$	+	$f(1)g(-3)$	+	$f(2)g(-4)$
$f * g(-1)$	=	$f(-1)g(0)$	+	$f(0)g(-1)$	+	$f(1)g(-2)$	+	$f(2)g(-3)$
$f * g(0)$	=	$f(-1)g(1)$	+	$f(0)g(0)$	+	$f(1)g(-1)$	+	$f(2)g(-2)$
$f * g(1)$	=	$f(-1)g(2)$	+	$f(0)g(1)$	+	$f(1)g(0)$	+	$f(2)g(-1)$
$f * g(2)$	=	$f(-1)g(3)$	+	$f(0)g(2)$	+	$f(1)g(1)$	+	$f(2)g(0)$
$f * g(3)$	=	$f(-1)g(4)$	+	$f(0)g(3)$	+	$f(1)g(2)$	+	$f(2)g(1)$

Los productos en rojo corresponden con índices para los cuales el segundo operando de la convolución no tiene elementos definidos. Ahora bien, realizando los productos indicados se tiene que la convolución es:

$$f * g = [f * g(-2), f * g(-1), f * g(0), f * g(1), f * g(2), f * g(3)] \quad (3.11)$$

donde:

$$\begin{aligned} f * g(-2) &= f(-1)g(-1) \\ f * g(-1) &= f(-1)g(0) + f(0)g(-1) \\ f * g(0) &= f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(1)g(-1) \\ f * g(1) &= f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(-1) \\ f * g(2) &= f(1)g(1) + f(2)g(0) \\ f * g(3) &= f(2)g(1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

El cálculo del dominio de la secuencia de convolución es como sigue:

$$\begin{aligned} n \in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \\ [-1-1, 2+1] \\ [-2, 3] \end{aligned} \quad (3.13)$$

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como:

$$\begin{aligned} N_f &= 4 \\ N_g &= 3 \\ N_{f * g} &= N_f + N_g - 1 \\ &= 4 + 3 - 1 \\ &= 6 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.6 Convolución de secuencias de duración finita por el método de la cinta deslizante

El método de la cinta deslizante ilustra de manera gráfica el proceso de convolución entre dos secuencias, es decir, para convolucionar una secuencia f con una secuencia g :

- La secuencia f se mantiene sin alteraciones.
- La secuencia g se refleja y se desplaza de adelante hacia atrás.
- En cada desplazamiento, se realiza el producto punto. En el caso de secuencias finitas sólo se consideran aquellos productos punto que no son nulos.

Ahora bien, siguiendo los pasos dados, se consideran las dos secuencias siguientes: son las mismas ecuaciones (3.9).

$$f = [f(-1), f(0), f(1), f(2)]$$

$$g = [g(-1), g(0), g(1)]$$

Entonces por el método de la cinta deslizante se plantea una tabla como la mostrada en la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Método de la cinta deslizante. Note que la secuencia “f” se mantiene sin cambios, en tanto que la función “g” se refleja y se desplaza. Debe realizarse el producto punto entre “f” y cada desplazamiento de la función “g”.

	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
f(n)			f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)			
g(-(n+2))	g(1)	g(0)	f(-1)g(-1)						$\Sigma = f(-1)g(-1)$
f(n)			f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)			
g(-(n+1))		g(1)	f(-1)g(0)	f(0)g(-1)					$\Sigma = f(-1)g(0) + f(0)g(-1)$
f(n)			f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)			
g(-n)			f(-1)g(1)	f(0)g(0)	f(1)g(-1)				$\Sigma = f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(1)g(-1)$
f(n)			f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)			
g(-(n-1))				f(0)g(1)	f(1)g(0)	f(2)g(-1)			$\Sigma = f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(-1)$
f(n)			f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)			
g(-(n-2))					f(1)g(1)	f(2)g(0)	g(-1)		$\Sigma = f(1)g(1) + f(2)g(0)$
f(n)			f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)			
g(-(n-3))						f(2)g(1)	g(0)	g(-1)	$\Sigma = f(2)g(1)$

Ahora deben compararse los productos indicados en la tabla 3.2 con los productos indicados por la tabla 3.1 y nótese que son los mismos. Entonces, la secuencia de convolución resultante es la misma ecuación (3.11).

3.1.7 Ejemplo

Convolucione las siguientes secuencias $f=[2,5,0,4]$ y $g=[4,1,3]$

Tabla 3.3 Convolución de las secuencias $f=[2,5,0,4]$ y $g=[4,1,3]$

	-2	-1	0	1	2	3	4	5		
f(n)			2	5	0	4				
g(-(n+3))	3	1	4							
			8						'Σ=	8
f(n)			2	5	0	4				
g(-(n+2))		3	1	4						
			2	20					'Σ=	22
f(n)			2	5	0	4				
g(-(n+1))			3	1	4					
			6	5	0				'Σ=	11
f(n)			2	5	0	4				
g(-n)				3	1	4				
				15	0	16			'Σ=	31
f(n)			2	5	0	4				
g(-(n-1))					3	1	4			
					0	4			'Σ=	4
f(n)			2	5	0	4				
g(-(n-2))						3	1	4		
						12			'Σ=	12

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como

$$N_{f*g} = N_f + N_g - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

El dominio de la secuencia de convolución es:

$$\begin{aligned} n &\in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \\ n &\in [-1-1, 2+1] \\ n &\in [-2, 3] \end{aligned}$$

La secuencia de convolución es:

$$f * g = [8, 22, 11, 31, 4, 12] \quad (3.15)$$

3.1.8 Convolución de secuencias de duración finita por el método matricial

Considérense las dos secuencias siguientes: son la mismas ecuaciones (3.9)

$$f = [f(-1), f(0), f(1), f(2)]$$

$$g = [g(-1), g(0), g(1)]$$

El planteamiento de la convolución por fórmula quedó definido en la tabla 3.2. ahora bien, considerando los factores no nulos y factorizando los factores de la secuencia f se logra el siguiente planteamiento:

$$\begin{bmatrix} f * g(-2) \\ f * g(-1) \\ f * g(0) \\ f * g(1) \\ f * g(2) \\ f * g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(-1) & 0 & 0 & 0 \\ g(0) & g(-1) & 0 & 0 \\ g(1) & g(0) & g(-1) & 0 \\ 0 & g(1) & g(0) & g(-1) \\ 0 & 0 & g(1) & g(0) \\ 0 & 0 & 0 & g(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La ecuación anterior se puede expresar en forma compacta de la forma siguiente

$$[f * g] = G \times F \quad (3.17)$$

En donde

$$G = \begin{bmatrix} g(-1) & 0 & 0 & 0 \\ g(0) & g(-1) & 0 & 0 \\ g(1) & g(0) & g(-1) & 0 \\ 0 & g(1) & g(0) & g(-1) \\ 0 & 0 & g(1) & g(0) \\ 0 & 0 & 0 & g(1) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$F = \begin{bmatrix} f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$[f * g] = \begin{bmatrix} f * g(-2) \\ f * g(-1) \\ f * g(0) \\ f * g(1) \\ f * g(2) \\ f * g(3) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Nótese de la ecuación (3.20) que la secuencia de convolución es un vector columna.

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como

$$N_{f*g} = N_f + N_g - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

El dominio de la secuencia de convolución es:

$$\begin{aligned} n &\in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \\ n &\in [-1-1, 2+1] \\ n &\in [-2, 3] \end{aligned}$$

3.1.9 Ejemplo

Convolucione las siguientes secuencias $f = [\underset{\uparrow}{2}, 5, 0, 4]$ y $g = [\underset{\uparrow}{4}, 1, 3]$. Plantenado las matrices se logra.

$$f * g(n) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 11 \\ 31 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como

$$N_{f*g} = N_f + N_g - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

El dominio de la secuencia de convolución es:

$$\begin{aligned} n &\in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \\ n &\in [-1-1, 2+1] \\ n &\in [-2, 3] \end{aligned}$$

La secuencia de convolución es:

$$f * g(n) = [8, 22, \underset{\uparrow}{11}, 31, 4, 12]$$

3.1.10 Convolución de secuencias de duración finita por el método de malla

Considérense las dos secuencias siguientes: son la mismas ecuaciones (3.9)

$$\begin{aligned} f &= [f(-1), f(\underset{\uparrow}{0}), f(1), f(2)] \\ g &= [g(-1), g(\underset{\uparrow}{0}), g(1)] \end{aligned}$$

Primero se crea una maya tal como se ilustra en la tabla 3.4: en el renglón superior se coloca la secuencia f en tanto que en la columna más a la derecha se coloca la secuencia g .

Tabla 3.4. Método del producto. Planteamiento de la malla.

f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)	
				g(-1)
				g(0)
				g(1)

Luego la maya se llena con el producto cartesiano de las secuencias, tal como se indica en la tabla 3.5

Tabla 3.5. Método de malla. Llenado de la malla.

f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)	
f(-1)g(-1)	f(0)g(-1)	f(1)g(-1)	f(2)g(-1)	g(-1)
f(-1)g(0)	f(0)g(0)	f(1)g(0)	f(2)g(0)	g(0)
f(-1)g(1)	f(0)g(1)	f(1)g(1)	f(2)g(1)	g(1)

Finalmente, se realizan sumas en diagonal hacia abajo-izquierda. Los totales son los elementos de la secuencia de convolución tal como ilustra la tabla 3.6.

Tabla 3.6. Método del producto para las secuencias $[f(0), f(1), f(2), f(3)]$ y $[g(0), g(1), g(2)]$

	f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)	
	f(-1)g(-1)	f(0)g(-1)	f(1)g(-1)	f(2)g(-1)	g(-1)
f*g(-2)	f(-1)g(0)	f(0)g(0)	f(1)g(0)	f(2)g(0)	g(0)
f*g(-1)	f(-1)g(1)	f(0)g(1)	f(1)g(1)	f(2)g(1)	g(1)
f*g(0)	f*g(1)	f*g(2)	f*g(3)		

donde:

$$f * g(-2) = f(-1)g(-1)$$

$$f * g(-1) = f(-1)g(0) + f(0)g(-1)$$

$$f * g(0) = f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(1)g(-1)$$

$$f * g(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(-1)$$

$$f * g(2) = f(1)g(1) + f(2)g(0)$$

$$f * g(3) = f(2)g(1)$$

3.1.11 Ejemplo

Convolucione las siguientes secuencias

$$f = [2, 5, 0, 4]$$

$$g = [4, 1, 3]$$

El proceso por el método del producto queda definido como se indica en la tabla 3.7

Tabla 3.7. Método de malla para las secuencias $[f(0), f(1), f(2), f(3)]$ y $[g(0), g(1), g(2)]$

	2	5	0	4	
	8	20	0	16	4
8	2	5	0	4	1
22	6	15	0	12	3
11	31	4	12		

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como

$$N_f * g = N_f + N_g - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

El dominio de la secuencia de convolución es:

$$n \in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}]$$

$$n \in [-1 - 1, 2 + 1]$$

$$n \in [-2, 3]$$

La secuencia de convolución es:

$$f * g = [8, 22, 11, 31, 4, 12]$$

3.1.12 Convolución de secuencias de duración finita por el método del producto

Considérense las dos secuencias siguientes: son la mismas ecuaciones (3.9)

$$f = [f(-1), f(0), f(1), f(2)]$$

$$g = [g(-1), g(0), g(1)]$$

El planteamiento de la convolución por producto queda definido en la tabla 3.8

Tabla 3.8. Método del producto para las secuencias $[f(0), f(1), f(2), f(3)]$ y $[g(0), g(1), g(2)]$

$f(0)$ $g(0)$	$f(1)$ $g(1)$	$f(2)$ $g(2)$	$f(3)$
$f(0)g(0)$	$f(1)g(0)$	$f(2)g(0)$	$f(3)g(0)$
$+$	$f(0)g(1)$	$+$	$f(1)g(1)$
	$f(0)g(2)$	$+$	$f(1)g(2)$
$f^*g(0)$	$f^*g(1)$	$f^*g(2)$	$f^*g(3)$
			$+$
			$f(3)g(1)$
			$f(2)g(2)$
			$f(3)g(2)$
			$f^*g(4)$
			$f^*g(5)$

donde:

$$\begin{aligned}
 f * g(-2) &= f(-1)g(-1) \\
 f * g(-1) &= f(-1)g(0) + f(0)g(-1) \\
 f * g(0) &= f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(1)g(-1) \\
 f * g(1) &= f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(-1) \\
 f * g(2) &= f(1)g(1) + f(2)g(0) \\
 f * g(3) &= f(2)g(1)
 \end{aligned}$$

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como

$$N_{f * g} = N_f + N_g - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

El dominio de la secuencia de convolución es:

$$\begin{aligned}
 n &\in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}] \\
 n &\in [-1-1, 2+1] \\
 n &\in [-2, 3]
 \end{aligned}$$

3.1.13 Ejemplo

Convolucione las siguientes secuencias

$$f = [2, 5, 0, 4]$$

$$\quad \uparrow$$

$$g = [4, 1, 3]$$

$$\quad \uparrow$$

El proceso por el método del producto queda definido como se indica en la tabla 3.9:

Tabla 3.9 Convolución de las secuencias $f=[2,5,0,4]$ y $g=[4,1,3]$

	2	5	0	4		
*	4	1	3			
	8	20	0	16		
+		2	5	0	4	
			6	15	0	12
	8	22	11	31	4	12

La longitud de la secuencia de convolución queda definida como

$$N_f * g = N_f + N_g - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

El dominio de la secuencia de convolución es:

$$n \in [f_{\text{Indx.min}} + g_{\text{Indx.min}}, f_{\text{Indx.max}} + g_{\text{Indx.max}}]$$

$$n \in [-1 - 1, 2 + 1]$$

$$n \in [-2, 3]$$

La secuencia de convolución es:

$$f * g(n) = [8, 22, 11, 31, 4, 12]$$

$$\quad \quad \quad \uparrow$$

3.2 propiedades de la convolución lineal

Teorema 3.2 Asociatividad.

$$\begin{aligned} f(t)*g(t)*h(t) &= f(t)*(g(t)*h(t)) \\ &= (f(t)*g(t))*h(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Teorema 3.3 Distributividad.

$$f(t)*[g(t)+h(t)] = f(t)*g(t) + f(t)*h(t) \quad (3.23)$$

Teorema 3.4 Homogeneidad.

$$A f(t)*g(t) = A(f(t)*g(t)) \quad (3.34)$$

$$f(t)*B g(t) = B(f(t)*g(t)) \quad (3.25)$$

$$A f(t)*B g(t) = AB(f(t)*g(t)) \quad (3.26)$$

Teorema 3.5 Impulso. El impulso es el elemento identidad de la convolución

$$f(t)*\delta(t) = f(t) \quad (3.27)$$

Teorema 3.6 Invarianza temporal.

Dada la convolución $f(t)*g(t)=h(t)$ se tiene que:

$$f(t-\alpha)*h(t) = y(t-\alpha) \quad (3.28)$$

$$f(t)*h(t-\beta) = y(t-\beta) \quad (3.29)$$

$$f(t-\alpha)*h(t-\beta) = y(t-\alpha-\beta) \quad (3.30)$$

3.3 Convolución discreta por software

En MATLAB, la convolución tiene el formato:

```
conv(sequencia, filtro)
conv(sequencia, filtro, 'full|same')
```

donde

- *Secuencia* Es una secuencia discreta
- *filtro* Secuencia del filtro
- *'full'* Retorna la secuencia completa de convolución
- *'same'* Retorna la parte central de la convolución, la secuencia resultante tiene el mismo dominio de la secuencia original.

Nótese que a pesar de que convolución es conmutativa, los operandos deben respetar su identidad de secuencia a filtrar y filtro. De otra forma, MATLAB entregará resultados extraños.

Ejemplo

```
> f=[2,5,0,4]
> g=[4,1,3]
> conv(f,g)

> [8,22,11,31,4,12]
```

Ejemplo

```
> f=[2,5,0,4]
> g=[4,1,3]
> conv(f,g,'full')

> [8,22,11,31,4,12]
```

Ejemplo

```
> f=[2,5,0,4]
> g=[4,1,3]
> conv(a,b,'same')

> [11,31,4,12]
```

3.4 Convolución en tiempo discreto para señales potencia periódicas: convolución circular

Dada la secuencia periódica $f(n)$ de cardinalidad N a convolucionar con otra secuencia periódica $g(n)$ también de cardinalidad N , el proceso de convolución exige $N \times N$ productos e igual cantidad de sumas. Empleando una operación conocida como FFT (Transformada Rápida de Fourier) para calcular la convolución, se logra reducir este número a un múltiplo de $N \log_2 N$.

Dado que la FFT es una operación que se aplica a señales periódicas, es lógico pensar que los operandos de la convolución por FFT también son periódicos. A consecuencia, a la convolución lograda por FFT se le conoce como convolución circular o cíclica.

La convolución circular es un proceso parecido a la convolución que se ha revisado en secciones pasadas. Hay dos diferencias fundamentales a considerar:

- La convolución circular opera sobre secuencias periódicas.
- Ambas secuencias a convolucionar tienen la misma longitud.

3.3.1 Secuencia periódica

Sea la secuencia periódica f con cardinalidad $N=3$ tal como se ilustra a continuación (Note que en la ecuación hay un origen definido).

$$f = [\dots f(0), f(1), f(2), \underset{\uparrow}{f(0)}, f(1), f(2), f(0), f(1), f(2), \dots] \quad (3.31)$$

Esta secuencia también puede escribirse con índices no periódicos de la forma siguiente

$$f = [\dots f(-3), f(-2), f(-1), \underset{\uparrow}{f(0)}, f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots] \quad (3.32)$$

Ambas formas, la periódica y la no periódica son equivalentes y serán usadas en la convolución circular.

3.3.2 Sobre el origen de la secuencia periódica

En muchas bibliografías se acostumbra que el origen de la secuencia periódica sea siempre el primer elemento listado.

3.3.3 Desplazamiento hacia adelante de una secuencia periódica

Cuando una secuencia periódica se adelanta un paso, el elemento más a la izquierda sale por izquierda e ingresa por la derecha, es decir.

$$\begin{aligned} x(n) &= [x(0), x(1), x(2)] \\ x(n+1) &= [x(1), x(2), x(0)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

3.3.4 Desplazamiento hacia atrás de una secuencia periódica

Cuando una secuencia periódica se atrasa un paso, el elemento más a la derecha sale por derecha e ingresa por la izquierda, es decir.

$$\begin{aligned} x(n) &= [x(0), x(1), x(2)] \\ x(n-1) &= [x(2), x(0), x(1)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3.5 Definición de la convolución circular

Definición 3.7 Convolución circular de dos secuencias $f(n)$ y $g(n)$. Dada la secuencia de duración finita $f(n)$ de longitud N y dada la secuencia $g(n)$ también de longitud N . La convolución queda representada como $f * g(n) = f(n) * g(n)$ y matemáticamente, la convolución circular se define como:

$$f \circledast g(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)g(-(m-n)); \quad \forall n \in [0, N-1] \quad (3.35)$$

Para ejemplificar el comportamiento periódico de la fórmula, ésta se desarrolla para $N=3$, es decir, sean las secuencias periódicas siguientes

$$\begin{aligned} f &= [f(0), f(1), f(2)] \\ g &= [g(0), g(1), g(2)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Desarrollando la fórmula de la convolución circular

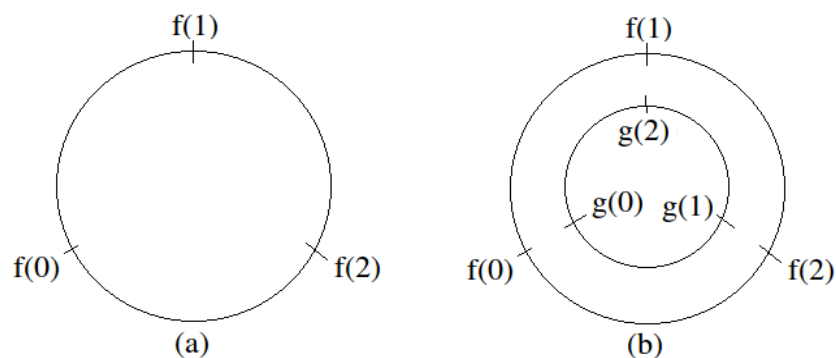


Illustration 3.1: (a) Representación del operando "f". (b) Acomodo de los dos operandos "f" y "g" para la convolución circular.

$$f * g(0) = f(0)g(0) + f(1)g(-1) + f(2)g(-2)$$

$$f * g(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(-1) \quad (3.37)$$

$$f * g(2) = f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0)$$

Puede notarse que algunos de los índices en las fórmulas de convolución son negativos. Se puede aprovechar la periodicidad de las series de tal forma que:

$$\begin{aligned} g(-1) &= g(2) \\ g(-2) &= g(1) \\ g(-3) &= g(0) \end{aligned} \quad (3.38)$$

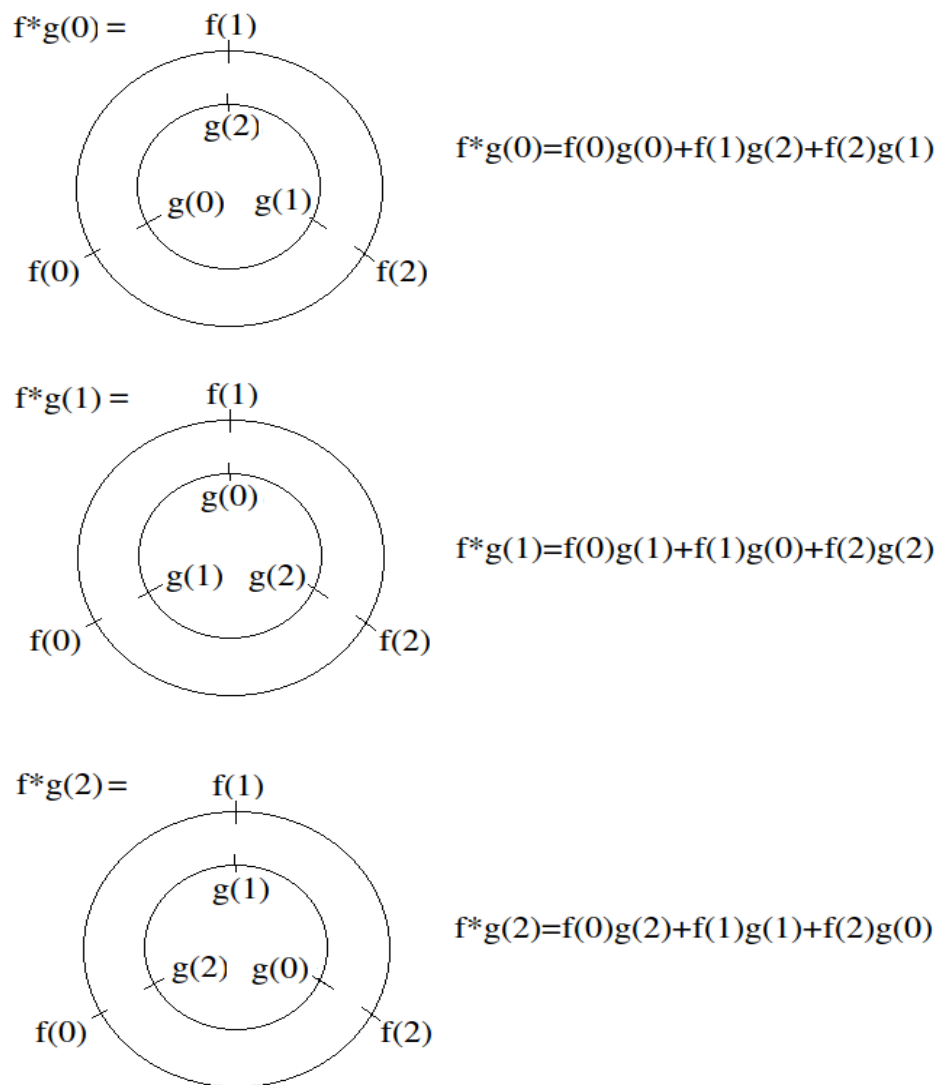


Illustration 3.2: Proceso de convolución circular para las secuencias $f=[f(0),f(1),f(2)]$ y $g=[g(0),g(1),g(2)]$

Entonces las ecuaciones de la convolución se escriben como:

$$f \circledast g(0) = f(0)g(0) + f(1)g(2) + f(2)g(1)$$

$$f \circledast g(1) = f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(2) \quad (3.39)$$

$$f \circledast g(2) = f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0)$$

3.3.6 Propiedad de longitud de la convolución circular

Definición 3.8 Longitud de la secuencia de convolución circular. Dadas dos secuencias f y g de cardinalidad N , la convolución circular de ambas funciones $f(n) \circledast g(n)$ es otra función $f \circledast g(n)$ de cardinalidad N y cuyo origen es el primer elemento que aparece en la secuencia.

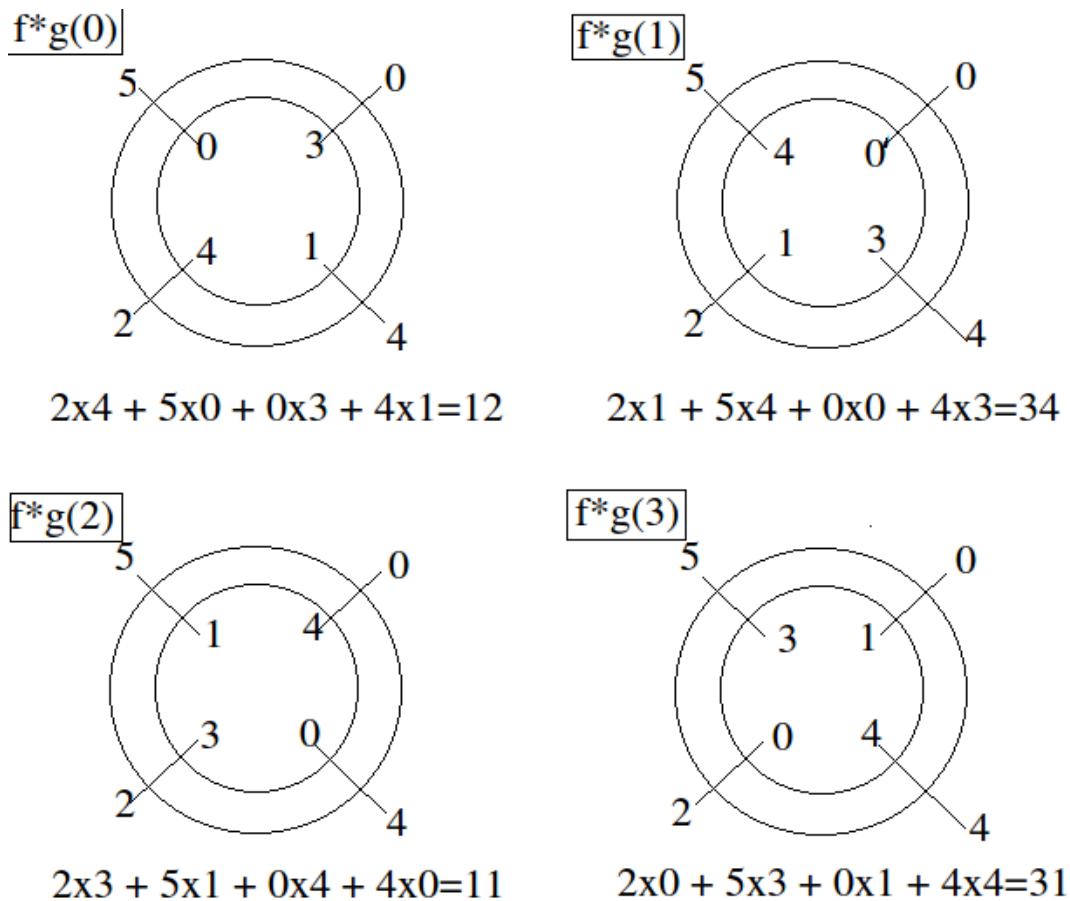


Illustration 3.3: aplicación del método de los círculos concéntricos.

3.3.7 Ejemplo

Convolucione las secuencias periódicas $f=[2,5,0,4]$ y $g=[4,1,3,0]$, su convolución circular es:

$$\begin{aligned} f * g(0) &= f(0)g(0) + f(1)g(3) + f(2)g(2) + f(3)g(1) = 2 \times 4 + 5 \times 0 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 12 \\ f * g(1) &= f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(3) + f(3)g(2) = 2 \times 1 + 5 \times 4 + 0 \times 0 + 4 \times 3 = 34 \\ f * g(2) &= f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0) + f(3)g(3) = 2 \times 3 + 5 \times 1 + 0 \times 4 + 4 \times 0 = 11 \\ f * g(3) &= f(0)g(3) + f(1)g(2) + f(2)g(1) + f(3)g(0) = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 0 \times 1 + 4 \times 4 = 31 \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.3.8 Método de los círculos concéntricos

Sea la secuencia $f=[f(0),f(1),f(2)]$ el primer operando de una convolución circular. Éste operando puede representarse con puntos equidistantes sobre un círculo. Los puntos se numeran en el sentido de las manecillas del reloj tal como ilustra la figura 3.1.a. Preste atención en donde se coloca el primer elemento de la secuencia.

Sea la secuencia $g=[g(0),g(1),g(2)]$ el segundo operando de una convolución circular. Este operando se representa con puntos equidistantes sobre un círculo inscrito en el círculo del operando f . Los puntos se numeran en sentido contrario al de las manecillas del reloj y haciendo coincidir el origen de la secuencia g con el origen de la secuencia f . La figura 3.1.b ilustra tal acomodo.

Ya dispuestos los círculos, se realiza el siguiente algoritmo:

- $l \leftarrow 0$
- Se realiza el producto punto de los vectores tal como indican los círculos concéntricos.
- El círculo interior se gira un paso en sentido del reloj de manecillas.
- Se repiten los pasos hasta que $l = N - 1$.

La figura 3.2 ilustra el proceso de convolución circular para las secuencias dadas.

3.3.9 Ejemplo:

Realice la convolución circular de la secuencias

$$\begin{aligned} f &= [2, 5, 0, 4] \\ g &= [4, 1, 3, 0] \end{aligned} \quad (3.41)$$

La figura 3.3 ilustra cómo se realiza la convolución circular de la secuencias. Finalmente, la secuencia de convolución es:

$$f * g = [12, 34, 11, 31] \quad (3.42)$$

3.3.10 Convolución circular, método matricial

Sean las secuencias periódicas de cardinalidad $N=3$ siguientes: son las mismas ecuaciones (3.27)

$$f=[f(0),f(1),f(2)]$$

$$g=[g(0),g(1),g(2)]$$

En una sección pasada se desarrolló la fórmula de la convolución circular para $n \in [0,1,2]$ resultando:

$$f \circledast g(0)=f(0)g(0) + f(1)g(2) + f(2)g(1)$$

$$f \circledast g(1)=f(0)g(1) + f(1)g(0) + f(2)g(2)$$

$$f \circledast g(2)=f(0)g(2) + f(1)g(1) + f(2)g(0)$$

Ahora las fórmulas se expresan en forma matricial de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} f \circledast g(0) \\ f \circledast g(1) \\ f \circledast g(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & g(2) & g(1) \\ g(1) & g(0) & g(2) \\ g(2) & g(1) & g(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Simplificando la fórmula se tiene que

$$[f \circledast g]=G F \quad (3.44)$$

En donde

$$G = \begin{bmatrix} g(0) & g(2) & g(1) \\ g(1) & g(0) & g(2) \\ g(2) & g(1) & g(0) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$F = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Obsérvense las columnas de la matriz G y nótese que los elementos de la secuencia $g(n)$ se acomodan por columnas que se rotan hacia abajo.

3.3.11 Ejemplo

Realice la convolución circular de la secuencias (3.41)

$$f = [2, 5, 0, 4]$$

$$g = [4, 1, 3, 0]$$

Planteando la matriz de convolución se tiene que:

$$\begin{bmatrix} f * g(0) \\ f * g(1) \\ f * g(2) \\ f * g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 11 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la secuencia de convolución es:

$$f * g = [12, 34, 11, 31]$$

3.3.12 Teorema de aproximación de la convolución lineal con la convolución circular

Teorema 3.2 Cálculo de la convolución lineal con la convolución circular. Dada la secuencia no periódica $f(n)$, de longitud N_f a convolucionar con la secuencia no periódica $g(n)$ de longitud N_g , la longitud de la secuencia de convolución se representa como N_{f*g} . Para calcular la convolución lineal a partir de la convolución circular se agregan ceros a las dos secuencias de tal forma que su cardinalidad sea $N_f + N_g - 1$.

3.3.13 Ejemplo

Calcule la convolución lineal de las siguientes dos secuencias empleando la convolución circular.

$$f = [2, 5, 0, 4]$$

$$g = [4, 1, 3]$$

Primero se calculan las cardinalidades

$$N_f = 4$$

$$N_g = 3$$

La cardinalidad de la secuencia convolucionada es

$$\begin{aligned} N_{f*g} &= N_f + N_g - 1 \\ &= 4 + 3 - 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Luego a las secuencias a convolucionar se les agregan ceros para completar cada una con 6 elementos:

$$\begin{aligned} f' &= [f, [2 \text{ ceros}]] = [2, 5, 0, 4, 0, 0] \\ g' &= [g, [3 \text{ ceros}]] = [4, 1, 3, 0, 0, 0] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Finalmente la convolución circular se calcula como:

$$f' \circledast g' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ 11 \\ 31 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Para conocer el el origen de la secuencia, se recurre a las estrategias empleadas para la convolución lineal.

3.6 Propiedades de la convolución circular

Teorema 3.2 Asociatividad.

$$\begin{aligned} f(t) \circledast g(t) \circledast h(t) &= f(t) \circledast (g(t) \circledast h(t)) \\ &= (f(t) \circledast g(t)) \circledast h(t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Teorema 3.3 Distributividad.

$$f(t) \circledast [g(t) + h(t)] = f(t) \circledast g(t) + f(t) \circledast h(t) \quad (3.45)$$

Teorema 3.4 Homogeneidad.

$$A f(t) \circledast g(t) = A (f(t) \circledast g(t)) \quad (3.46)$$

$$f(t) \circledast B g(t) = B (f(t) \circledast g(t)) \quad (3.47)$$

$$A f(t) \circledast B g(t) = A B (f(t) \circledast g(t)) \quad (3.48)$$

Teorema 3.5 Impulso. El impulso es el elemento identidad de la convolución

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (3.49)$$

Teorema 3.6 Invarianza temporal.

Dada la convolución $f(t) * g(t) = h(t)$ se tiene que:

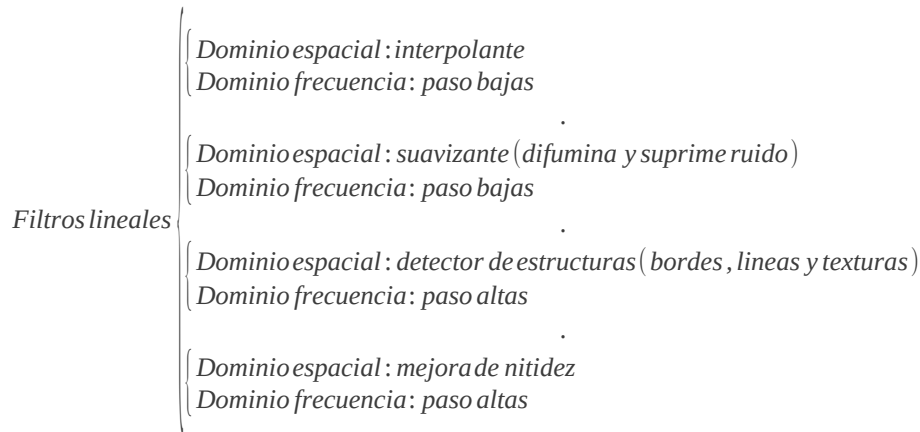
$$f(t-\alpha) * h(t) = y(t-\alpha) \quad (3.50)$$

$$f(t) * h(t-\beta) = y(t-\beta) \quad (3.51)$$

$$f(t-\alpha) * h(t-\beta) = y(t-\alpha-\beta) \quad (3.52)$$

3.7 Aplicaciones de la convolución lineal: filtrado lineal

Los filtros lineales son aquellos que pueden ser aplicados mediante la convolución. Dentro de los filtros lineales se tiene la clasificación dada en el cuadro sinóptico siguiente:



Definición 3.9 filtrado lineal de una secuencia mediante convolución lineal. El filtrado de la secuencia finita $f(n)$ con un filtro cuya respuesta a impulso es la secuencia $h_{\langle \text{tipo de filtro} \rangle; \langle \text{orden del filtro} \rangle}$ se define como $f * h_{\langle \text{tipo} \rangle; \langle \text{orden} \rangle}(n) = f(n) * h_{\langle \text{tipo} \rangle; \langle \text{orden} \rangle}(n)$. Aún cuando la convolución es conmutativa se sugiere que el orden de los operandos sea respetado.

Los filtros que se usarán en este capítulo se representan con mnemónicos, es decir;

- A: filtro de bloque
- B: filtro binomial
- H: filtro haar
- Br: filtro Bartlett

3.4.1 Filtros suavizantes

Los filtros suavizantes que serán tratados a continuación son:

- El filtro suavizante de bloque
- El filtro suavizante binomial

Los filtros suavizantes tienen las siguientes características:

- Estos filtros definen sus dimensiones de acuerdo al tamaño del grano ruidoso
- Estos filtros quitan ruido no correlacionado: un pixel de pronto tiene un valor muy diferente al de sus vecinos.

- Suprimen detalles finos que pudieran estorbar en algún procesamiento.
- Los contornos y detalles se difuminan.

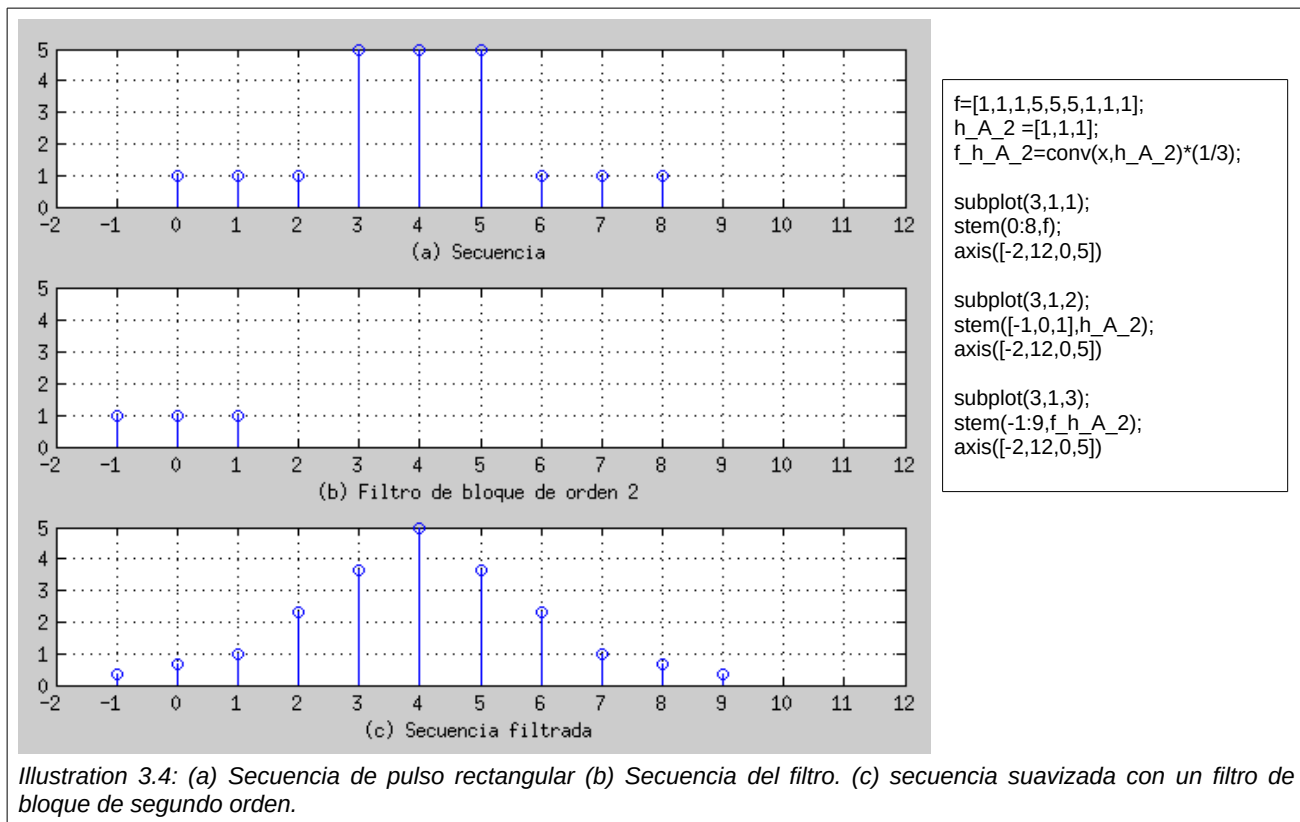
3.4.2 Filtro 1D suavizante de bloque

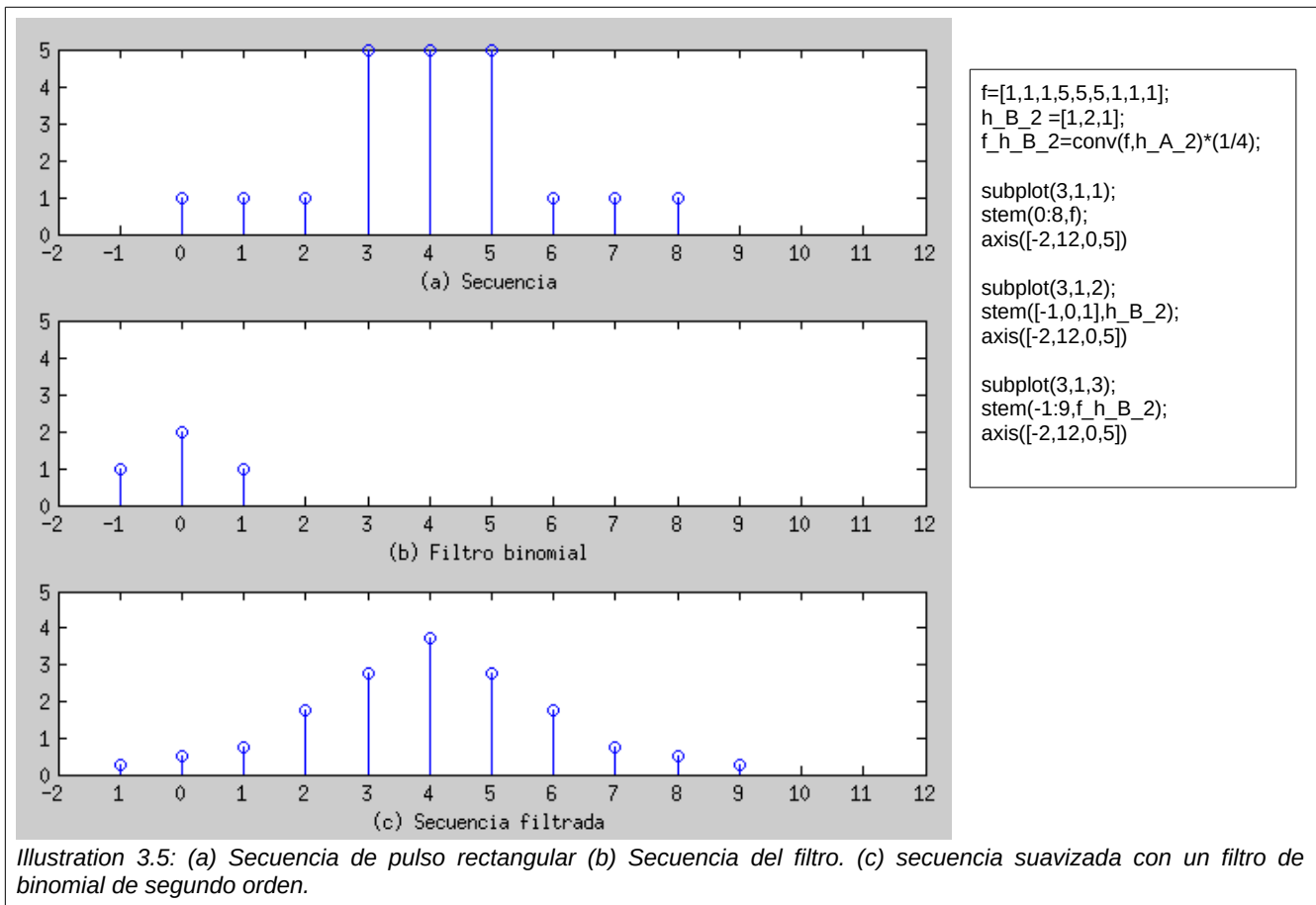
Definición 3.10 Filtro suavizante de bloque. Este filtro tiene un comportamiento temporal igual al de un pulso rectangular simétrico respecto del origen. Su ecuación característica para un orden par N es la siguiente:

$$h_{A;N}(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \delta\left(n + \frac{N}{2} - i\right); \quad \forall n \in [0, N] \quad (3.53)$$

Este tipo de filtro tiene las siguientes características:

- La transición abrupta de 0 a 1 del filtro provoca rizos armónicos en su respuesta en frecuencia, lo que en el dominio del tiempo podría implicar la aparición de estructuras (grupos de píxeles contiguos) que no eran parte de la imagen. Estos rizos armónicos se ven atenuados por el factor $1/(N+1)$.
- Este filtro actúa bien, en tanto el orden del mismo sea par. Un filtrado de orden impar implicaría distorsión de la imagen. Las distorsiones serán imperceptibles si el filtro es de un orden pequeño.





3.4.3 Ejemplo de filtro 1D suavizante de bloque

Dada la siguiente secuencia y que se ilustra en la figura 3.4.a

$$f = [1, 1, 1, 5, 5, 5, 1, 1, 1] \quad (3.54)$$

Aplique el siguiente filtro suavizante a bloque y de segundo orden, mismo que se ve en la figura 3.4.b.

$$h_{A,2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

La secuencia de convolución es entonces:

$$f * h_{A,2} = [0.3, 0.7, 1, 2.3, 3.6, 5, 3.6, 2.3, 1, 0.7, 0.3] \quad (3.56)$$

La figura 3.4.c ilustra la secuencia filtrada. Note que tal secuencia ya no tiene transiciones abruptas de 1 a 5. El código en MATLAB que realiza la convolución y genera las gráficas también se muestra en la figura 3.4.

3.6.4 Filtro 1D suavizante binomial

Definición 3.11 Filtro suavizante de bloque. Este filtro tiene un comportamiento temporal semejante a la de una campana gaussiana discreta y simétrica respecto del cero. La secuencia que conforma este filtro se puede calcular con el triángulo de Pascal. Su ecuación característica para un orden par N es la siguiente:

$$h_{B;N}(n) = \frac{1}{2^N} \sum_{i=0}^N {}_N C_i \delta\left(n + \frac{N}{2} - i\right) \quad \forall n \in [0, N] \quad (3.57)$$

donde:

$${}_N C_i = \frac{N!}{(N-i)!i!}; \quad \text{coeficientes de la piramide de Pascal} \quad (3.58)$$

Este tipo de filtro tiene las siguientes características:

- Este filtro tiene una transición suave que reduce al mínimo los rizos armónicos en la respuesta en frecuencia. Estos rizos armónicos se ven atenuados por el factor 2^{-N} .
- Este filtro actúa bien, en tanto el orden del mismo sea par. Un filtrado de orden impar implicaría distorsión de la imagen. Las distorsiones serán imperceptibles si el filtro es de un orden pequeño.

3.6.3 Ejemplo de filtro 1D suavizante binomial

Dada la siguiente secuencia, que es la misma ecuación (3.41) y que se ilustra en la figura 3.5.a

$$f = [1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1]$$

↑

Aplique un filtro suavizante binomial de segundo orden, mismo que se ilustra en la figura 3.5.b

$$h_{B;2} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \uparrow \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La secuencia de convolución es entonces:

$$f * h_{B;2} = [0.25, 0.5, 0.75, 1.75, 2.75, 3.75, 2.75, 1.75, 0.75, 0.5, 0.25] \quad (3.60)$$

↑

La figura 3.5.c ilustra la secuencia filtrada. Note que tal secuencia ya no tiene transiciones abruptas de 1 a 5. El código en MATLAB que realiza la convolución y genera las gráficas también se muestra en la figura 3.5.

3.6.4 Sobremuestreo de una secuencia

El proceso de sobremuestreo consiste de intercalar ceros en una secuencia, el número de ceros viene dado por el factor del proceso de sobremuestreo

Definición 3.12. El proceso de sobremuestreo Sea $f(n)$ una secuencia finita y un factor de sobremuestreo S perteneciente al conjunto de los enteros. El sobremuestreo de $f(n)$ es otra función denotada como $f(n) \uparrow S$ y consiste de intercalar $S-1$ ceros entre los elementos de la secuencia.

Definición 3.13 El factor de sobremuestreo es un entero que indica cuanto crece la longitud de la secuencia, es decir:

$$N_{f \uparrow S} = S \times N_f \quad (3.61)$$

Para ilustrar considérese la secuencia siguiente:

$$f = [A, B, C, D] \quad (3.62)$$

entonces se le aplica un factor de sobremuestreo de $S=2$

$$f(n) \uparrow 2 = [A, 0, B, 0, C, 0, D, 0] \quad (3.63)$$

así, puede notarse que la cardinalidad de la secuencia sobremuestreada es:

$$N_{f \uparrow 2} = 2 \times N_f = 2 \times 4 = 8 \quad (3.64)$$

Si ahora la secuencia original se sobremuestra en $S=3$

$$f(n) \uparrow 3 = [A, 0, 0, B, 0, 0, C, 0, 0, D, 0, 0] \quad (3.65)$$

consecuentemente, puede notarse que la cardinalidad de la secuencia sobremuestreada es:

$$N_{f \uparrow 3} = 3 \times N_f = 3 \times 4 = 12 \quad (3.66)$$

3.6.6 Sobremuestreo en matlab

El proceso de sobremuestreo en MATLAB se realiza con la función “upsample”, por ejemplo, dada la siguiente secuencia

$$f = [1, 3, 5, 7] \quad (3.67)$$

El sobremuestreo de la misma por un factor de $S=2$ se realiza como:

$$\begin{aligned} & \text{upsample}(f, 2) \\ & \rightarrow [1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0] \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.6.5 Interpolación

Definición 3.14. La interpolación consiste en el cálculo de nuevas muestras intercaladas entre las muestras de una señal. La interpolación se identifica con dos parámetros que son el factor de interpolación y el grado de interpolación.

- Factor de interpolación: cuantas muestras se interpolan
- Grado de interpolación: es el grado del polinomio que se usa para interpolar.

En realidad no se usa un polinomio para interpolar sino mas bien, un filtro, el grado indica el tipo de filtro y el factor de interpolación indicará el orden del filtro.

Definición 3.15 El grado de la interpolación se refiere al grado de un polinomio que se usa para interpolar, es decir:

- grado 0, el polinomio es una constante: ventana Haar
- grado 1, el polinomio es una recta: ventana Bartlett
- grado 2, el polinomio es del tipo cuadrático

Definición 3.16. Interpolación lineal por convolución Sea $f(n)$ una secuencia finita, un factor de interpolación S y un orden de interpolación N . El proceso de interpolación lineal consiste de la aplicación de dos operadores: el sobremuestreo por un factor S y la convolución con el filtro interpolante $h_{\text{grado, orden}}$, es decir:

$$f \uparrow S * h_{\text{grado, orden}} \quad (3.69)$$

“La interpolación no es conmutativa”

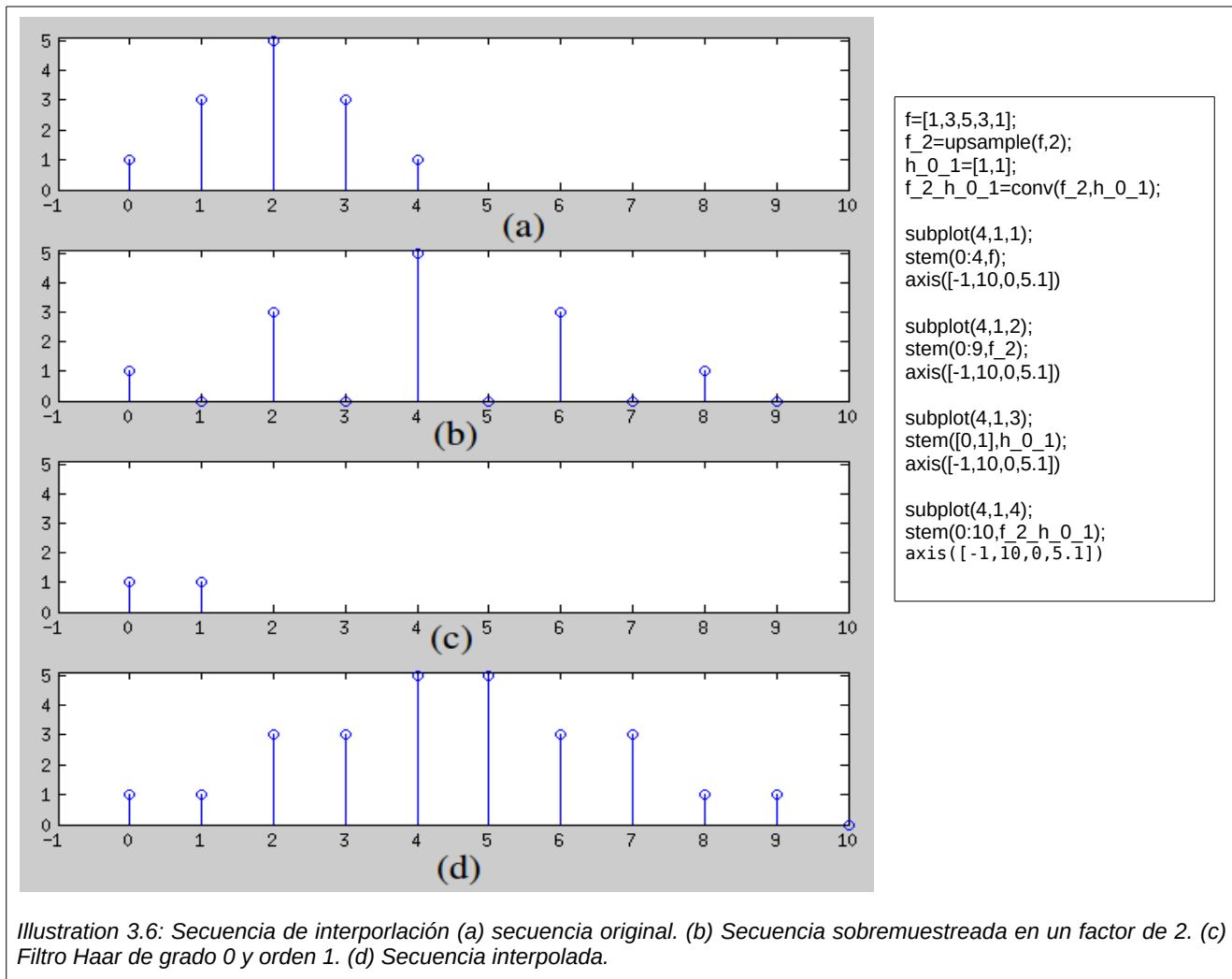
3.6.6 Interpolación con ventana Haar

Definición 3.17. La interpolación grado cero con ventana Haar consiste en que las muestras interpoladas son una repetición de las muestras vecinas. Matemáticamente, este filtro se define como:

$$f \uparrow S * h_{0; S-1} \quad (3.70)$$

Definición 3.18 La ventana Haar tiene un comportamiento temporal igual al de un pulso rectangular causal. Su ecuación característica para un orden N es la siguiente:

$$h_{0; S-1}(n) = \sum_{i=0}^{S-1} \delta(n-i); \quad N: \text{orden del filtro} \quad (3.71)$$



3.6.7 Ejemplo de interpolación Haar

Dada la siguiente secuencia y que se ilustra en la figura 3.6.a, realice un proceso de interpolación de grado 0 y de orden 1.

$$f = \underset{\uparrow}{[1, 3, 5, 3, 1]} \quad (3.72)$$

Aplicando el proceso de sobremuestreo en un factor $S=2$ resulta en la secuencia siguiente, misma que se ilustra en la figura 3.6.b

$$f \uparrow 2 = \underset{\uparrow}{[1, 0, 3, 0, 5, 0, 3, 0, 1, 0]} \quad (3.73)$$

El filtro Haar, el cual se ilustra en la figura 3.6.c de grado cero y orden 1 se representa en la secuencia siguiente

$$h_{0;1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \uparrow \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

La secuencia de convolución es entonces:

$$f \uparrow 2 * h_{0;1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ \uparrow \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

La figura 3.6.d ilustra la secuencia filtrada. Note que cada muestra interpolada es la repetición de la muestra original a su izquierda. El código en MATLAB que realiza la convolución y genera las gráficas también se muestra en la figura 3.6.

3.6.8 Interpolación con ventana Bartlett

Definición 3.19. La interpolación grado uno con ventana Bartlett consiste en que las muestras interpoladas se calcularon empleando la ecuación de la línea recta. Matemáticamente, este filtro se define como:

$$f \uparrow S * h_{1;2(S-1)} \quad (3.76)$$

Definición 3.20 La ventana Bartlett tiene un comportamiento temporal igual al de una campana gaussiana discreta y simétrica respecto del cero. La secuencia que conforma este filtro se puede calcular con el triángulo de Pascal. Su ecuación característica para un orden par S es la siguiente:

$$h_{1;N}(n) = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} \frac{N+1}{N} \delta\left(n + \frac{N}{2} - i\right) + \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N \frac{N-n+1}{N} \delta\left(n + \frac{N}{2} - i\right) \quad \forall n \in [0, N] \quad (3.77)$$

Debe considerarse que todas las ventanas Bartlett que se usan como filtros interpolantes tienen un orden par. A modo de ejemplo, algunas ventanas Bartlett son:

- Ventana de grado 1 y orden 2

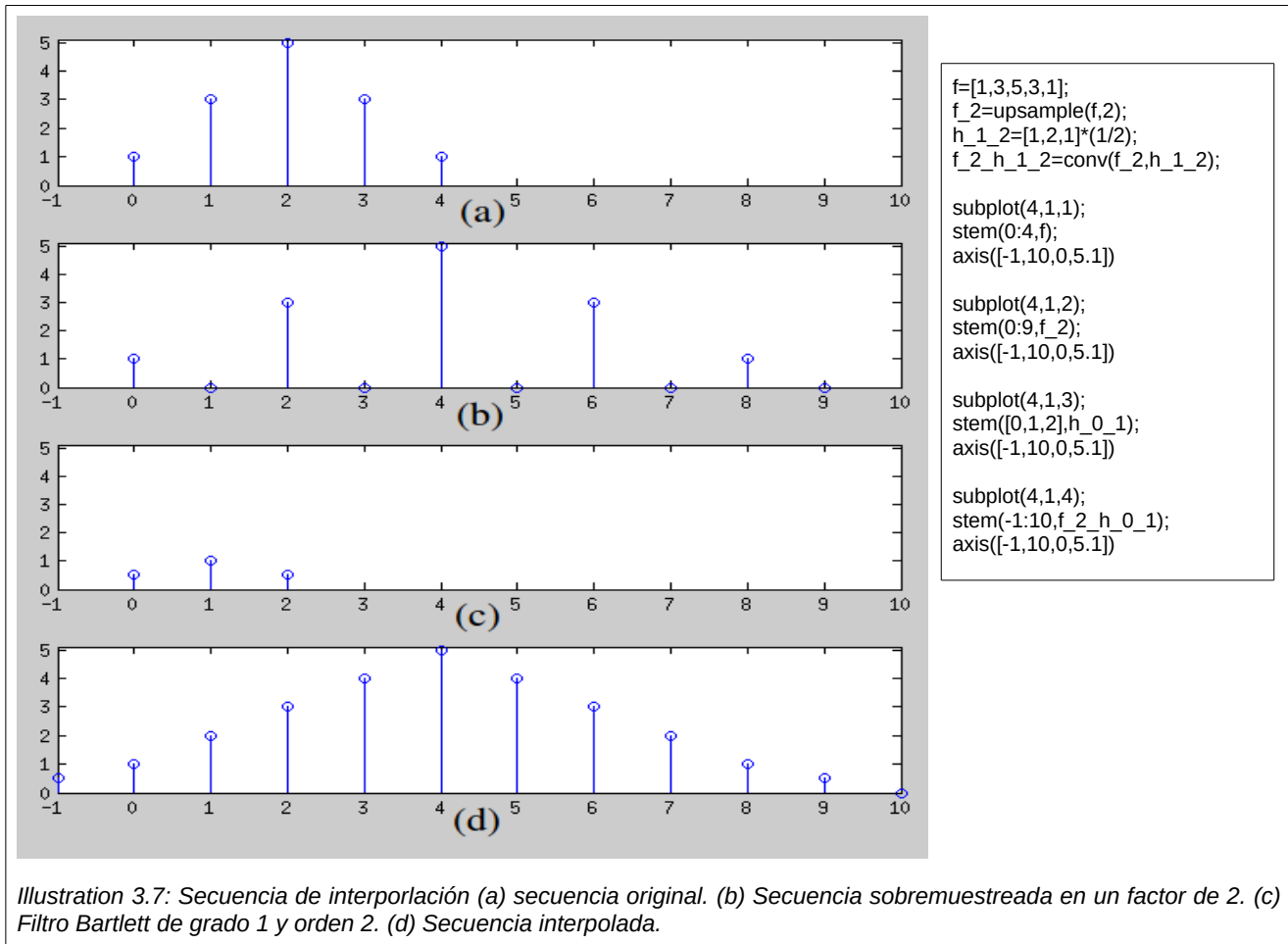
$$h_{1;2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \uparrow \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

- Ventana de grado 1 y orden 4

$$h_{1;4} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \uparrow \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

- Ventana de grado 1 y orden 6

$$h_{1;6} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \uparrow \end{bmatrix} \quad (3.80)$$



3.6.9 Ejemplo de interpolación Bartlett

Dada la secuencia de la ecuación (3.69), que se repite a continuación y que se ilustra en la figura 3.7.a, realice un proceso de interpolación de grado 1 y de orden 2.

$$f = \underset{\uparrow}{[1, 3, 5, 3, 1]}$$

Aplicando el proceso de sobremuestreo en un factor $S=2$ resulta en la secuencia de la ecuación (3.70). Esta secuencia se repite a continuación y se ilustra en la figura 3.7.b

$$f \uparrow 2 = \underset{\uparrow}{[1, 0, 3, 0, 5, 0, 3, 0, 1, 0]}$$

El filtro Bartlett de la ecuación (3.75) el cual se repite a continuación y se ilustra en la figura 3.7.c de grado uno y orden 2 se representa en la secuencia siguiente

$$h_{1,2} = \frac{1}{2} \underset{\uparrow}{[1, 2, 1]}$$

La secuencia de convolución es entonces:

$$f \uparrow 2 * h_{1,2} = [0.5, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0.5, 0] \quad (3.81)$$

La figura 3.7.d ilustra la secuencia filtrada. Note que las muestras interpoladas son los valores medios entre las muestras originales. El código en MATLAB que realiza la convolución y genera las gráficas también se muestra en la figura 3.7.

3.4 Convolución lineal 2D en tiempo discreto

La convolución 2D se suele aplicar en imágenes

- Obtenidas con sensores ópticos en el rango visible
- Obtenidas con sensores ópticos en rangos no viisibles como el infrarrojo, el ultravioleta, rayos gama, rayos X., etc.
- Obtenidas por radar.

El proceso de convolución 2D en el dominio del tiempo discreto es ya demasiado complejo como para ilustrar en un texto el desarrollo de las fórmulas. A consecuencia, suelen usarse algoritmos especiales como el método deslizante y el método de la convolución circular.

3.4.1 Convolución 2D para matrices infinitas

Dadas las matrices $f(m, n)$ y $g(m, n)$ no periódicas e infinitas, mismas que se ilustran a continuación

$$f(m, n) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & f(0, -1) & f(0, 0) & f(0, 1) & f(0, 2) & \dots \\ \dots & f(1, -1) & f(1, 0) & f(1, 1) & f(1, 2) & \dots \\ \dots & f(2, -1) & f(2, 0) & f(2, 1) & f(2, 2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$g(m, n) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & g(0, -1) & g(0, 0) & g(0, 1) & g(0, 2) & \dots \\ \dots & g(1, -1) & g(1, 0) & g(1, 1) & g(1, 2) & \dots \\ \dots & g(2, -1) & g(2, 0) & g(2, 1) & g(2, 2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

La convolución entre ambas secuencias es:

$$f * g(m, n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{c=-\infty}^{\infty} f(r, c) g(m-r, n-c) \quad (3.84)$$

3.4.2 Convolución 2D para matrices finitas

Se considera en este caso que las matrices de datos a convolucionar tienen su origen en el elemento superior izquierdo, es decir, el elemento $(0,0)$.

Dadas las matrices $f(m,n)$ y $g(m,n)$ no periódicas y finitas, mismas que se ilustran a continuación:

$$f(m,n) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & f(0,2) & \dots & f(0,N_f) \\ f(1,0) & f(1,1) & f(1,2) & \dots & f(1,N_f) \\ f(2,0) & f(2,1) & f(2,2) & \dots & f(2,N_f) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M_f,0) & f(M_f,1) & f(M_f,2) & \dots & f(M_f,N_f) \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$g(m,n) = \begin{bmatrix} g(0,0) & g(0,1) & g(0,2) & \dots & g(0,N_g) \\ g(1,0) & g(1,1) & g(1,2) & \dots & g(1,N_g) \\ g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) & \dots & g(2,N_g) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(M_g,0) & g(M_g,1) & g(M_g,2) & \dots & g(M_g,N_g) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

y cuyas dimensiones son

$$\begin{aligned} \text{size}(f) &= (M_f, N_f) \\ \text{size}(g) &= (M_g, N_g) \end{aligned} \quad (3.87)$$

La convolución lineal 2D se puede describir como sigue:

$$f * g(m,n) = \sum_{r=0}^{M_f-1} \sum_{c=0}^{N_f-1} f(r,c) g(m-r, n-c); \quad m \in [0, M_f + M_g - 2] \wedge n \in [0, N_f + N_g - 2] \quad (3.88)$$

3.4.3 Las dimensiones de la matriz de convolución

Dadas las matrices $f(m,n)$ y $g(m,n)$ no periódicas y finitas cuyas dimensiones son:

$$\begin{aligned} \text{size}(f) &= (M_f, N_f) \\ \text{size}(g) &= (M_g, N_g) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Las dimensiones de la matriz de convolución son:

$$\text{size}(f * g) = (M_f + M_g - 1, N_f + N_g - 1) \quad (3.90)$$

3.4.4 Reflexión de una matriz

Para reflejar una matriz se realizan dos pasos. El orden de los pasos no importa

- Se reflejan las columnas de la matriz
- Se reflejan los renglones de la matriz

A modo de ejemplo, considera la siguiente matriz

$$g(m,n) = \begin{bmatrix} g(0,0) & g(0,1) & g(0,2) \\ g(1,0) & g(1,1) & g(1,2) \\ g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Primero se reflejan las columnas

$$\begin{bmatrix} g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) \\ g(1,0) & g(1,1) & g(1,2) \\ g(0,0) & g(0,1) & g(0,2) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Segundo se reflejan los renglones

$$g^R(m,n) = \begin{bmatrix} g(2,2) & g(2,1) & g(2,0) \\ g(1,2) & g(1,1) & g(1,0) \\ g(0,2) & g(0,1) & g(0,0) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

3.4.5 Algoritmo visual para la convolución lineal 2D de secuencias finitas

El algoritmo es simple,

- La matriz $f(m,n)$ se mantiene sin cambios
- La matriz $g(m,n)$ se refleja y se desplaza en pasos de adelante hacia atrás tanto en renglones como en columnas.
- Las matrices se multiplican punto a punto (se omiten aquellos productos donde las matrices no están definidas).
- Este algoritmo se repite para cada paso que se desplaza la matriz $g(m,n)$.

Este algoritmo queda ilustrado en la tabla 3.10

Tabla 3.10. Proceso de convolución entre dos matrices. $f(m,n)$ se mantiene en tanto que $g(m,n)$ se refleja y desplaza en pasos. A cada paso, se multiplican punto a punto las matrices.

$g(2,2)$	$g(2,1)$	$g(2,0)$		$g(2,2)$	$g(2,1)$	$g(2,0)$		$g(2,2)$	$g(2,1)$	$g(2,0)$																										
$g(1,2)$	$g(1,1)$	$g(1,0)$		$g(1,2)$	$g(1,1)$	$g(1,0)$		$g(1,2)$	$g(1,1)$	$g(1,0)$																										
$g(0,2)$	$g(0,1)$	<table><tr><td>$g(0,0) \times \mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$g(0,0) \times \mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$		$g(0,2)$	<table><tr><td>$g(0,1) \times \mathbf{f(0,0)}$</td><td>$g(0,0) \times \mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$g(0,1) \times \mathbf{f(0,0)}$	$g(0,0) \times \mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$...	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$g(0,2) \times \mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$g(0,2) \times \mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$	$g(0,1)$	$g(0,0)$
$g(0,0) \times \mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$g(0,1) \times \mathbf{f(0,0)}$	$g(0,0) \times \mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$g(0,2) \times \mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
...																															
$g(2,2)$	$g(2,1)$	$g(2,0)$		$g(2,2)$	$g(2,1)$	$g(2,0)$		$g(2,2)$	$g(2,1)$	$g(2,0)$																										
$g(1,2)$	$g(1,1)$	<table><tr><td>$g(1,0) \times \mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$g(0,0) \times \mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$g(1,0) \times \mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$g(0,0) \times \mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$		$g(1,2)$	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$...	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$g(1,2) \times \mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$g(0,2) \times \mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$g(1,2) \times \mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$g(0,2) \times \mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$	$g(1,1)$	$g(1,0)$
$g(1,0) \times \mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$g(0,0) \times \mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$g(1,2) \times \mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$g(0,2) \times \mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$g(0,2)$	$g(0,1)$	<table><tr><td>$g(0,0) \times \mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$g(0,0) \times \mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$		$g(0,2)$	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$...	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$	$g(0,1)$	$g(0,0)$			
$g(0,0) \times \mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
...																															
$g(2,2)$	$g(2,1)$	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$g(2,0) \times \mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$g(2,0) \times \mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$		$g(2,2)$	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$g(2,2) \times \mathbf{f(2,0)}$</td><td>$g(2,2) \times \mathbf{f(2,1)}$</td><td>$\mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$g(2,2) \times \mathbf{f(2,0)}$	$g(2,2) \times \mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$...	<table><tr><td>$\mathbf{f(0,0)}$</td><td>$\mathbf{f(0,1)}$</td><td>$\mathbf{f(0,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(1,0)}$</td><td>$\mathbf{f(1,1)}$</td><td>$\mathbf{f(1,2)}$</td></tr><tr><td>$\mathbf{f(2,0)}$</td><td>$\mathbf{f(2,1)}$</td><td>$g(2,2) \times \mathbf{f(2,3)}$</td></tr></table>	$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$	$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$	$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$g(2,2) \times \mathbf{f(2,3)}$	$g(2,1)$	$g(2,0)$
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$g(2,0) \times \mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$g(2,2) \times \mathbf{f(2,0)}$	$g(2,2) \times \mathbf{f(2,1)}$	$\mathbf{f(2,3)}$																																		
$\mathbf{f(0,0)}$	$\mathbf{f(0,1)}$	$\mathbf{f(0,2)}$																																		
$\mathbf{f(1,0)}$	$\mathbf{f(1,1)}$	$\mathbf{f(1,2)}$																																		
$\mathbf{f(2,0)}$	$\mathbf{f(2,1)}$	$g(2,2) \times \mathbf{f(2,3)}$																																		
$g(1,2)$	$g(1,1)$	$g(1,0)$		$g(1,2)$	$g(1,1)$	$g(1,0)$		$g(1,2)$	$g(1,1)$	$g(1,0)$																										
$g(0,2)$	$g(0,1)$	$g(0,0)$		$g(0,2)$	$g(0,1)$	$g(0,0)$		$g(0,2)$	$g(0,1)$	$g(0,0)$																										

3.4.6 Ejemplo

Sean las dos matrices siguientes, las cuales deben convolucionarse

$$f(m,n)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g(m,n)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las matrices son

$$\text{size}(f)=(M_f, N_f)=(3,3)$$

$$\text{size}(g)=(M_g, N_g)=(3,3)$$

Eso quiere decir que la matriz de convolución tiene dimensiones de

$$\text{size}(f*g)=(M_f+M_g-1, N_f+N_g-1)=(5,5)$$

La tabla 3.11 ilustra el proceso completo de convolución. Así entonces, resulta la siguiente matriz

$$f*g(m,m)=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 12 & 9 & 3 \\ 4 & 12 & 16 & 12 & 4 \\ 3 & 9 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla 3.11 Convolución 2D por el método deslizante.

1	2	1			1	2	1			1	2	1			1	2	1		
2	4	2			2	4	2			2	4	2			2	4	2		
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1x1	2x1	1	
		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1	1	1		
		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1	1	1		
		$\Sigma=$	1			$\Sigma=$	3			$\Sigma=$	4				$\Sigma=$	3			
1	2	1			1	2	1			1	2	1			1	2	1		
2	4	2x1	1	1	2	4x1	2x1	1		2x1	4x1	2x1			1	1	2x1	4	2
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1	1x1	2	1
		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1	1	1		
		$\Sigma=$	3			$\Sigma=$	9			$\Sigma=$	12				$\Sigma=$	9			
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1x1	2x1	2	1
2	4	2x1	1	1	2	4x1	2x1	1		2x1	4x1	2x1			1	2x1	4x1	4	2
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1x1	2x1	2	1
		$\Sigma=$	4			$\Sigma=$	12			$\Sigma=$	16				$\Sigma=$	12			
		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1	1	1		
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1x1	2x1	1x1	
2	4	2x1	1	1	2	4x1	2x1	1		2x1	4x1	2x1			1	2x1	4x1	2x1	
1	2	1			1	2x1	1x1			1x1	2x1	1x1			1x1	2x1	1x1		
		$\Sigma=$	3			$\Sigma=$	9			$\Sigma=$	12				$\Sigma=$	9			
		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1	1	1		
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1x1	2x1	2	1
2	4	2x1	1	1	2	4x1	2x1	1		2x1	4x1	2x1			1	2x1	4x1	4	2
1	2	1			1	2x1	1x1			1x1	2x1	1x1			1x1	2x1	1x1	1	
		$\Sigma=$	1			$\Sigma=$	3			$\Sigma=$	4x1				$\Sigma=$	3			
		1	1	1		1	1	1		1	1	1			1	1	1		
1	2	1x1	1	1	1	2x1	1x1	1		1x1	2x1	1x1			1	1x1	2x1	1	
2	4	2x1	1	1	2	4x1	2x1	1		2x1	4x1	2x1			2	4x1	2x1	2	
1	2	1			1	2x1	1x1			1x1	2x1	1x1			1	2x1	1x1		
		$\Sigma=$	1			$\Sigma=$	3			$\Sigma=$	3				$\Sigma=$	1			

3.5 Convolución circular 2D en tiempo discreto

3.5.1 Método matricial para la convolución circular 2D.

Se considera que las siguientes matrices deben convolucionarse circularmente

$$f(m,n)=\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & f(0,2) \\ f(1,0) & f(1,1) & f(1,2) \\ f(2,0) & f(2,1) & f(2,2) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad g(m,n)=\begin{bmatrix} g(0,0) & g(0,1) & g(0,2) \\ g(1,0) & g(1,1) & g(1,2) \\ g(2,0) & g(2,1) & g(2,2) \end{bmatrix}$$

El proceso de convolución 2D circular $f(m,n)*g(m,n)$, por el método matricial se ilustra en la tabla 3.12

Tabla 3.12 Proceso de convolución circular 2D.

